

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی عمران

گروه عمران - سازه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان:

بر آورد خطا در تحلیل غیر خطی سازه ها به روش ایزوژئومتری

اساتید راهنما:

دکتر بهروز حسنی

دکتر رضا نادری

استاد مشاور:

مهندس احمد گنجعلی

دانشجو:

پژمان آذرسا

آذرماه ۹۱

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای پژمان آذرسا

تحت عنوان: برآورد خطا در تحلیل غیرخطی سازه ها به روش ایزوژئومتری

در تاریخ ۹۱/۹/۱۴ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه

بسیار خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی : احمد گنجعلی		نام و نام خانوادگی : دکتر بهروز حسنی
			نام و نام خانوادگی : دکتر رضا نادری

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر سعید گلپان		نام و نام خانوادگی : دکتر وحیدرضا کلات جاری
			نام و نام خانوادگی : دکتر علی کیهانی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای پژمان آذرسا رشته عمران گرایش سازه تحت عنوان: برآورد خطا در تحلیل غیر خطی سازه ها به روش ایزوژئومتریک که در تاریخ ۹۱/۹/۱۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۹۹)
--------------------------------	------------------------------------	--

۳- خوب (۱۶-۱۷/۹۹)

۲- بسیار خوب (۱۸-۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹-۲۰)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

۴- قابل قبول (۱۴-۱۵/۹۹)

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما اول	دکتر بهروز حسنی	دانشیار	
۲- استاد راهنما دوم	دکتر رضا نادری	استاد یار	
۳- استاد مشاور	مهندس احمد گنجعلی	-	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر سعید گلپیان	استاد یار	
۵- استاد ممتحن	دکتر وحیدرضا کلاتجاری	استاد یار	
۶- استاد ممتحن	دکتر علی کیهانی	استاد یار	

رئیس دانشکده : دکتر احمد اصغری

باتقدیر فراوان از

استاد کراتقدر و بزرگوارم جناب آقای دکتر بهروز حسینی

که خالصانه علم و تجربه خود را در اختیار من قرار داده و روسنکر را بهم در تنظیم این پایان نامه بوده است و با محبتهای بی انتهایش مراد یون خود کرده زحماتش را هرگز فراموش نخواهم کرد.

باشکر فراوان از آقای مهندس احمد کجنگلی که در راستای به تحقق رسیدن اهداف این پایان نامه، در کمال صمیمیت از یکچگونه کمک و یاری به من دریغ ننموده اند.

همچنین جای دارد که از دوستان عزیزم آقایان دکتر مهدی توکلی، دکتر ناصر ظریف مقدم، مهندس حمید ضیاء الحق، مهندس علیرضا

عباسیان و مهندس وحید احسنی که بازحمات بی دریغشان در به نتیجه رساندن این امریاری رسان من بوده اند، نیز قدرانی می نمایم.

به امید آنکه سایه پرفروغ این اساتید فرزانه همواره روشنایی بخش جامعه مهندسی باشد.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

می دانم اگر زحمات بی شائبه شما و دلسوزیهای بی دریغتان نبوده هرگز نمی توانستم اینگونه راه علم را پیمایم، بادی
مالالال از عشق بردستهای پر مهرتان بوسه می زنم و از صمیم قلب می گویم که دوستان دارم.

تعهد نامه

اینجانب **پژمان آذرسا** دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **برآورد خطا در تحلیل غیرخطی سازه ها به روش ایزوژئومتریک** تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام (دانشگاه صنعتی شاهرود) و یا (Shahrood University of Technology) به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه به بررسی و معرفی روش تخمین خطایی در تحلیل غیرخطی سازه ها به روش ایزوژئومتریك پرداخته شده است. در روش ایزوژئومتریك، ابتدا به تهیه برنامه کامپیوتری به زبان فرترن پرداخته شده است که قادر به تحلیل غیرخطی مسائل دوبعدی می باشد. در این پژوهش غیرخطی شدن ناشی از نارسائی مصالح سازه مدنظر قرار داده شده است. برای تحلیل مسائل غیرخطی سازه ها و حل معادلات تعادلی غیرخطی اغلب از یک روند افزایشی-تکراری استفاده می شود که این روند توسط روش نیوتن-رافسون ارضا گردیده است. مسائل متنوع به ازای درجات مختلف توابع شکل نربزی با استفاده از روش ایزوژئومتریك تحلیل و نتایج حاصله جهت صحت سنجی و کارایی این روش با نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود و حل تحلیلی مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد که این برنامه از کارایی کاملاً مطلوبی برخوردار است و همچنین بیانگر دقت بیشتر و هزینه کمتر روش ایزوژئومتریك در تحلیل مسائل غیرخطی نسبت به روش های مشابه عددی می باشد.

همچنین در این پژوهش به تشریح روشی ابداعی جهت بهبود میدان تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریك و تخمین خطای موجود در آن پرداخته شده است. این تخمین کننده خطا، در دسته روشهای برآورد خطای مبتنی بر بازیافت تنش قرار می گیرد. جهت تخمین خطای تحلیل غیرخطی ایزوژئومتریك از روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا (SPR) استفاده شده است. در این روش، با استفاده از نقاط فوق همگرا، برای تابع مقادیر هر یک از مؤلفه های میدان تنش در هر ناحیه، یک سطح فرضی ساخته می شود. با استفاده از همان توابع شکل نربزی این سطح تعریف می شود که در روش ایزوژئومتریك برای تقریب زدن تابع جابجایی به کار گرفته می شوند. مقایسه نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان دهنده آن است که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل غیرخطی به روش ایزوژئومتریك برخوردار است.

کلمات کلیدی: روش ایزوژئومتریك، تحلیل غیرخطی، تخمین خطا، بازیافت تنش، نقاط فوق

همگرا (SPR)

فهرست مطالب

صفحه عنوان

فصل اول: مقدمه و کلیات

- ۱-۱- مقدمه ۲
- ۲-۱- مروری بر تحقیقات گذشته ۳
- ۱-۲-۱- مقدمه ای بر تاریخچه روش اجزا محدود و روش ایزوژئومتری ۳
- ۲-۲-۱- تحلیل خطی ۵
- ۳-۲-۱- انواع مسائل غیرخطی ۶
- ۴-۲-۱- حل مسائل غیرخطی ۶
- ۵-۲-۱- پلاستیسیته ۱۲
- ۶-۲-۱- منابع خطاها در روش های عددی ۱۶
- ۷-۲-۱- پیشینه علمی تخمین خطا ۱۷

فصل دوم: بنیان ریاضی روش های اجزا محدود و ایزوژئومتری

- ۱-۲- مقدمه ۲۰
- ۲-۲- روابط الاستو-استاتیک اجزاء محدود ۲۰
- ۱-۲-۲- معادلات تعادل ۲۰
- ۲-۲-۲- شکل های ضعیف وقوی معادلات تعادل ۲۳
- ۳-۲-۲- کار مجازی بعنوان پایه و اساس روش اجزاء محدود ۲۵
- ۳-۲- کرنش و خواص مصالح در مسائل صفحه ای ۲۷
- ۱-۳-۲- تنش صفحه ای ۲۷

- ۲۹-۳-۳- کرنش صفحه ای ۲۹
- ۳۰-۴-۲- کرنش و خواص مصالح در مسائل متقارن محوری ۳۰
- ۳۱-۵-۲- بی-اسپلین و نربز ۳۱
- ۳۴-۶-۲- بنیان ریاضی روش ایزوژئومتریک ۳۴

فصل سوم: پلاستیسیته

- ۴۲-۱-۳- مقدمه ۴۲
- ۴۲-۲-۳- ملاک تسلیم ۴۲
- ۴۳-۱-۲-۳- ملاک ترسکا ۴۳
- ۴۴-۲-۲-۳- ملاک وان میسز ۴۴
- ۴۵-۳-۲-۳- ملاک موهر - کولمب ۴۵
- ۴۷-۴-۲-۳- ملاک دراگر - پراگر ۴۷
- ۴۷-۳-۳- اشکال مختلف ملاک های تسلیم در محاسبات عددی ۴۷
- ۴۸-۱-۳-۳- ملاک ترسکا ۴۸
- ۴۸-۲-۳-۳- ملاک وان میسز ۴۸
- ۴۹-۳-۳-۳- ملاک موهر - کولمب ۴۹
- ۴۹-۴-۳-۳- ملاک دراگر - پراگر ۴۹
- ۵۲-۴-۳- مفهوم سخت شوندگی کار و کرنش ۵۲
- ۵۵-۵-۳- قانون جریان ۵۵
- ۵۵-۶-۳- رابطه تنش - کرنش پس از تسلیم (الاستو-پلاستیک) ۵۵
- ۵۷-۷-۳- به روز رسانی (به هنگام نمودن) تنش ها و رساندن به سطح تسلیم ۵۷
- ۶۰-۸-۳- ملاک همگرایی ۶۰

- ۶۰ CRI 1، ۱-۸-۳ ملاک ۱،
- ۶۱ CRI 2، ۲-۸-۳ ملاک ۲،

فصل چهارم : برآوردکننده های خطا

- ۶۳ ۱-۴ مقدمه
- ۶۴ ۲-۴ روشهای برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده‌ها
- ۶۶ ۳-۴ روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)
- ۶۸ ۱-۳-۴ روش میانگین گیری
- ۶۸ ۲-۳-۴ روش تصویر L_2
- ۶۹ ۳-۳-۴ روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا، SPR
- ۷۰ ۴-۳-۴ روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه‌ها، REP
- ۷۲ ۴-۴ معیارهای بیان خطا
- ۷۳ ۱-۴-۴ مفهوم نرم
- ۷۳ ۲-۴-۴ معیار انرژی
- ۷۴ ۳-۴-۴ درصد خطای نسبی
- ۷۵ ۴-۴-۴ معیار L_2
- ۷۶ ۵-۴-۴ جذر مجموع مربعات خطا
- ۷۷ ۶-۴-۴ شاخص تأثیر
- ۷۷ ۷-۴-۴ تعریف شاخص ξ_i
- ۷۹ ۵-۴ تشریح روش ابداعی بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک
- ۸۱ ۶-۴ استفاده از نرم خطای انرژی در روش ایزوژئومتریک

فصل پنجم : کاربرد برنامه در تحلیل مسائل نمونه

- ۸۴ ۱-۵ مقدمه

- ۵-۲- تحلیل الاستو - پلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتریك ۸۴
- مسئله ۵-۱ تحلیل الاستو-پلاستیک تیر یکسرگردار باریک شونده (Tapered) تحت اثر نیروی برشی ۸۵
- مسئله ۵-۲ تحلیل الاستو-پلاستیک صفحه نامحدود سوراخدار تحت اثر کشش یکطرفه ۹۰
- مسئله ۵-۳ تحلیل الاستو-پلاستیک صفحه نامحدود سوراخدار تحت اثر فشار داخل حفره ۹۵
- ۵-۳- برآورد خطا در تحلیل الاستو - پلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتریك ۱۰۱
- مسئله ۵-۴ تحلیل الاستو-پلاستیک تیر یکسرگردار تحت اثر بار متركز در انتهای آن ۱۰۳
- مسئله ۵-۵ تحلیل الاستو-پلاستیک استوانه جدار ضخیم فولادی تحت اثر فشار داخلی ۱۱۱

فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات

- ۶-۱- مقدمه ۱۲۰
- ۶-۲- نتایج ۱۲۰
- ۶-۳- ارائه پیشنهادات ۱۲۱
- ضمیمه ۱ نامتغیرهای تنش و کرنش ۱۲۳
- ضمیمه ۲ نقاط فوق همگرا در برآورد خطا ۱۲۹
- ضمیمه ۳ آشنایی با نحوه تهیه فایل ورودی برنامه **IGAPLAS** ۱۴۳
- ضمیمه ۴ جداول شاخص تاثیر در مسائل نمونه ۱۶۹
- فهرست منابع ۱۸۴

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱). نمایش سطح تسلیم و ملاک بارگذاری و باربرداری ۱۳
- شکل ۲-۱). قوانین سخت شوندگی (الف) ایزوتروپیک (ب) ترکیبی (ج) کینماتیک ۱۴
- شکل ۱-۲). جسم سه بعدی ۲۱
- شکل ۲-۲). انواع روش های تحلیل دوبعدی (الف) تنش صفحه ای (ب) کرنش صفحه ای (ج) متقارن محوری ۳۱
- شکل ۳-۲). شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو ۳۴
- شکل ۴-۲). المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای نریز ۳۹
- شکل ۱-۳). نمایش هندسی سطوح تسلیم ترسکا و وان میسز در فضای تنش های اصلی ۴۴
- شکل ۲-۳). فرم ساده مهندسی حدود مرزی تسلیم ترسکا و وان میسز ۴۵
- شکل ۳-۳). (الف) دایره موهر و حد تسلیم موهر-کلمب (ب) صفحه π ۴۶
- شکل ۴-۳). (الف) صفحه نصف النهاری $\theta=0$ (ب) منحنی گسیختگی در صفحه انحرافی ۴۶
- شکل ۵-۳). نمایش هندسی سطح تسلیم موهر - کلمب و دراگر - پراگر ۴۷
- شکل ۶-۳). مفاهیم مختلف سخت شوندگی ۵۳
- شکل ۷-۳). مفاهیم بارگذاری و باربرداری ۵۴
- شکل ۸-۳). کاهش نرخ تنش به سطح تسلیم ۵۸
- شکل ۱-۴). عدم پیوستگی شیب در مرز المان ۶۵
- شکل ۲-۴). محاسبه سهم گره ها ۷۰
- شکل ۱-۵). تیر یکسرگیردار باریک شونده تحت تاثیر نیروی برشی ۸۵
- شکل ۲-۵). شمای کلی تغییر مکان تیر مسئله ۵-۱ با استفاده از تئوری خطوط لغزش توسط Green(1954) ۸۶
- شکل ۳-۵). تغییر مکان جهت Y تیر مسئله ۵-۱ (الف)، (ب)، (ج) ناشی از تحلیل Isogeometric

- (د) ناشی از تحلیل به روش اجزاء محدود ۸۷
- شکل ۴-۵). توزیع گستره ناحیه پلاستیک مسئله ۵-۱ با استفاده از تئوری خطوط لغزش توسط
Green(1954)..... ۸۷
- شکل ۵-۵). کرنش موثر پلاستیک تیر مسئله ۵-۱ (الف)،(ب)،(ج) ناشی از تحلیل به روش
ایزوژنومتریکی (د) ناشی از تحلیل به روش اجزاء محدود ۸۸
- شکل ۵-۶). تنش جهت Y تیر مسئله ۵-۱ (الف) تحلیل به روش ایزوژنومتریکی (توابع شکل درجه
یک) (ب) تحلیل به روش اجزاء محدود ۸۹
- شکل ۵-۷). تنش وان-میسز مسئله ۵-۱ (الف)،(ب)،(ج) ناشی از تحلیل به روش ایزوژنومتریکی (د)
ناشی از تحلیل به روش اجزاء محدود ۸۹
- شکل ۵-۸). صفحه سوراخدار تحت اثر نیروی کششی P ۹۰
- شکل ۵-۹). مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شده صفحه سوراخدار ۹۰
- شکل ۵-۱۰). کرنش موثر پلاستیک صفحه سوراخدار (الف)،(ب) تحلیل به روش ایزوژنومتریکی (ج)
تحلیل به روش اجزاء محدود (د) توسط ANSYS ۹۲
- شکل ۵-۱۱). تنش وان-میسز صفحه سوراخدار (الف)،(ب) تحلیل به روش ایزوژنومتریکی (ج) تحلیل
توسط ANSYS (د) تحلیل به روش اجزاء محدود ۹۳
- شکل ۵-۱۲). تنش جهت X صفحه سوراخدار (الف)،(ب) تحلیل به روش ایزوژنومتریکی (ج) تحلیل به
روش اجزاء محدود (د) توسط ANSYS ۹۴
- شکل ۵-۱۳). صفحه سوراخدار تحت اثر نیروی فشاری P حول سوراخ ۹۵
- شکل ۵-۱۴). مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شده صفحه سوراخدار ۹۵
- شکل ۵-۱۵). تنش محیطی مسئله ۵-۳ (الف) روش ایزوژنومتریکی (ب) ANSYS (ج) تنش بهبود
یافته ۹۸
- شکل ۵-۱۶). تنش شعاعی صفحه سوراخدار (الف) روش ایزوژنومتریکی (ب) ANSYS (ج) تنش

بهبود یافته	۹۹
شکل ۵-۱۷). کرنش موثر پلاستیک صفحه سوراخدار (الف) روش ایزوژئومتریکی (ب) ANSYS	۱۰۰
شکل ۵-۱۸). تنش وان - میسر صفحه سوراخدار (الف) روش ایزوژئومتریکی (ب) ANSYS	۱۰۱
شکل ۵-۱۹). شرایط هندسی و مرزی تیر یکسرگیردار	۱۰۲
شکل ۵-۲۰). نواحی پلاستیک و الاستیک در تیر طره	۱۰۴
شکل ۵-۲۱). تغییر مکان تیر یکسرگیردار در جهت Y (تحلیل توسط نرم افزار ANSYS)	۱۰۵
شکل ۵-۲۲). تغییر مکان تیر یکسرگیردار در جهت Y (تحلیل توسط روش ایزوژئومتریکی)	۱۰۶
شکل ۵-۲۳). کرنش موثر پلاستیک تیر یکسرگیردار (تحلیل توسط نرم افزار ANSYS)	۱۰۶
شکل ۵-۲۴). کرنش موثر پلاستیک تیر یکسرگیردار (تحلیل توسط روش ایزوژئومتریکی)	۱۰۷
شکل ۵-۲۵). تنش وان میسر تیر یکسرگیردار (تحلیل توسط نرم افزار ANSYS)	۱۰۷
شکل ۵-۲۶). تنش وان میسر تیر یکسرگیردار (تحلیل توسط روش ایزوژئومتریکی)	۱۰۸
شکل ۵-۲۷). تنش جهت Y تیر یکسرگیردار ناشی از حل ایزوژئومتریکی	۱۰۸
شکل ۵-۲۸). تنش جهت Y تیر یکسرگیردار ناشی از حل بهبود یافته	۱۰۸
شکل ۵-۲۹). تنش جهت Y تیر یکسرگیردار ناشی از حل دقیق	۱۰۸
شکل ۵-۳۰). توزیع دوبعدی نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در تیر یکسرگیردار به ازای توابع	
شکل درجه یک	۱۰۹
شکل ۵-۳۱). توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر یکسرگیردار	۱۱۰
شکل ۵-۳۲). استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی	۱۱۱
شکل ۵-۳۳). شرایط هندسی و تکیه گاهی استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی	۱۱۱
شکل ۵-۳۴). نواحی پلاستیک و الاستیک در مسئله ۵-۵	۱۱۴
شکل ۵-۳۵). کرنش موثر پلاستیک مسئله ۵-۵ (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ب) تحلیل توسط	
ANSYS	۱۱۵

- شکل ۵-۳۶). تنش جهت XY استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ب) تحلیل بهبود یافته ۱۱۶
- شکل ۵-۳۷). تنش جهت XY استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (تحلیل توسط ANSYS) ... ۱۱۶
- شکل ۵-۳۸). تنش شعاعی استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ب) تحلیل بهبود یافته (ج) تحلیل دقیق ۱۱۶
- شکل ۵-۳۹). تنش محیطی استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ب) تحلیل بهبود یافته (ج) تحلیل دقیق ۱۱۷
- شکل ۵-۴۰). توزیع دوبعدی نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در مسئله ۵-۵ به ازای توابع شکل درجه یک ۱۱۷
- شکل ۵-۴۱). نمودار تنش شعاعی و محیطی مسئله ۵-۵ به ازای $P=0.18^{GPA}$ ۱۱۸

فهرست جداول

جدول ۱-۳). مقادیر ثابت های C_1, C_2, C_3 برای ملاک های تسلیم مختلف ۵۱

جدول ۲-۳). تنشهای یک محوری موثر یا معادل) ۵۱

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

همگام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده تر می‌شوند. با پیچیده تر شدن مسائل و لزوم حل سریعتر و دقیق تر آنها، روشهای تحلیلی دیگر جوابگوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی کردند در کنار توسعه مبانی علوم، روشهای عددی را نیز توسعه بخشند.

در این مسیر، روشهای متعددی توسط محققین ابداع گشته است. از مهمترین اینها می‌توان به روش تفاضلهای محدود، روش اجزای محدود، روش احجام محدود، روش المانهای مرزی و همچنین روش ایزوژئومتری که از جمله جدیدترین روشها است، اشاره کرد. هر کدام از این روشها موارد کاربرد خاص خود را دارند و هنوز هم محققان درصدد رشد و توسعه این روشها و ابداع روشهای جدید هستند.

روش اجزای محدود یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته‌های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد. ریشه‌های توسعه این روش را باید در اوائل دهه ۱۹۴۰ میلادی جستجو کرد. در سال ۱۹۴۳ کورانت معادله پواسون پیچش را توسط آنچه امروز المانهای مثلثی خطی نامیده می‌شود، حل کرد، اما کارهای وی مدتها ناشناخته ماند. روش اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام اجزای محدود را بر این روش نهاد؛ و کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سال ۱۹۶۵ توسط زینکوویچ و چونگ پیشنهاد شد [۱].

از جمله جدیدترین روشهای عددی دیگر، می‌توان روش ایزوژئومتری را نام برد. تحلیل ایزوژئومتری، بالقوه دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و مناسبی است که شاید در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود گردد. وجود برخی معایب در روش اجزای محدود، از جمله وجود خطا در تعریف مرزهای مسائل با هندسه پیچیده و یا مسائل با تغییرات شدید در بارگذاری و خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المانها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، از جمله علل ابداع این روش

می باشد.

اما از همان آغاز مدل سازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل گیری مبانی روش های عددی وجود خطاهای عددی در محاسبات منشأ اصلی نگرانی بوده است؛ زیرا در فرایند جزء بندی یک محیط پیوسته و تبدیل آن به یک مسأله کامپیوتری قابل مدیریت، یقیناً نمی توان تمام اطلاعات موجود در مدل را که بوسیله معادلات دیفرانسیل پاره ای یا معادلات انتگرالی مشخص و توصیف شده است، در بر گرفت.

خطای تقریبی در چنین شبیه سازیهایی چقدر است؟

چگونه ممکن است که بتوان خطا را اندازه گرفت، کنترل کرد و بطور موثر و قابل توجه مقدار آنرا کم کرد؟ اینها سوالاتی است که از آغاز بکارگیری روشهای عددی در مسائل مختلف علوم و مهندسی، متخصصان این رشته ها را با خود روبرو کرده است.

۱-۲- مروری بر تحقیقات گذشته

این قسمت مروری دارد بر مطالعات و تحقیقات انجام شده در گذشته که با بررسی تاریخچه روش اجزا محدود و ایزوژئومتریکی آغاز و با بازبینی کلی در مورد حل مسائل خطی و غیر خطی ادامه می یابد.

۱-۲-۱- مقدمه ای بر تاریخچه روش اجزا محدود و روش ایزوژئومتریکی

روش اجزاء محدود^۱، روشی قدرتمند برای حل عددی بسیاری از مسائل مهندسی می باشد. ایده اصلی در ایجاد روش اجزاء محدود از لزوم تحلیل دقیق سازه هواپیما پایه ریزی گردید. در سال ۱۹۱۴ میلادی هرتیکف^۲ روشی موسوم به سازه اسکلت دار را ایجاد نمود. در این روش یک صفحه الاستیک بصورت مجموعه ای از میله ها و تیرها نشان داده شده بود. بر این اساس روندی را برای حل مسائل تئوری الاستیسیته بر پایه روش شبکه بندی ارائه نمود. در مقاله ای که کورانت^۳ در سال ۱۹۴۲ میلادی ارائه کرد، با استفاده قانون انرژی پتانسیل مینیمم کل و اجتماع اجزاء مثلثی، مسئله پیچش سنت و نانت^۴ را بررسی نمود. وی از آنترپوله چند جمله ای روی اجزاء مثلثی برای حل مسائل پیچش استفاده نموده بود.

^۱ Finite Elements Method

^۲ Hrenikoff

^۳ Courant

^۴ St Venant

اگر چه کلیه خصوصیات بارز روش اجزاء محدود را می توان در کارهای هرتیکوف گورانت پیدا نمود، اما ارائه رسمی آن توسط اگریس و کلسی^۵ در سال ۱۹۶۰ میلادی از یکسو و ترنر، کلاف، مارتین و ناپ^۶ در سال ۱۹۵۶ میلادی از سوی دیگر انجام گرفت. ترنر و همکارانش، ماتریس سختی را برای خرپا، تیر و سایر اجزا تعیین و نتایج کار خود را در سال ۱۹۵۶، میلادی منتشر ساختند. لفظ اجزاء محدود اولین بار توسط کلاف در سال ۱۹۶۰ میلادی مورد استفاده قرار گرفت [۲].

از اوایل دهه ۶۰ میلادی روش اجزاء محدود برای حل مسائل تنش، انتقال حرارت، جریان سیالات و سایر زمینه ها توسط مهندسين بکار گرفته شد. کتابی که اگریس در سال ۱۹۵۶ میلادی در مبحث قضایای انرژی و روشهای ماتریسی منتشر نمود، پایه ای برای پیشرفت های بعدی بود. اولین کتاب در مورد اجزاء محدود توسط زینگویچ و چانگ^۷ در سال ۱۹۶۷ میلادی منتشر گردید. در اواخر دهه ۶۰ و اوایل دهه ۷۰ روش اجزاء محدود برای تحلیل مسائل غیر خطی و تغییر شکل های بزرگ مورد استفاده قرار گرفت و در این رابطه اودن^۸ کتابی را در مورد محیط های غیر خطی در سال ۱۹۷۲ میلادی منتشر نمود [۳-۱۳]. وجود پاره ای از معایب در روش اجزاء محدود، باعث ایجاد روش جدیدی به نام تحلیل ایزوژئومتریک گردید. این روش برای اولین بار طی مقاله ای در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش معرفی شد [۱۴]. روش ایزوژئومتریک دارای بعضی مفاهیم شبیه روش اجزای محدود و روش های بدون مش می باشد که می تواند برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم در حوزه های مختلف علوم و مهندسی، از جمله پلاستیسیته، به کار رود. در این روش از تکنیک های طراحی به کمک کامپیوتر^۹ استفاده شده است. دلیل اینکه روش های طراحی به کمک کامپیوتر تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است مربوط به اختلاف زمانی، در پیدایش این دو نسبت به یکدیگر می باشد. آغاز پیدایش روش های اجزای محدود در سال های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بوده است در حالی که روش های طراحی به کمک

^۵ Argyris and Kelsey

^۶ Turner, Clough, Martin and Topp

^۷ Zienkiewicz and Chung

^۸ Oden

^۹ CAD(Computer Aided Design)

کامپیوتر بعدها در حدود سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ شکل گرفته اند [۱۴].

ایده‌ای که در این روش معرفی شده است بر اساس بی-اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت^۱ به وجود آمده است. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها و سطوح، از آنها جهت درونیابی و تقریب سازی هم استفاده می‌شود.

از آنجایی که روش ایزوژئومتری شباهت زیادی به روش اجزا محدود دارد در نتیجه بسیاری از روابط پایه‌ای و مفاهیم شان شبیه یکدیگر می‌باشد. لذا در این پژوهش اکثر روابطی که برای روش اجزا محدود بیان گردیده به طور مشابه در ایزوژئومتری کاربرد دارد.

۱-۲-۲- تحلیل خطی

در تحلیل اجزاء محدود یک سازه پس از انتخاب جزء نمونه و جز بندی سازه با آن و سپس روی هم گذاردن ماتریس‌های اجزاء، معادلات کلی اجزاء محدود آن سازه بصورت ذیل بدست می‌آیند:

$$KU = R \quad (1-1)$$

در رابطه بالا K ماتریس سختی، U بردار تغییر مکان و R بردار نیرو سیستم اجزاء محدود می‌باشد. بدیهی است که تعداد و نوع اجزاء به کار رفته، در درجه و تعداد معادلات کلی سیستم و بدنبال آن در مدت زمان تحلیل موثر است. در تحلیل استاتیکی خطی زمان مورد استفاده در حل معادلات تعادلی سیستم، درصد بزرگی از کل زمان تحلیل را در بر می‌گیرد. این درصد ممکن است در مورد تحلیل غیر خطی و یا تحلیل دینامیکی بالاتر هم برود. بنابراین روشی باید اتخاذ شود که زمان کمتری را در تحلیل مصرف کند و نیز در حل معادلات با درجه بالا ناپایدار نگشته و برای کل مسائل سازه‌ای عمومیت داشته باشد.

کارآمدترین روش حل مستقیم سیستم معادلات سازه که بطور متداول در تحلیل‌ها از آن استفاده می‌شود، روش حذف گوسی است. اگر چه اساس رویه حل گوسی قابل کاربرد برای تقریباً هر مجموعه از معادلات خطی می‌باشد. اما در تحلیل اجزاء محدود به خواص ویژه‌ای از ماتریس سختی کل سیستم

^۱ Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)

نظیر تقارن، مثبت معین و نواری محدود می شود.

۱-۲-۳- انواع مسائل غیرخطی

تحلیل استاتیک غیرخطی، بیان رفتار غیرخطی سازه ها تحت بارهای استاتیکی است. نارسائی سازه در تحمل بار باعث رفتار غیرخطی آن می شود. این نارسائی به سه صورت خود را نشان می دهد که عبارتند از نارسائی هندسی سازه، نارسائی مصالح سازه و نارسائی ناشی از ترکیب دو حالت قبل. در نارسائی مصالح سه عامل پلاستیسیته، خزش و ویسکوپلاستیک رفتارهای اصلی غیر خطی ماده را تشکیل می دهند که شامل رفتار مواد و مصالح الاستوپلاستیک، خزش و رفتار هایپرالاستیک یا لاستیک مانند می باشند. در رفتار مصالح الاستوپلاستیک انواع گوناگونی از معیارهای تسلیم و قوانین سختی وجود دارند. در رفتار خزشی نیز می توان از قوانین مصالح خزشی استفاده نمود و در حالت هایپرالاستیک یا لاستیک مانند، انواع گوناگونی از توابع انرژی کرنشی با رفتار تراکم پذیری محدود یا نزدیک به تراکم ناپذیری موجود می باشد.

دومین نوع رفتار غیرخطی، رفتار ناشی از نارسائی هندسی سازه است. در این حالت تئوری کلاسیک کرنشهای خیلی کوچک، دیگر صادق نبوده و کرنش ها از جابجائی ها توسط یک عملگر دیفرانسیلی غیرخطی به دست می آیند. این نوع غیرخطی ممکن است شامل جابجائی های بزرگ، چرخش های بزرگ و کرنش های محدود باشد. در تغییر شکل های بزرگ، کمانش پوسته ها و کمانش دیگر اجزا سازه ای، جابجائی های بزرگ و چرخش ها یا دوران ها نمود پیدا می کنند. کاربردهای متداول برای کرنش های بزرگ یا محدود، در مسائل شکل دهی فلزات و در تحلیل تغییر شکل های بزرگ مواد لاستیک مانند می باشند. در این پژوهش عامل اول یعنی غیرخطی شدن ناشی از نارسائی مصالح مدنظر قرار داده می شود.

۱-۲-۴- حل مسائل غیرخطی

مسائل غیرخطی را می توان به مجموعه ای از رفتارهای خطی تقسیم نمود. بدان معنی که منحنی مزبور را که نشان دهنده رفتار غیر خطی می باشد به بازه های کوچکتر تقسیم نمود، بطوریکه در این بازه ها

رفتار را بتوان خطی فرض نمود. بنابراین در حل معادلات تعادلی غیر خطی از یک روند افزایشی - تکراری استفاده می شود. حل افزایشی بصورت مرحله به مرحله انجام می شود تا کل بارهای تعریف شده وارد شوند. در هر افزایش، روند تکرار اتخاذ شده انجام می گیرد تا جایی که همگرایی یا ماکزیمم تعداد تکرارها بدست آید.

برای تحلیل مسائل غیر خطی سازه ها اغلب از روش نیوتن - رافسون^{۱۱} (NR) [۱۵] استفاده می شود. روش NR مرسوم یا نسخه اصلاح شده آن موسوم به روش خود اصلاحی^{۱۲} یا روش افزایشی استاندارد^{۱۳}، در حل این نوع مسائل استفاده می شود. در روش NR استاندارد معادله کلی سیستم بصورت ذیل می باشد.

$$F(u) = 0 \quad (2-1)$$

این معادله را می توان بصورت ذیل نوشت:

$$k_T \Delta u^i = F^{i-1} \quad (3-1)$$

$$k_T = -\partial F(u^{i-1}) / \partial u \quad (4-1)$$

$$u^i = u^{i-1} + \Delta u^i$$

در این معادلات:

i : شماره تکرار

K_T : ماتریس سختی مماسی

Δu^i : افزایش تغییر مکان در تکرار i

u^i : تغییر مکان کل در تکرار i

همانگونه که از معادلات بالا مشخص است، ارزیابی و تعیین K_T و معکوس آن ضروری و لازم می باشد.

^{۱۱} Newton-Raphson Method

^{۱۲} Self-correcting

^{۱۳} Standard incremental

اما بر خلاف تحلیل خطی، K_T در اینجا علاوه بر u به دیفرانسیل u نیز وابسته است. بدین دلیل ارزیابی و تعیین K_T در کل آسان نمی باشد.

در روش نیوتن رافسون در طی هر افزایش، محاسبه ماتریس سختی (K_T) در هر تکرار تجدید می شود. اصلاحات گوناگونی در روش نیوتن رافسون انجام گرفته است. زینکوویچ و همکارانش [۱۶] روش NR اصلاح شده ای بنام ((روش سختی اولیه^{۱۴})) را پیشنهاد نمودند که در آن متناظر با هر تخمین مناسب u ماتریس سختی K_T در اولین تکرار هر افزایش محاسبه و در کل تکرارهای بعدی ثابت نگه داشته می شود. در روش نیوتن رافسون اصلاح شده، تجدید محاسبه ماتریس سختی در هر افزایش را می توان در ابتدای تکرارها یا هر تعداد معینی از تکرارها در نظر گرفت. در برخی مسائل نظیر مسائلی با تغییر مکان های بزرگ و نزدیک بار شکست در پلاستیسیته که درجه غیر خطی مسائل بالا می باشد، این روش در همگرایی دچار اشکال می شود. برای رفع این مسئله، آنها رویه را با ضرب Δu^i های محاسبه شده در یک ماتریس ضریب ثابت (a) اصلاح نمودند. بدین دلیل آن را روش سختی ((a - ثابت))^{۱۵} نامیدند. [۱۷]

ضعف اصلی روش نیوتن رافسون و نسخه اصلاح شده آن در این است که افزایش بار از قبل تعیین می شود. در این رویه، بار افزایشی در طول تکرارها ثابت مانده و تغییر در افزایش تغییر مکان، بار نامتوازن را به همراه دارد. برای رفع این ضعف، طرحی پیشنهاد شده است که در آن افزایش بار خود به خود انتخاب می شود. هایسلر و استریکلین^{۱۶} [۱۸] روند حل گام به گام بدون تکراری را پیشنهاد نمودند که در آن افزایش بار در هر گام، در حدود مقدار تغییر مکان تعیین شده در نظر گرفته می شود. روند گام به گام بطور معمول انجام گرفته تا بار غیرمتوازن در هر گام بار کوچک شود بگونه ای که تنها نامتوانی های کوچک به جلو برده شود. بدلیل این که هیچ تکراری در طرح پیشنهادی هایسلر و استریکلین انجام نمی گیرد، ممکن است یک نامتوانی اساسی پیش برده شود. بنابراین در هر گام، نخست نامتوانی وارد می شود و سپس بار خارجی اضافی مورد نیاز برای رسیدن به تغییر مکان معین شده، تعیین می شود. رویه

^{۱۴} Initial Stiffness Method

^{۱۵} α -constant stiffness method

^{۱۶} Haisler and Stricklin

محاسباتی پیشنهاد شده توسط هایسلر و استریکلین مشکل و طاقت فرسا می باشد. بدین دلیل توسط باتوز و دهات^{۱۷} [۱۹] ذکر شده است که می توان رویه ساده تری را بکار برد. آنها از تانژانت سختی جاری استفاده نموده و بوسیله آن افزایش تغییر مکان های ناشی از بار نامتوازن و بار خارجی (بار کلی) را بطور جداگانه بصورت ذیل تعیین کردند:

$$k_T \Delta u^I = R \quad (5-1)$$

$$k_T \Delta u^{II} = P$$

در معادلات مذکور R و P بترتیب بار نامتوازن و بار کلی تعریف می گردند. سپس افزایش بار واقعی وارد شده، λP باعث افزایش تغییر مکان ذیل می شود.

$$\Delta u = \Delta u^I + \lambda \Delta u^{II} \quad (6-1)$$

این افزایش تغییر مکان، حدود تغییر مکان تعیین شده را بدست داده و مقدار λ بآسانی از معادله (۶-۱) قابل محاسبه می باشد. روند مزبور از این جهت جالب می باشد که ابتدا اثرهای R و P را جدا نموده و سپس این اثرها را برای ملاک تعیین شده ترکیب می کند. علاوه بر این، رویه محاسباتی ساده ای برای روند هایسلر- استریکلین بوجود آمد. باتوز و دهات رویه ای را پیشنهاد نمودند که در آن تکرار نه در بار ثابت، بلکه در تغییر مکان ثابت انجام می شود. آنها روند تکرار تا همگرایی را با توجه به ثابت نگه داشتن تغییر مکان گره انتخابی، پیشنهاد کردند. در این روش بدلیل این که بار خارجی در طول افزایش ثابت نیست بنابراین روش مزبور اساساً با روش مرسوم NR تفاوت دارد. پاول و سیمونز^{۱۸} [۲۰] بهسازی را در روش بالا پیشنهاد کردند. آنها افزایش تغییر مکان را بصورت یک ترکیب خطی از دو افزایش جداگانه بصورت ذیل انتخاب نمودند:

$$\Delta u = \lambda_I \Delta u^I + \lambda_{II} \Delta u^{II} \quad (7-1)$$

^{۱۷} Batoz and Dhatt

^{۱۸} Pawell and Simons

در معادله بالا λ_I و λ_{II} مطابق با یک ملاک مشخص تعیین می شوند. به دلیل این که در این روش می توان ملاک های متمایز متفاوتی را بکار برد رویه دارای قابلیت انعطاف بسیار زیادی می باشد. توسط دو التزام، ساده ترین روش تکرار به دست می آید. اول آن که کل بار نامتوازن در هر تکرار به کار رود ($\Delta U_n = 0$) و دوم این که جزء تغییر مکانی تعیین شده، U_n ثابت باقی بماند ($\Delta U_n = 0$)

روش های حل تشریح شده در بالا به دو دسته تقسیم می شود: روش کنترل بار و روش کنترل تغییر مکان، در این روشها در هر افزایش، نیرو یا تغییر مکان (تغییر مکان تعمیم داده شده) ثابت نگه داشته می شود. واضح است که، روش NR در نزدیکی بار نهایی، جایی که ماتریس K_T منفرد یا تقریباً منفرد می شود، موثر نمی باشد از طرفی کنترل تغییر مکان نیز هنگامیکه رفتار مصالح رو به سفت شدگی^{۱۹} برود یا مصالح، رفتار جهش ناگهانی^{۲۰} از خود نشان دهند، دیگر کارآمد نمی باشد. یک التزام قابل توجه روش های مذکور این است که یا تغییر مکان یا نیرو در هنگام افزایش ثابت باقی می ماند.

پاسخ بدیهی به نقطه ضعف این روشها، ایجاد روشی است که تغییر پذیری در هر دو جزء نیرو و تغییر مکان را وارد محاسبات کند. از جمله روش های که این مسئله در آن مد نظر قرار داده شده، روش «طول-کمان»^{۲۱} می باشد. یکی از خصوصیات بارز روش طول-کمان این است که با تحمیل تعدادی طول مشخصه مبتنی بر نرخ همگرایی، افزایش های تغییر مکان و نیرو در هنگام مراحل افزایش امکان تغییر دارند. این قابلیت اجازه می دهد که بار و تغییر مکان خود به خود انتخاب شوند. یکی از مشکلات روش مزبور این است که تمام روندهای موجود، مبتنی بر انتخاب طول مشخصه (اندازه گام یا طول کمان) از قبل می باشد. این طول مشخصه براساس اطلاعات عددی حاصل شده از گام پیشین یا بوسیله استنتاج اطلاعات از برون یابی مسیر بار- تغییر مکان بدست می آید.

اولین نسخه روش طول کمان توسط ریکس^{۲۲} [۲۱] پیشنهاد گردید. برای ردیابی مسیر تغییر مکانی که رفتار جهش ناگهانی را از خود نشان می دهد، ریکس پیشنهاد نمود که ضریب بار λ مجهول فرض شده

^{۱۹} Stiffening

^{۲۰} Snap-through

^{۲۱} Arc-Length Method

^{۲۲} Riks

ومعادله ذیل به معادلات سیستم اضافه شود:

$$\Delta U^T \Delta U + F^T F = S_0^2 \quad (8-1)$$

که در آن:

$$\Delta U = \Delta U^I - \lambda \Delta U^{II} \quad (9-1)$$

$$F = R + \lambda P$$

S_0 متغیری است که مقدار آن از قبل تعیین می شود (طول- کمان). اضافه کردن معادله (8-1) به معادلات سیستم، اشکال مهمی را در این سیستم معادلات ایجاد می کند و آن اینکه معادلات سیستم حاصله دیگر متقارن و نواری نمی باشد. این نقص، نقطه ضعف مهمی است زیرا یکی از مشخصات اصلی معادلات اجزاء محدود را نقص می کند. برای رفع این مشکل کریسفیلد^{۲۳} [۲۲] با وارد کردن معادله محدود شده ذیل این روش را اصلاح نمود:

$$\Delta U^T \Delta U = S_0^2 \quad (10-1)$$

با کاربرد معادله (10-1) تقارن معادلات سیستم حفظ می گردد. طبق نظر کریسفیلد دو افزایش تغییر مکان ΔU^I و ΔU^{II} از معادله (5-1) محاسبه شده و سپس ضریب بار با تعیین مقداری برای S_0 ، از معادله (9-1) به دست می آید.

این رویه اصلاح شده در مقایسه با روش طول کمان ثابت اصلی^{۲۴}، «طول کمان ثابت کروی»^{۲۵} نامیده می شود. مقدار S_0 برای اولین تکرار تعیین گشته و در تکرارهای بعدی طبق رابطه ذیل معین می گردد:

$$S = S_0 \sqrt{\frac{N}{N_0}} \quad (11-1)$$

در رابطه (11-1)، N تعداد تکرار ماکزیمم و N_0 تعداد تکرارهای استفاده شده در افزایش بعدی است (جایی که $S = S_0$ می شود). این اصلاحات، رویه های مهم و قابل توجهی را بدست می دهد که همگی اساساً مشابه بوده و تنها در قواعد انتخاب طول کمان یا معادله قید متمایز می باشند.

^{۲۳} Crisfield

^{۲۴} Original constant arc-length

^{۲۵} Spherical constant arc-length

هر روش تکرار با یک ملاک همگرایی برای کنترل بسندگی و کفایت تکرارها و همچنین پایان دهی مراحل تکرار همراه می باشد. معمولاً از سه نوع ملاک همگرایی در تحلیل مسائل غیر خطی استفاده می شود [۵،۷]، که عبارتند از ملاک نیرو، ملاک تغییر مکان و ملاک انرژی. در ملاک نیرو ضروریست که متوسط نیروهای باقیمانده به متوسط نیروهای وارد شده، کمتر از یک تolerانس^{۲۶} از پیش تعیین شده باشد. اگر نسبت متوسط جابه جایی تکراری به متوسط جابه جایی افزایشی (در اولین تکرار) با تolerانس خطا مقایسه شود سپس دومین ملاک کنترل می شود. نهایتاً در ملاک انرژی فرض بر این است زمانی مراحل بارگذاری همگرا می شود که کار نیروی باقیمانده در جابجایی تکراری با کار نیروهای اعمال شده در جابجایی افزایشی (در اولین تکرار) کمتر از یک تolerانس معین باشد. در ملاک های دیگری که مورد استفاده قرار گرفته است، قدر مطلق نیروها یا تغییر مکان ها با تolerانس خطای از پیش تعیین شده مقایسه می شوند. تجارب عددی نشان می دهد که ملاک های مبتنی بر میانگین ها مناسب تر هستند.

۱-۲-۵- پلاستیسیته

در گذشته تحقیقات بسیار زیادی در مورد انحراف رفتار فلزات از حالت خطی انجام گرفته است. از خصوصیت بارز این رفتار، تغییر شکل غیرقابل برگشت می باشد. این بدان معناست که وقتی نرخ تنش به یک حد معین بنام حد تسلیم می رسد تغییر شکل پلاستیک آغاز شده و مصالح تغییر شکل غیر قابل برگشتی را متحمل می شوند که در باربرداری این تغییر شکل بازیافت نمی شود .

برای بحث در مورد این رفتار باید یک ملاک تسلیم جهت آشکار ساختن آغاز پلاستیسیته تعریف گردد. این ملاک بصورت تابعی از نرخ $f(\sigma_{ij})$ تعریف گشته و تابع تسلیم^{۲۷} نامیده می شود. وقتی نرخ تنش به حدی می رسد که $f(\sigma_{ij})$ برابر با مقدار مشخصی (معمولاً تنش تسلیم در آزمایش یک محوری) شود آنگاه فرض بر آن است که مصالح متشکله در این مقدار مشخص تسلیم می شوند. در تقابل با تئوری الاستیسیته که ارتباطی یک به یک بین تنش و کرنش کل (الاستیک) وجود دارد چنین رابطه یکتایی بین تنش و کرنش پلاستیک وجود ندارد، در عوض فرض می شود که نرخ کرنش پلاستیک از یک تابع

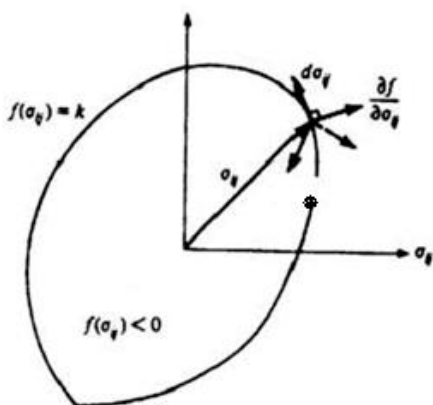
^{۲۶} Tolerance

^{۲۷} Yield Function

تنش اسکالر بنام ((تابع پتانسیل پلاستیک))^{۲۸} بصورت ذیل محاسبه می شود.

$$\varepsilon_p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (۱۲-۱)$$

در تابع، λ ضریبی مثبت است اگر تغییر شکل پلاستیک رخ دهد (یعنی برای $f > 0$ یا $f = 0$ و $df > 0$) و در غیر این صورت صفر می باشد. معادله (۱۲-۱) ((قانون جریان))^{۲۹} (یا اصل بهنجاری، بدلیل این که بهنجاری نرخ کرنش پلاستیک را با تابع پتانسیل پلاستیک نشان می دهد) نامیده می شود.



شکل ۱-۱). نمایش سطح تسلیم و ملاک بارگذاری و باربرداری

اگر توابع f و g مشابه فرض می شوند آنگاه تئوری مزبور ((پلاستیسیته پیوسته))^{۳۰} و در غیر این صورت ((پلاستیسیته ناپیوسته))^{۳۱} نامیده می شود. در استفاده از این تئوری برای فلزات معمولاً از پلاستیسیته پیوسته استفاده می شود. انتخاب این توابع مبتنی بر مشاهدات آزمایشگاهی است. بعنوان نمونه وان میسز^{۳۲} فرض نمود که f سطح یک استوانه نامحدود در فضای تنش، با محوری در امتداد محور فشار هیدرواستاتیک است. موضوع مهم دیگر در تئوری پلاستیسیته ((قانون سخت شوندگی))^{۳۳} می باشد. یا قانون عمدتاً حرکت سطح تسلیم در فضای تنش را تعریف می کند. این حرکت معمولاً تا اندازه ای نشان دهنده کرنش پلاستیک یا کار پلاستیک، بنابر نظریه های سخت شوندگی کرنش و سخت شوندگی کار

^{۲۸} Plastic potential function

^{۲۹} Flow rule

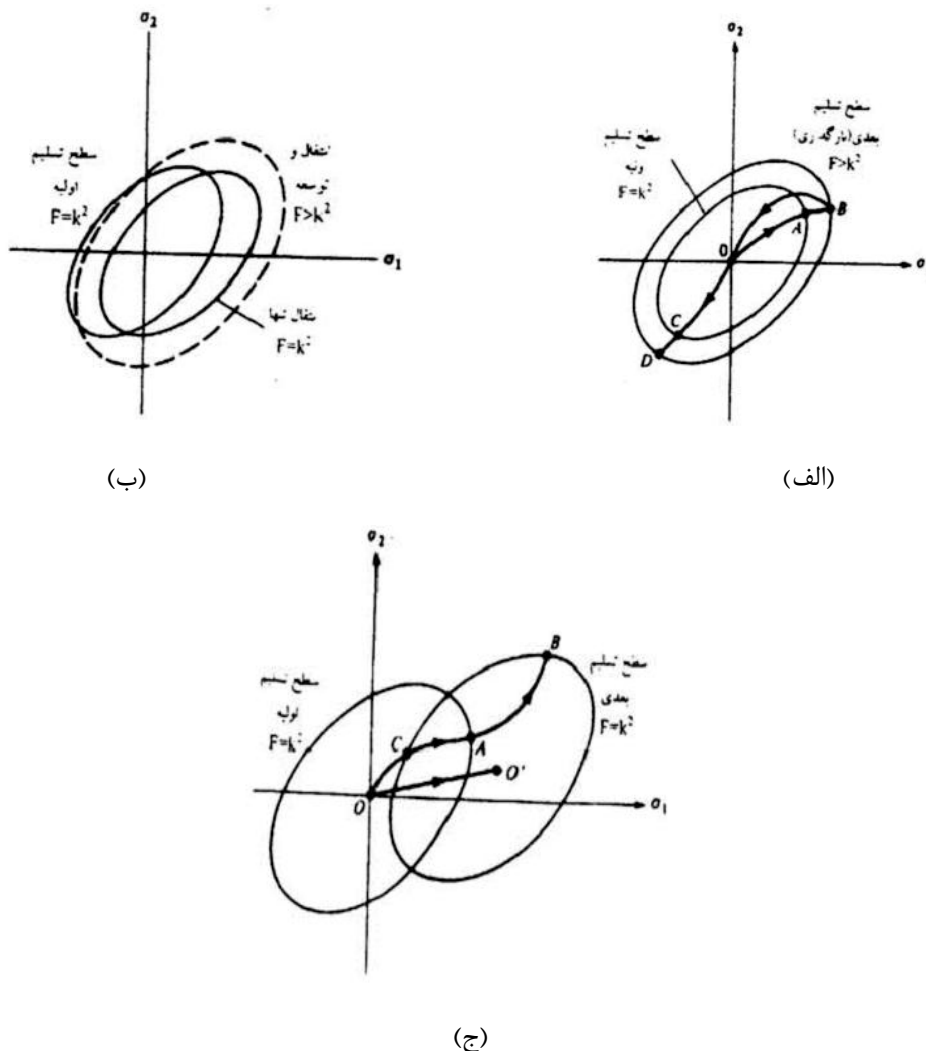
^{۳۰} Associated plasticity

^{۳۱} Non- Associated plasticity

^{۳۲} Von Misses

^{۳۳} Hardening rule

می باشد. اگر حرکت به شکل توسعه یکنواخت سطح تسلیم بدون هیچگونه حرکت انتقالی باشد آنگاه قانون مزبور ((قانون سخت شونده گی ایزوتروپیک))^{۳۴} نامیده می شود. از سوی دیگر اگر سطح، بدون هیچ توسعه ای انتقال داده شود آنگاه نظریه ((قانون سخت شونده گی کینماتیک))^{۳۵} بکار می رود. شایان توجه است که اثر پوشینگر مشاهده شده در رفتار فلزات را می توان به بهترین وجه بوسیله قانون کینماتیک نشان داد. در این جا باید توجه شود که چون توابع f و g برای تعریف رفتار فیزیکی مصالح بکار می روند، بنابراین باید مستقل از محورهای مختصات باشند. به این دلیل f و g بصورت تابعی از نامتغیرهای تنش تعریف می گردند. (جهت آشنایی بیشتر در مورد نامتغیرهای تنش به ضمیمه ۱ مراجعه نمائید)



شکل ۱-۲). قوانین سخت شونده گی (الف) ایزوتروپیک (ب) ترکیبی (ج) کینماتیک

^{۳۴} Isotropic Hardening rule

^{۳۵} Kinematic Hardening rule

در زمینه روش های عددی حل مسائل الاستو-پلاستیک بوسیله یک روش افزایشی انجام می شود. در این روش محاسبه روابط مورد نیازی مبتنی است بر این فرض که نرخ کرنش کل برابر است با مجموع سهم الاستیک و سهم پلاستیک، یعنی:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (13-1)$$

آنگاه با کاربرد قانون هوک برای سهم الاستیک و قانون جریان برای سهم پلاستیک و رابطه بین افزایش تنش و افزایش کرنش معادله ترکیبی الاستو-پلاستیک بدست می آید. این رابطه را می توان بصورت ذیل نشان داد:

$$D_{ep} = D - \frac{D b a^T D}{A + a^T D b} \quad (14-الف)$$

که در آن داریم :

$$b = \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad , \quad a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad , \quad A = \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \sigma^T b \quad (14-ب)$$

k در معادله بالا پارامتر سخت شوندگی تعریف می شود. ماتریس خواص الاستو-پلاستیک D_{ep} سپس بعنوان ماتریس سختی تانژانتی در روند حل تکراری بکار می رود [۱۶]. محاسبه مقدار مناسبی برای A به شکل تابع تسلیم وابسته است.

حجم تحقیقات و مطالعات انجام شده در مورد جنبه های مختلف تحلیل مسائل الاستو پلاستیک بقدری زیاد است که بازبینی و مرور بر روی کل آنها خارج از محدوده این مطالعه می باشد. در هر صورت برای اطلاعات بیشتر درباره این موضوع منابع [۲۳-۲۸] را می توان مرور نمود.

همانگونه که از رابطه (۱۳-۱) قابل مشاهده است در حالت پلاستیسیته ناپیوسته ماتریس D_{ep} و نتیجتاً معادلات سیستم نامتقارن می باشند. برای رفع این مشکل، باروس و همکارانش^{۳۶} [۲۹] روشی را پیشنهاد نمودند که در آن مصالحی جدید با قانون پیوسته معادل با اولی تعریف می شود. واضح است که با استفاده از این روش می توان پلاستیسیته ناپیوسته را به همان طریق ولی بصورت پلاستیسیته پیوسته

^{۳۶} Barros et. al.

بکار گرفت. قبل از خاتمه به علاقه مندان این بحث توصیه می گردد مقاله چن و همکارانش^{۳۷} [۳۰] در این مبحث را مطالعه نمایند. آنها در مقاله شان ملاک بارگذاری جدیدی را پیشنهاد نمودند که حالت کلی داشته و نرم شوندگی وسخت شوندگی مصالح و متقابلاً پلاستیسیته کامل را در بر می گیرد.

۱-۲-۶- منابع خطاها در روش های عددی

بدیهی است که کلیه روش های عددی روش های تقریبی می باشند و منابع خطا در این روش ها را می توان به سه گروه عمده تقسیم کرد [۲]:

۱- **خطای ناشی از تقریب زدن دامنه حل مسأله**: این خطا از آنجا ناشی می شود که در حالت کلی نمی توان دامنه حل مسأله را با المانهای مورد نظر به طور کامل پوشانید. برای مثال، یک صفحه دایره ای شکل را هیچگاه نمی توان با المانهای مثلثی خطی به طور کامل مدل نمود، هر چند این کار با هر دقت دلخواه با ریز تر کردن شبکه المان بندی امکان پذیر است.

۲- **خطای ناشی از گرد کردن اعداد**: این گروه از خطاها بستگی به سخت افزار و نرم افزار مورد استفاده برای محاسبات دارد. از آنجا که تعداد محدودی از ارقام یک عدد در رایانه ذخیره می شود، استفاده از این عدد در محاسبات باعث ایجاد خطا خواهد شد و به علت اینکه محاسبات معمولاً به صورت زنجیروار به نتایج مراحل قبل وابسته است، این موضوع باعث گسترش خطا در تمامی حل می گردد. بر خلاف سایر انواع خطاها، ریز تر نمودن شبکه المان بندی معمولاً این گروه از خطاها را تشدید می کند. برای کاهش این گروه از خطاها، باید به صورت سخت افزاری و یا نرم افزاری تعداد ارقامی از یک عدد را که در رایانه نگهداری می شود، افزایش داد که این کار با افزایش حافظه مورد نیاز و همچنین بالا رفتن زمان حل همراه است.

۳- **خطای ناشی از گسسته سازی**: این گروه از خطاها، عمده ترین منبع خطا در روش های عددی بوده و ناشی از تقریب زدن میدان جابجایی به وسیله توابع شکل می باشد. این گروه از خطاها نیز با ریز تر کردن شبکه المان بندی و بالا بردن درجه توابع شکل مورد استفاده، کاهش می یابد.

^{۳۷} Chen et. al.

این سه گروه خطا در حل عددی معادله دیفرانسیل و برای مثال در معادلات جهت بدست آوردن مقدار جابجایی u هر گره وارد می شود.

آنچه از این پس در این پژوهش به عنوان خطا مورد بحث قرار خواهد گرفت، خطای ناشی از گسسته سازی است و بنابراین همواره فرض بر آن خواهد بود که دامنه حل به طور کامل توسط المانهای مورد استفاده پوشیده شده و محاسبات نیز به صورت کاملاً دقیق انجام می گیرد.

۱-۲-۷- پیشینه علمی تخمین خطا

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله‌هایی است که توسط ریچاردسون^{۳۸} در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است.

اصولاً روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود معمولاً به اندازه مش‌های مورد استفاده (یا امروزه اندازه جزء محدود) بستگی دارد [۳۱].

کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا^{۳۹} و رینبولت^{۴۰} آغاز شد. روش آنها بر این اساس بود، که دقت باقیمانده را در یک گروه از المانها و یا یک المان تنها مورد بررسی قرار داده و به کمک آن می توانستند خطا را تخمین بزنند [۳۱].

معمولاً کیفیت و درستی روشهای تخمین خطا به وسیله مقایسه بین معیار خاصی از خطای واقعی و خطای تقریبی بررسی می گردد. البته امکان محاسبه خطای دقیق برای یک سری مسائل خاص که حل دقیق آنها در دسترس است، وجود دارد. در این راستا، نسبت خطای تقریبی به خطای واقعی شاخص تأثیر^{۴۱} نامیده می شود که این نسبت اولین بار توسط بابوشکا در سال ۱۹۸۱ ارائه شد [۳۲].

حل جدید روشهای تعیین خطا هنگامی بر حل دقیق منطبق می گردد که شاخص تأثیر واحد گردد.

در سال ۱۹۸۴ کنفرانس مهمی پیرامون اصلاح وفقی و تخمین خطاها در لیسبون برگزار شد. در این کنفرانس پیشرفتهای جدیدی در زمینه برآوردکننده‌ها ارائه شد که یکی از این پیشرفتهای روش المان

^{۳۸} L.F. Richardson

^{۳۹} I. Babuška

^{۴۰} C. Rheinboldt

^{۴۱} Effectivity Index

بازیافت بود. روش فوق توسط دمکوویز^{۴۲} ارائه شد و برای بسیاری از مسائل فیزیک و مکانیک قابل اجرا بود و سرانجام روند مشابهی توسط بنک^{۴۳} و وزر^{۴۴} ارائه گردید که منظور اصلی آنها ارائه روش آنالیز ریاضی بر مسائل بیضوی دو بعدی بود.

بابوشکا و همکارانش در ۱۹۸۶ برای اولین بار شبکه المان بهینه را شبکه‌ای با توزیع یکنواخت معیار خطای انرژی^{۴۵} روی کل دامنه، برای مسائل یک بعدی تعریف کردند [۳۳].

در سال ۱۹۸۷ زینکوویچ و زو روش بازیافت تنش ها را در برآورد خطا و در همان سال روش ساده‌ای برای تخمین خطای کلی و محلی در حل المانهای محدود را نیز ابداع کردند [۳۴].

در سال ۱۹۸۹ زینکوویچ و زو طی مقاله‌ای با تقریب خطا در مسائل خمش صفحه، روشی را برای اصلاح المان بندی مثلثی که طی آن بعد المانها ریزتر می‌شد ارائه کردند [۳۵]. از این پس این دو محقق تحقیقات زیادی انجام دادند و در سال ۱۹۹۲ روش SPR^{۴۶} را در برآورد خطای حل المانهای محدود، طی دو مقاله معروف معرفی نمودند [۳۶،۳۷].

در ۱۹۹۳ دن و همکارانش روش مانده‌ها در برآورد خطا را با اضافه کردن قیود تعادل اصلاح کردند [۳۸]. در سال ۱۹۹۳ بوگدا^{۴۷} و اولیور یک روش کلی در بهبود خطا در حل مسائل دو بعدی سازی شکل با استفاده از آنالیز تطبیقی ارائه کردند [۳۹].

در ۱۹۹۷ برومند و زینکوویچ روش قدرتمند دیگری در برآورد خطا ارائه کردند که نسبت به روشهای قبلی دارای هیچ محدودیتی نبود [۴۰،۴۱] این روش قابل استفاده در اکثر مسائل به ویژه مسائل پلاستیک است که این ویژگی یک مزیت مهم به شمار می‌آید.

^{۴۲} Demkowicz

^{۴۳} Bank

^{۴۴} Weiser

^{۴۵} Energy error norm

^{۴۶} Superconvergent Patch Recovery

^{۴۷} Buggeda

فصل دوم

بنیان ریاضی روش های اجزای محدود و این روش نو ممبریک

۲-۱- مقدمه

تحلیل و بررسی هر مسئله با استغاده از روش های عددی نظیر اجزا محدود و ایزوژئومتری با بررسی بنیان و روابط ریاضی آن مسئله آغاز می شود. در این پژوهش تحلیل الاستو-پلاستیک مسائل صفحه ای نظیر تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای و مسائل متقارن محوری مد نظر قرار می گیرند. از آنجایی که پایه و بنیان ریاضی روش ایزوژئومتری برگرفته از روش اجزا محدود می باشد لذا در ابتدای این فصل به بیان مختصری از روابط اجزا محدود پرداخته می شود. این تحقیق و بررسی با تشریح روابط مربوط به توابع بی-اسپیلاین و نربز دنبال شده و در نهایت بطور خلاصه در مورد فرمول بندی روش ایزوژئومتری و وجوه اشتراک و تمایز آن با روش اجزا محدود بحث می شود.

۲-۲- روابط الاستو-استاتیک اجزاء محدود

روش اجزاء محدود (FEM) یکی از قدرتمندترین و کارآمدترین روشها در تحلیل عددی مسائل مقدار مرزی^{۴۸} (BVP) می باشد. این روش در حالت الاستیک کاملاً برقرار بوده و هیچگونه تغییری در روابط آن در تحلیل های مختلف ایجاد نمی شود [۴-۱۳]. در این قسمت مروری خلاصه در مورد روابط الاستو-استاتیک اجزاء محدود انجام می گیرد با توجه به این مسئله که از قانون مجموع اینشتین^{۴۹} در تمام این مبحث استفاده می شود مگر در جایی که بطور صریح مشخص شده باشد.

۲-۲-۱- معادلات تعادل

تحلیل هر مسئله مکانیکی وسازه ای نیازمند این است که تعادل نیرو و لنگر در هر زمان و روی هر حجم اختیاری از جسم برقرار باشد. اگر V را حجم یک جسم و S نیز سطحی از این حجم در نظر گرفته شود و نیروی t_i ($i=1,2,3$) برواحد سطح، کشش سطحی روی سطح S و b_i ($i=1,2,3$) نیروی کالبدی یا حجمی بر واحد حجم باشند آنگاه تعادل نیروها را می توان بصورت ذیل نوشت (شکل ۲-۱).

$$\int_S t_i e_i ds + \int_V b_i e_i dv = 0 \quad (1-2)$$

^{۴۸} Boundary Value Problem

^{۴۹} The Einstein summation convention

در این معادله، e_i ، بردار واحد در راستای محورهای مختصات بوده و ds و dv به ترتیب اجزاء سطح و حجم می باشند. ماتریس تنش (تنش کوشی)^{۵۰} σ_{ij} در یک نقطه روی سطح S بصورت ذیل تعریف می شود:

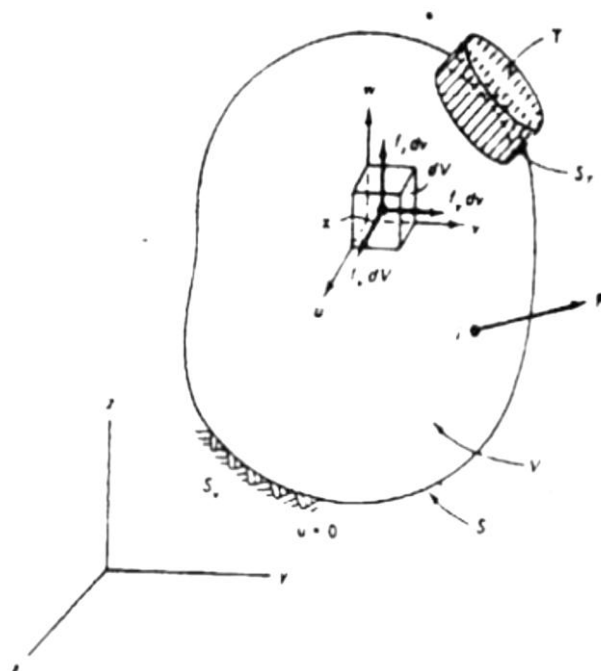
$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2-2)$$

که در آن n_j ($j = 1, 2, 3$)، بردارهای واحد نرمال بر سطح S در نقطه تحت بررسی است. با جانشین سازی مقدار t_i از (۲-۲) داخل (۲-۱) رابطه ذیل بدست می آید:

$$\int_S \sigma_{ji} n_i e_i ds + \int_V b_i e_i dv = 0 \quad (3-2)$$

با استفاده از تئوری دیورژانس^{۵۱} برای تبدیل انتگرال سطح به انتگرال حجم، معادله (۳-۲) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\int_V \sigma_{ji,j} e_i dv + \int_V b_i e_i dv = 0 \quad (4-2)$$



شکل ۲-۱). جسم سه بعدی

^{۵۰} Cauchy Stress

^{۵۱} Divergence theorem

از آنجایی که این معادله انتگرالی برای هر حجم اختیاری از جسم صادق است بنابراین هسته اصلی انتگرال باید صفر شود:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5-2)$$

معادلات (5-2) مجموعه معادلات متداول تعادل نیرو در مکانیک سازه ای بوده و در سراسر جسم برقرار می باشند. معادله تعادل لنگر با لنگرگیری حول مبدأ بصورت ذیل نوشته می شود:

$$\int_s r_k e_k \times t_i e_i ds + \int_v r_k e_k \times b_i e_i dv = 0 \quad (6-2)$$

در رابطه بالا $r_k e_k$ بردار وضعیت نامیده می شود. با جاگذاری t_i از معادله (2-2) و با استفاده از تئوری دیورژانس، معادله (6-2) به معادله زیر کاهش می یابد:

$$\int_v r_k (\sigma_{ji,j} + b_i) \varepsilon_{kil} e_i dv + \int_v r_k \sigma_{ji} \varepsilon_{kil} e_i dv = 0 \quad (7-2)$$

در این مرحله ε_{kil} تانسور جایگشت^{۵۲} بوده و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon_{kil} = \begin{cases} +1, & (k, i, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1, & (k, i, l) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{برای جایگشتهای دیگر} \end{cases} \quad (8-2)$$

اگر توازن نیروها همواره برقرار باشد آن گاه دومین انتگرال در معادله (7-2) با توجه به قاعده ذیل برابر صفر می شود:

$$r_{kj} = \Delta_{kj} \quad (9-2)$$

که اگر نماد Δ_{kj} (دلتای کرونکر^{۵۳})، بگونه زیر تعریف شود:

$$\Delta_{kj} = \begin{cases} 1 & K = j \\ 0 & K \neq j \end{cases} \quad (10-2)$$

آنگاه دومین انتگرال معادله (7-2) را می توان بصورت ذیل نوشت:

$$\int_v \sigma_{ji,j} \Delta_{kj} \varepsilon_{kil} e_i dv + \int_v \sigma_{ji} \varepsilon_{kil} e_i dv = 0 \quad (11-2)$$

^{۵۲} Permuted tensor

^{۵۳} Kronecker delta

با توجه به این که حجم مورد نظر اختیاری بوده و نیز با توجه به این نکته که یک بردار زمانی مقدار آن صفر می شود که هر یک از اجزاء آن بردار برابر با صفر شوند، آنگاه می توان رابطه ذیل را نوشت:

$$\sigma_{ji} \varepsilon_{kil} = \sigma_{ji} - \sigma_{ij} = 0 \quad (12-2)$$

که از آن رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (13-2)$$

نتیجه آن که معادله (13-2)، تقارن تانسور تنش را تضمین می کند. ضمن اینکه معادلات (2-5) و (2-13) به ترتیب به اولین و دومین قانون حرکت کوشی⁵⁴ موسوم هستند.

2-2-2- شکل های ضعیف و قوی معادلات تعادل

در این قسمت، مفاهیم قوی (S)⁵⁵ و ضعیف (W)⁵⁶، برای رابطه سازی مسائل مقدار مرزی (BVP)⁵⁷ در مکانیک سازه ای مورد بررسی قرار می گیرند. رابطه سازی شکل ضعیف (W) نقطه شروعی برای هر یک از روشهای تقریبی نظیر روش اجزاء محدود (FEM)⁵⁸، روش اختلاف محدود (FDM)⁵⁹، روش ایزوژئومتریک⁶⁰ (IGA) و همچنین روش اجزاء مرزی (BEM)⁶¹ می باشد. حال در ذیل بشرح تفصیلی در مورد BVP پرداخته می شود.

نمادهای V ، فضای اشغال شده توسط جسم تحت بررسی و $S = S_d + S_p$ مرز V در آن فضا، فرض می شوند. تانسور تنش $\sigma = [\sigma_{ij}]$ تابعی از $U = [U_i]$ است که به رفتار مصالح بستگی دارد. U را چنان بدست می آوریم که روابط ذیل برقرار باشند:

$$\sigma_{ij,j}(u) + b_i = 0 \quad \in V \quad (14-2)$$

$$(S) \quad u_i = d_i \quad \in S_d$$

⁵⁴ Cauchy's law of motion

⁵⁵ Strong

⁵⁶ Weak

⁵⁷ Boundary value Problems

⁵⁸ Finite Elements Method

⁵⁹ Finite Difference Method

⁶⁰ Iso Geometric Analysis

⁶¹ Boundary Element Method

$$\sigma_{ij} n_j - p_i = 0 \quad \in S_p$$

که در آن $d = \{d_i\}$ و $P = \{p_i\}$ ، بترتیب تغییر مکان معین روی مرز S_d (شرایط مرزی ویژه EBC ^{۶۲}) و نیروی کششی معین وارد شده بر روی مرز S_p (شرایط مرزی طبیعی، NBC)^{۶۳} می باشند. معادله (۱۴-۲) شکل قوی مسائل مقدار مرزی (BVP) نامیده می شود.

در اکثر مسائل حصول یک حل کاملاً واقعی و کامل امکانپذیر نمی باشد. بدین دلیل با استفاده از روش های عددی نظیر IGA, BEM, FDM, FEM می توان به جوابی تقریبی برای مسئله مورد نظر دست یافت. در این روش ها بدلیل این که حل بدست آمده کامل و واقعی نیست معادله (۱۴-۲) کاملاً ارضا نشده و باقیمانده هایی را برجا می گذارد. بطور معمول حل تقریبی ترکیبی خطی از یک سری توابع کامل با ضرائب مجهول می باشد (حل آزمایشی)^{۶۴}. این توابع کامل در مفهوم روش اجزاء محدود و ایزوژئومتری توابع شکل (SHF)^{۶۵} نامیده می شوند. باقیمانده ها نیز با استفاده از توابع وزن، روی دامنه مسئله توزیع می شوند که این توابع وزن نیز تابعی خطی از یک سری توابع کامل هستند (این تابع ترجیحاً ولی نه ضرورتاً مشابه با تابع تقریبی حل آزمایشی می باشد). روشی که شرح داده شد به روش باقیمانده های وزنی معروف است. در رابطه سازی FEM معمولاً فرض می شود که حل آزمایشی شرایط مرزی ضروری EBC را برآورده می کند، بنابراین تنها باقی مانده های معادلات تعادل و شرایط مرزی طبیعی NBC توزیع می شوند. با مشخص کردن توابع وزن با علامت W_i و با استفاده از انتگرال جزء به جزء و نیز تئوری دیورژانس معادله (۱۴-۲) بصورت ذیل نوشته می شود:

$$\int_V \sigma_{ij} w_{ij} dv - \int_V w_i b_i dv - \int_{S_p} w_i p_i ds = 0 \quad (15-2)$$

با در نظر گرفتن تقارن تانسور تنش و مشخص کردن قسمت متقارن گرادیان W_i بوسیله ε_{ij} داریم:

$$\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{ij} + w_{ji}) \quad (16-2)$$

^{۶۲} Essential Boundary Condition

^{۶۳} Natural Boundary Condition

^{۶۴} Trial solution

^{۶۵} Shape Functions

پس معادله (۲-۱۵) بصورت ذیل خلاصه می گردد:

$$(w) L(w, u)_v - (w, b)_v - (w, p)_{s_p} = 0 \quad (۱۷-۲)$$

در معادله بالا از نماد های ذیل استفاده گردیده:

$$L(w, u)_v = \int_v \varepsilon_{ij}(w) \sigma_{ij}(u) dv \quad (۱۸-۲)$$

$$(w, u)_i = \int_v w_i b_i dv$$

$$(w, u)_{s_p} = \int_s w_i p_i ds$$

باید توجه نمود که انتگرال حاصل از یک تانسور تنش متقارن با بخش نامتقارن گرادیان تغییر شکل، صفر می باشد. این نمادها ترکیب های خطی نامیده می شوند. معادله (۲-۱۷)، رابطه سازی ضعیف (W) مسائل مقداری مرزی نامیده می شود. این معادله همچنین به اصل کار مجازی یا تغییر مکانهای مجازی موسوم می باشد. معادله تعادل بدین صورت در رابطه سازی مسائل عددی استفاده می شود.

۲-۲-۳- کار مجازی بعنوان پایه و اساس روش اجزاء محدود

در این قسمت محاسبه معادلات اجزاء محدود بر اساس اصل کار مجازی تشریح می گردد. طبق این اصل فرض می شود که یک جزء محدود سه بعدی (3-D) در دستگاه مختصات کارتزین $i=1,2,3$ و X_i موجود می باشد. تغییر مکان کلی در هر نقطه، بصورت یک بردار ستونی مانند $\{U\}$ بشکل زیر نشان داده می شود:

$$U = \{U_i\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (۱۹-۲)$$

نیروی کالبدی یا حجمی نیز به همان طریق ارائه می گردد:

$$b = \{b_i\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (۲۰-۲)$$

تغییر مکانهای گره ای اجزاء بصورت ذیل تنظیم می گردند:

$$u^e = [u_{i\alpha}^e] \quad i = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2, \dots, n_{el} \quad (۲۱-۲)$$

بگونه ای که $U_{i\alpha}$ تغییر مکانهای گره ای جزء مورد نظر هستند. بطور مشابه نیروهای گره ای نیز بصورت ذیل تعریف می شوند:

$$f^e = [f_{i\alpha}^e] \quad i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2, \dots, n_{el} \quad (۲۲-۲)$$

در رابطه بالا $f_{i\alpha}$ معرف نیروهای گره ای جزء مورد نظر می باشند. تغییر مکان کلی U بشکل تابعی خطی از توابع شکل (SHF) با ضرائب مجهول بیان می شود که این ضرائب مجهول در این جا تغییر مکانهای گره ای بوده و بشکل زیر بیان می شود:

$$U_i^e = N^\alpha U_{i\alpha}^e \quad \alpha = 1, 2, \dots, n_{el} \quad (23-2)$$

یا به شکل ماتریسی

$$U = [N] U^e$$

در رابطه بالا $[N]$ ماتریسی مستطیلی شامل توابع شکل می باشد.

همانگونه که می دانیم کرنش (بی نهایت کوچک) بصورت قسمت متقارن گرادیان تغییر شکل تعریف و معمولاً به شکل ماتریسی ذیل نمایش داده می شود:

$$\varepsilon = dU \quad (24-2)$$

در رابطه بالا d اپراتور دیفرانسیلی است که رابطه کرنش - تغییر مکان را تعریف می کند. با جاگذاری U از معادله (23-2) داخل (24-2) رابطه ذیل حاصل می شود:

$$\varepsilon = B U^e \quad (25-2)$$

که در آن:

$$B = d [N] \quad (26-2)$$

ماتریس B ماتریس کرنش نامیده شده و کرنش هر نقطه در داخل جزء که ناشی از مقادیر واحد تغییر مکانهای گره ای است را بدست می دهد. رابطه تنش - کرنش مصالح الاستیک، با استفاده از قانون هوک بگونه ذیل نوشته می شود:

$$\sigma = D (\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (27-2)$$

در این معادله، D ماتریس خواص مصالح، ε_0 کرنش اولیه و σ_0 تنش اولیه هستند. با در نظر گرفتن معادله (25-2) می توان معادله (27-2) را بصورت ذیل نوشت:

$$\sigma = DBU^e - D\varepsilon_0 + \sigma_0 \quad (28-2)$$

با استفاده از این رابطه و نیز تابع وزن که بصورت ترکیبی از توابع شکل بازنویسی می شود معادله (۲-۱۷) بعد از ساده سازی کاهش یافته وبشکل زیر نوشته می شود:

$$[K^e]U^e = f^e \quad (۲-۲۹)$$

که مقادیر آن به صورت ذیل تعریف می شوند:

$$[K^e] = \int_{V_e} B^T DB \, dv \quad (۲-۳۰)$$

$$f^e = f_e + \int_{V_e} B^T (D\varepsilon_0 - \sigma_0) \, dv + \int_{V_e} [N]^T b \, dv$$

مقادیر سمت راست معادله، f^e ، بترتیب نشان دهنده بار متمرکز، بار معادل تنش و کرنش اولیه و بار معادل نیروی کالبدی یا حجمی هستند و معادله (۲-۲۹) معادله اجزاء محدود جزء مورد نظر می باشد. بدلیل آنکه معادلات حاکم بر سیستم به شکل انتگرالی هستند این معادلات را می توان با جمع سهم هر جزء بسادگی بدست آورد. فرآیند جمع بدین گونه، سوار سازی یا اجتماع^{۶۶} نامیده می شود. بنابراین با اجتماع سهم هر یک از اجزاء معادلات اجزاء محدود سیستم بشکل زیر بیان می شود:

$$[K]U = F \quad (۲-۳۱)$$

و

$$[K] = \sum_{e=1}^{nel} [K^e] \quad F = \sum_{e=1}^{nel} f^e \quad (۲-۳۲)$$

۲-۳- کرنش و خواص مصالح در مسائل صفحه ای

در این قسمت ماتریسهای کرنش و خواص مصالح برای مسائل صفحه ای بشکلی مناسب جهت برنامه نویسی کامپیوتری ارائه می شوند. برای جزئیات بیشتر در این مورد مطالعه منبع [۷] توصیه می گردد.

۲-۳-۱- تنش صفحه ای

در این نوع مسائل عناصر غیر مرتبط و خارج از تنش صفحه ای صفر فرض می شوند:

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (۲-۳۳)$$

^{۶۶} Assembling

بگونه ای که تنها لازم است سه جزء تنش و چهار جزء کرنش در نظر گرفته شوند. کرنشها بصورت ذیل محاسبه می شوند:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (۳۴-۲)$$

در رابطه بالا $\gamma_{12} = \varepsilon_{12} / 2$ موسوم به کرنش برشی مهندسی است. با جاگذاری U داخل (۳۴-۲) و بعد از ساده کردن، بدست می آید:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \quad (۳۵-۲)$$

که در آن:

$$[B] = \left[[B]_1 [B]_2 \dots [B]_{n_{el}} \right] \quad (۳۶-۲)$$

و

$$\{U\} = \left[\{U\}_1 \{U\}_2 \dots \{U\}_{n_{el}} \right]^T \quad (۳۷-۲)$$

جایی که:

$$[B]_j = \begin{bmatrix} N_{j,x} & 0 \\ 0 & N_{j,y} \\ N_{j,y} & N_{j,x} \end{bmatrix} \quad (۳۸-۲)$$

و

$$\{U\}_j = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_j \quad (۳۹-۲)$$

ماتریس ویژگی مصالح، D ، بصورت ذیل تعریف می شود:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \frac{1-\nu}{2} \quad (40-2)$$

که در آن E و ν بترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مصالح هستند. شایان توجه است که D عملاً 3×3 می باشد، ردیف و ستون چهارم بدلیل سازگاری با مسائل متقارن محوری اضافه گردیده و در محاسبات تنش صفحه ای نادیده انگاشته می شود (شکل ۲-۲-الف).

۲-۳-۲- کرنش صفحه ای

زمانی که سومین بعد جسم در مقایسه با دو بعد دیگر خیلی بزرگ باشد از کرنش در آن جهت صرف نظر می شود. برای این نوع مسائل عناصر تنش و کرنش ذیل صفر فرض می شوند:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \gamma_{23} = 0 \quad (41-2)$$

ماتریس کرنشها در این نوع مسائل مشابه با حالت تنش صفحه ای است و ماتریس خواص D بصورت ذیل تعریف می شود (شکل ۲-۲-ب)

$$D = g \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & h \\ h & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} h & 0 \\ h & h & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42-2)$$

$$, \quad g = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} h = \frac{\nu}{1-\nu}$$

با توجه به این که در این حالت تنش نرمال با صفحه صفر نیست، بنابراین جزء تنش σ_{33} در این جا بصورت ذیل بدست می آید:

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (43-2)$$

۴-۲- کرنش و خواص مصالح در مسائل متقارن محوری

مسئله توزیع تنش در اجسام مدور (اجسام متقارن محوری)، تحت بارگذاری متقارن محوری یکی از مسائل علمی جالب و قابل توجه است. ریاضیات مسئله مشابهت زیادی با مسائل صفحه ای دارد. با فرض اینکه z محور تقارن و r مختصه شعاعی باشد آنگاه کرنش بصورت ذیل بیان می شود (شکل ۲-۲-ج):

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (44-2)$$

در رابطه بالا r شعاع نقطه تحت بررسی است. با جاگذاری U_i در رابطه (۴۴-۲) رابطه ذیل حاصل می شود:

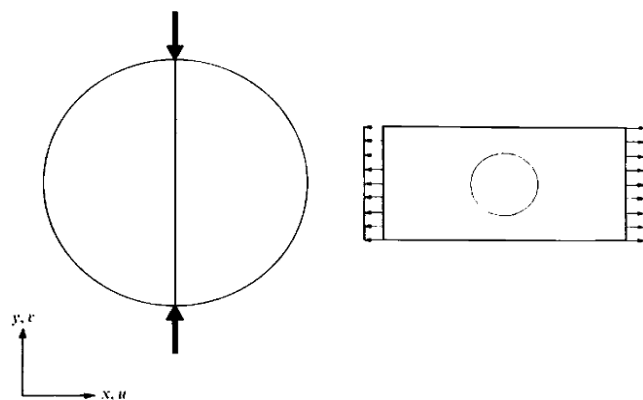
$$\varepsilon = \left[[B]_1 [B]_2 \dots [B]_{n_{el}} \right] \cdot \left[\{U\}_1 \{U\}_2 \dots \{U\}_{n_{el}} \right]^T \quad (45-2)$$

که در آن

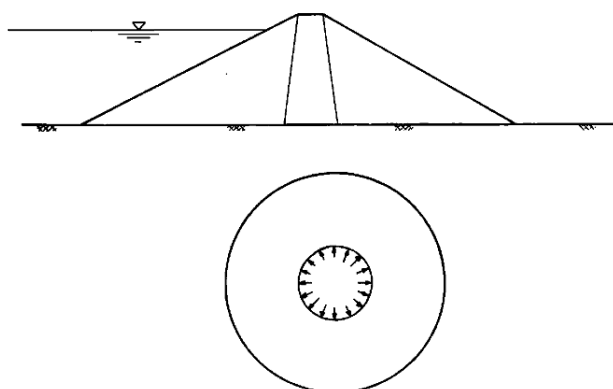
$$[B]_j = \begin{bmatrix} N_{j,r} & 0 \\ 0 & N_{j,z} \\ N_{j,r} & N_{j,z} \\ \frac{N_j}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (46-2)$$

و $\{U\}_j$ با رابطه (۳۹-۲) مشابه است. همچنین ماتریس ویژگی مصالح با حالت کرنش صفحه ای مشابه است.

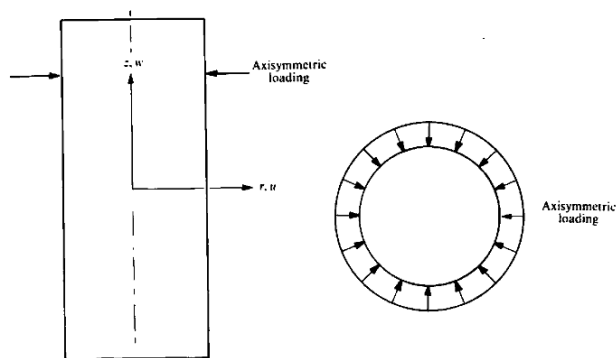
بنابراین می توان از رابطه (۴۲-۲) در این جا نیز استفاده نمود.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲-۲). انواع روش های تحلیل دوبعدی (الف) تنش صفحه ای (ب) کرنش صفحه ای (ج) متقارن محوری

۲-۵- بی-اسپلین و نرئز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی ها و سطوح بی-اسپلین و نرئز پرداخته می شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [۱۴،۴۲] و [۵۱] پیشنهاد می شود.

نربزه‌ها از بی-اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی-اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)^{۶۷} تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه مدلسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی^{۶۸} در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود [۴۲].

$$\Xi = \left\{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1} \right\}, \quad \xi_{i+1} \geq \xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n+p+1 \quad (47-2)$$

که در آن ξ_i امین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی-اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره‌ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره‌ای بنام بردارهای گره‌ای نامتناوب^{۶۹} (یا باز^{۷۰}) استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به فرم زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (48-2)$$

در این صورت i امین تابع پایه‌ای بی‌اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود [۴۲]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (49-2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی-اسپلاین از درجه P بصورت زیر تعریف می‌شود [۴۲]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (50-2)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای^{۷۱} است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه

^{۶۷} Patch

^{۶۸} Knot Vector

^{۶۹} Nonperiodic knot vector

^{۷۰} Open

^{۷۱} Piecewise polynomial curve

ای بی-اسپلاین هستند، که روی بردار گره ای نامتناوبی بصورت رابطه (۴۸-۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می شوند.

اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره ها باشند، آنگاه می توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آنها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی-اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود [۴۲]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (51-2)$$

که در آن:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} ; \quad (52-2)$$

$$\mathbf{H} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

بطوری که بردار گره ای Ξ دارای $r+1$ گره و \mathcal{H} دارای $s+1$ گره می باشد.

یک منحنی نریز از درجه p بصورت زیر تعریف می شود [۴۲]:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (53-2)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره ای بصورت رابطه (۴۸-۲) تعریف شده اند.

و در نهایت، یک سطح نریز که در جهت ξ از درجه p ، و در جهت η از درجه q باشد، بصورت زیر تعریف می شود [۴۲]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (54-2)$$

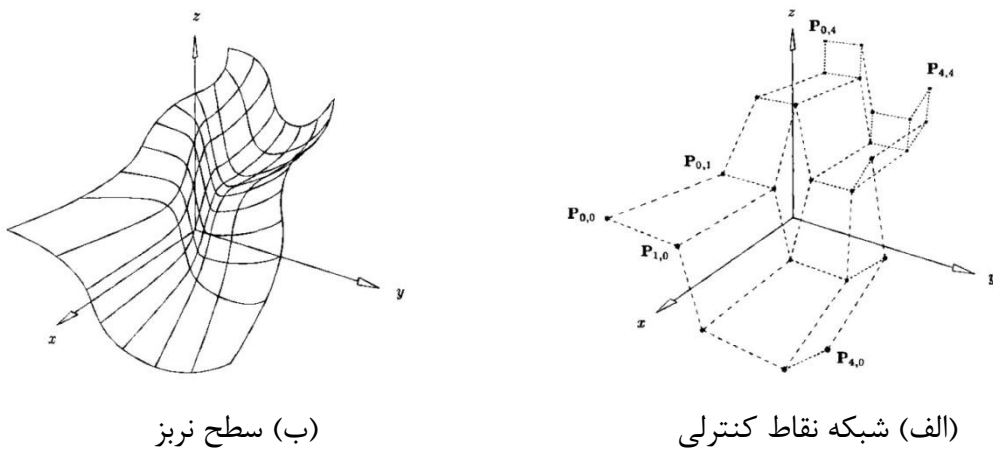
در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره ای به صورت رابطه (۵۲-۲) تعریف شده اند. در رابطه (۵۴-۲) اگر توابع پایه ای نسبی قطعه ای را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \quad (55-2)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (56-2)$$

در شکل ۲-۳ شبکه نقاط کنترلی و سطح نرئز بدست آمده از آن با توابع پایه درجه دو در جهت X و Y مشاهده می شود.



شکل ۲-۳. شبکه نقاط کنترلی و سطح نرئز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو [۳۶].

۲-۶- بنیان ریاضی روش ایزوژئومتری

به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در ایزوژئومتری، باید آن محیط را به یک محیط گسسته تبدیل نمود، این عمل در روش ایزوژئومتری با استفاده از نقاط کنترلی نرئز صورت می پذیرد. [۵۱]

همانطور که در بخش قبل اشاره شد، سطوح نرئز از یکسری توابع پایه به همراه نقاط کنترلی و بردارهای گره ای تشکیل شده است. نقاط کنترلی تشکیل دهنده شبکه ای از نقاط هستند و یک رویه نرئز را در صورت

معلوم بودن بردارهای گره ای، با مشخص نمودن نقاط کنترلی آن می توان تعریف نمود.

بطور کلی در روش ایزوژئومتری مقدار مجهول مسئله (تغییر مکان)، در نقاط کنترلی محاسبه و سپس به وسیله توابع پایه ای نربز در بقیه نقاط تقریب زده می شود.

در این روش نقاط کنترلی طوری انتخاب می شوند که مولفه های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y) ، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند؛ در اینصورت مولفه سوم مختصات این نقاط (P_z) طوری محاسبه می شود که درونیایی بین این نقاط به وسیله توابع پایه ای نربز، نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد؛ در حقیقت می توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه xy نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (z) نسبت به صفحه xy نشان دهنده مجهول مسئله در آن نقطه (تغییر مکان) باشد.

اگر هر مولفه تغییر مکان در دامنه مسئله به صورت یک صفحه در نظر گرفته شود در اینصورت با استفاده از مفهوم نربز می توان صفحه مربوط به هر مولفه تغییر مکان را در حالت دو بعدی به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_i \sum_j R_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} \quad (57-2)$$

در رابطه بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ بردار مولفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز در جهت u و v می باشد که به عنوان تنها پارامتر مجهول برای تعیین صفحه هر مولفه تغییر مکان به شمار می رود. $R_{i,j}$ ، توابع پایه ای نربز

هستند که عملکردی شبیه توابع شکل در اجزای محدود دارند. [51]

همچنین با در نظر گرفتن دستگاه مختصات نرمال $(0 \leq \xi, \eta \leq 1)$ داریم:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u i,j} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v i,j} \end{Bmatrix} \quad (58-2)$$

به دلیل خاصیت بازه تاثیر توابع نربز، تنها تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می باشند؛ در اینصورت رابطه

(58-2) معادل است با:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v k,l} \end{Bmatrix} \quad (59-2)$$

فرم ماتریسی رابطه (59-2) به صورت زیر می باشد:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{P}} \quad (60-2)$$

در رابطه بالا $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان های نقاط کنترلی، $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه ای نسبی نرئز و $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی نقاط کنترلی به صورت زیر می باشند:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T \quad (61-2)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (62-2)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = [P_{u i-p,j-q} \quad P_{v i-p,j-q} \quad \dots \quad P_{u i-p,j} \quad P_{v i-p,j} \quad \dots \quad P_{u i,j} \quad P_{v i,j}]^T \quad (63-2)$$

بعد از محاسبه تغییر مکانها همانگونه که در فرمول بندی روش اجزا محدود دیده شد، ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (64-2)$$

در این رابطه \mathbf{u} بردار تغییر مکان و \mathbf{L} عملگر دیفرانسیل می باشد که برای مسائل دو بعدی بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (65-2)$$

با جایگذاری رابطه (60-2) ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} \quad (66-2)$$

که در آن $\mathbf{B} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{R}}$ می باشد.

همچنین با فرض وجود رفتار خطی کشسان، همانگونه که در روش اجزا محدود اشاره شد، رابطه بین تنش ها و کرنش ها خطی و بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (67-2)$$

در ادامه همانند روش اجزای محدود با نگاهی گذرا و با استفاده از رهیافت کار مجازی به تشکیل ماتریس سختی می پردازیم:

در صورتی که Γ مرزهای مسئله مورد نظر با دامنه Ω ، نیروهای کالبدی و t نیروهای سطحی باشد، با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (68-2)$$

با جایگذاری روابط (60-2) و (66-2) داریم:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{P}^T B^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{P}^T \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \bar{P}^T \bar{R}^T t d\Gamma = 0 \quad (69-2)$$

همچنین با حذف $\delta \bar{P}$ و استفاده از رابطه (67-2) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} B^T D \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} B^T D \varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} B^T \sigma_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{R}^T t d\Gamma = 0 \quad (70-2)$$

و با جایگذاری رابطه (66-2) داریم:

$$\int_{\Omega} B^T D B \bar{P} d\Omega - \int_{\Omega} B^T D \varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} B^T \sigma_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{R}^T t d\Gamma = 0 \quad (71-2)$$

در صورت عدم وجود تنش و کرنش اولیه رابطه (71-2) به صورت زیر نوشته می شود:

$$K_T U = R \quad (72-2)$$

که در آن K_T ماتریس ضرایب (سختی مماسی)، U مجهولات مسئله (تغییر مکان ها) و R نیروهای خارجی وارده بر زیر دامنه می باشند؛ با استفاده از روند گام به گام نیوتن-رافسون می توان رابطه (72-2) را برای هر تکرار به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$K_T^i \Delta U^i = R^{i-1} \quad (73-2)$$

که در آن K_T ماتریس ضرایب در تکرار مورد نظر (سختی مماسی)، ΔU مجهولات مسئله در تکرار i ام (تغییرات جابجایی) و R بردار نیروهای باقیمانده وارده بر زیر دامنه در تکرار $i-1$ ام می باشند؛ که بصورت

زیر تعریف می‌شوند:

$$K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \quad (74-2)$$

و در نهایت با حل دستگاه معادلات (73-2) مجهولات مسئله (تغییر مکان ها) در تکرار مورد نظر محاسبه می‌شوند. همچنین در مسائل الاستو-پلاستیک از ماتریس D_{ep} به جای ماتریس الاستیک D استفاده می‌شود.

در روش ایزوژئومتری از توابع شکل مشابهی برای تقریب هندسه و تحلیل مسئله استفاده می‌شود. در این صورت، نقاط کنترلی و بردار گرهی یکسانی برای مدلسازی هندسی مسئله و همچنین تقریب تابع مجهول به کار می‌رود. بنابراین هندسه مسئله نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{xi,j} \quad (75-2)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{yi,j}$$

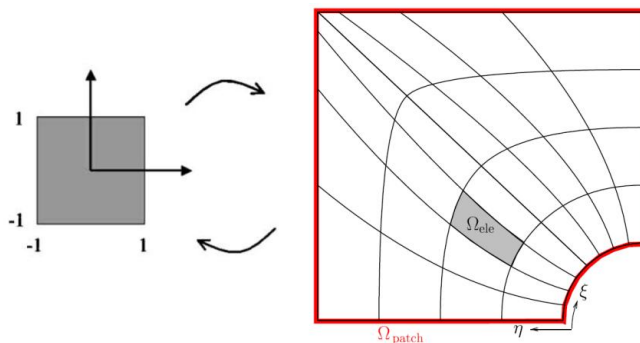
که در آن ξ, η مولفه های مختصات نرمال هستند ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$)، و $P_{xi,j}, P_{yi,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه های مختصات نقاط کنترلی می‌باشند.

در این روش برای حل عددی انتگرال ماتریس سختی از روش انتگرال گیری گوس استفاده می‌شود. بدین منظور نیاز به المان بندی دامنه مسئله داریم، تا بتوانیم از نقاط گوس و وزن های ارائه شده برای المان های چهارضلعی استفاده کنیم. عمل المان بندی در ایزوژئومتری با استفاده از دهانه های گره ای نریز انجام می‌پذیرد. بطوری که هر زیر مجموعه بصورت $[\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ یک المان نریز نامیده می‌شود. در شکل ۲-۴ نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است.

مطابق رابطه (73-2) ماتریس سختی هر زیر دامنه بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$K_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) DB(\xi, \eta) d\Omega \quad (76-2)$$

که در آن $B(\xi, \eta)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲-۴). المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای نربز [۱۴]

$$B = LR = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۷۷-۲)$$

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی به مشتقات R نسبت به x, y در دستگاه مختصات کلی نیاز داریم؛ که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نربز، ژاکوبین زیر را تعریف می کنیم:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (۷۸-۲)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \end{Bmatrix} = J_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (۷۹-۲)$$

که در آن $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ و $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ مشتقات جزئی توابع پایه ای نربز می باشند. بنابراین می توان رابطه (۷۶-۲) را بصورت

زیر نوشت:

$$K_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) DB(\xi, \eta) \det J_1 d\xi d\eta \quad (۸۰-۲)$$

در اینصورت نیاز به مقدار تابع داخل انتگرال در نقاط گوس می باشد. در المان های چهار ضلعی نقاط گوس

در دستگاه مختصات نرمال یا سرندیپیتی^{۷۲} مشخص شده است، بنابراین نیاز به یک نگاشت می باشد که مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی المان i ام را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نریز (ξ, η) منتقل کند. این نگاشت در انتگرال گیری باعث ایجاد ژاکوبینی بصورت زیر می شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad d\xi d\eta = \mathbf{J}_2 dr ds \quad (۸۱-۲)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) & , & & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 & , & & \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (۸۲-۲)$$

بنابراین رابطه ماتریس سختی (۲-۸۰) به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندیپیتی المان نوشته می شود:

^{۷۲} Serendipity coordinate

فصل سوم

پلاستیسیت

۳-۱- مقدمه :

پلاستیسیته، بعنوان رفتاری منحصر به فرد پس از رفتار الاستیک خطی شناخته می شود. این رفتار از نقطه نظر تئوری بطور خیلی گسترده توسط محققان تحت مطالعه قرار گرفته است. پدیده مزبور در اصل توسط کرنشی ماندگار و غیر قابل برگشت در مصالح مربوط مشخص می شود؛ که این کرنش وابسته زمانی نبوده و تنها یک مرتبه می تواند سطح تنش معینی به نام حد تسلیم^{۷۳} را متحمل شود. برای رابطه سازی تئوری که رفتار مصالح الاستو-پلاستیک تغییر شکل پذیر را نشان دهد، چهار التزام ذیل باید مد نظر قرار داده شوند:

۱- رابطه تنش - کرنشی باید برای رفتار مصالح تحت شرایط الاستیک تعریف شود، یعنی قبل از شروع تغییر شکل پلاستیک مصالح.

۲- یک ملاک تسلیم جهت تشخیص سطح تنش برای شروع جریان پلاستیک ایجاد گردد.

۳- قانون جریانی باید برای تعریف رابطه بین تنش و کرنش پلاستیک فرض گرفته شود.

۴- رابطه ای بین تنش و کرنش برای رفتار پس از تسلیم برای زمانی که رفتار مصالح ترکیبی از هر دو حالت الاستیسیته و پلاستیسیته است، می بایست ایجاد گردد (قوانین سخت شوندگی تنش و نرم شوندگی کرنش). اولین التزام از التزام های بالا با استفاده از قانون هوک^{۷۴} برقرار می شود. التزامهای دیگر بطور خلاصه در قسمت های ذیل مورد بحث قرار می گیرند.

۳-۲- ملاک تسلیم^{۷۵} :

در پلاستیسیته برای اندازه گیری مقدار تنشی که در آن مقدار تغییر شکل پلاستیک آغاز می گردد، ملاک تسلیمی در نظر گرفته می شود. این ملاک تسلیم را می توان به شکل کلی ذیل نوشت:

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - K(k) = 0 \quad (۱-۳)$$

در این رابطه f تابعی از σ بوده و K مشخصه مصالح است که بگونه تجربی و آزمایشگاهی تعیین می شود که K می تواند تابعی از مشخصه سخت شوندگی k باشد ملاک تسلیم را می توان بصورت سطحی در

^{۷۳} Yield limit

^{۷۴} Hook law

^{۷۵} The Yield criterion

فضای تنش، وابسته به مقدار آنی مشخصه k ، تصور نمود. از نقطه نظر فیزیکی هر ملاک تسلیم باید مستقل از سیستم مختصات انتخابی باشد. بنابراین در عبارتی از نامتغیرهای تنش^{۷۶} که عبارتند از I_1, I_2, I_3 تعریف می شود. بنابر مشاهدات تجربی و آزمایشگاهی فرض می شود که تغییر شکل فلزات، اساساً مستقل از فشار هیدروستاتیک است. نتیجتاً در فلزات ملاک تسلیم بصورت تابعی از نامتغیرهای تنش انحرافی^{۷۷} یعنی $J_2, J_3 (J=0)$ تعریف می شود. تعدادی از ملاک هایی که در این رابطه در نظر گرفته شده در ذیل تشریح می گردند.

۳-۲-۱- ملاک ترسکا^{۷۸} (۱۸۶۴):

طبق این ملاک، تسلیم زمانی آغاز می شود که تنش برشی ماکزیمم به مقدار مشخص K برسد. اگر تنشهای اصلی توسط $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ تعریف شوند و شرط $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ نیز برقرار باشد، آنگاه تسلیم زمانی آغاز می شود که:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2K(k) \quad (۲-۳)$$

با بکارگیری رابطه بالا برای حالت یک بعدی، مقدار $K = Y/2$ بدست می آید که در این رابطه Y تنش تسلیم در آزمایش کشش یک محوری می باشد. در فضای تنش های اصلی این ملاک بصورت سطح یک منشور شش گوشه طویل نامحدود نمایش داده می شود. محور منشور با فضای قطری تعریف شده توسط نقاطی که دارای شرط $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ هستند، منطبق می شود (محور هیدروستاتیک^{۷۹}). بدلیل این که هر مقطع نرمال با منشور عیناً با هم برابر هستند، بنابراین بجا ست نمایش سطح تسلیم بطور هندسی بوسیله ترسیم آن روی صفحه ای موسوم به (صفحه- $\pi^{\wedge 0}$) یا (صفحه انحرافی^{۸۱}) که برای آن $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ صادق می باشد.

^{۷۶} Stress Invariant

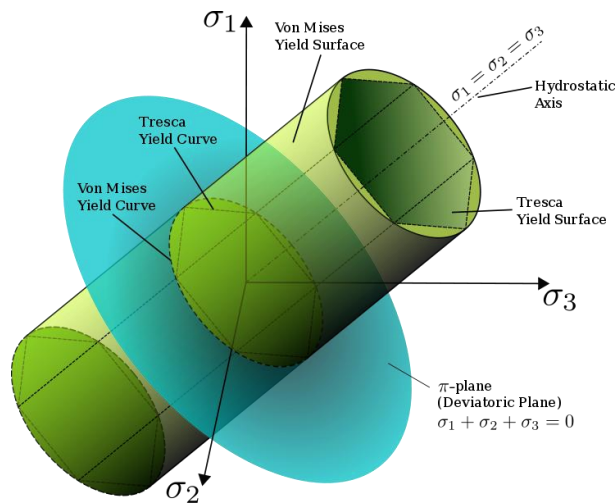
^{۷۷} Invariants of deviatoric stress

^{۷۸} The Tresca criterion

^{۷۹} Hydrostatic axis

^{۸۰} Π -plane

^{۸۱} Deviatoric-plane



شکل ۳-۱). نمایش هندسی سطوح تسلیم ترسکا و وان میسز در فضای تنش های اصلی

۳-۲-۲- ملاک وان میسز^{۸۲} (۱۹۱۳):

وان میسز پیشنهاد نمود، تسلیم زمانی رخ می دهد که دومین نامتغیر تنش انحرافی، J_2 ، به یک مقدار بحرانی برسد. ملاک وان میسز را می توان بصورت ذیل نوشت:

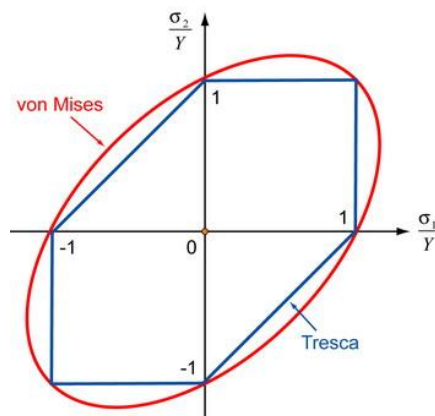
$$J_2^{\frac{1}{2}} = K(k) \quad (3-3)$$

با استفاده از این رابطه برای حالت یک محوری، می توان نشان داد که $K = Y/\sqrt{3}$ است. از نظر هندسی این ملاک بصورت استوانه ای دایروی طویل و نامحدود نمایش داده می شود. استوانه وان میسز منشور ترسکا را احاطه می کند. تقاطع استوانه وان میسز با صفحه- π ، دایره ای به شعاع $\sqrt{2/3}Y$ را بدست می دهد. در بین مصالح مختلف، داده های بدست آمده از آزمایش بر روی فلزات بیش از دیگر مصالح، ما بین معیار وان میسز و ترسکا قرار می گیرند که این داده ها به ملاک وان میسز نزدیک تر هستند. در تحلیل پلاستیک فلزات بطور وسیعی از ملاک وان میسز بدلیل سادگی و کاربری آن استفاده می شود. اگر در تحلیل پلاستیک از ملاک ترسکا استفاده شود برای اصلاح دقت نتایج می توان با جایگزین نمودن $2K$ با mY به نتایج بهتری دست یافت. ضریب m در این جا عددی است که با استفاده از تجارب آزمایشگاهی تعیین می شود و معمولاً داری مقداری بین ۱ و ۱/۱۵۵۵ می باشد.

در مصالحی نظیر خاک، سنگ، سرامیک و بتن پدیده ای مشابه با پلاستیسیته در آنها رخ می دهد. سطح

^{۸۲} The Von-Misses criterion

تسلیم در این نوع مصالح نه تنها وابسته به تنش انحرافی (برش)، بگونه ای که درملاک وان میسر است، می باشد؛ بلکه به بزرگی میانگین تنشهای فشاری (فشار هیدروستاتیک) نیز وابسته است. ملاکهای موهر-کولمب و دارکر-پراگر از جمله ملاک هایی هستند که برای این نوع مصالح پیشنهاد شده اند.



شکل ۳-۲). فرم ساده مهندسی حدود مرزی تسلیم ترسکا و وان میسر

۳-۲-۳- ملاک موهر - کولمب^{۸۳} (۱۷۳۷):

این ملاک تعمیمی از قانون گسیختگی اصطکاکی کولمب بوده وبصورت ذیل تعریف می شود:

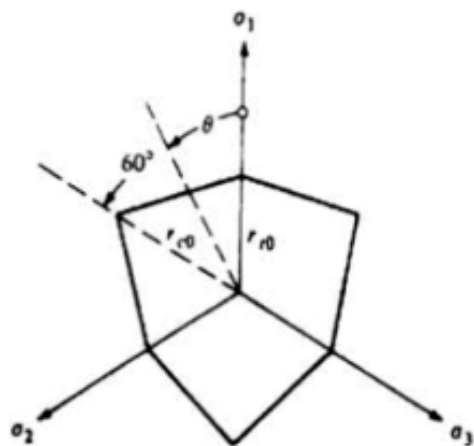
$$\tau = c - \sigma_n \tan \Phi_n \quad (۴-۳)$$

در این رابط τ تنش برشی، σ_n تنش نرمال (کششی مثبت)، C ضریب چسبندگی و Φ_n زاویه اصطکاک داخلی مصالح است. از نظر هندسی معادله ۴-۳ نشان دهنده خط مستقیمی مماس بر بزرگترین دایره تنشهای اصلی است. رابطه ۴-۳ را با استفاده از تنشهای اصلی می توان بصورت ذیل نوشت:

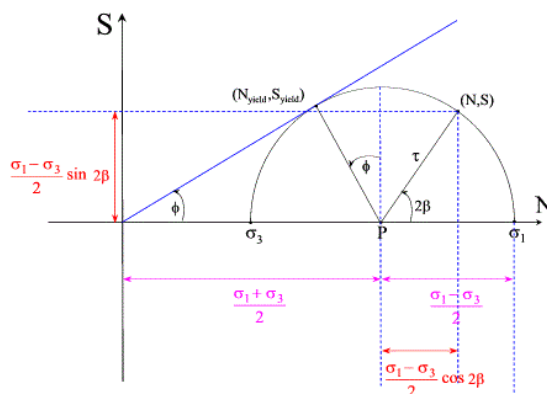
$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2C \cos \Phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \Phi \quad (۵-۳)$$

در فضای تنشهای اصلی این ابعاد نمایش دهنده سطحی مخروطی شکل می باشد، که مقطع نرمال در هر نقطه آن یک شش گوشه بی قاعده می باشد. ارجحیت سطح تسلیم مخروطی بر استوانه ای ناشی از تاثیر فشار هیدروستاتیکی در این ملاک می باشد.

^{۸۳} The Mohr-Columb criterion

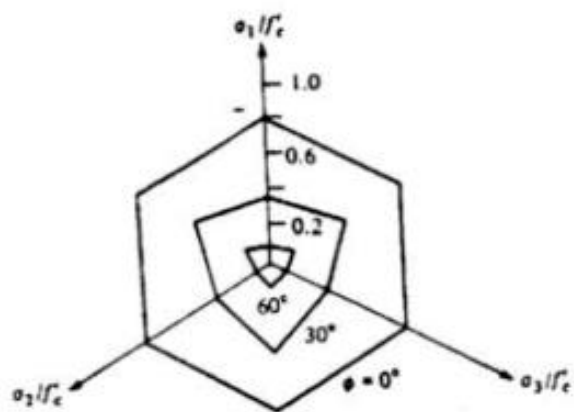


(ب)

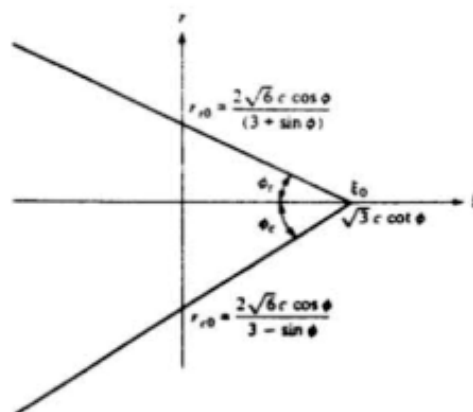


(الف)

شکل ۳-۳. (الف) دایره موهر و حد تسلیم موهر-کلمب (ب) صفحه π



(ب)



(الف)

شکل ۳-۴. (الف) صفحه نصف النهاری $\theta=0$ (ب) منحنی گسیختگی در صفحه انحرافی

۳-۲-۴- ملاک دراکر- پراگر^{۸۴} (۱۹۵۲):

این ملاک بصورت ذیل بیان می شود:

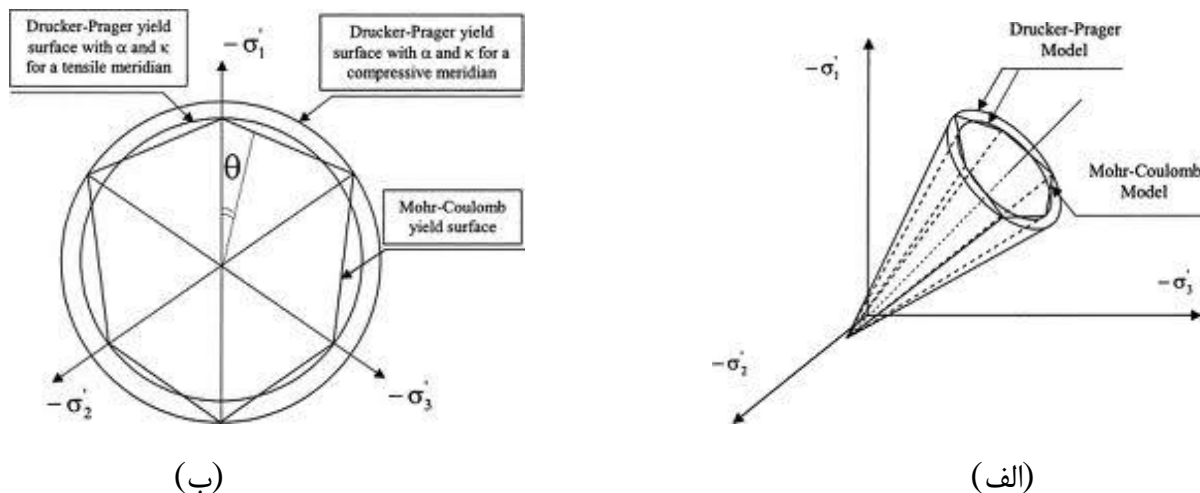
$$\alpha I_1 + J_2^{\frac{1}{2}} = K \quad (۶-۳)$$

این ملاک عملاً از اصلاح ملاک وان میسر توسط اضافه نمودن αI_1 برای وارد نمودن اثر فشار هیدروستاتیکی، بدست می آید. نمایش گرافیکی این ملاک، یک مخروط مدور می باشد. برای ایجاد انطباق این ملاک با رئوس بیرونی شش ضلعی موهر- کولمب، در هر مقطع از این ملاک α و K باید بصورت ذیل محاسبه شوند:

$$\alpha = \frac{2 \sin \Phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi)} \quad K = \frac{6 \cos \Phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi)} \quad (۷-۳)$$

انطباق با رئوس داخلی شش ضلعی موهر- کولمب توسط مقادیر ذیل مهیا می شود:

$$\alpha = \frac{2 \sin \Phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \Phi)} \quad K = \frac{6 \cos \Phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \Phi)} \quad (۸-۳)$$



شکل ۳-۵. نمایش هندسی سطح تسلیم موهر - کولمب و دراکر - پراگر

در برنامه نوشته شده تنها از این چهار ملاک ذکر شده استفاده می شود.

۳-۳- اشکال مختلف ملاک های تسلیم در محاسبات عددی :

برای محاسبات عددی، بازنویسی ملاک تسلیم بشکلی دیگر وبا استفاده از نامتغیر های تنش مناسب بوده

^{۸۴} The Drucker-Pruger criterion

و برای برنامه نویسی راحت تر و کارآمد می باشد [۴۳]. نتیجه اصلی حاصل از این کار در این است که، برنامه نویسی کامپیوتری ملاک تسلیم وقانون جریان را می توان بشکلی مشابه انجام داد. با این شیوه، تنها تعیین سه ضریب برای هر ملاک منحصر بفرد لازم می باشد. با این روش تنش های اصلی، از این رابطه زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2(J_2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\Psi_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\Psi_0) \\ \sin\left(\Psi_0 + \frac{4\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} + \sigma_m \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (9-3)$$

در رابطه بالا $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ، $-\pi/6 \leq \Psi \leq \pi/6$ ، $\sigma_m = I_1/3$ ، بوده و Ψ_0 برای 3Ψ در بازه $\frac{\pi}{2}$ بصورت اولین ریشه معادله ذیل محاسبه می شود:

$$\sin 3\Psi = -\frac{4J_3}{r^3} \quad rJ = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{\frac{1}{2}} \quad (10-3)$$

بنابراین بجای J_3, J_2, I_1 می توان از σ_m ، $(J_2)^{\frac{1}{2}}$ و Ψ_0 بعنوان نامتغیرهای جدید استفاده نمود. حال با استفاده از این نامتغیرهای جدید، ملاک های تسلیم مورد بحث در قسمت های قبلی را می توان بصورت ذیل توصیف نمود:

۳-۳-۱- ملاک ترسکا:

با جانشین سازی اجزاء تنشهای اصلی از معادله (۹-۳) داخل معادله (۲-۳) و بسط \sin ، این ملاک بصورت ذیل نوشته می شود:

$$2(J_2)^{\frac{1}{2}} \cos \Psi_0 = 2k \quad (11-3)$$

۳-۳-۲- ملاک وان میسز:

بدلیل این که ملاک مزبور فقط به دومین نامتغیر تنش انحرافی وابسته است، بنابراین تغییری در رابطه آن ایجاد نمی شود.

۳-۳-۳- ملاک موهر - کولمب :

با جانشین سازی رابطه (۳-۹) داخل رابطه (۳-۵) بدست می آید:

$$\frac{1}{3}I_1 \sin \Phi + (J_2)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \Psi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \Psi_0 \sin \Phi \right) = C \cos \Phi \quad (12-3)$$

۳-۳-۴- ملاک دارکر - پراگر :

این ملاک بدون تغییر باقی می ماند.

قانون جریان که موضوع مبحث بعدی است، با استفاده از بردار نرمال a تعریف می گردد. برای بیان این بردار

به گونه ای مناسب برای محاسبات عددی ، همواره می توان نوشت :

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \left(J_2^{\frac{1}{2}} \right)} \frac{\partial \left(J_2^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \Psi_0} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} \quad (13-3)$$

که در آن:

$$\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}]^T \quad (14-3)$$

با جاگذاری دیفرانسیل معادله (۳-۱۰) در معادله (۳-۱۳) و ساده کردن آن بدست می آید:

$$a = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad (15-3)$$

که در آن:

$$a_1^T = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (16-3)$$

$$a_2^T = \frac{\partial \left(J_2^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial \sigma} = \frac{I}{2 \left(J_2^{\frac{1}{2}} \right)} (S_{11}, S_{22}, S_{33}, 2\tau_{12}, 2\tau_{23}, 2\tau_{31})$$

$$a_3^T = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left(S_{22} S_{33} - \tau_{23}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(S_{11} S_{33} - \tau_{13}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right.$$

$$\left. \left(S_{11} S_{33} - \tau_{13}^2 + \frac{J_2}{3} \right), 2(\tau_{13} \tau_{23} - S_{33} \tau_{12}), \right.$$

$$\left. 2(\tau_{12} \tau_{13} - S_{11} \tau_{23}), 2(\tau_{12} \tau_{23} - S_{22} \tau_{13}) \right\}$$

$$C_1 = \frac{\partial f}{\partial I_1} \quad (17-3)$$

$$C_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial (J_2)} - \frac{\tan 3\Psi_0}{(J_2)} \frac{\partial f}{\partial \Psi_0} \right)$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2(J_2)^{\frac{1}{2}} \cos 3\Psi_0} \frac{\partial f}{\partial \Psi_0}$$

در روابط قبل:

$$S = S_{11}, S_{22}, S_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}^T \quad (18-3)$$

که به عنوان بردار تنش انحرافی شناخته می شود. همانگونه که مشاهده می گردد، تنها ضرائب C_3, C_2, C_1 به ملاک تسلیم ربط داشته و بنابراین تعریف این ضرائب در معادله ۳-۱۵ لازم و ضروری است. برای ملاکهایی که در این پژوهش مد نظر قرار می گیرند، این ضرائب در جدول ۳-۱ نشان داده شده اند. باید توجه نمود که برای $\Psi_0 = \pi/6$ این ثابتها را نمی توان از جدول محاسبه نمود. به همین دلیل در حالت ترسکا از مقادیر زیر استفاده می شود:

$$C_1 = 0, C_2 = \sqrt{3}, C_3 = 0 \Rightarrow \Psi_0 = \pm \frac{\pi}{2} \quad (19-3)$$

این مقادیر عملاً نشان دهنده این مطلبند که جهت جریان پلاستیک در گوشه های سطح تسلیم ترسکا نرمال با سطح وان میسز که از گوشه ها می گذرد. فرض می شود به همین منوال برای ملاک موهر-کولمب نیز از مقادیر ذیل استفاده می شود:

$$C_1 = \frac{1}{3} \sin \Phi, C_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sin \Phi}{\sqrt{3}} \right), C_3 = 0 \Rightarrow \Psi_0 = \frac{\pi}{6} \quad (20-3)$$

$$C_1 = \frac{1}{3} \sin \Phi, C_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sin \Phi}{\sqrt{3}} \right), C_3 = 0 \Rightarrow \Psi_0 = -\frac{\pi}{6}$$

از نظر فیزیکی، این تمهیدات با گرد کردن گوشه های سطح تسلیم متناظر است. لازم به ذکر است که در

معادله (۱-۳)، $f(\sigma)$ ، تنش موثر^{۸۵} نامیده می شود. در خاتمه برای تکمیل این مبحث، تنش موثر و تنش تسلیم تک_محوری (یا تنش تسلیم معادل) متناظر با ملاکهایی که تاکنون مطرح شده، در جدول ۲-۳ نشان داده شده است.

جدول (۱-۳). مقادیر ثابت های C_3, C_2, C_1 برای ملاک های تسلیم مختلف

ملاک تسلیم	C_1	C_2	C_3
T	0	$2\cos\Psi_0(1+\tan\Psi_0\tan3\Psi_0)$	$\frac{\sqrt{3}}{J_2} \cdot \frac{\sin\Psi_0}{\cos3\Psi_0}$
VM	0	$\sqrt{3}$	0
M-C	$\frac{1}{3}\sin\Phi$	$\cos\Psi_0[(1+\tan\Psi_0\tan3\Psi_0) + \sin\Phi(\tan3\Psi_0 - \tan\Psi_0)/\sqrt{3}]$	$\frac{\sqrt{3}\sin\Psi_0 + \Psi_0\sin\Phi}{2J_2\cos3\Psi_0}$
Dr-Pr	α	1	0

توضیح: T: ترسکا، VM: وان میسز، M-C: موهر-کولمب، Dr-Pr: دارکر-پراگر

جدول (۲-۳). تنشهای یک محوری موثر (یا معادل)

ملاک تسلیم	تنش موثر	تنش تسلیم
ترسکا	$2(J_2)^{\frac{1}{2}}\cos\Psi_0$	Y
وان میسز	$\sqrt{3}(J_2)^{\frac{1}{2}}$	Y
موهر-کولمب	$\frac{1}{3}I_1\sin\Phi + J_2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\Psi_0 - \frac{\sin\Psi_0\sin\Phi}{\sqrt{3}}\right)$	$\cos\Phi$
دارکر-پراگر	$\alpha I_1 + J_2^{\frac{1}{2}}$	K

^{۸۵} Effective Stress

۳-۴- مفهوم سخت شوندگی کار و کرنش :

قبل از معرفی قانون جریان، مفهوم سخت شوندگی کار و سخت شوندگی کرنش تشریح می گردد. پس از تسلیم، تراز تنشی که در آن تغییر شکل پلاستیک بیشتری رخ می دهد را می توان به مقدار کرنش پلاستیک جاری آن مرتبط دانست. چنین پدیده ای به سخت شوندگی کرنش^{۸۶} یا سخت شوندگی کار^{۸۷} مصطلح می باشد. بنابراین سطح تسلیم در هر حالت تغییر شکل پلاستیک با سطح تسلیم بعدی، بسته به کرنش پلاستیک تغییر خواهد نمود.

اگر سطح تسلیم مصالحی با درجه پلاستیک شدنش به هیچ طریقی در ارتباط و وابسته نباشد؛ مصالح مزبور کاملاً پلاستیک^{۸۸} نامیده می شود. اگر سطح تسلیم بعدی گسترش یکنواختی از سطح تسلیم اصلی ولی بدون حرکت انتقالی باشد، سخت شوندگی کرنش مربوطه از نوع «آیزوتروپیک» است. از سوی دیگر اگر سطوح بعدی شکل وجهشان حفظ شود اما در فضای تنش بصورت یک جسم صلب حرکت انتقالی داشته باشند سخت شوندگی کرنش مربوطه از نوع «کینماتیک» می باشد. مفهوم سخت شوندگی کینماتیک از مشاهدات آزمایشگاهی اثر بوشینگر^{۸۹} در بارگذاری سیکلیک یا متناوب برداشت شده است. شکل ۳-۶ این مفاهیم را به تصویر می کشد. برای برخی مصالح سطح تسلیم ممکن است به سخت شوندگی کرنش نرسد اما به نرم شوندگی کرنش دست یابد یعنی سطح تنش تسلیم در یک نقطه با افزایش تغییر شکل‌های پلاستیک کاهش می یابد. بنابراین برای نوع آیزو پارامتریک، گسترش سطح تسلیم بصورت تصاعدی و بدون حرکت انتقالی قرارداد می شود. نتیجتاً تسلیم بر گسیختگی محلی دلالت داشته و توسعه تصاعدی سطح تسلیم را می توان بوسیله رابطه بین تنش تسلیم Y با تغییر شکل پلاستیک تعریف نمود. درجه سخت شوندگی کار را می توان تابعی از کار پلاستیک کل (W_p) فرض نمود. بنابراین:

$$Y = W_p \quad (۳-۲۱)$$

که در آن:

^{۸۶} Strain Hardening

^{۸۷} Work Hardening

^{۸۸} Perfectly Plastic

^{۸۹} Bauschinger effect

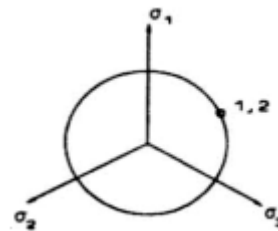
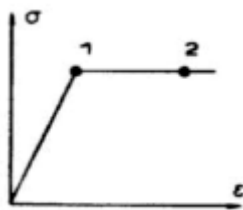
$$W_p = \int_{\sigma} d\varepsilon_{ij}^p \quad (22-3)$$

که در رابطه بالا $d\varepsilon_{ij}^p$ عبارتند از اجزاء کرنش پلاستیک هنگامی که افزایش کرنش رخ می دهد. نتیجتاً γ را می توان با اندازه تغییر شکل کل بازگو نمود، که این تغییر شکل به کرنش پلاستیک موثر (یا معادل) مصطلح بوده وبشکل افزایشی ذیل تعریف می شود:

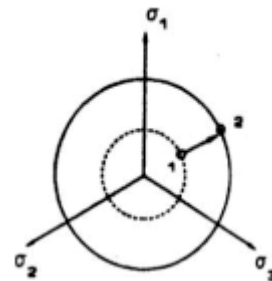
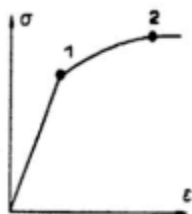
$$\overline{d\varepsilon^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} (d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (23-3)$$

اگر تنش تسلیم بفرص مستقل از فشار هیدروستاتیک باشد، آنگاه $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ (پلاستیک تراکم ناپذیر) صفر می شود و بنابراین معادله ۲۳-۳ را می توان بصورت ذیل نوشت:

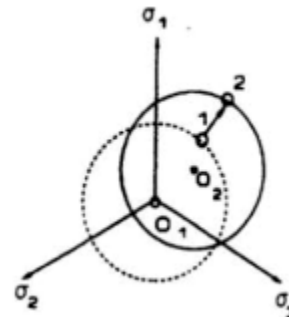
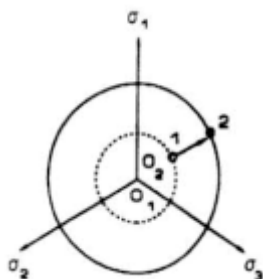
$$\overline{d\varepsilon^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} (dS_{ij}^p \cdot dS_{ij}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (24-3)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳-۶. مفاهیم مختلف سخت شوندگی

(الف) پلاستیسیته کامل (ب) سخت شوندگی کرنش (ج) سخت شوندگی آیزوتروپیک و کینماتیک

در معادله بالا S_{ij} بعنوان کرنش انحرافی تعریف می گردد. سپس پارامتر سخت شوندگی K توسط رابطه ذیل تعریف می شود:

$$K = \bar{\varepsilon}^p = \int d\bar{\varepsilon}^p \quad (25-3)$$

انتگرال در رابطه بالا در بازه کرنشها انجام می گیرد. رفتار تشریح شده در بالا به سخت شوندگی کرنش موسوم است. نرخ تنشی که در آن $F-K=0$ باشد، زمانی بیان کننده حالت پلاستیک است که رفتار الاستیک بوسیله $F-K < 0$ توصیف گردد. در حالت پلاستیک تغییر افزایشی در تابع تسلیم ناشی از یک تغییر افزایشی در تنش موردنظر می باشد. این را می توان با رابطه ذیل نمایش داد:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma \quad (26-3)$$

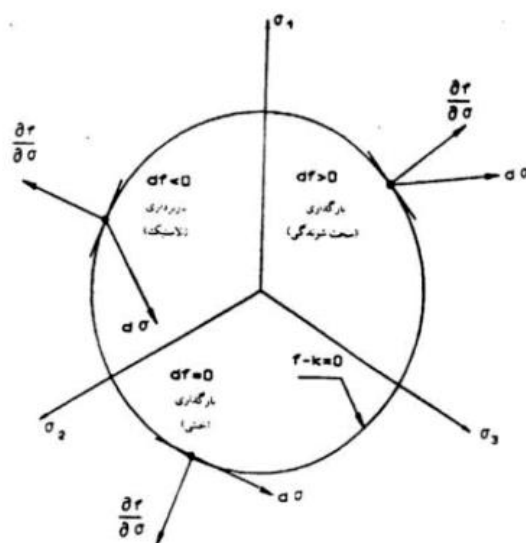
حال براساس df می توان تنش را بصورت ذیل توصیف نمود:

$df < 0$: زمانی که این شرط برقرار باشد باربرداری الاستیک رخ داده ونقطه تحت تنش به داخل سطح تسلیم برمی گردد.

$df = 0$: این شرط به معنی بارگذاری خنثی یا به عبارت دیگر، کاملا پلاستیک است.

$df > 0$: شرط آخر به معنی سخت شوندگی پلاستیک می باشد.

شرایط بالا در شکل ۳-۷ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۳-۷). مفاهیم بارگذاری و باربرداری

۳-۵- قانون جریان :

در تئوری پلاستیسیته قانون جریان برای ارزیابی اجزاء کرنش پلاستیک افزایشی، جهت یک افزایش تنش داده شده هنگام پاسخ غیر الاستیک سازه، تعریف می شود. کرنش پلاستیک بوسیله گرادیان تابع پتانسیل g بصورت ذیل تعریف می گردد:

$$d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \lambda b \quad (27-3)$$

یا

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (28-3)$$

در روابط بالا λ یک ثابت تناسب و مثبت بوده که باید مقداری برای آن در نظر گرفته شود و g نیز تابع پتانسیل است. این قانون موسوم به اصل بهنجاری می باشد زیرا معادله (۲۷-۳) را می توان بصورت التزام بهنجاری بردار افزایش کرنش به سطح پتانسیل در فضای تنش تفسیر نمود. اگر تابع پتانسیل g مشابه با تابع تسلیم f فرض شود، تئوری مزبور پلاستیسیته پیوسته نامیده می شود و در غیر این صورت به پلاستیسیته ناپیوسته موسوم است.

۳-۶- رابطه تنش - کرنش پس از تسلیم (الاستو-پلاستیک):

دیفرانسیل تابع تسلیم معادله ۱-۳ را می توان بصورت ذیل بیان نمود:

$$dF = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (29-3)$$

یا

$$dF = a^T d\sigma - H \lambda \quad (30-3)$$

که در آن:

$$a^T = \frac{\partial F^T}{\partial \sigma} = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{13}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{23}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{31}} \quad (31-3)$$

و

$$H = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial K}{\partial k} dk \quad (32-3)$$

بردار a ، بردار جریان (نرمال) نامیده شده و H موسوم به مدول سخت شوندگی است. از سوی دیگر فرض بر آن است که:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = d\varepsilon^e + \lambda b \quad (33-3)$$

که در آن $d\varepsilon^e$ و $d\varepsilon^p$ بترتیب سهم افزایش کرنش الاستیک و افزایش کرنش پلاستیک از افزایش کرنش کلی $d\varepsilon$ می باشند. این معادله نشان دهنده این است که نرخ کرنش کل، جمع سهم های الاستیک و پلاستیک است. یاد آوری می شود که λ برای الاستیک و باربرداری برابر با صفر در نظر گرفته می شود. برای بارگذاری، ضریب λ را می توان با این شرط که یک جزء محدود پس از جاری شدن در حالت پلاستیک باقی می ماند، بدست آورد. با ضرب هر دو قسمت معادله (32-3) در $a^T D$ و جانشین سازی $a^T d\sigma$ از معادله (30-3)، λ بصورت ذیل بدست می آید:

$$\lambda = \frac{a^T \cdot D \cdot d\varepsilon}{H + a^T \cdot D \cdot b} \quad (34-3)$$

نهایتاً با ضرب هر دو قسمت معادله (33-3) در D و جاگذاری λ از معادله (34-3) رابطه تنش-کرنش برای رفتار پس از تسلیم بصورت ذیل بیان می شود:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (35-3)$$

که در آن:

$$D_{ep} = \left[D - \frac{D b a^T \cdot D}{H + a^T \cdot D \cdot b} \right] \quad (36-3)$$

در رابطه بالا D_{ep} ماتریس خواص الاستو-پلاستیک نامیده می شود. با در نظر گرفتن مفهوم سخت شوندگی کرنش و کرنش معادل می توان نشان داد که H ممکن است به صورت مدول تک محوری تنش-کرنش پلاستیک مصالح مطرح شود. مدول سخت شوندگی، نرخ کرنش پلاستیک را کنترل می کند، به همان صورتی که مدول یانگ نرخ کرنش الاستیک را تحت کنترل دارد. برای یک منحنی تنش-کرنش تک محوری با مدول الاستیک E و مدول الاستو-پلاستیک E_p ، مدول سخت شوندگی را می توان بصورت ذیل

محاسبه نمود:

$$H = \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} \quad (37-3)$$

در محاسبات عددی جهت تعیین مقداری برای H از گرایشهای خاصی پیروی می شود. مقدار H برای شرایط الاستیک- کاملاً پلاستیک صفر در نظر گرفته شده ($H=0$) و برای سخت شوندگی یا نرم شوندگی کرنش خطی معمولاً E_t داده می شود. بنابراین از معادله (37-3) آن را می توان محاسبه نمود. برای سخت شوندگی غیر خطی، دادن مختصات نقاط روی یک دیاگرام تنش-کرنش پلاستیک آسان تر می باشد. برای این وضعیت بسته به مقدار کرنش پلاستیک بدست آمده، مقدار متناظر H توسط اینترپولاسیون محاسبه می شود. یا از طریق یک منحنی مناسب دیگر می توان آن را محاسبه نمود. شایان توجه است که معادلات (3-35) و (36-3) از آن لحظه معتبر هستند که نرخ تنش به سطح تسلیم رسیده باشد، بدان معنی که $f = k$ باشد. برای افزایش های محدود عبور مختصر تنش ها از سطح تسلیم امکان پذیر می شود. بنابراین تنش ها باید تصحیح گردند (بعبارتی به سطح تسلیم کاهش داده شوند).

3-7- به روز رسانی (به هنگام نمودن) تنش ها و رساندن به سطح تسلیم :

در تحلیل الاستو-پلاستیک از یک روش تکرار-افزایشی استفاده می شود. با فرض اینکه در یک نقطه شاخص (نقطه گوس) در داخل جزء حل همگرا شده از قبل در دسترس است. محاسبات گام زمانی موجود مکرراً انجام می گردد. نیروی بکار برده شده در i امین تکرار برابر با نیروی باقیمانده از تکرار قبلی گرفته می شود. برای اولین تکرار نیروی باقیمانده برابر با نیروی افزایشی گام جاری می باشد. روش مزبور را می توان در گام ها ذیل خلاصه نمود. شایان توجه این که گام های ذیل با شکل 3-8 در ارتباط هستند:

OA : نرخ تنش در شروع تکرار J .

$AC = Dd\sigma$: افزایش تنش مبتنی بر رفتار الاستیک.

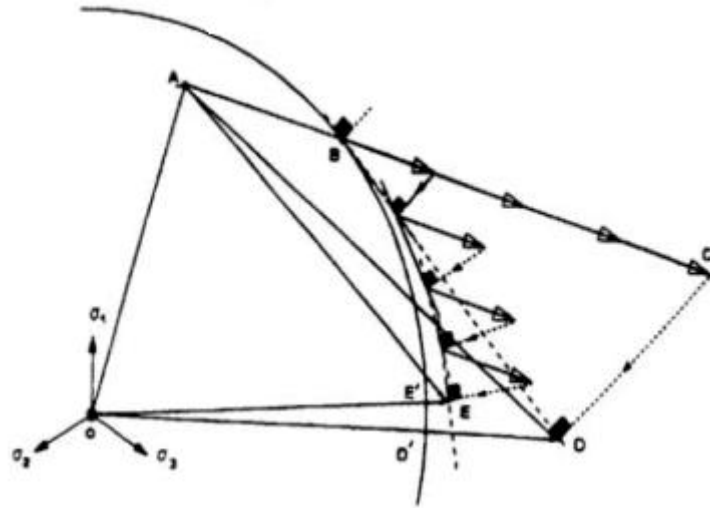
AD : افزایش تنش تصحیح شده (تنش اضافی BC در یک گام کاهش داده می شود).

OD : نرخ تنش تصحیح شده (تنش اضافی در یک گام کاهش داده می شود).

AE: افزایش تنش تصحیح شده (تنش اضافی در چهار گام کاهش داده می شود).

OE: نرخ تنش تصحیح شده (تنش اضافی در چهار گام کاهش داده می شود).

OE': نرخ تنش نهایی (OE' مقدار مناسب تری برای OE می باشد).



شکل ۳-۸). کاهش نرخ تنش به سطح تسلیم

گام ۱- متناظر با نیروی وارد شده در تکرار j ، تغییر مکان افزایشی du^j محاسبه می شود.

گام ۲- با فرض رفتار الاستیک افزایش تنش و کرنش $d\varepsilon_e^j, Dd\varepsilon_e^j = (AC)d\sigma_e^j$ محاسبه می شود. در این رابطه زیر نویس e مشخص کننده رفتار الاستیک است.

گام ۳- جمع تنش ها

$$\sigma_e^j = \sigma_e^{j-1} + d\sigma_e^j \quad (OC) \quad (38-3)$$

گام ۴- این گام بستگی به این دارد که آیا در تکرار $(j-1)$ تسلیم بوقوع پیوسته یا نه. بنابراین شرط

$$\sigma_e^{j-1} > Y + H \varepsilon_p^{j-1}$$

را کنترل می کنیم. دو حالت در این کنترل ممکن است روی دهد:

(الف)- اگر نقطه تحت تنش در تکرار قبلی تسلیم شده باشد آنگاه $\sigma_e^j < \sigma_e^{j-1}$ می شود که این دلالت بر

این دارد که تنش هنوز در حال افزایش است. تحت این شرط کل تنش اضافی باید به سطح تسلیم کاهش

داده شود. از سوی دیگر اگر $\sigma_e^j < \sigma_e^{j-1}$ باشد دلالت بر این دارد که نقطه در حال کاهش بار است، بنابراین به

گام ۷ می رود.

(ب) - اگر نقطه تحت تنش قبلاً تسلیم نشده باشد آنگاه دو حالت ممکن است روی دهد، اگر $\sigma_e^j < Y$ باشد نقطه هنوز الاستیک بوده بنابراین به گام γ می رود. اما اگر $\sigma_e^j > Y$ باشد بدان معنی است که در این تکرار تسلیم شده است. آن گاه قسمتی از تنش که آن سوی سطح تسلیم قرار دارد (BC) باید به سطح تسلیم کاهش داده شود. ضریب کاهش بصورت ذیل تقریب زده می شود:

$$R = \frac{BC}{AC} = \frac{\sigma_e^j - Y}{\sigma_e^j - \sigma_e^{j-1}} \quad (39-3)$$

گام ۵- برای نقطه تسلیم شده تنش کلی که ملاک تنش تسلیم را ارضا کند، بصورت ذیل محاسبه می گردد:

$$\sigma_e^{j-1} + (1-R)d\sigma_e^j \quad (40-3)$$

گام ۶- قسمت اضافی افزایش تنش باید تا کاهش نرخ تنش به داخل سطح تسلیم حذف گردد، بنابراین از معادله (۳۳-۳) می توان نوشت:

$$\sigma_e^j = \sigma_e^{j-1} - d\sigma_e^j - \lambda D.a \quad (41-3)$$

تنش حاصل شده در این تکرار ارضای شرایط الاستو-پلاستیک را بدست می دهد. در تصویر ۳-۸ معادله (۴۱-۳) رامی توان به صورت معادله برداری ذیل تصور نمود:

$$OD = OA + AC - CD \quad (42-3)$$

می توان مشاهده نمود که اگر از افزایش تنش محدودی استفاده شود نرخ تنش نهایی، نقطه D ممکن است از سطح تسلیم بالا برود. در چنین حالاتی دقت نسبتاً خوبی را می توان با کم کردن تنش اضافی تا سطح تسلیم در چندین مرحله فراهم نمود. همان گونه که در تصویر ۳-۸ نشان داده شده با کاربرد چهار گام دقت بهتری حاصل می شود (از E به D). توسط شری یر وهمکارانش در سال ۱۹۷۹ میلادی و کریج وهمکارانش [۴۴] در سال ۱۹۷۷ میلادی توصیه شده است که تعداد تقسیمات یا گامهای کاهش تنش به سطح تسلیم از رابطه ذیل محاسبه گردد:

$$m = \text{INTEGER} \left[\left(\frac{\sigma_e^j - Y}{Y} \right) \times 10 + 1 \right] \quad (43-3)$$

نهایتاً رابطه ذیل کاهش نرخ تنش به سطح تسلیم را بیان می کند (از D به D' یا از E به E'):

$$\sigma^j = \sigma^j \left(\frac{Y + H (\bar{\varepsilon}^p)^j}{Y} \right) \quad (44-3)$$

گام ۷- برای نقاط الاستیک مقدار ذیل محاسبه می شود:

$$\sigma^j = \sigma^{j-1} + d \sigma_e^j \quad (45-3)$$

گام ۸- محاسبه نیروهای معادل با تنشهای داخلی، محاسبه نیروهای باقیمانده و کنترل همگرایی، اگر ملاک همگرایی ارضا شود به گام بعدی می رود در غیر اینصورت نیروهای باقیمانده را بعنوان نیروهای وارد شده بکار برده وبه گام یک برمی گردد.

۳-۸-۱- ملاک همگرایی:

جهت پایان دادن به مراحل تکرار در روش های تکرار-افزایشی باید ملاک همگرایی مناسبی تعریف شود. این ملاک ها به طور خلاصه در ذیل تشریح می گردند که در این پژوهش ملاک یک برای کنترل همگرایی استفاده می شود.

۳-۸-۱-۱- ملاک ۱، **CRI 1**:

در این ملاک نرم نیروهای باقیمانده در مقابل نرم نیروهای وارد شده در آن افزایش با یکدیگر مقایسه می شوند. یعنی:

$$R = \frac{\|F_{RES}\|}{\|\Delta F\|} < TOLER \quad (46-3)$$

که در آن :

$$\|F_{RES}\| = \left[\sum_{i=1}^{n_{dof}} (F_i - G_i)^2 \right]^{1/2} \quad (47-3)$$

$$\Delta F = \left[\sum_{i=1}^{n_{dof}} (F_i)^2 \right]^{1/2}$$

G_i و F_i در روابط بالا، به ترتیب اجزا نیروی وارد شده و نیروی معادل تنش های داخلی در درجه آزادی i

می باشند. n_{dof} تعداد کل درجات آزادی سیستم است.

۳-۸-۲- ملاک ۲، CRI 2 :

در این ملاک کار نیروهای باقیمانده و نیروهای وارد شده در کل تکرارهای افزایش تغییر مکان با یکدیگر مقایسه می شوند. بدان معنی که:

$$R = \frac{W_{RES}}{W_F} < TOLER \quad (۴۸-۳)$$

که در آن :

$$W_{RES} = \sum_{i=1}^{n_{dof}} (F_i + G_i) \Delta U_i \quad (۴۹-۳)$$

$$W_F = \sum_{i=1}^{n_{dof}} (\Delta F_i) \Delta U_i$$

که در آن F_i و G_i و n_{dof} به صورتی که قبلاً تعریف گشت، می باشند. ΔU_i افزایش تغییر مکان تکراری در درجه آزادی i بوده و ΔF_i نیروی افزایشی است. شایان توجه است آن که مقدار TOLER توسط کاربر تعیین می شود که معمولاً مقداری در بازه ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ اختیار می گردد.

فصل چهارم

بر آوردکننده های خطا

۴-۱- مقدمه

همانگونه که قبلاً ذکر گردید، از آنجایی که تاکنون کلیه مسائل مطرح شده حول روشهای تخمین خطا به روش اجزا محدود بحث گردیده لذا در ابتدا به تشریح و معرفی برآوردکننده های خطا در این روش پرداخته می شود و سپس به توضیح روندی ابداعی جهت تخمین خطا به روش ایزوژئومتری در مسائل خطی و غیرخطی می پردازیم.

از نظر یک تقسیم بندی برآورد کننده های خطا در دو دسته پسرونده^{۹۰} و پیشرونده^{۹۱} قرار می گیرند که از بین آنها موضوع برآورد پسرونده خطا به صورت یکی از جنبه های بسیار مهم در کاربرد روش های عددی، در آمده است. در این نوع برآورد، پس از هر بار حل مسأله با روش های عددی مانند روش اجزای محدود، با استفاده از مقادیر محاسبه شده، خطا برآورد می شود. در صورتی که برآورد پیشرونده خطا، اطلاعاتی درباره همگرایی و پایداری حل های مختلف ارائه می دهد. همچنین اطلاعاتی اجمالی درباره رفتار خطا، مادامی که متغیرهای شبکه تغییر می کند، ارائه می دهد اما هیچ اطلاعات کمی درباره مقدار خطا در یک مسئله خاص ارائه نمی کند [۴۵].

در تقسیم بندی مشابه روشهای تخمین خطا در دو گروه عمده زیر قرار می گیرند :

۱- **استقرایی:** این گروه از برآورد کننده های خطا قبل از حل مسأله، بر اساس خواص حل دقیق آن مانند هموار بودن و غیره، اطلاعاتی در مورد نرخ حدی همگرایی (حالتی که ابعاد المانهای به کار رفته به سمت صفر میل می کند) فراهم می آورند. به لحاظ کاربرد محدود، این گروه از برآورد کننده های خطا بیشتر در تحقیقات تئوری به کار برده می شوند.

۲- **استنتاجی:** این گروه از برآورد کننده های خطا، با استفاده از نتایج حل مسئله و فرضیات اولیه، تخمینی از توزیع خطای یک کمیت در دامنه حل مسأله ارائه می دهند. برآورد کننده های خطای استنتاجی امروزه نقش عمده ای در کاربردهای عملی مهندسی ایفا می کنند، از این رو در این پژوهش تنها این گروه از برآورد کننده های خطا مورد توجه قرار گرفته است.

^{۹۰} posteriori estimation of error

^{۹۱} priori estimation of error

در برآورد خطا به روش استنتاجی، دو رویکرد عمده وجود دارد. اولین اینها، تخمین خطا بر اساس روشهای باقیمانده است که از ادامه کار بابوشکا می باشد. و دومین که امروزه تأکید بر استفاده از آن می باشد، استفاده از روشها، با وصله های خود تعادلی^{۹۲} است، که در این زمینه انس ورس و آدن^{۹۳} پیشنهاد می باشند. روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) نیز در این دسته قرار می گیرند [۳۱].

در ادامه این فصل به شرح و توضیح این دو رویکرد می پردازیم. [۵۱]

۴-۲- روشهای برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده ها

از آنجا که حل اجزای محدود یک معادله دیفرانسیل با حل دقیق آن متفاوت است، واضح است که حل اجزای محدود، معادله دیفرانسیل را به طور کامل ارضا نمی نماید. همچنین در یک حل اجزای محدود، اصولاً تنها میدان متغیر اصلی معادله (u) دارای پیوستگی در لبه المانها می باشد و میدان گرادیان آن، (σ) گسسته است. این موضوع، اساس تخمین خطا در این دسته از روشها است. در اینجا با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه المانها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می آید.

این روش نخستین تلاش برای محاسبه خطا در روش اجزای محدود بوده است. این روش و نیز ایده تعیین خطاها در روش اجزای محدود اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط بابوشکا و رینبولت مطرح شد [۱]. در ادامه به شرح مختصری از این روش می پردازیم [۴۶]:

فرض کنید معادله دیفرانسیل حاکم بر یک مسئله با شرایط مرزی معلوم به صورت زیر است

$$LU + P = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1-4)$$

$$L_0U + P_0 = 0 \quad \text{in } \Gamma$$

که در آن L و L_0 اپراتورهای خطی و U میدان جابجایی است. منظور از Ω کل ناحیه و Γ مرز است.

اکنون با استفاده از روشهایی مثل روش گالرکین می توان یک میدان جابجایی پیشنهادی U بدست آورد. اگر این میدان جابجایی تقریبی در معادله (۱-۴) قرار داده شود، طرف دوم این معادله به علت وجود خطای

^{۹۲} self-equilibrating patches

^{۹۳} Ainsworth and Oden

گسسته سازی صفر نخواهد شد. این مقدار را مانده می گویند و آن را با r نمایش می دهند.

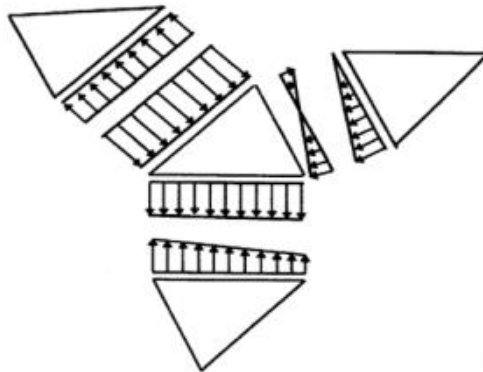
$$r = LU + P \quad (2-4)$$

با استفاده از این رابطه مقدار خطا در هر نقطه قابل محاسبه است. بنابراین می توان مقدار خطا را برای هر المان با انتگرال گیری روی المان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\|e_i\|^2 = \int_{\Omega_e} r^2 d\Omega \quad (3-4)$$

که در این رابطه e_i شاخص خطا و Ω_e سطح المان i ام است. البته مقدار خطایی که از رابطه فوق به دست می آید قسمتی از خطای کل المان است.

اگر یک مسئله از نوع C^0 مطرح باشد، پیوستگی در تغییر مکان وجود دارد ولی در مشتق و یا شیب آن پیوستگی وجود ندارد و این بدان معنی است که تنشها در مرز المان با تنشهای مرزی المان مجاور خود تفاوت دارند. شکل ۴-۱ این موضوع را نشان می دهد.



شکل ۴-۱). عدم پیوستگی شیب در مرز المان

با توجه به مطالب فوق شاخص خطا به صورت زیر اصلاح می گردد

$$\|e^2\| = c_1 \int_{\Omega} r^2 d\Omega + c_2 \int_{\Gamma} J^2 d\Gamma \quad (4-4)$$

در رابطه فوق J مقدار پرش در مرز المانها و Γ مرز بین کل المانهاست. برای یک المان تنها در حالت دو بعدی ضرایب c_1 و c_2 محاسبه شده است. این ضرایب به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$c_1 = \frac{h^2}{24\kappa p^2} \quad (5-4)$$

$$c_2 = \frac{h}{24\kappa p}$$

در این روابط h اندازه المان، p درجه یا توان توابع شکل و κ ضریبی است که بستگی به معادله دیفرانسیل حاکم دارد. مثلاً برای مسائل تنش و کرنش مستوی ضریب κ به صورت زیر بدست آمده است.

$$\kappa = \frac{E}{1-\nu} \quad (6-4)$$

که E مدول یانگ و ν ضریب پواسون است. بنابراین مقدار خطا برای هر المان به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\|e_i^2\| = \frac{h^2}{24\kappa p^2} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h}{24\kappa p} \int_{r_i} J^2 d\Gamma \quad (7-4)$$

در نتیجه خطا روی کل محیط برابر است با

$$\|e^2\|_{total} = \sum_{i=1}^m \|e_i^2\| \quad (8-4)$$

در رابطه بالا m تعداد کل المانهاست.

در تحقیقاتی که بابوشکا همراه با یک تیم تحقیقاتی به سرپرستی پروفیسور استروبولیس^{۹۴} از دانشگاه تگزاس، انجام دادند، روشی ابداع شد که به کمک آن می‌توان مقایسه‌ای بین روشهای تخمین خطا انجام داد. این روش آزمون وصله بابوشکا نام گرفت و بر اساس آن پی برده شد که روشهای بازیافتی در مقایسه با روشهای باقیمانده‌ای از دقت و همگرایی بهتری برخوردار می‌باشند [۳۱]. لذا در این پژوهش از بررسی بیشتر این دسته از برآورد کننده‌ها صرف نظر می‌شود.

۴-۳- روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)

پس از حل معادله دیفرانسیل توسط روش اجزای محدود و به دست آوردن مقادیر جابجایی در هر گره، در صورتی که به دست آوردن مقادیر دقیق تنش (گرادیان میدان) در گره‌ها، روی مرز المانها و یا هر جای دیگر

^{۹۴} Strouboulis

از دامنه مورد نظر باشد، در آن صورت باید از روش‌های بازیافت تنش استفاده نمود. زیرا اگر مسأله تغییراتی، از درجات پایین، مانند C^0 باشد، تنها تابع جابجایی در نقاط گرهی و مرز المانها پیوسته بوده و تنش یا گرادیان میدان در آن نقاط گسسته و همراه با پرش می‌باشد. برای مثال در هر گره که چهار المان مربعی شکل به آن متصل باشد، فقط یک مقدار جابجایی پس از حل معادله دیفرانسیل به وسیله اجزای محدود موجود بوده، ولی برای مشتق اول و تنش، به دلیل ناپیوسته بودن شیب در آن گره، از هر المان متصل به گره مذکور مقداری متفاوت، یعنی در مجموع چهار مقدار مختلف برای آن گره وجود خواهد داشت. این موضوع برای کلیه مرزهای المانها نیز صادق می‌باشد. از اینجا می‌توان به اهمیت بحث بازیافت تنش پی برد. زیرا قاعدتا باید فقط یک مقدار مشخص، نزدیک به حل دقیق، برای مشتق اول یا تنش در هر گره موجود باشد که به دست آوردن این مقدار، با استفاده از عملیات تکمیلی بازیافت تنش به روی نتایج حاصل از حل روش اجزای محدود مقدور می‌باشد، که خود شامل روشهای مختلفی است.

به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه اجزای محدود داشته است.

این میدان تنش بهبود یافته، به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \quad (9-4)$$

که در آن $\bar{\sigma}^*$ مقادیر گرهی این میدان و N توابع شکل مورد استفاده در المانها است. با استفاده از این میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$e_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (10-4)$$

که در رابطه بالا σ_h تنش ناشی از حل اجزای محدود می‌باشد. روشهای متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد. واضح است که کارایی روند بازیافت تنش نقش عمده‌ای در کارایی این گروه از برآورد کننده‌های خطا دارد. در ادامه این فصل، مهمترین این روشها بررسی خواهد شد.

۴-۳-۱- روش میانگین گیری^{۹۵}

روشی که توسط هینتن و کمپبل^{۹۶} در سال ۱۹۷۴ برای بازیابی تنش به کار برده شده است، که در حال حاضر نیز در برخی نرم افزارهای اجزای محدود برای به دست آوردن یک مقدار واحد تنش در گره‌ها به کار می‌رود [۴۷].

در این مقاله دو متد سراسری و موضعی پیشنهاد شده است. در روش موضعی پیشنهاد شده ابتدا مقادیر تنش در نقاط گوسی به وسیله روش اجزای محدود به دست آمده و پس از آن با استفاده از برونمایی در هر المان مربعی با چهار نقطه گوسی، مقادیر تنش در گره‌ها به دست می‌آید. میانگین تنش حاصل از المانهای متصل به هر گره پس از عمل برونمایی به عنوان مقدار بهبود یافته آن تعریف می‌گردد و مطابق رابطه داریم:

$$\bar{\sigma}_i^* = \frac{1}{\rho_i} \sum_{\tau \in \xi_i} \sigma_h^\tau |x_i \quad (11-4)$$

که در آن σ_h^τ تنش محاسبه شده در المان τ در محل گره i ام بعد از عمل برونمایی و ρ_i تعداد المانهای متصل به گره i ام می‌باشد. این روش با وجود سادگی و سرعت بالا در مسائل ساده که شبکه المان بندی منظم است، کارایی قابل قبولی دارد.

۴-۳-۲- روش تصویر L_2 ^{۹۷}

اودن و براچلی^{۹۸} در سال ۱۹۷۱ روش تصویر L_2 را پیشنهاد کردند [۴۸]. این روش از اولین روشهای بازیافت تنش محسوب می‌شود. در این روش با کمینه کردن عبارت زیر:

$$\Pi = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \quad (12-4)$$

روی دامنه حل، مقادیر گرهی میدان تنش بازیافتی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\sigma}^* = \mathbf{A}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}_h \quad (13-4)$$

^{۹۵} Averaging Method

^{۹۶} Hinton and Campbell

^{۹۷} L_2 Projection Method

^{۹۸} Oden and Brauchli

که در آن :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (14-4)$$

و σ^* تنش بازیافتی و σ_h تنش به دست آمده از حل اجزای محدود و Ω دامنه حل می‌باشد. البته این روش کارایی محدودی داشته و با ابداع روشهای جدیدتر به ندرت از آن استفاده می‌شود.

۴-۳-۳- روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا ^{۹۹} SPR

این روش بازیافت تنش در سال ۱۹۹۲ توسط زینکوویچ و زو ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد [۳۶]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و موثرترین روشها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به کار می‌رود. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است [۴۶]. در این روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المانهای متصل به هر گره ^{۱۰۰} ، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. این میدان به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\sigma_p^* = Pa \quad (15-4)$$

در روابط فوق σ_p^* ، تنش بهبود یافته، P مجموعه تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و a مقادیر ثابت مجهول هستند، با کمینه کردن تابع (۴-۱۶) مقادیر مجهول مطابق رابطه (۴-۱۷) به دست می‌آید.

$$F(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - p(x_i, y_i)a)^2 \quad (16-4)$$

$$a = A^{-1}b \quad (17-4)$$

^{۹۹} Superconvergent patch recovery

^{۱۰۰} node

در رابطه (۱۷-۴) A و b به صورت زیر تعریف می‌شوند:

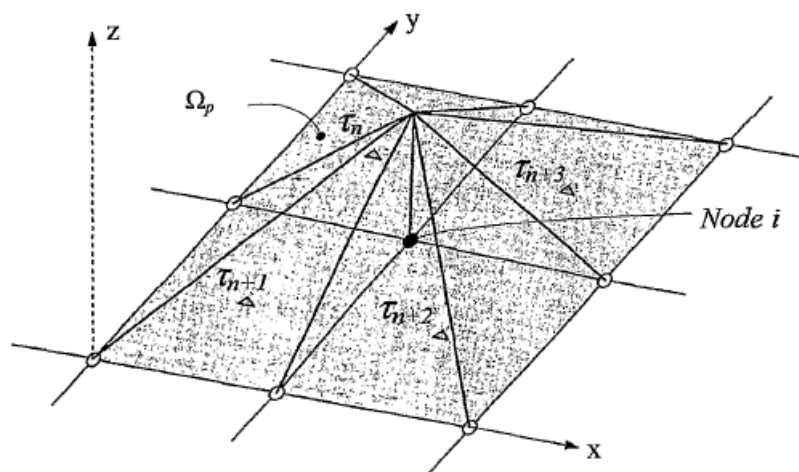
$$A = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \quad (18-4)$$

$$b = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (19-4)$$

در این روابط، σ_h تنش به دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق همگرا یا نقاط بهینه نمونه گیری گرادیان در Ω_p و n تعداد المانهای موجود در هر ناحیه^{۱۰۱} است.

پس از محاسبه a ، سهم گره‌های موجود در Ω_p از رابطه (۱۵-۴) به وسیله یک تابع شکل خطی که مرکز آن بروی گره i ام است، محاسبه می‌شود (شکل ۲-۴). واضح است که این سهم برای گره اصلی برابر واحد و برای سایر گره‌ها گوشه‌ای برابر صفر می‌باشد. عملیات فوق برای گره‌های میانی، یعنی گره‌هایی که در رئوس واقع نشده‌اند انجام نمی‌گیرد و سهم حاصل از عملیات به روی گره‌های گوشه‌ای برای آنها منظور می‌گردد.

[برای آشنایی بیشتر با نقاط فوق همگرا در این روش به ضمیمه ۲ مراجعه نمائید]



شکل ۲-۴). محاسبه سهم گره‌ها

۴-۳-۴- روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه‌ها، REP^{۱۰۲}

این روش بازیافت در سال ۱۹۹۷ توسط برومند و زینکویچ ابداع شد [۴۰]. در این روش بر خلاف روش SPR احتیاج به مشخص نمودن نقاط فوق همگرا در المان نیست. اساس کار در این روش، معادل قرار دادن

^{۱۰۱} patch

^{۱۰۲} Recovery by Equilibrium in Patches

نیروهای عمل کننده بر یک گروه از المانها برای میدان تنش حاصل از روش اجزای محدود و میدان تنش بهبود یافته^{۱۰۳} است. اگر مانند روش SPR حول گره i (واقع در گوشه هر المان) یک زیر دامنه Ω_p در نظر گرفته شود، برآیند نیروهای عمل کننده بر آن را می توان به صورت زیر به دست آورد :

$$F_p = \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \quad (۲۰-۴)$$

در رابطه بالا، F_p برآیند اثر نیروهای باقیمانده دامنه و نیز اثر نیروهای بدنه بر این گروه از المانها است. همین کمیت را می توان برای میدان تنش بازیافتی تعریف نمود :

$$F_p^* = \int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega \quad (۲۱-۴)$$

در این روش میدان تنش به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sigma^* = Pa = \begin{bmatrix} p & & & \\ & p & & \\ & & \ddots & \\ & & & p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{D_\sigma} \end{Bmatrix} \quad (۲۲-۴)$$

که در آن p مجموعه تک جمله ایهای هم درجه با توابع شکل به کار رفته در المان و D_σ بعد میدان تنش است. از آنجا که تعداد معادلات و مجهولات به احتمال زیاد با هم برابر نیست، سعی می شود دو کمیت F_p و F_p^* به صورت تقریبی برابر قرار داده شوند. به این منظور، با کمینه کردن تابع زیر:

$$\Pi = \left(\int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega - \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \right)^T \left(\int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega - \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \right) \quad (۲۳-۴)$$

می توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود. اگر تابع فوق به صورت زیر نوشته شود:

$$\Pi = (Ha - F_p)^T (Ha - F_p) \quad (۲۴-۴)$$

که در آن:

$$H = \int_{\Omega_p} B^T P d\Omega \quad (۲۵-۴)$$

با کمینه کردن رابطه (۲۴-۴)، ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه می شوند:

^{۱۰۳} Improved Stress Field

$$a = (H^T H)^{-1} H^T F_p \quad (26-4)$$

اما از آنجایی که گاهی تعداد معادلات نهفته در کمینه کردن رابطه (۲۴-۴) کمتر از تعداد مجهولات است، محاسبه a از رابطه فوق امکان پذیر نیست. به همین منظور، رابطه بالا به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$a = \left(H^T H + \sum_{\tau \in \rho_i} H^{\tau T} H^\tau \right)^{-1} \left(H^T F_p + \sum_{\tau \in \rho_i} H^{\tau T} F^\tau \right)_p \quad (27-4)$$

که در آن F^τ (نیروهای عمل کننده بر روی المان τ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$F^\tau = \int_{\Omega^\tau} B^T \sigma_h^\tau d\Omega \quad (28-4)$$

کارایی این روش قابل مقایسه با روش قبل (استفاده از نقاط فوق همگرا) است.

۴-۴- معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به روش اجزای محدود بدست آمده است. بنابراین خطای حل تنش بصورت زیر بدست می‌آید:

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (29-4)$$

که در آن σ میدان تنش دقیق است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد که این میدان تنش جدید توسط یکی از روشهای بازیافت تنش بدست آمده است. بنابراین خطای تقریبی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{e}_\sigma = \sigma^* - \sigma_h \quad (30-4)$$

رابطه اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند ضمن اینکه این مقدار ممکن است از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می‌شود.

مهمترین معیارهای بیان خطا عبارتند از [۲، ۴۶]:

$$1- \text{معیار خطای انرژی}^{۱۰۴}$$

^{۱۰۴} Energy Norm

۲- معیار خطای L_2

۴-۴-۱- مفهوم نرم

برای پی بردن به مفهوم نرم، ابتدا ضرب داخلی توابع f و g را بر روی بازه (a, b) به ازای تابع مفروض $w(x) \geq 0$ را در نظر می‌گیریم [۴۹].

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) \cdot g(x) w(x) dx \quad (۳۱-۴)$$

با ایده گرفتن از فضای سه بعدی و رابطه ضرب داخلی با طول بردارها در آنجا، در اینجا نیز همراه با ضرب داخلی، مفهوم نرم (تعمیم مفهوم طول) بردارها را مطرح می‌کنیم [۴۹]:
نرم بردار f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle_w^{\frac{1}{2}} \quad (۳۲-۴)$$

به ازای هر بردار f از فضا، شرایط اساسی نرم به صورت زیر می‌باشد:

$$\|f\| \geq 0 \quad (۳۳-۴)$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

$$f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0$$

۴-۴-۲- معیار انرژی

اگر مجدداً معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیریم

$$Lu + b = 0 \text{ on } \Omega \quad (۳۴-۴)$$

طبق تعریف، نرم انرژی برای مسائل الاستیسیته با معادله رفتاری فوق به کمک رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\|U\| = \left[\int_{\Omega} u^T Lu d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} u^T (S^T DS) u d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۳۵-۴)$$

$$\|U\| = \left[\int_{\Omega} (Su)^T D(Su) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۳۶-۴)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37-4)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38-4)$$

و نرم انرژی برای خطاها برای یک مسئله الاستیسیته خطی توسط روابط زیر بیان می شود [46]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} e^T L e d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} (u - u_h)^T L (u - u_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39-4)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T D (\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40-4)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41-4)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (42-4)$$

نرم خطا انرژی برای مسائل پلاستیسته، از آنجایی که پس از رسیدن تنش ها به سطح تسلیم تغییرات تنش ها ناچیز می باشد لذا از تغییرات کرنش ها در انتهای هر مرحله افزایش بار استفاده نموده [50] و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\|e_n\| = \left[\int_{\Omega} |(\sigma_n - \sigma_{h_n})^T (\Delta \varepsilon_n - \Delta \varepsilon_{h_n})| d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43-4)$$

که در آن تغییرات کرنش ناشی از حل ایزوژئومتری در انتهای مرحله n ام افزایش بار می باشد.

4-4-3- درصد خطای نسبی η

بیان خطا به صورت مقدار مطلق، عملاً شاخص مناسبی برای درک آن نمی باشد و لذا معمولاً خطا به صورت نسبتی از مقدار کل بیان می شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی با رابطه زیر بیان می شود:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|U\|} \times 100 \% \quad (44-4)$$

از طرفی همانطور که قبلاً بحث شد، میدان تنش، کرنش و یا جابجایی به طور دقیق در دست نیست، پس در محاسبه معیار خطا بایستی از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد:

$$\|e\| \approx \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45-4)$$

در نتیجه درصد خطای نسبی نیز به صورت تقریبی و با توجه به حل اصلاح شده بیان می شود:

$$\bar{\eta} = \frac{\|\bar{e}\|}{\|\bar{u}\|} \quad (46-4)$$

که در رابطه فوق \bar{u} به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\|\bar{u}\| = \left[\|u^*\|^2 + \|\bar{e}\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47-4)$$

$$\|u^*\| = \left[\int_{\Omega} \sigma^* D^{-1} \sigma^* d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (48-4)$$

چنانچه خطای نسبی قابل قبول در یک مسئله را η بنامیم، بنابراین شرط یک حل قابل این است که:

$$\eta \leq \bar{\eta} \quad (49-4)$$

مقدار η معمولاً در کارهای عملی کمتر از ۵ درصد در نظر گرفته می شود [۴۶].

۴-۴-۴ معیار L_2

نرم L_2 برای خطای تغییر مکان، تنش و کرنش در مسائل الاستیسیته و پلاستیسته به صورت روابط زیر

تعریف می شوند:

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (u - u_h)^T (u - u_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50-4)$$

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (51-4)$$

$$\|e_\varepsilon\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T (\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52-4)$$

مشاهده می شود که رابطه (4-50) مشابه رابطه نرم انرژی است با این تفاوت که تابع وزنی D^{-1} را ندارد. بنابراین نرمهای تعریف شده در روابط (4-49) و (4-50) و (4-51) به ما این اجازه را می دهند که توجه خود را روی کمیت مورد نظر متمرکز نماییم.

درصد خطای نسبی برای معیار L_2 به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\|\sigma^*\|_{L_2} = \left[\frac{\int_{\Omega} \sigma^{*T} \sigma^* d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (53-4)$$

$$\|e_\sigma^*\| = \left[\frac{\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54-4)$$

$$\eta = \left[\frac{\|e_\sigma^*\|^2}{\|\sigma^*\|_{L_2}^2 + \|e_\sigma^*\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (55-4)$$

4-4-5- جذر مجموع مربعات¹⁰⁵ خطا

اگر جذر مجموع مربعات خطای تنش به صورت نرمالیزه شده برای یک ناحیه Ω مورد نظر باشد مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد [46].

$$\Delta\sigma = \|e_\sigma\|_{RMS} = \left[\frac{\|e_\sigma\|_{L_2}^2}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (56-4)$$

$$\|\sigma\|_{RMS} = \left[\frac{\int_{\Omega} \sigma^T \sigma d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (57-4)$$

خطای نسبی نرمالیزه شده تنش عبارت است از:

¹⁰⁵Root mean square

$$\eta = \frac{\|e_{\sigma}\|_{RMS}}{\|\sigma\|_{RMS}} \times 100 \% \quad (58-4)$$

هر یک از نرم‌های بالا می‌توانند بر روی کل دامنه، جزئی از دامنه ویا فقط یک المان محاسبه شوند در این صورت خطای کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i\|^2 \quad (59-4)$$

که در آن m تعداد اجزای شبکه می‌باشد.

۴-۴-۶- شاخص تأثیر θ

برای بعضی مسائل خاص که حل دقیق مسئله موجود است می‌توان معیار خطای دقیق و تقریبی را بدست آورد. نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای واقعی، بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا می‌باشد که این نسبت شاخص تأثیر نامیده می‌شود.

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (60-4)$$

هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به سمت واحد میل نماید.

۴-۴-۷- تعریف شاخص ξ_i

همان طور که در بخش ۴-۴-۳ بیان شد، با محاسبه η و مقایسه آن با η می‌توان به قابل قبول بودن خطای اتفاق افتاده در تحلیل به روش اجزای محدود برای محیط جزء بندی شده پی برد. به طوری که اگر $\langle \hat{\eta} \rangle \eta$ باشد، خطاهای اتفاق افتاده قابل قبول بوده و چنانچه $\langle \hat{\eta} \rangle \eta$ باشد، خطای اتفاق افتاده بیش از مقدار مجاز بوده و برای رسیدن به جواب قابل قبول باید شبکه جزء بندی شده اصلاح گردد. اما سئوالی که در اینجا مطرح است، این است که شبکه جزء بندی شده چگونه باید اصلاح شود [۴۶].

برای اصلاح شبکه جزء بندی شده اولین راه حلی که به نظر می‌رسد کوچکتر نمودن کلیه المانها تا حصول $\langle \eta \rangle \eta$ می‌باشد. اما راه حل فوق یک راه حل اقتصادی نیست و موجب می‌شود که حجم مسئله بسیار بزرگ شده و حل آن نیازمند نرم افزارهای با ظرفیت بالا می‌باشد. اما راه حلی که به نظر می‌آید از کارایی بیشتری

برخوردار بوده و موجب کمترین افزایش حجم مسئله می‌گردد، کوچکتر نمودن موضعی مسئله می‌باشد. یعنی در جاهایی که خطا بیش از خطای مجاز می‌باشد، عملیات اصلاحی اعمال شود و در جاهایی که خطای اتفاق افتاده کمتر از خطای مجاز می‌باشد، دست نخورده باقی بماند. اما در روش اخیر نیازمند ابزار یا پارامتری هستیم، که بتوان به کمک آن خطای موضعی کلیه اجزاء را محاسبه نمود. این پارامتر به ξ_i معروف است که در ادامه به نحوه محاسبه آن می‌پردازیم.

برای آنکه یک معیاری داشته باشیم تا بتوانیم بگوییم که در کجاها خطا بیشتر است، شاخص ξ_i را برای تک تک اجزاء به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به منظور تعمیم خطای نسبی نرمها برای تک تک اجزاء مطابق تعریف بابوشکا فرض می‌شود که درصد خطا به طور یکنواخت بین کلیه اجزاء توزیع شده است. پس خواهیم داشت [۴۶]:

$$\|e^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i^*\|^2 \quad (۴-۶۱)$$

$$\|e^*\|^2 = m \cdot \|e_i^*\|^2 \quad (۴-۶۲)$$

که در آن m تعداد اجزاء در کل ناحیه Ω می‌باشد.

$$\eta = \left[\frac{\|e^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{m \cdot \|e_i^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۶۳)$$

چنانچه خطای مجاز^{۱۰۶} را با $\|e_{per}^*\|$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\eta = \eta \Rightarrow \|e_i^*\| = \|e_{per}^*\| \quad (۴-۶۴)$$

$$\eta^2 = \frac{m \|e_{per}^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \quad (۴-۶۵)$$

$$\|e_{per}\| = \frac{\eta}{\sqrt{m}} \left[\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۶۶)$$

^{۱۰۶} Permissible

طبق تعریف شاخص ξ_i عبارت خواهد بود با:

$$\xi_i = \frac{\|e^*\|_i}{\|e\|_{per}} \quad (4-67)$$

بنابراین به عنوان یک معیار چنانچه $\xi_i < 1$ باشد، خطای جزء مورد نظر (Am) مورد قبول بوده و چنانچه $\xi_i > 1$ باشد، خطای جزء فوق بیش از مقدار مجاز خواهد بود.

۴-۵- تشریح روش ابداعی بازیافت تنش در روش ایزوژئومتری

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفه تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده اند، بدست می آید. یک سطح نربز زمانی بدست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات x و y هر نقطه کنترلی توسط کاربر، تنها مولفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافته تنش، مولفه z نقطه کنترلی می باشد. نحوه محاسبه مختصات z نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید بدست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتری است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می شود. [۵۱]

اساس محاسبه مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه بدست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است [۴۶].

در تحلیل ایزوژئومتری دو بعدی که دامنه مسئله با توجه به آرایش نقاط گرهی به المانهای چهار ضلعی تقسیم می شود، این نقاط فوق همگرا بر نقاط گوسی المان منطبق هستند. مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با مینیمم کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتری در نقاط گوس المانهای هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می شود.

در صورتی که سطح بازبافتی (بهینه) هریک از مؤلفه‌های بردار تنش را با σ^* نشان دهیم، با توجه به توابع شکل نریز می توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت زیر بیان نمود:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \quad (68-4)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، R توابع شکل نریز و P مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش می باشد. در صورتی که R و P را به ترتیب بردار توابع شکل نریز و بردار مختصات نقاط کنترلی، به صورت روابط (4-69) و (4-70) تعریف کنیم، رابطه (4-68) را می توان به صورت (4-71) بیان نمود.

$$\mathbf{R} = [R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,n}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,n}, \dots, R_{m,n}]^T \quad (69-4)$$

$$\mathbf{P} = [P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,n}]^T \quad (70-4)$$

$$\sigma^* = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \quad (71-4)$$

همان طور که مشاهده می شود، تنها پارامتر مجهول جهت تعیین این سطح، مختصات Z نقاط کنترلی (بردار \mathbf{P}) می باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{k_y} \sum_{i=1}^{k_x} (\sigma_{i,j}^* - \bar{\sigma}_{i,j})^2 \quad (72-4)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهتهای x و y موجود در هر ناحیه می باشد. با جایگذاری رابطه (4-71) در (4-72) خواهیم داشت:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_l - \bar{\sigma}_l)^2 \quad (73-4)$$

که در آن K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می باشد. در نهایت با مشتق گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های Z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته

بدست می آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (74-4)$$

که در آن ماتریسهای \mathbf{A} و \mathbf{B} به صورت (74-4) محاسبه می شوند.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \bar{\sigma}_i \quad (75-4)$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می آید. جهت داشتن دقت بهتر حل برای مسایل غیرخطی در انتهای هر مرحله افزایش بار، تنش مربوطه در انتهای مرحله n ام را با استفاده از روش فوق الذکر بهبود داده می شود و همچنین می توان این تنش بهبود یافته را جهت همگرایی سریعتر حل مسئله در مرحله بعدی افزایش بار نیز استفاده نمود. همانگونه که در ادامه نشان داده خواهد شد، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتری دقیق تر می باشد و از این رو می تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتری به کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد. در مرحله بعد می توان با افزایش نقاط در بردارگرهی و یا نقاط کنترلی در اطراف آن المان، به بهبود محلی شبکه اولیه پرداخت و تحلیل ایزوژئومتری دوباره با توجه به شبکه جدید انجام می پذیرد و این روند تا حصول دقت مورد نیاز کاربر ادامه خواهد یافت [51].

4-6- استفاده از نرم خطای انرژی در روش ایزوژئومتری

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروفترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان در حالت خطی، به صورت زیر بیان می شود [46]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (76-4)$$

که در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق تنش، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از حل تقریبی، \mathbf{D} ماتریس الاستیسیته و Ω

دامنه المان می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی‌باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در اینصورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| \approx \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (77-4)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری می‌باشد. برای محاسبه انتگرال فوق روی هر المان از روش انتگرال گیری گوس استفاده شده است. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\|\bar{e}\| = \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) |J_1| |J_2| dr ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad (78-4)$$

در رابطه بالا دترمینان J_1 مربوط به انتقال دستگاه مختصات از فضای x و y سراسری به فضای u و v مربوط به توابع پایه نریز و دترمینان J_2 مربوط به انتقال دستگاه مختصات از فضای u و v به فضای r و s (مختصات نرمال المان پایه) می‌باشد.

و در نهایت نرم خطای انرژی برای هر المان در حالت خطی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|\bar{e}\| = \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) |J_1| |J_2| w_i w_j \right]^{\frac{1}{2}} \quad (79-4)$$

m و n به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهت y و x در هر المان و w وزن نقاط گوسی می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المانها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

همانگونه که قبلاً ذکر گردید، برای مسایل غیرخطی نیز می‌توان از رابطه (4-43) جهت محاسبه نرم خطای انرژی در انتهای هر مرحله افزایش بار استفاده نمود.

فصل پنجم

کاربرد برنامه در تحلیلی مسائل نمونه

به طور کلی ارزیابی برنامه های کامپیوتری و نیز قابلیت اعتماد نسبت به نرم افزارهای مهیا شده برای تحلیل خطی و غیرخطی، بالاخص برنامه هایی که برای تحلیل غیرخطی مسائل تهیه می شوند، از اهمیت بالایی برخوردار هستند. پذیرش یک برنامه کامپیوتری برای تحلیل مسائل کاربردی عموماً به دو عامل بسیار مهم وابسته است. اعتبار روابط ریاضی استفاده شده و نیز چگونگی رابطه سازی این روابط در برنامه، به عنوان اولین عامل و نیز چگونگی اجرای برنامه در تحلیل مسائل و به تصویر کشیدن مسائل تحلیلی، به عنوان دومین عامل مذکور به شمار می روند. به طور کلی برای حصول اطمینان نسبت به قابلیت برنامه استفاده از آن در تحلیل مسائل خاص و مشخص است. این نوع مسائل عموماً باید دارای خصوصیات ذیل باشند:

- ۱- مسائل انتخابی دارای حل تحلیلی و یا نتایج آزمایشگاهی باشند.
- ۲- مفروضات ساده کننده در آماده سازی مسائل برای تحلیل، تا حد ممکن به رفتار فیزیکی واقعی آن ها نزدیک باشد.
- ۳- مسائل مزبور به گونه ای باشند که در تحلیل آنها از کل قابلیت در نظر گرفته شده در برنامه استفاده گردد. هدف از این فصل تحقیق در مورد صحت و عملکرد برنامه در تحلیل مسائل و مقایسه آن با حل دقیق موجود یا حل آن ها با نرم افزارهای تجاری نظیر ANSYS می باشد. در راستای تحقیق در مورد قابلیت های برنامه، ابتدا از آن جهت تحلیل الاستو-پلاستیک سازه های فلزی (غیرخطی) و سپس به صحت عملکرد برآوردکننده خطا در مسائل غیرخطی می پردازیم. آجهت آشنایی با نحوه وارد نمودن فایل ورودی برنامه به ضمیمه ۳ مراجعه نمائید]

۵-۲- تحلیل الاستو - پلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتری

به منظور مشاهده کارایی و قابلیت برنامه در این نوع تحلیل و با توجه به این که برنامه قابلیت تحلیل مسائل تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای را داراست، دقت، قدرت، کارایی و اعتبار برنامه در هر یک از این نوع مسائل با تحلیل مسائل نمونه ذیل و مقایسه آن با نرم افزارهای تجاری مانند ANSYS و برنامه های مشابه نوشته شده به روش اجزا محدود، بررسی می گردد:

- ۱- تحلیل الاستو-پلاستیک تیر یکسرگیردار باریک شونده (Tapered) تحت اثر نیروی برشی

۲- تحلیل الاستو-پلاستیک صفحه نامحدود سوراخدار تحت اثر کشش یکطرفه

۳- تحلیل الاستو-پلاستیک صفحه نامحدود سوراخدار تحت اثر فشار داخل حفره

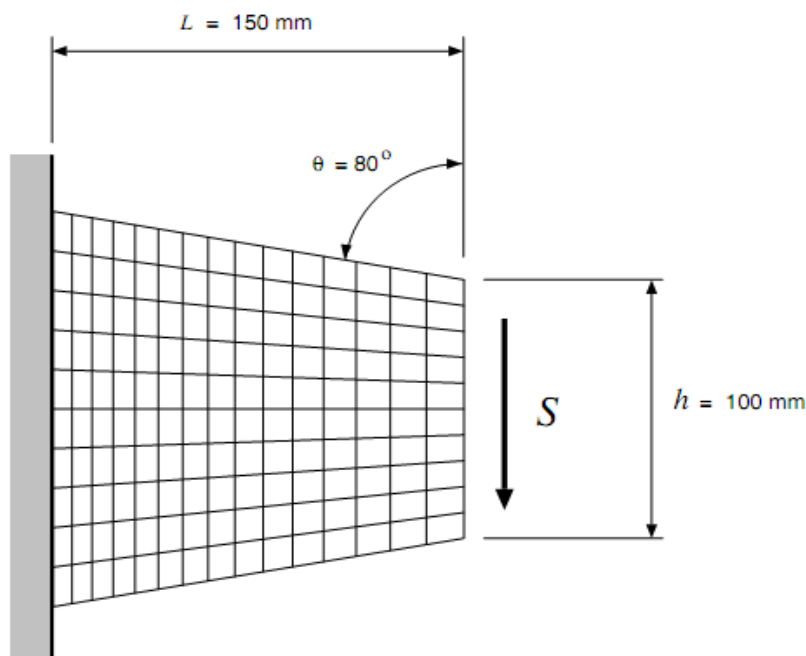
مسئله ۵-۱:

تحلیل الاستو-پلاستیک تیر یکسرگردار باریک شونده (Tapered) تحت اثر نیروی برشی با شرایط کرنش

صفحه ای (شکل ۵-۱)

در ذیل مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نشان داده شده است:

مشخصات هندسی	خواص مصالح
$L = 150^{mm}$ طول تیر	مدول الاستیسته $E = 210^{GPA}$
$h = 100^{mm}$ ارتفاع انتهای تیر	ضریب پواسان $\nu = 0.3$
$ntcpt = 336$ تعداد کل نقاط کنترلی	تنش تسلیم $Y = 0.24^{GPA}$
$npatch = 1$ تعداد وصله ها (patch)	نیروی برشی اعمالی $s = 0.093^{kn}$

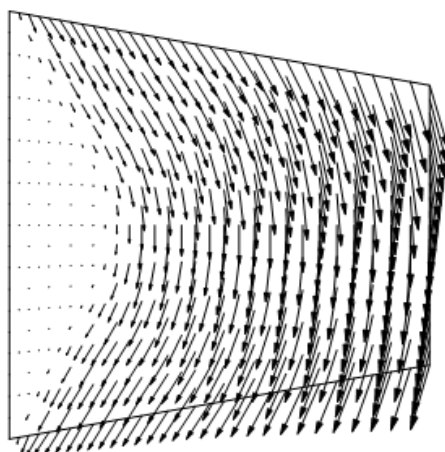


شکل ۵-۱). تیر یکسرگردار تحت تاثیر نیروی برشی

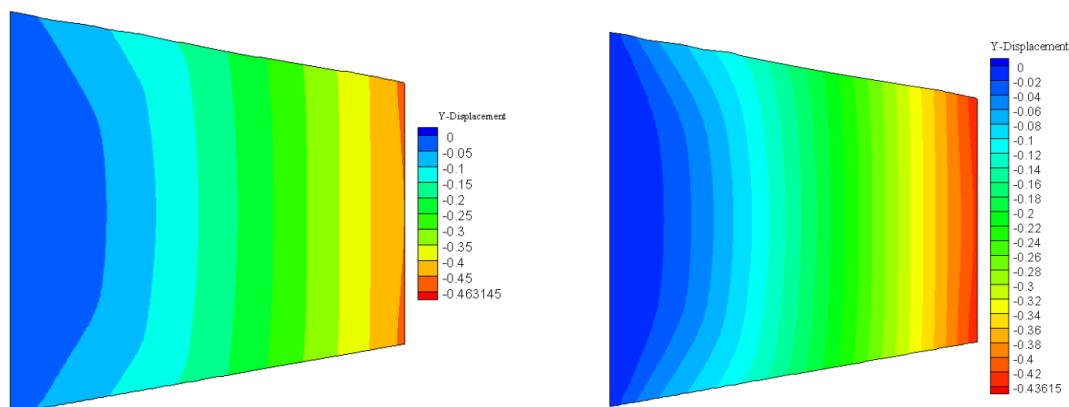
اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل غیرخطی یا الاستو-پلاستیک عبارتند از:

ملاک تسلیم: ترسکا
تعداد افزایش ها: ۴ افزایش بار
ملاک همگرایی: ملاک نیرو
تولانس خطا یا خطای مجاز: 1×10^{-6}
روش حل: روش سختی مماسی، KT
روش بارگذاری افزایشی: روش کنترل تغییر بار

جهت نشان دادن عملکرد تحلیل توسط روش ایزوژئومتری آن را با حل بدست آمده از برنامه FEM مقایسه می نمایم.

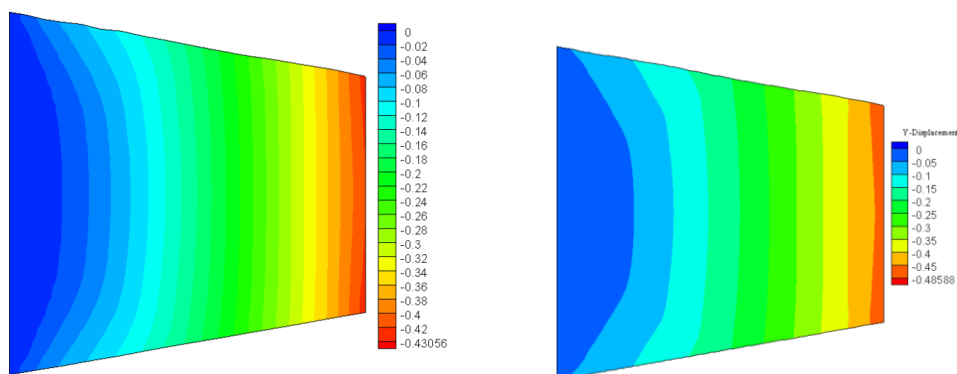


شکل ۵-۲). شمای کلی تغییر مکان تیر مسئله ۵-۱ با استفاده از تئوری خطوط لغزش توسط Green(1954)



(ب) توابع شکل درجه دو

(الف) توابع شکل درجه یک



(د)

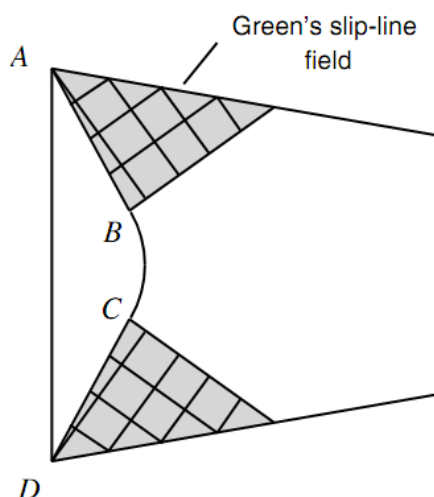
(ج) توابع شکل درجه سه

شکل ۵-۳). تغییر مکان جهت Y تیر مسئله ۵-۱ (الف)، (ب)، (ج) ناشی از تحلیل **Isogeometric** (د) ناشی از

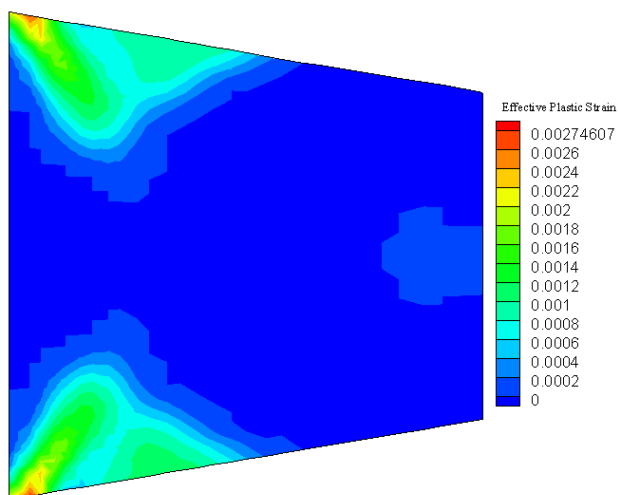
تحلیل روش اجزاء محدود

در اشکال ۵-۲ و ۵-۴ روند کلی مربوط به تغییر مکان جهت Y و کرنش موثر پلاستیک که توسط **Green** در ۱۹۵۷ با استفاده از تئوری خطوط لغزش تحلیل گردیده ، را ملاحظه می نمایید که در قیاس برنامه نوشته شده با نتایج تئوری روند قابل قبولی را نشان می دهد.

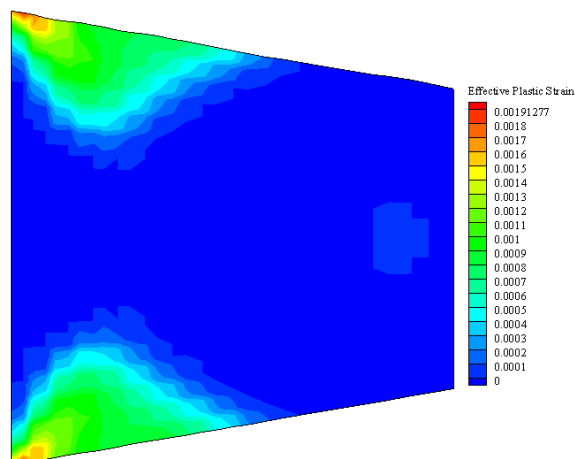
همانگونه که در اشکال (۵-۳) و (۵-۵) تا (۷-۵) مشاهده می شود، مقادیر بدست آمده از برنامه با حل مشابه آن در برنامه **FEM** شباهت بسیار زیادی دارد چه از لحاظ اعداد بدست آمده و چه از لحاظ نحوه توزیع تنش که بیانگر کارایی برنامه در تحلیل این نوع از مسائل می باشد.



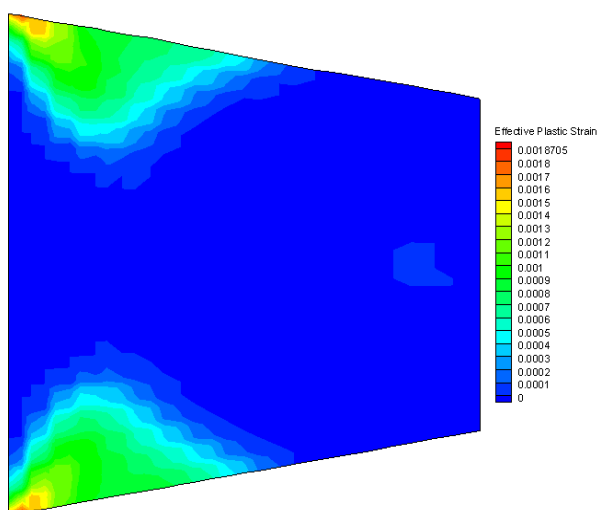
شکل ۵-۴). توزیع گستره ناحیه پلاستیک مسئله ۵-۱ با استفاده از تئوری خطوط لغزش توسط **Green(1954)**



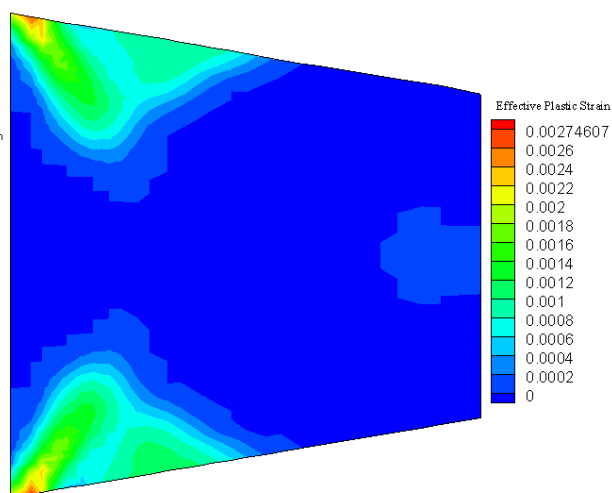
(ب) توابع شکل درجه دو



(الف) توابع شکل درجه یک



(د)



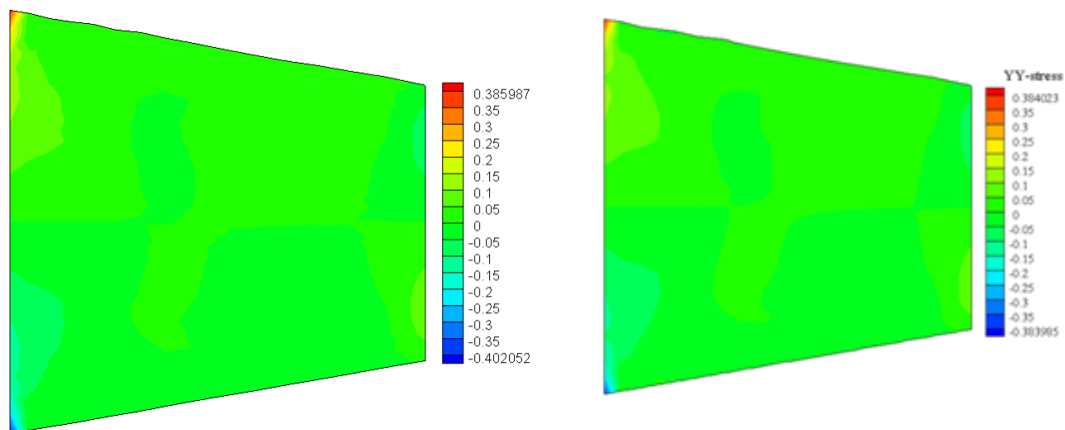
(ج) توابع شکل درجه سه

شکل ۵-۵). کرنش موثر پلاستیک تیر مسئله ۱-۵ (الف)، (ب)، (ج) ناشی از تحلیل به روش ایزوژئومتری (د)

ناشی از تحلیل به روش اجزاء محدود

با توجه به کانتورهای ترسیم شده به ازای درجات مختلف توابع شکل ، نتایجی دقیق تر و توزیع تنش بهتری

در قیاس با روش اجزاء محدود مشاهده می شود.

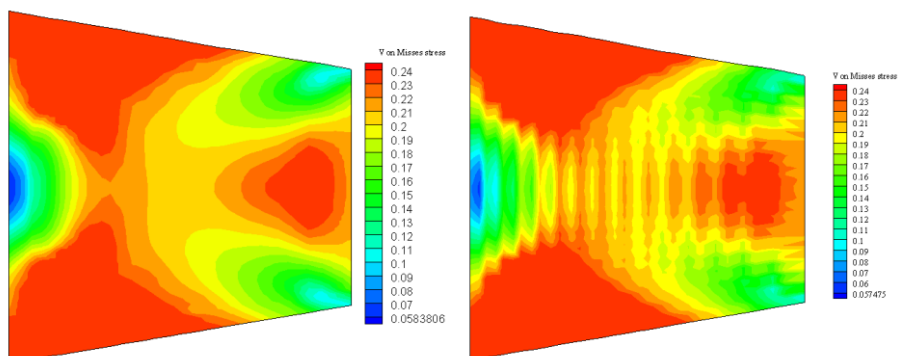


(ب)

(الف)

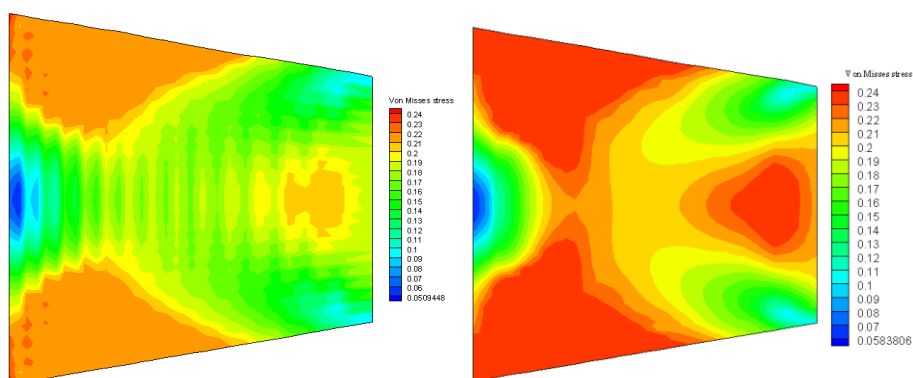
شکل ۵-۶). تنش جهت Y تیر مسئله ۵-۱ (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتری (توابع شکل درجه یک) (ب)

تحلیل به روش اجزاء محدود



(ب) توابع شکل درجه دو

(الف) توابع شکل درجه یک



(د)

(ج) توابع شکل درجه سه

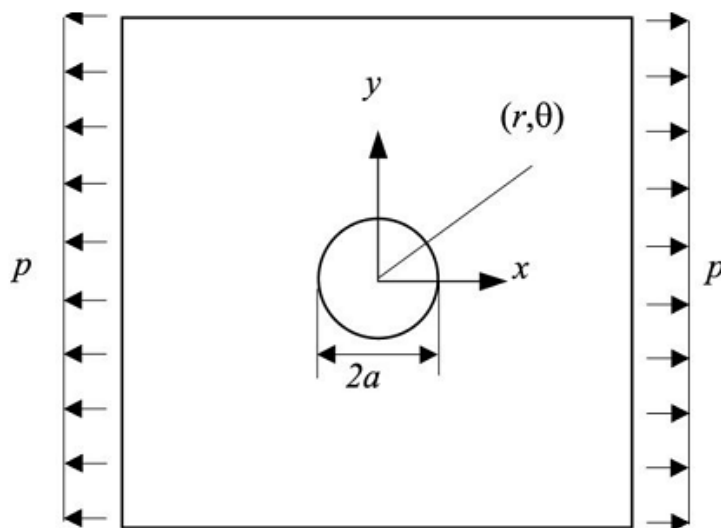
شکل ۵-۷). تنش وان-میسز مسئله ۵-۱ (الف)، (ب)، (ج) ناشی از تحلیل به روش ایزوژئومتری (د) ناشی از

تحلیل به روش اجزاء محدود

مسئله ۵-۲:

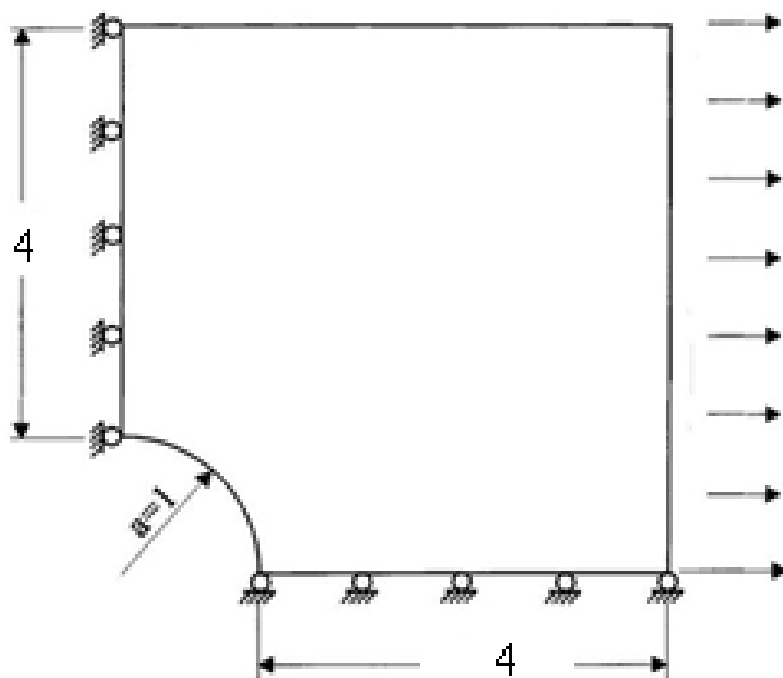
تحلیل الاستو-پلاستیک صفحه سوراخدار تحت تنش کششی از یکطرف با شرایط کرنش صفحه ای (شکل

(۸-۵)



شکل ۸-۵. صفحه سوراخدار تحت اثر نیروی کششی P

به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است. (شکل ۹-۵)



شکل ۹-۵. مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شده صفحه سوراخدار

در ذیل مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نشان داده شده است:

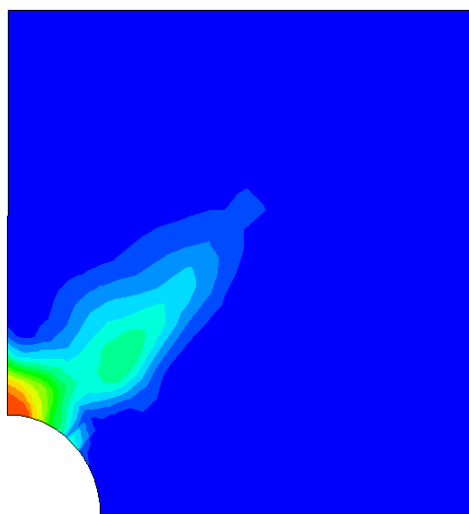
مشخصات هندسی	خواص مصالح
$L = 5^m$ طول صفحه	$E = 210^{GPA}$ مدول الاستیسته
$a = 1^m$ شعاع دایره (سوراخ)	$\nu = 0.3$ ضریب پواسان
$ntcpt = 63$ تعداد کل نقاط کنترلی	$Y = 0.24^{GPA}$ تنش تسلیم
$npatch = 2$ تعداد وصله ها (patch)	$P = 0.2^{GPA}$ تنش کششی اعمالی

اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل غیرخطی یا الاستو-پلاستیک عبارتند از:

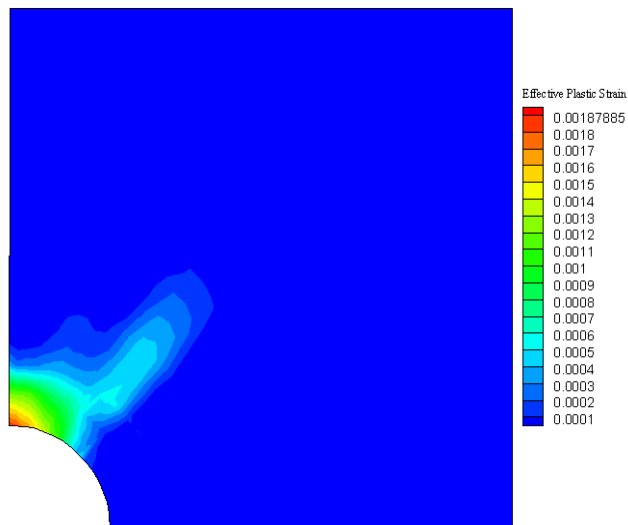
ملاک تسلیم: وان میسر
تعداد افزایش ها: ۱۰ افزایش بار
ملاک همگرایی: ملاک نیرو
تولرانس خطا یا خطای مجاز: 1×10^{-3}
روش حل: روش سختی مماسی، KT
روش بارگذاری افزایشی: روش کنترل تغییر بار

از آنجایی که حل دقیق مسئله مورد نظر در محدوده پلاستیک موجود نمی باشد، لذا جهت بررسی صحت عملکرد تحلیل از نرم افزار ANSYS با مش های ریز به عنوان جواب دقیق و همچنین حل بدست آمده از برنامه FEM استفاده می نمایم [۵۲].

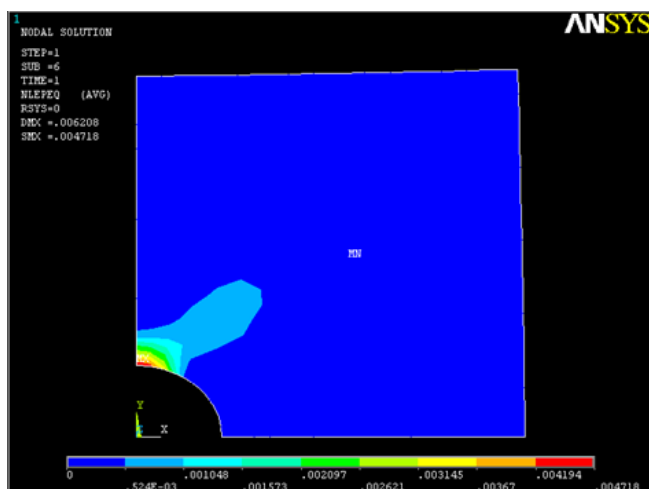
با توجه به اشکال (۵-۱۰) تا (۵-۱۲) مشاهده می شود که مقادیر بدست آمده از روش ایزوژئومتری با حل مشابه آن در نرم افزار ANSYS و روش اجزا محدود شباهت و تطابق مناسبی از لحاظ مقادیر بدست آمده و نحوه توزیع تنش را داراست.



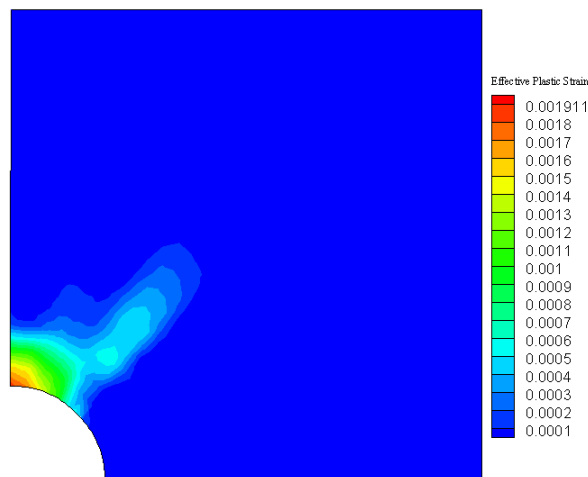
(ب) توابع شکل درجه دو



(الف) توابع شکل درجه یک



(د)

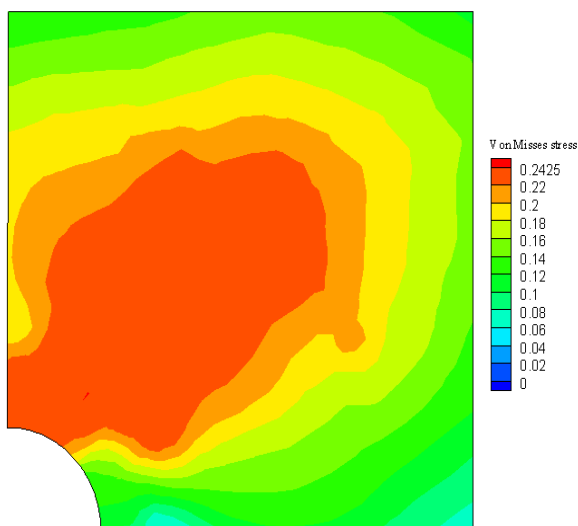


(ج)

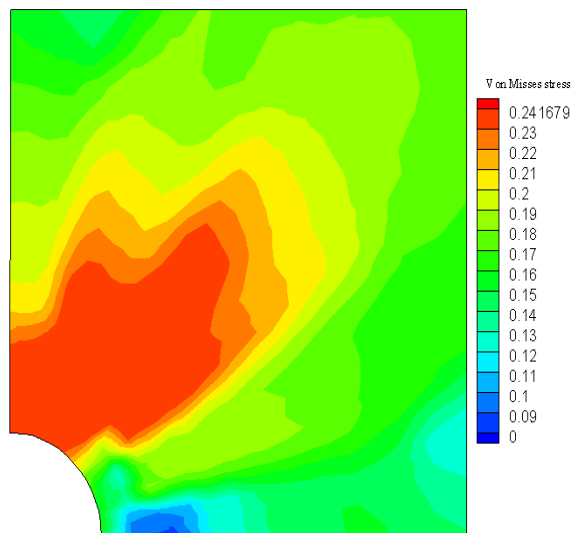
شکل ۵-۱۰). کرنش موثر پلاستیک صفحه سوراخدار (الف)، (ب) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ج) تحلیل به

روش اجزا محدود (د) تحلیل توسط ANSYS

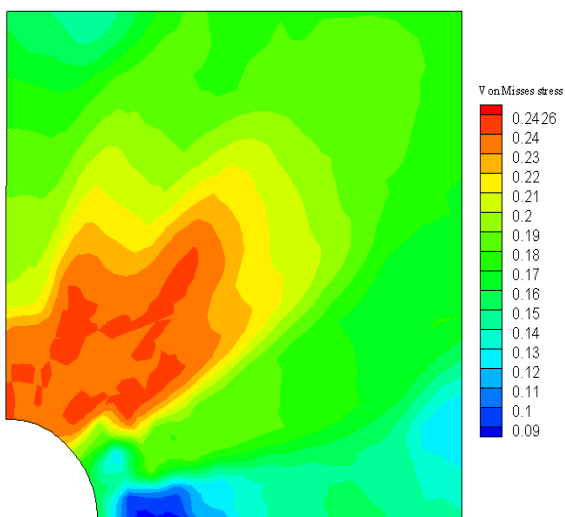
همچنین هر چه درجه توابع شکل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی بالاتر می رود ، مقادیر حاصله به نتایج بدست آمده از نرم افزار ANSYS (این نتایج به عنوان حل دقیق به کار گرفته شده اند) نزدیک تر می شوند که نشانگر کارایی این روش به ازای درجات بالاتر توابع شکل می باشد .



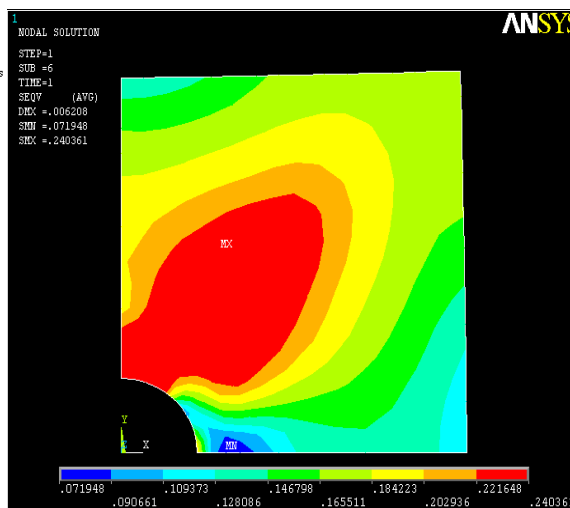
(ب) توابع شکل درجه دو



(الف) توابع شکل درجه یک



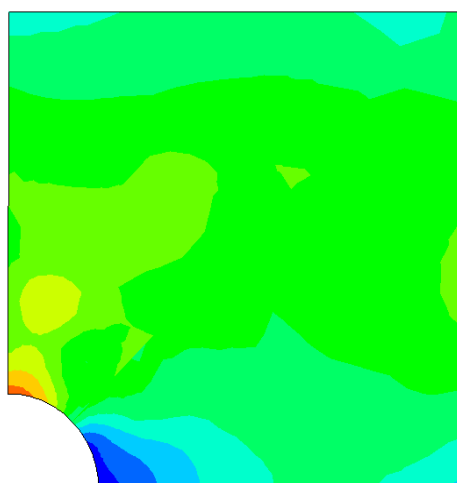
(د)



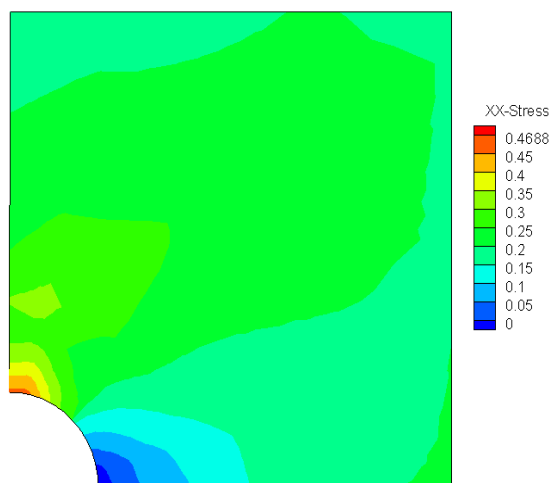
(ج)

شکل ۵-۱۱). تنش وان-میسز صفحه سوراخدار (الف)، (ب) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ج) تحلیل توسط

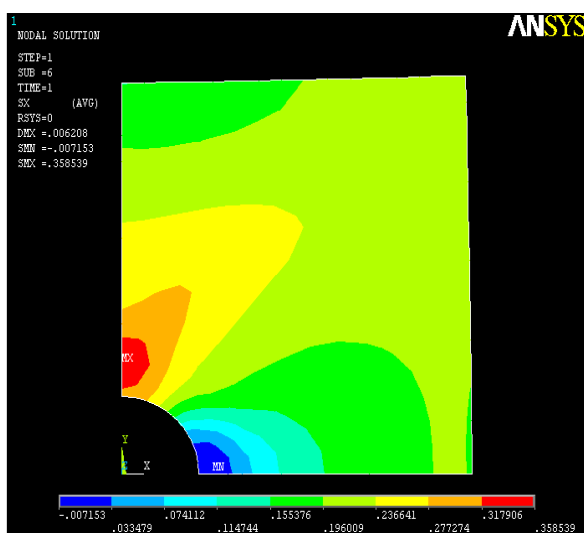
ANSYS (د) تحلیل به روش اجزا محدود



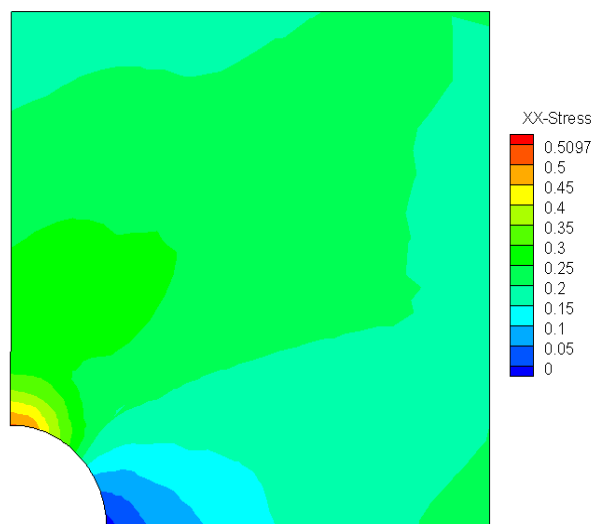
(ب) توابع شکل درجه دو



(الف) توابع شکل درجه یک



(د)



(ج)

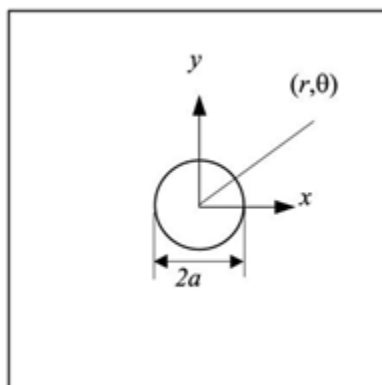
شکل ۵-۱۲). تنش جهت X صفحه سوراخدار (الف)، (ب) تحلیل به روش ایزوژئومتریکی (ج) تحلیل به روش اجزا

محدود (د) تحلیل توسط ANSYS

مسئله ۳-۵:

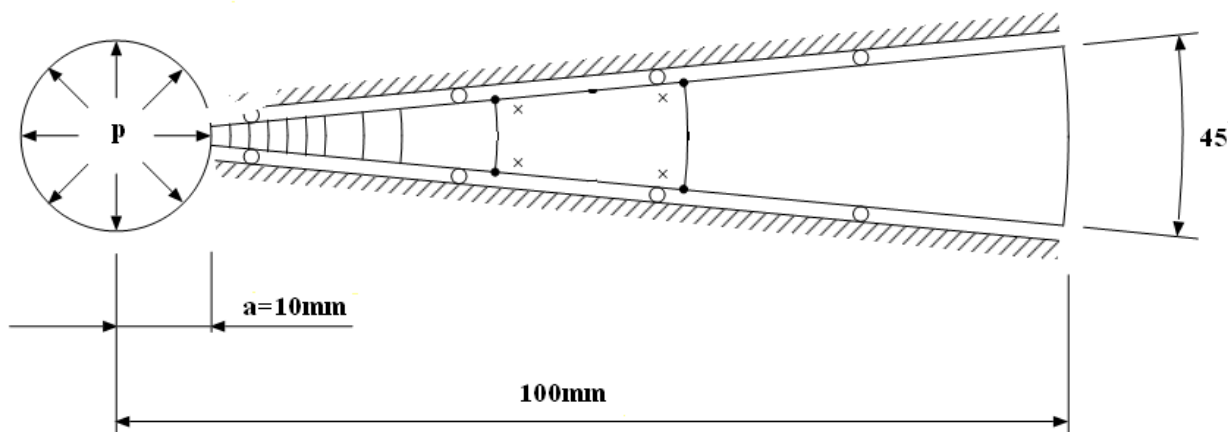
تحلیل الاستو-پلاستیک صفحه سوراخدار تحت نیروی فشاری داخلی حفره با شرایط تنش صفحه ای (شکل

۱۳-۵)



شکل ۱۳-۵). صفحه سوراخدار تحت اثر نیروی فشاری P حول سوراخ

به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است. (شکل ۱۴-۵)



شکل ۱۴-۵). مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شده صفحه سوراخدار

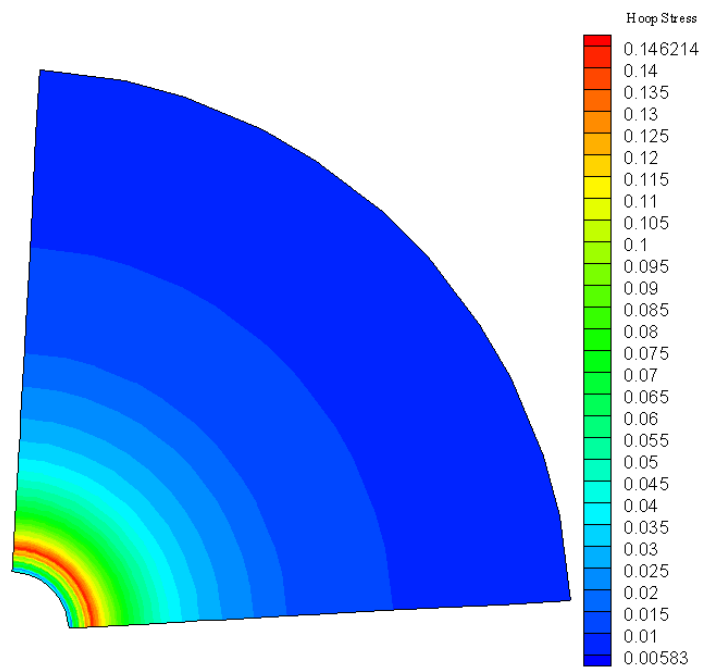
در جدول ذیل مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نمایش داده شده است:

مشخصات هندسی		خواص مصالح	
$L = 100^{mm}$	طول صفحه	$E = 210^{GPA}$	مدول الاستیسته
$a = 10^{mm}$	شعاع دایره (سوراخ)	$\nu = 0.3$	ضریب پواسان
$ntcpt = 161$	تعداد کل نقاط کنترلی	$Y = 0.24^{GPA}$	تنش تسلیم
$npatch = 1$	تعداد وصله ها (patch)	$P = 0.27^{GPA}$	تنش فشاری اعمالی

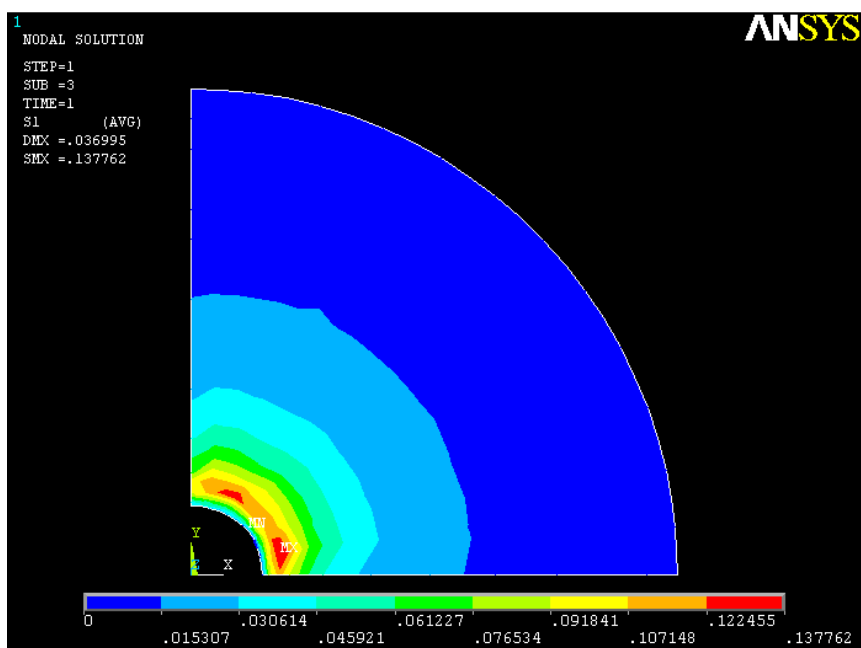
اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل غیرخطی یا الاستو-پلاستیک عبارتند از:

ملاک تسلیم: وان میسز
تعداد افزایش ها: ۵ افزایش بار
ملاک همگرایی: ملاک نیرو
تولرانس خطا یا خطای مجاز: 1×10^{-6}
روش حل: روش سختی مماسی، KT
روش بارگذاری افزایشی: روش کنترل تغییر بار

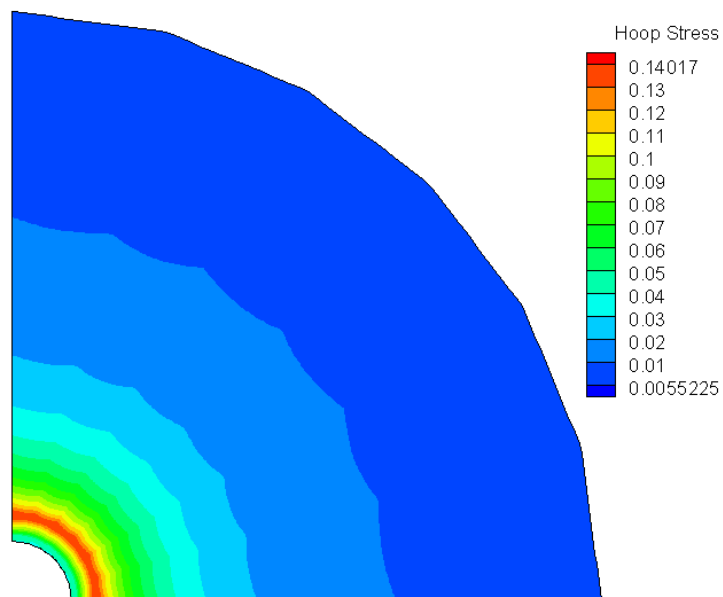
به علت عدم دسترسی به حل دقیق مسئله مورد نظر در محدوده پلاستیک، جهت بررسی صحت عملکرد تحلیل مقادیر حاصله از نرم افزار ANSYS با مش های ریز را به عنوان جواب دقیق بکار می گیریم. با توجه به اشکال (۵-۱۵) تا (۵-۱۸) مشاهده می شود که مقادیر بدست آمده از روش ایزوژئومتری با حل مشابه آن در نرم افزار ANSYS تطابق مناسبی از لحاظ مقادیر بدست آمده و نحوه توزیع تنش را داراست.



(الف)

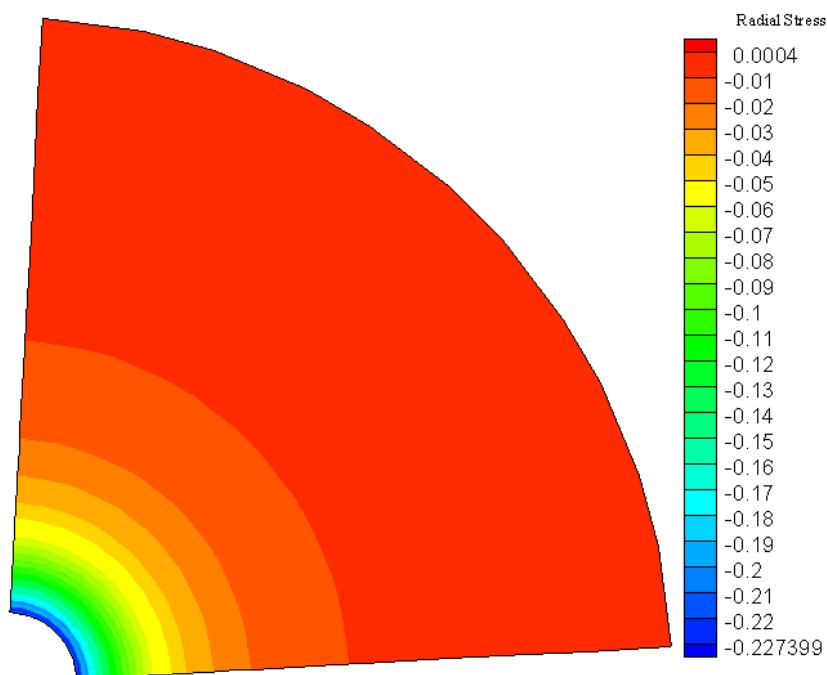


(ب)

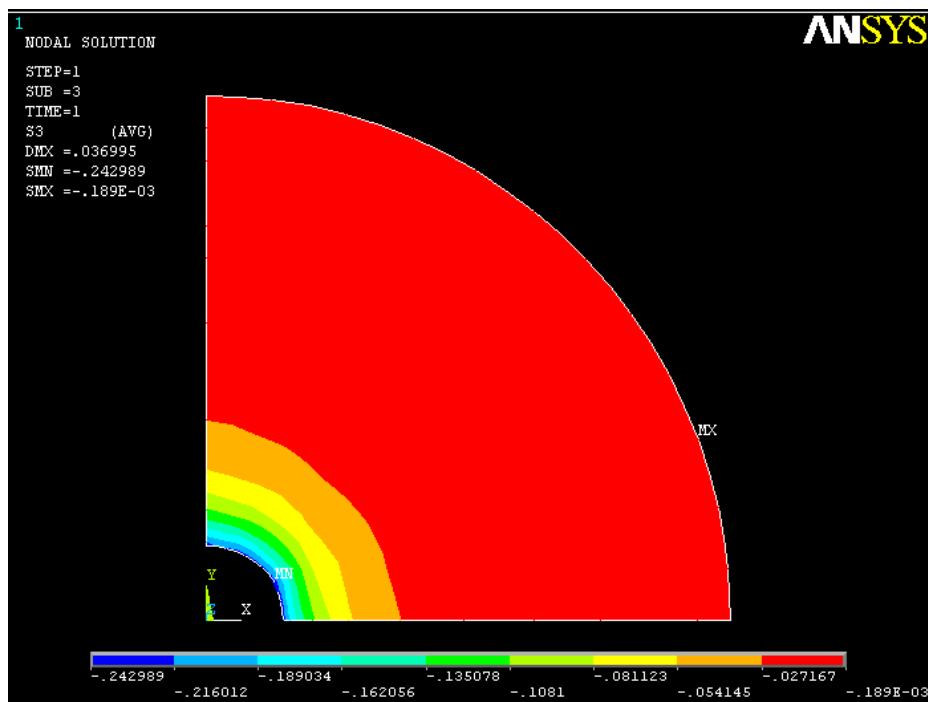


(ج)

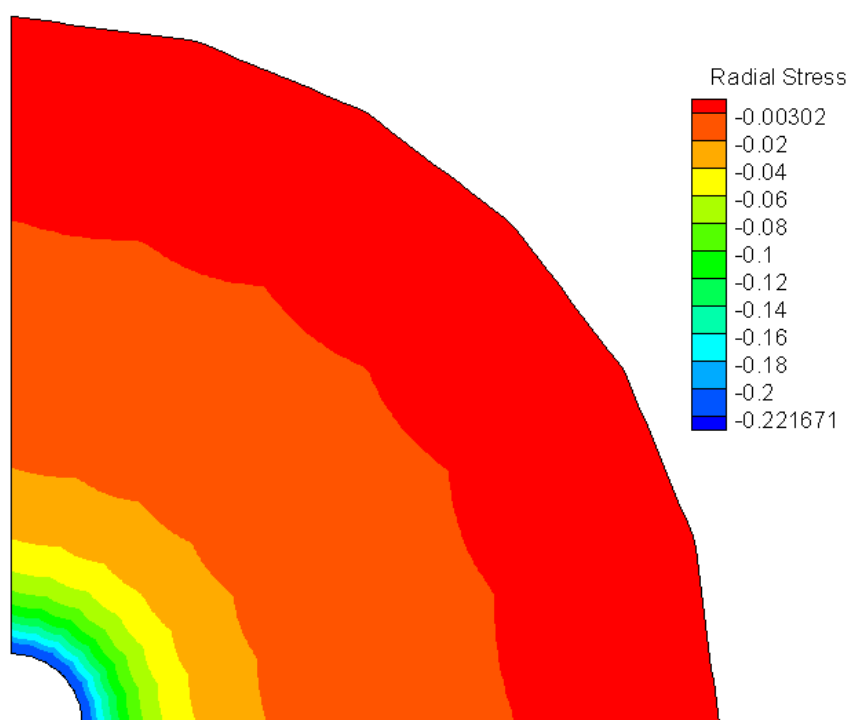
شکل ۵-۱۵). تنش محیطی مسئله ۳-۵ (الف) روش ایزوژئومتری (ب) ANSYS (ج) تنش بهبود یافته



(الف)



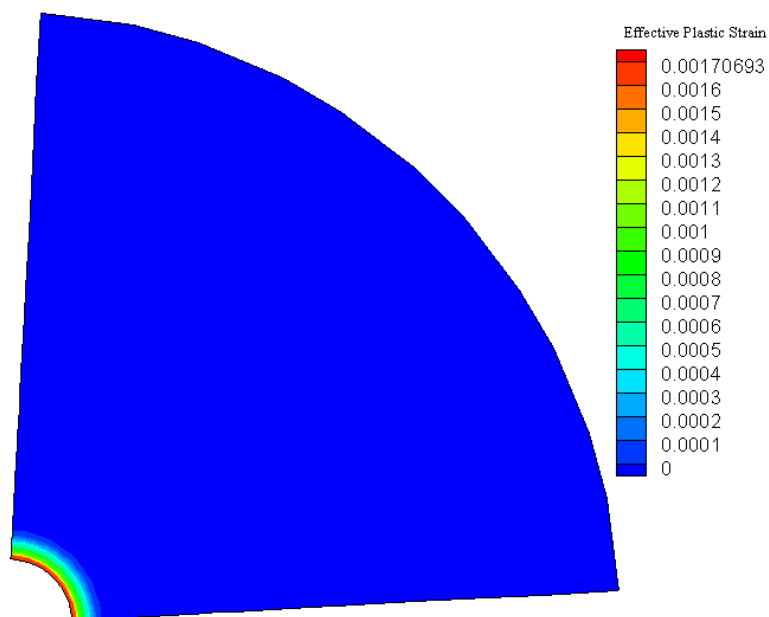
(ب)



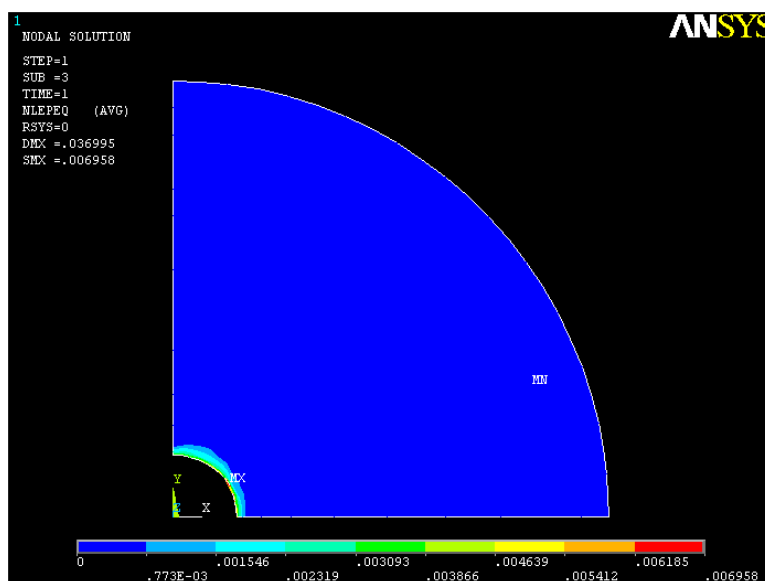
(ج)

شکل ۵-۱۶). تنش شعاعی صفحه سوراخدار (الف) روش ایزوژئومتریك (ب) ANSYS (ج) تنش بهبود یافته همان گونه که در اشکال ۵-۱۵ و ۵-۱۶ ملاحظه شد در این مسئله تنش های بهبود یافته نیز با نتایج حاصله به تصویر کشیده شده که در قیاس با حل ایزوژئومتریك دقت و شباهت بیشتری را از خود نشان داد

که بیانگر کارایی روش پیشنهادی جهت بازیافت تنش ها می باشد .

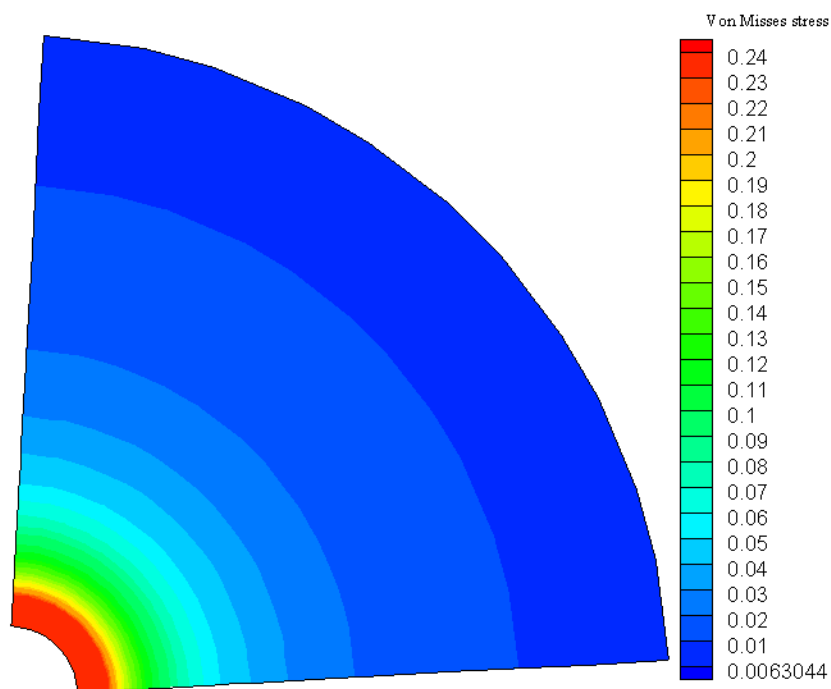


(الف)

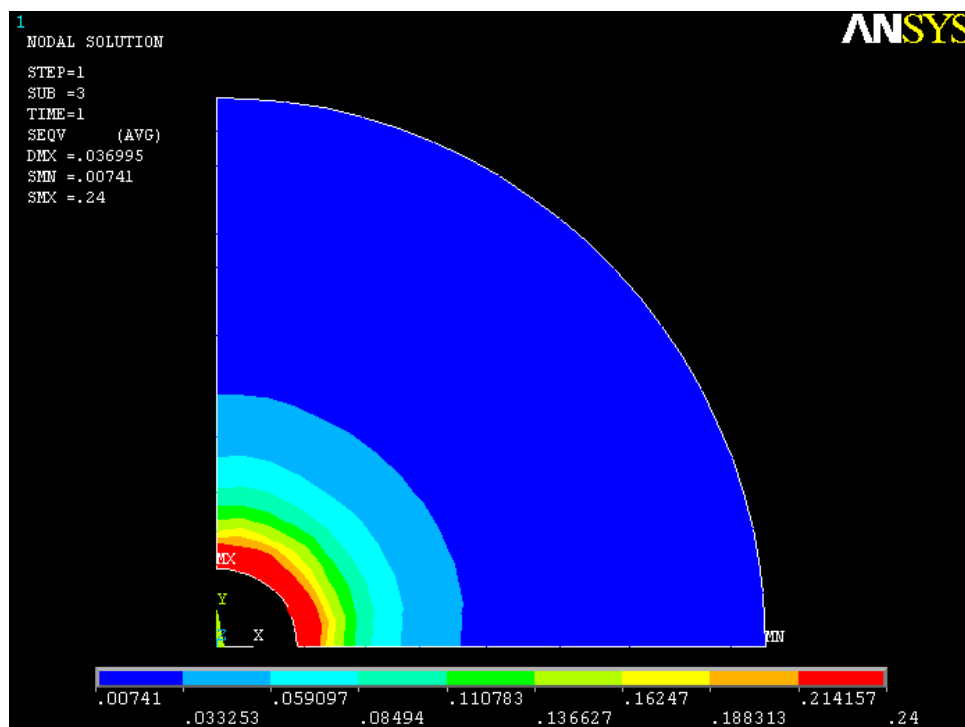


(ب)

شکل ۵-۱۷). کرنش موثر پلاستیک صفحه سوراخدار (الف) روش ایزوژئومتری (ب) ANSYS



(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۸). تنش وان - میسز صفحه سوراخدار (الف) روش ایزوژئومتریک (ب) ANSYS

۵-۳- برآورد خطا در تحلیل الاستو - پلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتریک

همانگونه که در بخش قبل ملاحظه شد، برنامه نوشته شده از کارایی قابل قبولی جهت تحلیل الاستو-

پلاستیک مسائل برخوردار است. در این بخش نیز به روش پیشنهاد شده جهت تخمین خطا در مسائل غیرخطی به روش ایزوژئومتریکی می پردازیم تا صحت روش مذکور در بازیافت تنش ها را توسط معیارهای

مدنظر بیازماییم. مسائلی که در این بخش ارائه خواهند شد، عبارتند از:

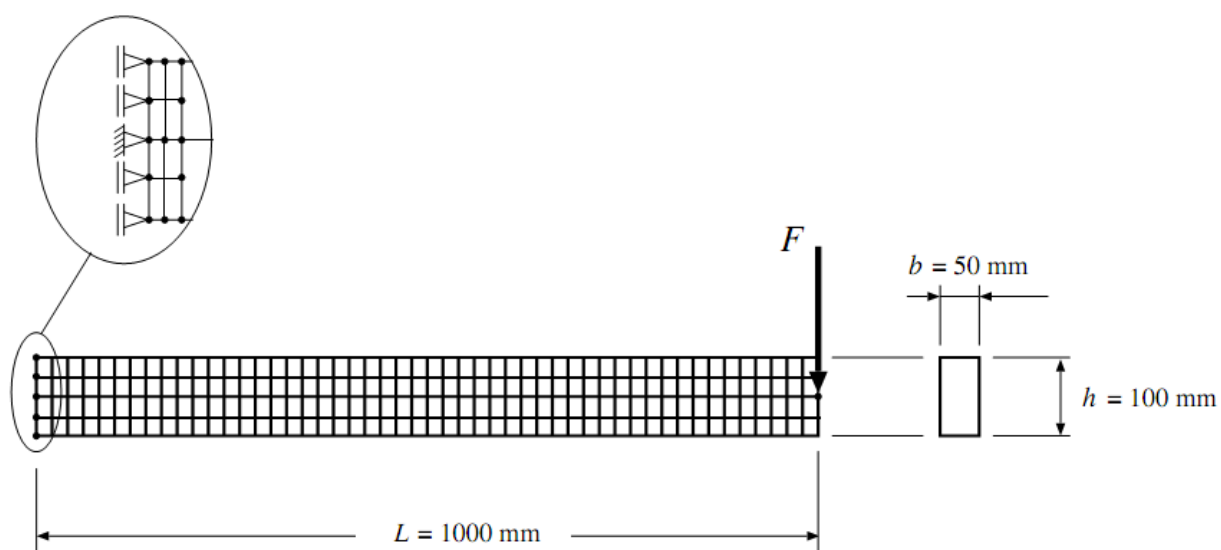
۱- تحلیل الاستو-پلاستیک تیر یکسرگیردار تحت اثر بار متمرکز در انتهای آن

۲- تحلیل الاستو-پلاستیک استوانه جدار ضخیم فولادی تحت اثر فشار داخلی

مسئله ۵-۴:

تحلیل الاستو-پلاستیک تیر یکسرگیردار تحت اثر بار متمرکز در انتهای آن با شرایط تنش صفحه ای به

همراه تخمین خطا به روش مذکور (شکل ۵-۱۹)



شکل ۵-۱۹. شرایط هندسی و مرزی تیر یکسرگیردار

در ذیل مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نشان داده شده است:

مشخصات هندسی	خواص مصالح
$L = 1000^{mm}$ طول تیر	مدول الاستیسته $E = 210^{GPA}$
$b = 50^{mm}, h = 100^{mm}$ ابعاد مقطع تیر	ضریب پواسان $\nu = 0.3$
$ntcpt = 255$ تعداد کل نقاط کنترلی	تنش تسلیم $Y = 0.24^{GPA}$
$npatch = 1$ تعداد وصله ها (patch)	نیروی متمرکز اعمالی $F = 30^{KN}$

اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل غیرخطی یا الاستو-پلاستیک عبارتند از:

ملاک تسلیم: وان میسر
تعداد افزایش ها: ۳۰ افزایش بار
ملاک همگرایی: ملاک نیرو
تولرانس خطا یا خطای مجاز: 1×10^{-3}
روش حل: روش سختی مماسی، KT
روش بارگذاری افزایشی: روش کنترل تغییر بار

در ابتدا مختصراً به روابط تحلیلی در حل این مسئله اشاره می نمائیم و سپس آنها را با نتایج بدست آمده از برنامه مقایسه می کنیم.

حل تحلیلی :

حالت الاستیک :

$$\tau = \frac{F}{2I}(c^2 - y^2) \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{F(L-x)y}{I} \quad (1-5)$$

که در آن $\sigma = \sigma_x, \tau = \tau_{xy}$ و $I = I_z = \frac{2bc^3}{3}$ می باشد.

پلاستیسته زمانی آغاز می شود که $F = F_E = 2\sigma_Y bc^2 / 3L$ باشد. در این حالت اگر نیروی اعمالی بیشتر از مقدار نیروی تسلیم شود ($F \geq F_E$)، ناحیه پلاستیک (شکل ۵-۷) در گوشه های بالا و پایین وجوه تیر گسترش می یابد.

حالت پلاستیک :

پس از رسیدن نیروی اعمالی به نیروی بیش از نیروی تسلیم، آنگاه در ناحیه پلاستیک مقدار σ, τ با توجه به مقدار $y_{(x)}^*$ (مرز ناحیه الاستو-پلاستیک) به دو صورت زیر محاسبه می گردد:

(۱) برای هسته پلاستیک:

$$y = \pm y_{(x)}^* \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_y & -c \leq y \leq -y_{(x)}^* \\ \sigma = -\sigma_y & y_{(x)}^* \leq y \leq c \end{cases} \quad (۲-۵)$$

$$y = \pm y_{(x)}^* \Rightarrow \begin{cases} \tau = 0 & -c \leq y \leq -y_{(x)}^* \\ \tau = 0 & y_{(x)}^* \leq y \leq c \end{cases}$$

که در آن c : ارتفاع تار خنثی و $y_{(x)}^*$: مرز الاستو-پلاستیک می باشد.

(۲) برای هسته الاستیک:

برای $-y_{(x)}^* \leq y \leq y_{(x)}^*$ توزیع تنش σ به صورت توزیع خطی از تنش تسلیم (رابطه ۳-۵) و توزیع تنش τ نیز به صورت (رابطه ۴-۵) می باشد:

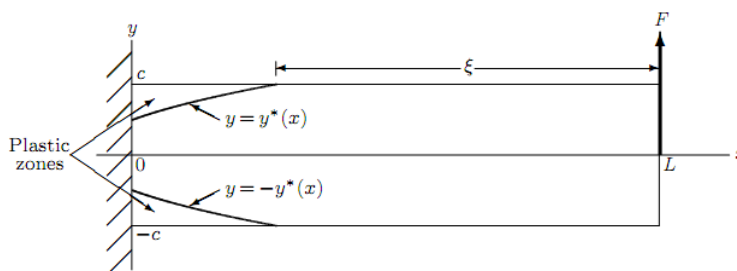
$$\sigma = -\sigma_y \left(\frac{y}{y_{(x)}^*} \right) \quad (۳-۵)$$

$$\tau = 3F/4by_{(x)}^* \quad (۴-۵)$$

در روابط بالا مقدار مرز الاستو-پلاستیک $y_{(x)}^*$ به صورت رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$y_{(x)}^* = \sqrt{3 \left[c^2 - \frac{F(L-x)}{b \times \sigma_y} \right]} = c \sqrt{3 - \frac{2(L-x)}{\xi}} \quad (۵-۵)$$

که در آن ξ طول گستره ناحیه الاستیک می باشد و از رابطه $\xi = 2\sigma_y bc^2/3F$ قابل محاسبه است.



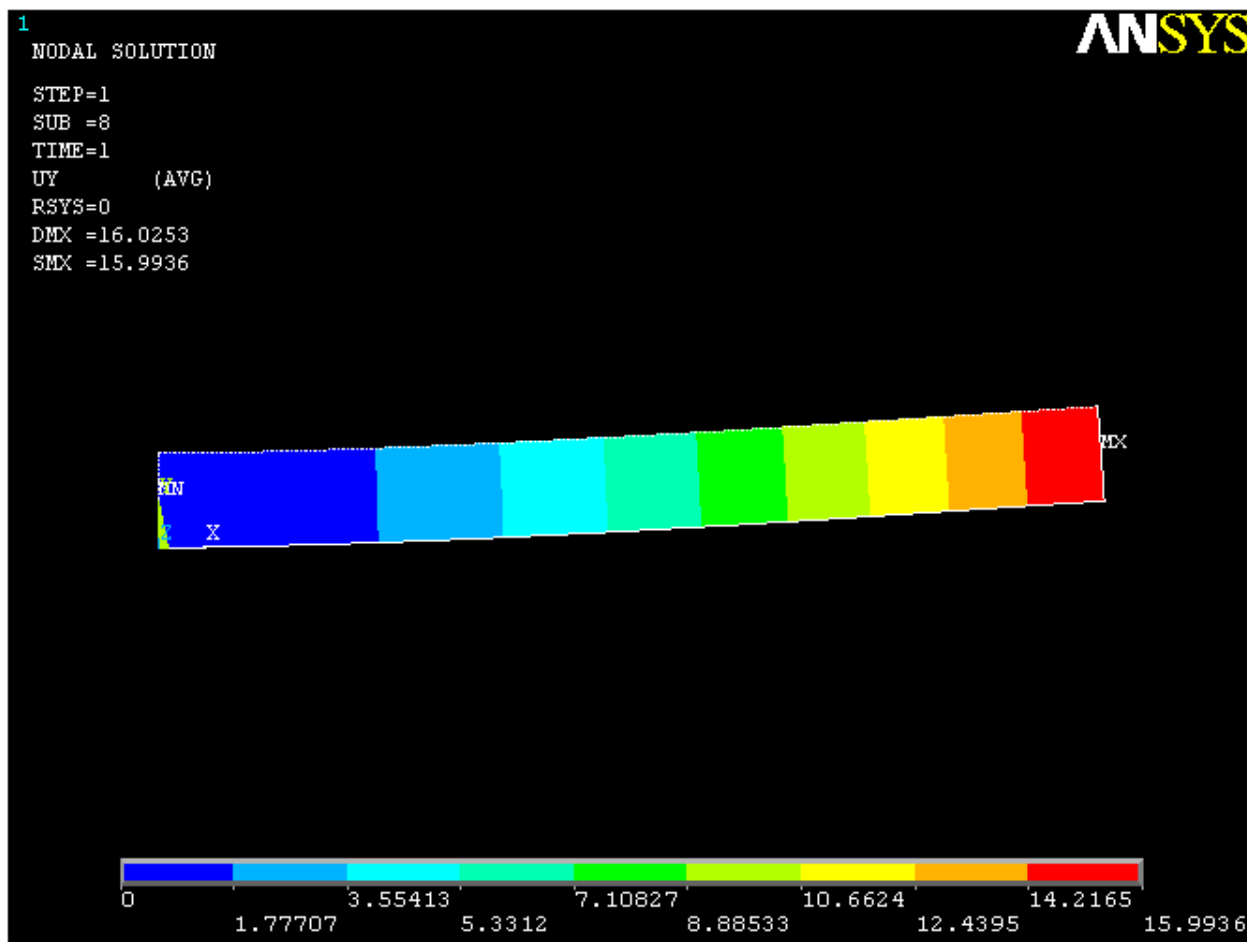
شکل ۵-۲۰. نواحی پلاستیک و الاستیک در تیر طره

مقدار بار نهایی (خرابی) برابر است با: $F = F_U = \sigma_y bc^2/L$ که این مقدار ۱/۵ برابر بار تسلیم (F_E) می باشد.

جهت اطلاعات بیشتر نسبت به سایر روابط و خواص مسئله ۴-۵، به منابع [۵۳-۵۵] رجوع شود.

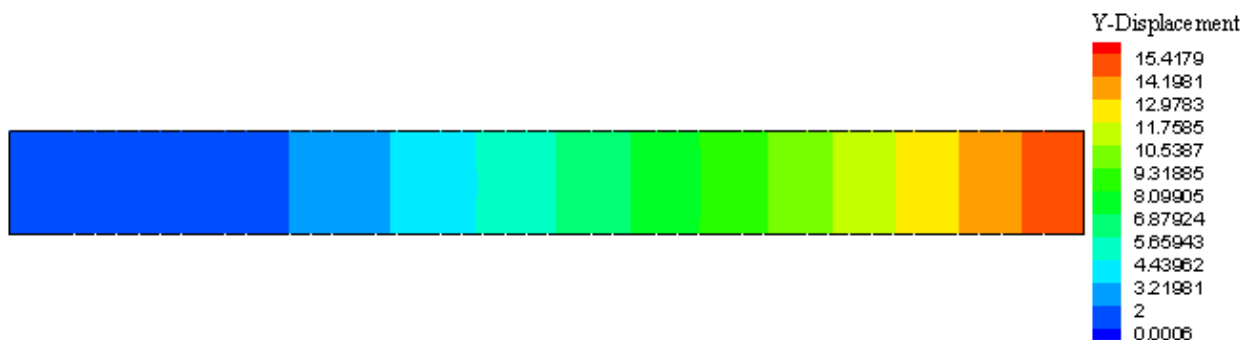
نتایج و تحلیل خروجی های برنامه:

در این قسمت نتایج حاصل از برنامه با روابط تئوری یا نرم افزار ANSYS به صورت جدولی و نموداری مقایسه شده است. همانگونه که در اشکال (۵-۲۱) تا (۵-۲۹) مشاهده می شود، نتایج بدست آمده از برنامه روند مناسب و قابل قبولی نسبت به سایر نتایج از خود نشان می دهد علی الخصوص نتایج بهبود یافته (بازیابی شده) نسبت به صفحه تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری دارای تغییرات کمتری می باشد و همگرایی بیشتری به نتایج حل دقیق دارد که نشان دهنده کارایی مناسب محاسبه گر خطا می باشد.

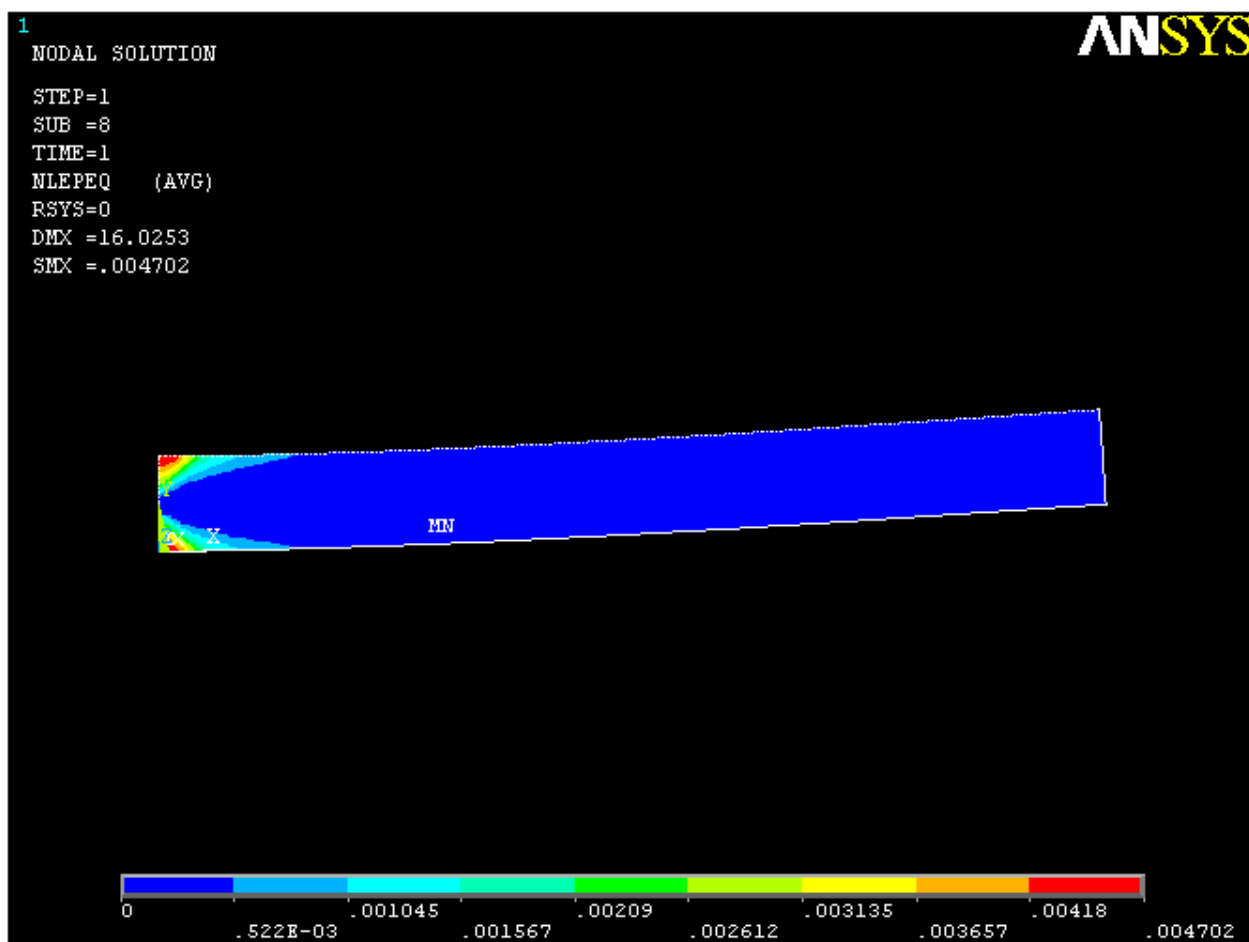


شکل ۵-۲۱). تغییر مکان تیر یکسرگیردار در جهت Y (تحلیل توسط نرم افزار ANSYS)

با توجه به روابط تحلیلی مقدار ماکزیمم تغییر مکان در جهت Y به ازای بار اعمالی 30^{KN} می بایست حدود $16.147mm$ باشد که در قیاس با نتایج حاصله از تحلیل ایزوژئومتری خطای قابل قبولی دارد .



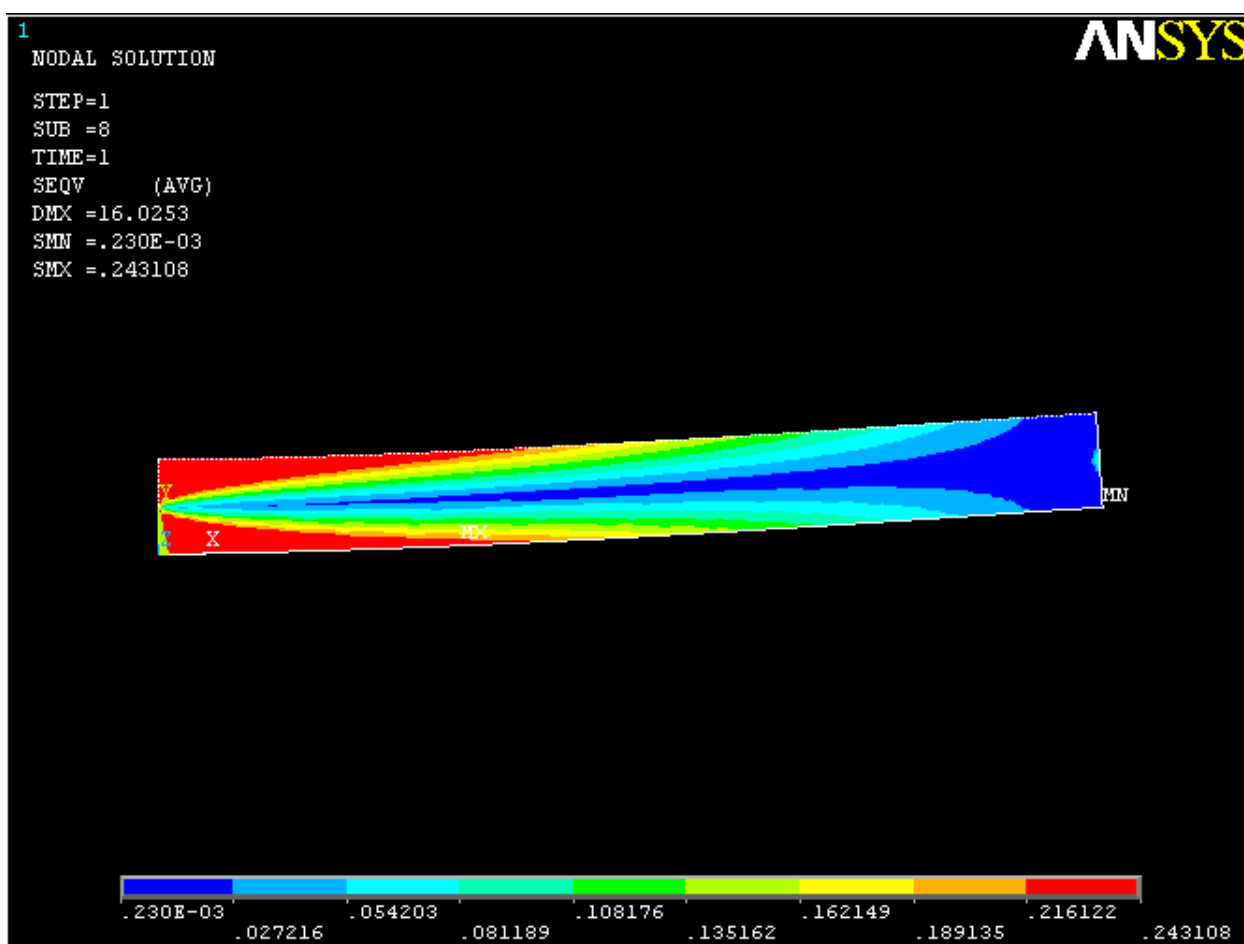
شکل ۵-۲۲). تغییر مکان تیر یکسرگیردار در جهت Y (تحلیل توسط روش ایزوژئومتری)



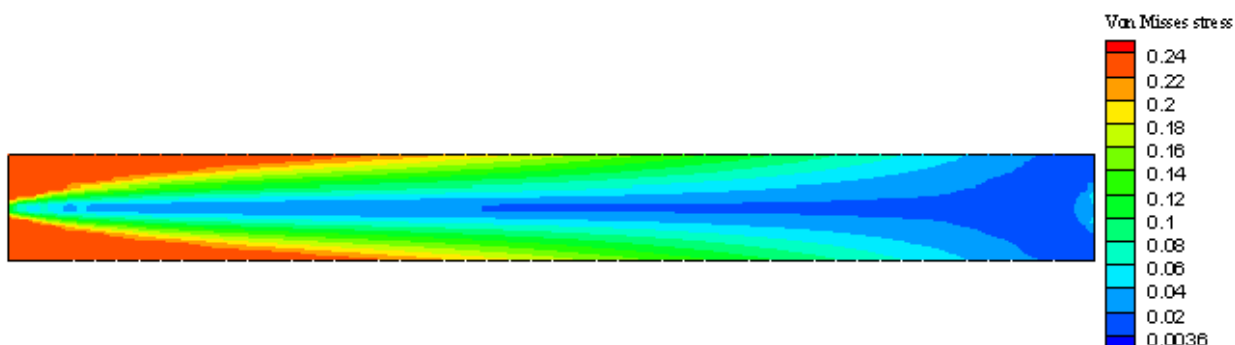
شکل ۵-۲۳). کرنش موثر پلاستیک تیر یکسرگیردار (تحلیل توسط نرم افزار ANSYS)



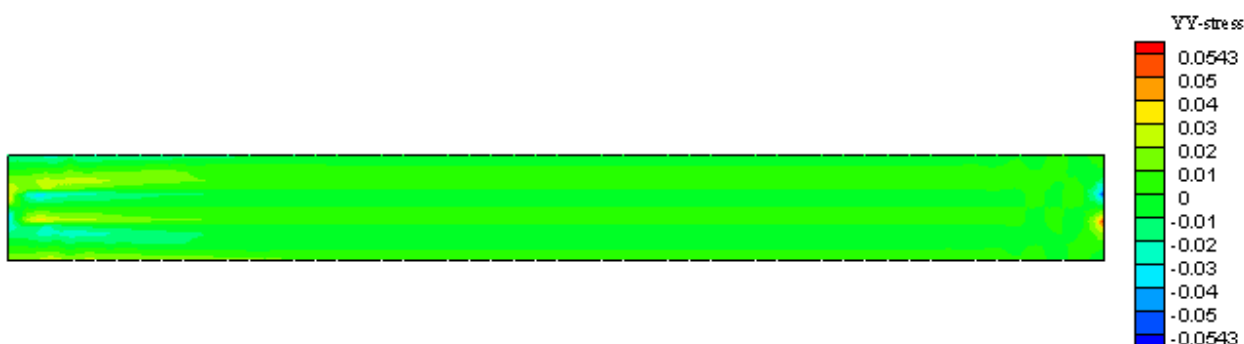
شکل ۵-۲۴). کرنش موثر پلاستیک تیر یکسرگردار (تحلیل توسط روش ایزوژئومتری)



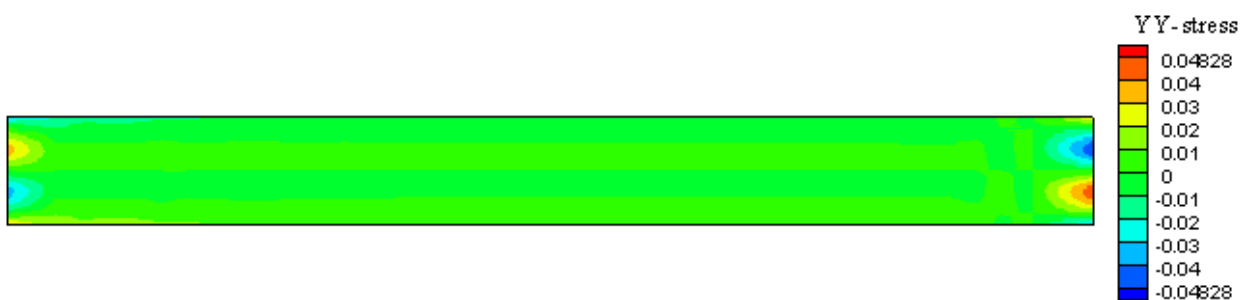
شکل ۵-۲۵). تنش وان میسز تیر یکسرگردار (تحلیل توسط نرم افزار ANSYS)



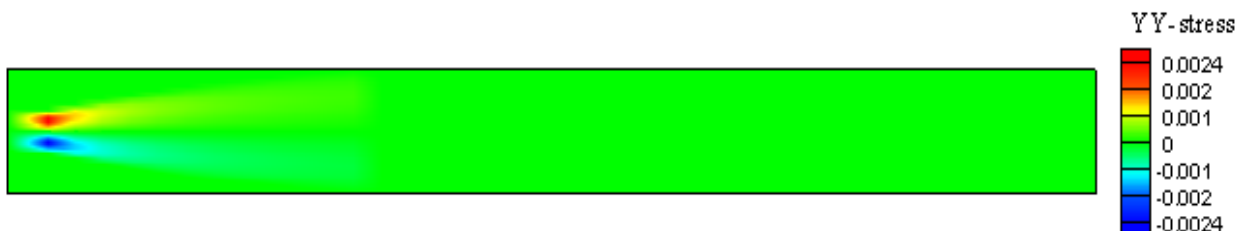
شکل ۵-۲۶). تنش وان میسز تیر یکسرگیردار (تحلیل توسط روش ایزوژئومتری)



شکل ۵-۲۷). تنش جهت Y تیر یکسرگیردار ناشی از حل ایزوژئومتری



شکل ۵-۲۸). تنش جهت Y تیر یکسرگیردار ناشی از حل بهبود یافته

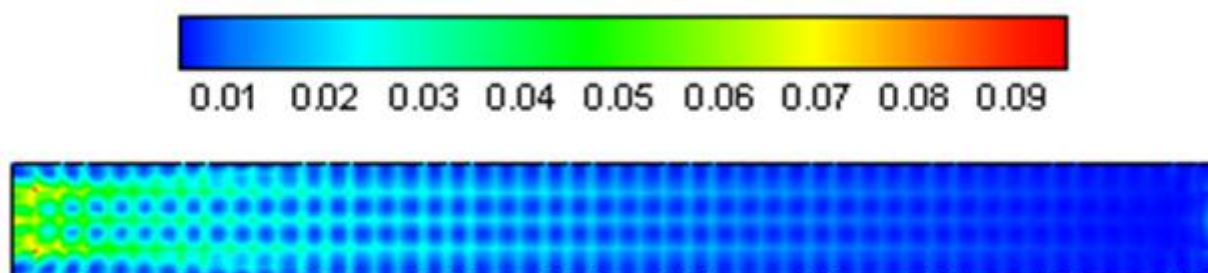


شکل ۵-۲۹). تنش جهت Y تیر یکسرگیردار ناشی از حل دقیق

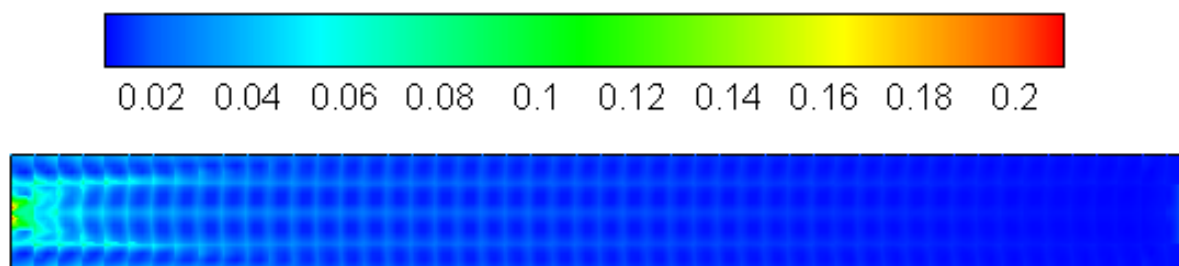
در جدول ضمیمه ۴ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر هر المان و همچنین برای کل دامنه نشان داده شده است. شاخص تاثیر نسبت نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می باشد که بیانگر

همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا به شمار می رود. هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تاثیر به سمت یک میل نماید که در این مسئله مقدار آن 0.93 می باشد.

در اشکال ۵-۳۰ و ۵-۳۱ نحوه توزیع نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی نشان داده شده است، که تشابه در نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه گر خطا می باشد.



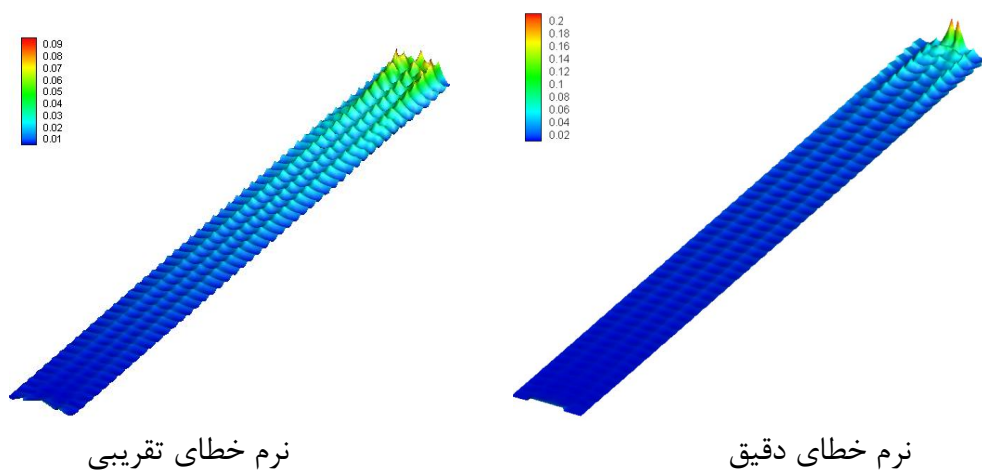
(الف) نرم خطای تقریبی



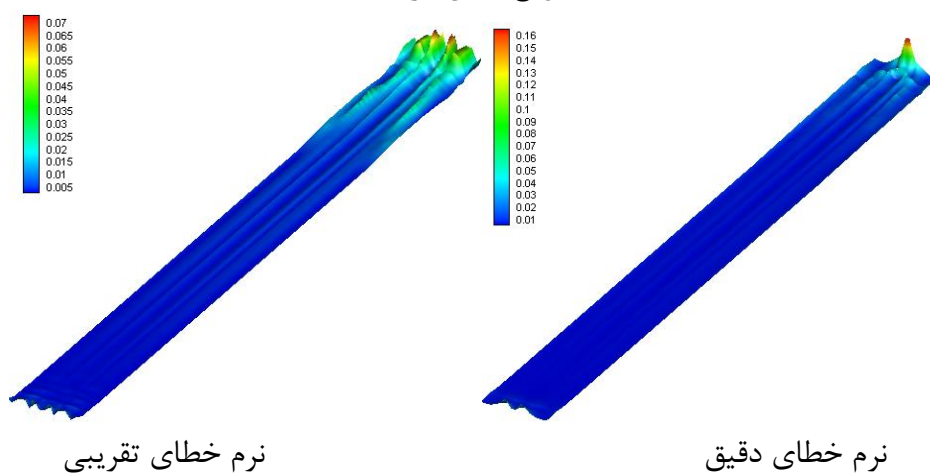
(ب) نرم خطای دقیق

شکل ۵-۳۰). توزیع دوبعدی نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در تیر یکسرگیردار به ازای توابع شکل درجه

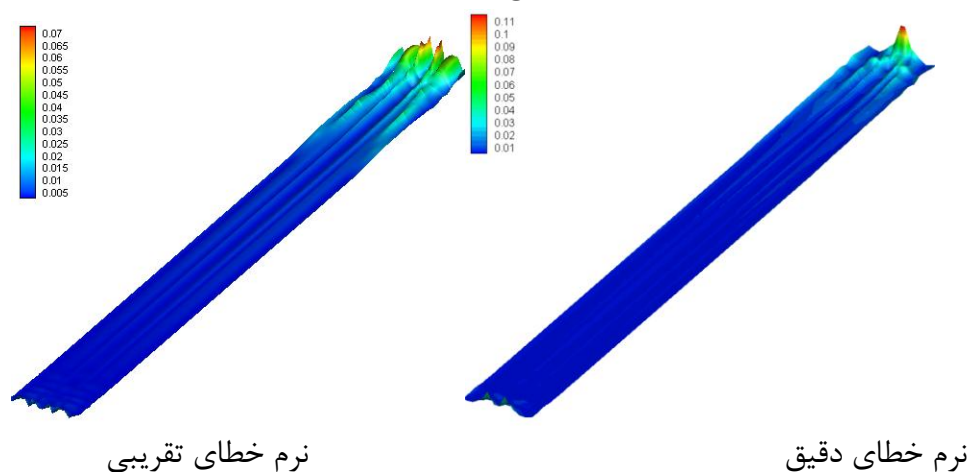
یک



الف) توابع شکل درجه یک



الف) توابع شکل درجه دو

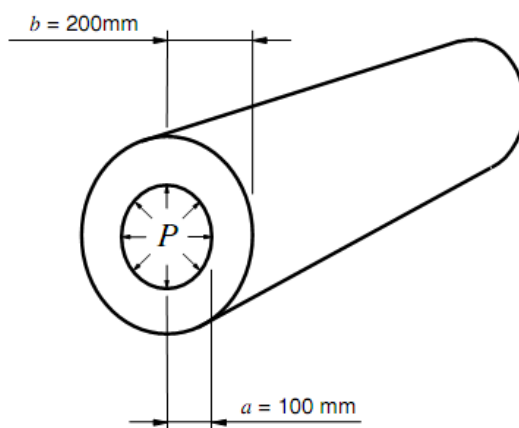


الف) توابع شکل درجه سه

شکل ۵-۳۱). توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر یکسرگیردار

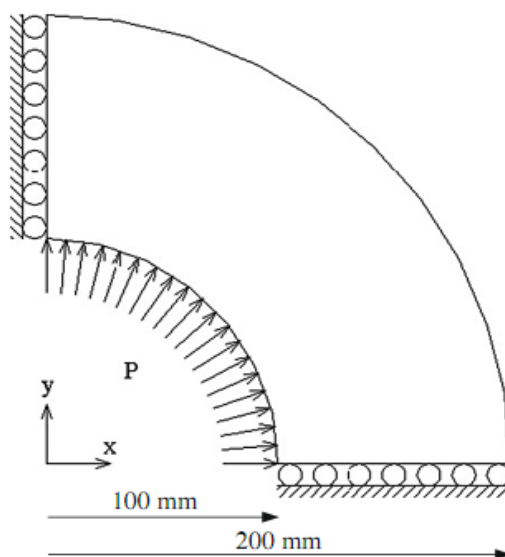
مسئله ۵-۵:

تحلیل الاستو-پلاستیک استوانه جدار ضخیم فولادی تحت اثر فشار داخلی با شرایط کرنش صفحه ای به همراه تخمین خطا (شکل ۵-۳۲)



شکل ۵-۳۲. استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی

به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است. (شکل ۵-۳۳)



شکل ۵-۳۳. شرایط هندسی و تکیه گاهی استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی

در ذیل مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نشان داده شده است:

مشخصات هندسی	خواص مصالح
$r_a = 100^{mm}$ شعاع داخلی	مدول الاستیسته $E = 2.1 \times 10^4 \frac{dn}{mm^2}$
$r_b = 200^{mm}$ شعاع خارجی	ضریب پواسان $\nu = 0.3$
$ntcpt = 399$ تعداد کل نقاط کنترلی	تنش تسلیم $Y = 24 \frac{dn}{mm^2}$
$npatch = 1$ تعداد وصله ها (patch)	نیروی فشاری اعمالی $P = 18 \frac{dn}{mm^2}$

اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل غیرخطی یا الاستو-پلاستیک عبارتند از:

ملاک تسلیم: وان میسر
تعداد افزایش ها: ۵ افزایش بار
ملاک همگرایی: ملاک نیرو
تولرانس خطا یا خطای مجاز: 1×10^{-3}
روش حل: روش سختی مماسی، KT
روش بارگذاری افزایشی: روش کنترل تغییر بار

حل تحلیلی :

برای مقایسه نتایج بدست آمده از برنامه آن را با روابط حل تحلیلی که در خود برنامه بارگذاری شده، مقایسه می نمائیم، که این روابط به صورت ذیل تعریف می شوند:

$$N_3 = \left(\frac{1}{3}(1-2\nu)^2 + \frac{b^4}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad N_2 = \frac{c^2}{b^2} \quad N_1 = \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

حالت الاستیک :

$$\sigma_\theta = p \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) / \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \quad \sigma_r = -p \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) / \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \quad (۶-۵)$$

$$u_r = -\nu \varepsilon_z r + \frac{(1+\nu)p}{E \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right)} \left\{ (1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right\} \quad \sigma_z = E \varepsilon_z + 2\nu p / \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)$$

از آنجایی که مسئله مورد نظر در حالت کرنش مسطح تحلیل می گردد نتیجتاً مقدار $\varepsilon_z = 0$ در رابطه (۶-

(۶) می باشد.

فشار P ، که بر سطح داخلی وارد می شود، به صورت تدریجی افزایش داده می شود تا به حد فشار نهایی (خرابی) برسد. برای استوانه جدار ضخیم، سطح تسلیم از سطح داخلی (زمانی که مختصات $r = a$ باشد) شروع و به صورت تدریجی با افزایش فشار داخلی، به شعاعی معادل $r = c$ می رسد. خرابی^{۱۰۷} زمانی رخ می دهد که مقدار فشار داخلی به حد نهایی آن برسد که در این حالت مقدار شعاع $c = b$ می باشد و کل استوانه به حالت پلاستیک دست می یابد.

فشار تسلیم:

$$K = \frac{Y}{2} \quad P_{Yield} = K \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (۷-۵) \quad \text{معیار ترسکا:}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}}{3} Y \quad P_{Yield} = K \left(1 + (1-2\nu)^2 \frac{a^4}{3b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۸-۵) \quad \text{معیار وان میسز:}$$

فشار نهایی:

$$P_{max} = Y \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (۹-۵) \quad \text{معیار ترسکا:}$$

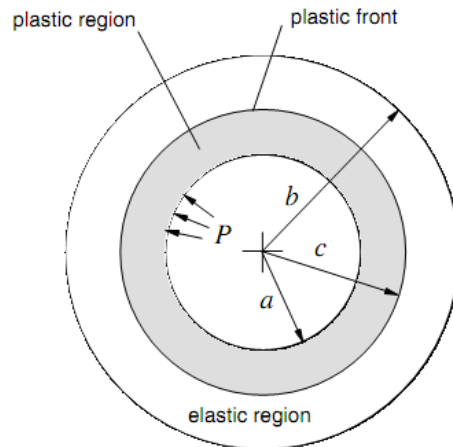
$$P_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{3} Y \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (۱۰-۵) \quad \text{معیار وان میسز:}$$

حال مقدار شعاع c ^{۱۰۸} را می توان (زمانی که فشار اعمالی $P \geq P_{Yield}$ می شود) از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\frac{P}{K} = (1 - N_2) + 2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) \quad (۱۱-۵)$$

^{۱۰۷} Collapse

^{۱۰۸} Plastic Front



شکل ۵-۳۴. نواحی پلاستیک و الاستیک در مسئله ۵-۵

حالت پلاستیک:

زمانی که $a \leq r \leq c$ باشد، داریم:

معیار ترسکا و وان میسر:

$$\sigma_{\theta} = K \left[1 + N_2 - \ln \left(\frac{c^2}{r^2} \right) \right] \quad \sigma_r = -K \left[1 - N_2 + \ln \left(\frac{c^2}{r^2} \right) \right] \quad (12-5)$$

$$U_r = r \left((1-\nu) \frac{Kc^2}{Gr^2} + (1-2\nu) \frac{\sigma_r}{2G} \right) \quad \sigma_z = 2\nu K \left[N_2 - \ln \left(\frac{c^2}{r^2} \right) \right]$$

و زمانی که $c \leq r \leq b$ باشد، داریم:

معیار ترسکا:

$$\sigma_z = 2\nu KN_2 \quad \sigma_{\theta} = KN_2 \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \quad \sigma_r = -KN_2 \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (13-5)$$

$$U_r = \frac{KN_2}{2G} \left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right)$$

معیار وان میسر:

$$\sigma_z = 2\nu KN_3 \quad \sigma_{\theta} = KN_3 \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \quad \sigma_r = -KN_3 \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (14-5)$$

$$U_r = \frac{KN_3}{2G} \left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right)$$

که در این روابط:

P : فشار داخلی^{۱۰۹} σ_r : تنش شعاعی^{۱۱۰} σ_θ : تنش حلقوی^{۱۱۱} σ_z : تنش محوری^{۱۱۲} U_r : تغییر مکان

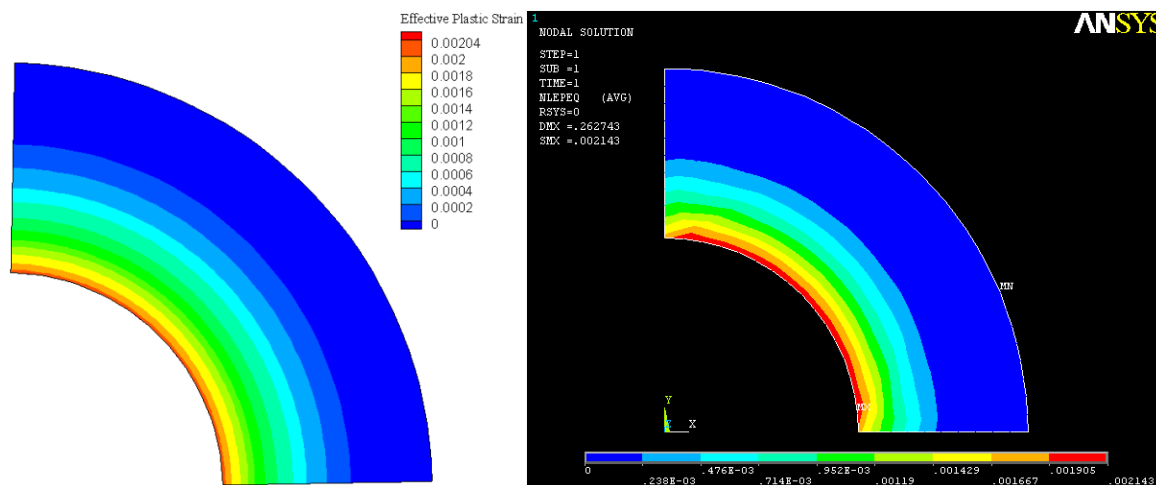
شعاعی^{۱۱۳} r : شعاع نقطه a : شعاع داخلی^{۱۱۴} b : شعاع خارجی^{۱۱۵}

جهت اطلاعات بیشتر نسبت به سایر روابط و خواص این مسئله، به منابع [۵۶-۵۹] رجوع شود.

نتایج و تحلیل خروجی های برنامه:

همانند مثال قبل در ادامه نتایج مربوط به تحلیل استوانه جدار ضخیم به روش ایزوژئومتری و همچنین

نتایج مربوط به نرم خطای تنش های بازیافتی و دقیق ارائه شده است.



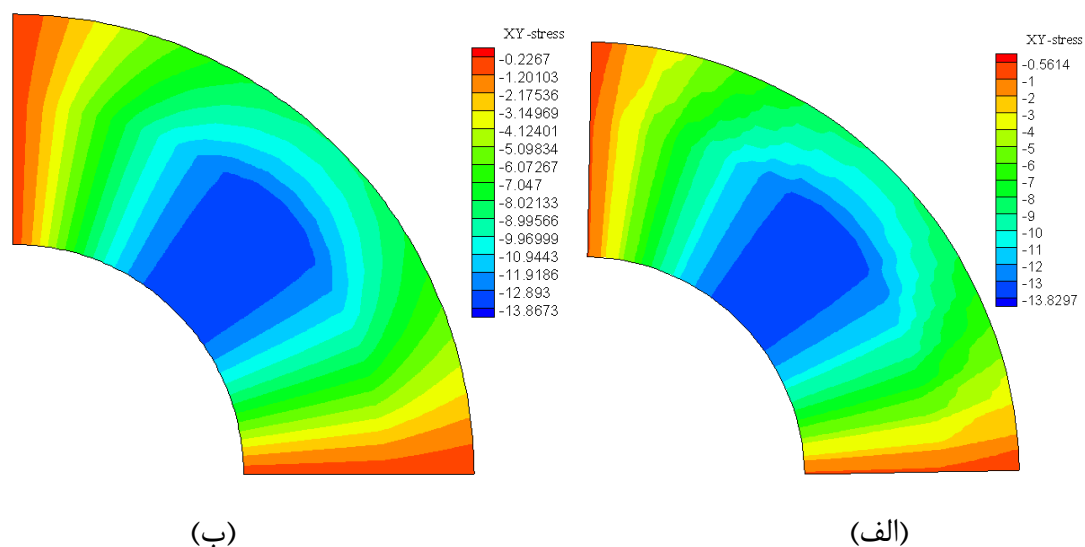
(ب)

(الف)

شکل ۵-۳۵). کرنش موثر پلاستیک مسئله ۵-۵ (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتری (ب) تحلیل توسط

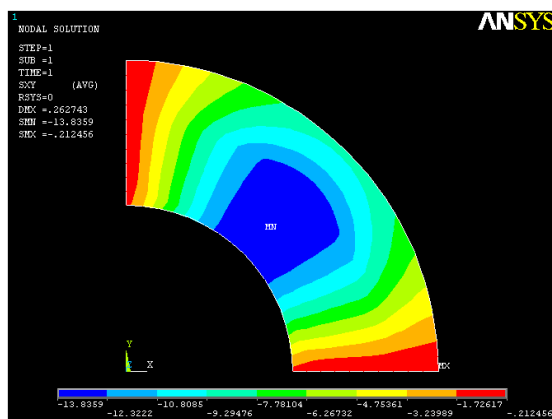
ANSYS

- ^{۱۰۹} Internal Pressure
- ^{۱۱۰} Radial Stress
- ^{۱۱۱} Hoop Stress
- ^{۱۱۲} Axial Stress
- ^{۱۱۳} Radial Displacement
- ^{۱۱۴} Internal Radius
- ^{۱۱۵} External Radius

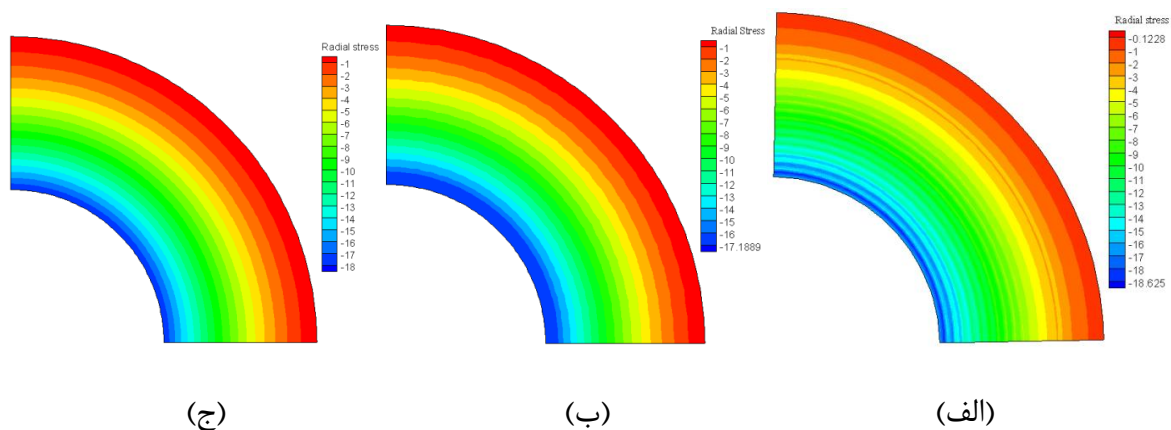


شکل ۵-۳۶). تنش جهت XY استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتریک

(ب) تحلیل بهبود یافته



شکل ۵-۳۷). تنش جهت XY استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (تحلیل توسط ANSYS)

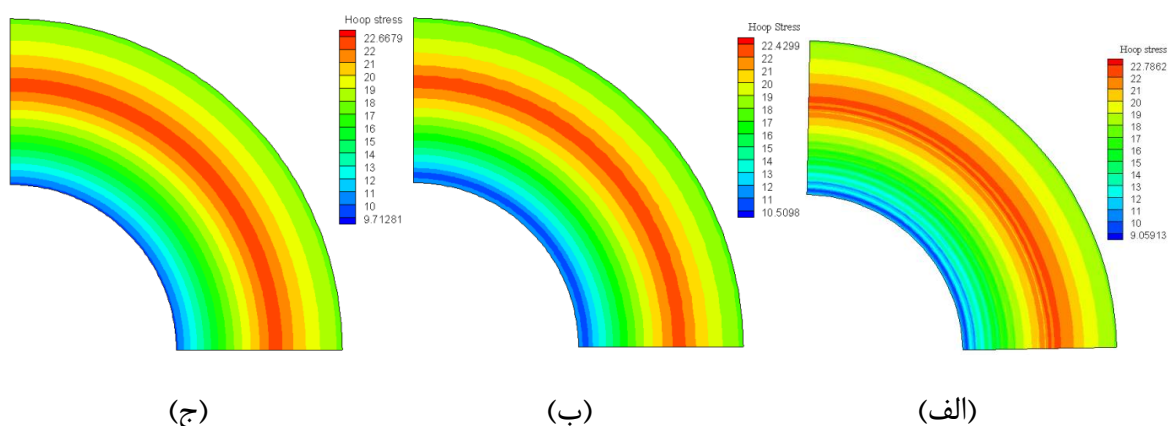


شکل ۵-۳۸). تنش شعاعی استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتریک (ب)

تحلیل بهبود یافته (ج) تحلیل دقیق

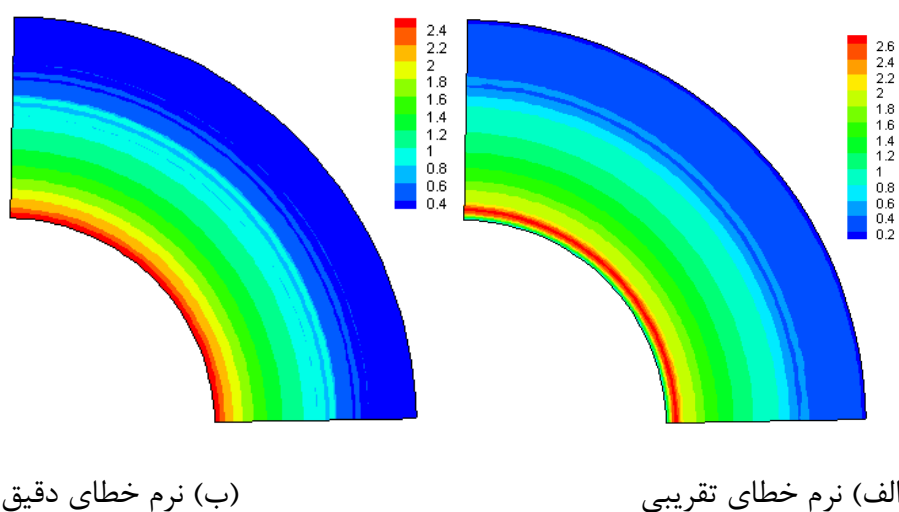
در اشکال (۳۵-۵) تا (۳۹-۵) برای مقایسه نتایج تحلیل به روش ایزوژئومتری با سایر نتایج و همچنین درک بهتر از آنها، به ترسیم کانتور و توزیع تنش و کرنش ها پرداخته شده است.

شکل (۴۱-۵) نیز نشان دهنده روند تغییرات تنش های شعاعی و محیطی در تحلیل های مختلف به ازای $P=0.18 \text{GPA}$ و شعاع های مختلف در طول جسم می باشد.

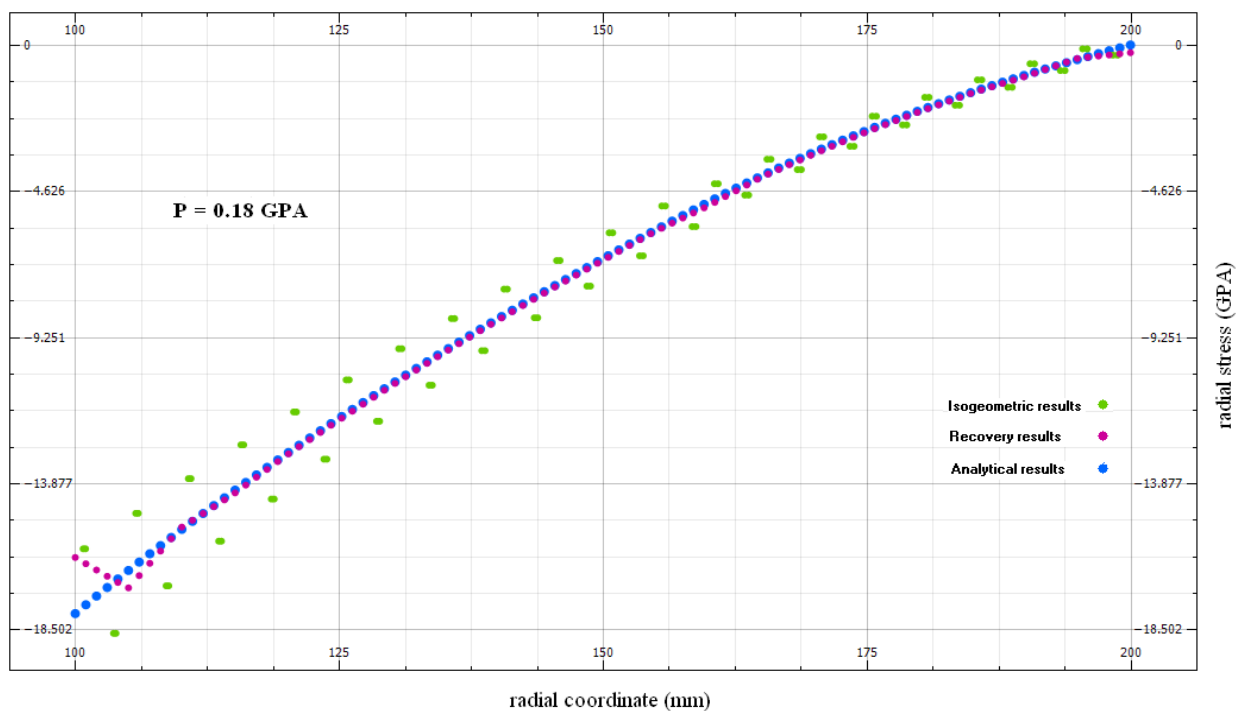


شکل ۳۹-۵. تنش محیطی استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی (الف) تحلیل به روش ایزوژئومتری (ب) تحلیل بهبود یافته (ج) تحلیل دقیق

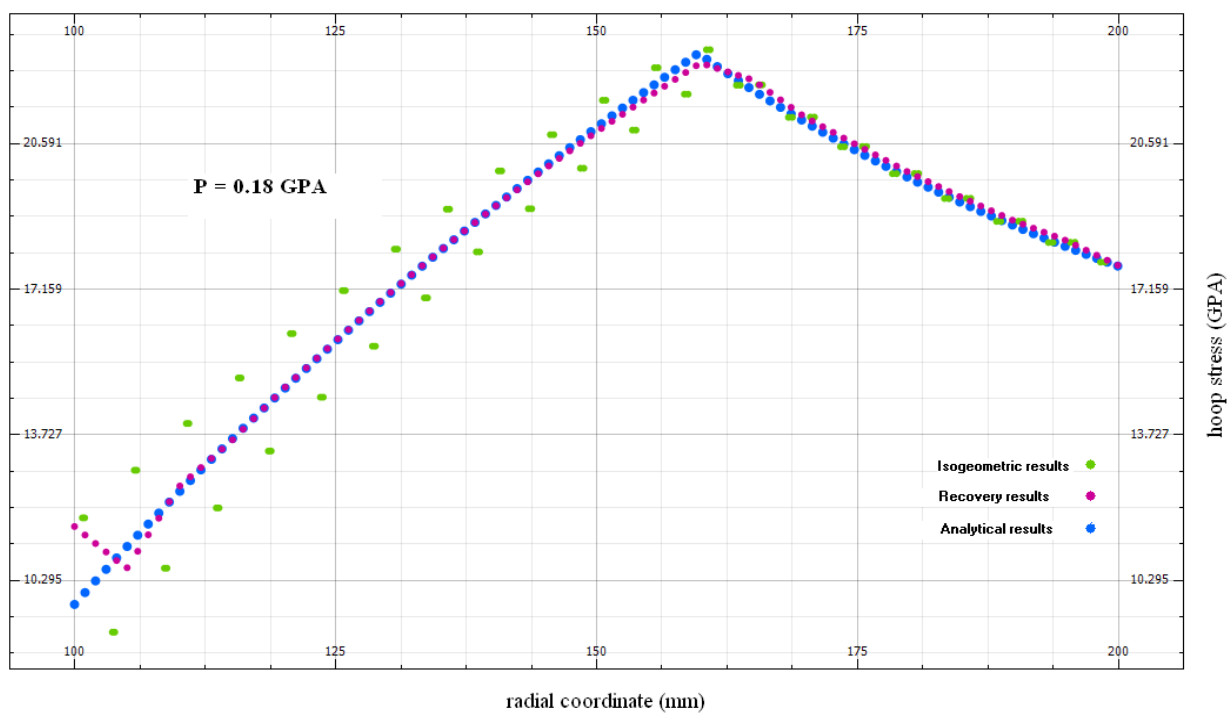
با توجه به عدد 0.98 برای شاخص تاثیر نرم خطای کل دامنه، در جدول ضمیمه ۴ و نیز همسانی تقریبی نمو تغییرات نرم خطای دقیق و تقریبی در شکل ۴۰-۵، می توان گفت که روش تخمین خطای به کارگرفته شده برای مسئله موردنظر نیز از کارایی نسبتاً خوبی برخوردار می باشد.



شکل ۴۰-۵. توزیع دوبعدی نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در مسئله ۵-۵ به ازای توابع شکل درجه یک



(الف)



(ب)

شکل ۵-۴۱). نمودار تنش شعاعی و محیطی مسئله ۵-۵ به ازای $P=0.18 \text{ GPA}$

فصل ششم

نتیجہ گیری و پیشہ داری

۶-۱- مقدمه

در فصلهای قبلی اصول اساسی و مطالعاتی این پایان نامه ارائه و سپس این تئوری ها از لحاظ عملی مورد بررسی قرار گرفت. همانگونه که مشهود است، به لحاظ اهمیت موضوع می توان به نکات برجسته و جالبی دست یافت. در مباحث قبلی پس از ارائه تئوری اساسی برنامه و تکمیل این تئوری در زمینه تحلیل غیرخطی در روش ایزوژئومتری و برآوردکننده مربوطه، برای تحقیق در مورد قابلیت و کارایی برنامه نوشته شده مثالهای متعددی توسط این برنامه تحلیل گردید. سپس بواسطه مقایسه نتایج عددی با نتایج تحلیلی و یا نرم افزاری دقت و کارایی برنامه مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شد که می توان از این برنامه برای تحلیل الاستو-پلاستیک سازه های فلزی و برآورد خطا به روش پیشنهادی استفاده نمود. فصل حاضر به بیان خلاصه ای از خصوصیات و نتایج بدست آمده پرداخته و سپس نکات پژوهشی لازم در راستای تکمیل این مبحث را ارائه می دهد.

۶-۲- نتایج

با توجه به اینکه روش ایزوژئومتری یکی از روشهای جدید در تحلیل سازه ها به شمار می رود و بالقوه دارای ویژگی های منحصر به فرد و مناسبی است که به نظر می رسد در آینده ای نه چندان دور بتواند جایگزین روش های عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود گردد.

به طور خلاصه نتایج به دست آمده از این پژوهش به صورت زیر می باشد:

- ۱- در کانتورهای ترسیم شده برای مسائل ۱-۵ تا ۳-۵ (بخش ۵-۲) تشابه عددی و توزیعی قابل قبولی در نتایج مشاهده می شود؛ لذا می توان بیان نمود تحلیل الاستو-پلاستیک صورت گرفته توسط برنامه از کارایی مناسبی جهت تحلیل خطی و غیرخطی (الاستو-پلاستیک) مسائل مشابه با آن بخش برخوردار می باشد.

۲- شاخص تاثیر کل مسئله تیر یکسر گیردار $0/93$ می باشد و در این مسئله نیز علاوه بر تطابق و تشابه قابل قبول در کانتور کرنش موثر پلاستیک و جابجایی انتهای تیر، روند مشابهی نیز به لحاظ مقبولیت در نرم خطای تقریبی با نرم خطای دقیق مشاهده می شود. همچنین مشاهده شد که کانتور و صفحه تنش σ_y بدست آمده از تنش های بازیافتی نسبت به کانتور مشابه آن از تحلیل ایزوژئومتری در مقایسه با حل تحلیلی از دقت بالاتری برخوردار است. لذا در این مسئله می توان بیان نمود که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای تحلیل غیرخطی به روش ایزوژئومتری برخوردار است.

۳- کانتورهای ترسیم شده برای مسئله استوانه جدار ضخیم روندی بسیار نزدیک به حل تحلیلی را نشان می دهند علی الخصوص در اشکال نشان داده شده برای تنش های بازیافتی که حاکی از دقت بالاتر روند تخمین گر خطا نسبت به تحلیل ایزوژئومتری برخوردار بودند. همچنین شاخص تاثیر کل در این مسئله $0/98$ می باشد و در توزیع نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق تطابق قابل قبولی ملاحظه می گردد.

در نهایت با توجه به نتایج گرفته شده از حل مثالهای مطرح شده در این پژوهش می توان از روش تخمین کننده خطای به کار گرفته شده به عنوان راه حلی ساده و مهندسی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل الاستو-پلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتری نام برد.

۳-۶- ارائه پیشنهادات

به علت تازگی و ویژگی های منحصر به فرد روش ایزوژئومتری در تحلیل خطی و غیرخطی مسائل متفاوت علوم و مهندسی می توان از آن به عنوان افقی روشن در پیش روی محققین نام برد که در آینده ای نزدیک قادر به پشت سر گذاشتن تمام روش های عددی گذشته از جمله اجزای محدود می باشد. این روش از پتانسیل بسیار بالایی جهت کار تحقیقاتی برخوردار است و هنوز در ابتدای راه خود قرار دارد. در ادامه به چند پیشنهاد جهت پیشبرد این موضوع در آینده اشاره شده است.

- ۱- استفاده از روش ایزوژئومتریکی در تحلیل مسائل ویسکو-پلاستیک (Visco Plastic).
- ۲- استفاده از T-Spline به جای NURBS در تحلیل مسائل (غیرخطی) الاستو-پلاستیک، جهت امکان بهبود محلی شبکه تحلیل ایزوژئومتریکی.
- ۳- از آنجایی که روش REP روند سازگازتری با تحلیل پلاستیک مسائل را داراست لذا از این روش نیز می توان جهت بهبود تنش ها و برآوردکننده خطا به جای روش SPR استفاده نمود.
- ۴- امکان سنجی و پیاده سازی روش ها و ایده هایی که در روش اجزای محدود برای بهبود الگوریتم های تحلیل الاستو-پلاستیک و تخمین خطا مورد استفاده قرار گرفته است.
- ۵- در این پژوهش جهت بازگرداندن تنش ها به سطح تسلیم از روش Explicit استفاده شده است که می توان با جایگزین نمودن روش Implicit با روش حاضر، به مقایسه آن در نتایج خروجی در هر روش پرداخت.

ضمیمہ ۱

نامتغیرہای پیش و کرنش

۱- نامتغیرهای تنش

ملاک شکست مصالح آیزوتروپیک مبتنی بر نرخ تنش حاصله می‌باشد. بدین دلیل ملاک مزبور باید مستقل از سیستم مختصاتی که تنش در آن تعریف شده باشد. راهی مناسب برای تعریف ملاک شکست، استفاده از ترکیبهای مختلف نامتغیرهای تنش است. بحث ذیل مروری خلاصه در این مورد را ارائه می‌دهد.

نرخ تنش در هر نقطه از داخل جسم را می‌توان بطور کامل توسط اجزاء تانسور تنش σ_{ij} تعریف نمود. با نزدیک شدن به یک جهت اصلی تنشهای برشی مربوطه به صفر نزول پیدا می‌کنند، بنابراین برای یک جهت اصلی مانند n_j می‌توان نوشت:

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0 \quad (1)$$

در رابطه بالا σ مقدار اصلی بوده و δ_{ij} دلتای کرونکر می‌باشد مجموعه این سه معادله یک دستگاه سه مجهولی را تشکیل می‌دهد. مقادیری که دترمینان ضرائب این دستگاه معادلات را صفر کند، جوابهای این معادلات است به عبارت دیگر:

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0 \quad (2)$$

با حل این دترمینان معادله درجه سه ذیل بدست می‌آید:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (3)$$

در معادله بالا I_1, I_2, I_3 به ترتیب اولین، دومین و سومین نامتغیر تنش هستند این نامتغیرها به صورت ذیل تعریف می‌گردند:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - I_1^2)$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3 \quad (4)$$

نامتغیرهای تنش را می توان با استفاده از تنشهای اصلی

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (5)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

تانسور تنش را می توان به دو جز هیدروستاتیک خالص یا کروی خالص (σ_m) و انحرافی (S_{ij}) بصورت

ذیل تعریف نمود:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (6)$$

که در آن:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad (7)$$

رابطه (7) نشان دهنده تنش متوسط یا تنش هیدروستاتیکی خالص است و رابطه ذیل:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (8)$$

موسوم است به تنش انحرافی که بیان کننده حالت برش خالص است. نامتغیرهای تنش انحرافی را

می توان به صورت ذیل تعریف نمود:

$$J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{33} = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$$

$$= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 \quad (9)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} = \begin{bmatrix} S_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & S_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

با استفاده از مقادیر اصلی تنش و تنش انحرافی، نامتغیرهای تنش انحرافی را می توان به صورت ذیل بازنویسی نمود:

$$J_1 = S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (10)$$

$$= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right]$$

J_2 در رابطه بالا بصورت مجموع متوسط توان دوم مقادیر برشهای اصلی بیان می شود. در نهایت نامتغیرهای تنش انحرافی با استفاده از نامتغیرهای تنش بصورت ذیل نوشته شوند:

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_1^2 + 3I_2)$$

$$J_3 = \frac{1}{27}(2I_1^3 + 9I_1I_2 + 27I_3)$$

با توجه به معادله (۸) می توان نتیجه گرفت که جهات اصلی σ_{ij} و S_{ij} با یکدیگر مشابه هستند. کل مقادیر $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3$ نامتغیرهای اسکالری هستند که مستقل از محورهای مختصات می باشند. ملاک شکست معمولاً با استفاده از مقادیر I_1, J_2, J_3 بیان می شود، که این مقادیر به ترتیب اولین، دومین و سومین رتبه را در تنش دارا هستند.

۲- تنشهای هشت وجهی

تنشهای هشت وجهی $(\tau_{oct}, \sigma_{oct})$ به صورت تنش برشی و نرمال روی صفحه ای است که زاویای برابری را با جهت تنشهای اصلی می سازد. به عبارت دیگر نرمال یکه این صفحه زاویای مساوی را با جهت تنشهای اصلی می سازد. این صفحه به صفحه هشت وجهی موسوم می باشد. این تنشها را می توان صورت ذیل نشان داد:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_m$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \quad (12)$$

جهت تنش برش هشت وجهی τ_{oct} بوسیله زاویه تشابه θ (شکل ۱-۱۲-ب) تعریف می‌شود. این زاویه با استفاده از J_3, J_2 بصورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^3} \quad (13)$$

که در آن θ در بازه ذیل تغییر می‌کند:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (14)$$

با شیوه مناسبی می‌توان به جای نامتغیرهای J_3, J_2, I_1 به ترتیب از $\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \cos 3\theta$ استفاده نمود این جانشین تصویر فیزیکی واضح و مناسبی از نامتغیرها را بدست می‌دهد، سپس تنشهای اصلی را می‌توان به صورت ذیل تعریف نمود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{oct} \\ \sigma_{oct} \\ \sigma_{oct} \end{Bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{J_2} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \\ \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

در رابطه بالا θ اولیه ریشه بدست آمده از معادله (ض - الف - ۱۳) در بازه بالا می‌باشد. با استفاده از این جانشینی به جای حل معادله درجه ۳ (ض - الف - ۳) مسئله به محاسبه نامتغیرهای $\sigma_{oct}, J_2, \theta$ کاهش پیدا می‌کند.

۳- نامتغیرهای کرنش

همانند تنش، نامتغیرهای تانسور کرنش ε_{ij} نیز به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$I'_1 = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$I'_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - I_1^2) \quad (20)$$

$$I'_3 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} - \frac{1}{2}I'_1\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} + \frac{1}{6}I_1^3$$

تانسور کرنش انحرافی به صورت ذیل تعریف می شود:

$$S_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_t\delta_{ij} \quad (21)$$

که در آن $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ کرنش حجمی می باشد. نامتغیرهای کرنش انحرافی بصورت ذیل تعریف می گردند:

$$J'_1 = S_{kk} = s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

$$J'_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

$$= \frac{1}{6}[(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2] \quad (22)$$

$$J'_3 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{jk}S_{ki} = S_1S_2S_3$$

در روابط بالا S_3, S_2, S_1 نشان دهنده کرنشهای انحرافی اصلی هستند. نهایتاً کرنشهای هشت وجهی نرمال و برشی بصورت ذیل تعریف می شوند:

$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3}I_1$$

$$\gamma_{oct} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}J'_3 \quad (23)$$

در رابطه بالا از تعریف مهندسی کنش (کرنش مهندسی) استفاده شده است.

ضمیمہ ۲

نقاط فوق ہیکرا در بر آورد خطا

۱- مرتبه خطا

محدوده Ω را که به اجزای محدود Ω^e با اندازه h تقسیم شده است، در نظر بگیرید. فرض می‌شود توابع شکل اجزای محدود شامل یک چند جمله‌ای کامل از درجه p باشند. بدیهی است که اگر جواب مورد نظر، ϕ خود یک چند جمله‌ای از درجه p یا کمتر باشد در این صورت تقریب حاصل، دقیق خواهد بود.

در حالت کلی معمولاً جواب مورد نظر ϕ خود یک چند جمله‌ای نیست ولی در صورتی که جواب مورد نظر دارای نقاط تکین، که در آنها بعضی یا تمام مشتقها بینهایت می‌شوند، نباشد، می‌توان آن را بطور موضعی با سری تیلور نشان داد. برای مثال، می‌توانیم رابطه زیر را در همسایگی نقطه فرضی O از یک محدوده دو بعدی بنویسیم :

$$\phi(\Delta X, \Delta Y) = \phi|_0 + \Delta X \frac{\partial \phi}{\partial X}|_0 + \Delta Y \frac{\partial \phi}{\partial Y}|_0 + \dots \quad (1)$$

که در آن ΔX و ΔY ، تفاوت مختصات نقطه مورد نظر و مبدأ منظور شده در نقطه O می‌باشد. حال اگر یک چند جمله‌ای از درجه P مورد استفاده قرار گیرد، در این صورت خطای E ، در یک جزء با اندازه h ، را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود. زیرا این چند جمله‌ای را می‌توان دقیقاً به وسیله سری تیلور درجه P نمایش داد.

$$E = O(h^{p+1}) \quad (2)$$

در رابطه فوق h نمودار ماکزیمم مقادیر ΔX و ΔY می‌باشد.

در بیانی دیگر، فرض کنید تابع $u(x)$ که دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه دلخواه می‌باشد، مفروض باشد. بسط سری مک لورن این تابع در حالت دو بعدی عبارت است از :

$$u(x) = u(0) + xu_{,x}(0) + yu_{,y}(0) + \frac{1}{2}x^2u_{,xx}(0) + \frac{1}{2}y^2u_{,yy} + \dots \quad (3)$$

در همسایگی نقطه مورد نظر می‌توان تابع $u(x)$ را با تعدادی از جملات سری مک لورن آن به صورت زیر تقریب زد :

$$u(x) \cong u(x) = u(0) + xu_{,x}(0) + yu_{,y}(0) + \dots + O(h^{P+1}) \quad (۴)$$

در معادله فوق P مجموع توانهای x و y می باشد. در جمله آخر، O تابعی است که میزان خطای ناشی از قطع سری مک لورن را بیان کرده و h عبارت است از فاصله بین دو گره که به صورت زیر بیان می شود:

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2} \quad (۵)$$

از دیدگاه نظری با کاهش h و با افزایش p مقدار خطای O کاهش می یابد و در نتیجه تابع تقریبی به سمت تابع دقیق میل می کند.

در رابطه بالا تقریب از مرتبه p+1 می باشد، که این مرتبه، معیاری برای بیان میزان خطا می باشد.

۲- نقاط گوس در انتگرالگیری عددی

در فرآیند اجزای محدود، عملیات جبری لازم برای محاسبه ماتریسهای جزء اجزای مرتبه بالا، به دلیل پیچیدگی انتگرالهای موجود، خسته کننده و طولانی می باشد. علاوه بر این در صورت استفاده از فرآیند نگاشت، بایستی ماتریس ژاکوبی نگاشت را برای محاسبه مشتقهای موجود در این انتگرالها عکس نمود و در نتیجه استفاده از انتگرال گیری دقیق، به واسطه پیچیدگی روابط حاصل، تقریباً غیر ممکن خواهد شد. در چنین حالتی بایستی انتگرالها را با استفاده از روشهای عددی محاسبه نمود که در آن یک انتگرال نمونه از معادله (۶) به وسیله یک مجموعیابی جایگزین می گردد.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \frac{\partial N_i^e}{\partial X} \frac{\partial N_m^e}{\partial X} \det(J) d\xi d\eta \quad (۶)$$

در حالت کلی می توان انتگرالهای بر روی حوزه های یک، دو یا سه بعدی را تنها با استفاده از مجموعیابی حاصلضرب مقدار جملات انتگرالده در نقاط مشخصی از محدوده، در وزنهای مناسب به صورت زیر محاسبه نمود:

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \approx W_0 G(\xi_0) + W_1 G(\xi_1) + \dots + W_n G(\xi_n) \quad (الف ۷)$$

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx W_0 G(\xi_0, \eta_0) + W_1 G(\xi_1, \eta_1) + \dots + W_n G(\xi_n, \eta_n) \quad (ب ۷)$$

برای ابداع روشهای یک بعدی، می توان ابتدا نقاط ξ_0 و ξ_1 و ... ξ_n را به عنوان نقاط نمونه انتخاب نمود، سپس چند چند جمله ای درجه n ام $F_n(\xi)$ را که در این نقاط دقیقاً معادل تابع $G(\xi)$ می باشد، به دست آورد. بدین منظور می توان چند جمله ای $F_n(\xi)$ را به صورت زیر نشان داد:

$$F_n(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \dots + \alpha_n\xi^n \quad (8)$$

که در آن ضرایب چند جمله ای از حل معادلات زیر نتیجه می شوند:

$$\begin{aligned} G(\xi_0) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi_0 + \dots + \alpha_n\xi_0^n \\ G(\xi_1) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_1^n \\ &\vdots \\ G(\xi_n) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi_n + \dots + \alpha_n\xi_n^n \end{aligned} \quad (9)$$

حال با استفاده از رابطه زیر می توان انتگرال مورد نظر را به صورت تقریبی محاسبه نمود و سپس با قرار دادن مقادیر ضرایب حاصل از حل معادله (9) در آن، یک فرمول تقریبی از نوع معادله (7 الف) به دست آورد.

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] \quad (10)$$

در روش انتگرالگیری عددی کوادراچر گوس- لجندر، بر خلاف روش قبل، مختصات نقاط نمونه گیری، که تابع $G(\xi)$ در آنها محاسبه می گردد، از قبل تعیین نشده است ولی مختصات آنها چنان تعیین می گردد، که انتگرال یک چند جمله ای $G(\xi)$ از درجات کمتر یا مساوی P را محاسبه نماید که در آن مقدار $p (\geq n)$ مجهول است و بایستی محاسبه گردد. (تعداد نقاط نمونه گیری می باشد)

اگر چند جمله ای مورد نظر به صورت زیر نوشته شود:

$$F_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \dots + \alpha_p\xi^p \quad (11)$$

در این صورت می توان انتگرال تابع فوق را با استفاده از تقریب (7 الف) و به صورت زیر محاسبه نمود:

$$I = \int_{-1}^1 F_p(\xi) d\xi = W_0(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_p \xi_0^p) + W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \dots + W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_p \xi_n^p) \quad (12)$$

مقدار دقیق انتگرال فوق را می توان با استفاده از رابطه (۱۰) و به صورت زیر به دست آورد:

$$I = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] \quad (13)$$

با مقایسه ضرایب دو رابطه فوق می توان مشاهده نمود که معادله (۷ الف) در صورتی مقدار دقیق انتگرال چند جمله ای $F_p(\xi)$ را به دست می دهد که روابط زیر برقرار باشد:

$$(14)$$

در دستگاه متشکل از $(p+1)$ معادله فوق، کمیت های $\{W_i, \xi_i, i=0,1,2,\dots,n\}$ مجهول می باشند. بدیهی است که جواب دستگاه فوق را تنها می توان در صورت برابر بودن تعداد معادلات و مجهولات به دست آورد، یعنی:

$$p+1 = 2(n+1) \quad (15)$$

از آنجا که n عدد صحیح است؛ p نمودار یک عدد فرد می باشد. جدول زیر تغییرات p را بر حسب مقادیر n نشان می دهد.

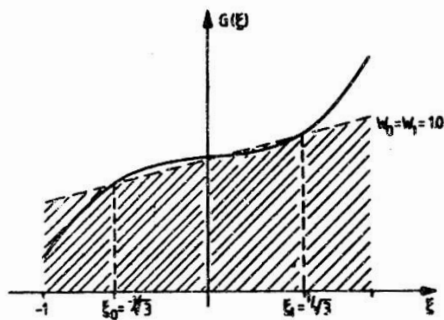
با استفاده از این روش می توان، برای مثال، با سه برآورد تابع دقیقاً انتگرال یک چند جمله ای با درجه کمتر یا مساوی پنج را محاسبه نمود.

درجه چند جمله‌ای که انتگرال آن دقیقاً محاسبه می‌شود (p)	تعداد نقاط نمونه گیری (n+1)
۱	۱
۳	۲
۵	۳
۷	۴

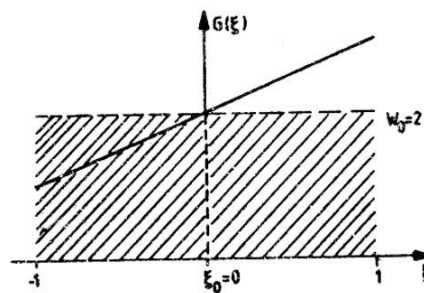
در این روش می‌توان مختصات نقاط نمونه گیری و وزنه‌های مربوطه را به ازای مقادیر مشخص n محاسبه نمود. معادله (۱۴)، با فرض $n=0$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} W_0 &= 2 \\ W_0 \xi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

بدیهی است که در صورت استفاده از یک نقطه نمونه گیری، دقیقترین نتیجه را می‌توان با فرض قرار گیری نقطه نمونه در مرکز محدوده به دست آورد که با استفاده از آن می‌توان یک چند جمله‌ای درجه اول را دقیقاً انتگرالگیری نمود (شکل ۱ الف).



(ب)



(الف)

شکل ۱). کوادراچر گوس - لجندر. (الف) یک نقطه نمونه گیری، دقیق بازای $p=1$. (ب) دو نقطه نمونه گیری، دقیق برای $p=3$. تقریب سطح زیر منحنی، هاشور زده شده است

به روشی مشابه و با فرض $n=1$ داریم:

$$\begin{aligned} W_0 + W_1 &= 2 \\ W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 &= 0 \\ W_0 \xi_0^2 + W_1 \xi_1^2 &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (17)$$

با حل دستگاه معادلات فوق جوابهای زیر بدست خواهد آمد (شکل ۱۸):

$$\begin{aligned} \xi_1 = -\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773502591 \\ W_0 = W_1 = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

مختصات نقاط نمونه گیری گوس- لجندر و وزنهای مربوطه به ازای مقادیر بالای n در جدول زیر قرار دارند:

ξ_i	نقاط نمونه	W_i
0	$n = 1$	2.000 000 000 000 000
$1/\sqrt{3}$	$n = 2$	1.000 000 000 000 000
$\sqrt{0.6}$	$n = 3$	5/9 8/9
0.000 000 000 000 000	$n = 4$	0.347 854 845 137 454 0.652 145 154 862 546
0.861 136 311 594 953 0.339 981 043 584 856	$n = 5$	0.236 926 885 056 189 0.478 628 670 499 366 0.568 888 888 888 889
0.906 179 845 938 664 0.538 469 310 105 683 0.000 000 000 000 000	$n = 6$	0.171 324 492 379 170 0.360 761 573 048 139 0.467 913 934 572 691
0.932 469 514 203 152 0.661 209 386 466 265 0.238 619 186 083 197	$n = 7$	0.129 484 966 168 870 0.279 705 391 489 277 0.381 830 050 505 119 0.417 959 183 673 469
0.949 107 912 342 759 0.741 531 185 599 394 0.405 845 151 377 397 0.000 000 000 000 000	$n = 8$	0.101 228 536 290 376 0.222 381 034 453 374 0.313 706 645 877 887 0.362 683 783 378 362

در مسائل دو بعدی محاسبه انتگرالهای دوگانه‌ای به شکل زیر لازم می‌باشد.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (19)$$

از آنجا که انتگرال فوق بر روی یک محدوده مستطیلی انجام می‌گیرد، ساده ترین روش، استفاده از دو انتگرالگیری عددی مستقل در جهات ξ و η می‌باشد. بدین ترتیب فرآیند محاسبه انتگرال فوق را می‌توان با محاسبه انتگرال داخلی، با استفاده از فرمولهای بخش قبل، به صورت زیر شروع نمود:

$$\int_0^1 G(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta) \quad (20)$$

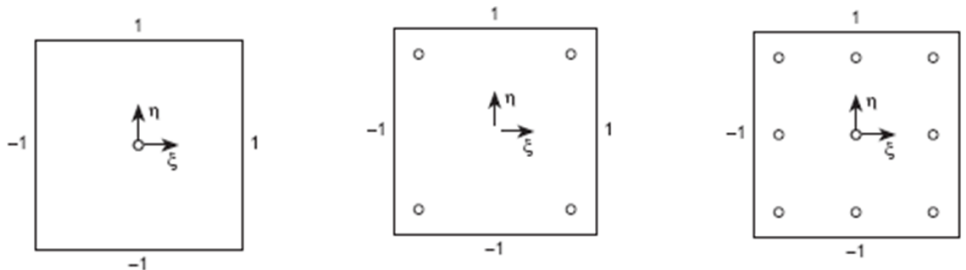
و سپس با استفاده از یک انتگرالگیری مشابه در جهت η

$$I = \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta) \right] d\eta = \sum_{j=0}^n \left[W_j \sum_{i=0}^n W_{ij} G(\xi_i, \eta_j) \right] \quad (21)$$

تقریب زیر را برای محاسبه انتگرال دو گانه فوق بدست آورد:

$$I = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \overline{W}_{ij} G(\xi_i, \eta_j) \quad \overline{W}_{ij} = W_i W_j \quad (22)$$

که در آن (ξ_i, η_i) مختصات نقاط نمونه گیری است.



شکل ۲). نقاط نمونه گیری برای کوادراچرگوس - لجندر در چهار ضلعی‌ها

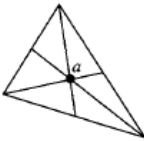
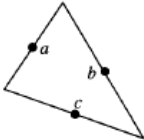
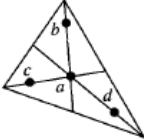

برای محدوده‌های دو بعدی مثلثی نیز می‌توان مجدداً از یک روش مستقیم استفاده نمود. در صورت استفاده از یک نقطه نمونه ($n=0$)، روش مورد نظر دارای سه مجهول، مختصات نقاط نمونه و وزن مربوطه W_0 ، می‌باشد و بدیهی است که یک چند جمله‌ای درجه اول بر حسب ξ و η را می‌توان با استفاده از این روش انتگرال گیری نمود. با فرض $n=2$ ، امکان انتگرال گیری دقیق یک چند جمله‌ای درجه سوم فراهم می‌گردد و الی آخر.

مقادیر ضرایب وزنی و مختصات نقاط نمونه گیری به ازای $n=0,1,2,3$ در شکل (۳) نشان داده شده

است.

۳- نقاط فوق همگرا^۱

در این قسمت به بررسی نقاطی می‌پردازیم که در آنها دقت و درستی حل به روش اجزای محدود، به سایر نقاط بیشتر است و از توان همگرایی بیشتری نسبت به جواب دقیق برخوردار می‌باشند. (در بعضی المانها این نقاط گوسی هستند که دارای مشخصه مذکور هستند و اصطلاحاً به آنها نقاط فوق هم گرا گفته می‌شود).

Order	Figure	Error	Points	Triangular coordinates	Weights
Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ 0.6, 0.2, 0.2 0.2, 0.6, 0.2 0.2, 0.2, 0.6	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$
Quintic		$R = O(h^6)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.225 000 000 0 0.132 394 152 7 0.125 939 180 5

with
 $\alpha_1 = 0.059\ 715\ 871\ 7$
 $\beta_1 = 0.470\ 142\ 064\ 1$
 $\alpha_2 = 0.797\ 426\ 985\ 3$
 $\beta_2 = 0.101\ 286\ 507\ 3$

شکل ۳). چند فرمول کوادراچر برای مثلثها

¹ Super convergent Points

در ادامه برای روشن شدن مطلب به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم یک بعدی می پردازیم.

معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right) + \beta u + Q = 0 \quad (23)$$

که شرایط مرزی، به صورت مقدار تابع u و گرادیان آن، در دو انتهای بازه داده شده است. در شکل

(۴ الف) برای دو المان به طول h_1 و h_2 مقدار دقیق u و $\frac{du}{dx}$ و همچنین مقادیر بدست آمده از حل

اجزای محدود با استفاده از المان خطی داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، در نقاط

گرهی مقدار u بدست آمده از حل دقیق کاملاً با مقدار اجزای محدود آن برابر است. در شکل (۴ ب)

شاهد تفاوت زیاد، بین گرادیان ناشی از حل اجزای محدود و حل دقیق هستیم به جزء در نواحی

داخلی هر المان که نزدیک به حل دقیق می باشد و در وسط هر المان این اختلاف به صفر می رسد.

در شکل (۵ الف) که از المانهای درجه دو برای حل اجزای محدود استفاده شده است، مقدار u در دو

انتهای هر المان دقیق و یا نزدیک به مقدار دقیق می باشد، اما با دور شدن از دو انتهای هر المان و

نزدیک شدن به نواحی داخلی، این اختلاف زیادتر می شود. و همان طور که در شکل (۵ ب) مشاهده

می شود، تنش ها یا گرادیان در دو نقطه گوس مربوط به هر المان دارای مقدار دقیق می باشند.

این حقیقت اولین بار به طور آزمایشی توسط بارلو^۱ بیان شد و این نقاط، نقاط بارلو^۲ نام گرفت.

از مطالب گفته شده دو نکته بدیهی زیر برداشت می شود:

۱- بهترین نقاط برای جابجایی (u) در هر المان با مرتبه دلخواه همان نقاط گرهی می باشند.

۲- بهترین دقت برای گرادیان یا تنش، در نقاط گرهی گوس مربوط به چند جمله ای استفاده شده در

حل اجزای محدود می باشد.

در این نقاط مرتبه همگرایی تابع یا گرادیان آن، یک مرتبه بالاتر از مقداری که از تقریب چند جمله ای

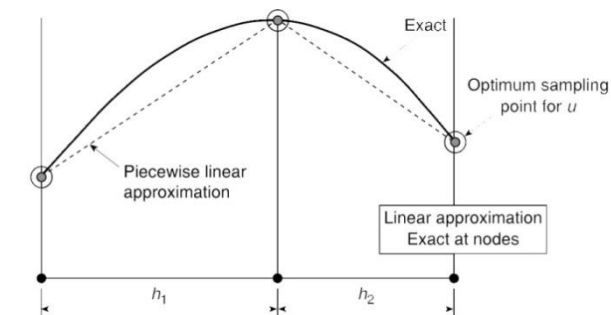
مربوط به حل اجزای محدود انتظار می رود، می باشد؛ به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا

¹ Barlow

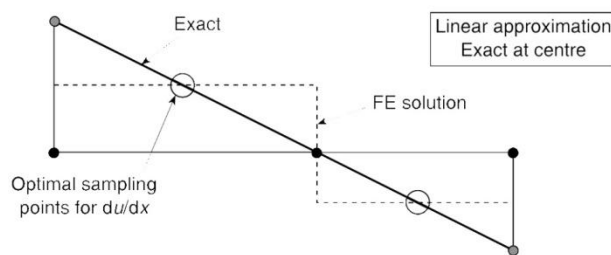
² Barlow points

گفته می‌شود. علت فوق هم گرا بودن این نقاط، با استفاده از تئوری هرمان^۱ نشان داده شده است. با یک نقطه گوس در وسط المان می‌توان تمام توابع خطی که از آن نقطه عبور می‌کنند را دقیقاً انتگرال گیری کرد (شکل ۶)، از این رو اگر تابع تنش مسئله به صورت خطی باشد برای هر تابع از آن، مقدار تنش در نقطه گوس کاملاً دقیق می‌باشد. به طور مشابه برای توابع تنش درجه دو و سه این خاصیت برقرار است.

در شکل (۷) بهترین نقاط نمونه برای گرادیان در سمت چپ، و کمترین نقاط لازم برای انتگرال گیری عددی در سمت راست جدول نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، برای المان مربعی



(الف)



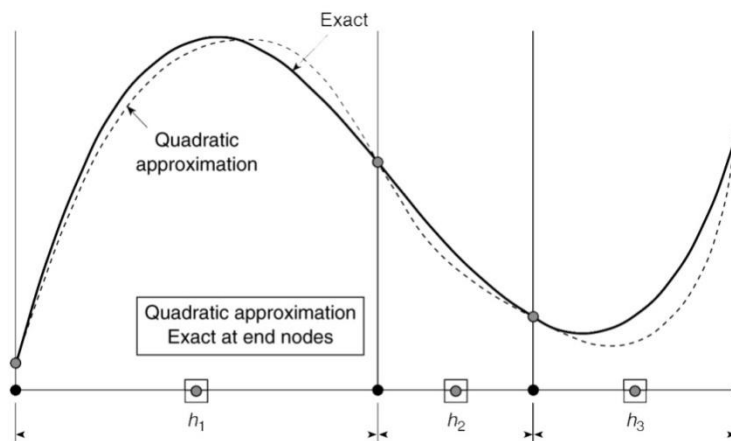
(ب)

شکل ۴. بهترین نقاط نمونه برای تابع (الف) و گرادیان آن (ب) در یک بعد (المانهای خطی)

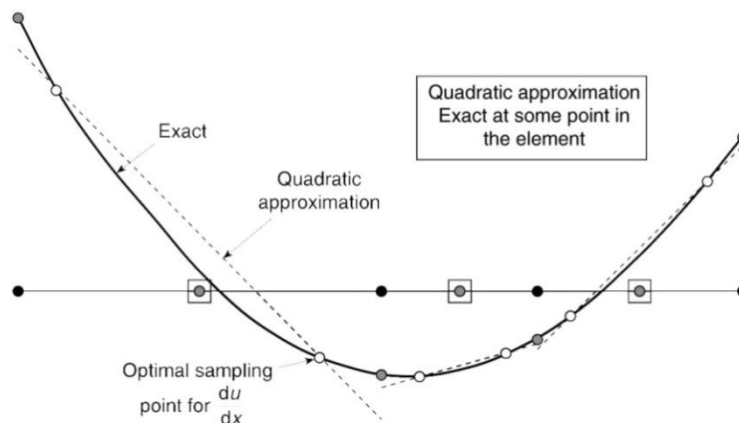
¹ Herrmann theorem

نقاط گوس بر نقاط فوق همگرا منطبق می‌باشند اما در المان مثلثی این نقاط فوق همگرا وجود ندارند ولی نتایج عددی بدست آمده توسط موآن^۱، فوق همگرایی نقاطی که در شکل، برای المان مثلثی نشان داده شده است را تایید می‌کند.

آنالیز یک تیر طره، با چهار المان مستطیلی درجه دو در شکل (۸) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تنش در نقاط گوس در مقایسه با دیگر نقاط از همگرایی و دقت بسیار زیادی برخوردار می‌باشد و با استفاده از روش برونمایی که توسط هینتون و کامبل در بخش ۲-۳-۱ به آن اشاره شد، مقادیر گرهی تنش محاسبه شده است.



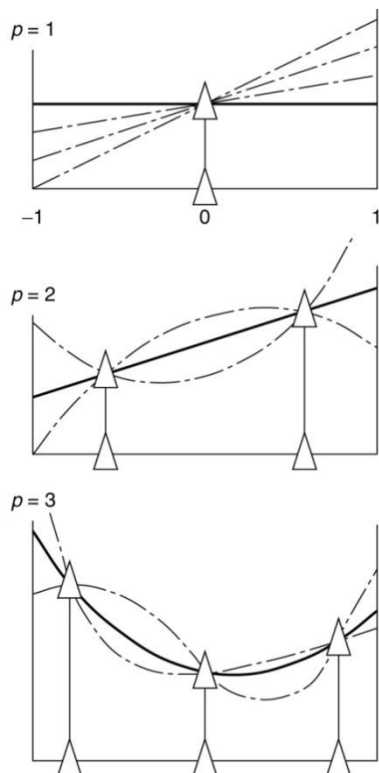
(الف)



(ب)

شکل ۵. بهترین نقاط نمونه برای تابع (الف) و گرادینان آن (ب) در یک بعد (المانهای درجه دو)

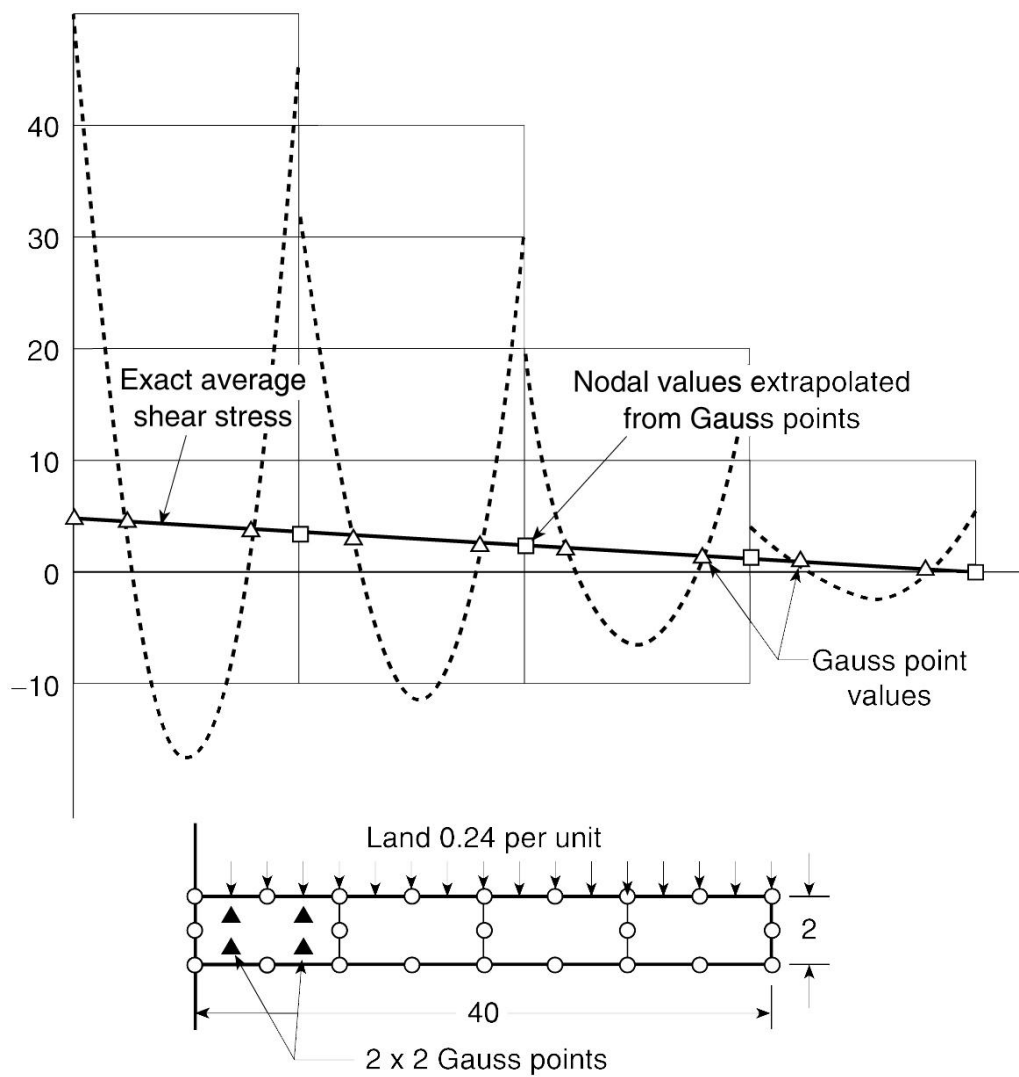
¹ Moan



شکل ۶. خاصیت نقاط انتگرال گیری گوس در تضمین همگرایی گرادیان

p	Optimal error $O(h^{2(p-m)+2})$	Minimal quadrature $O(h^{2(p-m)+1})$
1	$O(h^2)$	$\geq O(h^2)$
	$O(h^2)$ $O(h^2)$	$O(h^2)$ $O(h^2)$
2	$O(h^4)$	$\geq O(h^3)$
	$O(h^4)$ $O(h^4)$ $O(h^4)$	$O(h^3)$ $O(h^4)$ $O(h^4)$

شکل ۷. نقاط نمونه فوق هم گرا و نقاط انتگرال گیری گوس



شکل ۸. تیر طره با چهار المان درجه دو (Q_8). مقدار تنش در نقاط گوس و مقادیر گرهی بدست آمده به کمک برونابی

ضمیمه ۳

آشنایی با نحوه تهیه فایل ورودی برنامه

IGAPLAS

در این ضمیمه به بیان جزئیات، معرفی پارامترهای موجود و نهایتاً نحوه تهیه فایل ورودی برنامه IGAPLAS پرداخته می شود.

به طور پیش فرض، پسوند فایل ورودی جهت فراخوانی در برنامه از نوع .txt می باشد که می بایست در پوشه مربوط به برنامه قرار داده شود.

فایل مربوطه از هفت بخش کلی تشکیل می شود که عبارتند از:

(۱) General Data

شامل اطلاعات کلی مربوط به فایل ورودی و خروجی برنامه می باشد.

(۲) Pre Load Data

در این بخش اطلاعاتی مربوط به نوع تحلیل ایزوژئومتری (مسائل تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای، متقارن محوری)، تعداد نقاط کنترلی کل، درجه توابع شکل، تعداد گره ها (Knot)، تعداد نقاط گوسی، نوع معیار تسلیم، الگوریتم حل به روش نیوتن رافسون، تعداد افزایش مجاز بارگذاری و تعداد نقاط دلخواه جهت چاپ خروجی های مسئله می باشد.

(۳) Load Data

شامل اطلاعاتی مربوط به مختصات هندسی نقاط کنترلی (معرفی هندسه مسئله)، اتصال وصله ها و مختصات دهانه های گره ای (Knot Spans) می شود.

(۴) Material Properties

دارای اطلاعاتی مربوط به خواص مصالح، رفتار مصالح پس از تسلیم می باشد.

(۵) Boundary Conditions

در برگیرنده مطالب مربوط به شرایط مرزی اساسی و طبیعی شامل جابجایی ها و بارگذاری های پیش فرض است.

(۶) Type of Analytical Solution

جهت محاسبه حل تحلیلی مسائل (در صورت وجود در برنامه قرار داده شده است) و مقدار بار اعمالی کل به مسئله در نظر گرفته شده است.

(۷) Incremental Variables

در این بخش به معرفی پارامترهای موجود در هر افزایش بار یا جابجایی شامل ضریب افزایش، تفرانس همگرایی و تعداد تکرارهای مجاز در هر افزایش پرداخته می شود.

به لحاظ آشنایی با نحوه ایجاد فایل ورودی برنامه، در شکل (۱) یک نمونه از فایل ورودی قرار داده شده است. اطلاعات این فایل مربوط به یک استوانه جدار ضخیم که تحت تاثیر فشار داخلی است، می باشد و در

تخمین خطا در تحلیل غیرخطی سازه ها به روش ایزوژئومتری

```

44      141.421  141.421      0      1
45      86.6025  50      0      1
46      95.2628  55      0      1
47      103.923  60      0      1
48      112.583  65      0      1
49      121.244  70      0      1
50      129.904  75      0      1
51      138.564  80      0      1
52      147.224  85      0      1
53      155.885  90      0      1
54      164.545  95      0      1
55      173.205  100     0      1
56      96.5926  25.8819  0      1
57      106.252  28.4701  0      1
58      115.911  31.0583  0      1
59      125.57   33.6465  0      1
60      135.23   36.2347  0      1
61      144.889  38.8229  0      1
62      154.548  41.411   0      1
63      164.207  43.9992  0      1
64      173.867  46.5874  0      1
65      183.526  49.1756  0      1
66      193.185  51.7638  0      1
67      100      0      0      1
68      110      0      0      1
69      120      0      0      1
70      130      0      0      1
71      140      0      0      1
72      150      0      0      1
73      160      0      0      1
74      170      0      0      1
75      180      0      0      1
76      190      0      0      1
77      200      0      0      1
-ipach  -Patch Connectivity
1      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10     11     12
      13     14     15     16     17     18     19     20     21     22     23     24
      25     26     27     28     29     30     31     32     33     34     35     36
      37     38     39     40     41     42     43     44     45     46     47     48
      49     50     51     52     53     54     55     56     57     58     59     60
      61     62     63     64     65     66     67     68     69     70     71     72
      73     74     75     76     77
-ipach  -Knot Vectors
1      0  0  0.166666667  0.333333333  0.5  0.666666667  0.833333333  1  1
1      0  0  0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1  1
#Material Properties
-E      -Noo  -Thickness  -Uniax  -Hards  -Frict
21000  0.3  0.0  24  0.0  0.0
#Boundary Conditions
-No.supports  -No.forces
      22      12
-Supports
1      0
3      0
5      0
7      0
9      0
11     0
13     0
15     0
17     0
19     0
21     0
134    0
136    0
138    0
140    0
142    0
144    0
146    0
148    0
150    0
152    0
154    0
-Forces

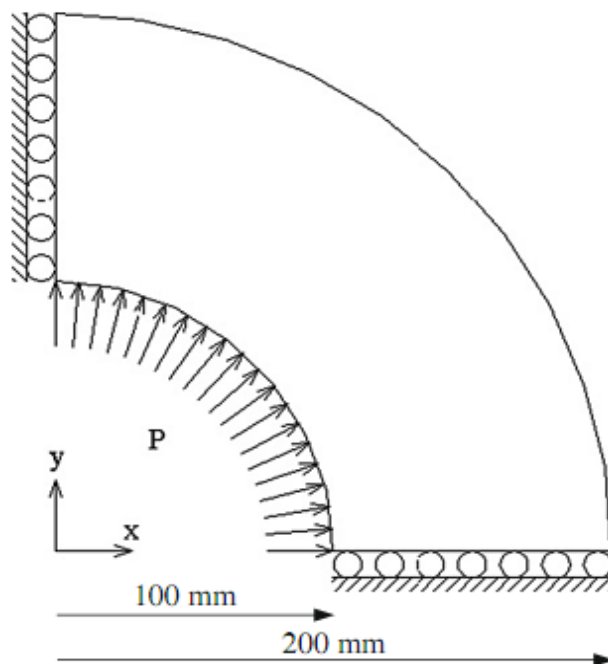
```

```

2      261.7993878
23     135.5173351
24     505.75758
45     261.7993878
46     453.4498411
67     370.2402448
68     370.2402448
89     453.4498411
90     261.7993878
111    505.75758
112    135.5173351
133    261.7993878
##type of analytical solution##
!type: 1=cantilever beam 2=Plate With circle hole 3=Cylinder 4=Spherical 5=Tapered Canti Beam
3
-Applied distributed force
20
##Incremental variables for the applied loading##
-Facto  -Toler  -Miter
0.5     0.10000E-06  35
0.1     0.10000E-06  35
0.1     0.10000E-06  35
0.1     0.10000E-06  35
0.05    0.10000E-06  35
0.05    0.10000E-06  35
##### End of File #####

```

شکل (۱). نمونه ای از فایل ورودی برنامه IGAPLAS



شکل (۲). مشخصات هندسی و شرایط مرزی مسئله استوانه جدار ضخیم



General Data#####

در این بخش در چند سطر به معرفی نویسنده برنامه و همچنین عنوان فایل خروجی پرداخته شده است.



Pre Load Data

در این بخش سطرهای مختلفی وجود دارد که در زیر هر یک مقدار آن داده شده است. در ادامه به معرفی هر متغیر و مقادیری که می تواند کسب کنند می پردازیم.

Ntype-

این متغیر نشانگر نوع تحلیل مسئله به روش ایزوژئومتری می باشد که می توانند اعداد ۱ تا ۳ را به ترتیب ذیل خود اختصاص دهد.

عدد ۱ = برای تحلیل مسائل تنش مسطح

عدد ۲ = برای تحلیل مسائل کرنش مسطح

عدد ۳ = برای تحلیل مسائل متقارن محوری

Npach-

بیان کننده تعداد پچ های (وصله) دامنه مسئله در روش ایزوژئومتری است (شروع تعداد پچ ها از یک می باشد).

Ntctp-

مشخص نمودن تعداد کل نقاط کنترلی توابع نریز جهت شبکه بندی هندسه شکل توسط این متغیر معرفی می شود.

Ndime-

برای نشان دادن بعد مسئله این متغیر به خدمت گرفته شده است و این برنامه در حیطه مسائل پلاستیک تنها قادر به حل مسائل دو بعدی می باشد که همانگونه که در شکل مشاهده می نمایید عدد دو اختیار گردیده است.

Nintp-

متغیر مربوطه تعداد نقاط گوسی کل را مشخص می نماید. در این برنامه مختصات نقاط گوسی به ازای اعداد ۳۶،۲۵،۱۶،۹،۴ در نظر گرفته شده است.

Nalgo-

این متغیر نشانگر نوع حل مسئله برای روند تکراری موجود در برنامه (روش نیوتن-رافسون) با توجه به ماتریس سختی می باشد.

عدد ۱ = روش سختی اولیه (ماتریس سختی در اولین افزایش و اولین تکرار محاسبه و در تکرارها و افزایش های بعدی ثابت می باشد).

عدد ۲ = روش سختی مماسی (ماتریس سختی به ازای هر افزایش و هر تکرار مجدداً محاسبه می شود).

عدد ۳ = روش ترکیبی یک (ماتریس سختی در اولین تکرار هر افزایش محاسبه و در باقی تکرارها ثابت فرض می شود).

عدد ۴ = روش ترکیبی دو (ماتریس سختی در دومین تکرار افزایش های مختلف محاسبه می شود و در سایر تکرارها ثابت در نظر گرفته می شود).

Ncrit-

نوع معیار تسلیم برای شروع جریان پلاستیک توسط این متغیر به ترتیب ذیل معرفی می گردد:

عدد یک = بیانگر معیار ترسکا

عدد دو = بیانگر معیار وان-میسز

عدد سه = بیانگر معیار موهر-کلمب

عدد چهار = بیانگر معیار دراگر پراگر

Nincs-

برای بیان تعداد افزایش مجاز نیرو یا جابجایی از این متغیر استفاده می شود.

Nstre-

این متغیر نشان دهنده تعداد مولفه های تنش مسئله مربوطه است که برای مسائل تنش یا کرنش مسطح

عدد ۳ و متقارن محوری عدد ۴ را می توان اختصاص داد.

در بخش بعدی این قسمت مقادیر مربوط به تعداد گره ها، درجه توابع شکل در جهات مختلف و همچنین تعداد المان های گره ای را به صورتی که در شکل مشاهده می نمایید در زیر پارامتر مربوطه مقدار می گیرند.

Ipach-

این متغیر نشانگر شماره پیچ مربوطه (i امین پیچ)، جهت وارد نمودن داده های گره ای و المانی مربوط به همان پیچ می باشد.

Doapx-

متغیری است جهت نشان دادن درجه توابع شکل نریز در جهت X.

Nxknt-

جهت معرفی تعداد گره ها (Knots) در جهت X از این متغیر استفاده می گردد. برای محاسبه مقدار آن، همانگونه که از روابط توابع شکل نریز می دانیم، به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$m = n + p + 1$$

m: تعداد گره های المان

n: تعداد نقاط کنترلی

p: درجه توابع شکل

Doapy-

به طور مشابه جهت X، درجه توابع شکل در جهت Y نیز توسط این متغیر تعریف می شود.

Nyknt-

نشان دهنده تعداد گره های المان در جهت Y می باشد.

Nele-

تعداد المان های گره ای در i امین پیچ با استفاده از این متغیر مقدار می گیرد.

برای کنترل تعداد تقسیمات دامنه مسئله مدلسازی شده در جهات مختلف جهت ترسیم خروجی ها با تعریف دو متغیر xdiv و ydiv می توان این عمل را انجام داد.

در قسمت انتهایی این بخش نیز نوع دستگاه مختصات را می توان انتخاب نمود که برای دستگاه مختصات کارتزین عدد یک و دستگاه مختصات استوانه ای عدد دو اختصاص داده شده است.



Load Data

در این بخش از فایل ورودی به تعریف مختصات هندسی مسئله، اتصال پچ ها به یکدیگر و مقادیر بردارهای گره ای در هر پچ پرداخته شده است که توضیح مختصری در این رابطه داده می شود:

Control points coordinates-

در این قسمت اطلاعات مربوط به مختصات نقاط کنترلی، شماره آن در دستگاه مختصات کلی و وزن آن نقاط به صورت ستونی مقدار می گیرند. مولفه های این ستون ها در جدول زیر نشان داده شده است.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم	ستون چهارم	ستون پنجم
شماره نقطه کنترلی	مختصه جهت X	مختصه جهت Y	مختصه جهت Z	وزن نقطه کنترلی

Patch connectivity-

جهت اتصال پچ های مختلف دامنه مسئله از این قسمت استفاده می شود که این امر ابتدا با معرفی شماره پچ (ipach) و سپس با وارد نمودن شماره نقاط کنترلی که در آن پچ وجود دارند، صورت می گیرد.

Knot vectors-

طبق رابطه $\Xi = \left\{ \underset{p+1}{0, \dots, 0}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underset{p+1}{1, \dots, 1} \right\}$ ، می توان مقادیر بردارهای گره ای را بدست آورد که

در آن p درجه توابع شکل و r تعداد گره های پچ i ام می باشد. با توجه به این رابطه، در این قسمت از فایل ورودی در سطر اول آن، اولین مولفه مربوط به شماره پچ و مولفه های بعدی بردار گره ای پچ مورد نظر در جهت X را نشان می دهد. در سطر دوم آن، به طور مشابه سطر اول، مقادیر بردار گره ای در جهت Y معرفی می شود.



Material Properties

در خط مربوط به این بخش، متغیرهای مختلفی وابسته به خواص مصالح معرفی می گردد که در زیر هر یک مقدار آن داده شده است. در ادامه به معرفی هر متغیر و مقادیری که می تواند کسب کنند می پردازیم.

E-

از این متغیر جهت معرفی مدول الاستیسته مصالح استفاده می شود.

Noo-

برای معرفی مقدار ضریب پواسان مصالح این متغیر به خدمت گرفته می شود.

Thickness-

معرف ضخامت مصالح برای مسائل دو بعدی تحت شرایط تنش صفحه ای می باشد. برای مسائل کرنش مسطح و متقارن محوری مقدار این متغیر صفر در نظر گرفته می شود.

Uniax-

مقدار این متغیر بیانگر تنش تک محوری مصالح تحت آزمایش کشش می باشد.

Hards-

برای مصالحی که رفتارشان پس از تسلیم به صورت خطی است از این متغیر برای نشان دادن مقدار کرنش سخت شوندگی مصالح استفاده می شود. مصالحی که رفتار الاستو-کاملاً پلاستیک دارند مقدار صفر را به این متغیر اختصاص می دهیم.

Fric-

ضریب چسبندگی مصالح C معیار تسلیم موهر-کلمب توسط این متغیر تعریف می گردد.



Boundary Conditions

در این بخش شرایط مرزی اساسی و طبیعی مسئله معرفی می گردد. در ذیل نحوه وارد نمودن متغیرهای این بخش آورده شده است.

در سطر ابتدایی می بایست تعداد درجات آزادی که نیرو یا تغییرمکان محدود می گردند در این قسمت

تعریف شوند.

Supports-

در این قسمت درجات آزادی که در آنها تکیه گاه وجود دارد به صورت ستونی از شماره درجه آزادی مربوطه و مقدار آن تعریف می شود. (شماره درجه آزادی از حاصلضرب شماره نقطه کنترلی در بعد مسئله بدست می آید).

Forces-

نیروهای خارجی وارد بر دامنه مسئله با استفاده از شماره درجه آزادی مربوطه (ستون اول) و مقدار آن نیرو در همان درجه آزادی با استفاده از متغیرهای مربوطه موجود در برنامه تعریف می گردد. توجه: تعداد سطرهایی که در دو قسمت Forces & Supports لحاظ می گردد نباید بیش از تعداد درجات آزادی که در سطر ابتدایی این بخش تعریف گردیده، باشد.



Type of Analytical Solution

این بخش برای مسائلی که حل تحلیلی آنها موجود است، در نظر گرفته شده است که می توان با توجه به نوع مسئله همانگونه که در شکل مشاهده می نمایید عدد مربوطه را در سطر زیرین فایل ورودی وارد نمود. به عنوان مثال برای مسئله استوانه جدار ضخیم عدد سه در نظر گرفته شده است. در قسمت بعدی این بخش می بایست مقدار نیروی وارده بر دامنه مسئله را تعریف نماییم.



Incremental Variables

در این بخش از فایل ورودی به تعریف متغیرهایی که مربوط به روند حل افزایشی-تکراری مسئله می باشد، پرداخته می شود. در زیر مقادیری که هر متغیر به خود اختصاص می دهد، نشان داده شده است.

Facto-

در این قسمت با معرفی این متغیر می توان نیرو یا جابجایی اعمالی را ضریب دار نمود تا در هر مرحله افزایش بخشی از نیرو یا جابجایی کلی به دامنه مسئله اعمال شود.

Toler-

همانگونه که در مبحث ملاک همگرایی (بخش ۲-۸) توضیح داده شد، برای کنترل همگرایی تکرارها می بایست مقدار آن از مقدار مجازی کمتر باشد. جهت معرفی این مقدار مجاز از این متغیر استفاده می گردد.

Miter-

تعداد کل تکرارهای مجاز در هر روند افزایشی توسط این متغیر کنترل می شود.

End of Files

جداول شخص تاثیر مسائل نمونہ

جدول (۱). نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در هر المان تیر یکسرگیردار

شماره المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	375775.4624	322601.9582	0.858496604
2	563658.1064	478409.6915	0.848758647
3	563658.1067	478409.6916	0.848758646
4	375775.4623	322601.9582	0.858496604
5	389968.5531	367630.3264	0.942717877
6	485340.9794	467879.4751	0.964022193
7	485340.9794	467879.4754	0.964022193
8	389968.5531	367630.3268	0.942717878
9	384181.3425	331601.8133	0.863138775
10	443382.2514	422091.8421	0.951981819
11	443382.2513	422091.8428	0.951981821
12	384181.3437	331601.8131	0.863138772
13	383150.7712	301466.4554	0.786808949
14	407817.4694	379349.0923	0.930193336
15	407817.4692	379349.0922	0.930193336
16	383150.7711	301466.4546	0.786808947
17	384421.9291	297875.55	0.774866176
18	384130.8389	351966.4722	0.916267158
19	384130.8389	351966.472	0.916267158
20	384421.9288	297875.5504	0.774866177
21	381579.1484	310704.8549	0.81426057
22	360336.3347	338434.5205	0.939218413
23	360336.3344	338434.5194	0.939218411
24	381579.1451	310704.8535	0.814260574
25	370585.9232	316476.886	0.853990576
26	340257.0678	325761.786	0.957399028
27	340257.0668	325761.7864	0.957399032
28	370585.9194	316476.8862	0.853990585
29	363110.2148	318861.2801	0.878139108
30	323276.5925	314895.6072	0.974074877
31	323276.5913	314895.6082	0.974074884
32	363110.2138	318861.3008	0.878139167
33	352030.2467	308748.1368	0.877050025
34	309015.2868	304562.5029	0.985590409
35	309015.2872	304562.5016	0.985590404
36	352030.2464	308748.1399	0.877050035
37	333654.5832	302019.1418	0.905185054
38	298458.6027	296427.5132	0.993194736
39	298458.6021	296427.511	0.993194731
40	333654.5878	302019.1423	0.905185043
41	329204.2092	293333.5918	0.8910384

42	288449.1074	289778.5958	1.004609092
43	288449.1084	289778.6026	1.004609112
44	329204.2271	293333.57	0.891038285
45	322245.4228	280545.1883	0.870594796
46	280686.8884	284807.3963	1.014680087
47	280686.8876	284807.3922	1.014680075
48	322245.4145	280545.198	0.870594849
49	310774.6673	267698.9496	0.861392442
50	273870.2803	281555.3943	1.028061146
51	273870.2863	281555.3974	1.028061135
52	310774.669	267698.9439	0.861392419
53	292110.4543	254380.0319	0.870835083
54	268972.4228	277739.0513	1.032593038
55	268972.4191	277739.045	1.032593029
56	292110.4568	254380.0827	0.87083525
57	288422.146	242985.0812	0.842463329
58	264684.8453	274762.7652	1.038075168
59	264684.8472	274762.7678	1.03807517
60	288422.1512	242985.0419	0.842463177
61	277762.4916	239500.9283	0.862250792
62	260975.578	271334.1112	1.039691581
63	260975.5768	271334.109	1.039691577
64	277762.4921	239500.9207	0.862250763
65	269337.0014	237210.6403	0.880720581
66	257135.1089	267270.7355	1.039417513
67	257135.1086	267270.7358	1.039417516
68	269337.0012	237210.6414	0.880720586
69	265564.2047	234006.995	0.88116919
70	253146.0985	263195.595	1.039698406
71	253146.0985	263195.595	1.039698406
72	265564.2046	234006.9949	0.881169189
73	261645.2737	230813.8849	0.882163402
74	249223.8815	259058.9661	1.03946285
75	249223.8816	259058.9661	1.039462849
76	261645.2737	230813.8848	0.882163402
77	257623.9267	227503.9274	0.883085396
78	245251.7625	254850.8262	1.039139632
79	245251.7625	254850.8262	1.039139632
80	257623.9267	227503.9275	0.883085396
81	253509.8232	224111.7091	0.884035602
82	241199.4712	250568.444	1.038843256
83	241199.4711	250568.444	1.038843257
84	253509.8233	224111.7092	0.884035602
85	249296.1452	220633.7884	0.885026875

86	237031.0618	246207.5875	1.038714444
87	237031.0618	246207.5875	1.038714444
88	249296.1452	220633.7884	0.885026875
89	244968.9233	217066.8877	0.886099693
90	232971.3733	241763.4208	1.037738746
91	232971.3734	241763.4211	1.037738747
92	244968.9234	217066.8879	0.886099694
93	240496.6875	213401.7669	0.887337656
94	228825.3749	237230.2718	1.036730616
95	228825.3747	237230.2716	1.036730616
96	240496.6875	213401.7667	0.887337655
97	235949.3423	209616.1264	0.888394621
98	224574.6212	232601.5369	1.035742755
99	224574.6213	232601.5369	1.035742755
100	235949.3423	209616.1264	0.88839462
101	231540.0599	205732.8709	0.888541149
102	220222.1083	227869.2727	1.034724781
103	220222.1084	227869.2731	1.034724782
104	231540.0599	205732.8714	0.888541151
105	227247.4883	202111.355	0.88938873
106	215763.2551	223023.355	1.033648454
107	215763.2552	223023.3554	1.033648455
108	227247.4884	202111.3551	0.88938873
109	222818.6252	198301.268	0.8899672
110	211189.3097	218049.114	1.032481778
111	211189.3096	218049.1139	1.032481778
112	222818.6252	198301.268	0.8899672
113	218204.0658	194350.6953	0.890683199
114	206485.2276	212914.3029	1.031135764
115	206485.2276	212914.3027	1.031135763
116	218204.0657	194350.6952	0.890683199
117	213405.3953	190256.3679	0.891525576
118	201613.4276	207742.5362	1.0304003
119	201613.4277	207742.5363	1.0304003
120	213405.3953	190256.3681	0.891525577
121	208388.9701	185996.126	0.892543046
122	196745.0801	202496.9266	1.029235021
123	196745.0801	202496.9264	1.02923502
124	208388.9701	185996.1257	0.892543044
125	203258.2748	181477.8966	0.89284383
126	191939.9628	197240.7838	1.027617078
127	191939.9631	197240.7839	1.027617078
128	203258.275	181477.8965	0.892843829
129	197992.7363	177300.8046	0.89549146

130	187000.0047	191751.1574	1.025407233
131	187000.0046	191751.1577	1.025407235
132	197992.7364	177300.805	0.895491462
133	192928.5534	172931.8318	0.896351674
134	181863.6344	186021.4233	1.022862124
135	181863.6344	186021.4231	1.022862123
136	192928.5533	172931.8315	0.896351673
137	187780.3922	168305.9853	0.896291585
138	176528.7401	179956.6053	1.019418171
139	176528.7398	179956.605	1.01941817
140	187780.3923	168305.9853	0.896291584
141	182300.0879	163391.0986	0.896275479
142	170972.4396	174057.3559	1.018043354
143	170972.4396	174057.3559	1.018043354
144	182300.0882	163391.0983	0.896275476
145	177198.4075	157979.7095	0.891541362
146	165131.8193	168149.2649	1.018272951
147	165131.8192	168149.2645	1.018272949
148	177198.4072	157979.7084	0.891541357
149	171445.454	153376.2884	0.894606914
150	159364.8894	161818.3933	1.015395511
151	159364.8898	161818.3918	1.015395499
152	171445.4542	153376.2889	0.894606915
153	165887.3951	148654.464	0.896116693
154	153228.8719	155880.0918	1.017302352
155	153228.8716	155880.0923	1.017302358
156	165887.395	148654.4646	0.896116698
157	159887.3067	143472.0795	0.897332518
158	146706.2237	149378.5757	1.018215669
159	146706.2233	149378.5753	1.018215669
160	159887.3066	143472.0792	0.897332517
161	153534.5952	138210.3851	0.900190507
162	139959.4166	142624.8447	1.019044293
163	139959.4169	142624.8451	1.019044293
164	153534.595	138210.3855	0.900190511
165	146979.2547	133281.6694	0.906805996
166	133041.4213	135348.4728	1.017340851
167	133041.4209	135348.4721	1.017340849
168	146979.2545	133281.669	0.906805995
169	140333.0136	128398.8089	0.914957968
170	125559.4609	127923.751	1.018830043
171	125559.4615	127923.7513	1.018830041
172	140333.0135	128398.8085	0.914957965
173	133211.76	122592.9543	0.920286274

174	117985.9087	120305.5101	1.019659987
175	117985.9087	120305.5107	1.019659992
176	133211.7603	122592.9553	0.92028628
177	126634.1437	116606.7225	0.920815817
178	109534.8529	111889.1224	1.021493337
179	109534.8528	111889.1225	1.021493339
180	126634.1436	116606.7231	0.920815823
181	120637.5759	110293.5519	0.914255373
182	101111.8434	103068.4197	1.019350614
183	101111.8433	103068.4183	1.019350602
184	120637.5753	110293.551	0.914255369
185	115242.6487	102872.3108	0.892658334
186	92073.32288	95154.11302	1.033460182
187	92073.32349	95154.11248	1.033460169
188	115242.6476	102872.3098	0.892658335
189	107565.8644	98536.06605	0.916053309
190	83633.02275	78956.97221	0.944088467
191	83633.02277	78956.97237	0.944088468
192	107565.8647	98536.06602	0.916053307
193	115854.3162	97571.67091	0.842192799
194	97048.16872	92081.19085	0.948819458
195	97048.16728	92081.19144	0.948819478
196	115854.3167	97571.67116	0.842192798
197	130748.1	121757.9704	0.931240839
198	208981.3678	151919.622	0.726952951
199	208981.3682	151919.6217	0.726952948
200	130748.0994	121757.971	0.931240848
مجموع	47569497.14	44425362.47	0.933904395

جدول ۲). نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در هر المان استوانه جدار ضخیم

شماره المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	40265.52117	30050.9731	0.746320232
2	38659.66856	40804.73897	1.055486001
3	37207.17301	36561.06311	0.982634803
4	35885.53256	36095.78734	1.00585904
5	34678.26637	34643.60367	0.999000449
6	33586.81546	33609.73235	1.000682318
7	32586.5356	32557.72843	0.999115979
8	31628.56453	31591.77645	0.998836872
9	30825.7712	30701.66015	0.995973789
10	30054.4317	29858.61234	0.99348451
11	29280.21946	29151.84381	0.995615619
12	28424.1389	28121.69474	0.989359602
13	20219.28137	23120.78746	1.143501939
14	19560.52905	19025.68973	0.972657216
15	18931.39951	19673.6469	1.039207212
16	18327.55825	18794.64046	1.025485239
17	17744.55008	18431.17963	1.038695235
18	17177.31889	17667.25587	1.02852232
19	16619.69494	18148.79442	1.092005267
20	16062.65422	12999.77504	0.809316745
21	40265.5323	30049.82105	0.746291414
22	38659.66765	40804.49569	1.055479733
23	37207.17048	36560.6572	0.98262396
24	35885.53205	36095.31757	1.005845964
25	34678.26768	34643.01886	0.998983547
26	33586.8138	33608.97519	1.000659824
27	32586.53802	32556.86341	0.99908936
28	31628.56028	31590.66569	0.998801887
29	30825.77175	30700.1974	0.995926319
30	30054.43164	29857.23583	0.993438711
31	29280.21984	29149.13486	0.995523088
32	28424.13718	28123.45536	0.989421603
33	20219.28124	23071.1795	1.141048449
34	19560.52897	19057.30581	0.97427354
35	18931.39947	19660.70104	1.038523384
36	18327.55824	18790.62141	1.02526595
37	17744.55013	18424.49899	1.038318743
38	17177.31902	17659.47661	1.028069432
39	16619.69515	18146.81582	1.091886202

40	16062.65441	12921.53203	0.804445623
41	40265.53107	30051.14011	0.746324196
42	38659.67049	40804.79075	1.055487288
43	37207.16792	36561.12394	0.982636572
44	35885.53205	36095.85644	1.00586098
45	34678.26653	34643.68983	0.999002929
46	33586.81943	33609.82483	1.000684953
47	32586.53093	32557.8396	0.999119534
48	31628.56597	31591.89266	0.9988405
49	30825.77038	30701.76403	0.995977186
50	30054.43169	29858.79366	0.993490543
51	29280.21685	29151.83766	0.995615497
52	28424.13968	28122.61871	0.989392081
53	20219.28103	23112.9353	1.143113609
54	19560.52881	19034.50766	0.97310803
55	18931.39938	19673.21587	1.039184451
56	18327.55824	18796.11086	1.025565469
57	17744.55025	18432.13436	1.03874903
58	17177.31931	17668.18733	1.02857652
59	16619.69573	18150.51038	1.092108464
60	16062.65556	12995.62772	0.809058482
61	40265.5229	30050.94163	0.746319418
62	38659.67287	40804.75924	1.055486408
63	37207.16945	36561.06463	0.982634938
64	35885.5304	36095.78392	1.005859006
65	34678.26837	34643.5987	0.999000248
66	33586.81879	33609.69239	1.000681029
67	32586.53297	32557.69329	0.999114982
68	31628.56335	31591.68902	0.998834145
69	30825.77349	30701.46556	0.995967403
70	30054.4278	29858.56219	0.99348297
71	29280.21958	29151.16002	0.995592261
72	28424.13928	28123.63754	0.989427939
73	20219.28099	23095.64835	1.142258637
74	19560.52875	19047.86153	0.973790728
75	18931.39935	19669.72413	1.039000011
76	18327.55828	18796.03109	1.025561114
77	17744.55041	18431.06954	1.038689012
78	17177.31966	17666.83916	1.028498014
79	16619.6964	18151.08343	1.0921429
80	16062.65686	12974.9512	0.807771175
81	40265.52724	30051.09401	0.746323122
82	38659.66958	40804.78879	1.055487262
83	37207.16993	36561.1164	0.982636316

84	35885.53544	36095.84675	1.005860615
85	34678.26868	34643.67208	0.999002355
86	33586.80956	33609.78291	1.000683999
87	32586.54425	32557.81133	0.999118258
88	31628.55821	31591.8277	0.998838692
89	30825.77232	30701.65145	0.995973471
90	30054.42881	29858.73729	0.993488763
91	29280.22056	29151.51261	0.99560427
92	28424.13778	28123.38556	0.989419126
93	20219.281	23102.28132	1.142586689
94	19560.52876	19043.56116	0.973570878
95	18931.39937	19671.41376	1.03908926
96	18327.55833	18796.51697	1.025587622
97	17744.55049	18431.91296	1.038736539
98	17177.31982	17667.82377	1.028555325
99	16619.6967	18151.30202	1.092156033
100	16062.65731	12984.61692	0.808372903
101	40265.53044	30051.05534	0.746322102
102	38659.66983	40804.78266	1.055487096
103	37207.16874	36561.10141	0.982635945
104	35885.53359	36095.82973	1.005860193
105	34678.26794	34643.65276	0.999001819
106	33586.81888	33609.76356	1.000683145
107	32586.53149	32557.77317	0.999117478
108	31628.56624	31591.79335	0.998837352
109	30825.77065	30701.60004	0.995971857
110	30054.43016	29858.69143	0.993487192
111	29280.21811	29151.40788	0.995600776
112	28424.13952	28123.485	0.989422564
113	20219.28083	23100.11417	1.142479515
114	19560.5287	19045.06606	0.973647817
115	18931.39935	19670.90474	1.039062374
116	18327.55832	18796.41415	1.025582013
117	17744.55049	18431.69092	1.038724026
118	17177.31975	17667.55966	1.028539953
119	16619.69653	18151.28438	1.092154983
120	16062.65699	12981.68786	0.808190567
121	40265.53229	30051.06905	0.746322409
122	38659.66882	40804.78444	1.05548717
123	37207.17217	36561.1084	0.982636042
124	35885.52947	36095.83257	1.005860387
125	34678.26758	34643.65954	0.999002025
126	33586.81984	33609.77074	1.000683331
127	32586.53229	32557.78598	0.999117847

128	31628.56424	31591.80364	0.99883774
129	30825.77228	30701.61827	0.995972396
130	30054.42998	29858.70679	0.993487709
131	29280.21752	29151.44046	0.995601909
132	28424.13857	28123.45592	0.989421574
133	20219.28106	23100.79365	1.142513108
134	19560.52878	19044.60557	0.973624271
135	18931.39938	19671.06911	1.039071054
136	18327.55832	18796.45259	1.02558411
137	17744.55042	18431.76641	1.038728284
138	17177.31962	17667.64875	1.028545148
139	16619.69619	18151.29579	1.092155691
140	16062.65616	12982.62987	0.808249255
141	40265.53239	30051.06762	0.746322371
142	38659.67251	40804.78782	1.055487157
143	37207.16813	36561.10269	0.982635995
144	35885.53238	36095.83319	1.005860323
145	34678.26827	34643.65759	0.999001949
146	33586.81602	33609.76764	1.000683352
147	32586.53663	32557.78553	0.9991177
148	31628.56644	31591.80206	0.998837621
149	30825.76779	30701.60896	0.995972239
150	30054.42611	29858.69874	0.993487569
151	29280.22339	29151.43515	0.995601528
152	28424.13775	28123.46441	0.989421901
153	20219.28085	23100.59276	1.142503185
154	19560.52872	19044.74272	0.973631285
155	18931.39935	19671.02107	1.039068518
156	18327.55829	18796.44188	1.025583527
157	17744.55041	18431.74471	1.038727062
158	17177.31959	17667.62306	1.028543654
159	16619.69615	18151.29299	1.092155526
160	16062.65608	12982.3539	0.808232078
161	40265.52691	30051.06296	0.746322357
162	38659.66934	40804.78376	1.055487138
163	37207.17774	36561.1124	0.982636002
164	35885.52756	36095.8303	1.005860378
165	34678.2675	34643.65631	0.999001934
166	33586.81816	33609.77034	1.000683369
167	32586.5373	32557.78471	0.999117654
168	31628.56433	31591.80222	0.998837693
169	30825.7694	30701.6132	0.995972324
170	30054.43181	29858.70556	0.993487608
171	29280.21775	29151.43413	0.995601685

172	28424.14019	28123.46276	0.989421758
173	20219.28074	23100.64642	1.142505844
174	19560.52861	19044.70573	0.9736294
175	18931.39927	19671.03376	1.039069193
176	18327.55827	18796.44463	1.025583679
177	17744.55045	18431.75045	1.038727383
178	17177.31974	17667.6299	1.028544044
179	16619.69651	18151.29375	1.092155549
180	16062.65688	12982.42779	0.808236638
181	40265.526	30051.0651	0.746322427
182	38659.67195	40804.78497	1.055487098
183	37207.16689	36561.1039	0.982636061
184	35885.53759	36095.83793	1.005860309
185	34678.27088	34643.65992	0.999001941
186	33586.81222	33609.76472	1.000683378
187	32586.5383	32557.78687	0.99911769
188	31628.56347	31591.80283	0.998837739
189	30825.77338	30701.6143	0.995972231
190	30054.42899	29858.70288	0.993487612
191	29280.21777	29151.43375	0.995601671
192	28424.13804	28123.46182	0.9894218
193	20219.28087	23100.64731	1.142505881
194	19560.52862	19044.70626	0.973629427
195	18931.39927	19671.03406	1.039069208
196	18327.55829	18796.44477	1.025583685
197	17744.55053	18431.75053	1.038727382
198	17177.31993	17667.62994	1.028544034
199	16619.6969	18151.29379	1.092155525
200	16062.65761	12982.42782	0.808236603
201	40265.52357	30051.05975	0.746322339
202	38659.66903	40804.78158	1.055487091
203	37207.17234	36561.10889	0.982636051
204	35885.53503	36095.83366	1.005860262
205	34678.26672	34643.65753	0.999001992
206	33586.81793	33609.77009	1.000683368
207	32586.53452	32557.78107	0.999117628
208	31628.56322	31591.80184	0.998837716
209	30825.7758	30701.61382	0.995972138
210	30054.42767	29858.70156	0.993487611
211	29280.21829	29151.4316	0.995601581
212	28424.13865	28123.46474	0.989421882
213	20219.28068	23100.59346	1.142503229
214	19560.52861	19044.74264	0.973631287
215	18931.39929	19671.02114	1.039068525

216	18327.55832	18796.44182	1.025583523
217	17744.55058	18431.74465	1.038727049
218	17177.32004	17667.62302	1.028543625
219	16619.69706	18151.29299	1.092155466
220	16062.65789	12982.35404	0.808231995
221	40265.52873	30051.0679	0.746322446
222	38659.66974	40804.78385	1.05548713
223	37207.16726	36561.10561	0.982636097
224	35885.53689	36095.83753	1.005860317
225	34678.26795	34643.65996	0.999002026
226	33586.81449	33609.76795	1.000683407
227	32586.54041	32557.78976	0.999117714
228	31628.55684	31591.80068	0.998837881
229	30825.776	30701.62024	0.99597234
230	30054.43217	29858.70988	0.993487739
231	29280.21594	29151.43987	0.995601943
232	28424.13986	28123.45562	0.989421519
233	20219.28098	23100.79361	1.142513111
234	19560.52869	19044.60516	0.973624254
235	18931.39935	19671.06892	1.039071046
236	18327.55836	18796.45243	1.025584099
237	17744.55059	18431.76631	1.038728268
238	17177.31998	17667.64868	1.028545123
239	16619.6969	18151.29577	1.092155644
240	16062.65759	12982.63002	0.808249192
241	40265.53222	30051.05854	0.746322149
242	38659.67087	40804.78396	1.055487102
243	37207.17021	36561.10254	0.982635937
244	35885.53162	36095.82763	1.005860189
245	34678.26546	34643.65066	0.99900183
246	33586.8187	33609.76258	1.000683122
247	32586.53141	32557.77386	0.999117502
248	31628.56584	31591.79365	0.998837374
249	30825.77016	30701.59903	0.99597184
250	30054.43092	29858.6913	0.993487163
251	29280.22037	29151.40947	0.995600754
252	28424.13718	28123.48315	0.98942258
253	20219.2808	23100.11402	1.14247951
254	19560.52878	19045.06636	0.973647828
255	18931.39943	19670.90488	1.039062376
256	18327.55839	18796.41427	1.025582016
257	17744.55053	18431.69099	1.038724027
258	17177.31978	17667.55971	1.028539955
259	16619.69648	18151.28442	1.092154988

260	16062.65668	12981.68777	0.808190577
261	40265.52767	30051.09135	0.746323048
262	38659.67066	40804.79068	1.055487281
263	37207.17313	36561.11784	0.982636271
264	35885.52929	36095.84276	1.005860676
265	34678.26736	34643.67152	0.999002377
266	33586.81486	33609.78516	1.000683908
267	32586.53437	32557.80575	0.99911839
268	31628.56415	31591.82819	0.998838519
269	30825.77026	30701.6524	0.995973568
270	30054.43204	29858.7389	0.993488709
271	29280.21823	29151.51208	0.995604331
272	28424.13962	28123.38638	0.989419091
273	20219.28111	23102.2811	1.142586672
274	19560.52883	19043.56085	0.973570858
275	18931.39943	19671.4137	1.039089253
276	18327.55836	18796.51699	1.025587622
277	17744.55045	18431.913	1.038736544
278	17177.31962	17667.8238	1.028555339
279	16619.69616	18151.30201	1.092156068
280	16062.6561	12984.6168	0.808372957
281	40265.52784	30050.94686	0.746319457
282	38659.67043	40804.75864	1.055486459
283	37207.16968	36561.06454	0.982634929
284	35885.53368	36095.78682	1.005858994
285	34678.26687	34643.59734	0.999000252
286	33586.81514	33609.6896	1.000681055
287	32586.53477	32557.69515	0.999114984
288	31628.56649	31591.69065	0.998834097
289	30825.76999	30701.46334	0.995967444
290	30054.42961	29858.56286	0.993482933
291	29280.22002	29151.16053	0.995592264
292	28424.13822	28123.63661	0.989427943
293	20219.28111	23095.64867	1.142258646
294	19560.52881	19047.86165	0.973790731
295	18931.39939	19669.72428	1.039000016
296	18327.55832	18796.03119	1.025561118
297	17744.55041	18431.06963	1.038689018
298	17177.31958	17666.83922	1.028498022
299	16619.69614	18151.08345	1.092142919
300	16062.65617	12974.95108	0.807771202
301	40265.52675	30051.1345	0.746324137
302	38659.67095	40804.79092	1.055487279
303	37207.17132	36561.12682	0.98263656

304	35885.53152	36095.85636	1.005860993
305	34678.26622	34643.68887	0.99900291
306	33586.81831	33609.82541	1.000685004
307	32586.53824	32557.84346	0.999119429
308	31628.56069	31591.89117	0.99884062
309	30825.77371	30701.76609	0.995977145
310	30054.42984	29858.79279	0.993490575
311	29280.21883	29151.83849	0.995615458
312	28424.13866	28122.61827	0.989392101
313	20219.28072	23112.93482	1.143113602
314	19560.52868	19034.50778	0.973108042
315	18931.39932	19673.21583	1.039184452
316	18327.55826	18796.11086	1.025565468
317	17744.55038	18432.13436	1.038749022
318	17177.31961	17668.18734	1.028576504
319	16619.69628	18150.5104	1.092108429
320	16062.65654	12995.62779	0.809058437
321	40265.53362	30049.8231	0.746291441
322	38659.66852	40804.49589	1.055479714
323	37207.16936	36560.6562	0.982623963
324	35885.53254	36095.31818	1.005845967
325	34678.27004	34643.02075	0.998983534
326	33586.8149	33608.97664	1.000659834
327	32586.53822	32556.86339	0.999089353
328	31628.56078	31590.66674	0.998801904
329	30825.77186	30700.19612	0.995926274
330	30054.43173	29857.23699	0.993438747
331	29280.21792	29149.13403	0.995523125
332	28424.1396	28123.45703	0.989421577
333	20219.28099	23071.17997	1.141048486
334	19560.52864	19057.3055	0.974273541
335	18931.39925	19660.70097	1.038523392
336	18327.55821	18790.62131	1.025265946
337	17744.55036	18424.49895	1.038318728
338	17177.31963	17659.4766	1.028069395
339	16619.69637	18146.81585	1.091886124
340	16062.65674	12921.5322	0.804445517
341	40265.52546	30050.97643	0.746320235
342	38659.67096	40804.74126	1.055485995
343	37207.17096	36561.06243	0.982634839
344	35885.53378	36095.78763	1.005859014
345	34678.26719	34643.60518	0.999000469
346	33586.81813	33609.73394	1.000682286
347	32586.53477	32557.72855	0.999116008

348	31628.56533	31591.77662	0.998836852
349	30825.7717	30701.66035	0.99597378
350	30054.42903	29858.6103	0.99348453
351	29280.21944	29151.84324	0.9956156
352	28424.13859	28121.69504	0.989359623
353	20219.28067	23120.7885	1.143502031
354	19560.52856	19025.68979	0.972657244
355	18931.3992	19673.64726	1.039207248
356	18327.55818	18794.64064	1.025485253
357	17744.55034	18431.17979	1.03869523
358	17177.31962	17667.256	1.028522283
359	16619.69637	18148.79454	1.092005181
360	16062.65669	12999.7751	0.809316625
مجموع	9859061.418	9748536.015	0.98878946

فهرست منابع:

- [1] Zienkiewicz, O.C. (2000), “**Achievements and some unsolved problems of the finite element method**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, pp.28.
- [2] Reddy, J.N. (1993), “**An introduction to the finite element method, second edition: Engineering Mechanics Series**”, McGraw Hill Book Company.
- [3] Clough, R.W. (1980), “**The finite element method after twenty-five years**”: a personal review. Comput. Struct., Vol. 12, pp. 361-370.
- [4] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989), “**The finite element method, 4th ed. Vol. 1: basic formulation and linear problem**”, McGraw Hill Book Company.
- [5] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1991), “**The finite element method, 4th ed. Vol. 2: solid and mechanics dynamics and non-linearity**”, McGraw Hill Book Company.
- [6] Burnett, D.S. (1987), “**Finite element analysis: from concept to applications**”, Addison-Wesley publishing company.
- [7] Bathe, K.J. (1982), “**Finite element procedures in engineering analysis**”, Prentice-Hall Inc.
- [8] Hughs, T.J.R. (1987), “**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**”, Prentice-Hall Inc.
- [9] Brebbia, C.A. and Conner, J.J. (1973), “**Fundamentals of finite element technique for structural engineers**”, Butterworth and Co. Ltd.
- [10] Becker, E.B., Carey, G.F. and Oden, J.T. (1981), “**Finite elements Vol. I: An Introduction**”, McGraw-Hill Inc.
- [11] Carey, G.F. and Oden, J.T. (1983), “**Finite elements Vol. II: A second course**”, McGraw-Hill Inc.
- [12] Carey, G.F. and Oden, J.T. (1984), “**Finite elements Vol. III: Computational aspects**”, Prentice-Hall Inc.
- [13] Carey, G.F. and Oden, J.T. (1984), “**Finite elements Vol. ۴: special problems in solid mechanics**”, Prentice-Hall Inc.
- [14] Hughes T.G.R, Cottrell J.A., Bazilevs Y., (2005), “**Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement**,” Comput. Method Appl. Mech.

Engr., 194 4135–4195.

[15] Bicanic, N. and Johnson K.H. (1979), “**Who was ‘-Raphson’**”, Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 14, pp. 148-152.

[16] Zienkiewicz, O.C. , Valliappan, S. and King, I.P. (1969), “**Elasto-plastic solution of engineering problems**”, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 1, pp. 75-100.

[17] Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C. (1972), “**Note on the ‘alpha’ –constant stiffness method for the analysis of non-linear problems**”, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 4, pp. 579-582.

[18] Haisler, W.E. and Stricklin, J.A. (1977), “**Displacement incrementation in non-linear structural analysis by the self correcting method**”, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, pp. 3-10.

[19] Batoz, J.L. and Dhatt, G. (1979), “**Incremental displacement algorithms for nonlinear problems**”, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 14, pp.1262 -1267.

[20] Powell, G. and Simons, J. (1981), “**Improved iteration strategy for nonlinear structures**”, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp.1455 -1467.

[21] Riks, E. (1979), “**An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems**”, Int. J. Solids Structures, Vol. 15, pp. 529-551.

[22]Crisfield, M.A. (1981), “**A fast incremental/iterative solution procedure the handles ‘snap-through’**”, Comput. Struct., Vol. 13, pp.55-62.

[23] Nyssen, C. (1981), “**An efficient and accurate iterative method, allowing large incremental steps, to solve elasto-plastic problems**”, Comput. Struct., Vol. 13, pp. 63-7

[24] Groves, S.E., Allen, D.H. and Haisler, W.E., (1985), “**An efficient and accurate alternative to subincrementation for elastic-plastic analysis by the finite element method**”, Comput. Struct., Vo.l 20(6), pp. 1021-1031.

[25]Dodds, JR. (1987), “**Numerical techniques for plasticity equations for singular yield functions**”, Comput, Struct., Vol. 26(5), pp.823-829.

[26] De Borst, R. (1987), “**Integration of plasticity equations for singular yield functions**” , Comput, Struct., Vol. 26(5), pp.823-829.

[27] Torkamani, M.A.M. and Elsafi, O.Y.H. (1989), “**A unified approach to the solution of plane elasto-plastic problems: criteria of yielding**”, Comput. Struct., Vol. 33(5), 1167-1181.

[28] Van Langen, H. and Vermeer, P.A. (1990), “**Automatic step size correction for non-associated plasticity problems**”,Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 29, 579-598.

[29] Barros, H.F., Marquez C.M.S. and Martins, R.A.F. (1991), “**A symmetric formulation**

in non-associated plasticity”, Comput. Struct., Vol. 38(1), pp. 25-29.

[30] Chen, W.F. and Saleeb, A.F. (1982), “**Constitutive equations for engineering materials Vol. 1: Elastoplasticity and modeling**”, John Willey and Sons.

[31] Zienkiewicz, O. c. (2006), “**The background of error estimation and adaptivity in finite element computations**”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 207–213

[32] Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. (1981), “**A-posteriori error analysis of finite element solution for one-dimension problems**”, SIAM J Num. Anal., Vol. 18, pp. 565-589.

[33] Gyi, W. and Babuska, I., (1986), “**The h, p and h-p version of the finite element method in one dimension: Part 1: The error analysis of the p version. Part 2: The error analysis of the h and h-p version. Part 3: The adaptive h-p version**”, Numerische Math., Vol. 48, pp. 577-683.

[34] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1987), “**A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 337-357.

[35] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1989), “**Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 2839-2853.

[36] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1992), “**The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 1331-1364.

[37] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1992), “**The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 1365-1382.

[38] Ainsworth, M. and Oden, J. T. (1993), “**A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods**”, Numer. Math., Vol. 65, pp.23-50.

[39] Bugada, G. and Oliver, J. (1993), “**A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp. 3161-3185.

[40] Boroomand, B. and Zienkiewicz, o.c. (1997), “**Recovery by equilibrium in patches (REP)**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.40, pp. 137-164.

[41] Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C. (1997), “**An Improved REP Recovery and effectivity Robustness Test**”, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 40, pp. 3247-3277.

[42] Piegl L., Tiller W., (1997), “**The NURBS Book**,” 2nd ed., Springer-Verlag, new York.

[43] Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C. (1972), “**Convenient form of stress invariants for**

plasticity”, J. Struct. Div. ASCE, Vol. 98, ST4, pp.949-954.

[44] Krieg, R.D. and Krieg, D.B. (1977), “**Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model**”, Trans. ASME, J. Pres. Ves. Tech., Vol. 99(4), pp. 510-515.

[45] I. Babuska, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K. Gangaraj, (1994), “**A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patch wise uniform grids of triangles**”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 114, 307-378.

[46] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and J.Z. Zhu. (2005), “**The Finite Element Method**” 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann.

[47] Hinton, E. and Campbell J. (1974), “**Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**”, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 8, pp.461-480.

[48] Oden, T. J. and Brauchli J. (1971), “**On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation**”, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 317-325.

[49] George Arfken. (1985), “**Mathematical Methods for Physicist**”, Miami University Ohio, Academic Press.

[50] Boroomand, B. and Zienkiewicz, o.c. (1999), “**Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behavior**”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 176, pp. 127-146.

[51] پایان نامه دوره کارشناسی ارشد «احمد گنجعلی» (۱۳۸۸)، «تخمین خطا و حل تطبیقی سازه

های دو بعدی در اجزای محدود و روش ایزوژئومتری» دانشگاه صنعتی شاهرود.

[52] حمیدرضا جاهد مطلق، محمدرضا نوبان و محمد امین اشراقی. (۱۳۸۷) «اجزا محدود ANSYS».

انتشارات دانشگاه تهران.

[53] Lubliner, J. (1990), “**Plasticity Theory**”, Pearson Education., pp.239-244.

[54] Chakrabarty, J. (1987), “**Theory Of Plasticity**”, McGraw-Hill Inc., pp.164-171.

[55] Neto, E.d.S., Peri'c, D. and Owen, DRJ. (2008), “**Computational Methods For Plasticity; Theory And Applications**”, A John Wiley and Sons, Ltd, Publication., pp. 387-388.

[56] Hill, R. (1950), “**The Mathematical Theory Of Plasticity**”, Pearson Education.,

pp.239-244.

[57] Lubliner, J. (1990), “**Plasticity Theory**”, Pearson Education., pp.216-228.

[58] Chakrabarty, J. (1987), “**Theory Of Plasticity**”, McGraw-Hill Inc., pp.323-333.

[59] Neto, E.d.S., Peri'c, D. and Owen, DRJ. (2008), “**Computational Methods For Plasticity;Theory And Applications**”, A John Wiley and Sons, Ltd, Publication., pp. 244-247.



**SHAHROOD UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
CIVIL ENGINEERING DEPARTMENT**

DISSERTATION FOR M.SC. DEGREE IN CIVIL ENGINEERING

TITLE

**ERROR ESTIMATION IN NONLINEAR ISOGEOMETRIC
ANALYSIS OF STRUCTURES**

SUPERVISOR

DR. BEHROOZ HASSANI

DR. REZA NADERI

CONSULTER

AHMAD GANJALI

BY

PEJMAN AZARSA

DECEMBER 2012