





دانشکده عمران و معماری

پایان نامه کارشناسی ارشد سازه‌های هیدرولیکی

مدلسازی جریان در کانال به روش حجم محدود با
در نظر گرفتن خشک شدگی و زیر آب رفتن بستر

نگارش:

کمال‌الدین سقر

استاد راهنما:

دکتر رامین امینی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیرماه ۹۱

ب

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده عمران و معماری
گروه مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای کمال الدین سقر

تحت عنوان:

مدل سازی جریان در کانال به روش حجم محدود با در نظر گرفتن خشک
شدگی و زیر آب رفتن بستر

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد
ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			رامین امینی

امضاء	نمایند تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	سید علی حسینی		امیر عباس عابدینی
			مهدی عجمی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگیم دعاهایشان بدرقه راهم بوده است.

تشکر و قدردانی

اکنون که به لطف و یاری خداوند متعال توانسته‌ام این پایان نامه را به سرانجام برسانم لازم می‌دانم از تمامی بزرگواری که در انجام این کار بنده را یاری رسانده‌اند سپاسگزاری نمایم.

از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر رامین امینی که از ابتدای شروع به کارم راهنمایی روشن‌گرشان را از اینجانب دریغ نکرده‌اند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای فرانسیسکو سیموئوس پژوهش‌گر فعال در آزمایشگاه انتقال رسوب و ژئومورفولوژی ایالات متحده آمریکا (USGS) به خاطر راهنمایی‌هایشان از طریق چندین پست الکترونیکی در امر مدلسازی بر روی بستر غیر یکنواخت و همچنین معرفی مقالات مهم در این زمینه قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای علی مهدوی، دانشجوی دوره دکتری عمران در دانشگاه شیراز به خاطر کمکشان در مبحث مربوط به آبهای کم عمق صمیمانه تشکر می‌نمایم.

در پایان از دوست عزیزم آقای حمید گُر و همچنین دختر عمه گرامی‌ام خانم حوریه سلاق به خاطر یاری‌هایشان در مراحل تایپ و تدوین پایان نامه سپاسگزارم.

تعهدنامه

اینجانب کمال‌الدین سقر دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران گرایش سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه «مدل‌سازی جریان در کانال به روش حجم محدود با در نظر گرفتن خشک شدگی و زیر آب رفتن بستر»، تحت راهنمایی دکتر رامین امینی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل راز داری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

کمال‌الدین سقر

۱۳۹۱/۰۴/۱۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نیست.

چکیده

در این پایان نامه در ابتدا مدلسازی جریان به صورت سه بعدی با روش حجم‌های محدود صورت پذیرفت. این الگوریتم قادر است المانهای با شکل دلخواه شش وجهی را تحلیل نماید. برای حصول این امر از معادلات ناویر استوکس بر روی حجم المان انتگرال گرفته شد و سپس با استفاده از قضیه دیورژانس گوس در ریاضیات انتگرال‌های حجمی تبدیل به انتگرال روی سطوح المان گردید. در خلال کار نیاز به محاسبه گرادیان فشار روی سطوح بین المان‌ها بود که این کار نیز با تغییر دستگاه مختصات و محاسبه ژاکوبین‌های مورد نیاز صورت پذیرفت. همچنین از مفهوم انترپوله کردن مومنتوم که توسط Rhie & Chow پیشنهاد گردیده، برای تعیین معادلات مومنتوم در مرز بین المانها استفاده شده است. در نهایت از الگوریتم MAC¹ برای همگرا کردن نتایج استفاده گردید.

برای حصول اطمینان از عملکرد الگوریتم و کاربرد آن برای خشک شدگی و زیر آب رفتن بستر² تصمیم به مدلسازی شکست سد گرفته شد. مسئله شکست سد، دارای حالت خشک شدگی و زیر آب رفتن بستر می‌باشد و حل‌های تحلیلی و آزمایشگاهی آن موجود می‌باشد که به خوبی می‌توانست برای ارزیابی عملکرد مدل به کار گرفته شود. بنابراین الگوریتم برای مسئله شکست سد نوشته شد که خود دارای انواع و اقسام نکات عددی می‌باشد که تمام مشکلات در الگوریتم مذکور برطرف گردید. ابتدا برای مدلسازی سطح آب نیاز به معادلات ناویر استوکس انتگرال گرفته شده در عمق بود، ثانیاً جائیکه مقادیر تغییرات ناگهانی دارند (مثل مسئله حرکت موج و شکست سد) مسئله ریمان مطرح می‌شود که گادونو حل تقریبی آن را ارائه کرده است. همچنین مدلسازی‌های عددی معمول در اینگونه موارد دچار نوسان شدید نتایج می‌شود که روشهای مبتنی بر TVD (تغییرات کلی از بین رونده) لازم می‌آید. تمام این موارد در مورد مسئله شکست سد بر طرف گردید و در نهایت با روش

¹ Marker and Cell

² Wetting and Drying (WAD)

WAF که از مرتبه دوم دقت زمانی و مکانی است جوابهای شکست سد در حالات آزمایش مختلف بدست آمد که در تمام حالات تطابق خوبی بین جوابهای عددی و تحلیلی و آزمایشگاهی بدست آمد که صحت عملکرد مدل عددی را نشان می دهد.

کلمات کلیدی: مدل سازی عددی - روش حجم محدود - WAD - SWE - شکست سد - WAF

فهرست مطالب

شماره صفحه	عنوان
۱.....	فصل اول: کلیات.....
۱.....	۱-۱- مقدمه.....
۳.....	۲-۱- اهداف پایان نامه.....
۴.....	۳-۱- مروری بر پایان نامه.....
۶.....	فصل دوم: روش حجم محدود در مدلسازی عددی جریان سیالات.....
۷.....	۱-۲- مقدمه.....
۷.....	۲-۲- معادلات حاکم بر مبنای معادلات بقائی.....
۱۱.....	۳-۲- گسسته سازی به روش حجم محدود.....
۱۱.....	۱-۳-۲- ترم انتشار.....
۲۱.....	۲-۳-۲- ترم همرفتی.....
۲۴.....	۴-۲- محاسبه جریان سیال.....
۲۵.....	۱-۴-۲- معادلات حاکم.....
۲۹.....	۲-۴-۲- روابط مربوط به هندسه مسئله.....
۳۰.....	۳-۴-۲- حل کننده کلی برنامه.....
۳۱.....	۴-۴-۲- حل جریان در کانال مستطیلی دارای انحناء.....
۳۳.....	۵-۴-۲- نتایج حاصل از مدلسازی.....
۳۵.....	فصل سوم: معادلات SWE و پیشینه تاریخی.....
۳۶.....	۱-۳- مقدمه.....
۳۶.....	۲-۳- استخراج معادلات SWE.....
۳۷.....	۱-۲-۳- انتگرالگیری عمقی از معادله پیوستگی.....
۳۸.....	۲-۲-۳- انتگرال گیری عمقی از معادله مومنتوم.....
۴۷.....	۳-۳- بازبینی کارهای انجام شده درارتباط با SWE.....
۴۷.....	۱-۳-۳- توسعه حل کننده جریان SWE.....

۵۲ حل کننده‌های ریمان
۵۴ پیمایش زمان
۵۵ شرایط مرزی
۵۶ عبارت شیب بستر، پایستاری شار و توازن عبارت شیب
۵۹ عبارت منشأ اصطکاک
۶۰ عملکرد خشک شدگی و زیر آب رفتگی (ترشدگی)
۶۳ محدود کننده‌ها
۶۷	فصل چهارم: حل عددی معادلات SWE به روش حجم‌های محدود
۶۸ ۱-۴ مقدمه
۶۸ ۲-۴ معادلات حاکمه SWE
۷۱ ۳-۴ مسئله شکست سد
۷۲ ۴-۴ حل تحلیلی شکست سد
۷۴ ۵-۴ حل عددی شکست سد
۷۴ ۱-۵-۴ معادلات حاکمه
۷۶ ۲-۵-۴ الگوی شار متوسط وزن‌دار برای تخمین شار عددی
۷۸ ۳-۵-۴ پیاده سازی عبارت چشمه و معیار پایداری
۷۹ ۴-۵-۴ اعمال شرایط مرزی
۸۲	فصل پنجم: مدلسازی عددی و نتایج
۸۳ ۱-۵ مقدمه
۸۳ ۲-۵ شکست ایده‌آل سد بر روی بستر افقی
۸۸ ۳-۵ شکست سد بر روی بستر شیبدار خشک
۹۳ ۴-۵ بالاروی موج حاصل از شکست سد
۹۹	فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۱۰۰ ۱-۶ نتیجه‌گیری
۱۰۱ ۲-۶ پیشنهادات
۱۰۳	پیوستها

برنامه کامپیوتری مدل حجم محدود جریان دائمی به زبان C++.....۱۰۴

برنامه کامپیوتری مدل SWE به زبان FORTRAN.....۱۲۴

منابع.....۱۳۹

فهرست شکل‌ها

عنوان	شماره صفحه
شکل (۱-۲) حجم کنترل.....	۸
شکل (۲-۲) حجم کنترل دوبعدی.....	۱۲
شکل (۳-۲) شبکه غیر متعامد.....	۱۶
شکل (۴-۲) المان سه بعدی غیر متعامد.....	۲۰
شکل (۵-۲) همرفت در یک مش کارتیزین.....	۲۲
شکل (۶-۲) نمایش اجزاء یک المان سه بعدی.....	۲۶
شکل (۷-۲) نمایش اجزاء در دو المان مجاور هم.....	۲۸
شکل (۸-۲) نمایش هندسی کانال از نمای بالا.....	۳۱
شکل (۹-۲) نمایش بردارهای سرعت در صفحه $X-Y$	۳۴
شکل (۱۰-۲) نمایش منحنی میزان فشار در صفحه $X-Y$	۳۴
شکل (۱-۳) تعیین αX ، αY و αZ	۴۲
شکل (۱-۴) مسئله شکست سد با اجزا مربوطه (توران، ۲۰۰۸).....	۷۲
شکل (۱-۵) نمایش مسئله شکست سد ایده‌آل (لحظه $t=0$).....	۸۴
شکل (۲-۵) نمودار مقدار خطای عمق، سرعت و دبی در مقابل تعداد سلولهای محاسباتی در مسئله شکست سد ایده‌آل.....	۸۵
شکل (۳-۵) مقایسه نتایج حل عددی با حل تحلیلی تورو (۲۰۰۱)، الف- عمق، ب- سرعت و ج- دبی واحد عرض.....	۸۷
شکل (۴-۵ الف) شکست سد بر روی بستر شیبدار، نیمرخ سطح آزاد در لحظات مختلف.....	۸۹

شکل (۴-۰-ب) شکست سد بر روی بستر شیب‌دار، مقایسه نیمرخ سطح آزاد آب در لحظه $t=10s$ با

داده‌های آزمایشگاهی WES ۸۷

شکل (۴-۰-ج) شکست سد بر روی بستر شیب‌دار، مقایسه نیمرخ سطح آزاد آب در لحظه $t=20s$ با

داده‌های آزمایشگاهی WES ۸۸

شکل (۴-۰-د) شکست سد بر روی بستر شیب‌دار، مقایسه نیمرخ سطح آزاد آب در لحظه $t=30s$ با

داده‌های آزمایشگاهی WES ۸۹

شکل (۵-۵) مقایسه تغییرات زمانی عمق جریان با داده‌های آزمایشگاهی WES در نقاط، الف -

۹۲ $x=100ft$ ، ب - $x=150ft$ ، ج - $x=200ft$ ، د - $x=225ft$ ، ه - $x=280ft$ ، و - $x=350ft$

شکل (۶-۵) مقایسه تغییرات زمانی سرعت جریان با داده‌های آزمایشگاهی WES در نقاط الف -

۹۳ $x=280ft$ و ب - $x=350ft$

شکل (۷-۵) نمای بدون مقیاس فلوم آزمایشگاهی مورد استفاده توسط اورلی و همکارانش (۲۰۰۰)

۹۴

شکل (۸-۵) نیمرخ شبیه‌سازی شده سطح آزاد در لحظات مختلف برای حالت (۱) ۹۵

شکل (۹-۵) مقایسه تغییرات زمانی عمق جریان با داده‌های آزمایشگاهی در نقاط مختلف برای حالت

(۱) ۹۶

شکل (۱۰-۵) مقایسه تغییرات زمانی سرعت جریان با داده‌های آزمایشگاهی در نقاط $x=1.40 m$ ،

۹۷ $x=3.40m$ برای حالت (۲)

شکل (۱۱-۵) مقایسه تغییرات زمانی عمق جریان با داده‌های آزمایشگاهی در نقاط مختلف برای

حالت (۳) ۹۸

فهرست جدول‌ها

شماره صفحه

عنوان

جدول (۵-۱) مشخصات آزمایشهای شکست سد (آورلی و همکارانش، ۲۰۰۰) ۹۴

فصل اول: کلیات

✓ مقدمه

✓ اهداف پایان نامه

✓ مروری بر پایان نامه

۱-۱ - مقدمه

شبیه سازی عددی جریان های سطح آزاد که در یک ناحیه با توپوگرافی نامنظم به صورت متناوب در اثر سیلاب زیر آب رفته و پس از مدتی خشک می شود یکی از بحث های چالش برانگیز و دشوار می باشد. از جمله مهمترین نوع این نوع جریان می توان به جریان های جزر و مدی اشاره کرد. جریان های جزر و مدی از انتشار جزر و مد ناشی شده و نقش مهمی در فرآیند جریان بویژه در مدخل رودخانه ها به سمت دریا دارد. این موضوع در مواقعی اهمیت پیدا می کند که ایجاد جریان های جزر و مدی در پیش بینی ارتفاع آب در نتیجه جزر و مد و همچنین زمان رسیدن آن به ارتفاع معین برای بهره برداری های مطلوب و یا مواقع بحرانی حائز اهمیت است.

از جمله بهره برداری هایی که می توان برای استفاده از مدل خشک شدگی و زیر آب رفتگی بستر در اثر یک جریان غیردائمی نام برد موارد ذیل می باشد:

✓ سیستم های آبیگری از دریا^۱ که بصورت ثقلی عمل کرده و جریان جزر و مدی نقش محرک در برآورد ارتفاع آب در داخل حوضچه دارد.

✓ اسکله های تخلیه بار

✓ حوضچه های تعمیر و نگهداری کشتی

✓ شبیه سازی جریان در دریاچه های طبیعی و مصنوعی^۲

✓ شبیه سازی جریان شکست سد در کانال های طویل و دارای بستر غیر یکنواخت.

✓ شبیه سازی جریان دوبعدی شکست سد برای پیش بینی زمان رسیدن آب با ارتفاع مشخص به مکان های مهم.

نگاهی گذرا به متون علمی موجود نشان می دهد که معادلات آب کم عمق (SWE)^۱ یا به

عبارت دیگر معادلات میانگین عمقی به عنوان ابزاری رایج جهت مدل سازی جریان های غیردائمی با

^۱- Sea Water Intake System

^۲- دریاچه مصنوعی چیتگر از جمله دریاچه هایی می باشد که مدل عددی آن با استفاده از معادلات آب های کم عمق تهیه شده است.

سطح آزاد نظیر امواج ناشی از جزر و مد و شکست سد بکار می‌روند. چالش برانگیزترین ویژگی این معادلات این است که حل آنها حتی در حالتی که شرایط اولیه هموار هستند می‌تواند به جوابهایی ناپیوسته در زمان محدود منجر شود. چنین رفتاری لزوم برخورداری الگوی حل از قابلیت تسخیر شوک^۲ را پررنگ می‌سازد. خصلت غیر خطی معادلات آب کم عمق سبب می‌شود که حل تحلیلی آن تنها به تعدادی مسئله خاص محدود گردد. بنابراین برای حل مسائل کاربردی که در آنها ناپیوستگی در حل وجود دارد بایستی از روش‌های عددی بهره برد (زوپو و رابرتس، ۲۰۰۳).

از اینرو روش‌های عددی برای مدل سازی زیر آب رفتن و خشک شدگی بسترهای مختلف جزو مطالعه‌های فعال و جدید در علم هیدرولیک کانال‌های باز به شمار می‌رود. روش‌های عددی کلاسیک از جمله تفاضل محدود و اجزاء محدود در دهه‌های اخیر برای شبیه سازی این نوع معادلات مورد استفاده قرار گرفته و منجر به نوعی ناپایداری شده و معمولاً باعث بروز خطای در حین اجرا^۳ در محاسبات سرعت موج و یا شیب‌های اصطکاکی می‌شوند (تی چامن و کاهویتا، ۱۹۹۸). منشأ این نوع رفتار گوناگون بوده و می‌توان به موارد ذیل نسبت داد:

- ✓ استفاده از روش‌هایی که برای این چنین شرایط پیچیده جریان (رژیم جریان مرکب از جریان‌های بحرانی، فوق بحرانی و زیر بحرانی) نامناسب باشد.
- ✓ عملکرد نامناسب عبارت منشأ یا وجود یک انحنای بزرگ در تغییرات توپوگرافی.
- ✓ به کار بردن یک سلول به صورت نامناسب در خصوص تر یا خشک بودن.

روش‌های حجم محدود جریان‌های زیر بحرانی، فوق بحرانی و بحرانی را بصورت دقیق و بدون هیچگونه نوسانات ناگهانی شبیه سازی می‌کنند (بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۷). بنابراین در این مطالعه ابتدا یک مدل سه بعدی حجم محدود در یک کانال دارای انحنا با شبکه‌های شش وجهی نامنظم در محیط برنامه نویسی C++ گسترش داده می‌شود. سپس با بدست آوردن معادلات آبهای کم عمق یک

¹ - Shallow Water Equations

² - Shock Capturing

³ - Run- Time Error

راه حل تحلیلی برای معادلات یک بعدی آن ارائه شده و نهایتاً یک مدل عددی برای مقایسه با حل تحلیلی در محیط برنامه نویسی FORTRAN اجرا شده و صحت عملکرد مدل عددی به اثبات می-رسد، سپس با توسعه مدل اولیه به شبیه سازی نحوه بالاروی یک موج از یک شیب معکوس با ملاحظات بستر خشک و تر پرداخته شده و نتایج حاصله با نتایج بدست آمده در آزمایشگاه توسط آورلی و همکارانش (۲۰۰۰) مقایسه می‌گردد.

۱-۱- اهداف پایان نامه

اهدافی که در این پایان نامه دنبال می‌شود به شرح ذیل است:

أ- بدست آوردن یک الگوریتم مناسب و بهینه شده به صورت محاسبات جبری با استفاده از روش حجم محدود و سپس گسترش یک برنامه کامپیوتری به زبان C++ که قادر به مدل‌سازی سه بعدی جریان دائمی در یک کانال دارای انحنا بوده و قابلیت محاسبه شار عبوری از بین سلول‌های شش وجهی نامنظم را داشته باشد.

ب- بررسی مسئله خشک شدگی و زیر آب رفتگی در جریان‌هایی که از SWE تبعیت می-کند.

ت- ارائه راهکار مناسب برای شبیه سازی مسئله خشک شدگی و زیر آب رفتگی به روش حجم محدود با بررسی تأثیرات ناشی از شیب بستر، شیب اصطکاکی و موج‌های ایجاد شده در اثر ناپیوستگی‌های جریان.

ث- ارائه حل تحلیلی مسئله کلاسیک یک بعدی شکست سد به عنوان بحث آغازین در مسئله خشک شدگی و زیر آب رفتگی بستر.

ج- بهره‌گیری از روش شار متوسط وزن دار جهت مدل‌سازی عددی جریانی که از SWE تبعیت می‌کند.

ح- ارائه مدل عددی SWE در مسئله کلاسیک شکست سد و مقایسه آن با حل تحلیلی موجود.

خ- ارائه مدل عددی SWE بر روی بستر شیبدار جهت بررسی اثرات ناشی از شیب بستر.
د- ارائه مدل عددی SWE بر روی بستر شیبدار معکوس جهت شبیه سازی بالاروی موج.

۱-۲- مروری بر پایان نامه

این پایان نامه در قالب شش فصل تنظیم شده است. فصل اول شامل کلیات مطالعه انجام شده بوده و مقدمه‌ای بر مباحث مورد بررسی در تحقیق، اهداف و مرور کلی پایان نامه می‌باشد. به منظور استفاده از روش حجم محدود و همچنین بیان برتری این روش نسبت به سایر روش‌های عددی موجود در مدلسازی جریان سیال، در فصل دوم به بررسی روش حجم محدود پرداخته شده است. در این فصل ابتدا با بیان مسئله بنیادین قانون بقا معادلات حاکم بر سیالات بررسی شده و سپس به گسسته سازی فاکتورهای مختلف معادلات حاکمه (معادلات مومنتوم و پیوستگی) پرداخته شده و الگوریتمی جهت مدل‌سازی عددی یک جریان دائمی ارائه می‌شود. همچنین یک برنامه کامپیوتری به زبان برنامه نویسی ++C برای مدل سازی سه بعدی جریان در کانال دارای انحناء در این فصل ارائه می‌گردد که در پیوست (الف) موجود است.

در فصل سوم یک مطالعه تفصیلی از کارهای انجام شده در ارتباط با موضوع ارائه شده است. در این فصل به بیان مسئله و علت استفاده از معادلات SWE بیان شده و ابتدا به نحوه استخراج معادلات آبهای کم عمق از معادلات ناویر- استوکس کلی پرداخته می‌شود. همچنین در این فصل تمامی فاکتورهای موجود در معادلات آبهای کم عمق به تفکیک مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فصل چهارم شامل الگوریتم مورد استفاده در مدلسازی عددی جریان SWE می‌باشد. از آنجا که جهت شبیه سازی موضوع مورد مطالعه ناگزیر به استفاده از مسائل شکست سد می‌باشد، در این فصل پس از توضیح معادلات حاکمه SWE به بیان مسئله شکست سد پرداخته شده و یک حل

تحلیلی برای آن ارائه می‌گردد. سپس جزئیات مورد استفاده در الگوریتم مورد نظر به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

فصل پنجم برای نمایش نتایج تمامی مدل‌های عددی نمونه که هم برای مقایسه با نتایج تحلیلی و هم نتایج آزمایشگاهی اختصاص یافته است، به ترتیب در سه قسمت ۱-۵، ۲-۵ و ۳-۵ ارائه شده و برنامه کامپیوتری آن به زبان FORTRAN در پیوست (ب) آورده شده است. این فصل نتایج کلیه مدل‌های عددی نوشته شده در طول تحقیق را به صورت مقایسه‌ای در قالب نمودار نمایش می‌دهد.

نهایتاً در فصل ششم نتایج عمده تحقیق جمع بندی شده و بیان خواهد شد. توسعه مدل‌های پیشرفته‌تر، انعطاف پذیرتر و همچنین امکان استفاده از الگوریتم‌های ارائه شده با در نظر گرفتن تمهیدات خاص برای انجام مطالعات آتی در این فصل مورد بحث و بررسی قرار گرفته و در قسمت پیشنهادات ارائه خواهد شد.

فصل دوم: روش حجم محدود در مدل‌سازی عددی جریان سیالات

✓ مقدمه

✓ معادلات حاکم بر مبنای معادلات بقائی

✓ گسسته سازی به روش حجم محدود

✓ محاسبه جریان سیال

۲-۱- مقدمه

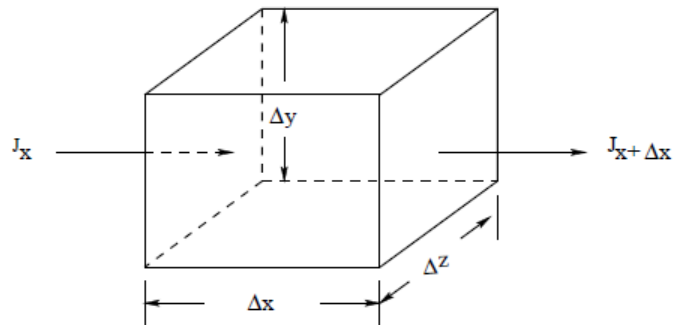
به منظور شبیه‌سازی جریان سیال، انتقال حرارت و دیگر پدیده‌های فیزیکی مرتبط، لازم است فیزیک مسئله به زبان ریاضی بیان شود. تقریباً همه پدیده‌های فیزیکی مورد نظر ما طبق قوانین بقاء عمل می‌کنند و بوسیله معادلات دیفرانسیل جزئی بیان می‌شود. برای مثال معادله مومنتوم بقاء مومنتوم خطی را نشان می‌دهد و معادله انرژی بقاء انرژی کلی را نشان می‌دهد. در این فصل ابتدا معادله بقائی کلی بدست آمده و خصوصیات ریاضی آن بررسی می‌شود و با استفاده از مفاهیم بقاء به بیان روش حجم محدود پرداخته شده و یک روش گسسته سازی بهینه جهت مدلسازی عددی به روش حجم محدود بیان می‌گردد.

۲-۲- معادلات حاکم بر مبنای معادلات بقائی

معادلات بقائی کلی که بیان کننده بقاء جرم، مومنتوم، انرژی و یا ذرات شیمیایی می‌باشد، برحسب کمیت ویژه نوشته می‌شود (کمیت ویژه بر اساس واحد جرم بیان می‌شوند). برای مثال معادله مومنتوم نشان دهنده قانون بقاء مومنتوم خطی برحسب مومنتوم در واحد جرم می‌باشد (یعنی سرعت). معادله برای بقاء ذرات شیمیایی نشان دهنده بقاء جرم ذرات برحسب قسمت جزئی از جرم آن بیان می‌شود.

کمیت ویژه ϕ را در نظر می‌گیریم، که می‌تواند مومنتوم واحد جرم انرژی، واحد جرم یا هر کدام از چنین مقادیری باشد. یک حجم کنترل به اندازه $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ همانند شکل ۲-۱، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تغییرات ϕ در داخل این حجم کنترل در طول زمان Δt را بیان کنیم. خاصیت ϕ را بر اساس قانون بقاء بصورت زیر بیان می‌کنیم:

"تجمع ϕ در حجم کنترل در طول زمان Δt = شار ورودی خالص به داخل حجم کنترل + تولید خالص ϕ در داخل حجم کنترل"



شکل (۱-۲) حجم کنترل

مقدار تجمع ϕ در داخل حجم کنترل در زمان Δt به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(\rho\phi\Delta V)_{t+\Delta t} - (\rho\phi\Delta V)_t \quad (1-2)$$

در رابطه بالا ρ دانسیته سیال، ΔV مقدار حجم کنترل برابر $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ و t زمان

می‌باشد. تولید خالص ϕ در داخل حجم کنترل در زمان Δt به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S \Delta V \Delta t \quad (2-2)$$

که در آن S ، تولید ϕ در واحد حجم است. S را ترم منشأ نیز می‌نامند.

حال عبارت باقی مانده (شار ورودی خالص) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید J_x نشان دهنده

شار ورودی به داخل حجم کنترل از صفحه عمود بر محور x در سمت چپ و $J_{x+\Delta x}$ شار خروجی از

صفحه سمت راست باشد. شارهای مشابه در دیگر صفحات متناظر با محورهای y ، z نیز وجود دارد.

شار ورودی خالص ϕ به داخل حجم کنترل در طول زمان Δt برابر است با:

$$(J_x - J_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z \Delta t + (J_y - J_{y+\Delta y})\Delta x \Delta z \Delta t + (J_z - J_{z+\Delta z})\Delta x \Delta y \Delta t \quad (3-2)$$

تا این مرحله در مورد مکانیزم فیزیکی که باعث شار ورودی ϕ می‌شود، مطلبی عنوان نشد. در

مورد پدیده فیزیکی مورد نظر ما، ϕ توسط دو مکانیزم بنیادی انتقال می‌یابد؛ یکی انتشار^۱ در اثر

برخورد بین مولکولی، و دیگری همرفت^۲ در اثر حرکت سیال می‌باشد. در بسیاری موارد شار انتشار

بصورت زیر است:

1- Diffusion
2- Convection

$$J_{diffusion,x} = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4-2)$$

شار همرفتی نیز بصورت زیر بیان می‌شود:

$$J_{convection,x} = \rho u \phi \quad (5-2)$$

در اینجا سرعت توسط بردار $V = ui + vj + wk$ بیان می‌شود، بنابراین شار همرفتی و انتشاری

بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} J_x = (\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_x \\ J_{x+\Delta x} = (\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_{x+\Delta x} \end{cases} \quad (6-2)$$

که در آن $(\rho u)_x$ شار جرم عبوری از صفحه عمود بر محور x در حجم کنترل است. عبارات

مشابه را می‌توان برای جهت‌های y, z نیز نوشت.

با تقسیم نمودن مجموع ترم‌ها بر $\Delta V \Delta t$ ، معادله تعریف بقای کمیت ویژه نهایتاً بصورت زیر

بدست می‌آید:

$$\frac{(\rho \phi)_{t+\Delta t} - (\rho \phi)_t}{\Delta t} = \frac{(J_x - J_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(J_y - J_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(J_z - J_{z+\Delta z})}{\Delta z} + S \quad (7-2)$$

وقتی که $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} + S \quad (8-2)$$

معادله (8-2) را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}) + S$$

معادله بالا را بصورت برداری نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho V \phi = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \quad (9-2)$$

با توجه به موارد مطرح شده، ذکر نکات زیر قابل توجه است:

- فرم دیفرانسیلی با در نظر گرفتن تعادل بر روی حجم کنترل جزئی بدست می‌آید.

• اگر چه ما در اینجا یک شکل شش وجهی را برای بقاء انتخاب کردیم، ولی می توان از هر شکل دیگری استفاده کرد. که در نهایت منجر به همان معادلاتی می شود، که در اینجا بدست آوردیم.

• معادله بقائی برحسب کمیت ویژه ϕ نوشته شده است، که می تواند انرژی واحد جرم (J/kg) یا مومنتوم واحد جرم (m/s) یا کمیت های مشابه باشد.

رابطه (۹-۲) شکل بقائی یا دیوارژنسی معادله بقاء را نشان می دهد. یکی از مشخصه های این معادله این است که در حالت دائمی در نبود ترم منشأ دیورژانس شار صفر است:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (10-2)$$

در رابطه بالا $J = J_x i + J_y j + J_z k$ می باشد. با استفاده از معادله پیوستگی می توان شکل غیر بقائی معادله (۹-۲) را بنویسیم:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \rho \mathcal{V} \cdot \nabla \phi = \Gamma \nabla \cdot \nabla \phi + \nabla \Gamma \cdot \nabla \phi + S \quad (11-2)$$

دیورژانس J نشان دهنده شار خالص خروجی در واحد حجم می باشد. از این رو شکل بقائی بیان مستقیمی درباره بقای ϕ برحسب شارهای فیزیکی (انتشار و همرفت) می باشد. در حالیکه شکل غیر بقائی بیان مستقیمی درباره آن ندارد. روش های عددی ای که شکل دیورژانسی (بقائی) را به عنوان نقطه شروع خود اختیار می کنند، در صورتی که دقت کافی بکار رود، می تواند خاصیت بقائی را به طور دقیق منعکس کند. ولی آنهایی که معادله (۱۱-۲) را مبنای عمل خود قرار می دهند، با محدودیت هایی خاصیت بقائی را منعکس می کنند، ولی دقیق نمی باشند.

معادله مومنتوم برای یک سیال نیوتنی در جهت x را بصورت زیر نشان می دهیم:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{V} u) = \nabla \cdot (\mu \nabla u) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (12-2)$$

در اینجا S_{ii} شامل قسمتی از تانسور تنش است، که در ترم انتشار بصورت مستقیم نمایان نشده

است و $\frac{\partial p}{\partial x}$ گرادیان فشار می باشد. همان طور که ملاحظه می کنید معادله (۲-۱۲) همان شکل کلی

$$\text{معادله بقائی (۲-۹) را دارد، که در آن } S = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_{ii}, \Gamma = \mu, \phi = u \text{ است.}$$

۲-۳- گسسته سازی به روش حجم محدود

روش حجم محدود نخستین بار توسط مک دونالد (۱۹۷۱) و مک کورمک و پاولی (۱۹۷۲)

جهت حل معادله اویلر دو بعدی معرفی شده است (توران، ۲۰۰۸). در کاری که توسط ایشان انجام

شده است، فرمول انتگرالی قوانین بقاء مثلاً بقای مومنتوم و معادلات ناویر استوکس^۱ به صورت مستقیم

در فضای فیزیکی گسسته شده اند. معادلات دیفرانسیل بر روی حجم کنترل با استفاده از قضیه

دیورژانس انتگرالگیری می شود. روش گسسته سازی حجم محدود روشی است که برنامه نویسی با آن

آسان بوده و در عین حال همه ترمهایی که بایستی تقریب زده شود مفهوم فیزیکی دارند.

در بخش های بعدی شکل گسسته ترم های مختلف مربوط به معادله کلی جریان شامل ترم

انتشار، ترم همرفتی و ترم غیر دائمی استخراج شده و معادلات حاکم به صورت دستگاه معادلات

جبری قابل حل بدست می آید.

۲-۳-۱- ترم انتشار

در این قسمت نحوه گسسته کردن ترم انتشار برای حالت های دائمی و غیر دائمی بیان می شود.

۲-۱-۱- انتشار دو بعدی در دامنه مستطیلی

معادله حاکم مورد نظر به شکل زیر است:

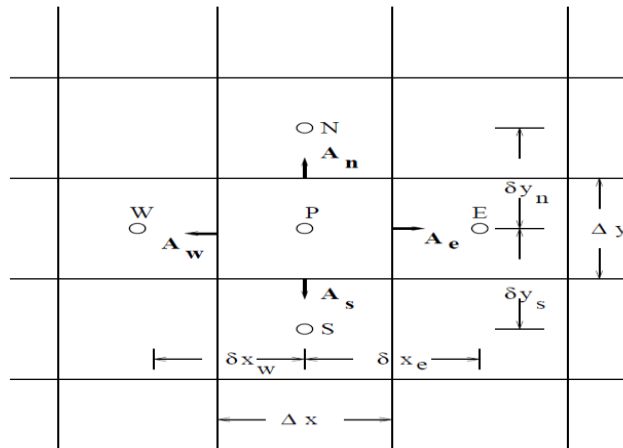
$$\nabla \cdot J = 0 \quad (۲-۱۳)$$

که در آن $J = J_x i + J_y j$ بردار شار انتشار بوده و بوسیله رابطه زیر بدست می آید:

¹ Navier- Stokes

$$J = -\Gamma \nabla \phi \quad (14-2)$$

برای گسسته کردن معادله مورد نظر با توجه ترتیب سلول‌ها که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است، مقادیر گسسته متغیر مورد نظر در مرکز سلول در نظر گرفته می‌شود. همچنین ضریب انتشار را نیز در مرکز سلول ذخیره می‌کنیم. لبه‌های سلول را با بردارهای مساحت A_n ، A_w ، A_e و A_s مرتبط می‌کنیم.



شکل (۲-۲) حجم کنترل دوبعدی

با انتگرال‌گیری از معادله حاکم بر روی سلول P داریم:

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot J dV = 0 \quad (15-2)$$

با اعمال قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_A J \cdot dA = 0 \quad (16-2)$$

فرض می‌کنیم J به صورت خطی بر روی لبه سلول P تغییر می‌کند، طوری که مقدار غالب آن در

لبه برابر مقدار آن در مرکز لبه باشد.

$$(J \cdot A)_e + (J \cdot A)_w + (J \cdot A)_n + (J \cdot A)_s = 0 \quad (17-2)$$

یا به طور خلاصه:

$$\sum_f J_f \cdot A_f = 0 \quad (18-2)$$

مساحت لبه‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
A_e &= \Delta y i \\
A_w &= -\Delta y i \\
A_n &= \Delta x j \\
A_s &= -\Delta x j
\end{aligned}
\tag{۱۹-۲}$$

با توجه به رابطه (۱۷-۲ و ۱۸-۲) و همچنین با فرض تغییرات خطی متغیر مورد نظر بین مرکز

سلول‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
(J.A)_e &= -\Gamma_e \Delta y \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = -\Gamma_e \Delta y \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} \\
(J.A)_w &= \Gamma_w \Delta y \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w \Delta y \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} \\
(J.A)_n &= -\Gamma_n \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n = -\Gamma_n \Delta x \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta y)_n} \\
(J.A)_s &= \Gamma_s \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s \Delta x \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta y)_s}
\end{aligned}
\tag{۲۰-۲}$$

با جایگذاری معادلات (۱۹-۲)، (۲۰-۲) در معادله (۱۷-۲) معادله گسسته ϕ_P بدست می‌آید:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S \tag{۲۱-۲}$$

که در آن ضرایب به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\
a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S
\end{aligned}
\tag{۲۲-۲}$$

معادله بالا را به صورت خلاصه زیر می‌توان نوشت:

$$\phi_P = \sum_{nb} \left(\frac{a_{nb}}{a_P} \phi_{nb} \right) \tag{۲۳-۲}$$

بنابراین می‌توان گفت ϕ_p بوسیله مقادیر اطرافش احاطه شده است، که در آن

$$\sum_{nb} (a_{nb} / a_p) = 1 \text{ می‌باشد.}$$

۲-۱-۲- انتشار غیر دائمی در دامنه مستطیلی

معادله حاکم به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot J = 0 \quad (24-2)$$

با توجه به شرایط اولیه موجود $\phi(x, y, 0)$ ، و در نظر گرفتن گام زمانی Δt می‌خواهیم، مقادیر گسسته ϕ را در زمان‌های مختلف بدست آوریم. به منظور گسسته‌سازی معادله (۲۴-۲)، از آن بر روی حجم کنترل انتگرال‌گیری کرده و سپس از آن در بازه زمانی t تا $t + \Delta t$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_{\Delta t} \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) dV dt + \int_{\Delta t} \int_{\Delta V} \nabla \cdot J dV dt = 0 \quad (25-2)$$

با اعمال قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_{\Delta V} ((\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0) dV + \int_{\Delta t} \int_A J dA dt = 0 \quad (26-2)$$

در عبارت اول ۰ (صفر) و ۱ به ترتیب نشان دهنده مقادیر در زمان‌های t و $t + \Delta t$ می‌باشد. حال هر کدام از عبارت‌ها را جداگانه بدست می‌آوریم، با فرض مقدار $(\rho\phi)$ در مرکز سلول می‌توان شکل گسسته عبارت اول معادله بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta V \left((\rho\phi)_p^1 - (\rho\phi)_p^0 \right) \quad (27-2)$$

حال اگر مانند قبل شارهای مورد نظر در لبه‌ها را در مرکز لبه‌ها در نظر بگیریم، شکل گسسته عبارت دوم معادله (۲۶-۲) را می‌توانیم به شکل زیر بدست آوریم:

$$\int_{\Delta t} \sum_{f=e,w,n,s} J_f \cdot A_f dt \quad (28-2)$$

با فرض درونیابی شار J بین مقطع زمانی t و $t + \Delta t$ با یک ضریب f که مقدارش بین یک و صفر است به شکل زیر گسسته می‌کنیم (سیگما را با انتگرال جابجا می‌کنیم).

$$\sum_f \left(\int_{\Delta t} J \cdot A \, dt \right)_f = \sum_f \left((fJ^1 \cdot A + (1-f)J^0 \cdot A) \Delta t \right)_f \quad (29-2)$$

با در نظر گرفتن تغییرات خطی ϕ ، روابط زیر بدست می‌آید.

$$J_e^1 \cdot A_e = -\Gamma_e \Delta y \frac{\phi_E^1 - \phi_P^1}{(\delta x)_e} \quad (30-2)$$

$$J_w^1 \cdot A_w = \Gamma_w \Delta y \frac{\phi_P^1 - \phi_W^1}{(\delta x)_w}$$

و

با جمع عبارتهای بدست آمده و حذف بالانویس ۱ و تقسیم عبارتها بر Δt معادله گسسته

زیر بدست می‌آید.

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} (f \phi_{nb} + (1-f) \phi_{nb}^0) + \left(a_P^0 - (1-f) \sum_{nb} a_{nb} \right) \phi_P^0 \quad (31-2)$$

که در آن nb شمارشگر سلولهای E, W, N و S می‌باشد. همچنین ضرایب به شرح زیر

می‌باشد:

$$a_E = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}$$

$$a_N = \frac{\Gamma_e \Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_S = \frac{\Gamma_e \Delta x}{(\delta y)_s}$$

(32-2)

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$$

$$a_P = f \sum_{nb} a_{nb} + a_P^0$$

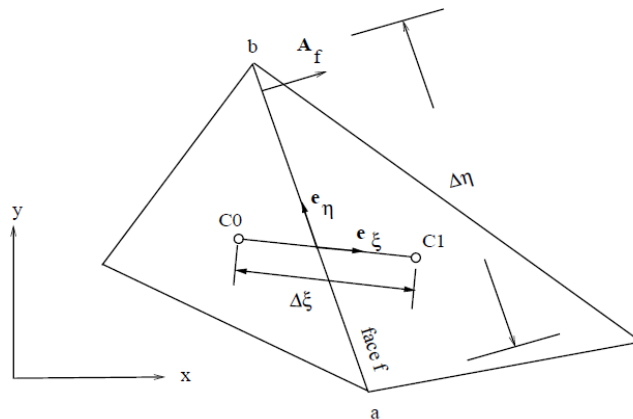
بسته به مقدار انتخابی برای فاکتور f روشهای گسسته‌سازی مختلفی ایجاد می‌شود، که به

شرح زیر می‌باشد:

- ا- اگر $f = 0$ باشد، روش گسسته‌سازی صریح نامیده می‌شود
- ب- اگر $f = 1$ باشد، روش گسسته‌سازی ضمنی کامل نامیده می‌شود.
- ت- و اگر $f = 0.5$ باشد، روش گسسته‌سازی کرانک - نیکلسون نامیده می‌شود.

۳-۱-۲- انتشار دائمی در شبکه‌های غیر متعامد

در عمل استفاده از شبکه‌های متعامد برای هندسه‌های پیچیده غیر ممکن یا خیلی دشوار است و می‌بایست از شبکه‌های غیر متعامد و در نتیجه ترجیحاً شبکه‌های بی‌سازمان جهت حل اینگونه مسائل استفاده گردد. بنابراین در این قسمت سعی داریم روش گسسته کردن معادله مربوطه را در شبکه‌های غیر متعامد ارائه نماییم. از این رو در ابتدا معادلات را برای شبکه‌های کلی متعامد بدست آورده و سپس بر حسب مورد به یک شبکه سازمان یافته تعمیم می‌دهیم. سلول‌های $C0$ و $C1$ را در شکل (۳-۲) در نظر بگیرید، همان‌طور که مشاهده می‌شود خط واصل مرکز سلول‌ها بر لبه f عمود نمی‌باشد.



شکل (۳-۲) شبکه غیر متعامد

معادله حاکم همان معادله (۱-۲) می‌باشد، از معادله مورد نظر بر روی حجم کنترل $C0$ انتگرال‌گیری کرده و قضیه دیورژانس را اعمال می‌کنیم. همانند قبل با فرض غالب بودن مقدار شار در مرکز لبه در اینجا نیز معادله (۶-۲) برقرار می‌باشد. بردار مساحت بوسیله رابطه زیر بدست می‌آید.

$$A_f = A_x i + A_y j \quad (33-2)$$

در اینجا لازم است، با توجه به محورهای محلی موجود در لبه رابطه بالا را بر حسب آنها بنویسیم، چون در اینجا تغییرات کمیت‌ها را در راستای محورهای کلی نداریم. بردار واحد e_ξ با خط واصل مرکز سلول‌ها موازی بوده و بردار واحد e_η بر لبه مماس می‌باشد. چون این نوع شبکه غیر متعامد می‌باشد، بردارهای e_ξ و e_η بر هم عمود نمی‌باشند. مانند قسمت قبل می‌توان معادله زیر را نوشت:

$$J_f \cdot A_f = -\Gamma_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y \right)_f \quad (34-2)$$

برای تبدیل از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \phi_\xi = \phi_x x_\xi + \phi_y y_\xi \\ \phi_\eta = \phi_x x_\eta + \phi_y y_\eta \end{cases} \quad (35-2)$$

روابط بالا را بر حسب ϕ_x و ϕ_y مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases} \phi_x = \frac{\phi_\xi y_\eta - \phi_\eta y_\xi}{\Upsilon} \\ \phi_y = \frac{-\phi_\xi x_\eta + \phi_\eta x_\xi}{\Upsilon} \end{cases} \quad (36-2)$$

در رابطه بالا Υ برابر است با $\Upsilon = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

بنابراین معادله (34-2) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$J_f \cdot A_f = -\Gamma_f \left(\frac{A_x y_\eta - A_y x_\eta}{\Upsilon} \right) (\phi_\xi)_f - \Gamma_f \left(\frac{-A_x y_\xi + A_y x_\xi}{\Upsilon} \right) (\phi_\eta)_f \quad (37-2)$$

در رابطه بالا می‌توان مقادیر زیر جایگزین کرد.

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{x_1 - x_0}{\Delta \xi} & y_\xi &= \frac{y_1 - y_0}{\Delta \xi} \\ x_\eta &= \frac{x_b - x_a}{\Delta \eta} & y_\eta &= \frac{y_b - y_a}{\Delta \eta} \\ A_x &= (y_b - y_a) & A_y &= -(x_b - x_a) \end{aligned} \quad (38-2)$$

با استفاده از رابطه‌های بالا و همچنین مقدار بردارهای واحد مقدار ژاکوبین را به صورت زیر

بدست می‌آوریم.

$$Y = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} = \frac{x_1 - x_0}{\Delta \xi} \frac{y_b - y_a}{\Delta \eta} - \frac{x_b - x_a}{\Delta \eta} \frac{y_1 - y_0}{\Delta \xi} = \frac{A_f e_{\xi}}{\Delta \eta} \quad (39-2)$$

حال دو ترم موجود در سمت راست رابطه (37-2) را به تفکیک بر حسب متغیرهای معلوم

بدست می‌آوریم:

$$\phi_{\xi} \left(\frac{A_x y_{\eta} - A_y x_{\eta}}{Y} \right) = \phi_{\xi} \frac{[A_x (y_b - y_a) - A_y (x_b - x_a)] / \Delta \eta}{A_f e_{\xi} / \Delta \eta} = \phi_{\xi} \frac{A_f \cdot A_f}{A_f e_{\xi}} \quad (40-2)$$

$$\phi_{\eta} \left(\frac{-A_x y_{\xi} + A_y x_{\xi}}{Y} \right) = -\phi_{\eta} \frac{A_f \cdot A_f}{A_f e_{\xi}} e_{\xi} e_{\eta} \quad (41-2)$$

با جمع دو ترم بالا عبارت کلی معادله (37-2) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J_f \cdot A_f = -\Gamma_f \frac{A_f \cdot A_f}{A_f e_{\xi}} (\phi_{\xi})_f + \Gamma_f \frac{A_f \cdot A_f}{A_f e_{\xi}} e_{\xi} e_{\eta} (\phi_{\eta})_f \quad (42-2)$$

حال فرضیات مربوط به پیدا کردن تغییرات ϕ را انجام می‌دهیم، در این قسمت فقط ترم ϕ_{ξ}

بررسی می‌کنیم. با فرض تغییرات خطی بین مرکز سلول‌ها داریم:

$$(\phi_{\xi})_f = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta \xi} \quad (43-2)$$

علاوه بر این عبارت دوم سمت راست را به شکل زیر جدا می‌کنیم.

$$Y_f = \Gamma_f \frac{A_f \cdot A_f}{A_f e_{\xi}} e_{\xi} e_{\eta} (\phi_{\eta})_f \quad (44-2)$$

بنابراین معادله (42-2) در نهایت به شکل زیر در می‌آید.

$$J_f \cdot A_f = -\frac{\Gamma_f \cdot A_f \cdot A_f}{\Delta \xi \cdot A_f \cdot e_{\xi}} (\phi_1 - \phi_0) + Y_f \quad (45-2)$$

در معادله بالا، ترم شامل $\partial \phi / \partial \xi$ را ترم گرادیان اولیه یا انتشار اولی نامیده می‌شود و ترم Y_f

را گرادیان ثانویه یا انتشار ثانویه گویند. در شبکه‌های متعامد $e_{\xi} e_{\eta}$ برابر صفر است چون خط واصل

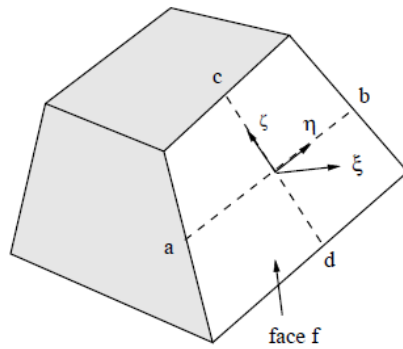
مرکز سلول‌ها بر راستای لبه عمود است. بنابراین مقدار گرادیان ثانویه برای شبکه‌های متعامد صفر است. بنابراین می‌توان رابطه (۲-۴۵) را برای شبکه‌های متعامد نیز استفاده کرد.

ترم گرادیان ثانویه کمی مشکل ساز است، چون در جهت η هیچ مقدار سلولی برای ϕ موجود نمی‌باشد. بنابراین روشی لازم است تا بتوان مقدار $\partial\phi/\partial\eta$ را در لبه محاسبه کرد. ولی روش انجام این کار بستگی به سازمان یافته یا بی‌سازمان بودن شبکه‌بندی دارد، که دو روش مختلف برای آن استنتاج می‌گردد.

مسئله مهم دیگری که در اثر وجود گرادیان ثانویه بوجود می‌آید این است که ممکن است ϕ_p مانند قبل توسط مقادیر مجاورش احاطه نشده و مقادیر دیگری غیر مجاور با آن نیز در مقدار ضریبش دخیل باشند (مارتی و ماتور، ۱۹۹۸).

در یک مش سازمان یافته محاسبه $\partial\phi/\partial\eta$ مشکل خاصی ندارد. در فضای دو بعدی مشکل را می‌توان به دو صورت حل کرد؛ یکی اینکه ابتدا ϕ_a و ϕ_b را بوسیله درونیایی یافته و سپس مقدار $\partial\phi/\partial\eta$ را بدست بیاوریم، دیگر اینکه ابتدا $\partial\phi/\partial\eta$ را در سلول‌های $C0$ و $C1$ یافته و سپس این مقادیر را در لبه f درونیایی کنیم.

در فضای سه بعدی یک سلول توسط لبه‌های (صفحات) ثابت ξ ، η و ζ احاطه شده است. گرادیان $\nabla\phi$ به سه مولفه غیر متعامد تجزیه می‌شود، که ترم گرادیان ثانویه آن شامل دو ترم $\partial\phi/\partial\eta$ و $\partial\phi/\partial\zeta$ است. جزئیات المان سه بعدی غیر متعامد در شکل (۲-۴) نشان داده شده است، که با توجه به آن گرادیان‌های مماسی در آن می‌بایستی بر حسب مقادیر ϕ در نقاط a, b, c و d نوشته شود.



شکل (۴-۲) المان سه بعدی غیر متعامد

در شبکه‌های بی‌سازمان دو بعدی می‌توان عبارت $\partial\phi/\partial\eta$ را بر حسب ϕ_a و ϕ_b نوشت چون راستای η را می‌توان به صورت مستقل تعریف کرد. ولی در فضای سه بعدی تعریف یک جهت مستقل برای η ممکن نیست. لبه f در حالت کلی یک چند وجهی می‌باشد، که جهت مستقلی نداشته و دو جهت η و ξ را به صورت اختیاری می‌توان انتخاب کرد. ولی جهت ξ را می‌توان به صورت مستقل در راستای خط واصل مرکز سلول‌ها تعریف کرد. معادله کلی انتشار را برای شبکه بی‌سازمان می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$J_f A_f = -\frac{\Gamma_f A_f A_f}{\Delta\xi A_f e_\xi} (\phi_1 - \phi_0) - \Gamma_f (\nabla\phi)_f A_f + \frac{\Gamma_f A_f A_f}{\Delta\xi A_f e_\xi} (\nabla\phi)_f e_\xi \Delta\xi \quad (۴۶-۲)$$

طوری که ترم گرادیان ثانویه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$Y_f = -\Gamma_f (\nabla\phi)_f A_f + \frac{\Gamma_f A_f A_f}{\Delta\xi A_f e_\xi} (\nabla\phi)_f e_\xi \Delta\xi \quad (۴۷-۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله بالا ترم گرادیان ثانویه را در قالب تفاضل انتقال کلی از

لبه f و انتقال در راستای e_ξ بیان می‌کند. که هر دو تایی این انتقال‌ها مستلزم محاسبه گرادیان $\nabla\phi$

در لبه f می‌باشد، بنابراین مسئله محاسبه گرادیان ثانویه در اینجا به محاسبه گرادیان لبه‌ای $\nabla\phi$

خلاصه می‌شود، که این کار را به صورت مستقیم با روش‌های مختلفی انجام داد (مارتی و ماتور،

۱۹۹۸) راحت‌ترین کار این است که گرادیان $\nabla\phi$ را در سلول‌های $C0$ و $C1$ در نظر گرفته و با

فرض ثابت بودن این گرادیان در هر سلول به شکل زیر میانگین آن را بر روی لبه مورد نظر به صورت

زیر پیدا کرد:

$$(\nabla \phi)_f = \frac{\nabla \phi_0 - \nabla \phi_1}{2} \quad (48-2)$$

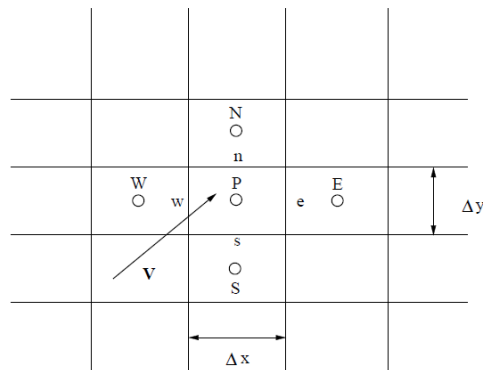
۲-۳-۲- ترم همرفتی

در این قسمت روابط گسسته مربوط به ترم همرفتی در معادله کلی انتقال را استخراج می‌کنیم. با این کار گسسته‌سازی کل معادله انتقال تمام شده و حل آن میسر می‌شود. در بدست آوردن شکل گسسته این ترم فرض می‌شود جریان سیال شناخته شده باشد مثلاً بردار سرعت در نقاط مورد نظر در دامنه معلوم باشد. یعنی در اینجا نحوه انتقال یک اسکالر در صورت وجود جریان بررسی می‌شود. البته در حقیقت می‌بایست جریان سیال محاسبه شود، ولی این مسئله را در قسمت بعد بررسی خواهیم کرد.

۲-۳-۱- همرفت و انتشار دو بعدی در یک دامنه مستطیلی

با توجه به دامنه مستطیلی شکل نشان داده شده در شکل (۲-۵)، و همچنین گسسته‌سازی دامنه به صورت شبکه منظم کارتیزین و ثابت بودن مقادیر Δx و Δy ، مقادیر گسسته ϕ در مرکز سلول در نظر گرفته می‌شود. معادله حاکم بر انتقال اسکالر دائمی به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (49-2)$$



شکل (۵-۲) همرفت در یک مش کارترین

که در آن J برابر است با (بردار سرعت به شکل $V = ui + vj$ می باشد):

$$J = \rho V \phi - \Gamma \nabla \phi \quad (۵۰-۲)$$

با انتگرال گیری حجمی از معادله (۲-۴۹) و اعمال قضیه دیورژانس، رابطه زیر بدست می آید.

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot J \, dV = \int_A J \cdot dA = 0 \quad (۵۱-۲)$$

در اینجا نیز می توان تعادل شارها را دقیقاً مانند قسمت قبلی نوشته و بردارهای مساحت نیز

مانند قبل می باشد، بنابراین داریم:

$$(JA)_e + (JA)_w + (JA)_n + (JA)_s = 0 \quad (۵۲-۲)$$

حال ترم های بالا به شکل زیر نوشته می شود:

$$J_e \cdot A_e = (\rho u \phi)_e \Delta y - \Gamma_e \Delta y \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (۵۳-۲)$$

باتوجه به معادله بالا مشاهده می شود که مؤلفه همرفتی به شکل $F_e \phi_e$ می باشد، که در آن:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad (۵۴-۲)$$

برابر است، با نرخ جریان جرمی عبوری از لبه e . باید توجه داشت که مقدار لبه ای ϕ_e برای

تعیین انتقال ناشی از همرفت در لبه مورد نیاز است. در اینجا فرض می شود F_e معلوم باشد. همان طور

که در بخش های قبل مشاهده شد، ترم انتشار در لبه e را می توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$-D_e (\phi_E - \phi_P) \quad (۵۵-۲)$$

که در آن:

$$D_e = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e} \quad (56-2)$$

اگر F بر D تقسیم گردد، کمیتی بدست می‌آید، که مقیاسی برای اهمیت نسبی همرفت و انتشار در انتقال اسکالر می‌باشد، و Peclet Number نامیده می‌شود. اگر این کمیت بر اساس مقیاس طولی سلول (δx) بیان شود، Cell Peclet Number نامیده می‌شود. این کمیت را می‌توان به شکل زیر بدست آورد:

$$P_e = \frac{F}{D} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} \quad (57-2)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نوشتن شار لبه‌ای J_e مستلزم پیدا کردن دو عبارت است؛ یکی مقدار لبه‌ای ϕ_e و دیگری گرادیان لبه‌ای $(\partial\phi/\partial x)$. در قسمت قبلی نحوه بدست آوردن گرادیان لبه‌ای توضیح داده شد. نحوه نوشتن مقدار لبه‌ای ϕ_e به چند صورت انجام می‌شود که عمده‌ترین روش‌ها عبارت است از Central Differencing و Upwind Differencing. در بسیاری از مسئله‌های عملی با توجه به P_e ، شبکه بدست آمده با روش تفاضل مرکزی خیلی ریز بوده و نیاز به حافظه ذخیره سازی و زمان محاسباتی بیشتری دارد که روش آپویندی این مشکل را ندارد، ولی به هر حال روش آپویندی نیز حتی در صورت نبود ترم انتشاری باعث ایجاد نوساناتی می‌شود، که این مشکل نیز با روش‌های آپویندی از مرتبه‌های بالاتر قابل رفع کردن است (مارتی و ماتور، ۱۹۹۸).

۲-۲-۳- همرفت-انتشار در شبکه‌های غیر متعامد

با انتگرال گیری از معادله همرفت-انتشار بر روی سلول C_0 که در شکل (۵-۲) نشان داده شده و اعمال قضیه دیورژانس رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_A J dA = \sum_f J_f A_f \quad (46-2)$$

طبق معمول جمع بستن بر روی لبه‌های سلول انجام می‌شود. بنابراین شار به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J_f = (\rho V \phi)_f - \Gamma_f (\nabla \phi)_f \quad (47-2)$$

انتقال ϕ از لبه f را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$J_f A_f = (\rho V)_f A_f \phi_f - \Gamma_f (\nabla \phi)_f A_f \quad (48-2)$$

نرخ جریان جرمی لبه خروجی از سلول $C0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_f = (\rho V)_f A_f \quad (49-2)$$

در بخش‌های قبلی انتقال انتشاری در لبه به صورت معادله (2-33) بدست آمد، که در اینجا نیز برقرار می‌باشد، با تعریف D_f به صورت زیر انتقال خالص از لبه f توسط معادله (2-51) بدست می‌آید.

$$D_f = \frac{\Gamma_f A_f A_f}{\Delta \xi A_f e_\xi} \quad (50-2)$$

$$J_f A_f = F_f \phi_f - D_f (\phi_1 - \phi_0) + Y_f \quad (51-2)$$

همانند شبکه‌های منظم در اینجا نیز لازم است جهت تکمیل انتقال همرفتی مقدار لبه‌ای کمیت ϕ بوسیله روش‌های گفته شده محاسبه شود.

در نهایت با گسسته‌سازی معادلات مربوطه برای شبکه‌های بی‌سازمان ساختار ضرابی بسیار مشابه شبکه‌های منظم حاصل می‌کند. در هر دو مورد با Peclet Number بزرگتر از 2 در شبکه‌های یکنواخت، روش تفاضل مرکزی امکان ایجاد ضرایب منفی را دارد. روش آپویندی ضرایب مثبت ایجاد می‌کند، ولی در عین حال از دقت مسئله کاسته می‌شود که با مرتبه‌های بالاتر این مشکل برطرف خواهد شد.

۴-۲ - محاسبه جریان سیال

در قسمت‌های قبلی نحوه انتقال همرفتی و انتشاری با فرض وجود میدان جریان بررسی شد. در این قسمت مسئله مهم محاسبه جریان سیال بررسی خواهد شد. معادله مومنوم دقیقاً همان شکل

معادله بقائی کلی را دارد که نحوه گسسته سازی آن بیان شده است. مشکل عمده در محاسبه جریان سیال این است که میدان فشار نامعلوم است. از طرف دیگر معادله اضافی دیگری که جهت تعیین این میدان وجود دارد معادله پیوستگی است که بایستی ترکیبی از معادلات مومنوم و پیوستگی بکار برده شود. این فرآیند مخصوصاً در مورد جریان‌های تراکم ناپذیر بسیار مشکل زاست که در ادامه نحوه فرمول‌بندی مناسب با بکار گیری یک استراتژی مناسب جهت تسخیل در امر برنامه نویسی بیان می‌گردد و مراحل حل عددی معادله یک جریان دائمی سه بعدی به صورت کامل و گام به گام توضیح داده خواهد شد.

۲-۴-۱- معادلات حاکم

شکل کلی معادله ناویر-استوکس در راستای x به صورت ذیل می‌باشد:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (۵۲-۲)$$

که در آن ρ ، دانسیته سیال؛ p ، فشار؛ μ ، ویسکوزیته و متغیرهای u ، v و w به ترتیب پارامترهای سرعت در جهت x ، y و z می‌باشد.

شکل دیورژانسی رابطه (۵۲-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) \quad (۵۳-۲)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۵۳-۲) روی حجم هر المان به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$\int \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho u \vec{u}) dV = \int -\frac{\partial p}{\partial x} dV + \int \text{div}(\mu \text{grad } u) dV \quad (۵۴-۲)$$

در سمت چپ رابطه بالا عبارت اول بیان کننده حالت غیردائمی جریان و عبارت دوم بیان

کننده انتقال می‌باشد. و در سمت راست، عبارت اول گرادیان فشار و عبارت دوم بیان کننده انتشار

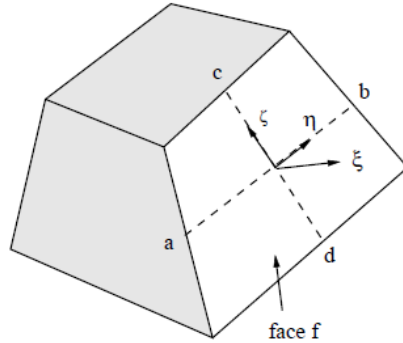
می‌باشد. با توجه به ثابت بودن مقدار دانسیته در طول زمان و با استفاده از قضیه دیورژانس برای

عبارت انتقال و انتشار رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} \nabla_e + \int \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial p}{\partial x} \nabla_e + \int \mu \text{grad } u \cdot d\vec{A} \quad (55-2)$$

در رابطه بالا ∇_e برابر حجم المانی مطابق شکل (۶-۲) و $d\vec{A}$ بردار مساحت عمود بر وجه المان

(face f) و جهت آن به سمت خارج در امتداد محور ξ می‌باشد.



شکل (۶-۲) نمایش اجزاء یک المان سه بعدی

مقدار u روی هر کدام از سطوح جانبی (face f) المان ثابت در نظر گرفته می‌شود، همچنین

نشان دهنده دبی گذرنده از سطح جانبی المان می‌باشد و در نتیجه $\int \rho \vec{u} \cdot d\vec{A}$ نشان دهنده

دبی جرمی عبوری از سطح می‌باشد که اگر آن را با M نشان دهیم، رابطه (۵۵-۲) به صورت زیر

تغییر می‌یابد:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} \nabla_e + \sum u M = -\frac{\partial p}{\partial x} \nabla_e + \int \mu \text{grad } u \cdot d\vec{A} \quad (56-2)$$

باید توجه داشت که اگر جهت بردار سرعت \vec{u} هم جهت با بردار سطح $d\vec{A}$ باشد، مقدار M

مثبت محاسبه می‌گردد و اگر جهت این دو بردار مخالف هم باشد، مقدار M منفی می‌گردد.

مقادیر $\text{grad } u, \text{grad } v, \text{grad } w$ روی هر وجه المان ثابت در نظر گرفته می‌شود، در نتیجه

رابطه (۵۶-۲) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} \nabla_e + \sum u M = -\frac{\partial p}{\partial x} \nabla_e + \sum \mu \text{grad } u \cdot \vec{A} \quad (57-2)$$

معادلات بالا را می‌توان به طور مشابه برای جهت‌های x, y نیز بدست آورد. با فرض عمود بودن

جهت n بر وجه المان، رابطه (۵۷-۲) برای هر سه جهت به شکل زیر در می‌آید:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} \nabla_e + \sum uM = -\frac{\partial p}{\partial x} \nabla_e + \sum \mu A \frac{\partial u}{\partial n} \quad (1-58-2)$$

$$\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} \nabla_e + \sum vM = -\frac{\partial p}{\partial y} \nabla_e + \sum \mu A \frac{\partial v}{\partial n} \quad (2-58-2)$$

$$\rho \frac{\Delta w}{\Delta t} \nabla_e + \sum wM = -\frac{\partial p}{\partial z} \nabla_e + \sum \mu A \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3-58-2)$$

با نوشتن روابط (۵۸-۲) برای سرعت می‌توان آنها را به صورت جبری خلاصه‌تری (روابط ۲-۲)

(۵۹) نوشت:

$$u = \bar{u} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (1-59-2)$$

$$v = \bar{v} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (2-59-2)$$

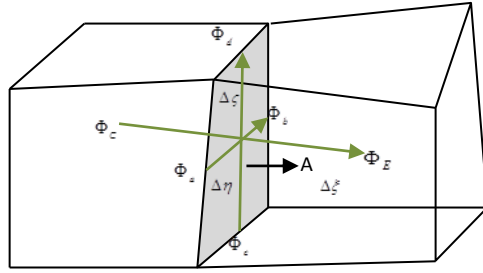
$$w = \bar{w} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (3-59-2)$$

در روابط بالا a_p ، ضریب سرعت مرکزی هر المان بوده و \bar{u} ، \bar{v} و \bar{w} مقادیر ثابتی هستند که به ترتیب برای معادلات مومنوم x ، y و z قابل محاسبه می‌باشد. قابل ذکر است مقدار a_p برای هر سه معادله (۵۹-۲) یکسان می‌باشد. و این یک نکته مهم است که روند محاسبات را بسیار کاهش داده و سرعت حل مسئله افزایش می‌یابد.

با توجه به تعریف بردار عمود بر سطح مطابق شکل (۲-۷)، در جهت بردار A می‌توان رابطه

(۲-۶۰) را بدست آورد.

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k} \quad (2-60)$$



شکل (۷-۲) نمایش اجزاء در دو المان مجاور هم

اگر روابط (۱-۵۹-۲)، (۲-۵۹-۲) و (۳-۵۹-۲) را به ترتیب در n_x ، n_y و n_z ضرب کرده و با هم جمع بسته شوند، رابطه (۶۱-۲) بدست می‌آید. با نوشتن رابطه (۶۱-۲) یک بار برای المان شماره (۱) و یک بار برای دیگر المان شماره (۲) روابط (۱-۶۲-۲) و (۲-۶۲-۲) بدست می‌آید:

$$V = \bar{V} - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (۶۱-۲)$$

$$V_1 = \bar{V}_1 - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\nabla_{e1}}{a_{p1}} \quad (۱-۶۲-۲)$$

$$V_2 = \bar{V}_2 - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\nabla_{e2}}{a_{p2}} \quad (۲-۶۲-۲)$$

معادلات فوق برای مرکز المان‌های ۱ و ۲ نوشته شده‌اند. از آنجا که جهت محاسبه شارهای عبوری از سطوح جانبی المان‌ها لازم است میزان سرعت عمود بر سطوح مشترک بین المان‌ها مشخص گردد. برای این کار می‌توان از انترپولاسیون معادلات مومنتوم^۱ در فصل مشترک المان‌ها استفاده کرد (چورین، ۱۹۶۷؛ کارکی و پاتنکار، ۱۹۸۹؛ ونکا، ۱۹۸۶). این نوع انترپولاسیون را گاهی اوقات روش اتلاف اضافه^۲ شده نیز می‌نامند (کورانت و همکارانش، ۱۹۲۸). ساده‌ترین شکل انترپولاسیون متوسط-گیری از معادلات (۱-۶۲-۲) و (۲-۶۲-۲) می‌باشد و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(۶۳-۲)$$

که در آن V_f سرعت در محل فصل مشترک المان‌های مجاور می‌باشد. عبارت $\frac{\partial p}{\partial n} \frac{\nabla_f}{a_f}$ بیان

کننده میزان تغییرات پارامتر فشار در جهت‌های سه‌گانه در سطوح جانبی المان (face f) می‌باشد و

¹ Momentum Interpolation

² Added Dissipation Scheme

در بخش سوم نحوه محاسبه آن توضیح داده خواهد شد. مقادیر a_f ، ∇_f و به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a_f = \frac{a_{p1} + a_{p2}}{2} \quad (1-64-2)$$

$$\nabla_f = \frac{\bar{\nabla}_{e1} + \bar{\nabla}_{e2}}{2} \quad (2-64-2)$$

در روابط بالا $\bar{\nabla}_{e1}$ و $\bar{\nabla}_{e2}$ برابر حجم المان اول و دوم می باشد.

مقدار دبی عبوری از سطوح جانبی المانها با ضرب سرعت (2-64-2) در مساحت سطح جانبی بدست می آید. در نهایت با استفاده از تعریف معادله پیوستگی، مجموع کل دبی های عبوری از سطوح جانبی برابر صفر در نظر گرفته می شود. بدین ترتیب روابط زیر بدست می آید:

$$V_f A = \bar{V}_f A - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\nabla_f}{a_f} A \quad (65-2)$$

2-4-2- روابط مربوط به هندسه مسئله

با توجه به شکل (2-7)، تغییرات پارامتر فشار در جهت عمود بر سطح مشترک دو المان مجاور بر حسب تغییرات آن در سه جهت محلی ξ ، η و ζ که در آن ξ ، محور متصل کننده مرکز المان اول به مرکز المان دوم بوده و η و ζ متصل کننده وسط یالهای واقع در سطح مشترک بین دو المان مجاور است، به شرح ذیل قابل محاسبه است:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \quad (66-2)$$

با انجام یک سری عملیات جبری و تبدیل مختصات رابطه (2-66) به محورهای محلی انتقال داده می شود و نهایتاً تغییرات پارامتر فشار در جهت عمود بر سطح مشترک دو المان بر حسب محورهای اصلی به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{A}{\Delta \xi \cdot A} (p_E - p_C) + \frac{n \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} (p_b - p_a) + \frac{n \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)} (p_d - p_c) \quad (67-2)$$

که در آن p_C و p_E فشار در مرکز المان اول و دوم، p_a ، p_b ، p_c و p_d مقدار فشار در مرکز یال سطح مشترک می باشد. فشار در مرکز یال با استفاده از درونیابی بصورت متوسط فشار مرکزی المان های احاطه کننده یال مورد نظر بدست می آید. در رابطه بالا مابقی پارامترها مطابق شکل (۲-۷) می باشد. برای تقریب پارامترهای مختلف در محل سطح مشترک از روی اطلاعات موجود در مرکز المان های مجاور از ضرایب هندسی که وابسته به شکل المان است استفاده می شود. ضرایب هندسی مذکور ضرایب درونیابی^۱ (ic) نامیده می شود. به عنوان مثال برای درونیابی پارامتر سرعت در فصل مشترک دو المان ۱ و ۲ از رابطه زیر استفاده می شود.

$$U_{face} = u[i][j][k] * ic[i][j][k][2] + u[i+1][j][k] * ic[i+1][j][k][1] \quad (۲-۶۸)$$

در رابطه بالا اندیس های i ، j و k نشان دهنده موقعیت مکانی پارامتر مورد نظر است و اندیس چهارم نشان دهنده شماره وجه های ششگانه المان بوده و بدین صورت می باشد: شماره ۱ برای وجه غربی، ۲ برای شرقی، ۳ برای جنوبی، ۴ برای شمالی، ۵ برای پایین و ۶ برای بالا در نظر گرفته می شود.

۲-۴-۳- حل کننده کلی برنامه

حل کننده کلی برنامه شامل بخشی از معادلات گسسته جریان است که وظیفه بروز رسانی متغیرهای مجهول را در هر گام زمانی دارد. با جایگذاری رابطه (۲-۶۷) در رابطه (۲-۶۵) رابطه زیر بدست می آید:

$$V_f A = \bar{V}_f A + \frac{d_p}{a_f} (p_{in} - p_{out}) - \frac{d_s (p_b - p_a) + d_t (p_d - p_c)}{a_f} \quad (۲-۶۹)$$

رابطه بالا در واقع مقدار دبی گذرنده از هر سطح المان است و در آن پارامترهای d_p ، d_s و d_t مقادیر ثابتی هستند که در ابتدای برنامه در قسمت هندسه مسئله محاسبه می شوند و به ترتیب برابر ضریب فشار اصلی در جهت ξ ، ضریب فشار ثانویه در جهت η و ضریب فشار ثانویه در جهت ζ

^۱ Interpolation Coefficient

می‌باشد و در بخش قبلی در رابطه (۶۷-۲) نشان داده است. همچنین p_{in} برابر فشار مرکزی المان مورد نظر و p_{out} برابر فشار مرکزی المان مجاور است. با جمع بستن مقدار دبی عبوری از تمامی سطوح و استفاده از مفهوم معادله پیوستگی، مقدار مجموع را برابر صفر قرار داده و در وهله اول فشار را در هر المان می‌توان طبق روابط زیر بدست آورد.

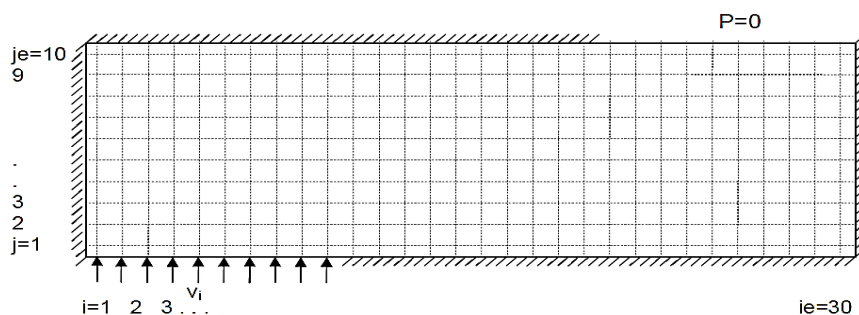
$$\sum V_i A_i = \sum \left(\bar{V}_{fi} A_i - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \right) + \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} (p_{in} - p_{out}) = 0 \quad (۷۰-۲)$$

$$p_{in} = \frac{\left(\sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} p_{out} - \sum \left(\bar{V}_{fi} A_i - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \right) \right)}{\sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} p_{out}} \quad (۷۱-۲)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، در گام اول حل کننده مقدار فشار مرکزی هر کدام از سلول‌ها را محاسبه می‌کند، با به کارگیری مقدار فشار بدست آمده در این گام، بلافاصله گام دوم محاسبات وارد عمل می‌شود و مقدار سرعت مرکزی هر کدام از سلول‌ها را با استفاده از روابط (۵۹-۲) بروز می‌شود. این دو گام در هر گام زمانی به همراه شرایط مرزی تا رسیدن به جواب مطلوب، برنامه تکرار می‌شود.

۴-۴-۲- حل جریان در کانال مستطیلی دارای انحناء

در این مطالعه یک کانال مستطیلی به طول ۳۰ متر و عرض ۱۰ متر و ارتفاع واحد (یک متر) برای مدل سازی جریان داخل آن در نظر گرفته شده است.



شکل (۸-۲) نمایش هندسی کانال از نمای بالا

در شکل بالا محل برخورد خطوط داخلی نشان دهنده مرکز المان‌ها می‌باشد.

این نوع کانال در سیستم کلر زنی تصفیه خانه‌ها کاربرد دارد و برای بررسی اختلاط هر چه بهتر کلر با آب و همچنین زمان مورد نیاز برای اختلاط کامل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مدل حاضر جریان در ورودی برابر ۱.۵ متر برثانیه و ثابت در نظر گرفته می‌شود و فشار در خروجی برابر فشار محیط و برابر صفر می‌باشد. دامنه حل شامل ۳۰۰ سلول محاسباتی می‌باشد. هدف از حل مسئله بدست آوردن سرعت و فشار در نقاط مختلف دامنه محاسباتی است که در بخش نتایج ارائه خواهد شد.

در حل عددی درست اعمال شدن شرایط مرزی امر بسیار مهمی می‌باشد، و استراژی به کار بردن شرایط مرزی مناسب در زمان مناسب تأثیر قابل توجهی در عملکرد برنامه دارد. شرایط مرزی‌ای که در طول برنامه محاسباتی اعمال می‌شود به شرح ذیل است:

شرایط مرزی دیوارهای پیرامون:

- سرعت‌های موهومی در خارج از دامنه محاسباتی در تمام جهات باید منفی سرعت‌های داخلی مجاور باشد.
- ضریب فشار روی سطوح پیرامون مسئله باید برابر صفر باشد.
- مقدار ثابت دبی ورودی که مربوط به معادله پیوستگی رابطه (۲-۶۶) است، روی مرزهای صلب باید برابر صفر باشد.

شرایط مرزی در ورودی :

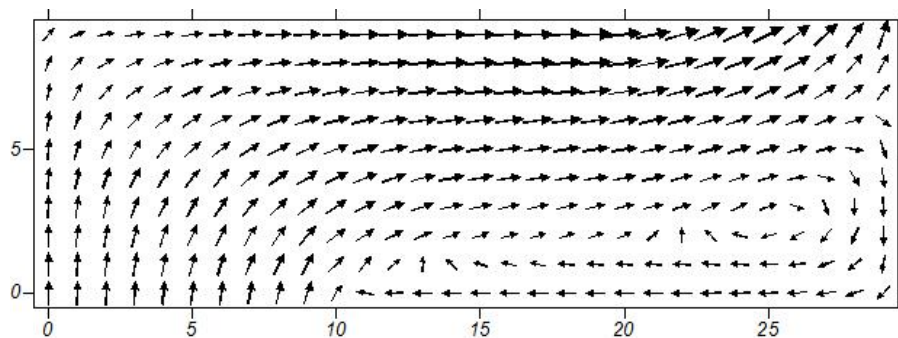
- سرعت‌های ورودی معلوم می‌باشند و در ابتدای برنامه به معدل معرفی می‌شوند.
- مقدار ثابت دبی ورودی که مربوط به معادله پیوستگی رابطه (۲-۶۶) است، باید برابر حاصل ضرب سرعت در سطح قرار داده شود.
- ضریب فشار مربوطه باید صفر باشد تا ارتباط فشار داخل و خارج قطع گردد.

شرایط مرزی در خروجی:

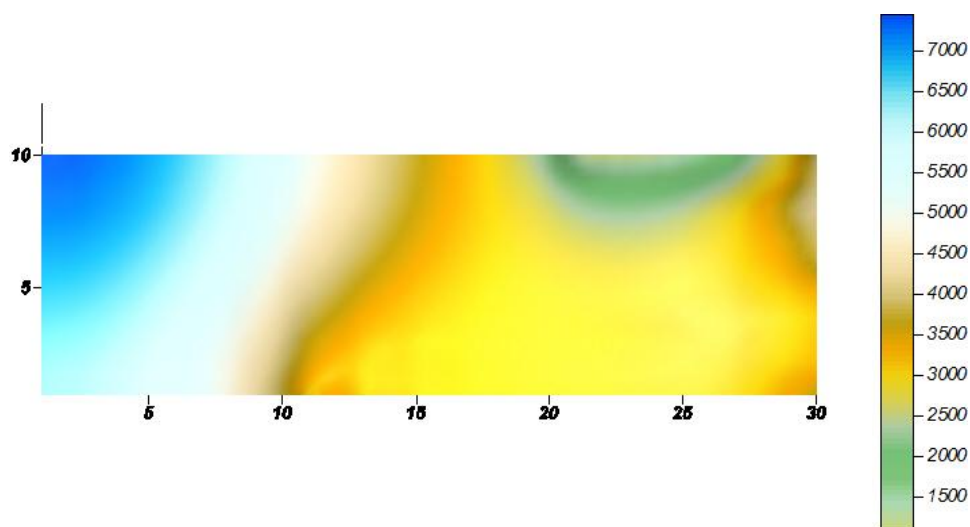
- سرعت‌های خارجی موهومی در تمام جهات می‌بایستی برابر سرعت‌های داخلی در نظر گرفته شود.
- ضریب فشار روی سطح باید از مقادیر المان‌های داخلی تعیین گردد.
- فشار صفر باید در خارج از مسئله فرض گردد و نه در داخل دامنه محاسباتی.

۲-۴-۵- نتایج حاصل از مدل‌سازی

همانطور که در بخش قبلی عنوان شد، هدف از مدل‌سازی جریان آب در داخل کانال مستطیلی بررسی میزان فشار و سرعت در نقاط مختلف دامنه محاسباتی می‌باشد، از این رو نتایج خروجی برنامه مورد نظر در یک فایل Text ذخیره شده و سپس با استفاده از نرم افزار Surfer به شکل بردار و منحنی میزان قابل ترسیم می‌باشد. در شکل (۲-۹) مقادیر سرعت به شکل بردارهای جهت‌دار نشان داده شده همچنین مقادیر فشار در شکل (۲-۱۰) به صورت منحنی میزان نمایش داده شده است.



شکل (۹-۲) نمایش بردارهای سرعت در صفحه X-Y



شکل (۱۰-۲) نمایش منحنی میزان فشار در صفحه X-Y

در شکل (۱۰-۲) مقادیر فشار بر حسب کیلو نیوتن بر متر مربع می باشد و فشار در خروجی به رنگ سبز کم نشان داده شده است. این بدان معناست که کمترین مقدار فشار در این نقطه اتفاق می افتد. لازم به ذکر است بیشترین مقدار فشار در محل مقابل ورودی اتفاق می افتد و به رنگ آبی نشان داده شده است.

فصل سوم: معادلات SWE و پیشینه تاریخی

✓ مقدمه

✓ استخراج معادلات SWE

✓ بازبینی کارهای انجام شده در ارتباط با SWE

۳-۱- مقدمه

در CFD تحقیقات زیادی در زمینه راه حل مؤثر بوسیله سیستم‌های هموزن قوانین بقاء انجام شده است که اکثر توجه‌ها بر روی نمایش دقیق ناپیوستگی‌های تیز (ناگهانی) مانند موج‌های ضربه‌ای^۱ در گازها یا پرش هیدرولیکی در جریان‌های کم عمق بوده است. به تازگی همچنان که مدل‌های عددی پیچیده‌تر و دامنه اعمال این روش‌ها گسترده‌تر می‌شود، جنبه‌های دیگر گسسته سازی نیز ملزم به اهمیت دادن شده است و این امر مسلماً در زمینه هیدرولیک محاسباتی صادق می‌باشد که مدلسازی می‌تواند توسط اثرات نه فقط ترم‌های منشأ بلکه انتشار جریان بر روی یک بستر که در ابتدا خشک بوده است و ذاتاً نامنظم باشد، غالب باشد (بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۲). معادلات SWE یا معادلات سن و نانت، از آنجایی که جریان ناپایدار آب را در یک یا دو بعد بطور مناسبی مدل می‌کند برای بسیاری کاربردهای عملی پذیرفته شده است. معادلات مذکور همانا فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی و مومنتوم می‌باشد. بنابراین در ادامه به نحوه استخراج معادلات SWE پرداخته می‌شود.

۳-۲- استخراج معادلات SWE

معادلات حاکم را با انتگرال‌گیری از معادلات ناویر-استوکس برای یک سیال غیر قابل تراکم در عمق جریان بدست می‌آوریم (خیمنز، ۱۹۸۷). در بدست آوردن معادلات حاکم اثر شیب‌های تند بستر لحاظ شده و فرض می‌شود، بستر کانال یک صفحه مورب است. یک سیستم مختصات متعامد کارتزین با صفحه $x-y$ موازی با صفحه بستر کانال در نظر گرفته می‌شود. در یک سیستم راست‌گرد جهت مثبت z به طرف بالا بوده و بر صفحه $x-y$ عمود می‌باشد (لای، ۱۹۸۶).

معادله پیوستگی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۱-۳)$$

همچنین معادله مومنتوم کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

¹ Shock Wave

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w \quad (4-3)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مولفه‌های سرعت در جهت x ، y و z می‌باشد؛

$g = (g_x, g_y, g_z)^T$ نیروی ثقلی در واحد جرم؛ μ ویسکوزیته دینامیکی؛ p فشار و علامت ∇ اپراتور

لاپلاس می‌باشد.

حال به ترتیب از معادلات بالا در عمق انتگرال گرفته می‌شود تا معادلات میانگین عمقی بدست

آید.

۳-۲-۱- انتگرال گیری عمقی از معادله پیوستگی

معادله میانگین عمقی معادله پیوستگی برای جریان دو بعدی را می‌توان با انتگرال گیری از

معادله (۱-۳) در عمق جریان بدست آورد.

$$\int_{Z_b}^Z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{Z_b}^Z \frac{\partial u}{\partial y} dz + w(Z) - w(Z_b) = 0 \quad (5-3)$$

در رابطه بالا $w(Z)$ سرعت سطح آب و $w(Z_b)$ سرعت در کف کانال می‌باشد (این مقادیر

بصورت عمود بر صفحه کف کانال اندازه گیری می‌شوند). انتگرال‌های موجود در رابطه (۵-۳) را

می‌توان از قانون لایب نیتس^۱ بدست آورد.

$$\int_{Z_b}^Z \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_b}^Z u dz - u(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + u(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x}$$

$$\int_{Z_b}^Z \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_b}^Z v dz - v(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} + v(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial y} \quad (6-3)$$

1- Leibnitz

اگر تابع $Z(x, y, t)$ مشخص کننده مولفه Z سطح آزاد آب بوده و فرض شود هر ذره‌ای بر روی سطح آب مکان خود را ترک نکند (همراه با سطح آزاد بالا یا پایین شود) بنابراین سرعت در راستای قائم یک ذره بر روی سطح آب $w(Z)$ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$w(Z) = \frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + v(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (7-3)$$

به‌طور مشابه اگر کف کانال صلب باشد، $F_b = Z_b(x, y) - z = 0$ می‌باشد، که در آن $Z_b(x, y)$ مولفه z کف کانال را می‌دهد. از این رو:

$$w(Z_b) = \frac{DF_b}{dt} = u(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} + v(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial y} \quad (8-3)$$

با جایگذاری معادلات (۶-۳) الی (۸-۳) در معادله (۵-۳) داریم:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}d)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}d)}{\partial y} = 0 \quad (9-3)$$

که در آن \bar{v}, \bar{u} مقادیر متوسط v, u در عمق کانال می‌باشد.

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_{Z_b}^Z u dz \quad \bar{v} = \frac{1}{d} \int_{Z_b}^Z v dz \quad (10-3)$$

که در آن $d = Z - Z_b$ برابر عمق آبی است که بصورت عمود بر کف کانال اندازه گیری می‌شود.

۲-۲-۲- انتگرال گیری عمقی از معادله مومنوم

با فرض شتاب قائم ناچیز در راستای قائم مفروضات زیر بدست می‌آید:

$$\frac{Dw}{Dt} \approx 0 \quad \mu \nabla^2 w \approx 0 \quad (11-3)$$

بنابراین معادله (۴-۳) به شکل زیر کاهش می‌یابد.

$$g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (12-3)$$

با انتگرال گیری از معادله بالا در جهت z با فرض فشار اتمسفر برابر صفر رابطه زیر بدست می‌-

آید:

$$p = \rho g_z (z - Z) \quad (13-3)$$

که به دنبال آن:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g_z \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (14-3)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g_z \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (15-3)$$

با ضرب معادله (۱-۳) در u و اضافه کردن آن به معادله (۲-۳) و با استفاده از معادله (۱۴-۳) اگر به

جای $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ مقدار سمت راست آن را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = g_x + g_z \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \quad (16-3)$$

به طور مشابه با ضرب معادله (۱-۳) و جایگذاری مقدار طرف راست $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ از معادله (۱۵-۳)

داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = g_y + g_z \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (17-3)$$

حال از معادلات (۱۶-۳) و (۱۷-۳) در جهت z انتگرال می‌گیریم. برای ساده‌تر نمایش دادن آن

سمت چپ و راست این معادلات را جداگانه انتگرال گیری می‌کنیم. انتگرال گیری از سمت چپ معادله

(۱۶-۳) و اعمال قضیه لایبنیتس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{Z_b}^Z u dz - u(Z) \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_b}^Z u^2 dz - u^2(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} \\ & + u^2(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_b}^Z uvdz - u(Z)v(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \\ & + u(Z_b)v(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial y} + u(Z)w(Z) - u(Z_b)w(Z_b) \end{aligned} \quad (18-3)$$

بر اساس فرض توزیع یکنواخت سرعت (یعنی u, v در جهت z ثابت باشند) اگر معادله (۷-۳) و

(۸-۳) را در عبارت (۱۸-۳) قرار دهیم، به صورت ساده‌تر زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}d) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 d) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \bar{v} d) \quad (19-3)$$

به‌طور مشابه سمت چپ معادله (۳-۱۷) را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}^2d) \quad (۳-۲۰)$$

با انتگرال‌گیری از سمت راست معادله‌های (۳-۱۶) و (۳-۱۷) داریم:

$$\left(g_x + g_z \frac{\partial Z}{\partial x}\right)d + \int_{Z_b}^Z \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u dz \quad (۳-۲۱)$$

$$\left(g_y + g_z \frac{\partial Z}{\partial y}\right)d + \int_{Z_b}^Z \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v dz \quad (۳-۲۲)$$

چون صفحه $x-y$ با کف کانال موازی می‌باشد، Z_b ثابت است، بنابراین:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial(Z_b + d)}{\partial x} = \frac{\partial d}{\partial x} \quad (۳-۲۳)$$

به‌طور مشابه:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial d}{\partial y} \quad (۳-۲۴)$$

حال می‌خواهیم ترم‌های مربوط به تنش برشی را بررسی کنیم. در جریان آشفته ویسکوزیته

دینامیکی با ضریب ویسکوزیته ادی^۱ جایگزین می‌شود. علاوه بر آن لازم است تمایزی بین تنش‌های

اثر گذار بر صفحه‌های $x-y$ و تنش‌های اثر گذار بر صفحات $x-z$ و $y-z$ قائل شویم. برای مثال

ترم تنش برشی معادله مومنتوم در جهت x به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_{zx} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (۳-۲۵)$$

که در آن ε_{xy} و ε_{zx} ضرایب ویسکوزیته ادی می‌باشند. به علاوه فرض می‌شود، که تنش‌های

موثر غالب تنش‌های برشی کف می‌باشد. این بدان معنی است که عبارت اول در معادله (۳-۲۵) در

مقایسه با عبارت دوم قابل اغماض است. بنابراین عبارت تنش برشی معادله (۳-۲۵) به $\varepsilon_{zx} \partial^2 u / \partial z^2$

کاهش می‌یابد. با انتگرال‌گیری از این عبارت نسبت به z داریم:

$$\int_{Z_b}^Z \varepsilon_{zx} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = \varepsilon_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=Z} - \varepsilon_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=Z_b} \quad (۳-۲۶)$$

$$= T_{s_x} - T_{b_x}$$

¹ - Eddy Viscosity Coefficient

که در آن T_{s_x} و T_{b_x} به ترتیب تنش‌های برشی در سطح آب و کف کانال می‌باشند. که در جهت x عمل می‌کنند. به‌طور مشابه عبارت تنش برشی معادله (۳-۲۲) نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$T_{s_y} - T_{b_y} \quad (۳-۲۷)$$

تنش‌های برشی T_{s_x} و T_{s_y} به خاطر سرعت باد که بر سطح آب اثر می‌گذارد قابل صرف نظر کردن می‌باشند. تنش‌های برشی در کف کانال (T_{b_x}, T_{b_y}) را می‌توان به وسیله روابط تجربی بدست آورد، مثلاً معادله شزی^۱ بصورت زیر می‌باشد:

$$T_b = \frac{\rho g}{C^2} V^2 \quad (۳-۲۸)$$

که در آن V مقدار سرعت جریان (برابر است با $V = \sqrt{u^2 + v^2}$) و C ضریب شزی است. با استفاده از معادله (۳-۲۸) داریم:

$$T_{b_x} = T_b \cos \theta = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u} V \quad (۳-۲۹)$$

$$T_{b_y} = T_b \sin \theta = \frac{\rho g}{C^2} \bar{v} V$$

که در آن θ زاویه بین بردار سرعت و محور x ها است.

حال می‌توان تمام عبارتهای معادله مومنوم میانگین عمقی را بصورت یکپارچه نوشت. با جایگذاری معادلات (۳-۱۹) الی (۳-۲۴)، (۳-۲۶)، (۳-۲۷)، (۳-۲۹) در معادله (۳-۱۶) و (۳-۱۷) معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}d) = \left(g_x - g_z \frac{\partial d}{\partial x} \right) gd - \frac{g}{C^2} \bar{u} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (۳-۳۰)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2d) = \left(g_y - g_z \frac{\partial d}{\partial y} \right) gd - \frac{g}{C^2} \bar{v} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (۳-۳۱)$$

معادلات (۳-۳۰) و (۳-۳۱) معادلات مومنوم نسبت به دستگاه مختصات $x-y$ و موازی با کف کانال است. برای جریان یک بعدی معادلات بالا به شکل معادلاتی که برای کانال‌های مستطیلی ارائه شده کاهش می‌یابد.

¹ - Chezy Coefficient

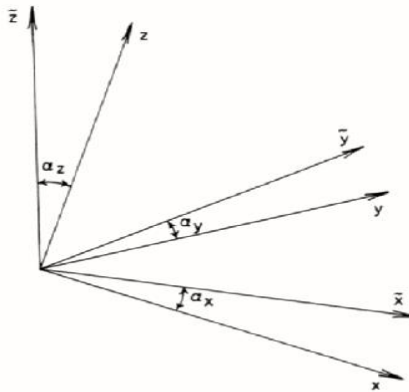
برای مثال اگر $\bar{v} = 0$ و $\frac{\partial d}{\partial y} = 0$ شود، معادله (۳-۳۰) معادله زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2d) + gd \cos \alpha_x \frac{\partial d}{\partial x} = gd (\sin \alpha_x - S_{f_x}) \quad (۳-۳۲)$$

که زاویه انحراف کف کانال می‌باشد.

معادلات (۳-۹)، (۳-۳۰) و (۳-۳۱) را می‌توان در دستگاه مختصات افقی $\bar{x} - \bar{y} - \bar{z}$ شکل (۳-۳)

(۱) نشان داد. در این دستگاه مختصات کانال‌هایی با شیب کف ثابت را می‌توان بصورت تکه‌ای در نظر گرفت. برای انتقال از دستگاه مورب $x - y - z$ به دستگاه افقی $\bar{x} - \bar{y} - \bar{z}$ لازم است تا دستگاه مختصات اولیه را دوران دهیم. این نوع دوران به‌طور کلی توسط کسینوس‌های هادی که زاویه بین محورها را نشان می‌دهند، بیان می‌شود.



شکل (۳-۱) تعیین α_x ، α_y و α_z

به‌هرحال در این مورد بهتر است دوران به عنوان تابعی از زاویه بین کف کانال و محورهای

x, y تعریف شود (α_x و α_y در شکل (۳-۱))، زیرا این زوایا معمولاً معلوم می‌باشند. مطابق شکل

(۳-۱) و چندین عملیات برداری، انتقال بین این دو سیستم مختصات بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_x & -\cos \varphi \cos \alpha_x / \sin \varphi & \tan \alpha_x \cos \alpha_z \\ 0 & \cos \alpha_y / \sin \varphi & \tan \alpha_y \cos \alpha_z \\ -\cos \alpha_x - \sin \alpha_y \cos^2 \alpha_x / \sin \varphi & \cos \alpha_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (۳-۳۳)$$

و $c = \sin \alpha_x \sin \alpha_y$ ، $\cos \alpha_z = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_x + \tan^2 \alpha_y}$ آن در

بدست $\sin \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_x \sin^2 \alpha_y}$ می‌باشد. عبارت‌های g_x ، g_y و g_z را می‌توان از معادله (۳۳-۳) بدست

آورد. برای مثال:

$$g_x = g \hat{e}_1 = -g \tilde{e}_3 \hat{e}_1 = g \sin \alpha_x \quad (34-3)$$

که در آن e_i بردارهای واحد دستگاه مختصات $x-y-z$ و \hat{e}_i بردارهای واحد دستگاه

مختصات $\tilde{x}-\tilde{y}-\tilde{z}$ می‌باشد. باید توجه داشته که ترم $-\sin \alpha_x$ در معادله (۳۴-۳) آرایه (۳،۱)

ماتریس انتقال می‌باشد. از این رو:

$$g_x = g \sin \alpha_x$$

$$g_y = g \frac{\sin \alpha_y \cos^2 \alpha_x}{\sin \varphi} \quad (35-3)$$

$$g_z = -g \cos \alpha_z$$

که $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ در شکل (۱-۳) نشان داده شده‌اند. کمی ساده‌سازی قبل از انجام انتقال لازم

است، در غیر این صورت جبر مسئله بسیار گسترده و طولانی خواهد بود. از این رو، اگرچه مقادیر

$\sin \alpha_x$ و $\sin \alpha_y$ کوچک نیستند، ولی حاصل ضرب این دو مقدار ناچیز می‌باشد:

$$\sin \alpha_x \sin \alpha_y \approx \sin^2 \alpha_x \approx \sin^2 \alpha_y \approx 0 \quad (36-3)$$

این تقریب منجر به یک خطای کوچک (<3%) می‌شود، در صورتی که $|\alpha_x|, |\alpha_y| < 10^0$.

در نتیجه از معادله (۳۶-۳) می‌توان دریافت:

$$\sin \varphi = 1; \quad \cos \varphi = 0 \quad (37-3)$$

براساس این تقریب‌ها و معادله (۳۳-۳) می‌توان نوشت:

$$\tilde{x} = x \cos \alpha_x + z \tan \alpha_x \cos \alpha_z \quad (38-3)$$

$$\tilde{y} = y \cos \alpha_y + z \tan \alpha_y \cos \alpha_z$$

بنابراین متغیرهای وابسته انتقال یافته برابر می‌شود با:

$$h = \frac{d}{\cos \alpha_z} \quad (39-3)$$

$$\tilde{u} = \bar{u} \cos \alpha_x$$

$$\tilde{v} = \bar{v} \cos \alpha_y$$

که در آن h عمق جریان بصورت قائم و \tilde{u}, \tilde{v} سرعت در جهت x, y هستند. همچنین با توجه به معادله (38-3) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \alpha_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tan \alpha_x \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos \alpha_y \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tan \alpha_y \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (40-3)$$

وجود مشتق‌هایی در جهت \tilde{z} نامطلوب می‌باشد، چون ایده اساسی حذف بعد مکانی از مسئله است. به‌هرحال می‌توان نشان داد، که عبارت‌هایی مانند $\partial/\partial \tilde{z}$ $\tan \alpha_x \cos \alpha_z$ از مرتبه $\sin^2 \alpha_x$ بوده و بنابراین قابل چشم‌پوشی است. با اعمال معادلات (35-3)، (38-3)، (39-3) و (40-3) در معادلات (9-3)، (30-3)، و (31-3)، و ساده‌سازی و حذف علامت \sim عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh)$$

$$= gh \left[\cos \alpha_x S_{o_x} - (\cos \alpha_x \cos \alpha_z)^2 \frac{\partial h}{\partial x} - S_{f_x} \right] \quad (41-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h)$$

$$= gh \left[\cos \alpha_y S_{o_y} - (\cos \alpha_y \cos \alpha_z)^2 \frac{\partial h}{\partial y} - S_{f_y} \right]$$

که در آن:

$$S_{o_x} = \sin \alpha_x \quad S_{o_y} = \sin \alpha_y$$

$$S_{f_x} = \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{(C \cos \alpha_z)^2 h} \quad S_{f_y} = \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{(C \cos \alpha_z)^2 h} \quad (42-3)$$

برای شیب‌های کم کف کانال، معادله (41-3) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad (43-3)$$

که در آن:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix} \quad (44-3)$$

$$; F = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{o_x} - S_{f_x}) \\ -gh(S_{o_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix}$$

و (uh) و (vh) مومنتوم حمل شده در جهت x و y می‌باشد. اگر برای محاسبه ترم‌های اصطکاک به جای معادله شزی از معادله مانینگ استفاده شود:

$$S_{f_x} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{C_0^2 h^{1.33}} \quad S_{f_y} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{C_0^2 h^{1.33}} \quad (45-3)$$

که در آن n , ضریب مانینگ و $C_0 = a$, ثابت ابعادی ($C_0 = 1$) برای سیستم اندازه گیری SI و $C_0 = 1.49$ برای سیستم‌های متعارف) برچسب متغیرهای اولیه جریان، h, v, u , معادلات حاکم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$V_t + P_x + R_y + T = 0 \quad (46-3)$$

که در آن:

$$V = \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} uh \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \\ uv \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} vh \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 + gh \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(S_{o_x} - S_{f_x}) \\ -g(S_{o_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix} \quad (47-3)$$

برای چندی از روش‌های عددی ضروری است تا معادلات به شکل غیر بقایی باشد، شکل غیر

بقایی معادلات (43-3) بصورت زیر می‌باشد:

$$U_t + AU_x + BU_y + S = 0 \quad (48-3)$$

که در آن A و B ژاکوبین‌های E و F می‌باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (49-3)$$

به طور مشابه شکل غیر بقایی معادله‌های (3-47) نیز بصورت زیر است:

$$V_t + GV_x + HV_y + T = 0 \quad (50-3)$$

که در آن:

$$G = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix} \quad (51-3)$$

ماتریس‌های A ، B ، G و H در معادله‌های (3-49) و (3-51) ویژگی مهمی دارند، که بنابر آن

مقادیر ویژه یا جهت‌های مشخص آن‌ها برابر و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A \text{ and } G \begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases} \quad B \text{ and } H \begin{cases} w_1 = v \\ w_2 = v + c \\ w_3 = v - c \end{cases} \quad (52-3)$$

که در آن c سرعت موج است ($c = \sqrt{gh}$).

شکل بقائی معادلات (3-43) و (3-46) در مقایسه با شکل غیر بقائی آن این برتری را دارد که

متغیرهای جریان را بهتر نگهداری می‌کند. در هر حال بایستی توجه داشت که معادلات (3-3)

(3-4) و (3-46) بدلیل وجود بردارهای S و T به طور کامل به شکل بقائی نمی‌باشند. وقتی

ترم انتشار صفر نباشد، به عنوان یک چشمه یا چاه عمل می‌کند.

۳-۳- بازبینی کارهای انجام شده در ارتباط با SWE

۳-۳-۱- توسعه حل کننده جریان SWE

حرکت غیردائمی جریان‌های سطح آزاد در کانال‌ها بوسیله یک دستگاه مختصات بیان می‌گردد که توسط دانشمند فرانسوی سن-ونانت^۱ در سال ۱۸۷۱ ارائه شده است. معادلات SWE یک بعدی یا به عبارت دیگر معادلات سن-ونانت و معادلات SWE دو بعدی را می‌توان برای حل جریان‌های غیردائمی متغیر سریع (RVF) به کار برد. به علت مشخصات غیر خطی معادلات راه حل‌های تحلیلی فقط محدود به موارد خاصی می‌باشد (زوپوو و رابرتس، ۲۰۰۳). این معادلات را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی قوی حل کرد. تکنیک‌های عددی FD (فالکونر، ۱۹۸۰؛ گارسیا و کاهویتا، ۱۹۸۶؛ فنما و چاوودری، ۱۹۸۶ و ۱۹۸۷ و ۱۹۹۰؛ مولس و چاوودری، ۱۹۹۵؛ آبت و مین، ۱۹۹۸)، FV (پان و چنگ، ۱۹۹۳؛ آلکروود و گارسیا-ناوارو، ۱۹۹۳؛ ژائو و همکارانش، ۱۹۹۴ و ۱۹۹۶؛ آناستازیو و چان، ۱۹۹۷؛ مینقام و کاوسون، ۱۹۹۸؛ اسلیق و همکارانش، ۱۹۹۸؛ بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۰؛ سندرز، ۲۰۰۱؛ بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۲؛ اردوران و همکارانش، ۲۰۰۲؛ لوک، ۲۰۰۲؛ بردفورد و سندرز، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۵؛ یوون و کانگ، ۲۰۰۴؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷) و FE (آکانبی و کاتاپودز، ۱۹۸۸؛ وانگ و لیو، ۲۰۰۵؛ ما و همکارانش، ۲۰۰۷) برای حل SWE مورد استفاده قرار گرفته است.

به طور کلی مدل‌های هیدرولیکی حاضر، بویژه بسته‌های نرم‌افزاری بر اساس روش‌های FD پایه گذاری شده است. همچنین غالباً در مدل‌های FD، فرمول بندی جابجا شده^۲ ترجیح داده می‌شود (توران، ۲۰۰۸). روش FD بر اساس مش‌های سازمان یافته می‌باشد در حالیکه در مدلسازی مرزهای غیر یکنواخت این روش می‌تواند منشأ تولید نتایج غیردقیق و ناپایداری‌هایی باشد (مینقام و کاوسون، ۱۹۹۸). استفاده از مختصات منحنی‌الخط می‌تواند بر این مسئله غلبه کند که در پی آن معادلات را

¹ Saint- Venant

² Staggered Formulation

نیز می‌بایستی به دستگاه مختصات منحنی الخط انتقال داد که این امر دستگاه معادلات را پیچیده تر خواهد کرد.

روش FV که فرم انتگرالی معادلات SWE را حل می‌کند، می‌تواند هم در شبکه‌های سازمان یافته و هم در شبکه‌های بی‌سازمان عملکرد بهتری داشته باشد. این روش همانا می‌تواند به راحتی ناپیوستگی‌های ناشی از پایستاری و شکل‌های انتگرالی آنها را مدل کند، در حالیکه روش FD نیاز به تمهیدات ویژه‌ای برای موارد مذکور دارد. ویی و همکارانش (۲۰۰۶) اعلام کردند که روش FV مزیت حل فرم انتگرالی شکل غیر خطی معادلات SWE را به عنوان یک روش کاملاً پایستار، دارد. اصولاً روش حجم محدود سادگی روش FD با انعطاف پذیری روش FE را ترکیب می‌کند. (مینقام و کاووسن، ۱۹۹۸). از آنجاییکه روش FV برای محاسبه متغیرهای نامعلوم در مرکز و یا رئوس سلول‌ها، شارها را در لبه حجم‌های کنترل حل می‌کند (مینقام و کاووسن، ۱۹۹۸؛ لوک، ۲۰۰۲؛ نمین و همکارانش؛ ۲۰۰۴)، از خصوصیات مهم جریان انتقالی^۱ که قابل کاربرد در جریان‌های لزج می‌باشد، استفاده می‌کند. روش FE پیچیده‌تر بوده و از نظر محاسباتی غیر اقتصادی‌تر از روش‌های FD و FV می‌باشد. همانا نشان داده شده است که روش FE نوسانات بسیار زیادی را در خلال مدل‌سازی شارهای لزج ایجاد می‌کند (وانگ و لیوو، ۲۰۰۵).

روش مک کورمک یک روش صریح دو مرحله‌ای به صورت پیش‌بینی کننده - تصحیح کننده می‌باشد و هم از نظر زمانی و هم از نظر مکانی دارای دقت مرتبه دوم بوده و می‌تواند جریان‌های زیربحرانی و فوق بحرانی را مدل کند (توران، ۲۰۰۸). روش گابوتی^۲ که یک نوع گسترش یافته از روش لامبدا^۳ و یک روش صریح می‌باشد، می‌تواند هر دوی جریان‌های زیر بحرانی و فوق بحرانی را مدل کرده و شامل دو مرحله پیش‌بینی کننده و یک مرحله تصحیح کننده برای گام زمانی می‌باشد (

¹ Convective Flow

² Gabuti Scheme

³ Lambda Scheme

توران، ۲۰۰۸). روش بیم و وارمینگ^۱ (BW) یک روش ضمنی بوده و از ویژگی‌های مطلوب روش ADI^۲ بهره می‌برد (توران، ۲۰۰۸). با توجه به مقایسات انجام شده توسط فنما و چاوودری (۱۹۸۹ و ۱۹۹۰) مشخص شده است که روش BW منجر به یک سری دیفیوژن‌های مصنوعی می‌شود، در حالیکه روش‌های مک کورمک و گابوتی نمی‌توانند مسائل شکست سد سخت را مدل کنند و برای کنترل نوسانات نیاز به یک ویسکوزیته مصنوعی دارد. هر دو روش گابوتی و BW بر اساس فرمول بندی مشخصه‌ای SWE می‌باشند. در هر دوی این روش‌ها، تفاضل زمانی بر اساس علامت جهت‌های مشخصه (مقادیر ویژه) ماتریس ژاکوبین از فرمول بندی مرکزی به یک فرمول بندی آپویندی تغییر می‌یابد (توران، ۲۰۰۸). فنما و چاوودری (۱۹۸۷) اعلام کرده‌اند که روش گابوتی قادر به شبیه‌سازی جریان زیربحرانی می‌باشد اما سرعت موج را با گام‌های ناپیوسته جزئی تسخیر می‌کند. تی سنگ (۱۸۹۹) روش مک کورمک را با یک فرمول بندی TVD^۳ تغییر می‌دهد تا این نوسانات برطرف گردد. روش FD پریسمن و آبوت-ایونسکو (آبوت و مین، ۱۹۹۸) مشخص کرد که برای مدل کردن موج‌های ضربه‌ای به صورت مناسب نیاز به تمهیدات خاصی می‌باشد (اردوران و همکارانش، ۲۰۰۲).

معادلات SWE از نوع هایپربولیکی و غیر خطی می‌باشند. جواب این نوع معادلات عبارت است از انتشار موج در هر نقطه. معادلات با نوشتن شار به شکل تابعی از ماتریس ژاکوبین، به حالت شبه خطی تبدیل می‌شود. در صورتی که این ماتریس ژاکوبین قادر به قطری شدن به وسیله مقادیر ویژه واقعی باشد، خاصیت هایپربولیکی سیستم ارضا می‌شود (لوک، ۲۰۰۲). این مقادیر ویژه سرعت موج را نمایش می‌دهد.

مشخص شده است که روش‌های نوع آپویندی قادر به حل مسائل با ناپیوستگی‌هایی می‌باشد (یینگ و همکارانش، ۲۰۰۴). روش‌های آپویندی می‌تواند هم از روش انشعاب بردار شار^۴ (FVS) و هم

¹ Beam and Warming Scheme

² Alternate Direction Implicit

³ Total Variation Diminishing

⁴ Flux Vector Splitting

از روش انشعاب تفاضل شار^۱ (FDS) استفاده کند (لای و همکارانش، ۲۰۰۵). روشهای مذکور تکنیکهای مرتبط با آپویند معمولی هستند. روش FVS از انشعاب شارها و روش FDS از تفاضل شارها استفاده می‌کند. در روش‌های آپویندی اطلاعات مربوط به هر متغیر از جهتی که اطلاعات به محل مورد نظر می‌رسد بدست می‌آید (لوک، ۲۰۰۲). مسئله با محاسبه موج در حال حرکت به سمت چپ یا راست حل می‌شود. جریانی که شامل تغییرات ناگهانی می‌باشد، را می‌توان با روش FV با حل مسئله ریمان در فصل مشترک سلول‌ها، مدل‌سازی کرد (مینقام و کاووسن، ۱۹۹۸). حل کننده‌های ریمان به طور گسترده‌ای برای مدل کردن جریان در گذشته مورد استفاده قرار گرفته است (آلکروود و همکارانش، ۱۹۹۲؛ آمبروسی، ۱۹۹۵؛ وازکوئز و سندن، ۱۹۹۹؛ سندرز، ۲۰۰۱؛ گوتال و ماورل، ۲۰۰۲؛ گالوئت و همکارانش، ۲۰۰۳؛ زوپوو و رابرتز، ۲۰۰۳؛ سندرز و همکارانش، ۲۰۰۳؛ راجرز و همکارانش، ۲۰۰۳).

مسئله ریمان یک مسئله مقدار اولیه با یک ناپیوستگی که دو حالت را در یک مبدأ جدا می‌کند، بیان می‌کند (فراکارولو و تورو، ۱۹۹۵). گادونو (۱۹۵۹) یک روش FV آپویندی را بر اساس FDS برای حل مسئله ریمان در فصل مشترک حجم کنترل ارائه داده است (راجرز و همکارانش، ۲۰۰۳). مشخص شده است که روش FVS پیچیده‌تر از روش گادونو FDS می‌باشد (پنگ و همکارانش، ۲۰۰۴). به علت دشواری حل دقیق مسئله ریمان، حل کننده‌های تقریبی ریمان^۲ توسط روو (۱۹۸۱)، ون لیر (۱۹۷۷ و ۱۹۸۲)، آشر و سالومون (۱۹۸۲)، و HLL (هارتن و همکارانش، ۱۹۸۳) توسعه داده شدند. روش روو برای محاسبه ماتریس ژاکوبین از حالت میانگین Roe که در آن میانگین متغیرهای پایستار که در مرکز سلول‌ها واقع شده است استفاده می‌کند (روو، ۱۹۸۱). زوپوو و رابرتس (۲۰۰۳) روش‌های صریح متعددی را برای مسائل شکست سد با استفاده از چند روش FD مقایسه کرده‌اند. ایشان به این نتیجه رسیدند که حل کننده‌های ریمان نسبت به روش‌های FD دقیقتر و قوی‌تر

¹ Flux Difference Splitting

² Approximate Riemann Solvers

هستند. یکی از نقاط ضعف حل کننده ریمان خطی شده^۱ این است که تنها شامل ناپیوستگی هاست و نه موج‌های منفی^۲. بنابراین برای مدل کردن شرایط بحرانی نیاز به ساخت یک انتروپی می‌باشد. روش‌هایی که توسط هارتن (۱۹۸۳)، لوک (۲۰۰۲) و براوفو و همکارانش (۲۰۰۴) ارائه شده می‌تواند برای ساختن شرایط جدا کننده انتروپی بکار گرفته شود. همانطور که توسط بگنودلی و سندرز (۲۰۰۷) نتیجه‌گیری شد، مدل‌های FV می‌تواند جریان‌های زیربحرانی، فوق‌بحرانی و گذاربحرانی^۳ را به طور دقیق و بدون هیچگونه نوسان ناگهانی پیش‌بینی کند.

برای بدست آوردن روش‌های با مرتبه بالا، محدود کننده‌های شار^۴ یا محدود کننده‌های شیب^۵ می‌بایستی به همراه حل کننده‌های ریمان به کار گرفته شوند. محدود کننده‌های شار قیدهایی بر گرادیان توابع شار اعمال می‌کند در حالیکه محدود کننده‌های شیب محدودیت‌هایی بر گرادیان‌های متغیرهای پایستار اعمال می‌کند (زوپوو و رابرتز، ۲۰۰۳). همانگونه که توسط ژائو و همکارانش (۱۹۹۶) عنوان شد، روش مرتبه اول نمی‌تواند ناپیوستگی‌ها را به طور دقیق مدل کند. از اینرو ایشان پیشنهاد کردند برای بدست آوردن نتایجی با دقت مرتبه دوم از محدود کننده‌ها استفاده گردد. بدین ترتیب با استفاده روش‌های مرتبه دوم با محدود کننده‌ها از نوسانات ناگهانی جلوگیری شده و یکنواختی^۶ حفظ می‌شود.

اگر یکنواختی حفظ شود، روش‌های مورد استفاده را TVD می‌نامند (هیرش، ۱۹۸۸). ماکچيون و مورلی (۲۰۰۳) روش‌های مرتبه دوم TVD را با روش‌های مرتبه اول Roe را برای مسائل شکست سد بر روی بستر خشک مقایسه کرده اند و عنوان کرده‌اند که روش‌های TVD نتایج دقیق‌تری نسبت به روش‌های مرتبه اول Roe حاصل کرده است. معمول‌ترین نوع محدود کننده‌هایی که برای محدود

¹ Linearized Riemann Solver

² Rarefactions

³ Transcritical

⁴ Flux Limiters

⁵ Slope Limiters

⁶ Monotonocity

کردن نوسانات به کار گرفته می‌شوند عبارتند از Superbee، Minmond، MC^۱ (لوک، ۲۰۰۲)، محدود کننده یکنواخت دوبله^۲ (برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲) و MUSCL^۳ (ون لیر، ۱۹۷۳).

۳-۳-۲- حل کننده‌های ریمان

از آنجا که مدل‌های یک بعدی نتایج دقیقی در مدل کردن جریان در دشت سیلاب‌ها و برهم کنش جریان با سازه‌ها ارائه نمی‌دهد، مدلسازی دو بعدی برای مدل کردن جریان در شرایط پیچیده‌تر ضرورت پیدا می‌کند. در مسائل دو بعدی حل کننده ریمان Roe از معمول‌ترین حل کننده‌هایی است که برای توسعه مدل‌های مختلف استفاده شده است (توران، ۲۰۰۸).

روش HLL (تورو، ۱۹۹۷) سرعت موج را در سمت خشک وجه سلول برای ردیابی جبهه در حال حرکت سطح آب تغییر می‌دهد (ویی و همکارانش، ۲۰۰۶). فراکارولو و تورو (۱۹۹۵)، تورو (۱۹۹۷)، دلیس و همکارانش (۲۰۰۰)، والیانی و همکارانش (۲۰۰۲) و کالی و همکارانش (۲۰۰۳) بیان کرده‌اند که در مدل‌سازی جریان بر روی بستر خشک، روش HLL جواب‌های دقیق‌تری نسبت به روش Roe حاصل می‌کند. عملکرد روش‌های بر اساس تئوری مشخصه‌ها، FVS، FDS و Osher (ژائو و همکارانش، ۱۹۹۶؛ جین و فرید، ۱۹۹۷؛ لوک، ۲۰۰۲) با روش مرتبه اول توسط ژائو همکارانش (۱۹۹۶) مقایسه شده است. اگرچه نتایج مشابه بوده است، مشخص شده است که روش Osher دقیق‌ترین روش می‌باشد. عمده‌ترین اختلاف روش Osher انتخاب مسیر انتگرال‌گیری می‌باشد (ژائو و همکارانش، ۱۹۹۶). به هر حال بر روی بسترهای غیر صاف کانال روش FDS پایدارتر به نظر می‌رسد. لای و همکارانش (۲۰۰۵) یک روش FVS را برای حل شارها و مقایسه نتایج با نتایج مشابه Osher، Roe و HLL توسعه دادند. طبق یافته آنها روشی که آنها برای مسائل نمونه سه نوع شکست سد مختلف استفاده کردند، نتایج دقیق‌تری نسبت به روش‌های دیگر حاصل کرده است. وانگ و لیو (۲۰۰۵) عملکرد روش‌های Osher و Roe را در پرش هیدرولیکی مایل بر روی بستر خشک مقایسه

¹ Monotonized Central Difference Limiter

² Double Minmond Limiter

³ Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws

کردند و دریافتند که هر دو روش نتایج مشابهی حاصل می‌کنند. به هر حال روش Osher زمان محاسباتی کمتری نیاز داشت. دلیس و همکارانش (۲۰۰۰) روش‌های LF^1 ، Roe و HLLC (لوک، ۲۰۰۲) را برای مسائل شکست سد بر روی بستر کانال تر مقایسه کردند و نشان دادند که روش LF پراکنده‌گی بیشتری در جواب‌ها داشته و از این رو استفاده از حل کننده Roe را توصیه کردند.

محققین زیادی (آناستازیا و چان، ۱۹۹۷؛ تی‌سنگ، ۱۹۹۹؛ هابارد و گارسیا-ناوارو و وازکوئز-سندون، ۲۰۰۰؛ بروفائو و گارسیا-ناوارو، ۲۰۰۰؛ سندرز، ۲۰۰۱؛ بروفائو و همکارانش، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ لوک، ۲۰۰۲؛ اردوران و همکارانش، ۲۰۰۲؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۵؛ وانگ و لیو، ۲۰۰۵؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷؛ دلیس و همکارانش، ۲۰۰۷؛ موریلو و همکارانش، ۲۰۰۷؛ توران و وانگ، ۲۰۰۷ الف، و ۲۰۰۷ ب) برای مدل کردن موج‌های ضربه‌ای دو بعدی از حل کننده Roe استفاده می‌کنند. آناستازیا و چان (۱۹۹۷) از حل کننده با دقت مرتبه اول ریمان تقریبی Roe برای تخمین شارهای غیر لزج و لزج در فصل مشترک سلول‌های مثلثی استفاده کردند. آنها یک الگوریتم برای تقریب گرادیان شار توسعه دادند. اگر چه بعداً توسط وانگ و لیو (۲۰۰۵) مشخص شد که تقریب FV برای شارهای لزج، مناسب نمی‌باشد. ایشان بیان کردند که مدل FE این عبارت‌ها را بدون هیچ گونه پراکنده‌گی عددی حل می‌کند. ما (۲۰۰۷) از یک روش نود-مرکزی دوبعدی FV/FE برای همان هدف استفاده کرده است.

بروفاو و همکارانش (۲۰۰۴) برای مدل کردن موج‌های ضربه‌ای بر روی بسترهای با شیب معکوس و خشک از حل کننده ریمان تقریبی Roe بر روی شبکه مثلثی به همراه الگوریتم تر و خشک شدن، استفاده کرده اند. موریلو و همکارانش (۲۰۰۷) از حل کننده دو بعدی Roe برای نشان دادن تأثیر عبارت منشأ بر روی دقت روش استفاده کردند. سندرز (۲۰۰۱)، برادفورد و سندرز (۲۰۰۲ و ۲۰۰۵) و بگنودلی و سندرز (۲۰۰۶ و ۲۰۰۷) از حل کننده Roe دو بعدی با دقت مرتبه دوم برای مدل کردن جبهه‌های تراخشک بر روی توپوگرافی نامنظم استفاده کردند. دلیس و همکارانش

¹ - Lax-Friedrichs

(۲۰۰۷) از حل کننده Roe مرتبه اول و دوم یک بعدی و دوبعدی برای مدل کردن مسائل شکست سد استفاده کرده‌اند. همچنین لولک (۲۰۰۲) به تفصیل در مورد کاربرد حل کننده Roe برای ناپیوستگی مطالعه کرده است. حل کننده Roe برای شبیه سازی انتقال ذرات در آبراهه‌ها نیز مورد استفاده قرار گرفته است (موریلو و همکارانش، ۲۰۰۵ و بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶).

تورو (۱۹۹۷)، مینقام و کاووسن (۱۹۹۸)، کاووسن و همکارانش (۱۹۹۹)، هوو و همکارانش (۲۰۰۰)، والیانی و همکارانش (۲۰۰۲)، ژائو و همکارانش (۲۰۰۱)، اردوران و همکارانش (۲۰۰۲)، کالفی و همکارانش (۲۰۰۳)، یوون و کانگ (۲۰۰۴) و والیانی و بگنودلی (۲۰۰۶) از روش HLL برای مدل‌سازی جریان بر روی بستر خشک استفاده کردند.

۳-۳-۳ - پیمایش زمان ۱

در مطالعات مربوط به تسخیر کننده‌های موج‌های ضربه‌ای^۱، روش‌های صریح نسبت به روش‌های ضمنی به طور گسترده‌تری مورد استفاده قرار گرفته است (زوپو و رابرتس، ۲۰۰۳). روش‌های از نوع گادونو به طور کلی با استفاده از اعداد کورانت^۲ کوچکتر از یک و بطور صریح برای مدل‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است (سندرز، ۲۰۰۱). ژائو و همکارانش (۲۰۰۱)، موریلو و همکارانش (۲۰۰۷) و برادفورد و سندرز (۲۰۰۲) از روش MUSCL_Hancock که شامل یک روش پیش‌بینی کننده و تصحیح کننده در زمان است، استفاده کردند. مینقام و کاووسن (۱۹۹۸)، سندرز (۲۰۰۱)، سندرز و همکارانش (۲۰۰۳)، برادفورد و سندرز (۲۰۰۵) و بگنودلی و سندرز (۲۰۰۶) نیز از پیمایش زمانی Hancock استفاده کردند. بگنودلی و سندرز (۲۰۰۶) با به کار بردن معادلات اولیه در گام پیش‌بینی کننده پیشرفت‌هایی در عامل زمان حاصل کردند. ایشان همچنین شارها را در گام تصحیح کننده با حل کننده Roe حل کرده‌اند. یوون و کانگ (۲۰۰۴) از یک روش رانگ کوتای^۴

¹ Time Marching

² Shock-Capturing

³ Courant Number

⁴ Runge-Kutta

TVD مرتبه سوم بهینه استفاده کردند، در حالیکه وانگ و لیو (۲۰۰۵) از یک روش رانگ کوتای
TVD مرتبه دوم سوم استفاده کردند.

لای و همکارانش (۲۰۰۵) از یک روش رانگ کوتای پیش بینی کننده - تصحیح کننده مطابق
هیرش (۱۹۸۸) استفاده کردند. پان و چنگ (۱۹۹۳) یک روش رانگ کوتای مرتبه چهار را برای
پیمایش زمانی در نظر گرفتند. نیازمندی گام زمانی برای پایداری بهتر را می توان با استفاده از شرایط
کورانت - فریدریش - لوی^۱ (CFL) بدست آورد (کورانت و همکارانش، ۱۹۵۲ و موریلو و همکارانش،
۲۰۰۷). بروفاو و همکارانش (۲۰۰۴) و وانگ و لیو (۲۰۰۵) از خصوصیات هندسی مانند محیط و
مساحت سلول مثلثی شکل برای تعیین گام زمانی استفاده کردند. به طور کلی برای پیدا کردن زمانی
که موج از مرکز سلول به لبه آن حرکت می کند، از سرعت موج ماکزیمم استفاده می شود (والیانی و
همکارانش، ۲۰۰۲؛ یوون و کانگ، ۲۰۰۴؛ ویی و همکارانش، ۲۰۰۶).

۳-۴ - شرایط مرزی

سلول های مرزی سلول هایی هستند که در سمت داخل مرزهای دامنه محاسباتی بوده و حداقل
یکی از اضلاع آنها بر روی مرز قرار گرفته باشد. تئوری مشخصه ها می تواند برای تعیین کردن عمق
آب و سرعت در سلول های مرزی مورد استفاده قرار گیرد. شرایط مرزی در لبه سلول های مرزی که از
مرکز سلول ها برون یابی شده اند، تخصیص داده می شوند. در مطالعه بروفاو و همکارانش (۲۰۰۲)،
شرایط مرزی در سلول های مرزی تخصیص داده می شود. شار در لبه سلول های مرزی با در نظر گرفتن
سلول های موهومی^۲ محاسبه می شود (برافو و همکارانش، ۲۰۰۴).

به طور کلی دو نوع شرایط مرزی قابل تعریف است، مرز بسته (مرز دیوار) و مرز باز که در آن
لازم است، عمق و سرعت یا دبی معلوم باشد. سرعت ها معمولاً به صورت محلی اعمال می شوند و
سپس به مختصات کارتیزین تبدیل می شوند تا بتوان در معادلات استفاده نمود. آناستازیا و چان

¹ Courant- Friedrichs- Lewy

² Ghost Cells

(۱۹۹۷) نیز توضیح مختصری از شرایط مرزی‌ای که می‌بایستی در مرزهای روش FV مورد استفاده قرار گیرند، ارائه داده‌اند.

۳-۳-۵- عبارت شیب بستر، پایستاری شار و توازن عبارت شیب

دامنه حل ممکن است شامل توپوگرافی نامنظم، پله، شیب معکوس، جزیره یا یک توپوگرافی کاملاً پیچیده داشته باشد. به منظور شبیه سازی شکست سد، موج‌های جزر و مدی و سیلابی بر روی این چنین توپوگرافی‌هایی، در SWE عبارت منشأ می‌بایستی با شیب زیرین و شیب اصطکاکی در هم آمیخته شود. مطالعات اخیر غالباً به جای شبیه سازی اثر تغییرات شدید تراز بستر، بر روی شبیه سازی گرادیان‌های تیز سطح تراز آب متمرکز شده است (نمین و همکارانش، ۲۰۰۴). وارد کردن عبارت منشأ تشکیل یک دستگاه معادلات پایستار غیر هموزن می‌دهد، از این رو می‌بایستی مسئله ریمان را برای تعیین جواب‌های چنین معادلاتی تغییر داد. روش‌های FV با عبارت منشأ توسط محققین بسیاری مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است (تورو، ۱۹۹۷؛ هابارد و بینس، ۱۹۹۷؛ برموز و همکارانش، ۱۹۹۸، تاجامن و کاهویتا، ۱۹۹۸؛ وازکوئز-سندون، ۱۹۹۹؛ هابارد و گارسیا-ناوارو، ۲۰۰۰؛ گارسیا-ناوارو و وازکوئز-سندون، ۲۰۰۰؛ ژائو و همکارانش، ۲۰۰۱، سندرز، ۲۰۰۱؛ بروفاو و گارسیا-ناوارو، ۲۰۰۲؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲؛ بینگ و همکارانش، ۲۰۰۴، تی‌سنگ، ۲۰۰۴، آودوس و بریستئو، ۲۰۰۵؛ محمدیان و همکارانش، ۲۰۰۵؛ وانگ و همکارانش، ۲۰۰۵؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۵؛ آریکو و همکارانش، ۲۰۰۷؛ دلیس و همکارانش، ۲۰۰۷).

اگر در موارد دائمی جواب بدست آمده از روش‌های عددی مشابه جواب‌های بدست آمده از حل دقیق باشد، گفته می‌شود که روش دارای پایستاری خصوصیت^۱ می‌باشد (برمودز و وازکوئز-سندون، ۱۹۹۴). برموز و وازکوئز-سندون (۱۹۹۴) یک روش دارای خاصیت C ارائه داده‌اند.

گرادیان سطح بستر به دو بخش گرادیان تراز بستر و گرادیان شار تقسیم می‌شود تا بتوان دستگاه هیپربولیک را ایجاد کرد، اما در توپوگرافی‌های نامنظم این عبارت‌ها همدیگر را متوازن نمی-

¹ C Property

کنند (راجرز و همکارانش، ۲۰۰۳). عبارات منشأ را می‌توان با گام‌های بخش بخش یا روش انشعاب عامل در روش عددی مورد استفاده قرار داد (تورو، ۱۹۹۷؛ هوو و همکارانش، ۲۰۰۰؛ لوک، ۲۰۰۲؛ اردوران و همکارانش، ۲۰۰۲؛ زویو و رابرتز، ۲۰۰۳). این روش که در آن SWE به دو قسمت تقسیم می‌شود، ابتدا قسمت هموزن معادله را حل نموده و سپس با در نظر گرفتن عبارت منشأ در سمت راست معادلات، متغیرهای پایستار را بروز می‌کند. این روش مزیت کاربرد روش‌های مرتبه دوم را دارد. به هر حال برای یک توپوگرافی نامنظم تعادل آب ساکن را حفظ نکرده و موج‌هایی غیر فیزیکی ایجاد می‌شود (آودس و بریستئو، ۲۰۰۵، آریکو و همکارانش، ۲۰۰۷). حرکت آب به سمت سلول‌های با ترازهای بالاتر، می‌تواند منجر به سرعت‌های زیاد جریان به سمت پایین شده و تولید ناپایداری کند (یوون و کانگ، ۲۰۰۴؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶).

گرادیان شیب برای یک سلول مثلثی را می‌توان با استفاده از تراز بستر رئوس، مرکز سلول‌های مجاور و یا همه نقاط شش‌گانه محاسبه کرد. یوون و کانگ (۲۰۰۴) از معادله صفحه استفاده کردند طوری که برای تعیین شیب بستر مرکز، از رئوس مثلث انتگرال گیری می‌نمود. در حالیکه بگنودلی و سندرز (۲۰۰۶) عبارت شیب مرکزی را تنها با استفاده از تراز سلول‌های مجاور محاسبه کردند. گسسته سازی مرکزگرای عبارت شیب وقتی که موج بر روی بستر ناصاف منتشر می‌شود دارای نقصان می‌شود. روش‌های مختلف متعددی برای حل این موضوع به کار گرفته شده‌اند (برمودز و وازکوئز، ۱۹۹۴؛ بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۲، راجرز و همکارانش، ۲۰۰۳؛ آودس و بریستئو، ۲۰۰۵؛ والیانی و بگنودلی، ۲۰۰۶). یک روش متوازن مطلوب با روش Roe یک بعدی توسط گالوئت و همکارانش (۲۰۰۳) ارائه شده است. در همان مطالعه یک معادله اضافی که تغییر در تراز بستر را تعریف می‌کند نیز در نظر گرفته شده است. لوک (۱۹۹۸) یک روش انتشار موج را ارائه داده است، هر چند آن روش تنها برای موارد شبه دائمی معتبر می‌باشد و نمی‌تواند برای شبکه‌های غیر سازمانی گسترش داده شود.

به منظور غلبه بر این مسئله و حفظ تعادل، از روش آپویند برای عبارت منشأ استفاده شده است (برمودز و وازکوئز، ۱۹۹۴؛ هابارد و گارسیا-ناوارو، ۲۰۰۰؛ بروفانو و همکارانش، ۲۰۰۴؛ دلیس و همکارانش، ۲۰۰۷). عبارت منشأ شیب بستر را می‌توان در لبه هر سلول بر حسب تصویر مقادیر ویژه به روش آپویند نوشت. در این روش عبارت شیب کلی بوسیله جمع زدن عبارات شیب که در هر لبه بدست آمده است، محاسبه می‌شود. این روش با دقت مرتبه اول انجام می‌گیرد. برای بدست آوردن دقت مرتبه بالا، تصحیحات با مرتبه بالاتری می‌بایستی اعمال شود، تا وقتی که عمق جریان در فصل مشترک سلول‌ها بازسازی می‌شود، شرایط توازن ارضا شده و می‌توان یک روش مرتبه دوم کامل را در محاسبه مقادیر بازسازی شده تراز بستر در لبه‌ها در محاسبات مربوط به شیب در نظر گرفته شود (هابارد و گارسیا-ناوارو، ۲۰۰۰؛ سی و همکارانش، ۲۰۰۶). بروفانو و همکارانش (۲۰۰۴) و سی و همکارانش (۲۰۰۶) عنوان کردند که در روش آپویند، شرایط دائمی در دامنه‌ای با شیب معکوس با دوباره تعریف کردن تراز بستر سلول‌های خشک، ارضا می‌شود.

روش آپویند دقیق و حفظ‌کننده توازن است. در هر حال توسط محققین دیگر مشخص شد که این روش پیچیده و از نظر محاسباتی گران می‌باشد (ژائو و همکارانش، ۲۰۰۱؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۵). ژائو و همکارانش (۲۰۰۱) بیان کردند که حتی اگر روش‌های با مرتبه بالاتر نیز استفاده گردد، روش مرکزگرا بر روی بسترهای غیر یکنواخت جواب دقیقی حاصل نمی‌کند. از این رو، ایشان برای غلبه بر این دشواری، روش SGM را تعریف کردند. در روش SGM بازسازی تراز سطح آب به جای عمق آب به کار گرفته شد، تا بدون ایجاد خطا در فصل مشترک سلول‌ها از ایجاد موج‌های پراکنده جلوگیری و حفظ شرایط آب ساکن برقرار شود (ژائو و همکارانش، ۲۰۰۱؛ سندرز ۲۰۰۱؛ ویی و همکارانش، ۲۰۰۶ و بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷). به کار بردن SGM می‌تواند با استفاده از نوع مرکزگرای عبارت منشأ، حالت دائمی را حفظ کند (ژائو و همکارانش، ۲۰۰۱؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲ و بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶). ویی و همکارانش (۲۰۰۶) نیز روش SGM را برای مسائل حرکت موج‌های طویل بکار برده‌اند.

برادفورد و سندرز (۲۰۰۵) روش آپویند را با روش SGM بر روی شبکه‌های مستطیلی یک بعدی، مقایسه کردند و دریافتند که روش آپویند برای جریان‌های زیر بحرانی یا فوق بحرانی پیوسته دائمی دقیق‌تر است. ایشان همچنین دریافتند که روش SGM برای جریان‌های ناپیوسته غیر دائمی دقیق‌تر است. روش SGM برای مدل‌های غیر دائمی دو بعدی از نظر محاسباتی و دقت به عنوان روش برتری اعلام شده است. آودس و بریستو (۲۰۰۵) یک روش پایستار جرم مشابه روش SGM ارائه دادند که در عین حال روشی متوازن نیز می‌باشد که در آن شرایط سطح آب ساکن نیز تضمین شده است. محمدیان و همکارانش (۲۰۰۵) روش SGM را با روش Nujic (نوجیک، ۱۹۹۵) با حل کننده Roe در آمیخته و برای مدل کردن نواحی نامنظم بر روی شبکه‌های غیر سازمانی، مورد استفاده قرار دادند. تی‌سنگ (۲۰۰۴) نشان داده است که در یک جریان ساکن^۱ روش TVD توازن را با استفاده از گرادیان سطح- به جای گرادیان عمق- ارضا می‌کند.

والیانی و بگنودلی (۲۰۰۶) شکل دیورژانسی عبارت شیب را با روش SGM بر روی سلول‌های چهار ضلعی به کار بردند و نشان دادند که در حالت دائمی حل دقیق را حفظ می‌کند. ایشان نتایج خود را با یک گسسته سازی مرکزگرا از عبارت شیب مقایسه کردند و نشان دادند که روش آنها پایدارتر و دقیق‌تر است.

۳-۳-۶- عبارت منشأ اصطکاک

عبارات منشأ شیب غالباً با استفاده از فرمول مانینگ^۲ ارزیابی می‌گردد (بروفاو و گارسیا- ناوارو، ۲۰۰۰؛ یوون و همکارانش، ۲۰۰۴؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶). هنگام انتگرال گیری از عبارات منشأ اصطکاکی می‌توان از روش‌های گسسته‌سازی صریح و ضمنی استفاده کرد. یوون و کانگ (۲۰۰۴) و بروفاو و همکارانش (۲۰۰۴) از یک رویکرد نیمه ضمنی برای عبارت اصطکاک استفاده کردند.

^۱ Quiescent Flow

^۲ Manning's Formula

۳-۳-۷- عملکرد خشک شدگی و زیر آب رفتگی (ترشدگی)^۱

از دیگر مسائل چالش برانگیز در حوزه حل مسائل شکست سد، وجود بستر خشک در ابتدا یا خلال محاسبات است. چنین شرایطی سبب می‌شود شبیه سازی جریان به حل یک مسئله با ناحیه حل متغیر با زمان منتهی گردد که در آن مرز متحرک (زبانه موج) بر روی بستری خشک انتشار می‌یابد. نظیر چنین مسئله‌ای در مطالعات هیدرودینامیک سواحل هنگام شبیه سازی بالاروی امواج بلند^۲ بر روی ساحل خشک نیز موضوعیت پیدا می‌کند که به عنوان نمونه به مطالعه مهدوی و طالب بیدختی (۲۰۰۹-ب) می‌توان اشاره نمود. یک راه حل ساده و مرسوم برای گنجاندن بستر خشک در مدل عددی مبتنی بر معادلات آب کم عمق و جلوگیری از بروز عمق منفی جریان در دامنه حل، اختصاص لایه‌ای نازک از سیال در نقاط خشک دامنه محاسباتی است (مکچیون و مورلی، ۲۰۰۳؛ وانگ و همکارانش، ۲۰۰۰؛ بلوس و ساکاس، ۱۹۸۷).

مدلسازی عددی جریان بر روی زمین‌های خشک یا دارای عمقی خیلی ناچیز می‌تواند باعث ایجاد سرعت‌های زیاد شود چون سرعت‌ها با تقسیم کردن دبی جریان به مساحت کم جریان بدست می‌آیند. همانطور که توسط تی چامن و کاهویتا (۱۹۹۸) بیان شد، روش مثبتی که عمق مثبت را تحت محدودیت‌هایی پیش بینی می‌کند، یک امر بنیادی می‌باشد. روش FV بر روی شبکه‌های ثابت می‌تواند سلول‌های تر و خشک را شبیه‌سازی کند (سی و همکارانش، ۲۰۰۶). جریان بر روی زمین خشک به عنوان مسائلی با جبهه تر و خشک متحرک تعریف می‌شوند (داد، ۱۹۹۸؛ هوریت، ۲۰۰۴). به منظور تشخیص سلول‌های تر از سلول‌های خشک لازم است یک قید تلورانس برای عمق آب تعریف شود (سندرز، ۲۰۰۱؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲؛ بروفو و همکارانش، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ والیانی و بگنودلی، ۲۰۰۶؛ ویی و همکارانش، ۲۰۰۶؛ سی و همکارانش، ۲۰۰۶). در فرمول مانینگ، شیب اصطکاکی با تقسیم یک عبارت جزئی به یک تابع عمق آب که می‌تواند سرعت‌های زیادی را حاصل

¹ Wet/Dry Treatment

² Long Wave Run- up

کرده و منجر به ناپایداری گردد، تعیین می‌گردد (برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲). و به خاطر این مسئله مقدار تلورانس در سطوح دارای اصطکاک حساس می‌باشد.

اگر عمق آب در فصل مشترک سلول‌ها کوچکتر از حد تلورانس باشد، سرعت‌ها می‌تواند برابر با صفر قرار داده شود، و عمق‌ها به همان مقدار باقی بماند تا پایداری جرم برقرار شود (بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ سی و همکارانش، ۲۰۰۶). هر چند، تی‌چامن و کاهویتا (۱۹۹۸) عنوان کرده‌اند که صفر کردن سرعت در سلول‌های خشک ممکن است، حین حرکت سریع جبهه تر و خشک خطاهایی را ایجاد کند. تعدادی از محققین مقدار تلورانس را برای یک نود تعریف کردند و سلول‌ها تر نامیدند هنگامیکه همه نودها تر باشند، نیمه تر هنگامیکه یکی از نودها خشک باشد، و خشک است وقتی که همه نودها خشک باشند (برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶). اگر یک سلول خشک باشد معادلات شار معمولاً برای آن سلول حل نمی‌شود. به هر حال اگر یک سلول تر یا نیمه تر باشد، پس از مقایسه سطح با تراز ارتفاعی فصل مشترک، معادلات می‌تواند حل شود. جورج (۲۰۰۷) توضیح داده است که چطور می‌توان با حل کننده‌های ریمان حالات خشک را اعمال کرد.

تعدادی روش‌های FD یا FE از مرزهای متحرک در مرزهای تر و خشک استفاده می‌کند، اما از آنجائیکه در این روش در هر گام زمانی نیاز به تولید دوباره شبکه می‌باشد، باعث افزایش زمان شبیه سازی می‌شود. همچنین لازم است الگوریتم‌های ویژه‌ای اعمال گردد تا از پایداری جرم و مومنتوم اطمینان حاصل شود. روش‌های FV جرم و مومنتوم را در هر ناپیوستگی‌ای بصورت محلی و بدون هیچگونه نوسانی پایستار می‌کنند (برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲). تراز سطح آزاد که برابر مجموع تراز بستر و عمق آب است، وقتی که یکی از نودها خشک باشد مقدار تراز سطح صحیح را نشان نمی‌دهد (توران، ۲۰۰۸). این موارد می‌بایستی با دقت بالایی اعمال شوند تا پایداری جرم را بتوان برقرار کرد. دو راه حل برای نشان دادن بستر مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی تغییرات پیوسته واقعی است (بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۷) و دیگری نمایش پله‌ای است (بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۲). در مورد اول سلول می‌تواند خشک، نیمه تر یا تر باشد، اما در مورد دوم هر سلول فقط می‌تواند یا خشک باشد یا تر

باشد. در بستر شیبدار روش‌های مرتبه اول عمق آب را با فرض یک ثابت در داخل سلول، در فصل مشترک سلول محاسبه می‌کند و از یک نمایش پله‌ای برای بستر کف استفاده می‌کند، در حالیکه روش‌های مرتبه دوم به معمولاً تراز سطح آب را با توابع خطی بازسازی می‌کنند و از یک نمایش واقعی برای بستر کف استفاده می‌کنند. در فصل مشترک تر و خشک تراز سطح آب بازسازی شده باید بزرگتر از تراز بستر فصل مشترک باشد، در غیر اینصورت شارها در لبه‌ها محاسبه نمی‌شود.

ژائو و همکارانش (۱۹۹۴) برای جدا سازی سلول‌های خشک و نیمه تر از سلول‌های تر، از دو مقدار تلورانس استفاده کردند. در مطالعه ایشان هیچکدام از معادلات برای سلول‌های خشک حل نمی‌شود. برای سلول‌های نیمه تر فقط شار جرمی حل می‌شود و شارهای مومنتوم برابر با صفر گذاشته می‌شود. مطالعه ژائو یکی از مطالعات محدودی بود که از بازسازی مرتبه دوم برای عمق آب استفاده کرده و برای زمین‌های ناهموار نیز آزمایش شده است. تعدادی از محققان با مقایسه عمق آب در مرکز سلول با مقدار تلورانس، یک سلول را خشک یا تر طبقه‌بندی می‌کردند (بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ سی و همکارانش، ۲۰۰۶). هوریت (۲۰۰۴) سه نوع المان را تعریف کرده است که عبارتند از المان تر شونده جزر و مدی، المان خشک شونده و المان شکست سد. هدف وی از این تعریف بررسی جبهه‌های تر و خشک در حل کننده بوده است. که البته برای جریان‌های فوق بحرانی طراحی نشده بود. این محقق با حفظ پایستاری حجم کلی در مرزهای تر و خشک، آب را از سلول‌های تر گرفته و بین سلول‌های خشک توزیع کرد.

محاسبه جبهه‌های تر و خشک در توپوگرافی‌های ناهموار یک امر چالش برانگیز است (دلیس و همکارانش، ۲۰۰۷). انتشار جریان در فصل مشترک تر و خشک با گرادیان به سمت پایین را می‌توان با در نظر گرفتن یک مقدار تلورانس برای عمق آب و حل مسئله ریمان به راحتی انجام اعمال کرد (بروفاو و همکارانش، ۲۰۰۴). به هر حال روند زیر آب رفتن و خشک شدگی بر روی شیب‌های معکوس می‌تواند منجر به حرکت خود به خود آب به سمت سلول‌های مجاور خشک شود و به خاطر عدم توازن بین شار و عبارت منشأ، حفظ شرایط هیدرواستاتیکی را دشوار سازد (برادفورد و سندرز،

۲۰۰۲؛ بروفانو و همکارانش، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ سی و همکارانش، ۲۰۰۶؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶). بعضی از محققین از دیوارهای صلب برای این منظور استفاده می‌کنند و سرعت‌ها را در فصل مشترک برابر صفر قرار می‌دهند. در هر حال بروفانو و همکارانش (۲۰۰۴) نشان دادند که تنها صفر کردن سرعت‌ها ممکن است باعث پرش‌های غیر دقیق آب به سلول‌های مجاور شود. بروفانو و همکارانش (۲۰۰۲)، که گسسته سازی آپویندی را برای عبارت منشأ به کار بردند، این حالت را شرایط توقف نامیده‌اند و تراز بستر را دوباره تعریف کردند. سی و همکارانش (۲۰۰۶) از روش بروفانو و همکارانش (۲۰۰۲) استفاده کردند، اما ایشان شرایط بازتاب را در این حالت تعریف کردند. در توسعه برنامه‌های عددی عمق آب در هر سلول از نظر عمق منفی کنترل شده و با تصحیح کردن شارها و حجم در سلول‌های مجاور در هر گام زمانی، ساخته می‌شود (بروفانو و همکارانش، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲؛ بگنودلی و سندرز، ۲۰۰۶)

۳-۳-۸ - محدود کننده‌ها

همانطور که در بخش قبلی ذکر گردید، روش‌های آپویندی گادونو از نظر مکانی و زمانی از مرتبه اول می‌باشند. متغیرهای پایستار مرکز سلول‌ها در فصول مشترک آنها برای روش دقت مرتبه دوم با استفاده از توابع خطی یا گرادیان‌ها، بازسازی می‌شوند. به منظور جلوگیری از ایجاد نوسانات پراکنده و حفظ هماهنگی، شیب‌ها یا گرادیان‌ها محدود می‌شوند. مطالعات انجام شده توسط بروفانو و گارسیا-ناوارو (۲۰۰۰)، جی‌ها و همکارانش (۱۹۹۵) و لای و همکارانش (۲۰۰۵) روش‌های مرتبه اول و دوم را برای چندین مورد شکست سد مقایسه کردند.

روش‌های محدود کننده مختلفی جهت جلوگیری از نوسانات پراکنده اعمال شده‌اند. علاوه بر روش‌های محدود کننده‌ای که در بخش ۲-۲-۱ ارائه شد، روش‌های تفاضل مرکزی محدود شده^۱ (هابارد، ۱۹۹۹)، گرادیان محدود شده ماکزیمم^۲ از باتن و همکارانش (۱۹۹۶) و روش‌های محدود

^۱ Limited Central Differencing (LCD)

^۲ Maximum Limited Gradient (MLG)

کننده چند بعدی^۱ از جاواهار و کامات (۲۰۰۰) و یک روش محدود کننده‌ای که توسط پان و چنگ (۱۹۹۳) ارائه شده است، در دامنه‌های دوبعدی استفاده می‌شود. گرادیان یک سلول را می‌توان بوسیله متغیرهای پایستار (عمق آب یا دبی‌ها) در مرکز یا نودهای اطراف تخمین زد. تقریباً در غالب مطالعات انجام شده در این زمینه، متغیرها در مرکز سلول‌های مجاور مورد استفاده قرار می‌گیرند (بروفاو و گارسیا-ناوارو، ۲۰۰۰؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲). اعمال روش MUSCL بر روی شبکه‌های بی‌سازمان به طور گسترده مورد مطالعه قرار نگرفته است (اسلیق و همکارانش، ۱۹۹۸؛ نمین و همکارانش، ۲۰۰۴؛ فرازائو و گوینوت، ۲۰۰۷). اگر چه مطالعات زیادی در خصوص روش MUSCL بر روی شبکه های سازمان یافته انجام شده است (ژائو و همکارانش، ۲۰۰۱؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۱؛ والیانی و همکارانش، ۲۰۰۲؛ برادفورد و سندرز، ۲۰۰۲). استفاده از برون‌یابی‌های از نوع MUSCL در شبکه‌های غیر سازمانی در سلول‌های به شدت نامنظم نتایج مطلوبی را ارائه نمی‌دهد (یوون و کانگ، ۲۰۰۴). سوارز-فرازائو و گوینوت (۲۰۰۷) یک بردار ویژه بر اساس روش ساخت خطی ارائه داده و روششان را با روش MUSCL در یک کانال با خم ۹۰ درجه مقایسه کردند و دریافتند که روش آنها سریعتر از روش MUSCL می‌باشد.

در مطالعاتی که توسط هابارد (۱۹۹۹)، بروفاو و گارسیا-ناوارو (۲۰۰۰) و بگنودلی و سندرز (۲۰۰۶) انجام شد، عنوان شده است که چهار نوع گرادیان عملگر متفاوت در روش MLG به کار گرفته شده و گرادیان ماکزیمم به صورت اتوماتیک انتخاب شده است. آناستازيو و چان (۱۹۹۷) با استفاده از انتگرال‌گیری مرزی که از مرز سلول‌های مجاور عبور می‌کند، گرادیان سلول را تخمین زده اند. ایشان با روشی که پان و چن (۱۹۹۳) ارائه دادند، گرادیان سلول را با استفاده از متوسط وزن دار چهار شیب مختلف بهبود دادند. ایشان همچنین با استفاده از محدود کننده‌های سوپر بیی و مین مند که توسط بارث و چپرسن (۱۹۸۹) ارائه شد، جواب‌ها را جهت جلوگیری از ظهور هر گونه پراکندگی-های محلی محدود کردند.

¹ Multidimensional Limiter

آناستازیو و چان (۱۹۹۷) عنوان کردند که محدود کننده مین مند نوسانات پراکنده کمتری نسبت به محدود کننده سوپر بیی تولید می کند در حالیکه دقت کمتری دارد. بنابراین چون افزایش تأثیر محدود کننده باعث پراکندگی کمتر جوابها می شود، ولی نوسانات عددی بیشتری ایجاد می - گردد (ما و همکارانش، ۲۰۰۷). محدود کننده مین مند، ناپیوستگیها را هموار کرده و نوعی پخش کننده است، در حالیکه محدود کننده سوپر بی متراکم کننده تر است (یوون و کانگ، ۲۰۰۴). هابارد (۱۹۹۹) محدود کننده های LCD و MLG را مقایسه کرده و به این نتیجه رسیده است که روش LCD از آنجایی که از سه شیب استفاده می کند، راحت ترین و از نظر محاسباتی مؤثرترین تکنیک می باشد. هر چند روش MLG نتایج بهتری حاصل می کند، ولی هزینه محاسبات برای مدلسازی جریان با این روش توجیح ندارد. وانگ و لیو (۲۰۰۵)، بعد از مقایسه روش LCD، LCD پیش بینی شده^۱ (PLCD) (هابارد، ۱۹۹۹) محدود کننده های TVBM^۲ (شیو، ۱۹۸۷)، به این نتیجه رسیدند که محدود کننده PLCD دقیق ترین اما از نظر محاسباتی گرانترین محدود کننده برای مسائل پرش مایل می باشد.

هیرش (۱۹۸۸) محدود کننده های مختلفی را امتحان کرده و دریافته است که تمامی محدود کننده ها برای بسترهای تر مشابه هم می کند، اگر چه برای بسترهای خشک محدود کننده مین موند عملکرد بهتری دارد. یوون و کانگ (۲۰۰۴) از روش محدود کننده ای که توسط جاواهار و کامات (۲۰۰۰) برای بدست آوردن دقت مرتبه دوم پیشنهاد شده بود، استفاده کردند. این محدود کننده انتقال همواری بین پرش های ناپیوسته مرتبه اول و گرادیان های پیوسته مرتبه دوم تولید می کند. یوون و کانگ (۲۰۰۴) مدلشان را بر روی یک بستر تر با محدود کننده سوپر بی شبیه سازی کردند و دریافتند که روش آنها نوسان کمتری نسبت به محدود کننده سوپر بی داشته است. ایشان همچنین نشان دادند که تکنیک استفاده شده مستقل از شکل شبکه می باشد. بگنودلی و سندرز (۲۰۰۶)

¹ Projected LCD

² Total Variation Bounded in the Means

مطالعه مقایسه‌ای انجام داده و دریافتند که استفاده از مرکز سلول‌های همسایه برای بازسازی و استفاده از محدود کننده‌ها در لبه سلول‌ها نتایج خوبی حاصل می‌کند.

فصل چهارم: حل عددی معادلات SWE به روش حجم‌های محدود

✓ مقدمه

✓ معادلات حاکمه SWE

✓ مسئله شکست سد

✓ حل تحلیلی شکست سد

✓ حل عددی شکست سد

۴-۱- مقدمه

با توجه به مباحث مورد اشاره در فصل دوم مشخص گردید که پیش‌بینی رفتار خشک شدگی و زیر آب رفتگی در اثر جریان غیر دائمی که از اینجا بعد مختصراً WAD¹ نامیده خواهد شد، مستلزم استفاده از یک جریان ناشی از شکست می‌باشد، لذا با توجه به کارهای انجام شده محققین در گذشته و همچنین جهت مقایسه با مدل عددی‌ای که در صفحات آتی ارائه خواهد شد، پس از بازبینی مختصری از معادلات حاکمه SWE، ابتدا به بیان یک حل تحلیلی موجود برای شکست سد پرداخته شده، سپس روش مورد استفاده در مطالعه حاضر برای گسسته سازی SWE و نحوه به کار بردن عوامل مختلف دخیل در آن که در قسمت ۲-۲ (بازبینی کارهای انجام شده) اشاره شد، به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

۴-۲- معادلات حاکمه SWE

معادله حاکم SWE را می‌توان به صورت پایستار که در آن تمام متغیرهای جریان بصورت مشتق بیان می‌شود به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

(۴-۱) معادله پیوستگی

و

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + \frac{1}{2} \frac{gA^2}{b} \right) = S$$

(۴-۲) معادله مومنوم

پارامترهای مورد استفاده در روابط بالا به شرح ذیل می‌باشد:

Q: نرخ جریان بر حسب مترمکعب بر ثانیه، حجم جریانی که از یک مقطع در واحد زمان عبور

می‌کند.

A: سطح مقطع بر حسب مترمربع

b: عرض سطح مقطع بر حسب متر

¹ Wetting and Drying

g: شتاب گرانشی

وقتی معادلات مذکور برای یک کانال مستطیلی نوشته شود، به شکل صورت ذیل نمایش داده می-شود:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (3-4) \text{ معادله پیوستگی}$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right) = S \quad (4-4) \text{ معادله مومنتوم}$$

این معادلات را می توان به شکل ماتریسی نیز به صورت ذیل نمایش داد:

$$V_t + F_x(V) = S \quad (5-4)$$

که در آن:

$$V = \begin{bmatrix} u \\ uh \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

$$F = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{o_x} - S_{f_x}) \end{bmatrix} \quad (8-4)$$

در روابط بالا داریم:

V: بردار متغیرهای پایستار ،

F: بردار تابع شار ،

S: بردار عبارت منشأ ،

S_{o_x} : شیب کف کانال در راستای x ، $-\partial z / \partial x$ ،

S_{f_x} : شیب اصطکاکی در راستای x ، $\frac{n^2 u |u|}{h^{\frac{4}{3}}}$ ،

h: عمق آب، از کف کانال تا تراز سطح آب ،

u: سرعت در راستای x ،

z: تراز کف کانال،

و n: ضریب زبری مانینگ می باشد.

بردار شیب کف را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S_b = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_{o_x} \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

و بردار منشأ اصطکاک را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_{f_x} \end{bmatrix} \quad (10-4)$$

بنابراین شکل برداری SWE را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + J \frac{\partial V}{\partial x} = S \quad (11-4)$$

که در آن، J بیان کننده ماتریس ژاکوبین بردار شار می باشد.

خاصیت های پربولیکی SWE زمانی ارضا می شود که مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین مقادیر حقیقی

باشند. ماتریس ژاکوبین بردار شار را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$J = \frac{\partial F}{\partial V} \quad (12-4)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} \quad (13-4)$$

شکل اولیه معادلات (1-4) و (2-4) بطور گسترده در روش های FD بکار گرفته می شود. برای کانال-

های مستطیلی معادله پیوستگی پس از بسط معادله (3-4) به شکل زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (14-4)$$

اگر معادله (4-4) بسط داده شود، معادله حاصل به شکل زیر بدست می آید:

$$u \left[\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right] + h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + gS_{f_x} - gS_{o_x} \right) = 0 \quad (15-4)$$

در معادله (۴-۱۵) مجموع عبارات داخل براکت اول برابر معادله (۴-۱۴) بوده و برابر صفر است. مابقی معادله برابر است با:

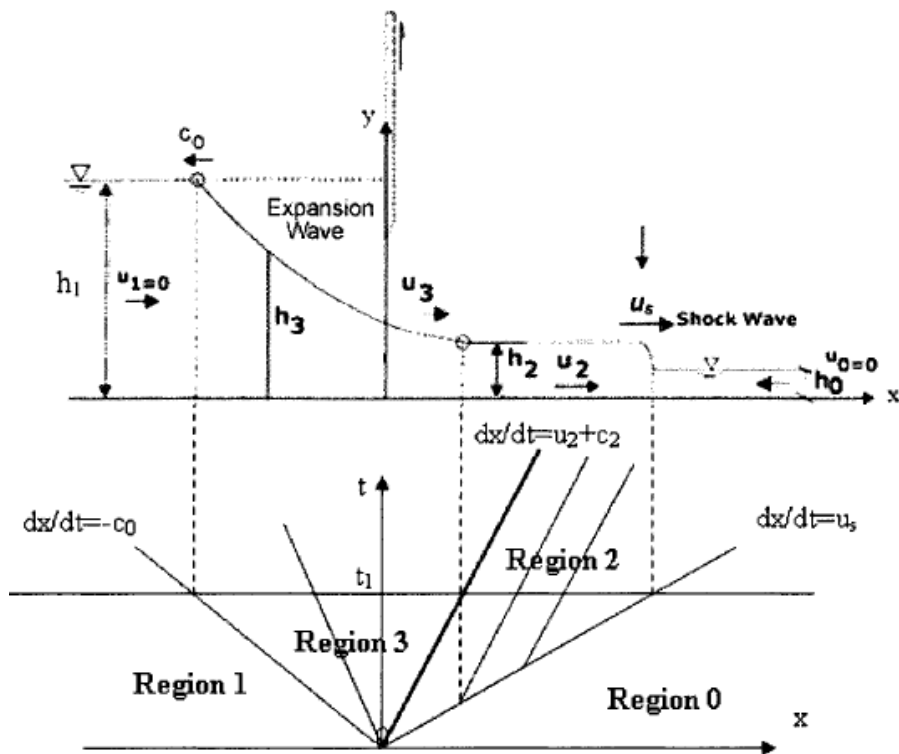
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2g} + h \right) = g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (۴-۱۶)$$

۴-۳- مسئله شکست سد

در این قسمت یک حل تحلیلی مفصل برای حل SWE ارائه می‌شود. زمان رسیدن موج، ارتفاع و سرعت موج‌ها در کل دامنه می‌بایستی در مسئله شکست سد محاسبه شود. شکل (۴-۱) رویکرد روش مشخصه‌ها را با خطوط مشخصه و حرکت موج‌های مربوطه ناشی از شکست سد را به منظور معرفی مختصر مسئله شکست سد نمایش می‌دهد. در شکل (۴-۱) Region 0 و Region 1 نشان دهنده ناحیه ساکن، Region 2 ناحیه شاک ویو با سرعت و عمق ثابت، و Region 3 نشان دهنده ناحیه انبساط یا ناحیه موج منفی^۱ می‌باشد. معمولاً h_0 و h_1 در ابتدا بصورت شرایط اولیه معلوم می‌باشند و u_s و u_2 و u_3 نامعلوم می‌باشند.

در مسئله شکست سد دو حالت ناپیوستگی وجود دارد. نواحی بالا دست و پایین دست بوسیله یک دیوار جدا کننده، دریاچه یا بدنه سد از هم جدا می‌شوند. در این مسئله دو نوع موج اتفاق می‌افتد. وقتی که دریاچه برداشته می‌شود، آب بصورت ناگهانی با یک موج با پیشانی شاک شروع به حرکت به سمت پایین دست کرده و حجم آب موجود در مخزن با یک موج منفی شروع به حرکت می‌کند (شکل ۴-۱). موج پیش رونده مثبت غالباً از نوع فوق بحرانی و موج منفی در یک ناحیه زیر بحرانی حرکت می‌کند.

¹- Expansion Zone or Rarefaction Wave Zone



شکل (۴-۱) مسئله شکست سد با اجزا مربوطه (توران، ۲۰۰۸)

۴-۴ - حل تحلیلی شکست سد

حل تحلیلی برای SWE فقط برای حالتی وجود دارد که کانال مستطیلی، افقی و بدون اصطکاک باشد. حل تحلیلی با بکار گیری معادلات پیوستگی، مومنوم و معادله مشخصه‌ها بدست می‌آید. حل تحلیلی (وو و همکارانش، ۱۹۹۹؛ استوکر، ۱۹۵۷) برای حالتی که هم بالادست و هم پایین دست سد دارای آب باشند به صورت زیر ارائه شده است:

بازه مکانی	متغیرهای وابسته	
$x \leq -t\sqrt{gh_1}$	$u = 0$	
	$h = h_1$	(۱۷-۴)

$-t\sqrt{gh_1} \leq x \leq t(u_2 - \sqrt{gh_2})$	$u = u_3 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_1} + \frac{x}{t} \right)^2$	(۱۸-۴)
--	--	--------

$$, h = h_3 = \frac{4}{9g} \left(\sqrt{gh_1} - \frac{x}{2t} \right)^2$$

$$, u = u_2 = u_s - \frac{gh_0}{4u_s} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2u_s^2}{gh_0}} \right)$$

$$t(u_2 - \sqrt{gh_2}) \leq x \leq tu_s$$

$$, h = h_2 = \frac{h_0}{2} \sqrt{1 + 8 \left(\frac{2h_2}{h_2 - h_0} \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_0}} \right)^2} - \frac{1}{2} \quad (19-4)$$

$$, u = 0$$

$$tu_s \leq x$$

$$, h = h_0$$

$$(20-4)$$

که در آن:

u_s ، سرعت شاک ویو بوده و برابر است با:

$$u_s = 2\sqrt{gh_1} + \frac{gh_0}{4u_s} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8u_s^2}{gh_0}} \right) - (2gh_0 \sqrt{1 + \frac{8u_s^2}{gh_0}} - 2gh_0)^{\frac{1}{2}} \quad (21-4)$$

پارامترهای مورد استفاده در روابط بالا به شرح ذیل می باشد:

h_0 : سرعت آب در پایین دست سد،

h_1 : عمق آب در بالادست سد،

u_2 : سرعت بین موج شاک ویو و موج منفی،

h_2 : عمق آب بین موج شاک ویو و موج منفی،

u_3 : سرعت آب برای موج منفی یا سرعت آب در ناحیه انبساط،

h_3 : عمق آب برای موج منفی یا عمق آب در ناحیه انبساط،

t : زمان سپری شده پس از شکست سد،

و x : مکان مورد بررسی در زمان t .

معادله (21-4) با استفاده از روش تکراری نیوتن-رافسون¹ حل می شود.

¹ - Newton- Raphson

۴-۵- حل عددی شکست سد

در این قسمت حل‌های عددی SWE با استفاده از روش WAF مبتنی بر FV ارائه می‌شود. در روش FV هر سلول با حجم کنترل توسط شارهای وارد شونده و خارج شونده احاطه شده است. مقدار متوسط پارامتر پایستار در مرکز هر سلول در نظر گرفته می‌شود. روش‌های FV به صورت ویژه‌ای در مدل کردن مرزهای غیر یکنواخت و شاک و یوها قدرتمند می‌باشد.

معادلات حاکمه با در نظر گرفتن عبارت چشمه^۱ که در برگیرنده اثرات توپوگرافی بستر و اصطکاک جریان است، از نوع غیر همگن می‌باشد که در فرایند حل ابتدا به دستگاهی متشکل از یک معادله همگن و دو معادله دیفرانسیل معمولی شامل عبارت چشمه تفکیک می‌گردند. حل دستگاه حاصله در الگویی متوالی، مقادیر متغیرهای جریان را در گام جدید زمانی به دست می‌دهد. الگوی عددی WAF بدون نیاز به هر گونه پارامتر اضافی نظیر لزجت مصنوعی (که معمولاً تعیین آن مستلزم واسنجی مدل است) دارای خاصیت تسخیر شوک بوده و نشان داده خواهد شد که در نواحی با گرادیان بالا جریان نظیر جبهه موج اُشترک^۲ ناشی از شکست سد، جواب‌هایی عاری از هر گونه نوسان غیر فیزیکی را میسر می‌سازد. افزون بر این مدل ارائه شده قابلیت شبیه سازی جریان بر روی بستر خشک، ناهموار و دارای اصطکاک را نیز داراست. نتایج مدل علاوه بر حل تحلیلی با داده‌های موجود آزمایشگاهی از قبیل تغییرات زمانی عمق و سرعت جریان مقایسه می‌گردند.

۴-۵-۱- معادلات حاکمه

همانگونه در قسمت پیشین اشاره شد در این مطالعه از معادلات آب کم عمق به عنوان مدل ریاضی جریان غیردائمی ناشی از شکست سد استفاده شده است. این معادلات از انتگرال گیری اصول بقای جرم و بقای اندازه حرکت (معادلات ناویر- استوکس) در عمق حاصل می‌گردند. فرایند استخراج معادلات آب کم عمق بر فرضیاتی استوار است که از آن جمله می‌توان به بزرگتر بودن مقیاس افقی

¹ Source Term

² - Bore

جریان نسبت به مقیاس عمودی آن اشاره نمود. همچنین توزیع فشار هیدرواستاتیک و چشم پوشی از شتاب عمودی جریان از اصول حاکم بر این معادلات به شمار می‌روند. معادلات آب کم عمق برای جریان یک بعدی در شکل برداری را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$(۲۲-۴)$$

رابطه فوق مبین دستگاهی از معادلات غیر خطی هذلولی در حالت پایستار^۱ بوده که در آن V برداری متغیرهای پایستار، $F(V)$ بردار شار و $S(V)$ عبارت چشمه نامیده می‌شوند:

$$V = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, F(V) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, S(V) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (۲۳-۴)$$

در رابطه فوق g شتاب گرانش، $h(x,t)$ عمق آب، x مختصات افقی، t زمان، $u(x,t)$ سرعت افقی متوسط گیری شده در عمق و S_0 و S_f به ترتیب شیب بستر و شیب اصطکاکی می‌باشند که با استفاده از روابط ذیل بدست می‌آیند:

$$S_0 = -\frac{dB}{dx}, \quad S_f = \frac{n^2 u |u|}{h^{4/3}} \quad (۲۴-۴)$$

که در آن n ضریب زبری مانینگ و B تراز بستر است. برای پیشبرد الگوی عددی ابتدا لازم است معادلات آب کم عمق گسسته سازی شوند. معادله (۲۲-۴) پس از انتگرال گیری در حجم کنترل به صورت زیر گسسته می‌گردد:

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} = -\frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} + S_i \quad (۲۵-۴)$$

در رابطه فوق Δx اندازه سلول محاسباتی و Δt گام زمانی می‌باشد. ابعاد حجم کنترل مذکور در فضای $x-t$ برابر است با $\Delta x \times \Delta t$. در رابطه (۲۵-۴) پایین نوشت i معرف مرکز سلول محاسباتی (گره) i ام واقع در $x = x_i$ و بالانوشته‌های n و $n+1$ به ترتیب نشان دهنده گام‌های زمانی معلوم و مجهول می‌باشند. $F_{i-1/2}$ و $F_{i+1/2}$ نیز که به شارهای بین سلولی موسومند، به ترتیب به شار عددی در

¹ Conservation Form

نقاط $x = x_{i+1/2}$ و $x = x_{i-1/2}$ (مرز بین سلول‌های $i-1$ و i) اشاره می‌نمایند. با اتخاذ یک الگوی صریح برای حل معادلات حاکمه، شار عددی تابعی از مقادیر متغیرهای جریان در گام زمانی معلوم خواهد بود. جزئیات تخمین شار عددی در قسمت بعد به تفصیل بیان می‌گردد.

۴-۵-۲- الگوی شار متوسط وزن دار برای تخمین شار عددی

روش‌های گادونو، به عنوان یکی از مهمترین زیر مجموعه‌های روش حجم محدود، به حل مسئله ریمان در مرز سلول پرداخته و از جهات انتشار موج برای تخمین شار بین سلولی بهره می‌برد. در این مطالعه برای تخمین شار عددی از الگوی شار متوسط وزن دار (WAF) که روشی از نوع گادونو بوده و یک حل گر تقریبی مسئله ریمان به شمار می‌رود، استفاده گردیده است. بر اساس این الگو، شار عددی در مرز هر سلول به صورت ترکیبی وزن دار از شارهای مرکزی سلول‌های مجاور مرز و شار در ناحیه میانی موسوم به ناحیه ستاره تخمین زده می‌شود. بر همین اساس شار در مرز $i+1/2$ به صورت زیر تخمین زده می‌شود (تورو، ۲۰۰۱، ویوو، ۲۰۰۸).

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sign}(c_k) \phi_{i+1/2}^{(k)} \Delta F_{i+1/2}^{(k)} \quad (۲۶-۴)$$

که در آن N تعداد معادلات پایستار (برای دستگاه معادلات یک بعدی آب کم عمق: $N=2$)، $c_k = \Delta t S_k / \Delta x$ عدد کورانت موج k ام (S_k سرعت موج k ام)، $\text{sign}()$ تابع علامت و $\Delta F_{i+1/2}^{(k)} = F_{i+1/2}^{(k+1)} - F_{i+1/2}^{(k)}$ پرش در شار عددی می‌باشد. از این پس نوشت‌های R و L به ترتیب به سمت راست و چپ مرز $i+1/2$ اشاره می‌کنند. ($F_{i+1/2}^{(3)} = F(V_R)$ ، $F_{i+1/2}^{(2)} = F(V^*)$ ، $F_{i+1/2}^{(1)} = F(V_L)$) شار $F(V^*)$ که به شار ناحیه ستاره^۱ موسوم است، به کمک یک حل گر تقریبی ریمان تخمین زده می‌شود. این موضوع در سطور پیش روی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در رابطه (۲۶-۴)، $\phi_{i+1/2}^{(k)}$ تابع محدود کننده شار جهت اعمال شرط تغییرات کلی از بین رونده (TVD) می‌باشد که با اعمال مقدار مناسب استهلاک عددی به الگوی WAF، جوابی عاری از هرگونه نوسان غیرفیزیکی

¹ Star Region

در نواحی ناپیوسته جریان را تخمین می‌نماید. در مطالعه حاضر از محدود کننده شار موسوم به Van Albada استفاده شده است (تورو، ۲۰۰۱).

$$\phi_{i+1/2}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{for } r^{(k)} \leq 0, \\ 1 - \frac{(1 - |c_k|) r^{(k)} (1 + r^{(k)})}{1 + (r^{(k)})^2} & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (27-4)$$

که در آن:

$$r^{(k)} = \begin{cases} \frac{\Delta h_{i-1/2}^{(k)}}{\Delta h_{i+1/2}^{(k)}} & \text{for } c_k > 0, \\ \frac{\Delta h_{i+3/2}^{(k)}}{\Delta h_{i+1/2}^{(k)}} & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (28-4)$$

در رابطه فوق، $\Delta h_{i+\alpha}^{(k)}$ ($\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$) پرش در متغیر h در خلال موج k ام می‌باشد. شار عددی در ناحیه ستاره با استفاده از حل گر تقریبی ریمان از نوع (HLL)^۱ با توجه به شارهای چپ و راست مرز و سرعت امواج به صورت زیر تخمین زده می‌شود.

$$F(V^*) = \frac{S_R F(V_L) - S_L F(V_R) + S_R S_L (V_R - V_L)}{S_R - S_L} \quad (29-4)$$

که در آن S_L و S_R به ترتیب به سرعت موج در سمت چپ و راست مرز $i+1/2$ اشاره می‌کنند (شکل ۱). با پیروی از روش تورو (۱۹۹۲) برای تخمین این سرعت‌ها از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} S_R &= \max(u_R + \sqrt{gh_R}, u^* + \sqrt{gh^*}) \\ S_L &= \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) \end{aligned} \quad (30-4)$$

در عبارات فوق h^* و u^* به ترتیب مقادیر عمق و سرعت جریان در ناحیه ستاره می‌باشند.

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4} (u_L - u_R) \right]^2 \\ u^* &= \frac{1}{2} (u_L - u_R) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \end{aligned} \quad (31-4)$$

¹ Harten, Lax and Van Leer

محاسبه سرعت موج به کمک رابطه (۴-۳۱) تنها در مواردی مجاز است که سراسر ناحیه حل از آب پوشیده شده باشد. در مواقعی که قسمت‌هایی از ناحیه حل در ابتدا یا در خلال محاسبات وضعیت بستر خشک را تجربه می‌کند، از روابط زیر استفاده می‌شود (تورو، ۱۹۹۲).

$$\begin{cases} S_L = u_L - \sqrt{gh_L} \\ S_R = u_L + 2\sqrt{gh_L} \end{cases} \text{ (Right Dry Bed)} \quad (32-4)$$

$$\begin{cases} S_L = u_R - 2\sqrt{gh_R} \\ S_R = u_R + \sqrt{gh_R} \end{cases} \text{ (Left Dry Bed)}$$

عبارات فوق در واقع از حل دقیق مسئله ریمان در حالت بستر خشک حاصل شده‌اند. مهدوی و طالب بیدختی (۲۰۰۹-الف) با استفاده از این روش به شبیه سازی مرز متحرک خط ساحلی و مطالعه پدیده‌های انتشار و بالاوری امواج منفرد^۱ مبادرت نمودند.

۴-۵-۳ - پیاده سازی عبارت چشمه و معیار پایداری

با پیروی از روش تورو (۲۰۰۱) برای در نظر گرفتن عبارت چشمه، دستگاه معادلات زیر که متشکل از سه معادله مقدار اولیه است در هر گام زمانی حل می‌گردد.

$$\left. \begin{array}{l} ODEs: \frac{dV}{dt} = S(V) \\ ICs: V^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t'} V^{(1)} \quad (33-4)$$

$$\left. \begin{array}{l} PDEs: \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \\ ICs: V^{(1)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t} V^{(2)} \quad (34-4)$$

$$\left. \begin{array}{l} ODEs: \frac{dV}{dt} = S(V) \\ ICs: V^{(2)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta t'} V^{n+1} \quad (35-4)$$

¹ Solitary Waves

که در آن $\Delta t' = \Delta t / 2$ می‌باشد. در مطالعه حاضر از الگوی انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای برای حل معادلات شامل عبارت چشمه (۴-۳۳ و ۴-۳۵) استفاده گردیده است. این الگوی ضمنی دارای دقتی از مرتبه دو بوده و برای معادله (۴-۳۳) با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\left[I - \frac{\Delta t'}{2} \left(\frac{\partial S(V)}{\partial V} \right)_i^n \right] \Delta V_i = \Delta t' S(V_i^n) \quad (4-36)$$

که در آن I ماتریس واحد بوده و $\Delta V_i = V_i^{(1)} - V_i^n$ معرف پرش در متغیرهای پایستار می‌باشد. عبارت $\partial S(V) / \partial V$ در سمت چپ رابطه فوق بیانگر ماتریس ژاکوبین بردار چشمه می‌باشد که به طریق زیر محاسبه می‌گردد:

$$\left(\frac{\partial S(V)}{\partial V} \right)_i^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g \left(S_0 + \frac{7}{3} \frac{n^2 u |u|}{h^{4/3}} \right)_i^n & -2g \left(\frac{n^2 |u|}{h^{4/3}} \right)_i^n \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

رابطه (۴-۳۷) با جایگذاری $\Delta V_i = V_i^{n+1} - V_i^{(2)}$ برای حل معادله (۴-۳۵) نیز قابل استفاده است. با توجه به صریح بودن الگوی WAF، پایداری محاسبات با اعمال معیار کورانت-فردریش-لویی (CFL) حاصل می‌شود:

$$\Delta t = C_n \min \frac{\Delta x}{|u_i| + \sqrt{gh_i}}, \quad 0 < C_n \leq 1 \quad (4-38)$$

که در آن C_n عدد کورانت می‌باشد.

۴-۵-۴ - اعمال شرایط مرزی

اعمال صحیح شرایط مرزی در مدل عددی از ارکان اصلی حل معادلات آب کم عمق محسوب می‌شود به طوریکه عدم دقت در تعریف شرایط مرزی ممکن است سبب انتشار خطای محاسباتی از مرزها به درون ناحیه حل گشته و بدین طریق مانع دستیابی به جواب صحیح مسئله گردد. در شبیه سازی فرایند شکست سد در این مطالعه، مرزها از نوع غیر بازتابی و دیواره نفوذناپذیر (بازتابی) می‌باشند که در ادامه به چگونگی پیاده سازی آنها در مدل عددی پرداخته می‌شود.

۴-۵-۴-۱ - مرز غیر بازتابی

شرط مرزی غیر بازتابی که خروج بدون بازتابش موج از دامنه محاسباتی را میسر می‌سازد، با افزودن گره‌های موهومی^۱ به دامنه محاسباتی اعمال می‌گردد. اگر آخرین گره محاسباتی با پایین نوشت M نشان داده شود، گره‌های موهومی مجاور گره مذکور که خارج از دامنه محاسباتی قرار دارند با پایین نوشت‌های $M+1$ و $M+2$ مشخص می‌گردند. تحت چنین شرایطی برای مرز غیر بازتابی در سمت راست مدل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (hu)_{M+1} &= (hu)_M, & h_{M+1} &= h_M \\ (hu)_{M+2} &= (hu)_M, & h_{M+2} &= h_M \end{aligned} \quad (۳۹-۴)$$

به طور مشابه چنانچه پیاده سازی مرز غیر بازتابی در انتهای سمت چپ مدل مد نظر باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (hu)_0 &= (hu)_1, & h_0 &= h_1 \\ (hu)_{-1} &= (hu)_1, & h_{-1} &= h_1 \end{aligned} \quad (۴۰-۴)$$

که در آن پایین نوشت 1 نشانگر اولین گره محاسباتی در دامنه حل بوده و پایین نوشت‌های 0 و 1- به گره‌های موهومی اضافه شده در سمت چپ مدل اشاره می‌نمایند. روابط فوق بیان می‌کنند که عمق و سرعت جریان نایبستی در راستای عمود بر مرز غیر بازتابی تغییر نمایند.

۴-۵-۴-۲ - مرز بازتابی

برای اعمال شرط مرزی بازتابی که بیانگر یک دیواره نفوذ ناپذیر است، از روابط زیر استفاده می‌گردد:

$$\begin{aligned} (hu)_0 &= -(hu)_1, & h_0 &= h_1 \\ (hu)_{-1} &= -(hu)_1, & h_{-1} &= h_1 \end{aligned} \quad (۴۱-۴)$$

رابطه فوق برای شبیه سازی دیواره نفوذ ناپذیر در سمت چپ دامنه محاسباتی قابل کاربرد است که در آن متغیرها تعریفی مشابه با مرز غیربازتابی دارند. وجود علامت منفی در رابطه (۴۱-۴) از تغییر

¹ Ghost Grid Points

علامت سرعت جریان حکایت می‌کند به نحویکه سرعت جریان در مرز جامد همواره برابر با صفر خواهد بود. این امر متضمن عدم عبور جریان از دیواره است.

فصل پنجم: مدلسازی عددی و نتایج

✓ مقدمه

✓ شکست ایده‌آل سد بر روی بستر افقی

✓ شکست سد بر روی بستر شیبدار خشک

✓ بالاروی موج حاصل از شکست سد

۵-۱- مقدمه

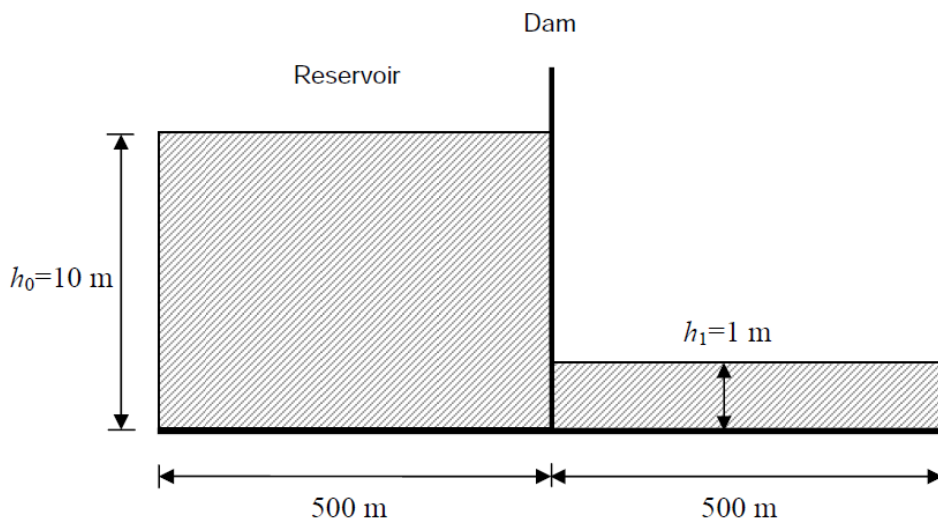
در قسمت‌های قبلی مدلسازی جریان دائمی بصورت سه بعدی بیان گردید، از آنجا که برای بررسی پدیده خشک شدگی و زیر آب رفتگی بستر ملزم به استفاده از معادلات آبهای کم عمق شده- ایم، در فصل قبلی معادلات آبهای کم عمق بیان گردید. با توجه به اینکه مدل سه بعدی آبهای کم عمق علاوه بر پیچیده بودن در امر گسسته سازی، از نظر پارامترهای موجود فراتر از حیطه این پایان نامه می‌باشد، به بیان معادلات دو بعدی آبهای کم عمق پرداخته شد. در این فصل، به علت تسریع در دستیابی به اهداف پایان نامه و اعمال ساده آن در برنامه نویسی مدلسازی یک بعدی آبهای کم عمق با استفاده از نمونه مسئله‌های متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است.

در این فصل به مدل سازی چند حالت از شکست سد و بررسی نحوه عملکرد مدل عددی SWE در مواجهه با پدیده WAD با مواردی از قبیل بستر هموار، بستر شیبدار و در نهایت بستر با یک شیب معکوس و موج بالارونده از آن مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت. لازم به ذکر است با توجه به وجود حل تحلیلی یک بعدی برای حالت بستر هموار موجب شد تا بتوان مقایسه‌ای از عملکرد مدل عددی با حل تحلیلی مورد ارزیابی قرار گیرد.

۵-۲- شکست ایده آل سد بر روی بستر افقی

به عنوان اولین آزمون محاسباتی مدل حاضر جهت شبیه سازی انتشار امواج ناشی از شکست سد بر روی بستری افقی و بدون اصطکاک (شکست ایده‌آل) بکار می‌رود. در این مثال، کانالی به طول ۱۰۰۰ متر به وسیله سدی که در وسط آن قرار دارد به دو قسمت مجزا تقسیم می‌شود: مخزنی از آب به عمق $h_0 = 10m$ در بالادست سد و آبی به عمق $h_1 = 1m$ در پایین دست آن (شکل ۵-۱) قرار گرفته است. پیکره آب در دو قسمت مذکور به صورت ساکن در نظر گرفته شده و مرزهای چپ و راست دامنه محاسباتی با شرط مرزی غیر بازتابی در مدل عددی وارد می‌شوند. نیمرخ عمق اولیه جریان دارای یک ناپیوستگی در محل سد است. در نتیجه برداشت ناگهانی سد در لحظه $t = 0$ ، یک

موج آشترک و یک موج منفی بوجود می‌آیند که به ترتیب در جهات پایین دست و بالادست آبراهه منتشر می‌گردند. موج آشترک افزایش عمق و موج منفی کاهش عمق را در مسیر انتشار خود به همراه دارند. از آنجا که نسبت عمق پایین دست به عمق بالادست آن از مقدار 0.138 کوچکتر است، جریان-های زیر بحرانی و فوق بحرانی به صورت همزمان در دامنه حل بوجود می‌آیند (هندرسون، ۱۹۹۲).



شکل (۱-۵) نمایش مسئله شکست سد ایده‌آل (لحظه $t=0$)

خوشبختانه این مسئله شکست سد دارای حل تحلیلی می‌باشد که به عنوان نمونه در تورو (۲۰۰۱) و توران (۲۰۰۸) گزارش شده است که در قسمت ۴-۴ ارائه شده است. با هدف بررسی عملکرد الگوی حاضر در حل معادلات آب کم عمق، خطای میان حل عددی و تحلیلی به کمک معیار زیر ارزیابی می‌گردد (زوپو رابرتس، ۲۰۰۳):

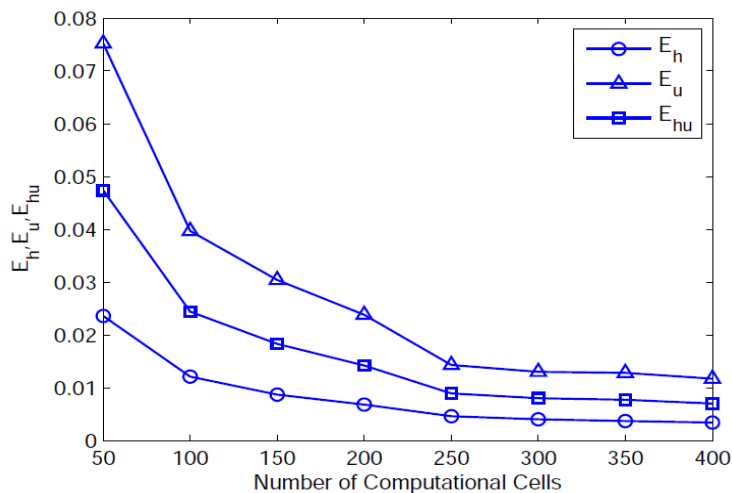
$$E_{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^M |\mu_{num,i} - \mu_{ana,i}|}{\sum_{i=1}^M \mu_{ana,i}} \quad (1-5)$$

رابطه فوق بیانگر خطای نرمال شده نسبت به حل تحلیلی است که در آن عملگر جمع بر روی

تمامی سلول‌ها یعنی $i=1,2,3,\dots,M$ به کار می‌رود. همچنین E_{μ} خطای محاسبه کمیت μ)

می باشد. خطای محاسبات در انتهای زمان شبیه سازی که در اینجا $t = 29s$ است، تعیین می شود.

شکل (۲-۵) نموداری از تغییرات E_{μ} در مقابل تعداد سلول های محاسباتی را نشان می دهد. به روشنی افزایش سلول های محاسباتی (کاهش Δx) در دامنه حل با کاهش خطای محاسباتی همراه است.

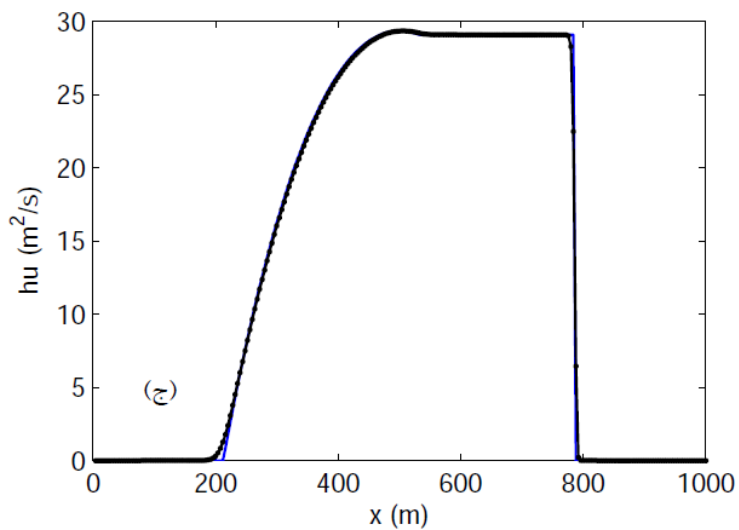
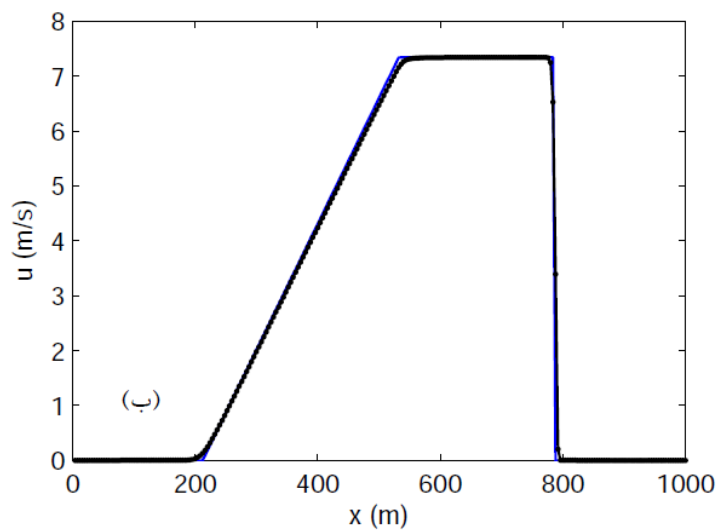
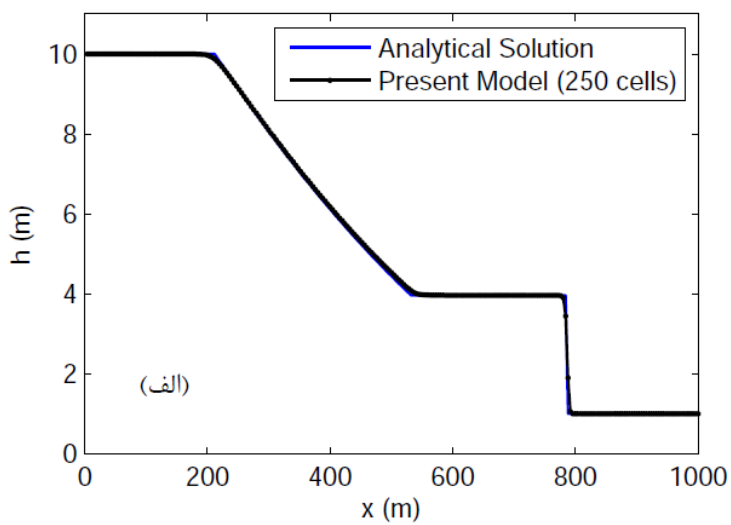


شکل (۲-۵) نمودار مقدار خطای عمق، سرعت و دبی در مقابل تعداد سلول های محاسباتی در مسئله شکست سد ایده آل

این روند کاهش که در ابتدا دارای شیبی قابل توجه است با نزدیک شدن تعداد سلول ها به عدد ۲۵۰ کند گردیده به نحوی که کاهش بیشتر Δx عملاً تأثیری ناچیز در کاهش میزان خطای محاسبات از خود به جا می گذارد. همچنین از نتایج شکل (۲-۵) چنین استنباط می شود که الگوی عددی مقدار سرعت جریان (u) را با خطای بیشتری در مقایسه با عمق جریان (h) و دبی واحد عرض (hu) پیش بینی نموده است. این رفتار به روش تعیین سرعت سیال توسط الگوی عددی یعنی $u = (hu)/h$ قابل انتساب است. به بیان دیگر روش تعیین سرعت از نوع غیر مستقیم بوده و بنابراین می توان انتظار داشت که سرعت بدست آمده در مقایسه با h و hu که جواب مستقیم معادلات حاکمه اند، با خطای بیشتری توأم باشد.

مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی عددی با استفاده از ۲۵۰ سلول محاسباتی برای سه کمیت عمق، سرعت و دبی واحد عرض جریان در زمان $t = 29s$ با حل تحلیلی تورو (۲۰۰۱) در شکل (۲-۵)

۳) نشان می‌دهد که الگوی عددی به خوبی قادر به شبیه‌سازی ناپیوستگی این سه کمیت در جبهه مشترک می‌باشد و این ناپیوستگی‌ها تنها در طول دو یا سه سلول محاسباتی تسخیر شده‌اند. افزون بر این، نواحی هموار جریان نیز به خوبی از حل تحلیلی پیروی می‌کنند. تطابق میان نتایج این آزمون و حل تحلیلی در نزدیکی ناپیوستگی جریان، بر ویژگی تسخیر شوک مدل ارائه شده صحت می‌گذارد.



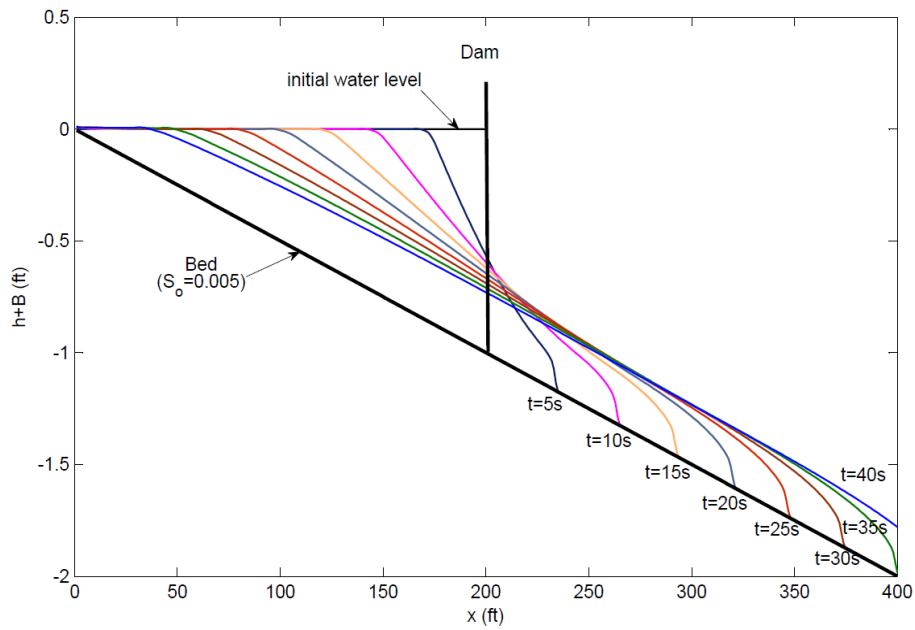
شکل (۳-۵) مقایسه نتایج حل عددی با حل تحلیلی تورو (۲۰۰۱)، الف- عمق، ب- سرعت و ج- دبی واحد عرض

۵-۳- شکست سد بر روی بستر شیبدار خشک

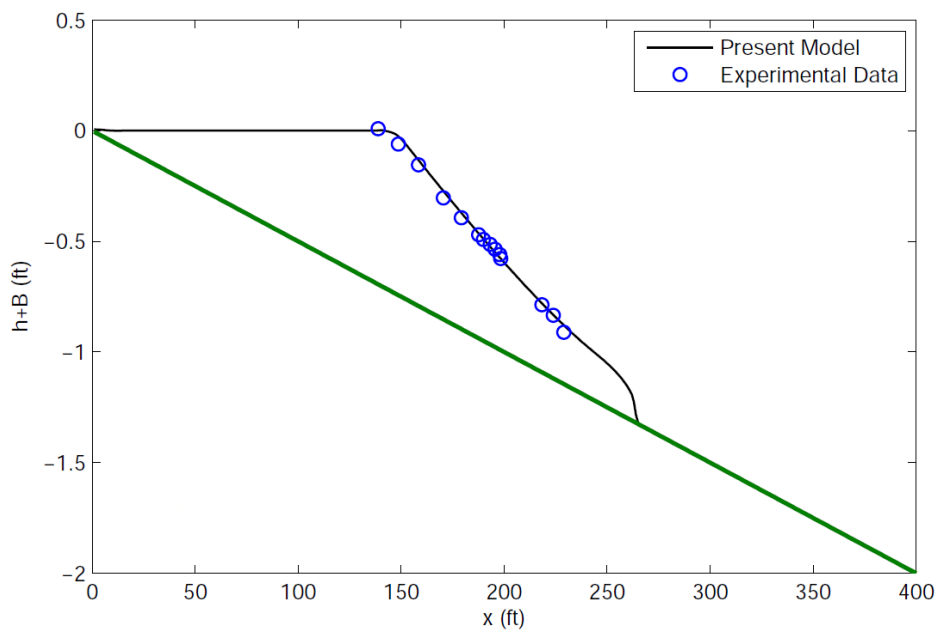
در این آزمون محاسباتی، نتایج مدل ارائه شده با داده‌های آزمایشگاهی WES¹ گزارش شده در اچ سیو و ییه (۲۰۰۲) و گوتاردی و ونوتلی (۲۰۰۳) مقایسه می‌گردد. فلوم بکار رفته در این آزمایش دارای طول و عرض 400 ft و 4 ft (تقریباً برابر ۱۲۲ متر و ۱.۲۲ متر) و شیب $S_0 = 0.005$ بوده و در وسط آن مدل سدی قرار دارد که مخزنی به عمق $h_0 = 1$ ft (در محل سد) را از پایین دست خشک فلوم جدا می‌نماید.

شکست سد که با برداشتن ناگهانی دریچه توسط سامانه قرقره- وزنه در آزمایشگاه شبیه سازی شده است، مولد یک موج منفی است که در آب مخزن بالادست انتشار می‌یابد. به طور همزمان دنباله این موج نیز از محل سد حرکت خود را بر روی بستر خشک به سمت پایین دست شروع می‌نماید. نیمرخ آزاد شبیه سازی شده جریان در زمان‌های گوناگون پس از شکست سد در شکل (۵-۴-الف) به تصویر کشیده شده است. نیمرخ سطح آزاد در لحظات $t = 10s$ ، $t = 20s$ و $t = 30s$ نیز با نتایج بدست آمده در آزمایشگاه مقایسه شده است که به ترتیب در شکل‌های شماره (۵-۴-ب)، (۵-۴-ج) و (۵-۴-د) ارائه شده است.

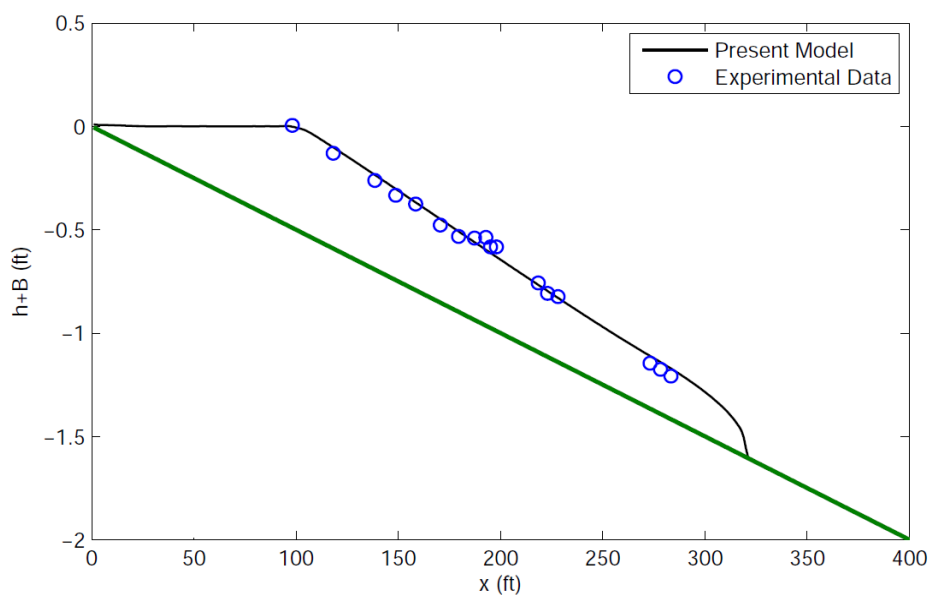
¹ - Waterway Experiment Station



شکل (۴-۵ الف) شکست سد بر روی بستر شیب‌دار، نیم‌رخ سطح آزاد در لحظات مختلف

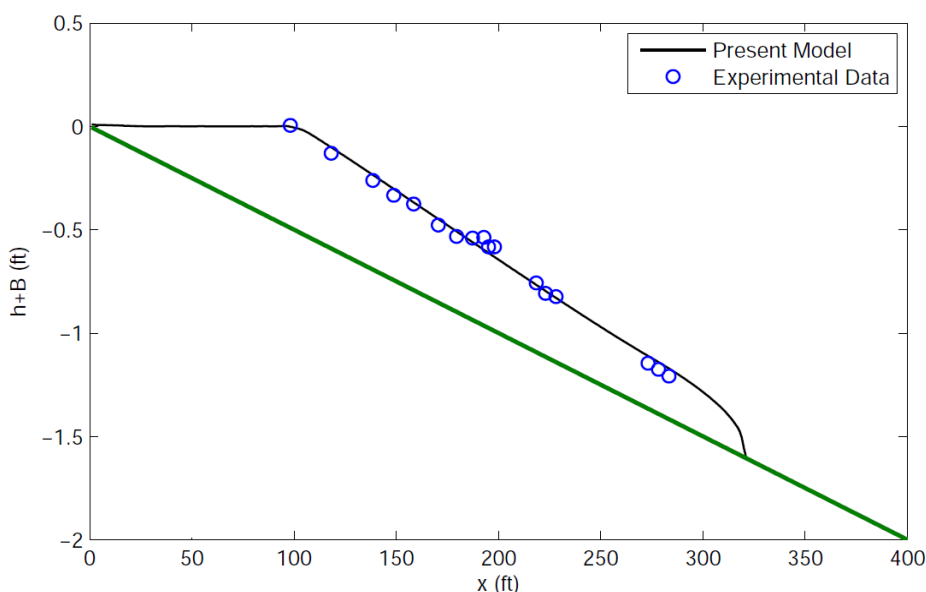


شکل (۴-۵ ب) شکست سد بر روی بستر شیب‌دار، مقایسه نیم‌رخ سطح آزاد آب در لحظه $t = 10s$ با داده‌های آزمایشگاهی WES



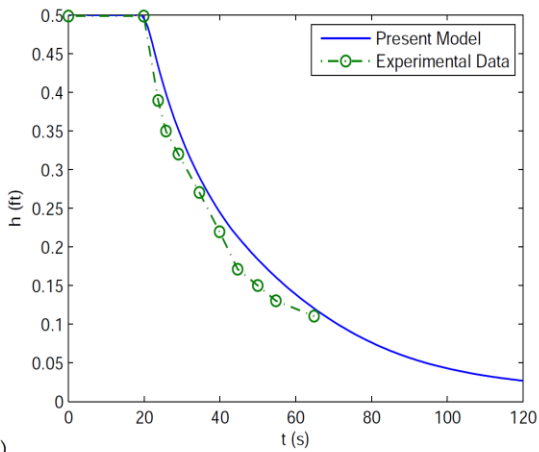
شکل (۵-۴ ج) شکست سد بر روی بستر شیپدار، مقایسه نیمرخ سطح آزاد آب در لحظه $t = 20s$ با داده‌های آزمایشگاهی WES

در این شبیه‌سازی دامنه حل به کمک ۴۰۰ سلول محاسباتی تفکیک شده و گام زمانی نیز با اختصاص عدد کورانت $C_n = 0.6$ محدود شده است. زبری بستر با در نظر گرفتن ضریب مانینگ $n = 0.009$ در محاسبات گنجانده شده و در دو انتهای بالادست و پایین دست مدل از شرط مرزی غیر بازتابی استفاده گردیده است.

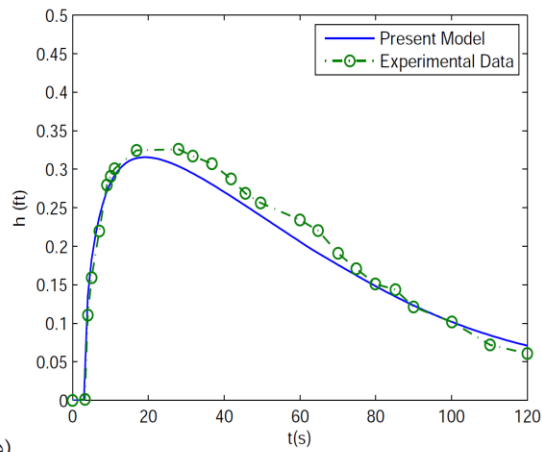


شکل (۵-۴-۵) شکست سد بر روی بستر شیب‌دار، مقایسه نیمرخ سطح آزاد آب در لحظه $t = 30s$ با داده‌های آزمایشگاهی WES

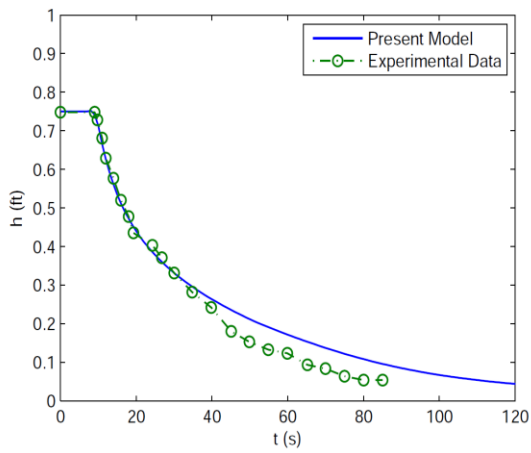
تاریخچه زمانی تغییرات عمق و سرعت جریان در نقاط مختلفی از طول فلوم با نتایج مدل آزمایشگاهی WES در شکل‌های (۵-۵) و (۶-۵) مقایسه گردیده است. در شکل (۵-۵)، به جز نمودارهای (۵-۵-الف، ب) و (۵-۵-ج) که به ترتیب به نقاطی واقع در مخزن سد و محل سد اختصاص دارند، هر نمودار پس از رسیدن موج با شیبی قابل توجه به نقطه بیشینه خود می‌رسد. با گذشت زمان از عمق جریان کاسته شده و نهایتاً در زمان $t = 400s$ تمامی نمودارها عملاً وضعیت بستر خشک (عمق آب $h = 0.005m$) را نشان می‌دهند که به علت رعایت اختصار در نتایج آورده نشده است. در نمایی کلی، روند تغییرات زمانی عمق و سرعت جریان و همچنین زمان رسیدن موج به خوبی توسط مدل عددی پیش‌بینی شده است با این وجود الگوی عددی از ارائه تصویری درست از نوسان‌های آزمایشگاهی عمق جریان در محل شکست سد بازمانده است (شکل ۵-۵-ج). البته باید توجه داشت که امواج سطحی که دارای مولفه سرعت عمودی غیر صفر می‌باشند، ممکن است به خوبی توسط مدل مبتنی بر معادلات آب کم عمق شبیه‌سازی نشوند. با این حال، به نظر می‌رسد حتی در چنین مواردی مدل به خوبی قادر به ارائه عمق متوسط جریان می‌باشد.



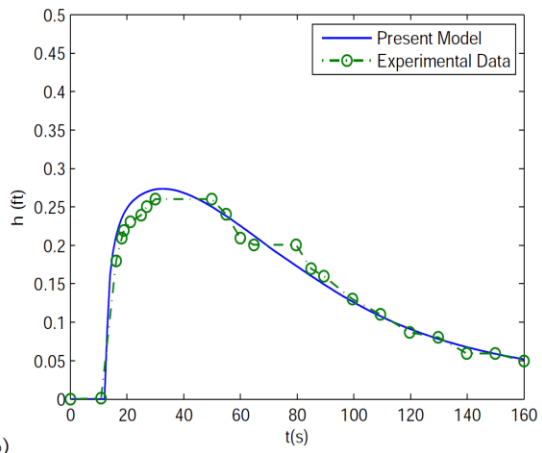
(الف)



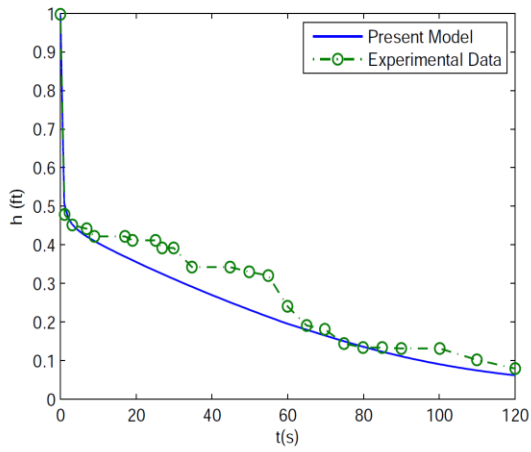
(د)



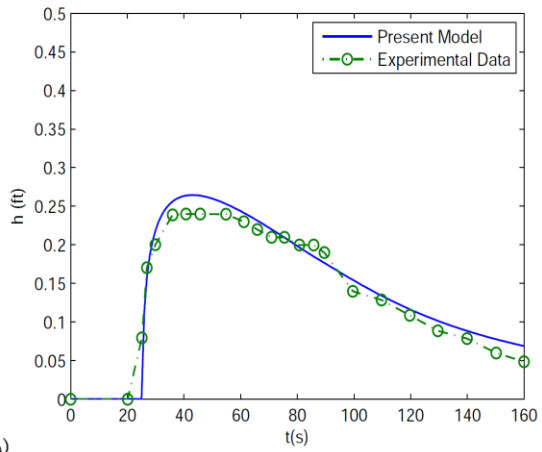
(ب)



(و)

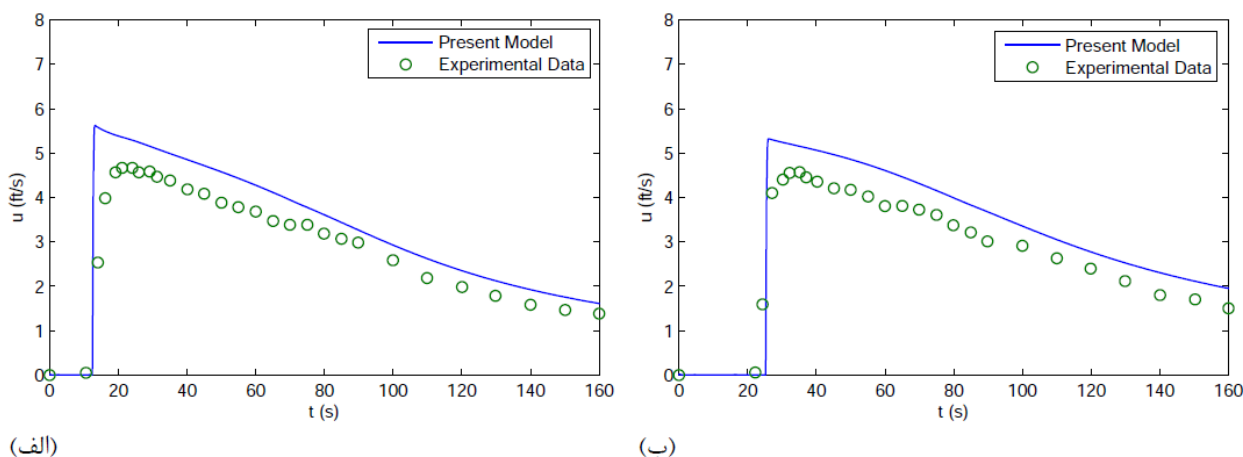


(ج)



(ز)

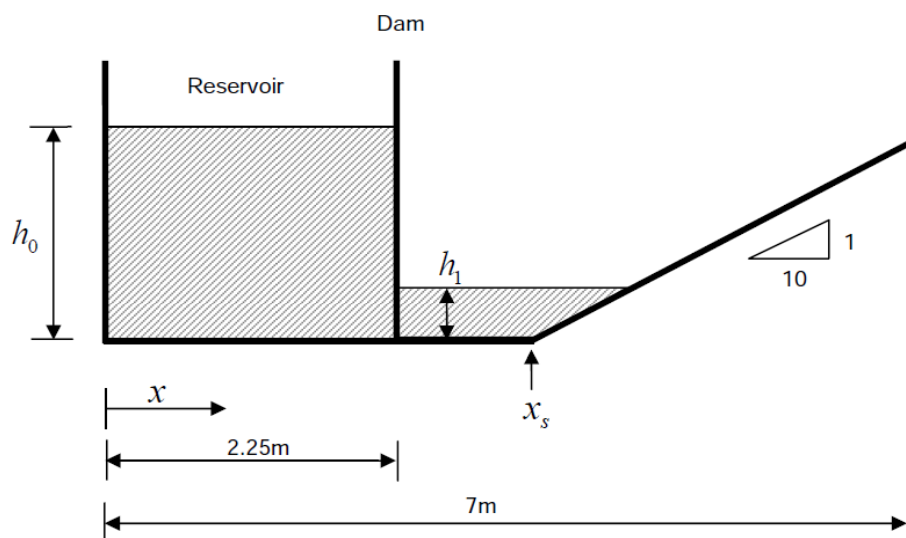
شکل (۵-۵) مقایسه تغییرات زمانی عمق جریان با داده‌های آزمایشگاهی WES در نقاط، الف- $x=10.0\text{ft}$ - ب- $x=15.0\text{ft}$ - ج- $x=20.0\text{ft}$ - د- $x=22.5\text{ft}$ - ه- $x=28.0\text{ft}$ - و- $x=35.0\text{ft}$



شکل (۶-۵) مقایسه تغییرات زمانی سرعت جریان با داده‌های آزمایشگاهی WES در نقاط الف- $x=280ft$ و ب- $x=350ft$

۴-۵- بالا روی موج حاصل از شکست سد

با هدف بررسی توانایی مدل حاضر در شبیه سازی حرکت موج ناشی از شکست سد بر روی بستری با شیب معکوس، مقایسه‌ای میان نتایج حاصل از مدل با داده‌های آزمایشگاهی آورلی و همکارانش (۲۰۰۰) صورت گرفت. آزمایش‌ها در بخش مهندسی عمران دانشگاه پارمای ایتالیا در فلومی به طول 7m و عرض 0.5m صورت پذیرفته است که نمایی از هندسه فلوم در شکل (۷-۵) نشان داده شده است. بسته به نقطه شروع سطح شیبدار x_s ، زبری مصالح بستر n ، عمق اولیه آب در مخزن h_0 و در پایین دست سد h_1 ، سه حالت مختلف در اینجا بررسی می‌گردد که مشخصات آنها در جدول (۱-۵) گردآوری شده است. در تمامی محاسبات صورت گرفته در این بخش از ۱۴۰ سلول محاسباتی استفاده شده و عدد کورانت برابر با $C_n=0.5$ می‌باشد. همچنین مرز سمت چپ که دیواره نفوذ ناپذیر مخزن می‌باشد که از نوع غیر بازتابی بوده و با رابطه (۴۱-۵) در مدل عددی وارد شده است. مطابق با نتایج بدست آمده مراحل حرکت موج ناشی از شکست سد برای شرایطی که در جدول (۱-۵) از آن تحت عنوان "حالت ۱" یاد شده چنین است: در لحظه $t=0.5s$ زبانه موج ناشی از شکست به نزدیکی پنجه سطح شیبدار رسیده (شکل ۸-۵-الف) و از آن پس حرکت خود به سمت بالای شیب را آغاز می‌نماید.

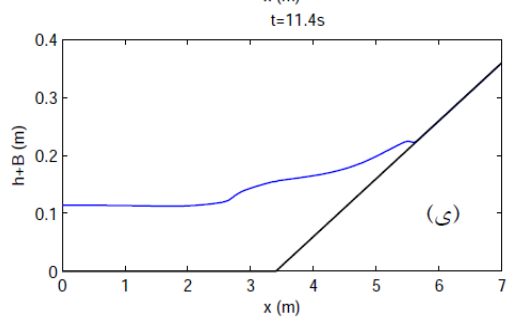
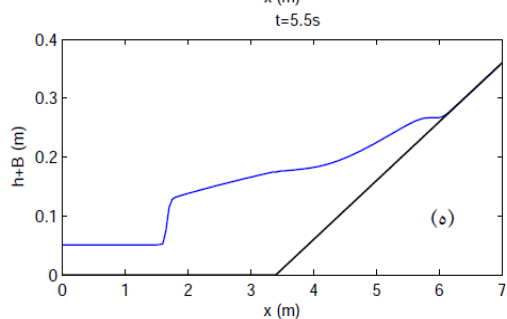
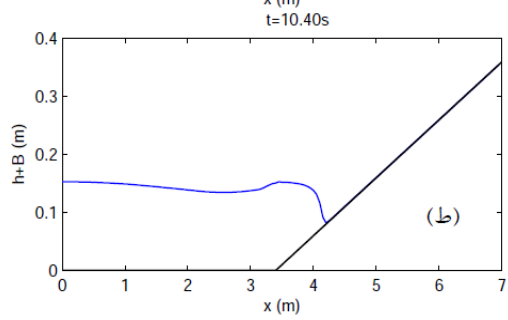
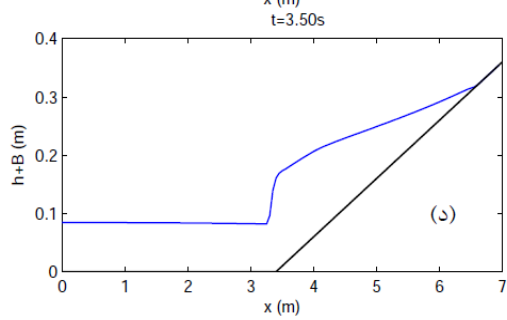
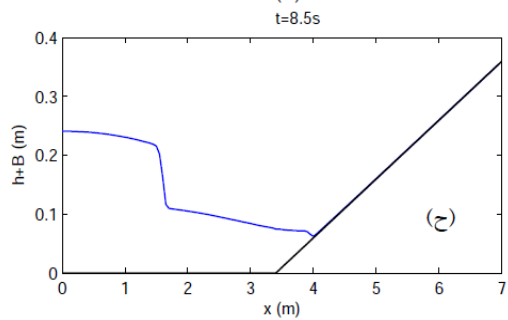
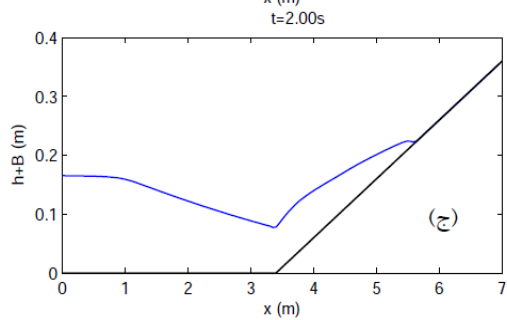
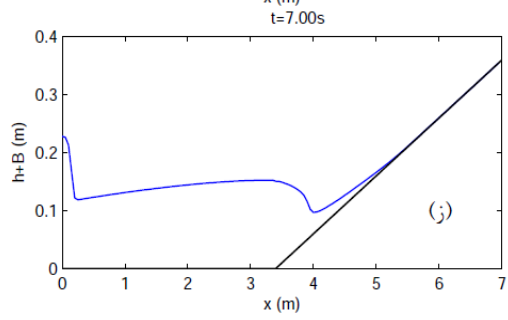
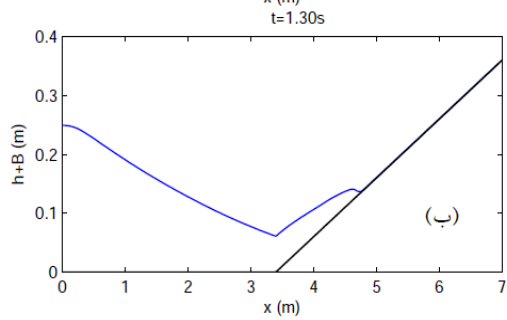
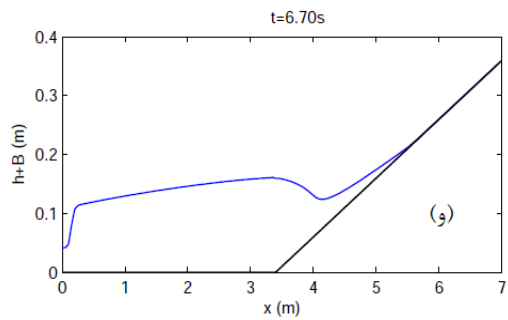
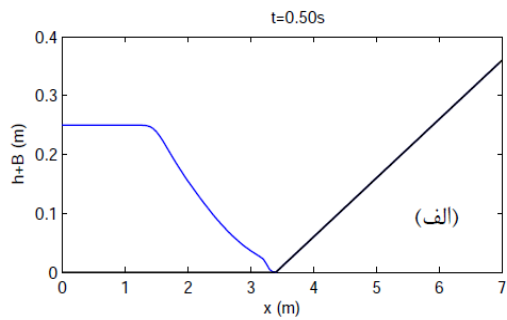


شکل (۷-۵) نمای بدون مقیاس فلوم آزمایشگاهی مورد استفاده توسط آورلی و همکارانش (۲۰۰۰)

جدول (۱-۵) مشخصات آزمایش‌های شکست سد (آورلی و همکارانش، ۲۰۰۰)

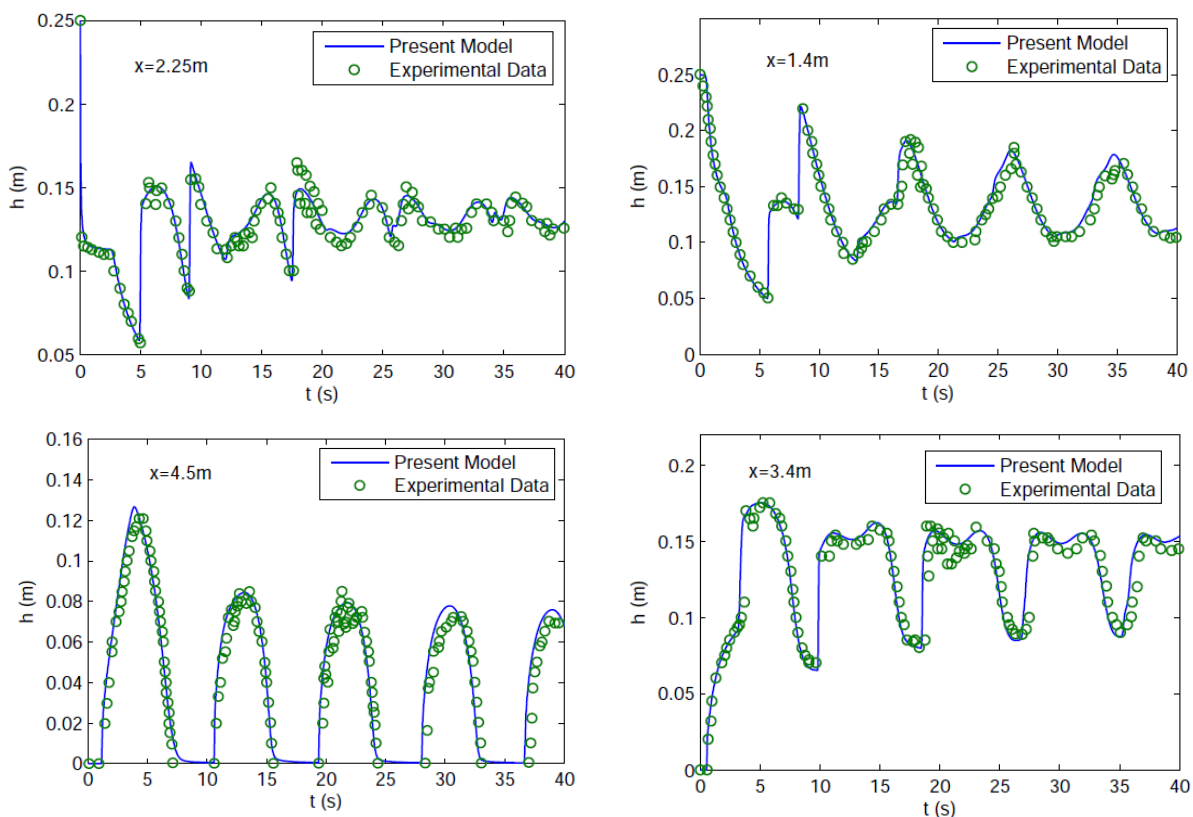
h1 (m)	h0 (m)	xs (m)	n	حالت
0	0.250	3.4	0.01	1
0.045	0.250	3.4	0.01	2
0.045	0.292	3.5	0.025	3

همانطور که اصل بقای جرم اقتضاء می‌کند فرایند بالاروی موج بر روی سطح شیب‌دار با پایین افتادن سطح آب مخزن همراه است (شکل ۵-۸-ب، ج). با نزدیک شدن زبانه موج به بیشینه ارتفاع خود بر روی سطح شیب‌دار، موجی بازتابش یافته از سطح به صورت یک اشتراک شکل می‌گیرد (شکل ۵-۸-د) و در قالب یک ناپیوستگی عمق در جهت بالادست فلوم حرکت می‌نماید (شکل ۵-۸-ه).



شکل (۸-۵) نیمرخ شبیه‌سازی شده سطح آزاد در لحظات مختلف برای حالت (۱)

همزمان، زبانه موج در قالب یک جریان فوق بحرانی به سمت پایین سطح حرکت نموده و پس از برخورد با جریان زیر بحرانی موجود در حوالی پنجه سطح شیبدار، یک پرش هیدرولیکی را بوجود می‌آورد (شکل ۵-۸- و). مشابه چنین رفتاری در فرایند پایین روی یک موج شکننده منفرد نیز مشاهده می‌شود (مهدوی و طالب بیدختی، ۲۰۰۹-ب). موج آشترک که به انتهای بالادست فلوم رسیده پس از برخورد با دیواره بازتابش می‌یابد و با ارتفاعی که اینک افزایش یافته در جهت پایین دست فلوم انتشار می‌یابد (شکل ۵-۸- ز، ج). این موج پس از رسیدن به سطح شیبدار فرایند بالاروی خود را آغاز می‌کند (شکل ۵-۸- ط، ی). مراحل فوق‌الذکر تا اتلاف کامل انرژی جریان توسط نیروی اصطکاک بستر، استهلاک نوسان‌های سطح آزاد جریان و رسیدن سیال به حالت سکون تکرار می‌شوند.

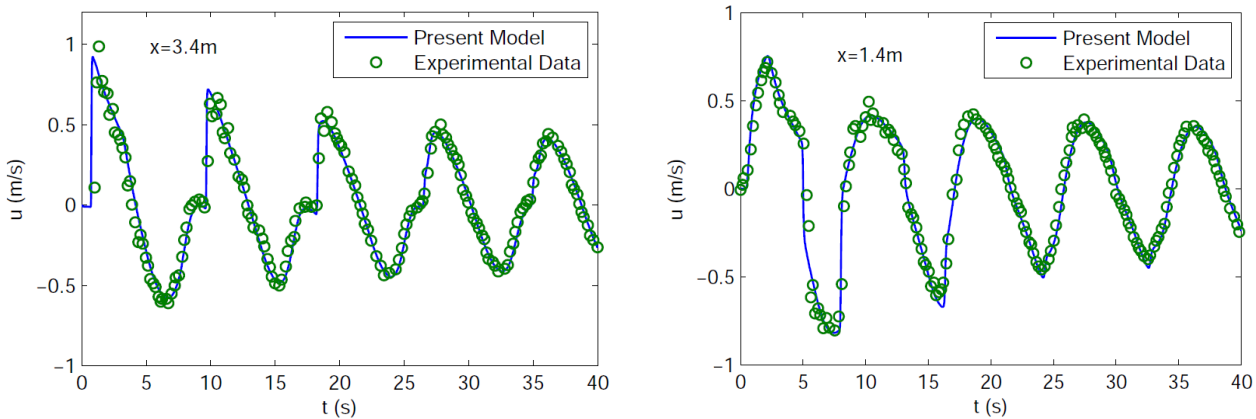


شکل (۵-۹) مقایسه تغییرات زمانی عمق جریان با داده‌های آزمایشگاهی در نقاط مختلف برای حالت (۱)

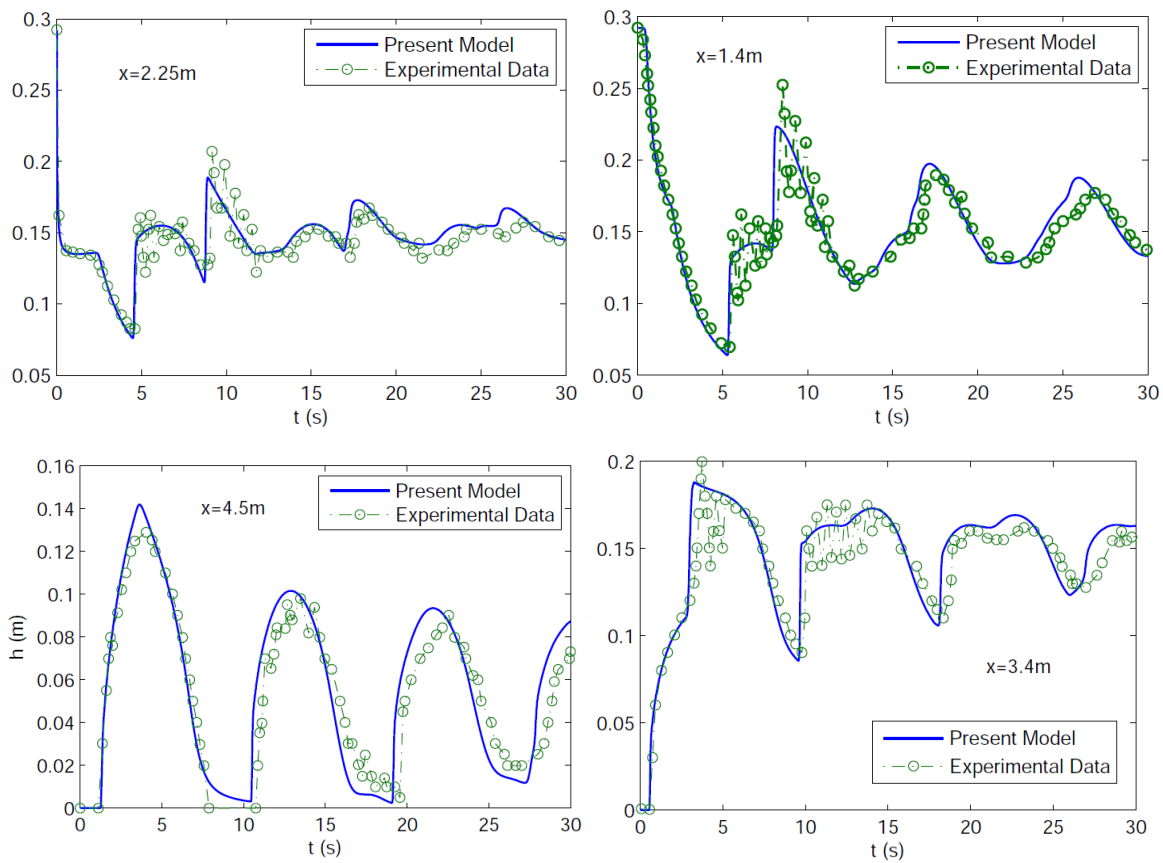
مقایسه‌ای از نتایج مدل با داده‌های آزمایشگاهی مربوط به تاریخچه زمانی عمق جریان در نقاط

$x = 1.40\text{ m}$ ، $x = 3.40\text{ m}$ و $x = 4.50\text{ m}$ برای حالات (۱) و (۳) به ترتیب در شکل (۵-۹) و (۵-۱۱) ارائه

شده است. در شکل (۵-۱۰) نیز مقایسه تغییرات زمانی سرعت جریان برای حالت (۲) در نقاط $x=1.40\text{ m}$ و $x=3.40\text{ m}$ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج عموماً از تطابقی رضایت بخش با داده‌های آزمایشگاهی برخوردارند. با این حال مدل توانایی شبیه‌سازی نوسان‌های پر بسامد موجود در داده‌های آزمایشگاهی را نداشته و تنها حالت متوسطی از آنها را ارائه داده است (شکل ۵-۹ و ۵-۱۰). در آزمایشگاه سرعت به صورت نقطه‌ای و در نزدیکی بستر برداشت شده است (آورلی و همکارانش، ۲۰۰۰). تطابق بسیار خوب سرعت شبیه‌سازی شده با مقادیر آزمایشگاهی بیانگر دقت مدل عددی می‌باشد. علاوه بر این، این تطابق در سطحی بنیادین بر صحت فرض سرعت متوسط‌گیری شده در عمق در معادلات حاکمه نیز دلالت می‌کند. به عبارت دیگر همخوانی مقادیر محاسباتی و آزمایشگاهی می‌تواند حاکی از یکنواخت بودن نسبی سرعت در راستای عمق در این آزمایش باشد.



شکل (۵-۱۰) مقایسه تغییرات زمانی سرعت جریان با داده‌های آزمایشگاهی در نقاط $x=1.40\text{ m}$ و $x=3.40\text{ m}$ برای حالت (۲)



شکل (۵-۱۱) مقایسه تغییرات زمانی عمق جریان با داده‌های آزمایشگاهی در نقاط مختلف برای حالت (۳)

فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات

✓ نتیجه‌گیری

✓ پیشنهادات

در فصول گذشته موارد مختلف موضوع مورد مطالعه به تفصیل توضیح داده شد. در این فصل به منظور جمع بندی کارهای انجام شده و ارائه یک نتیجه گیری کلی از تحقیق و همچنین مدل های شبیه سازی شده، به بیان خلاصه نتایج حاصل از تحقیق ارائه پرداخته می شود. پس از آن امکان سنجی انجام شبیه سازی جریان های متنوعی که در گروه معادلات SWE (معادلات آب کم عمق) جای می گیرد و نوشتن مدل های انعطاف پذیرتر با الگوریتم های بهینه تر در قالب پیشنهاد ارائه خواهد شد. همچنین در قسمت پیشنهادات مواردی که ممکن است در کارهای آینده به عنوان بحث شروع کننده بوده و می تواند کمکی در جهت دستیابی آسان از برای مدل های عددی آب های کم عمق به روش FV (حجم های محدود) و همچنین بحث WAD (خشک شدگی و زیر آب رفتگی) بصورت موردی در قسمت پیشنهادات ارائه خواهد شد.

۶-۱ - نتیجه گیری

موارد ذیل به عنوان نتیجه گیری نهایی از تحقیقات انجام شده و نتایج حاصل از مدل سازی می باشد:

۱. مدل عددی ارائه شده به روش حجم محدود برای مدل سه بعدی جریان دائمی بر اساس گسسته سازی ویژه که توسط الگوریتم MAC صورت گرفته است، قادر به انجام مدل سازی دامنه های محاسباتی به شکل شش و جهی نامنظم می باشد.
۲. در مدل عددی ارائه شده به روش حجم محدود برای مدل سه بعدی جریان دائمی، پدیده شطرنجی شدن سرعت و فشار در خلال محاسبات رخ نداده و پیوستگی جوابها تضمین می شود.
۳. برنامه نوشته شده به زبان ++C برای مدل سه بعدی که در قسمت پیوستها آمده است به راحتی قابل تغییر برای انجام محاسبات دو بعدی دائمی می باشد. بدین صورت که در قسمت مربوط به هندسه مسئله (Geometry Subroutine) پلان دو بعدی مورد نظر اعمال شده و

یک مدل سه بعدی به ارتفاع یک سلول (یا ضخامت واحد) به صورت دو بعدی قابل محاسبه می‌باشد.

۴. مدل ارائه شده برای SWE از نظر اعمال الگوریتمی که قابلیت تسخیر ناپیوستگی آنی جریان (شوک) مناسب بوده و در فصل نتایج مدلسازی تطابق قابل قبول مدل عددی و جواب‌های موجود از حل تحلیلی ارائه گردید.

۵. برای بررسی جریان بر روی بستر شیبدار خشک با توجه به استراژی بکار گرفته شده در خصوص WAD با جواب‌های قابل قبولی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، صحت عملکرد مدل را مشهود می‌نماید.

۶. با توجه به محاسبات انجام شده در قسمت ۴-۵، که رفتار جریان غیردائمی سریع بر روی یک بستر (در ابتدا خشک) با شیب معکوس بررسی گردید، قابلیت شبیه سازی مدل در شرایط جریان، بحرانی، زیر بحرانی و فوق بحرانی را نمایش می‌دهد.

۷. با توجه به اینکه در بالاروی و سپس بازگشت جریان بر روی بستر با شیب معکوس رخ دادن پدیده WAD غیر قابل انکار است، مقایسه‌های انجام شده صحت عملکرد مدل را تضمین می‌کند.

۸. مدل ارائه شده برای جریان بر روی بستر با شیب معکوس، با توجه به مقایسه انجام شده با نتایج آزمایشگاهی، از نظر شبیه سازی پرش هیدرولیکی محلی نیز قابل توجه است.

۲-۶- پیشنهادات

مبحث جریان‌های شامل WAD از گستردگی قابل توجهی برخوردار است. لذا جهت دستیابی محققین موضوعات مختلفی پیش روی پژوهشگران قرار دارد، که از نظر گسسته سازی و یا لزوم دائمی یا غیر دائمی بودن و همچنین یک بعدی یا دو بعدی بودن مدل عددی جای بحث دارد. لذا پیشنهادهاتی که در این زمینه ارائه می‌گردد به شرح ذیل است:

۱. با توجه به الگوریتم قوی به کار برده شده در گسسته سازی جریان سه بعدی به روش FV برای جریان دائمی، می توان مدل مذکور را برای تبدیل های داخل کانال از جمله بازشدگی، تنگ شدگی و پله تحتانی کانال تعمیم داد.
۲. با توجه اینکه در معادلات SWE فشار داخل جریان به صورت هیدرواستاتیکی فرض می شود، الگوریتم به کار گرفته شده در مدل سه بعدی جریان دائمی با ایجاد تغییراتی قابل گسترش به مدل سازی جریان های SWE می باشد. بدین صورت که می توان در حین گسسته سازی به جای پارامتر فشار پارامتر h (ارتفاع آب) لحاظ شده و محاسبات مشابهی برای جریان SWE همانند آنچه در فصل دوم ارائه گردید انجام داد. ذکر این نکته ضروری است که به منظور تضمین خاصیت تسخیر شوک نیز نیاز به تمهیدات خاصی از جمله استفاده از روش های پیش بینی کننده - تصحیح کننده و رانگ کوتای مرتبه سوم به بالا می باشد.
۳. الگوریتم WAF که در مدل عددی SWE به کار گرفته شده است صرفاً برای مدل سازی یک بعدی گسترش داده شده است. برای مدل سازی دو بعدی لازم است از روش های متداول از جمله جاروب کردن دو مرحله ای یک بار در جهت x و بار دیگر در جهت y به عنوان راحت ترین روش، الگوریتم MAC و یا دیگر الگوریتم های متداول بهره گرفت.
۴. با توجه به آخرین آزمون محاسباتی (بالاروی موج از یک شیب معکوس) مدل ارائه شده را می توان برای شبیه سازی پرش هیدرولیکی بر روی بستر شیبدار نیز گسترش داد.
۵. در مدل سازی جریان های جزر و مدی سواحل برای بررسی عملکرد WAD نیز می توان از الگوی WAF بهره گرفته و مدل حاضر را برای آن تعمیم داد.
۶. از آنجا که مدل حاضر با استفاده از میزان ارتفاع آب داخل سلول و کنترل آن با یک مقدار مشخصی از ارتفاع آب را دارد و همچنین از قابلیت WAD برخوردار می باشد، می توان در بررسی امکان سرریز شدن جریان از سرریزهای واقع در انتهای مخازن و کانال ها نیز از الگوریتم ارائه شده بهره گرفت.

پیوست‌ها

✓ پیوست الف- برنامه کامپیوتری مدل حجم محدود جریان دائمی به زبان C++

✓ پیوست ب- برنامه کامپیوتری مدل SWE به زبان FORTRAN

پیوست الف:

برنامه کامپیوتری مدل حجم محدود جریان دائمی به زبان ++C

```
// 3D Steady State Finite Volume Program
// Upwind for convective terms (Conservative)
#include<math.h>
#include<stdio.h>

const int ie=30,je=10,ke=1,ninp=10;
const double mu=1e-3,ro=1000,vinp=1.5,pout=0,pi=3.1415,dt=0.15;
const double x1=0,y1=0,z1=0,x2=30,y2=0,z2=0,x3=30,y3=10,z3=0,x4=0,y4=10,z4=0;
const double x5=0,y5=0.,z5=1,x6=30,y6=0,z6=1,x7=30,y7=10,z7=1,x8=0,y8=10,z8=1;
/*check
const int ie=10,je=15,ke=5,ninp=2;
const double mu=1e-1,ro=1000,vinp=1.5,pout=0,pi=3.1415,dt=0.2;
const double x1=0,y1=0,z1=0,x2=2,y2=0,z2=0,x3=2,y3=2,z3=0,x4=0,y4=2,z4=0;
const double
x5=0.5,y5=0.5,z5=1,x6=1.5,y6=0.5,z6=1,x7=1.5,y7=1.5,z7=1,x8=0.5,y8=1.5,z8=1;
*/
double x[ie+2][je+2][ke+2],y[ie+2][je+2][ke+2],z[ie+2][je+2][ke+2];
// x,y and z coordinates of nodes
double u[ie+2][je+2][ke+2],v[ie+2][je+2][ke+2],w[ie+2][je+2][ke+2];
// u,v and w velocities at center of volumes
double p[ie+2][je+2][ke+2],ve[ie+1][je+1][ke+1],ic[ie+2][je+2][ke+2][6]; //
Pressure at center of volumes- Volume of finite volumes - Interpolation
coefficients for determination of u,v,w and p at cell faces
double a1[ie+2][je+1][ke+1], a2[ie+1][je+2][ke+1], a3[ie+1][je+1][ke+2]; //
Area of surfaces perpendicular to 1,2 and 3 directions
double a1x[ie+2][je+1][ke+1],a2x[ie+1][je+2][ke+1],a3x[ie+1][je+1][ke+2]; // X
Projection of surfaces perpendicular to 1,2 and 3 directions
double a1y[ie+2][je+1][ke+1],a2y[ie+1][je+2][ke+1],a3y[ie+1][je+1][ke+2]; // Y
Projection of surfaces perpendicular to 1,2 and 3 directions
double a1z[ie+2][je+1][ke+1],a2z[ie+1][je+2][ke+1],a3z[ie+1][je+1][ke+2]; // Z
Projection of surfaces perpendicular to 1,2 and 3 directions
double d1p[ie+2][je+1][ke+1],d2p[ie+1][je+2][ke+1],d3p[ie+1][je+1][ke+2]; //
Primary diffusion coefficient for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double d1s[ie+2][je+1][ke+1],d2s[ie+1][je+2][ke+1],d3s[ie+1][je+1][ke+2]; //
secondary diffusion coefficient for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double d1t[ie+2][je+1][ke+1],d2t[ie+1][je+2][ke+1],d3t[ie+1][je+1][ke+2]; //
Transverse diffusion coefficient for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double p1p[ie+2][je+1][ke+1],p2p[ie+1][je+2][ke+1],p3p[ie+1][je+1][ke+2]; //
Primary pressure coefficient for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double p1s[ie+2][je+1][ke+1],p2s[ie+1][je+2][ke+1],p3s[ie+1][je+1][ke+2]; //
secondary pressure coefficient for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double p1t[ie+2][je+1][ke+1],p2t[ie+1][je+2][ke+1],p3t[ie+1][je+1][ke+2]; //
Transverse pressure coefficient for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double m1[ie+2][je+1][ke+1], m2[ie+1][je+2][ke+1], m3[ie+1][je+1][ke+2]; //
convection mass flows through surfaces perpendicular to 1,2 and 3 directions
double cp1[ie+2][je+1][ke+1],cp2[ie+1][je+2][ke+1],cp3[ie+1][je+1][ke+2]; //
plp,p2p and p3p divided by average volume for surfaces perpendicular to 1,2
and 3 directions
double vf1[ie+2][je+1][ke+1],vf2[ie+1][je+2][ke+1],vf3[ie+1][je+1][ke+2]; //
value part of continuity equation at cell faces
```

```

double pa1[ie+2][je+1][ke+1],pa2[ie+1][je+2][ke+1],pa3[ie+1][je+1][ke+2];//
Interpolated pressue values at cell surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double d1u[ie+2][je+1][ke+1],d2u[ie+1][je+2][ke+1],d3u[ie+1][je+1][ke+2];//
Secondary diffusion flows of u for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double d1v[ie+2][je+1][ke+1],d2v[ie+1][je+2][ke+1],d3v[ie+1][je+1][ke+2];//
Secondary diffusion flows of v for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double d1w[ie+2][je+1][ke+1],d2w[ie+1][je+2][ke+1],d3w[ie+1][je+1][ke+2];//
Secondary diffusion flows of w for surfaces perpendicular to 1,2 and 3
directions
double xm[ie+2][je+2][ke+2],ym[ie+2][je+2][ke+2],zm[ie+2][je+2][ke+2]; //
x,y and z coordinated of center of elements
double
ru[ie+1][je+1][ke+1],rv[ie+1][je+1][ke+1],rw[ie+1][je+1][ke+1],ap[ie+2][je+2][
ke+2];// Right hand side values of u,v and w momentum equations- Central
coefficent value
void geometry();
void solver();
void surfdat();
void printvars();
long t;
void main(){
    FILE *res;
    res=fopen("Res.txt","w");
    fprintf(res,"ie=%i, je=%i, ke=%i, ninp=%i, dt=%f, mu=%f, RO=%f, vinp=%f,
pout=%f", ie, je, ke, ninp, dt, mu, ro, vinp, pout);
    fprintf(res, "\nStep p[1][1][1]          v[%i][%i][%i]\n", ie, je, ke);
    geometry();
    for(t=1;t<2000;t++){
        printf("\nTry=%i", t);
        solver();
        fprintf(res, "%i      %f      %f\n", t, p[1][1][1], v[ie][je][ke]);
    };
    surfdat();
    printvars();
    fclose(res);
}
void geometry(){
    int i,j,k;
    double xt, yt, zt, xmt, ymt, zmt, c1;
    double kx, ky, kz, ex, ey, ez, zx, zy, zz;
// _____ Linear Mesh Generation by 8
point
    for(i=1;i<ie+2;i++) for(j=1;j<je+2;j++) for(k=1;k<ke+2;k++){
        x[i][j][k]=x1+(x2-x1)*(i-1)/ie+(x4-x1)*(j-1)/je+(x3+x1-x2-x4)*(i-
1)*(j-1)/(ie*je)
                +(x5-x1)*(k-1)/ke+(x1+x6-x2-x5)*(i-1)*(k-
1)/(ie*ke)+(x8+x1-x4-x5)*(j-1)*(k-1)/(je*ke)
                +(x7+x5+x2+x4-x6-x8-x1-x3)*(i-1)*(j-1)*(k-
1)/(ie*je*ke);
        y[i][j][k]=y10+(y2-y10)*(i-1)/ie+(y4-y10)*(j-1)/je+(y3+y10-y2-
y4)*(i-1)*(j-1)/(ie*je)
                +(y5-y10)*(k-1)/ke+(y10+y6-y2-y5)*(i-1)*(k-
1)/(ie*ke)+(y8+y10-y4-y5)*(j-1)*(k-1)/(je*ke)
                +(y7+y5+y2+y4-y6-y8-y10-y3)*(i-1)*(j-1)*(k-
1)/(ie*je*ke);
        z[i][j][k]=z1+(z2-z1)*(i-1)/ie+(z4-z1)*(j-1)/je+(z3+z1-z2-z4)*(i-
1)*(j-1)/(ie*je)
                +(z5-z1)*(k-1)/ke+(z1+z6-z2-z5)*(i-1)*(k-
1)/(ie*ke)+(z8+z1-z4-z5)*(j-1)*(k-1)/(je*ke)
                +(z7+z5+z2+z4-z6-z8-z1-z3)*(i-1)*(j-1)*(k-
1)/(ie*je*ke);
    };
// _____ centre of each cell and interpolation
weights computations _____

```



```

    for (i=1; i<ie+1; i++) for (j=1; j<j+1; j++) for (k=1; k<ke+1; k++) {

        xmt=(x[i][j][k]+x[i+1][j][k]+x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k]+x[i][j][k+1]+x[
i+1][j][k+1]+x[i][j+1][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])/8;

        ymt=(y[i][j][k]+y[i+1][j][k]+y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k]+y[i][j][k+1]+y[
i+1][j][k+1]+y[i][j+1][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])/8;

        zmt=(z[i][j][k]+z[i+1][j][k]+z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k]+z[i][j][k+1]+z[
i+1][j][k+1]+z[i][j+1][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])/8;
//west
        xt=(x[i][j][k]+x[i][j+1][k]+x[i][j][k+1]+x[i][j+1][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i][j][k]+y[i][j+1][k]+y[i][j][k+1]+y[i][j+1][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i][j][k]+z[i][j+1][k]+z[i][j][k+1]+z[i][j+1][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][1]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);
//east
        xt=(x[i+1][j][k]+x[i+1][j+1][k]+x[i+1][j][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i+1][j][k]+y[i+1][j+1][k]+y[i+1][j][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i+1][j][k]+z[i+1][j+1][k]+z[i+1][j][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][2]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);
//south
        xt=(x[i][j][k]+x[i+1][j][k]+x[i][j][k+1]+x[i+1][j][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i][j][k]+y[i+1][j][k]+y[i][j][k+1]+y[i+1][j][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i][j][k]+z[i+1][j][k]+z[i][j][k+1]+z[i+1][j][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][3]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);
//north
        xt=(x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k]+x[i][j+1][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k]+y[i][j+1][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k]+z[i][j+1][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][4]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);
//bottom
        xt=(x[i][j][k]+x[i+1][j][k]+x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k])/4-xmt;
        yt=(y[i][j][k]+y[i+1][j][k]+y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k])/4-ymt;
        zt=(z[i][j][k]+z[i+1][j][k]+z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k])/4-zmt;
        ic[i][j][k][5]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);
//top
        xt=(x[i][j][k+1]+x[i+1][j][k+1]+x[i][j+1][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i][j][k+1]+y[i+1][j][k+1]+y[i][j+1][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i][j][k+1]+z[i+1][j][k+1]+z[i][j+1][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][6]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

        xm[i][j][k]=xmt;
        ym[i][j][k]=ymt;
        zm[i][j][k]=zmt;
    };

    for (i=2; i<ie+1; i++) for (j=1; j<j+1; j++) for (k=1; k<ke+1; k++) {xt=ic[i][j][k]
[1];
        ic[i][j][k][1]=ic[i-1][j][k][2]/(xt+ic[i-1][j][k][2]); ic[i-
1][j][k][2]=xt/(xt+ic[i-1][j][k][2]); };
    for (j=1; j<j+1; j++) for (k=1; k<ke+1; k++) {

        ic[1][j][k][1]=0.5; ic[0][j][k][2]=0.5; ic[ie][j][k][2]=0.5; ic[ie+1][j][k]
[1]=0.5;

        xm[0][j][k]=(x[1][j][k]+x[1][j+1][k]+x[1][j][k+1]+x[1][j+1][k+1])/2-
xm[1][j][k];

```

```

        ym[0][j][k]=(y[1][j][k]+y[1][j+1][k]+y[1][j][k+1]+y[1][j+1][k+1])/2-
ym[1][j][k];

        zm[0][j][k]=(z[1][j][k]+z[1][j+1][k]+z[1][j][k+1]+z[1][j+1][k+1])/2-
zm[1][j][k];

        xm[ie+1][j][k]=(x[ie+1][j][k]+x[ie+1][j+1][k]+x[ie+1][j][k+1]+x[ie+1][j+
1][k+1])/2-xm[ie][j][k];

        ym[ie+1][j][k]=(y[ie+1][j][k]+y[ie+1][j+1][k]+y[ie+1][j][k+1]+y[ie+1][j+
1][k+1])/2-ym[ie][j][k];

        zm[ie+1][j][k]=(z[ie+1][j][k]+z[ie+1][j+1][k]+z[ie+1][j][k+1]+z[ie+1][j+
1][k+1])/2-zm[ie][j][k];
    };

    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=2;j<j+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {xt=ic[i][j][k]
[3];
        ic[i][j][k][3]=ic[i][j-1][k][4]/(xt+ic[i][j-1][k][4]);ic[i][j-
1][k][4]=xt/(xt+ic[i][j-1][k][4]);};
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++) {

        ic[i][1][k][3]=0.5;ic[i][0][k][4]=0.5;ic[i][je][k][4]=0.5;ic[i][je+1][k]
[3]=0.5;

        xm[i][0][k]=(x[i][1][k]+x[i+1][1][k]+x[i][1][k+1]+x[i+1][1][k+1])/2-
xm[i][1][k];

        ym[i][0][k]=(y[i][1][k]+y[i+1][1][k]+y[i][1][k+1]+y[i+1][1][k+1])/2-
ym[i][1][k];

        zm[i][0][k]=(z[i][1][k]+z[i+1][1][k]+z[i][1][k+1]+z[i+1][1][k+1])/2-
zm[i][1][k];

        xm[i][je+1][k]=(x[i][je+1][k]+x[i+1][je+1][k]+x[i][je+1][k+1]+x[i+1][je+
1][k+1])/2-xm[i][je][k];

        ym[i][je+1][k]=(y[i][je+1][k]+y[i+1][je+1][k]+y[i][je+1][k+1]+y[i+1][je+
1][k+1])/2-ym[i][je][k];

        zm[i][je+1][k]=(z[i][je+1][k]+z[i+1][je+1][k]+z[i][je+1][k+1]+z[i+1][je+
1][k+1])/2-zm[i][je][k];
    };

    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<j+1;j++) for(k=2;k<ke+1;k++) {xt=ic[i][j][k]
[5];
        ic[i][j][k][5]=ic[i][j][k-1][6]/(xt+ic[i][j][k-1][6]);ic[i][j][k-
1][6]=xt/(xt+ic[i][j][k-1][6]);};
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<j+1;j++) {

        ic[i][j][1][5]=0.5;ic[i][j][0][6]=0.5;ic[i][j][ke][6]=0.5;ic[i][j][ke+1]
[5]=0.5;

        xm[i][j][0]=(x[i][j][1]+x[i+1][j][1]+x[i][j+1][1]+x[i+1][j+1][1])/2-
xm[i][j][1];

        ym[i][j][0]=(y[i][j][1]+y[i+1][j][1]+y[i][j+1][1]+y[i+1][j+1][1])/2-
ym[i][j][1];

        zm[i][j][0]=(z[i][j][1]+z[i+1][j][1]+z[i][j+1][1]+z[i+1][j+1][1])/2-
zm[i][j][1];

```

```

        xm[i][j][ke+1]=(x[i][j][ke+1]+x[i+1][j][ke+1]+x[i][j+1][ke+1]+x[i+1][j+1][ke+1])/2-xm[i][j][ke];

        ym[i][j][ke+1]=(y[i][j][ke+1]+y[i+1][j][ke+1]+y[i][j+1][ke+1]+y[i+1][j+1][ke+1])/2-ym[i][j][ke];

        zm[i][j][ke+1]=(z[i][j][ke+1]+z[i+1][j][ke+1]+z[i][j+1][ke+1]+z[i+1][j+1][ke+1])/2-zm[i][j][ke];
    };

// _____ Cell faces 1: determination of
al,alx,aly,alz,d1p,d1s,d1t
    for(i=1;i<ie+2;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        kx=xm[i][j][k]-xm[i-1][j][k];
        ky=ym[i][j][k]-ym[i-1][j][k];
        kz=zm[i][j][k]-zm[i-1][j][k];
        ex=(x[i][j+1][k]+x[i][j+1][k+1]-x[i][j][k]-x[i][j][k+1])/2;
        ey=(y[i][j+1][k]+y[i][j+1][k+1]-y[i][j][k]-y[i][j][k+1])/2;
        ez=(z[i][j+1][k]+z[i][j+1][k+1]-z[i][j][k]-z[i][j][k+1])/2;
        zx=(x[i][j][k+1]+x[i][j+1][k+1]-x[i][j][k]-x[i][j+1][k])/2;
        zy=(y[i][j][k+1]+y[i][j+1][k+1]-y[i][j][k]-y[i][j+1][k])/2;
        zz=(z[i][j][k+1]+z[i][j+1][k+1]-z[i][j][k]-z[i][j+1][k])/2;
        alx[i][j][k]= ey*zz-ez*zy;
        aly[i][j][k]=-ex*zz+ez*zx;
        alz[i][j][k]= ex*zy-ey*zx;

        al[i][j][k]=sqrt(alx[i][j][k]*alx[i][j][k]+aly[i][j][k]*aly[i][j][k]+alz[i][j][k]*alz[i][j][k]);

        d1p[i][j][k]=al[i][j][k]*al[i][j][k]*mu/(alx[i][j][k]*kx+aly[i][j][k]*ky+alz[i][j][k]*kz);
        d1s[i][j][k]=((zy*kz-zz*ky)*alx[i][j][k]+(zz*kx-zx*kz)*aly[i][j][k]+(zx*ky-zy*kx)*alz[i][j][k])*mu/
            (((zy*kz-zz*ky)*ex+(zz*kx-zx*kz)*ey+(zx*ky-zy*kx)*ez)*4);
        d1t[i][j][k]=((ky*ez-kz*ey)*alx[i][j][k]+(kz*ex-kx*ez)*aly[i][j][k]+(kx*ey-ky*ex)*alz[i][j][k])*mu/
            (((ky*ez-kz*ey)*zx+(kz*ex-kx*ez)*zy+(kx*ey-ky*ex)*zz)*4);
    };

// _____ Cell faces 2: determination of
a2,a2x,a2y,a2z,d2p,d2s,d2t
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+2;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        kx=xm[i][j][k]-xm[i][j-1][k];
        ky=ym[i][j][k]-ym[i][j-1][k];
        kz=zm[i][j][k]-zm[i][j-1][k];
        ex=(x[i+1][j][k]+x[i+1][j][k+1]-x[i][j][k]-x[i][j][k+1])/2;
        ey=(y[i+1][j][k]+y[i+1][j][k+1]-y[i][j][k]-y[i][j][k+1])/2;
        ez=(z[i+1][j][k]+z[i+1][j][k+1]-z[i][j][k]-z[i][j][k+1])/2;
        zx=(x[i][j][k+1]+x[i+1][j][k+1]-x[i][j][k]-x[i+1][j][k])/2;
        zy=(y[i][j][k+1]+y[i+1][j][k+1]-y[i][j][k]-y[i+1][j][k])/2;
        zz=(z[i][j][k+1]+z[i+1][j][k+1]-z[i][j][k]-z[i+1][j][k])/2;
        a2x[i][j][k]=-ey*zz+ez*zy;
        a2y[i][j][k]= ex*zz-ez*zx;
        a2z[i][j][k]=-ex*zy+ey*zx;

        a2[i][j][k]=sqrt(a2x[i][j][k]*a2x[i][j][k]+a2y[i][j][k]*a2y[i][j][k]+a2z[i][j][k]*a2z[i][j][k]);

        d2p[i][j][k]=a2[i][j][k]*a2[i][j][k]*mu/(a2x[i][j][k]*kx+a2y[i][j][k]*ky+a2z[i][j][k]*kz);
        d2s[i][j][k]=((zy*kz-zz*ky)*a2x[i][j][k]+(zz*kx-zx*kz)*a2y[i][j][k]+(zx*ky-zy*kx)*a2z[i][j][k])*mu/
            (((zy*kz-zz*ky)*ex+(zz*kx-zx*kz)*ey+(zx*ky-zy*kx)*ez)*4);
        d2t[i][j][k]=((ky*ez-kz*ey)*a2x[i][j][k]+(kz*ex-kx*ez)*a2y[i][j][k]+(kx*ey-ky*ex)*a2z[i][j][k])*mu/

```

```

((ky*ez-kz*ey)*zx+(kz*ex-kx*ez)*zy+(kx*ey-
ky*ex)*zz)*4);
};
//_____ Cell faces 3: determination of
a3,a3x,a3y,a3z,d3p,d3s,d3t
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+2;k++){
    kx=xm[i][j][k]-xm[i][j][k-1];
    ky=ym[i][j][k]-ym[i][j][k-1];
    kz=zm[i][j][k]-zm[i][j][k-1];
    ex=(x[i+1][j][k]+x[i+1][j+1][k]-x[i][j][k]-x[i][j+1][k])/2;
    ey=(y[i+1][j][k]+y[i+1][j+1][k]-y[i][j][k]-y[i][j+1][k])/2;
    ez=(z[i+1][j][k]+z[i+1][j+1][k]-z[i][j][k]-z[i][j+1][k])/2;
    zx=(x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k]-x[i][j][k]-x[i+1][j][k])/2;
    zy=(y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k]-y[i][j][k]-y[i+1][j][k])/2;
    zz=(z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k]-z[i][j][k]-z[i+1][j][k])/2;
    a3x[i][j][k]= ey*zz-ez*zy;
    a3y[i][j][k]=-ex*zz+ez*zx;
    a3z[i][j][k]= ex*zy-ey*zx;

    a3[i][j][k]=sqrt(a3x[i][j][k]*a3x[i][j][k]+a3y[i][j][k]*a3y[i][j][k]+a3z
[i][j][k]*a3z[i][j][k]);

    d3p[i][j][k]=a3[i][j][k]*a3[i][j][k]*mu/(a3x[i][j][k]*kx+a3y[i][j][k]*ky
+a3z[i][j][k]*kz);
    d3s[i][j][k]=((zy*kz-zz*ky)*a3x[i][j][k]+(zz*kx-
zx*kz)*a3y[i][j][k]+(zx*ky-zy*kx)*a3z[i][j][k])*mu/
((zy*kz-zz*ky)*ex+(zz*kx-zx*kz)*ey+(zx*ky-
zy*kx)*ez)*4);
    d3t[i][j][k]=((ky*ez-kz*ey)*a3x[i][j][k]+(kz*ex-
kx*ez)*a3y[i][j][k]+(kx*ey-ky*ex)*a3z[i][j][k])*mu/
((ky*ez-kz*ey)*zx+(kz*ex-kx*ez)*zy+(kx*ey-
ky*ex)*zz)*4);
};
//_____ Volume computation for each
cell
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){
    xt=x[i+1][j+1][k+1]-x[i][j][k];
    yt=y[i+1][j+1][k+1]-y[i][j][k];
    zt=z[i+1][j+1][k+1]-z[i][j][k];

    ve[i][j][k]=(xt*a1x[i+1][j][k]+yt*a1y[i+1][j][k]+zt*a1z[i+1][j][k]
+xt*a2x[i][j+1][k]+yt*a2y[i][j+1][k]+zt*a2z[i][j+1][k]
+xt*a3x[i][j][k+1]+yt*a3y[i][j][k+1]+zt*a3z[i][j][k+1])/3;
};
//_____ Cell faces 1: determination of
p1p,p1s,p1t
for(i=2;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){
    c1=(ve[i][j][k]+ve[i-1][j][k])/2;
    p1p[i][j][k]=d1p[i][j][k]/mu*c1;
    p1s[i][j][k]=d1s[i][j][k]/mu*c1;
    p1t[i][j][k]=d1t[i][j][k]/mu*c1;
};
//_____ Cell faces 2: determination of
p2p,p2s,p2t
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=2;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){
    c1=(ve[i][j][k]+ve[i][j-1][k])/2;
    p2p[i][j][k]=d2p[i][j][k]/mu*c1;
    p2s[i][j][k]=d2s[i][j][k]/mu*c1;
    p2t[i][j][k]=d2t[i][j][k]/mu*c1;
};
for(i=ie-
ninp+1;i<ie+1;i++) p2p[i][je+1][ke]=d2p[i][je+1][ke]/mu*ve[i][je][ke];
//_____ Cell faces 3: determination of
p3p,p3s,p3t
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=2;k<ke+1;k++){

```

```

        c1=(ve[i][j][k]+ve[i][j][k-1])/2;
        p3p[i][j][k]=d3p[i][j][k]/mu*c1;
        p3s[i][j][k]=d3s[i][j][k]/mu*c1;
        p3t[i][j][k]=d3t[i][j][k]/mu*c1;
    };

// _____ Initial Condition
    for(i=1;i<ninp+1;i++){u[i][0][1]=vinp*a2x[i][1][1]/a2[i][1][1];v[i][0][1]=vinp*a2y[i][1][1]/a2[i][1][1];w[i][0][1]=vinp*a2z[i][1][1]/a2[i][1][1];};
    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++)p[i][je+1][ke]=pout;
}
void solver(){
    int i,j,k;
    float ut,vt,wt,tp,tpu,tpv,tpw,c1;
// _____ Cell faces 1: Mass flow through cell
face and u,v and w secondary diffusion
    for(i=1;i<ie+2;i++)for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++){
        ut=u[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+u[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
        vt=v[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+v[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
        wt=w[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+w[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
        m1[i][j][k]=(ut*a1x[i][j][k]+vt*a1y[i][j][k]+wt*a1z[i][j][k])*ro;
        d1u[i][j][k]=-d1s[i][j][k]*(u[i][j+1][k]+u[i-1][j+1][k]-u[i][j-1][k]-u[i-1][j-1][k])
            -d1t[i][j][k]*(u[i][j][k+1]+u[i-1][j][k+1]-u[i][j][k-1]-u[i-1][j][k-1]);
        d1v[i][j][k]=-d1s[i][j][k]*(v[i][j+1][k]+v[i-1][j+1][k]-v[i][j-1][k]-v[i-1][j-1][k])
            -d1t[i][j][k]*(v[i][j][k+1]+v[i-1][j][k+1]-v[i][j][k-1]-v[i-1][j][k-1]);
        d1w[i][j][k]=-d1s[i][j][k]*(w[i][j+1][k]+w[i-1][j+1][k]-w[i][j-1][k]-w[i-1][j-1][k])
            -d1t[i][j][k]*(w[i][j][k+1]+w[i-1][j][k+1]-w[i][j][k-1]-w[i-1][j][k-1]);
    };
// _____ Cell faces 2: Mass flow through cell
face and u,v and w secondary diffusion
    for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+2;j++)for(k=1;k<ke+1;k++){
        ut=u[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+u[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
        vt=v[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+v[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
        wt=w[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+w[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
        m2[i][j][k]=(ut*a2x[i][j][k]+vt*a2y[i][j][k]+wt*a2z[i][j][k])*ro;
        d2u[i][j][k]=-d2s[i][j][k]*(u[i+1][j][k]+u[i+1][j-1][k]-u[i-1][j][k]-u[i-1][j-1][k])
            -d2t[i][j][k]*(u[i][j][k+1]+u[i][j-1][k+1]-u[i][j][k-1]-u[i][j-1][k-1]);
        d2v[i][j][k]=-d2s[i][j][k]*(v[i+1][j][k]+v[i+1][j-1][k]-v[i-1][j][k]-v[i-1][j-1][k])
            -d2t[i][j][k]*(v[i][j][k+1]+v[i][j-1][k+1]-v[i][j][k-1]-v[i][j-1][k-1]);
        d2w[i][j][k]=-d2s[i][j][k]*(w[i+1][j][k]+w[i+1][j-1][k]-w[i-1][j][k]-w[i-1][j-1][k])
            -d2t[i][j][k]*(w[i][j][k+1]+w[i][j-1][k+1]-w[i][j][k-1]-w[i][j-1][k-1]);
    };
// _____ Cell faces 3: Mass flow through cell
face and u,v and w secondary diffusion
    for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+2;k++){
        ut=u[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+u[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
        vt=v[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+v[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
        wt=w[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+w[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
        m3[i][j][k]=(ut*a3x[i][j][k]+vt*a3y[i][j][k]+wt*a3z[i][j][k])*ro;
        d3u[i][j][k]=-d3s[i][j][k]*(u[i+1][j][k]+u[i+1][j][k-1]-u[i-1][j][k]-u[i-1][j][k-1])
            -d3t[i][j][k]*(u[i][j+1][k]+u[i][j+1][k-1]-u[i][j-1][k]-u[i][j-1][k-1]);
    };
}

```

```

        d3v[i][j][k]=-d3s[i][j][k]*(v[i+1][j][k]+v[i+1][j][k-1]-v[i-1][j][k]-v[i-1][j][k-1])
        -d3t[i][j][k]*(v[i][j+1][k]+v[i][j+1][k-1]-v[i][j-1][k]-v[i][j-1][k-1]);
        d3w[i][j][k]=-d3s[i][j][k]*(w[i+1][j][k]+w[i+1][j][k-1]-w[i-1][j][k]-w[i-1][j][k-1])
        -d3t[i][j][k]*(w[i][j+1][k]+w[i][j+1][k-1]-w[i][j-1][k]-w[i][j-1][k-1]);
    };
// _____ Computational of central coefficient ap
and right hand side of momentum x,y and z _____
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        tp=0; tpu=0; tpv=0; tpw=0;
        if(m1[i][j][k]>0) {tpu=m1[i][j][k]*u[i-1][j][k]; tpv=m1[i][j][k]*v[i-1][j][k]; tpw=m1[i][j][k]*w[i-1][j][k];} else tp=-m1[i][j][k];
        if(m1[i+1][j][k]>0) tp=tp+m1[i+1][j][k]; else {tpu=tpu-m1[i+1][j][k]*u[i+1][j][k]; tpv=tpv-m1[i+1][j][k]*v[i+1][j][k]; tpw=tpw-m1[i+1][j][k]*w[i+1][j][k];};
        if(m2[i][j][k]>0) {tpu=tpu+m2[i][j][k]*u[i][j-1][k]; tpv=tpv+m2[i][j][k]*v[i][j-1][k]; tpw=tpw+m2[i][j][k]*w[i][j-1][k];} else tp=tp-m2[i][j][k];
        if(m2[i][j+1][k]>0) tp=tp+m2[i][j+1][k]; else {tpu=tpu-m2[i][j+1][k]*u[i][j+1][k]; tpv=tpv-m2[i][j+1][k]*v[i][j+1][k]; tpw=tpw-m2[i][j+1][k]*w[i][j+1][k];};
        if(m3[i][j][k]>0) {tpu=tpu+m3[i][j][k]*u[i][j][k-1]; tpv=tpv+m3[i][j][k]*v[i][j][k-1]; tpw=tpw+m3[i][j][k]*w[i][j][k-1];} else tp=tp-m3[i][j][k];
        if(m3[i][j][k+1]>0) tp=tp+m3[i][j][k+1]; else {tpu=tpu-m3[i][j][k+1]*u[i][j][k+1]; tpv=tpv-m3[i][j][k+1]*v[i][j][k+1]; tpw=tpw-m3[i][j][k+1]*w[i][j][k+1];};

        ap[i][j][k]=ve[i][j][k]/dt*ro+d1p[i][j][k]+d1p[i+1][j][k]+d2p[i][j][k]+d2p[i][j+1][k]+d3p[i][j][k]+d3p[i][j][k+1]+tp;

        ut=d1u[i][j][k]+d2u[i][j][k]+d3u[i][j][k]-d1u[i+1][j][k]-d2u[i][j+1][k]-d3u[i][j][k+1];
        vt=d1v[i][j][k]+d2v[i][j][k]+d3v[i][j][k]-d1v[i+1][j][k]-d2v[i][j+1][k]-d3v[i][j][k+1];
        wt=d1w[i][j][k]+d2w[i][j][k]+d3w[i][j][k]-d1w[i+1][j][k]-d2w[i][j+1][k]-d3w[i][j][k+1];

        ru[i][j][k]=(ve[i][j][k]/dt*ro*u[i][j][k]+tpu+d1p[i][j][k]*u[i-1][j][k]+d1p[i+1][j][k]*u[i+1][j][k]
        +d2p[i][j][k]*u[i][j-1][k]+d2p[i][j+1][k]*u[i][j+1][k]+d3p[i][j][k]*u[i][j][k-1]+d3p[i][j][k+1]*u[i][j][k+1]-ut)/ap[i][j][k];
        rv[i][j][k]=(ve[i][j][k]/dt*ro*v[i][j][k]+tpv+d1p[i][j][k]*v[i-1][j][k]+d1p[i+1][j][k]*v[i+1][j][k]
        +d2p[i][j][k]*v[i][j-1][k]+d2p[i][j+1][k]*v[i][j+1][k]+d3p[i][j][k]*v[i][j][k-1]+d3p[i][j][k+1]*v[i][j][k+1]-vt)/ap[i][j][k];
        rw[i][j][k]=(ve[i][j][k]/dt*ro*w[i][j][k]+tpw+d1p[i][j][k]*w[i-1][j][k]+d1p[i+1][j][k]*w[i+1][j][k]
        +d2p[i][j][k]*w[i][j-1][k]+d2p[i][j+1][k]*w[i][j+1][k]+d3p[i][j][k]*w[i][j][k-1]+d3p[i][j][k+1]*w[i][j][k+1]-wt)/ap[i][j][k];
    };
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) {ap[i][j][0]=ap[i][j][1]; ap[i][j][ke+1]=ap[i][j][ke];};
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++) {ap[i][0][k]=ap[i][1][k]; ap[i][je+1][k]=ap[i][je][k];};
    for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {ap[0][j][k]=ap[1][j][k]; ap[ie+1][j][k]=ap[ie][j][k];};

// _____ Cell faces 1: cpl pressure coefficient
and vfl for continuity equation _____

```

```

for(i=2;i<ie+1;i++) for(j=1;j<j+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
    c1=2/(ap[i-1][j][k]+ap[i][j][k]);
    cp1[i][j][k]=p1p[i][j][k]*c1;
    ut=ru[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+ru[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
    vt=rv[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+rv[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
    wt=rw[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+rw[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
    vf1[i][j][k]= ut*a1x[i][j][k]+vt*a1y[i][j][k]+wt*a1z[i][j][k]
        -p1s[i][j][k]*c1*(p[i][j+1][k]+p[i-
1][j+1][k]-p[i][j-1][k]-p[i-1][j-1][k])
        -p1t[i][j][k]*c1*(p[i][j][k+1]+p[i-
1][j][k+1]-p[i][j][k-1]-p[i-1][j][k-1]);
    };
    for(j=1;j<j+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {cp1[1][j][k]=0;cp1[ie+1][j][k]=0;
vf1[1][j][k]=0;vf1[ie+1][j][k]=0;};

// _____ Cell faces 2: cp2 pressure coefficient
and vf2 for continuity equation _____
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=2;j<j+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
    c1=2/(ap[i][j][k]+ap[i][j-1][k]);
    cp2[i][j][k]=p2p[i][j][k]*c1;
    ut=ru[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+ru[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
    vt=rv[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+rv[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
    wt=rw[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+rw[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
    vf2[i][j][k]= ut*a2x[i][j][k]+vt*a2y[i][j][k]+wt*a2z[i][j][k]
        -p2s[i][j][k]*c1*(p[i+1][j][k]+p[i+1][j-
1][k]-p[i-1][j][k]-p[i-1][j-1][k])
        -p2t[i][j][k]*c1*(p[i][j][k+1]+p[i][j-
1][k+1]-p[i][j][k-1]-p[i][j-1][k-1]);
    };
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++) {cp2[i][1][k]=0;cp2[i][je+1][k]=0;
vf2[i][1][k]=0;vf2[i][je+1][k]=0;};
    for(i=ie-
ninp+1;i<ie+1;i++) {cp2[i][je+1][ke]=p2p[i][je+1][ke]/ap[i][je][ke];

    vf2[i][je+1][ke]=ru[i][je][ke]*a2x[i][je+1][ke]+rv[i][je][ke]*a2y[i][je+
1][ke]+rw[i][je][ke]*a2z[i][je+1][ke];};
    for(i=1;i<ninp+1;i++) vf2[i][1][1]=vinp*a2[i][1][1];

// _____ Cell faces 3: cp3 pressure coefficient
and vf3 for continuity equation _____
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<j+1;j++) for(k=2;k<ke+1;k++) {
    c1=2/(ap[i][j][k-1]+ap[i][j][k]);
    cp3[i][j][k]=p3p[i][j][k]*c1;
    ut=ru[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+ru[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
    vt=rv[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+rv[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
    wt=rw[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+rw[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
    vf3[i][j][k]= ut*a3x[i][j][k]+vt*a3y[i][j][k]+wt*a3z[i][j][k]
        -p3s[i][j][k]*c1*(p[i+1][j][k]+p[i+1][j][k-
1]-p[i-1][j][k]-p[i-1][j][k-1])
        -p3t[i][j][k]*c1*(p[i][j+1][k]+p[i][j+1][k-
1]-p[i][j-1][k]-p[i][j-1][k-1]);
    };
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<j+1;j++) {cp3[i][j][1]=0;cp3[i][j][ke+1]=0;
vf3[i][j][1]=0;vf3[i][j][ke+1]=0;};

// _____ Computation of new p,u,v
and w values _____
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<j+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++)
    p[i][j][k]=(p[i+1][j][k]*cp1[i+1][j][k]+p[i-
1][j][k]*cp1[i][j][k]+p[i][j+1][k]*cp2[i][j+1][k]+p[i][j-1][k]*cp2[i][j][k]
        +p[i][j][k+1]*cp3[i][j][k+1]+p[i][j][k-
1]*cp3[i][j][k]
        +vf1[i][j][k]+vf2[i][j][k]+vf3[i][j][k]-
vf1[i+1][j][k]-vf2[i][j+1][k]-vf3[i][j][k+1])/

(cp1[i][j][k]+cp2[i][j][k]+cp3[i][j][k]+cp1[i+1][j][k]+cp2[i][j+1][k]+cp3[i][j
][k+1]);

```

```

for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) {p[i][j][0]=p[i][j][1];p[i][j][ke+1]=p[i][j][ke];};
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++) {p[i][0][k]=p[i][1][k];p[i][je+1][k]=p[i][je][k];};
    for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {p[0][j][k]=p[1][j][k];p[ie+1][j][k]=p[ie][j][k];};
    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++)p[i][je+1][ke]=pout;

    for(i=1;i<ie+2;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++)pa1[i][j][k]=p[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+p[i-1][j][k]*ic[i-1][j][k][2];
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+2;j++) for(k=1;k<ke+1;k++)pa2[i][j][k]=p[i][j][k]*ic[i][j][k][3]+p[i][j-1][k]*ic[i][j-1][k][4];
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+2;k++)pa3[i][j][k]=p[i][j][k]*ic[i][j][k][5]+p[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][6];
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        ut=-
        (pa1[i][j][k]*a1x[i][j][k]+pa2[i][j][k]*a2x[i][j][k]+pa3[i][j][k]*a3x[i][j][k]-
        -pa1[i+1][j][k]*a1x[i+1][j][k]-
        pa2[i][j+1][k]*a2x[i][j+1][k]-pa3[i][j][k+1]*a3x[i][j][k+1]);
        vt=-
        (pa1[i][j][k]*a1y[i][j][k]+pa2[i][j][k]*a2y[i][j][k]+pa3[i][j][k]*a3y[i][j][k]-
        -pa1[i+1][j][k]*a1y[i+1][j][k]-
        pa2[i][j+1][k]*a2y[i][j+1][k]-pa3[i][j][k+1]*a3y[i][j][k+1]);
        wt=-
        (pa1[i][j][k]*a1z[i][j][k]+pa2[i][j][k]*a2z[i][j][k]+pa3[i][j][k]*a3z[i][j][k]-
        -pa1[i+1][j][k]*a1z[i+1][j][k]-
        pa2[i][j+1][k]*a2z[i][j+1][k]-pa3[i][j][k+1]*a3z[i][j][k+1]);

        u[i][j][k]=ru[i][j][k]-ut/ap[i][j][k];
        v[i][j][k]=rv[i][j][k]-vt/ap[i][j][k];
        w[i][j][k]=rw[i][j][k]-wt/ap[i][j][k];
    };

// _____ Boundary
Conditions
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) {
        u[i][j][0]=-u[i][j][1];v[i][j][0]=-v[i][j][1];w[i][j][0]=-w[i][j][1];
        u[i][j][ke+1]=-u[i][j][ke];v[i][j][ke+1]=-v[i][j][ke];w[i][j][ke+1]=-w[i][j][ke];
    };
    for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        u[0][j][k]=-u[1][j][k];v[0][j][k]=-v[1][j][k];w[0][j][k]=-w[1][j][k];
        u[ie+1][j][k]=-u[ie][j][k];v[ie+1][j][k]=-v[ie][j][k];w[ie+1][j][k]=-w[ie][j][k];
    };
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        u[i][0][k]=-u[i][1][k];v[i][0][k]=-v[i][1][k];w[i][0][k]=-w[i][1][k];
        u[i][je+1][k]=-u[i][je][k];v[i][je+1][k]=-v[i][je][k];w[i][je+1][k]=-w[i][je][k];
    };
    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++) {
        u[i][je+1][ke]=u[i][je][ke];
        v[i][je+1][ke]=v[i][je][ke];
        w[i][je+1][ke]=w[i][je][ke];
    };
    for(i=1;i<ninp+1;i++) {u[i][0][1]=vinp*a2x[i][1][1]/a2[i][1][1];v[i][0][1]=vinp*a2y[i][1][1]/a2[i][1][1];w[i][0][1]=vinp*a2z[i][1][1]/a2[i][1][1];};
}
void surfdat() {
    FILE *vx1,*vx2,*vx3,*vy1,*vy2,*vy3,*vz1,*vz2,*vz3,*pt;
    vx1=fopen("Vx1.txt","w");
    vx2=fopen("Vx2.txt","w");

```



```

vx3=fopen("Vx3.txt","w");
vy1=fopen("Vy1.txt","w");
vy2=fopen("Vy2.txt","w");
vy3=fopen("Vy3.txt","w");
vz1=fopen("Vz1.txt","w");
vz2=fopen("Vz2.txt","w");
vz3=fopen("Vz3.txt","w");
pt=fopen("Pressures.csv","w");
int i,j,k,ang;

i=1;ang=atan2(w[i][j][k],v[i][j][k])*180/pi-90;
for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++)fprintf(vx1,"%f%f%f\n",y[i][j][k],z[i][j][k]
, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan2(w[i][j][k],v[i]
[j][k])*180/pi-90);
i=ie/2;for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++)fprintf(vx2,"%f%f%f\n",y[i][j][k],z[i][j][k]
, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan2(w[i][j][k],v[i]
[j][k])*180/pi-90);
i=ie;for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++)fprintf(vx3,"%f%f%f\n",y[i][j][k],z[i][j][k]
, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan2(w[i][j][k],v[i]
[j][k])*180/pi-90);
j=1;for(i=1;i<ie+1;i++)for(k=1;k<ke+1;k++)fprintf(vy1,"%f%f%f\n",x[i][j][k],z[i][j][k]
, sqrt(u[i][j][k]*u[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan2(w[i][j][k],u[i]
[j][k])*180/pi-90);
j=je/2;for(i=1;i<ie+1;i++)for(k=1;k<ke+1;k++)fprintf(vy2,"%f%f%f\n",x[i][j][k],z[i][j][k]
, sqrt(u[i][j][k]*u[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan2(w[i][j][k],u[i]
[j][k])*180/pi-90);
j=je;for(i=1;i<ie+1;i++)for(k=1;k<ke+1;k++)fprintf(vy3,"%f%f%f\n",x[i][j][k],z[i][j][k]
, sqrt(u[i][j][k]*u[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan2(w[i][j][k],u[i]
[j][k])*180/pi-90);
k=1;for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)fprintf(vz1,"%f%f%f\n",x[i][j][k],y[i][j][k]
, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+u[i][j][k]*u[i][j][k]),atan2(v[i][j][k],u[i]
[j][k])*180/pi-90);
k=ke/2;for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)fprintf(vz2,"%f%f%f\n",x[i][j][k],y[i][j][k]
, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+u[i][j][k]*u[i][j][k]),atan2(v[i][j][k],u[i]
[j][k])*180/pi-90);
k=ke;for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)fprintf(vz3,"%f%f%f\n",x[i][j][k],y[i][j][k]
, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+u[i][j][k]*u[i][j][k]),atan2(v[i][j][k],u[i]
[j][k])*180/pi-90);
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(pt,"\nk=%i\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++)fprintf(pt,"%i",i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(pt,"\ni",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(pt,"%f",p[i][j][k]);
        }
    }
};
};
fclose(vx1), (vx2), (vx3), (vy1), (vy2), (vy3), (vz1), (vz2), (vz3), (pt);

```

```

FILE *Pressures2;
Pressures2=fopen("Pressures2.txt","w");
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
    fprintf(Pressures2,"%i\t%i\t%f\n",i,j,p[i][j][k]);
}
}
void printvars() {
int i,j,k;
FILE *chk;
chk=fopen("Check.csv","w");
fprintf(chk,"_____Nodal
Coordinates:_____");
for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk,"nk=%i___\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk,",,%i",i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk,"n%i",j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){

fprintf(chk,"%f,%f,%f",x[i][j][k],y[i][j][k],z[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"n\n_____Elemen
ts Volume:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk,"nk=%i___\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk,"%i",i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk,"n%i",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk,"%f",ve[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"n\n_____Elemen
ts Center:_____");
for(k=ke+1;k>-1;k--){
    fprintf(chk,"nk=%i___\nj/i",k);
    for(i=0;i<ie+2;i++) fprintf(chk,",,,%i",i);
    for(j=je+1;j>-1;j--){
        fprintf(chk,"n%i",j);
        for(i=0;i<ie+2;i++){

fprintf(chk,"%f,%f,%f",xm[i][j][k],ym[i][j][k],zm[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"n\n_____Interp
olation Coefficients:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk,"nk=%i___\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk,",,,,,%i",i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk,"n%i",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){

fprintf(chk,"%f,%f,%f,%f,%f,%f",ic[i][j][k][1],ic[i][j][k][2],ic[i][j][k][3],ic[i][j][k][4],ic[i][j][k][5],ic[i][j][k][6]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"n\n_____alx
aly alz:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk,"nk=%i___\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk,",,,%i",i);

```

```

        for(j=je;j>0;j--){
            fprintf(chk, "\n%i", j);
            for(i=1;i<ie+2;i++){

printf(chk, "%f,%f,%f", alx[i][j][k], aly[i][j][k], alz[i][j][k]);
                };
            };
        };
        fprintf(chk, "\n\n_____a2x
a2y a2z:_____");
        for(k=ke;k>0;k--){
            fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
            for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ",, ,%i", i);
            for(j=je+1;j>0;j--){
                fprintf(chk, "\n%i", j);
                for(i=1;i<ie+1;i++){

printf(chk, "%f,%f,%f", a2x[i][j][k], a2y[i][j][k], a2z[i][j][k]);
                    };
                };
            };
        };
        fprintf(chk, "\n\n_____a3x
a3y a3z:_____");
        for(k=ke+1;k>0;k--){
            fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
            for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ",, ,%i", i);
            for(j=je;j>0;j--){
                fprintf(chk, "\n%i", j);
                for(i=1;i<ie+1;i++){

printf(chk, "%f,%f,%f", a3x[i][j][k], a3y[i][j][k], a3z[i][j][k]);
                    };
                };
            };
        };
        fprintf(chk, "\n\n_____dlp:
_____");
        for(k=ke;k>0;k--){
            fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
            for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, ",,%i", i);
            for(j=je;j>0;j--){
                fprintf(chk, "\n%i", j);
                for(i=1;i<ie+2;i++){
                    fprintf(chk, "%f", dlp[i][j][k]);
                };
            };
        };
        fprintf(chk, "\n\n_____d2p:
_____");
        for(k=ke;k>0;k--){
            fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
            for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ",,%i", i);
            for(j=je+1;j>0;j--){
                fprintf(chk, "\n%i", j);
                for(i=1;i<ie+1;i++){
                    fprintf(chk, "%f", d2p[i][j][k]);
                };
            };
        };
        fprintf(chk, "\n\n_____d3p:
_____");
        for(k=ke+1;k>0;k--){
            fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
            for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ",,%i", i);
            for(j=je;j>0;j--){
                fprintf(chk, "\n%i", j);
                for(i=1;i<ie+1;i++){
                    fprintf(chk, "%f", d3p[i][j][k]);
                };
            };
        };

```

```

};
};
};
fprintf(chk, "\n\n_____d1s:
_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++){ fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, "%f", d1s[i][j][k]);
        };
    };
};
};
fprintf(chk, "\n\n_____d2s:
_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++){ fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, "%f", d2s[i][j][k]);
        };
    };
};
};
fprintf(chk, "\n\n_____d3s:
_____");
for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++){ fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, "%f", d3s[i][j][k]);
        };
    };
};
};
fprintf(chk, "\n\n_____p1p:
_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++){ fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, "%f", p1p[i][j][k]);
        };
    };
};
};
fprintf(chk, "\n\n_____p2p:
_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++){ fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, "%f", p2p[i][j][k]);
        };
    };
};
};
};
fprintf(chk, "\n\n_____p3p:
_____");

```

```

for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=j+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", p3p[i][j][k]);
        };
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ pls: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=j+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, ", %f", pls[i][j][k]);
        };
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ p2s: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=j+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", p2s[i][j][k]);
        };
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ p3s: _____
_____");

for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=j+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", p3s[i][j][k]);
        };
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ plt: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=j+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, ", %f", plt[i][j][k]);
        };
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ p2t: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=j+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){

```

```

        fprintf(chk, "%f", p2t[i][j][k]);
    };
};
fprintf(chk, "\n\n_____p3t:_____");
for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, "%f", p3t[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk, "\n\n_____m1:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, "%f", m1[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk, "\n\n_____m2:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, "%f", m2[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk, "\n\n_____m3:_____");
for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, "%f", m3[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk, "\n\n_____cp1:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i____\nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, "%i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, "%f", cp1[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk, "\n\n_____cp2:_____");

```

```

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", cp2[i][j][k]);
        }
    };
};
fprintf(chk, "\n\n _____ cp3: _____
_____");

for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", cp3[i][j][k]);
        }
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ vf1: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk, ", %f", vf1[i][j][k]);
        }
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ vf2: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", vf2[i][j][k]);
        }
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ vf3: _____
_____");

for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk, ", %f", vf3[i][j][k]);
        }
    };
};

fprintf(chk, "\n\n _____ pal: _____
_____");

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk, "\nk=%i ____ \nj/i", k);
    for(i=1;i<ie+2;i++) fprintf(chk, ", %i", i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk, "\n%i", j);

```

```

        for(i=1;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk,"%f",pa1[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"\n\n_____pa2:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk,"\nk=%i____\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk,"%i",i);
    for(j=je+1;j>0;j--){
        fprintf(chk,"\n%i",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk,"%f",pa2[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"\n\n_____pa3:_____");
for(k=ke+1;k>0;k--){
    fprintf(chk,"\nk=%i____\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk,"%i",i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk,"\n%i",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(chk,"%f",pa3[i][j][k]);
        };
    };
};

fprintf(chk,"\n\n_____Elemen
ts ru rv rw:_____");
for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(chk,"\nk=%i____\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(chk",,,%i",i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(chk,"\n%i",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){

fprintf(chk,"%f,%f,%f",ru[i][j][k],rv[i][j][k],rw[i][j][k]);
        };
    };
};
fprintf(chk,"\n\n_____Elemen
ts ap:_____");
for(k=ke+1;k>-1;k--){
    fprintf(chk,"\nk=%i____\nj/i",k);
    for(i=0;i<ie+2;i++) fprintf(chk,"%i",i);
    for(j=je+1;j>-1;j--){
        fprintf(chk,"\n%i",j);
        for(i=0;i<ie+2;i++){
            fprintf(chk,"%f",ap[i][j][k]);
        };
    };
};
fclose (chk);
/* For checking satisfication of mementum equations at each cell

//define following line globally
double
px[ie+1][je+1][ke+1],py[ie+1][je+1][ke+1],pz[ie+1][je+1][ke+1],u1[ie+2][je+2][
ke+2],v1[ie+2][je+2][ke+2],w1[ie+2][je+2][ke+2];

// use following 2 line before computation of new u,v and w values in sub
solver
    u1[i][j][k]=u[i][j][k];v1[i][j][k]=v[i][j][k];w1[i][j][k]=w[i][j][k];
    px[i][j][k]=ut;py[i][j][k]=vt;pz[i][j][k]=wt;

```



```

// use following 3x2 line in sutable places in boundary condition

    u1[i][j][0]=u[i][j][0];v1[i][j][0]=v[i][j][0];w1[i][j][0]=w[i][j][0];

    u1[i][j][ke+1]=u[i][j][ke+1];v1[i][j][ke+1]=v[i][j][ke+1];w1[i][j][ke+1]
=w[i][j][ke+1];

    u1[0][j][k]=u[0][j][k];v1[0][j][k]=v[0][j][k];w1[0][j][k]=w[0][j][k];

    u1[ie+1][j][k]=u[ie+1][j][k];v1[ie+1][j][k]=v[ie+1][j][k];w1[ie+1][j][k]
=w[ie+1][j][k];

    u1[i][0][k]=u[i][0][k];v1[i][0][k]=v[i][0][k];w1[i][0][k]=w[i][0][k];

    u1[i][je+1][k]=u[i][je+1][k];v1[i][je+1][k]=v[i][je+1][k];w1[i][je+1][k]
=w[i][je+1][k];

//

    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){
        tpu=0;tpv=0;tpw=0;
        if(m1[i][j][k]>0){tpu=-m1[i][j][k]*u1[i-1][j][k];tpv=-
m1[i][j][k]*v1[i-1][j][k];tpw=-m1[i][j][k]*w1[i-1][j][k];}else
            {tpu=-m1[i][j][k]*u[i][j][k];    tpv=-
m1[i][j][k]*v[i][j][k];    tpw=-m1[i][j][k]*w[i][j][k];};
        if(m1[i+1][j][k]>0){tpu=tpu+m1[i+1][j][k]*u[i][j][k];
tpv=tpv+m1[i+1][j][k]*v[i][j][k];    tpw=tpw+m1[i+1][j][k]*w[i][j][k];}else

{tpu=tpu+m1[i+1][j][k]*u1[i+1][j][k];tpv=tpv+m1[i+1][j][k]*v1[i+1][j][k];tpw=t
pw+m1[i+1][j][k]*w1[i+1][j][k];};
        if(m2[i][j][k]>0){tpu=tpu-m2[i][j][k]*u1[i][j-1][k];tpv=tpv-
m2[i][j][k]*v1[i][j-1][k];tpw=tpw-m2[i][j][k]*w1[i][j-1][k];}else
            {tpu=tpu-m2[i][j][k]*u[i][j][k];
tpv=tpv-m2[i][j][k]*v[i][j][k];    tpw=tpw-m2[i][j][k]*w[i][j][k];};
        if(m2[i][j+1][k]>0){tpu=tpu+m2[i][j+1][k]*u[i][j][k];
tpv=tpv+m2[i][j+1][k]*v[i][j][k];    tpw=tpw+m2[i][j+1][k]*w[i][j][k];}else

{tpu=tpu+m2[i][j+1][k]*u1[i][j+1][k];tpv=tpv+m2[i][j+1][k]*v1[i][j+1][k];tpw=t
pw+m2[i][j+1][k]*w1[i][j+1][k];};
        if(m3[i][j][k]>0){tpu=tpu-m3[i][j][k]*u1[i][j][k-1];tpv=tpv-
m3[i][j][k]*v1[i][j][k-1];tpw=tpw-m3[i][j][k]*w1[i][j][k-1];}else
            {tpu=tpu-m3[i][j][k]*u[i][j][k];
tpv=tpv-m3[i][j][k]*v[i][j][k];    tpw=tpw-m3[i][j][k]*w[i][j][k];};
        if(m3[i][j][k+1]>0){tpu=tpu+m3[i][j][k+1]*u[i][j][k];
tpv=tpv+m3[i][j][k+1]*v[i][j][k];    tpw=tpw+m3[i][j][k+1]*w[i][j][k];}else

{tpu=tpu+m3[i][j][k+1]*u1[i][j][k+1];tpv=tpv+m3[i][j][k+1]*v1[i][j][k+1];tpw=t
pw+m3[i][j][k+1]*w1[i][j][k+1];};
        tpu=tpu+d1p[i][j][k]*(u[i][j][k]-u1[i-
1][j][k])+d1p[i+1][j][k]*(u[i][j][k]-u1[i+1][j][k])+d2p[i][j][k]*(u[i][j][k]-
u1[i][j-1][k])
            +d2p[i][j+1][k]*(u[i][j][k]-
u1[i][j+1][k])+d3p[i][j][k]*(u[i][j][k]-u1[i][j][k-
1])+d3p[i][j][k+1]*(u[i][j][k]-u1[i][j][k+1])+px[i][j][k]+(u[i][j][k]-
u1[i][j][k])/dt*ve[i][j][k]*ro;
        tpu=tpu+d1p[i][j][k]*(v[i][j][k]-v1[i-
1][j][k])+d1p[i+1][j][k]*(v[i][j][k]-v1[i+1][j][k])+d2p[i][j][k]*(v[i][j][k]-
v1[i][j-1][k])
            +d2p[i][j+1][k]*(v[i][j][k]-
v1[i][j+1][k])+d3p[i][j][k]*(v[i][j][k]-v1[i][j][k-
1])+d3p[i][j][k+1]*(v[i][j][k]-v1[i][j][k+1])+py[i][j][k]+(v[i][j][k]-
v1[i][j][k])/dt*ve[i][j][k]*ro;

```

```

        tpw=tpw+d1p[i][j][k]*(w[i][j][k]-w1[i-
1][j][k])+d1p[i+1][j][k]*(w[i][j][k]-w1[i+1][j][k])+d2p[i][j][k]*(w[i][j][k]-
w1[i][j-1][k])
        +d2p[i][j+1][k]*(w[i][j][k]-
w1[i][j+1][k])+d3p[i][j][k]*(w[i][j][k]-w1[i][j][k-
1])+d3p[i][j][k+1]*(w[i][j][k]-w1[i][j][k+1])+pz[i][j][k]+(w[i][j][k]-
w1[i][j][k])/dt*ve[i][j][k]*ro;
        if(fabs(tpu)>0.00001)printf("\n mX(%i,%i,%i)
error=%f",i,j,k,tpu);
        if(fabs(tpv)>0.00001)printf("\n mY(%i,%i,%i)
error=%f",i,j,k,tpv);
        if(fabs(tpw)>0.00001)printf("\n mZ(%i,%i,%i)
error=%f",i,j,k,tpw);
    };
*/
};

```

پیوست ب:

برنامه کامپیوتری مدل SWE به زبان FORTRAN

```
PROGRAM RUNUP
!C      Declaration of variables

      INTEGER::N,SAVEF,SCREEN,CELLS,LIMITE,IFRAME
      REAL(8)::ETA,hsoli,DT,CI,SI,UBD,HO,T,HL,UL,HR,UR,HDRY,X1,G,DX,VVV,  &
          TTT,SSS,xsolit,CW,OK1,OK2,OK3,OK4,AAA,BBB,CN1,CN,DTt,OUT
      REAL(8), DIMENSION(:,:),ALLOCATABLE::VOLD,FP,FN,VNEW,Vp,Vpp, FLUX,CS
      REAL(8), DIMENSION(:),ALLOCATABLE::BX,B,B2X,XP,S

      COMMON/MAX/ CELLS
      COMMON/HDRY/HDRY
      COMMON/GRAVITY/G

      OPEN(1,FILE='WAF.DAT')
      OPEN(2,FILE='LEN.DAT')
      OPEN(3,FILE='TOPO.DAT')
      OPEN(4,FILE='OUTPUT_TIMES.DAT')
      OPEN(5,FILE='POSI.DAT')
      OPEN(6,FILE='ERROR.DAT')

      OPEN(8, FILE='G2.DAT')
      OPEN(16,FILE='G4.DAT')
      OPEN(32,FILE='G8.DAT')
      OPEN(40,FILE='G10.DAT')
      OPEN(44,FILE='G11.DAT')
      OPEN(52,FILE='G13.DAT')
      OPEN(56,FILE='G14.DAT')
      OPEN(60,FILE='G15.DAT')
      OPEN(80,FILE='G20.DAT')

      !*****Input
Data*****
      ! ORDER:
      !      0 EULER (EXPLICIT)
      !      1 IMPLICIT FIRST ORDER
```

```

!           2 R-K TWO STAGE (NO BED FRICTION)
!           3 IMPLICIT SECOND ORDER (TRAPZOIDAL) Really exact!
!           4 R-K FOURTH ORDER (NO BED FRICTION)

```

```

ORDER=3
CFL=0.6D0
g=9.81D0
HDRY=1.0E-5
HO=1.0D0
XMIN=0
CELLS=152

```

```

XMAX=38
TIMEOUT=.1
TSTOP=60
SCREEN=1
LIMITE=5
CN1=0.0125D0

```

```

IF (ORDER.NE.0.AND.ORDER.NE.1.AND.ORDER.NE.2.AND.ORDER.NE.3.AND.ORDER.NE.4) &

```

```

STOP 'ORDER SHOULD BE 0,1,2,3 OR 4!'

```

```

PRINT*, '*****'

```

```

*****'

```

```

PRINT*, 'INPUT DATA:'
PRINT*, ' X_SOLITARY/H_0=', xsolit
PRINT*, ' ORDER=', ORDER
PRINT*, ' CFL=', CFL
PRINT*, ' RSLOPE=', RSLOPE
PRINT*, ' HDRY=', HDRY
PRINT*, ' hsoli=', hsoli
PRINT*, ' XMIN=', XMIN
PRINT*, ' XMAX=', XMAX
PRINT*, ' CELLS=', CELLS
PRINT*, ' TIMEOUT=', TIMEOUT
PRINT*, ' TSTOP=', TSTOP
PRINT*, ' SCREEN=', SCREEN
PRINT*, ' LIMITER=', LIMITE

```

```

!
```

```

! PRINT *, ' ',
PRINT *, '*****'
*****'

!*****
*****

      DX=(xmax-xmin)/CELLS
      T=0;DT=0;M=-1
      ALLOCATE (VOLD (2, -1:CELLS+2), VNEW (2, -1:CELLS+2), FN (2, -1:CELLS+2), FP (2, -
1:CELLS+2), S (-1:CELLS+2))
      ALLOCATE (Vp (2, -1:CELLS+2), Vpp (2, -1:CELLS+2), B (-1:CELLS+3), BX (-
1:CELLS+2), &
      B2X (-1:CELLS+2), xP (-1:CELLS+3),          FLUX (2, -1:CELLS+2), CS (2, -
1:CELLS+2))

!*****TOPOGRAGHY*****
      DO I=-1,CELLS+3
      XP(I)=XMIN+REAL(I-1)*DX
      ENDDO

      DO I=-1,CELLS+3
      IF (XP(I).GE.25.5D0.AND.XP(I).LE.28.5D0) THEN
      B(I)=(4.0D0/30.0D0)*(XP(I)-25.5D0)
      ELSEIF (XP(I).GE.28.5D0.AND.XP(I).LE.31.5D0) THEN
      B(I)=(-4.0D0/30.0D0)*(XP(I)-28.5D0)+0.4D0
      ELSE
      B(I)=0.0D0
      ENDIF
      ENDDO

!*****SOURCE*****TERM
*****

      DO J=1,CELLS
      BP=(B(J+1)+B(J))/2          !BP=B(i+1/2)
      BN=(B(J)+B(J-1))/2        !BN=B(i-1/2)
      S(J)=- (BP-BN)/DX
      ENDDO

      DO J=1,CELLS
      WRITE (3,*) XP(J), B(J)
      ENDDO

```

```

!*****INITIAL DATA FOR SOLITARY WAVE
*****

```

```

CW=DSQRT (g*(HO+HSOLI)) !((is this necessary?! ))

```

```

DO II=1,CELLS

```

```

    IF(XP(II).LE.15.5D0) THEN

```

```

        VOLD(1,II)=0.75D0 !AT CELL CENTERS

```

```

        VOLD(2,II)=0.0D0

```

```

    ELSEIF(XP(II).GE.30.38D0) then

```

```

        VOLD(1,II)=0.15-B(ii)

```

```

        VOLD(2,II)=0.0D0

```

```

    else

```

```

        VOLD(1,II)=HDRV

```

```

        VOLD(2,II)=0.0D0

```

```

    ENDIF

```

```

ENDDO

```

```

VVV=SUM(VOLD(1,1:CELLS))*DX

```

```

SSS=0.0D0

```

```

IFRAME=1

```

```

!_____BEGINNING OF MAIN
LOOP_____

```

```

1 M=M+1

```

```

    SSS=SSS+VOLD(2,CELLS)*DT-VOLD(2,1)*DT

```

```

    TTT=0.0D0

```

```

    TTT=SUM(VOLD(1,1:CELLS))*DX +SSS

```

```

    T=T+DT

```

```

!*****Saving Results in
WAF.DAT*****

```

```

IF(T.GE.REAL(IFRAME-1)*TIMEOUT) THEN

```

```

    IF(M.NE.0.AND.MOD((IFRAME-1),SCREEN).EQ.0) THEN

```

```

        PRINT*, ' STEP=',M, ' DT=', DT

```

```

        PRINT*, ' TIME=',T, ' t*=',T*SQRT(G/HO)

```

```

        PRINT*, ' VOLUME=',TTT,'% VOLUME CHANGE=',(TTT-VVV)/VVV

```

```

PRINT*, '*****
*'

```

```

ENDIF

```

```

WRITE(4,*) T

```

```

        WRITE(6,*) (TTT-VVV)/VVV
DO JJ=1,CELLS
    OUT=VOLD(1,JJ)
    IF (OUT.EQ.HDRY) OUT=0.0D0
    WRITE(1,*) OUT+B(JJ)
! OPEN(8,FILE='G2.DAT')
! OPEN(16,FILE='G4.DAT')
! OPEN(32,FILE='G8.DAT')
! OPEN(40,FILE='G10.DAT')
! OPEN(44,FILE='G11.DAT')
! OPEN(52,FILE='G13.DAT')
! OPEN(56,FILE='G14.DAT')
! OPEN(60,FILE='G15.DAT')
! OPEN(80,FILE='G20.DAT')

! IF(XP(JJ).GT.0.21 .AND.XP(JJ).LT. 0.260 ) THEN
! IF(XP(JJ).GT.0.24 .AND.XP(JJ).LT. 0.26 ) THEN
! IF(XP(JJ).GT.9.91 .AND.XP(JJ).LT. 10 ) THEN
! IF((XP(JJ)).lt.1.2d0.and.XP(JJ).gt.1.11) THEN
IF(XP(JJ).EQ.2.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(8,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.4.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(16,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.8.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(32,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.10.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(40,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.11.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(44,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.13.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(52,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.14.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(56,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.15.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(60,*) OUT !+B(JJ)
ELSEIF(XP(JJ).EQ.20.0D0+15.5d0 ) THEN
    WRITE(80,*) OUT !+B(JJ)
! STOP
ENDIF
ENDDO

IFRAME=IFRAME+1
ENDIF

```

```

!*****CFL
Criterion*****
UBD=0.0D0
DO II=1,CELLS
  IF (VOLD(1,II) .LE. HDRY .AND. VOLD(1,II) .GE. 0.0D0) THEN
    VOLD(1,II) =HDRY
    VOLD(2,II) =0.0D0
  ELSEIF (VOLD(1,II) .LT. 0.0D0) THEN
    PRINT*, 'M=',M
    PRINT*, 'VOLD(1, ',II, ')=',VOLD(1,II)
    STOP 'CHANGE CFL !'
  ENDIF
  SI=DSQRT(g*VOLD(1,II) )+DABS(VOLD(2,II) /VOLD(1,II) )
  UBD=DMAX1(UBD,SI)
ENDDO
DT=CFL*DX/(UBD+1E-10)

!*****VARIABLE
*****
DTt=0.5d0*DT

DO i=1,CELLS
!
  CN=0.0D0
  IF (Vold(1,i) .GT. HDRY) CN=CN1

AAA=1.0D0+0.5D0*DTt*2.0D0*G*CN*CN*DABS(Vold(2,i) )/(Vold(1,i) ** (7.0D0/3.0D0) )
  BBB=DTt*S(i) *G*Vold(1,i) -
DTt*G*CN*CN*Vold(2,i) *DABS(Vold(2,i) )/(Vold(1,i) ** (7.0D0/3.0D0) )
  Vp(1,i) =Vold(1,i)
  Vp(2,i) =Vold(2,i) +BBB/AAA
ENDDO

CALL WAFFLU(Vp,DT,DX,LIMITE,FLUX)

DO i=1,CELLS
  Vpp(1,i) =Vp(1,i) -DT*(FLUX(1,I) -FLUX(1,I-1) )/DX
  Vpp(2,i) =Vp(2,i) -DT*(FLUX(2,I) -FLUX(2,I-1) )/DX

```



```

        CN=0.0D0
        IF (Vpp(1,i) .GT. HDRY) CN=CN1

AAA=1.0D0+0.5D0*DTt*2.0D0*G*CN*CN*DABS (Vpp(2,i) / (Vpp(1,i) ** (7.0D0/3.0D0))
        BBB=DTt*S(i)*G*Vpp(1,i) -
DTt*G*CN*CN*Vpp(2,i)*DABS (Vpp(2,i) / (Vpp(1,i) ** (7.0D0/3.0D0))
        VNEW(1,i)=Vpp(1,i)
        VNEW(2,i)=Vpp(2,i)+BBB/AAA
        ENDDO

        VOLD(:,1:CELLS)=VNEW(:,1:CELLS)

        IF (T.LT.TSTOP) GO TO 1

! _____ END                OF                MAIN
LOOP _____

        WRITE (2,2) CELLS,DX,IFRAME-1,OUT_SAVE_PER_TIME_STEP,xmin,hsoli,RSLOPE
2   FORMAT (I5,3H      ,F8.6,3H      ,I5,3H      ,I3,3H      ,F6.2,3H      ,F6.4,3H
,F8.3)

        STOP ' *****CALCULATION SUCCESSFULLY DONE!***** '
        END

! *****

SUBROUTINE WAFFLU (V,DT,DX,LIMITE,FLUX)
!*
!C      Purpose: to compute the WAF intercell flux using the
!C              HLL Riemann solver
!*
!*
!C      Declaration of variables
!*
        INTEGER CELLS, I, IUPW, K, LIMITE,N
!*
        REAL(8) CL, CR, DL, DLOC, DR,HDRY,US,          &
                DS, DT, DTODX, DUPW, DX, FHLL, G,      &
                RATIO, SL, SR, TOLDEP, TOLLIM, UL, UR,  &
                WL, WM, WR

```

```

!*
      REAL(8), DIMENSION(:,:) :: C(-1:CELLS+2), V(2,-1:CELLS+2), D(-
1:CELLS+2), U(-1:CELLS+2), &
      CN(2), WAFLIM(2), CS(2,-1:CELLS+2), FD(2,-1:CELLS+2),
&
      FLUX(2,-1:CELLS+2), FS(2,-1:CELLS+2), WJ(2,-1:CELLS+2),
&
      WS(2,-1:CELLS+2)

```

```

COMMON/MAX/ CELLS
COMMON/HDRY/HDRY
COMMON/GRAVITY/ G

```

```

DATA TOLLIM /1.0E-6/

```

```

TOLDEP=HDRY

```

```

V(1,-1:0) = V(1,1)

```

```

V(2,-1:0) = -V(2,1)

```

```

V(1,CELLS+1:CELLS+2) = V(1,CELLS)

```

```

V(2,CELLS+1:CELLS+2) = -V(2,CELLS)

```

```

DO I = -1, CELLS + 2

```

```

D(I) = V(1, I)

```

```

U(I) = V(2, I) / D(I)

```

```

C(I) = DSQRT(G * D(I))

```

```

ENDDO

```

```

!*

```

```

DO 10 I = -1, CELLS + 2

```

```

!*

```

```

!C      Compute fluxes on data

```

```

!!*

```

```

      FD(1, I) = D(I) * U(I)

```

```

      FD(2, I) = D(I) * U(I) * U(I) + 0.5 * G * D(I) * D(I)

```

```

!*

```

```

!C      Compute conserved variables on data

```

```

!*

```

```

      CS(1, I) = D(I)

```

```

        CS(2,I) = D(I)*U(I)
!*
10    CONTINUE
!*
        DTODX = DT/DX
    !PRINT*,DTODX
!*
        DO 20 I = -1, CELLS + 1
!*
!*C        Define Left and Right data for Riemann problem
!*
        DL = D(I)
        UL = U(I)
        CL = C(I)
!*
        DR = D(I+1)
        UR = U(I+1)
        CR = C(I+1)
!*
!*C        Compute wave speed estimates SL, SR. Dry bed case
!*
        IF(DR.LE.TOLDEP.AND.DL.GT.TOLDEP) THEN
            !IF(DR.LT.TOLDEP.AND.DL.GT.TOLDEP) THEN
!*
!*C            Dry bed on the right
!*
            DS = DR
            SL = UL - CL
            SR = UL + 2.0*CL
            GOTO 9999
        ENDIF
!*
        IF(DL.LE.TOLDEP.AND.DR.GT.TOLDEP) THEN
            !IF(DL.LT.TOLDEP.AND.DR.GT.TOLDEP) THEN
!*
!*C            Dry bed on the left
!*
            DS = DL
            SL = UR - 2.0*CR
            SR = UR + CR
            GOTO 9999
        ENDIF
!*
        IF(DL.LE.TOLDEP.AND.DR.LE.TOLDEP) THEN
            !IF(DL.LT.TOLDEP.AND.DR.LT.TOLDEP) THEN

```

```

!*
!C      Dry bed on the left and right
!*
      DS = 0.0
      SL = -TOLDEP
      SR = +TOLDEP
      GOTO 9999
ENDIF

!*
!C      Compute DS is star region according to Two-
!C      Rarefaction approximation
!*
      DS = (0.5*(CL + CR) + 0.25*(UL - UR))**2/G
      US=0.5*(UL + UR)+CL - CR

!*
!C      Compute wave speed estimates SL, SR. Wet bed case

!*
!      IF(DS.LE.DL) THEN
!          SL = UL - CL
!      ELSE
!          SL = UL - CL*DSQRT(0.5*DS*(DS + DL))/DL
!      ENDIF

!*
!      IF(DS.LE.DR) THEN
!          SR = UR + CR
!      ELSE
!          SR = UR + CR*DSQRT(0.5*DS*(DS + DR))/DR
!      ENDIF

      SL =DMIN1(UL-CL,US-DSQRT(G*DS))
      SR =DMAX1(UR+CR,US+DSQRT(G*DS))

!*
9999  CONTINUE

!*
!C      Compute fluxes in STAR region according to HLL
!*
      DO 30 K = 1, 2
          FHLL = SR*FD(K,I) -SL*FD(K,I+1)+SL*SR*(CS(K,I+1) -CS(K,I))
          FS(K,I) = FHLL/(SR - SL)

```

```

30      CONTINUE
!*
!*C      Compute wave jumps in depth for TVD condition
!*
      WJ(1,I) = DS - DL
      WJ(2,I) = DR - DS
!*
!*C      Store wave speeds
!*
      WS(1,I) = SL
      WS(2,I) = SR
!*
20      CONTINUE
!*
!*C      Compute intercell fluxes according to the WAF method
!*
      DO 40 I = 0, CELLS
!*
!*C      Apply TVD condition
!*
      DO 50 K = 1,2
!*
!*C      Compute Courant numbers for each wave
!*
      CN(K) = WS(K,I)*DTODX
!*
!*C      Identify upwind direction
!*
      IF(CN(K).GE.0.0)THEN
!*
!*C      Wave k is positive and upwind direction is on the Left
!*
      IUPW = -1
      ELSE
!*
!*C      Wave k is negative and upwind direction is on the right
!*
      IUPW = 1
      ENDIF
!*
!*C      Compute wave jumps
!*
      DLOC = WJ(K,I)
      DUPW = WJ(K,I+IUPW)
!*

```

```

!C          Modify small jumps preserving sign
!*
          IF(DABS(DUPW) .LT. TOLLIM) DUPW = TOLLIM*DSIGN(1.0D0,DUPW)
          IF(DABS(DLOC) .LT. TOLLIM) DLOC = TOLLIM*DSIGN(1.0D0,DLOC)
!*
!C          Compute RATIO of upwind to local changes
!*
          RATIO = DUPW/DLOC

!*
!C          Select limiter function WAFLIM
!*
!C          LIMITE = 1, Godunov's Method
!C          LIMITE = 2, Upwind Second Order Method (non-monotone)
!C          LIMITE = 3, Upwind TVD, with SUPERBEE type limiter
!C          LIMITE = 4, Upwind TVD, with VAN LEER type limiter
!C          LIMITE = 5, Upwind TVD, with VAN ALBADA type limiter
!C          LIMITE = 6, Upwind TVD, with MINMOD type limiter
!*
          IF(LIMITE.EQ.1)WAFLIM(K) = 1.0D0
          IF(LIMITE.EQ.2)WAFLIM(K) = DABS(CN(K))
          IF(LIMITE.EQ.3)CALL SUPERA(RATIO, DABS(CN(K)), WAFLIM(K))
          IF(LIMITE.EQ.4)CALL VANLEE(RATIO, DABS(CN(K)), WAFLIM(K))
          IF(LIMITE.EQ.5)CALL VANALB(RATIO, DABS(CN(K)), WAFLIM(K))
          IF(LIMITE.EQ.6)CALL MINAAA(RATIO, DABS(CN(K)), WAFLIM(K))
          IF(LIMITE.EQ.7)CALL TOROEF(RATIO, DABS(CN(K)), WAFLIM(K))
!*
          WAFLIM(K) = WAFLIM(K)*DSIGN(1.0D0, CN(K))
!*
50      CONTINUE
!*
!C          Compute weights for TVD WAF flux evaluation
!*
          WL = 0.5*(1.0          + WAFLIM(1))
          WM = 0.5*(WAFLIM(2) - WAFLIM(1))
          WR = 0.5*(1.0          - WAFLIM(2))
!*
          DO 60 K = 1, 2
              FLUX(K,I) = WL*FD(K,I) + WM*FS(K,I) + WR*FD(K,I+1)
60      CONTINUE
!*
40      CONTINUE
!*
          END
!*

```

```

!*-----*
!*
SUBROUTINE SUPERA(R, CCC, A)
!*
!*C   Purpose: to evaluate a WAF limiter A based on the
!*C           SUPERB flux limiter B
!*
!*C   Declaration of variables
!*
REAL(8)    A, B, CCC, R
!*
B = DMAX1(0.0D0, DMIN1(2.0*R, 1.0D0), DMIN1(R, 2.0D0))
!*
!*C   Transform to WAF limiter
!*
A = 1.0D0 - (1.0D0 - CCC)*B
!*
END
!*
!*-----*
!*
SUBROUTINE VANLEE(R, CCC, A)
!*
!*C   Purpose: to evaluate a WAF limiter A based on the
!*C           van Leer flux limiter B
!*
!*C   Declaration of variables
!*
REAL(8)    A, B, CCC, R
!*
IF(R.LE.0.0) THEN
    B = 0.0D0
ELSE
    B = 2.0D0*R/(1.0D0 + R)
ENDIF
!*
!*C   Transform to WAF limiter
!*
A = 1.0D0 - (1.0D0 - CCC)*B
!*
END
!*
!*-----*

```

```

!*
      SUBROUTINE VANALB(R, CCC, A)
!*
!*C   Purpose: to evaluate a WAF limiter A based on the
!*C           van Albada flux limiter B
!*
!*
!*C   Declaration of variables
!*
      REAL(8)   A, B, CCC, R
!*
      B = DMAX1(0.0D0, R*(1.0D0 + R)/(1.0D0 + R*R))
!*
!*C   Transform to WAF limiter
!*
      A = 1.0D0 - (1.0D0 - CCC)*B
!*
      END
!*
!*-----*
!*
      SUBROUTINE MINAAA(R, CCC, A)
!*
!*C   Purpose: to evaluate a WAF limiter A based on the
!*C           MINMOD flux limiter B
!*
!*
!*C   Declaration of variables
!*
      REAL(8)   A, B, CCC, R
!*
      B = DMAX1(0.0D0, DMIN1(R, 1.0D0))
!*
!*C   Transform to WAF limiter
!*
      A = 1.0D0 - (1.0D0 - CCC)*B
!*
      END
!*
!*-----*
!*
      SUBROUTINE TOROEF(R, CCC, A)
!*
      REAL(8)   A, CCC, R

```



```
IF(R.LE.0.0D0)          A=1.0D0
  IF(R.GE.0.0D0.AND.R.LT.0.5D0) A=1.0D0-2.0*(1-CCC)*R
  IF(R.GE.0.5D0.AND.R.LT.1.0D0) A=CCC
  IF(R.GE.1.0D0.AND.R.LT.2.0D0) A=1.0D0-(1-CCC)*R
IF(R.GE.2.0D0)          A=2.0*CCC-1
```

END

Abbott, M.B., and Minns, A. W. (1998) “**Computational Hydraulics**”, 2dn edition, Ashgate, USA.

Murthy, J.Y. and Mathur, S.R. (2002) “**Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer**”, Draft Notes, Purdue University

Akanbi, A. A., and Katopodes, N.D. (1988) “Model for flood propagation on initially dry land.” **J. Hydr. Eng.**, **114** (7), pp. 689-706.

Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P., J.-M. (1992) “Flux Difference Splitting for 1D open channel flow equations.”, **Int. J. Number. Meth. Fluids**, **14**, pp. 1009-1018.

Alcrudo, F., and Garcia-Navarro P. (1993) “A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations.”, **Int. J. Number. Meth. Fluids**, **16**, pp. 489-505.

Ambrosi, D. (1995) “Approximation of shallow water equations by Roe’s Riemann solver.”, **Int. J. Number. Meth. Fluids**, **20**, pp. 157-168.

Anastasiou, K. and Chan, C.T. (1997) “Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes”, **Int. J. Number. Meth. Fluids**, **24**, pp. 1225-1245.

Arico, C., Nasello, C., and Tucciarelli, T. (2007) “A marching in space and time (MAST) solver of the shallow water equations. Part II: The 2D model.”, **Adv. In Water Resc.**, **30**, pp. 1253-1271.

Audusse, E, and Bristeau, M. O. (2005) “A well-balanced positivity preserving ‘second-order’ scheme for shallow water flows on unstructured meshes.”, **J. Comp. Phys.**, **206** (1), pp. 311-333.

Aureli, F., Mignosa, P., and Tomirotti, M. (2000) “Numerical simulation and experimental verification of dam-break flows with shocks.” **Journal of Hydraulic Research**, **38**(3), 197–205.

Aureli, F., Mignosa, P., and Tomirotti, M. (2000) “Numerical simulation and experimental verification of dam-break flows with shocks.” **Journal of Hydraulic Research**, **38**(3), 197–205.

Barth, T.J., and Jespersen, D.C. (1989) “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes”, **AIAA paper**, pp. 89-0366.

Batten, P., Lambert, C., and Causon M.D. (1996) “Positively conservative high resolution convection schemes for unstructured elements”, **Int. J. Number. Meth. Eng.**, **39**, 1821.

Begnudelli, L., and Sanders, B.F. (2006) “Unstructured grid finite-volume algorithm for shallow-water flow and scalar transport with wetting and drying.”, **J. Hydr. Eng.**, **132** (4), pp. 371-384.

Begnudelli, L., and Sanders, B.F. (2007) “Conservative wetting and drying methodology for quadrilateral grid finite-volume models.” **J. Hydr. Eng.**, **133** (3), pp. 312-322.

Begnudelli, L., and Sanders, B.F. (2007) “Conservative wetting and drying methodology for quadrilateral grid finite-volume models”, **J. Hydr. Eng.**, **133** (3), pp. 312-322.

Bellos, C.V., and Sakkas, J. G. (1987) “Dam break flood wave propagation on dry bed.” **Journal of Hydraulic Engineering**, **113**(12), 1510–1524.

Bermudez A., Dervieux A., Desideri J.A. and Vazquez M.E. (1998) “Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes.”, **Comp. Methods in Applied Mech. Eng.**, **155**, pp. 49-72.

Bermudez, A., and Vazquez, M.E. (1994) "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms", **Comp. and Fluids**, **23**, pp. 1049-1071.

Bradford, S.F., and Sanders, B.F. (2002) "Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography", **J. Hydr. Eng.**, **123(3)**, pp. 289-298.

Bradford, S.F., and Sanders, B.F. (2005) "Performance of high resolution, non-level bed, shallow water models", **J. Eng. Mech.**, **131(10)**, pp. 1073-1081.

Brufau, P., and Garcia-Navarro P. (2000) "Two-dimensional dam break flow simulation.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **33**, pp. 35-57.

Brufau, P., Garcia-Navarro, P., and Vazquez-Cendon, M. E. (2004) "Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **45**, pp. 1047-1082.

Brufau, P., Vazquez-Cendon, M. E., and Garcia-Navarro, P. (2002) "A numerical model for the flooding and drying of irregular domains.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **39**, pp. 247-275.

Brufau, P., Vazquez-Cendon, M. E., and Garcia-Navarro, P. (2002) "A numerical model for the flooding and drying of irregular domains.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **39**, pp. 247-275.

Caleffi, V., Valiani, A., and Zanni, A. (2003) "Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels.", **J. Hydr. Res.**, **41(2)**, pp. 167-177.

Cea, L., French, J.R., and Vazquez-Cendon, M.E. (2006) "Numerical modeling of tidal flows in complex estuaries including turbulence: an unstructured finite volume solver and experimental validation.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **67**, pp. 1909-1932.

Chorin, A.J. (1967) "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems", **Journal of Computational Physics**, **2(1)**:12-26.

Courant, R., Friedrichs, K.O. and Lewy, H. (1928) "Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik". **Mathematische Annalen**, **100**:32-74.

Courant, R., Isaacson, E. and Rees, M. (1952) "On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences.", **Communications on Pure and Applied Mathematics**, **5**, pp. 243-255.

Delis, A.I., Kazolea, M., and Kampanis, N. A. (2007) "A robust high-resolution finite volume scheme for the simulation of long waves over complex domains.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**.

Delis, A.I., Skeels, C.P., Rylie, S. C. (2000) "Evaluation of some approximate Riemann solvers for transient open channel flows", **J. Hydr. Res.**, **38(3)**, pp. 217-231.

Dodd, N. (1998) "Numerical model of wave run-up, overtopping, and regeneration.", **J. Waterw., Port, Coastal, and Ocean Eng.**, **124(2)**, pp. 73-81.

Erduran, K. S, Kutija, V., and Hewett, C. J. M. (2002) "Performance of finite volume solutions to the shallow water equations with shock-capturing schemes.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **40**, pp. 1237-1273.

Falconer, R. A. (1980) "Numerical modeling of tidal circulation in harbors.", **J. Waterw., Port, Coastal, and Ocean Eng.**, **106(1)**, pp. 31-48.

Fennema, R. J., and Chaudhry, M. H. (1987) "Simulation of one dimensional dam-break flows.", **J. Hydr. Res.**, **25**, pp. 41-51.

Fennema, R. J., and Chaudhry, M. H. (1990) "Explicit methods for 2D transient free-surface flows.", **J. Hydr. Res.**, **116(8)**, pp. 1013-1034.

- Fennema, R. J., and Chaudhry, M. H., (1989) "Implicit methods for two- dimensional unsteady free- surface flows.", *J.Hydr. Resc.*, **27(3)**, pp. 321-332.
- Fennema, R. J., and Chaudhry, M. H., (1990) "Explicit methods for 2D transient free- surface flows.", *J.Hydr. Resc.*, **116(3)**, pp. 1013-1034.
- Fraccarollo, L., and Toro, E. F., (1995) "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems.", *J. Hydr. Res.*, **33(6)**, pp. **843-864**
- Gallouet, T., Herard, J., and Seguin, N., (2003) "Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography.", *Comp. and Fluids*, **32**, pp. **479-513**.
- Garcia, R., and Kahawita, R.A. (1986) "Numerical solution of the St. Venant equations with the Maccormack finit-difference seheme", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **6(5)**, pp. **259-274**
- George, D. L., (2007), "Wave based Riemann solvers for shallow water equations and the steady state wave.", **Preprint to Elsevier**.
- Godunov, S., (1959), "A divergence scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations.", *Math. Sbornik*, **43**, pp. **271-306**.
- Gottardi, G., and Venutelli, M. (2003), "Central schemes for open-channel flow." **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, **41**, **841–861**.
- Goutal, N., and Maurel, F., (2002), "A finite volume solver for 1D shallow-water equations applied to an actual river.", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **38(1)**, pp. **1-19**
- Harten, A., Lax, P. D., and Van Leer, B., (1983) " On upstream differencing and Godunov- type schemes for hyperbolic conservation laws.", *SIAM Rev.*, **25(1)**, pp. **35-61**.
- Henderson, F.M. (1966) "**Open Channel Flow**", Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Hirsch, C., (1988), "**Numerical computation of internal and external flows.**", Wiley J. and Sons, New York, **Vol. I-II**.
- Horritt, M., (2004), "Development of testing of a simple 2D finite volume model of subcritical shallow water flow.", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **44**, pp. **1231-1255**.
- Hsu, C-T, and Yeh, K-C. (2002) "Iterative explicit simulation of 1D surges and dam-break flows." **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, **38**, **647–675**.
- Hu, K., Mingham, C. G., and Causon, D. M., (2000), "Numerical simulation of wave overtopping of coastal structures using the non- linear shallow water equations.", *Coastal Eng.*, **41(4)**, pp. **433-465**.
- Hubbard, M. F., and Baines, M. J., (1997), "Conservative multidimensional upwinding for the steady two-dimensional shallow water equations.", *J. Comp. Phys.*, **138**, pp. **419-448**.
- Hubbard, M. F., and Garcia- Navaro, P., (2000) " Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients.", *J. Comp. Phys.*, **165**, pp. **89-125**.
- Jawahar, P., and Kamath, H., (2000), "A high-resolution procedure for Euler and Navier- Stokes computations on unstructured grids.", *J. Comput. Phys.*, **164**, pp. **165-303**.
- Jha, A. K., Akiyama, J., and Ura M., (1995) "First and second-order flux-divergence splitting schemes for dam break problems.", *J. Hydr. Eng.*, **121**, pp. **877-884**.

Jimenez, O. (1987) "Personal communications with M. H. Chaudhry".

Jin, M., and Fread, D. L., (1997), "Dynamic flood routing with explicit and implicit numerical solution schemes.", *J. Hydr. Eng.*, **123(3)**, pp. 166-173.

Karki, K.C. and Patankar, S.V. (1989) "Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations", *AIAA Journal*, **27(9):1167-1174**.

Lai, C. (1986) "Numerical Modeling of Unsteady Open-Channel Flows," in **Advances in Hydroscience**, vol. 14, Academic Press, New York, NY., pp. 161- 333.

Lai, J.-S., Lin, G.-F., and Guo, W. -D., (2005), "An upstream flux- splitting finite- volume scheme for 2D shallow water equations", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **48**, pp. 1149-1174

LeVeque, R. J. (2002) "**Finite volume methods for hyperbolic problems.**", Cambridge University Press, Cambridge.

LeVeque, R. J., (1998), "Balancing source terms and flux gradients in high-resolution methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm.", *J. Comp. Phys.*, **146**, pp. 346-365.

Ma, D.-J., Sun, D.-J., and Yin, X.-Y. (2007), "Solution of the 2-d shallow water equations with source terms in surface elevation splitting form.", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*,

Macchione, F., and Morelli, M. A., (2003) "Practical aspects in comparing shock- capturing schemes for dam break problems.", *J. Hydr. Eng.*, **129**, pp. 187-195.

MacCormack, R. W., Paullay, A. J. (1972) "Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. Pages 72-154.

Mahdavi, A., and Talebbeydokhti, N. (2009-b) "Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using FORCE-MUSCL scheme." *Journal of Hydraulic Research*, **47(4)**, 476- 485.

Mahdavi, A., and Talebbeydokhti, N. (2009-b) "Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using FORCE-MUSCL scheme." *Journal of Hydraulic Research*, **47(4)**, 476- 485.

McDonald, P. W. (1971) "The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades" *American Society of Mechanical Engineers*. Pages 71-89.

Mingham, C.G. and Causon, D. M. (1998) "High- resolution finite- volume method for shallow-water flows.", *J. Hydr. Eng.*, **124(6)**, pp. 605-614.

Mohamadian, A., Le Roux, D. Y., Tajrishi, M., and Mazaheri, K., (2005), "A mass conservative scheme for simulating shallow flow over variable topographies using unstructured grid.", *Adv. In Water Resc.*, **28**, pp. 523-539.

Molls, T., and Chaudhry, M. H. (1995) "Depth-averaged open-channel flow model.", *J. Hydr. Eng.*, **121 (6)**, pp. 453-465.

Murillo, J., Garcia-Navaro, P., and Burguete, J., (2007) "Analysis of second-order upwind method for the simulation of solute transport in 2D shallow water flow.", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*.

Namin, M., Lin, B. and Falconer R. A. (2004) "Modeling estuarine and coastal flows using an unstructured triangular finite volume algorithm.", *Adv. In Water Resc.*, **27**, pp. 1179-1198

Nujic, M., (1995), "Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows.", *J. Hydr. Res.*, **33**, pp. 101-111.

- Osher, S., and Solomon, F., (1982) "Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws.", **Math. Comp.**, **38**, pp. **339-374**.
- Pan, D., and Chang, J.C. (1993) "Upwind finite-volume Navier-Stokes computations on unstructured triangular meshes.", **AIAA J.**, **31** (9), pp. **1618**.
- Roe, P. L., (1981), "Approximate Riemann Solvers, parameter vectors, and difference schemes.", **J. Comp. Phys.**, **43**(61), pp. **357-372**.
- Rogers, B. D., Borthwick, A. G. L., and Taylor, P. H., (2003), "Mathematical balancing of flux gradient and source terms prior to use Roe's approximate Riemann solver." **J. Comp. Phys.**, **192**, pp. **422-451**.
- Sander, B. F., Jaffe, D. A., and Chu, A. K. (2003) "Discretization of integral equations describing flow in non-prismatic channels with uneven beds.", **J. Hydr. Eng.**, **129** (3), pp. **235-24**.
- Sanders, B. F. (2001) "High resolution and non-oscillatory solution of St. Venant equations in non-rectangular and non-prismatic channels.", **J. Hydr. Res.**, **39**, pp. **321-330**.
- Shu, C. W., (1987), "TVD uniformly high order schemes for conservation laws.", **Math. Comput.**, **49**, pp. **105-121**.
- Sleigh, P. A., Gaskell, P. H., Berzins, M., and Wright, N. G. (1998) "An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries.", **Comp. and Fluids**, **27** (4), pp. **479-508**.
- Stoker, J. J. (1957) "Water Waves.", Interscience: New York.
- Tchamen, G. W. and Kahawita, R. A., (1998), "Modeling wetting and drying effects over complex topography.", **Hydrological Process**, **12**, pp. **1151-1182**.
- Toro, E. F., (1997), "**Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction**." Springer- Verlag, New York.
- Toro, E.F. (1992) "Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations." **Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A**; **338**, **43-68**.
- Toro, E.F. (2001) "**Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows**". Wiley, Chichester, UK.
- Tseng, M. H., (1999), "Explicit finite volume non-oscillatory schemes for 2D transient free- surface flows.", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **30**, pp. **831-843**
- Turan, B. (2008), PhD. Thesis, "**Free Surface Flow and Wave Modelling Using Object Oriented C++ Finite Volume Solver on Irregular Topography with Wetting and Draying**", Civil and Environment Engineering Depart., University of Houston.
- Turan, B., and Wang, K.-H., (2007a), "Flood and Shock waves simulation by using finite volume technique on unstructured meshes", Proc. of ASCE World Environmental & Water Resources Conference, Tampa, FL, USA.
- Turan, B., and Wang, K.-H., (2007b), "Flood routing analysis on complex topography with UH-2D flow solver.", Proc. 18th Eng. Mech. Conf., Blacksburg, VA.
- Valiani, A., and Begnudelli, L., (2006) "Divergence form for bed slope source term (DFB) in shallow water equations.", **J. Hydr. Eng.**, **132**(7), pp. **652-665**.
- Van Leer, B., (1973), "Towards the ultimate conservative difference scheme, I. The quest of Monotonocity.", **Lecture notes in Phys.**, **18**, pp. **163-168**.

Abstract:

In this research a three dimensional modeling of flow implemented using finite volume method at first. This algorithm has the ability of analyzing elements by desired hexagon shapes. In order to acquire this analysis an integration of Navier- Stokes equations on control volumes implemented and then volume integrations exchanged to area integration using Divergence theorem in mathematics. Calculation of pressure gradient on interface of adjacent cells was needed within exchange process which is yield by transferring coordinate system and calculating needed Jacobians. Also, for determining momentum equations on common cell faces the idea of Momentum Interpolation was utilized which was proposed by Rhie & Chow firstly. Finally in order to acquire good convergence of results the MAC algorithm was used in solver.

To make sure of good operation of algorithm and its application in Wetting and Drying of bed, a dam break problem decided to be implemented using this method. Dam break problem involves shallow water equation related processes specially wetting and drying and also there are some analytical and experimental data which were compared by results of current model. One should mention that there are so many problems in dam- break problem by wetting and drying, but main problems relieved in current model. Firstly, the depth averaged equation of Navier- Stokes equations required for modeling, then, where the magnitudes of parameters had abrupt changes (namely wave run up and dam break problems) Riemann problem comes out for which Godunov proposed an approximate solution. Also numerical modeling in these cases encounters intensive fluctuations in results. In order to cope with this objection, the methods based on TVD are required. All these problems were resolved in dam break model and finally using WAF method, that is second order accurate in time and space, results of dam break problem for several cases are brought out and good compliance of results are evident compared to both analytical and experimental data, which is validates the well operation of current model.

Keywords: Numerical Modeling- Finite Volume Method- WAD- SWE- Dam Break- WAF



Shahrood University of Technology
Faculty of Civil and Architecture Engineering

**Finite Volume Modeling of Flow in Channels, Considering
Wetting and Drying of Bed**

Kamaladdin Saghar

Supervisor: Dr. Ramin Amini

July 2012