دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی عمران

رساله دکتری

توسعه روش ایزوژئومتریک در مدلسازی، تحلیل و بهینه سازی مسایل تنش/کرنش مسطح و تقارن محوری با مواد مرکب تابعی

ناصر ظریف مقدم باصفت

استاد راهنما :

دکتر بهروز حسنی

بهمن ماه سال ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده : مهندسی عمران و معماری

گروه : عمران

توسعه روش ایزوژئومتریک در مدلسازی، تحلیل و بهینه سازی مسایل تنش/کرنش مسطح و تقارن محوری با مواد مرکب تابعی

دانشجو : ناصر ظریف مقدم باصفت

استاد راهنما :

دکتر بهروز حسنی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

بهمن ماه ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی عمران و معماری

گروه : مهندسی عمران

رساله دکتری آقای ناصر ظریف مقدم باصفت

تحت عنوان:

توسعه روش ایزوژئومتریک در مدلسازی، تحلیل و بهینه سازی مسایل تنش/کرنش مسطح و تقارن محوری با مواد مرکب تابعی

در تاریخ ۰۹/ ۱۳۹۰/۱۱ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک دکتری مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : **دکتر بهروز حسنی**		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر سهیل محمدی		نام و نام خانوادگی : بب	
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

آرزو هایم زیر انبوهی از خاکستر

هنوز نفس می کشد

هنوز شعله ورند

نسیم مهربانی تو کدام جمعه می وزد

تقدیم به او

تشکر و قدردانی

اکنون خوشحالم از اینکه می‌توانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهروز حسنی، تشکری صمیمانه داشته باشم. من در سال ۱۳۸۰ هنگامی که دوره کارشناسی ارشد را در دانشگاه صنعتی شاهرود شروع کردم، با ایشان آشنا شدم و در ده سال گذشته همواره از افتادگی و سعه‌صدر ایشان در شگفت بودم. مهربانی و احترام ایشان در مواجهه با دانشجویان را هیچ‌گاه از یاد نمی‌برم و باعث افتخارم است که عنوان شاگردی ایشان را داشته‌ام.

از طرفی بر خود لازم می‌دانم که از اساتید محترم دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود، آقایان دکتر نادری، دکتر احمدی، دکتر ساغروانی، دکتر کلات جاری و دکتر کیهانی، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از داوران محترم جناب دکتر سهیل محمدی از دانشکده عمران دانشگاه تهران و جناب دکتر محمد ابوالبشری از دانشکده مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد بخاطر قبول زحمت و ارائه نظرات خوبشان کمال تشکر را دارم.

همچنین لازم می‌دانم تا از دوستان عزیزم از جمله، جناب آقایان دکتر سید مهدی توکلی، مهندس احمد گنجعلی و مهندس مازیار کوشا تشکر نمایم.

و اما پدر عزیز و مادر گرامی‌ام، همواره یار و همراه من بودید و در دوران تحصیل از هیچ کمکی دریغ نورزیدید. دستتان را می‌بوسم. هیچگاه نتوانستم و ندانستم که چگونه باید از شما تشکر کنم.

در نهایت نیز از همسر مهربانم که در این مدت با صبر و شکیبایی خویش یار و همراه من بودند، تشکر می‌نمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

بهمن ماه سال یک هزار و سیصد و نود

چکیده:

این رساله در دو بخش تدوین یافته است. بخش اول به توسعه روش تحلیل ایزوژئومتریک برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر حاکم بر مسایل یک بعدی، دوبعدی تک متغیره و دوبعدی چند متغیره اختصاص یافته است. لذا در این بخش مفهوم وصله‌های با خواص متغیر برای اولین بار معرفی شده است که خود سبب ایجاد جامعیت بیشتر روش ایزوژئومتریک در مواجهه با مسائل مختلف می‌شود؛ از این رو نام "روش ایزوژئومتریک جامع" برای آن انتخاب شده است. به عنوان نمونه‌ای از این مسائل، تحلیل تنش در مواد مرکب تابعی، که امروزه از جمله پیشرفته ترین مصالح کامپوزیتی محسوب می‌شوند، مورد بررسی قرار گرفته است و فرمولهای مربوط با استفاده از شکل ضعیف معادلات حاکم استخراج شده است. در این رساله مراد از روش ایزوژئومتریک، روشی است که با جایگزینی توابع پایه اسپلاین بجای توابع شکل چندجمله‌ای در روش اجزای محدود ایجاد می‌شود. درحالی‌که منظور از روش ایزوژئومتریک جامع روشی است که از توسعه روش ایزوژئومتریک با جایگزینی وصله‌های با خواص متغیر حاصل می‌شود. با توجه به اینکه در روش تحلیل ایزوژئومتریک متداول، دیدگاهی شبیه اجزای محدود نسبت به مساله وجود دارد، محدودیتهایی مشابه روش اجزای محدود در مواجهه با حل مسایل تنش/کرنش مسطح و تقارن محوری با مواد مرکب تابعی، مشاهده می‌شود. مهمترین این محدودیتها ثابت بودن مشخصات مکانیکی مساله در یک وصله می‌باشد. از مزایای روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، قابلیت استفاده از تکنیکهای پیشرفته تولید هندسه برای مدلسازی هرگونه تغییرات خواص مصالح مانند مدول الاستیسیته و ضریب پواسون می‌باشد. در نهایت برنامه‌ای به زبان فرترن جهت مدلسازی و تحلیل مسائل مذکور تهیه و مورد استفاده قرار گرفته است.

بخش دوم رساله به مبحث بهینه سازی سازه‌ها اختصاص یافته است. در فرآیند بهینه‌سازی روش برنامه‌ریزی ترتیبی درجه دوم (SQP) به عنوان یکی از روشهای متداول برنامه‌ریزی ریاضی مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به اینکه مشخصات هندسی مساله و مشخصات مکانیکی مصالح در

روش ایزوژئومتریک جامع توسط نقاط کنترلی تعریف می شوند، با در نظر گرفتن آنها به عنوان متغیر طراحی، بهینه سازی شکل سازه، بهینه سازی توزیع ضخامت و نیز بهینه سازی توزیع مصالح امکان‌پذیر می‌باشد. با استفاده از فن‌آوری به کار رفته در روش ایزوژئومتریک جامع برای تولید هندسه و همچنین تحلیل، همانگونه که انتظار می‌رود شکلهای نهایی به دست آمده از فرآیند بهینه سازی دارای مرزهای هموار می‌باشند.

لغات کلیدی: روش ایزوژئومتریک، مصالح مرکب تابعی، بهینه سازی سازه، تکنیک نربز.

لیست مقالات مستخرج از رساله:

مقالات ژورنالی:

HASSANI, B., TAVAKKOLI, S. M. & MOGHADAM, N. Z. 2011. "Application of isogeometric analysis in structural shape optimization." *Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering, doi:10.1016/j.scient.2011.07.014.*

حسنی، ب. و ظریف مقدم، ن.، (۱۳۸۹)، "مدلسازی و تحلیل همزمان مسائل تنش مسطح با مصالح FG به روش ایزوژئومتریک" ، نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، سال بیست و دوم، شماره یک، دانشگاه فردوسی مشهد.

HASSANI, B., MOGHADDAM, N. Z. & TAVAKKOLI, S. M. 2009. "ISOGEOMETRICAL SOLUTION OF LAPLACE EQUATION." ASIAN JOURNALOF CIVIL ENGINEERING, 10, 579-592.

مقالات کنفرانس خارجی:

HASSANI, B., KHANZADI, M., TAVAKKOLI, S. M. & MOGHADAM, N. Z. 2009. "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems." WCSMO09, 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June 1 - 5 Lisbon, Portugal.

HASSANI, B. & MOGHADDAM, N. Z. 2010. "Isogeometrical Analysis of Functionally Graded Materials in Plane Elasticity Problems." SEMC2010, The Fourth International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation. Cape Town, South Africa.

مقالات کنفرانس داخلی:

ظریف مقدم، ن. و حسنی، ب. (۱۳۸۹)، "استفاده از اسپلاینها در مدلسازی و تحلیل مسایل تنش/کرنش مسطح " ، پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران.

فهرست مطالب

فهرست جداول:

فهرست اشکال:

فصل اول: مقدمه

۲-۱ مقدمه

تاکنون برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روشهای عددی متعددی معرفی شده است که در حوزه مکانیک محاسباتی[1] در مورد آنها بحث می‌شود. این روشها به ترتیب شکل گیری شامل روشهای تفاضل محدود[2]، اجزای محدود[3] و روشهای بدون شبکه[4] می‌باشند. حوزه استفاده از روشها بسیار متنوع بوده و می‌توان از آنها در مسایلی مانند مکانیک جامدات، مکانیک سیالات، انتشار امواج، الکتریسیته، انتقال حرارت و غیره استفاده و اقدام به مدلسازی و حل معادلات حاکم بر این مسایل نمود. در میان روشهای مذکور، روش FEA با قدمتی نزدیک به ۶۰ سال از شناخته‌شده‌ترین روشهای عددی می‌باشد که بنیان بسیاری از نرم افزارهای محاسباتی کنونی را در زمینه های علمی مختلف تشکیل می‌دهد. این روش در سالهای ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و همزمان با رشد علم کامپیوتر در زمینه سخت افزار و نرم افزار، برنامه‌های آکادمیک و تجاری زیادی بر مبنای آن تهیه گردید. از جمله می‌توان به نرم افزارهایی مانند NASTRAN، ANSYS، ADINA، ASKA، PLAXIS، ABAQUS، CATIA، SAP و غیره اشاره نمود.

در سالهای پس از معرفی روش FEA محققان بسیاری در سراسر جهان بر روی توسعه این روش کار کرده‌اند. همچنین ابهامات و اشکالات بسیاری مورد موشکافی و بررسی قرار گرفته و اغلب با تولید راه حل‌هایی رفع شده‌اند. اما با بررسی دقیقتر هنوز می‌توان اشکالات و یا نقاط ضعفی را برای آن برشمرد که ناشی از فلسفه برخورد این روش با معادلات حاکم بر مساله مورد نظر می‌باشد. مثلا نیاز به تولید شبکه‌ای از المانها[5] برای تولید هندسه یک مساله در مکانیک جامدات از ضعفهای این روش محسوب می‌شود. نحوه شبکه بندی، نوع المان مورد استفاده و تعداد المانها، از پارامترهای موثر

[1] Computational Mechanic
[2] Finite Difference Method
[3] Finite Element Method
[4] Meshless Method
[5] Mesh Generation

بر جواب نهایی مساله می‌باشند که در صورت انتخاب نادرست آنها به جواب مطلوبی دست نخواهیم یافت. از طرف دیگر شبکه بندی هندسه، خود امری دشوار و زمان بر می‌باشد و ذکر شده است که حدود ۸۰ درصد از زمان حل یک مساله به روش FEA صرف تولید شبکه المانها می‌شود(Hughes et al., 2005). حال با فرض اینکه در فرآیند حل یک مساله (مانند مسایل بهینه سازی شکل یک سازه) در هر گام از حل مساله نیاز به باز تولید شبکه المانها می‌باشد، می‌توان به معضلات نیاز به تولید شبکه بیشتر پی برد. از طرف دیگر برای بالا بردن دقت در مدلسازی هندسه جسم بایستی از تعداد بیشتری المان و یا المانهای با مرتبه بالاتر و یا ترکیبی از این دو روش استفاده نمود که در تمام حالات سبب افزایش زمان تولید شبکه المانها، زمان حل دستگاه معادلات حاکم بر مساله و حافظه مورد نیاز کامپیوتر خواهد شد. همچنین اگر بخواهیم به ازای تعداد مشخصی از المانها، دقت بهتری را برای تقریب زدن تابع مجهول بدست بیاوریم بایستی از تکنیکهای بهبود شبکه استفاده کرد که خود علاوه بر نیاز به مباحث و مشکلات تئوری خاص، سبب نیاز به زمانی اضافه تر جهت تولید شبکه مناسب المانها خواهد شد. در حالت کلی نیز با پیچیده تر شدن مساله مورد بررسی، کلیه موارد فوق به شکل موثرتری اثرات منفی خود را نشان می‌دهند.

۲-۲ تاریخچه روش تحلیل ایزوژئومتریک

با توجه به رشد شتابان و جایگاه مهم روشهای عددی در پیشرفت علم و حل مسائل مشکل، محققان بسیاری در دنیا به دنبال تولید روشهای جدید، با هدف سرعت و کیفیت بالاتر می‌باشند. به دنبال این پژوهشها در سال ۲۰۰۵ در دانشگاه تگزاس کشور آمریکا، هیوز و همکارانش اقدام به معرفی یک روش عددی جدید نموده و آن را تحلیل ایزوژئومتریک[۶] (IGA) نامگذاری کردند(Hughes et al., 2005). با توجه به اینکه در حال حاضر (انتهای سال ۲۰۱۱) مدت زمان زیادی از معرفی این روش نگذشته است لذا تاریخچه‌ای بسیار کوتاه در این خصوص موجود است. از شش سال گذشته تاکنون

[6] Isogeometric Analysis (IGA)

در حدود کمتر از دویست مقاله در مجلات معتبر علمی و کنفرانس‌ها ارائه شده است. همچنین یک کتاب (Cottrell et al., 2009) چاپ و تعدادی کنفرانس از جمله (HOFEIM, 2011, IGA, 2011) برگزار شده است.

به عنوان توضیحات تکمیلی می‌توان گفت که در این مدت کوتاه محققان تلاش خود را در یکی از سه زمینه زیر مصروف ساخته‌اند.

۱-استفاده از روشهای متنوع تولید هندسه برای توسعه IGA

با توجه به اینکه مبنای روش IGA بر استفاده از روشهای تولید هندسه توسط کامپیوتر و خصوصا نوع استاندارد آن یعنی تکنیک نربز استوار است، لذا این مساله سبب شده است تا بعد از آشنایی محققان با این روش به دنبال استفاده از تکنیکهای متنوع‌تر تولید هندسه به جای تکنیک نربز بپردازند. تکنیکهایی مانند روش تی-اسپلاین[۷]، زیربخش[۸] و غیره از جمله مهمترین روشهایی هستند که به عنوان جایگزین تکنیک نربز در روش IGA مورد استفاده قرار گرفته و مقالاتی در این خصوص منتشر شده است(Bazilevs et al., 2010, Beirão da Veiga et al., 2011, Dörfel et al., 2010, Kim et al., 2009, Kim et al., 2010, Manni et al., 2011, Seo et al., 2010a).

۲-استفاده از روش IGA در حل مسائل متنوع

در این بخش بیشتر جنبه کاربردی روش IGA در حوزه متنوعی از مسایل و مقایسه آن با روشهای تحلیلی دقیق و یا سایر روشهای عددی مانند روش FEA صورت گرفته است. برخی مسایل مانند اندر کنش سیال-سازه (Bazilevs et al., 2009)، تحلیل پوسته‌ها (Benson et al., 2010, Benson et al., 2011, Kiendl et al., 2010, Kiendl et al., 2009)، انتشار حرارت (Anders et al.)، مدلسازی جریانهای متلاطم (Bazilevs and Akkerman, 2010)، تغییر شکلهای بزرگ (Benson et al., 2011)، مسائل الکترومغناطیس (Buffa et al., 2010)، ارتعاش سازه‌ها (ابوالبشری و همکاران،

[7] T-Spline
[8] Subdivision

۱۳۹۰)، (Cottrell et al., 2006)، تحلیل دینامیکی (حسنی و همکاران، ۱۳۸۷)، اندازه‌گیری میدان کرنش (Elguedj et al., 2011)، مدلهای کان-هیلارد (Gómez et al., 2008)، آیرودینامیک (Hsu et al., 2011)، انتگرال‌گیری عددی (Hughes et al., 2010)، المان دایره‌ای (Lu, 2009)، المان استوانه‌ای (Lu and Zhou, 2011)، تحلیل برخورد (Lu, 2011, Temizer et al., 2011)، جریان ناویر-استوکس (Nielsen et al.)، تحلیل جریان خون (Zhang et al., 2007) و غیره در این بخش مورد توجه محققان بوده است.

۳- معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع

معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع در واقع هدف اصلی این رساله می‌باشد. در مقایسه با گزینه یک می‌توان گفت که از همان تکنیک نربز برای تولید هندسه استفاده شده است. از این رو تفاوت اساسی خاصی در مقایسه با روش استاندارد IGA ندارد. با توجه به مبنای مشابه روش متداول ایزوژئومتریک و روش پیشنهادی، امکان استفاده از سایر تکنیکهای تولید هندسه در روش ایزوژئومتریک جامع وجود خواهد داشت که موضوع بحث این رساله نمی‌باشد. در گزینه دو نیز فقط نوع مسائل حل شده متفاوت است. در واقع نتیجه کلی در گزینه دو را می‌توان بطور خلاصه با امکان استفاده از روش ایزوژئومتریک درگستره متنوعی از مسائل، بیان نمود. تفاوت بین روشهای تحلیل اجزای محدود[۹]، روش IGA و روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع[۱۰] (GIGA) در فصلهای بعدی رساله ارائه می‌شود. برای درک این تفاوت می‌توان به مراجع (حسنی ب. و ظریف مقدم ن. ، (۱۳۸۹-الف و ب) نیز مراجعه نمود.

۳-۲ معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک

روش IGA بر مبنای استفاده از تکنیکهای تولید هندسه مانند تکنیک نربز[۱۱] (NURBS) بنا

[9] Finite Element Analysis (FEA)
[10] Generalized Isogeometrical Analysis (GIGA)
[11] Non Uniform Rational B-Splines (NURBS)

شده است. تکنیک نربز به عنوان راهکاری استاندارد برای تولید هندسه به کمک کامپیوتر[12] می‌باشد که در بخشهای بعدی به تفصیل به آن اشاره خواهد شد. در این روش هندسه مساله البته با ذکر توضیحاتی، بصورت دقیق مدل می‌شود. اگر هندسه مساله قبل از انجام عملیات تحلیل، با استفاده از تکنیک نربز ایجاد شده باشد و در حل مساله از همان مشخصات استفاده شود می‌توان از کلمه دقیق استفاده کرد. همچنین در صورتی که هندسه مساله از اشکال هندسی مشخص مانند دایره، سهمی، هذلولی، استوانه، مخروط، کره و غیره ساخته شده باشد باز هم می‌توان از عبارت دقیق استفاده کرد. درغیر این‌صورت هندسه مساله همانند روش اجزای محدود تقریبی خواهد بود ولی شکل تقریبی نسبت به روش اجزای محدود می‌تواند از کیفیت بالاتری برخوردار باشد. از این رو پیشنهاد می‌شود در متون ایزوژئومتریک از لغت نزدیک به دقیق بجای لغت دقیق استفاده نمود. سپس از همان اطلاعاتی که برای مدلسازی هندسه استفاده شده، برای تقریب زدن تابع مجهول استفاده می‌شود. به همین علت نیز نام روش ایزوژئومتریک بر روی آن قرار داده شده است که برگرفته از مفهوم ایزوپارامتریک در روش FEA است(Hughes et al., 2005). روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود از ادبیات خاص خود برخوردار است که بعدا به آن اشاره خواهد شد. ولی به طور خلاصه برخی از مزایای آن به شرح زیر می‌باشد.

۱-مدلسازی نسبتا دقیق هندسه و انعطاف پذیری فوق العاده در تولید و کنترل مرزهای مدلهای با شکلهای پیچیده.

۲-عدم وابستگی کیفیت هندسه تولید شده به ریز یا درشت بودن شبکه نقاط کنترلی.

۳-امکان اقناع نسبتا دقیق‌تر شرایط مرزی با تعداد کمتر قیود تکیه گاهی. در روش اجزای محدود گره‌ها و در IGA نقاط کنترلی تحت تاثیر قرار می‌گیرد.

۴-داشتن تئوری ریاضی مشابه روش اجزای محدود و دارا بودن اغلب مزایای این روش.

[12] Computer Aided Geometric Design (CAGD)

۵-نیاز کمتر به شبکه بندی مجدد در مسایلی که هندسه مساله در حین حل تغییر می‌کند.

۶-کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات حاکم و در نتیجه کاهش زمان حل دستگاه معادلات.

۷-کاهش در حجم حافظه کامپیوتری مورد نیاز برای ذخیره سازی اطلاعات مساله.

۸-نیاز به فایلهای ورودی بسیار ساده و قابل درک.

۹-ایجاد امکانات بیشتر در خصوص مساله بهبود شبکه و بالا بردن دقت حل.

۱۰- امکان توسعه IGA برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر.

در خصوص مورد شماره (۱۰) لازم به یادآوری است که در این رساله، استفاده از مفهوم روش IGA با کمی تغییر در دیدگاه به نحوه حل مساله، سبب ایجاد روش توسعه یافته تحلیل ایزوژئومتریک جامع شده است. در واقع در این رساله برای اولین بار به معرفی وصله‌های با خواص متغیر و حل معادلات دیفرانیسل با ضرایبی به صورت تابع با روش GIGA پرداخته شده است و روش IGA را می‌توان به عنوان یک حالت خاص از آن فرض نمود که ضرایب معادلات بجای تابع، یک عدد ثابت باشد. حل اینگونه مسایل با روش اجزای محدود و یا روش IGA با محدودیتهایی مواجه است. ولی استفاده از روش GIGA سبب ایجاد امکانات جدید در حل این دسته از مسایل می‌شود (Hassani and Moghaddam, 2010). در ادامه توضیحات بیشتری در این خصوص ارایه خواهد شد.

۲-۴ فرضیات و گامهای حل مساله

در این رساله بر روی تحلیل و بهینه سازی مسایل تنش/کرنش مسطح و تقارن محوری بحث و تمرکز شده است. با توجه به اینکه روابط ریاضی و اثبات فرمولها و روابط روش ایزوژئومتریک در مسایل مذکور، در دسترس نبوده است، طرحهای پژوهشی توسط نگارنده تعریف و به سرانجام رسیده است (ب. حسنی و ن. ظریف مقدم، ۱۳۸۷ و ۱۳۸۸). به طور خلاصه، ابتدا معادلات دیفرانسیل یک بعدی تک متغیره، معادلات دیفرانسیل دوبعدی تک متغیره و در نهایت معادلات دیفرانسیل دوبعدی

چند متغیره مورد بررسی قرار گرفتند. اثبات این روابط در فصل چهارم آمده است.

در این رساله مصالح مرکب تابعی یا مصالح مرکب هدفمند با رفتار خطی و خواص ایزوتروپیک تحت بارهای استاتیکی در نظر گرفته شده‌اند. تغییر خواص مکانیکی مانند مدول الاستیسیته و ضریب پواسون نیز به صورت توابع پیوسته فرض شده‌اند. در بخش مربوط به بهینه سازی نیز از روشهای برنامه ریزی ریاضی برای حل مسایل بهینه سازی استفاده شده است.

۲-۵ برنامه‌های کامپیوتری تهیه شده در این رساله

از ابتدای شروع این پژوهش و با توجه به ماهیت عددی روش IGA، نیاز به نوشتن کدهای کامپیوتری برای توسعه روش IGA و حل مسایل وجود داشت. در زیر لیستی از برنامه های تهیه شده در طول انجام این رساله به همراه زبان برنامه نویسی مورد استفاده و مختصری از کاربرد آن ارائه شده است. (منظور از CVF[۱۳] نرم افزار ویژوال فرترن و منظور از VB[۱۴] نرم افزار ویژوال بیسیک می‌باشد.)

- ✓ BFUN : برنامه ای برای محاسبه و تولید توابع پایه اسپلاین به زبان CVF
- ✓ CURGEN : برنامه‌ای برای تولید هر نوع منحنی سه بعدی با هر نوع پیچیدگی با استفاده از فرمولبندی اسپلاینها و تکنیک نربز به زبان CVF.
- ✓ SURGEN : برنامه‌ای برای تولید رویه‌ها و سطوح با هر نوع پیچیدگی در شکل با استفاده از فرمولبندی اسپلاینها و تکنیک نربز به زبان CVF. این برنامه همچنین قادر به تولید شبکه اجزای محدود برای پوسته های تولید شده می‌باشد.

[13] Compaq Visual Fortran 6.6
[14] Visual Basic 6.0

- ✓ PLOTTER : برنامه‌ای گرافیکی جهت نشان دادن منحنی ها و سطوح تولید شده توسط کدهای CURGEN و SURGEN از زوایای مختلف با امکان نشان دادن نقاط کنترلی، گره ها و المانهای روی منحنی‌ها و رویه‌ها به زبان VB.
- ✓ CURVIN : برنامه‌ای بر اساس فرمولبندی معکوس نربز برای یافتن نقاط کنترلی با داشتن برخی از نقاط روی یک منحنی سه بعدی در حالت کلی به زبان CVF.
- ✓ ISO-1D : برنامه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل یک بعدی تک متغیره با ضرایب متغیر با روش GIGA به زبان CVF.
- ✓ ISO-2D : برنامه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل دو بعدی تک متغیره مانند معادلات لاپلاس با روش IGA به زبان CVF.
- ✓ GIGAP[۱۵] : برنامه‌ای برای حل مسایل تنش/کرنش مسطح و مسایل با تقارن محوری با مصالح مرکب تابعی با روش GIGA به زبان CVF. این برنامه همچنین توانایی بهینه سازی شکل، توزیع ضخامت و توزیع مصالح در ماده مرکب تابعی را نیز دارا می‌باشد.

خاطر نشان می‌سازد که صحت عملکرد برنامه های نوشته شده با مقایسه حل حاصل از آنها با حل تحلیلی و یا حل عددی موجود از سایر روشهای عددی مورد بررسی قرار گرفته است که در جای خود به آن پرداخته می‌شود.

[15] Generalized IsoGeometrical Analysis Program (GIGAP)

۲-۶ ساختار کلی رساله

این رساله مشتمل بر هفت فصل می‌باشد. فصل اول شامل مقدمه و آشنایی با تاریخچه روش ایزوژئومتریک و فرضیات و برنامه های تهیه شده و فصل دوم شامل خلاصه‌ای از تکنیک نربز به عنوان بنیان روش IGA می‌باشد. معرفی کاملتر روش IGA و معرفی اجمالی مصالح مرکب تابعی[۱۶] و مشکلات روشهای FEA و روش IGA در تحلیل این مسایل و همچنین معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع در فصل سوم ارائه شده است. فصل چهارم مختص به اثبات فرمولبندی مورد نیاز در روش مذکور بوده و در این خصوص توضیحاتی داده شده است. در فصل پنجم، به حل معادلات و مثالهایی با روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع و مقایسه نتایج پرداخته شده است و در فصل ششم، حل مسایل بهینه‌سازی با روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع نشان داده شده است. فصل هفتم نیز به بیان نتایج و پیشنهاداتی در خصوص پژوهش انجام شده اختصاص یافته است.

[16] Functionally Graded Material (FGM)

فصل دوم: اسپلاینها و نربز

۳-۱ مقدمه

با توجه به اینکه مبنای روش IGA بر شناخت کافی از اسپلاینها استوار است، بنابراین قبل از ورود به بحث اصلی رساله مهمترین نکاتی که به عنوان شروع کار با اسپلاینها مورد نیاز است به طور خلاصه در این بخش گردآوری شده است. در این فصل مفاهیم توابع پایه اسپلاین، درجه توابع پایه، نقاط کنترلی، چندضلعی کنترلی، گره‌ها، دهانه‌های گرهی، بردار گره و روابط و خواص حاکم بر آنها معرفی شده است. همچنین روابطی که برای تولید منحنی‌ها و رویه‌ها با استفاده از اسپلاین‌ها و تکنیک نربز لازم است در این فصل معرفی شده‌اند. مطالب این فصل برگرفته از مراجع (Piegl and Tiller, 1997, Rogers, 2001). همچنین مراجعی از جمله (Dempski, 2003, DEY, 2007, Farin, 2002, Farin et al., 2002, Goldman, 1991, Gomes et al., 2009, Hasle et al., 2007a, Juttler and Piene, 2008, Peters and Reif, 2008, Piegl and Tiller, 1997, Rogers, 2001, Salomon, 2006, Warren and Weimer, 2002) برای مطالعه بیشتر علاقه مندان به مباحث هندسی در توسعه روش تحلیل ایزوژئومتریک معرفی می‌شود.

۳-۲ تاریخچه اسپلاینها

منحنیها و سطوح اسپلاین در واقع از تکامل منحنیها و سطوح بزیر[17] ایجاد شده اند و منحنیها و سطوح بزیر، حالت خاصی از اسپلاینها می‌باشند. اما خود منحنیهای بزیر در اواخر دهه ۵۰ میلادی به طور همزمان توسط شخصی به نام پیر بزیر[18] در کارخانه رنو و پائول دی کاستلیانو[19] در کارخانه سیتروئن ابداع شده و بعدها توسط ریاضیدانی به نام لوباچفسکی[20] توسعه داده شدند.

[17] Bezier
[18] Pierre E. Bézier
[19] Paul de Casteljau
[20] N. Lobachevsky

۳-۳ چرا اسپلاینها؟

استفاده کاربردی از اسپلاینها در صنایع مختلف بسیار چشمگیر است. صنایعی مانند خودرو سازی، فیلم سازی، نرم‌افزارهای کامپیوتری و غیره از مصرف کنندگان عمده این تکنیک می‌باشند. علل اصلی استفاده از این روش عبارتند از:

۱-الگوریتم این روش ساده بوده و به راحتی می‌توان به یک تفسیر و درک هندسی مناسب از آن دست یافت[۲۱].

۲-این روش دارای مبنای ریاضی قابل قبولی بوده و در تولید اشکال ساده و پیچیده از یک الگوریتم مشخص استفاده می‌کند. بنابراین رفتار آن در تولید یک شکل ساده مانند خط و دایره با تولید یک رویه پیچیده مانند بدنه ماشین و کشتی، ثابت می‌باشد[۲۲].

۳-انعطاف پذیری آن در تولید اشکال مختلف و قابلیت ایجاد تغییرات دلخواه در شکل مساله بدون نیاز به کار ریاضی اضافی[۲۳].

۴-ثابت ماندن شکل منحنی ها و سطوح تولید شده تحت اثر تبدیلات هندسی معمول مانند مقیاس کردن، انتقال و دوران[۲۴].

۵-کارایی روش در تولید سریع و دقیق شکل مورد نظر[۲۵].

۶-وجود پایداری عددی[۲۶] بالا در مواجهه با حجم سنگین محاسبات عددی و عدم ایجاد تغییر شکلهای ناخواسته و اعوجاج[۲۷] در اشکال تولید شده.

---

[21] Intuitive
[22] Unified Approach
[23] Flexibility
[24] Invariant
[25] Efficiency
[26] Numerical Stability
[27] Distortion

۳-۴ توابع پایه اسپلاین

۳-۴-۱ تعریف توابع پایه اسپلاین

برای تعریف توابع پایه اسپلاین روشهای متنوعی موجود است که هر یک دارای تعریف و خواص مربوط به خودشان هستند. در این رساله از فرمول بازگشتی استفاده شده است زیرا به راحتی می‌توان از آن در برنامه های کامپیوتری استفاده نمود.

بردار $\mathbf{U}=\{u_0,u_1,u_2,...,u_m\}$ را در نظر بگیرید. این بردار شامل مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است به طوری که رابطه $i=0,1,2,...,m-1 \quad u_i \le u_{i+1}$ در آن برقرار است. بردار $\mathbf{U}$ بردار گره[۲۸] و u_i ها مقادیر گرهی[۲۹] نامیده می‌شوند. اکنون iامین تابع پایه اسپلاین با درجه p (یا مرتبه $p+1$) را با $N_{i,p}(u)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & \text{if } u_i \le u < u_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \qquad (۱-۲)$$

توجه شود که

۱- $N_{i,0}(u)$ تابعی پله‌ای[۳۰] بوده و به جز در بازه $u\in[u_i,u_{i+1})$ مقدار آن صفر است.

۲-برای $p>0$، $N_{i,p}(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه $p-1$ می‌باشد.

۳-برای محاسبه کلیه توابع پایه به بردار گره $\mathbf{U}$ و درجه p نیاز داریم.

۴-در صورتی که در رابطه (۲-۱) به تقسیم $\frac{0}{0}$ برسیم، آن را برابر با صفر لحاظ می‌کنیم.

۵- $N_{i,0}(u)$ ها، چند جمله‌ایهای تکه‌ای[۳۱] هستند که بر روی یک خط حقیقی تعریف شده و فقط بازه $[u_0,u_m]$ را تحت تاثیر قرار می‌دهند.

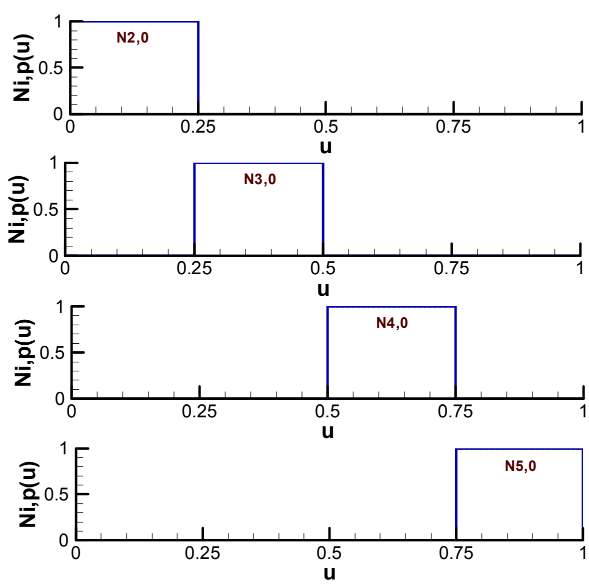
---
[28] Knot Vector
[29] Knots
[30] Step Function
[31] Piecewise Polynomial

۶-بازه $[u_i,u_{i+1})$ را یک دهانه گرهی می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد، زیرا گره ها لزوما دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند.

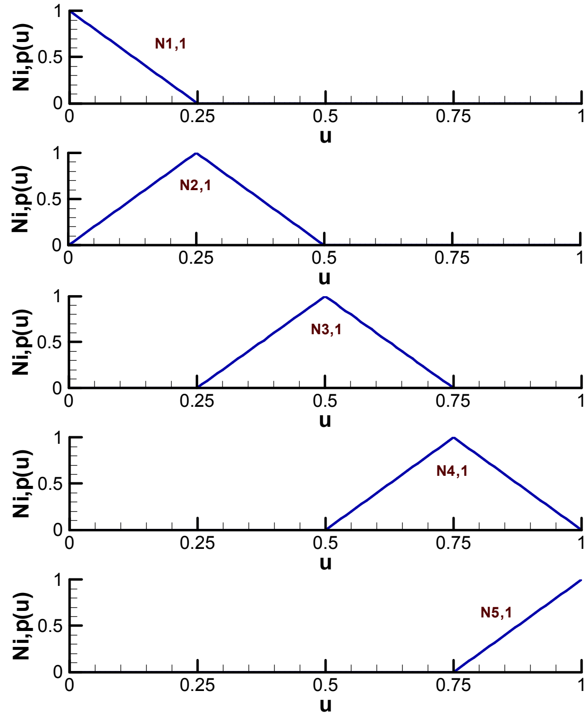
۷-محاسبه تابع پایه درجه p ام، سبب تولید یک جدول مثلثی ناقص مانند زیر می‌شود.

$$\begin{array}{cccc}
N_{0,0} & & & \\
 & N_{0,1} & & \\
N_{1,0} & & N_{0,2} & \\
 & N_{1,1} & & N_{0,3} \\
N_{2,0} & & N_{1,2} & \\
 & N_{2,1} & & N_{1,3} \\
N_{3,0} & & N_{2,2} & \vdots \\
 & N_{3,1} & \vdots & \\
N_{4,0} & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

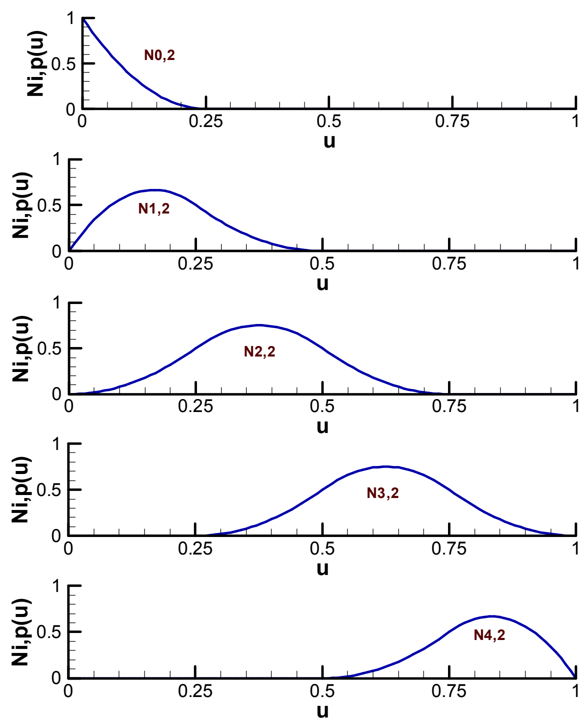
در ادامه، برای سادگی به جای $N_{i,p}(u)$ از $N_{i,p}$ استفاده می‌کنیم. همچنین به عنوان یک مثال اگر بردار گره برابر با $\mathbf{U}=\{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$ باشد، می‌توان توابع پایه را با درجه های به ترتیب برابر با $p=0,1,2$ در شکل (۲-۱)، (۲-۲) و (۲-۳) ملاحظه نمود. سایر توابعی که نشان داده نشده اند دارای مقدار صفر می‌باشند.

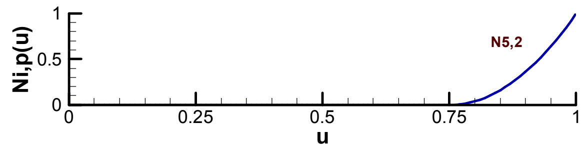


شکل ۳-۱: توابع پایه با درجه صفر $p=0$



شکل ۱-۲: توابع پایه با درجه یک $p=1$





شکل ۱-۳: توابع پایه با درجه دو $p=2$

۳-۴-۲ برخی از خواص مهم توابع پایه اسپلاین

با فرض داشتن بردار گره $\mathbf{U}=\{u_0,u_1,u_2,...,u_m\}$ و درجه p، برخی از خواص توابع پایه اسپلاین به شرح زیر است. بعدا خواهیم دید که این خواص، تاثیرات زیادی در مشخصات منحنی‌ها و سطوح اسپلاین خواهند داشت.

۱-اگر u خارج از بازه $\left[u_i,u_{i+p+1}\right)$ باشد، آنگاه $N_{i,p}\left(u\right)=0$ خواهد بود[۳۲].

۲-تعداد حداکثر $p+1$ عدد از $N_{i,p}$ها در بازه داده شده $\left[u_j,u_{j+1}\right)$ غیر صفر هستند که عبارتند از $N_{j-p,p},...,N_{j,p}$.

۳-برای کلیه مقادیر i، p و u، خواهیم داشت[۳۳] $N_{i,p}\left(u\right)\geq 0$.

۴-به ازای کلیه مقادیر u در بازه دلخواه $\left[u_i,u_{i+1}\right)$ خواهیم داشت[۳۴] $\sum_{j=i-p}^{i}N_{j,p}\left(u\right)=1$.

کلیه مشتقات $N_{i,p}\left(u\right)$ در داخل یک بازه موجود می‌باشند. در یک گره، عبارت $N_{i,p}\left(u\right)$ به تعداد $p-k$ مرتبه به طور پیوسته مشتق‌پذیر است. در اینجا k تعداد تکرار[۳۵] یک گره در بردار گره می‌باشد. بنابر این واضح است که افزایش p سبب افزایش پیوستگی و افزایش k سبب کاهش پیوستگی می‌شود. به جز در $p=0$، در سایر درجات، توابع پایه $N_{i,p}\left(u\right)$ دقیقا به یک مقدار ماکزیمم می‌رسند. اگر بردار گره به شکل $\mathbf{U}=\{\underbrace{0,0,...,0}_{p+1},\underbrace{1,1,...,1}_{p+1}\}$ باشد، چندجمله‌ایهای برنشتاین[۳۶] با درجه p را تولید می‌نماید.

فرض کنید که تعداد گره ها در بردار گره برابر با $m+1$ باشد. آنگاه تعداد $n+1$ تابع پایه

---

[32] Local Support Property
[33] Nonnegativity
[34] Partition of Unity
[35] Multiplicity
[36] Bernstein Polynomials

اسپلاین با درجه p موجود است بطوریکه خواهیم داشت: $n=m-p-1$.

۳-۵ مشتقات توابع پایه

مشتق یک تابع پایه اسپلاین با رابطه زیر بیان می‌شود.

$$N'_{i,p}(u)=\frac{p}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)-\frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \qquad (۲-۲)$$

مشتق مرتبه kام تابع پایه $N_{i,p}$ را با $N^{(k)}_{i,p}$ نشان داده و با رابطه زیر محاسبه می‌کنیم.

$$N^{(k)}_{i,p}(u)=p\left(\frac{N^{(k-1)}_{i,p-1}(u)}{u_{i+p}-u_i}-\frac{N^{(k-1)}_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right) \qquad (۳-۲)$$

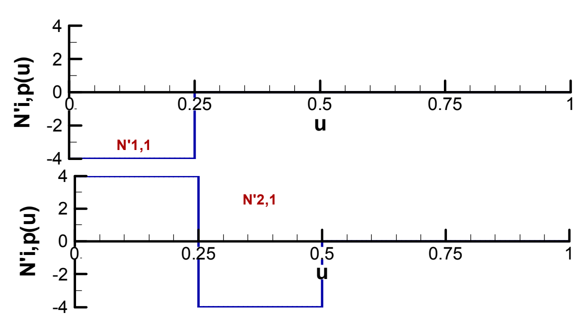
روابطی نیز برای محاسبه $N^{(k)}_{i,p}$ بر حسب $N_{i,p}$ وجود دارد که در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) قابل ملاحظه است.

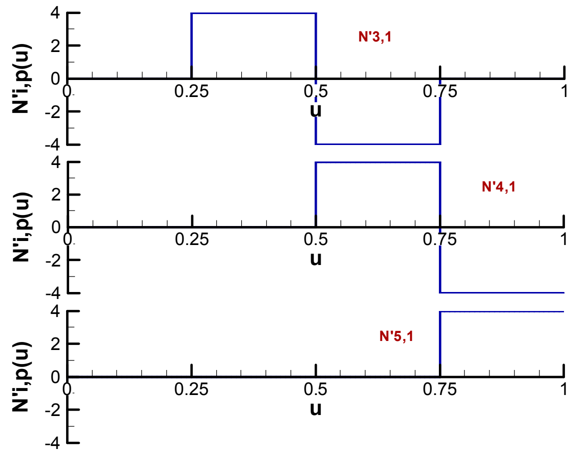
نکاتی که در مورد مشتق توابع پایه اسپلاین وجود دارد عبارتند از:

۱-مقدار k نباید از p تجاوز نماید. (کلیه مشتقات مرتبه بالاتر صفر می‌باشند.)

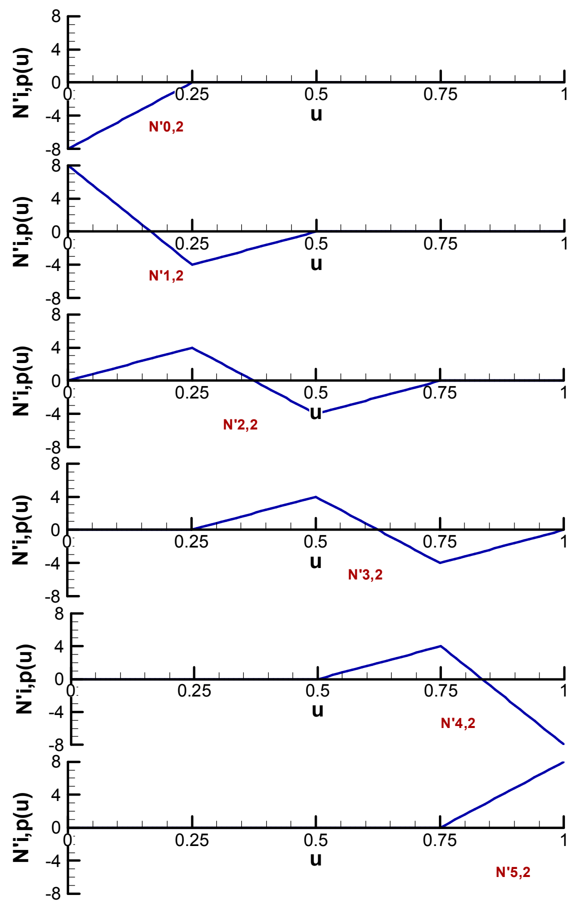
۲-اگر مخرج کسرها در روابط (۲-۲) و (۲-۳) مساوی صفر شود، کل کسر را مساوی صفر در نظر می‌گیریم.

برای توابع پایه ترسیم شده در شکلهای (۲-۲) و (۲-۳) با همان فرض بردار گره برابر با $\mathbf{U}=\{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$ مشتقات توابع پایه با درجات یک و دو، به ترتیب در شکلهای (۲-۴) و (۲-۵) ترسیم شده اند.





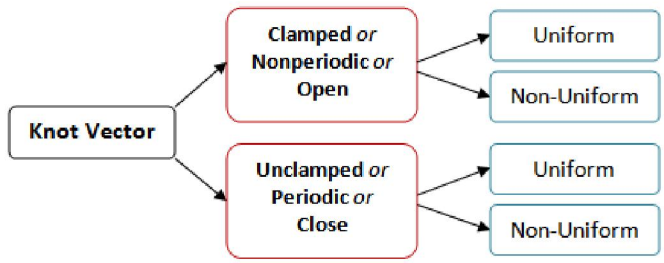
شکل ۱-۴: مشتقات توابع پایه با درجه یک $p=1$



شکل ۱-۵: مشتقات توابع پایه با درجه دو $p=2$

۳-۶ انواع بردار گره

بردارهای گره به طور کلی به دو گروه دسته بندی می‌شوند که عبارتند از: مقید[37] و نامقید[38]. هر کدام از این دو نوع می‌توانند مطابق شکل (۲-۶) به صورت یکنواخت[39] و غیریکنواخت[40] بیان شود. نامهای دیگری نیز در مراجع مختلف برای حالات فوق بیان شده است. مثلا برای بردارهای گره مقید از واژه‌های بردارهای گره غیرتکراری[41] و یا بردارهای گره باز[42] نیز نام برده می‌شود و بالعکس.



شکل ۱-۶: دسته بندی انواع بردارهای گره

منظور از بردارهای گره مقید، بردارهایی هستند که در ابتدا و انتهای این بردارها، مقادیر گرهی به تعداد $p+1$ مرتبه تکرار می‌شوند که p درجه توابع پایه اسپلاین می‌باشد. حال اگر در یک بردار گره، فاصله بین مقادیر گرهی ثابت باشد آن‌گاه به آن یک بردار یکنواخت می‌گویند و در غیر این صورت بردار گره غیر یکنواخت خواهد بود. مثالهای جدول (۲-۱) بیانگر حالات مختلف فوق می‌باشد.

جدول ۱-۱: انواع حالات بردار گره

بردار گره	مثال
مقید - یکنواخت	$\{-0.5,-0.5,-0.5,1,2.5,4,4,4\}$
مقید - غیریکنواخت	$\{0,0,0,1,4,5,6,7,7,7\}$
نامقید - یکنواخت	$\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
نامقید - غیریکنواخت	$\{-2,0,0,2,3,5,6.5,8,8,9\}$

[37] Clamped
[38] Unclamped
[39] Uniform
[40] Non-Uniform
[41] Nonperiodic knot vector
[42] Open knot vector

خاطر نشان می‌سازد که در بردارهای مقید، ابتدا و انتهای منحنی بر روی نقاط کنترلی واقع می‌شود، ولی در بردارهای نامقید این انطباق وجود ندارد. البته در این خصوص جزئیات بسیاری وجود دارد که در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) قابل مشاهده است. توجه شود که در اغلب کارهای انجام شده در روش IGA از جمله در این رساله، از بردارهای گره مقید و یکنواخت استفاده شده است.

۳-۷ منحنیها و سطوح اسپلاین

یک منحنی اسپلاین با درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{C}(u)=\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{P}_i \qquad a\le u\le b \tag{۲-۴}$$

که در این رابطه $\{\mathbf{P}_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی[۴۳] و $\{N_{i,p}(u)\}$ توابع پایه درجه pام اسپلاین می‌باشند که بر روی بردار گره غیریکنواخت (۲-۵) تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{U}=\{\underbrace{a,\dots,a}_{p+1},u_{p+1},\dots,u_{m-p-1},\underbrace{b,\dots,b}_{p+1}\} \tag{۲-۵}$$

از این پس همواره $a=0$ و $b=1$ فرض می‌شوند مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. به چندضلعی تشکیل شده توسط مجموعه نقاط کنترلی $\{\mathbf{P}_i\}$، چندضلعی کنترلی[۴۴] گفته می‌شود.

برای محاسبه موقعیت یک نقطه بر روی منحنی اسپلاین به ازای یک مقدار مشخص u ، سه مرحله بایستی انجام شود که عبارتند از:

- ✓ یافتن بازه‌ای که u در آن واقع شده است.
- ✓ محاسبه کلیه توابع پایه غیرصفر مربوطه
- ✓ ضرب مقدار توابع پایه غیر صفر در نقاط کنترلی مربوط به آن.

همچنین می‌توان با استفاده از یک شبکه از نقاط کنترلی و دو بردار گره، سطوح اسپلاین را

[43] Control Points
[44] Control Polygon

طبق رابطه (۲-۶) تعریف نمود.

$$\mathbf{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\mathbf{P}_{i,j} \qquad (۶-۲)$$

بردارهای گره نیز به شکل (۲-۷) و (۲-۸) خواهند بود.

$$\mathbf{U}=\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},u_{p+1},\ldots,u_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\} \qquad (۷-۲)$$

$$\mathbf{V}=\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},v_{q+1},\ldots,v_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\} \qquad (۸-۲)$$

که بردار $\mathbf{U}$ دارای $r+1$ گره و بردار $\mathbf{V}$ دارای $s+1$ گره می‌باشند و رابطه (۲-۹) برقرار است.

$$\begin{aligned} r&=n+p+1\\ s&=m+q+1 \end{aligned} \qquad (۹-۲)$$

برای محاسبه موقعیت یک نقطه بر روی سطح اسپلاین به ازای مقادیر مشخص u و v ، پنج مرحله بایستی انجام شود که عبارتند از:

۱-یافتن بازه‌ای که $u\in[u_i,u_{i+1})$ در آن واقع شده است.

۲-محاسبه کلیه توابع پایه غیرصفر $N_{i-p,p}(u),\ldots,N_{i,p}(u)$

۳-یافتن بازه‌ای که $v\in[v_j,v_{j+1})$ در آن واقع شده است.

۴-محاسبه کلیه توابع پایه غیرصفر $N_{j-q,q}(v),\ldots,N_{j,q}(v)$

۵-ضرب مقدار توابع پایه غیر صفر در نقاط کنترلی مربوطه‌شان.

۳-۸مشتق منحنیها و سطوح اسپلاین

فرض کنید که $\mathbf{C}^{(k)}(u)$ مشتق مرتبه kام منحنی اسپلاین $\mathbf{C}(u)$ باشد. اگر مقدار u معین[۴۵] باشد، آنگاه می‌توان $\mathbf{C}^{(k)}(u)$ را با محاسبه مشتق kام توابع پایه اسپلاین مطابق رابطه (۲-۱۰) محاسبه نمود. در حالت کلی داریم:

$$\mathbf{C}^{(k)}(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}^{(k)}(u)\mathbf{P}_i \qquad (۱۰-۲)$$

اکنون اگر مقدار u معین نباشد، مشتق منحنی اسپلاین $\mathbf{C}(u)$ در رابطه (۲-۴) را که بر روی

[45] Fixed

بردار گره رابطه (۲-۵) تعریف می‌شود بدست می‌آوریم. با توجه به اینکه اثبات این روابط در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) آمده است لذا در اینجا فقط به ذکر روابط بسنده می‌نماییم.

پارامتر $\mathbf{Q}_i$ را با رابطه (۲-۱۱) تعریف می‌نماییم

$$\mathbf{Q}_i = p\frac{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

بردار گره $\mathbf{U}'$ را که دارای $m-1$ عضو می‌باشد به شکل رابطه (۲-۱۲) تعریف می‌کنیم به طوریکه از حذف مقادیر ابتدایی و انتهایی بردار گره $\mathbf{U}$ حاصل می‌شود.

$$\mathbf{U}' = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{p}, u_{p+1}, \ldots, u_{m-p-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{p}\} \qquad (۲\text{-}۱۲)$$

اکنون می‌توان به راحتی کنترل کرد که حاصل $N_{i+1,p-1}(u)$ روی بردار گره $\mathbf{U}$ با حاصل $N_{i,p-1}(u)$ روی بردار گره $\mathbf{U}'$ برابر می‌باشد. بنابراین رابطه (۲-۱۳) برقرار می‌باشد.

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p-1}(u)\mathbf{Q}_i \qquad (۲\text{-}۱۳)$$

که $\mathbf{Q}_i$ با رابطه (۲-۱۱) و $N_{i,p-1}(u)$ بر روی بردار گره $\mathbf{U}'$ محاسبه می‌شوند و $\mathbf{C}'(u)$ یک منحنی اسپلاین با درجه $p-1$ می‌باشد.

مشتقات مرتبه اول منحنی $\mathbf{C}(u)$ در نقاط ابتدایی و انتهایی با رابطه (۲-۱۴) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}'(0) &= \mathbf{Q}_0 = \frac{p}{u_{p+1}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)\\ \mathbf{C}'(1) &= \mathbf{Q}_1 = \frac{p}{1-u_{m-p-1}}(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۴)$$

برای محاسبه مشتقات مرتبه بالاتر نیز می‌توان از رابطه (۲-۱۵) استفاده نمود.

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u)\mathbf{P}_i^{(k)} \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

که در این رابطه مقدار $\mathbf{P}_i^{(k)}$ از رابطه (۲-۱۶) بدست می‌آید.

$$\mathbf{P}_i^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{P}_i & k = 0 \\ \dfrac{p-k+1}{u_{i+p+1} - u_{i+k}}\left(\mathbf{P}_{i+1}^{(k-1)} - \mathbf{P}_i^{(k-1)}\right) & k > 0 \end{cases} \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

بردار گره در این حالت به شکل رابطه (۲-۱۷) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{U}^{(k)} = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{p-k+1}, u_{p+1},\ldots,u_{m-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p-k+1}\} \tag{۲-۱۷}$$

مشتقات مرتبه دوم منحنی اسپلاین $\mathbf{C}(u)$ با $p>1$ در نقاط ابتدایی و انتهایی با رابطه (۲-۱۸) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}''(0) &= \frac{p(p-1)}{u_{p+1}}\left[\frac{\mathbf{P}_0}{u_{p+1}} - \frac{(u_{p+1}+u_{p+2})\mathbf{P}_1}{u_{p+1}u_{p+2}} + \frac{\mathbf{P}_2}{u_{p+2}}\right] \\
\mathbf{C}''(1) &= \frac{p(p-1)}{1-u_{m-p-1}}\left[\frac{\mathbf{P}_n}{1-u_{m-p-1}} - \frac{(2-u_{m-p-1}-u_{m-p-2})\mathbf{P}_{n-1}}{(1-u_{m-p-1})(1-u_{m-p-2})} + \frac{\mathbf{P}_{n-2}}{1-u_{m-p-2}}\right]
\end{aligned} \tag{۲-۱۸}$$

اثبات روابط فوق در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) موجود است.

حال به بررسی و ارایه روابط مربوط به مشتقات سطوح اسپلاین می‌پردازیم. فرض کنید که (u,v) مقدار معینی باشد. به طور کلی هدف اصلی، یافتن مشتقات نسبی سطح اسپلاین طبق رابطه (۲-۶) تا مرتبه dام طبق رابطه (۲-۱۹) می‌باشد.

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u\ \partial^l v}\mathbf{S}(u,v) \qquad 0 \le k+l \le d \tag{۲-۱۹}$$

همانند آنچه که برای منحنی‌ها ذکر شد، برای محاسبه مشتق سطوح نیز بایستی مشتق توابع پایه اسپلاین را محاسبه نمود. در این حالت رابطه (۲-۲۰) را داریم.

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u\ \partial^l v}\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}^{(k)}(u)\,N_{j,q}^{(l)}(v)\,\mathbf{P}_{ij} \tag{۲-۲۰}$$

مشتق $\mathbf{S}(u,v)$ نسبت به u را با $\mathbf{S}_u(u,v)$ نشان داده و با رابطه (۲-۲۱) محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{S}_u(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p-1}(u)\,N_{j,q}(v)\,\mathbf{P}_{i,j}^{(1,0)} \tag{۲-۲۱}$$

که $\mathbf{P}_{i,j}^{(1,0)}$ از رابطه (۲-۲۲) بدست می‌آید.

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(1,0)} = p\,\frac{\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \tag{۲-۲۲}$$

که در محاسبه روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۲) از بردارهای گره $\mathbf{U}^{(1)}$ و $\mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{V}$ استفاده می‌شود.

مشتق $\mathbf{S}(u,v)$ نسبت به v را با $\mathbf{S}_v(u,v)$ نشان داده و با رابطه (۲-۲۳) محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{S}_v\left(u,v\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}N_{i,p}\left(u\right)N_{j,q-1}\left(v\right)\mathbf{P}_{i,j}^{(0,1)} \tag{۲-۲۳}$$

که $\mathbf{P}_{i,j}^{(1,0)}$ از رابطه (۲-۲۴) بدست می‌آید.

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(0,1)}=q\frac{\mathbf{P}_{i,j+1}-\mathbf{P}_{i,j}}{v_{j+q+1}-v_{j+1}} \tag{۲-۲۴}$$

که در محاسبه روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۴) از بردارهای گره $\mathbf{U}^{(0)}=\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}^{(1)}$ استفاده می‌شود. همچنین مشتق $\mathbf{S}(u,v)$ نسبت به u و v را با $\mathbf{S}_{uv}(u,v)$ نشان داده و با رابطه (۲-۲۵) محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{S}_{uv}\left(u,v\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}N_{i,p-1}\left(u\right)N_{j,q-1}\left(v\right)\mathbf{P}_{i,j}^{(1,1)} \tag{۲-۲۵}$$

که $\mathbf{P}_{i,j}^{(1,0)}$ از رابطه (۲-۲۶) بدست می‌آید.

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(1,1)}=q\frac{\mathbf{P}_{i,j+1}^{(1,0)}-\mathbf{P}_{i,j}^{(1,0)}}{v_{j+q+1}-v_{j+1}} \tag{۲-۲۶}$$

که در محاسبه روابط (۲-۲۵) و (۲-۲۶) از بردارهای گره $\mathbf{U}^{(1)}$ و $\mathbf{V}^{(1)}$ استفاده می‌شود. در حالت کلی نیز رابطه (۲-۲۷) را داریم:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u\,\partial^l v}\mathbf{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{m-l}N_{i,p-k}\left(u\right)N_{j,q-l}\left(v\right)\mathbf{P}_{i,j}^{(k,l)} \tag{۲-۲۷}$$

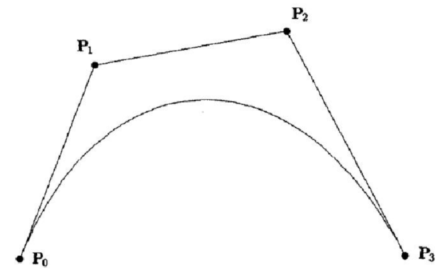
که در آن $\mathbf{P}_{i,j}^{(k,l)}$ توسط رابطه (۲-۲۸) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(k,l)}=\left(q-l+1\right)\frac{\mathbf{P}_{i,j+1}^{(k,l-1)}-\mathbf{P}_{i,j}^{(k,l-1)}}{v_{j+q+1}-v_{j+l}} \tag{۲-۲۸}$$

برای محاسبه مشتقات در گوشه‌های سطح نیز روابطی در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) ارایه شده است.

۲-۹ خواص منحنیها و سطوح اسپلاین

اگر $n=p$ باشد و بردار گره برابر با $\mathbf{U}=\{0,...,0,1,...,1\}$ باشد، آنگاه منحنی $\mathbf{C}(u)$ بیانگر منحنی بزیر می‌باشد. (شکل ۲-۷)

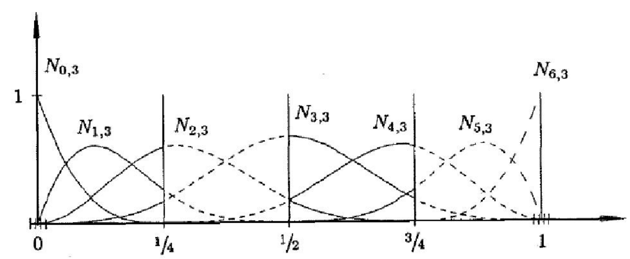


شکل ۱-۷: منحنی درجه سه اسپلاین بزیر با $U=\{0,0,0,0,1,1,1,1\}$

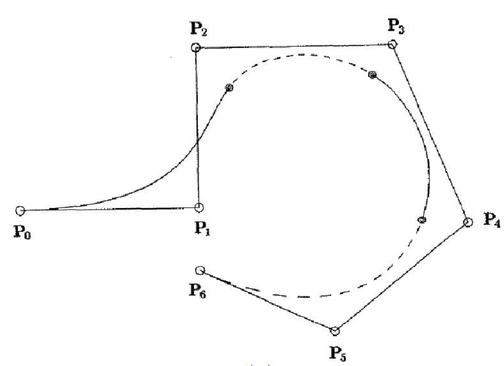
چون $N_{i,p}(u)$ ها چندجمله‌ای‌های تکه‌ای[۴۶] هستند، لذا منحنی $\mathbf{C}(u)$ نیز به همین صورت می‌باشد و به ازای تعداد نقاط کنترلی n و درجه توابع پایه p و تعداد اعضای بردار گره m رابطه (۲-۲۹) برقرار است.

$$m=n+p+1 \qquad (۲۹-۲)$$

شکل (۲-۸) برای هر دهانه مستقل بیانگر توابع پایه و قطعه منحنی مربوط به آن می‌باشد که به صورت خطوط توپر و نقطه‌چین نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۱-۸: (الف) توابع پایه درجه سه با $U=\left\{0,0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,1,1,1\right\}$ (ب) منحنی درجه سه مربوطه

[46] Piecewise Polynomials

۱-خاصیت انطباق[47] : در نقاط انتهایی منحنی اسپلاین داریم $\mathbf{C}(0)=\mathbf{P}_0$ و $\mathbf{C}(1)=\mathbf{P}_n$

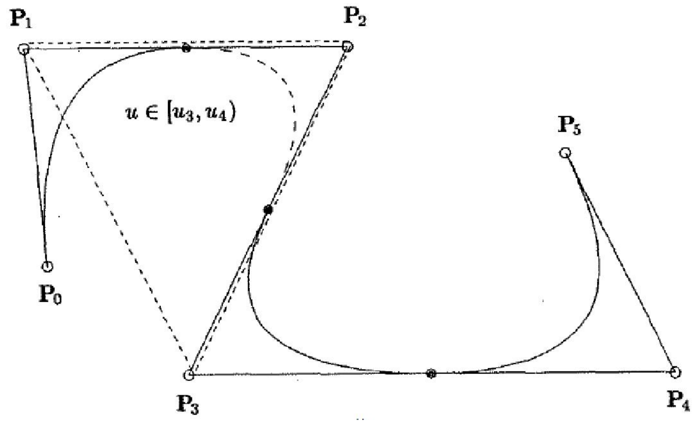
۲-خاصیت تغییرناپذیری نسبی[48]: برای ایجاد یک تبدیل در منحنی می‌توان این تبدیل را در موقعیت نقاط کنترلی اعمال نمود. با این فرض که r یک نقطه در فضای سه بعدی اقلیدسی ε^3 باشد، یک تبدیل نسبی[49] که با $\mathbf{\Phi}$ نشان داده می‌شود، ε^3 را به ε^3 تبدیل[50] می‌کند و داریم $\mathbf{\Phi}(r)=\mathbf{A}r+\mathbf{V}$. که $\mathbf{A}$ یک ماتریس 3×3 و $\mathbf{V}$ یک بردار می‌باشد. تبدیلات نسبی عبارتند از انتقال[51]، دوران[52]، مقیاس[53] و برش[54].

۳-خاصیت پوسته محدب[55]: منحنی توسط پوسته محدبی که توسط نقاط کنترلی مربوط به آن ایجاد می‌شود، در برگرفته می‌شود. در حقیقت اگر $u\in[u_i,u_{i+1})$ و $p\le i<m-p-1$ باشد، آنگاه $\mathbf{C}(u)$ در پوسته محدبی که توسط نقاط کنترلی $\mathbf{P}_{i-p}$ تا $\mathbf{P}_i$ تشکیل می‌شود قرار می‌گیرد.

در شکل (۲-۹) خاصیت پوسته محدب برای منحنی اسپلاین درجه دو مشاهده می‌شود. به ازای $u\in[u_i,u_{i+1})$ مشاهده می‌شود که منحنی $\mathbf{C}(u)$ در مثلث $\mathbf{P}_{i-2}\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ واقع می‌شود.

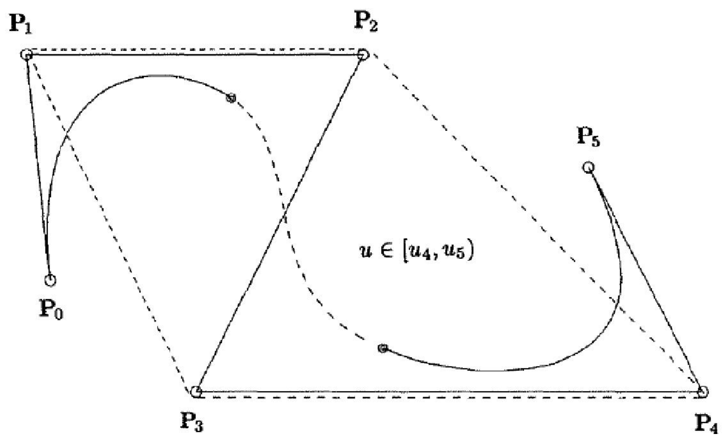
---

47 Endpoints Interpolation
48 Affine invariance
49 Affine transformation
50 map
51 translations
52 rotations
53 scalings
54 shears
55 strong convex hull



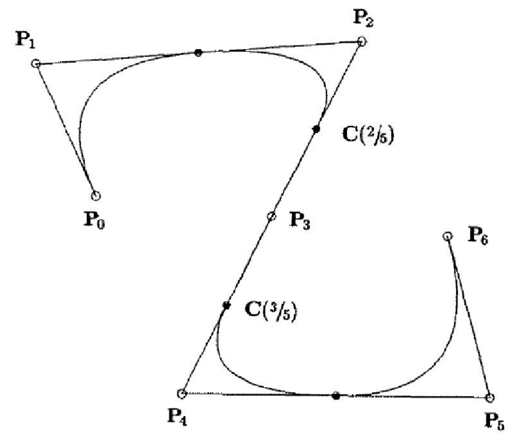
شکل ۲-۹: منحنی درجه دو اسپلاین واقع در یک مثلث

در شکل (۲-۱۰) خاصیت پوسته محدب برای منحنی اسپلاین درجه سه مشاهده می‌شود. به ازای $u \in [u_i, u_{i+1})$ مشاهده میشود که منحنی $\mathbf{C}(u)$ در چهارضلعی $\mathbf{P}_{i-3}\mathbf{P}_{i-2}\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ واقع می‌شود.



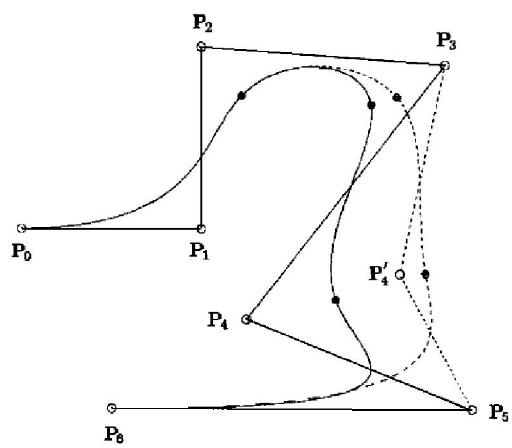
شکل ۲-۱۰: منحنی درجه سه اسپلاین واقع در یک چهارضلعی

در شکل (۲-۱۱) خاصیت پوسته محدب برای منحنی اسپلاین درجه دو به ازای $\mathbf{U} = \left\{0,0,0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,1,1\right\}$ مشاهده می‌شود. منحنی بین $\mathbf{C}\left(\frac{2}{5}\right)$ و $\mathbf{C}\left(\frac{3}{5}\right)$ به صورت یک خط راست می‌باشد.



شکل ۲-۱۱: منحنی درجه دو اسپلاین واقع روی خط راست

۴-اصلاح موضعی[۵۶]: با حرکت کردن نقطه کنترلی $\mathbf{P}_i$، منحنی $\mathbf{C}(u)$ فقط در بازه $\left[u_i, u_{i+p+1}\right)$ دچار تغییرات می‌شود زیرا اگر $u \notin \left[u_i, u_{i+p+1}\right)$ ، آنگاه حاصل $N_{i,p}(u)$ برابر با صفر خواهدبود. در شکل (۲-۱۲) منحنی درجه سه اسپلاین با بردار گره $\mathbf{U} = \left\{0,0,0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,1,1\right\}$ مشاهده می‌شود که موقعیت نقطه کنترلی $\mathbf{P}_4$ به $\mathbf{P}_4'$ تغییر یافته است.

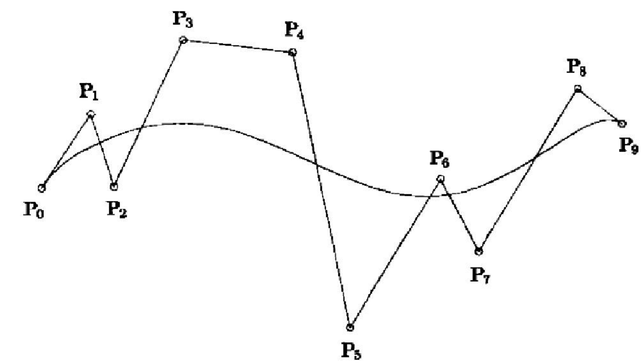


شکل ۲-۱۲: تغییر شکل منحنی اسپلاین با انتقال $\mathbf{P}_4$ به $\mathbf{P}_4'$

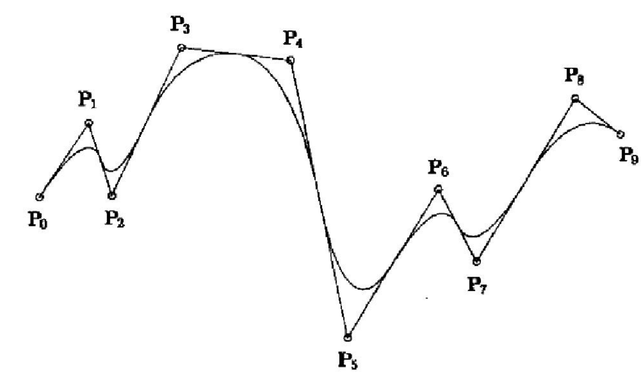
۵-نقاط کنترلی یک تقریب خطی تکه‌ای از منحنی را بیان می‌کنند و این تقریب را

[56] Local modification scheme

می‌توان با اضافه کردن گره یا افزایش درجه توابع پایه، بهبود بخشید. به عنوان یک قانون کلی، هرچه درجه پایین‌تر باشد، آنگاه منحنی به چندضلعی کنترلی نزدیکتر است. این موضوع در شکل (۲-۱۳) و (۲-۱۴) نشان داده شده است. در شکل (۲-۱۳) از توابع پایه با درجه نه و بردار گره $\mathbf{U}=\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$ و در شکل (۲-۱۴) از همان شبکه نقاط کنترلی ولی با درجه دو و بردار گره $\mathbf{U}=\left\{0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,1,1\right\}$ استفاده شده است.



شکل ۲-۱۳: منحنی اسپلاین با توابع پایه درجه نه



شکل ۲-۱۴: منحنی اسپلاین با توابع پایه درجه دو

با مراجعه به (Piegl and Tiller, 1997) ملاحظه می‌شود که خواص دیگری نیز برای منحنی‌های اسپلاین وجود دارد که جهت اختصار از ذکر آنها خودداری شده است. باید دانست که با

توجه به اینکه سطوح اسپلاین از توسعه منحنی‌های اسپلاین حاصل می‌شوند لذا می‌توان این خواص را به سطوح اسپلاین نیز تعمیم داد.

۳-۱۰ منحنیها و سطوح نربز

یک منحنی درجه p ام نربز با رابطه (۲-۳۰) به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \qquad a \le u \le b \tag{۲-۳۰}$$

که در این رابطه $\{\mathbf{P}_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی می‌باشد که چند ضلعی کنترلی[۵۷] را تشکیل می‌دهد. همچنین $\{w_i\}$ وزنها و $\{N_{i,p}(u)\}$ توابع پایه درجه p ام اسپلاین است که بر روی بردار گره (۲-۳۰) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{a,\ldots,a}_{p+1}, u_{p+1},\ldots,u_{m-p-1}, \underbrace{b,\ldots,b}_{p+1} \right\} \tag{۲-۳۰}$$

بجز در مواردی که صریحا ذکر شده است، در سایر موارد $a=0$ و $b=1$ فرض می‌شود. همچنین مقدار w_iها برای کلیه iها، همواره بزرگتر از صفر می‌باشد($w_i > 0$). حال اگر $R_i^p(u)$ را به شکل رابطه (۲-۳۱) زیر تعریف کنیم:

$$R_i^p(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(u) w_j} \tag{۲-۳۱}$$

اکنون می‌توانیم رابطه (۲-۳۰) را به شکل (۲-۳۲) باز نویسی نماییم.

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \tag{۲-۳۲}$$

که $\{R_{i,p}(u)\}$ مجموعه توابع پایه گویا[۵۸] می‌باشند و خصوصیات آن مشابه همان توابع پایه است.

---
57 Control Polygon
58 Rational basis function

همچنین می‌توان یک سطح نربز را که دارای درجه p در جهت u و درجه q در جهت v می‌باشد را با رابطه (۲-۳۳) به شکل زیر محاسبه نمود.

$$\mathbf{S}(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}\mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}\qquad \begin{array}{l}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1\end{array}\qquad (۲\text{-}۳۳)$$

که $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی و $\{w_{i,j}\}$ وزن مربوط به آنها می‌باشند. همچنین $\{N_{i,p}(u)\}$ و $\{N_{j,q}(v)\}$ توابع پایه غیرگویا [59] اسپلاین می‌باشند که بر روی بردارهای (۲-۳۴) و (۲-۳۵) تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{U}=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},u_{p+1},\ldots,u_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\right\}\qquad (۲\text{-}۳۴)$$

$$\mathbf{V}=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},v_{q+1},\ldots,v_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\right\}\qquad (۲\text{-}۳۵)$$

توجه شود که روابط $r=n+p+1$ و $s=m+q+1$ نیز برقرار می‌باشند. حال اگر $R_{i,j}^{p,q}(u,v)$ را به شکل رابطه (۲-۳۶) زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}^{p,q}(u,v)=\frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}}\qquad (۲\text{-}۳۶)$$

اکنون می‌توانیم رابطه (۲-۳۳) را به شکل (۲-۳۷) باز نویسی نماییم.

$$\mathbf{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(u,v)\mathbf{P}_{i,j}\qquad (۲\text{-}۳۷)$$

۳-۱۱ مشتقات منحنیها و سطوح نربز

مشتق توابع گویا پیچیده و دارای مخرجهایی با توانهای بالا می‌باشد. قبل از بیان مطالب این بخش، روش دیگری برای نشان دادن منحنی‌های نربز ارایه می‌شود. اگر $\{\mathbf{P}_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی و $\{w_i\}$ وزنها باشند، آنگاه می‌توان مجموعه نقاط کنترلی وزن‌دار را به شکل $P_i^w=(w_ix_i,w_iy_i,w_iz_i,w_i)$

[59] Nonrational B-spline basis function

تعریف نمود. حال می‌توان منحنی اسپلاین غیرگویا را در فضای چهاربعدی[۶۰] با رابطه (۲-۳۸) تعریف نمود.

$$\mathbf{C}^{w}\left(u\right)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}\left(u\right)\mathbf{P}_{i}^{w} \qquad (۳۸-۲)$$

با تعریف فوق می‌توان کلیه روابطی را که در محاسبه مشتقات منحنیهای اسپلاین استفاده شد، برای رابطه (۲-۳۸) نیز استفاده نمود.

حال می‌توان مشتقات منحنی $\mathbf{C}(u)$ که در رابطه (۲-۲۹) تعریف شده است را بر حسب $\mathbf{C}^{w}(u)$ بیان نمود. فرض کنید داریم $\mathbf{C}(u)=\frac{w(u)\mathbf{C}(u)}{w(u)}=\frac{\mathbf{A}(u)}{w(u)}$ که در آن $\mathbf{A}(u)$ یک vector-valued function است و مختصات آن همان سه مختصه اول $\mathbf{C}^{w}(u)$ بوده و در واقع صورت کسر رابطه (۲-۳۰) می‌باشد. اکنون مشتق $\mathbf{C}(u)$ را با رابطه (۲-۳۹) حساب می‌کنیم که اثبات آن بسیار ساده است و در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) بیان شده است.

$$\mathbf{C}'\left(u\right)=\frac{\mathbf{A}'\left(u\right)-w'\left(u\right)\mathbf{C}\left(u\right)}{w\left(u\right)} \qquad (۳۹-۲)$$

برای محاسبه مشتقات بالاتر رابطه (۲-۳۹) نیز می‌توان از قانون لایبنیتز[۶۱] استفاده کرد که نتیجه آن در رابطه (۲-۴۰) بیان شده است.

$$\mathbf{C}^{(k)}\left(u\right)=\frac{\mathbf{A}^{(k)}\left(u\right)-\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}w^{(i)}\left(u\right)\mathbf{C}^{(k-i)}\left(u\right)}{w\left(u\right)} \qquad (۴۰-۲)$$

توسط رابطه (۲-۴۰) می‌توان مشتقات مرتبه kام $\mathbf{C}(u)$ را براساس جملات مشتق مرتبه kام $\mathbf{A}(u)$ و مشتق مرتبه $(k-1)$ام $\mathbf{C}(u)$ و $w(u)$ محاسبه نمود.

مشتق نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی نربز $\mathbf{C}(u)$ با رابطه (۲-۴۱) محاسبه می‌شود.

[60] Four-dimensional space
[61] Leibnitz' rule

$$\mathbf{C}'(0)=\frac{p}{u_{p+1}}\frac{w_1}{w_0}\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0\right)$$
$$\mathbf{C}'(1)=\frac{p}{1-u_{m-p-1}}\frac{w_{n-1}}{w_n}\left(\mathbf{P}_n-\mathbf{P}_{n-1}\right) \qquad (۲-۴۱)$$

برای محاسبه مشتق سطوح نربز فرض کنید داریم $\mathbf{S}(u)=\frac{w(u,v)\mathbf{S}(u,v)}{w(u,v)}=\frac{\mathbf{A}(u,v)}{w(u,v)}$ مشتق.

سطح $\mathbf{S}(u,v)$ را با $\mathbf{S}_\alpha(u,v)$ نشان می‌دهیم که α می‌تواند u یا v باشد.

$$\mathbf{S}_\alpha(u,v)=\frac{\mathbf{A}_\alpha(u,v)-w_\alpha(u,v)\mathbf{S}(u,v)}{w(u,v)} \qquad (۲-۴۲)$$

در حالت کلی نیز روابط (۲-۴۳) و (۲-۴۴) را خواهیم داشت.

$$\mathbf{A}^{(k,l)}=w^{(0,0)}\mathbf{S}^{(k,l)}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}w^{(i,0)}\mathbf{S}^{(k-i,l)}+\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}w^{(0,j)}\mathbf{S}^{(k,l-j)}$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}w^{(i,j)}\mathbf{S}^{(k-i,l-j)} \qquad (۲-۴۳)$$

و

$$\mathbf{S}^{(k,l)}=\frac{1}{w^{(0,0)}}\left(\mathbf{A}^{(k,l)}-\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}w^{(i,0)}\mathbf{S}^{(k-i,l)}-\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}w^{(0,j)}\mathbf{S}^{(k,l-j)}-\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}w^{(i,j)}\mathbf{S}^{(k-i,l-j)}\right) \qquad (۲-۴۴)$$

از معادله (۲-۴۴) خواهیم داشت:

$$\mathbf{S}_{uv}=\frac{A_{uv}-w_{uv}\mathbf{S}-w_u\mathbf{S}_v-w_v\mathbf{S}_u}{w} \qquad (۲-۴۵)$$

$$\mathbf{S}_{uu}=\frac{A_{uu}-2w_u\mathbf{S}_u-w_{uu}\mathbf{S}}{w} \qquad (۲-۴۶)$$

$$\mathbf{S}_{vv}=\frac{A_{vv}-2w_v\mathbf{S}_v-w_{vv}\mathbf{S}}{w} \qquad (۲-۴۷)$$

۳-۱۲ خواص منحنیها و سطوح نربز

با توجه به اینکه اساس تکنیک نربز بر استفاده از توابع پایه اسپلاین بنا شده است لذا خواص آن بسیار شبیه به خواص منحنیها و سطوح اسپلاین می‌باشد و برای حفظ اختصار از ذکر آن خودداری شده است. در مراجع (Piegl and Tiller, 1997, Rogers, 2001)می‌توان لیست کاملی از

این خصوصیات را مشاهده نمود.

تاکنون به معرفی مهمترین خصوصیات تکنیک اسپلاین و نربز پرداختیم. موارد مهم دیگری نیز وجود دارند که دانستن آنها برای انجام کارهای گسترده تر پژوهشی نیاز می‌باشد. مثلا اغلب برای ساخت ورودیها در روش IGA بایستی با تکنیک معکوس نربز[۶۲] نیز آشنا بود. البته در این رساله کدهای مربوط به آن تهیه شده و در موارد لزوم مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین دانستن تکنیکهای پایه هندسی از موارد مهمی است که باید با آن آشنا بود. این تکنیکها به پنج دسته اصلی تقسیم می‌شوند که عبارتند از تکنیکهای افزودن گره[۶۳]، اصلاح گره[۶۴]، حذف گره[۶۵]، ارتقای درجه[۶۶] و تنزیل درجه[۶۷].

با توجه به اینکه این فصل جهت آشنایی بیشتر خواننده با اسپلاینها و نربز مورد نگارش قرار گرفته است، سعی شده است تا مهمترین مبانی مورد بحث در خصوص این ابزار مورد بررسی و ارایه قرار گیرد. برای توضیحات بیشتر و جامعتر می‌توان به مراجع معرفی شده در بخش ۲-۱ رجوع نمود.

---

[62] Inverse NURBS
[63] knot Insertion
[64] knot Refinment
[65] knot Removal
[66] Degree Elevation
[67] Degree Reduction

فصل سوم: روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع

(GIGA)

۴-۱ مقدمه

پس از معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک[68] (IGA) در سال ۲۰۰۵ و نتایج دلگرم کننده‌ای که در مقالات منتشر شده پس از آن اعلام گردید، در این رساله سعی شد تا از زاویه دیگری به توانمندی این روش نگریسته شود و با توجه به اینکه این روش بر مبنای استفاده از تکنیکهای هندسه محاسباتی[69] (CG) استوار است، با ایجاد تغییراتی در نحوه نگرش به حل مسایل، امکانی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر حاصل گردید که این موضوع در ادامه به تفصیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این بخش توضیحاتی در خصوص هندسه محاسباتی، روشهای عددی، طراحی هندسه به کمک کامپیوتر، مواد مرکب تابعی، روش IGA و روش GIGA و تفاوتهای آنها با یکدیگر پرداخته می‌شود. همچنین فرمولبندی برخی مسایل حل شده با روش GIGA نیز بیان خواهد گردید.

۴-۲ هندسه محاسباتی

روش‌ها یا تکنولوژی‌های تولید هندسه انواع متنوعی دارند که می‌توان اغلب آنها را در روش IGA مورد استفاده قرار داد. برخی از این روشها در سالهای اخیر مورد استفاده قرار گرفته اند. تکنیک هایی مانند NURBS، T-Spline، Subdivision Surfaces، Gordon Patches، Gregory Patches، S-Patches، A-Patches و غیره به عنوان سایر روشهای هندسه محاسباتی نیز می‌توانند در روش IGA و همچنین در روش GIGA مورد استفاده قرار گیرند که موضوع این رساله نمی‌باشد. ولی پرکاربردترین روش مورد استفاده در این خصوص، استفاده از تکنیک نربز به عنوان یک روش استاندارد صنعتی بوده است. قدرت اصلی تکنیک نربز همان توانایی تولید انواع منحنیها، رویه ها و احجام سه بعدی با اشکال پیچیده، امکان ایجاد تغییرات دلخواه در هندسه تولید شده، پایداری و

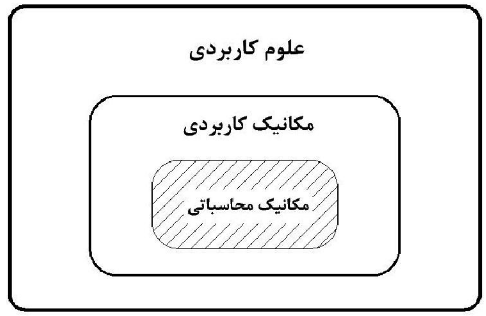
[68] IsoGeometric Analysis (IGA)
[69] Computational Geometry (CG)

سادگی الگوریتم ریاضی حاکم بر آن می‌باشد. .در کنار این توانمندیها سایر خواص ریاضی مانند پیوستگی، امکان افزایش یا کاهش درجه منحنیها، سطوح و احجام، خاصیت پوسته محدب، خاصیت تغییرات نزولی و غیره که در فصل دوم به آنها اشاره شد از دیگر عوامل استفاده گسترده از این تکنیک در صنعت می‌باشد. در خصوص شایستگی این روش همین نکته بس که در اکثر نرم افزارهای معتبر گرافیکی CAD حضوری پررنگ داشته و تا کنون میلیونها دلار برای توسعه آن سرمایه گذاری شده است(Cottrell et al., 2009). از این رو این عوامل به عنوان مهمترین دلیل انتخاب تکنیک نربز به عنوان نقطه شروع در روش IGA بوده و در این رساله نیز از این تکنیک بهره گرفته شده است

۳-۴مکانیک محاسباتی و روشهای عددی

قبل از معرفی روش IGA مروری خلاصه بر اهمیت و جایگاه مهم روشهای عددی[۷۰] در دهه‌های گذشته خواهیم داشت. مکانیک کاربردی[۷۱] یکی از شاخه های مهم علوم کاربردی می‌باشد و در این شاخه از علم به بررسی مسایل در حوزه علم مکانیک پرداخته می‌شود. مکانیک محاسباتی[۷۲] نیز یکی از زیرمجموعه های این شاخه حساب می‌شود (شکل۳-۱). در واقع برای حل مسایل مکانیک با یک یا چند معادله دیفرانسیل برخورد خواهیم کرد که برای پیش بینی رفتار مکانیکی مساله مورد نظر مانند تغییرمکانها یا تنشها تحت اثر بارهای وارده، بایستی به حل این معادلات بپردازیم. امروزه روش اجزای محدود در حوزه های مختلف علوم، به عنوان شناخته شده‌ترین و پرکاربردترین روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی می‌باشد.

[70] Numerical Methods
[71] Applied Mechanic
[72] Computational Mechanic



شکل ۴-۱: جایگاه مکانیک محاسباتی

روش FEA نیز اولین بار توسط کلاف[۷۳] در سال ۱۹۶۰ به این اسم نامگذاری شد(Cottrell et al., 2009). در اواخر این دهه نیز مهندسان برای حل مسایلی مانند تحلیل تنش، جریان سیال، انتقال حرارت و غیره از این روش استفاده می‌کردند. رشد سریع این روش سبب ایجاد اثرات بسیار شگرفی در رشد علوم و تکنولوژی در نیم قرن گذشته داشته است. مزایایی از جمله پایداری عددی، قابلیت اعتماد، مدلسازی انواع هندسه، قابلیت اعمال برروی انواع متنوع مسایل مهندسی، قابلیت اعمال بارگذاریها و تغییرمکانهای متنوع و نهایتا پیشینه‌ای قوی در خصوص تحقیقات انجام شده سبب رشد و گسترش سریع این روش بوده اند. از طرف دیگر معایبی که بیشتر به علت شرایط فرمول‌بندی این روش حاصل می‌شوند وجود دارد که از آن جمله می‌توان به عدم دستیابی به حل دقیق، خطاهای ناشی از مدلسازی هندسه، استفاده از گره ها برای تبدیل محیط پیوسته (نامحدود) به محیط ناپیوسته (محدود)، مشکلات ناشی از تولید شبکه و بهبود آن، نیاز به قضاوت صحیح مهندسی در برخورد با جوابهای حاصله و اشتباهات ناشی از کاربران این روش نام برد.

امروزه بعلت رفع اغلب ابهامات و مشکلات موجود در روش FEA، رشد این روش دیگر سرعت گذشته را نداشته و فقط در برخی مسایل و جزئیات خاص، تحقیقات برای ارتقای آن ادامه دارد. همانگونه که در فصل یک بیان گردید، امروزه برنامه های تجاری و آکادمیک بسیاری برای این روش تهیه شده است که اغلب به صورت تخصصی برای حل مسایل مختلف استفاده می‌شوند. در واقع تفاوت

[73] Clough

اصلی این نرم افزارها در مباحث گرافیکی، کتابخانه المانها، تکنولوژی تولید شبکه، توانایی بهبود شبکه، توانایی حل دستگاه معادلات، نیازهای سخت افزاری و غیره می‌باشد.

۴-۴ طراحی هندسه به کمک کامپیوتر

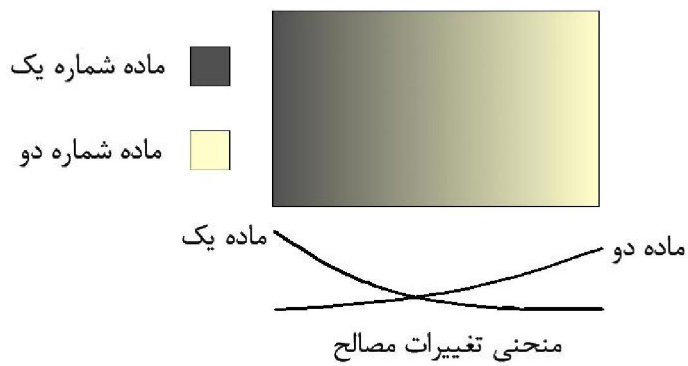
طراحی هندسه به کمک کامپیوتر[۷۴] (CAGD) حوزه ای از ریاضیات کاربردی است که در آن به هندسه اشیاء از دیدگاه محاسباتی نگریسته می‌شود. در این بخش به بررسی روشها و الگوریتمهای موجود برای توصیف ریاضی اشکال هندسی پراخته می‌شود. در واقع توسعه چشمگیر و سریع علوم کامپیوتری در بخشهای نرم افزاری و سخت افزاری سبب ایجاد شرایط مناسب برای رشد سریع تکنیکهای طراحی هندسه به کمک کامپیوتر شده است. امروزه نیز نرم افزارهای بسیاری بر مبنای روشهای گرافیکی تهیه شده است که می‌توان به انواع محصولات شرکت آمریکایی AutoDesk مانند 3DMax، Maya، AutoCad و بسیاری دیگر از نرم افزارها اشاره کرد.

از پیش‌گامان CAGD می‌توان به پیر بزیر[۷۵] در شرکت رنو[۷۶] و پائول دی کاستلیاو[۷۷] در شرکت سیتروئن[۷۸] اشاره نمود که هر دو در فرانسه و در سالهای حدود ۱۹۶۰ در این خصوص تحقیق می‌کردند. لغت CAGD نیز اولین بار توسط بارنهیل و ریزنفلد[۷۹] در سال ۱۹۷۴ هنگامی که مشغول سازماندهی کنفرانسی در همین زمینه در دانشگاه یوتا در آمریکا بودند نامگذاری گردید(Cottrell et al., 2009). امتیازهای برجسته CAGD در واقع بخاطر توانمندی بی-اسپلاینها و تکنیک نربز می‌باشد. خاطر نشان می‌سازد، همانطور که قبلا نیز اشاره گردید روشهای متعدد دیگری برای تولید اشکال هندسی وجود دارند.

[74] Computer Aided Geometric Design
[75] Pierre Bezier
[76] Renault
[77] Paul de Casteljano
[78] Citroen
[79] R. Barnhill and R. Riesenfeld

۴-۵مواد مرکب تابعی

مواد مرکب تابعی[۸۰] (FGM) یا مصالح مرکب هدفمند در واقع حاصل پیشرفت علم مواد و تولید مصالح می‌باشند. این نوع مواد اولین بار در ژاپن در سال ۱۹۸۴ و طی انجام یک پروژه برای ساخت شاتل فضایی معرفی شدند(SHIOTA and MIYAMOTO, 1997). برای ساخت این شاتل به مصالحی نیاز بود که توانایی تحمل گرادیانهای حرارتی شدید را بر روی سطح خود داشته باشند. این گرادیان حرارتی عبارت بود از تغییر ۲۰۰۰ درجه کلوین به ۱۰۰۰ درجه کلوین در ضخامتی برابر با ۱۰ میلیمتر. در FGM خصوصیات مصالح به‌صورت یک تابع پیوسته در راستای محورهای مشخصی تغییر می‌کند. این تغییرات به سبب ایجاد تغییر در حجم مواد تشکیل دهنده[۸۱] در واحد حجم مصالح ایجاد می‌شود (شکل ۳-۲). به همین دلیل است که مصالح FGM از دیدگاه میکروسکوپی دارای ساختار متغیر و از دیدگاه ماکروسکوپی دارای خواص متغیر[۸۲] می‌باشند.



شکل ۴-۲: نحوه‌ی توزیع مواد تشکیل دهنده‌ی مواد مرکب تابعی

در مصالح FGM تغییرات تنش پیوسته بوده و در آنها مشکلات اصلی مصالح کامپوزیت لایه‌ای مانند تمرکز تنش[۸۳] و یا ورقه ورقه شدن[۸۴] مصالح وجود ندارد. همچنین در این مصالح، مقاومت در

[80] Functionally Graded Materials
[81] Volume Fraction
[82] Graded Micro-Structure and Macro-Properties
[83] Stress Concentration
[84] Delamination

برابر حرارت و خوردگی[85] از مصالحی مانند سرامیک و مقاومت مکانیکی با استفاده از فلزات حاصل می‌شود. خصوصیات بسیار کارآمد این مواد سبب شده تا استفاده از آنها در تکنولوژی های برتر، آینده درخشانی را برای آنها به ارمغان بیاورد. در طبیعت نیز می‌توان به استخوانها، دندانها، چوب بامبو، پوسته نارگیل و بسیاری موارد دیگر اشاره نمود که دارای قشر خارجی سخت و قشر داخلی نرم بوده و مثالهای خوبی از FGM می‌باشند. (شکلهای ۳-۳ و ۳-۴ منبع اینترنت)

شکل ۴-۳: سطح مقطع چوب بامبو

شکل ۴-۴: سطح مقطع استخوان

با توجه به ناهمگن[86] بودن FGM که ناشی از جنس مصالح آن می‌باشد، مدلسازی و تحلیل این مسایل بطور قابل ملاحظه ای مشکل تر از مصالح همگن[87] می‌باشد. لذا با پیشرفت تکنولوژیهای ساخت مصالحی از این قبیل، نیاز به روشهای توانمندتر در خصوص مدلسازی و تحلیل آنها نیز احساس می‌شود. همچنین بیشتر کارهای پژوهشی انجام شده در مورد این مواد در زمینه تحلیل

[85] Corrosion
[86] Inhomogeneous Materials
[87] Homogeneous Materials

تنشهای حرارتی و تحلیل شکست و ترک در صفحات و پوسته ها بوده است. بعلت پیچیدگی حل این مسایل که ناشی از ناهمگنی و ناهمسانگردی[88] بودن این مصالح می‌باشد، تاکنون تعداد محدودی از مسایل با روشهای تحلیلی حل شده‌اند. ضمن اینکه در مسایل حل شده نیز فرضیات ساده کننده‌ای مانند ثابت بودن ضریب پواسون و یا تغییرات مصالح با یک تابع خاص خطی، نمایی یا توانی در نظر گرفته شده است.

در این رساله به FGM به عنوان مصالحی نگریسته شده است که معادله دیفرانسیل حاکم بر آنها دارای ضرایب ثابت نمی‌باشد. لذا مسایل تخصصی‌تر در خصوص این مصالح و یا تکنولوژی ساخت آنها مد نظر این رساله نبوده و فقط از دیدگاه ریاضی به این مساله پرداخته شده است تا توانمندی روش GIGA در حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر بر روی این مصالح مورد ارزیابی قرارگیرد. همچنین لازم به ذکر است که عدم توانمندی حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر از معایب بزرگ روش المان مرزی[89] نیز می‌باشد (Katsikadelis, 2002).

جدول ۴-۱: نقاط عطف در توسعه توابع پایه روشهای اجزای محدود و بدون شبکه

1779	Lagrange polynomials
1864	Hermite polynomials
1943	Linear triangle
1960	Clough coins the name “finite elements”
1961	Bilinear quadrilateral
1962	Linear tetrahedron
1965–1968	C^1-continuous triangles and quadrilaterals
1966	Isoparametric elements
1968–1971	Variable-number-of-nodes elements
1977–1986	$H(\mathrm{div})$, $H(\mathrm{curl})$, and $H(\mathrm{div}) \oplus H(\mathrm{curl})$ elements
1992–1996	Meshless methods

[88] Anisotropic
[89] Boundary Element Method

۴-۶معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک (IGA)

با توجه به سیر پیشرفت و توسعه توابع پایه مورد استفاده در روش اجزای محدود و روشهای بدون شبکه که خلاصه ای از آن در جدول (۳-۱) آمده است، در مجموع باید اشاره کرد که با توجه به طبیعت توابع مورد استفاده در این روشها نمی‌توان به شکل دقیق و قابل اعتمادی اقدام به مدلسازی دقیق هندسه جسم نمود. در واقع همین نکته به نقل از (Cottrell et al., 2009) از عوامل اصلی توسعه مفهوم روش IGA بوده است. از طرف دیگر روشهای CAD نیز در طی این سالها همگام با رشد بسیار سریع نرم افزارها و سخت افزارهای رایانه‌ای، ارتقای قابل ملاحظه‌ای را شاهد بوده اند. خلاصه‌ای از این توسعه در جدول (۳-۲) نشان داده شده است(Cottrell et al., 2009).

جدول ۴-۲: نقاط عطف در توسعه روشهای طراحی به کمک کامپیوتر

1912	Bernstein polynomials
1946	Schoenberg coins the name “spline”
1959	de Casteljau algorithm
1966–1972	Bézier curves and surfaces
1971, 1972	Cox-de Boor recursion
1972	B-splines
1975	NURBS
1978	Catmull–Clark and Doo–Sabin subdivision surfaces
1980	Oslo knot insertion algorithm
1987	Loop subdivision
1987, 1989	Polar forms, blossoms
1996–present	Triangular and tetrahedral B-splines
2003	T-splines

در روش اجزای محدود هر المان را می‌توان به دو صورت مورد توجه قرار داد که یکی در دامنه اصلی[۹۰] و دیگری در فضای فیزیکی[۹۱] می‌باشد. همچنین المانها معمولا با استفاده از مختصات نقاط گرهی تعریف می‌شوند و درجه آزادی آنها، از روی توابع پایه در نظر گرفته شده در محل گره‌ها تعیین می‌شود. در روش اجزای محدود، توابع پایه دارای خاصیت درونیابی[۹۲] بوده و از گره‌های تعریف شده

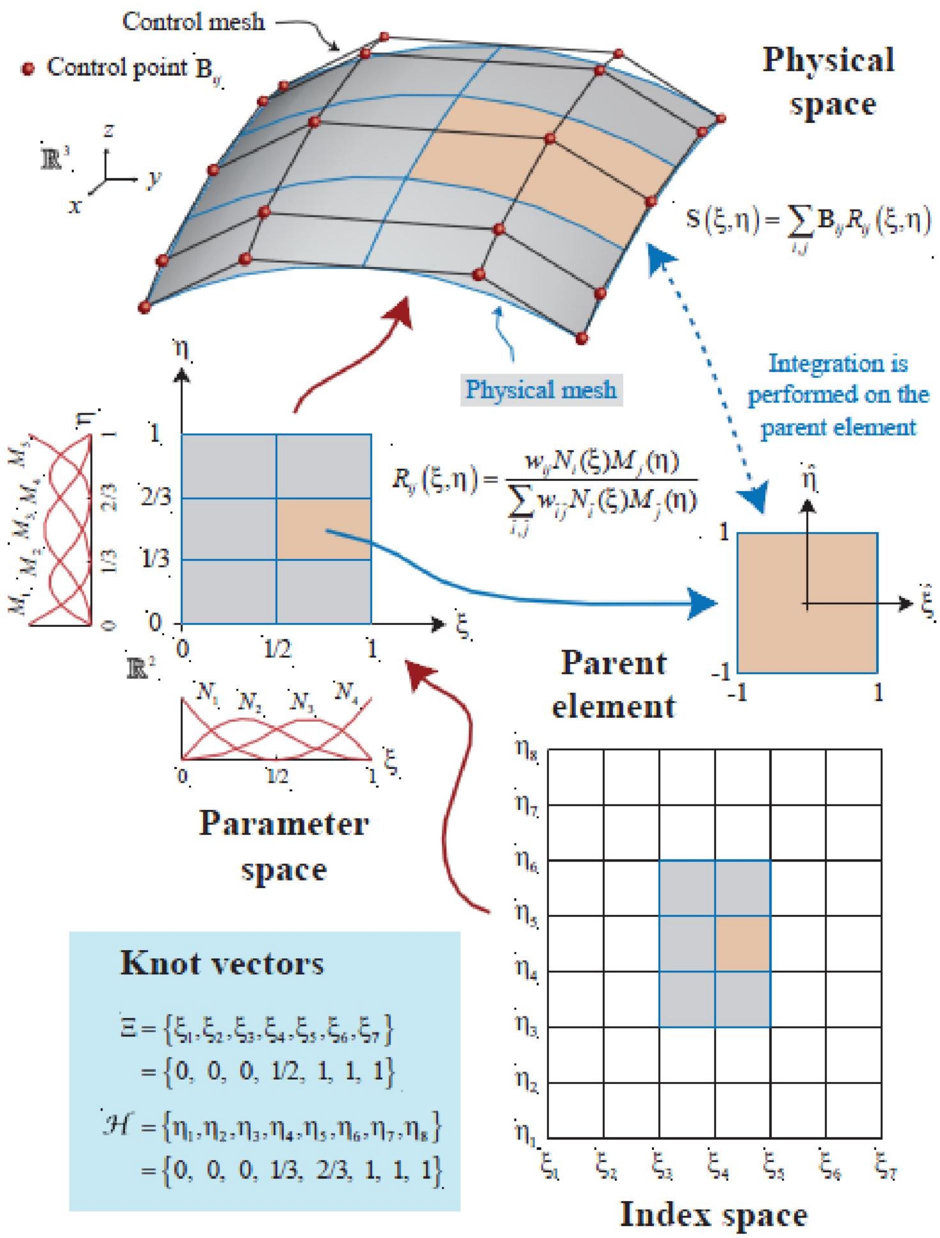
[90] Parent Elements
[91] Physical Domain
[92] Interpolatory

عبور می‌کند. از طرف دیگر در تکنیک نربز، توابع پایه به طور کلی خاصیت درونیابی ندارند. همچنین در این تکنیک برای مش دو دیدگاه وجود دارد که عبارتند از مش کنترلی و مش فیزیکی. مش کنترلی توسط نقاط کنترلی تعریف می‌شود و این نقاط بر روی آن منطبق هستند. خاطرنشان می‌سازد، مش کنترلی بر هندسه واقعی منطبق نبوده و فقط به عنوان یک چهارچوب کلی برای کنترل هندسه واقعی به کار می‌رود. مش کنترلی ظاهری شبیه مش موجود در روش اجزای محدود دارد و متغیرهای کنترلی که همان درجات آزادی مساله می‌باشند بر روی این نقاط واقع می‌شوند. با وجودی که اغلب، مش کنترلی دارای شکل نامناسبی[۹۳] می‌باشد، ولی برخلاف روش اجزای محدود، هندسه ایجاد شده توسط آن ظاهری هموار[۹۴] خواهد داشت. مش فیزیکی نیز از تقسیم هندسه واقعی جسم حاصل می‌شود. در خصوص مش فیزیکی نیز دو مفهوم وجود دارد که عبارتند از وصله[۹۵] و دهانه گرهی[۹۶]. هر وصله را می‌توان همانند یک المان ماکرو[۹۷] و یا یک زیردامنه[۹۸] در نظر گرفت. بیشتر اشکال هندسی پایه مورد استفاده در کارهای آکادمیک را می‌توان با یک وصله مدلسازی نمود. همچنین هر وصله از دو دیدگاه حائز اهمیت است که عبارتند از دامنه اصلی و فضای فیزیکی. در توپولوژی دو بعدی و سه بعدی به ترتیب هر وصله در دامنه اصلی به شکل مستطیل و مکعب مستطیل می‌باشند.

از طرفی هر وصله را می‌توان به دهانه‌های گرهی تقسیم بندی نمود. در توپولوژی یک، دو و سه بعدی، گره‌ها به ترتیب عبارتند از نقطه، خط و سطح. دهانه‌های گرهی توسط گره‌ها محدود شده‌اند. با این تعریف دامنه المانها که توابع پایه هموراری دارند تعریف می‌شود. در گره‌ها، توابع پایه دارای پیوستگی از درجه C^{p-m} خواهند بود که p درجه چندجمله‌ای و m تعداد تکرار[۹۹] گره‌های مورد

[93] Severly Distorted
[94] Smooth
[95] Patch
[96] Knot Span
[97] Macro-Element
[98] Sub-Domain
[99] Multiplicity

بحث می‌باشد. همچنین برای انتگرالگیری عددی در دهانه‌های گرهی مشکل خاصی وجود نخواهد داشت. با توجه به اینکه کوچکترین بخشی که ما با آن مواجه هستیم همین دهانه های گرهی می‌باشند، لذا می‌توان از آنها به عنوان میکرو المان[100] نام برد. هنگامی که در روش IGA بدون هیچگونه توضیح اضافه‌ای از المان نام برده می‌شود، منظور همین دهانه‌های گرهی می‌باشد.



[100] Micro-Element

شکل ۴-۵: جزئیات مربوط به مدلسازی یک سطح با یک وصله با تکنیک نربز

جدول ۴-۳: نقاط عطف در توسعه روشهای طراحی به کمک کامپیوتر

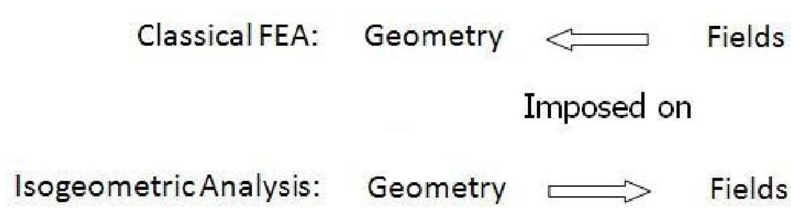
Index Space		
Control Mesh	Physical Mesh	
Multilinear Control Elements	Patches	Knot Spans
Topology: **1D:** Straight lines defined by two consecutive control points	Patches: Images of rectangular meshes in the parent domain mapped into the actual geometry. Patches may be thought of as macro-elements or subdomains.	Topology of knots in the parent domain: **1D:** Points **2D:** Lines **3D:** Planes
2D: Bilinear quadrilaterals defined by four control points	Topology: **1D:** Curves **2D:** Surfaces **3D:** Volumes	Topology of knots in the physical space: **1D:** Points **2D:** Curves **3D:** Surfaces
3D: Trilinear hexahedra defined by eight control points	Patches are decomposed into knot spans, the smallest notion of an element.	Topology of knots spans, *i.e.*, "elements": **1D:** Curved segments connecting consecutive knots **2D:** Curved quadrilaterals bounded by four curves **3D:** Curved hexahedra bounded by six curved surfaces

فضای پارامتری[۱۰۱] نیز یکی از مهمترین مفاهیمی است که باید در خصوص استفاده از تکنیک نربز در روش ایزوژئومتریک به آن اشاره نمود. در واقع با استفاده از این مفهوم هویت گره ها تعیین شده و بین گرهها با درجه تکرار بیشتر از یک تمایز قائل می‌شود. این موارد به طور خلاصه در شکل ۳-۵ نشان داده شده است (Cottrell et al., 2009) . همچنین در جدول (۳-۳) از همین مرجع، ابزار مربوط به تکنیک نربز که در روش IGA مورد استفاده قرار می‌گیرد به طور خلاصه نشان داده شده است.

[101] Index Space

۴-۷ مفهوم ایزوپارامتریک

ایده بنیادی که در پس روش ایزوژئومتریک موجود است این است که از همان توابع پایه‌ای که برای مدلسازی دقیق هندسه جسم استفاده می‌شود، برای تقریب زدن حل نیز استفاده می‌شود. در واقع این نکته که از توابع پایه مشابه برای تولید هندسه و تحلیل مساله استفاده می‌شود با نام مفهوم ایزوپارامتریک نام برده می‌شود که در روش اجزای محدود نیز کاملا مرسوم و شناخته شده است. تفاوت بنیادین بین مفهوم جدید روش ایزوژئومتریک و مفهوم قدیم روش ایزوپارامتریک در تحلیل اجزای محدود عبارتست از اینکه در روش کلاسیک اجزای محدود از توابع پایه، ابتدا برای تقریب زدن حل مساله و بعد برای تولید هندسه جسم استفاده می‌شود. ولی در روش IGA این روند کاملا برعکس است و از توابع پایه‌ای که قادر به تولید دقیق یا نسبتا دقیق هندسه جسم هستند به عنوان توابع تقریب زننده حل مساله استفاده می‌شود. این مساله در شکل (۳-۶) نشان داده شده است(Cottrell et al., 2009). توابع پایه نربز، مستقل از هرگونه ملاحظات هندسی، خواص لازم برای تقریب حل مساله را خواهند داشت.



شکل ۴-۶: مقایسه روش FEA با روش IGA در اعمال توابع پایه

در روش FEA، اصلی‌ترین عامل دلگرم کننده برای اعتماد به چندجمله‌ایها، سادگی آنها می‌باشد. سهولت برنامه نویسی، آسانی درک مفاهیم حاکم بر آنها، آسانی اثبات تئوریهای حاکم بر آنها و خواص شناخته شده آنها برای استفاده در تقریب زدن از جمله این موارد است. همچنین هنگام استفاده از آنها برای بدست آوردن حل تقریبی مساله، مسایلی مانند نرخ همگرایی[102] و یا مسائل

[102] Convergence Rate

ریاضی مشابه به آسانی قابل دستیابی هستند. البته موارد ذکر شده به این مفهوم نیستند که دستیابی به تئوریهای فوق برای سایر توابع پایه امری ناممکن است. برعکس می‌توان از مفهوم ایزوپارامتریک برای استفاده از توابع پایه نامتعارف[۱۰۳] استفاده نمود. به هرحال جوابهای دقیقی برای توابع پایه غیر چندجمله‌ای موجود است که می‌توان به مرجع (Bazilevs et al., 2006) مراجعه نمود.

۴-۸روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع (GIGA)

در خصوص مواد FG تاکنون، تحقیقاتی با روش اجزای محدود (Kim and Paulino, 2002, Santare and Lambros, 2000)، معادلات انتگرالی (Katsikadelis, 2002, Ozturk and Erdogan, 1999, Paulino and Jin, 2000)، مدلهای مرتبه بالا (Aboudi et al., 1999, Pindera and Dunn, 1997) و المان مرزی (Goldberg and Hopkins, 1995, Sutradhar et al., 2002) انجام شده است و این درحالی است که هنوز یک المان تابعی[۱۰۴] که قادر به حل معادلاتی با ضرایب متغیر باشد در عمل مورد استفاده واقع نشده است. لذا هیچیک از نرم افزارهای معروف تجاری که هم اکنون بر مبنای این روش موجود می‌باشند چنین المانهایی را در لیست کتابخانه المانهای موجود در برنامه‌شان ارایه نمی‌کنند. بعبارت دیگر، این برنامه‌ها قادر به حل مستقیم مسایلی مانند FGM نبوده و به امکانات جانبی و یا کدهای برنامه نویسی مخصوص برای انجام این کار نیاز دارند. روش IGA نیز در مقایسه با روش اجزای محدود ، امتیاز خاصی در این خصوص ارایه نمی‌کند. در واقع وجود این مشکل اصلی ترین مشوق برای توسعه روش IGA بوده است.

با مراجعه به (Cottrell et al., 2009) ملاحظه می‌شود که تنها تفاوت دو روش اجزای محدود و روش IGA که سبب ایجاد امکانات و مفاهیم چشمگیر برای روش IGA شده است در توابع پایه بکارگرفته شده در هر روش اعلام شده است. برای روشن تر شدن مطلب، در روش اجزای محدود از

[103] Exotic Bases
[104] Graded Element

توابع چندجمله‌ای و در روش IGA از توابع پایه اسپلاین به عنوان توابع شکل استفاده شده است. همچنین در مرجع مذکور برای تاکید بر مساله فوق بیان شده است که کافی است در یک کد کلاسیک اجزای محدود تغییرات محدودی ایجاد نمود تا به یک کد کامپیوتری با قابلیت تحلیل به روش ایزوژئومتریک دست یافت. تغییر در فایلهای ورودی و خروجی، جایگزینی وصله ها به جای المانهای محدود و ارزیابی توابع پایه بی-اسپلاینها مهمترین تغییراتی خواهند بود که باید انجام پذیرد. برای مسایلی که از چند وصله برای مدلسازی هندسه مساله استفاده می‌کنند نیز نسبت به روش اجزای محدود، به یک حلقه اضافه در کد کامپیوتری جهت فرآیند روی هم گذاری[۱۰۵] لازم خواهد بود. پس از اعمال این تغییرات یک کد کامپیوتری بر مبنای روش IGA در دست خواهد بود که می‌توان از مزایای ذکر شده برای آن استفاده نمود. اما نکته مهمی که در اینجا قابل ذکر است این است که این تغییرات و جایگزینی‌ها سبب ایجاد امکان حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر نخواهد شد. در واقع حل این گونه مسایل با روش IGA هیچ تفاوتی با روش اجزای محدود نخواهد داشت. چه بسا اینکه به لحاظ فنی بهتر باشد تا بجای استفاده از تعداد زیاد وصله ها با خصوصیات مکانیکی ثابت برای هریک در روش IGA ، از همان روش اجزای محدود استفاده کرد. خلاصه کلام اینکه در مواجهه با معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر، روش متداول IGA همانند روش اجزای محدود ضعیف عمل خواهد کرد و مشکلات بیان شده لاینحل باقی خواهند ماند. توضیحات بیشتر در این خصوص در مثالی که در ادامه خواهد آمد بیان می‌شود. در روش GIGA، خصوصیات مکانیکی مواد مانند مدول الاستیسیته و ضریب پواسون که در حالت کلی یک تابع دلخواه هستند و به عنوان ضرایب معادله دیفرانسیل تلقی می‌شوند، در فرآیند فرمولبندی باقی می‌مانند. استفاده از وصله‌های تابعی[۱۰۶]، فایل ورودی متفاوت با روش IGA، مدلسازی دقیق تابع توزیع مصالح، پیوستگی در تغییرات جنس مصالح بین المانهای یک وصله از مسایل و مزایای نگاه جامع‌تر به مفهوم روش IGA و ایجاد روش GIGA

[105] Assemble
[106] Graded Patches

می‌باشند.

برای نشان دادن ایده موجود در روش GIGA، حل معادله دیفرانسیل (۳-۱) را در نظر بگیرید.

$$-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right]=f(x) \quad for\ 0<x<L \qquad (۳-۱)$$

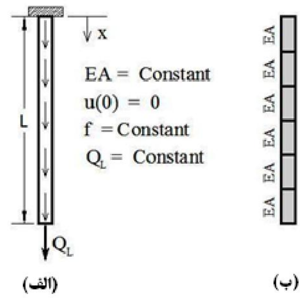
هدف یافتن $u(x)$ با در نظر گرفتن شرایط مرزی به شکل رابطه (۳-۲) می‌باشد

$$u(0)=u_0,\ \left.\left(a\frac{du}{dx}\right)\right|_{x=L}=Q_L \qquad (۳-۲)$$

که در آن $a(x)$ و $f(x)$ توابع معلوم نسبت به x ، u_0 و Q_L مقادیر معلوم و L طول دامنه یک بعدی می‌باشد. در واقع این معادله یکی از ساده ترین معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد که برای حل برخی مسایل در مکانیک کاربردی لازم است حل شود. برای مثال در مسایلی مانند تغییرشکل کابلها تحت اثر بارهای گسترده، تغییر طول محوری میله ها تحت اثر بار گسترده محوری، سرعت یک سیال لزج در اثر تغییرات در فشار و مسایل مشابه به چنین معادله‌ای برخورد خواهیم کرد (Reddy, 1993). در مساله تغییر شکل محوری یک میله با سطح مقطع ثابت A و مدول الاستیسیته ثابت E خواهیم داشت $a(x)=EA$. در مسائل همگن مقدار نیروی گسترده محوری $f(x)$ و نیروی متمرکز Q_L برابر با صفر خواهند بود. در نتیجه معادله (۳-۱) به شکل ساده‌تر (۳-۳) نوشته خواهد شد.

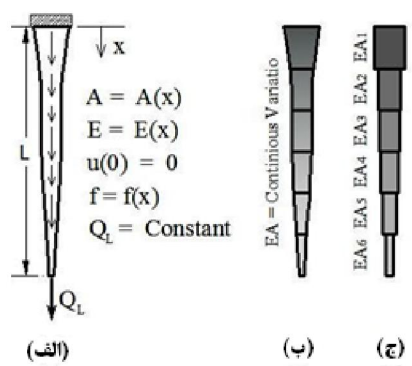
$$-EA\frac{d^2u}{dx^2}=f(x) \quad for\ 0<x<L \qquad (۳-۳)$$

با استفاده از روشهای عددی موجود مخصوصا روش اجزای محدود به راحتی می‌توان این معادله را حل کرد. برای این کار دامنه مساله مانند شکل (۳-۷) به المانهای کوچکتر تقسیم بندی می‌شود. همانگونه که در شکل (۳-۷-ب) دیده می‌شود، مقدار EA برای کلیه المانها مقداری ثابت است.



شکل ۴-۷: الف) مشخصات مساله، ب) المانهای محدود

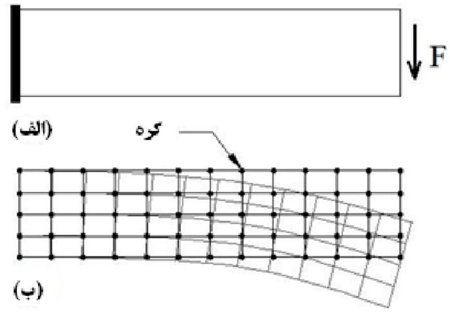
اکنون تصور کنید که مدول الاستیسیته، سطح مقطع میله و تابع نیروی محوری مقادیر ثابت نبوده و هر کدام با یک تابع تعریف شوند. در این حالت که در شکل (۳-۸) نشان داده شده است همانند روش قبل دامنه مساله به المانهای کوچکتر تقسیم می‌شود ولی تفاوت آن در این است که المانها علاوه بر بار گذاری متفاوت دارای خواص مکانیکی E^i و هندسی A^i متفاوتی $\left(EA_i = E^i A^i\right)$ مانند $EA_1, EA_2, \ldots, EA_6$ می‌باشند.



شکل ۴-۸: الف) مشخصات مساله، ب) تقسیم بندی دامنه، ج) المانهای محدود

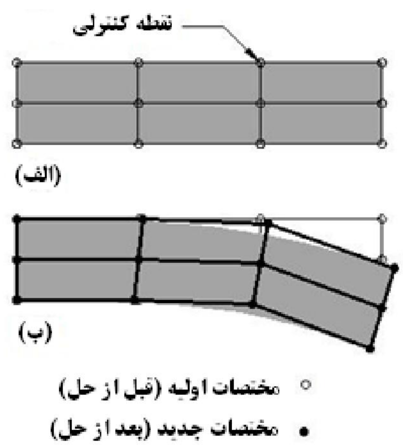
حال فرض کنید که بخواهیم مساله را با روش IGA حل کنیم. اگر مانند حالت اول مقادیر EA برای تمام المانها ثابت باشد در روش متداول IGA می‌توان از یک وصله استفاده و مساله را حل کرد زیرا خصوصیات مکانیکی مصالح در یک وصله در این روش همانند یک المان در روش اجزای محدود ثابت در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه بجای استفاده از چند المان می‌توان از یک وصله برای حل این مساله ساده استفاده نمود. اما برای حل مساله در حالت دوم دیگر نمی‌توان از یک وصله با خواص ثابت

مکانیکی و هندسی استفاده کرد. بلکه باید همانند روش FEA برای مدلسازی هرچه دقیقتر شرایط هندسی و توزیع مصالح بجای افزایش المانها از افزایش وصله‌ها استفاده کرد. این مشکل به شکل مشابه در مسایل دو و سه بعدی نیز اتفاق می افتد و بین روش اجزای محدود و روش IGA در مواجهه با این مسایل و یا در حالت کلی معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر تفاوتی وجود ندارد. از طرفی مشکل مشترکی بین اجزای محدود و IGA که همان عدم پیوستگی به ترتیب بین المانها و وصله ها خواهد بود باقی خواهد ماند. پرسشی که در اینجا مطرح است این است که تفاوت روش IGA با روش اجزای محدود در حل این مسایل چیست؟ در واقع اکنون می‌توان به علت و هدف از ارایه روش GIGA به عنوان روشی که به این سوال جواب می‌دهد پرداخت. در روش GIGA برای چنین مساله ای باز هم از همان یک وصله استفاده می‌شود و کلیه تغییرات در مصالح، هندسه و بارگذاری دقیقا در همان یک وصله مدل می‌شود و دیگر نیازی به افزایش تعداد المانها نمی‌باشد. بعبارت دیگر هر وصله علاوه بر وظیفه مدلسازی هندسه، به‌منظور مدلسازی توزیع مصالح نیز کاربرد خواهد داشت. از طرفی با توجه به اینکه در روش GIGA از دهانه های گرهی بجای المان استفاده می‌شود، لذا برای هر وصله بین آنها پیوستگی برقرار خواهد بود. البته در مسائل پیچیده تر که باید از وصله‌های بیشتری استفاده شود، در حالت کلی این عدم ناپیوستگی بین خود وصله ها می‌تواند پدیدار شود. این مشکل به طور مشترک بین هر سه روش اجزای محدود، IGA و GIGA موجود است. البته برای رفع این مشکل امکانات قابل توجهی در روش IGA و GIGA وجود دارد که نیازمند استفاده از سایر روشهای تولید هندسه در این روشها می‌باشد. تا این مرحله توضیحاتی با هدف آشنایی بیشتر با مبانی روش GIGA بیان شد. اما برای توضیح بیشتر و آشنایی با تفاوت دیدگاهی که بین روش IGA و روش GIGA وجود دارد، مساله‌ای دو بعدی را مثال می‌زنیم. فرض کنید یک صفحه دو بعدی طره در حالت تنش مسطح، مانند شکل (۳-۹) تحت نیروی متمرکز در انتهای آزاد خود قرار گرفته است.



شکل ۴-۹: الف) مشخصات مساله، ب) تقسیم بندی دامنه و جواب

در شکل (۳-۹-ب) شبکه اولیه المانهای اجزای محدود و تغییر شکل مساله بعد از حل نشان داده شده است. بعد از حل مساله مختصات اولیه هر گره به مختصات جدید x و y تغییر می‌یابد. حال فرض کنید که همین مساله با روش IGA حل شود. در این حالت دامنه مساله با شبکه‌ای از نقاط کنترلی تعریف می‌شود که در شکل (۳-۱۰) نشان داده شده است.



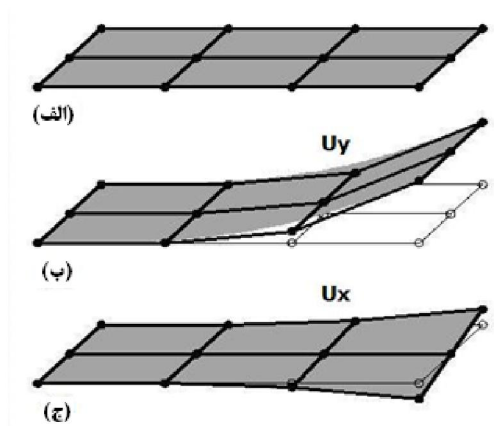
شکل ۴-۱۰: الف) مشخصات مساله، ب) حل روش ایزوژئومتریک

در شکل (۳-۱۰-ب) ملاحظه می‌شود که مختصات نقاط کنترلی اولیه به نقاط جدید تغییر یافته است. اکنون برای بدست آوردن جواب در کل دامنه کافی است با استفاده از فرمول (۳-۴) و جایگذاری مختصات جدید x و y نقاط کنترلی اقدام به تولید سطح جدید خاکستری رنگ به عنوان جواب مساله نمود.

$$X(r,s)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)X_{i,j}$$
$$Y(r,s)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)Y_{i,j} \qquad (۴-۳)$$

در این رابطه $X_{i,j}$ و $Y_{i,j}$ مختصات جدید نقاط کنترلی و $X(r,s)$ و $Y(r,s)$ نیز بیانگر تغییر مکان هر نقطه دلخواه از دامنه در جهات x و y می‌باشد. یکی از تفاوتهایی که در اینجا بین روش اجزای محدود و روش IGA قابل مشاهده است این است که در روش اجزای محدود نقاط قدیم و جدید همواره برروی هندسه اولیه و هندسه تغییر شکل یافته جسم قرار دارند. ولی در روش IGA این نقاط مفهوم ریاضی داشته و در حالت کلی می‌توانند بر هندسه جسم منطبق نباشند. به همین دلیل است که نام ماتریس سختی در روش اجزای محدود به ماتریس ضرایب در روش IGA تبدیل می‌شود.

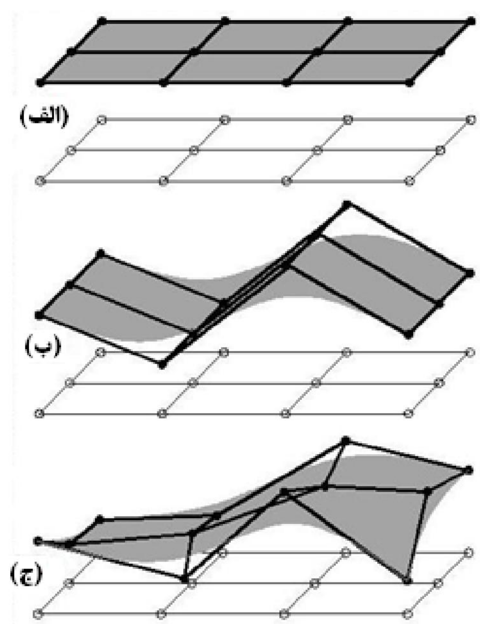
اکنون فرض کنید می‌خواهیم مساله را با روش GIGA حل کنیم. در اینجا برای تولید جواب یا همان تغییر مکانها در مثال شکل (۳-۱۰) نحوه دیدگاه به جواب مساله را تغییر می‌دهیم. برای شفاف‌تر بیان کردن موضوع به شکل (۳-۱۱) رجوع کنید.



شکل ۴-۱۱: الف) مشخصات مساله، ب و ج) حل روش ایزوژئومتریک جامع

در روش GIGA بجای ایجاد تغییر در مختصات اولیه نقاط کنترلی و یافتن مختصات جدید که بیانگر حل مساله است، دو مختصات z_1 و z_2 جدید تعریف می‌شود و سپس با هریک از این مقادیر رویه‌ای تولید می‌شود که ارتفاع یکی بیانگر تغییرمکان جهت x و ارتفاع دیگری بیانگر تغییرمکان

جهت y خواهد بود که بترتیب در شکلهای ۳-۱۱-ب و ۳-۱۱-ج نشان داده شده است. بنابراین تفاوت اصلی روش IGA با روش GIGA در این است که در روش اول برای ایجاد شکل تغییر شکل یافته سازه از نقاط کنترلی با مختصاتی جدید استفاده می‌شود ولی در روش دوم مختصات اولیه نقاط کنترلی ثابت بوده و مختصه سومی به عنوان جواب مساله بدست آمده و جواب نهایی به شکل یک رویه خواهد بود. علت اصلی که چنین دیدگاهی نسبت به حل مساله درنظر گرفته شده است این است که برای مدلسازی تابع تغییرات مشخصات مکانیکی مصالح تشکیل دهنده دامنه، این تابع را باید به صورت یک رویه سه بعدی بر روی دامنه دوبعدی مسائل تنش/کرنش مسطح و یا تقارن محوری در نظر گرفت. البته در همینجا خاطر نشان می‌سازد که برای حل مسائلی مانند تحلیل پوسته‌ها که هندسه مساله به صورت سه بعدی است، از یک رویه فرضی با بعد چهار استفاده می‌شود که بعد چهارم آن بیانگر مولفه هایی نظیر تغییر مکانها یا مشخصات هندسی مصالح خواهد بود.



شکل ۴-۱۲: الف) مدول الاستیسیته ثابت، ب) ایزوتروپیک FGM، ب) انیزوتروپیک FGM

این تغییر دیدگاه در نحوه نمایش حل مساله تغییراتی در فایلهای ورودی، نحوه کد نویسی و تولید برنامه کامپیوتری را در پی دارد. اکنون می‌توان مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون را بر

روی هر نوع دامنه پیچیده ای با استفاده از یک رویه تعریف کرد. لذا مختصات اولیه نقاط کنترلی ثابت مانده و با تعریف مختصه سوم متفاوت می‌توان رویه هایی را تولید کرد که ارتفاع آنها بیانگر مشخصات مکانیکی و چگونگی تغییرات آن بر روی دامنه مساله باشد. شکل (۳-۱۲) را ملاحظه کنید. این دیدگاه به سادگی قابل تعمیم به مسائل سه بعدی و پوسته‌ها نیز بوده که در آنجا بعد چهارم ابر-رویه[۱۰۷] بیانگر تغییرات دلخواه در خصوصیات مصالح یا به طور کلی تغییرات در ضرایب معادله دیفرانسیل می‌باشد. به طور خلاصه برای هر نقطه کنترلی که هندسه جسم را تشکیل می‌دهد، می‌توان به تعداد دلخواه و مورد نیاز، بعد جدید تعریف نمود که هر یک از این ابعاد جدید به همراه مختصات اولیه نقطه کنترلی یک رویه (درمسائل دوبعدی) و یک ابر-رویه (در مسائل سه بعدی) را ایجاد می‌کند. همچنین می‌توان به مرجع (Hassani and Moghaddam, 2010) نیز رجوع نمود.

۴-۹ مقایسه روشهای FEM، IGA و GIGA

در این بخش برخی از تفاوتها و تشابه‌ها در روشهای FEM، IGA و GIGA را در قالب جدول (۳-۴) بیان خواهیم کرد. البته موارد دیگری در مرجع (Cottrell et al., 2009) وجود دارد که به جهت اختصار از ذکر آنها خودداری شده است. لازم به ذکر است که دو مورد آخر در جدول فوق از ویژگیهای مخصوص روش GIGA می‌باشد که در دو روش دیگر وجود ندارد. همچنین از دیدگاه فرمولبندی و برنامه نویسی نیز برخی تفاوتها بین روش GIGA با دو روش دیگر موجود است.

در خصوص مدلسازی خواص مکانیکی مصالح، همانند مدلسازی هندسه مساله، زمانی می‌توان دقیق عمل کرد که تغییرات به‌صورت یک شکل هندسی مشخص مانند دایره، سهمی یا سایر اشکال شناخته شده دیگر باشد؛ در غیر این صورت مدلسازی تقریبی خواهد بود. در خصوص مدلسازی پیوسته نیز منظور پیوستگی بین المانهای گرهی می‌باشد و ناپیوستگی بین وصله ها همانند ناپیوستگی بین المانها در اجزای محدود کماکان وجود خواهد داشت مگر آنکه برای آن تدبیر خاصی

[107] Hyper-Surface

اندیشیده شود.

جدول ۴-۴: مقایسه روشهای FEM، IGA و GIGA

<table>
<tr><th>FEM</th><th>IGA</th><th>GIGA</th></tr>
<tr><td>هندسه تقریبی</td><td colspan="2">هندسه دقیق‌تر</td></tr>
<tr><td>نقاط گرهی</td><td colspan="2">نقاط کنترلی</td></tr>
<tr><td>متغیرهای گرهی</td><td colspan="2">متغیرهای کنترلی</td></tr>
<tr><td>توابع پایه چند جمله‌ای</td><td colspan="2">توابع پایه نربز</td></tr>
<tr><td>عبور توابع پایه از گره ها</td><td colspan="2">عدم عبور توابع پایه از نقاط کنترلی</td></tr>
<tr><td>مقادیر منفی یا مثبت</td><td colspan="2">مقادیر همیشه مثبت توابع پایه</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ناپیوستگی خواص مکانیکی بین المانها</td><td colspan="2">ناپیوستگی خواص مکانیکی بین وصله‌ها</td></tr>
<tr><td>ثابت بودن خواص مکانیکی دهانه‌های گرهی یک وصله</td><td>پیوستگی خواص مکانیکی بین دهانه‌های گرهی</td></tr>
<tr><td colspan="2">مدلسازی تقریبی تابع توزیع مصالح در کل دامنه مساله</td><td>مدلسازی دقیق‌تر تابع توزیع مصالح در کل دامنه مساله</td></tr>
</table>

تشابهاتی بین روشهای FEM و IGA وجود دارد که میتواند به GIGA نیز تعمیم داده شود.

برای توضیحات تکمیلی در این خصوص می‌توان به (Hughes et al., 2005) و (Cottrell et al., 2009) مراجعه نمود.

۴-۱۰ انتگرال‌گیری عددی در روش IGA

در روش IGA نیز همانند FEA می‌توان از روش گوس برای انتگرال‌گیری عددی استفاده نمود. این انتگرال‌گیری بر اساس فضاها یا المانهای گرهی انجام می‌شود. به عبارت دیگر برای انتگرالگیری عددی، نقاط گوسی در هر دهانه گرهی که نماینده المان در روش IGA می‌باشد در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه بر خلاف المان اجزای محدود که یک مجموعه چهارتایی، هشت تایی یا غیره به عنوان نقاط گوسی در انتگرالگیری عددی لحاظ می‌شوند، ممکن است بسته به نوع تعریف یک وصله در روش IGA مجبور به استفاده چندین باره از این نقاط برای انتگرال گیری عددی روی وصله شویم.

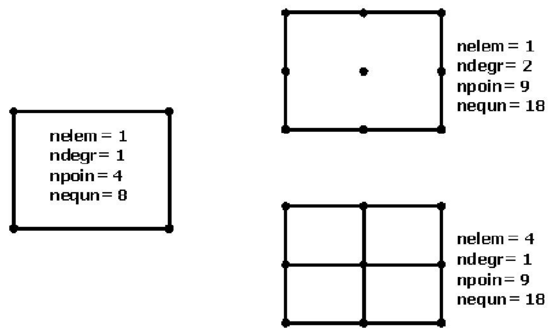
خاطر نشان می سازد که با توجه به توانمندی روش IGA در تولید اشکال مورد نظر با تعداد کمی از وصله‌ها و در نتیجه بزرگ بودن ابعاد هندسی وصله‌ها در مقایسه با المانها در روش FEA ، باید دقت داشت که انتخاب تعداد نقاط گوس در انتگرال‌گیری عددی بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در این خصوص نیز کارهایی انجام شده است که می‌توان به (Hughes et al., 2010) اشاره کرد

۴-۱۱ مقایسه ای بین وصله ها در IGA و المانها در FEM

برای افرادی که با IGA برای اولین بار آشنا می‌شوند شاید یکی از مهمترین ابهامات موجود، بحث وصله ها و شباهتها و تفاوتهای آن با بحث المان در FEA می‌باشد. همانگونه که قبلا اشاره شد المانها توسط نقاط گرهی تعریف می‌شوند در حالی که وصله ها توسط نقاط کنترلی تشکیل می‌گردند. همچنین گره‌ها بر هندسه جسم واقع شده و با دانستن مختصات آنها می‌توان دید هندسی نسبت به مساله داشت ولی در خصوص نقاط کنترلی این خاصیت وجود ندارد. شکل ظاهری المان و وصله بسیار مشابه است ولی یک المان فقط یک المان است در حالیکه یک وصله می‌تواند چندین المان باشد. خاطرنشان می‌گردد که المانها در روش IGA توسط دهانه‌های گرهی تعریف می‌شوند نه توسط وصله‌ها. از دیگر تفاوتهای المان و وصله ها می‌توان به بحث نقاط گوس برای انتگرال‌گیری عددی اشاره نمود. اگر برای یک المان فرضاً از چهار نقطه گوس استفاده شود، برای یک وصله تعداد نقاط گوس برابر خواهد بود با حاصلضرب تعداد دهانه های گرهی در چهار. به همین خاطر است که در ساختار کد نویسی برای روش IGA، در حالت کلی احتیاج به یک حلقه اضافه برای انجام عملیات انتگرال‌گیری عددی بر روی یک وصله خواهد بود.

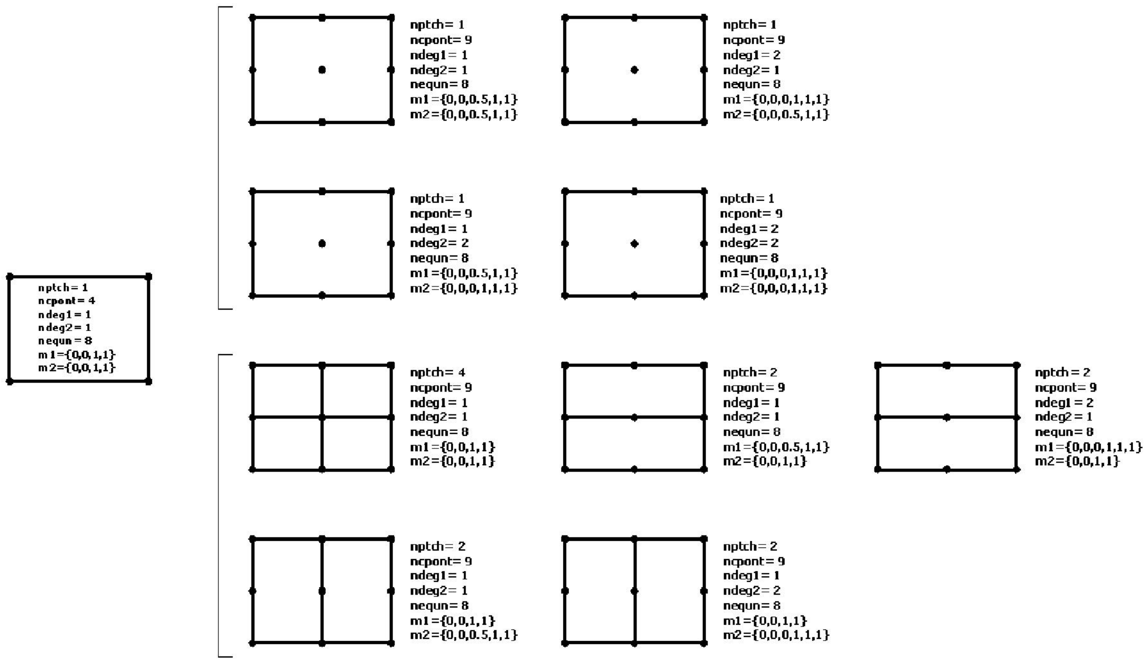
به عنوان یک تفاوت دیگر بین وصله و المان می‌توان به بحث افزایش دقت در حل مسائل اشاره نمود. در روش FEA در حالت کلی دو راه برای افزایش دقت حل مساله وجود دارد. اول افزایش تعداد المانها و دوم افزایش مرتبه المان. البته در عمل گاه از ترکیب این دو راه حل استفاده می‌شود. به طور مثال همانگونه که در شکل (۳-۱۳) نشان داده شده است با افزایش تعداد گره‌ها از چهار به نه

می‌توان به طور معمول یا از یک المان نه گرهی و یا از چهار المان چهار گرهی استفاده نمود. در نتیجه به طور معمول در یک نرم افزاری می‌توان دو حالت را برای افزایش دقت مساله متصوربود.



شکل ۴-۱۳: حالات افزایش دقت در روش FEA

ولی در روش IGA در حالت کلی امکانات بیشتری برای افزایش دقت حل وجود دارد. همانند شکل (۳-۱۳) فرض کنید که چهار نقطه کنترلی به نه نقطه کنترلی تبدیل شود. امکاناتی که روش IGA برای افزایش دقت درحل مساله ایجاد می‌کند برابر با نه حالت متفاوت خواهد بود که برای این روش بسیار متداول بوده و در واقع جزئی از ساختار فرمولبندی این روش محسوب می شود. این حالات در شکل (۳-۱۴) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۱۴: حالات افزایش دقت در روش IGA

۴-۱۲ طرح چند موضوع در روش تحلیل ایزوژئومتریک

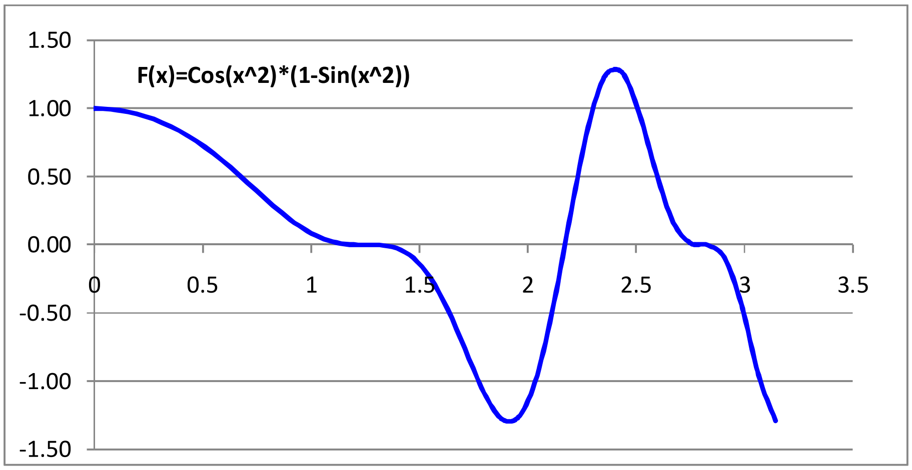
برای حل مسایل با استفاده از روش ایزوژئومتریک با چندین موضوع مواجه می‌شویم که در مراحل اولیه پژوهش در مقابل قرارگرفتند و در (ب. حسنی و ن. ظریف مقدم، ۱۳۸۷) توضیح داده شده اند، ولی به اختصار در این بخش قابل ملاحظه می‌باشند.

۴-۱۲-۱ استفاده از معکوس نربز در تخمین توابع

همانگونه که قبلا گفته شد، ضرایب معادله دیفرانسیل می‌تواند در روش GIGA به شکل یک تابع باشند. این توابع بایستی با استفاده از تکنیک معکوس نربز به نقاط کنترلی و بردار گره تبدیل شوند. اکنون سوال مهمی مطرح می‌شود و آن اینست که با توجه به روشهای موجود برای محاسبه بردار گره و همچنین روشهای انتخاب مقادیر گره برای تشکیل دستگاه معادلات، انتخاب کدام روشها مناسبتر خواهد بود؟ انواع این روشها در مرجع (Piegl and Tiller, 1997) قابل ملاحظه است. برای جواب به این سوال مثالهای متعددی حل شده است که در این میان یکی از این مثالها انتخاب و در

ادامه ارائه شده است.

تابع $f(x) = \cos x^2(1 - \sin x^2)$ را در فاصله $[0, \pi]$ فرض نمایید. منحنی این تابع به صورت شکل (۳-۱۵) می‌باشد.



شکل ۴-۱۵: شکل تابع $f(x)= \cos x^2(1 - \sin x^2)$

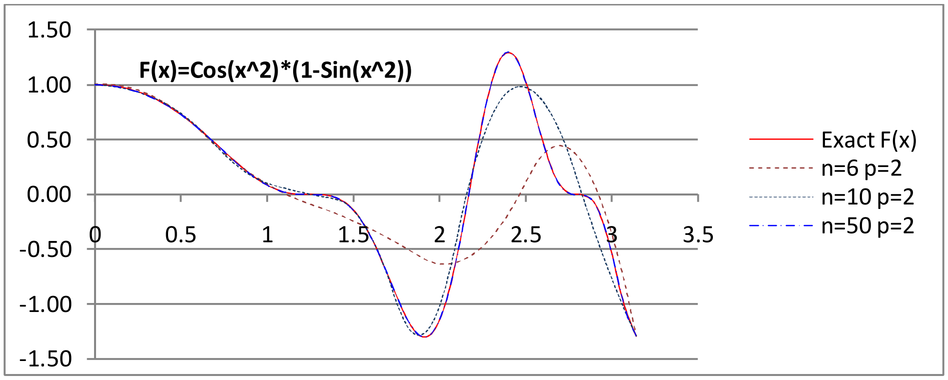
تعداد نقاط کنترلی n و درجه توابع پایه p به شرح جدول (۳-۵) فرض شده اند. با استفاده از روش فواصل مساوی[۱۰۸] برای محاسبه بردارهای گره و مقادیر گرهی نتایج حاصله به ترتیب در شکلهای (۳-۱۶) تا (۳-۱۸) ترسیم شده است.

جدول ۴-۵: حالات مختلف در مقادیر پارامترها برای محاسبه f(x)

p	۲			۳			۵		
n	۶	۱۰	۵۰	۶	۱۰	۵۰	۶	۱۰	۵۰

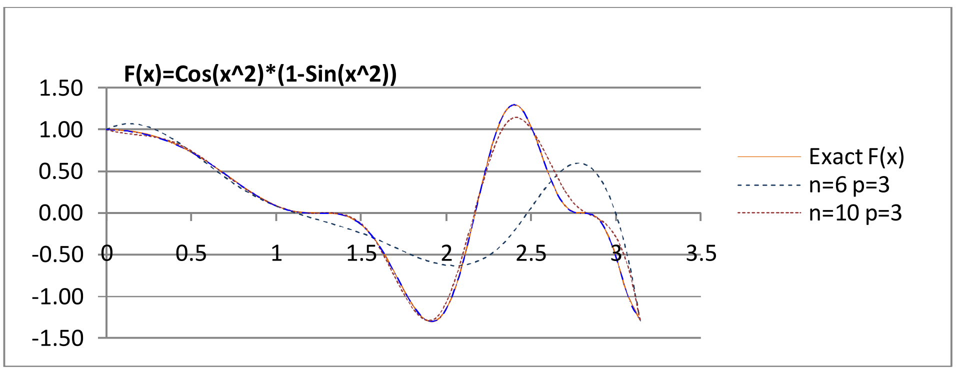
برای حالت $p = 2$ و مقادیر $n = 6,10,50$ خواهیم داشت:

[108] Equaly spaced method



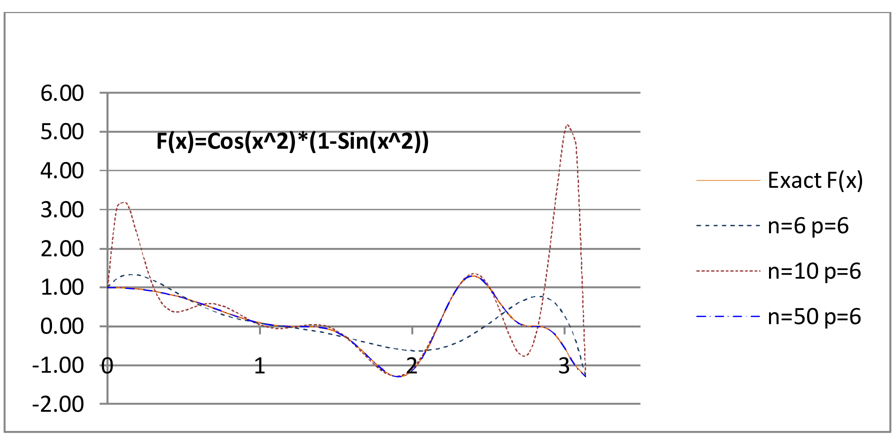
شکل ۴-۱۶: شکل تابع f(x)

برای حالت $p = 3$ و مقادیر $n = 6,10,50$ خواهیم داشت:



شکل ۴-۱۷: شکل تابع f(x)

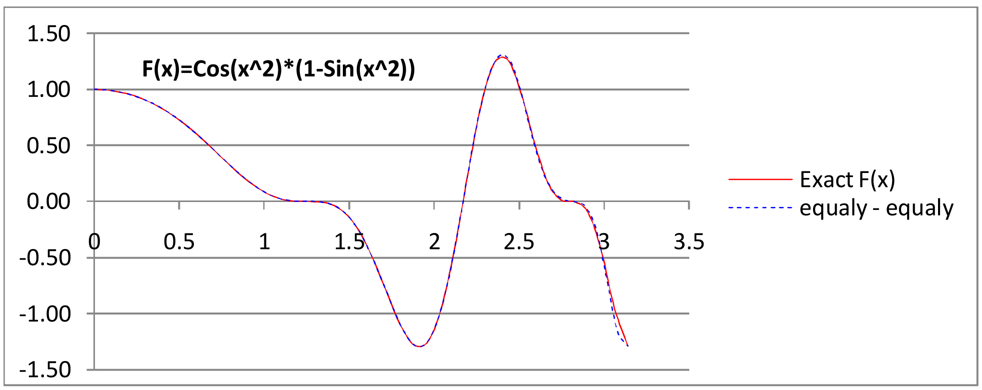
برای حالت $p = 6$ و مقادیر $n = 6,10,50$ خواهیم داشت:



شکل ۴-۱۸: شکل تابع f(x)

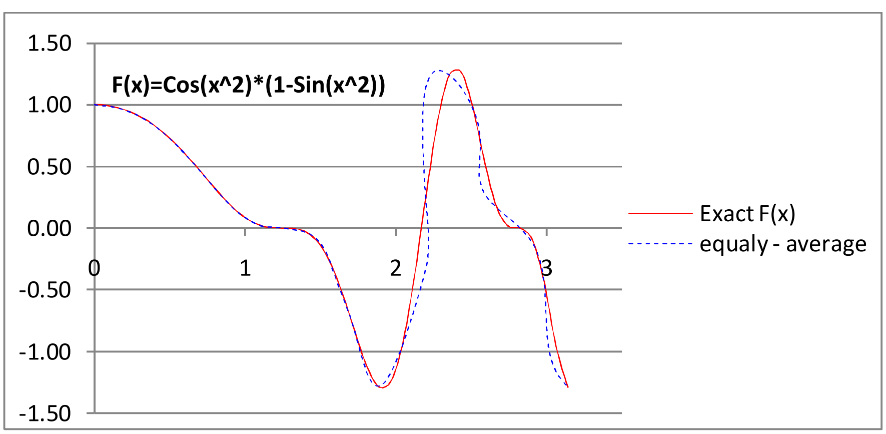
حال فرض کنید که بجای استفاده از روش فواصل مساوی، از روش میانگین[109] و روش طول کمان[110] استفاده کنیم. در این صورت نتایجی به شرح شکلهای (۳-۱۹) تا (۳-۲۱) حاصل خواهد شد که در کلیه حالات ذکر شده $n=20$ و $p=2$ فرض شده اند.

اگر بردار گره بر اساس روش فواصل مساوی و مقادیر گرهی از روش فواصل مساوی محاسبه شوند نتیجه به شکل (۳-۱۹) خواهد بود.



شکل ۴-۱۹: شکل تابع f(x)

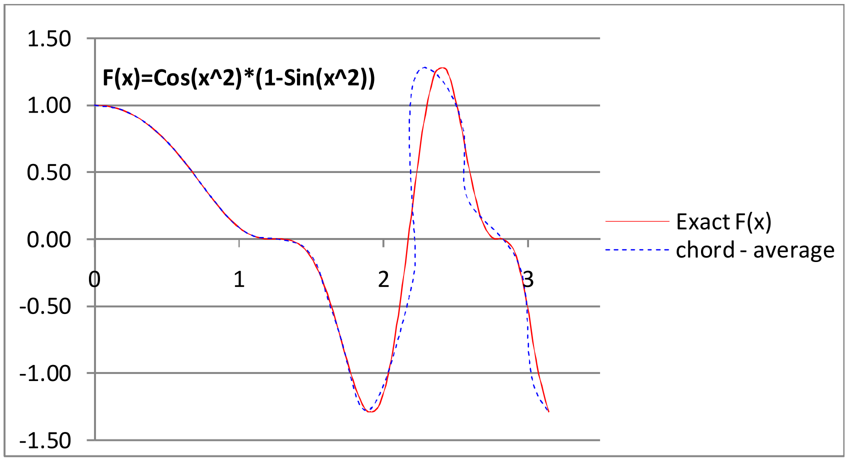
اگر بردار گره بر اساس روش میانگین و مقادیر گرهی از روش فواصل مساوی محاسبه شوند نتیجه به شکل (۳-۲۰) خواهد بود.



[109] Averaging method
[110] Chord length method

شکل ۴-۲۰: شکل تابع f(x)

اگر بردار گره بر اساس روش میانگین و مقادیر گرهی از روش طول کمان محاسبه شوند نتیجه به شکل (۳-۲۱) خواهد بود.



شکل ۴-۲۱: شکل تابع f(x)

با توجه به حالات مختلف بررسی شده در مثال فوق، نتایج زیر حاصل می‌شوند. البته توجه شود که این نتایج فقط به صورت تجربی بوده و با یک یا چند مثال قابل اثبات نمی باشند ولی می‌توان از آنها به شکل قابل قبولی استفاده کرد. در عین حال کار بیشتر بر روی آن توصیه می‌شود.

خلاصه نتایج به شرح ذیل است:

۱-با افزایش تعداد نقاط کنترلی دقت در تقریب زدن تابع $f(x)$ افزایش می‌یابد.

۲-با تعداد ثابت نقاط کنترلی و افزایش درجه توابع پایه لزوما به جواب بهتری نخواهیم رسید و جواب نهایی بستگی به روش مورد استفاده برای تقریب زدن تابع خواهد داشت.

۳-روش فواصل مساوی برای محاسبه بردارهای گره و مقادیر گرهی عمدتا نتایج مناسبی را بدست خواهند داد.

پیشنهاداتی به شرح ذیل نیز قابل بیان می‌باشد:

۱-بهتر است از توابع پایه با درجه ۲ و یا ۳ استفاده کنیم.

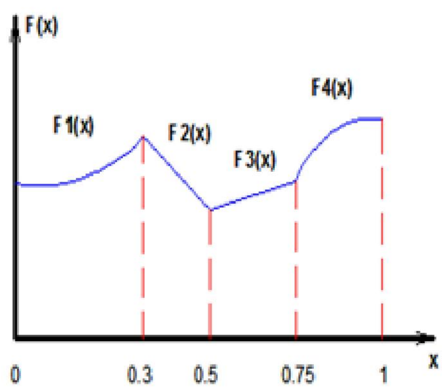
۲-برای افزایش تقریب زدن، افزایش تعداد نقاط کنترلی بهتر از افزایش درجه توابع پایه خواهد بود. توجه شود که به لحاظ حجم محاسبات، افزایش تعداد نقاط کنترلی لزوما محاسبات بیشتری را نسبت به افزایش درجه توابع پایه ایجاد نمی‌کند.

۳-برای تقریب زدن تابع با استفاده از معادلات معکوس نربز ، استفاده از روش فواصل مساوی برای مقادیر گرهی و محاسبه بردار گره، نتایج بهتری دارند و ناپایداری مشابه شکل (۳-۲۰) و (۳-۲۱) در آنها کمتر مشاهده می‌شود.

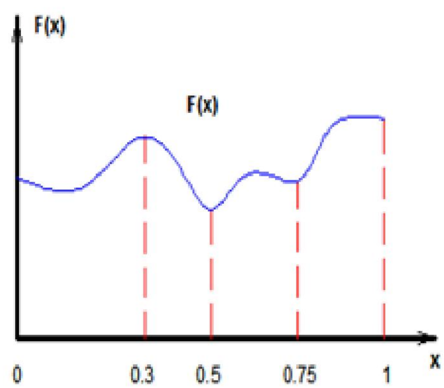
۴-روشهای دیگری نیز در (Piegl and Tiller, 1997) برای محاسبه مقادیر گرهی و بردار گره وجود دارند که بعلت ایجاد ناپایداری در هنگام تشکیل دستگاه معادلات توصیه نمی‌شوند.

۴-۱۲-۲ انتگرالگیری از توابع پایه

فرض کنید که انتگرالی به شکل رابطه $\int_0^1 \bar{\alpha}(r)\mathrm{N}_{i,p}(\mathrm{r})\mathrm{dr}$ داریم که عبارت داخل انتگرال برحسب جملاتی از توابع پایه اسپلاین می‌باشد و می‌خواهیم مقدار عددی آن را در بازه [0,1] محاسبه کنیم. با توجه به اینکه به ازای مقادیر مشخص p و i می‌توان انتگرال فوق را محاسبه نمود، ولی مشکلی که وجود دارد، اینست که مقدار توابع پایه به نحوه تعریف بردار گره وابسته است. به عبارت دیگر تابع پایه یک تابع چند ضابطه‌ای می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۲: تاثیر پیوستگی بر چگونگی انتگرال‌گیری عددی

برای آنکه بتوان با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گوس[111] مقدار آن را محاسبه کرد، باید آن را به بازه های مناسب که از تعریف تابع بدست می‌آیند تقسیم نمود. البته مشکل فوق در صورت استفاده از روش انتگرال‌گیری سیمپسون[112] دیگر وجود نخواهد داشت. ولی به خاطر زمان بر بودن روش سیمپسون، ناگزیر به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گوس خواهیم بود. در روش اخیر به تعداد نقاط گوسی[113]، مقدار تابع ارزیابی شده و البته برای تبدیل به بازه [0,1] به محاسبه ژاکوبی[114] نیز احتیاج خواهیم داشت. در شکل (۳-۲۲-الف) به علت ناپیوستگی در تابع بایستی برای هر بازه بطور جداگانه انتگرال‌گیری انجام شود ولی در شکل (۳-۲۲-ب) بعلت وجود پیوستگی در تابع می‌توان در یک مرحله انتگرال‌گیری را انجام داد. البته توجه شود که با پیچیده تر شدن تابع باید از تعداد بیشتری از نقاط گوسی در انتگرالگیری استفاده کرد. در انتگرال‌گیری عددی گوس، مقادیر وزنی و موقعیت نقطه انتگرال‌گیری برای بازه بین [0,1] در جدول (۳-۶) آمده است. توجه شود که مقدار ژاکوبی در این حالت برابر با اختلاف بازه‌های انتگرال خواهد بود.

جدول ۴-۶: نقاط انتگرال‌گیری گوس

[111] Gauss quadrature rule
[112] Simpson's rule
[113] Gauss points
[114] Jacobian

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n_q} w_i\, f(x_i)$$

x_i		w_i
0.50000 00000 00000 00000 000	$n_q = 1$	1.00000 00000 00000 00000 000
0.21132 48654 05187 11774 543	$n_q = 2$	0.50000 00000 00000 00000 000
0.78867 51345 94812 88225 457		0.50000 00000 00000 00000 000
0.11270 16653 79258 31148 208	$n_q = 3$	0.27777 77777 77777 77777 778
0.50000 00000 00000 00000 000		0.44444 44444 44444 44444 444
0.88729 83346 20741 68851 792		0.27777 77777 77777 77777 778
0.06943 18442 02973 71238 803	$n_q = 4$	0.17392 74225 68726 92868 653
0.33000 94782 07571 86759 867		0.32607 25774 31273 07131 347
0.66999 05217 92428 13240 133		0.32607 25774 31273 07131 347
0.93056 81557 97026 28761 197		0.17392 74225 68726 92868 653
0.04691 00770 30668 00360 119	$n_q = 5$	0.11846 34425 28094 54375 713
0.02307 65344 94715 84544 818		0.23931 43352 49683 23402 065
0.50000 00000 00000 00000 000		0.28444 44444 44444 44444 444
0.76923 46550 52841 54551 816		0.23931 43352 49683 23402 065
0.95308 99229 69331 99639 881		0.11846 34425 28094 54375 713

۴-۱۲-۳ مفهوم مقدار پارامتر r در ارزیابی مقدار توابع

فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای $x = x_0$ دارای مقادیر f_0 و g_0 باشند. حال این توابع را با استفاده از فرمولبندی معکوس بر اساس پارامتر r به صورت $\tilde{f}(r)$ و $\tilde{g}(r)$ محاسبه می‌کنیم. حال فرض کنید به ازای $r = r_0$ مقدار تابع $\tilde{f}(r_0)$ برابر با همان f_0 است. سوالی که در این قسمت مطرح است این است که آیا $\tilde{g}(r_0)$ برابر با g_0 خواهد بود یا خیر؟

جواب این سوال در حالت کلی خیر است. پس باید راهی برای رفع این مشکل پیدا کنیم. قبل از آن ذکر این نکته ضروری است که وجود مشکل فوق در هنگام محاسبه انتگرالهای ارائه شده در فرمولبندی مساله با استفاده از روش IGA سبب ایجاد خطا خواهد شد. بهمین خاطر رفع این مشکل یک گام مهم در محاسبه صحیح آن انتگرالها خواهد بود. بعنوان یکی از ساده‌ترین راه ها می‌توان به استفاده از درجه مساوی برای توابع پایه و همچنین بردار گره مشابه برای تولید هر دو تابع با استفاده از تکنیک معکوس نربز اشاره نمود. برای توضیحات تکمیلی، می‌توان به مرجع (ب. حسنی و ن. ظریف مقدم، ۱۳۸۷) مراجعه نمود.

فصل چهارم: فرمولبندی روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع

۵-۱ مقدمه

در این فصل به بیان نحوه استخراج فرمولبندی روش GIGA برای مسایل تنش/ کرنش مسطح و مسایل با تقارن محوری خواهیم پرداخت. در خصوص اثبات روابط معادلات دیفرانسیل یک بعدی به مرجع (ب. حسنی و ن. ظریف مقدم، ۱۳۸۷) ارجاع داده می‌شود. همچنین برای معادلات دو بعدی تک متغیره، فرمولبندی حاکم برای معادله لاپلاس استخراج شده است و در این خصوص مسایلی نیز حل شده است (Hassani et al., 2009b).

۵-۲ معادلات دیفرانسیل چند متغیره (مسایل تنش/کرنش مسطح)

معادلات دیفرانسیل حاکم در مسایل الاستیک تنش/کرنش مسطح در حالت استاتیکی با رابطه (۴-۱) بیان می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=f_x\\
&-\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=f_y
\end{aligned}
\tag{۴-۱}
$$

در این حالت شرایط مرزی طبیعی به صورت رابطه (۴-۲)خواهند بود:

$$
\begin{aligned}
t_x&=\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x+c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y\\
t_y&=c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y
\end{aligned}
\tag{۴-۲}
$$

در مسائل ارتوتروپیک تنش و کرنش مسطح، ضرایب c_{ij} در رابطه (۴-۱) به ترتیب با روابط (۴-۳) و (۴-۴)

$$
\begin{aligned}
&c_{11}=\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\quad,\quad c_{22}=\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\\
&c_{12}=\mu_{21}c_{11}=\mu_{12}c_{22}\quad,\quad c_{66}=G_{12}
\end{aligned}
\tag{۴-۳}
$$

و

$$c_{11}=\frac{E_1(1-\mu_{12})}{1-\mu_{12}-2\mu_{12}\mu_{21}} \quad , \quad c_{22}=\frac{E_2(1-\mu_{12}\mu_{21})}{(1+\mu_{12})(1-\mu_{12}-2\mu_{12}\mu_{21})}$$
$$c_{12}=\frac{\mu_{12}E_2}{1-\mu_{12}-2\mu_{12}\mu_{21}} \quad , \quad c_{66}=G_{12} \qquad (۴-۴)$$

اکنون می‌توان شکل ضعیف معادلات (۴-۱) را به صورت رابطه (۴-۵) نوشت(Reddy, 1993).

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}[\frac{\partial w_1}{\partial x}(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y})+c_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})-w_1f_x]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_1t_xd\Gamma$$
$$0=h_e\oint_{\Omega_e}[\frac{\partial w_2}{\partial x}c_{66}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial w_2}{\partial y}(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y})-w_2f_y]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_2t_yd\Gamma \qquad (۵-۴)$$

که در این روابط h_e ضخامت المان می‌باشد و w_1 و w_2 نیز توابع وزن مورد استفاده می‌باشند. با بسط معادلات (۴-۵) به معادلات (۴-۶) دست می‌یابیم.

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}[c_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+c_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+c_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-w_1f_x]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_1t_xd\Gamma$$
$$0=h_e\oint_{\Omega_e}[c_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+c_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-w_2f_y]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_2t_yd\Gamma \qquad (۶-۴)$$

اکنون هر دو معادله مذکور در رابطه (۴-۶) را با یکدیگر جمع می‌کنیم تا به رابطه (۴-۷) برسیم.

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}\begin{bmatrix} c_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x})+c_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+ \\ c_{66}(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}) \end{bmatrix}dxdy-$$
$$h_e\oint_{\Omega_e}[w_1f_x+w_2f_y]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}(w_1t_x+w_2t_y)d\Gamma \qquad (۷-۴)$$

رابطه (۴-۷) دارای یک قسمت bilinear و یک قسمت linear می‌باشد که به ترتیب با روابط (۴-۸) و (۴-۹) نمایش داده شده اند.

$$B(u,v,w_1,w_2) = h_e \oint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} c_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}) + c_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \\ c_{66}(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}) \end{bmatrix} dxdy \qquad (۸-۴)$$

و

$$l(w_1,w_2) = -h_e \oint_{\Omega_e} [w_1 f_x + w_2 f_y] dxdy - h_e \oint_{\Gamma_e} (w_1 t_x + w_2 t_y) d\Gamma \qquad (۹-۴)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۴-۱۰) اقدام به تشکیل تابع نمای حاکم بر مساله می‌نماییم.

$$\Pi = \frac{1}{2} B(u,v,u,v) - l(u,v) \qquad (۱۰-۴)$$

که در این رابطه داریم

$$B(u,v,u,v) = h_e \oint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} c_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ +c_{66}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) \end{bmatrix} dxdy \qquad (۱۱-۴)$$

$$l(u,v) = -h_e \oint_{\Omega_e} [uf_x + vf_y] dxdy - h_e \oint_{\Gamma_e} (ut_x + vt_y) d\Gamma$$

نتیجه جایگذاری روابط (۴-۱۱) در رابطه (۴-۱۰) به شکل رابطه (۴-۱۲) خواهد بود.

$$\Pi\left(u(x,y),v(x,y)\right) = \frac{1}{2} h_e \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} c_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ +c_{66}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) \end{bmatrix} dxdy + h_e \oint_{\Omega_e} [uf_x + vf_y] dxdy + h_e \oint_{\Gamma_e} (ut_x + vt_y) d\Gamma \qquad (۱۲-۴)$$

در رابطه (۴-۱۲) دو مجهول وجود دارد که عبارتند از u و v که باید برای یافتن روابط روش GIGA بایستی این مجهولات را برحسب توابع پایه اسپلاینها نوشت. در اینجا اگر فرض شود که مختصات x و y هر نقطه در دامنه مساله به همراه u یک رویه و با v یک رویه دیگر را تولید می‌کنند آنگاه دو رویه خواهیم داشت که با نوشتن آنها بر حسب توابع پایه اسپلاین به روابط (۴-۱۳) دست می‌یابیم.

$$\mathbf{S}^u(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)\mathbf{P}_{ij}^u$$

$$\mathbf{S}^v(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)\mathbf{P}_{ij}^v \qquad (۱۳-۴)$$

هر یک از روابط معادله (۴-۱۳) خود بیانگر سه معادله می‌باشد که دوتای اول مربوط به تولید هندسه جسم و سومی مولفه مجهول مورد نظر می‌باشد. اما با توجه به اینکه مختصات نقاط کنترلی تولید کننده هندسه در هر دو رابطه یکسان می‌باشند لذا در صورت گسترش رابطه (۴-۱۳) به چهار معادله مجزا دست خواهیم یافت که در رابطه (۴-۱۵) بیان شده اند.

$$X(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)X_{ij}$$

$$Y(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)Y_{ij}$$

$$U(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij} \qquad (۱۵-۴)$$

$$V(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}$$

همچنین ملاحظه می‌شود که در رابطه (۴-۱۲) به محاسبه مشتقات u و v نسبت به x و y نیز نیاز می‌باشد. لذا در این بخش اقدام به محاسبه مشتقات مذکور می‌کنیم. برای این کار روابط (۴-۱۶) را در نظر بگیرید. به عنوان مثال J_{xr} بیانگر مشتق تابع $X(r,s)$ نسبت به متغیر r خواهد بود و به همین ترتیب برای بقیه نیز تعریف می‌شود.

$$J_{xr}=\frac{\partial X(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)X_{ij}$$

$$J_{xs}=\frac{\partial X(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)X_{ij}$$

$$J_{yr}=\frac{\partial Y(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)Y_{ij} \qquad (۱۶-۴)$$

$$J_{ys}=\frac{\partial Y(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)Y_{ij}$$

$$J_{ur}=\frac{\partial U(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}$$

$$J_{us}=\frac{\partial U(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)U_{ij}$$

$$J_{vr}=\frac{\partial V(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}$$

$$J_{vs}=\frac{\partial V(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)V_{ij}$$

اکنون می‌توان مدول الاستیسیته و ضریب پواسون را نیز با استفاده از توابع پایه اسپلاین بر روی دامنه مساله به شکل رابطه (۴-۱۷) تعریف کرد.

$$\bar{E}_1(r,s)=E_1(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)E_{ij}^{1}$$

$$\bar{E}_2(r,s)=E_2(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)E_{ij}^{2}$$

(۱۷-۴)

$$\bar{\mu}_{12}(r,s)=\mu_{12}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)\mu_{ij}^{12}$$

$$\bar{\mu}_{21}(r,s)=\mu_{21}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)\mu_{ij}^{21}$$

با توجه به رابطه (۴-۳) و (۴-۱۷) می‌توان ضرایب c_{ij} را برای مسایل تنش مسطح ارتوتروپیک با رابطه (۴-۱۸) تعریف کرد. ملاحظه می‌شود که در این رابطه دیگر ضرایب c_{ij} به صورت عدد ثابت نبوده و بلکه به صورت تابعی از r و s می‌باشند.

$$\bar{c}_{11}(r,s)=\frac{\bar{E}_1(r,s)}{1-\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{\mu}_{21}(r,s)}$$

$$\bar{c}_{22}(r,s)=\frac{\bar{E}_2(r,s)}{1-\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{\mu}_{21}(r,s)}$$

(۱۸-۴)

$$\bar{c}_{12}(r,s)=\bar{\mu}_{21}(r,s)\bar{c}_{11}(r,s)=\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{c}_{22}(r,s)$$

$$\bar{c}_{66}(r,s)=G_{12}$$

به طور مشابه رابطه (۴-۱۹) را برای مسایل کرنش مسطح ارتوتروپیک خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{11}(r,s) &= \frac{\bar{E}_1(r,s)\left(1-\bar{\mu}_{12}(r,s)\right)}{1-\bar{\mu}_{12}(r,s)-2\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{\mu}_{21}(r,s)} \\
\bar{c}_{22}(r,s) &= \frac{\bar{E}_2(r,s)\left(1-\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{\mu}_{21}(r,s)\right)}{\left(1+\bar{\mu}_{12}(r,s)\right)\left(1-\bar{\mu}_{12}(r,s)-2\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{\mu}_{21}(r,s)\right)} \\
\bar{c}_{12}(r,s) &= \frac{\bar{E}_2(r,s)\bar{\mu}_{12}(r,s)}{1-\bar{\mu}_{12}(r,s)-2\bar{\mu}_{12}(r,s)\bar{\mu}_{21}(r,s)} \\
\bar{c}_{66}(r,s) &= G_{12}
\end{aligned} \qquad (۱۹-۴)$$

به طور مشابه می‌توان نیروهای وارده را نیز با استفاده از توابع اسپلاین مدلسازی نمود. در واقع هدف اصلی، در راستای تبدیل کلیه روابط به فرمولهایی بر اساس توابع پایه اسپلاین می‌باشد.

$$\begin{aligned}
\bar{f}_x(r,s) &= f_x(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) f_{ij}^{x} \\
\bar{f}_y(r,s) &= f_y(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) f_{ij}^{y}
\end{aligned} \qquad (۲۰-۴)$$

اکنون با جایگذاری روابط بدست آمده در رابطه (۴-۱۲) کلیه متغیرهای x و y و u و v را می‌توان بر حسب r و s بیان نمود. برای انجام این تبدیل $(dxdy = \bar{J}drds)$ به محاسبه ژاکوبی نیاز می‌باشد که در رابطه (۴-۲۱) ذکر شده است.

$$\bar{J} = \bar{J}(r,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X(r,s)}{\partial r} & \dfrac{\partial Y(r,s)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial X(r,s)}{\partial s} & \dfrac{\partial Y(r,s)}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xr} & J_{yr} \\ J_{xs} & J_{ys} \end{vmatrix} = J_{xr}J_{ys} - J_{yr}J_{xs} \qquad (۲۱-۴)$$

فرمولهای مشتقگیری از پارامترهای تغییر مکان u و v نسبت به xو y با فرمولهای رابطه (۴-۲۲) محاسبه خواهد شد.

$$\frac{\partial U(r,s)}{\partial X(r,s)} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial r}\dfrac{\partial Y}{\partial s} - \dfrac{\partial U}{\partial s}\dfrac{\partial Y}{\partial r}}{\dfrac{\partial X}{\partial r}\dfrac{\partial Y}{\partial s} - \dfrac{\partial X}{\partial s}\dfrac{\partial Y}{\partial r}} = \frac{J_{ys}}{\bar{J}} J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}} J_{us} \qquad (۲۲-۴)$$

$$\frac{\partial U(r,s)}{\partial Y(r,s)} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial r}}{\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial r}} = \frac{-J_{xs}}{\overline{J}} J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\overline{J}} J_{us}$$

$$\frac{\partial V(r,s)}{\partial X(r,s)} = \frac{\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial r}}{\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial r}} = \frac{J_{ys}}{\overline{J}} J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\overline{J}} J_{vs}$$

$$\frac{\partial V(r,s)}{\partial Y(r,s)} = \frac{-\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial r}}{\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial r}} = \frac{-J_{xs}}{\overline{J}} J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\overline{J}} J_{vs}$$

اکنون رابطه (۴-۱۲) را می‌توان با انجام جایگزینی پارامترهای مربوطه به شکل رابطه (۴-۲۴) نوشت.

$$\Pi(r,s) = \frac{1}{2} h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\begin{array}{l} c_{11}\left(\frac{J_{ys}}{\overline{J}} J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\overline{J}} J_{us}\right)^2 + c_{22}\left(\frac{-J_{xs}}{\overline{J}} J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\overline{J}} J_{vs}\right)^2 \\ +2c_{12}\left(\frac{J_{ys}}{\overline{J}} J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\overline{J}} J_{us}\right)\left(\frac{-J_{xs}}{\overline{J}} J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\overline{J}} J_{vs}\right) \\ +c_{66}\left(\begin{array}{l} \left(\frac{-J_{xs}}{\overline{J}} J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\overline{J}} J_{us}\right)^2 + \left(\frac{J_{ys}}{\overline{J}} J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\overline{J}} J_{vs}\right)^2 \\ +2\left(\frac{-J_{xs}}{\overline{J}} J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\overline{J}} J_{us}\right)\left(\frac{J_{ys}}{\overline{J}} J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\overline{J}} J_{vs}\right) \end{array} \right) \end{array} \right] \overline{J} drds + \\ h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[u\overline{f}_x + v\overline{f}_y \right] \overline{J} drds + h_e \oint_{\Gamma_e} (ut_x + vt_y) d\Gamma \qquad (۴\text{-}۲۳)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۴-۱۶) در رابطه (۴-۲۳) به رابطه (۴-۲۴) خواهیم رسید.

$$\Pi(r,s)=$$

$$\frac{1}{2}h_e\int_0^1\int_0^1\left[\begin{array}{l}
c_{11}\left(\begin{array}{l}\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}\\-\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)U_{ij}\end{array}\right)^2+\\
2c_{12}\left(\begin{array}{l}\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}\\-\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)U_{ij}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}\\+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)V_{ij}\end{array}\right)+\\
c_{22}\left(\begin{array}{l}\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}\\+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)V_{ij}\end{array}\right)^2+\\
c_{66}\left(\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}\\+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)U_{ij}\end{array}\right)^2+\\
2\left(\begin{array}{l}\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}\\+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)U_{ij}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}\\-\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)V_{ij}\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{l}\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N'_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}\\-\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N'_{j,q}(s)V_{ij}\end{array}\right)^2\end{array}\right)
\end{array}\right]\bar{J}drds+ \qquad (۲۴-۴)$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[u\bar{f}_x+v\bar{f}_y)\right]\bar{J}drds+h_e\oint_{\Gamma_e}(ut_x+vt_y)d\Gamma$$

برای ساده سازی رابطه (۴-۲۴) پارامترهایی به شرح روابط (۴-۲۵) و (۴-۲۶) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\varphi_{xr}&=\varphi_{xr}(r,s)=\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\\ \varphi_{xs}&=\varphi_{xs}(r,s)=\frac{J_{xs}}{\bar{J}}\\ \varphi_{yr}&=\varphi_{yr}(r,s)=\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\\ \varphi_{ys}&=\varphi_{ys}(r,s)=\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\end{aligned} \qquad (۲۵-۴)$$

و

$$\begin{aligned}\chi_{ij}^{(1)} &= \varphi_{ys} N'_{i,p}(r) N_{j,q}(s) - \varphi_{yr} N_{i,p}(r) N'_{j,q}(s) \\ \chi_{ij}^{(2)} &= -\varphi_{xs} N'_{i,p}(r) N_{j,q}(s) + \varphi_{xr} N_{i,p}(r) N'_{j,q}(s)\end{aligned} \qquad (۴-۲۶)$$

اکنون از رابطه (۴-۲۴) نسبت به U_{ij} و V_{ij} مشتقگیری کرده و روابط (۴-۲۵) و (۴-۲۶) برای ساده سازی روابط در آن جایگزین می‌شوند. همچنین اندیسهای α و β را با رابطه (۴-۲۷) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&\alpha = 0,1,...,(n+1)(m+1)-1 \quad i = \alpha-(n+1)\operatorname{int}\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \quad j = \operatorname{int}\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\ &\beta = 0,1,...,(n+1)(m+1)-1 \quad i = \beta-(n+1)\operatorname{int}\left(\frac{\beta}{n+1}\right) \quad j = \operatorname{int}\left(\frac{\beta}{n+1}\right)\end{aligned} \qquad (۴-۲۷)$$

با انجام کمی عملیات جبری می‌توان درایه های ماتریس ضرایب را به شکل روابط (۴-۲۸) و (۴-۲۹) بدست آورد.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)u} &= h_e \int_0^1\int_0^1 \left(\bar{c}_{11}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(1)} + \bar{c}_{66}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(2)}\right)\bar{J}drds \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)v} &= h_e \int_0^1\int_0^1 \left(\bar{c}_{12}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(2)} + \bar{c}_{66}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(1)}\right)\bar{J}drds \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)u} &= h_e \int_0^1\int_0^1 \left(\bar{c}_{12}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(1)} + \bar{c}_{66}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(2)}\right)\bar{J}drds \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)v} &= h_e \int_0^1\int_0^1 \left(\bar{c}_{22}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(2)} + \bar{c}_{66}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(1)}\right)\bar{J}drds\end{aligned} \qquad (۴-۲۸)$$

و

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_\alpha^u &= h_e \int_0^1\int_0^1 \left[N_{i,p}(r) N_{j,q}(s)\bar{f}_x\right]\bar{J}\,drds \\ \mathbf{F}_\beta^v &= h_e \int_0^1\int_0^1 \left[N_{i,p}(r) N_{j,q}(s)\bar{f}_y\right]\bar{J}\,drds\end{aligned} \qquad (۴-۲۹)$$

اکنون دستگاه معادلاتی با $2(n+1)(m+1)$ معادله و مجهول به شکل رابطه (۴-۲۹) خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)u} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)v} \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)u} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_\alpha \\ V_0 \\ \vdots \\ V_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0^u \\ \vdots \\ F_\alpha^u \\ F_0^v \\ \vdots \\ F_\beta^v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_0^u \\ \vdots \\ Q_\alpha^u \\ Q_0^v \\ \vdots \\ Q_\beta^v \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} \alpha = 0,1,2,\ldots,(n+1)(m+1)-1 \\ \beta = 0,1,2,\ldots,(n+1)(m+1)-1 \end{cases} \tag{۲۹-۴}$$

Qها همان نیروهای متمرکز خارجی وارد بر سازه هستند. البته توجه شود که در حال حاضر فقط به نقاط کنترلی که در گوشه مرزهای وصله قرار دارند می‌توانیم نیرو وارد کنیم چون بر روی هندسه جسم قراردارند. خاطر نشان می‌سازد که بحث بارگذاری در روش IGA کماکان از مشکلاتی است که در حال حاظر به شکل کلی حل نشده و برای توسعه آن درحالت کلی به تحقیقات بیشتری نیاز است. اکنون جهت بازیابی تنش ابتدا کرنشها را با رابطه (۴-۳۰) محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx}(r,s) \\ \bar{\varepsilon}_{yy}(r,s) \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy}(r,s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X(r,s)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial Y(r,s)} \\ \dfrac{\partial}{\partial Y(r,s)} & \dfrac{\partial}{\partial X(r,s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(r,s) \\ V(r,s) \end{Bmatrix} \tag{۳۰-۴}$$

البته رابطه فوق را می‌توان به صورت (۴-۳۱) نیز نوشت که پارامترهای آن قبلا توضیح داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij}^{xx}(r,s) &= (J_{ys}J_{ur} - J_{yr}J_{us})/\bar{J} \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^{yy}(r,s) &= (-J_{xs}J_{vr} + J_{xr}J_{vs})/\bar{J} \\ 2\bar{\varepsilon}_{ij}^{xy}(r,s) &= (-J_{xs}J_{ur} + J_{xr}J_{us} + J_{ys}J_{vr} - J_{yr}J_{vs})/\bar{J} \end{aligned} \tag{۳۱-۴}$$

توجه شود که برای محاسبه روابط فوق نیاز به محاسبه کلیه J ها که هریک مستقلا به صورت یک سری هستند می‌باشد. اکنون می‌توان میدان تنش را با رابطه (۴-۳۲) محاسبه نمود.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (۴-۳۲)$$

که رابطه (۴-۳۳) شکل ماتریسی رابطه (۴-۳۲) می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx}(r,s) \\ \bar{\sigma}_{yy}(r,s) \\ \bar{\sigma}_{xy}(r,s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}(r,s) & \bar{c}_{12}(r,s) & 0 \\ \bar{c}_{21}(r,s) & \bar{c}_{22}(r,s) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}(r,s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx}(r,s) \\ \bar{\varepsilon}_{yy}(r,s) \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy}(r,s) \end{Bmatrix} \quad (۴-۳۳)$$

اکنون با استفاده از روابط قبل می‌توانیم رابطه (۴-۳۳) را به صورت ماتریسی (۴-۳۴) بنویسیم.

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (J_{ys}J_{ur} - J_{yr}J_{us})/\bar{J} \\ (-J_{xs}J_{vr} + J_{xr}J_{vs})/\bar{J} \\ (-J_{xs}J_{ur} + J_{xr}J_{us} + J_{ys}J_{vr} - J_{yr}J_{vs})/\bar{J} \end{Bmatrix} \quad (۴-۳۴)$$

که شکل گسترش یافته آن به صورت رابطه (۴-۳۵) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{xx}(r,s) &= \bar{c}_{11}(J_{ys}J_{ur} - J_{yr}J_{us})/\bar{J} + \bar{c}_{12}(-J_{xs}J_{vr} + J_{xr}J_{vs})/\bar{J} \\ \bar{\sigma}_{ij}^{yy}(r,s) &= \bar{c}_{12}(J_{ys}J_{ur} - J_{yr}J_{us})/\bar{J} + \bar{c}_{22}(-J_{xs}J_{vr} + J_{xr}J_{vs})/\bar{J} \quad (۴-۳۵) \\ \bar{\sigma}_{ij}^{xy}(r,s) &= \bar{c}_{66}(-J_{xs}J_{ur} + J_{xr}J_{us} + J_{ys}J_{vr} - J_{yr}J_{vs})/\bar{J} \end{aligned}$$

دست آخر می‌توان با رابطه (۴-۳۵) مقادیر تنش را حساب نمود.

۳-۵ معادلات دیفرانسیل چند متغیره (مسایل تقارن محوری)

معادلات دیفرانسیل حاکم در مسایل تقارن محوری در حالت استاتیکی با رابطه (۴-۳۶) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{13}\frac{u}{x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \\ &\frac{1}{x}\left[(c_{11} - c_{13})\frac{\partial u}{\partial x} + (c_{12} - c_{23})\frac{\partial v}{\partial y} + (c_{13} - c_{33})\frac{u}{x}\right] + f_x = 0 \end{aligned} \quad (۴-۳۶)$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[c_{66}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[c_{12}\dfrac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}+c_{23}\dfrac{u}{x}\right]\\ +\dfrac{1}{x}\left[c_{66}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+f_y=0\end{array}\right]$$

در این حالت شرایط مرزی طبیعی به صورت رابطه (۴-۳۷)خواهند بود:

$$\begin{aligned}t_x&=\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x+c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y\\ t_y&=c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y\end{aligned} \qquad (۳۷-۴)$$

اکنون در صورتی که مانند مسایل تنش/کرنش مسطح اقدام به اثبات روابط روش GIGA نماییم با انجام کمی عملیات جبری می‌توان درایه های ماتریس ضرایب را به شکل روابط (۴-۳۸) و (۴-۳۹) بدست آورد.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)u}&=2\pi\int_0^1\int_0^1\left(\begin{array}{l}\overline{c}_{11}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(1)}+\overline{c}_{66}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(2)}\\ +\dfrac{\overline{c}_{13}\left(R_\alpha\chi_\beta^{(1)}+\chi_\alpha^{(1)}R_\beta\right)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}}+\dfrac{\overline{c}_{33}R_\alpha R_\beta}{\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)^2}\end{array}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)\overline{J}drds\\
\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)v}&=2\pi\int_0^1\int_0^1\left(\overline{c}_{12}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(2)}+\overline{c}_{66}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(1)}+\frac{\overline{c}_{23}R_\alpha\chi_\beta^{(2)}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)\overline{J}drds\\
\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)u}&=2\pi\int_0^1\int_0^1\left(\overline{c}_{12}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(1)}+\overline{c}_{66}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(2)}+\frac{\overline{c}_{23}\chi_\alpha^{(2)}R_\beta}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)\overline{J}drds\\
\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)v}&=2\pi\int_0^1\int_0^1\left(\overline{c}_{22}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(2)}+\overline{c}_{66}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(1)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)\overline{J}drds\end{aligned} \qquad (۳۸-۴)$$

و

$$\mathbf{F}_\alpha^{u}=2\pi\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\overline{f}_x\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)\overline{J}drds \qquad (۳۹-۴)$$

$$\mathbf{F}_{\beta}^{v}=2\pi\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\left(R_{i,j}^{p,q}\left(r,s\right)\overline{f}_{y}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}X_{i,j}\right)\overline{J}drds$$

اکنون مشابه قبل دستگاه معادلاتی با $2(n+1)(m+1)$ معادله و مجهول به شکل رابطه (۴-۴۰) خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)u} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(1)v}\\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)u} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(2)v}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_0\\ \vdots\\ U_\alpha\\ V_0\\ \vdots\\ V_\beta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_0^u\\ \vdots\\ F_\alpha^u\\ F_0^v\\ \vdots\\ F_\beta^v\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_0^u\\ \vdots\\ Q_\alpha^u\\ Q_0^v\\ \vdots\\ Q_\beta^v\end{Bmatrix}\qquad \begin{cases}\alpha=0,1,2,\ldots,(n+1)(m+1)-1\\ \beta=0,1,2,\ldots,(n+1)(m+1)-1\end{cases}\tag{۴-۴۰}$$

برای بازیابی کرنشها و تنشها نیز همانند قبل به ترتیب از روابط (۴-۴۱) و (۴-۴۲) استفاده خواهیم کرد.

$$\begin{Bmatrix}\overline{\varepsilon}_{rr}(r,s)\\ \overline{\varepsilon}_{zz}(r,s)\\ \overline{\varepsilon}_{tt}(r,s)\\ 2\overline{\varepsilon}_{rz}(r,s)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial R(r,s)} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial Z(r,s)}\\ \dfrac{1}{R(r,s)} & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial Z(r,s)} & \dfrac{\partial}{\partial R(r,s)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U(r,s)\\ V(r,s)\end{Bmatrix}\tag{۴-۴۱}$$

و

$$\begin{Bmatrix}\overline{\sigma}_{rr}(r,s)\\ \overline{\sigma}_{zz}(r,s)\\ \overline{\sigma}_{tt}(r,s)\\ 2\overline{\sigma}_{rz}(r,s)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{c}_{11}(r,s) & \overline{c}_{12}(r,s) & \overline{c}_{13}(r,s) & 0\\ \overline{c}_{12}(r,s) & \overline{c}_{22}(r,s) & \overline{c}_{23}(r,s) & 0\\ \overline{c}_{13}(r,s) & \overline{c}_{23}(r,s) & \overline{c}_{33}(r,s) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \overline{c}_{66}(r,s)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{\varepsilon}_{rr}(r,s)\\ \overline{\varepsilon}_{zz}(r,s)\\ \overline{\varepsilon}_{tt}(r,s)\\ 2\overline{\varepsilon}_{rz}(r,s)\end{Bmatrix}\tag{۴-۴۲}$$

بعد از تهیه و اثبات روابط فوق اقدام به تهیه کدهای کامپیوتری معرفی شده در فصل یک گردید و مسایلی در این زمینه حل شد. نتایج مربوط به حل مسایل در فصل پنجم قابل ملاحظه می‌باشد.

فصل پنجم: حل مسائل با روش GIGA

۶-۱ مقدمه

در این فصل مسائل حل شده در سه بخش ارائه شده‌اند. در بخش اول معادلات دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم، در بخش دوم معادله لاپلاس به عنوان یک مساله با معادله دیفرانسیل دوبعدی تک متغیره، در بخش سوم حل مسایل تنش/کرنش مسطح و مسائل با تقارن محوری با مصالح FG مورد بررسی قرار گرفته اند. کلیه مسائل این فصل و فصل ششم با کامپیوتری حل شده است که پردازنده آن دارای مشخصات CPU: AMD 3.0GHz با RAM: 4GB بوده است.

۶-۲ بخش اول: حل معادلات دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم

در این بخش معادلات و مسایل از دو دیدگاه ریاضی و دیدگاه فیزیکی مورد بررسی قرار گرفته اند. یکی از این معادلات که معمولا در مراجع مکانیک جامدات با آن روبرو هستیم به شکل $a \le x \le b \quad \frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du}{dx}\right)+\beta(x)u=q(x)$ می‌باشد و می‌توان با مراجعه به (Reddy, 1993) مسائل متنوعی را که با این معادله قابل بیان می‌باشند را ملاحظه نمود.

۶-۲-۱ مثال اول: معادله دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم – شماره یک

در این مثال با استفاده از فرمولبندی اثبات شده در مرجع (ب. حسنی و ن. ظریف مقدم، ۱۳۸۷) یک معادله دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم مورد تحلیل قرار گرفته است. معادله (۵-۱) را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{x}\frac{du}{dx}\right)=1-2x \qquad 0\le x\le 5 \qquad (۱-۵)$$

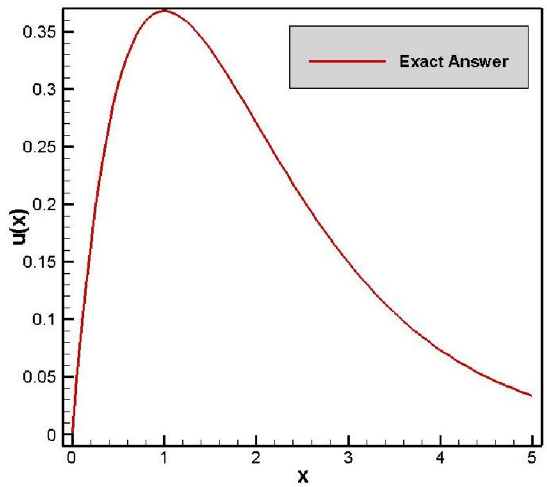
شرایط مرزی در این مساله به شرح (۵-۲) می‌باشد.

$$u(0)=0, \quad u(5)=0.0337 \qquad (۲-۵)$$

جواب دقیق معادله (۵-۱) با رابطه (۵-۳) نشان داده شده است.

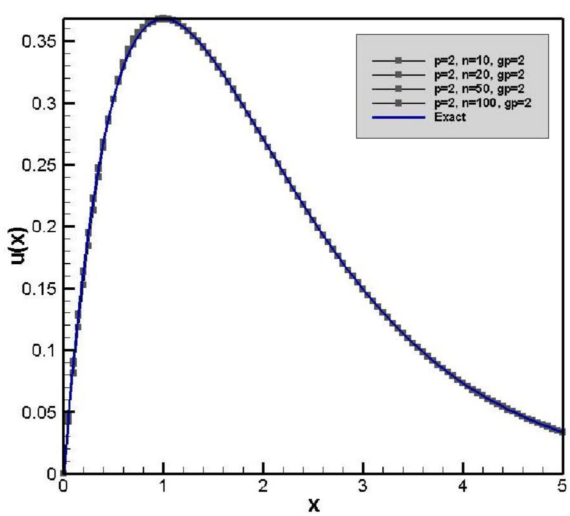
$$u(x)=\frac{x}{e^{x}} \qquad (۳-۵)$$

نمودار جواب دقیق نیز در شکل (۵-۱) ترسیم شده است.



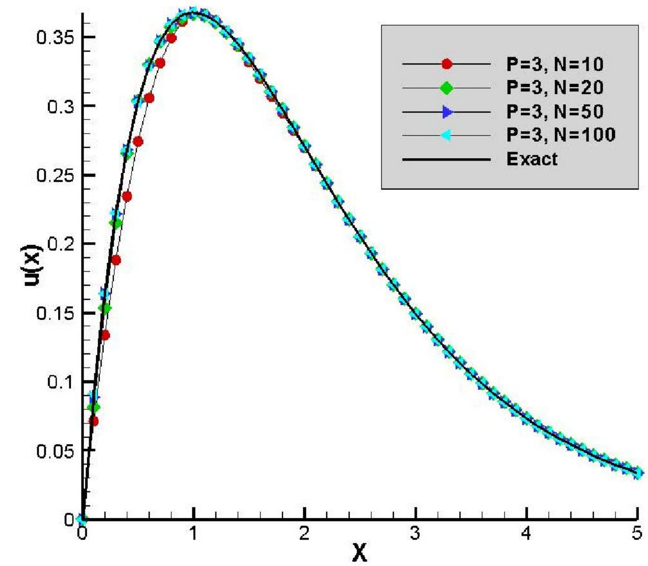
شکل ۶-۱: جواب دقیق مثال شماره یک

نتایج حل این معادله بازای تعداد مختلف نقاط کنترلی شامل $n=10,20,50,100$ و درجات مختلف توابع پایه اسپلاین برابر با $P=2,3,5$ و در نظر گرفتن بردار گره یکنواخت و تعداد نقاط گوس مشخص، برای هر یک از این حالات حل شده است و نتایج به ترتیب در شکلهای (۵-۲) تا (۵-۴) آمده است.



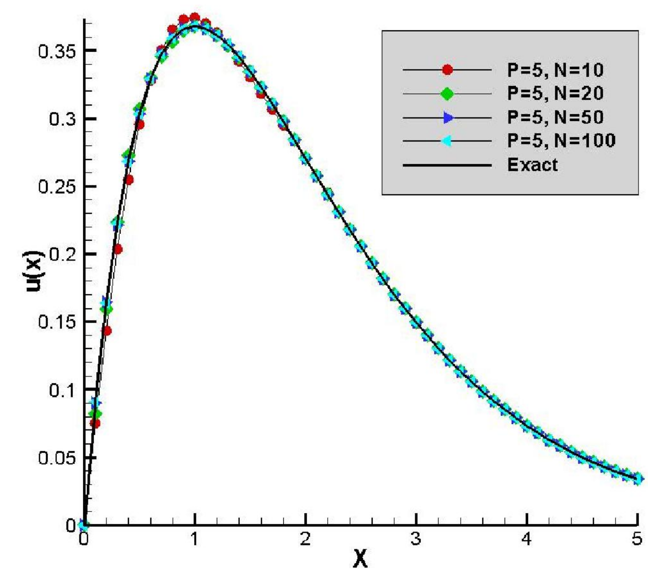
شکل ۶-۲: حل مثال یک بازای $P = 2$ و $n = 10,20,50,100$

و



شکل ۶-۳: حل مثال یک بازای $P = 3$ و $n = 10,20,50,100$

و



شکل ۶-۴: حل مثال یک بازای $P = 5$ و $n = 10,20,50,100$

حل این مساله به کمک روش GIGA با دقت بالایی انجام شده است. البته از دیدگاه فیزیکی

نیز معمولا جوابها ممکن است پیچیدگی زیادی نداشته باشند ولی نکته اصلی در این است که همین جوابهای به ظاهر ساده را اجباراً بایستی با روشهای عددی مانند FEA یا روش IGA محاسبه نماییم.

اکنون در خصوص تغییرات پارامترهای موثر در حل مساله و اثر آن در کیفیت جوابهای حاصله به بررسی می‌پردازیم. در این خصوص حالات متعددی بررسی شده است. ابتدا با فرض ثابت نگه داشتن مقدار p اثر تعداد نقاط گوس را در حل مساله بیان می‌کنیم. نتایج حل به ازای $p=3$ و $p=5$ به ترتیب در جداول (۵-۱) و (۵-۲) ارایه شده است.

جدول ۶-۱: خطای حل بازای $p=3$

$n\,Gauss$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$
۲	۵۵.۴۹	۲۰.۱۰	۴.۶۶	۱.۰۷
۳	۱۲.۵۶	۱.۲۲	۰.۰۶	۰.۰۳
۴	۱۲.۰۵	۱.۲۲	۰.۰۶	۰.۰۳

جدول ۶-۲: خطای حل بازای $p=5$

$n\,Gauss$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$
۲	ناپایدار	ناپایدار	ناپایدار	ناپایدار
۳	۳۶.۹۶	۱۸.۸۰	۴.۱۶	۰.۳۴
۴	۲.۴۶	۰.۰۷	۰.۰۳	۰.۰۳

با افزایش تعداد نقاط گوسی همانگونه که انتظار می‌رود دقت در انتگرال گیری عددی افزایش یافته و درصد خطای حل کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد نقاط کنترلی دقت حل افزایش می‌یابد. ازطرفی استفاده از دو نقطه گوسی برای تابع پایه درجه ۵ سبب ایجاد ناپایداری در حل شده است. لذا نتیجه می‌شود که انتخاب تعداد نقاط گوسی همانند روش FEA، مستقیما به درجه توابع پایه بستگی خواهد داشت. ازطرفی می‌توان ملاحظه کرد که برای تابع پایه با

درجه سه، خطای حل ناشی از انتخاب ۳ و ۴ نقطه گوسی تفاوت زیادی با یکدیگر ندارد. لذا می‌توان در حل مسایل به این نکته دقت کرد که برای کاهش زمان حل و اجتناب از محاسبات اضافی بهتر است تعداد نقاط گوسی متناسب با درجه تابع پایه انتخاب شود. اکنون از دیدگاه دیگری به مساله نگاه می‌کنیم. فرض کنید که تعداد نقاط کنترلی را در حل مساله ثابت در نظر بگیریم. با افزایش درجه تابع پایه نتیجه حل در جداول (۵-۳) تا (۵-۶) قابل ملاحظه است.

جدول ۶-۳: خطای حل بازای $n = 10$

p	$n\,gauss = 2$	$n\,gauss = 3$	$n\,gauss = 4$
	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$
۲	۱۵.۰۹	۲۰.۱۷	۲۰.۱۷
۳	۵۵.۴۹	۱۲.۵۶	۱۲.۰۵
۵	ناپایدار	۳۶.۹۶	۲.۴۶

جدول ۶-۴: خطای حل بازای $n = 20$

p	$n\,gauss = 2$	$n\,gauss = 3$	$n\,gauss = 4$
	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$
۲	۲.۴۸	۳.۴۸	۳.۴۸
۳	۲۰.۱۰	۱.۲۲	۱.۲۶
۵	ناپایدار	۱۸.۸۰	۰.۰۷

جدول ۶-۵: خطای حل بازای $n = 50$

p	$n\,gauss = 2$	$n\,gauss = 3$	$n\,gauss = 4$
	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$
۲	۰.۲۰	۰.۲۲	۰.۲۲
۳	۴.۶۶	۰.۰۶	۰.۰۶
۵	ناپایدار	۴.۱۶	۰.۰۳

جدول ۶-۶: خطای حل بازای $n = 100$

p	$n\,gauss = 2$	$n\,gauss = 3$	$n\,gauss = 4$
	$Error(\%)$	$Error(\%)$	$Error(\%)$
۲	۰.۰۵	۰.۰۳	۰.۰۳
۳	۱.۰۷	۰.۰۳	۰.۰۳
۵	ناپایدار	۰.۳۴	۰.۰۳

چند نکته در این بخش قابل توجه می‌باشد. به عنوان مثال جدول مربوط به تعداد نقاط کنترلی $n = 20$ را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌شود که در ستون اول شامل دو نقطه گوسی، با افزایش درجه توابع پایه دقت کاهش می‌یابد. علت این امر بخاطر کاهش تعداد المانها با افزایش مقدار p می‌باشد. همچنین استفاده نامناسب از تعداد نقاط گوسی سبب شده است تا با افزایش p خطا نیز افزایش یابد. در ستون دوم از سه نقطه گوسی استفاده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش p ابتدا خطا کاهش و بعد افزایش یافته است. علت کاهش خطا مربوط به استفاده مناسب از تعداد نقطه گوس بوده است و کاهش در تعداد المانها اثر کمتری بر خطا داشته است. اما بعد از آن علت افزایش خطا مربوط به استفاده نامناسب از تعداد نقاط گوس و همچنین کاهش تعداد المانها می‌باشد.

در ستون سوم ملاحظه می‌شود که با افزایش p مقدار خطا کاهش یافته است. می‌توان این‌گونه بیان نمود که هرچه مقدار p افزایش یافته است اثر مثبت تعداد نقاط گوسی بیشتر نمایان شده است و در این حالت کاهش تعداد المانها اثر کمتری را در خطای حاصله گذاشته است. در مجموع با بررسی دقیق تر جداول فوق می‌توان دریافت که همانگونه که در روش اجزای محدود به قضاوت مهندسی صحیح برای انتخاب نوع و تعداد المانها وجود دارد به طور مشابه در روش IGA نیز باید هنگام انتخاب این پارامترها دقت لازم را اعمال نمود.

۶-۲-۲ مثال دوم: معادله دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم – شماره دو

هدف از حل این مثال و مثال بعدی نشان دادن توانمندی روش GIGA در حل مسائلی است که ممکن است جوابهای پیچیده‌تری داشته باشند. معادله دیفرانسیل یک‌بعدی مرتبه دوم (۵-۴) را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) = -4x(\sin x^2 + \cos 2x^2) - 4x^3(\cos x^2 - 2\sin 2x^2) \quad 0 \le x \le \pi \qquad (۵-۴)$$

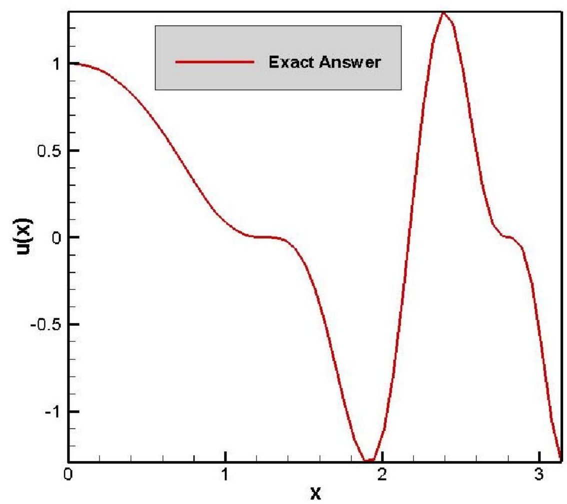
شرایط مرزی در این مساله به شرح (۵-۵) می‌باشد.

$$u(0)=1 \ , \ u(\pi)=-1.291 \qquad (۵-۵)$$

جواب دقیق معادله (۵-۴) با رابطه (۵-۶) نشان داده شده است.

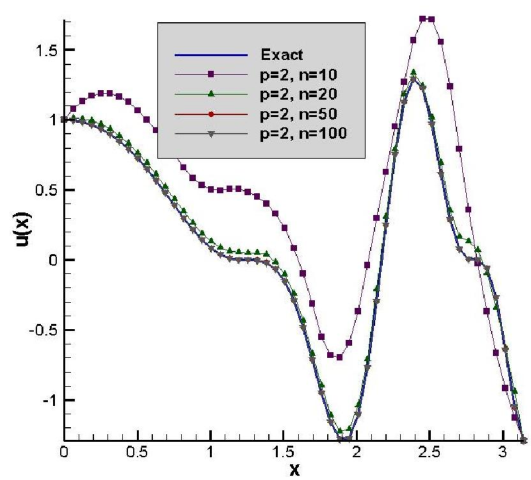
$$u(x)=\cos x^2(1-\sin x^2) \qquad (۶-۵)$$

و جواب دقیق در نمودار شکل (۵-۵) ترسیم شده است.



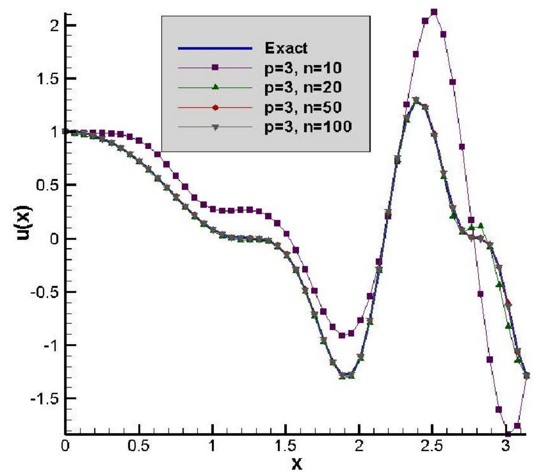
شکل ۶-۵: جواب دقیق مثال شماره دو

نتایج حل این معادله بازای درجات مختلف توابع پایه و تعداد نقاط کنترلی مختلف در شکلهای (۵-۶) تا (۵-۸) نشان داده شده است.



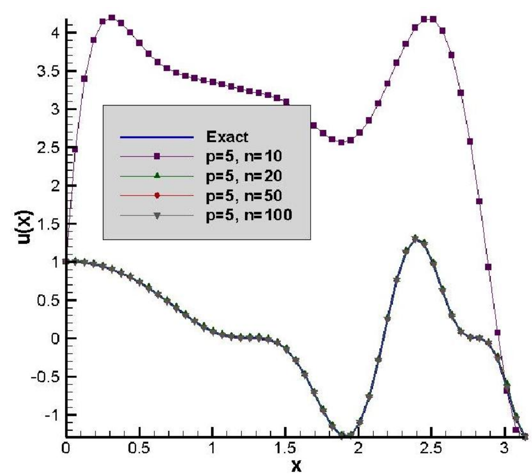
شکل ۶-۶: حل مثال دو بازای $P = 2$ و $n = 10,20,50,100$

و



شکل ۶-۷: حل مثال دو بازای $P = 3$ و $n = 10,20,50,100$

و



شکل ۶-۸: حل مثال دو بازای $P = 5$ و $n = 10,20,50,100$

در شکل (۵-۸) همانگونه که ملاحظه می‌شود بازای $n=10$ ناپایداری در حل ایجاد شده است. علت این ناپایداری همانگونه که قبلا به تفصیل بیان شد کاهش تعداد المانها و عدم استفاده از تعداد مناسب نقاط گوسی در انتگرال‌گیری عددی می‌باشد. در این مثال مباحث مربوط به خطای موجود در حل مساله با تغییر پارامترها همانند مثال اول می‌باشد که تشریح شد و برای جلوگیری از اطاله کلام

از آن گذر می‌کنیم. حل این مساله بیانگر توانمندی روش GIGA در مواجهه با معادلاتی است که ضرایب غیر ثابت در آنها ظاهر می‌شود.

۶-۲-۳ مثال سوم: معادله دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم – شماره سه

معادله دیفرانسیل یک بعدی مرتبه دوم (۵-۷) را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(-x\sin 6x\cos 2x-1)}\frac{du}{dx}\right)=4\cos 4x+8\cos 8x-32x\sin 8x-8x\sin 4x \quad 0\le x\le \pi \qquad (۵-۷)$$

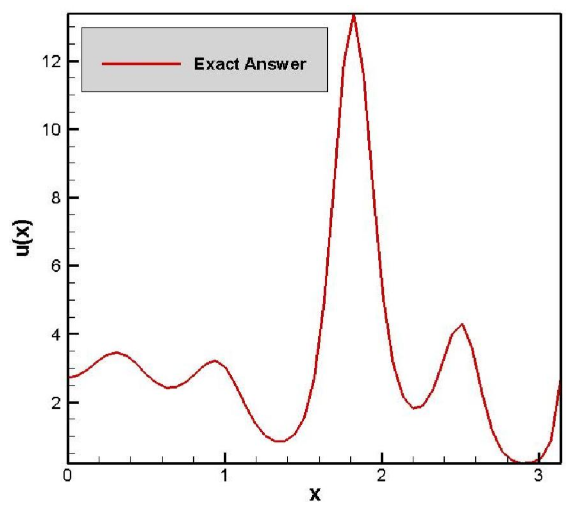
شرایط مرزی در این مساله به شرح (۵-۸) می‌باشد.

$$u(0)=e \quad , \quad e^{(-x\sin 6x\cos 2x-1)}\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=\pi}=e \qquad (۵-۸)$$

جواب دقیق معادله (۵-۷) با رابطه (۵-۹) نشان داده شده است.

$$u(x)=e^{(x\sin 6x\cos 2x+1)} \qquad (۵-۹)$$

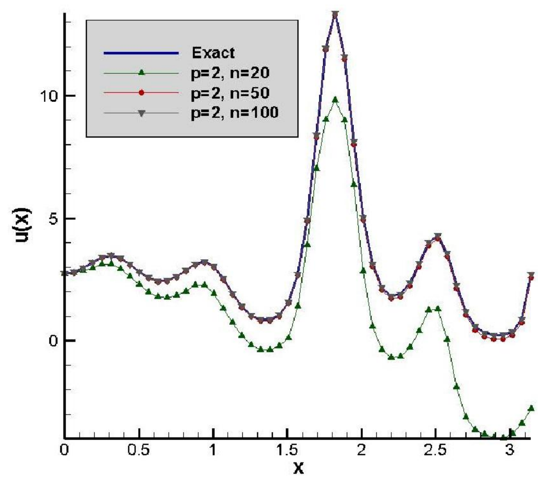
و جواب دقیق در شکل (۵-۹) ترسیم شده است.



شکل ۶-۹: جواب دقیق مثال شماره سه

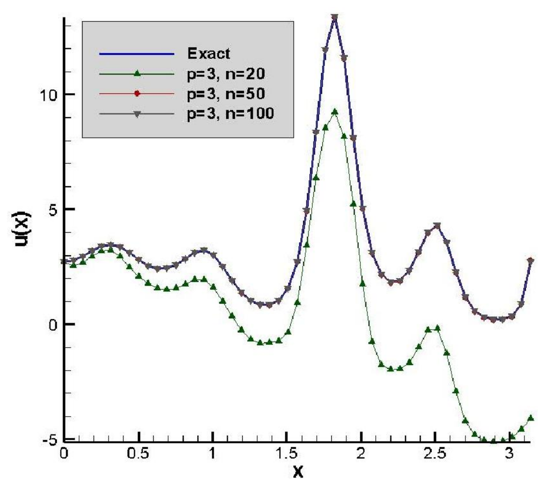
علت حل این معادله تغییر شدید جواب در بازه $1.5<x<2$ است. شاید بتوان از نظر فیزیکی تشبیهی مانند تمرکز تنش در یک ناحیه از یک جسم را برای این جواب تصور کرد. هرچند که در این

رساله هدف بررسی این مسایل نبوده است ولی می‌توان به عنوان یک مساله قابل توجه پژوهشی در آینده به آن پرداخت. نتایج حل این معادله بازای مقادیر مختلف درشکلهای (۵-۱۰) تا (۵-۱۲) نشان داده شده است که بیانگر توانمندی روش GIGA در مواجهه با هرگونه جواب پیچیده ای می‌باشد.



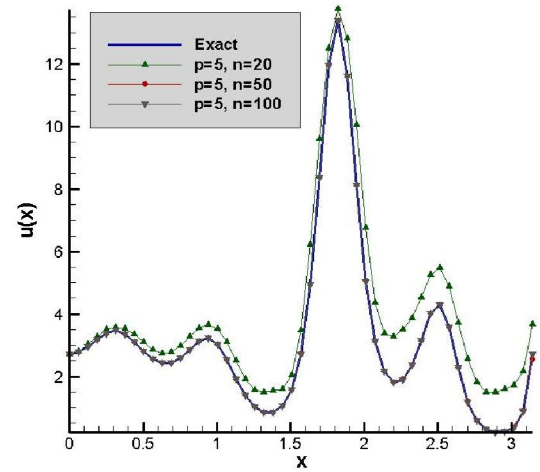
شکل ۶-۱۰: حل مثال سه بازای $P = 2$ و $n = 20{,}50{,}100$

و



شکل ۶-۱۱: حل مثال سه بازای $P = 3$ و $n = 20{,}50{,}100$

و



شکل ۶-۱۲: حل مثال سه بازای $P = 5$ و $n = 20,50,100$

در این شکلها جوابهای ناپایدار حذف شده اند و بحث در خصوص اثر پارامترها بر جواب نهایی نیز همانند مثال یک خواهد بود. خاطر نشان می‌سازد، مقدار خطای حل در این مثالها تا حدودی با هم تفاوت دارند و بطور میانگین برای ۱۰۰ نقطه کنترلی کمتر از ۰.۱ درصد می‌باشد، ولی عامل مهم و تاثیر گذار در جوابها که همان پارامترهای معرفی شده قبلی هستند، دارای آثار یکسانی در فرایند دستیابی به جوابهای بهتر می‌باشند.

۶-۲-۴ بررسی زمان حل در مثالهای قبل

در خصوص زمان مورد نیاز برای حل مسایل ۵-۲-۱ تا ۵-۲-۳، با توجه به اینکه تعداد نقاط کنترلی و درجه توابع پایه و تعداد نقاط گوسی در هر سه مساله یکسان در نظر گرفته شده است، لذا حجم محاسبات مورد نیاز برای هر سه مساله مساوی بوده و مطالب ارایه شده برای هر سه مساله معتبر می‌باشد. به ازای توابع پایه درجه دو و سه و پنج، زمان مورد نیاز بر حسب ثانیه برای حل مسائل مذکور بترتیب به شرح جدول (۵-۷)، (۵-۸) و (۵-۹) است.

جدول ۶-۷: زمان مورد نیاز برای حل به ازای $p = ۲$

$p = ۲$	$n\ gauss = ۲$	$n\ gauss = ۳$	$n\ gauss = ۵$
$n = ۱۰$	۰.۰۱۵	۰.۰۱۶	۰.۰۱۷
$n = ۲۰$	۰.۰۴۷	۰.۰۷۸	۰.۱۰۹
$n = ۵۰$	۰.۷۰۳	۱.۰۳۱	۱.۳۵۹
$n = ۱۰۰$	۵.۲۰۳	۷.۷۶۵	۱۰.۳۹

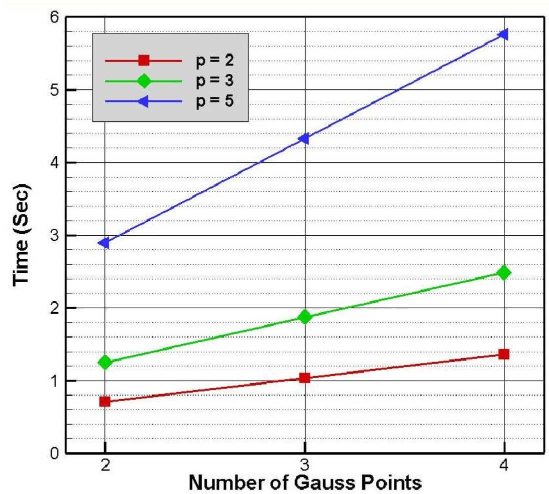
جدول ۶-۸: زمان مورد نیاز برای حل به ازای $p = ۳$

$p = ۳$	$n\ gauss = ۲$	$n\ gauss = ۳$	$n\ gauss = ۵$
$n = ۱۰$	۰.۰۱۶	۰.۰۲۴	۰.۰۳۲
$n = ۲۰$	۰.۰۹۴	۰.۱۴۱	۰.۱۷۶
$n = ۵۰$	۱.۲۵	۱.۸۷۵	۲.۴۸۴
$n = ۱۰۰$	۹.۵۴۷	۱۴.۲۸۲	۱۹.۰۹۳

جدول ۶-۹: زمان مورد نیاز برای حل به ازای $p = ۵$

$p = ۵$	$n\ gauss = ۲$	$n\ gauss = ۳$	$n\ gauss = ۵$
$n = ۱۰$	۰.۰۳۱	۰.۰۴۷	۰.۰۶۲
$n = ۲۰$	۰.۲۰۳	۰.۲۹۷	۰.۴۰۶
$n = ۵۰$	۲.۸۹۱	۴.۳۲۸	۵.۷۶۶
$n = ۱۰۰$	۲۲.۳۱۳	۳۳.۳۴۴	۴۴.۵۷۸

به عنوان مثال نیز با در نظر گرفتن مقدار $n = ۵۰$ نمودار مربوط به زمان مورد نیاز برای حل مساله به ازای مقادیر مختلف نقاط گوسی به شرح شکل (۵-۱۳) است. با توجه به اینکه زمان مورد نیاز برای حل بستگی به مشخصات سخت افزاری کامپیوتر مورد استفاده برای حل مساله دارد، لذا از اعداد ذکر شده می‌توان به شکل نسبی استفاده نمود.



شکل ۶-۱۳: زمان مورد نیاز برای حل بازای $n = ۵۰$

۶-۳ بخش دوم

در این بخش حل معادله لاپلاس به عنوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تک متغیره مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین سعی شده است تا اثر چیدمان نقاط کنترلی و بردار گره بر جواب حاصل از تحلیل مساله به روش IGA به اجمال مورد بررسی قرار گیرد.

۶-۳-۱ مثال چهارم: معادله دیفرانسیل دو بعدی مرتبه دوم – حالت اول

معادله دیفرانسیل (۵-۱۰) که یک معادله معروف به معادله لاپلاس است را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)+pu+q=0 \qquad (۵\text{-}۱۰)$$

کاربرد روش IGA برای این مساله نیز به آسانی قابل انجام و در مرجع (Hassani et al., 2009b) قابل ملاحظه می‌باشد. رابطه (۵-۱۱) را به عنوان حالت خاصی از معادله فوق با فرض $k_x = k_y = 1$ and $p = q = 0.$، در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \;\; ; \quad 0 \le x \le 1 \;\; , \quad 0 \le y \le 1 \qquad (۵\text{-}۱۱)$$

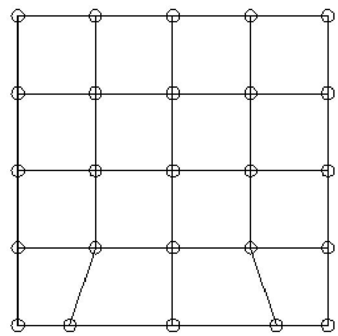
شرایط مرزی نیز به صورت زیر فرض می‌شود.

$$u(0,y)=0; \qquad u=(1,y)=0$$
$$u(x,0)=x(1-x); \qquad u(x,1)=0, \tag{۱۲-۵}$$

در واقع این مساله مربوط به انتشار حرارت در یک صفحه می‌باشد. جواب دقیق معادله (۵-۱۱) با رابطه (۵-۱۳) بیان می‌شود(Bhatti, 2005).

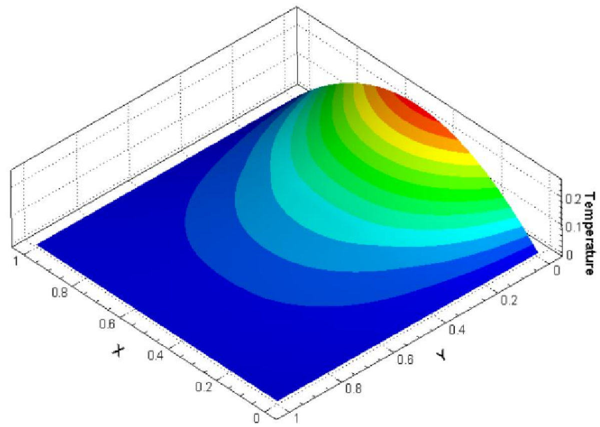
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4\sin\sin(n\pi x)\left((-1)^n-1\right)\sinh\left(n\pi(1-y)\right)}{\sinh(n\pi)n^3\pi^3} \tag{۱۳-۵}$$

برای مقایسه کارایی روش FEA با روش ایزوژئومتریک یک شبکه ۵×۵ نقاط کنترلی را که در شکل (۵-۱۴) نشان داده شده است در نظر بگیرید.



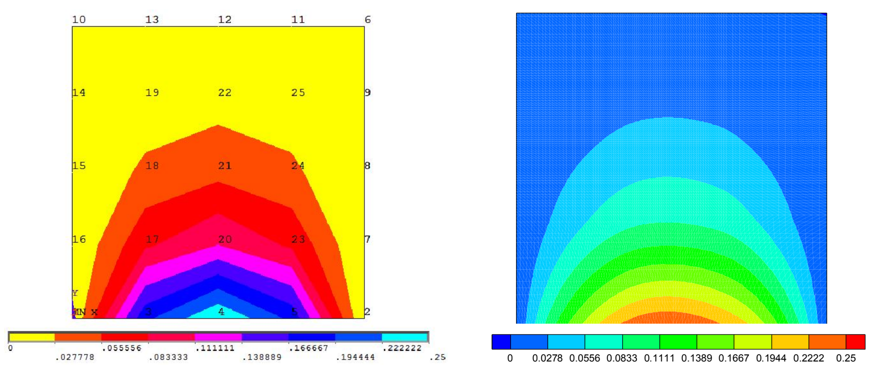
شکل ۶-۱۴: شبکه منظم نقاط کنترلی

این شبکه را به عنوان یک شبکه منظم نام گذاری می‌کنیم. البته دو تا از نقاط کنترلی برای اقناع شرایط مرزی از محل اولیه خود تغییر کرده‌اند که علت آن به خاطر استفاده از تکنیک معکوس نربز می‌باشد. درجه توابع پایه برای حل این مساله را مساوی دو در نظر گرفته و بردار گره آن را یکنواخت با $m=7$ فرض می‌کنیم. در نتیجه برای هر دو جهت بردار گره به صورت $U=V=\{0,0,0,0.333,0.666,1,1,1\}$ خواهد بود. جواب دقیق طبق رابطه فوق در شکل (۵-۱۵) ترسیم شده است.



شکل ۶-۱۵: جواب دقیق معادله (۵-۱۱)

این مساله توسط روش FEA با المان چهار گرهی توسط نرم افزار ANSYS و همچنین توسط روش IGA حل شده که نتیجه آن به ترتیب در شکلهای (۵-۱۶-الف) و (۵-۱۶-ب) آمده است.



(الف) (ب)

شکل ۶-۱۶: نتیجه تحلیل با (الف) برنامه ANSYS و (ب) روش ایزوژئومتریک

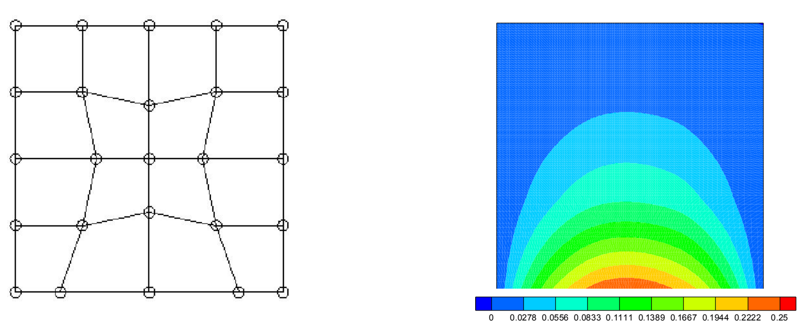
همچنین برای مقایسه بهتر نتیجه حل مساله به همراه خطای موجود در جدول (۵-۱۰) به طور کامل قابل ملاحظه می‌باشد.

جدول ۶-۱۰: مقایسه جواب FEA و ایزوژئومتریک

X	Y	Exact	FEA	IGA	FEA Err. %	IGA. Err. %
۰.۲۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۸۱۵۶	۵.۲۸	۱.۹۷
۰.۵۰۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۱۱۵۹۳	۰.۱۱۲۱۱	۰.۱۱۲۵۷	۳.۳۰	۲.۹۰
۰.۷۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۸۱۵۶	۵.۲۸	۱.۹۷
۰.۲۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۶۰۴	۸.۰۵	۱.۰۳
۰.۵۰۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۵۱۳۳	۰.۰۴۷۳۲	۰.۰۵۱۹۷	۷.۸۱	-۱.۲۴
۰.۷۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۶۰۴	۸.۰۵	۱.۰۳
۰.۲۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۳۴۳	۱۰.۶۲	۲.۱۶
۰.۵۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۹۴۰	۰.۰۱۷۳۵	۰.۰۱۸۸۲	۱۰.۵۵	۲.۹۹
۰.۷۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۳۴۳	۱۰.۶۲	۲.۱۶
			= میانگین خطای مطلق		۷.۷۳	۱.۹۳

توجه شود که به خاطر اینکه دستگاه معادلات حاصله از روش IGA و روش FEA دارای ابعادی مساوی باشد، به ترتیب تعداد نقاط کنترلی و تعداد گرها در این روشها مساوی در نظر گرفته شده است. طبق جدول فوق ملاحظه می‌شود که با وجود اینکه تعداد المانها در روش اجزای محدود بیش از روش IGA است ولی نتایج روش IGA بهتر بوده است.

اکنون نظم شبکه نقاط کنترلی را کمی بهم ریخته و مساله را در دو حالت دیگر حل می‌کنیم. در این حالت از دو شبکه به صورت شبه منظم و شبکه نامنظم استفاده کرده و جواب را مورد بررسی قرار می‌دهیم. جواب حاصل از حل شبکه نقاط کنترلی شبه منظم و چیدمان نقاط کنترلی شبکه آن در شکل (۵-۱۷) و نتایج آن در جدول (۵-۱۱) آمده است.



(الف) (ب)

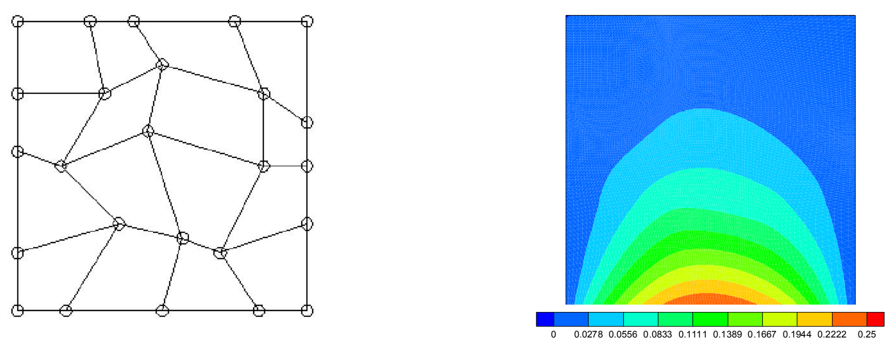
شکل ۶-۱۷: نتیجه حل ایزوژئومتریک با شبکه نقاط کنترلی شبه منظم

و

جدول ۶-۱۱: مقایسه حل ایزوژئومتریک و FEA با شبکه نقاط کنترلی شبه منظم

X	Y	Exact	FEA	IGA	FEA Err. %	IGA Err. %
۰.۲۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۸۲۵۲	۵.۲۸	۰.۸۲
۰.۵۰۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۱۱۵۹۳	۰.۱۱۲۱۱	۰.۱۱۴۵۲	۳.۳۰	۱.۲۱
۰.۷۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۸۲۵۲	۵.۲۸	۰.۸۲
۰.۲۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۵۳۱	۸.۰۵	۳.۰۲
۰.۵۰۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۵۱۳۳	۰.۰۴۷۳۲	۰.۰۵۲۲۱	۷.۸۱	-۱.۷۲
۰.۷۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۵۳۱	۸.۰۵	۳.۰۲
۰.۲۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۳۰۸	۱۰.۶۲	۴.۶۹
۰.۵۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۹۴۰	۰.۰۱۷۳۵	۰.۰۱۸۶۹	۱۰.۵۵	۳.۶۴
۰.۷۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۳۰۸	۱۰.۶۲	۴.۶۹
			میانگین خطای مطلق =		۷.۷۳	۲.۶۲

و برای شبکه نامنظم نیز در شکل (۵-۱۸) و جدول (۵-۱۲) می‌توان نتایج را ملاحظه نمود.



(الف) (ب)

شکل ۶-۱۸: نتیجه حل ایزوژئومتریک با شبکه نقاط کنترلی نامنظم

و

جدول ۶-۱۲: مقایسه حل ایزوژئومتریک و FEA با شبکه نقاط کنترلی نامنظم

X	Y	Exact	FEA	IGA	FEA Err. %	IGA Err. %
۰.۷۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۷۹۵۶	۵.۲۸	۴.۳۸
۰.۲۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۵۸۷	۸.۰۵	۱.۵۰

۰.۵۰۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۵۱۳۳	۰.۰۴۷۳۲	۰.۰۵۱۱۳	۷.۸۱	۰.۳۸
۰.۷۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۴۷۴	۸.۰۵	۴.۶۰
۰.۲۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۴۴۱	۱۰.۶۲	-۴.۹۳
۰.۵۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۹۴۰	۰.۰۱۷۳۵	۰.۰۲۰۰۵	۱۰.۵۵	-۳.۳۸
۰.۷۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۴۲۲	۱۰.۶۲	-۳.۵۹
۰.۷۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۷۹۵۶	۵.۲۸	۴.۳۸
۰.۲۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۵۸۷	۸.۰۵	۱.۵۰
			= میانگین خطای مطلق		۷.۷۳	۳.۱۵

در دو حالت حل شده اخیر مشخصات مساله از جمله درجه توابع پایه و بردار گره بدون تغییردر نظر گرفته شده اند. نتیجه کلی که از حل این مثال حاصل شده است این است که نامنظمی ایجاد شده در چیدمان نقاط کنترلی اثر کمی بر جواب نهایی داشته است و همچنین در تمام حالاتی که مساله حل شده است، جواب روش IGA نسبت به روش FEA بهتر بوده است. همچنین مشابه روش FEA با افزایش نامنظمی می‌توان دید که خطای ناشی از حل مساله با روش IGA بیشتر شده است.

به عنوان یک سعی دیگر و بررسی دقیق تر حل مساله به روش IGA، مساله فوق زمانی که شبکه کنترلی منظم باشد مجددا با در نظر گرفتن بردار گره غیر یکنواخت حل شده است. در این حالت از دو بردار گره $U = \{0,0,0,0.4,0.8,1,1,1\}$ و $V = \{0,0,0,0.2,0.5,1,1,1\}$ استفاده شده است. نتیجه حل در جدول (۵-۱۳) نشان داده شده است.

جدول ۶-۱۳: نتایج حل مثال با شبکه منظم و بردار گره غیریکنواخت

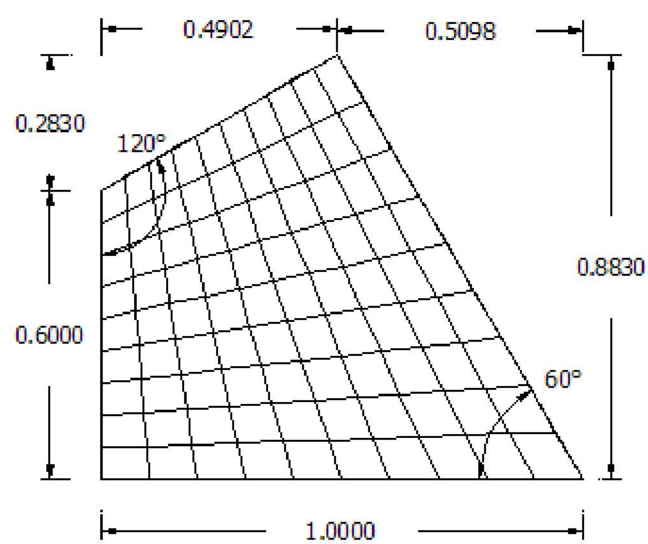
X	Y	Exact	FEA	IGA	FEA Err %	IGA Err %
۰.۲۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۸۰۸۶	۵.۲۸	۲.۸۱
۰.۵۰۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۱۱۵۹۳	۰.۱۱۲۱۱	۰.۱۱۱۶۶	۳.۳۰	۳.۶۹
۰.۷۵۰۰۰	۰.۲۵۰۰۰	۰.۰۸۳۲۰	۰.۰۷۸۸۰	۰.۰۸۱۹۱	۵.۲۸	۱.۵۵
۰.۲۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۵۵۴	۸.۰۵	۲.۴۱
۰.۵۰۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۵۱۳۳	۰.۰۴۷۳۲	۰.۰۵۱۰۳	۷.۸۱	۰.۵۷
۰.۷۵۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۳۴۸	۰.۰۳۵۸۸	۸.۰۵	۱.۴۷
۰.۲۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۳۳۵	۱۰.۶۲	۲.۷۷

۰.۵۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۹۴۰	۰.۰۱۷۳۵	۰.۰۱۸۸۳	۱۰.۵۵	۲.۹۵
۰.۷۵۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰	۰.۰۱۳۷۳	۰.۰۱۲۲۷	۰.۰۱۳۴۶	۱۰.۶۲	۱.۹۸
				= میانگین خطای مطلق	۷.۷۳	۲.۲۴

ملاحظه می‌شود که ایجاد غیر یکنواختی در بردارهای گره سبب افزایش خطای حل شده است. البته این نکته قابل توجه است که در حالت کلی ایجاد غیر یکنواختی با داشتن یک قضاوت مهندسی صحیح و یا استفاده از روشهای بهبود شبکه می‌تواند باعث بهبود حل شود. در این خصوص تحقیقات بیشتر مورد نیاز است.

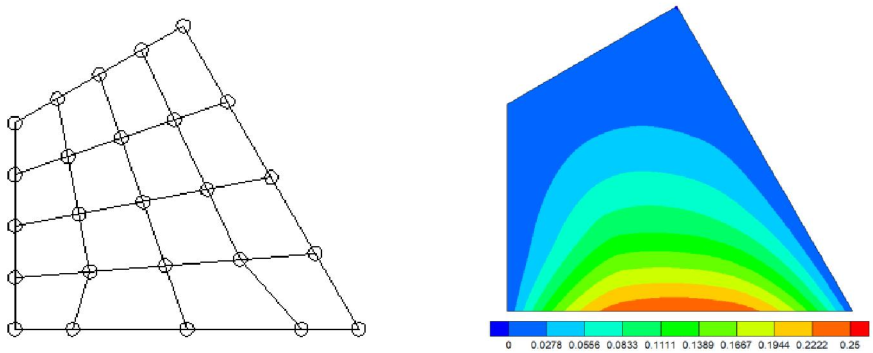
۶-۳-۲ مثال پنجم: معادله دیفرانسیل دو بعدی مرتبه دوم – حالت دوم

برای بررسی کیفیت روش IGA در حل معادله لاپلاس، از آن در حل مساله ای با شکل کلی تر استفاده نموده ایم. شکل مساله در (۵-۱۹) قابل ملاحظه است و شرایط مرزی به شکل $u(x,0)=x(1-x)$ وبر روی سایر مرزها به شکل $u=0$ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶-۱۹: مشخصات مثال پنجم

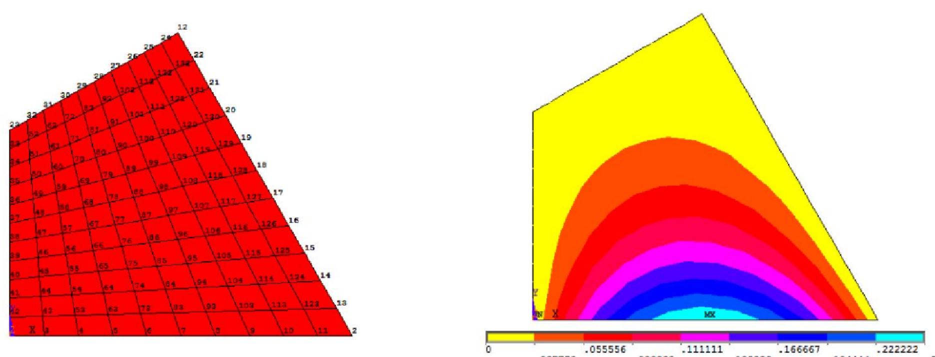
نقاط کنترلی مورد استفاده و نتیجه حل مثال با روش IGA در شکل (۵-۲۰) نشان داده شده است



(الف) (ب)

شکل ۶-۲۰: نتیجه حل مثال پنجم با روش ایزوژئومتریک و شبکه منظم

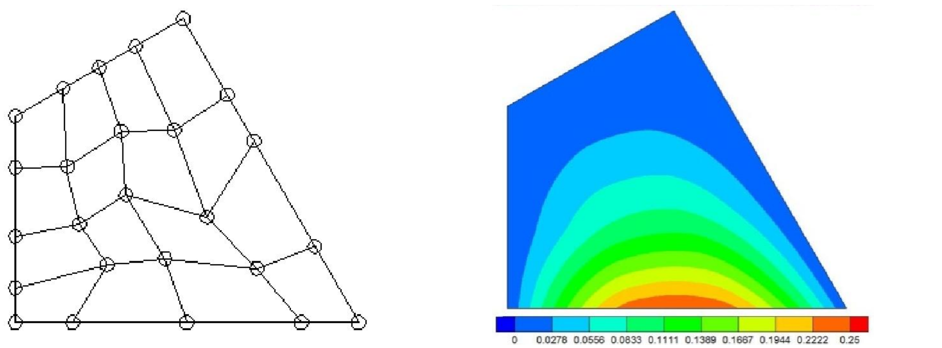
همچنین این مساله توسط نرم افزار ANSYS و بروش FEA حل شده است که شکل شبکه FEA و جواب حاصل از تحلیل، در شکل (۵-۲۱) آمده است.



(الف) (ب)

شکل ۶-۲۱: نتیجه حل مثال پنجم با برنامه ANSYS

برای بررسی نامنظمی شبکه کنترلی مجددا مساله با روش IGA حل شده است و شبکه کنترلی مورد استفاده و نتیجه تحلیل در شکل (۵-۲۲) آمده است



(ب) (الف)

شکل ۶-۲۲: نتیجه حل مثال پنجم با روش ایزوژئومتریک و شبکه نامنظم

با بررسی های انجام شده مشخص می‌شود که جوابهای بسیار مناسبی علی رغم استفاده از تعداد کمتر مجهولات برای روش IGA حاصل شده است. در واقع در این حالت تعداد معادلات روش FEA کمی بیش از هشت برابر روش IGA می‌باشد. همچنین مانند مساله قبل ملاحظه شد که تاثیر نامنظمی بر جواب نهایی بسیار ناچیز بوده است.

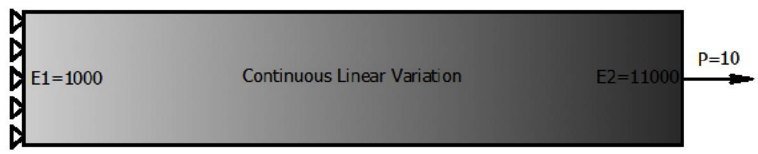
۶-۴ بخش سوم

در این بخش به حل مسائل تنش/ کرنش مسطح و همچنین مسائل با تقارن محوری با مصالح FG پرداخته شده است. از مشکلات موجود در این بخش، کمبود مسائلی است که به صورت تحلیلی حل شده باشند و بتوان از نتایج آنها در راست آزمایی کد کامپیوتری تهیه شده استفاده نمود. لذا ابتدا چند مثال با در نظر گرفتن قضاوت مهندسی و سپس مثلهایی در مقایسه با حل دقیق مورد بحث قرار گرفته اند. در انتها نیز دو مثال دلخواه جهت نشان دادن توانمندی روش ارائه شده طرح و حل شده است.

۶-۴-۱ مثال ششم: صفحه مستطیلی با نیروی کششی و مصالح FGM

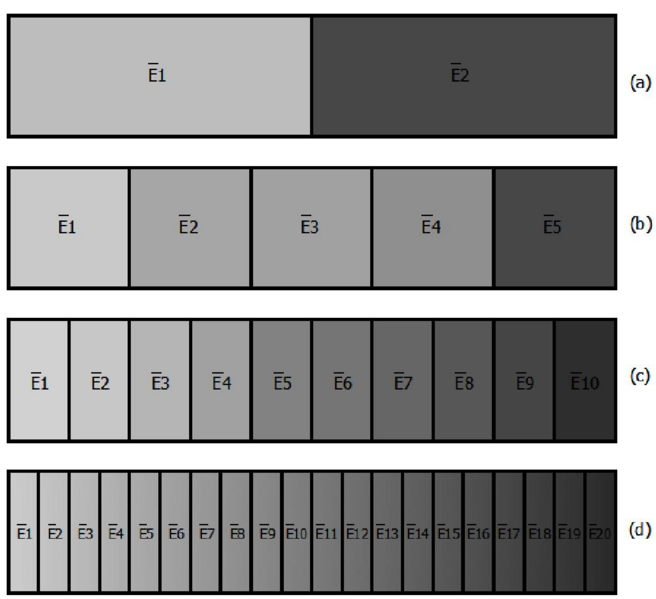
صفحه مستطیلی با عرض ۲ و طول ۱۰ را فرض کنید. این صفحه در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر خود مطابق شکل (۵-۲۳) دارای نیروی کششی $p=10$ می‌باشد. مدول الاستیسیته در

محل تکیه‌گاه برابر با $E_1 = 1000$ و در انتهای آزاد مساوی $E_2 = 11000$ بوده و فرض می‌شود که تغییرات مدول الاستیسیته در طول تیر بصورت خطی باشد. مساله در حالت تنش مسطح حل شده است.



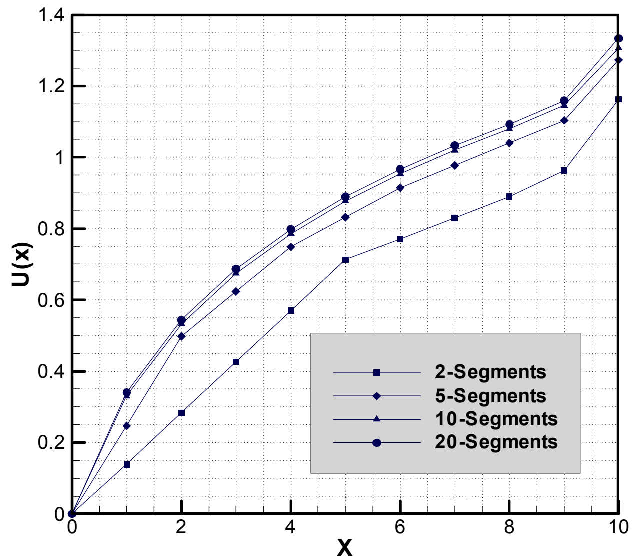
شکل ۶-۲۳: مشخصات صفحه مستطیلی FG تحت کشش

برای اینکه بتوان بین جوابهای روش GIGA و روش FEA مقایسه کرد، ابتدا مساله با روش FEA حل شده است. با توجه به اینکه در روش FEA المان با خواص متغیر وجود ندارد، لذا مساله در چهار حالت حل شده است. تفاوت این چهار حالت در تعداد نواحی است که مشخصات مکانیکی مساله ثابت فرض شده است. بدیهی است که با افزایش تعداد نواحی، می‌توان دقت در مدلسازی و در نتیجه حل را بالا برد. برای کلیه حالات نشان داده شده در شکل (۵-۲۴) از چهارصد المان استفاده شده است. مقدار مدول الاستیسیته برای هر المان مساوی با مقدار آن در مرکز المان فرض شده است.



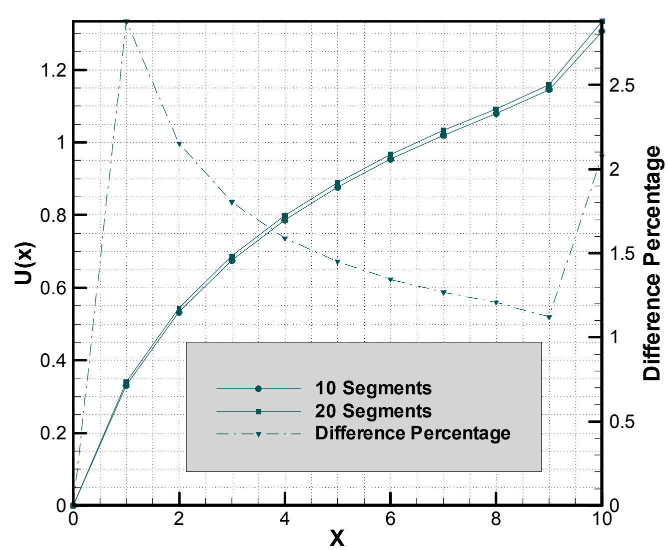
شکل ۶-۲۴: مقادیر مختلف برای ناحیه بندی مساله مستطیل کششی با مصالح FG

نتایج تحلیل FEA برای تغییر شکل محوری در شکل (۵-۲۵) نشان داده شده است.



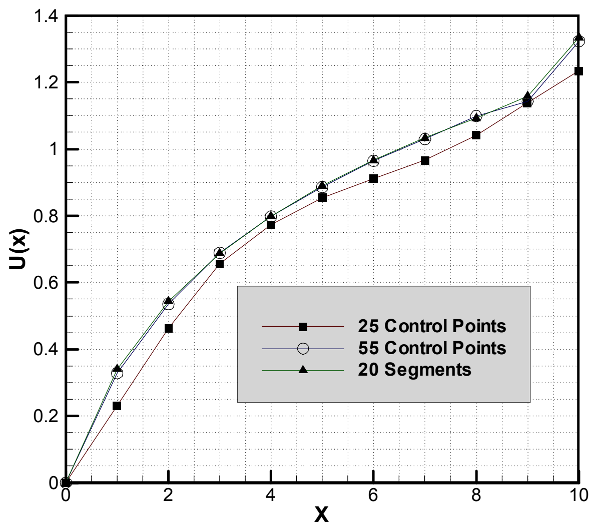
شکل ۶-۲۵: نتیجه حل اجزای محدود صفحه با تقسیم بندی به تعداد نواحی مختلف

با توجه به شکل فوق می‌توان ملاحظه کرد که با افزایش تعداد نواحی، جوابها به یک جواب نهایی همگرا می‌شوند. همانگونه که در شکل (۵-۲۶) ملاحظه می‌شود تفاوت حداکثر بین جواب مساله به ترتیب با ده و بیست ناحیه کمتر از سه درصد است. در نتیجه جواب حاصل از حل با بیست ناحیه را به‌عنوان جواب FEA برای حل این مساله و مقایسه با حل روش GIGA انتخاب می‌کنیم.



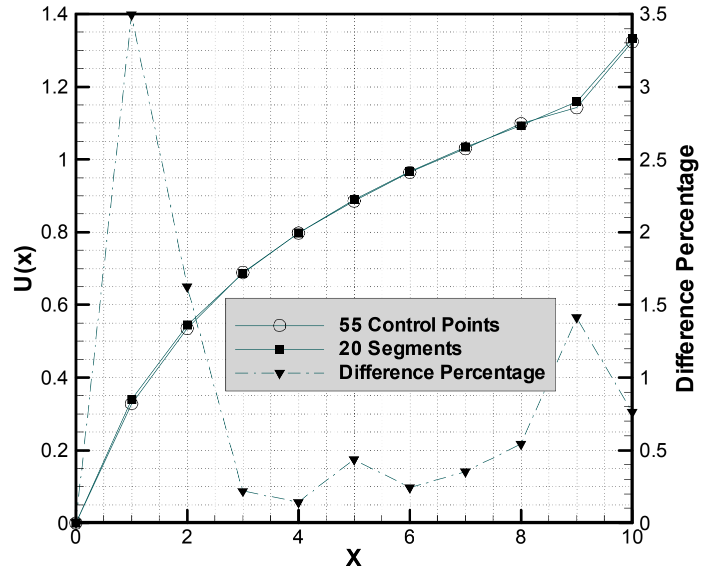
شکل ۶-۲۶: مقایسه دقیق‌تر بین تعداد نواحی ۱۰ و ۲۰ عدد

نتیجه حل مساله با روش GIGA به ترتیب با ۲۵ و ۵۵ نقطه کنترلی همراه با حل روش اجزای محدود با ۲۰ ناحیه در شکل (۵-۲۷) نشان داده شده است.



شکل ۶-۲۷: نتیجه GIGA با تعداد نقاط کنترلی متفاوت

ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد نقاط کنترلی، به جواب اجزای محدود نزدیک شده است. برای بررسی دقیقتر بین حل اجزای محدود با بیست ناحیه و چهارصد المان و حل ایزوژئومتریک جامع با ۵۵ نقطه کنترلی و بردار گره $u = \{0,0,0,0.333,0.667,1,1,1\}$ و $v = \{0,0,0,1,1,1\}$ می‌توان به شکل (۵-۲۸) رجوع نمود. همانگونه که ملاحظه می‌شود، حداکثر اختلاف بین جوابها حدود سه و نیم درصد است. با توجه به استفاده از ۴۰۰ المان (۴۵۱ گره) در روش FEA، تعداد مجهولات برابر با ۹۰۲ خواهد بود در حالی که در روش GIGA با ۵۵ نقطه کنترلی این تعداد به ۱۱۰ عدد خواهد رسید. در نتیجه با دقتی تقریبا مشابه، در روش GIGA، تعداد مجهولات حدود ۸ برابر کاهش یافته است.



شکل ۶-۲۸: مقایسه بین حل IGA و FEA

۶-۴-۲ مثال هفتم: صفحه مستطیلی طره و مصالح FGM

یک صفحه طره مستطیلی در حالت تنش مسطح با ضخامت واحد را در نظر بگیرید که در انتهای آزاد خود مطابق شکل (۵-۲۹) بار واحدی را تحمل می‌کند. برای مقایسه جوابهای روش GIGA با روش FEA، یک روند منطقی برای حل مثال و کنترل جوابها در نظر گرفته شده است. بدین منظور مساله در هفت حالت به شرح زیر حل شده است.

حالت یک: مقدار ثابت مدول الاستیسیته برابر با $E = 100000$

حالت دو: مقدار ثابت مدول الاستیسیته برابر با $E = 10000$

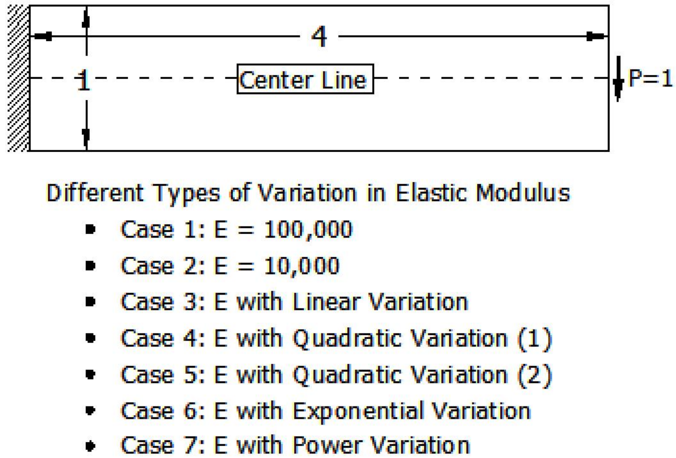
حالت سه: تغییرات خطی مدول الاستیسیته

حالت چهار: تغییرات درجه دو- شماره یک

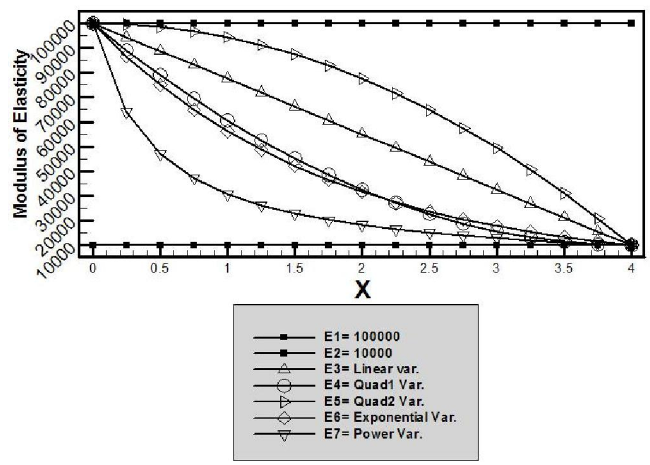
حالت پنج: تغییرات درجه دو- شماره دو

حالت شش: تغییرات نمایی

حالت هفت: تغییرات توانی

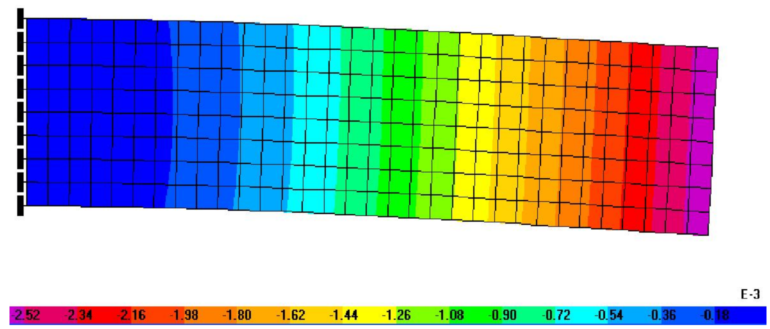


شکل ۶-۲۹: مشخصات تیر طره با مصالح FG



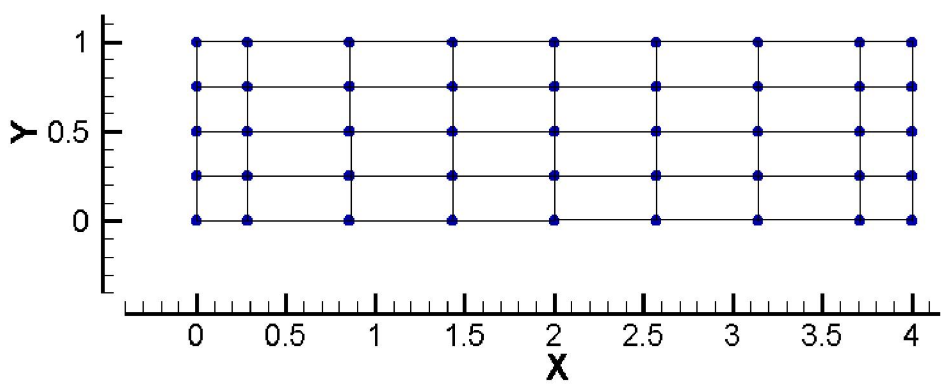
شکل ۶-۳۰: نمودار تغییرات مدول الاستیسیته در تیر طره با مصالح FG

نمودار تغییرات مدول الاستیسیته در شکل (۵-۳۰) ترسیم شده است. مساله در حالت اول با $E = 100000$ توسط هردو روش FEA و GIGA حل شده است. در روش FEA از ۲۵۶ المان چهار گرهی استفاده شده و تغییر شکل قائم آن در شکل (۵-۳۱) نشان داده شده است.



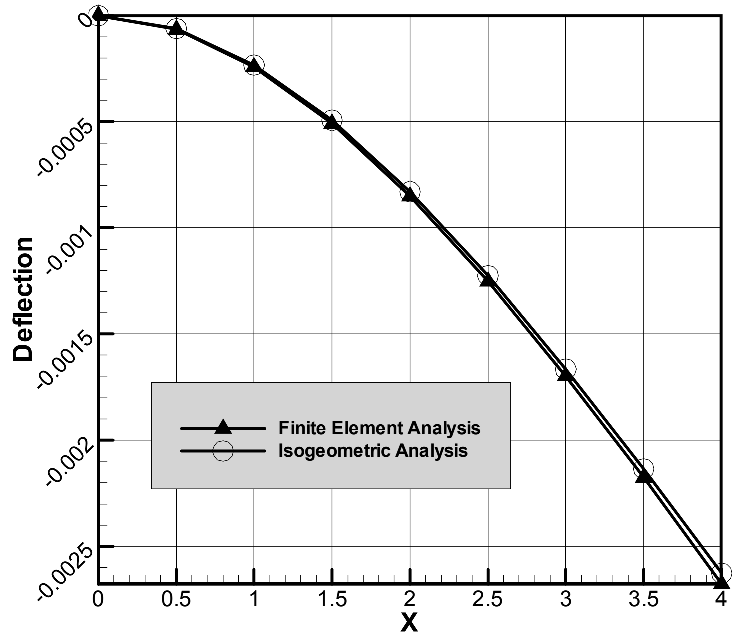
شکل ۶-۳۱: نتیجه تحلیل FEA تیر طره

همچنین مساله با روش GIGA و تعداد ۴۵ نقطه کنترلی طبق شکل (۵-۳۲) مجددا و توابع پایه درجه دو، حل شده است.

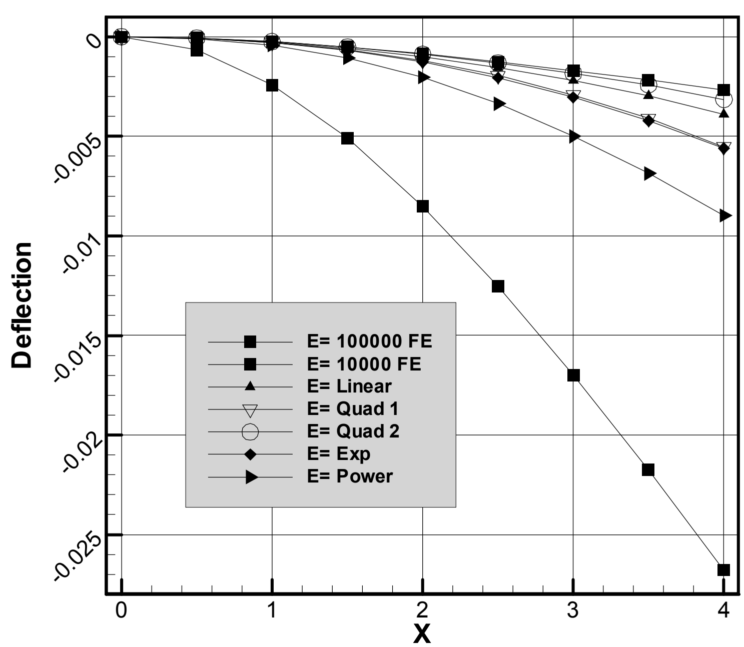


شکل ۶-۳۲: شبکه نقاط کنترلی برای تیر طره

نتیجه حل مساله برای تغییر شکل قائم تارخنثی با دو روش ذکر شده در شکل (۵-۳۳) نشان داده شده است.



شکل ۶-۳۳: مقایسه حل FEA و IGA برای تیر طره



شکل ۶-۳۴: نتیجه GIGA برای تیر طره

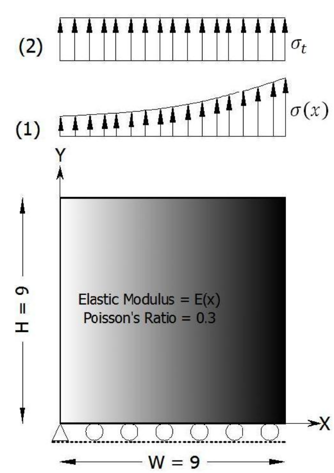
اختلاف کلی بین جوابها در شکل فوق کمتر از دو درصد است. به طور مشابه نتایجی برای حل

مساله در حالت دوم با $E = 10000$ بدست می‌آید. نکته قابل توجه این است که با وجودی که تعداد مجهولات در روش GIGA بسیار کمتر از روش FEA است، ولی جوابها بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند. تعداد مجهولات در روش GIGA برابر با ۹۰ و در روش FEA برابر با ۵۹۴ است که بیش از ۶ برابر می‌باشد.حال مساله را برای سایر حالتها با روش GIGA حل می‌کنیم. با توجه به اینکه در حالتهای سوم تا هفتم، مقدار مدول الاستیسیته بین دو حالت حدی $E = 10000$ و $E = 100000$ فرض شده است، لذا انتظار می‌رود که تغییر شکل قائم تار خنثی تیر برای این حالتها نیز بین حالت های حدی ذکر شده قرار گیرد. نتیجه حل در شکل (۵-۳۴) نشان داده شده است.

۶-۴-۳مثال هشتم: مساله صفحه مربع شکل با مصالح FG

صفحه مربعی با ضخامت ثابت تحت شرایط تنش مسطح که با مصالح FG ساخته شده است را طبق شکل (۵-۳۵) در نظر بگیرید. ضریب پواسون برابر با مقدار $\nu = 0.3$ و تابع تغییرات مدول الاستیسیته مطابق رابطه (۵-۱۳) فرض می‌شود. این تابع بصورت نمایی بوده و از $E_1 = 1$ در وجه سمت چپ تا مقدار $E_2 = 8$ در سمت راست تغییر می‌کند. ابعاد صفحه نیز برابر با $W = H = 9$ با ضخامت واحد فرض می‌شود.

$$E(x) = E^0 e^{\beta x} \qquad (۱۳-۵)$$



شکل ۶-۳۵: صفحه مربعی با مصالح FG

E^0 مقدار مدول الاستیسیته در سمت چپ صفحه مربعی است و پارامتر β با رابطه (۵-۱۴) تعریف می‌شود:

$$\beta = \frac{1}{W}\log\left(\frac{E(W)}{E(0)}\right) \qquad (۱۴-۵)$$

که W عرض صفحه طبق شکل (۵-۳۵) می‌باشد. توجه شود که پارامتر β دارای بعد $[\text{length}]^{-1}$ می‌باشد. برای حالت تغییر مکان ثابت[115] با $\varepsilon_{yy}(x,y)=\varepsilon_0$ توزیع تنش برای مصالح ایزوتروپیک بصورت رابطه (۵-۱۵) خواهد بود.

$$\sigma_{yy}(x) = E^0\varepsilon_0 e^{\beta x} \qquad (۱۵-۵)$$

تنش مربوط به این حالت بطور شماتیک در حالت یک شکل (۵-۳۵) نشان داده شده است. بعنوان حالت دوم یک تنش یکنواخت کششی با شدت σ_t در وجه بالایی صفحه مربعی وارد شده است که حالت دو شکل (۵-۳۵) نشان داده شده است. طبق (Kim and Paulino, 2002) در این حالت خواهیم داشت $\varepsilon_{yy} = Ax + B$ که برای توزیع در نظر گرفته شده برای مصالح FG در این مثال می‌توان توزیع تنش را از رابطه (۵-۱۶) بدست آورد.

$$\sigma_{yy}(x) = E^0 e^{\beta x}(Ax+B) \qquad (۱۶-۵)$$

که ثابت A دارای بعد $[\text{length}]^{-1}$ و ثابت B بدون بعد می‌باشد و مقادیر آنها از معادلات تعادل نیروهای محوری و لنگرهای داخلی (۵-۱۷) حاصل می‌شود.

$$\int_0^W \sigma_{yy}(x)\,dx = \sigma_t W \text{ and} \int_0^W \sigma_{yy}(x)\,x\,dx = \frac{1}{2}\sigma_t W^2. \qquad (۱۷-۵)$$

بنابراین مقادیر A و B برای تنش کششی یکنواخت توزیع تنش در رابطه (۵-۱۶) از روابط (۵-۱۸) و (۵-۱۹) بدست می‌آیند.

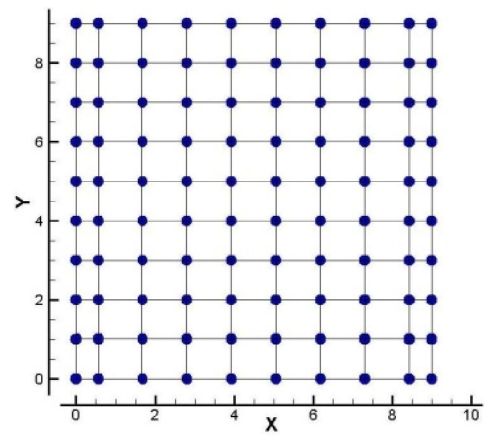
$$A = \frac{\beta N}{2E^0}\left(\frac{W\beta^2 e^{\beta W} - 2\beta e^{\beta W} + W\beta^2 + 2\beta}{e^{\beta W}\beta^2 W^2 - e^{2\beta W} + 2e^{\beta W} - 1}\right) \qquad (۱۸-۵)$$

[115] Fixed Grip

و

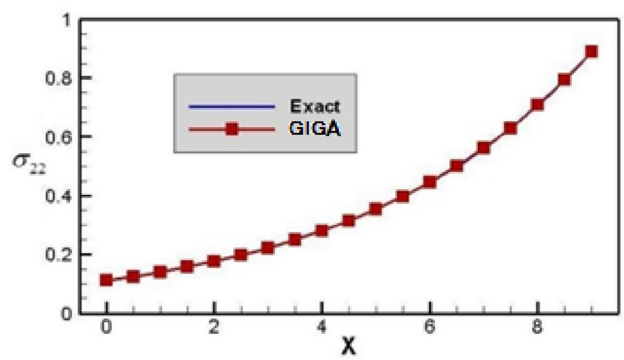
$$B=\frac{\beta N}{2E^{0}}\left(\frac{e^{\beta W}\left(e^{\beta W}\left(-W^{2}\beta^{2}+3\beta W-4\right)+\beta^{2}W^{2}-2\beta W+8\right)-\beta W-4}{\left(e^{\beta W}-1\right)\left(e^{\beta W}\beta^{2}W^{2}-e^{2\beta W}+2e^{\beta W}-1\right)}\right) \qquad (۱۹-۵)$$

اکنون با توجه به داشتن جواب دقیق برای بررسی جوابهای روش GIGA مساله با صد نقطه کنترلی مطابق شکل (۵-۳۶) مدل سازی و تحلیل شده است.

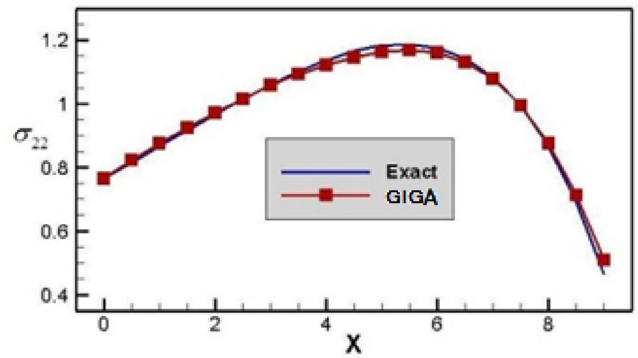


شکل ۶-۳۶: شبکه نقاط کنترلی برای صفحه مربع شکل با مصالح FG

درجه توابع پایه مساوی دو و بردارهای گره مورد استفاده در هر دو جهت به طور مشابه برابر با $u=v=\{0,0,0,0.125,0.250,\ldots,0.875,1,1,1\}$ لحاظ شده است. جواب حاصله بهمراه جواب دقیق برای حالتهای تغییرمکان یکنواخت و تنش یکنواخت به ترتیب در شکلهای (۵-۳۷) و (۵-۳۸) نشان داده شده است.



شکل ۶-۳۷: مقایسه جواب دقیق و جواب GIGA در حالت بارگذاری اول

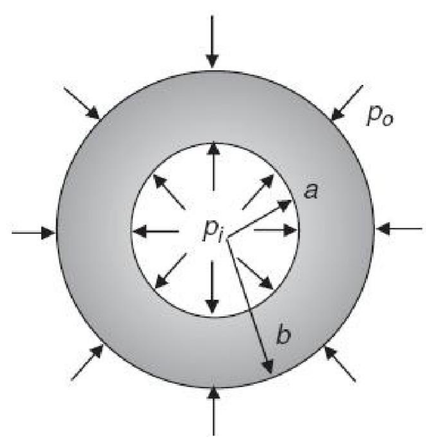


شکل ۶-۳۸: مقایسه جواب دقیق و جواب GIGA در حالت بارگذاری دوم

در حالت اول جوابهای روش IGA بر جواب دقیق منطبق شده و در حالت دوم نیز میانگین مطلق خطا برابر با ۱.۴ درصد محاسبه شده است.

۶-۴-۴ مثال نهم: مساله تقارن محوری با مصالح FG

استوانه ای توخالی که تحت فشار داخلی و خارجی قرار دارد را همانند شکل (۵-۳۹) در نظر بگیرید.



شکل ۶-۳۹: استوانه تحت فشار داخلی و خارجی

فرض کنید که مدول الاستیسیته به صورت تابعی توانی بر حسب شعاع استوانه باشد که با رابطه (۵-۲۰) نشان داده شده است.

$$E(r)=E_0\left(\frac{r}{a}\right)^n \qquad (۵-۲۰)$$

با فرض اینکه ضریب پواسون ثابت فرض شود و فشار داخلی مساوی صفر باشد، $p_i=0$، جواب دقیق مساله با رابطه (۵-۲۱) و (۵-۲۲) نشان داده شده است (Kim and Paulino, 2002).

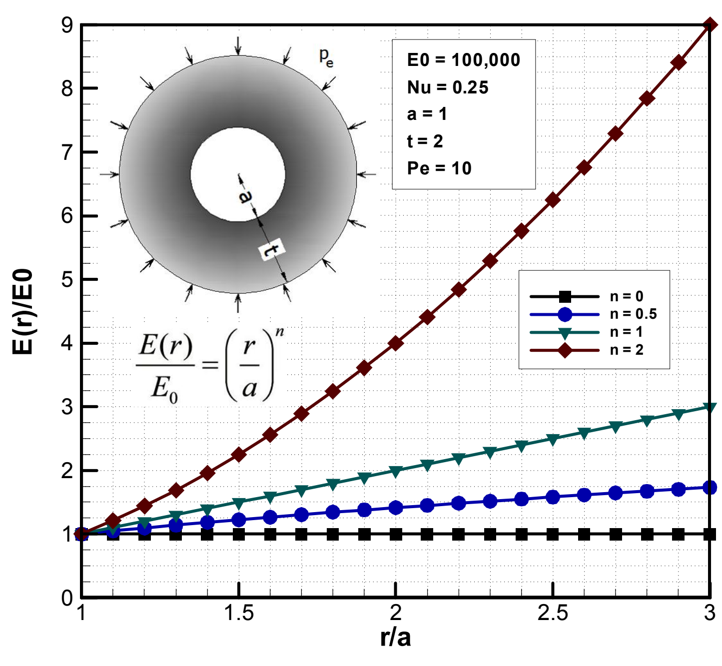
$$\sigma_r=-\frac{p_0 b^{(2+k-n)/2}}{b^k-a^k}\left[r^{(-2+k+n)/2}-a^k r^{(-2-k+n)/2}\right] \qquad (۵-۲۱)$$

$$\sigma_\theta=-\frac{p_0 b^{(2+k-n)/2}}{b^k-a^k}\left[\frac{2+k\upsilon-n\upsilon}{k-n+2\upsilon}r^{(-2+k+n)/2}-\frac{2-k\upsilon-n\upsilon}{k+n-2\upsilon}a^k r^{(-2-k+n)/2}\right] \qquad (۵-۲۲)$$

که در این روابط مقدار k از رابطه (۵-۲۳) حاصل می‌شود.

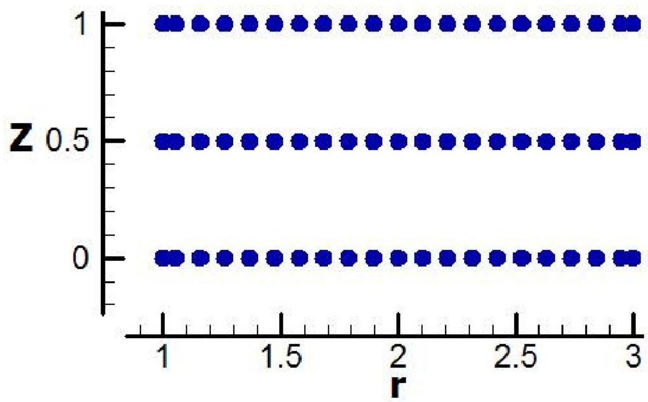
$$k=\sqrt{n^2+4-4n\upsilon} \qquad (۵-۲۳)$$

این مساله برای یک حالت خاص با فرض $a=1.0$ ، $b=3.0$ ، $E_0=100,000$ و $\upsilon=0.25$ و طول واحد استوانه و همچنین چهار مقدار مختلف $n=0$ ، $n=0.5$ ، $n=1$ و $n=2$ طبق شکل (۵-۴۰) حل شده است.



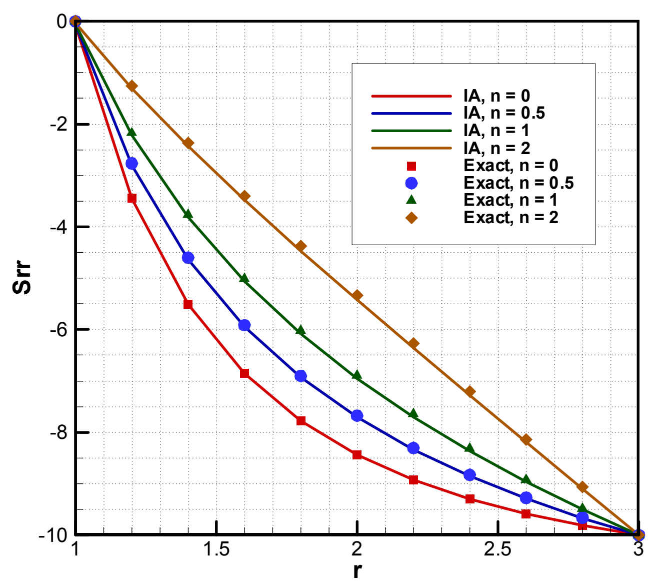
شکل ۶-۴۰: تعریف مساله استوانه با مصالح FG

شبکه نقاط کنترلی بکار رفته در حل این مساله با روش GIGA در شکل (۵-۴۱) نشان داده شده است که تعداد آنها ۶۳ می‌باشد. برای حل مساله از بردار گره یکنواخت و توابع پایه با درجه دو استفاده شده است.



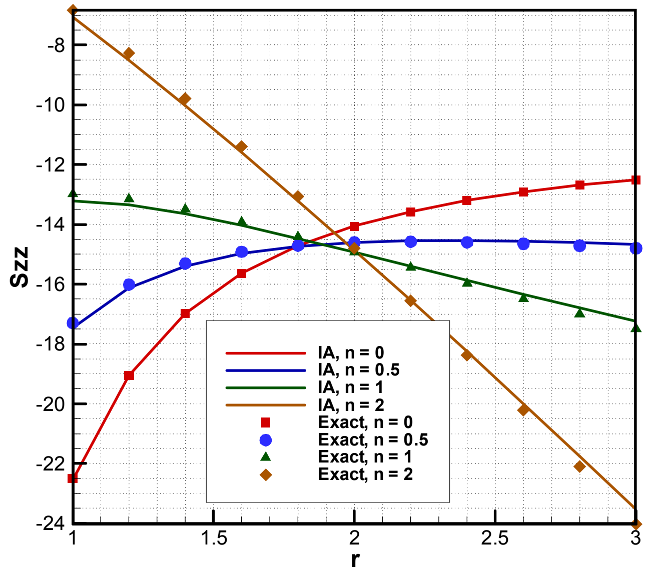
شکل ۶-۴۱: شبکه نقاط کنترلی در مساله استوانه با مصالح FG

نتیجه مقایسه حل دقیق با حل روش GIGA در شکل (۵-۴۲) و (۵-۴۳) قابل ملاحظه است.



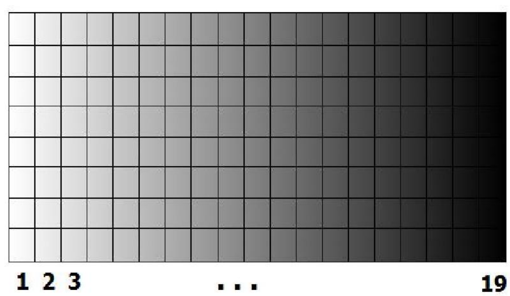
شکل ۶-۴۲: مقایسه جواب دقیق و جواب روش GIGA برای S_{rr}

و



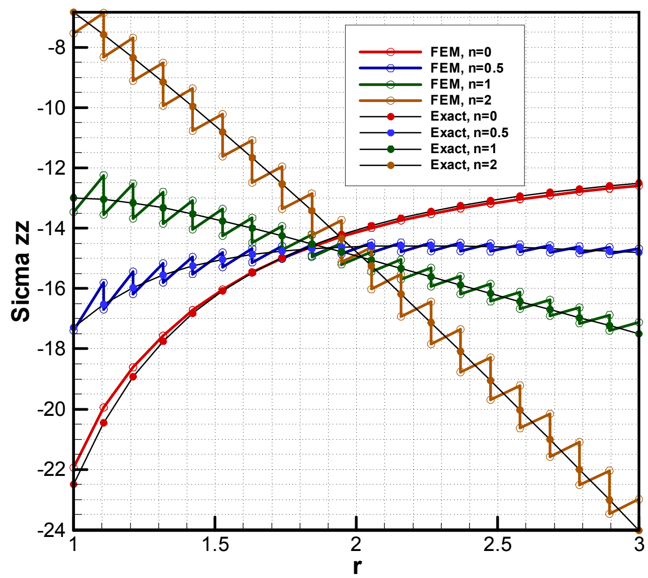
شکل ۶-۴۳: مقایسه جواب دقیق و جواب روش GIGA برای S_{zz}

اکنون برای مقایسه با روش FEA مساله با المانهای چهار گرهی و هشت گرهی مجددا با نرم افزار ANSYS حل شده است. همانگونه که در شکل (۵-۴۴) ملاحظه می‌شود، تعداد المانها در ضخامت استوانه ۱۹ عدد در نظر گرفته شده است که جمعا ۱۵۲ المان خواهد شد.

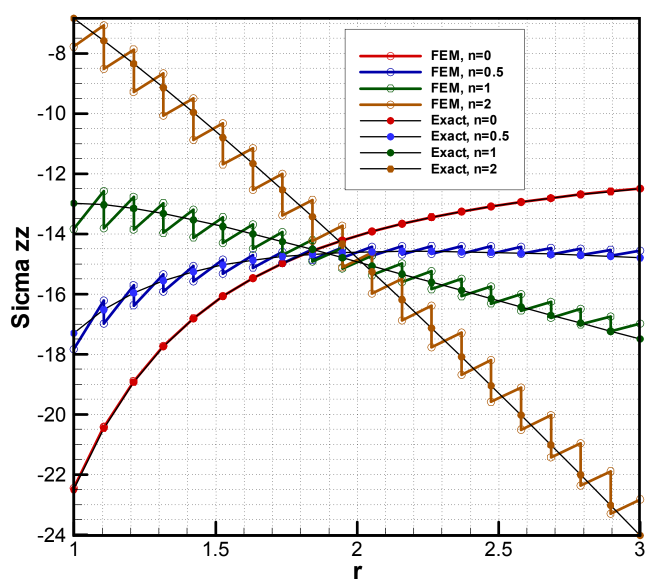


شکل ۶-۴۴: مش بندی جهت حل FEA

نتیجه حل برای S_{zz} و المانهای چهار و هشت گرهی به ترتیب در شکلهای (۵-۴۵) و (۵-۴۶) آمده است که با مرجع (Kim and Paulino, 2002) همخوانی دارد.



شکل ۶-۴۵: مقایسه جواب دقیق و جواب FEA با المان چهارگرهی برای S_{zz}



شکل ۶-۴۶: مقایسه جواب دقیق و جواب FEA با المان هشت‌گرهی برای S_{zz}

در ادامه دو مساله دیگر طرح و حل شده است. حل دقیق این مسائل موجود نبوده و تنها راه ممکن استفاده از روشهای عددی برای یافتن جواب این مسائل می‌باشد.

۶-۴-۵ مثال دهم: مساله تقارن محوری با مصالح FG و تغییرات درجه سه

با توجه به اینکه حل دقیق مسایل تقارن محوری FG در حالات محدودی از توزیع مدول

الاستیسیته بدست آمده است در این بخش از پتانسیل روش GIGA استفاده کرده و یک مساله جدید با توزیع چندجمله ای درجه سه را طرح و به عنوان نمونه با روش ایزوژئومتریک جامع حل نموده‌ایم. چون حل دقیق این مساله در دسترس نیست لذا نتایج بدست آمده می‌تواند مورد بحث سایر محققین نیز قرار گیرد. تمامی فرضیات این مثال همانند مثال قبل است و تنها تفاوت موجود در تابع توزیع مدول الاستیسیته می‌باشد. مدول الاستیسیته در این مساله یک تابع چند جمله ای به صورت رابطه (۵-۲۴) فرض شده است.

$$E(r) = 10^5 \left(0.5r^3 - 2.4375r^2 + 3.75r - 0.8125\right),\ 1 \le r \le 3 \qquad (۵\text{-}۲۴)$$

در واقع در این چند جمله ای درجه سه داریم $E_{r=1} = 100,000$ و $E_{r=3} = 200,000$ که به ترتیب بیانگر مقادیر مدول الاستیسیته در جدار داخلی و خارجی استوانه توخالی می‌باشند. با توجه به اینکه برای حل مساله باید در ابتدا این رابطه براساس پارامترهای اسپلاین نوشته شود لذا با استفاده از تکنیک معکوس نربز این رابطه را تبدیل می‌نماییم. با فرض مقدار $n = 20$ و $p = 2$ بردار گره و مختصات نقاط کنترلی در جداول یک و دو ارایه شده اند. در ستون اول جدول (۵-۱۴) شماره نقطه کنترلی، ستون دوم شامل مختصه شعاعی و ستون سوم بیانگر مختصات مدول الاستیسیته می‌باشد.

جدول ۶-۱۴: مختصات نقاط کنترلی با استفاده از تکنیک معکوس نربز

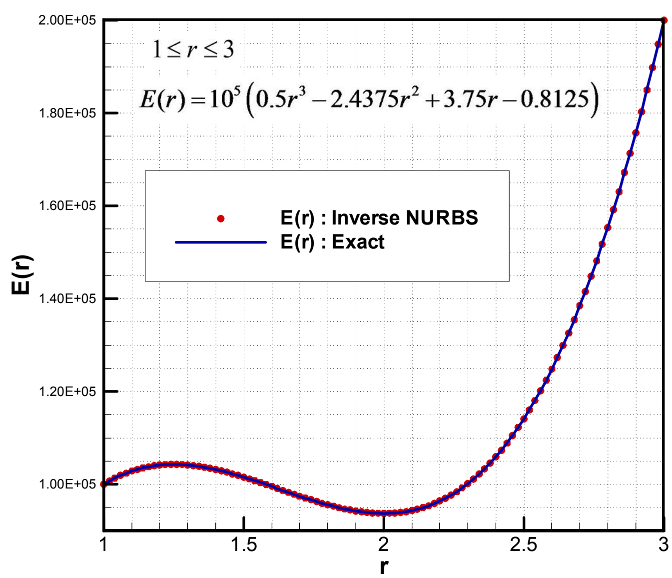
n_i	r	z	n_i	r	z
۱	۱.۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰.۰۰۰۰۰	۱۲	۲.۱۰۵۲۶	۹۴۲۳۲.۷۹۶۰۱
۲	۱.۰۵۲۶۳	۱۰۱۹۵۸.۳۳۹۷۳	۱۳	۲.۲۱۰۵۳	۹۶۴۶۷.۸۰۰۸۱
۳	۱.۱۵۷۸۹	۱۰۳۹۷۲.۸۶۸۵۳	۱۴	۲.۳۱۵۷۹	۱۰۰۶۴۹.۰۵۱۴۷
۴	۱.۲۶۳۱۶	۱۰۴۴۳۵.۱۰۰۹۱	۱۵	۲.۴۲۱۰۵	۱۰۷۱۲۶.۴۰۲۲۰
۵	۱.۳۶۸۴۲	۱۰۳۶۹۴.۸۹۱۰۹	۱۶	۲.۵۲۶۳۲	۱۱۶۲۴۹.۷۰۷۲۴
۶	۱.۴۷۳۶۸	۱۰۲۱۰۲.۰۹۳۳۱	۱۷	۲.۶۳۱۵۸	۱۲۸۳۶۸.۸۲۰۸۲
۷	۱.۵۷۸۹۵	۱۰۰۰۰۶.۵۶۱۷۹	۱۸	۲.۷۳۶۸۴	۱۴۳۸۳۳.۵۹۷۱۵
۸	۱.۶۸۴۲۱	۹۷۷۵۸.۱۵۰۷۵	۱۹	۲.۸۴۲۱۱	۱۶۲۹۹۳.۸۹۰۴۷
۹	۱.۷۸۹۴۷	۹۵۷۰۶.۷۱۴۴۲	۲۰	۲.۹۴۷۳۷	۱۸۶۱۹۹.۵۵۵۰۱
۱۰	۱.۸۹۴۷۴	۹۴۲۰۲.۱۰۷۰۴	۲۱	۳.۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰.۰۰۰۰۰
۱۱	۲.۰۰۰۰۰	۹۳۵۹۴.۱۸۲۸۳			

جدول (۵-۱۵) نیز شامل بردار گره یکنواخت حاصله از حل معکوس نربز با توابع پایه درجه دو ذکر شده است.

جدول ۶-۱۵: بردار گره یکنواخت برای تابع پایه درجه دو

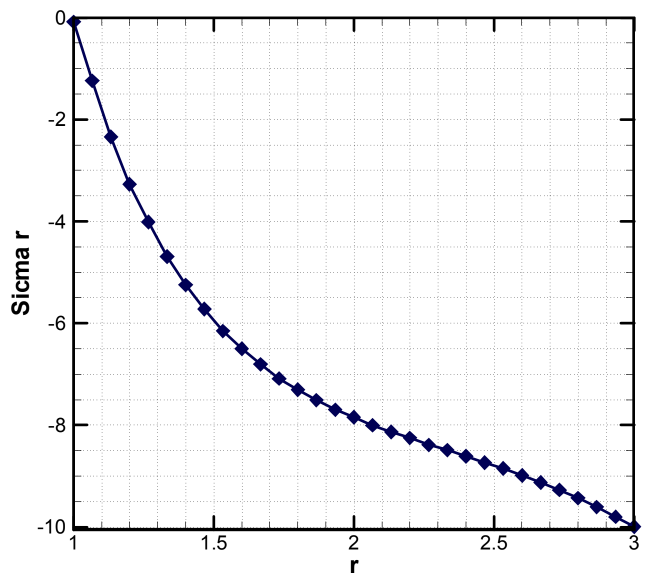
m_i	Knot value	m_i	Knot value
۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۱۲	۰.۵۲۶۳۱۵۸
۱	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۱۳	۰.۵۷۸۹۴۷۴
۲	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۱۴	۰.۶۳۱۵۷۸۹
۳	۰.۰۵۲۶۳۱۶	۱۵	۰.۶۸۴۲۱۰۵
۴	۰.۱۰۵۲۶۳۲	۱۶	۰.۷۳۶۸۴۲۱
۵	۰.۱۵۷۸۹۴۷	۱۷	۰.۷۸۹۴۷۳۷
۶	۰.۲۱۰۵۲۶۳	۱۸	۰.۸۴۲۱۰۵۳
۷	۰.۲۶۳۱۵۷۹	۱۹	۰.۸۹۴۷۳۶۸
۸	۰.۳۱۵۷۸۹۵	۲۰	۰.۹۴۷۳۶۸۴
۹	۰.۳۶۸۴۲۱۱	۲۱	۱.۰۰۰۰۰۰۰
۱۰	۰.۴۲۱۰۵۲۶	۲۲	۱.۰۰۰۰۰۰۰
۱۱	۰.۴۷۳۶۸۴۲	۲۳	۱.۰۰۰۰۰۰۰

مقدار دقیق مدول الاستیسیته طبق رابطه دقیق با مقدار حاصل شده از تکنیک معکوس نربز در شکل (۵-۴۷) ترسیم شده اند که ماکزیمم خطا بین این دو برابر با ۰.۰۱ درصد است که در حل عددی قابل اغماض است.



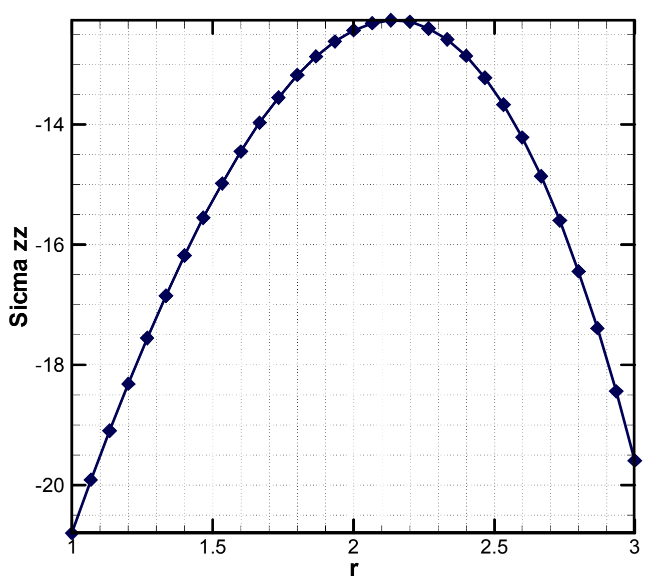
شکل ۶-۴۷: تغییرات مدول الاستیسیته با تکنیک معکوس نربز در راستای شعاع

نهایتا مساله با روش GIGA با برنامه $TIGAP$ مدلسازی و تحلیل شده است که نتیجه حل در شکلهای (۵-۴۸) تا (۵-۵۱) به ترتیب برای تنشهای S_{rr}، S_{zz}، $S_{\theta\theta}$ و تغییر شکل محوری u_r نشان داده شده است.



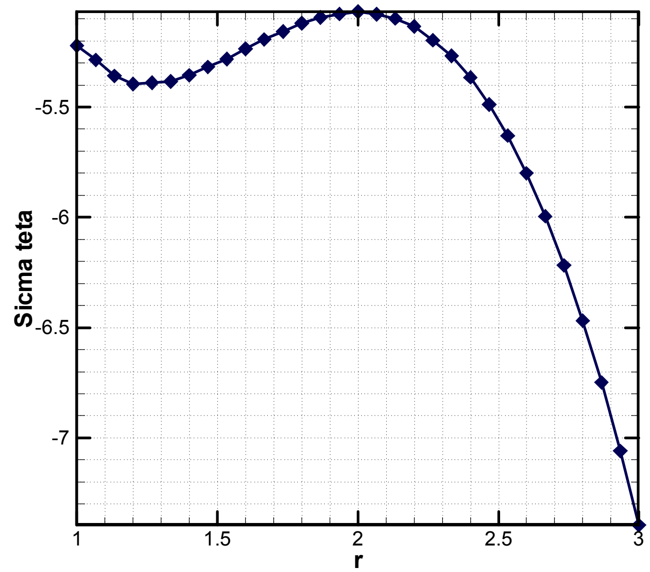
شکل ۶-۴۸: جواب روش GIGA برای S_{rr} یک استوانه توخالی

و



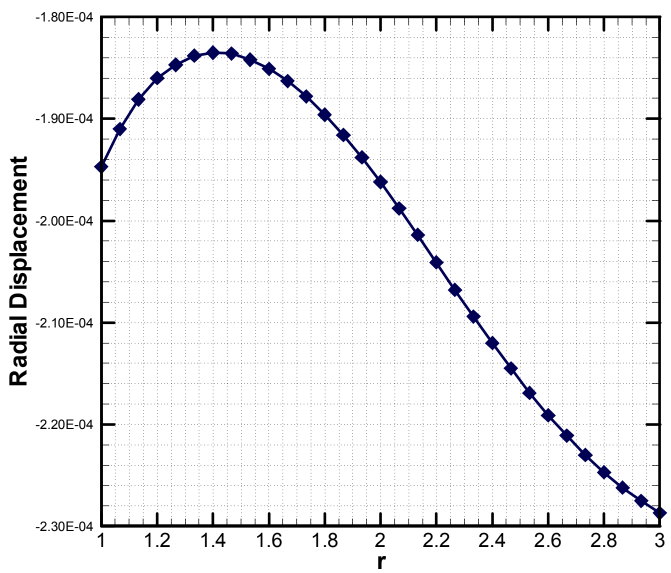
شکل ۶-۴۹: جواب روش GIGA برای S_{zz} یک استوانه توخالی

و



شکل ۶-۵۰: جواب روش GIGA برای $S_{\theta\theta}$

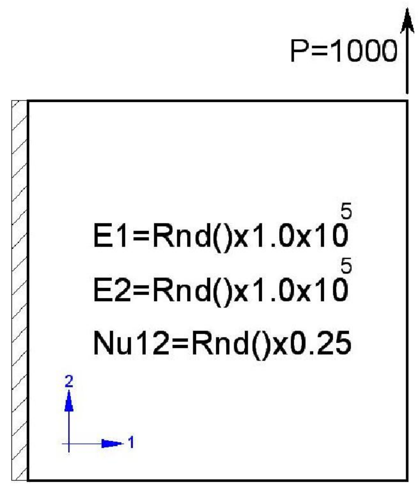
و



شکل ۶-۵۱: جواب روش GIGA برای تغییرشکل شعاعی u_r

۶-۴-۶ مثال یازدهم: مساله صفحه طره مربعی با مشخصات ارتوتروپیک تصادفی

برای نشان دادن توانمندی واقعی روش GIGA و عملکرد برنامه *TIGAP* در اینجا مثالی با مصالح ارتوتروپیک FG طرح و مورد بررسی گرفته است. با توجه به نحوه تعریف مساله، حل دقیقی برای آن وجود نداشته و بجز روشهای عددی راه حل دیگری ندارد.

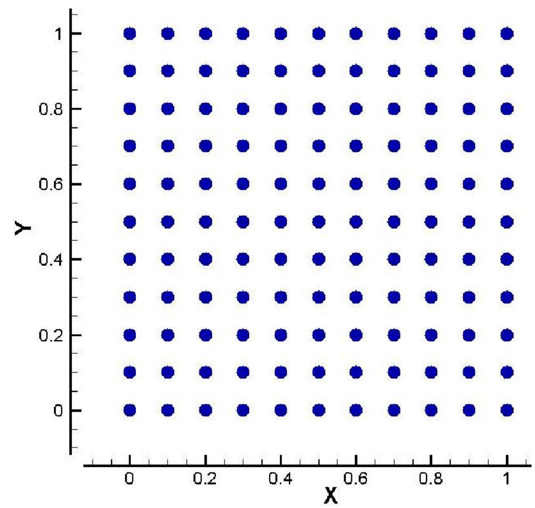


شکل ۶-۵۲: مشخصات مثال جامع ارتوتروپیک FGM

صفحه‌ای مربعی با ضخامت واحد که در یک طرف گیردار بوده و در انتهای آزاد خود مطابق شکل (۵-۵۲) تحت اثر بار متمرکز $p=1000$ قرار گرفته است را در نظر بگیرید. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون برای نشان دادن جامعیت روش به طور تصادفی طبق روابط نشان داده شده در شکل (۵-۵۲) تولید شده اند که $Rnd()$ تابع مولد اعداد تصادفی بین صفر تا یک می‌باشد. خاطر نشان می‌سازد که تابع تصادفی مذکور در حقیقت مختصات تصادفی برای نقاط کنترلی تولید می‌کند تا این نقاط کنترلی رویه‌ای تصادفی برای تولید مشخصات مکانیکی مساله ایجاد کنند. برای بررسی بیشتر کیفیت روش ایزوژئومتریک جامع توسط سایر محققین و کنترل جوابهای حاصل از کد تهیه شده، مشخصات نقاط کنترلی تصادفی در یکی از حالات تولید رویه های مدول الاستیسیته و ضریب پواسون ، در پیوست (ب) این رساله ذکر شده است.

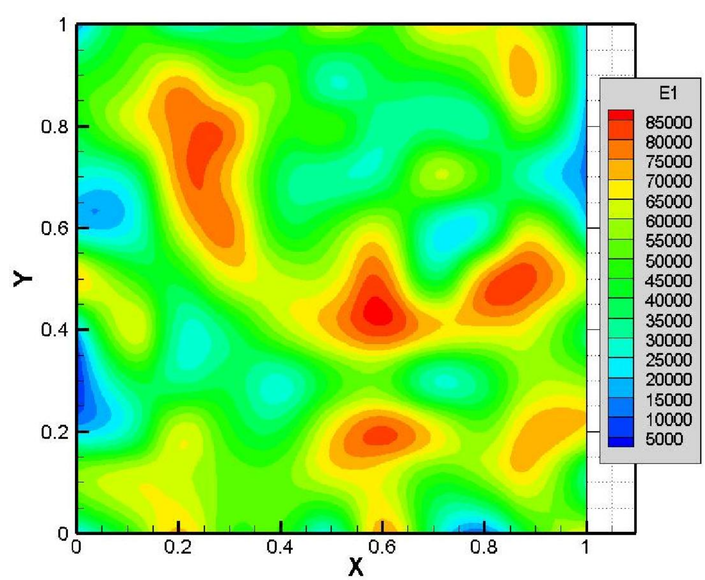
در حل این مثال از یک شبکه با ۱۲۱ نقطه کنترلی مطابق شکل (۵-۵۳) استفاده شده است. بردار گره یکنواخت بوده و توابع پایه درجه دو می‌باشند. در انتگرالگیری عددی از نه نقطه گوسی

استفاده شده است.

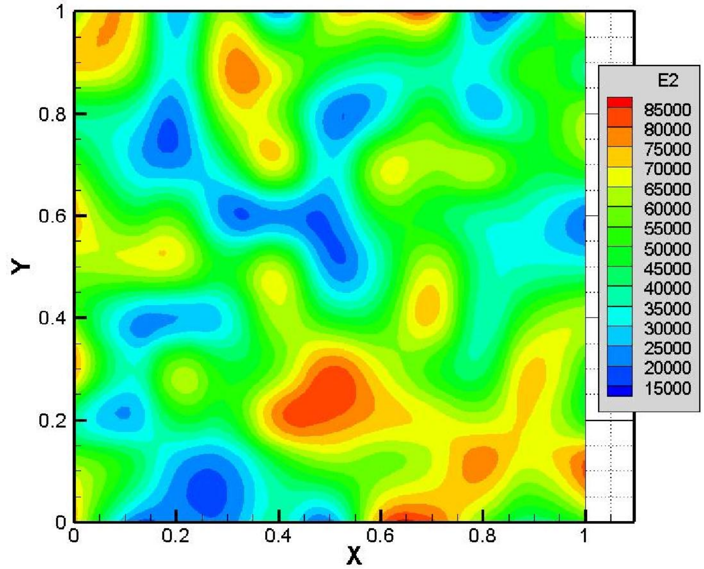


شکل ۶-۵۳: شبکه نقاط کنترلی مثال جامع ارتوتروپیک FGM

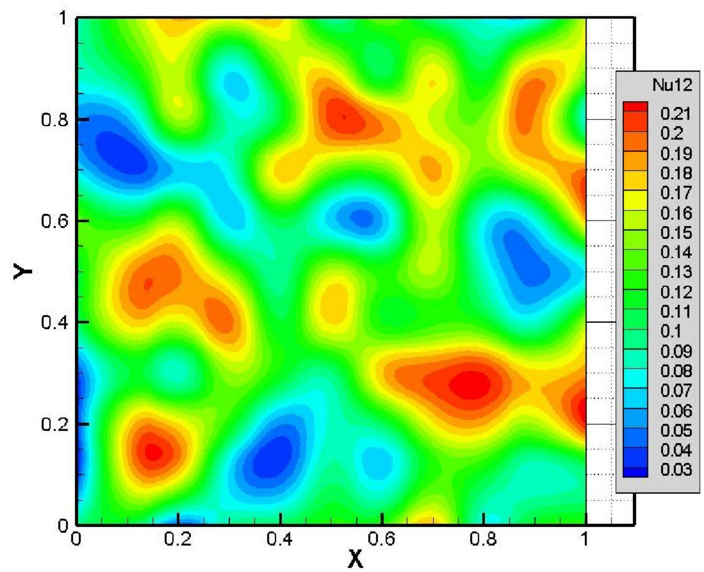
مقدار مدول الاستیسیته در هر یک از جهات ۱ و ۲ و همچنین توزیع ضریب پواسون در دامنه مساله و مدول برشی که همگی تابعی تصادفی هستند به ترتیب در شکلهای (۵-۵۴) تا (۵-۵۷) نشان داده شده اند.



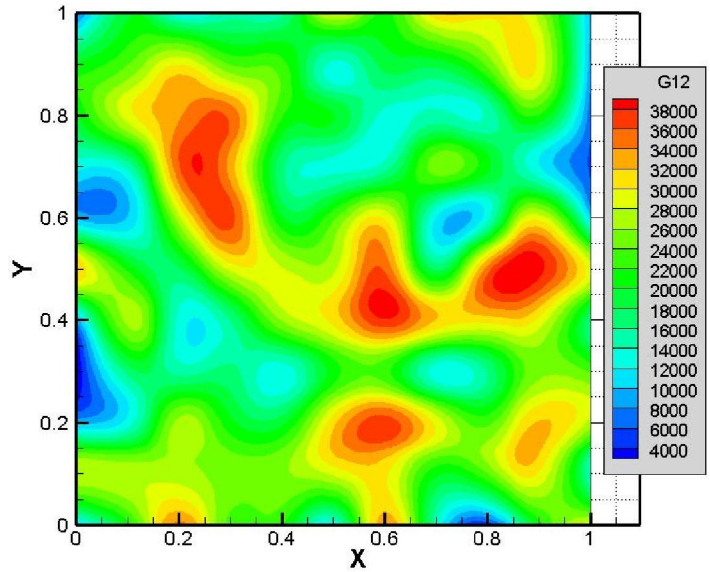
شکل ۶-۵۴: توزیع تصادفی مدول الاستیسیته $E1$



شکل ۶-۵۵: توزیع تصادفی مدول الاستیسیته $E2$

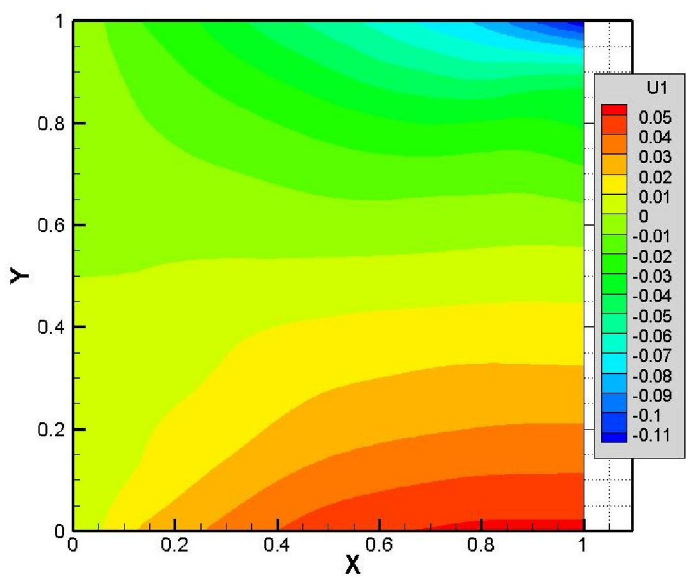


شکل ۶-۵۶: توزیع تصادفی ضریب پواسون υ_{12}

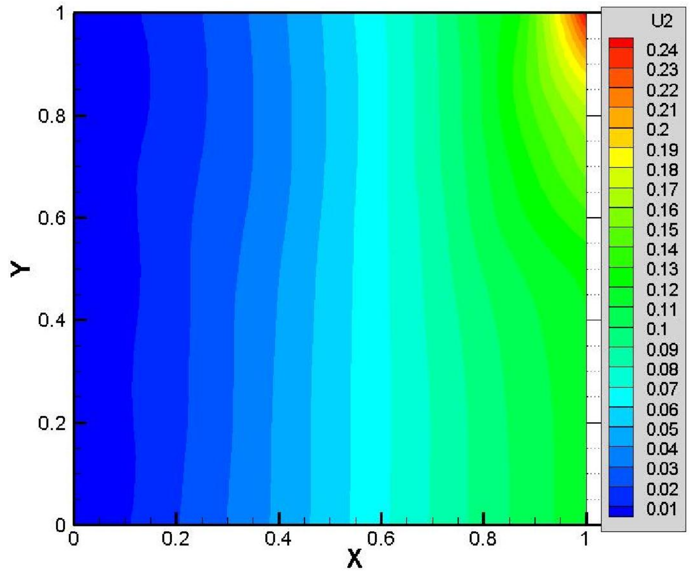


شکل ۶-۵۷: توزیع تصادفی مدول برشی $G12$

پس از حل این مثال با روش GIGA نتایج تحلیل تغییر مکانهای افقی و قائم به شرح شکلهای (۵-۵۸) و (۵-۵۹) بدست آمده است.



شکل ۶-۵۸: تغییر مکان افقی u_1



شکل ۶-۵۹: تغییر مکان افقی u_2

در این فصل مثالهایی در خصوص معادلات دیفرانسیل و تحلیل سازه حل شد و با نتایج دیگر روشهای عددی و یا جوابهای دقیق مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفت.

فصل ششم: حل مسائل بهینه سازی

۷-۱ مقدمه

بهینه سازی علمی است که در شاخه های مختلف علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مباحث سازه نیز می‌توان آن را در چند بخش مورد بررسی قرار داد. مهمترین شاخه‌هایی که می‌توان از آنها نام برد عبارتند از بهینه سازی توپولوژی، بهینه سازی شکل و بهینه سازی ابعاد سازه یا عناصر تشکیل دهنده آن. همچنین می‌توان از بهینه سازی توزیع مصالح نیز به عنوان یکی دیگر از کاربردهای علم بهینه‌سازی اشاره کرد که در این رساله مسایلی در این خصوص حل شده و توضیحات بیشتر در هنگام حل مسائل ارائه شده است.

در این فصل به کاربرد روش GIGA در حل مسائل بهینه سازی سازه ها پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه روش GIGA نیازی به شبکه بندی مجدد دامنه مساله نمی‌باشد، لذا مدت زمان لازم برای بهینه سازی کاهش چشمگیری خواهد یافت. ازطرفی به علت ایجاد اشکال هندسی با مرزهای منحنی شکل در روش ایزوژئومتریک، دیگر نیازی به انجام عملیات پس پردازش برروی شکل نهایی نبوده و به شکلهای اجرایی‌تری دست خواهیم یافت.

۷-۲ بهینه سازی شکل سازه ها

هدف از بهینه سازی شکل سازه ها، یافتن مرزهای بهینه سازه به گونه‌ای است که سازه دارای عملکردی مناسب بازای یک پارامتر مشخص باشد. اجزای اصلی یک مساله بهینه‌سازی عبارتند از تابع هدف و قیود حاکم بر مساله. سپس با استفاده از یکی از روشهای بهینه‌سازی می‌توان اقدام به حل مساله نمود. روشهای موجود در بهینه‌سازی به دسته های مختلفی تقسیم می‌شوند که از جمله می‌توان به روشهای برنامه‌ریزی ریاضی، روشهای تکاملی و روشهای ابتکاری اشاره کرد. هر کدام از این روشها به شاخه های متنوعی تقسیم بندی می‌شوند. در حل مسائل بهینه‌سازی در این رساله از

روشهای ریاضی استفاده شده است. بدین منظور از سابروتینهای آماده DOT[116] استفاده شده که از اضافه کردن آن به برنامه $TIGAP$، قادر به حل مسائل بهینه سازی خواهیم بود.

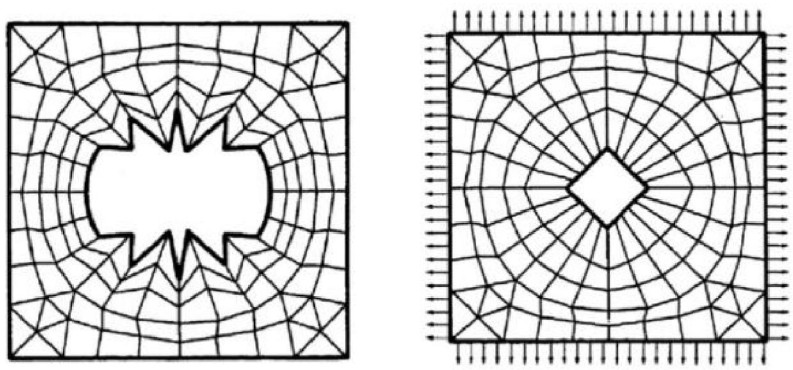
برنامه DOT یک سابروتین به زبان فرترن است که با کمک روشهای برنامه ریزی ریاضی، برای یافتن مقدار مینیمم یا ماکزیمم یک تابع به کار می‌رود. مقادیر مینیمم یا ماکزیمم یک تابع بسته به شرایط تابع هدف همان جواب بهینه مساله تلقی می‌شود. مساله بهینه‌سازی می‌تواند مقید و یا نامقید باشد که برنامه DOT توانایی حل هر دو نوع را داراست. برای آشنایی بیشتر با این برنامه و نحوه کار با آن، می‌توان به (DOT, 1999) رجوع کرد.

در زمینه بهینه‌سازی سازه‌ها تا کنون مقالات زیادی به چاپ رسیده است. برای مرور کلی این روش می‌توان به مرجع (Haftka and Grandhi, 1986) مراجعه نمود. اولین مقالات نیز توسط زینکویچ در سالهای ۱۹۷۳ و ۱۹۷۵ نوشته شد(Zienkiewicz and Campbell, 1973, Francavilla et al., 1975) . با توجه به کاربرد روز افزون علم بهینه سازی در صنایع مختلف، می‌توان مراجع متعددی را مورد مطالعه و بررسی قرارداد. در این خصوص برخی کتابها (Christensen and Klarbring, 2009, Bhatti, 2000, Rao, 1996, Spillers and MacBain, 2009, Dorigo and Stutzle, 2004, Dorigo et al., 2002, Hasle et al., 2007b, Huang and Xie, 2010, Bendsoe and Sigmund, 2003, Hassani and Hinton, 1999, Bendsoe, 1995, Hinton et al., 2003) نیز جهت مطالعه توصیه می‌شود.

در مسایل بهینه‌سازی شکل سازه‌ها، چگونگی تعریف و انتخاب متغیرهای طراحی تاثیر مستقیم بر کیفیت جواب نهایی خواهند داشت. در اولین کارهایی که در این خصوص صورت گرفت، مختصات گره‌های المانهای محدود که بر روی مرزهای سازه قرارداشتند به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه‌سازی درنظر گرفته شدند. با وجودی که نتایج اولیه برای این روش مناسب بود ولی به سرعت اشکالات آن پدیدار شد. دو تا از مهمترین مشکلات این روش عبارت بودند از تعداد زیاد متغیرهای

[116] Design Optimization Tool

طراحی و مرزهای بهینه شده با زبری شدید. در واقع برای مسائلی که دارای تعداد المانهای بیشتر و یا مرزهای پیچیده تری بودند این روش به سرعت کارایی خود را از دست می‌داد و یا اینکه حداقل به الگوریتمهای پیشرفته تر و کامپیوترهای قویتری برای حل مسایل نیاز بود. از طرف دیگر همانگونه که در شکل‌های (۶-۱ الف و ب) زیر ملاحظه می‌شود، مرزهای شکل بهینه یک حفره در یک صفحه تحت بارگذاری به صورت زیگزاک مانند و بسیار خشن بدست می‌آید و نیاز به پردازش ثانویه برای تصحیح مرزهای حاصل از فرآیند بهینه سازی خواهد بود.



(ب) (الف)

۷-۱: ایجاد پدیده زیگزاگی در مرزهای بهینه سازه

برای رفع این مشکل و با توجه به پیشرفتهای علم هندسه، محققین روشهای جدیدتری را برگزیدند. در روش جدید مرزهای سازه با استفاده از اسپلاینها مدلسازی می‌شوند. از مزایای این روش می‌توان به کاهش تعداد متغیرهای طراحی و تولید مرزهای یکنواخت برای شکل بهینه نام برد. البته با توجه به اینکه تحلیل مساله با استفاده از روش FEA صورت می‌گیرد، مشکل تولید شبکه جدید در هر گام از فرآیند بهینه سازی شکل سازه کماکان باقی خواهد بود و در نتیجه زمان زیادی از حل مساله به این بخش اختصاص خواهد یافت (ظریف مقدم، ۱۳۸۳).

بعد از معرفی روش IGA و با توجه به اینکه مفهوم شبکه در آن نسبت به روش FEA دارای یک تفاوت بنیادین می‌باشد، مشکل شبکه بندی مجدد در هر گام از فرآیند بهینه سازی به طور

موثری برطرف می‌شود. در واقع در روش IGA در حین انجام عملیات بهینه سازی دیگر نیازی به تولید اطلاعات جدید برای حل مساله نبوده و علت آن هم ثابت بودن مشخصات توابع پایه و بردارهای گره در حین حل می‌باشد. لذا نقاط کنترلی که به عنوان متغیرهای بهینه سازی در روش IGA تلقی می‌شوند هر بار شکلی جدید بدون نیاز به محاسبات مجدد بردار گره و توابع پایه را حاصل می‌کنند. رفع این ضعف سبب می‌شود تا روش IGA به عنوان رقیبی قدرتمند برای حل مسایل بهینه سازی در برابر روش سنتی FEA قرار گیرد. با توجه به یکنواختی مرزهای سازه پس از اتمام فرآیند بهینه سازی، در روش IGA نیازی به پس پردازش و تولید و یا اصلاح مرزهای بهینه شده نخواهد بود. تاکنون نیز در زمینه بهینه سازی با استفاده از روش تحلیل IGA مقالاتی چاپ شده است که می‌توان به مراجع (Nagy et al., 2010, Seo et al., 2010b, Seo et al., 2010a, Wall et al., 2008, Li and Qian, 2011, Cho and Ha, 2008, Ziani et al., 2010, Hassani et al., 2011a, Hassani et al., 2011b, Hassani et al., 2009a) رجوع نمود.

۳-۷ تعریف مساله بهینه سازی

همانگونه که قبلا اشاره شد، در مساله بهینه سازی بایستی ابتدا تابعی را با عنوان تابع هدف مشخص و سپس با یک الگوریتم بهینه سازی و با توجه به قیدهای حاکم بر مساله اقدام به حل آن نمود. در بهینه سازی شکل توابع متنوعی را می‌توان به عنوان تابع هدف تعریف نمود. از جمله بهینه‌سازی حجم مصالح و یا وزن مصالح تشکیل دهنده سازه یکی از متداولترین توابع هدفی است که در مسائل بهینه‌سازی شکل مد نظر قرار می‌گیرد. از طرف دیگر می‌توان تنشهای حاصله در سازه، تغییر مکانها و یا فرکانس سازه را بعنوان قیود یک مساله بهینه‌سازی تعریف نمود. در صورتی که یک مساله بهینه‌سازی قید داشته باشد یا نداشته باشد، مساله بهینه‌سازی را باعنوان مقید یا نامقید نامگذاری می‌کنند. البته در بیشتر مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها، مسائل بصورت مقید در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به این توضیحات یک مساله بهینه سازی را می‌توان به شکل زیر نشان داد.

$$\begin{aligned} &\underset{\Omega\subseteq D}{Min} \quad && F(\mathbf{s}) \\ &subject\,to: && h_j(\mathbf{s})=0, \quad j=1,2,...,n \qquad (۶۶-۶) \\ & && g_k(\mathbf{s})=0, \quad k=1,2,...,m \end{aligned}$$

که در این رابطه $D\subseteq\mathbb{R}^3$ شامل مجموعه جوابهای بهینه قابل قبولی است که می‌توانند قیود حاکم بر مساله را اقناع کنند. قیود h و g نیز به ترتیب قیود مساوی و قیود نامساوی مساله بهینه سازی و $F(\mathbf{s})$ نیز تابع هدف حاکم بر مساله است که در اینجا وزن یا حجم مصالح تشکیل دهنده سازه می‌باشد. همانگونه که قبلا نیز بیان شد برای حل این مساله از سابروتینهای برنامه DOT استفاده می‌شود. این برنامه قادر به حل مسایل با روشهای ریاضی متعددی می‌باشد که در اینجا ما از روش SQP [۱۱۷] استفاده کرده‌ایم.

۷-۴ کاربرد روش تحلیل ایزوژئومتریک در بهینه سازی سازه‌ها

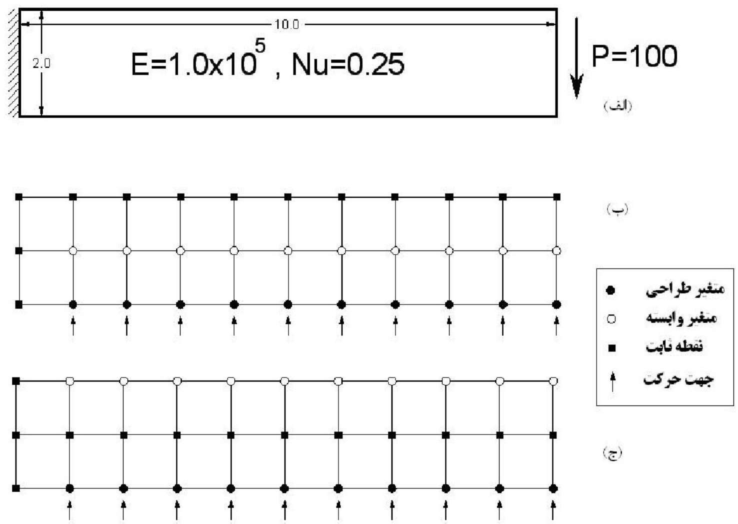
در بهینه سازی شکل سازه ها بین روشهای IGA و GIGA تفاوتی چندانی وجود ندارد. ولی اگر هدف بهینه سازی توپولوژی و یا بهینه سازی چگونگی توزیع مصالح در یک مساله FGM باشد، با توجه به مطالبی که قبلا گفته شد، روش GIGA برتری زیادی در این خصوص خواهد داشت. در ادامه تعدادی از مسایل بهینه سازی سازه را با استفاده از برنامه $TIGAP$ حل و نتایج مربوطه ارایه شده است.

۷-۴-۱ مثال اول: بهینه سازی شکل تیر طره

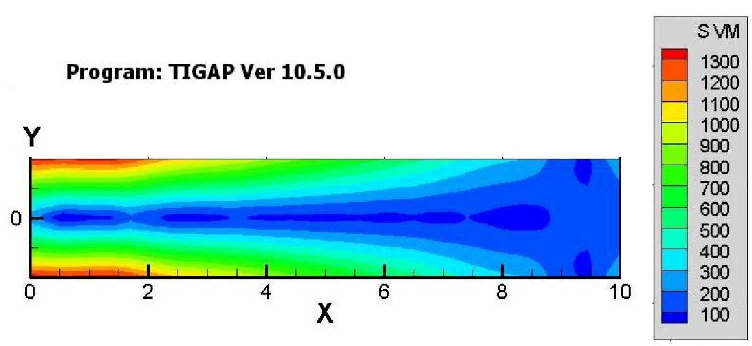
در این مثال، هدف از بهینه سازی عبارتست از مینیمم کردن مقدار مصالح مورد نیاز برای ساخت یک تیر طره در حالت تنش مسطح. با توجه به اینکه ضخامت تیر و چگالی مصالح تشکیل دهنده آن ثابت است لذا مینیم کردن سطح تشکیل دهنده تیر به منزله کمینه سازی مقدار مصالح تشکیل دهنده خواهد بود.

[117] Sequential Quadratic Programimg

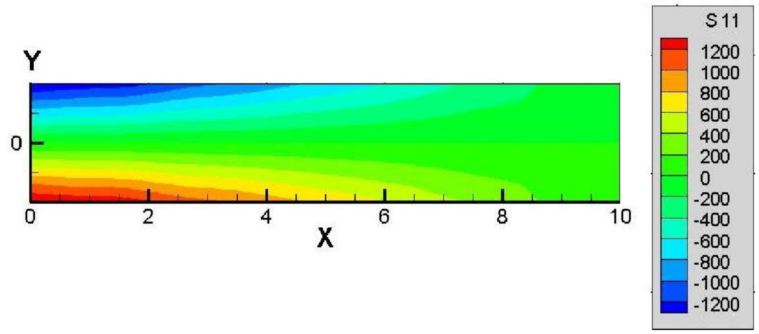
این تیر در انتهای آزاد خود دارای باری به بزرگی $P=100$ بوده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون این تیر به ترتیب برابر با $E=1.0\times10^5$ و $\nu=0.25$ در نظر گرفته شده است. همانگونه که در شکل (۶-۲) مشخص است نقاط کنترلی بصورت دایره توپر متغیرهای طراحی مستقل در مساله بهینه سازی می‌باشند. دایره های توخالی متغیرهای طراحی وابسته و مربع توپر نقاط کنترلی هستند که مختصات آنها در حین انجام فرآیند بهینه سازی تغییری نخواهد کرد. همانگونه که در شکلهای (۶-۲ ب و ج) ملاحظه می‌شود یک مرتبه نقاط کنترلی واقع بر وجه بالایی و یک مرتبه نقاط کنترلی واقع بر تار خنثی به عنوان نقاط ثابت در نظر گرفته شده اند.



شکل ۷-۲: مشخصات تیر طره جهت بهینه سازی شکل

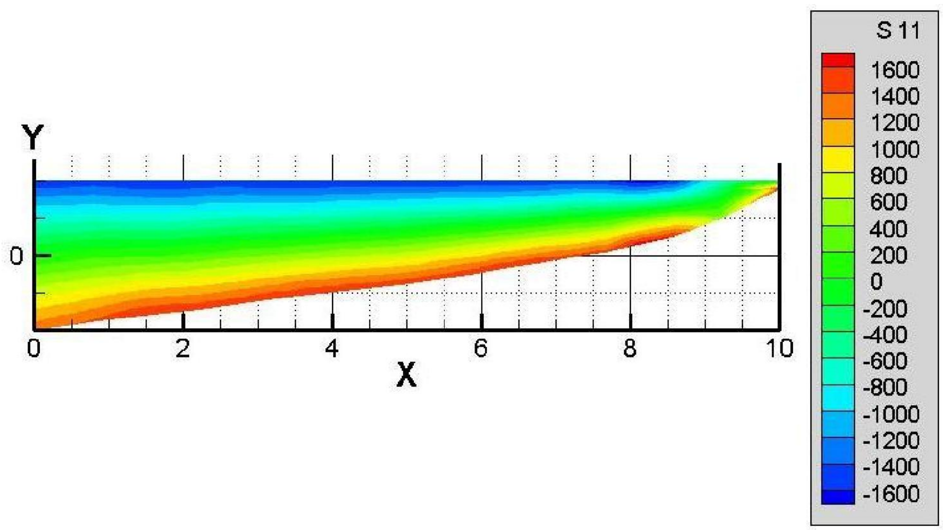


شکل ۷-۳: نتایج تحلیل تنش S_{11}



شکل ۷-۴: نتایج تحلیل تنش S_{vm}

در حل این مثال درجه توابع پایه برابر با دو و بردارهای گره مورد استفاده در تحلیل سازه برابر با $u=\{0,0,0,0.111,0.222,...,0.777,0.888,1,1,1\}$ و $v=\{0,0,0,1,1,1\}$ در نظر گرفته شده اند. نتیجه تحلیل مساله برای تنش S_{11} و تنش فون میزس S_{vm} به ترتیب در شکل (۶-۳) و (۶-۴) قابل ملاحظه است. مدت زمان لازم برای بهینه سازی نیز بطور میانگین در هر چهار حالت مساوی ۱۰ ثانیه بوده است.

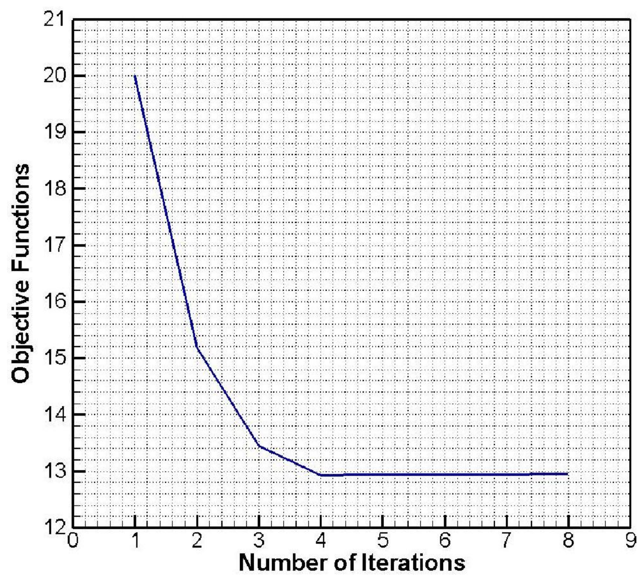


شکل ۷-۵: نتیجه بهینه سازی شکل – حالت اول

حالت اول: بهینه سازی شکل (۶-۲-ب) در حالتی که حداکثر مجاز تنش S_{11} برابر با ۱۶۰۰ در نظر گرفته شود. در این حالت نتیجه بهینه سازی به شکل (۶-۵) قابل ملاحظه است. همانگونه که

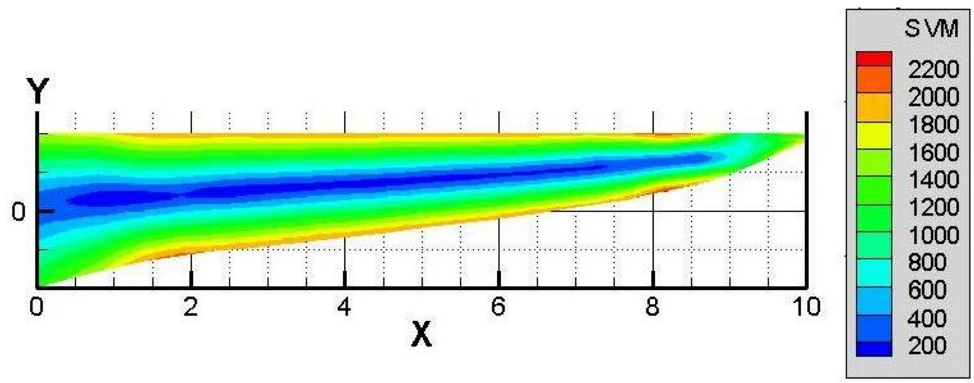
ملاحظه می‌شود منحنی های هم‌تراز تنش برای S_{11} نیز بر روی آن نشان داده شده است. مقدار تابع هدف حجم مصالح تشکیل دهنده تیر است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۲۰ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۲.۹۵ می‌باشد.

تاریخچه بهینه سازی نیز در شکل (۶-۶) نشان داده شده است که محور افقی بیانگر تعداد دفعاتی است که سابروتین بهینه سازی DOT فراخوانی شده است و محور قائم نیز بیانگر مقدار تابع هدف می‌باشد.



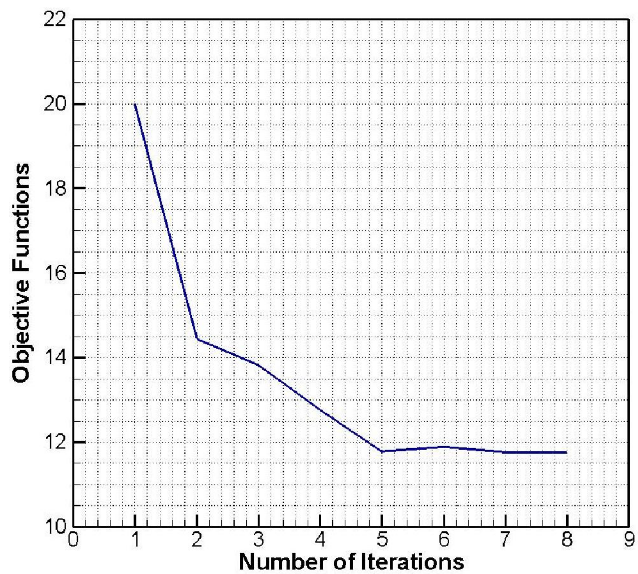
شکل ۷-۶: تاریخچه بهینه سازی – حالت اول

حالت دوم: بهینه سازی شکل (۶-۲-ب) در حالتی که حداکثر مجاز تنش S_{vm} برابر با ۲۰۰۰ در نظر گرفته شود. در این حالت نتیجه بهینه سازی به شکل (۶-۷) قابل ملاحظه است. همانگونه که ملاحظه می‌شود منحنی‌های هم‌تراز تنش برای S_{vm} نیز بر روی آن نشان داده شده است. مقدار تابع هدف حجم مصالح تشکیل دهنده تیر است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۲۰ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۱.۷۶ می‌باشد.



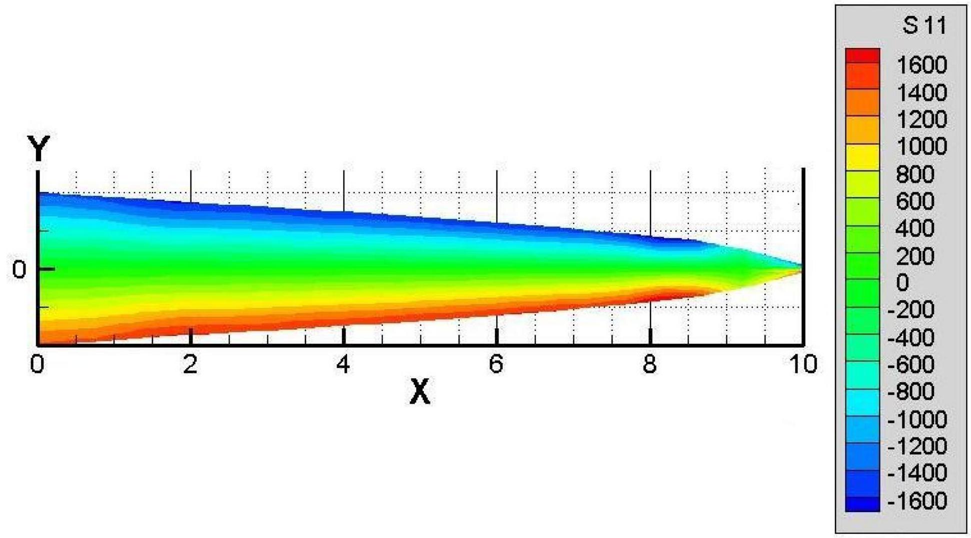
شکل ۷-۷: نتیجه بهینه سازی شکل – حالت دوم

تاریخچه بهینه سازی در حالت دوم نیز در شکل(۶-۸) نشان داده شده است.



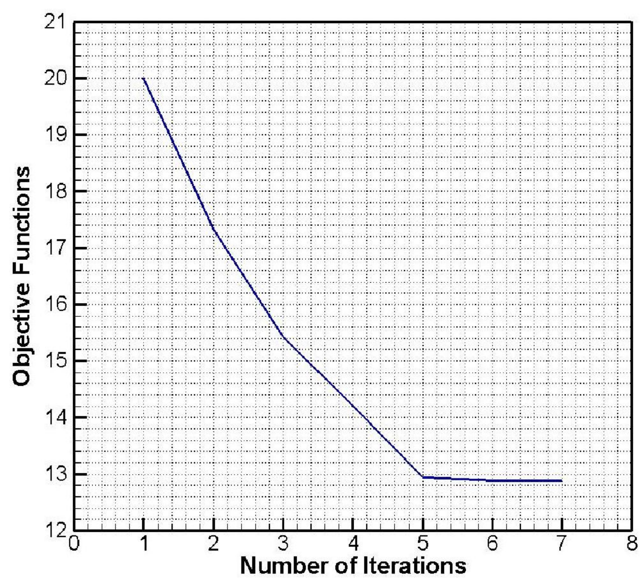
شکل ۷-۸: تاریخچه بهینه سازی – حالت دوم

حالت سوم: بهینه سازی شکل (۶-۲-ج) در حالتی که حداکثر مجاز تنش S_{11} برابر با ۱۶۰۰ در نظر گرفته شود. در این حالت نتیجه بهینه سازی به شکل (۶-۹) قابل ملاحظه است. همانگونه که ملاحظه می‌شود منحنی‌های هم‌تراز تنش برای S_{11} نیز بر روی آن نشان داده شده است. مقدار تابع هدف حجم مصالح تشکیل دهنده تیر است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۲۰ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۲.۸۷ می‌باشد.



شکل ۷-۹: نتیجه بهینه سازی شکل – حالت سوم

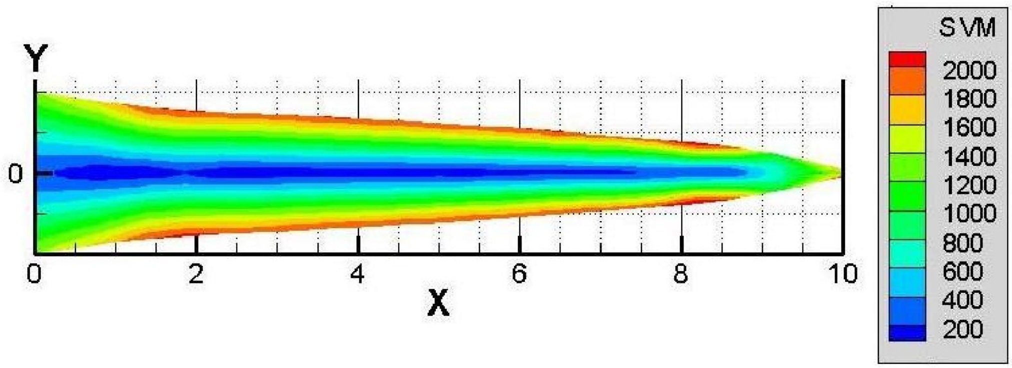
تاریخچه بهینه سازی در حالت سوم نیز در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده است.



شکل ۷-۱۰: تاریخچه بهینه سازی – حالت سوم

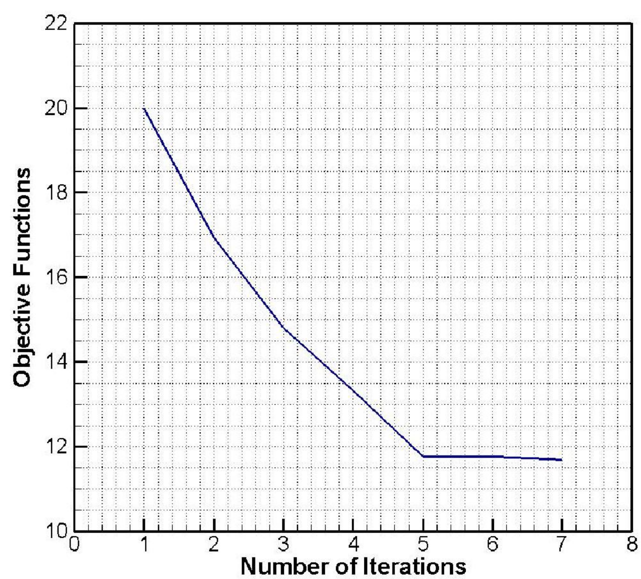
<u>حالت چهارم</u>: بهینه سازی شکل (۶-۲-ج) در حالتی که حداکثر مجاز تنش S_{vm} برابر با ۲۰۰۰ در نظر گرفته شود. در این حالت نتیجه بهینه سازی به شکل (۶-۱۱) قابل ملاحظه است. همانگونه که ملاحظه می‌شود منحنی‌های همتراز تنش برای S_{vm} نیز بر روی آن نشان داده شده است. مقدار

تابع هدف حجم مصالح تشکیل دهنده تیر است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۲۰ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۱.۶۹ می‌باشد.



شکل ۷-۱۱: نتیجه بهینه سازی شکل – حالت چهارم

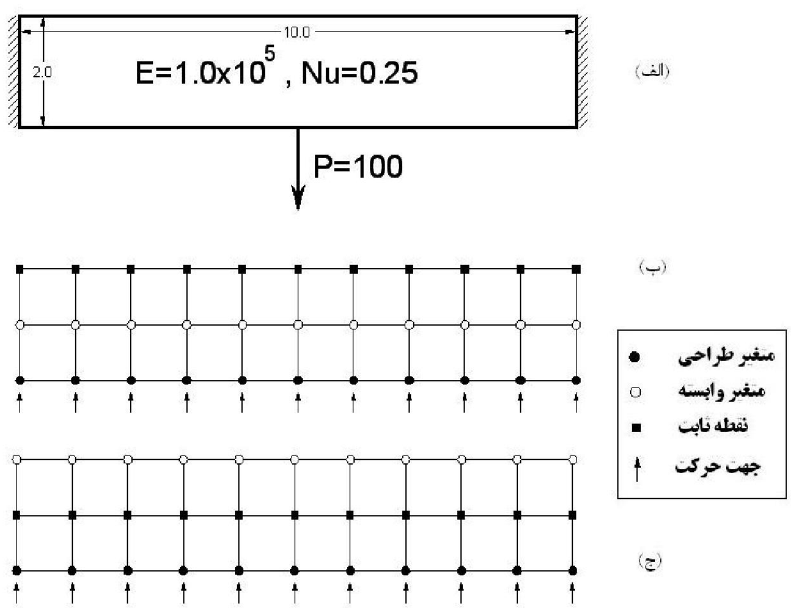
تاریخچه بهینه سازی در حالت چهارم نیز در شکل (۶-۱۲) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۱۲ ثانیه بوده است.



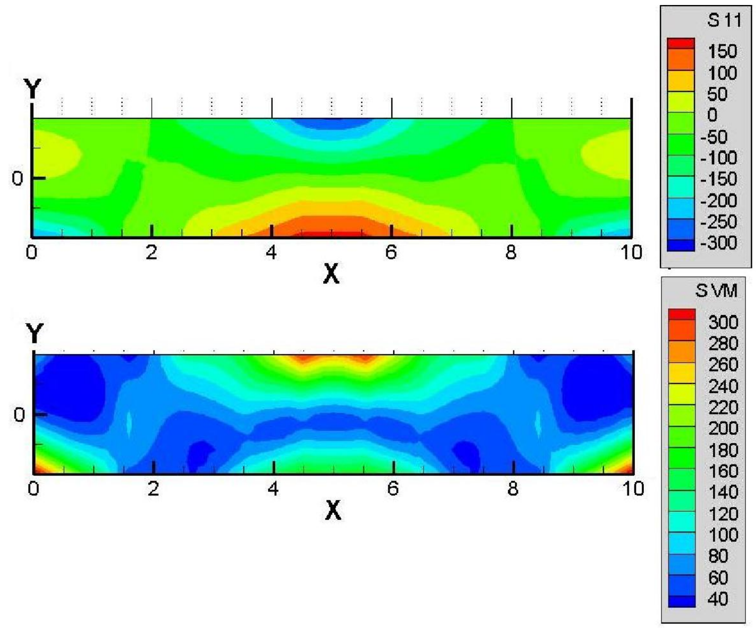
شکل ۷-۱۲: تاریخچه بهینه سازی – حالت چهارم

۷-۴-۲ مثال دوم: بهینه سازی شکل تیر دوسرگیردار

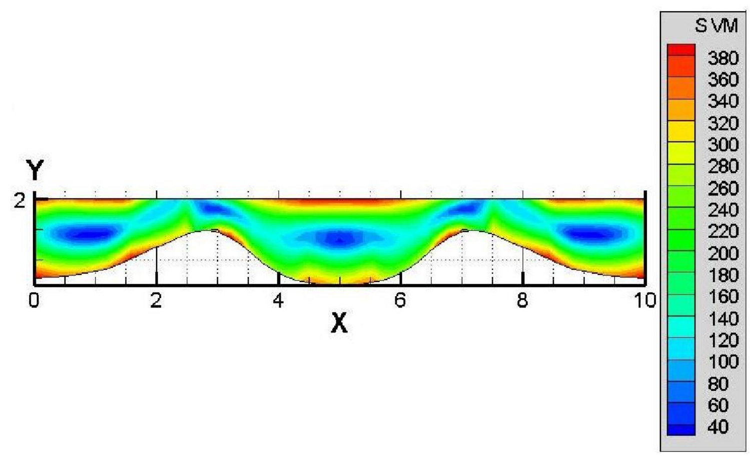
در این مثال هدف از بهینه سازی عبارتست از مینیمم کردن مقدار مصالح مورد نیاز برای ساخت یک تیر دوسرگیردار در حالت تنش مسطح. این تیر در وسط خود دارای باری به بزرگی $P=100$ بوده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون این تیر به ترتیب برابر با $E=1.0\times10^5$ و $\nu=0.25$ در نظر گرفته شده است. همانگونه که در شکل (۶-۱۳) مشخص است نقاط کنترلی بصورت دایره توپر، متغیرهای طراحی مستقل در مساله بهینه سازی می‌باشند. دایره های توخالی متغیرهای طراحی وابسته و مربع توپر نقاط کنترلی هستند که مختصات آنها در حین انجام فرآیند بهینه سازی تغییری نخواهد کرد. همانگونه که در شکلهای (۶-ب و ج) ملاحظه می‌شود یک مرتبه نقاط کنترلی واقع بر وجه پایین تیر به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده و وجه بالایی ثابت در نظر گرفته شده است. در حالت بعدی وجه بالایی وابسته به وجه پایین شده و شکلی متقارن را نسبت به تار خنثی ایجاد کرده است. سایر مشخصات مورد استفاده در IGA مانند مثال قبل است.



شکل ۷-۱۳: مشخصات تیر دوسرگیردار جهت بهینه سازی شکل



شکل ۷-۱۴: نتایج تحلیل تنش S_{11} و S_{vm}

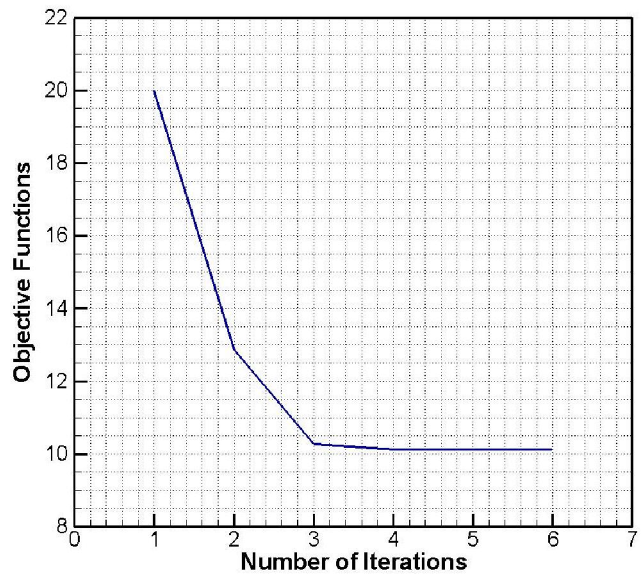


شکل ۷-۱۵: نتیجه بهینه سازی شکل – حالت اول

<u>حالت اول</u>: بهینه سازی شکل (۶-۱۳-ب) در حالتی که حداکثر مجاز تنش S_{vm} برابر با ۴۰۰ در نظر گرفته شود. در این حالت نتیجه بهینه سازی به شکل (۶-۱۵) قابل ملاحظه است. همانگونه که ملاحظه می‌شود منحنی‌های هم‌تراز تنش برای S_{vm} نیز بر روی آن نشان داده شده است. مقدار تابع هدف حجم مصالح تشکیل دهنده تیر است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با

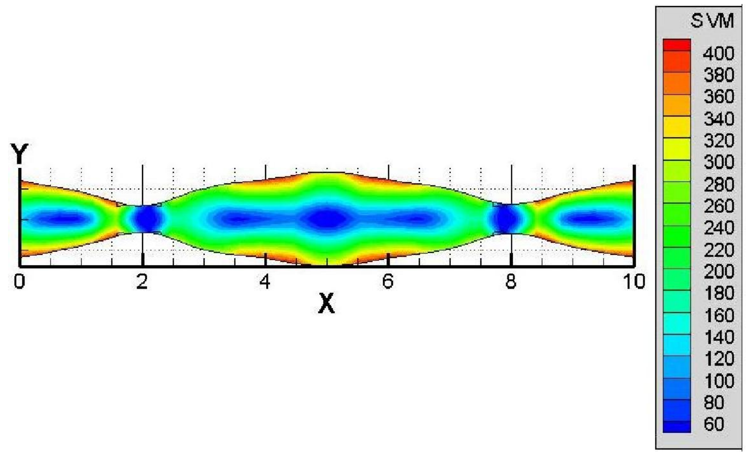
۲۰ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۰.۱۱ می‌باشد.

تاریخچه بهینه سازی در حالت چهارم نیز در شکل (۶-۱۶) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۲۴ ثانیه بوده است.



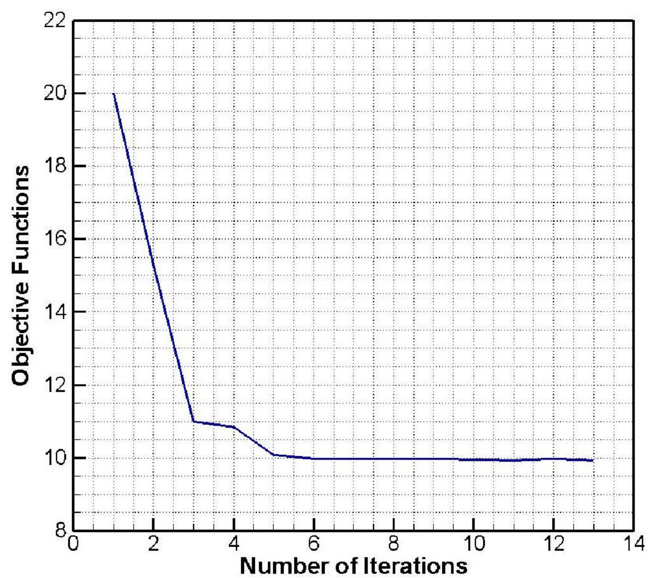
شکل ۷-۱۶: تاریخچه بهینه سازی – حالت اول

حالت دوم: بهینه سازی شکل (۶-۱۳-ج) در حالتی که حداکثر مجاز تنش S_{vm} برابر با ۴۰۰ در نظر گرفته شود. در این حالت نتیجه بهینه سازی به شکل (۶-۱۷) قابل ملاحظه است. همانگونه که ملاحظه می‌شود منحنی‌های هم‌تراز تنش برای S_{vm} نیز بر روی آن نشان داده شده است. مقدار تابع هدف حجم مصالح تشکیل دهنده تیر است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۲۰ و بعد از بهینه سازی برابر با ۹.۹۴ می‌باشد.



شکل ۷-۱۷: نتیجه بهینه سازی شکل – حالت دوم

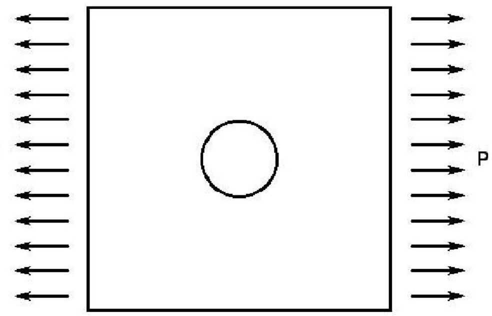
تاریخچه بهینه سازی در حالت دوم نیز در شکل (۶-۱۸) نشان داده شده است.



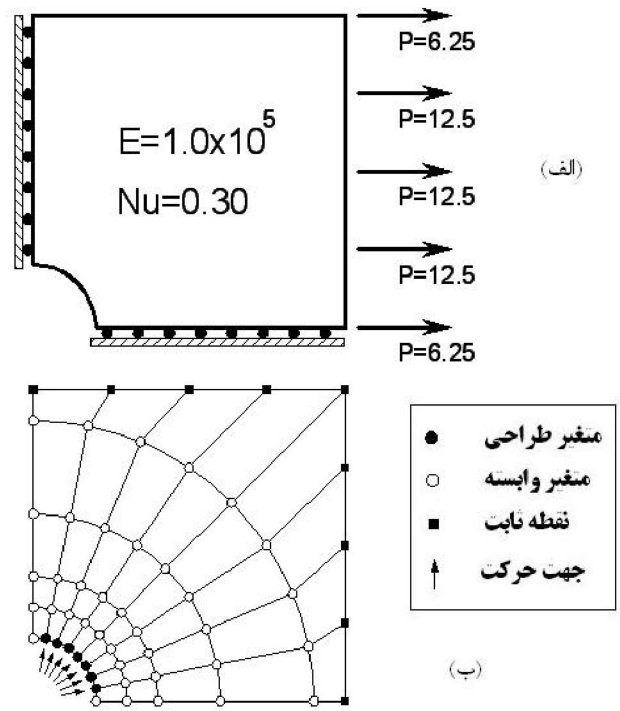
شکل ۷-۱۸: تاریخچه بهینه سازی – حالت دوم

۷-۴-۳ مثال سوم: بهینه سازی شکل صفحه مربعی با حفره میانی

یکی از مسائل معروف در متون بهینه سازی شکل سازه ها، صفحه مربعی شکل با حفره میانی است که در شکل (۶-۱۹) قابل ملاحظه می‌باشد.

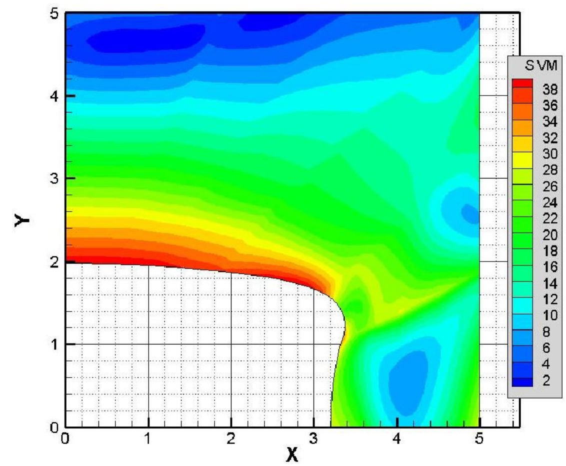


شکل ۷-۱۹: مثال صفحه مربعی با حفره دایره‌ای شکل در میان آن



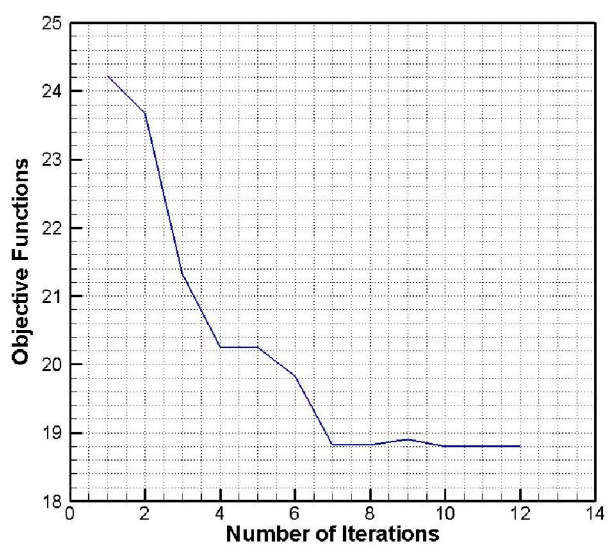
شکل ۷-۲۰: مشخصات ربع صفحه با حفره میانی با ۵۴ نقطه کنترلی

با توجه به تقارن موجود در مساله می‌توان یک چهارم آن را مدل نمود. در این مثال هدف اصلی بهینه سازی شکل حفره موجود می‌باشد. مشخصات مورد استفاده برای حل مساله در شکل (۶-۲۰) قابل ملاحظه است. خاطر نشان می‌سازد که این مثال در حالت تنش مسطح حل شده است. همچنین حل این مثال درجه توابع پایه برابر با دو و بردارهای گره مورد استفاده در تحلیل سازه برابر با $u=\{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$ و $v=\{0,0,0,0.333,0.667,1,1,1\}$ در نظر گرفته شده اند.



شکل ۷-۲۱: شکل بهینه صفحه با حفره میانی

قید در نظر گرفته شده در این مثال مقدار تنش فون میزس است که حداکثر مجاز S_{vm} برابر با ۴۰ در نظر گرفته شده است. تابع هدف، حجم مصالح تشکیل دهنده صفحه است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۲۴.۲۱ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۸.۸۸ می‌باشد. نتایج حل مساله در شکلهای (۶-۲۱) و (۶-۲۲) نشان داده شده‌اند. تاریخچه همگرایی به جواب بهینه در شکل (۶-۲۲) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۲۷ ثانیه بوده است.

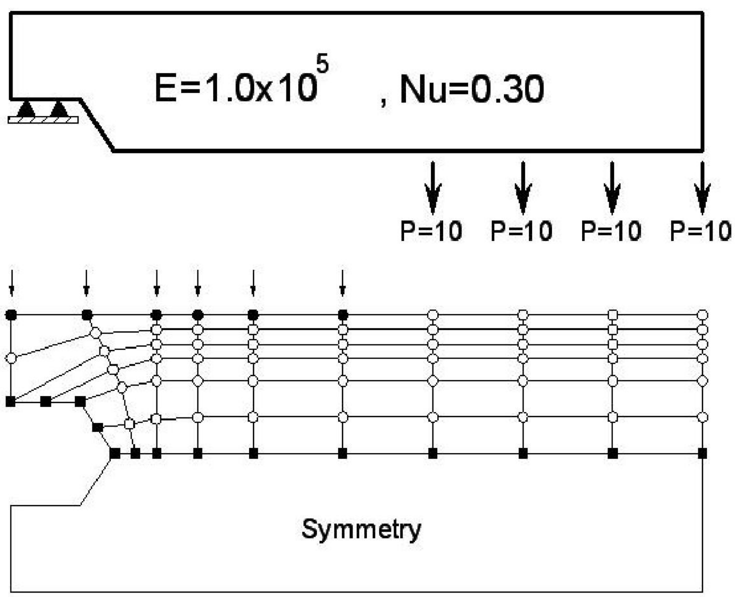


شکل ۷-۲۲: تاریخچه بهینه سازی صفحه با حفره میانی

۷-۴-۴ مثال چهارم: بهینه سازی شکل آچار

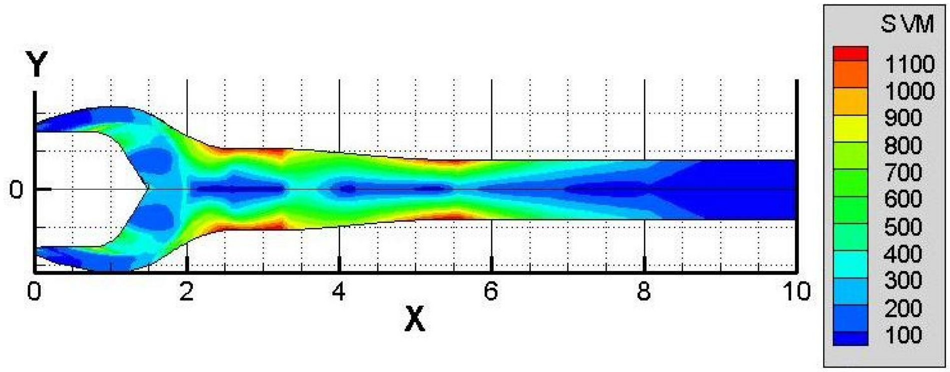
از دیگر مسائل معروفی که در بهینه سازی شکل از آن استفاده می‌شود، بهینه سازی شکل آچار می‌باشد که مشخصات آن در شکل (۶-۲۳) نشان داده شده است. با توجه به تقارن موجود در مساله می‌توان یک دوم آن را مدل نمود که البته در اینجا کل مساله مدلسازی شده است.

در این مثال هدف اصلی یافتن مرزهای بهینه آچار می‌باشد. خاطر نشان می‌سازد که این مثال در حالت تنش مسطح حل شده است و درجه توابع پایه برابر با دو و بردارهای گره مورد استفاده در روش IGA برابر با $u=\{0,0,0,0.125,0.250,...,0.875,1,1,1\}$ و $v=\{0,0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1\}$ در نظر گرفته شده اند.



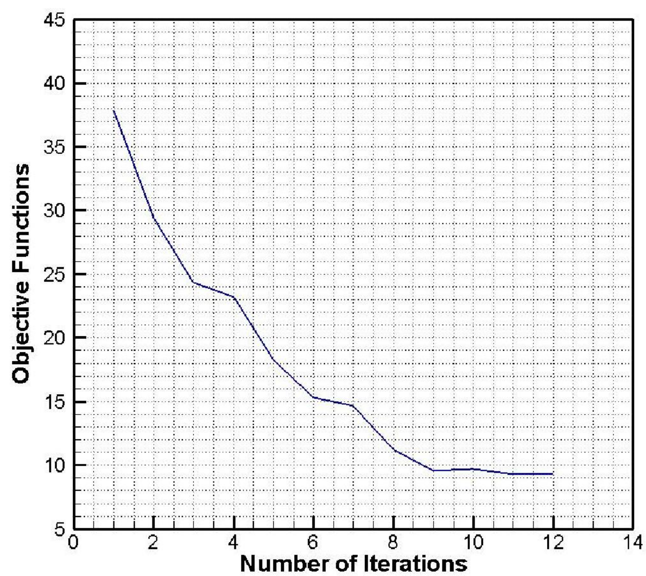
شکل ۷-۲۳: مشخصات مساله بهینه سازی شکل آچار با ۱۳۰ نقطه کنترلی

قید در نظر گرفته شده در این مثال مقدار تنش فون میزس است که حداکثر مجاز S_{vm} برابر با ۱۲۰۰ در نظر گرفته شده است. تابع هدف، حجم مصالح تشکیل دهنده آچار است که با فرض ضخامت واحد قبل از بهینه سازی برابر با ۳۷.۸۷۵ و بعد از بهینه سازی برابر با ۹.۳۱ می‌باشد. نتایج حل مساله در شکلهای (۶-۲۴) و (۶-۲۵) نشان داده شده اند.



شکل ۷-۲۴: شکل بهینه آچار

تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۲۵) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۲۵ ثانیه بوده است.

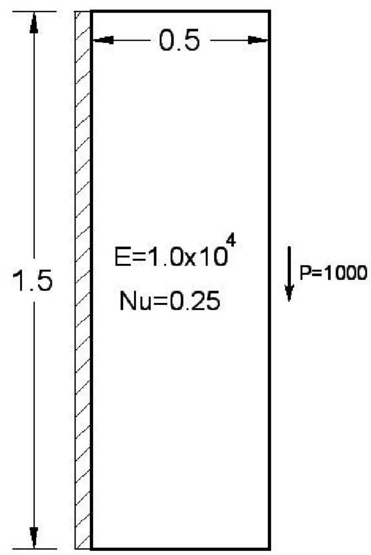


شکل ۷-۲۵: تاریخچه بهینه سازی مساله آچار

۷-۴-۵ مثال پنجم: بهینه سازی توزیع ضخامت در تیر عمیق

در این بخش با استفاده از توانمندی برنامه *TIGAP* اقدام به بهینه سازی توزیع ضخامت در یک تیر عمیق شده است. بدین منظور با ایجاد تغییر در ضخامت مساله در کل دامنه به این هدف نائل شده‌ایم. در این خصوص لازم به ذکر است که با کنترل مقادیر تنشها در دامنه مساله، هرجا که مقدار تنشها کم بوده است ضخامت کاهش یافته است. باتوجه به اینکه نقاط کنترلی می‌توانند مختصات

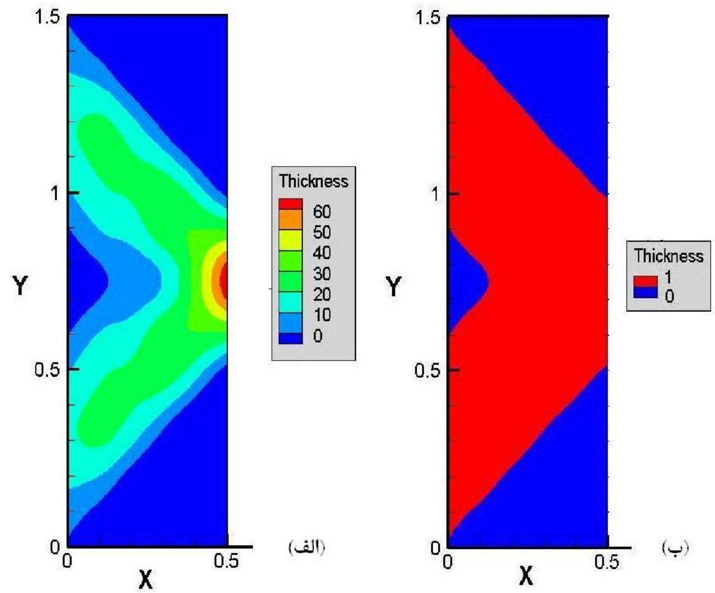
منفی نیز به خود بگیرند، در الگوریتم برنامه به طور اتوماتیک کلیه ضخامتهای منفی مساوی صفر لحاظ می‌شود و در واقع ضخامت صفر به مفهوم ایجاد حفره در دامنه مساله می‌باشد. متغیرطراحی در این مثال عبارتست از ضخامت در کل دامنه و تابع هدف، انرژی کرنشی در نظر گرفته شده است. مشخصات مساله حل شده در مثال در شکل (۶-۲۶) قابل ملاحظه است.



شکل ۷-۲۶: مشخصات مساله بهینه سازی توپولوژی تیرعمیق با ۶۶ نقطه کنترلی

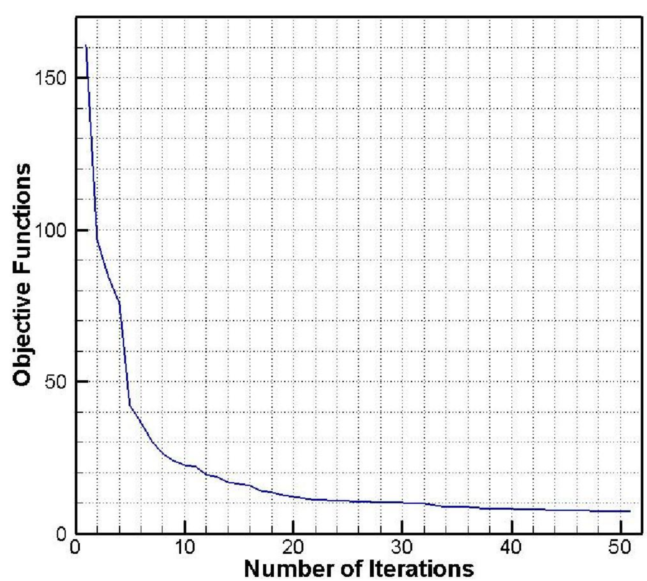
خاطر نشان می‌سازد که این مثال در حالت تنش مسطح حل شده است. همچنین حل این مثال درجه توابع پایه برابر با دو و بردارهای گره مورد استفاده در روش IGA برابر با $u=\{0,0,0,0.25,0.50,0.75,1,1,1\}$ و $v=\{0,0,0,0.111,0.222,...,0.888,1,1,1\}$ در نظر گرفته شده اند. قید در نظر گرفته شده در این مثال مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۱۶۰.۸ و بعد از بهینه سازی برابر با ۷.۱۴ می‌باشد.

نتایج حل مساله برای کانتورهای تغییر ضخامت در شکل (۶-۲۷-الف) نشان داده شده است. البته اگر مساله به این شکل مد نظر قرار گیرد که به نواحی دارای مصالح و بدون مصالح تقسیم شود شکل حاصله در (۶-۲۷-ب) قابل ملاحظه است. توپولوژی حاصله در حل این مثال با توپولوژی سایر روشهای بهینه سازی که در متون بهینه سازی وجود دارد مشابه است.



شکل ۷-۲۷: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله تیر عمیق

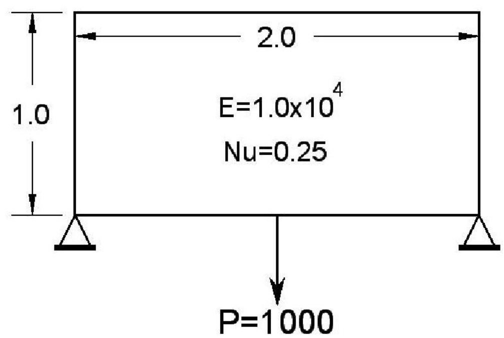
تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۲۸) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۶۷۰ ثانیه بوده است. البته توجه به این نکته نیز مهم است که بعد از انجام عملیات بهینه سازی توپولوژی می‌توان از بهینه سازی شکل جهت بهتر شدن جواب استفاده کرد و مرزهای بهینه را بدست آورد.



شکل ۷-۲۸: تاریخچه بهینه سازی مساله تیرعمیق

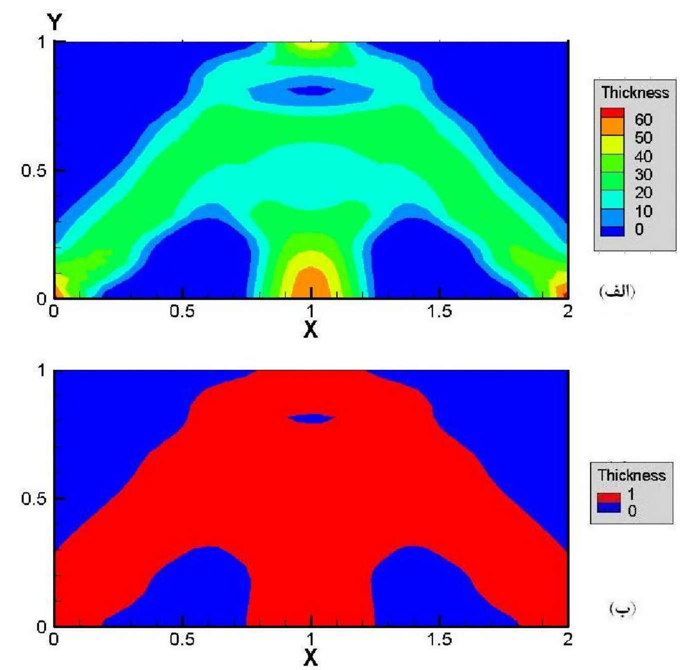
۷-۴-۶ مثال ششم: بهینه سازی توزیع ضخامت صفحه با تکیه‌گاه دوسر ساده

این مثال با مشخصات نشان داده شده در شکل (۶-۲۹) حل شده است. درجه توابع پایه برابر با دو و بردارهای گره مورد استفاده برابر با $u=v=\{0,0,0,0.111,0.222,...,0.888,1,1,1\}$ در نظر گرفته شده اند. قید در نظر گرفته شده در این مثال مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۳۰۲.۲۱ و بعد از بهینه سازی برابر با ۲۰.۵۶ می‌باشد.



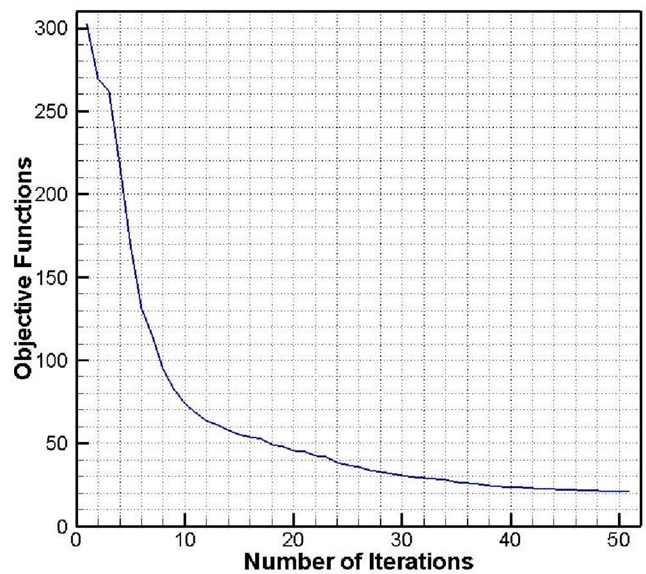
شکل ۷-۲۹: مشخصات مساله بهینه سازی توزیع ضخامت صفحه دوسرساده با ۱۲۱ نقطه کنترلی

نتایج حل مساله برای کانتورهای تغییر ضخامت در شکل (۶-۳۰) نشان داده شده است.

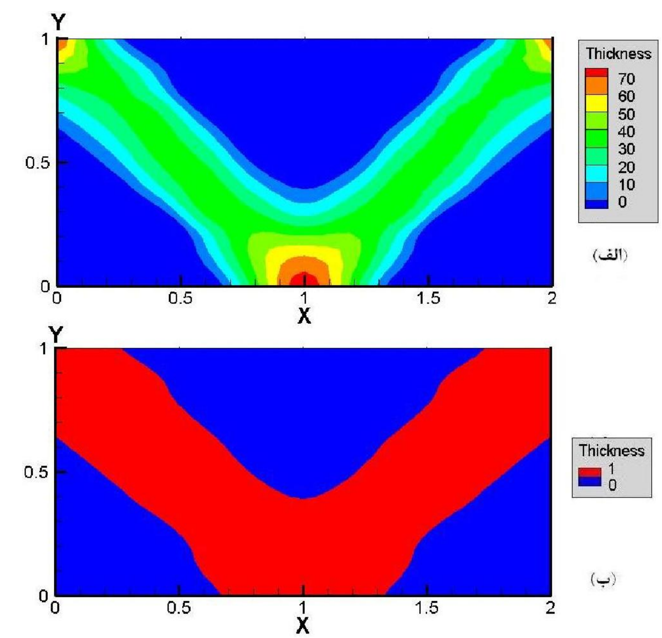


شکل ۷-۳۰: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله تیر عمیق

تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۳۱) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۵۴۳۰ ثانیه بوده است.

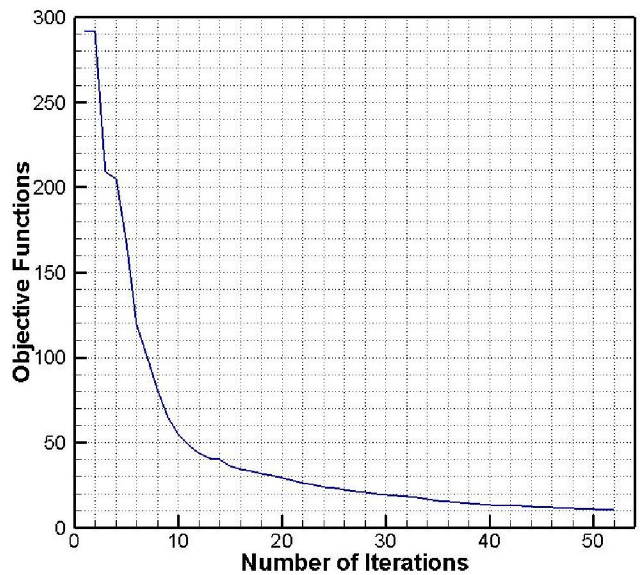


شکل ۷-۳۱: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه دوسرساده



شکل ۷-۳۲: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله تیر عمیق با تکیه‌گاه در گوشه‌های بالا

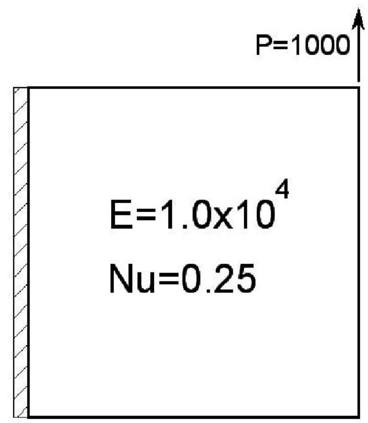
اگر در این مساله تکیه‌گاهها از گوشه های پایین در شکل (۶-۲۹) به گوشه بالا منتقل شوند توزیع بهینه ضخامت به شکل (۶-۳۲) خواهد بود. در این مثال مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۲۹۱.۷۳ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۰.۰۱ می‌باشد. تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۳۳) نشان داده شده است.



شکل ۷-۳۳: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه دوسرساده

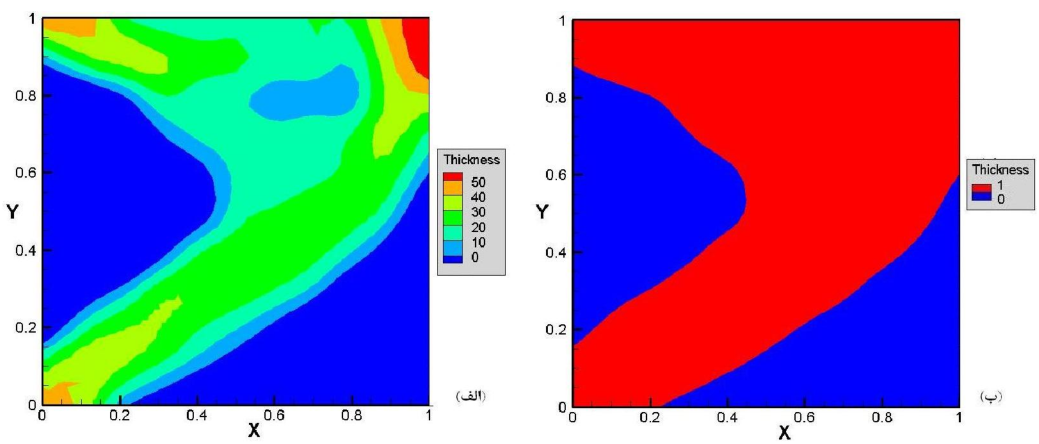
۷-۴-۷ مثال هفتم: بهینه سازی توزیع ضخامت در صفحه طره

هدف از حل این مثال (شکل ۶-۳۴) نشان دادن اثر ایندکس ضخامت در توزیع نهایی آن می‌باشد. ایندکس ضخامت عبارتست از عددی ثابت که در کل دامنه هرجا ضخامت کمتر یا مساوی آن باشد مساوی صفر فرض می‌شود. در برخی از روشهای اولیه بهینه سازی توپولوژی سازه ها، از این روش استفاده می‌شده است تا امکان ایجاد حفره در دامنه مساله فراهم شود.



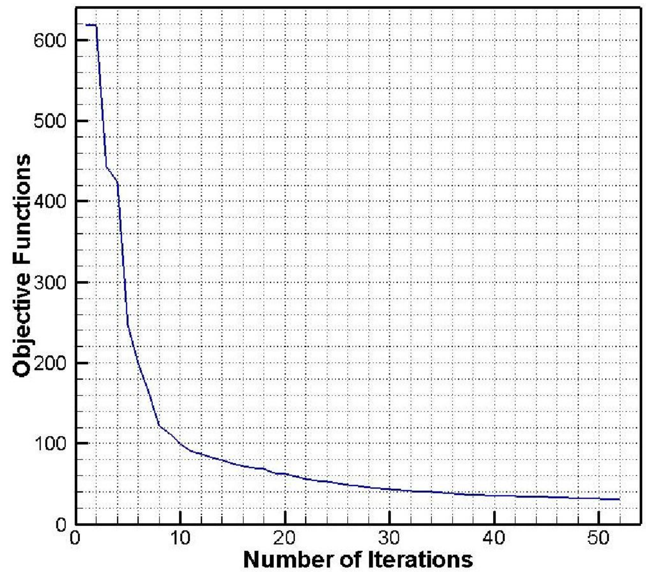
شکل ۷-۳۴: مشخصات مساله بهینه سازی توپولوژی صفحه طره مربعی با ۱۲۱ نقطه کنترلی

<u>حالت اول</u>: در این حالت حل مساله با ضخامت واحد آغاز و هرجا که ضخامت کوچکتر یا مساوی صفر شده مساوی صفر قرار داده شده است. مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۶۱۷.۴۵ و بعد از بهینه سازی برابر با ۳۰.۰۹ می‌باشد.



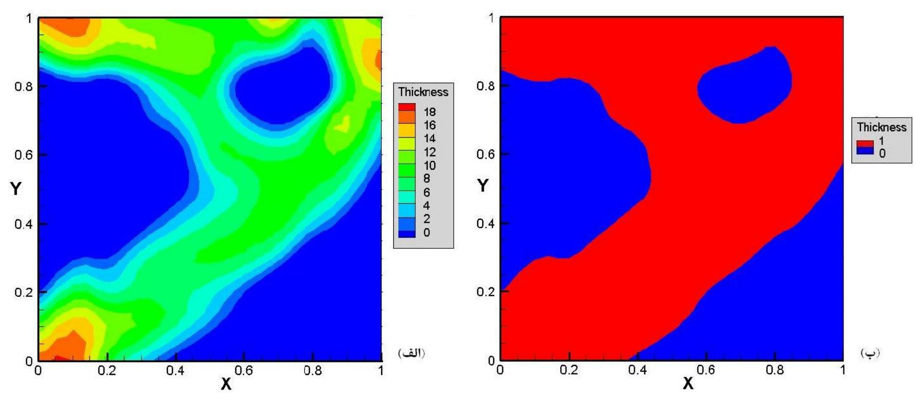
شکل ۷-۳۵: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله تیر عمیق – حالت اول

تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۳۶) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۴۸۰۵ ثانیه بوده است.



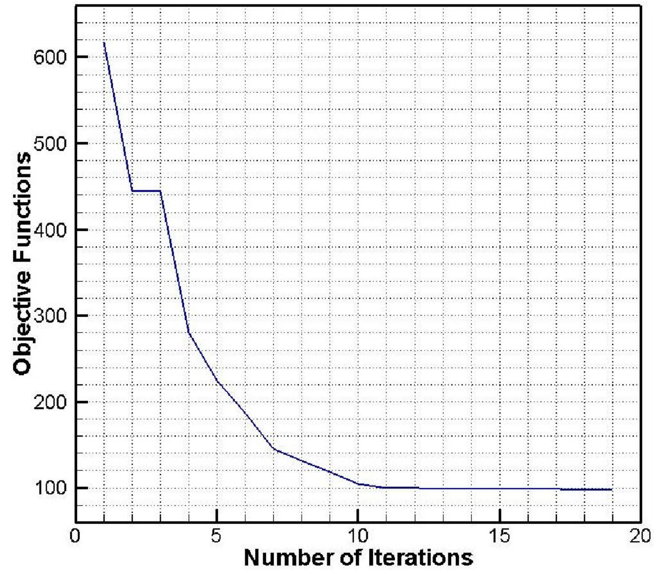
شکل ۷-۳۶: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه طره – حالت اول

<u>حالت دوم</u>: در این حالت حل مساله با ضخامت واحد آغاز و هرجا که ضخامت کوچکتر یا مساوی نیم شده مساوی صفر قرار داده شده است. مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۶۱۷.۴۵ و بعد از بهینه سازی برابر با ۹۷.۵۴ می‌باشد.



شکل ۷-۳۷: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله تیر عمیق – حالت دوم

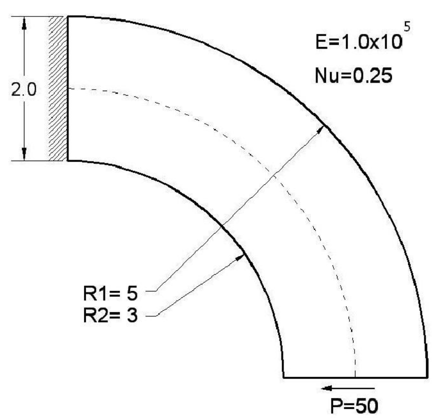
تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۳۸) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۳۲۳۸ ثانیه بوده است.



شکل ۷-۳۸: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه طره – حالت دوم

۷-۴-۸ مثال هشتم: بهینه سازی توزیع ضخامت در یک صفحه طره خمیده

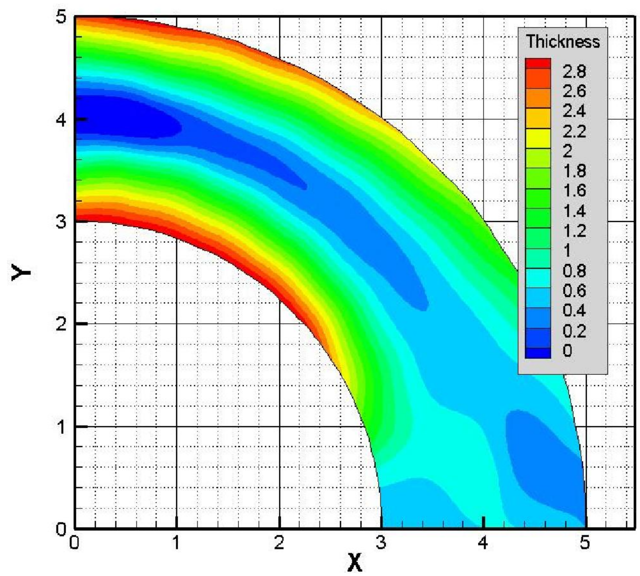
یک صفحه طره خمیده با مشخصات شکل (۶-۳۹) را فرض نمایید. در این مثال نیز هدف بهینه سازی توزیع ضخامت در دامنه مساله است. فرضیات این مساله نیز همانند مسائل گذشته فرض شده است.



شکل ۷-۳۹: مشخصات مساله بهینه سازی توپولوژی صفحه طره خمیده با ۸۵ نقطه کنترلی

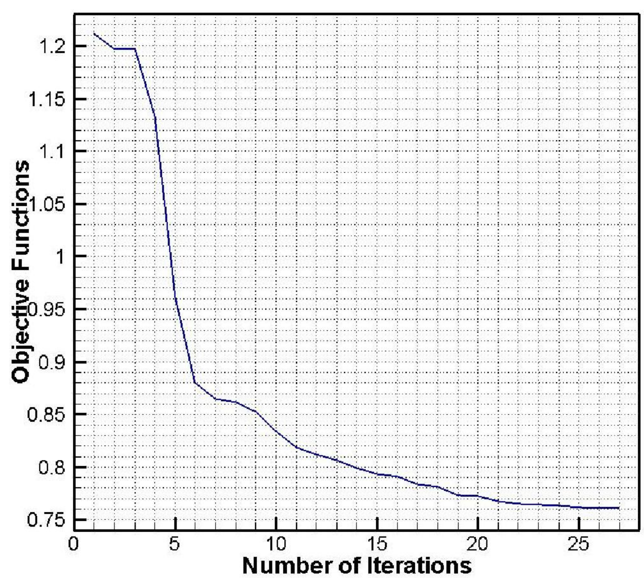
حل مساله با ضخامت واحد آغاز و هرجا که ضخامت کوچکتر یا مساوی صفر بوده است، مساوی صفر قرار داده شده است. مقدار انرژی کرنشی قبل از بهینه سازی برابر با ۱.۲۱ و بعد از بهینه سازی

برابر با ۰.۷۶ می‌باشد.



شکل ۷-۴۰: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله صفحه طره خمیده

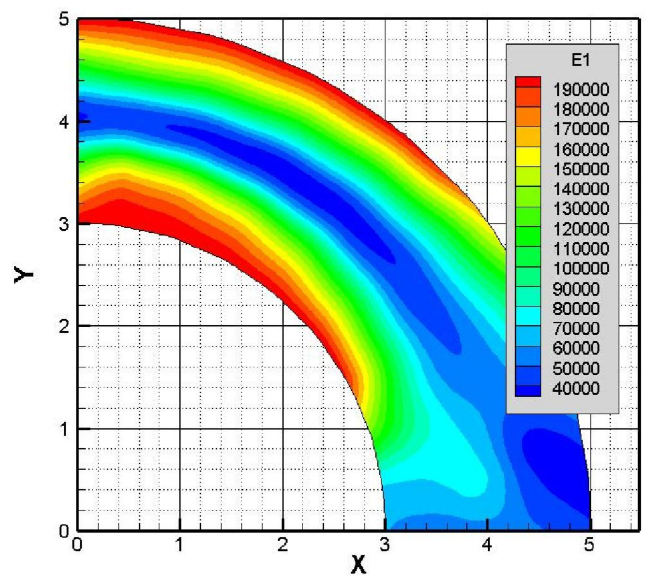
تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۴۱) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۱۵۱۰ ثانیه بوده است.



شکل ۷-۴۱: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه طره خمیده

۷-۴-۹ مثال نهم: بهینه سازی توزیع مدول الاستیسیته در یک صفحه طره خمیده

در این مثال هدف بهینه سازی توزیع مواد در دامنه مساله است. با توجه به اینکه در متون بهینه سازی سازه ها اغلب از بهینه سازی ابعاد، شکل و توپولوژی نام برده می‌شود، شاید بتوان این مساله را بعنوان نوع دیگری از مسایل بهینه سازی با نام بهینه سازی مصالح[118] نام برد. البته در اینجا منظور از بهینه سازی مصالح یافتن توزیع بهینه مدول الاستیسیته بر روی دامنه مساله است که با توجه به امکانات ایجاد شده در روش GIGA این امکان به سهولت ایجاد شده است. قید مساله نیز در این مثال و مثالهای بعدی ثابت بودن حجم زیر رویه تشکیل دهنده مدول الاستیسیته در نظر گرفته شده است.

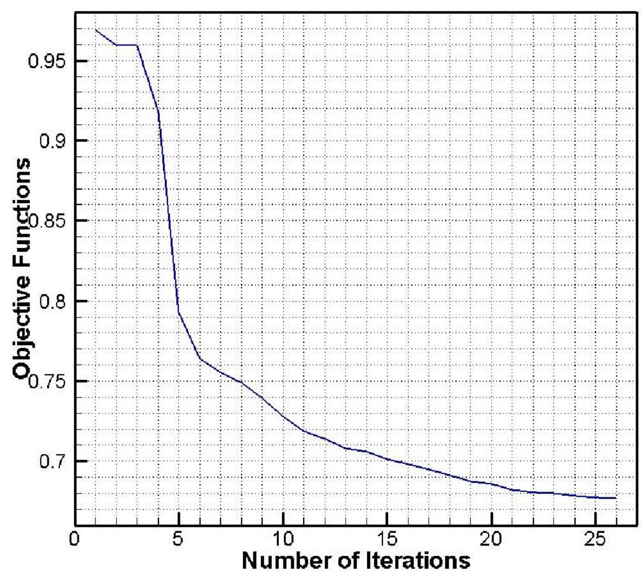


شکل ۷-۴۲: کانتورهای توزیع مدول الاستیسیته در مساله صفحه طره خمیده

در این مثال توزیع بهینه مصالح را در مثال ۶-۹ بدست می‌آوریم. مشخصات مساله همانند قبل است و فرض شده است که مدول الاستیسیته می‌تواند بین صفر تا دو برابر مقدار اولیه خود در کل دامنه تغییر نماید. این ضریب بصورت یک رویه بر روی دامنه تعریف شده است که از ضرب آن در مدول الاستیسیته، مقدار جدید مدول الاستیسیته بدست می‌آید. بعنوان یک قید نیز حجم زیر رویه

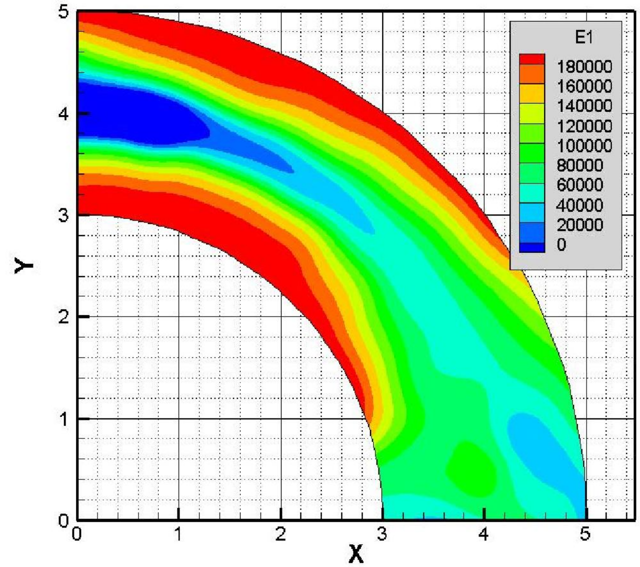
[118] Material Optimization

تولید کننده مدول الاستیسیته ثابت فرض شده است. تابع هدف نیز مینیم کردن انرژی کرنشی بوده است. نتیجه توزیع بهینه مصالح در شکل (۶-۴۲) نشان داده شده است. حل مساله با مقدار $E=100000$ آغاز شده است. مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۰.۹۶۹ و بعد از بهینه سازی برابر با ۰.۶۷۶ می‌باشد. تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۴۳) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۱۵۹۸ ثانیه بوده است.



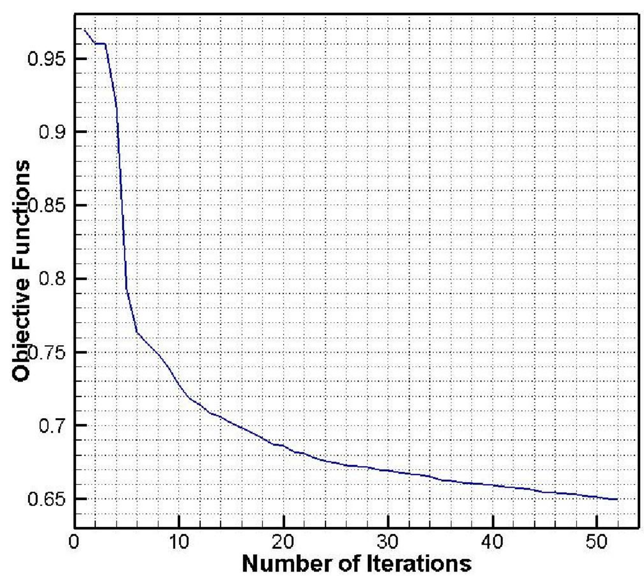
شکل ۷-۴۳: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه طره خمیده

این مثال را در حالتی که رویه ایندکس بتواند بین منفی دو تا مثبت دو تغییرات داشته باشد نیز مجددا حل کرده ایم. با توجه به اینکه مقدار منفی مدول الاستیسیته بی معنا است، هرجا که رویه ایندکس کمتر از صفر باشد مقدار مدول الاستیسیته مساوی صفر فرض میشود. این بدین معناست که در برخی از نقاط دامنه می‌تواند حفراتی ایجاد شود. نتیجه حل در شکل (۶-۴۴) نشان داده شده است. حل مساله با مقدار $E=100000$ آغاز شده است. تابع هدف مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۰.۹۶۹ و بعد از بهینه سازی برابر با ۰.۶۴۹ می‌باشد.



شکل ۷-۴۴: کانتورهای توزیع مدول الاستیسیته در مساله صفحه طره خمیده

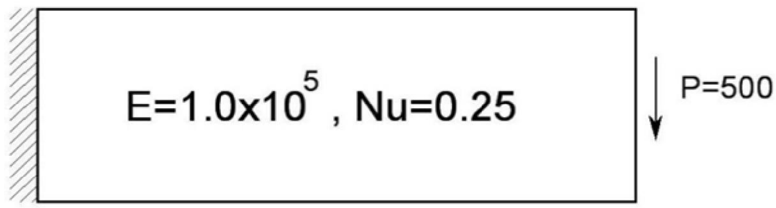
تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۴۵) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۲۰۷۰ ثانیه بوده است.



شکل ۷-۴۵: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه طره خمیده

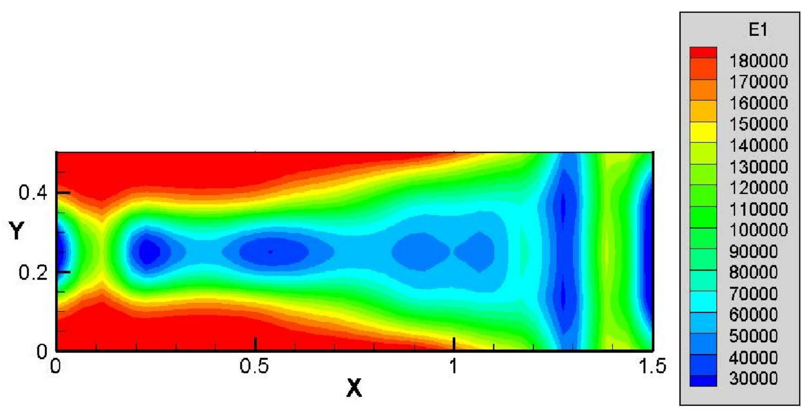
۷-۴-۱۰ مثال دهم: بهینه سازی توزیع مدول الاستیسیته در یک صفحه طره

در این مثال نیز بهینه سازی توزیع مصالح در یک تیر طره با مشخصات شکل (۶-۴۶) مورد بررسی قرار گرفته است. کلیه مشخصات مصالح و قیدها همانند مثال ۶-۱۰در نظر گرفته شده است. بار وارده نیز به دو قسمت مساوی تقسیم و به نقاط بالا و پایین وجه سمت راست وارد شده است.



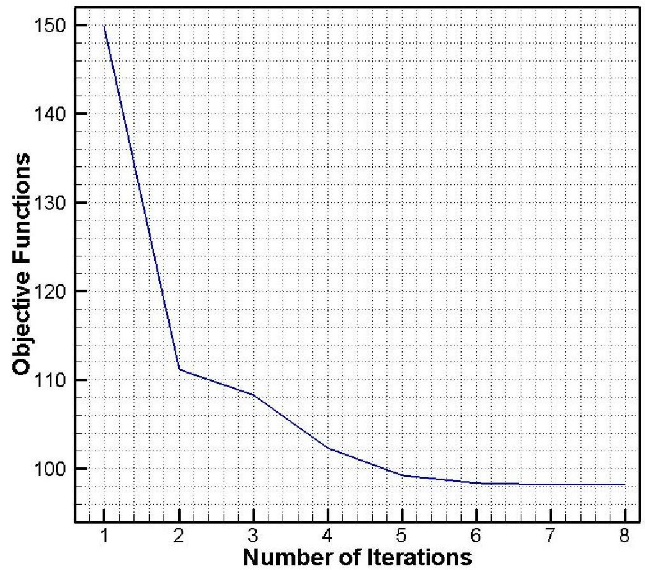
شکل ۷-۴۶: مشخصات مساله بهینه سازی توزیع مصالح صفحه طره با ۹۶ نقطه کنترلی

تابع هدف نیز مینیم کردن انرژی کرنشی بوده است. نتیجه توزیع بهینه مصالح در شکل (۶-۴۷) نشان داده شده است. حل مساله با مقدار $E = 100000$ آغاز شده است. مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۱۴۶.۸۹ و بعد از بهینه سازی برابر با ۹۶.۲۱ می‌باشد.



شکل ۷-۴۷: کانتورهای توزیع مدول الاستیسیته در مساله صفحه طره

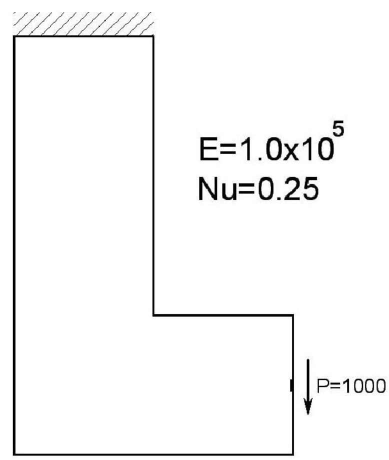
تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۴۸) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۸۰۲ ثانیه بوده است.



شکل ۷-۴۸: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه طره

۷-۴-۱۱ مثال یازدهم: بهینه سازی توزیع مدول الاستیسیته در یک صفحه L شکل

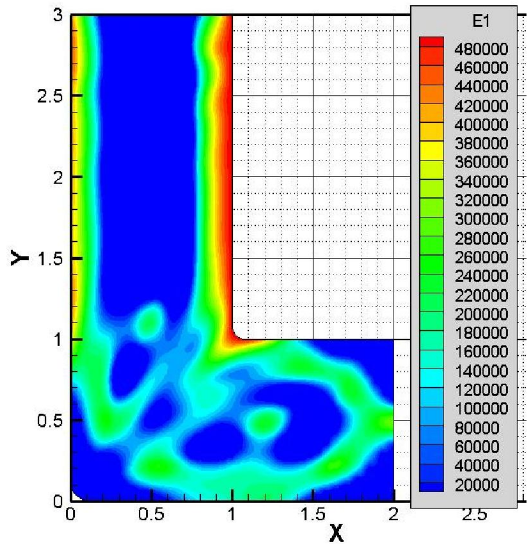
به عنوان مثالی دیگر برای بهینه سازی توزیع مصالح صفحه L شکل با مشخصات شکل (۶-۴۹) را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۴۹: مشخصات مساله بهینه سازی توزیع مصالح صفحه طره با ۹۶ نقطه کنترلی

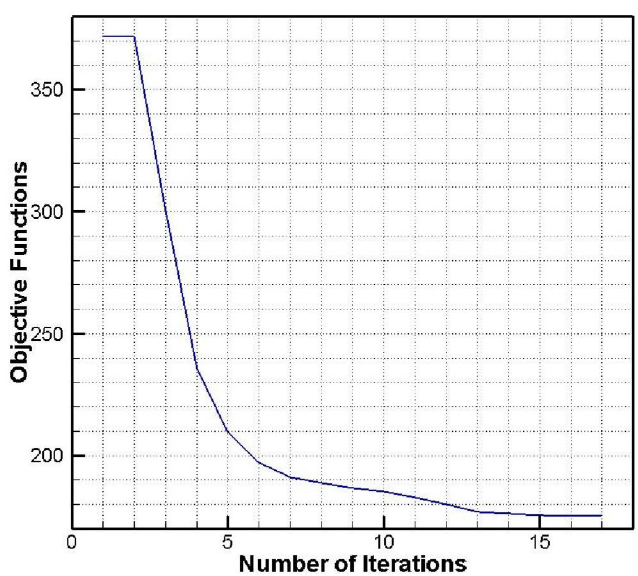
این مثال در حالتی که رویه ایندکس بتواند بین منفی پنج تا مثبت پنج تغییرات داشته باشد حل شده است. مقادیر منفی مدول الاستیسیته همانگونه که قبلا توضیح داده شد مساوی صفر فرض می‌شود. نتیجه حل در شکل (۶-۵۰) نشان داده شده است. حل مساله با مقدار $E = 100000$ آغاز

شده است. تابع هدف مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۳۷۱.۶۴ و بعد از بهینه سازی برابر با ۱۷۵.۱۷ می‌باشد.



شکل ۷-۵۰: کانتورهای توزیع مدول الاستیسیته در مساله صفحه L شکل

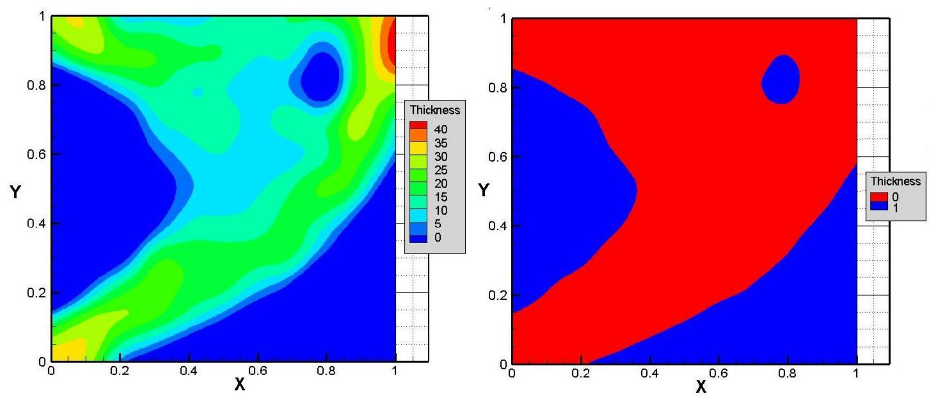
تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۵۱) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۲۳۱۰ ثانیه بوده است.



شکل ۷-۵۱: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه صفحه L شکل

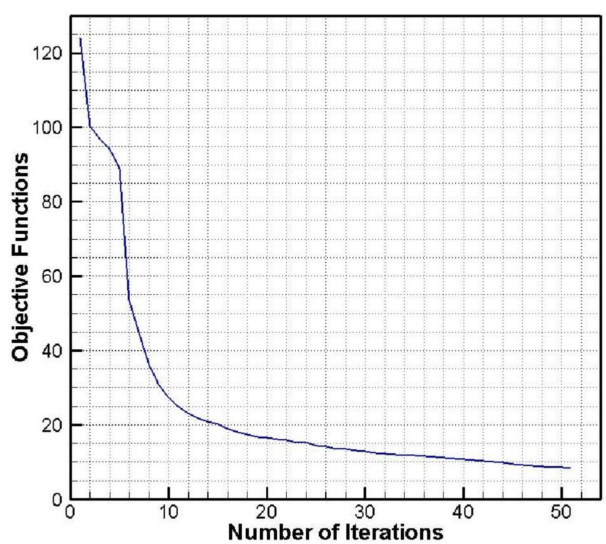
۷-۴-۱۲ مثال دوازدهم: بهینه سازی توپولوژی صفحه طره مربعی با مصالح ارتوتروپیک FG

تحلیل این مثال در فصل قبل انجام شد. در اینجا همانند حالت اول مساله ۶-۸ توزیع بهینه ضخامت را برای این مساله بدست آورده ایم. در این حالت حل مساله با ضخامت واحد آغاز و هرجا که ضخامت کوچکتر یا مساوی صفر شده مساوی صفر قرار داده شده است. مقدار انرژی کرنشی است که قبل از بهینه سازی برابر با ۱۲۳.۹۱ و بعد از بهینه سازی برابر با ۸.۳۳ می‌باشد.



شکل ۷-۵۲: کانتورهای توزیع ضخامت در مساله صفحه مربعی با مصالح ارتوتروپیک FG

تاریخچه همگرایی به جواب بهینه نیز در شکل (۶-۵۳) نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است که مدت زمان حل این مساله حدود ۵۱۵۰ ثانیه بوده است.



شکل ۷-۵۳: تاریخچه بهینه سازی مساله صفحه مربعی با مصالح ارتوتروپیک FG

فصل هفتم: نتایج و پیشنهادات

۸-۱ مقدمه

هنوز مدت زمان زیادی از معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک بعنوان یک روش عددی با دیدگاهی جدید ناشی از تلفیق روشهای تولید هندسه با روش اجزای محدود نگذشته است ولی کارهای انجام شده نویدبخش و امیدوار کننده بوده است. مبانی ریاضی این روش همانند اجزای محدود بوده و این شباهت زیاد سبب شده است تا خیلی از مسائل و مشکلات را بتوان پیش‌بینی و حل نمود. از طرفی در این رساله سعی شد تا با دیدگاهی متفاوت، اقدام به توسعه وصله ها با خواص مکانیکی متغیر برای روش تحلیل ایزوژئومتریک نموده و روشی نسبتا کلی‌تر با نام "روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع" را که قادر به حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر می‌باشد، معرفی نماییم. روابط مربوطه استخراج و سپس برنامه‌ای به زبان فرترن با نام $GIGAP$ تهیه شده است. از این برنامه برای حل تعدادی مثال و مقایسه نتایج حاصله با جوابهای روش اجزای محدود و یا جوابهای تحلیلی استفاده شد. همانند گزارشهای سایر محققین در این زمینه، نتایج حاصله بسیار دلگرم کننده و امیدبخش بوده است.

از طرفی، با توجه به مزایای استفاده از اسپلاینها در تولید منحنی‌ها و رویه‌های دلخواه و مبانی ریاضی موجود، امکان استفاده از برنامه تهیه شده برای بهینه سازی سازه فراهم شده است. بدین منظور، سابروتینهای برنامه DOT که قبلا معرفی گردید، به کد $GIGAP$ اضافه و مسائل بهینه‌سازی شکل، توزیع ضخامت و توزیع مصالح حل شده است. در دو مورد اخیر می‌توان به شمایی از توپولوژی بهینه سازه نیز دست یافت ولی برای یافتن نتایج بهتر در بهینه سازی توپولوژی، می‌توان از روشهای دیگر بهینه سازی استفاده نمود. در ادامه نیز نتایج و پیشنهاداتی که طی انجام این رساله بدست آمده است اشاره خواهد گردید.

۸-۲ نکات عمومی

۱- هندسه تولید شده در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، دقیق می‌باشد. البته به شرطی که از اشکال هندسی مشخص استفاده شود. در غیر این صورت هندسه تولید شده نسبتا دقیق خواهد بود. این درحالی است که در روش اجزای محدود هندسه به طور تقریبی مدل می‌شود.

۲- استفاده از امکانات تکنیک نربز در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، سبب کاهش تعداد مجهولات که همان مختصات نقاط کنترلی است خواهد شد. در نتیجه دستگاه معادلات حاصله دارای ابعادی به مراتب کوچکتر از همتای خود در روش اجزای محدود بوده و این خود سبب کاهش زمان حل و کاهش فضای حافظه مورد نیاز خواهد شد.

۳- با وجود نتایج بدست آمده در خصوص کاهش زمان و حجم حافظه مورد نیاز، ولی لازم است از دیدگاه حرفه ای کد نویسی به این امر بصورت جداگانه پرداخته و نتایج واقعی تر بدست آید.

۴- هر وصله در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، می‌تواند شامل بیش از یک المان باشد. ولی بهرحال بین تمام این المانها پیوستگی وجود دارد که خود سبب افزایش کیفیت حل خواهد شد. این در حالی است که در روش اجزای محدود، پیوستگی موجود، محدود به فضای المان می‌باشد.

۵- مشکل پیوستگی بین المانهای روش اجزای محدود با مشکل پیوستگی بین وصله‌ها در روش ایزوژئومتریک مشابه است. در روش ایزوژئومتریک برخی کارهای پژوهشی در این زمینه انجام شده است که در مرجع (Cottrell et al., 2009) قابل ملاحظه است.

۶- در اغلب کارهای پژوهشی موجود و همچنین در این رساله از بردارهای گره یکنواخت برای فرمولبندی و حل مسائل استفاده شده است. این مساله که بردارگرهی مناسب یا توابع پایه با درجه مناسب چگونه انتخاب شوند، موضوعی است که باید بررسی بیشتری بر روی آن صورت پذیرد.

۷- در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع از توابع پایه نربز در تحلیل استفاده می‌شود در حالی که در روش اجزای محدود از چندجمله‌ای‌ها بدین منظور استفاده می‌شود.

۸- فرمولبندی نربز بگونه‌ای است که بطور اتوماتیک، یک بهبود شبکه متناسب با شرایط هندسه جسم و یا شرایط توزیع مصالح را ایجاد می‌کند. ولی در روش اجزای محدود این امکان باید تحت تدابیر خاص و عملیات اضافه صورت پذیرد. در واقع بردار گره یکنواخت برای تولید یک هندسه و یا یک توزیع مصالح نامنظم، لزوما نقاط با فواصل یکنواخت را بر روی جسم ایجاد نمی‌کند.

۹- پس از حل دستگاه معادلات، در روش اجزای محدود مستقیما تغییر شکل حاصله توسط نقاط گرهی بیان می‌شود. این در حالی است که در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع بایستی یک عملیات ثانویه برای بدست آوردن تغییر شکل سازه انجام شود.

۸-۳ نتایج

۱- در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع می‌توان از مزایای روش تحلیل ایزوژئومتریک و مبانی ریاضی روش اجزای محدود استفاده نمود. لذا در حالی که مزایای هردو روش را در خود جای داده است، قادر به مدلسازی و تحلیل مسائل کلی‌تری می‌باشد.

۲- در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، نقاط کنترلی بر هندسه جسم واقع نبوده و لذا نمی‌توانند همانند روش اجزای محدود بیانگر هندسه جسم باشند. در نتیجه لازم است هندسه جسم توسط روابط ریاضی حاکم بازتولید شود. البته کاربر ماهر می‌تواند با تسلط بر مباحث و مبانی تولید منحنی‌ها، رویه‌ها و احجام نربز، تسلط کافی را در این خصوص کسب نماید.

۳- در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، همانند روش اجزای محدود، برای انتگرالگیری عددی می‌توان از تکنیک انتگرالگیری گوس استفاده نمود. البته باید برای جلوگیری از ایجاد اشتباه در انتگرالگیری عددی از درجه توابع پایه مساوی و بردارهای گره یکنواخت در این خصوص استفاده نمود.

۴- استفاده از روش انتگرالگیری سیمپسون سبب افزایش زمان حل مساله می‌شود ولی مشکلات ناشی از متفاوت بودن بردارهای گره و درجه توابع پایه در آن وجود ندارد.

۵- در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک پس از حل مساله تغییر مکان هر گره یا نقطه کنترلی محاسبه می‌شود و از روی آن می‌توان مختصات جدید هر گره یا نقطه کنترلی را حساب و به شکل تغییر شکل یافته سازه دسترسی داشت. ولی در روش ایزوژئومتریک جامع، جواب مساله به عنوان یک مختصه جدید برای هر نقطه کنترلی محسوب شده و شکل تغییر شکل یافته توسط رویه ها یا ابر رویه ها (در مسائل صفحات و پوسته ها) و یا ابر احجام (در مسائل سه بعدی) بیان می‌شود.

۶- در روش اجزای محدود مختصات جدید گره ها پس از تحلیل مستقیما بر تغییر شکل سازه دلالت دارند. در روش ایزوژئومتریک مختصات جدید نقاط

کنترلی تا حدودی بیانگر تغییر شکل سازه هستند که البته کاربر ماهر این روش، قابلیت تشخیص را خواهد داشت. در روش ایزوژئومتریک جامع مختصات نقاط کنترلی اصلا تغییر نمی‌کند و مختصه جدیدی برای تعریف تغییر شکلها تعریف می‌شود. لذا حتی برای کاربر ماهر این روش نیز بررسی جوابها بدون انجام عملیات پردازش هندسی کاری دشوار است. البته با توجه به اینکه نهایتا بایستی نتایج حل عددی را به شکل گرافیکی ملاحظه نمود، این نقیصه کمرنگ‌تر خواهد شد.

۷- مدلسازی توزیع مصالح بصورت دقیق و پیوسته از امکانات روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع بوده ولی در روش اجزای محدود این امکان وجود ندارد. شرایط دقیق بودن مدلسازی در این حالت نیز مشابه مدلسازی هندسی خواهد بود.

۸- روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع به معنای واقعی کلمه، روش بدون شبکه و بدون گره می‌باشد زیرا در روش اجزای محدود نیاز به تولید گره و شبکه و در روشهای موسوم به بدون شبکه نیاز به تولید گره داریم. در واقع مفاهیمی مانند المان و گره در روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، در تعاریف بردار گره گنجانده شده است و مفهوم هندسی ندارد.

۹- در فرآیند بهینه سازی و استفاده روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، با توجه به اینکه نیازی به انجام شبکه بندی مجدد مساله نمی‌باشد، بطور منطقی می‌توان صرفه جویی قابل ملاحظه‌ای در زمان حل مساله را متصور بود.

۱۰- بهینه سازی توزیع ضخامت و مصالح در دامنه جسم را شاید بتوان از نقاط برجسته اختلاف روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع با سایر روشها مانند روش

تحلیل ایزوژئومتریک یا روش اجزای محدود دانست که به سبب استفاده از وصله های با خواص متغیر حاصل شده است.

۴-۸ پیشنهادات

روش تحلیل ایزوژئومتریک و نوع بهبود یافته آن یعنی روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، روشهایی هستند که هنوز نیاز به کارهای بیشتری بر روی آنها احساس می‌شود. شاید نیاز باشد راهی که در سالیان گذشته برای روشی مانند اجزای محدود طی شده است، مجددا برای این روشها، البته با سرعتی بیشتر پیموده شود. استفاده از این روش در حل مسائلی که احتمالا حل آنها با روش اجزای محدود مشکل بوده است و همچنین توسعه این روش با استفاده از تکنیک های جدیدتر و متنوع‌تر تولید هندسه که قبلا اشاره گردید می‌تواند به عنوان یک پیشنهاد کلی مطرح شود. اما به طور خاص مواردی که در این رساله، با توجه به امکانات روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع، برای ادامه این پژوهش به آنها اشاره می‌شود، به شرح زیر می‌باشند.

۱- توسعه روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع برای حل مسائل سه‌بعدی و صفحات و پوسته‌ها با مصالح FG.

۲- توسعه روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع برای حل مسائل دینامیک و ارتعاشات سازه‌ها با تعریف چگالی بصورت یک تابع پیوسته در دامنه مساله.

۳- استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع برای حل مسائل انتشار امواج در مسائل ساخته شده با مصالح FG.

۴- استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع برای حل مسائل آنیزوتروپیک FG در حالت کلی.

۵- استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع برای حل مسائلی که مشخصات مکانیکی آنها تابعی از زمان[1] است.

۶- استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع در مسائل مکانیک شکست و گسترش ترک در جامدات.

۷- بررسی رفتار روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع در مواجهه با مباحث خاص از جمله تمرکز تنش[2]

۸- استفاده از روشهای دیگر تولید هندسه در فرمولبندی روش تحلیل ایزوژئومتریک جامع

[1] Time Dependent Materials
[2] Stress Concentration

مراجع:

مراجع فارسی

ابوالبشری، م.ح.، حسنی، ب.، حسن‌زاده، ع.، ژیانی عیدگاهی، ا. و ظریف مقدم، ن.، (۱۳۹۰)، "تحلیل ارتعاشات آزاد مسائل تنش صفحه‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک" ، اولین کنفرانس بین‌المللی آکوستیک و ارتعاشات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

حسنی، ب. و ظریف مقدم، ن.، (۱۳۸۷)، طرح پژوهشی، "تولید سطوح پوسته ای پیچیده و شبکه اجزای محدود ساختار یافته با استفاده از تکنیک نربز و تهیه نرم افزار لازم" ، ***گزارش تخصصی شماره ۱۵۰۷***، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود.

حسنی، ب. و ظریف مقدم، ن.، (۱۳۸۷)، طرح پژوهشی، "ابداع یک روش جدید عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از توابع پایه اسپلاین – فرمولبندی و تهیه برنامه" ، ***گزارش تخصصی شماره ۱۵۰۹***، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود.

حسنی، ب. و ظریف مقدم، ن.، (۱۳۸۹-الف)، "مدلسازی و تحلیل همزمان مسائل تنش مسطح با مصالح FG به روش ایزوژئومتریک" ، ***نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک***، سال بیست و دوم، شماره یک، دانشگاه فردوسی مشهد.

حسنی، ب.، ژیانی عیدگاهی، ا. و ظریف مقدم، ن.، (۱۳۹۰)، "تحلیل دینامیکی مسائل دو بعدی الاستیک به روش ایزوژئومتریک " ، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

ظریف مقدم، ن.، (۱۳۸۳)، پایان نامه کارشناس ارشد، "بهینه‌سازی شکل سازه‌ها با استفاده از روش تغییرات مرزی"، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود.

ظریف مقدم، ن. و حسنی، ب. (۱۳۸۹-ب)، "استفاده از اسپلاینها در مدلسازی و تحلیل مسایل تنش/کرنش مسطح " ، پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران.

مراجع لاتین:

ABOUDI, J., PINDERA, M.-J. & ARNOLD, S. M. 1999. Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials. *Composites, Part B,* 30**,** 777–832.

ANDERS, D., WEINBERG, K. & REICHARDT, R. Isogeometric analysis of thermal diffusion in binary blends. *Computational Materials Science,* In Press, Corrected Proof.

BAZILEVS, Y. & AKKERMAN, I. 2010. Large eddy simulation of turbulent Taylor-

Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics,* 229**,** 3402-3414.

BAZILEVS, Y., BEIRAO DE VEIGA, L., COTTRELL, J. A., HUGHES, T. J. R. & SANGALLI, G. 2006. Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,* 16**,** 1031–1090.

BAZILEVS, Y., CALO, V. M., COTTRELL, J. A., EVANS, J. A., HUGHES, T. J. R., LIPTON, S., SCOTT, M. A. & SEDERBERG, T. W. 2010. Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 229-263.

BAZILEVS, Y., GOHEAN, J. R., HUGHES, T. J. R., MOSER, R. D. & ZHANG, Y. 2009. Patient-specific isogeometric fluid-structure interaction analysis of thoracic aortic blood flow due to implantation of the Jarvik 2000 left ventricular assist device. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 198**,** 3534-3550.

BEIRÃO DA VEIGA, L., BUFFA, A., CHO, D. & SANGALLI, G. 2011. IsoGeometric analysis using T-splines on two-patch geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 200**,** 1787-1803.

BENDSOE, M. P. 1995. *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*, Springer.

BENDSOE, M. P. & SIGMUND, O. 2003. *Topology Optimization, Theory, Methods and Applications*, Springer-Verlag.

BENSON, D. J., BAZILEVS, Y., HSU, M. C. & HUGHES, T. J. R. 2010. Isogeometric shell analysis: The Reissner-Mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 276-289.

BENSON, D. J., BAZILEVS, Y., HSU, M. C. & HUGHES, T. J. R. 2011. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 200**,** 1367-1378.

BHATTI, M. A. 2000. *Practical optimization methods with Mathematica applications*, Springer.

BHATTI, M. A. 2005. *Fundamental Finite Element Analysis and Applications*, John-Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

BUFFA, A., SANGALLI, G. & VÁZQUEZ, R. 2010. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 1143-1152.

CHO, S. & HA, S.-H. 2008. Isogeometric shape design optimization: exact geometry and enhanced sensitivity. *Struct. Multidisc. Optim.***,** DOI 10.1007/s00158-008-0266-z.

CHRISTENSEN, P. W. & KLARBRING, A. 2009. *An Introduction to Structural Optimization*, Springer Science.

COTTRELL, J. A., HUGHES, T. J. R. & BAZILEVS, Y. 2009. *Isogeometric analysis : toward integration of CAD and FEA,* Chichester, West Sussex, U.K. ; Hoboken, NJ, Wiley.

COTTRELL, J. A., REALI, A., BAZILEVS, Y. & HUGHES, T. J. R. 2006. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 195**,** 5257-5296.

DEMPSKI, K. 2003. *Focus on Curves and Surfaces*, Premier Press.

DEY, T. K. 2007. *Curve and Surface Reconstruction*, Cambridge University Press.

DÖRFEL, M. R., JÜTTLER, B. & SIMEON, B. 2010. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 264-275.

DORIGO, M., DI CARO, G. & SAMPELS, M. 2002. *Ant Algorithms*, Springer-Verlag.

DORIGO, M. & STUTZLE, T. 2004. *Ant Colony Optimization*, Massachusetts Institute of Technology.

DOT 1999. *DESIGN OPTIMIZATION TOOLS, USERS MANUAL, Ver 5*, Vanderplaats Research & Development, Inc.

ELGUEDJ, T., RÉTHORÉ, J. & BUTERI, A. 2011. Isogeometric analysis for strain field measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 200**,** 40-56.

FARIN, G. 2002. *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide*, MORGAN KAUFMANN PUBLISHERS.

FARIN, G., HOSCHEK, J. & KIM, M.-S. 2002. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, ELSEVIER.

FRANCAVILLA, A., RAMAKRISHNAN, C. V. & ZIENKIEWICZ, O. C. 1975. Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration. *Strain Anal. Engrg. Design,* 10**,** 63-70.

GOLDBERG, R. K. & HOPKINS, D. A. 1995. Thermal Analysis of a Functionally Graded Material Subject to a Thermal Gradient Using the Boundary Element Method. *Compos. Methods Appl. Mech. Eng.,,* 5**,** 793–806.

GOLDMAN, R. N. 1991. *Knot Insertion and Deletion Algorithms for B-Spline Curves and Surfaces*, SIAM.

GOMES, A. J. P., VOICULESCU, I., JORGE, J., WYVILL, B. & GALBRAITH, C. 2009. *Implicit Curves and Surfaces:Mathematics, Data Structures and Algorithms*, Springer.

GÓMEZ, H., CALO, V. M., BAZILEVS, Y. & HUGHES, T. J. R. 2008. Isogeometric analysis of the Cahn-Hilliard phase-field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 197**,** 4333-4352.

HAFTKA, R. T. & GRANDHI, R. V. 1986. Structural Shape Optimization – A Survey. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.,* 57**,** 91-106.

HASLE, G., LIE, K.-A. & QUAK, E. 2007a. *Geometric Modelling, Numerical Simulation, and Optimization: Applied Mathematics at SINTEF*, Springer.

HASLE, G., LIE, K.-A. & QUAK, E. 2007b. *Geometric Modelling, Numerical Simulation, and Optimization:Applied Mathematics at SINTEF*, Springer-Verlag.

HASSANI, B. & HINTON, E. 1999. *Homogenization and Structural Topology Optimization, Theory, Practice and Software*, Springer-Verlag.

HASSANI, B., KHANZADI, M. & TAVAKKOLI, S. M. 2011a. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria. *Struct Multidisc Optim***,** DOI 10.1007/s00158-011-0680-5.

HASSANI, B., KHANZADI, M., TAVAKKOLI, S. M. & MOGHADAM, N. Z. Isogeometric shape optimization of three dimensional problems. WCSMO09, 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June 1 - 5 2009a Lisbon, Portugal.

HASSANI, B. & MOGHADDAM, N. Z. 2010. Isogeometrical Analysis of Functionally Graded Materials in Plane Elasticity Problems. *SEMC2010, The Fourth International Conference on Structural Engineering, Mechanics and*

Computation. Cape Town, South Africa.
HASSANI, B., TAVAKKOLI, S. M. & MOGHADAM, N. Z. 2011b. Application of isogeometric analysis in structural shape optimization. *Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering*, doi:10.1016/j.scient.2011.07.014.
HASSANI, B., ZARIF MOGHADDAM, N. & TAVAKKOLI, S. M. 2009b. ISOGEOMETRICAL SOLUTION OF LAPLACE EQUATION. *ASIAN JOURNALOF CIVIL ENGINEERING,* 10**,** 579-592.
HINTON, E., SIENZ , J. & OZAKA, M. 2003. *Analysis and Optimization of Prismatic and Axisymmetric Shell Structures* Springer-Verlag
HOFEIM. Higher Order Finite Element and Isogeometric Method. June 27-29 2011 Krakow, Poland. http://www.hofeim.i5.edu.pl/.
HSU, M.-C., AKKERMAN, I. & BAZILEVS, Y. 2011. High-performance computing of wind turbine aerodynamics using isogeometric analysis. *Computers & Fluids,* 49**,** 93-100.
HUANG, X. & XIE, Y. M. 2010. *EVOLUTIONARY TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURES, METHODS AND APPLICATIONS*, John Wiley & Sons, Ltd.
HUGHES, T. J. R., COTTRELL, J. A. & BAZILEVS, Y. 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 194**,** 4135-4195.
HUGHES, T. J. R., REALI, A. & SANGALLI, G. 2010. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 301-313.
IGA. IGA-2011: Isogeometric Analysis 2011, Integrating Design and Analysis. *In:* AUSTIN, U. O. T. A., ed. IGA-2011, January 13-15 2011 United States, http://www.ices.utexas.edu/iga/.
JUTTLER, B. & PIENE, R. 2008. *Geometric Modeling and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag.
KATSIKADELIS, J. T. 2002. *Boundary Elements: Theory and Applications*, Elsevier Science Ltd.
KIENDL, J., BAZILEVS, Y., HSU, M. C., WÜCHNER, R. & BLETZINGER, K. U. 2010. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures comprised of multiple patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 2403-2416.
KIENDL, J., BLETZINGER, K. U., LINHARD, J. & WÜCHNER, R. 2009. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 198**,** 3902-3914.
KIM, H.-J., SEO, Y.-D. & YOUN, S.-K. 2009. Isogeometric analysis for trimmed CAD surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 198**,** 2982-2995.
KIM, H.-J., SEO, Y.-D. & YOUN, S.-K. 2010. Isogeometric analysis with trimming technique for problems of arbitrary complex topology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 2796-2812.
KIM, J. H. & PAULINO, G. H. 2002. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *ASME J Appl Mech,* 69**,** 502-514.
LI, K. & QIAN, X. 2011. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. *Computer-Aided Design*.

LU, J. 2009. Circular element: Isogeometric elements of smooth boundary. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 198**,** 2391-2402.

LU, J. 2011. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 200**,** 726-741.

LU, J. & ZHOU, X. 2011. Cylindrical element: Isogeometric model of continuum rod. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 200**,** 233-241.

MANNI, C., PELOSI, F. & LUCIA SAMPOLI, M. 2011. Generalized B-splines as a tool in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 200**,** 867-881.

NAGY, A. P., ABDALLA, M. M. & GÜRDAL, Z. 2010. Isogeometric sizing and shape optimisation of beam structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 1216-1230.

NIELSEN, P. N., GERSBORG, A. R., GRAVESEN, J. & PEDERSEN, N. L. Discretizations in Isogeometric Analysis of Navier-Stokes Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* In Press, Accepted Manuscript.

OZTURK, M. & ERDOGAN, F. 1999. The Mixed Mode Crack Problem in an Inhomogeneous Orthotropic Medium. *Int. J. Fract.,* 98**,** 243–261.

PAULINO, G. H. & JIN, Z.-H. 2000. Viscoelastic Functionally Graded Materials Subjected to Antiplane Shear Fracture. *ASME J. Appl. Mech.,,* 68**,** 284–293.

PETERS, J. & REIF, U. 2008. *Subdivision Surfaces*, Springer-Verlag.

PIEGL, L. A. & TILLER, W. 1997. *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)* Springer-Verlag.

PINDERA, M. J. & DUNN, P. 1997. Evaluation of the Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials Via the Finite-Element Method. *Composites, Part B,* 28**,** 109–119.

RAO, S. S. 1996. *ENGINEERING OPTIMIZATION, Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc.

REDDY, J. N. 1993. *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, Inc.

ROGERS, D. F. 2001. *An introduction to NURBS : with historical perspective*, Morgan Kaufmann Publishers.

SALOMON, D. 2006. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer.

SANTARE, M. H. & LAMBROS, J. 2000. Use of Graded Finite Elements to Model the Behavior of Nonhomogeneous Materials. *ASME J. Appl. Mech.,* 67**,** 819–822.

SEO, Y.-D., KIM, H.-J. & YOUN, S.-K. 2010a. Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 199**,** 3270-3296.

SEO, Y.-D., KIM, H.-J. & YOUN, S.-K. 2010b. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis. *International Journal of Solids and Structures,* 47**,** 1618-1640.

SHIOTA, I. & MIYAMOTO, Y. 1997. *FUNCTIONALLY GRADED 1996*, ELSEVIER.

SPILLERS, W. R. & MACBAIN, K. M. 2009. *Structural Optimization*, Springer Science.

SUTRADHAR, S., PAULINO, G. H. & GRAY, L. J. 2002. Transient Heat Conduction in Homogeneous and Non-Homogeneous Materials by the Laplace Transform Galerkin Boundary Element Method. *Eng. Anal. Bound. Elem.,,* 26**,** 119–132.

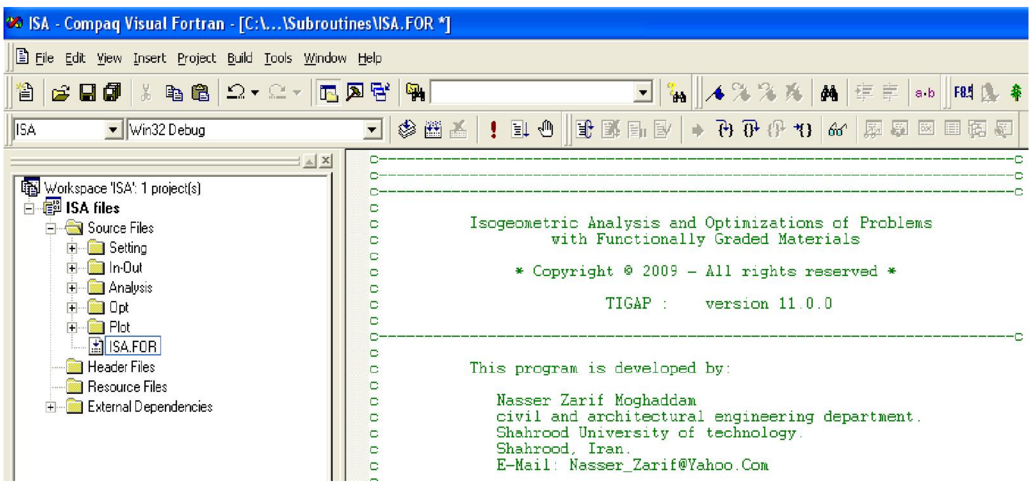
TEMIZER, I., WRIGGERS, P. & HUGHES, T. J. R. 2011. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics*

and Engineering, 200**,** 12.
WALL, W. A., FRENZEL, M. A. & CYRON, C. 2008. Isogeometric structural shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 197**,** 2976-2988.
WARREN, J. & WEIMER, H. 2002. *Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach*, Morgan Kaufmann Publishers.
ZHANG, Y., BAZILEVS, Y., GOSWAMI, S., BAJAJ, C. L. & HUGHES, T. J. 2007. Patient-Specific Vascular NURBS Modeling for Isogeometric Analysis of Blood Flow. *Comput Methods Appl Mech Eng,* 196**,** 2943-2959.
ZIANI, M., DUVIGNEAU, R. & DORFEL, M. R. 2010. On the role played by NURBS weights in isogeometric structural shape optimization. *V International Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization Cartagena.* Spain.
ZIENKIEWICZ, O. C. & CAMPBELL, J. 1973. Shape optimization and sequential linear programming,. *Optimum Structural Design, Wiley, New York***,** 109-126.

پیوست الف: معرفی برنامه GIGAP

الف-۱ معرفی برنامه GIGAP

برنامه GIGAP[۱۲۱] تحت زبان برنامه نویسی فرترن و در نرم افزار Compaq Visual Fortran V6.6 نوشته شده است. برنامه در پنج بخش اصلی سازماندهی شده است که عبارتند از بخشهای تنظیمات، مدیریت ورود و خروج اطلاعات، تحلیل، بهینه سازی و اطلاعات ترسیم. شمای کلی برنامه در شکل (الف-۱) قابل ملاحظه است.



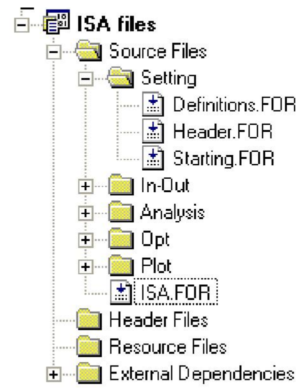
شکل الف-۱: شمای کلی برنامه GIGAP

الف-۲ بخشهای مختلف برنامه

الف-۲-۱ بخش تنظیمات

این بخش شامل تنظیمات مربوط به چاپ خروجی‌ها و تعریف متغیرهای مورد استفاده در کل برنامه می‌باشد. همچنین ابعاد آرایه های هر متغیر در این بخش تعیین می‌شود (الف-۲).

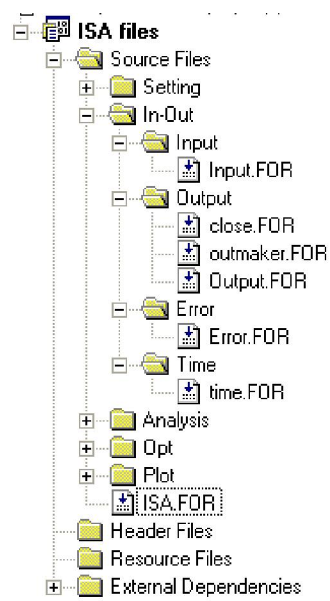
[121] Generalized IsoGeometrical Analysis Program (GIGAP)



شکل الف-۲: بخش تنظیمات در برنامه GIGAP

الف-۲-۲ بخش مدیریت فایلهای ورودی و خروجی

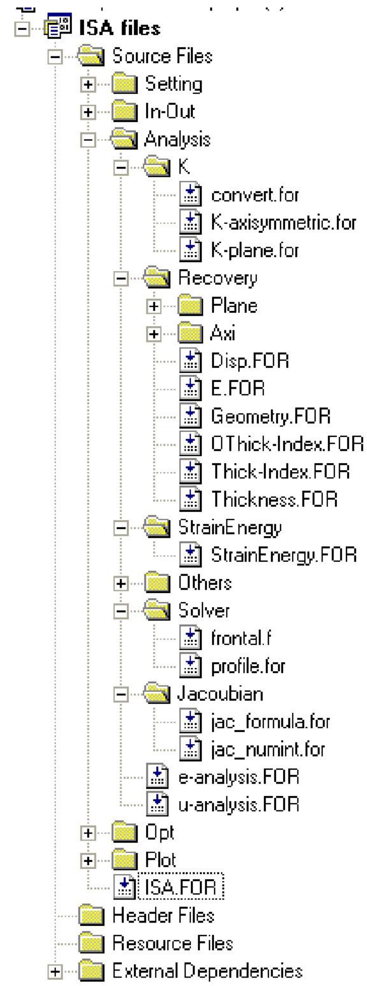
این بخش مختص به خواندن فایلهای ورودی، چاپ فایلهای خروجی، خطا یابی در حین اجرای برنامه و محاسبه زمان مصرف شده در هر بخش از برنامه می‌باشد(الف-۳).



شکل الف-۳: بخش مدیریت فایلهای ورودی و خروجی در برنامه GIGAP

الف-۲-۳ بخش تحلیل

در این بخش کلیه مراحل تحلی سازه شامل محاسبه ماتریس ضرایب مسایل تنش/کرنش مسطح و تقارن محوری، بازیابی هندسه، تغییرمکان، تنش و کرنش، محاسبه انرژی کرنشی، محاسبه کلیه پارامترهای تکنیک نربز، محاسبه ژاکوبینهای ناشی از انتگرالگیری عددی و فرمولبندی و حل گر دستگاه معادلات حاصله می‌باشد (الف-۴).



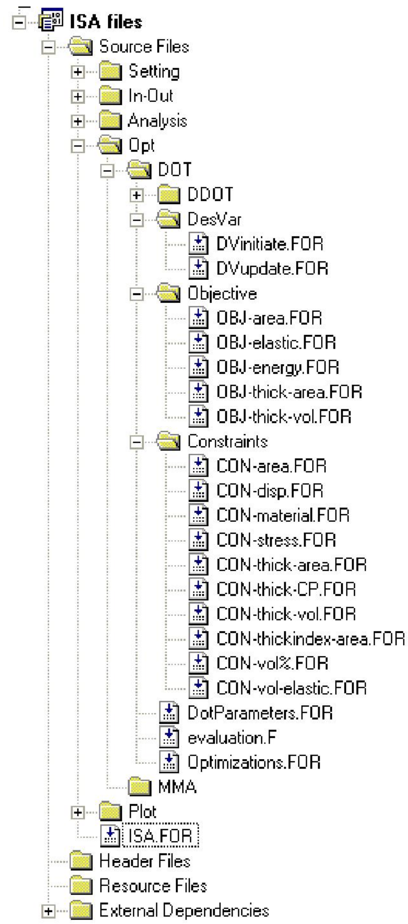
شکل الف-۴:بخش تحلیل سازه در برنامه GIGAP

الف-۲-۴ بخش بهینه سازی

در این بخش با استفاده از سابروتینهای DOT[122] که توسط پروفسور وندرپلات[123] تهیه شده

[122] Design Optimization Tool (DOT)

است برنامه را قادر میسازد تا مسایل بهینه سازی را حل کند. تعریف متغیرهای طراحی و مقدار دهی اولیه به انها، تعریف انواع مختلف توابع هدف و قیود متنوع قابل استفاده در مسایل بهینه سازی از جمله بخشهایی است که در این رساله تهیه شده و به برنامه اضافه گردیده است (الف-۵).



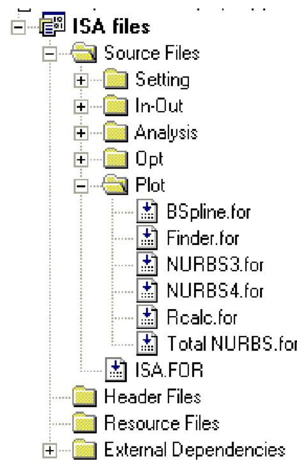
شکل الف-۵:بخش بهینه سازی در برنامه GIGAP

الف-۲-۵ بخش ترسیم

پس از انجام محاسبات و یا در حین انجام محاسبات لازم است تا مشخصات هندسی مساله به طور کامل در دسترس برنامه باشد. این بخش با استفاده از روابط اسپلاین و نربز در هر زمانی که برنامه نیاز به اطلاعاتی از هندسه مساله دارد، این امکان را فراهم کرده و در نهایت نیز خروجیها را

[123] Vanderplaat

جهت نمایش در برنامه های گرافیکی مانند TecPlot در فایلهای خروجی گردآوری می‌نماید (الف-۶).



شکل الف-۶:بخش ترسیم در برنامه GIGAP

الف-۳ متغیرهای اصلی در برنامه

برخی از متغیرهای مورد استفاده در برنامه به همراه توضیح مربوط به آن در زیر قابل مشاهده است. البته متغیرهای بیشتری نیز وجود دارند که در متن برنامه به تفصیل توضیح داده شده اند.

```
c
c        Defining some of the used parameters:
c
c        nelem = number of elements
c        npoin = total number of points
c        nnode = number of nodes for each elements =(n1+1)(n2+1(
c        ndofn = number of d.o.f in each elements
c        ngaus = number of gaus points
c        nvfix = number of restrained points
c        nload = number of loaded points
c        nevab = nnode*ndofn  number of element variables
c        ntotv = npoin*ndofn  total number of variables
c        noptm = number of optimization procedure
c        nopti = optimization parameters
c        neval = type of obj. and const. computing
c        nsolv = number of solver procedure
c        ntype = type of problem
c        thick = thickness of problem
c        fract = percentage of the volume for topology optimization
c        ncpsh = number of control points for shape optimization
c        ncpmt = number of control points for material optimization
c        maxit = maximum iteration for stop the optimization process
c        nseg1 = number of segment in x direction
c        nseg2 = number of segment in y direction
```

الف-۴ خلاصه ای از روند تکامل برنامه

در ادامه همانگونه که ملاحظه می‌شود تاریخچه تکمیل این برنامه به همراه اصلاحات و امکانات

اضافه شده به برنامه نشان داده شده است. این برنامه از ورژن شماره یک شروع و تا ورژن یازده ادامه یافته است. البته هنوز می‌توان به برنامه امکانات بیشتری نیز اضافه نمود. مطالب اضافه شده در هر ورژن در متن زیر قابل مشاهده می‌باشد.

```
c-------------------------------------------------------------------c
c-------------------------------------------------------------------c
c-------------------------------------------------------------------c
c
c          Isogeometric Analysis and Optimizations of Problems
c                   with Functionally Graded Materials
c
c               * Copyright © 2011 - All rights reserved*
c
c                         GIGAP : version 11.0.0
c
c-------------------------------------------------------------------c
c
c          This program is developed by :
c
c             Nasser Zarif Moghaddam
c             civil and architectural engineering department.
c             Shahrood University of technology.
c             Shahrood, Iran.
c             E-Mail: Nasser_Zarif@Yahoo.Com
c
c
c    start project: Fri 1387/04/14
c                 - Version 1.0.0
c                 - writing the program, generally.
c
c    latest update: Mon 1387/04/31  (21 July, 2008(
c                 - Version 1.5.0
c                 - geometry recovery
c                 - compute the displacements and reactions
c
c    latest update: Mon 1387/05/01
c                 - Version 1.8.5
c                 - stress recovery
c                 - minor modifications in programming
c
c    latest update: Sat 1387/05/12  ( 2 August, 2008(
c                 - Version 2.5.5
c                 - add patches
c                 - minor modifications in programming
c                 - major modifications in array dimensions
c
c    latest update: Sat 1387/08/04
c                 - Version 2.5.8
c                 - add some comments for clarification.
c
c    latest update: Sat 1387/11/22
c                 - Version 2.7.0
c                 - add some comments for clarification.
c                 - modify the formula for C66 in stress recovery.
c
c    latest update: Sat 1387/11/29
c                 - Version 2.9.0
c                 - debug for Mu12 , Mu21.
c                 - total output in single file for tecplot
c
c    latest update: Sat 1388/01/07  ( 27 March, 2009(
c                 - Version 3.1.0
c                 - add von-mises stress
c                 - modify for reading the optimization data
c
```

```
c    latest update: Sat 1388/01/15  ( 04 April, 2009(
c                 - Version 4.0.0
c                 - modify programming generally
c                 - making public variable by modules
c                 - delete unused lines in source code
c
c    latest update: Sat 1388/01/16  ( 05 April, 2009(
c                 - Version 4.5.0
c                 - add objective function calculations
c                 - add constraints calculations
c
c    latest update: Sat 1388/01/17  ( 06 April, 2009(
c                 - Version 4.6.5
c                 - add some comments for clarification.
c                 - modify output for displacements
c                 - solving the first shape optimization problem
c
c    latest update: Sat 1388/01/19  ( 08 April, 2009(
c                 - Version 4.8.0
c                 - add some comments for clarification.
c                 - add output file for time of computing.
c                 - debug for computing g(i) constraints
c                 - minor changes in formats and outputs
c
c    latest update: Sat 1388/01/21  ( 10 April, 2009(
c                 - Version 5.0.0
c                 - add strain energy computations.
c
c    latest update: Sat 1388/03/10  ( 31 May, 2009(
c                 - Version 5.1.0
c                 - add output surface for E and Nu.
c
c    latest update: Sat 1388/03/16  ( 06 June, 2009(
c                 - Version 5.2.0
c                 - add some comments for clarification.
c                 - minor changes in input file for (neval(
c                 - minor changes in input file for (maxit(
c
c    latest update: Sat 1388/03/25  ( 15 June, 2009(
c                 - Version 5.3.0
c                 - add some comments for clarification.
c                 - major change in the variable name.
c                 - minor changes in input file for (ndofn(
c                 - add error subroutine for debugging
c
c    latest update: Sat 1388/03/27  ( 17 June, 2009(
c                 - Version 6.0.0
c                 - add frontal solver.
c
c    latest update: Sat 1388/03/29  ( 19 June, 2009(
c                 - Version 7.1.5
c                 - add profile (or sky) solver.
c                 - add some comments for clarification.
c
c    latest update: Sat 1388/04/05  ( 26 June, 2009(
c                 - Version 7.2.0
c                 - given the name ISA.
c                 - add some comments for clarification.
c                 - tested for frontal and profile solver
c
c    latest update: Sat 1388/04/10  ( 1 July, 2009(
c                 - Version 7.2.5
c                 - collecting all output in one file for TecPlot
c
c    latest update: Sat 1388/04/11  ( 2 July, 2009(
c                 - Version 7.3.0
c                 - modify elasticity coeff. according to reddy book
c                 - add some comments for elacticity coefficients.
c                 - elimination of (nnode) from input file.
c
c    latest update: Thu 1388/04/25  (15 July, 2009(
c                 - Version 7.4.0
c                 - seperate array for more precision output
```

```
c
c    latest update: Sat 1388/05/10  ( 1 August, 2009(
c                 - Version 7.5.0
c                 - element base output for tecplot
c
c    latest update: Sun 1388/05/25  (16 August, 2009(
c                 - Version 7.6.0
c                 - add shape rotation value in the input file
c
c    latest update: Tus 1388/05/27  (18 August, 2009(
c                 - Version 7.7.0
c                 - modify disp., stress and strain for rotation
c
c    latest update: Sat 1388/06/07  (29 August, 2009(
c                 - Version 8.0.0
c                 - modify input for g12 and eliminate nu21
c
c    latest update: Sat 1388/08/22  (13 November, 2009(
c                 - Version 8.0.5
c                 - add some comments for clarification.
c
c    latest update: Sat 1388/08/22  (13 November, 2009(
c                 - Version 8.5.0
c                 - add some comments for clarification.
c                 - add nurbs formulation.(not completed yet(
c
c    latest update: Sat 1388/11/22  (12 February, 2010(
c                 - Version 8.5.5
c                 - add some comments for clarification.
c                 - add nurbs formulation.(not completed yet(
c
c    latest update: Sat 1388/11/24  (14 February, 2010(
c                 - Version 10.0.5
c                 - add some comments for clarification.
c                 - add nurbs formulation.(not completed yet(
c                 - add new OBJ and CON for topology optimization.
c
c    latest update: Sat 1388/11/25  (15 February, 2010(
c                 - Version 10.1.0
c                 - add nurbs formulation.(not completed yet(
c                 - input thick as a surface instead of Constant value
c                   for using in the topology optimization.
c
c    latest update: Sat 1388/11/30  (19 February, 2010(
c                 - Version 10.5.0
c                 - add nurbs formulation.(not completed yet(
c                 - add various objective and constraint for optimization
c
c    latest update: Sat 1389/02/01  (21 April, 2010(
c                 - Version 10.8.0
c                 - First Axisymmetric problem is solved
c
c    latest update: Sat 1389/04/11  (02 July, 2010(
c                 - Version 10.9.0
c                 - modification in the optimization strategy
c
c    latest update: Sat 1389/07/09  (30 september, 2010(
c                 - Version 11.0.0
c                 - modification in the optimization strategy
c
```

پیوست ب: مشخصات مساله ارتوتروپیک FGM

ب-۱ مشخصات مورد استفاده در حل مساله صفحه مربعی طره با مصالح ارتوتروپیک FG

در این پیوست فایل ورودی مساله مورد بحث جهت کنترل جوابها توسط سایر علاقه‌مندان به مباحث این رساله ارایه شده است. این فایل به شرح زیر است.

```
********************************************
    Isogeometric Analysis of Plane Problems
********************************************
 * Copyright © 2011 - All rights reserved *

      Developed by: N. Zarif Moghaddam

 Civil and Structural Engineering Department
   Shahrood University of Technology, Iran
=============================================

Example: for material optimization

=============================================

OUTPUT FILE NAME  : Ortho121

Number of Patches                npach=   1
Number of total control points   ntcpt= 121

Type (1=strs 2=strn 3=axi)       ntype=   1
Number of D . O . F              ndofn=   2
Number of gauss Points           ngaus=   9
Number of bondary condition      nvfix=  11
Number of Point loads            nload=   1
Rotation Value about Z axis(deg) rotaz=  0.00
Solver 1=frontal , 2=profile     nsolv=   2
optimizer 1=DOT , 2=MMA          noptm=   1

Analysis(0) or Optimization(1)   nopti=   1
Number of var C.P. (shape)       ncpsh=   0
Number of var C.P. (material)    ncpmt=   0
type of objective & constraint   neval=   5
type of opt                      ntopo=   1
stop after maximum iterations    maxit=   0

Number of segment in x-dir       nseg1=  10
Number of segment in y-dir       nseg2=  10

Number of segment in x-dir       nseg1=  100
Number of segment in y-dir       nseg2=  100


Direction x for each patches
----------------------------
Dimension of Knot Vector {0,...,m}. m1=  13
Number of Control Points {0,...,n}. n1=  10
Degree of B-Spline Basis Functions. p1=   2
Kth Derivatives of Basis Functions. k1=   1

Direction y for each patches
----------------------------
Dimension of Knot Vector {0,...,m}. m2=  13
Number of Control Points {0,...,n}. n2=  10
Degree of B-Spline Basis Functions. p2=   2
Kth Derivatives of Basis Functions. k2=   1

KnotVector (Dir-X) i       ui
                   0    0.000000000000
```

```
                     1    0.000000000000
                     2    0.000000000000
                     3    0.111111111111
                     4    0.222222222222
                     5    0.333333333333
                     6    0.444444444444
                     7    0.555555555556
                     8    0.666666666667
                     9    0.777777777778
                    10    0.888888888889
                    11    1.000000000000
                    12    1.000000000000
                    13    1.000000000000

      KnotVector (Dir-y) i       ui
                     0    0.000000000000
                     1    0.000000000000
                     2    0.000000000000
                     3    0.111111111111
                     4    0.222222222222
                     5    0.333333333333
                     6    0.444444444444
                     7    0.555555555556
                     8    0.666666666667
                     9    0.777777777778
                    10    0.888888888889
                    11    1.000000000000
                    12    1.000000000000
                    13    1.000000000000
      ---------------------------------------------------------------------------------
--
      Coordinates of Control Points and other informations for patch number 1 are :
       i      x-coord     y-coord    z-coord      z-E1          z-E2         z-Mu12
z-G12       z-f1        z-f2        weight    thick   t-index
      ---------------------------------------------------------------------------------
--
       1     0.0000  0.0000     0.0000     22794.184        73977.217      0.098
10378.182    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       2     0.1000  0.0000     0.0000     42441.424        12718.582      0.136
18684.510    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       3     0.2000  0.0000     0.0000     80791.151        24139.029      0.017
39720.550    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       4     0.3000  0.0000     0.0000     44226.971        18095.794      0.103
20052.240    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       5     0.4000  0.0000     0.0000     55575.661        45523.551      0.101
25248.431    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       6     0.5000  0.0000     0.0000     12237.145         6875.155      0.130
5414.756     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       7     0.6000  0.0000     0.0000     93121.385        89121.107      0.112
41856.842    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       8     0.7000  0.0000     0.0000     29496.824        84403.012      0.216
12127.785    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
       9     0.8000  0.0000     0.0000      1156.241        57128.007      0.046
552.855     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      10     0.9000  0.0000     0.0000     54287.678        34794.615      0.134
23944.513    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      11     1.0000  0.0000     0.0000     65963.086        52328.147      0.127
29256.384    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      12     0.0000  0.1000     0.0000     76858.608        71120.169      0.014
37895.574    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      13     0.1000  0.1000     0.0000     87966.514        74711.730      0.214
36243.744    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      14     0.2000  0.1000     0.0000     53579.373        12132.671      0.234
21712.915    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      15     0.3000  0.1000     0.0000     56396.195        11861.422      0.020
27642.222    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      16     0.4000  0.1000     0.0000     55430.519        31641.757      0.007
27536.076    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      17     0.5000  0.1000     0.0000     72812.534        62370.911      0.118
32568.105    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      18     0.6000  0.1000     0.0000     55842.299        44455.608      0.018
27435.110    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      19     0.7000  0.1000     0.0000     32867.241        56072.260      0.111
```

14787.173	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
20	0.8000	0.1000	0.0000	66464.655		95478.611	0.112
29881.894	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
21	0.9000	0.1000	0.0000	79265.931		54401.931	0.039
38157.361	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
22	1.0000	0.1000	0.0000	11944.492		99376.233	0.048
5698.628	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
23	0.0000	0.2000	0.0000	12274.530		24494.153	0.036
5921.274	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
24	0.1000	0.2000	0.0000	5910.688		3390.827	0.219
2423.746	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
25	0.2000	0.2000	0.0000	84331.088		54388.846	0.185
35595.653	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
26	0.3000	0.2000	0.0000	41935.315		41639.210	0.143
18342.546	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
27	0.4000	0.2000	0.0000	35463.274		99136.416	0.018
17419.276	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
28	0.5000	0.2000	0.0000	75196.863		81259.601	0.090
34488.609	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
29	0.6000	0.2000	0.0000	96823.443		77552.501	0.084
44671.636	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
30	0.7000	0.2000	0.0000	86133.402		75093.969	0.181
36471.225	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
31	0.8000	0.2000	0.0000	48118.623		59423.184	0.198
20083.766	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
32	0.9000	0.2000	0.0000	85559.206		77627.731	0.128
37937.296	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
33	1.0000	0.2000	0.0000	78459.015		42355.228	0.245
31500.912	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
34	0.0000	0.3000	0.0000	1397.932		91011.168	0.023
683.115	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
35	0.1000	0.3000	0.0000	48250.446		19140.035	0.115
21632.455	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
36	0.2000	0.3000	0.0000	22550.141		83217.151	0.024
11013.842	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
37	0.3000	0.3000	0.0000	43932.377		45954.800	0.160
18932.177	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
38	0.4000	0.3000	0.0000	13362.231		45923.269	0.140
5858.909	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
39	0.5000	0.3000	0.0000	38364.924		96213.072	0.053
18213.804	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
40	0.6000	0.3000	0.0000	45708.791		67020.415	0.228
18610.484	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
41	0.7000	0.3000	0.0000	3360.789		43715.903	0.217
1380.857	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
42	0.8000	0.3000	0.0000	28303.121		32254.497	0.240
11412.577	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
43	0.9000	0.3000	0.0000	62405.992		91982.061	0.183
26370.024	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
44	1.0000	0.3000	0.0000	57330.869		49080.205	0.181
24272.527	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
45	0.0000	0.4000	0.0000	8838.898		51493.878	0.113
3971.521	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
46	0.1000	0.4000	0.0000	99172.991		13014.726	0.212
40898.365	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
47	0.2000	0.4000	0.0000	19005.262		5954.044	0.151
8256.684	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
48	0.3000	0.4000	0.0000	29707.371		19976.168	0.244
11938.419	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
49	0.4000	0.4000	0.0000	65226.848		73497.375	0.070
30488.168	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
50	0.5000	0.4000	0.0000	79815.356		42770.677	0.225
32586.362	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
51	0.6000	0.4000	0.0000	94236.177		43965.791	0.080
43631.036	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
52	0.7000	0.4000	0.0000	88121.123		91674.702	0.108
39766.761	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
53	0.8000	0.4000	0.0000	70452.223		21528.729	0.118
31512.190	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
54	0.9000	0.4000	0.0000	66174.600		64041.749	0.035
31969.074	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
55	1.0000	0.4000	0.0000	28202.874		71000.974	0.164
12114.940	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000		
56	0.0000	0.5000	0.0000	92094.571		59807.684	0.098

41948.622	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
57	0.1000	0.5000	0.0000	47703.413	75158.563	0.214
19649.233	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
58	0.2000	0.5000	0.0000	33998.637	81467.849	0.207
14079.101	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
59	0.3000	0.5000	0.0000	73366.383	48676.364	0.151
31865.376	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
60	0.4000	0.5000	0.0000	64196.546	86404.971	0.061
30260.601	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
61	0.5000	0.5000	0.0000	56453.317	5937.896	0.192
23689.702	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
62	0.6000	0.5000	0.0000	95256.160	30396.898	0.130
42156.810	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
63	0.7000	0.5000	0.0000	14195.351	77551.341	0.179
6017.890	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
64	0.8000	0.5000	0.0000	97487.650	34862.654	0.076
45309.054	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
65	0.9000	0.5000	0.0000	87438.218	31607.411	0.030
42444.593	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
66	1.0000	0.5000	0.0000	73070.927	33459.705	0.034
35350.207	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
67	0.0000	0.6000	0.0000	8367.433	79988.398	0.155
3622.370	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
68	0.1000	0.6000	0.0000	6649.233	39472.320	0.091
3048.092	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
69	0.2000	0.6000	0.0000	68493.117	65830.286	0.192
28728.265	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
70	0.3000	0.6000	0.0000	90310.489	4549.254	0.012
44638.945	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
71	0.4000	0.6000	0.0000	32097.545	4971.518	0.120
14329.709	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
72	0.5000	0.6000	0.0000	50749.873	15419.918	0.024
24779.439	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
73	0.6000	0.6000	0.0000	74880.902	54467.080	0.004
37309.078	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
74	0.7000	0.6000	0.0000	11756.629	40285.283	0.188
4949.835	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
75	0.8000	0.6000	0.0000	1932.057	30165.582	0.044
925.145	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
76	0.9000	0.6000	0.0000	92445.104	35933.474	0.039
44478.066	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
77	1.0000	0.6000	0.0000	18291.883	11770.029	0.196
7648.225	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
78	0.0000	0.7000	0.0000	28173.981	55617.818	0.060
13287.124	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
79	0.1000	0.7000	0.0000	9341.930	25426.051	0.007
4636.457	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
80	0.2000	0.7000	0.0000	90271.710	14781.808	0.026
43984.251	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
81	0.3000	0.7000	0.0000	69033.727	37959.071	0.063
32466.861	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
82	0.4000	0.7000	0.0000	32909.823	99123.103	0.240
13275.354	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
83	0.5000	0.7000	0.0000	21086.513	15889.998	0.131
9325.743	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
84	0.6000	0.7000	0.0000	21376.184	85503.873	0.133
9429.493	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
85	0.7000	0.7000	0.0000	82714.118	59813.507	0.216
34023.944	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
86	0.8000	0.7000	0.0000	60061.606	84298.212	0.133
26508.925	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
87	0.9000	0.7000	0.0000	6746.948	39707.233	0.187
2840.988	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
88	1.0000	0.7000	0.0000	12855.013	58895.902	0.217
5280.563	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
89	0.0000	0.8000	0.0000	42032.507	30972.734	0.045
20108.591	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
90	0.1000	0.8000	0.0000	74714.414	42247.750	0.016
36780.284	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
91	0.2000	0.8000	0.0000	75009.764	6941.395	0.215
30876.579	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
92	0.3000	0.8000	0.0000	92238.436	74109.901	0.078
42796.998	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	
93	0.4000	0.8000	0.0000	40779.698	57363.374	0.067

```
19113.924    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      94     0.5000   0.8000     0.0000     67760.651          8526.734      0.245
27218.658    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      95     0.6000   0.8000     0.0000     24773.582        17193.419      0.224
10121.988    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      96     0.7000   0.8000     0.0000     28300.092        67539.442      0.135
12467.443    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      97     0.8000   0.8000     0.0000     16040.618         3967.182      0.134
7070.202     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      98     0.9000   0.8000     0.0000     76025.786        44169.125      0.242
30615.707    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      99     1.0000   0.8000     0.0000     14105.656        67463.842      0.037
6801.418     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     100     0.0000   0.9000     0.0000     52637.204        86754.785      0.095
24039.936    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     101     0.1000   0.9000     0.0000     40196.335        81967.236      0.114
18035.025    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     102     0.2000   0.9000     0.0000     91031.806        19235.451      0.175
38720.824    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     103     0.3000   0.9000     0.0000     37224.035        94061.933      0.003
18548.988    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     104     0.4000   0.9000     0.0000     68621.016        78288.164      0.157
29666.148    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     105     0.5000   0.9000     0.0000        54.449        50811.159      0.200
22.683    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     106     0.6000   0.9000     0.0000     47722.960        35650.491      0.012
23574.252    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     107     0.7000   0.9000     0.0000     37112.548        24921.409      0.239
14973.213    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     108     0.8000   0.9000     0.0000     56049.616        38515.839      0.059
26462.825    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     109     0.9000   0.9000     0.0000     98894.547        74423.363      0.248
39623.351    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     110     1.0000   0.9000     0.0000     22228.489        23973.694      0.177
9441.328     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     111     0.0000   1.0000     0.0000     13427.513        57849.419      0.083
6198.329     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     112     0.1000   1.0000     0.0000     58968.637        96841.265      0.146
25719.391    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     113     0.2000   1.0000     0.0000     22145.392         3780.978      0.192
9287.224     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     114     0.3000   1.0000     0.0000     37822.945        80295.351      0.164
16242.159    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     115     0.4000   1.0000     0.0000     28938.213         3058.799      0.196
12099.581    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     116     0.5000   1.0000     0.0000     71980.569        78109.718      0.060
33944.978    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     117     0.6000   1.0000     0.0000     40473.806        66393.806      0.164
17378.550    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     118     0.7000   1.0000     0.0000     74672.809        96244.940      0.083
34481.029    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     119     0.8000   1.0000     0.0000     64258.751          711.665      0.080
29742.154    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     120     0.9000   1.0000     0.0000     64812.009        35159.386      0.050
30870.349    0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
     121     1.0000   1.0000     0.0000     23099.230        71812.026      0.162
9935.762     0.0000     0.0000      1.000     1.000   1.000
      ------------------------------------------------------------------------------------
--
      - connectivity
       1
       1        2        3        4        5        6        7        8        9       10       11
      12       13       14       15       16       17       18       19       20       21       22
      23       24       25       26       27       28       29       30       31       32       33
      34       35       36       37       38       39       40       41       42       43       44
      45       46       47       48       49       50       51       52       53       54       55
      56       57       58       59       60       61       62       63       64       65       66
      67       68       69       70       71       72       73       74       75       76       77
      78       79       80       81       82       83       84       85       86       87       88
      89       90       91       92       93       94       95       96       97       98       99
      100      101      102      103      104      105      106      107      108      109      110
      111      112      113      114      115      116      117      118      119      120      121
      -------------------------------------------------------
      - boundary conditions  ( apply to global coordinates)
```

```
  1   1  1   0.0000   0.0000
 12   1  1   0.0000   0.0000
 23   1  1   0.0000   0.0000
 34   1  1   0.0000   0.0000
 45   1  1   0.0000   0.0000
 56   1  1   0.0000   0.0000
 67   1  1   0.0000   0.0000
 78   1  1   0.0000   0.0000
 89   1  1   0.0000   0.0000
100   1  1   0.0000   0.0000
111   1  1   0.0000   0.0000
-------------------------------------------------------
- loading  ( apply to global coordinates)
121     0.00  1000.0
-------------------------------------------------------
- shape Opt. (design variables) 0=const,1=var
-------------------------------------------------------
- Material Opt. (design variables) 0=const,1=var
```

Abstract:

A unified modeling and analysis approach to address the functionally graded plane and Axisymmetric problems is suggested which is making use of B-Splines and NURBS for the definition of geometry and material properties as well as the analysis and optimization. The recently developed Isogeometric Analysis numerical method is concisely explained and the functionally graded materials (FGMs) are briefly introduced. FGMs are composite materials that are microscopically homogeneous but at macro level the mechanical properties vary continuously from one point to another by smoothly varying the volume fractions of the material constituents. The constitutive material matrix is considered to be isotropic at each point where the elastic modulus is assumed to vary continuously throughout the domain according to an assumed arbitrary distribution. It is shown that the difficulties encountered in the Finite Element analysis of the FGMs are to a large degree alleviated by employing the Generalized Isogeometric Analysis which is the subject of this thesis. Finally, examples are presented to demonstrate the efficiency of the method.

Key Words: Isogeometric Analysis, Functionally Graded Materials, Optimization, NURBS.

دانشگاه صنعتی شاهرود

Shahrood University of Technology

Faculty of Civil and Architectural Engineering

Developing the Isogeometric Analysis for Integrated Modeling, Analysis and Optimization of Functionally Graded Plane Stress/Strain and Axisymmetric Problems

Nasser Zarif Moghaddam Basefat

Supervisor:

Dr. Behrooz Hassani

Date: Jan 29, 2012