

الحمد لله
البرحمين
م



دانشکده عمران و معماری

پایان نامه کارشناسی ارشد عمران - سازه

تحلیل پلاستیک با سخت شوندگی با استفاده از روش اجزاء محدود

رامین واقعی

استاد راهنما :

دکتر رضا نادری

استاد مشاور :

دکتر بهروز حسینی

تیر ۱۳۹۰



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: عمران و معماری

گروه: عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای رامین واقعی

تحت عنوان: تحلیل پلاستیک با سخت شوندگی با استفاده از روش اجزا محدود

در تاریخ ۱۳۹۰/۴/۱۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد

پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور:	امضاء	اساتید راهنما:
—	نام و نام خانوادگی: دکتر بهروز حسینی		نام و نام خانوادگی: دکتر رضا نادری
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور:
	نام و نام خانوادگی: مهندس عباس محمدی		نام و نام خانوادگی: دکتر وحیدرضا کلات جاری
			نام و نام خانوادگی: دکتر سید مهدی حسینی
			

تعهد نامه

اینجانب **رامین واقعی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **عمران - سازه** دانشکده **عمران و معماری** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل پلاستیک با سخت شوندگی با استفاده از روش اجزاء محدود تحت راهنمایی دکتر رضا نادری** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه / رساله تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام <<دانشگاه صنعتی شاهرود>> و یا <<shahrood university of technology>> به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه / رساله رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل راز داری ، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ: ۱۳۹۰/۴/۱۵

امضای دانشجو



مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

هدف این پایان نامه توضیح دقیق کاربرد روش اجزاء محدود در حل مسائل تحلیل مهندسی با ماهیتی غیر خطی و تولید یک نرم افزار تحلیل خطی و غیر خطی اجزاء محدود می باشد، در این پایان نامه سعی شده تا جای ممکن کاربرد عملی مورد توجه قرار گیرد و در نتیجه کاربرد کامپیوتری روش اجزاء محدود غیر خطی، محور کار قرار گرفته است.

موارد گوناگون از شرایط غیر خطی در مسائل مهندسی به دلایل مختلف پدید می آیند. مثلاً عکس العمل غیر خطی یک ماده می تواند از رفتار یا عکس العمل الاستوپلاستیک ماده یا از تاثیرات چند گونه رفتار پلاستیک ماده ناشی شده باشد.

هر کدام از این موارد غیر خطی بودن رفتار، ممکن است در انواع مختلف سازه ها اعم از جامدات دو بعدی و یا سه بعدی قاب ها، صفحات یا پوسته ها اتفاق بیافتد.

به همین دلیل در این پایان نامه ابتدا مفصلاً معادلات حاکم در محیطهای الاستیک و پلاستیک و معیارهای مختلف تسلیم مورد بررسی قرار گرفته، سپس روشهای حل غیر خطی معادلات حاکم بررسی شده و در انتها یک نرم افزار برای حل مسائل غیر خطی الاستوپلاستیک کد نویسی شده است، که به کمک حل چند نمونه مثال ساده و مقایسه آن با نرم افزارهای تجاری صحت آن مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: پلاستیسیته، سخت شوندگی، روشهای عددی، تحلیل اجزای محدود.

فهرست مطالب

2	مقدمه
9	1- فصل اول (تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته)
10	1-1- تنش
14	2-1- تنش های هشت وجهی:
15	3-1- مدل های الاستیک
16	4-1- مواد الاستیک
17	5-1- روابط تنش- کرنش الاستیک خطی ایزوتروپیک (قانون عمومی هوک)
19	6-1- تئوری الاستیسیته
20	1-6-1- وجه ممیزه اول:
20	2-6-1- وجه ممیزه دوم:
21	7-1- تاریخچه علم حالت خمیری
24	8-1- پلاستیسیته:
26	9-1- طبیعت پلاستیسیته:
27	10-1- فرضیات
30	11-1- نمودار بار- ازدیاد طول برای کشش ساده

- 32 12-1- نمودار تنش - تغییر شکل نسبی؛
- 35 13-1- معادلات تقریبی برای منحنی تنش - تغییر شکل نسبی؛
- 38 14-1- اثر باشینگر
- 40 2- فصل دوم (روش های تحلیل پلاستیسیته کامل)
- 41 1-2- معیار تسلیم برای جامدات
- 43 2-2- مثالهایی از معیارهای تسلیم
- 44 1-2-2- نظریه کرنش ماکزیمم یا نظریه سنت و نانت
- 45 2-2-2- نظریه برشی ماکزیمم یا معیار ترسکا
- 47 3-2-2- نظریه انرژی کرنشی ماکزیمم یا نظریه انرژی بلترامی
- 48 4-2-2- نظریه انرژی پیچشی یا معیار فون میسز
- 50 3-2- رابطه تنش-کرنش الاستوپلاستیک
- 53 4-2- معادلات رفتاری در تئوری خمیری
- 56 5-2- معادلات رفتاری خمیری در تئوری 3 بعدی
- 57 6-2- معیارهای تسلیم مستقل از فشار هیدرواستاتیک
- 59 1-6-2- معیار لوی - میسز در تئوری خمیری کامل
- 60 2-6-2- معیار ترسکا در تئوری خمیری کامل

- 61 7-2- معیارهای تسلیم وابسته به فشار
- 62 1-7-2- معیار موهر - کولمب
- 64 2-7-2- معیار دراگر - پراگر
- 65 8-2- معیارهای بارگذاری و باربرداری در محیط های خمیری کامل
- 67 9-2- تابع پتانسیل خمیری و قانون جریان
- 69 1-9-2- قانون جریان وابسته به معیار فون میسز
- 70 2-9-2- قانون جریان وابسته به معیار ترسکا
- 72 10-2- خواص سطح تسلیم
- 72 1-10-2- تحدب
- 73 2-10-2- عمود بودن
- 73 11-2- معادلات رفتاری محیط های ارتجاعی - خمیری کامل بین جزء تنش و جزء کرنش
- 76 3- فصل سوم (روش های تحلیل پلاستیسیته با سخت شوندگی)
- 77 1-3- سخت شوندگی تابع کرنش یا کار انجام شده:
- 80 2-3- آزمایش تسلیم تک محوری ماده سخت شونده کرنشی:
- 82 3-3- انواع تئوری های سخت شوندگی کرنش
- 85 1-3-3- سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

- 86 1-1-3-3 سخت شونده گی همسان (ایزوتروپیک) در مدل فون میسز
- 87 2-3-3 سخت شونده گی سینماتیکی
- 88 1-2-3-3 سخت شونده گی سینماتیکی در مدل فون میسز
- 89 3-3-3 سخت شونده گی مستقل
- 91 4- فصل چهارم (کاربرد روش های عددی در تحلیل مسائل الاستو پلاستیک با سخت شونده گی)
- 92 1-4- روش های عددی پایه برای حل مسائل غیر خطی:
- 92 1-1-4 روش های تکرار مستقیم (یا تقریب پشت سر هم)
- 96 2-1-4 روش نیوتن-رافسون
- 100 3-1-4 روش سختی مماسی:
- 101 4-1-4 روش سختی اولیه:
- 103 2-4- مسائل ارتجاعی- خمیری یک بعدی:
- 107 3-4- روابط ماتریسی:
- 110 4-4- شکل های مختلف حد تسلیم در محاسبات عددی:
- 112 1-4-4 معیار تسلیم موهر-کولمب:
- 112 2-4-4 معیار تسلیم دراگر-پراگر:
- 115 5-4- عبارات پایه برای مسائل دو بعدی:

122 فصل پنجم (بررسی مسائل الاستو پلاستیک با استفاده از نرم افزار تولید شده).
123 1-5- معرفی مدل های مورد بررسی:
124 1-1-5- مدل اول:
130 2,1,5. مدل دوم:
136 3-1-5- مدل سوم:
140 4-1-5- مدل چهارم:
147 6- فصل ششم (نتیجه گیری).
148 نتیجه گیری :
150 پیشنهادات :
151 پیوست شماره A
152 زیر برنامه DIMEN:
152 زیر برنامه ZERO:
152 زیر برنامه INVAR:
154 زیر برنامه YELDF:
154 زیر برنامه FLOWPL:
154 زیر برنامه STIFFP:

155:LINEAR زیر برنامه

155:RESIDU زیر برنامه

155:OUTPUT زیر برنامه

157..... مراجع

فهرست اشکال

- شکل a: نمای شماتیک از ناحیه الاستیک و پلاستیک 3
- شکل b: نمای شماتیک از انواع تئوری های سخت شوندگی 6
- شکل c: نمای شماتیک از ناحیه الاستیک و ناحیه پلاستیک 6
- شکل 1-1: نمودار تنش- کرنش ایده آل و مدل دینامیکی برای رفتار تحت بارگذاری 29
- شکل 1-2: نمودار بار- ازدیاد طول 30
- شکل 1-3: نمودار تنش- تغییر شکل نسبی 32
- شکل 1-4: نمودار تنش- تغییر شکل نسبی مواردی که دارای نقطه تسلیم مشخصی نمی باشند 34
- شکل 1-5: تنش گواه 35
- شکل 1-6: منحنی ماده صلب- پلاستیک سخت شونده خطی 36
- شکل 1-7: منحنی ماده صلب- پلاستیک سخت شونده غیرخطی 36
- شکل 1-8: منحنی ماده غیر ارتجاعی سخت شونده غیرخطی 36
- شکل 1-9: تقریب منحنی تنش- کرنش با دو عبارت خطی 37
- شکل 1-10: اثر بوشینگر 39
- شکل 1-2: معیار سنت و نانت در حالت دو بعدی 45
- شکل 1-2: معیار ترسکا در حالت دو بعدی 46

- شکل 2-2: معیار بلترامی در حالت دو بعدی..... 48
- شکل 3-2: معیار ترسکا و فون میسز در حالت دو بعدی..... 50
- شکل 4-2: منحنی تنش - کرنش ساختگی در یک عضو محوری 53
- شکل 5-2: شکل سطح تسلیم در صفحه $\sigma_1\sigma_2$ با استفاده از یک آزمایش 58
- شکل 6-2: معیار موهر - کولمب 63
- شکل 7-2: سطح تسلیم وابسته به معیار موهر-کولمب و دراکر-پراگر 65
- شکل 8-2: وضعیت باربرداری و بارگذاری در محیط های خمیری کامل 66
- شکل 9-2: سطح تسلیم وابسته و قسمت های تخت و گوشه در آن 68
- شکل 1-3: الگوهای ریاضی برای رفتار سخت شوندگی 78
- شکل 2-3: سخت شوندگی در رفتار ارتجاعی - خمیری یک بعدی 82
- شکل 3-3: تئوری های سخت شوندگی کرنش در معادلات رفتاری یک بعدی 83
- شکل 4-3: تئوری های سخت شوندگی کرنش در معادلات رفتاری یک بعدی 84
- شکل 5-3: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک) 85
- شکل 6-3: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک) 86
- شکل 7-3: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک) 87
- شکل 8-3: تئوری سخت شوندگی سینماتیک 88

- شکل 3-9: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)..... 88
- شکل 3-10: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)..... 89
- شکل 4-1: روش تکرار مستقیم در مسائل با یک متغیر..... 94
- شکل 4-2: روش تکرار مستقیم در مسائل با یک متغیر..... 95
- شکل 4-3: روش نیوتن - رافسون در مسائل با یک متغیر..... 99
- شکل 4-4: روش نیوتن - رافسون در مسائل با یک متغیر..... 99
- شکل 4-5: روش سختی مماسی در مسائل با یک متغیر..... 101
- شکل 4-6: روش سختی اولیه در مسائل با یک متغیر..... 103
- شکل 4-7: رفتار ارتجاعی - با سخت شوندگی کرنشی در حالت یک بعدی..... 104
- شکل 4-8: فلوجارت تحلیل غیر خطی مسائل..... 118
- شکل 5-1: معرفی مدل اول، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها..... 124
- شکل 5-2: نتایج ABAQUS برای مدل اول، الف) توزیع جابجایی ، ب) توزیع نیروهای عکس العمل تکیه گاهی
ج) توزیع تنش..... 126
- شکل 5-3: نمودار جابجایی گره ها المان 1، الف) بار 2000 kg/cm^2 ب) بار 1500 kg/cm^2 127
- شکل 5-4: نمودار عکس العمل های تکیه گاهی ، الف) بار 2000 kg/cm^2 ب) بار 1500 kg/cm^2 128
- شکل 5-5: نمودار عکس العمل های تکیه گاهی ، الف) بار 2000 kg/cm^2 ب) بار 1500 kg/cm^2 129

- شکل 5-6: معرفی مدل دوم، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها 130
- شکل 5-7: نتایج ABAQUS برای مدل دوم، الف) توزیع جابجایی ، ب) توزیع نیروهای عکس العمل تکیه گاهی
ج) توزیع تنش 132
- شکل 5-8: جابجایی گره های المان 5 در جهت های اصلی، الف و ب) بار 600 kg/cm^2 ،
ج و د) بار 700 kg/cm^2 133
- شکل 5-9: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی گره های 1، 2 و 3 در جهت محور Y، الف) بار 600 kg/cm^2 ،
ب) بار 700 kg/cm^2 134
- شکل 5-10: تنش در گره 5 الف) بار 600 kg/cm^2 ، ب) بار 700 kg/cm^2 135
- شکل 5-11: معرفی مدل سوم، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها 136
- شکل 5-12: نمودار جابجایی در جهات اصلی X و Y برای تیر دو سر ساده 137
- شکل 5-13: نمودار جابجایی در جهات اصلی X و Y برای تیر دو سر گیردار 138
- شکل 5-14: معرفی مدل سوم، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها 141
- شکل 5-15: نتایج ABAQUS برای مدل سوم، الف) توزیع جابجایی ، ب) توزیع نیروهای عکس العمل تکیه گاهی
ج) توزیع تنش 143
- شکل 5-16: جابجایی گره های المان 10 در جهت های اصلی، الف و ب) بار 20 kg/cm^2 ،
ج و د) بار 30 kg/cm^2 144
- شکل 5-17: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی گره های 24 و 36 در جهت محور Y، الف) بار 20 kg/cm^2 ،
ب) بار 30 kg/cm^2 145

شکل 5-18: تنش در گره 23، الف) بار 20 kg/cm^2 ، ب) بار 30 kg/cm^2146

شکل A-1: چرخه محاسبات در برنامه ارتجاعی - خمیری دو بعدی.....156

فهرست جداول

- جدول 4-1: مقادیر ثابت ها برای دو الگوی ارائه شده 114
- جدول 5-1: مدل های مورد بررسی 123
- جدول 5-2: مشخصات فیزیکی سیلندر 124
- جدول 5-3: مشخصات مش بندی سیلندر 125
- جدول 5-4: مشخصات فیزیکی تیر کنسول 130
- جدول 5-5: مشخصات مش بندی تیر کنسول 130
- جدول 5-6: مشخصات فیزیکی تیر ها 136
- جدول 5-7: مشخصات مش بندی تیرها 136
- جدول 5-8: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی برای تیر دو سر ساده 139
- جدول 5-9: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی برای تیر دو سر گیردار 139
- جدول 5-10: مشخصات فیزیکی فونداسیون 141
- جدول 5-11: مشخصات مش بندی فونداسیون 141
- جدول A-1: مقادیر ثابت ها برای دو الگوی ارائه شده 153
- جدول A-2: انتخاب های ممکن برای NCRIT 153

مقدمه

هدف این پایان نامه توضیح دقیق کاربرد روش اجزاء محدود در حل مسائل تحلیل مهندسی که ماهیتی غیر خطی دارند، می باشد. بر خلاف کتاب های مربوط به تحلیل خطی و غیر خطی اجزاء محدود که در آنها عمدتاً به جنبه تئوری مسئله پرداخته شده، در این پایان نامه سعی شده تا جای ممکن کاربرد عملی مورد توجه قرار گیرد و در نتیجه کاربرد کامپیوتری روش اجزاء محدود غیر خطی، محور کار قرار گرفته است.

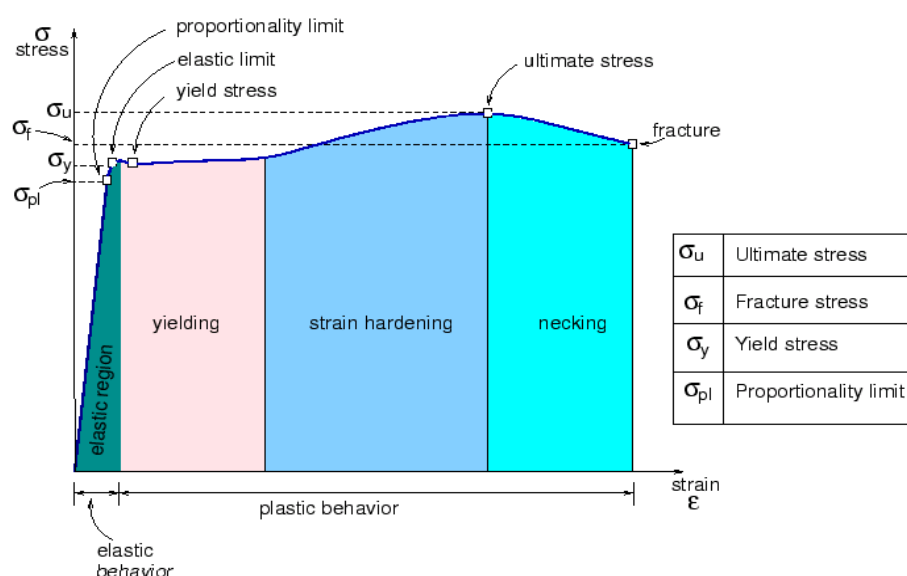
موارد گوناگون از شرایط غیر خطی در مسائل مهندسی به دلایل مختلف پدید می آیند. مثلاً عکس العمل غیر خطی یک ماده می تواند از رفتار یا عکس العمل الاستو پلاستیک ماده یا از تاثیرات چند گونه رفتار پلاستیک ماده ناشی شده باشد. به علاوه ویژگی های غیر خطی را می توان با تاثیرات ناشی از حرارت و یا زمان مرتبط ساخت. در گونه ای مشابه، می توان با در نظر گرفتن رفتار ویسکو پلاستیک سازه ها در مقابل عوامل مختلف مانند پدیده کوتاه مدت دینامیکی مسائل را تحلیل نمود.

هر کدام از این موارد غیر خطی بودن رفتار، ممکن است در انواع مختلف سازه ها اعم از جامدات دو بعدی و یا سه بعدی قاب ها، صفحات یا پوسته ها اتفاق بیافتد.

به همین دلیل در این پایان نامه ابتدا مفصلاً به روش تبدیل معادلات پیچیده حاکم به زبان ساده و پرداخته و سپس به زبان کامپیوتر به تحلیل و بررسی مسائل می پردازیم.

مفاهیم اولیه و کلی در مورد الاستیسیته و پلاستیسیته در فصل اول بررسی می گردد.

تئوری های الاستیسیته و پلاستیسیته ، مکانیک تغییرشکل اکثر جامدات مهندسی را توضیح می دهند. هر دو تئوری، مبتنی بر مطالعات آزمایشگاهی بین تنش و کرنش در یک توده تحت شرایط بارگذاری ساده هستند. بنابراین آنها ماهیتی پدیده گونه در مقیاس میکروسکوپی دارند و با این حال بسیار کم به ساختار جامدات وابسته هستند. به هر حال، مهندسی که هدف اصلی اش طراحی و ساخت است، باید از محدودیتهای این تئوریها کاملاً آگاه باشد و همچنین باید در مورد ساختار جامدات و مخصوصاً فلزات اطلاعاتی داشته باشد. وی برای شناخت شکست به متخصص فیزیک فلزات و برای شناخت موادی که شرایط بسیار بالا و سخت را بتواند تحمل کند، به متالوژیست نیازمند است. متالوژیست نیز برای همکاری با یک مهندس ، باید اطلاعاتی در مورد تئوری پلاستیسیته داشته باشد. (جانسون و، ملور پ، 1378). شکل 1-1 نمای شماتیکی از ناحیه الاستیک و خمیری را نشان می دهد.



شکل a: نمای شماتیکی از ناحیه الاستیک و پلاستیک

در این فصل همچنین به روابط بین تنش - کرنش در حالات الاستیک و پلاستیک پرداخته می شود

که شامل موارد زیر است.

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad 1,1$$

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad 2.1$$

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\delta F}{\delta \sigma_{ij}} \quad 3.1$$

در ادامه فصل 1 نمودار تنش-تغییر شکل و همچنین روابط تقریبی برای منحنی تنش-تغییر شکل نسبی بیان می شود. و در نهایت اثر بوشینگر به طور جامع بحث می شود که البته در برنامه که در این پایان نامه ارائه شده است از اثر این پدیده صرف نظر شده است.

در فصل دوم، به بیان روابط تسلیم معمول پرداخته می شود که از آن جمله می توان به نظریه کرنش ماکزیمم یا نظریه سنت و نانت، نظریه انرژی کرنشی ماکزیمم یا نظریه انرژی بلترامی، نظریه برشی ماکزیمم یا نظریه ترسکا و نظریه انرژی پیچشی یا معیار فون میسر اشاره نمود.

در ادامه این فصل به معادلات رفتاری جامدات که تا حد ارتجاعی تابع قوانین تئوری ارتجاعی و پس از آن تابع قوانین تئوری خمیری می باشند، پرداخته می شود.

سپس معیارهای تسلیم مشخصی که مستقل و وابسته به فشار هیدرواستاتیک هستند توضیح داده می شود و در ادامه معیارهای تسلیم را در محیط خمیری کامل مورد بررسی قرار می گیرند.

معیارهای بارگذاری و باربرداری در محیط های خمیری کامل از جمله مواردی است که در این فصل به آن پرداخته می شود.

توابع پتانسیل و تئوری های جریان اعم از وابسته و غیروابسته نیز بیان خواهد شد که از بین

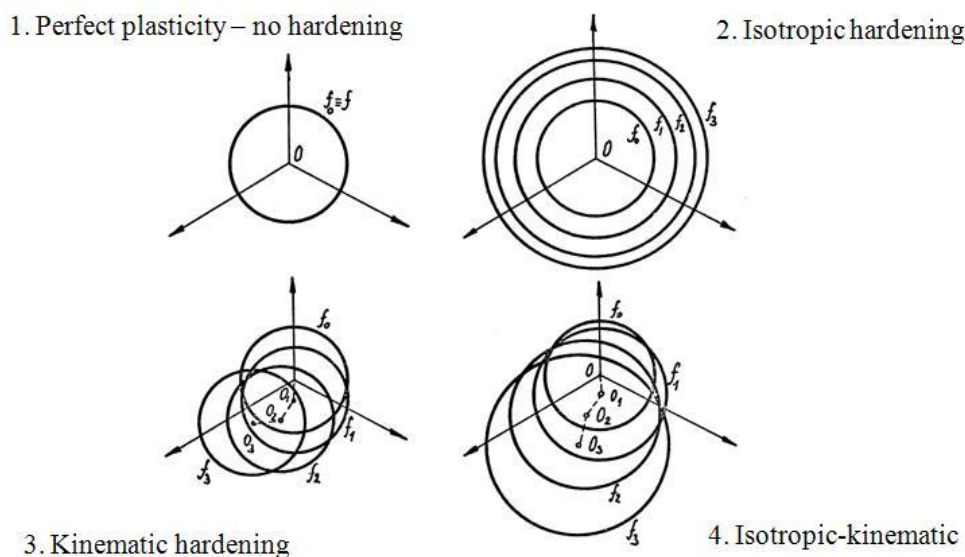
تئوری های جریان می توان به قانون جریان وابسته به معیار فون میسز و قانون جریان وابسته به معیار ترسکا اشاره شده است. برای روشن شدن موضوع باید خواص مربوط به سطح تسلیم بررسی گردد، در این قسمت خواصی مطرح می شوند که سطح تسلیم تعریف شده باید از آن برخوردار باشد که از آن جمله می توان به خاصیت عمود بودن و همچنین تحذب اشاره نمود.

معادلات رفتاری محیط های ارتجاعی - خمیری کامل بین جزء تنش و جزء کرنش را در ادامه فصل به طور کامل بحث می شود.

برای تحلیل 3 بعدی تنش و کرنش و تعیین توزیع آنها در محیط های پیوسته نیاز به تعریف معادلات رفتاری در حالت 3 بعدی می باشد. که این معادلات مورد بررسی قرار می گیرند.

در فصل سوم، روش های تحلیل پلاستیسیته با سخت شوندگی مورد بررسی قرار می گیرند. همانطور که می دانیم، پس از رسیدن جسم به تسلیم اولیه، گسترش تغییر شکل پلاستیک در سطح تنش موجود، بستگی به میزان کرنش پلاستیک دارد. این پدیده را سخت شوندگی کرنشی می نامند. که موضوع اصلی پایان نامه را شکل می دهد را به طور جامع توضیح داده می شود.

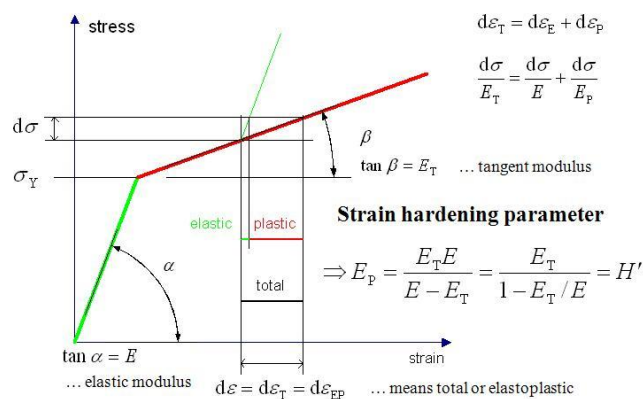
آزمایش تک محوری روی یک ماده الاستو پلاستیک برای بدست آوردن پارامتر سخت شوندگی مطرح می شود و در نهایت انواع تئوری های سخت شوندگی بیان می شود.



شکل b: نمای شماتیک از انواع تئوری های سخت شوندگی

که این تئوری ها همراه با فرمول هایشان ارائه شده است.

در فصل چهارم، روش های عددی به طور کامل در ادامه فصل بررسی شده و برای حل مسائل غیر خطی آورده شده است که می توان به روش های تکرار مستقیم (یا تقریب پشت سر هم)، روش نیوتن-رافسون، روش سختی مماسی و روش سختی اولیه اشاره کرد. در این قسمت جنبه های ضروری رفتار ماده الاستوپلاستیک معرفی خواهند شد.



شکل c: نمای شماتیک از ناحیه الاستیک و ناحیه پلاستیک

مسائل ارتجاعی - خمیری یک بعدی در ادامه توضیح داده می شود و بعد از آن روابط ماتریسی در روابط تئوری بدست آمده در قسمت قبل به طور کامل بحث خواهد شد. شکل های مختلف حد تسلیم در محاسبات عددی در ادامه آورده شده است زیرا در محاسبات عددی می توان تابع تسلیم را بر حسب مستقل های تنش تعریف نمود. این قاعده توسط نایاک ارائه شده و مهمترین فایده آن این است که می توان در برنامه نویسی کامپیوتری برای تابع تسلیم و قانون جریان یک شکل عمومی ارائه و از آن استفاده نمود. عبارات پایه برای مسائل دو بعدی نیز برای حالت دو بعدی که مبنای این پایان نامه نیز می باشد در این فصل آمده است. بعد از اتمام همه بحث های تئوری در این قسمت راجع به خصوصیات اصلی یک برنامه کامپیوتری که به زبان فورترن در این پایان نامه نوشته شده، بحث می کند. مدول های متفاوت برای اجرای خواسته های گوناگون در یک تحلیل غیر خطی اجزاء محدود آورده شده است. لازم به ذکر است که برای نوشتن این برنامه از برنامه تحلیل الاستیک هینتون کمک گرفته شده و مدول های مربوط به تحلیل پلاستیک به آن اضافه شده است. که در این فصل نحوه کارکرد این برنامه در قالب یک فلوجارت آمده است و در ادامه آن مدول های استفاده شده توضیح داده می شوند. و همچنین زیربرنامه های استفاده شده در این برنامه به همراه دستورالعمل هر زیربرنامه بیان شده است.

این برنامه قابلیت تحلیل مسائل الاستوپلاستیک برای حالت کرنش صفحه ای با استفاده از دو معیار تسلیم موهر - کولمب و دراگر - پراگر را دارد. برای آنکه از عملکرد برنامه و همچنین میزان دقت آن در تحلیل سازه ها اطمینان حاصل شود در فصل بعد چند نمونه مثال را با این برنامه مدل کرده و نتایج تحلیل حاصل از خروجی برنامه را با نتایج حاصل از تحلیل برنامه اجزاء محدود ABAQUS، مقایسه می کنیم.

در فصل پنجم، 3 مدل سازه ای متفاوت با عملکرد های مختلف آورده شده است که مشخصات ورودی

سازه ها در برنامه اجزاء محدودی ABAQUS و همچنین مشخصات ورودی برنامه الاستیک و پلاستیک به زبان برنامه نویسی فرترن در ابتدای هر مدل آمده است و در ادامه نتایج این دو برنامه در قالب نمودار برای حالات مختلفی از قبیل میزان بار وارده، معیار تسلیم انتخاب شده و غیره مورد مقایسه قرار می گیرند.

در فصل ششم، نتیجه گیری و پیشنهادات این پایان نامه اعم از انتخاب معیار تسلیم دقیقتر و غیره ارائه می شود.

1- فصل اول

تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته

1-1- تنش:

هرگاه جسمی تحت اثر سیستم نیروهای خارجی متعادل قرار گیرد، رفتارش بستگی به مقدار نیروها، راستای آنها، چگونگی تشکیل آنها و همچنین خواص ذاتی خود جسم داشته و به این ترتیب جریان نیروها در داخل جسم به نحوی تشکیل می شود که تعادل آن حفظ شود. به عنوان یکی از قدم های اساسی در مطالعه رفتار یک سیستم الاستیک در مقابل نیروهای اعمالی، لازم است چگونگی انتقال نیرو در داخل سیستم شناخته شود تا بتوان با استفاده از قوانین حاکم بین توزیع این نیروها در واحد سطح که بردار تنش¹ نامیده می شود و تغییر شکل های نسبی² حاصله، به تغییر شکل سیستم دست یافت. (سعادت پور م.م، 1379)

در این قسمت سعی بر آن است که ضمن شناخت بردار تنش به معرفی تانسور تنش در حالت کلی پرداخته و پس از آن مفاهیم مربوط به تنش ارائه گردیده و در ادامه به روابط مابین تنش و کرنش در حالت الاستیک پرداخته می شود.

هرگاه در نقطه ای مثل نقطه P از سطح برش، المانی از سطح را اختیار کرده و آن را با ΔA مشخص کنیم و بردار نیرو را با ΔC نشان دهیم، حد نسبت این بردار به سطحی که روی آن عمل می کند چنین خواهد بود.

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta A} = T \quad 1-1$$

بردار T را بردار تنش می نامند. و در حالت کلی بردار تنش علاوه بر اینکه به موقعیت هندسی نقطه

1- Traction Vector

2- Strains

بستگی دارد به راستای سطح عبوری از نقطه یعنی بردار یکه n ، نیز وابسته است.

از این رو بردار تنش در یک نقطه به صورت زیر نوشته می شود.

$$T^n_{(x,y,z)}, \quad |T^n|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad 1-2$$

با در نظر گرفتن i, j, k به عنوان بردارهای یکه سیستم مختصات کارتزین xyz باشند، در این صورت بردارهای تنش T^i, T^j, T^k را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$T^i = \sigma_{xx} i + \sigma_{xy} j + \sigma_{xz} k \quad 1-3 \text{ (الف)}$$

$$T^j = \sigma_{yx} i + \sigma_{yy} j + \sigma_{yz} k \quad 1-3 \text{ (ب)}$$

$$T^k = \sigma_{zx} i + \sigma_{zy} j + \sigma_{zz} k \quad 1-3 \text{ (ج)}$$

کمیت σ_{ij} تانسور تنش نامیده می شود. که در آن اندیس اول راستای سطحی را نشان می دهد که بردار تنش برای آن سطح مد نظر است و اندیس دوم نشان دهنده راستاهای سه گانه دستگاه مختصات کارتزین است. و داریم:

$$T^n_i = \sigma_{ji} n_j \quad 1-4$$

بردار تنش در روی سطح یا سطوحی به مقدار حداکثر یا حداقل خواهد رسید که تنش برشی در روی آن سطوح حذف گردد. این سطوح را سطوح اصلی و تنش بر روی آن سطوح را تنش های اصلی گوئیم. (سعادت پور م.م، 1379)

اگر تنش اصلی را با σ نشان دهیم برای تعیین این تنش، با توجه به عمود بودن آن بر سطح مربوطه ابتدا می توان نوشت:

$$T_j^n = \sigma n_j \quad 5-1$$

اگر به جای T_j^n از معادله 4-1 قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij} n_i = \sigma n_j \xrightarrow{n_j = \delta_{ij} n_i} \sigma_{ij} n_i = \sigma \delta_{ij} n_i \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0 \quad 6-1$$

نمایش ماتریسی معادله فوق به صورت زیر است:

$$([\sigma] - [I]\sigma)\{n\} = \{0\} \quad 7-1$$

که در آن $[I]$ ماتریس قطری واحد است. بنابراین برای استخراج جواب ها می نویسیم.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad 8-1$$

با بسط دترمینان فوق معادله مرتبه 3 زیر حاصل می شود.

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad 9-1$$

که در آن

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad 10-1$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \quad 11-1$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad 12-1$$

به طوری که می دانیم، رفتار یک جسم الاستیک در حالت کلی اعمال تنش، به نحوی است که همواره

با تغییر شکل همراه خواهد بود. هرگاه تانسور تنش σ_{ij} را مطابق زیر به دو تانسور تنش تفکیک کنیم خواهیم داشت که در آن مقدار میانگین تنش عمودی با تعریف زیر باشد، جزء اول سمت راست

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} \quad 13-1$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad 14-1$$

معادله 13-1 تنش هیدرواستاتیک و جزء دوم تانسور تنش انحرافی نامیده می شود.

برای درک بهتر موضوع معادله تانسوری 13,1 را به شکل ماتریسی زیر می نویسیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad 15-1$$

برای بدست آوردن مقادیر اصلی تانسور تنش S_{ij} می توان نوشت: (سعادت پور م.م، 1379)

$$|S_{ij} - S\delta_{ij}| = 0 \rightarrow S^3 - J_2 S - J_3 = 0 \quad 16-1$$

و برای ثابت های تانسور تنش انحرافی داریم:

$$J_2 = -\frac{1}{2}(S_{ii} S_{jj} - S_{ij} S_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad 17-1$$

$$J_3 = |S_{ij}| \quad 18-1$$

به همین ترتیب برای تانسورهای کرنش اصلی و کرنش انحرافی خواهیم داشت:

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} \quad 19-1$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} \quad 20-1$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad 21-1$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}(e_{ii} e_{jj} - e_{ij} e_{ij}) = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad 22-1$$

$$J_3 = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{kl} \quad 23-1$$

2-1- تنش های هشت وجهی:

یک صفحه (تنش) هشت وجهی، صفحه ای است که قائم آن زوایای مساوی با هر یک از محورهای اصلی می سازد. بنابراین صفحات دارای قائم $n = (n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ در سیستم مختصات اصلی را صفحات هشت وجهی می نامند. بدیهی است که می توان هشت صفحه این چنینی داشت. با توجه به محورهای تنش اصلی 1، 2 و 3 خواهیم داشت: (سعادت پور م.م، 1379)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad 24-1$$

مولفه قائم بردار تنش در مرکز در ارتباط با هر جهت مانند n را می توان از فرمول کاوشی $(\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j)$ بدست آورد.

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 \quad 25-1$$

بنابراین تنش قائم روی یک ضلع هشت وجهی به صورت زیر است:

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 \quad 26-1$$

تنش برشی روی یک ضلع هشت وجهی، τ_{oct} ، را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\tau_{oct}^2 = (T_{oct}^n)^2 - \sigma_{oct}^2 \quad 27-1$$

$$(T_{oct}^n)^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad 28-1$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \left(\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right)^2 \quad 29-1$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده تنش های برشی اصلی τ_{oct} را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\tau_{oct}^2 = \frac{4}{9}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) \quad 30-1$$

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \quad 31-1$$

در رابطه بالا J_2 در بخش قبل توضیح داده شده است. و برای تنش برشی هشت وجهی داریم:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}(I_1^2 - 3I_2)^{\frac{1}{2}}} \quad 32-1$$

3-1- مدل های الاستیک

در عمل بررسی مدل های الاستیک به دلایل زیر مورد نیاز است:

1. مدل های الاستیک برای رفتار بسیاری از مواد مهندسی در سطح تنش های مجاز به خوبی تشریح

شده و مورد استفاده قرار می گیرد.

2. مدل های ساختاری الاستیک برای تئوری پلاستیسیته که می توان آن را تعمیم یافته تئوری

الاستیسیته نامید، مورد نیاز می باشد. (چن، وای، فا، 1384)

1-4- مواد الاستیک

مواد جسم بعد از بارهای وارده بر آن تغییرشکل می دهند. اگر بارهای وارده برداشته شدند جسم شکل و اندازه های قبلی خود را بدست آورد، مواد جسم را الاستیک می نامند. برای یک چنین موادی حالت فعلی تنش فقط بستگی به حالت تغییر شکل کنونی آن دارد، یعنی تنش تابعی از کرنش است. به طور ریاضی روابط ساختاری این مواد با رابطه زیر داده می شود:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad 33-1$$

که تابع F_{ij} را تابع پاسخ پلاستیک می نامند. بنابراین رفتار الاستیک با رابطه 33,1 تعریف شده است که قابل برگشت و مستقل از مسیر بارگذاری است و کرنش ها به طور یکتا از حالت تنش فعلی تعیین می شود و یا بلعکس. رفتار ماده هیچ وابستگی به تاریخچه تنش یا کرنش برای رسیدن به حالت تنش یا کرنش فعلی ندارد. مواد الاستیک تعریف شده را مواد الاستیک کاوشی می نامند. می توان نشان داد که مواد الاستیک کاوشی ممکن است در دوره بارگذاری و باربرداری انرژی تولید نمایند. واضح است که این موضوع خلاف قانون های ترمودینامیک است. بنابراین عبارت هیپرالاستیک¹ و یا گرین الاستیک برای نشان دادن این موضوع که تابع پاسخ الاستیک با یک تابع انرژی کرنشی، W (که در کل تابعی از موافه های کرنش ε_{ij} است) محدود شده، به کار می رود. (چن، وای، فا، 1384)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad 34-1$$

این رابطه نشان می دهد که انرژی در دوره های بارگذاری ایجاد نمی شود و قوانین ترمودینامیک همیشه ارضاء می شوند.

بعضاً عبارت مدل هیپوالاستیک¹ برای تعریف روابط افزایشی الاستیک به کار می رود. این مدل ها اغلب برای رفتار آن دسته از مواد که حالت تنش معمولاً تابعی از حالت کرنش و نیز مسیر تنش برای رسیدن آن حالت است، به کار می رود. بنابراین برای مواد هیپوالاستیک روابط ساختاری به صورت زیر تعریف می شوند: (چن، وای، فا، 1384)

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \quad 35-1$$

که $\dot{\sigma}_{ij}$ تانسور نمو کرنشی، $F_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn})$ تابع پاسخ الاستیک می باشند.

5-1- روابط تنش-کرنش الاستیک خطی ایزوتروپیک (قانون عمومی هوک)

شکل عمومی روابط تنش-کرنش برای مواد الاستیک به صورت زیر است: (چن، وای، فا، 1384)

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad 36-1$$

که B_{ij} معادل تانسور تنش اولیه معادل حالت «کرنش آزاد» (وقتی همه کرنش ها $\epsilon_{kl} = 0$) و C_{ijkl} تانسور «ثابت های الاستیک» مصالح می باشد. اگر فرض شود که حالت کرنش اولیه آزاد معادل حالت تنش اولیه آزاد است، یعنی $B_{ij} = 0$ رابطه 36-1 به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad 37-1$$

برای مواد ایزوتروپیک خطی ثابت های الاستیک معادله 37-1 باید در همه جهات یکسان باشد. تانسور C_{ijkl} باید تانسور ایزوتروپیک رتبه چهار باشد. شکل کلی این یک تانسور ایزوتروپیک C_{ijkl} را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad 38-1$$

از رابطه 37-1 و 38-1 خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} \quad 39-1$$

و در انتها خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad 40-1$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk} \quad 41-1$$

بنابراین برای مواد ایزوتروپیک الاستیک خطی، دو ثابت مستقل λ و μ که به عنوان ضرائب لامه نامیده می شوند، وجود دارد.

ضرائب λ و μ از آزمایشات تجربی بدست می آید.

آزمایشات ساده ای که برای تعیین این ضرائب استفاده می شوند، ارائه می شود.

1. آزمایش فشار هیدرواستاتیک 2. آزمایش کشش ساده 3. آزمایش برش ساده

4. آزمایش کرنش تک محوری

به سادگی می توان نشان داد که بین ضرائب λ و μ و ضرائب E و ν روابط زیر برقرار است.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad 42-1$$

1-6- تئوری الاستیسیته

رفتار محیط های جامد را که بعد از باربرداری¹ شکل اولیه² خود را باز می یابند، مورد مطالعه قرار می دهد. این چنین محیط ها یا مواد، الاستیک³ نامیده می شوند. تقریباً تمام مصالح مهندسی دارای یک حد معینی از خاصیت الاستیسیته هستند. اگر بارهای خارجی که موجب ایجاد تغییر شکل⁴ می شوند، از یک حد معینی⁵ تجاوز نمایند، در این صورت با حذف⁶ نیروها، تغییرشکل ها از بین می روند و محیط یا ماده به شکل اولیه خود باز می گردد. (چن، وای، فا، 1384)

در تئوری الاستیسیته، پاسخ مکانیکی مصالح⁷ به هنگام وقوع تغییرشکل های الاستیک قابل برگشت⁸ مدل می شود. بنابراین در یک نگاه کلی، تئوری الاستیسیته شاخه ای از علم مکانیک است که با محاسبه تنش ها⁹ و کرنش ها¹⁰ در یک جسم الاستیک سرو کار دارد.

وجه ممیزه تئوری الاستیسیته از مقاومت مصالح کدام موارد هستند و اساساً علاوه بر مقاومت مصالح چه نیازی به تئوری الاستیسیته وجود دارد؟

1- Strength of Material

2- Original Shape

3- Elastic

4- Deformation

5- Certain Limit

6- Removal

7- Strength of Material

8- Elastic Recoverable Deformations

9- Strength of Material

10- Strains

1-6-1- وجه ممیزه اول: کلی نگری در تئوری الاستیسیته، جزئی و خاص نگری در مکانیک جامدات

تئوری الاستیسیته در واقع مفاهیم حاکم بر محیط های جامد را در یک قالب فراگیرتر از آنچه تحت عناوین مقاومت مصالح¹ یا مکانیک جامدات² قرار دارند، ارائه می دهد.

در استخراج روابط تنش- کرنش با استفاده از تئوری الاستیسیته، غالباً از یک عنصر حجمی بینهایت کوچک³ در یک نقطه از جسم با جوهری عمود بر محورهای مختصات استفاده می شود. شرایط تعادل به وسیله معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط سازگاری به وسیله معادلات دیفرانسیل سازگاری نمایش داده می شوند. روابط مشخصه⁴ به وسیله روابط تنش - کرنش مناسب نمایش داده می شوند. اگر معادلات دیفرانسیل تعادل و معادلات دیفرانسیل سازگاری تحت اثر روابط مشخصه تنش - کرنش و شرایط مرزی مشخص⁵ حل شوند، در این صورت حالت تنش و تغییر مکان برای هر نقطه ای از جسم به دست می آیند. (چن، وای، فا، 1384)

1-6-2- وجه ممیزه دوم: توانمندی در حل مسائل پیچیده

برای بسیاری از مسائل مقدماتی نظیر خمش خالص و پیچش خالص، استخراج روابط بار - تنش⁶ و بار - خیز⁷ از طریق روش کلاسیک مکانیک مصالح⁸ امکان پذیر است. بسیاری از مسائل پیچیده نظیر

1- *Strength of Material*

2- *Solid Mechanics*

3- *Infinitesimal Volume Element*

4- *Constitutive Relations*

5- *Specified Boundary Conditions*

6- *Load-Stress*

7- *Load-Deflection*

8- *Mechanics of Materials*

پیچش میله های غیر مدور¹، تحلیل صفحات، تحلیل پوسته ها، تحلیل استوانه های جدار کلفت، تنش های تماسی² و تمرکز تنش³ از چنان پیچیدگی های حالت تنش برخوردار هستند که روش کلاسیک مکانیک مصالح در حل آنها و استخراج روابط کارایی ندارد. (چن، وای، فا، 1384)

1-7- تاریخچه علم حالت خمیری:

معیارهای مختلفی درباره تسلیم اجسام جامد تاکنون پیشنهاد شده است که اولین آن توسط کولمب در سال 1773 پیشنهاد شد. تعدادی از این پیشنهادها در ابتدا به منظور معیاری برای فرسودگی یا شکست اجسام شکننده وضع گردیدند ولی بعداً به عنوان معیار تسلیم اجسام نرم نیز مورد قبول قرار گرفتند. (1990, CHEN W.F, MIZUNO E)

تاریخ علم حالت خمیری از سال 1864 که ترسکا نتایج کارهای خودش را درباره سنبه زنی و حدیده کاری و تزریق منتشر کرد، شروع می شود. او در این موقع با آزمایشهایی که انجام داد مبنای تسلیم را بوسیله فرمول نشان داد.

چند سال بعد با استفاده از نتایج ترسکا، سنت و نانت و لوی پایه های تئوری جدید حالت خمیری را بیان کردند.

برای 75 سال بعدی پیشرفت خیلی کند و ناهموار بود، گرچه کمک مهمی توسط فن میسز و هنکی، پرانتل و سایرین شد، تقریباً فقط از سال 1945 بود که نظریه خمیری یک شکل پدیدار گشت. از آن

1- *Noncircular Torsion*

2- *Contact Stresses*

3- *Stress Concentration*

موقع کوششهای متمرکزی بوسیله بسیاری از پژوهندگان انجام گرفت که با سرعت زیادی به پیش می رود. خلاصه تاریخچه پژوهشگران بوسیله هیل و وسترگارد به نحو شایسته ای بیان شده است.

به طور عمومی بر سر این موضوع توافق است که منشا و مبدا پلاستیسیته به یک سری از مقالات که توسط ترسکا در بین سالهای 1864 تا 1872 بر روی حدیده کاری فلزات انجام شده است بر می گردد. در این کار اولین شرط تسلیم ارائه شده است: این شرط متعاقبا به نام شرط تسلیم ترسکا شناخته می شود که بیان میکند زمانی که ماکزیمم تنش برشی فلز به یک حد بحرانی برسد تسلیم می شود. در همین بازه زمانی سنت و نانت ارتباط های تشکیل دهنده اصلی برای اجسام صلب، مصالح پلاستیک کامل را تولید کرده است و پیش بینی کرد که محورهای اصلی افزایش کرنش با محورهای اصلی تنش هم پوشانی دارد. لوی معادلات عمومی برای فضای سه بعدی را نتیجه گرفت.

در سال 1886 بوشینگر به اثرات توجه کرد: یک کرنش پلاستیک با یک علامت خاص مقاومت مصالح کرنش پلاستیک بعدی با علامت مخالف راکاهش می دهد. (1990, CHEN W.F, MIZUNO E)

یک مقاله برجسته در سال 1913 نشان می دهد که فون مایسز معادلات عمومی برای پلاستیسیته را به همراه معیار تسلیم معروف فشار-جامد را نتیجه گرفت. (تئوری J_2 یا شرط تسلیم تنش برشی هشت وجهی).

در سال 1924 پراندل معادلات سنت و نانت، لوی و فون میسز را برای مسائل صفحه ای گسترش داد تا شامل اجزای الاستیک کرنش نیز شود و رئوس¹ در سال 1930 معادلات گسترش یافته را در حالت سه بعدی مطرح کرد. (1990, CHEN W.F, MIZUNO E)

در سال 1928، فون میسز کار خود را برای اجسام صلب پلاستیک کامل تعمیم داد تا شامل تابع تسلیم عمومی شود و ارتباط بین جهت افزایش کرنش پلاستیک و سطح صاف تسلیم را تشریح کرد، بدین گونه ایشان صریحا مفهوم استفاده از تابع تسلیم را به مانند پتانسیل پلاستیک در ارتباطهای تنش-کرنش نهایی در تئوری جریان را به وجود آوردند. (1990, CHEN W.F, MIZUNO E)

در مقایسه با پلاستیسیته کامل، پیشرفت تئوری مصالح سخت شونده از سرعت کمتری برخوردار بوده است. در سال 1928، پراندل تلاش نمود تا معادلات عمومی برای رفتار سخت شونده را بررسی کند. در سال 1938، ملان¹ مفهومیهای قبلی از پلاستیسیته کامل را با استفاده از روابط نهایی برای اجسام صلب سخت شونده با داشتن سطح تسلیم صاف و تشریح نتایج واحد مسائل الاستو پلاستیک نهایی برای پلاستیسیته کامل و مصالح سخت شونده بر پایه تعدادی از فرضیه های محدود کننده تعمیم داد. تا سال 1940 تئوری پلاستیسیته تقریبا پیشرفت سریعی داشت.

در سال 1949، پراگر² به یک چهار چوب کلی برای روابط تشکیل دهنده مصالح سخت شونده با توابع تسلیم صاف دست یافت و ارتباط بین تحذب سطح تسلیم و قانون نرمالایز کردن و یکتایی مقدار مرزهای متصل مسائل را بازشناخت. دروکر³ در سال 1951 شرط اصلی پایداری مصالح را نشان داد. با این مفهوم، ممکن است روابط تنش-کرنش پلاستیک با بسیاری از اشکال بنیادی مرتبط موضوع بطور یکسانی از خود رفتار نشان دهند. در سال 1953، کویتر⁴ روابط تنش-کرنش پلاستیک را برای سطوح تسلیم ناصاف تعمیم داد و به تعدادی نتایج واحد و متغیر دست یافت.

1- Melan

2- Prager

3- Drucker

4- Koiter

1-8- پلاستیسیته:

این حقیقت که فلزات تحت بارگذاری بعد از یک تغییر شکل اولیه الاستیک، قادر هستند تغییر شکل دائم یابند، کاملاً شناخته شده است. تغییر شکل های دائمی مستقل از زمان به عنوان تغییرشکل های پلاستیک تعریف می شوند. هدف از این فصل گسترش دامنه دید فیزیکی درباره مکانیک تغییرشکل - های پلاستیک می باشد. مسائل تغییرشکل های پلاستیک عموماً در فرایندهای اعمال شده روی مواد رخ می دهند، مثلاً در کشیدگی سیم ها، نورد کردن، شکل دادن فلزات (گرم و سرد)، سکه زنی و چکش کاری. (سلاجقه ج، 1388)

در حقیقت بیشتر اجسام مورد استفاده - ساخته شده از فلز - تغییرشکل های دائمی را در خلال فرایندهای صنعتی، متحمل می شوند. تغییرشکل ناخواسته پلاستیک در سازه ها می تواند به صورت یک مکانیزم شکست ظاهر شود، اما همچنین می توانند در کاهش یا از بین بردن تمرکز تنش مفید باشند. علاوه بر آن تغییرشکل های پلاستیک می توانند در شکست فلزات نقش داشته باشند.

چندین تفاوت قابل توجه بین تغییرشکل های پلاستیک و الاستیک باید مورد توجه قرار گیرد. تغییر شکل های الاستیک که سریعاً بعد از بارگذاری اتفاق می افتند، فقط شامل کشیدگی باند اتمی و فرآیندهای برگشت پذیر هستند، یعنی کار انجام شده در تغییر شکل جسم می تواند بطور کامل با باربرداری بازگردد. به محض باربرداری، وضعیت فلز ممکن است بر حسب تنش، کرنش و دما تعریف شده باشد، به حالت اولیه باز می گردد. علاوه بر این، وضعیت اجسام جامد الاستیک همیشه می تواند بدون توجه به نوع بارگذاری توسط دو متغیر بر حسب کرنش و درجه حرارت، به صورت منحصر به فردی، صرف نظر از مسیر بارگذاری، معرفی می شوند. (سلاجقه ج، 1388)

کار انجام شده در تغییر شکل یک جسم الاستیک به صورت انرژی کرنشی و همچنین به شکل تغییر

انرژی حرارتی، ذخیره می شود. وقتی جسم فشرده می شود، تغییر حرارت مثبت و وقتی کشیده می شود تغییر حرارت منفی است به شرطی که بار وارده چنان سریع وارد شود که تعادل آدیباتیکی در فرایند بارگذاری برقرار باشد. اما انرژی کل ایجاد شده در تغییر شکل الاستیک آنقدر کوچک است که ماکزیمم افزایش دما فقط در حدود 0,1 درجه سانتیگراد می باشد. اغلب خصوصیات الاستیک مانند مدول الاستیسیته، تنها به مقدار کمی تحت تاثیر چنین تغییرات دمای کوچکی قرار می گیرند. بنابراین می توانیم بگوییم که تغییر شکل الاستیک مستقل از نمو کرنش¹ است. (سلاجقه ج، 1388)

تغییر شکل های پلاستیک یک تغییر موقعیت اتمی دائم در جسم است. این پدیده هنگامی که یک لایه اتم روی لایه مجاور خود می لغزد، اتفاق می افتد. در این حالت اتم از موقعیت خود حرکت کرده و به موقعیت معادل مجاور می رود. چنین تغییر مکانی می تواند هر جایی که تنش برشی روی یک سطح از جسم، به مقدار بحرانی خود برسد، اتفاق افتد. بر خلاف تغییر شکل های الاستیک، تغییر شکل های پلاستیک به نقص اجزاء جسم، بسیار حساس هستند. اگر فرآیند لغزش در یک نقطه روی یک صفحه از جسم، به طور کامل متوقف شود، بخش بزرگی از صفحه می تواند از لغزش محفوظ بماند. بنابراین تنش مورد نظر برای ایجاد تغییر شکل های پلاستیک کاملاً به بی نظمی های محلی در مواد مانند نقص شبکه های کریستال، اتم های ناخالص، اجزاء فاز دوم و مرز بلورها، حساس هستند. به همین دلیل، خصوصیات پلاستیکی مواد خیلی بیشتر نسبت به آنچه که در رفتار الاستیک وجود دارد، تحت تاثیر نسبت اجزاء و تاریخچه قبلی آنها، قرار می گیرند. یک مثال مهم از این حالت، پدیده سخت شوندگی مواد است. در طول تغییر شکل، نقص ها و تغییر مکان های اولیه در ساختمان شبکه مواد انباشته شده و موجب بازداشتن لغزش می شوند. این پدیده باعث افزایش تنش مورد نیاز برای ادامه تغییر شکل می شود. (سلاجقه ج، 1388)

تغییر شکل های پلاستیک، برگشت پذیر نیستند. در طول تغییر شکل پلاستیک، موقعیت تعادلی اتم ها به طور دائم تغییر می کند. همچنین تغییر شکل های پلاستیک به تاریخچه (زمان) بارگذاری نیز وابسته اند. زیرا ساختار مواد به طور دائم در طول تغییر شکل، تغییر می کند. در نتیجه، وضعیت پلاستیک فلز نمی تواند به طور منحصر به فرد بر حسب تنش، کرنش موجود و درجه حرارت بیان شود. عدم منحصر به فرد بودن وضعیت پلاستیک و وابستگی تغییر شکل های پلاستیک به نحوه بارگذاری، نشان می دهد که معرفی کرنش های پلاستیک کل، با دو پارامتر تنش و درجه حرارت، ممکن نیست، در حالی که در وضعیت الاستیک، کرنش به طور مستقیم با این دو متغیر در ارتباط است. بنابراین در پلاستیسیته نیاز داریم که در یک وضعیت بارگذاری مشخص، تغییر شکل های نموی را محاسبه کرده و تغییر شکل پلاستیک کل را با جمع کردن اثر همه بارهای نموی، بدست آوریم. (سلاجقه ج، 1388)

9-1- طبیعت پلاستیسیته:

اگر مولفه های تنش از مقادیر معینی تجاوز نماید غالب مواد دچار تغییر شکل دائمی و یا تغییر شکل پلاستیک می شود. از این خصوصیت می توان در شکل دادن قطعات مهندسی استفاده نمود. مثلاً به عوض کاربرد روش طولانی و ضایع کننده تراش، قطعات مورد نیاز را می توان با تغییر شکل پلاستیک مستقیماً، و یک باره ساخت. کلیه روش های معمول تولید مانند آهنگری و نورد و کشیدن و همچنین تراش بر مبنی پدیده تغییر شکل پلاستیک استوار است. به طور کلی ساختن مدل های دقیق ریاضی جهت بررسی هر یک از روش های تولید امکان پذیر نمی باشد ولی می توان نتایج مفید از طریق کاربرد مدل های تقریبی بدست آورد. (اسپنسر جی سی، 1363)

در آزمایش های معمول مصالح مهندسی، بارگذاری به ناحیه ارتجاعی محدود نمی گردد. به عنوان

مثال آزمایش کشش تا انقطاع، و قضاوت درباره رفتار ماده بر مبنی خصوصیات نظیر: درصد افزایش در طول و یا درصد کاهش در سطح مقطع و یا قدرت کششی نهایی را می توان ذکر کرد. در آزمایش سختی یک نوک تیز در ماده فرو برده می شود و میزان سختی ماده بر اساس ابعاد فرورفتگی دائمی پلاستیک اندازه گیری می شود. این نکته کمی تعجب آور است چون، در مصرف عادی به علت ناچیز بودن بارگذاری، قطعات معمولا دچار تغییر شکل پلاستیک نمی گردد. (اسپنسر جی سی، 1363)

منطقی است اگر فرض شود که حالت تنش هیدرواستاتیک صرفا موجب کاهش در حجم یک جامد می گردد و این کاهش در حجم بعد از باربرداری کاملا حذف می شود. لغزش بخش های مختلف جامد نسبت به یکدیگر، که موجب تغییر شکل دائمی می شود، تحت عمل تنش های برشی صورت می گیرد. بنابراین پلاستیسیته اساسا بررسی عمل تنش های برشی بر مواد می باشد.

10-1- فرضیات

برای حل مسائل پلاستیسیته قبول فرض های ساده کننده ضرورت دارد. اولاً فرض می شود که ماده متجانس (دارای خواص مکانیکی یکسان در کلیه جهات) بوده و در طی تغییر شکل پلاستیک متجانس باقی می ماند. البته عملا تغییر شکل فراوان پلاستیک عدم تجانس ایجاد می کند. مثلا نورد سرد فلزات باعث طولیل گردیدن و پهن شدن و بالاخره صف بستن بلورها گردیده و بدین ترتیب موجب عدم تجانس می گردد. (اسپنسر جی سی، 1363)

ثانیا فرض می شود که قبل از شروع تسلیم پلاستیک ماده دقیقا از قانون هوک پیروی نماید و سپس در یک تنش تسلیم کاملا مشخص دچار تغییر شکل پلاستیک گردد همچنین فرض می شود که در طی جریان پلاستیک تاثیر زمان در تغییر شکل های نسبی در رفتار ماده بی اثر باشد. معمولا این فرضیات در یک نمودار تنش - تغییر شکل نسبی نشان داده می شود. (اسپنسر جی سی، 1363)

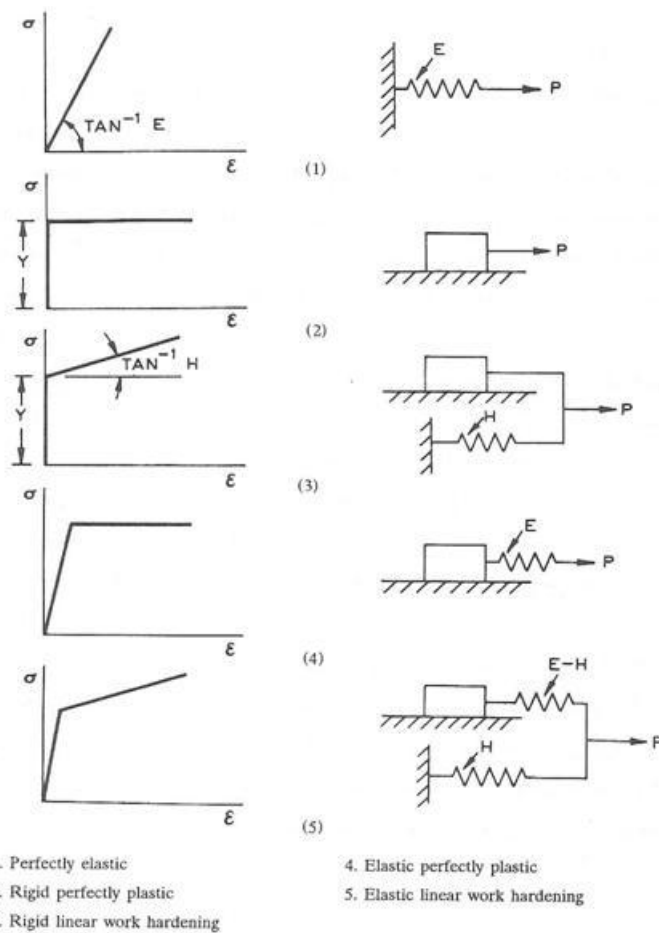
نمودار 1-2 و مدل های مکانیکی آن به درک وقایعی که در تنش یک بعدی رخ می دهد کمک می کند.

مدل یک دستگاه ارتجاعی در شکل a-1-1 نمایش داده شده است. دستگاه شامل یک فنر، که در انتها درگیر بوده و بر انتهای دیگر آن نیروی محوری p عمل می کند، می باشد. مدل یک ماده مطلقاً پلاستیک در شکل b-1-1 نمایش داده شده است. افزایش نیروی p موجب تغییر شکل نسبی نمی گردد. سپس در یک مقدار معین ثابت p تغییر شکل نسبی ایجاد شده و تا بی نهایت افزایش می یابد. این مدل ممکن است اشتباه به نظر بیاید ولی بایستی به خاطر سپرد که غالباً تغییر شکل های نسبی ارتجاعی با مقایسه با تغییر شکل های پلاستیک قابل نظر کردن می باشد. برای تاکید این نکته آزمایش کشش تا انقطاع در نظر گرفته می شود. حداکثر افزایش طول ارتجاعی در 2 اینچ طول، برابر با 0,006 اینچ می باشد، در حالی که افزایش در طول 30 درصد قبل از انقطاع غیر عادی نمی باشد. به عبارت دیگر در این مورد تغییر شکل نسبی پلاستیک در حدود 100 برابر تغییر شکل نسبی ارتجاعی می باشد. (اسپنسر جی سی، 1363)

اگر تغییر نسبی ارتجاعی با مقایسه با تغییر شکل نسبی پلاستیک ناچیز فرض شده و ماده به طور خطی سخت شونده فرض شود رفتار جامد به طور مناسب در شکل c-1-1 تشریح می شود. ولی اگر مقدار تغییر شکل های نسبی ارتجاعی و پلاستیک در یک حدود باشد مدل در شکل e-1-1 مناسب تر است. مدل ماده ارتجاعی مطلقاً پلاستیک در شکل d-1-1 نمایش داده شده است.

البته شباهت رفتار واقعی مواد با رفتاری که در نمودارهای ایده آلی تنش - تغییر شکل نسبی تشریح گردیده سطحی می باشد ولی بایستی به خاطر داشت که اگر اقدام به انتخاب مدل های دقیقتر و واقعی تر از رفتار مصالح مهندسی شود حل مسائل مفید و اساسی فوق العاده پیچیده می شود. البته بررسی کامل رفتار واقعی مواد به منظور کسب اطلاع درباره میزان انحراف رفتار واقعی مصالح

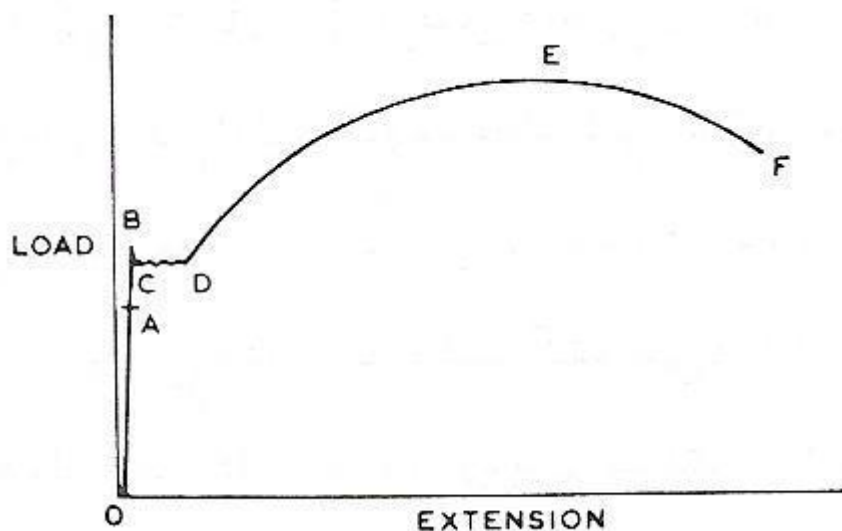
مهندسی از رفتار ایده آلی که نمودارها پیش بینی می نمایند، مفید خواهد بود.



شکل 1-1: نمودار تنش- کرنش ایده آل و مدل دینامیکی برای رفتار تحت بارگذاری (جانسون و، ملور پ، 1378)

11-1- نمودار بار- ازدیاد طول برای کشش ساده

آزمایش ساده بر روی یک میله از فولاد نرم، شاید آشنا ترین مثال الاستیک - پلاستیک باشد. یک میله فولادی نرم را در نظر بگیرید که در یک دستگاه آزمایش در دمای اتاق و با میزان کرنش تقریبی 0,002 در ثانیه قرار گرفته و مقادیر بار و ازدیاد طول آن ثبت میشود. این را باید حتما در نظر گرفت که نمونه های ماشین کاری شده، به طور صحیح در دستگاه قرار گیرد و قسمت مرکزی آنها باریکتر باشد تا بی تردید توزیع یکنواخت تنش محوری در سرتاسر طول مقیاس انجام پذیرد. یک نمودار نمونه برای بار-ازدیاد طول فولاد نرم در شکل نشان داده شده است. (اسپنسر جی سی، 1363)



شکل 1-2: نمودار بار- ازدیاد طول

ابتدا رابطه بار و ازدیاد طول اساساً خطی است یعنی قسمت OA از منحنی، که در این قسمت نقطه A حد تناسب را تعیین میکند. با ایجاد کرنش بیشتر رابطه بین بار و ازدیاد طول دیگر خطی نخواهد بود، اما ماده هنوز الاستیک است و در صورت برداشتن بار، نمونه به طول اولیه خود باز میگردد. حداکثر نیرویی که میتوان، بدون اینکه تغییر شکل دائمی به وجود آید وارد ساخت، حد الاستیک را تعریف میکند. معمولاً تفاوت کمی بین حد A و حد تناسب B الاستیک وجود دارد. هر

دوی آنها به حساسیت دستگاههای اندازه گیری و نیز به جزءئیات معینی از تکنیک آزمایش بستگی دارند. نقطه B پایان مرحله الاستیک خالص و شروع مرحله پلاستیک را نشان میدهد. این نقطه را نقطه تسلیم فوقانی می دانند و تنش تسلیم فوقانی با تقسیم بار در این نقطه بر سطح مقطع اولیه به دست می آید. تنش تسلیم تحتانی با تقسیم نمودن بار در DC بر سطح مقطع اولیه تعریف می شود. (اسپنسر جی سی، 1363)

پس از نقطه D, بار با افزایش کرنش شروع به بالا رفتن می کند. این واکنش ماده را که می تواند بار بالاتری را بر خلاف کاهش یکنواخت در سطح مقطع خود تحمل کند, سختی ناشی از کرنش و یا سختی ناشی از کار می نامند.

تنش واقعی در میله با تقسیم بار وارده بر سطح مقطع جاری آن تعریف میشود. در نقطه E میزان سختی ناشی از کار نمیتواند همگام با میزان کاهش سطح مقطع پیش برود, زیرا یک حداکثر برای بار به دست می آید که به دنبال آن کرنش محلی (ایجاد گردن در میله) و سپس شکست در نقطه F به وجود می آید. مقاومت کششی با تقسیم حداکثر بار بر سطح مقطع اولیه تعریف میشود. این حداکثر باری است که یک میله با سطح مقطع اولیه در کشش میتواند تحمل کند. (اسپنسر جی سی، 1363)

توجه کنید که تا زمانی که به مقاومت کششی برسیم, تغییر شکل تمام المانهای میله را میتوان تحت بار یکسان فرض کرد, یعنی تا زمانی که به نقطه E برسیم, تمام میله به شکل هموزن, تحت کرنش قرار گرفته است. پس از اعمال حداکثر بار, یک گردن یا کمر در محل به وجود می آید که موجب تنش کششی سه محوره در آن میشود. بنابراین آزمایش کشش به اندازه مفید بودن ساده خود در بار حداکثر و نه در نقطه شکست می رسد. (اسپنسر جی سی، 1363)

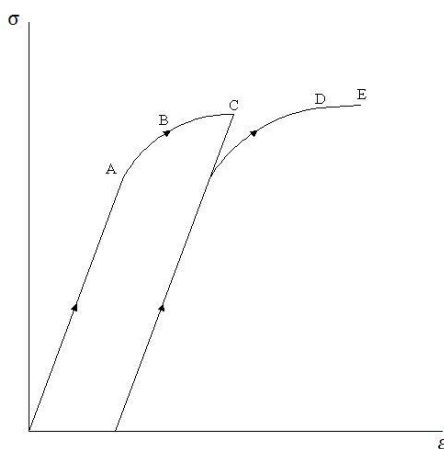
از نقطه نظر ناپایداری تا شکست, تحت شرایط تنش کششی سه محوره پیچیده ای که دائماً در حال

تغییر است، در گردن کرنش ایجاد می شود. هر چه میزان سخت شدن فلز بیشتر باشد، وسعت شکل گرفتن گردن بیشتر است. (اسپنسر جی سی، 1363)

12-1- نمودار تنش - تغییر شکل نسبی:

برای ساختن نمودار تنش - تغییر شکل نسبی معمولاً یک نمونه از ماده که دارای سطح مقطع یکنواخت می باشد به طور محوری کشیده و یا فشرده می شود. بار وارده تقسیم بر مساحت سطح مقطع تنش نامیده می شود. تغییر شکل نسبی به دو صورت تقریب می شود: اگر طول نمونه تحت عمل بار محوری p از l_0 به l افزایش یابد گفته می شود که نمونه دچار تغییر شکل نسبی مهندسی برابر با $e = (l - l_0)/l_0$ و یا دچار تغییر شکل نسبی لگاریتمی (و یا طبیعی) برابر با $\epsilon = \log_e(l/l_0)$ گردیده است. ملاحظه می شود که $\epsilon = \log_e(1 + e)$ می باشد. بنابراین برای تغییر شکل های کوچک مقدار e و ϵ تقریباً یکسان است. (اسپنسر جی سی، 1363)

اگر یک نمونه از ماده به طرز مذکور بارگذاری گردد و نتایج رسم شود نمودار در شکل 3-1 بدست می آید.

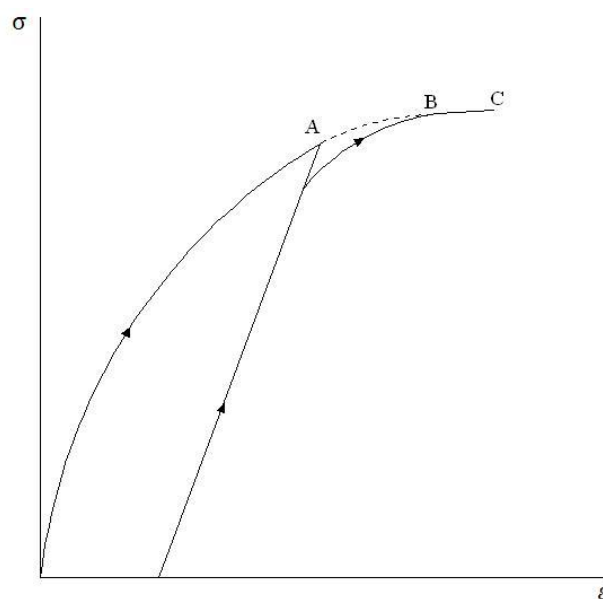


شکل 3-1: نمودار تنش - تغییر شکل نسبی

تا زمانیکه تنش از مقدار آن در نقطه A کمتر است نمونه دچار تغییر شکل ارتجاعی می گردد. یعنی بعد از باربرداری، به شکل ابعاد اولیه، مراجعت می کند. و لی اگر تنش به مقدار B افزایش یابد تغییر شکل دائمی ایجاد می گردد. حد تناسب مقدار تنش که در ماورای آن رابطه مابین تنش و تغییر شکل نسبی خطی نمی باشد نشان می دهد. تسلیم در غالب مصالح در یک نقطه خیلی معین رخ نداده و عبور از رفتار خطی ارتجاعی به رفتار پلاستیک توام با یک شکستگی در نمودار تنش - تغییر شکل نسبی نمی باشد. (اسپنسر جی سی، 1363)

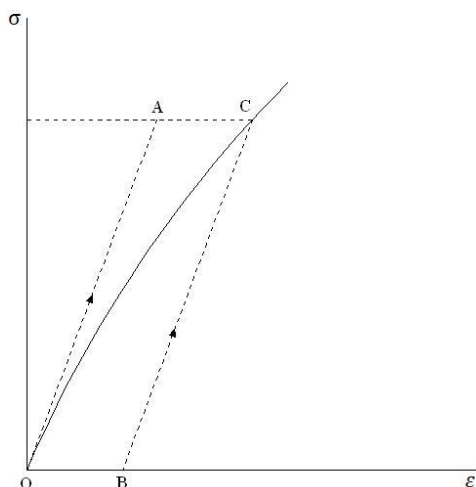
اگر بارگذاری تا نقطه C ادامه یابد و سپس باربرداری می شود تنش تسلیم افزایش می یابد. آزمایش های دقیق نشان می دهد که مسیر در بارگذاری مجدد، یعنی منحنی DE، در امتداد مسیر اولیه بارگذاری می باشد. معمولا مهندسين در طراحی قطعات علاقمند به محدود کردن مقدار تنش به درصدی از مقدار تنش تسلیم می باشند. بنابراین اطلاع از مقدار تنش تسلیم ضرورت دارد. مقدار ضریب اطمینان بستگی به مقدار تنش تسلیم نداشته و بر مبنی قدرت نهایی کششی محاسبه و انتخاب می گردد. (اسپنسر جی سی، 1363)

چون منحنی تنش - تغییر شکل نسبی مس تابانیده، آلومینیوم و بعضی از آلیاژهای آن، و تعدادی از آلیاژهای فولاد دارای بخش های افقی نمی باشند بنابراین نمی توان یک نقطه تسلیم مشخص برای مواد مذکور تعیین نمود. در این دسته از مواد تغییر شکل دائمی تحت بارگذاری ناچیز آغاز می شود. ناحیه ارتجاعی عملا وجود ندارد (شکل 2-4). اگر در یک مرحله ای از بارگذاری از نمونه باربرداری انجام شود ملاحظه می شود که مسیر باربرداری مستقیم با شیب تند است. در بارگذاری مجدد نمونه، رفتار ارتجاعی قابل ملاحظه مشاهده می شود. (اسپنسر جی سی، 1363)



شکل 1-4: نمودار تنش - تغییر شکل نسبی مواردی که دارای نقطه تسلیم مشخصی نمی باشند

فقدان نقطه تسلیم مشخص در موارد مذکور مشکلی برای مهندسی که احتیاج به یک مبنای منطقی و قابل اطمینان برای اجرا محاسبات خود دارند، ایجاد می نماید. مشکل با تعریف تنش گواه رفع می شود (شکل 1-5) مماسی در مرکز منحنی رسم می شود. سپس خط BC به موازات مماس به طوری که OB برابر با 0,1 باشد رسم می شود. مقدار تنش در نقطه C که موجب ایجاد تغییر شکل نسبی پلاستیک به میزان 0,1 می گردد تنش گواه 0,1 نامیده می شود. تنش گواه و یا ضریب توافق شده ای از آن به عنوان مبنای محاسبات به کار برده می شود. به طوری که ملاحظه شد، ماده بعد از بارگذاری اولیه رفتار ارتجاعی از خود نشان می دهد و بنابراین تنش گواه مبنای قابل اطمینانی برای اجرا محاسبات می باشد. (اسپنسر جی سی، 1363)



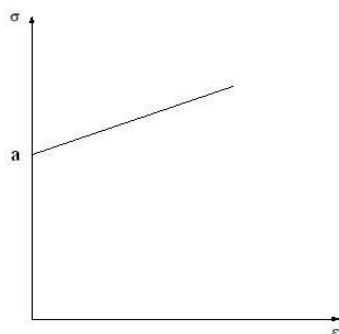
شکل 1-5: تنش گواه

13-1- معادلات تقریبی برای منحنی تنش - تغییر شکل نسبی:

در مسائل ساده پلاستیسیته ساختن معادلات عملی برای منحنی تنش - کرنش مفید است. در معادلات زیر تعریف لگاریتمی کرنش مورد استفاده قرار می گیرد. باید به خاطر داشت که اگر از معادلات برای تعریف تغییر شکل الاستیک - پلاستیک استفاده کنیم، در حالی که کرنشهای پلاستیک با کرنش های الاستیک تقریباً برابر باشد، آنگاه استفاده از تعریفهای مهندسی (کرنش مهندسی) ممکن است ارجح باشد. (اسپنسر جی سی، 1363)

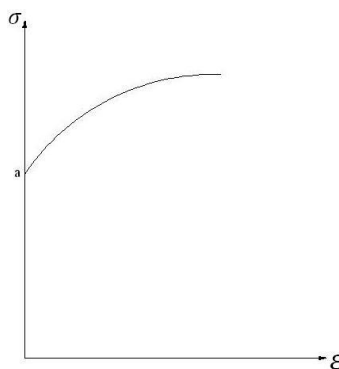
1-13-1. عبارت لودویک

الف) هنگامی که $n = 1$ معادله فوق ماده ای را بیان می دارد که تا حد تنش تسلیم a صلب است و سپس تغییر شکل با نمو کرنش سختی b رخ می دهد. این معادله را می توان برای مواد کار سرد شده به کار برد. به خصوص به آلومینیوم نیمه سخت بسیار خوب جواب می دهد. این حالتی است که در شکل 1-6 نشان داده شده است. به بیان دیگر، فرمول معرف ماده صلب پلاستیک سخت شونده خطی با تنش تسلیم a می باشد. (اسپنسر جی سی، 1363)



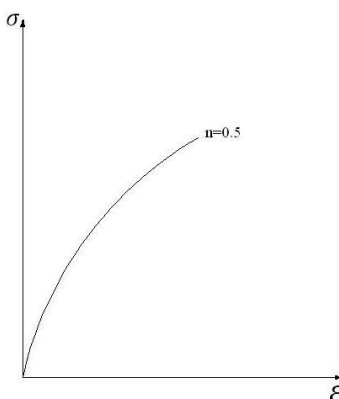
شکل 1-6: منحنی ماده صلب- پلاستیک سخت شونده خطی

ب) اگر $n > 1$ باشد نمودار مطابق شکل 1-7 بوده و a تنش تسلیم خواهد بود.



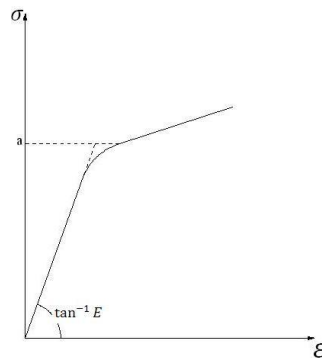
شکل 1-7: منحنی ماده صلب- پلاستیک سخت شونده غیرخطی

ج) اگر $n < 1$ و $a = 0$ باشد، نمودار معرف ماده ای که فاقد رفتار ارتجاعی است می باشد. به طوری که در شکل 1-8 نشان داده شده این ماده دارای نقطه تسلیم مشخصی نمی باشد.



شکل 1-8: منحنی ماده غیر ارتجاعی سخت شونده غیرخطی

1-13-2- روش متداول دیگر برای نشان دادن تقریبی منحنی تنش - کرنش این است که دو عبارت - خطی دوگانه - یا بیشتر - خطی چندگانه - بین تنش و کرنش استفاده کرد. این در شکل 1-9-1 نمایش داده شده است، که $\sigma = E\varepsilon$ از 0 تا Y و $\sigma = P\varepsilon$ از Y به بعد است. E را می توان به عنوان ضریب الاستیک و P را ضریب پلاستیک فرض نمود. (اسپنسر جی سی، 1363)



شکل 1-9: تقریب منحنی تنش - کرنش با دو عبارت خطی

1-13-3- وس عبارت $\sigma = (b - a)\{1 - \exp(-n\varepsilon)\}$ را که در آن a و b و n اعداد ثابت هستند پیشنهاد کرده است. این انطباق خوبی برای منحنی تنش - کرنش می دهد. اما به خاطر پیچیده بودن به ندرت در تحلیلهای تئوری از آن استفاده می شود. (جانسون و، ملور پ، 1378)

1-13-4- عبارت منصوب به سوفیت در اینجا به شکل ساده تری بیان می شود:

$$\sigma = c(a + \varepsilon) \quad 0 \leq n \leq 1 \quad 43-1$$

که c و a و n اعداد ثابت برای یک ماده خاص هستند. این معادله واقع بینانه تر بوده و برای کاربرد در مواردی که کرنشها بزرگتر از 1 هستند مناسب است، اما عملیات جبری آن ممکن است مشکل باشد. این عبارت رابطه بین تنش حقیقی و کرنش طبیعی را برای یک ماده که در کشش ساده با کار سرد و کرنش سختی تا حد کرنش حقیقی a از شرایط آنیل شده که در آن ε اندازه کرنش متعاقب است،

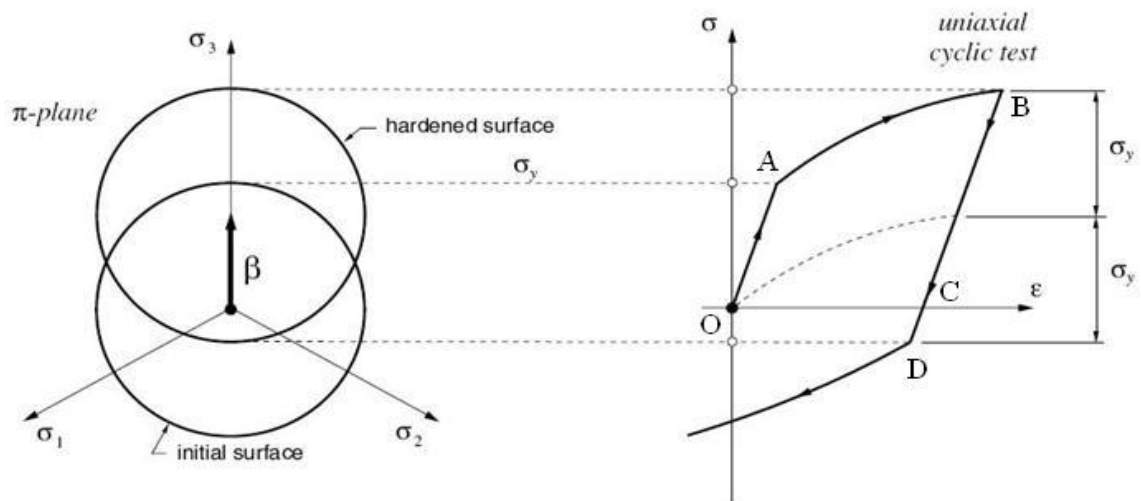
تعریف می کند. (جانسون و، ملور پ، 1378)

$$\sigma = Y \tan(E\varepsilon/Y) \quad \text{5-13-1- پراگر این عبارت را پیشنهاد کرده است:}$$

این منحنی در کرنش صفر دارای ضریب تانژانت E بوده و به طرف Y به صورت مجانب با یک نمو سریع نزدیک می شود. (جانسون و، ملور پ، 1378)

14-1- اثر باشینگر¹:

ملاحظه شد که مسیر بارگذاری مجدد (منحنی CD در شکل 10-1) در امتداد مسیر بارگذاری اولیه OAB می باشد. اگر نوع بارگذاری مجدد با بارگذاری اولیه تفاوت داشته باشد امتداد مسیر بارگذاری تغییر می نماید. اگر ماده ای دچار تغییر شکل پلاستیک گردد و سپس از آن باربرداری شود توزیعی از تنش های باقیمانده در آن محبوس می شود. اگر علامت بارگذاری مجدد خلاف علامت بارگذاری اولیه باشد، تسلیم در تنش کمتری رخ می دهد. این پدیده به نام اثر باشینگر معروف است و در نمودار تنش - تغییر شکل نسبی در شکل 10-1 تصویر گردیده است. تنش در A معرف مقدار تنش تسلیم اولیه می باشد. سپس تغییر شکل کششی پلاستیک ماده را به B سوق می دهد، بارگذاری کششی حذف می شود BC و بارگذاری فشاری بر ماده وارد می شود CD ، ملاحظه می شود که تنش در تسلیم مجدد، D از تنش در تسلیم اولیه A کمتر است. اثر باشینگر در مواردی که جهت بارگذاری تغییر نمی نماید قابل نظر نمودن است ولی در حالتی که تنش پی در پی تغییر جهت می دهد اهمیت فراوان دارد. تابانیدن ملایم موجب حذف اثر باشینگر می شود. (اسپنسر جی سی، 1363)



شکل 10-1: اثر بوشینگر

2- فصل دوم

روش های تحلیل پلاستیسیته کامل

2-1- معیار تسلیم برای جامدات

درباره منحنی تنش و کرنش یک جسم که تحت اثر کشش ساده قرار گرفته بود بحث کردیم و توضیح دادیم که نقطه ای وجود دارد که در آن نقطه جسم به حالت تسلیم در می آید و دارای تغییرشکل پلاستیک خواهد بود. در حالت قبل تنش به صورت یک محوری بوده و تنش تسلیم را می شد تعیین کرد. ولی اگر به جسم نیروهای مختلفی وارد آید چطور میتوان تسلیم آن را به دست می آورد؟ چه نوع ترکیبی از این نیروها حالت تسلیم را به وجود می آورند؟ ما می دانیم به عنوان مثال که در مورد تنش هیدرواستاتیکی یعنی تنشی که به طور مساوی در کلیه امتدادها وارد شود حالت تسلیم حتی در فشارهای خیلی زیاد هم تولید نمی شود. معمولا تاثیر تنش های هیدرواستاتیکی که در فلزات بسیار کم بوده و در سایر مصالح مانند خاک و ... تاثیر آن ها در ترکیب با تنش های انحرافی بر سطح تسلیم تاثیر گذار است. (2008,LUBLINER.J)

با تغییر فشار داخلی q و نیروی کشش P و لنگر پیچشی T می توان ترکیب های مختلفی از تنشها را به وجود آورد که البته امتدادهای اصلی مختلفی را به وجود می آورند. سوال اینست که معلوم شود با چه ترکیبی از نیروهای وارده استوانه جداره نازک به حالت تسلیم در می آید؟

معیار تسلیم¹ عبارت از این است که تصمیم گرفته شود که چه ترکیبی از تنشهای چند محوری باعث تسلیم می شود. بنابراین اولین قدم تعیین معیار تسلیم است. دومین قدم اینست که معلوم گردد که جسم پس از شروع تسلیم چگونه و تحت چه قانونی تغییر شکل می یابد. (2008,LUBLINER.J)

یک المان از مواد نرمی را در نظر بگیرید که تحت تنشهای اصلی قرار دارند و با دایره موهر نشان داده

می شوند.

اگر تنشهای اصلی $\sigma_1 + \sigma_m$, $\sigma_2 + \sigma_m$ و $\sigma_3 + \sigma_m$ بودند دایره های موهر برای این دستگاه تنش مانند قبل بود و تنها تفاوت آن این بود که دایره ها به اندازه فاصله در امتداد محور تغییر مکان می دادند. تنشهای اضافی یک دستگاه تنش هیدرواستاتیک (کششی یا فشاری) را تشکیل می دهد. یافته ها دلالت بر این دارد که اندازه مطلق دایره از $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$, $\sigma_3 - \sigma_1$ یا معادل آنها $(\sigma_1 + \sigma_m - \sigma_2 - \sigma_m)$ و ... است. بر اساس این فرضیات معیار تسلیم مستقل از مولفه تنش هیدرو استاتیک $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ یا $\frac{\sigma_1}{3}$ است. (جانسون و، ملور پ، 1378)

بنابراین هنگامی که یک تابع اسکالر تفاوت تنشهای اصلی به مقدار بحرانی میرسد، تسلیم رخ می دهد. به طور کلی می توان نوشت :

$$f(\overline{\sigma_1 - \sigma_2}, \overline{\sigma_2 - \sigma_3}, \overline{\sigma_3 - \sigma_1}) = \text{عدد ثابت} \quad 1-2$$

چون تنها مواد ایزوتروپیک را مورد نظر داریم بنابراین اهمیت بیشتری برای $(\sigma_1 - \sigma_2)$ نسبت به $(\sigma_2 - \sigma_3)$ و یا $(\sigma_3 - \sigma_1)$ نباید قائل باشیم. مقصود ما از تابع اسکالر تابعی است که هرگاه مقادیر به خصوصی را به مولفه های متغیر آن بدهیم، یک کمیت را به دست دهد. هرگاه این کمیت به مقدار معینی برسد شریط تنش چنان خواهند بود که تسلیم رخ خواهد داد.

دو نوع برداشت از معیار تسلیم امکان پذیر است. یک برداشت کاملاً ریاضی (با آماری) و یکی دیگر که در جستجوی یافتن توجیه فیزیکی است.

شاید ساده ترین تابع قابل تصور که در معادله بالا صدق کند به شکل زیر باشد:

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = cte \quad 2-2$$

از سه مقدار $|\sigma_1 - \sigma_2|$ و $|\sigma_2 - \sigma_3|$ و $|\sigma_3 - \sigma_1|$ تسلیم زمانی باید رخ دهد که بیشترین آنها به یک مقدار ثابت و بحرانی برای یک ماده معین برسد.

یک تابع مجاز دیگر که ممکن است به ذهن خطور کند عبارت است از:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = cte \quad 3-2$$

به کارگیری عبارت $(\sigma_1 - \sigma_2)$ و ... با درجه دوم ضرورت استفاده از علامت قدرمطلق را از بین می برد. همانند کارهای آماری با مجذورها به عنوان کمیت های جبری راحت تر می توان کار کرد. در این نوع از تابع هر یک تنش های اصلی سهمی در تسلیم دارند. (جانسون و، ملور پ، 1378)

از نظر ریاضی وقتی می گوئیم تنش حجمی یا هیدرو استاتیک در تسلیم اثری ندارد، مثل اینست که بگوئیم $J_2 = cte$ هیچ اهمیت فیزیکی ندارد، در حالیکه یک معیار تسلیم است چون:

$$\sum (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 3 \sum \left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3} \right)^2 = 3 \sum \sigma_1^2 \quad 4-2$$

$$= 3 \left[(\sum \sigma_1^2) - 2 \sum \sigma_1 \sigma_2 \right] = 6 J_2 \quad 5-2$$

2-2- مثالهایی از معیارهای تسلیم¹

معیارهای مختلفی درباره تسلیم اجسام جامد تاکنون پیشنهاد شده است که اولین آن توسط کولمب² در سال 1773 پیشنهاد شد. تعدادی از این پیشنهادها در ابتدا به منظور معیاری برای فرسودگی یا شکست اجسام شکننده وضع گردیدند ولی بعداً به عنوان معیار تسلیم اجسام نرم نیز مورد قبول قرار

1- *Exampels of yeild criteria*

2- *Coulomb*

گرفتند. بعضی از عمومی ترین این معیارها را به طور مختصر بحث خواهیم کرد.

معیار تسلیم فرضیه ای درباره حد الاستیک تحت هر ترکیب ممکن از تنش است.

صحت هر معیار تسلیم پیشنهادی را باید با آزمایش تایید کرد. (1953, HOFFMAN.0, SACHS.G)

2-2-1- نظریه کرنش ماکزیمم یا نظریه سنت و نانت¹

این نظریه بیان می کند که حالت تسلیم وقتی در جسم پیش می آید که کرنش اصلی ماکزیمم

حاصل در جسم برابر با کرنش تسلیم در حالت کشش ساده یا فشار ساده باشد. یعنی $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$

بنابراین هرگاه فرض شود که بزرگترین کرنش در مقدار مطلق باشد، تسلیم وقتی شروع می شود که :

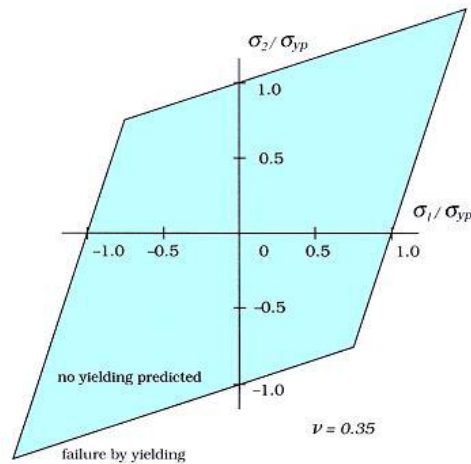
$$E \varepsilon_1 = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \pm \sigma_0 \quad 6-2$$

در حالت تنش دو محوری چنین به دست می آید.

$$E \varepsilon_1 = \sigma_1 - \mu \sigma_2 = \pm \sigma_0 \quad |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \quad 7-2 \text{ (الف)}$$

$$E \varepsilon_1 = \sigma_2 - \mu \sigma_1 = \pm \sigma_0 \quad |\sigma_2| \geq |\sigma_1| \quad 7-2 \text{ (ب)}$$

این نظریه در طراحی و محاسبه لوله های توپ به کار می رود.



شکل 2-1: معیار سنت و نانت در حالت دو بعدی

2-2-2- نظریه برشی ماکزیمم یا معیار ترسکا

معادله 8,2 به عنوان معیار ترسکا ست که در سال 1864 ارائه شده است. هابر و فون میسز و ماکسول در نامه ای به کلوبن در سال 1856 معادله 8,2 را پیشنهاد کردند. « تسلیم زمانی رخ می دهد که بزرگترین مقدار قدر مطلق یکی از سه تنش برشی حداکثر درماده به مقدار معینی برسد»

معیار ترسکا بیان می کند که تسلیم موقعی شروع می شود که یکی از شش شرط زیر صادق باشد:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_0 \quad , \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_0 \quad , \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_0 \quad 8-2$$

برای حالت تنش دو محوری که $\sigma_3 = 0$ است چنین باید نوشت:

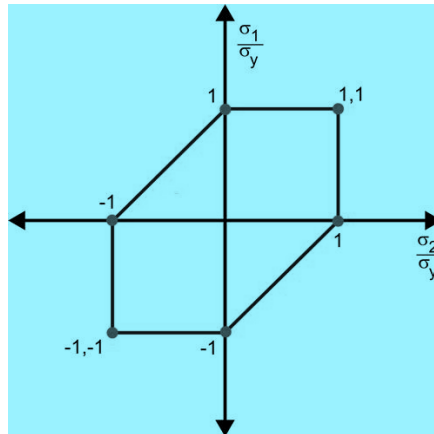
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 \quad \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0 \quad \text{9-2 (الف)}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -\sigma_0 \quad \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0 \quad \text{9-2 (ب)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \quad \sigma_2 > \sigma_1 > 0 \quad \text{9-2 (ج)}$$

اگر در صفحه مختصات σ_1 و σ_2 نمودار مربوط به حالت دو محوری را برای معیار ترسکا رسم کنیم

شکل زیر به دست می آید. باید توجه کرد یک حد این نظریه این است که تنشهای تسلیم در حالت کشش و فشار مساوی باشد.



شکل 2-1: معیار ترسکا در حالت دو بعدی

معیار ترسکا با آزمایش توافق نسبتاً خوبی دارد و به همین جهت به وسیله تعدادی از مهندسين محاسب و طراح مورد استفاده قرار میگیرد و این نظریه یک مشکل بزرگ دارد و آن اینست که قبلاً باید دانست که کدامیک از تنشها بزرگترین و کدامیک کوچکترین هستند.

یک معیار تسلیم را می توان برای هر ترکیبی از تنش به کاربرد، در نتیجه ثابتهای معادلات 10,2 را از حالات ساده تنش می توان به دست آورد. ثابت ها را معمولاً بر حسب تنش تسلیم کششی Y و یا تنش برشی K برای یک حالت برشی خالص به دست می آید.

در تسلیم در کشش ساده $\sigma_1 = Y$ و $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ و بنابراین، ثابتهای معادلات 10,2 به ترتیب Y و $2Y^2$ است. برای برش خالص $\sigma_1 = -\sigma_3 = K$ و تنش میانی $\sigma_2 = 0$ که از اینجا ثابتها برابر با K و $6K^2$ می شوند. معادلات 10,2 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = Y = 2K \quad (10-2 \text{ الف})$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2 = 6K^2 \quad (10-2 \text{ ب})$$

3-2-2- نظریه انرژی کرنشی ماکزیمم یا نظریه انرژی بلترامی¹

این نظریه این طور بیان می شود که تسلیم در جسم وقتی اتفاق می افتد که انرژی کرنشی کلی در واحد حجم از جسم مساوی انرژی کرنشی کلی جسم در حالت تسلیم برای کشش یا فشار ساده باشد. می دانیم که انرژی کلی جسم در موقع تسلیم در حالت کشش ساده مساویست با :

$$\frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{2E} \sigma_0^2 \quad 11-2$$

و مقدار انرژی کرنشی کلی جسم مساویست با:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad 12-2$$

$$U = \frac{1}{2} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad 13-2$$

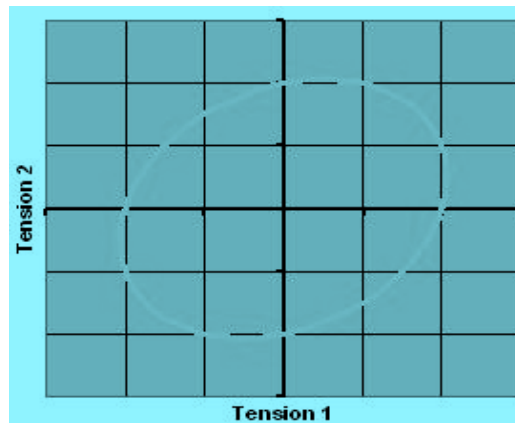
در این صورت معیار تسلیم با این نظریه چنین بدست می شود:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_0^2 \quad 14-2$$

در حالت تنش دو محوری چنین بدست می آید:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2 \quad 15-2$$

معادله فوق، معادله یک بیضی در صفحه σ_1 و σ_2 است. ملاحظه می شود که رابطه تسلیم شروع را در فشار خیلی زیاد هیدرواستاتیکی $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ پیش بینی می کند که آن هم مخالف تجربه است. همچنین از رابطه روشن است که فقط انرژی پیچشی باعث تسلیم جسم می شود. به همین علت این نظریه به وسیله نظریه بعدی که شرح داده می شود منسوخ گردیده است.



شکل 2-2: معیار بلترامی در حالت دو بعدی

4-2-2- نظریه انرژی پیچشی یا معیار فون میسز¹

نظریه انرژی پیچشی فرض می کند که حالت تسلیم در جسم زمانی به وجود می آید که انرژی پیچشی جسم مساوی انرژی پیچشی در حالت کشش ساده گردد. بنابراین میتوان نوشت:

$$U_d = \frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 \quad 16-2$$

ولی در معادله بالا برای تسلیم در کشش ساده داریم که:

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2 \quad 17-2$$

1- E-Distortion Energy Theory , or Von-Mises Yield Criterion

بنابراین در این معیار برای تسلیم جسم میتوان نوشت که:

$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_0^2 \quad 18-2$$

در حالت تنش دو محوری نتیجه این طور می شود:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3^2 = \sigma_0^2 \quad 19-2$$

شکل بالا یک بیضی است به اسم بیضی فون میسز در صفحه $\sigma_1 \sigma_2$ نامیده می شود. در مورد برش ساده چنین بدست می آید:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_1^2 = k^2 \quad 20-2$$

و معیار تسلیم فن مایسز پیش بینی می کند که حالت تسلیم وقتی پیش می آید که (در حالت کشش ساده) شرط زیر صادق باشد:

$$k^2 = \frac{1}{3}\sigma_0^2 \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \quad 21-2$$

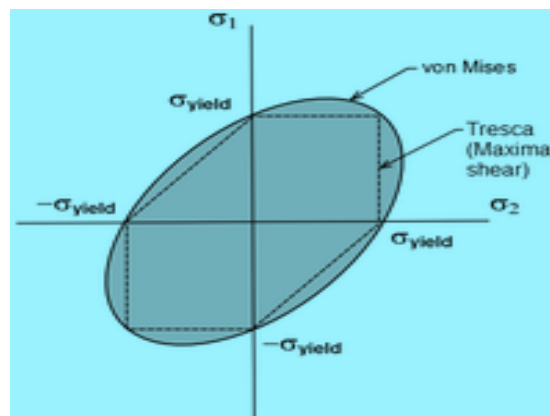
از برش ساده و کشش ساده این طور نتیجه گرفته می شود که تنش تسلیم در برش ساده $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر تنش تسلیم در کشش ساده است. بنابراین پیش بینی تسلیم در برش ساده بوسیله معیار فون میسز حدود پانزده درصد بالاتر از پیش بینی معیار ترسکا است.

همچنین میشود به سهولت دید که این تفاوت حداکثر تفاوتی است که بین دو معیار مزبور وجود دارد.

معمولا معیار تسلیم فون میسز با آزمایش بیشتر از سایر معیارها و نظریه ها تطبیق دارد و در بیشتر موارد کاربرد آن از معیار ترسکا سهولت است زیرا هیچ احتیاجی برای شناسایی و علم به این که

کدامیک از تنشهای اصلی بزرگترین و کدامیک کوچکترین می باشد نیست. به همین دلیل این معیار در حال حاضر خیلی زیاد بکار می رود. گرچه در مواقعی که نسبت مقدار و اندازه تنشهای اصلی معلوم باشد استفاده از معیار ترسکا ساده تر است.

در ابتدا پیشنهاد فن مایسز برای معیار تسلیم به منظور سهولت کاربرد ریاضی آن بود. بعداً هنکی¹ نشان داد که این معیار معادل این فرض است که این تسلیم زمانی اتفاق می افتد که انرژی کرنشی پیشگی به مقدار بحرانی برسد.



شکل 2-3: معیار ترسکا و فون میسز در حالت دو بعدی

3-2- رابطه تنش-کرنش الاستوپلاستیک

در این حالت از رفتار ماده پس از تسلیم اولیه قسمتی از تغییر شکل به صورت الاستیک و قسمتی دیگر در قالب پلاستیک خواهد بود. در هر گام تغییرات کرنش به دو مولفه الاستیک و پلاستیک

تقسیم می شود به طوریکه: (1980, HINTON E , OWEN D.R. J.)

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad 22-2$$

1- Henky

ارتباط نمو افزایش کرنش الاستیک با نمو افزایش تنش توسط رابطه $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ برقرار شده و به طور مجزاً در مقابل تنش انحرافی و تنش همه جانبه یا هیدرواستاتیک مشخص می شود.

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad 23-2$$

که E و ν مدول الاستیک و ضریب پواسون مصالح هستند.

برای بدست آوردن رابطه بین نمو کرنش پلاستیک و نمو تنش تعریف دیگری در روابط رفتاری ماده به نام قانون جریان پلاستیک باید صورت گیرد. این قانون به صورت رابطه ای بین نمو کرنش پلاستیک و مشتق تابع پتانسیل پلاستیک (Q) نسبت به نمو تنش می باشد: (1953, KOITER W.T)

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\delta Q}{\delta \sigma_{ij}} \quad 24-2$$

در این رابطه $d\lambda$ ضریب تناسب پلاستیک نامیده می شود. معادله 24-2 بیانگر قانون جریان پلاستیک می باشد. این رابطه در اصل چگونگی پیشروی جریان پلاستیک را بعد از تسلیم ماده نشان می دهد. تابع پتانسیل پلاستیک (Q) باید تابعی از تنش و یا مستقل های آن بوده که در این مدل از مستقل های تنش J_2 ، J_3 استفاده شده است.

مشتقات این تابع، تعیین کننده جهات نمو کرنش پلاستیک می باشد. در یک شکل عمومی در نظریه خمیری مواد فرض برقراری رابطه $F = Q$ دارای مفهومی خاص در ریاضیات نظریه پلاستیسیته می باشد. در این حالت اصول برقراری یگانگی پاسخ ها حاکمیت داشته و ماتریس ارتباط تنش-کرنش در این حالت متقارن خواهد بود. رابطه $F = Q$ و فرض اینکه هر دو توابعی از J_2 ، J_3 هستند، ارائه گر یک نظریه پلاستیسیته وابسته می باشد.

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\delta F}{\delta \sigma_{ij}} \quad 25-2$$

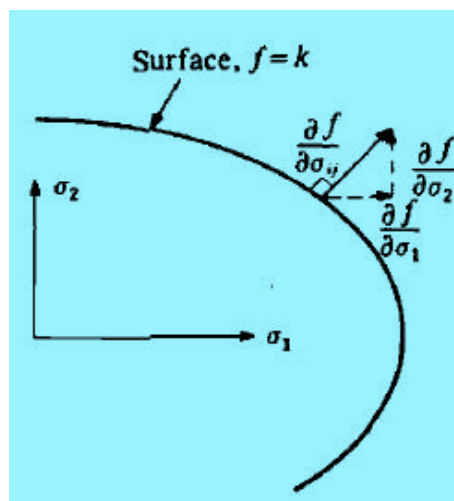
شرط فوق در نظریه خمیری، تعامد (نرمالیته) نامیده می شود. در این حالت $\frac{\delta F}{\delta \sigma_{ij}}$ برداری عمود بر سطح تابع پتانسیل پلاستیک مطابق شکل 2-4 می باشد. این شکل نمایانگر مولفه های کرنش پلاستیک با ارضا شرائط تعامد بر سطح تسلیم بوده به گونه ای که مولفه های این بردار در جهت n به صورت برشی و حجمی ترکیب و نمو کرنش پلاستیک را ارائه می نمایند. برای حالت خاص $F = J_2$ می توان نوشت: (1980, HINTON E , OWEN D.R. J.)

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij} \quad 26-2$$

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \sigma_{ij} \quad 27-2$$

این روابط به عنوان معادلات پراندل-رس¹ شناخته شده و کاربرد زیادی دارد. مشاهدات تجربی نشان داده اند که شرائط تعامد یک فرض قابل قبول در رفتار فلزات می باشد. ولی در مورد رفتار مکانیکی سنگ ها و خاک ها و بتن استفاده از شرائط تعامد، تحت شرائط ویژه دیگری که جای بحث دارد میسر است. بنابراین با استفاده از روابط بالا، روابط نموی به صورت کامل بین تنش و کرنش برای محاسبه تغییر شکل الاستو پلاستیک به صورت زیر ارائه می شود: (1980, HINTON E , OWEN D.R. J.)

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad 28-2$$

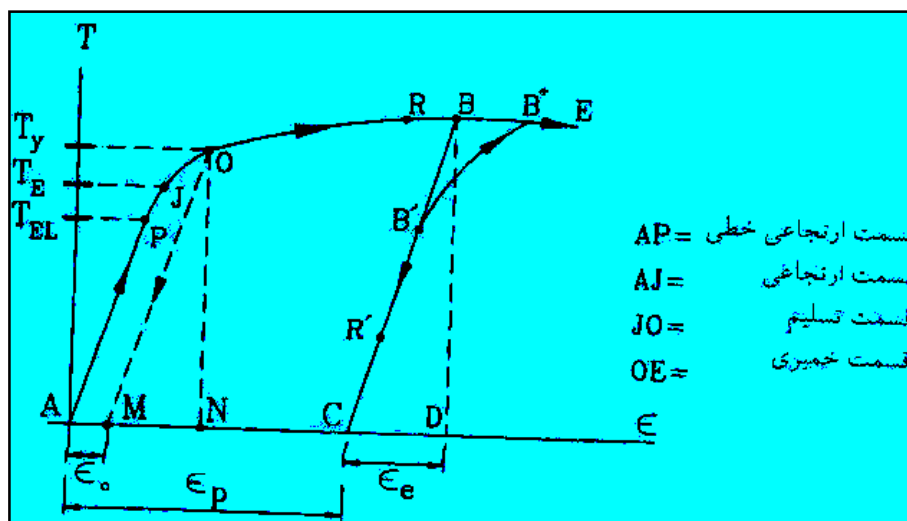


شکل 4-2: منحنی تنش- کرنش ساختگی در یک عضو محوری (1980, HINTON E , OWEN D.R. J.)

4-2- معادلات رفتاری در تئوری خمیری

معادلات رفتاری جامدات تا حد ارتجاعی تابع قوانین تئوری ارتجاعی و پس از آن تابع قوانین تئوری خمیری می باشند. معادلات رفتاری مختلفی برای بیان رفتار مواد متفاوت و گاهی یک نوع ماده در منطقه خمیری داده شده است. برخی از این قوانین رفتاری، بسیار مناسب و برخی دیگر نامناسب بوده اند. در این قسمت سعی شده است که معادلات رفتاری در حالت خمیری برای مواد ایده آل به صورت مبسوط توضیح داده شود. (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

قبل از شروع بحث معادلات رفتاری در تئوری خمیری، ابتدا با استفاده از منحنی تنش- کرنش برخی اصطلاحات را تعریف می کنیم. در شکل 5-2 منحنی تنش- کرنش یک عضو محوری نشان داده شده است.



شکل 2-5: منحنی تنش - کرنش ساختگی در یک عضو محوری (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

هر منحنی تنش - کرنش شامل 3 قسمت اصلی است:

1. قسمت ارتجاعی - خطی¹ و قسمت ارتجاعی

2. قسمت تسلیم²

3. قسمت خمیری با سخت شوندهگی کرنش³

در قسمت سوم افزایش تنش به میزان کم باعث افزایش کرنش به مقدار بسیار زیادتر از منطقه ارتجاعی را می شود و باربرداری در این منطقه باعث ایجاد کرنش باقیمانده به میزان ϵ_p می شود

شکل 2-4.

نقطه P محل اختتام منطقه خطی را نشان می دهد، در حالی که نقطه با تنش T_E محل اختتام

1- Linear elastic part

2- Yield part

3- Strain-hardening plastic part

منطقه ارتجاعی را نشان می دهد، در عمل، تمیز دادن این دو نقطه از یکدیگر بسیار مشکل است و افراد مختلف با تعاریف مختلف این نقاط را از یکدیگر جدا کرده اند. به عنوان مثال جانسون نقطه J با تنش $\bar{\sigma}_E$ را جایی تعریف کرده است که شیب منحنی در آن نقطه نصف شیب منحنی در نقطه P است و به آن حد ارتجاعی گویند. (MALVERN L.E, 1969)

تنش تسلیم معمولاً به صورتی تعریف می شود که خط گذرنده از آن با شیب قسمت خطی منحنی، محور کرنش ها را در $\epsilon_0 = 0.002$ قطع می کند (نقطه O در شکل 2-4). تنش در نقطه O تنش تسلیم¹ یا مقاومت تسلیم² نامیده می شود.

رفتار ماورا تسلیم نیز در شکل 2-4 نشان داده شده است. این منطقه شیب بسیار کمی داشته و زمانی که این شیب صفر باشد رفتار کاملاً خمیری³ است. در حالت عادی که این شیب بزرگتر از صفر است رفتار ماده با سخت شوندگی کرنش یا سخت شوندگی کار داخلی⁴ همراه می باشد. اگر بارگذاری چنان باشد که به منطقه JE (قسمت تسلیم JO و قسمت ماورا تسلیم OE) برسیم، آنگاه با حذف بارگذاری، منحنی باربرداری خطی موازی شیب اولیه این منحنی (یعنی موازی خط AP) است. منحنی های بار برداری در نقاط O و B به ترتیب خطوط OM و BC می باشند. واضح است که با باربرداری در قسمت JB ، کرنش باقیمانده ای در محیط خواهیم داشت که این کرنش باقیمانده با ϵ_p نمایش داده می شود. هرگاه در نقطه ای از منحنی باربرداری، مثلاً نقطه B ، بارگذاری مجدد انجام شود، به صورت ایده

1- Yield stress

2- Yield strength

3- Perfectly plastic

4- Work-hardening سخت شوندگی کار داخلی با سخت شوندگی کار خارجی هم ارز است زیرا همیشه کار داخلی با کار خارجی برابر می باشند.

الی منحنی تا نقطه B به صورت ارتجاعی طی می شود ولی عملاً در بارگذاری مجدد منحنی نازک $B\bar{B}$ طی می شود و تسلیم مجدد در نقطه B اتفاق می افتد.

بر اساس مطالب فوق، زمانی که بارگذاری در فاصله AO از منحنی باشد تنش تسلیم ثابت برابر $T_0 = T_y$ است و وقتی که بارگذاری در فاصله OE باشد تنش تسلیم وابسته به میزان کرنش متفاوت است. همچنین تاریخچه بارگذاری بر شکل منحنی تنش - کرنش و مشخصات آن تاثیر خواهد گذاشت.

5-2- معادلات رفتاری خمیری در تئوری 3 بعدی

برای تحلیل 3 بعدی تنش و کرنش و تعیین توزیع آنها در محیط های پیوسته نیاز به تعریف معادلات رفتاری در حالت 3 بعدی می باشد. معادلات رفتاری برای ارتباط تنش و کرنش باید چنان باشد که پاسخگوی سوالات زیر باشد: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

1. شرط تسلیم¹

چه ترکیبی از مولفه های تنش سبب تسلیم محیط می شوند؟

2. رفتار پس از تسلیم²

چگونه می توان افزایش تغییرشکل یا افزایش آهنگ تغییرشکل در هر امتداد را به مولفه های تنش موجود ارتباط داد؟

در حالت سخت شوندگی کرنش شرط تسلیم چگونه تغییر می کند؟

1- Yield condition

2- Postyield behavior

2-6- معیار های تسلیم مستقل از فشار هیدرواستاتیک

معیار تسلیم، حد ارتجاعی وضعیت تنش را در محیط مورد مطالعه تعریف می کند. در واقع معیار تسلیم سطح محصوره را در فضای تنش تعریف می کند که در داخل آن تمام وضعیت های تنش ارتجاعی است و در روی آن وضعیت تنش خمیری است. در کلی ترین حالت این سطح می تواند با معادله زیر مشخص شود: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$f(T_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad 29-2$$

که در آن T_{ij} وضعیت تنش را مشخص می کند و k_1 و k_2 و ... ثابت های محیط هستند. برای محیط ایزوتروپیک، امتداد تنش های اصلی در شکل سطح مذکور هیچ تاثیری ندارد و بنابراین وضعیت تنش با 3 تنش اصلی مشخص می شود، بنابراین می توان نوشت:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad 30-2$$

که در آن σ_1, σ_2 و σ_3 تنش های اصلی هستند.

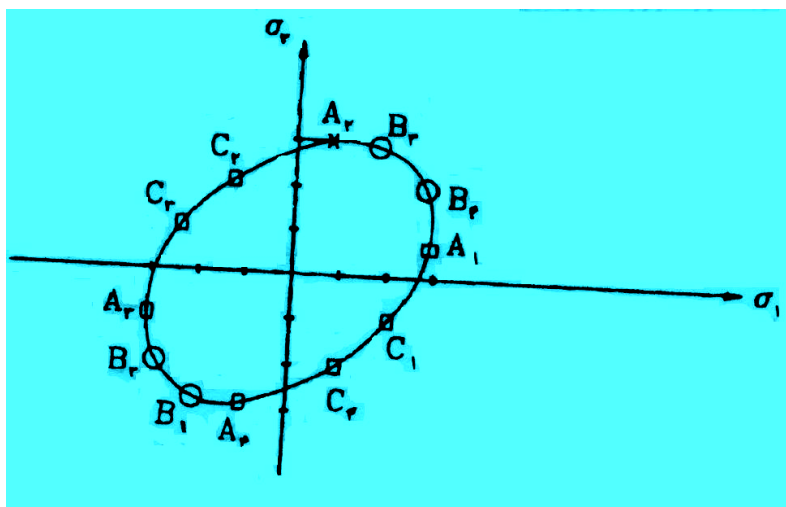
در مصالح همسان هر وضعیت تنش را می توان به وسیله تغییر ناپذیرهای I_1, I_2 و I_3 نشان داد که I_1 (تغییر ناپذیر اول تانسور تنش) معرف تنش هیدرواستاتیک و I_2, I_3 (تغییر ناپذیرهای دوم و سوم تانسور تنش برشی) معرف تنش برشی هستند:

$$f(I_1, I_2, I_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad 31-2$$

اگر مصالح همسان (مثل فلزات) چنان باشند که فشار هیدرواستاتیک در تسلیم آن بی تاثیر باشد آنگاه f به I_1 وابسته نیست و داریم:

$$f(J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad 32-2$$

با استفاده از رابطه 32-2 نشان می دهیم که با یک آزمایش (یک نقطه روی سطح تسلیم)، 12 نقطه روی سطح تسلیم در صفحه 2 بعدی بدست می آید. (1982, CHEN W.F, F.SALEEB A) فرض کنید نقطه $(0, \sigma, 3\sigma)$ یک نقطه از مکان هندسی سطح تسلیم باشد (نقطه A_1 در شکل 6-2). چون محیط همسان است نقطه $(0, 3\sigma, \sigma)$ نیز روی سطح تسلیم قرار دارد و همچنین نقاط $(0, -\sigma, -3\sigma)$ و $A_3(-3\sigma, -\sigma, 0)$ نیز روی همین سطح قرار دارند. به علت مستقل بودن سطح تسلیم از فشار هیدرواستاتیک، نقطه عمومی $(p, \sigma+p, 3\sigma+p)$ نیز روی همین سطح تسلیم قرار دارد. اگر $P = -3\sigma$ باشد، این نقطه $B_1(-2\sigma, -3\sigma, 0)$ خواهد بود. به همین ترتیب نقاط $B_2(-3\sigma, -2\sigma, 0)$ ، $B_3(2\sigma, 3\sigma, 0)$ و $B_4(3\sigma, 2\sigma, 0)$ روی سطح تسلیم قرار دارند.



شکل 6-2: شکل سطح تسلیم در صفحه $\sigma_1\sigma_2$ با استفاده از یک آزمایش (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

اگر $P = -\sigma$ باشد نقاط $C_1(2\sigma, -\sigma, 0)$ ، $C_2(-\sigma, 2\sigma, 0)$ ، $C_3(-2\sigma, \sigma, 0)$ و $C_4(\sigma, -2\sigma, 0)$ نیز روی سطح تسلیم قرار دارند.

به عنوان مثال دو معیار تسلیم معروف مستقل از فشار هیدرواستاتیک در تئوری های خمیری کامل را

ذکر می کنیم که هر دو اینها سطوح تسلیم یک پارامتری ($k_1 = k, k_2 = \dots = 0$) را تعریف می کنند.

1,6,2. معیار لوی - میسز در تئوری خمیری کامل¹

این معیار بر اساس انرژی تغییر شکل های برشی بوده و معیاری ساده برای مصالح همسان و مستقل از فشار هیدرواستاتیک می باشد. این معیار بر این اساس تعریف شده است که جامد در حالت خمیری به صورت سیال نیوتنی تراکم ناپذیر درآمده، به طوری که قانون ناویه- پواسون در مورد آن صادق است. فقط ضریب ثابت 2μ در روابط باید به طور مناسب تعریف شود. این ضریب ثابت با $\frac{k}{\sqrt{II_D}}$ جایگزین شده است که k ثابت و II_D تغییر ناپذیر دوم تانسور آهنگ تغییر شکل D_{ij} می باشد. همچنین میسز فرض کرده است که کرنش ارتجاعی در مقایسه با کرنش خمیری ناچیز است، در این صورت با استفاده از $T_{ij} = 2\mu D_{ij}$ داریم: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$T_{ij} = \frac{k}{\sqrt{II_D}} D_{ij} \quad 33-2$$

به علت تراکم ناپذیری $D_{ij} = D_{ij}$ می باشد. با به دست آوردن مربع رابطه 33-2 و به کارگیری تساوی $II_D = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij}$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$f(J_2, k) = J_2 - k^2 = 0 \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} T_{ij} T_{ij} \quad 34-2$$

رابطه 34-2 معیار فون میسز² می باشد و نشان می دهد که سطح تسلیم جایی است که انرژی

1- Levy-Mises perfectly plastic constitutive equatoin

2- Von Misses

تغییر شکل های برشی به مقدار ثابتی می رسد. این مقدار ثابت بر اساس آزمایش یک محوری یا آزمایش برش مستقیم به دست می آید و به عنوان مثال در آزمایش یک محوری تانسور تنش به صورت زیر است:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 35-2$$

اگر در $T_{11} = T_y$ مصالح تسلیم شود، داریم:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}T_y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}T_y & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}T_y \end{bmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{2} T_{ij} T_{ij} = \frac{T_y^2}{3} \quad 36-2$$

و با استفاده از 34-2 مقدار k برابر است با:

$$k = \frac{T_y}{\sqrt{3}} \quad 37-2$$

2-6-2- معیار ترسکا¹ در تئوری خمیری کامل

بر اساس معیار ترسکا، تنش برشی ماکزیمم است که سطح تسلیم را تعریف می کند، یعنی اگر تنش برشی ماکزیمم به حدی مثل k برسد تسلیم اتفاق می افتد. ماکزیمم تنش برشی بر حسب تنش های اصلی برابر است با:

$$\text{Max} \left(\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| , \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| , \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right) = k \quad 38-2$$

1- Tresca

به عنوان مثال در کشش ساده داریم:

$$\sigma_1 = T_y, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad k = \frac{T_y}{2} \quad 39-2$$

با مقایسه روابط 37-2 و 39-2 مشاهده می شود که معیار تسلیم فون میسز $\frac{2}{\sqrt{3}}$ برابر معیار ترسکا می باشد.

رابطه 38-2 می تواند به صورت یک رابطه صریح بیان شود، برای به دست آوردن این رابطه گوییم مطابق معیار ترسکا زمانی تسلیم اتفاق می افتد که یکی از معادلات زیر برقرار باشد:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \quad 40-2 \text{ (الف)}$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \quad 40-2 \text{ (ب)}$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = 2k \quad 40-2 \text{ (ج)}$$

معادلات بالا را می توان به صورت زیر ترکیب کرد: (1982, CHEN W.F, F.SALEEB A)

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2] = 0 \quad 41-2$$

با ساده سازی این رابطه به معادله ای بر حسب J_2, J_3 و k می رسیم:

$$f(J_2, J_3, k) = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96J_2 - 64k^6 = 0 \quad 42-2$$

7-2- معیارهای تسلیم وابسته به فشار

تا به حال محیط هایی بررسی شده اند که در آنها فشار هیدرواستاتیک هیچ تاثیری بر شکل سطح

تسلیم نداشته اند. در اینجا محیط هایی را بررسی می کنیم که در آنها تابع تسلیم F وابسته به I_1 نیز می باشد. این بررسی را با مطالعه دو معیار خاص انجام می دهیم.

2-7-1- معیار موهر - کولمب

این معیار حالت کلی تر از معیار ترسکا می باشد، به این ترتیب که تنش برشی حداکثر معیار تسلیم است ولی تنش برشی حداکثر به وضعیت تنش های فشاری وابسته است، یعنی در حالت 2 بعدی داریم: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$|\tau| = f_1(\sigma) \quad 43-2$$

که در آن τ حداکثر تنش برشی و σ تنش فشاری می باشد. f_1 تابعی است که از آزمایش به دست می آید. ساده ترین حالت تابع $f_1(\sigma)$ ، تابع خطی است. این تابع خطی را می توانیم به صورت زیر نمایش دهیم:

$$|\tau| = c + \sigma \tan \varphi \quad 44-2$$

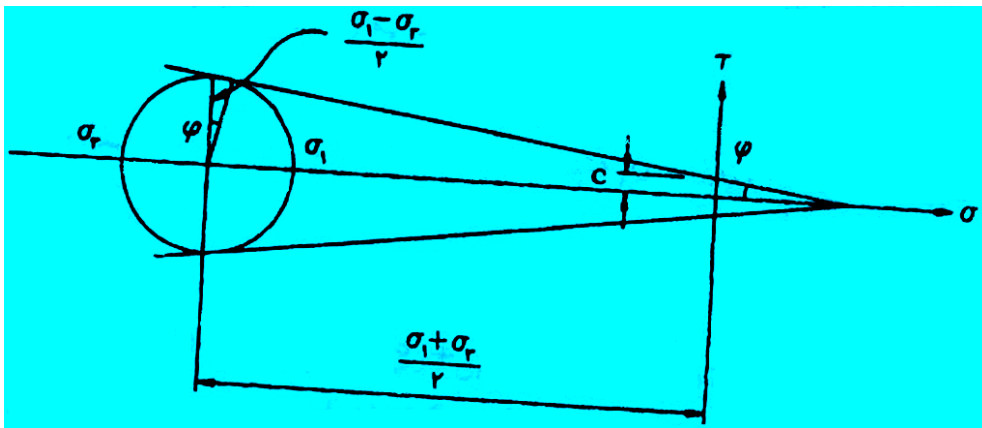
که c و φ از نتایج آزمایشگاهی به دست می آیند. به لحاظ فیزیکی c چسبندگی و φ زاویه اصطکاک داخلی می باشد. رابطه 44-2 اول بار توسط کولمب و بعد از او به طور مستقل توسط موهر ارائه شده است. حال اگر اصطکاک داخلی وجود نداشته باشد، $\varphi = 0$ ، آنگاه رابطه 44-2 به معیار ترسکا تبدیل می شود:

$$|\tau| = c \quad 45-2$$

در حالتی که $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ، با استفاده از تنش های اصلی، معیار موهر - کولمب به صورت زیر نوشته می شود (شکل 7-2):

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \varphi = c - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \right] \tan \varphi \quad 46-2$$

و با مرتب کردن آن به صورت زیر در می آید:



شکل 7-2: معیار موهر-کولمب (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$\frac{\sigma_1}{f_t} - \frac{\sigma_3}{f_c} = 1 \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad 47-2$$

که در آن:

$$f_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad , \quad f_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad 48-2$$

f_t و f_c به ترتیب مقاومت در کشش ساده و فشار ساده می باشند. بر اساس رابطه 47-2 اگر $\sigma_3 = 0$ ،

آنگاه $\sigma_1 = f_t$ و اگر $\sigma_1 = 0$ ، آنگاه $\sigma_3 = -f_c$. اگر پارامتر c را مطابق 49-2 تعریف کنیم، داریم:

$$m = \frac{f_c}{f_t} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad 49-2$$

$$m \sigma_1 - \sigma_3 = f_c \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad 50-2$$

2-7-2- معیار دراگر - پراگر¹

این معیار حالت کلی معیار فون میسز است و به صورت کلی زیر نوشته می شود:

$$f(I_1, I_2, \alpha, k) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad 51-2$$

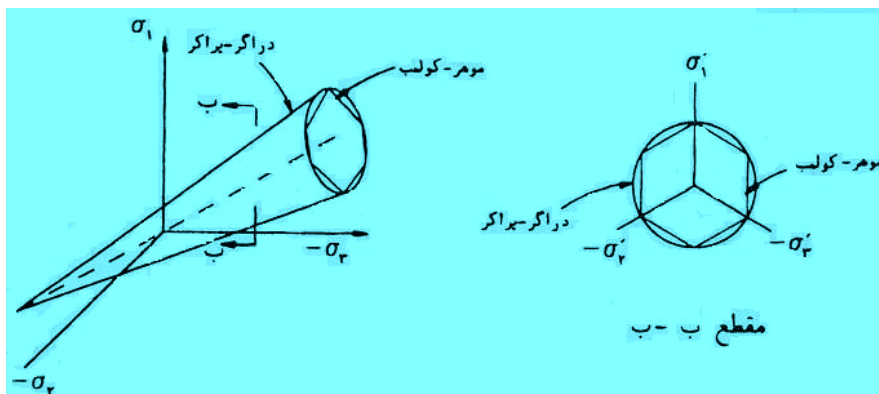
اگر $\alpha = 0$ باشد آنگاه همان معیار فون میسز به دست می آید.

سطح تسلیم در فضای 3 بعدی تنش به صورت یک مخروط می باشد که در شکل 8-2 نشان داده شده است. در شکل 8-2 سطح تسلیم بر اساس معیار موهر - کولمب نیز نشان داده شده است. معیار دراگر - پراگر برای وضعیت تنش 2 بعدی بر حسب مولفه های اصلی تانسور تنش به صورت 52-2 می باشد: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)} - k = 0 \quad 52-2$$

یا

$$(1 - 3\alpha^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - (1 + 6\alpha^2)\sigma_1 \sigma_2 + 6k\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) - 3k^2 = 0 \quad 53-2$$



شکل 8-2: سطح تسلیم وابسته به معیار موهر-کلمب و دراگر-پراگر (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

8-2- معیارهای بارگذاری و باربرداری در محیط های خمیری کامل

تابع تسلیم در فضای تنش در کلی ترین حالت با رابطه 2-29 معرفی شده است. در حالتی که تابع تسلیم یک پارامتری می باشد، می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(T_{ij}, k) = F(T_{ij}) - k = 0 \quad 54-2$$

برای مصالح خمیری کامل و مستقل از فشار هیدرواستاتیک تابع تسلیم تغییرناپذیر می باشد، بنابراین k ثابت بوده و سطح تسلیم در فضای تنش ثابت است. بر اساس رابطه وضعیتی از تنش که در آن $f(T_{ij}, k) < 0$ در داخل سطح تسلیم قرار داشته، بنابراین در محدوده ارتجاعی قرار دارد و هنگامی که $f(T_{ij}, k) = 0$ ، مصالح در محدوده خمیری قرار خواهد داشت و در این حالت، در هنگام بارگذاری جزء تنش dT_{ij} برابر صفر است، زیرا سطح تسلیم در مصالح خمیری کامل و مستقل از فشار هیدرواستاتیک ثابت است و در نتیجه بردار جزء تنش مماس بر سطح تسلیم است. بنابراین شرایط بارگذاری در محدوده خمیری عبارتند از: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$f(T_{ij}, k) = 0 \quad 55-2$$

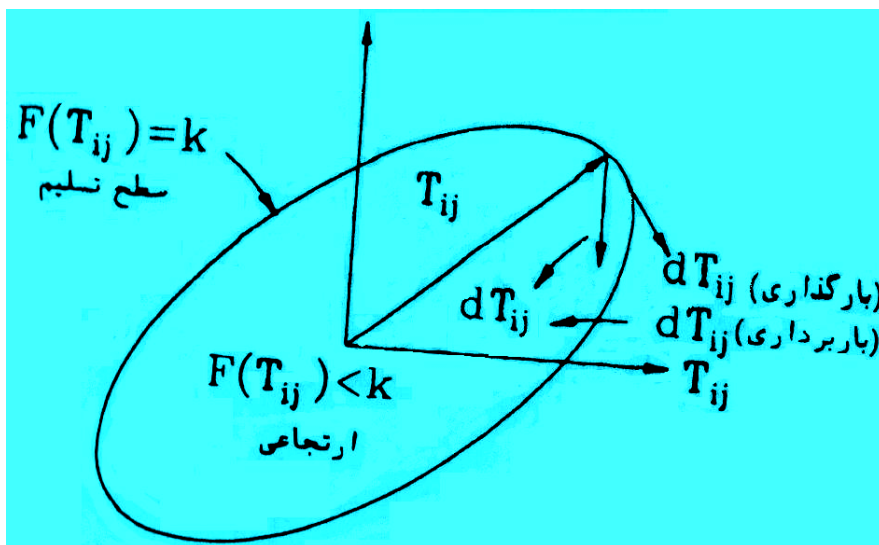
$$df = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = 0 \quad 56-2$$

در هنگام باربرداری از وضعیت تسلیم، نقطه تنش روی سطح تسلیم قرار داشته ولی dT_{ij} به سمت داخل سطح تسلیم می باشد، پس زاویه بین گرادیان f و جزء تنش dT_{ij} منفرجه بوده و معیار باربرداری با روابط 58-2 قابل بیان می باشد:

$$f(T_{ij}, k) = 0 \quad 57-2$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} < 0 \quad 58-2$$

وضعیت های باربرداری و بارگذاری در محیط های خمیری کامل در شکل 9-2 نشان داده شده اند.



شکل 9-2: وضعیت باربرداری و بارگذاری در محیط های خمیری کامل (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

2-9- تابع پتانسیل خمیری¹ و قانون جریان²

جاری شدن محیط به همراه بارگذاری پس از رسیدن به سطح تسلیم اتفاق می افتد و چون اندازه کرنش خمیری $d\varepsilon_{ij}^p$ در هنگام جریان نامحدود است، به جای ε_{ij}^p از تغییرات مولفه های کرنش یعنی $\dot{\varepsilon}_{ij}$ یا $d\varepsilon_{ij}^p$ استفاده می کنیم. بین جزء کرنش کل، جزء کرنش ارتجاعی و جزء کرنش خمیری رابطه زیر برقرار است: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad 59-2$$

که در آن $d\varepsilon_{ij}$ و $d\varepsilon_{ij}^e$ به ترتیب جزء کرنش کل و جزء کرنش ارتجاعی هستند.

تغییر شکل خمیری همواره به وسیله جزء کرنش خمیری سنجیده می شود. از آنجایی که تانسور $d\varepsilon_{ij}^p$ در فضای کرنش به وسیله بردار $d\varepsilon_{ij}^p$ نشان داده می شود، قانون جریان نیز می تواند به وسیله امتداد بردار $d\varepsilon_{ij}^p$ در فضای کرنش ها تعریف شود. فون میسر (1928) مفهومی شبیه تابع پتانسیل ارتجاعی (تابع انرژی کرنشی در محدوده ارتجاعی) را در تئوری خمیری تعریف کرد که تابعی اسکالر می باشد. این تابع تحت نام تابع پتانسیل خمیری با $g(T_{ij})$ نمایش داده می شود. با استفاده از این تابع جریان خمیری به صورت زیر تعریف می شود:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \quad 60-2$$

که در آن $d\lambda > 0$ ضریب اسکالر می باشد. چون $\frac{\partial g}{\partial T_{ij}}$ گرادیان تابع g با اندازه واحد است، $d\lambda$ بزرگی

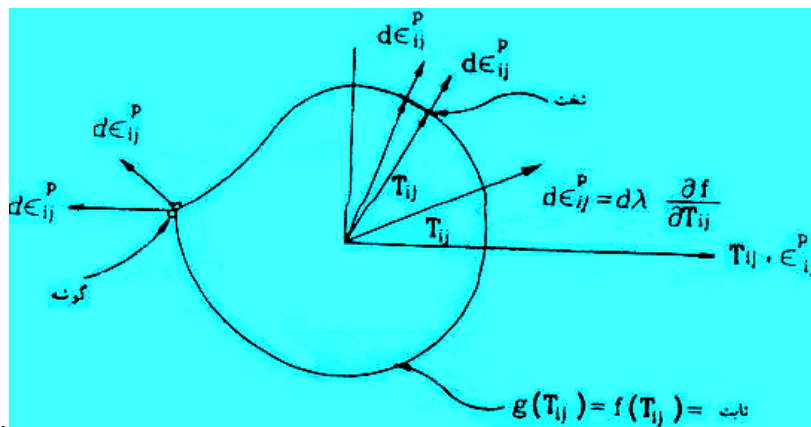
1- Potential plastic function

2- Flow rule

$d\varepsilon_{ij}^p$ را نشان می دهد. همچنین رابطه 58,2 نشان می دهد که $d\varepsilon_{ij}^p$ در امتداد گرادیان تابع g قرار دارد. در بسیاری از معیارهای تسلیم، تابع تسلیم $f(T_{ij}, k)$ و تابع پتانسیل خمیری یکسان می باشند، در این صورت رابطه 60-2 به شکل زیر در می آید: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \quad 61-2$$

رابطه اخیر، قانون جریان وابسته¹ نامیده می شود، زیرا جریان خمیری وابسته به سطح تسلیم تعریف شده است. مزیت عمده روابط 60-2 و 61-2 آنست که جریان خمیری فقط با یک پارامتر به سطح تسلیم ارتباط داده شده است. اگر $f \neq g$ باشد، قانون جریان را غیروابسته² می نامند. مطالب فوق در شکل 10-2 خلاصه شده است. در قسمتی از سطح تسلیم که تخت می باشد $d\varepsilon_{ij}^p$ ثابت بوده و در قسمتی از آن که تغییر ناگهانی شیب وجود دارد، $d\varepsilon_{ij}^p$ بین بردارهای حدی قرار دارد و معمولاً به صورت ترکیب خطی آنها نوشته می شود



شکل 10-2: سطح تسلیم وابسته و قسمت های تخت و گوشه در آن (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

1- Associated flow rule

2-Nonassociated flow rule

2-9-1- قانون جریان وابسته به معیار فون میسز

در این قسمت و قسمت بعدی قوانین وابسته به معیارهای فون میسز و ترسکا توضیح داده می شود.

قبلا معیار فون میسز را دیده ایم: (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$f(T_{ij}, k) = J_2 - k^2 = 0 \quad 62-2$$

قانون جریان وابسته به معیار فون میسز به صورت زیر می باشد:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} = d\lambda \frac{\partial J_2}{\partial T_{ij}} = d\lambda T_{ij} \quad 63-2$$

بر اساس روابط 63-2 به ترتیب با شرایط زیر بارگذاری و باربرداری داریم:

$$d\lambda > 0, \quad J_2 - k^2 = 0 \quad \wedge \quad dJ_2 = 0 \quad \text{بارگذاری} \quad 64-2$$

$$d\lambda = 0, \quad J_2 - k^2 < 0 \quad \vee \quad (J_2 = k^2 \quad \wedge \quad dJ_2 < 0) \quad \text{باربرداری} \quad 65-2$$

همچنین با روابط 63-2 مولفه های بردار $d\varepsilon_{ij}^p$ بر حسب تنش به دست می آیند:

$$\frac{d\varepsilon_{11}^p}{T_{11}} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{T_{22}} = \dots = \frac{d\varepsilon_{23}^p}{T_{23}} = d\lambda \quad 66-2$$

روابط 66-2 به نام روابط پرناندل - رئوس¹ خوانده می شوند.

بر اساس روابط 63-2 می بینیم که:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda T_{ii} = 0 \quad 67-2$$

یعنی جاری شدن محیط با معیار فون میسز بدون تغییر حجم است، نتیجه ای که قبلا می دانستیم.

با برقراری روابط 2-59 برای محیط های همسان داریم:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} dT_{ij} - \frac{\nu}{E} dT_{kk} \delta_{ij} + d\lambda T_{ij} \quad 68-2$$

با توجه به این که کرنش های ارتجاعی در هنگام جریان خمیری خیلی کوچکتر از کرنش های

خمیری هستند، به صورت تقریبی می توانیم از کرنش های ارتجاعی صرف نظر کنیم:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda T_{ij} \quad 69-2$$

روابط اخیر به نام لوی - میسز مشهور است.

2-9-2- قانون جریان وابسته به معیار ترسکا

اگر در روابط 2-61 تابع تسلیم f همان تابع تسلیم ترسکا باشد، آنگاه قانون جریان وابسته به معیار

ترسکا به دست خواهد آمد. برای حالتی که $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ، داریم:

$$f = F(T_{ij}) - 2k = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad 70-2$$

و

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = d\lambda \quad 71-2$$

یا

$$d\varepsilon_2^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0 \quad 72-2$$

$$d\varepsilon_3^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -d\lambda \quad 73-2$$

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = (1, 0, -1)d\lambda \quad 74-2$$

اما برای حالتی که $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$ باشد، طبق معیار ترسکا تسلیم می تواند هم در صفحه x_1x_3 و هم در صفحه x_1x_2 اتفاق بیفتد:

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad 75-2$$

$$f_2 = \sigma_1 - \sigma_2 - 2k = 0 \quad 76-2$$

که از آنها به ترتیب نتایج زیر بدست می آید:

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = (1, 0, -1)d\lambda \quad 77-2$$

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = (1, -1, 0)d\mu \quad 78-2$$

در این حالت ها که مربوط به نقاط گوشه ای سطح تسلیم هستند، ترکیب خطی دو حالت به کار می رود:

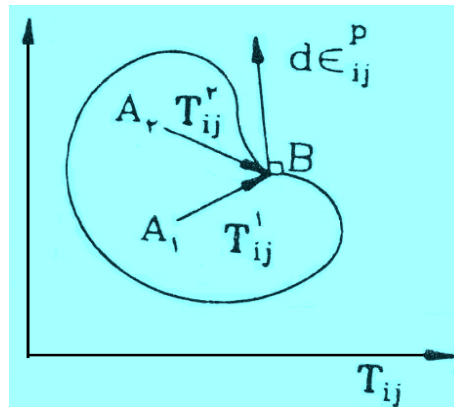
$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\lambda (1, 0, -1) + d\mu (1, -1, 0) \quad 79-2$$

2-10- خواص سطح تسلیم

در این قسمت خواصی مطرح می گردد که سطح تسلیم تعریف شده باید از آن برخوردار باشد.

2-10-1- تحدب¹

سطح تسلیم باید محدب باشد، چه در غیر این صورت مطابق آنچه که در شکل 2-11 نشان داده شده است در وضعیتی که تنش در محیط T_{ij} است (که در داخل سطح تسلیم قرار دارد)، اگر با تحریک خارجی وضعیت تنش نقطه A_1 به نقطه B برسد، ادامه تحریک باعث ایجاد کرنش خمیری $d\varepsilon_{ij}^p$ می شود. در این مرحله اگر تحریک قطع شود، وضعیت تنش به نقطه A_1 برمی گردد. کار انجام شده در این روند برابر $dw_p = (T_{ij}^B - T_{ij}^1)d\varepsilon_{ij}^p$ می باشد که باید مثبت باشد. یعنی ضرب داخلی بردارهای $d\varepsilon_{ij}^p$ و $(T_{ij}^B - T_{ij}^1)$ (که هر دو در یک دستگاه مثلا دستگاه تنش اندازه گیری می شوند) باید بزرگتر از صفر باشد. مفهوم هندسی این جمله آنست که زاویه بین $d\varepsilon_{ij}^p$ و $T_{ij}^B - T_{ij}^1$ باید حاده باشد. برای نقطه A_1 ، مطابق شکل این شرط برقرار است. ولی اگر وضعیت تنش از T_{ij}^2 به T_{ij}^B برسد، آنگاه چون زاویه بین $d\varepsilon_{ij}^p$ و $T_{ij}^B - T_{ij}^2$ بزرگتر از 90° است، dw_p منفی می شود که بی معنی است. پس سطح تسلیم همواره محدب است. در این قسمت از عمود بودن $d\varepsilon_{ij}^p$ بر سطح تسلیم استفاده شده که در زیر بیان می شود. (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)



شکل 2-11: سطح تسلیم وابسته و قسمت های تخت و گوشه در آن (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

2-10-2- عمود بودن¹

همواره بردار جزء کرنش خمیری $d\varepsilon_{ij}^p$ عمود بر سطح تسلیم می باشد. این موضوع براحتی از روابط

$$2-60 \text{ و } 2-61 \text{ نتیجه می شود، زیرا } \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \text{ و } \frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \text{ بردارهای گرادیان هستند.}$$

2-11- معادلات رفتاری محیط های ارتجاعی - خمیری کامل بین جزء تنش و

جزء کرنش

تا به حال راجع به مفاهیم رفتار محیط های ارتجاعی - خمیری کامل و ارتباط جزء کرنش با سطح تسلیم و نیز نسبت مولفه های تانسور برشی تنش به مولفه های جزء کرنش صحبت شد. در این قسمت با رعایت قانون جریان، معادلات رفتاری بین جزء تنش dT_{ij} و جزء کرنش خمیری $d\varepsilon_{kl}^p$ را برای محیط های همسان بدست می آوریم. (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

در یک محیط ارتجاعی - خمیری روابط زیر را داشته ایم:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad 80-2$$

$$(d\varepsilon_{ij})_e = D_{ijkl} dT_{ij} \quad 81-2$$

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \quad 82-2$$

برای محیط خمیری کامل روی سطح تسلیم داریم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = 0 \quad 83-2$$

رابطه 83-2 از آنجا به دست آمده است که وقتی به سطح تسلیم می رسیم تنش مماس بر سطح تسلیم می باشد:

$$f(T_{ij} + dT_{ij}) = f(T_{ij}) + df = f(T_{ij}) \quad 84-2$$

و

$$dT_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - d\lambda C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial T_{kl}} \quad 85-2$$

که در آن

$$|C_{ijkl}| = |D_{ijkl}|^{-1} \quad 86-2$$

با استفاده از 85-2 شرط 83-2 را برقرار می کنیم و از آن به دست می آید:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial T_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial T_{tu}}} \quad 87-2$$

و به صورت زیر در می آید:

$$dT_{ij} = \left[C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial T_{mn}} \frac{\partial f}{\partial T_{pq}} C_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial T_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial T_{tu}}} \right] d\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad 88-2$$

در محیط های همسان تانسور مرتبه 4، C_{ijkl} ، به صورت تانسور همسان زیر بر حسب ضرایب E و ν برابر است با:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad 89-2$$

با قرار دادن C_{ijkl} مطابق رابطه بالا در 85-2 داریم:

$$dT_{ij} = \frac{E}{1+\nu} de_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} de_{kk} \delta_{ij} - d\lambda \left[\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial f}{\partial T_{mm}} \delta_{ij} \right] \quad 90-2$$

همچنین اگر ضریب E و ν را بر حسب ضریب برشی G و ضریب حجمی K بنویسیم به رابطه 91-2 برای dT_{ij} می رسیم:

$$T_{ij} = 2Gde_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) de_{kk} \delta_{ij} - d\lambda \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial f}{\partial T_{mm}} \delta_{ij} + 2G \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \right] \quad 91-2$$

3- فصل سوم

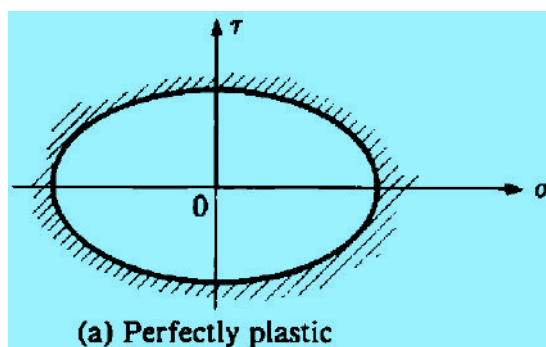
روش های تحلیل پلاستیسیته با سخت شوندگی

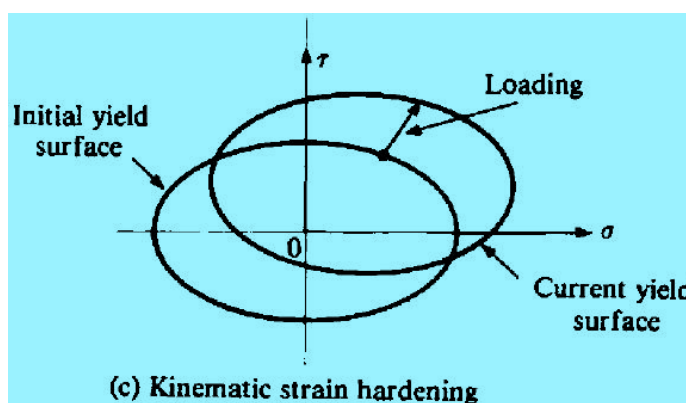
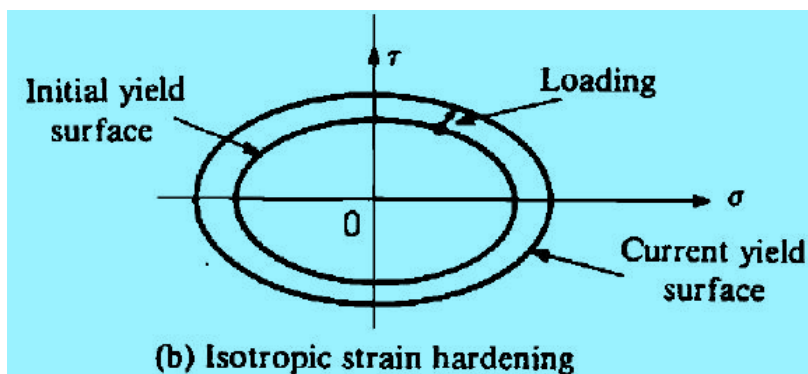
3-1- سخت شوندهگی تابع کرنش یا کار انجام شده:

پس از رسیدن به تسلیم اولیه، گسترش تغییر شکل پلاستیک در سطح تنش موجود، بستگی به میزان کرنش پلاستیک دارد. این پدیده را سخت شوندهگی کرنشی می نامند. در این حالت، سطح تسلیم در هر نمو تغییر شکل پلاستیک، خیلی سریع نسبت به سطح تسلیم بعدی تغییر می کند. این پیشروی به مسیر کرنش پلاستیک بستگی دارد. برخی از گونه های قوانین سخت شوندهگی برای مدل هایی که دارای سخت شوندهگی در رفتار می باشند در شکل 3-1 نشان داده شده اند.

(1971, ARMEN H. Jr, PIFKO A, LEVINE. H. S) و (1953, HOFFMAN O, and SACHS G)

در رفتار یک ماده خمیری کامل تراز تنش تسلیم در هیچ مسیری به میزان کرنش پلاستیک بستگی نداشته و این ویژگی در شکل 3-1-a نشان داده شده است. اگر سطوح تسلیم بعدی به طور یکنواخت نسبت به منحنی تسلیم اولیه باقیمانده و بدون تغییر شرائط تقارن نسبت به محورهای مبنا مانند شکل 3-1-b گسترش یابد در این صورت قانون سخت شوندهگی را همسان یا ایزوتروپ می نامند.





شکل 3-1: الگوهای ریاضی برای رفتار سخت شوندگی (1980, HINTON E and OWEN D.R.J)

علاوه بر این اگر سطح تسلیم بعدی، شکل و جهات خود را مطابق شکل 3-1-c حفظ کند، به گونه ای که تنها در فضای تنش یک انتقال صلب داشته باشد، به آن سخت شوندگی جنبشی می گویند. در چنین حالتی وضعیت سخت شوندگی از مشاهدات آثار باشینگر در بارگذاری متناوب بدست می آید.

برای برخی از مواد از جمله خاک ها گاهی حرکت سطح تسلیم به گونه سخت شوندگی کرنشی صورت پذیرفته و در عوض نرم شدگی کرنشی از خود نشان خواهد داد. در این صورت سطح تنش تسلیم یک نقطه با افزایش تغییر شکل پلاستیک کاهش پیدا می کند. در این حالت برای یک مدل با سخت شوندگی، سطح تسلیم اصلی با پیش روی خود منقبض و کاهش یافته بدون آنکه انتقالی صورت گیرد.

نتیجتاً انجام تسلیم در این گونه مواد، یک گسیختگی موضعی را نشان داده و سطح تسلیم به یک

معیار گسیختگی حداقل و پایا می رسد. (اون دی.ار.جی، هینتون ای، 1381)

گسترش سطح تسلیم را می توان با ارتباط دادن تنش تسلیم k به تغییر شکل پلاستیک از طریق تغییر سخت شوندگی K به دو روش تعریف نمود. در روش اول فرض آن است که درجه سخت شوندگی فقط تابعی از کار پلاستیک کل W_p می باشد. بنابراین:

$$k = W_p \quad 1-3$$

$$W_p = \int \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij})_p \quad 2-3$$

در حالیکه $(d\varepsilon_{ij})_p$ مولفه های کرنش پلاستیک است که در طول یک نمو کرنش رخ داده است. K با مقدار تغییر شکل پلاستیک کل در قالب کرنش پلاستیک معادل موثر و یا عمومی بستگی دارد. این کرنش در حالت نموی به شکل زیر تعریف می شود:

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ (d\varepsilon_{ij})_p (d\varepsilon_{ij})_p \right\}^{\frac{1}{2}} \quad 3-3$$

گونه ای از تغییر فیزیکی این تعریف برای تسلیم یک محوری در نظر گرفته شده وجود دارد. برای حالاتی که فرض شود عمل تسلیم مستقل از تنش هیدرواستاتیک است، $d\varepsilon_{ii} = 0$ بوده و $(d\varepsilon_{ij})_p = (d\dot{\varepsilon}_{ij})_p$ می باشد، در نتیجه رابطه 3-3 را می توان به شکل زیر نوشت:

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ (d\dot{\varepsilon}_{ij})_p (d\dot{\varepsilon}_{ij})_p \right\}^{\frac{1}{2}} \quad 4-3$$

در این صورت تغییر سخت شوندگی K به شکل زیر تعریف می شود:

$$K = \bar{\varepsilon}_p \quad 5-3$$

که $\bar{\varepsilon}_p$ حاصل انتگرال $d\bar{\varepsilon}_p$ روی مسیر کرنش می باشد. به این گونه از رفتار، سخت شوندگی کرنشی

گفته می شود. در این بحث فقط یک مدل سخت شونده گی همسان در نظر گرفته شده است. وقتی که

$f = k$ باشد وضعیت تنش به حالت پلاستیک می رسد، در حالیکه رفتار الاستیک با $f < k$ مشخص می شود. در حالت پلاستیک $f = k$ ، نمو تابع تسلیم در اثر اعمال یک نمو تنش برابر با رابطه زیر

است: (1977, KRIEG.R.D, and KRIEG.D.B)

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad 6-3$$

اگر $df < 0$ باشد باربرداری به صورت الاستیک (رفتار برگشت پذیر) رخ می دهد و نقطه تنش به داخل سطح تسلیم باز می گردد.

اگر $df = 0$ باشد بارگذاری خنثی رخ داده (رفتار پلاستیک برای یک ماده پلاستیک کامل) و نقطه حالت تنش روی سطح تسلیم باقی می ماند.

اگر $df > 0$ باشد بارگذاری همراه با تغییر شکل پلاستیک رخ داده (رفتار خمیری با سخت شونده گی کرنشی) و تنش روی سطح تسلیم گسترش یافته باقی می ماند.

برای یک ماده با شرائط رفتاری پایا، می توان نشان داد که سطح تسلیم اولیه و کلیه سطوح تسلیم بعدی باید محدب باشند. (اون دی.ار.جی، هینتون ای، 1381)

2-3- آزمایش تسلیم تک محوری ماده سخت شونده کرنشی:

آزمایش تک محوری روی یک ماده الاستو پلاستیک را با توجه به منحنی تنش کرنش نشان داده شده مطابق شکل 2-3 می توان در نظر گرفت. در ابتدا رفتار ماده الاستیک بوده و رفتار در جهت اصلی با مدول الاستیک E مشخص می شود. سپس با رسیدن تنش به تنش تسلیم σ_Y ، تسلیم آغاز می شود.

از این مرحله به بعد رفتار ماده به صورت الاستو پلاستیک بوده و امتداد مماس موضعی بر منحنی تنش- کرنش به طور پیوسته تغییر می کند. شیب این مماس مدول مماسی الاستو پلاستیک E_T نامیده می شود. قانون سخت شوندگی به صورت $k = k(K)$ به راحتی می تواند بر حسب تنش موثر $\bar{\sigma}$ (چون متناسب با J_2 می باشد) بیان شود. بنابراین برای سخت شوندگی مطابق معادله 5-3 می توان نوشت: (اون دی.ارجی، هینتون ای، 1381)

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}_p) \quad 7-3$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = H'(\bar{\varepsilon}_p) \quad 8-3$$

برای حالت تک محوری با فرض $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = \sigma$ و استفاده از معادله $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}}\{\sigma_{ij} \sigma_{ij}\}^{\frac{1}{2}}$ (تنش موثر: $\bar{\sigma}$)¹ می توان نتیجه گرفت:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}}\{\sigma_{ij} \sigma_{ij}\}^{\frac{1}{2}} = \sigma \quad 9-3$$

اگر افزایش کرنش پلاستیک در جهت بارگذاری $d\varepsilon_p$ باشد (حالت یک محوری) پس $(d\varepsilon_1)_p = d\varepsilon_p$ و از آنجا که با انجام کرنش پلاستیک، ماده غیر قابل تراکم فرض شده، ضریب پواسون برابر 0,5 بوده و $(d\varepsilon_2)_p = -\frac{1}{2}d\varepsilon_p$ ، $(d\varepsilon_3)_p = -\frac{1}{2}d\varepsilon_p$ می باشد. بنابراین با استفاده از معادله 4-3 کرنش پلاستیک موثر برابر عبارت زیر خواهد بود.

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}}\{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}\}^{\frac{1}{2}} = d\varepsilon_p \quad 10-3$$

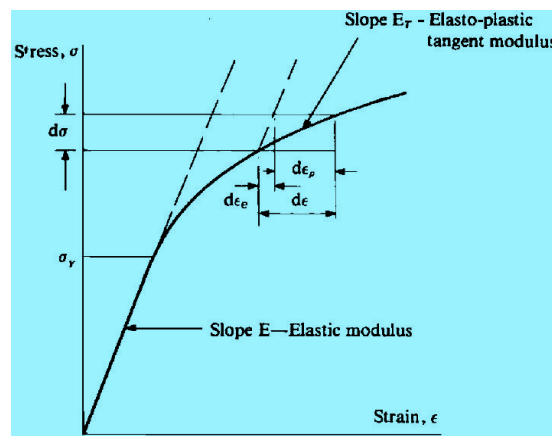
روابط 9-3 و 10-3 به روشنی بیانگر آنند که ثابت های بکار رفته در تعریف $\bar{\sigma}$ ، $\bar{\varepsilon}_p$ در محاسبه تنش و کرنش واقعی مساله تسلیم تک محوری مورد نیاز می باشند. با استفاده از معادله 9-3 و 10-3 و بکارگیری معادله 8-3 می توان نوشت: (اون دی.ار.جی، هینتون ای، 1381)

$$H'(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon_e} = \frac{1}{\frac{d\varepsilon}{d\sigma} - \frac{d\varepsilon_e}{d\sigma}} \quad 11-3$$

$$H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad 12-3$$

بنابراین تابع سخت شوندگی H' را می توان به طور تجربی از یک آزمایش تک محوری بدست آورد.

(برای محاسبات عددی در بخش بعد نشان داده می شود که H' مورد نیاز است نه H)



شکل 3-2: سخت شوندگی در رفتار ارتجاعی - خمیری یک بعدی (HINTON E and OWEN D.R. J, 1980)

3-3- انواع تئوری های سخت شوندگی کرنش

تاکنون معادلات رفتاری محیط ها با رفتار خمیری کامل به طور مبسوط توضیح داده شده است.

و این نکته در رابطه با رفتار خمیری کامل حائز اهمیت است که این نوع از سخت شوندگی برای مواد

پلاستیک از مرتبه اول مناسب می باشند. (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

در این قسمت انواع تئوری های سخت شوندگی کرنش به صورت کیفی توضیح داده می شود و معادلات رفتاری با سخت شوندگی را به کتاب های تئوری خمیری (پلاستیسیته) موکول می کنیم.

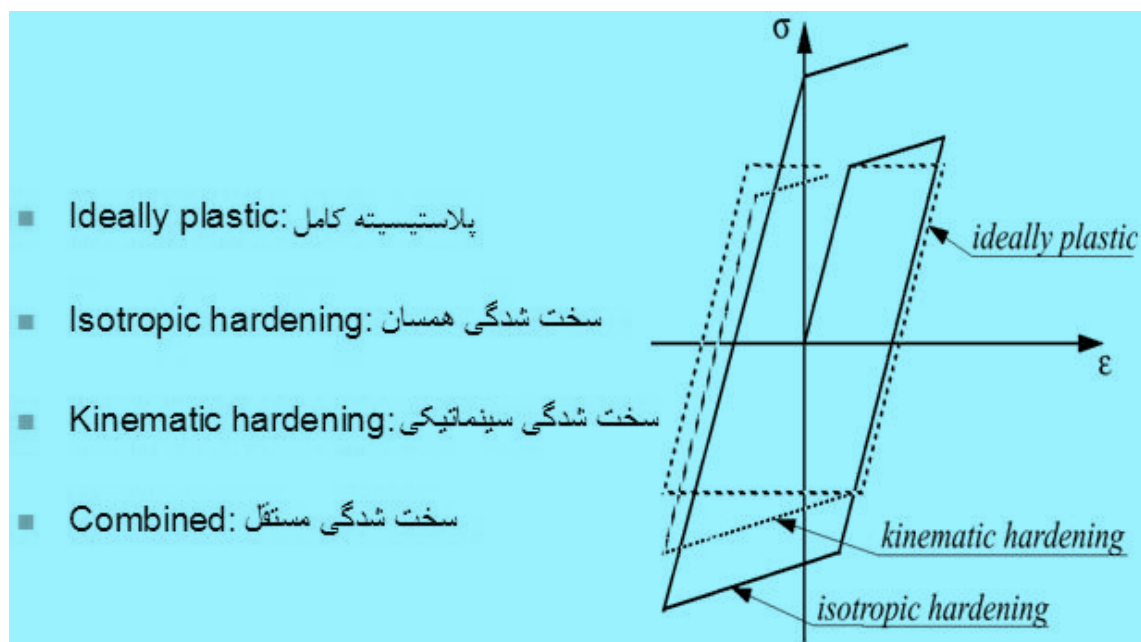
در تئوری خمیری، سخت شوندگی کرنش با سه نوع رفتار مدل می شود:

1- سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

2- سخت شوندگی سینماتیکی

3- سخت شوندگی مستقل

هر سه مدل ذکر شده در بالا مربوط به چگونگی ارتباط سطح تسلیم کشش و فشار پس از تسلیم اولیه می باشند. یک نمای کلی از سه تئوری ارائه شده، در شکل 3-3 داریم:



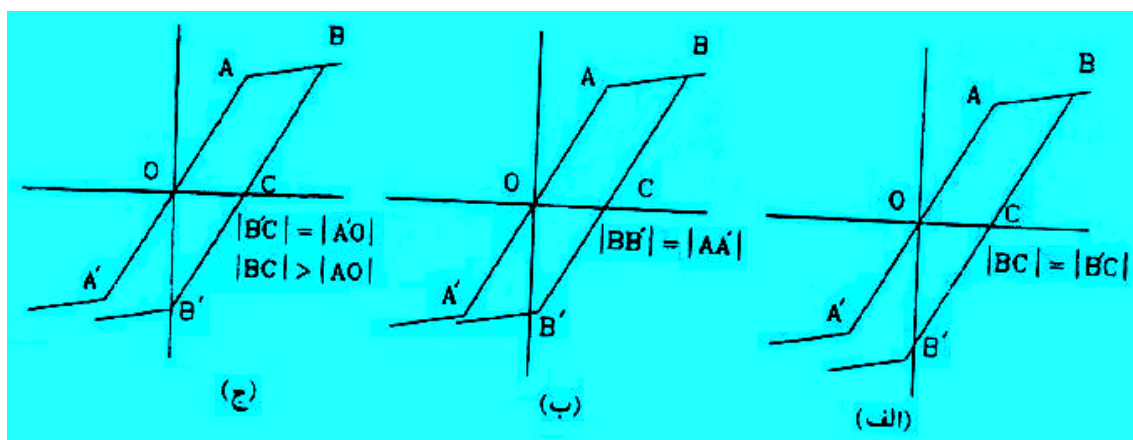
شکل 3-3: تئوری های سخت شوندگی کرنش در معادلات رفتاری یک بعدی

در سخت شوندگی همسان، پس از رسیدن به تسلیم اولیه، اندازه سطح تسلیم در تمام جهات به طور یکسان بزرگ می شود. شکل 3-4-الف معادلات رفتاری محیط با سخت شوندگی کرنش همسان را در رفتار یک بعدی نشان می دهد. در این حالت اثر بوشینگر در نظر گرفته نشده است.

در سخت شوندگی سینماتیکی اندازه سطح تسلیم همیشه ثابت بوده و فقط پس از رسیدن به سطح تسلیم اولیه، انتقال می یابد. در این تئوری، اثر بوشینگر در نظر گرفته شده است. شکل 3-4-ب معادلات رفتاری محیط با سخت شوندگی کرنش سینماتیکی را در رفتار یک بعدی نشان می دهد.

در سخت شوندگی مستقل، سطح تسلیم در کشش مستقل از سطح تسلیم در فشار می باشد.

شکل 3-4-ج یک نوع از این سخت شوندگی را نشان می دهد.



شکل 3-4: تئوری های سخت شوندگی کرنش در معادلات رفتاری یک بعدی (رحیمیان م، اسکندری قادی م، 1377)

$$|BC| = |B'C|$$

الف) سخت شوندگی همسان

$$|BB'| = |AA'|$$

ب) سخت شوندگی سینماتیکی

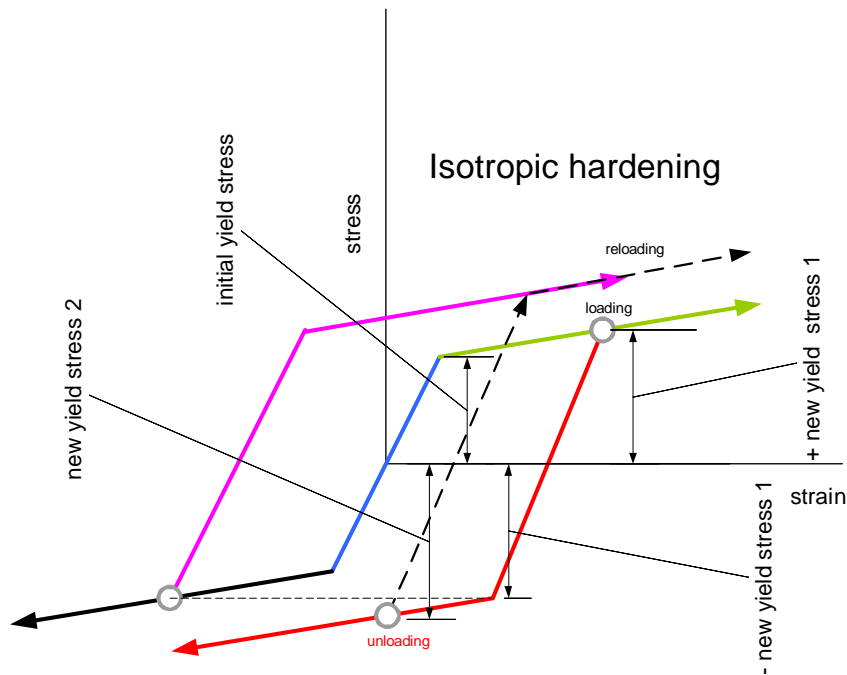
$$|BC| = |B'C|$$

ج) سخت شوندگی مستقل

برای آنکه با مفهوم هر یک از انواع تئوری های سخت شوندگی بیشتر آشنا شویم، هر یک از این تئوری ها را به طور جداگانه ای مورد بررسی قرار می دهیم.

3-3-1- سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

این نوع از تئوری سخت شوندگی برای زمانی مناسب است که جاری شدن مواد موضوع غالب و حاکم در مسئله می باشد. همانطور که قبلا گفته شد در تئوری سخت شوندگی کرنشی، انتقال در تنش و یا کرنش نداریم به همین جهت در مدل هیستریزیس قابل استفاده نمی باشد.



شکل 3-5: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

$$W_p(t) = \int_0^t \sigma(\tau) : \dot{p}(\tau) d\tau \quad 13-3$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t |\dot{p}(\tau)| d\tau \quad 14-3$$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{p}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\dot{p}_1 \end{bmatrix} \quad 15-3$$

3-3-1-1-1- سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک) در مدل فون میسز

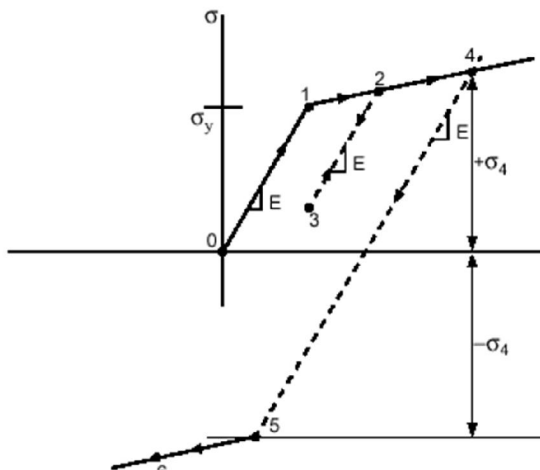


Figure (a) Loading Path

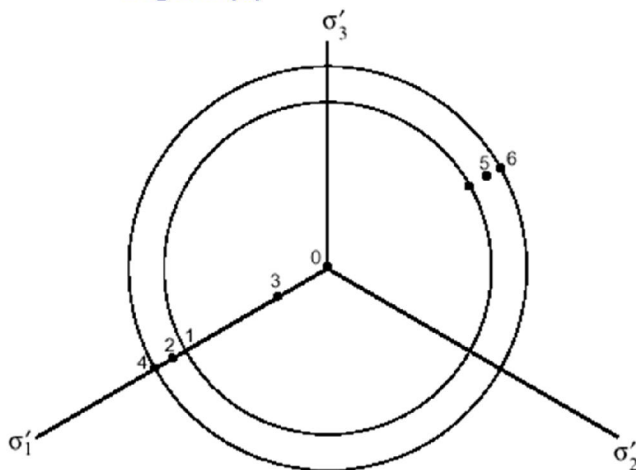


Figure (b) on Mises Yield Surface

سخت شوندگی همسان فرض می کند که مرکز سطح تسلیم همانند شکل b-15-3 ثابت باقی می ماند، اما اندازه (شعاع) در حین سخت شوندگی سطح تسلیم زیاد می شود.

شکل a-6-3 آزمایش تک محوری همراه با بارگذاری و باربرداری را نشان می دهد. ابتدا بارگذاری از نقطه تنش آزاد (نقطه 0) تا نقطه 1 انجام می شود. سپس بارگذاری تا نقطه 2 ادامه می یابد. بعد از آن باربرداری همراه با شیب الاستیک E از نقطه 2 تا نقطه 3 انجام می شود و بارگذاری

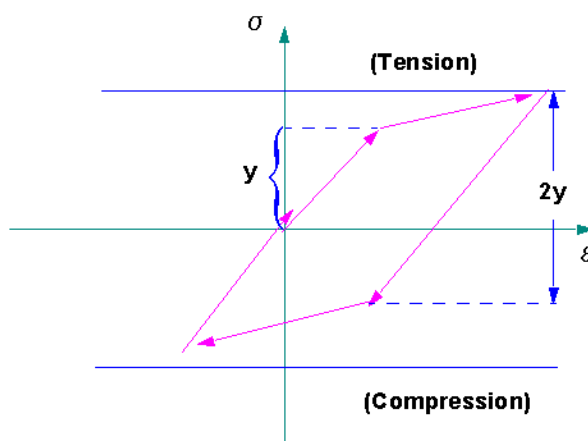
شکل 3-6: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

مجدد در همین بازه صورت می گیرد. در نهایت، نمونه ها مجدداً به صورت خمیری از نقطه 2 تا نقطه 4 بارگذاری و به صورت الاستیک از نقطه 4 تا 5 باربرداری می شوند. معکوس بارگذاری پلاستیک بین نقاط 5 تا 6 انجام می شود. تنش در نقطه 1 تنش تسلیم و تنش ها و کرنش ها در نقاط 2 و 4 بزرگتر از حالت تسلیم با توجه به سخت شوندگی هستند. در هنگام باربرداری، حالت تنش می تواند مانند نقطه 3 ثابت باقی بماند یا به نقطه تسلیم بعدی (معکوس) برای مثال نقطه 5 برسد. سخت شوندگی

همسان می گوید که تسلیم معکوس در همین مقدار تنش در جهت عکس اتفاق می افتد. اگر نقطه 4 را در نظر بگیریم، تسلیم معکوس آن در نقطه 5 اتفاق می افتد که از لحاظ اندازه برابر منفی مقدار تنش نقطه 4 می باشد.

3-3-2- سخت شوندگی سینماتیکی

سخت شوندگی سینماتیکی با توجه به شکل 3-7 برای شبیه سازی اثرات بارگذاری و باربرداری آنجاییکه تسلیم در فشار کمتر از تسلیم در کشش در هنگام سخت شوندگی باشد، مناسب می باشد.

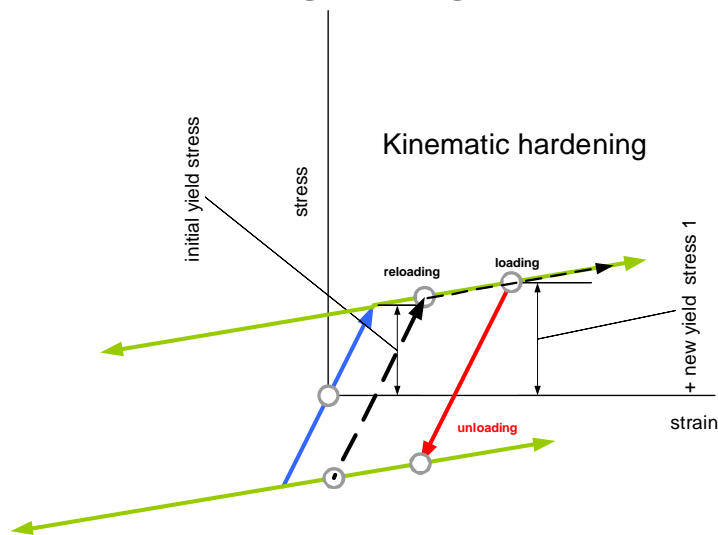


شکل 3-7: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

تغییر شکل پلاستیک یک ماده معمولاً تنش تسلیم آن را برای بارگذاری بعدی افزایش می دهد.

برای بسیاری از مواد، مدل سخت شوندگی سینماتیک عملکرد بهتری از سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک) در بارگذاری و باربرداری دارد. برای بارگذاری چرخه ای¹، سخت شوندگی سینماتیک نمی تواند از خود سخت شوندگی چرخه ای و یا نرم شدگی چرخه ای نشان دهد.

سخت شوندگی سینماتیکی برای شبیه سازی فرم دهی فلزاتی که دارای جریان پلاستیک با اهمیت هستند یا کرنش آن ها به طور یکنواخت می باشد، کارایی ندارد.



شکل 3-8: تئوری سخت شوندگی سینماتیکی

3-2-3-1- سخت شوندگی سینماتیکی در مدل فون میسز

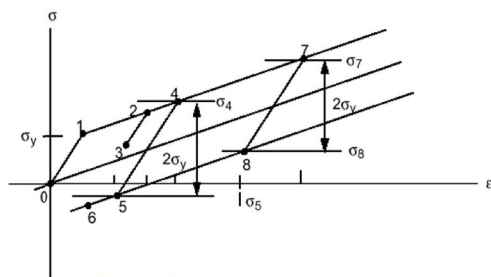


Figure (a) Loading Path

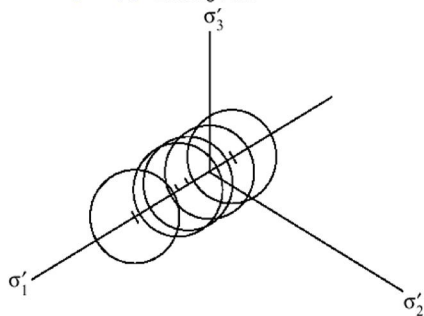


Figure (b) von Mises Yield Surface

شکل 3-9-b سخت شوندگی سینماتیکی را نشان می دهد که سطح تسلیم فون میسز از لحاظ اندازه و شکل تغییر نمی کند ولی مرکز سطح تسلیم در فضای تنش می تواند حرکت کند.

مسیر بارگذاری آزمایش تک محوری در شکل 3-9-a آمده است. نمونه ها به صورت زیر بارگذاری می شوند. از تنش آزاد (نقطه 0) تا نقطه تسلیم اولیه (نقطه 1) بارگذاری می شود، به همین ترتیب

شکل 3-9: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

برای بقیه مسیر داریم، نقطه 2 (بارگذاری)، نقطه 3 (باربرداری)، نقطه 2 (بارگذاری مجدد)، نقطه 4 (بارگذاری) و برای نقاط 5 و 6 (باربرداری). مثل سخت شوندگی همسان، تنش ها در 1 برابر تنش تسلیم اولیه است و تنش در 2 و 3 در حین سخت شوندگی بزرگتر از آن می باشد. نقطه 3 الاستیک می باشد و تسلیم معکوس آن در 5 اتفاق می افتد. با توجه به قانون سخت شوندگی سینماتیکی، معمولاً تسلیم معکوس در سطح تنش $\sigma_5 = \sigma_4 - 2\sigma_y$ به جای آنکه در $\sigma_4 - \sigma_4$ اتفاق بیافتد. به طور مشابه اگر نمونه تا سطح تنش بالاتری بارگذاری شود (نقطه 7) و سپس باربرداری شود تا نقطه تسلیم بعدی (نقطه 8)، تنش در نقطه 8 برابر است با $\sigma_8 = \sigma_7 - 2\sigma_y$.

اگر نمونه باربرداری شود از تنش (کششی) به طور مثال نقطه 4 یا 7، تسلیم معکوس در عکس تنش نقطه 5 یا در جهت 8 اتفاق می افتد.

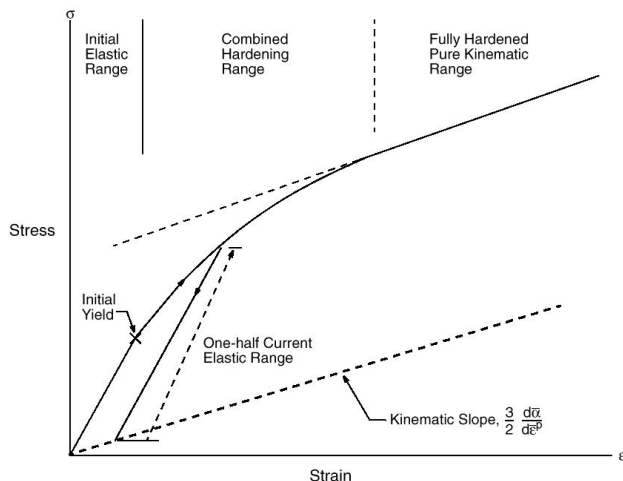
3-3-3- سخت شوندگی مستقل

سخت شوندگی اولیه کاملاً ایزوتروپیک فرض می شود اما بعد از مقداری کرنش پلاستیک محدوده

الاستیک لزوماً به مقدار ثابتی

می رسد. (که سخت شوندگی

سینماتیکی خالص می نامند)



Basic Uniaxial Tension Behavior of the Combined Hardening Model

شکل 3-10: تئوری سخت شوندگی همسان (ایزوتروپیک)

سخت شوندگی مستقل ایجاب می کند انتقال ثابت مرکز دامنه الاستیک را به همراه افزایش این حوزه در پیرامون این مرکز تا جایی که به سخت شوندگی سینماتیکی خالص برسد. در این مدل سهم هر یک از سخت شوندگی های ایزوتروپیک و سینماتیک که بستگی به توسعه تغییرشکل پلاستیک که قابل اندازه گیری توسط کرنش پلاستیک اصلی دارند، متغیر است.

سخت شوندگی ایزوتروپیک آنقدر کاهش می یابد که نهایتاً به صفر می رسد و کرنش پلاستیک معادل توسط رابطه زیر قابل اندازه گیری می باشد.

$$\bar{\epsilon}^p = \int \dot{\bar{\epsilon}}^p dt = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right) dt \quad 44-3$$

داده سخت شوندگی کار در کرنش های کوچک رفتار سخت شوندگی همسان و در کرنش های بزرگ رفتار سخت شوندگی سینماتیک را می سازد.

اگر شیب سخت شوندگی کار در نهایت صفر باشد، رفتار آن شبیه رفتار سخت شوندگی ایزوتروپیک خواهد بود.

سخت شوندگی مستقل برای شبیه سازی انتقال منحنی تنش - کرنش ظاهری در بارگذاری چرخه ای هم در سخت شوندگی دوره ای و هم در نرم شدگی دوره ای مناسب می باشد.

4- فصل چهارم

کاربرد روش های عددی در تحلیل مسائل الاستو پلاستیک با

سخت شوندگی

1-4-1 روش های عددی پایه برای حل مسائل غیر خطی:

استفاده از جداسازی فرضی اجزاء در روش اجزاء محدود در انواع مختلف از مسائل غیر خطی به یک دستگاه معادلات به فرم زیر منجر می گردد: (Owen, DRJ, D. Peri'c, 1998), (HILL, R, 1950)

$$H\varphi + f = 0 \quad 1-4$$

که در آن φ بردار مجهولات اصلی f بردار بارهای موجود و H ماتریس سختی کل می باشد.

در کاربردهای سازه ای، قسمت های بار و سختی را مستقیماً و در قالب تمرکز آثار در گره ها می توان بدست آورد. در حالیکه این ویژگی ها در پهنه سازه و اجزاء از نظر فیزیکی دارای گستردگی خاص خود بوده که در قالب روش اجزاء محدود بایستی معادل هایی متمرکز برای این قسمت ها با توجه به فیزیک مساله محاسبه گردد.

اگر عناصر ماتریس H به مجهولات φ یا مشتقات آنها وابسته باشد. مساله به طور مشخصی غیر خطی می شود. در این مورد حل مستقیم سیستم 1-4 معمولاً غیرممکن یا دشوار است و باید یک راه حل تکراری اتخاذ نمود. در این مورد راه های زیادی برای حل به روش تکرار ارائه شده که می توان از آنها بهره جست. در اینجا بعضی از مهمترین روش های کاربردی عمومی تشریح می شوند.

1-1-4-1 روش های تکرار مستقیم (یا تقریب پشت سر هم)

در این روش دوره های حل به صورت پشت سر هم انجام شده به طوریکه در هر یک از دوره ها اطلاعات دوره پیشین برای مجهولات φ در پیش بینی مقادیر جاری عناصر ماتریس $H(\varphi)$ به کار می روند. در این حالت رابطه 1-4 را می توان به صورت زیر نوشت: (ZIENKIEWIC Z. O. C, 1977)

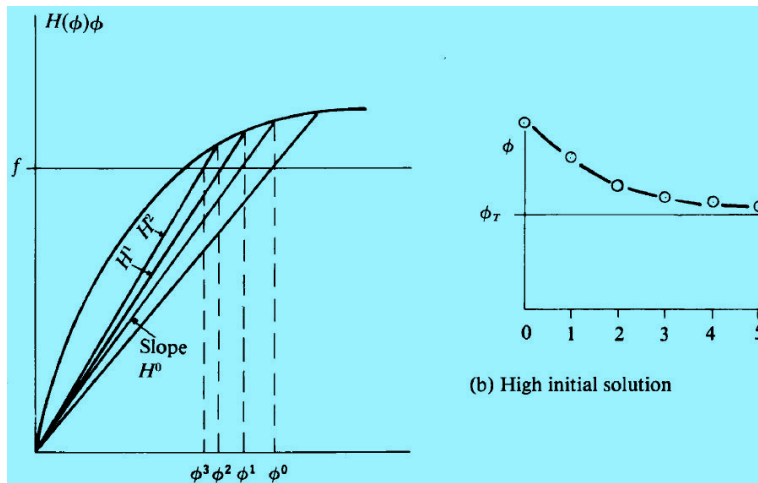
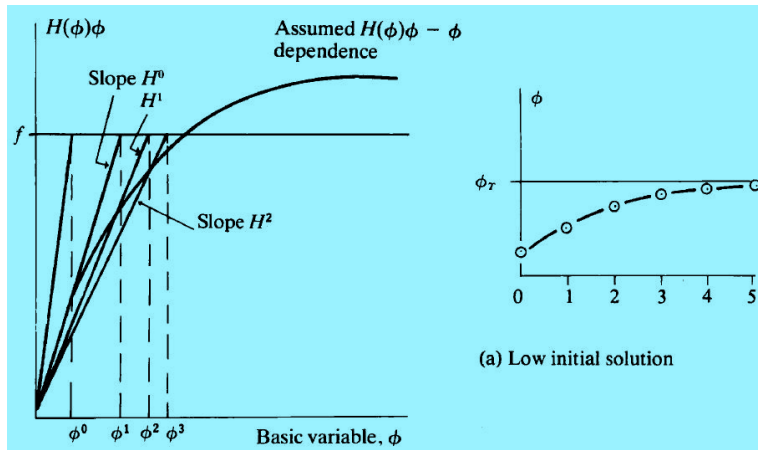
$$\varphi = -[H(\varphi)]^{-1}f \quad 2-4$$

پس در دوره تکرار $(r + 1)$ این تقریب را به صورت زیر ارائه می دهد:

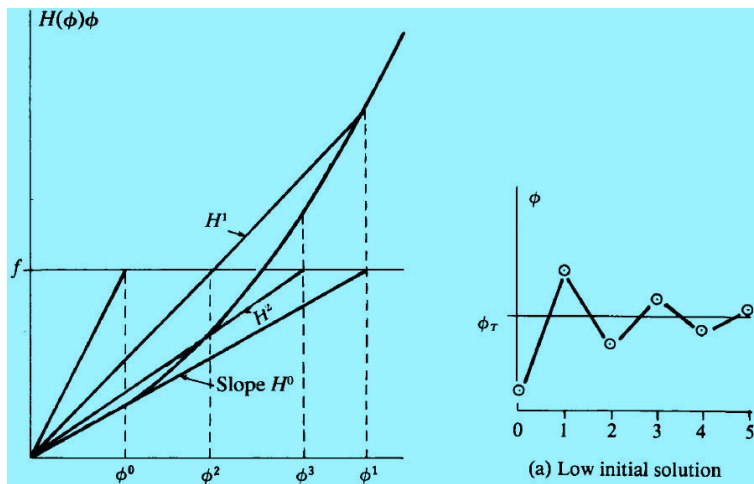
$$\varphi^{r+1} = -[H(\varphi^r)]^{-1}f \quad 3-4$$

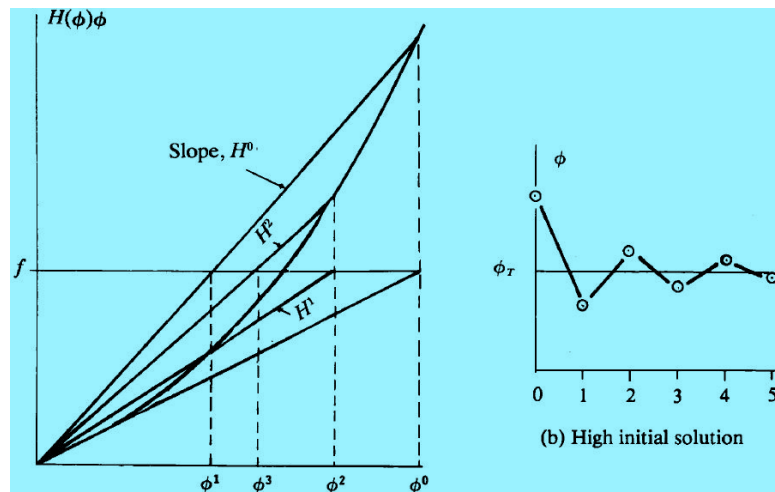
اگر روش عددی مورد استفاده در تحلیل جاری همگرا باشد، در یک حالت حدی وقتی که r به سمت بی نهایت میل نماید، φ^r به سمت جواب صحیح میل می کند. از معادله 3-4 مشاهده می شود که باید ماتریس سختی H را برای هر بار تکرار مجدداً محاسبه کرد. برای شروع دوره های حل، یک حدس اولیه برای مجهولات φ جهت استفاده در محاسبه H لازم است. معمولاً انتخاب مقادیر φ^0 بر اساس حل میانگینی از ویژگی های ماده برای تمامی پهنه سازه مناسب است. اگر غیر خطی بودن خواص ماده در تعدادی از φ ها مشخص باشد، نزدیکترین تخمین اولیه با تغییراتی مناسب به طوریکه مقادیر معلوم را پوشش دهد مناسب تر است.

در اجرا زمانی روش تکرار همگرا است که میزان تغییر مجهول φ بین دو تکرار پی در پی به نحو قابل صرف نظری کوچک باشد. نمایش نمونه ای از پیشرفت متناوب محاسبات برای یک متغیر به طور تقریبی در اشکال 1-4 و 2-4 ارائه شده، به طوریکه هر دو ماتریس H و بردار φ به مقدار معادل H و φ کاهش می یابند. وابستگی فرضی H به φ به صورت یک تابع قبل از شروع محاسبات باید مشخص گردد. این ویژگی رفتاری ماده (بستگی H به φ) در شکل های 1-4 و 2-4 نشان داده شده و برای سادگی رابطه بین φ و φ . $H(\varphi)$ به جای $H(\varphi) - \varphi$ در نظر گرفته شده است.



شکل 4-1: روش تکرار مستقیم در مسائل با یک متغیر (HINTON E and OWEN D.R.J, 1980)





شکل 4-2: روش تکرار مستقیم در مسائل با یک متغیر (HINTON E and OWEN D.R.J. 1980)

شکل 4-1 راه های همگرایی برای مقادیر اولیه آزمایش ϕ^0 که در بالا و پایین راه حل اصلی ϕ_T و برای یک تغییرات محدب $H - \phi$ نشان می دهد، از اولین مقادیر آزمایشی ϕ^0 مقدار متناظر H بلافاصله از روابط $\phi - H(\phi)$ به صورت H^0 محاسبه شده و سپس برای محاسبه ϕ^1 معادله 4-3 حل می گردد. مقدار H متناظر با ϕ^1 از رابطه $\phi - H(\phi)$ معلوم شده و آنگاه معادله 4-3 برای محاسبه ϕ^2 حل می گردد. این دوره تا حصول ϕ^{n-1} و ϕ^n به اختلاف حداقل مفروض ادامه می یابد. این شرط نشان دهنده همگرا شدن جواب ها است. مقدار H^r به صورت شیب خط وتر مستقیم منحنی $H - \phi$ نشان داده شده که با افزایش مقدار ϕ کاهش می یابد. هر دو راه حل با سعی اولیه در پایین و بالای جواب حقیقی مساله با نزدیک شدن به همگرایی به سمت یکنواختی و کاهش دامنه تغییرات میل می نماید. شکل 4-2 نامناسب بودن روش را برای حالتی که منحنی $H - \phi$ مقعر است را نشان می دهد هر دو راه حل سعی اولیه در بالا و پایین مسیرهای همگرایی را نمایش می داده که در اطراف راه حل درست نوسان می کنند. با وجود اینکه این روش با یک متغیر همگرا می شود در مسائل با درجه آزادی بالا، هماهنگ شدن جملات مرتبط با سختی گاهها به ناپایداری فرآیند تکرار می انجامد. یک نقطه ضعف در روش تکرار مستقیم این است که همگرایی روش حل، تضمین شده نبوده و همگرایی مسئله را

نمی توان در مرحله اول پیش بینی کرد.

4-1-2- روش نیوتن-رافسون

در حین هر مرحله از فرآیند تکرار حل، رابطه 1,4 ارضا نخواهد شد مگر اینکه همگرایی اتفاق بیافتد

میتوان یک مجموعه از نیروهای پسماند را تصور کرد. (اون دی.ارجی، دکتر هینتون ای، 1381)

به طوریکه:

$$\psi = H\varphi + f \neq 0 \quad 4-4$$

این نیروهای پس ماند، ψ را می توان به عنوان میزان انحراف از تعادل در رابطه 1-4 تفسیر کرد. از

آنجایی که H تابعی از φ و احتمالاً مشتقات آن است، پس در هر مرحله از پیشروی محاسبات $\psi = \psi(\varphi)$ می باشد.

اگر راه حل درست مسئله در مرحله $\varphi^r + \Delta\varphi^r$ موجود باشد، آنگاه تقریب نیوتن-رافسون برای جمله عمومی بردار نیروهای پسماند، ψ^r در φ^r برابر است با:

$$\psi_i^r = -\sum_{j=1}^N \Delta\varphi_j^r \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_j} \right)^r \quad 5-4$$

که در آن N تعداد متغیرهای سیستم و نماد r ، نشان دهنده r امین تخمین جهت رسیدن به راه حل

درست می باشد و با جایگذاری ψ_i از رابطه 4-4 پسماند کلی برای همه اجزاء را می توان به شکل

ماتریسی زیر نوشت:

$$\psi(\phi^r) = -J(\phi^r) \Delta\phi^r \quad 6-4$$

که در آن نماد ماتریس ژاکوبی آن برابر است با:

$$J_{ij} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_j} \right)^r = h_{ij}^r + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial \phi_j} \right)^r \phi_k^r \quad 7-4$$

h_{ij} جمله عمومی ماتریس H است. آخرین عبارت در 7-4 افزایش جملات غیر متقارن را در ماتریس ژاکوبی بدست می دهد. اگر از این جملات غیر متقارن در جهت حفظ تقارن صرف نظر شود، با جایگذاری رابطه 7-4 در 6-4 می توان نوشت:

$$H(\phi^r) \cdot \Delta \phi^r = -\psi(\phi^r) \quad 8-4$$

و یا از آنجاییکه:

$$\Delta \phi^r = \phi^{r+1} - \phi^r \quad 9-4$$

معادله 8-4 هنگام استفاده از 4-4 به صورت زیر کاهش می یابد.

$$H(\phi^r) \cdot \phi^{r+1} + f = 0 \quad 10-4$$

این رابطه با معادله 3-4 قسمت قبل که در آن از روش تکرار مستقیم استفاده شده است مطابقت دارد. در نتیجه برای رسیدن به نمو همگرایی بهتر در روش نیوتن-رافسون باید جملات غیر متقارن در J را حفظ نمود.

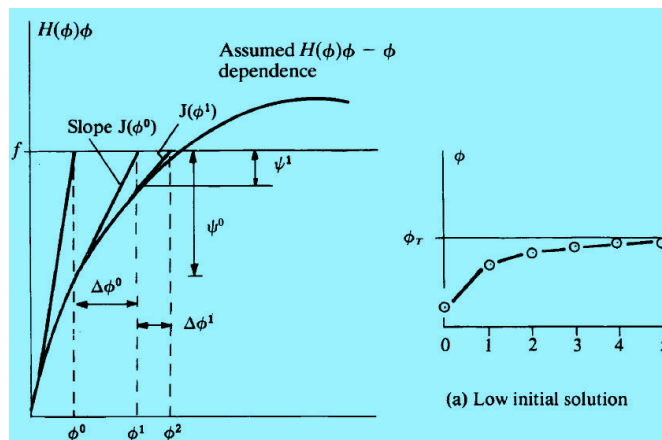
شکل ساده جملات غیر خطی در رابطه 7-4 به طور واضحی به نحوه وابستگی عناصر ماتریس سختی h_{ij} به مجهولات ϕ بستگی دارد. جملات ماتریس ژاکوبی که در 7-4 ارائه شده اند را می توان جمع نموده تا عبارت کلی زیر بدست آید:

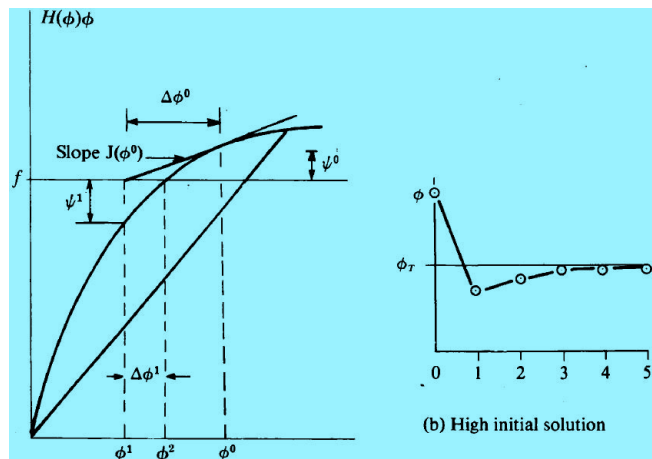
$$J(\varphi) = H(\varphi) + H'(\varphi) \quad 11-4$$

که در آن آخرین جمله فقط شامل جملات نامتقارن است. بالاخره با استفاده از رابطه 6-4 و 11-4 روش نیوتن-رافسون را می توان به صورت زیر نوشت:

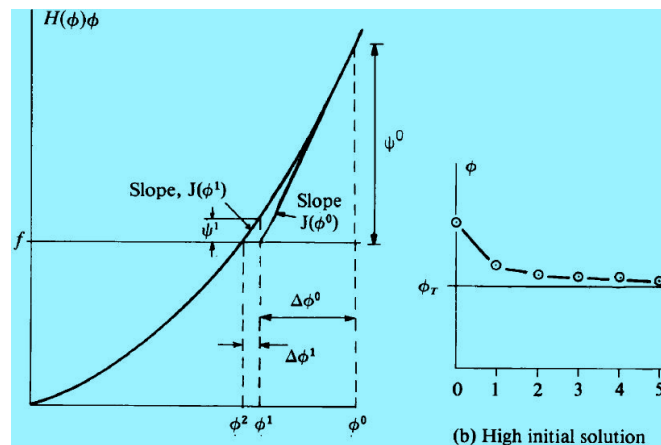
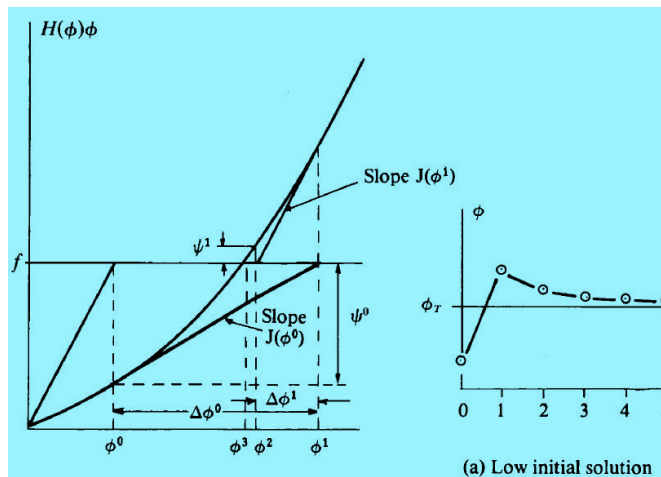
$$\Delta\varphi^r = -[J(\varphi^r)]^{-1} \cdot \psi(\varphi^r) = -[H(\varphi) + H'(\varphi)]^{-1} \cdot \psi(\varphi^r) \quad 12-4$$

این معادله توانایی تصحیح بردار مجهولات φ که از بردار نیروهای پسماند ψ در هر تکرار بدست می آید را دارد. دوباره باید با کاربرد یک روش تکرار بردار مجهولات φ در هر مرحله بر اساس رابطه 12-4 تصحیح شده تا اینکه همگرایی فرآیند همانطور که در نظر است اتفاق بیافتد. شکل های 3-4 و 4-4 نمایش کلی روش را برای یک حالت یک متغیره نشان می دهند.





شکل 3-4: روش نیوتن - رافسون در مسائل با یک متغیر (HINTON E and OWEN D.R.J 1980)



شکل 4-4: روش نیوتن - رافسون در مسائل با یک متغیر (HINTON E and OWEN D.R.J 1980)

پاسخ مسئله غیر خطی وقتی حاصل می گردد که نیروهای پسماند ψ از بین بروند. زیرا در حقیقت این جمله مستقیماً نشان دهنده عدم توازن معادله حاکم یعنی 4-4 است. با فرض یک مقدار آزمایشی ϕ^0

از مجهول اصلی و محاسبه سختی متناظر با این مقدار با توجه به رابطه ارائه شده برای $H - \varphi$ نیروهای پسماند ψ^0 از رابطه 4-4 و ماتریس ژاکوبی J از 7-4 محاسبه می شوند. ضریب تصحیح، $\Delta\varphi^0$ برای تخمین اولیه مجهول اصلی نهایتاً از رابطه 12-4 محاسبه می شوند. در نتیجه نهایتاً یک تخمین بهینه شده برای یافتن پاسخ به صورت $\varphi^1 = \varphi^0 + \Delta\varphi^0$ ارائه می شود. این دوره را می توان به دفعات تکرار کرده تا جایی که نیروی پسماند ψ^n به اندازه کافی کوچک شده و یا به همان نسبت ϕ^r و ϕ^{r-1} تا حد لازم به هم نزدیک شوند، روش نیوتن-رافسون معمولاً روش همگرایی سریعتر و قابل اعتمادتری را نسبت به روش تکرار مستقیم ارائه می کند.

4-1-3- روش سختی مماسی:

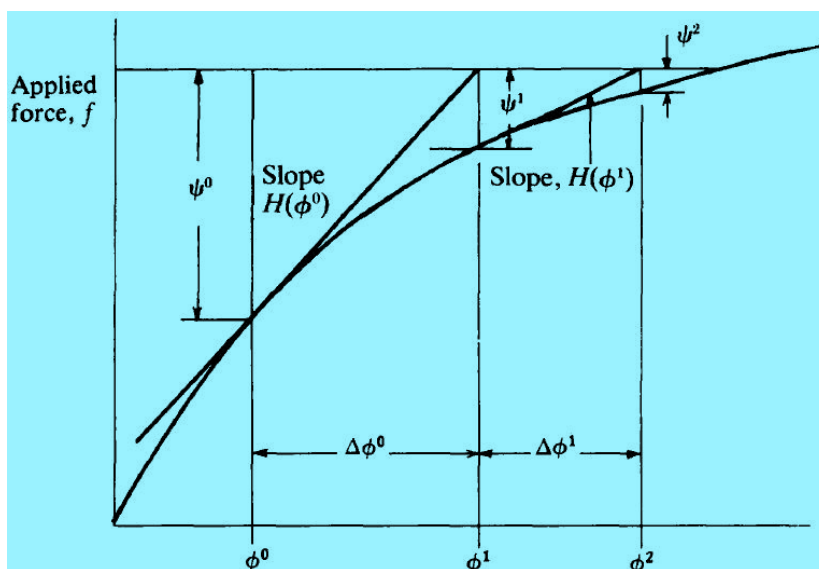
برای کاربردهای سازه ای ماتریس H را می توان از نظر فیزیکی همان ماتریس سختی سازه در نظر گرفت. در حالت های غیرخطی که در آنها سختی تا حدی به میزان تغییر مکان ها وابسته است، H برابر با شیب موضعی رابطه نیرو- جابجایی سازه در هر نقطه بوده و سختی مماسی نام دارد. تحلیل چنین مسائلی باید بوسیله یک روش نمودی صورت گیرد. زیرا ممکن است حل مساله در هر مرحله تنها به جابجایی های کنونی سازه مرتبط نبوده و به تاریخچه بارگذاری نیز مربوط باشد. در این حالت می توان مساله را برای هر گونه افزایش بار به صورت خطی درآورده و به تناسب آن ماتریس غیرخطی را بر اساس روابط 4-11 و 4-12 خطی نمود. (اون دی، ارجی، دکتر هینتون ای، 1381)

با این تغییر روش حل مانند آنچه در مرحله قبل بیان شده بود و به همین دلیل این روش را گاهی روش تعمیم یافته نیوتن-رافسون می نامند. این روش حل مجدداً برای حالت یک متغیره در شکل 4-5 نشان داده شده است. حل با حدس مقدار آزمایشی برای مجهول φ^0 شروع شده (برای مسائل سازه ای نقطه شروع راه حل معمولاً $\varphi^0 = 0$ در نظر گرفته می شود). سپس سختی مماسی $H(\varphi^0)$

متناظر با این جابجایی مشخص شده و نیروی پسماند ψ^0 از رابطه 4-4 بدست می آید. ضریب تصحیح، $\Delta\phi^0$ ، برای مقدار آزمایشی از رابطه خطی 12-4 محاسبه می شود. این مقدار عبارتست از:

$$\Delta\phi^r = -[H(\phi)]^{-1} \cdot \psi(\phi^r) \quad 13-4$$

سپس تخمین بهینه شده ای برای مجهول مساله به صورت $\phi^1 = \phi^0 + \Delta\phi^0$ در نظر گرفته می شود. این روش تکرار تا همگرا شدن مساله به سوی راه حل غیر خطی ادامه می یابد (نشانه غیر خطی شدن، صفر شدن عملی مقدار ψ^r است).



شکل 4-5: روش سختی مماسی در مسائل با یک متغیر (HINTON E and OWEN D.R.J 1980)

4-1-4- روش سختی اولیه:

در روش های توضیح داده شده در سه قسمت قبلی، فاکتورگیری کامل (یا ساده کردن)، و حل سختی مجموعه کامل دستگاه معادلات برای هر بار تکرار لازم است. در روش تکرار مستقیم حل معادله 3-4 به کمک سختی مماسی و نیوتن-رافسون به ترتیب حل معادلات 13-4 و 12-4 لازم است. اگر در رابطه 13-4 در همه مراحل محاسبه ماتریس مماسی با سختی متناظر با مقدار آزمایشی اولیه ϕ جایگزین

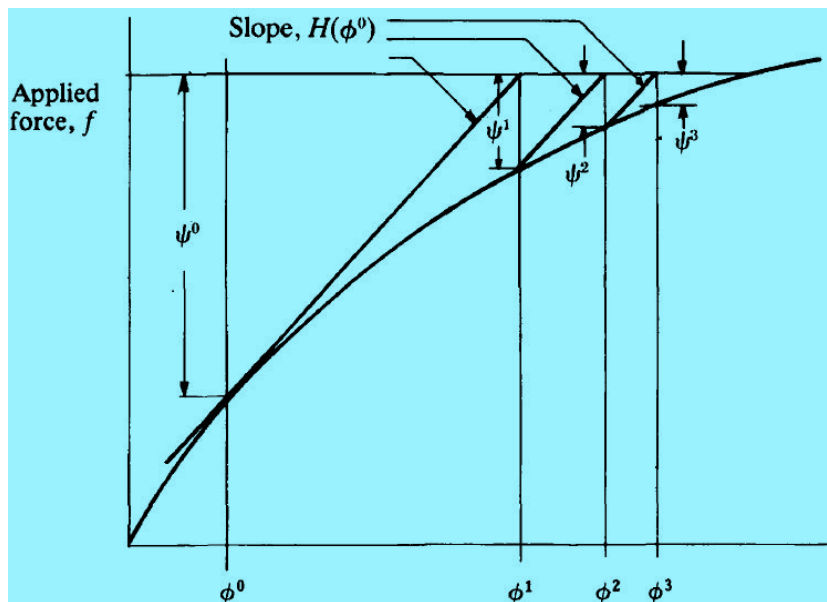
شود، می توان از عملیات فاکتورگیری کامل یا ساده سازی معادلات گردآمده جلوگیری کرد.

در این حالت تنها لازم است حل کامل معادله برای اولین تکرار و تخمین های بعدی روی راه حل غیر خطی، انجام شود بنابراین می توان نوشت:

$$\Delta\phi^r = -[H(\phi^0)]^{-1}\psi(\phi^r) \quad 14-4$$

چون همان ماتریس سختی $H(\phi^0)$ در هر مرحله بکار گرفته می شود، معادلات کاهش یافته می توانند به همان شکل فاکتور گرفته شده یا ساده شده شان ذخیره شوند. سپس در مرحله بعدی آن صرفا ناگزیر جملات $\psi(\phi^r)$ در سمت راست معادله با یک تغییر متغیر با هم ساده می شوند. این کار کاهش هزینه محاسبه هر بار تکرار را در پی داشته اما توانایی همگرایی را کاهش می دهد. این روش در شکل 4-6 به طور کلی نشان داده شده است. روش تکرار مطابق آنچه در قسمت قبل توضیح داده شده می باشد. در این حالت میتوان نشان داد که این روش به طور آزادانه ای همگرایی دارد و حتی می توان در حالاتی که رفتار ماده سختی منفی نشان می دهد از آن استفاده نمود. مسئله اقتصادی بودن روش های سختی اولیه و سختی مماسی تا حد زیادی بستگی به درجه عملکرد غیر خطی بودن در مسئله مورد مطالعه دارد. معمولا روش بهینه، از تلفیق هر دو روش به دست می آید و در آن سختی ها تنها در بعضی از دفعات تکرار تغییر می کنند.

(1969,ZIENKIEWICZ .O.C , VALLIAPPAN.S, and KING.I. P)



شکل 4-6: روش سختی اولیه در مسائل با یک متغیر (HINTON E and OWEN D.R.J, 1980)

2-4- مسائل ارتجاعی - خمیری یک بعدی:

در این قسمت جنبه های ضروری رفتار ماده الاستو پلاستیک معرفی خواهند شد.

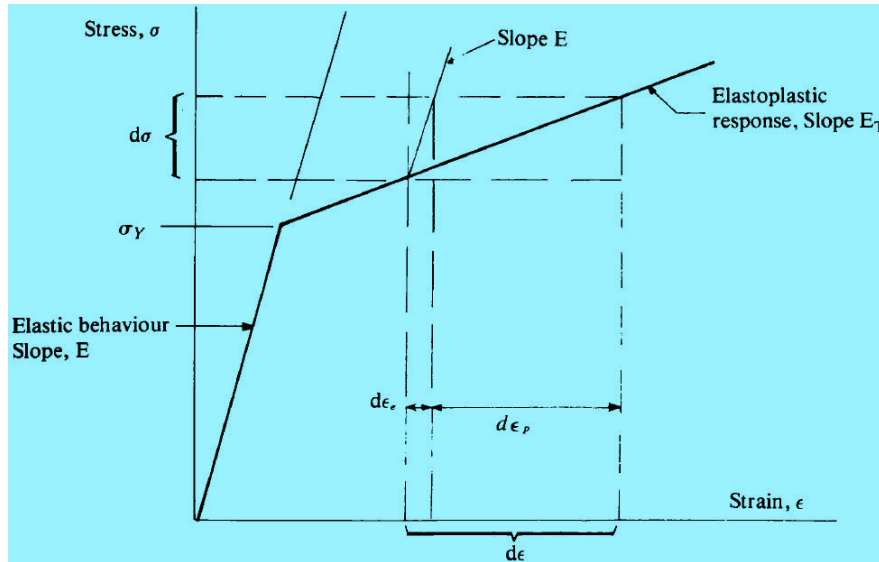
روابط اصلی این رفتار به شکلی که برای حل عددی با بعضی از روش های گفته شده مناسب باشند، به دست خواهد آمد. رفتار الاستو پلاستیک از یک واکنش اولیه الاستیک ماده تشکیل شده است، که پس از رسیدن تنش به یک سطح معین، تغییر شکل های پلاستیک به آن اضافه می شود.

تغییر شکل پلاستیک در طبیعت غیر قابل تراکم و لزوماً پس از باربرداری، برگشت ناپذیر است. محدوده تسلیم آغاز تغییر شکل خمیری یا تسلیم را کنترل می کند و تغییر شکل های پس از تسلیم

با تابعیت از سختی کاهش یافته ماده اتفاق می افتد. (HINTON.E , OWEN.D.R.J, 1979)

روابط اصلی تئوری برای یک محیط پیوسته کلی در بخش بعدی آورده شده است. برای حالت های یک بعدی، پارامترهایی از ماده که برای توجیه رفتار الاستو پلاستیک لازم است را به سادگی می توان

از آزمایش تک محوری کشش ساده به دست آورد. شکل 4-7 یک نمودار تنش کرنش ایده آل را نشان می دهد، که در آن فرض بر آن است که رفتار ماده در کشش و فشار یکسان است.



شکل 4-7: رفتار ارتجاعی- با سخت شوندگی کرنشی در حالت یک بعدی

رفتار ماده در ابتدا مطابق با مدول الاستیسیته E ، تغییر شکل داده تا جاییکه تنش به σ_Y ، یا همان تنش تسلیم تک محوری برسد. اگر بار بیشتر شود، ماده با رفتار سخت شوندگی کرنشی با مدول مماسی E_T تغییر شکل خواهد داد. بعد از تسلیم اولیه با فرض این که مقدار بار به اندازه $d\sigma$ افزایش یابد، افزایش صعودی تنش ادامه خواهد داشت. در این حالات کرنش کل به دو جزء کرنش الاستیک و کرنش پلاستیک تقسیم می شود:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad 15-4$$

پارامتر کرنش سخت شوندگی H به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \quad 16-4$$

این پارامتر را پس از کنار گذاشتن بخش کرنش الاستیک، می توان به صورت شیب قسمت کرنش سخت شونده نمودار تنش - کرنش تصور کرد:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon_e} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad 17-4$$

رفتار یک جزء با رفتار خطی که دارای سطح مقطع A می باشد را در نظر بگیرید. اگر این جزء تحت اثر یک نیروی محوری F به طور پیوسته افزایش یابد، افزایش طولی برابر δ در جزء به وجود خواهد آمد.

با فرض اینکه $\frac{F}{A}$ کوچکتر یا مساوی با σ_Y (تنش تسلیم تک محوری) باشد رفتار ماده الاستیک بوده و سختی زیر را نشان می دهد:

$$k_\delta = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{L} \quad 18-4$$

در نتیجه ماتریس سختی جزء به سادگی برابر خواهد بود با:

$$K_e^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 19-4$$

فرض کنید F تا تسلیم ماده افزایش یابد. در این صورت dF به یک افزایش طول اضافی $d\delta$ منجر می شود. پس می توان نوشت:

$$d\delta = (d\varepsilon_e + d\varepsilon_p)L \quad 20-4$$

که L طول المان است. به کمک رابطه 16-4 می توان نوشت:

$$dF = d\sigma A = AH' d\varepsilon_p \quad 21-4$$

در نتیجه سختی مماسی ماده خواهد شد:

$$k_{ep} = \frac{dF}{d\delta} = \frac{AH \, d\varepsilon_p}{L \left(\frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon_p \right)} \quad 22-4$$

با استفاده از 16-4 و مرتب کردن دوباره می توان نوشت:

$$k_{ep} = \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{E}{E+H} \right) \quad 23-4$$

در نهایت سختی جزء برای رفتار ماده الاستو پلاستیک به دست خواهد آمد:

$$k_{ep} = \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{E}{E+H} \right) \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad 24,4$$

از رابطه 23-4 می توان نتیجه گرفت که اولین جمله مقدار سختی الاستیک را نشان می دهد، که توسط رابطه 19-4 هم داده شده است. دومین جمله نشان دهنده کاهش سختی نسبت به مقدار الاستیک، در اثر تسلیم است. برای یک رفتار خمیری کامل، پس از تسلیم اولیه از رابطه 17-4 می توان نتیجه گرفت که $H = 0$ است و سپس از رابطه 24-4 معلوم می شود که $K_{ep}^{(e)} = 0$ است. این موضوع نشان می دهد که ماتریس سختی الاستو پلاستیک مماسی برای چنین ماده ای منفرد بوده و عموماً روش سختی مماسی برای حل آنها مناسب نیست. اگر تعداد مشخصی از اجزاء سازنده به حد تسلیم رسیده باشند، ماتریس سختی مماسی مجموعه منفرد خواهد بود. در این صورت، معکوس یا تبدیل مورد نیاز معادله 13-4 تحقق نخواهد یافت. این مشکل را می توان با استفاده از روش سختی اولیه که در آن سختی اجزاء الاستیک در هر مرحله محاسبه فرض می شود، حل نموده و بدین وسیله مطمئن شد که ماتریس سختی مجموعه قطعاً مثبت است. (1966, BOOTH.A.D.)

3-4- روابط ماتریسی:

در این قسمت به بحث در مورد روابط تئوری بدست آمده در قسمت های قبل به شکل ماتریسی پرداخته می شود. تابع تسلیم که ابتدا تعریف شده بود را مجدداً میتوان به صورت زیر نوشت:

(1968, YAMADA Y, YOSHIMURA N, and SAKURAI T)

$$f(\sigma) = K(k) \quad 25-4$$

که σ بردار تنش، K تصحیح سخت شوندگی که با گسترش سطح تسلیم افزایش می یابد. با استفاده از معادله 1,3 و 2,3 و فرض سخت شوندگی تابع کار پلاستیک می توان نوشت

$$dK = \sigma^T d\varepsilon_p \quad 26-4$$

با فرض سخت شوندگی کرنشی و استفاده از معادله 5,3 نتیجه می شود

$$dk = d\varepsilon_p \quad 27-4$$

در این صورت از معادله 25-4 رابطه زیر بدست می آید:

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - K(k) = 0 \quad 28-4$$

با مشتق گیری از رابطه 28-4 می توان نوشت:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad 29-4$$

$$a^T d\sigma - Ad\lambda = 0 \quad 30-4$$

با توجه به تعریف:

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad 31-4$$

$$A = -\frac{1}{\partial \lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad 32-4$$

A بردار جریان نامیده می شود. رابطه 28,2 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$d\varepsilon = [D_e]^{-1} d\sigma + d\lambda \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] \quad 33-4$$

D_e ماتریس رفتار ارتجاعی بر حسب ثابتهای الاستیک می باشد. هر دو طرف رابطه 33-4 را می توان در $d_D^T = a^T D_e$ پیش ضرب نمود. و $a^T D_e$ را با استفاده از معادله 30-4 حذف کرده، ضریب پلاستیک $d\lambda$ را بدست آورد.

$$d\lambda = \frac{1}{[A+a^T D_e a]} a^T d_D d\varepsilon \quad 34-4$$

با جایگزین کردن رابطه 34-4 در 33-4 می توان رابطه کامل نمو تنش- کرنش الاستو پلاستیک را به شکل زیر بدست آورد:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad 35-4$$

$$D_{ep} = D_e - \frac{d_D d_D^T}{A+d_D^T a} \quad d_D = D_e a \quad 36-4$$

رابطه ارائه شده برای D_{ep} از نظر شکل مشابه رابطه ای است که برای حالت یک بعدی بیان شد. مساله ای که باقی می ماند تعیین شکل صریح جمله عددی (اسکالر) A می باشد. فرضیه سخت شوندگی تابع کار، دیدگاه ترمودینامیکی قوی تری نسبت به فرضیه سخت شوندگی کرنشی داشته و در این الگو به کار گرفته می شود. بنابراین می توان نوشت:

$$dK = \sigma^T d\varepsilon_p \quad 37-4$$

معادله 28-4 را می توان مجدداً به فرم زیر نوشت:

$$F(\sigma, K)d\sigma = F(\sigma) - \sigma_y(K) = 0 \quad 38-4$$

با توجه به رابطه $\sigma_y = \sqrt{3}k$ از معادله 32-4 نتیجه می شود:

$$A = \frac{-1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial K} dK = \frac{1}{d\lambda} \frac{d\sigma_y}{\partial K} dK \quad 39-4$$

بایستی توجه داشت که مشتق گیری کامل را می توان در جمله های قبل مورد استفاده قرار داد. زیرا σ_y فقط تابعی از K بوده و با بکار بردن شرایط تعامد در معادله 37-4 می توان نوشت:

$$dK = \sigma^T d\varepsilon_p = \sigma^T d\lambda a = d\lambda a^T \sigma \quad 40-4$$

برای حالت تک محوری $\sigma = \bar{\sigma} = \sigma_y$ ، $d\varepsilon_p = d\bar{\varepsilon}_p$ و همچنین $\bar{\sigma}$ و $\bar{\varepsilon}_p$ ، تنش و کرنش موثر می باشند. بنابراین رابطه 40-4 به صورت زیر می باشد:

$$dK = \sigma_y d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda a^T \sigma \quad 41-4$$

همچنین با استفاده از رابطه 8,3 می توان نوشت:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_p} = \dot{H} \quad 42-4$$

با استفاده از نظریه اولر برای توابع همگن مرتبه اول (بر اساس این نظریه برای تابع همگن از درجه n به صورت روبه رو می توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot x = nf \quad 43-4$$

می توان با استفاده از رابطه 38-4 نوشت:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \sigma = \sigma_Y \quad 44-4$$

از رابطه 31-4 می توان نتیجه گرفت:

$$a^T \sigma = \sigma_Y \quad 45-4$$

با جایگزینی روابط 42-4 و 45-4 در 41-4 و 39-4 رابطه زیر بدست می آید.

$$d\lambda = d\bar{\epsilon}_p \quad 46-4$$

$$A = H \quad 47-4$$

بنابراین مشاهده می شود که A برابر شیب موضعی منحنی تنش محوری- کرنش پلاستیک بوده و به طور تجربی می تواند از معادله 12-3 تعیین شود.

4-4- شکل های مختلف حد تسلیم در محاسبات عددی:

در محاسبات عددی می توان تابع تسلیم را بر حسب مستقل های تنش تعریف نمود. این قاعده توسط نایاک¹ ارائه شده و مهمترین فایده آن این است که می توان در برنامه نویسی کامپیوتری برای تابع تسلیم و قانون جریان یک شکل عمومی ارائه و از آن استفاده نمود. در این حالت لازم است سه ثابت

برای مشخص نمودن هر معیاری تعریف شود. با استفاده از تعادل تنش ها در محیط تنش تفاضلی اصلی σ_1, σ_2 و σ_3 ریشه های معادله زیر می باشند:

(1957, BLAND.D.R) و (1972, NAYAK.G.C, ZIENKLEWIZ.O.C)

$$t^3 + J_2 t - J_3 = 0 \quad 48-4$$

از طرفی اتحاد مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin^3 \theta - 3/4 \sin \theta + 1/4 \sin 3\theta = 0 \quad 49-4$$

با جایگزینی $t = r \sin \theta$ در رابطه 48-4 می توان نتیجه گرفت:

$$\sin^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \sin \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad 50-4$$

از مقایسه 49-4 و 50-4 می توان نتیجه گرفت:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{\frac{1}{2}} \quad 51-4$$

$$\sin 3\theta = -\frac{4J_2}{r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad 52-4$$

اولین ریشه معادله 52-4 بر حسب θ با تعیین 3θ در محدوده $\pm \frac{\pi}{3}$ ارائه گر مناسبی برای سومین مستقل تنش یعنی J_3 می باشد. با توجه به تناوبی بودن تغییرات $\sin(3\theta + 2\pi)$ سه (و تنها سه) پاسخ ممکن برای $\sin \theta$ بدست آمده و نتیجتاً سه تنش اصلی بدست می آیند. با جایگزینی r از معادله 51-4 و اضافه کردن مقدار تنش هیدرواستاتیک متوسط تنش های اصلی از رابطه زیر بدست می آیند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2(J_2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\theta + 2\pi/3) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + 4\pi/3) \end{bmatrix} + \frac{J_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad 53-4$$

در حالیکه:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad 54-4$$

مقدار θ لزوماً مشابه پارامتر لاد¹ بوده و Γ به صورت $\Gamma = -\sqrt{3} \tan \theta$ تعریف می شود. حال می توان دو معیار تسلیم مورد نظر که در فصل قبل ذکر شد را بر حسب J_1 ، J_2 و θ به شکل زیر ارائه نمود.

1-4-4- معیار تسلیم موهر-کولمب:

با جایگزینی σ_1 و σ_2 از رابطه 53-4 در رابطه تسلیم می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{1}{3}J_1 \sin \phi + (J_2)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) = c \cos \phi \quad 55-4$$

2-4-4- معیار تسلیم دراگر-پراگر:

به طور مشابه و بدون تغییر در این معیار می توان مستقیماً از معیار تسلیم نوشت:

$$aJ_1 + (J_2)^{\frac{1}{2}} = k \quad 56-4$$

به منظور محاسبه ماتریس D_{ep} از رابطه 36-4 نیاز به تعریف بردار a بوده، به شکلی که برای محاسبات

عددی مناسب باشد:

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad 57-4$$

که در آن :

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \quad 58-4$$

با مشتق گیری از رابطه 52-4 می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \left[\frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{(J_2)^2} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} \right] \quad 59-4$$

با جایگزینی معادله فوق در رابطه 57-4 و با استفاده از معادله 52-4 می توان نتیجه گرفت:

$$a = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad 60-4$$

$$a_1^T = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad 61-4$$

$$a_2^T = \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2(J_2)^{\frac{1}{2}}} \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}\} \quad 62-4$$

$$a_3^T = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left(\sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \quad 63-4$$

$$\left. 2\tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}, 2\tau_{xy} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{xz}, 2\tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{xy} \right\}$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1} \quad , \quad C_2 = \frac{\partial F}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tan 3\theta}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad , \quad C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad 64-4$$

به این ترتیب فقط ثابت های C_1, C_2, C_3 برای تعریف سطح تسلیم ضروری می باشند. بنابراین می توان به سادگی برنامه ای نوشت که برای رسیدن از یک سطح تسلیم به سطح تسلیم دیگر فقط نیاز به تغییرات سه ثابت داشته باشد. ثابت های C_i در جدول 4-1 برای دو معیار تسلیم که در فصل قبل در نظر گرفته شده، آمده است. بر همین اساس می توان برای سایر توابع تسلیم انتخابی نیز به همان شکل عمل نمود. (SCHREYER.H.L, KULAK.R.F, and KRAMER.J.M, 1979)

جدول 4-1: مقادیر ثابت ها برای دو الگوی ارائه شده

C_3	C_2	C_1	تابع تسلیم
$\frac{(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \varphi)}{(2J_2 \cos 3\theta)}$	$\cos \theta [(1 + \tan \theta \tan 3\theta) + \sin \varphi (\tan 3\theta - \tan \theta) / \sqrt{3}]$	$\frac{1}{3} \sin \varphi$	مـــــوهر - کولمب
0	1.0	α	دراگر-پراگر

5-4- عبارات پایه برای مسائل دو بعدی:

برای مسائل دو بعدی، روابط عمومی بدست آمده در این فصل را می توان خلاصه و اصلاح نمود. در ابتدا نیاز به جزءئیات مولفه های تنش- کرنش که تحت شرایط تنش مسطح یا کرنش مسطح ناپدید شده اند می باشد. بنابراین می توان نوشت: (1976, ZIENKIEWICZ, O.C. and HINTON, E.)

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}, \sigma_z = 0 \quad \text{تنش مسطح} \quad 65-4$$

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}, \varepsilon_z = 0 \quad \text{کرنش مسطح} \quad 66-4$$

ماتریس D_e در حالت کرنش مسطح به صورت زیر است:

$$D_e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 67-4$$

برای حالت تنش مسطح

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 68-4$$

بایستی توجه داشت که در حالات تنش و کرنش صفحه ای مولفه های مربوط به جهت مستقل مختصات به صورت جداگانه قابل محاسبه می باشند. مولفه های ماتریس سختی که مربوط به مولفه های مستقل می باشند از مسیر محاسبه ماتریس سختی جزء خارج شده و فقط قسمت 3×3 که مربوط به مولفه های وابسته به یکدیگرند، مورد بررسی قرار گرفته و به کار گرفته می شوند. برای بردار جریان a می توان نوشت:

$$a^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\} \quad 69-4$$

با جایگزین کردن r, z, θ به جای x, y, z می توان حالت تقارن محوری را حاصل نمود. در این صورت بردار a هنوز به شکل 60,4 بوده ولی در این حالت از رابطه 61,4 می توان نتیجه گرفت:

$$a_1^T = \{1, 1, 0, 1\} \quad 70-4$$

$$a_2^T = \frac{1}{2(J_2)^{\frac{1}{2}}} \{ \dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, 2\dot{\tau}_{xy}, \dot{\sigma}_z \} \quad 71-4$$

$$a_3^T = \frac{1}{2(J_2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left(\dot{\sigma}_y \dot{\sigma}_z + \frac{J_2}{3} \right), \left(\dot{\sigma}_x \dot{\sigma}_z + \frac{J_2}{3} \right) \dot{\sigma}_y, (2\dot{\sigma}_z \dot{\tau}_{xy}), \left(\dot{\sigma}_x \dot{\sigma}_y - \dot{\tau}_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right\} \quad 72-4$$

برای مستقل های تنش انحرافی می توان نوشت:

$$J_2 = \frac{(\dot{\sigma}_x^2 + \dot{\sigma}_y^2 + \dot{\sigma}_z^2)}{2} + \dot{\tau}_{xy}^2 \quad 73-4$$

$$J_3 = \dot{\sigma}_z \left(\dot{\sigma}_z^2 - J_2 \right) \quad 74-4$$

برای کامل شدن ماتریس الاستوپلاستیک D_{ep} که در روابط 36-4 ارائه شده به محاسبه d_D نیاز است.

با کاربرد شکل مناسب D_e و استفاده از رابطه 66-4 در 67-4 برای کرنش مسطح می توان نوشت:

$$d_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} + M_1 \\ G a_3 \\ \frac{E}{1+\nu} + M_1 \end{Bmatrix}, \quad M_1 = \frac{E\nu(a_1+a_2+a_3)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad 75-4$$

که $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ مدول برشی و a_1, \dots, a_4 مولفه های بردار a هستند. برای حالت تنش مسطح

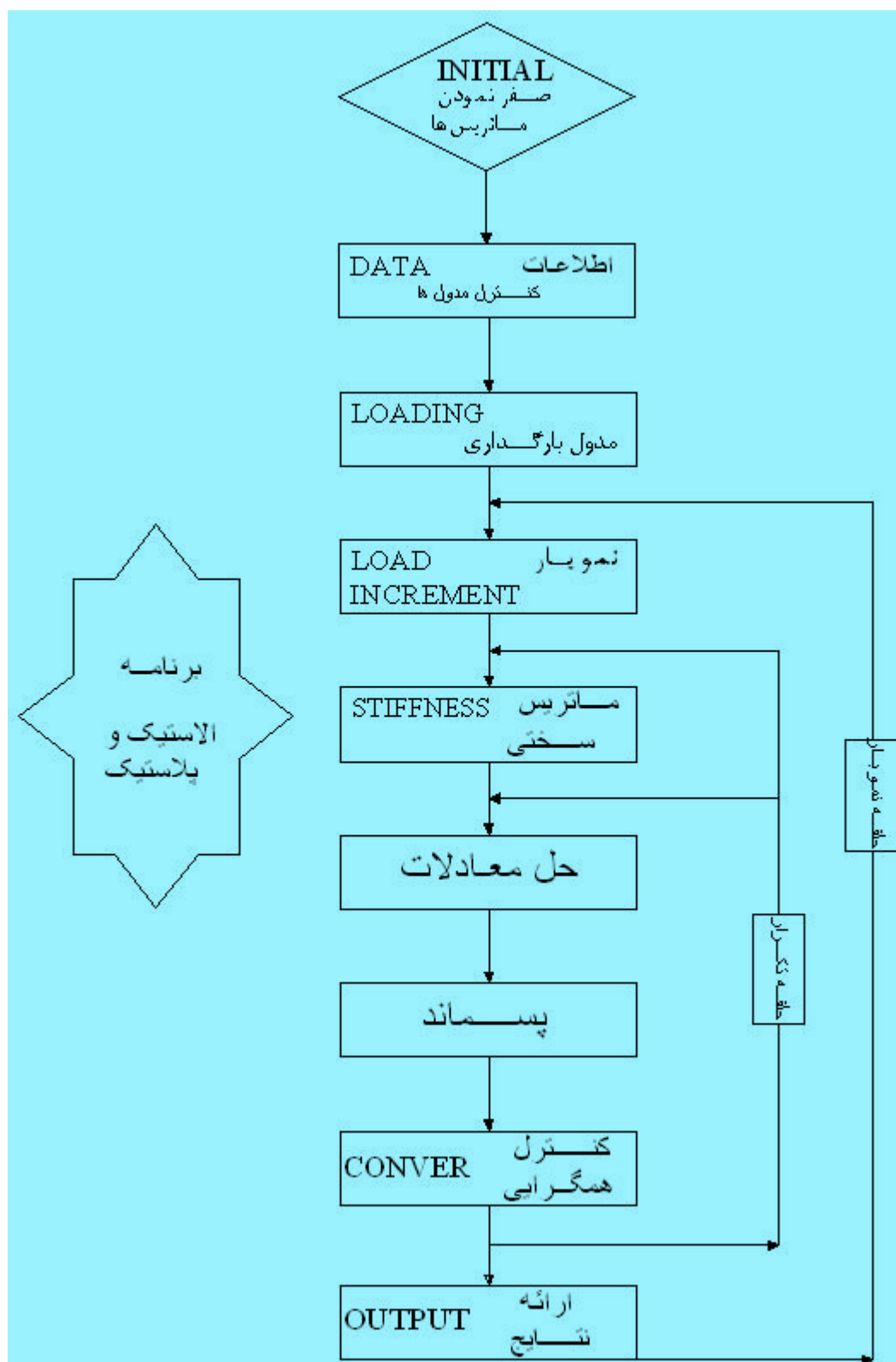
می توان نوشت:

$$d_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} + M_2 \\ \frac{E}{1+\nu} + M_2 \\ G a_3 \\ \frac{E}{1+\nu} + M_2 \end{Bmatrix}, \quad M_2 = \frac{E\nu(a_1+a_2)}{(1-\nu^2)} \quad 76-4$$

این قسمت راجع به خصوصیات اصلی یک برنامه کامپیوتری که در این پایان نامه نوشته شده، بحث می کند. مدول های متفاوت برای اجرای خواسته های گوناگون در یک تحلیل غیر خطی اجزاء محدود آورده شده است. به طور معمول در هر برنامه از 9 مدول که هر یک مربوط به یک نوع عملکرد می باشند، استفاده می شود. هر مدول به نوبت با یک یا بیشتر از زیربرنامه برای انجام خواسته مورد نظر ترکیب می شود و در بعضی موارد، بعضی زیربرنامه ها دارای مدول های مشترک هستند. کنترل مدول ها توسط قسمت اصلی انجام می گیرد.

مدول ها به طور شماتیک در شکل 4-8 نشان داده شده اند و کاربرد اصلی آن ها در پیوست 1 توضیح

داده شده است. (1977, HINTON, E and OWEN D.R.J)



شکل 4-8: فلوچارت تحلیل غیر خطی مسائل

1. مدول اولیه یا صفر: این مدول اولین مدول ورودی بوده و تابع مربوط به آن بردارها و یا ماتریس های متفاوت را در ابتدای شروع عملیات تحلیل صفر می کند.
2. مدول ورود و کنترل ورودی: این مدول دومین مدول ورودی بوده و داده های نهایی هندسی و شرایط مرزی و خصوصیات ماده را کنترل و اداره می کند. داده ها چک شده و در صورت اشتباه، خط مشخص شده و باقی داده ها قبل از اتمام برنامه چاپ می شود. در این قسمت برای اجزاء همگام یا ایزوپارامتریک، ثابت های انتگرال گیری گاوس و مختصات میانی برای اجزاء با لبه های مستقیم برآورده می شوند. با کاربرد یک بار این مدول دیگر نیازی به استفاده مجدد از آن نمی باشد.
3. مدول بارگذاری: این مدول محاسبات نیروهای گرهی به خاطر اشکال مختلف بارگذاری برای حالت دو بعدی را سازمان می دهد. این بارها شامل فشار، وزن و بارهای گسترده و متمرکز می گردد.
4. مدول افزایش بار: برای حل مسئله غیر خطی اجزای محدود می توان اعمال شرائط را بر اساس اعمال نموهای آن شرائط دانست. بنابراین عملگر اصلی در این قسمت افزایش و نمو باری است که توسط مدول بار تعریف شده و یا تغییر مکان را به صورت نموی به سازه اعمال می نماید.
5. مدول سختی: این مدول برای ارزیابی ماتریس سختی هر جزء به کار می رود. ماتریس سختی اجزاء در دیسک ذخیره شده و به صورتی که برای حل مورد نیاز است تنظیم می شود.
6. مدول حل: مقصود عمومی از این قسمت مرتب سازی، تبدیل و حل مجموعه قانون مندی از دستگاه معادلات به منظور بدست آوردن جابجایی گره ها و نیروهای عکس العمل در تکیه گاه ها می باشد.
7. مدول نیروهای پس مانده: این مدول نیروهای پس مانده یا نامتعادل گره ای را در هر مرحله

از تحلیل محاسبه می کند.

8. مدول همگرایی: این مدول همگرایی تحلیل غیر خطی را بر اساس معیارهایی که در

قسمت های بعدی معرفی می شوند، بررسی می کند.

9. مدول خروجی: این مدول مقادیر خروجی خواسته شده را سازمان می دهد.

وظیفه عمده قسمت اصلی، بکارگیری مدول های فوق و کنترل نمودهای بار و روند تکرار با توجه به تحلیل به کار گرفته شده و نسبت همگرایی در روند تحلیل می باشد.

در این بخش با استفاده از یک روش برنامه ریزی شده و منظم، توضیحات لازم در مورد برنامه کامپیوتری ارائه شده در قالب روش اجزاء محدود که با استفاده از زیر برنامه های متفاوت نوشته شده اند، ارائه می شود. هر برنامه غیر خطی اساساً تمام زیر برنامه های تحلیل مسائل در حالت الاستیک را نیاز دارد. به طور خلاصه این زیر برنامه ها را می توان شامل یک زیر برنامه برای ثبت داده های ورودی، یک زیر برنامه برای تنظیم سختی اجزاء، یک زیر برنامه برای سرهم بندی و حل معادلات و یک زیر برنامه برای امکان ارائه نتایج خروجی مورد نیاز دانست.

در این بخش تحلیل تنش مصالح با رفتار ارتجاعی - خمیری یا الاستو پلاستیک در حالت کرنش مسطح مورد مطالعه قرار می گیرد.

قوانین اساسی حاکم بر رفتار الاستو پلاستیک مواد در تحلیل دو بعدی می بایست پیش از مباحث روش های عددی آنها مطرح شود. در این راستا در قالب نظریه خمیری مفاهیمی چون تابع تسلیم و تابع پتانسیل پلاستیک و شرایط تعامد (نرمالیته) قبلاً معرفی شده اند.

مواد مختلف از دیدگاه رفتاری دارای مشخصات الاستو پلاستیک متفاوت هستند و همین موضوع را پیچیده تر کرده است. در برنامه ای که در این پایان نامه آمده است از معیار تسلیم موهر - کولمب و

دراکر - پراگر برای رفتار پلاستیسیته فلزات و خاک ها مورد استفاده قرار گرفته است. در پیوست A زیربرنامه های مورد استفاده در برنامه همراه با دستورالعمل آن ها ذکر شده است.

5- فصل پنجم

بررسی مسائل الاستو پلاستیک با استفاده از نرم افزار تولید شده

1-5- معرفی مدل های مورد بررسی:

بطور کلی در این مقاله سه نوع مدل عددی در حالت کرنش صفحه ای و با دو معیار تسلیم متفاوت مورد بررسی قرار می گیرند که در ادامه به تفصیل به آنها پرداخته خواهد شد.

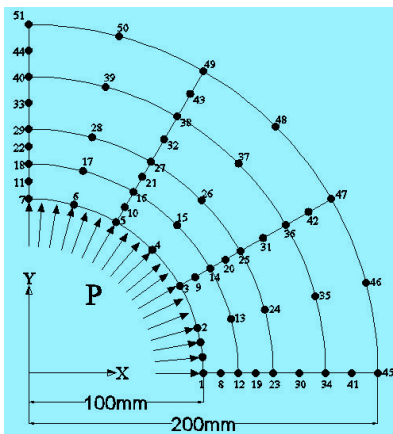
مدل های مورد بررسی مطابق جدول زیر است:

جدول 1-5: مدل های مورد بررسی

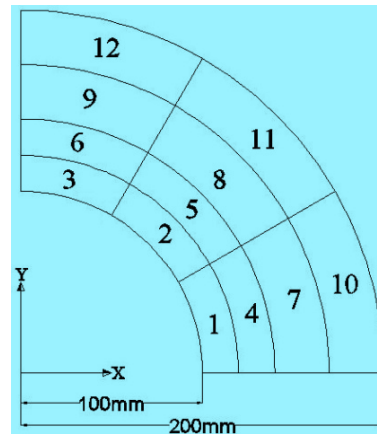
مدل	کاربری مدل
مدل اول	مقطعی از سیلندر تحت فشار مایع درون
مدل دوم	تیر کنسول
مدل سوم	تیر دو سر ساده و تیر دو سر گیردار
مدل چهارم	فونداسیون تحت فشار جانبی

5-1-1- مدل اول:

در مدل اول سیلندری به شعاع درونی 100 mm و شعاع بیرونی 200mm را که تحت فشار مایع درون خود است را در نظر می گیریم که این فشار به تدریج به مقدار آن افزوده می شود. این مدل در حالت کرنش صفحه ای تحلیل می شود. سیلندر مورد نظر مطابق شکل زیر می باشد. همانطور که مشاهده می شود به علت تقارن فقط یک ربع از سیلندر را تحلیل می کنیم.



(ب)



(الف)

شکل 5-1: معرفی مدل اول، (الف) نحوه نام گذاری المان ها، (ب) نحوه نام گذاری گره ها

مشخصات سیلندر مورد بررسی در جدول زیر آمده است.

جدول 5-2: مشخصات فیزیکی سیلندر

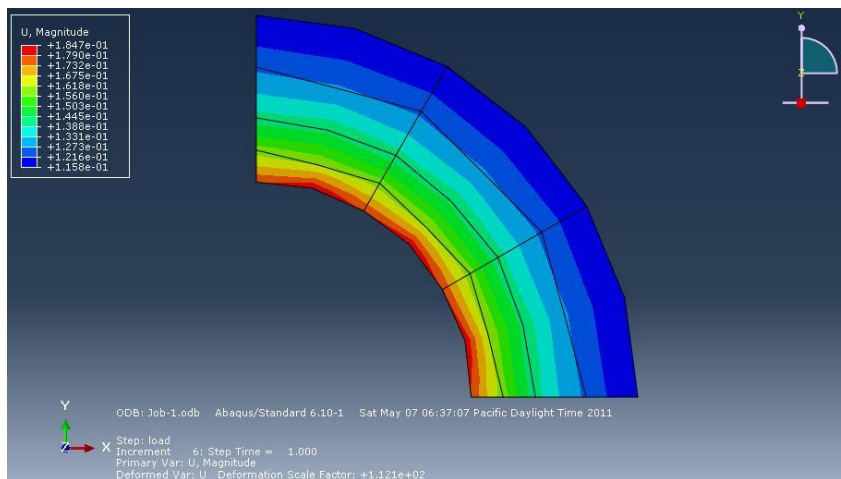
مدل	E			H
سیلندر	$2.1 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$	0.3	2400 Kg/m^2	$E/2=1.05 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$

اطلاعات مربوط به مش بندی از قبیل نوع المان، تعداد المان و همچنین تعداد گره ها و درجات آزادی که منظور شده است، در جدول 3,5 آمده است.

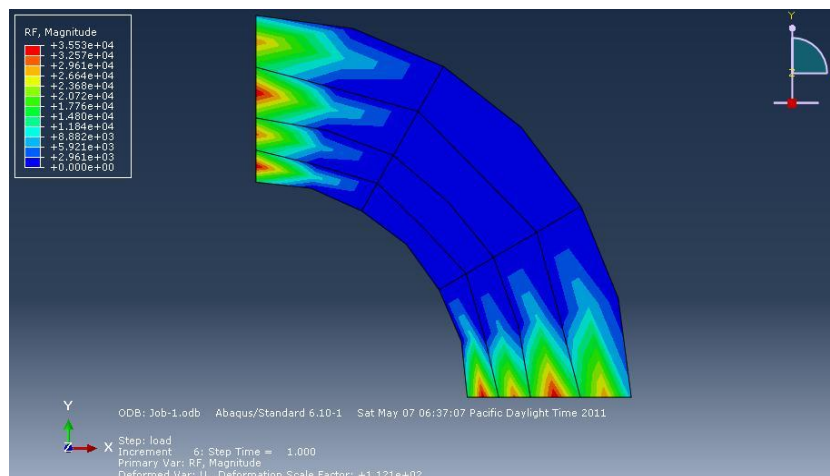
جدول 3-5: مشخصات مش بندی سیلندر

مدل	نوع المان	تعداد المان	تعداد گره	تعداد درجات آزادی
سیلندر	المان 8 گرهی	12	51	102

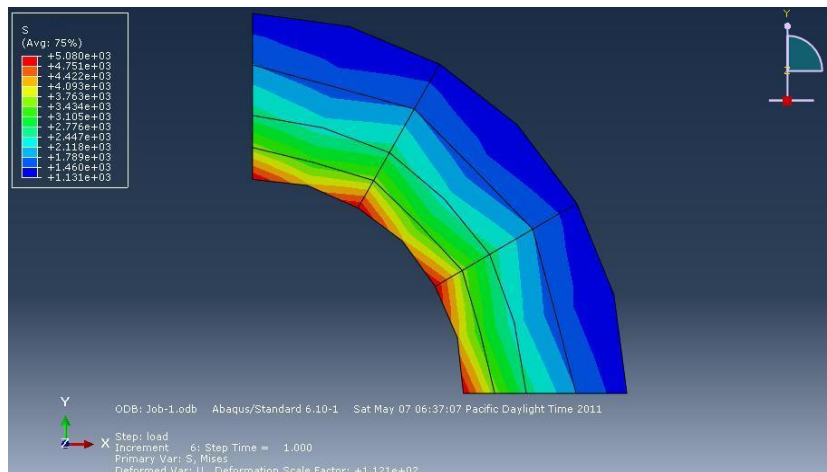
نحوه ی توزیع مقادیر جابجایی ها، نیروهای عکس العمل تکیه گاهی و همچنین مقادیر تنش ها در مدل ABAQUS در شکل 2-5 نشان داده شده است.



(الف)



(ب)



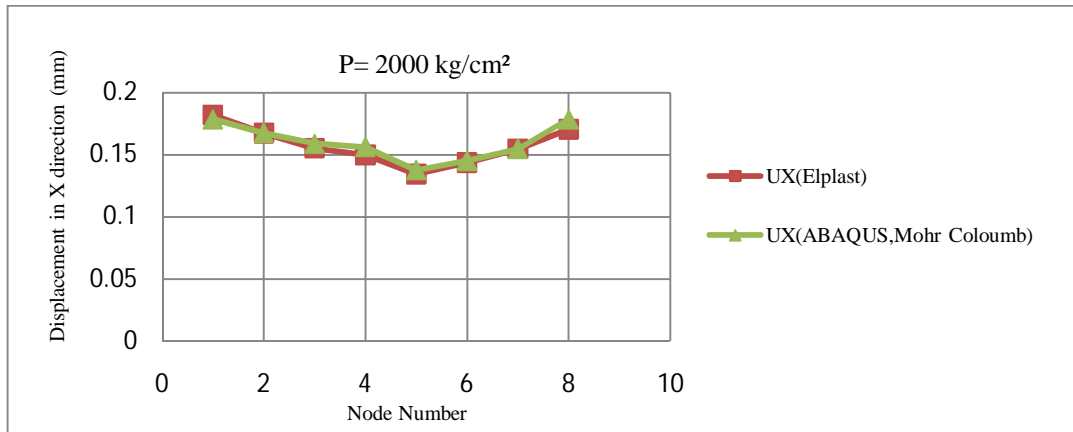
(ج)

شکل 5-2: نتایج ABAQUS برای مدل اول، الف) توزیع جابجایی، ب) توزیع نیروهای عکس العمل تکیه گاهی ج) توزیع تنش

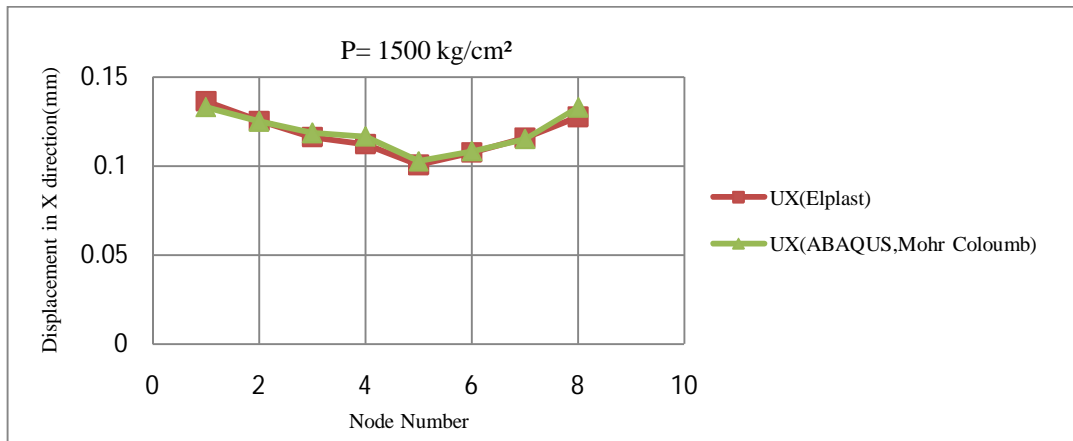
پس از آنالیز مسئله بالا برای بارهای متفاوت و همچنین معیارهای تسلیم مختلف توسط برنامه الاستیک و پلاستیک و همچنین برنامه ABAQUS، نتایج زیر بدست آمد که برای درک بهتر این مقایسه المان ها و گره هایی بطور تصادفی انتخاب شده و بصورت نمودار با هم قیاس می شوند.

لازم بذکر است که خروجی هایی که در برنامه تعریف شده اند عبارتند از: جابجایی گره ها در راستای X و Y، تنش های اصلی و برآیند تنش ها و در نهایت نیروهای عکس العمل تکیه گاهی.

در ابتدا جابجایی های بدست آمده از دو برنامه با هم مقایسه می شوند. برای این مقایسه المان شماره 1 را انتخاب کردیم. نحوه ی شماره گذاری گره ها به صورت پاد ساعتگرد می باشد.



(الف)



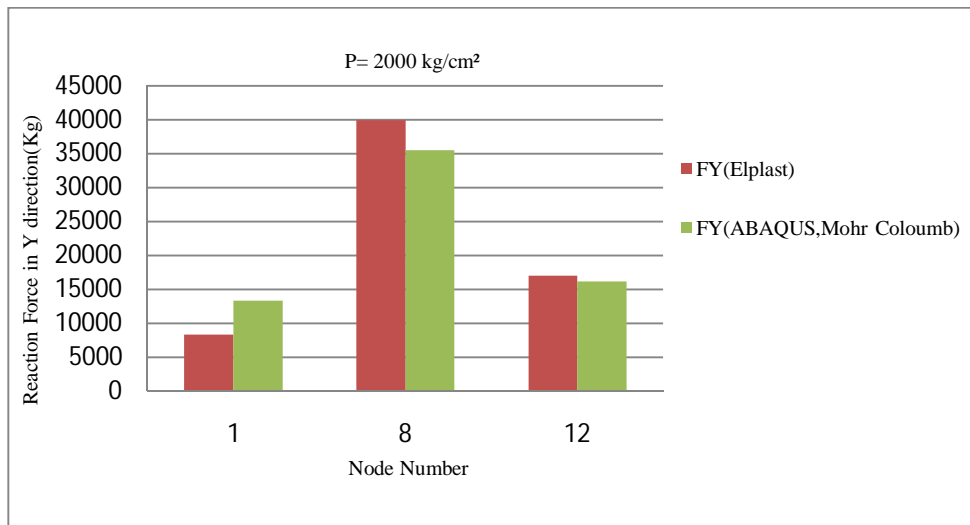
(ب)

شکل 5-3: نمودار جابجایی گره ها المان 1، الف) بار 2000 kg/cm^2 ب) بار 1500 kg/cm^2

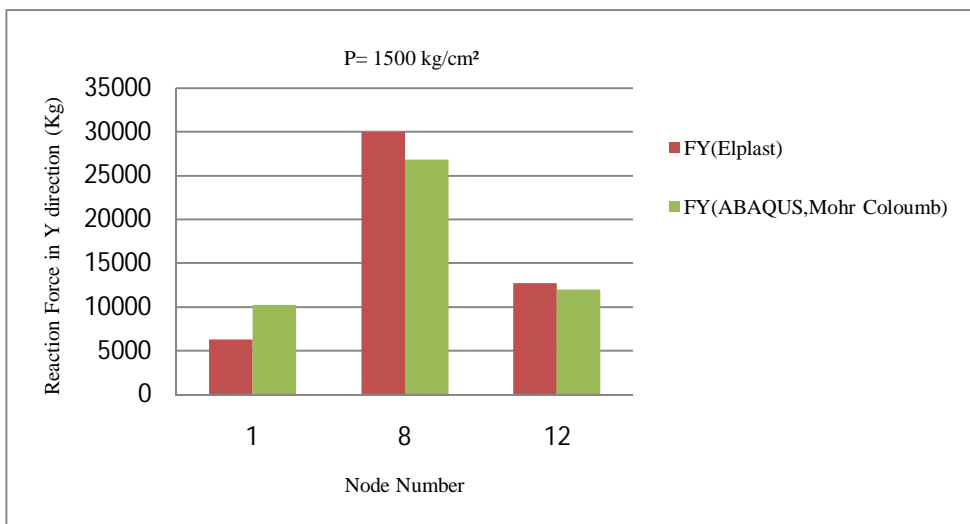
برای مقایسه نیروهای عکس العمل تکیه گاهی، سه گره به شماره های 1، 8 و 12 انتخاب شده اند. لازم به ذکر است به دلیل تقارن، ما فقط یک ربع از سازه را مورد مطالعه قرار دادیم و به همین دلیل نیاز به تعریف شرایط تقارن در سازه تحلیل شده می باشد و داریم:

UX برای آن دسته از گره هایی که دارای مختصات $X=0$ ، برابر صفر می باشد و به همین ترتیب برای UY خواهیم داشت.

UY برای آن دسته از گره هایی که دارای مختصات $Y=0$ ، برابر صفر می باشد.



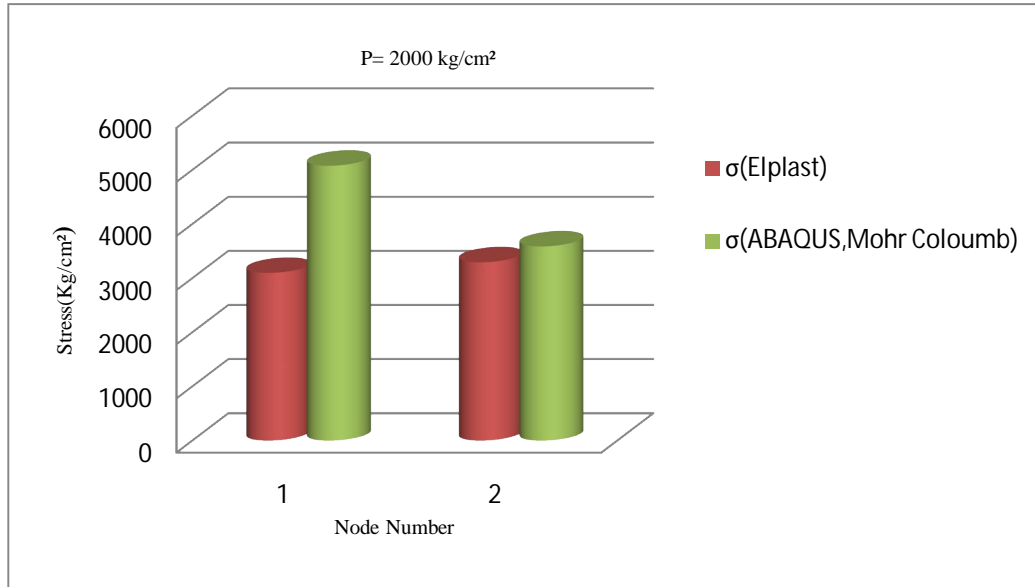
(الف)



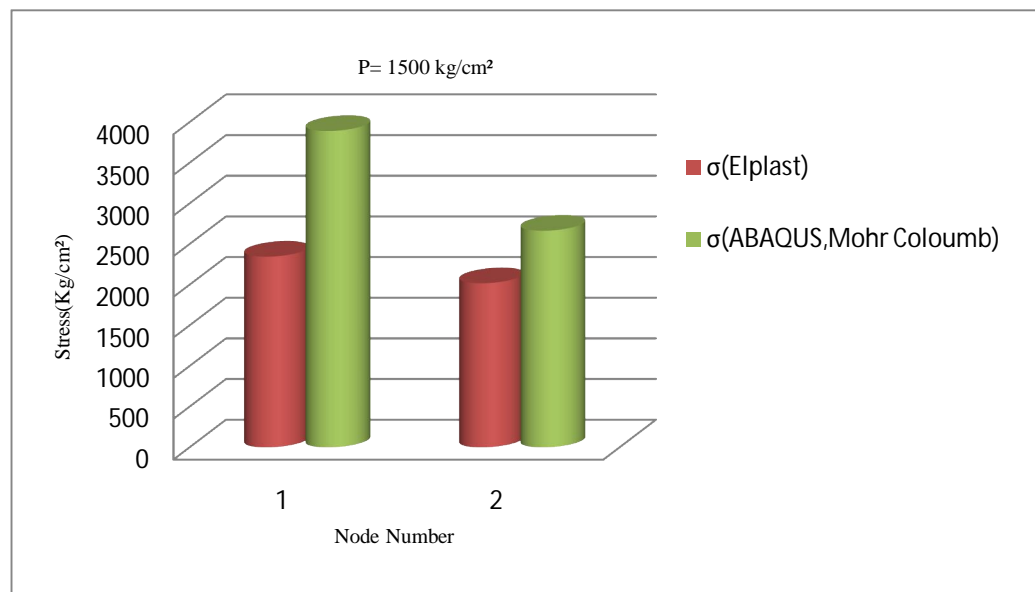
(ب)

شکل 5-4: نمودار عکس العمل های تکیه گاهی ، (الف) بار 2000 kg/cm^2 (ب) بار 1500 kg/cm^2

برای مقایسه تنش ها در مدل اول دو گره به شماره های 1، 12 را مورد بررسی قرار می دهیم.



(الف)

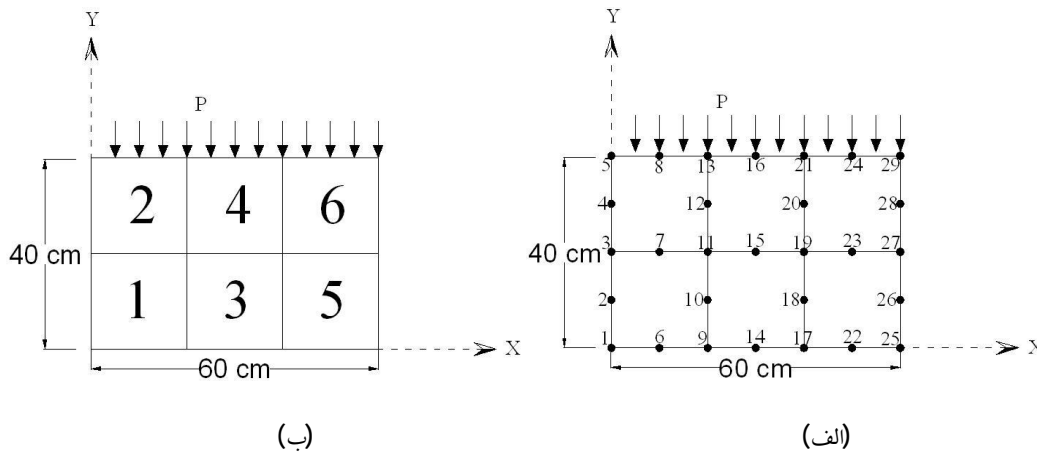


(ب)

شکل 5-5: نمودار عکس العمل های تکیه گاهی، الف) بار 2000 kg/cm^2 ب) 1500 kg/cm^2

2-1-5- مدل دوم:

در مدل دوم تیر کنسولی به ابعاد 60×40 cm که تحت بار لبه ای P می باشد، مورد آنالیز قرار می گیرد.



شکل 5-6: معرفی مدل دوم، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها

مشخصات تیر کنسول مورد بررسی در جدول زیر آمده است.

جدول 4-5: مشخصات فیزیکی تیر کنسول

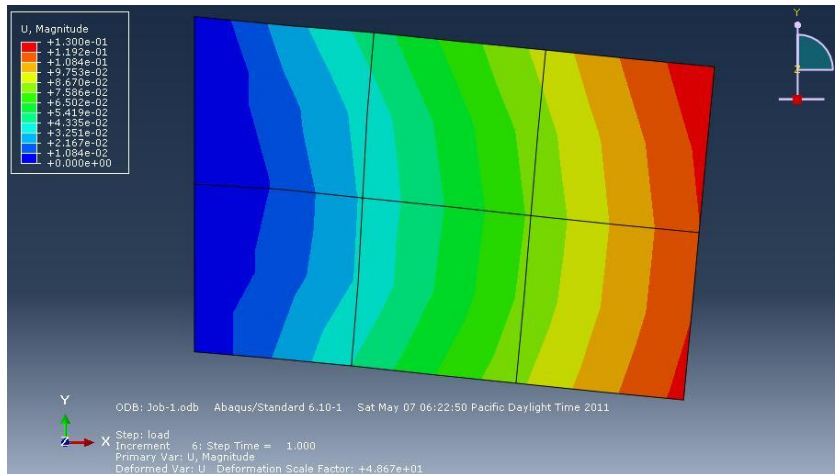
مدل	E			H
تیر کنسول	$2.1 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$	0.3	2400 Kg/m^2	$E/2=1.05 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$

جدول 5-5 اطلاعات مربوط به مش بندی مدل دوم را نشان می دهد.

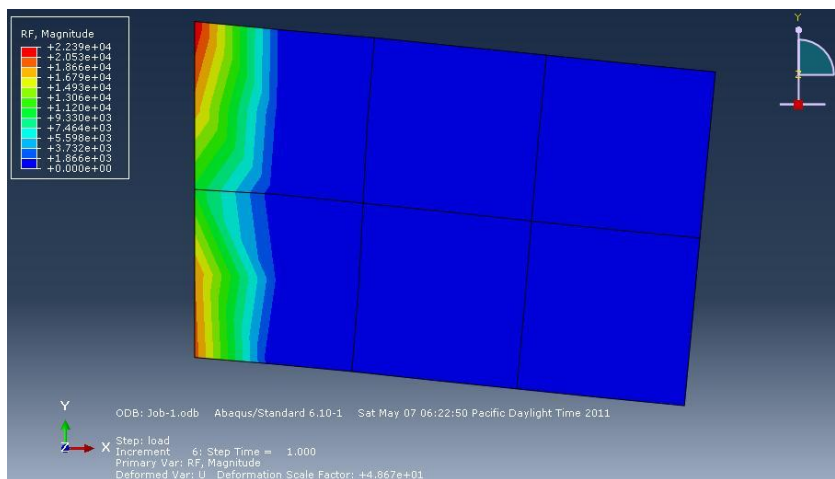
جدول 5-5: مشخصات مش بندی تیر کنسول

مدل	نوع المان	تعداد المان	تعداد گره	تعداد درجات آزادی
تیر کنسول	المان 8 گرهی	6	29	58

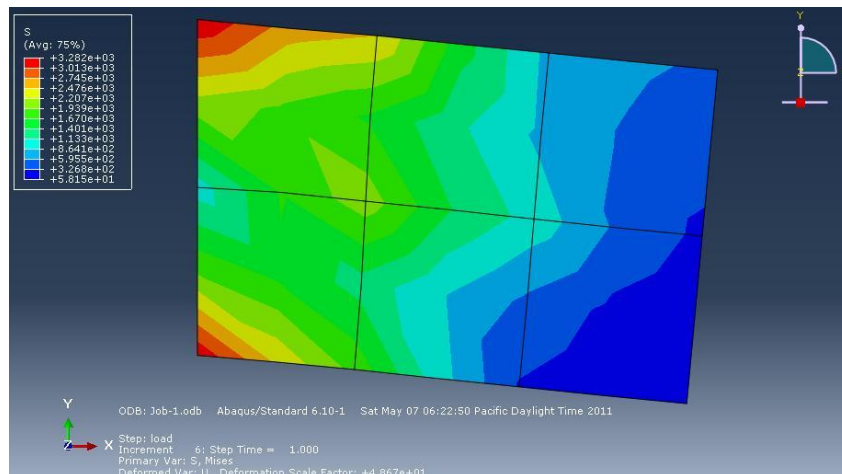
نحوه ی توزیع مقادیر جابجایی ها، نیروهای عکس العمل تکیه گاهی و همچنین مقادیر تنش ها در مدل ABAQUS در شکل 5-7 نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

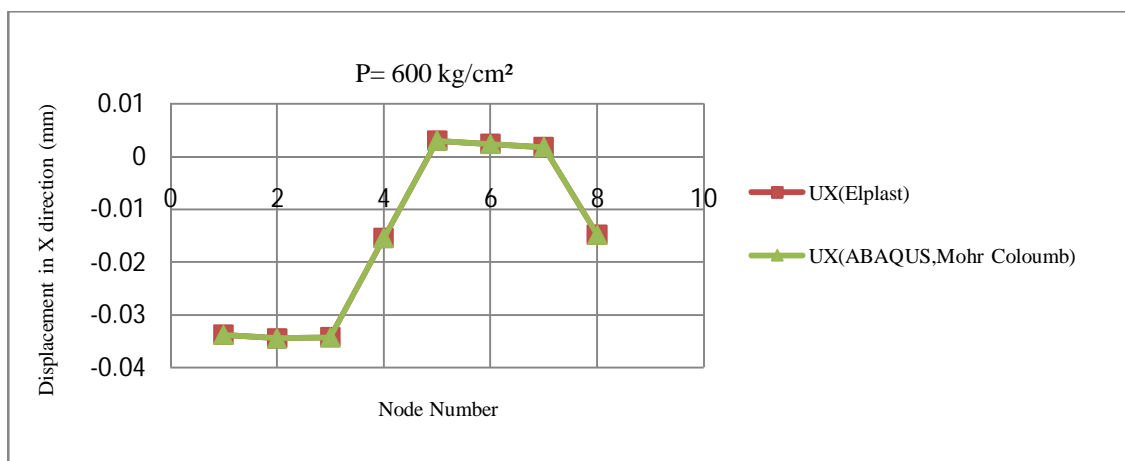


(ج)

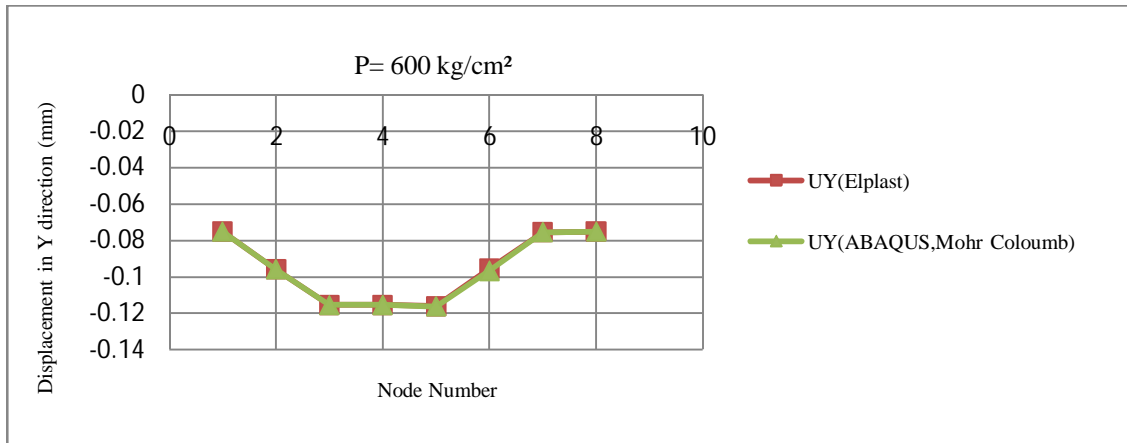
شکل 5-7: نتایج ABAQUS برای مدل دوم، الف) توزیع جابجایی، ب) توزیع نیروهای عکس العمل تکیه گاهی

ج) توزیع تنش

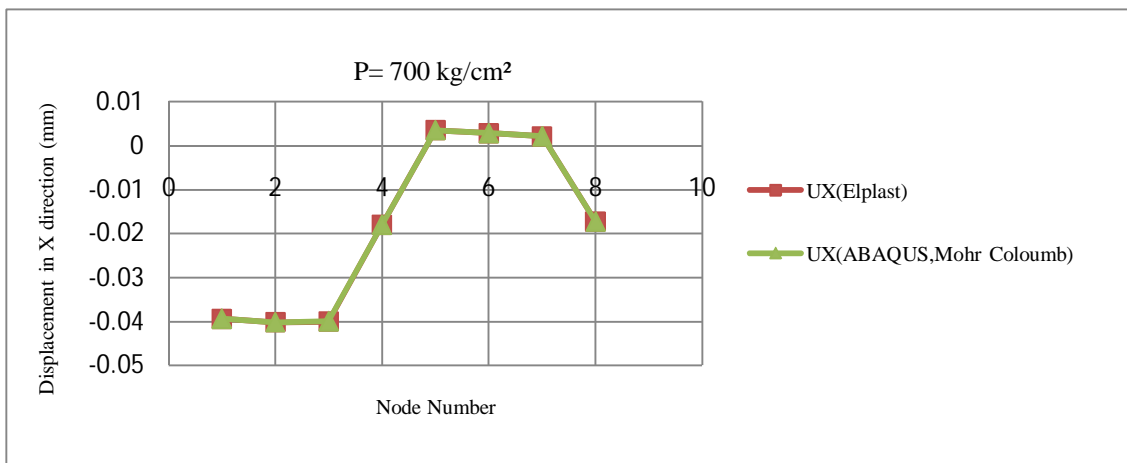
نمودارهای زیر مقایسه جابجایی های دو برنامه را نشان می دهد. برای نمونه المان 5 را مورد بررسی قرار می دهیم. باید این نکته را خاطر نشان کرد، همانطور که در اشکال زیر پیداست در هر نمودار 8 نقطه که بیانگر گره های المان 5 هستند و به صورت پادساعتگرد شماره گذاری شده اند، مشخص می باشند.



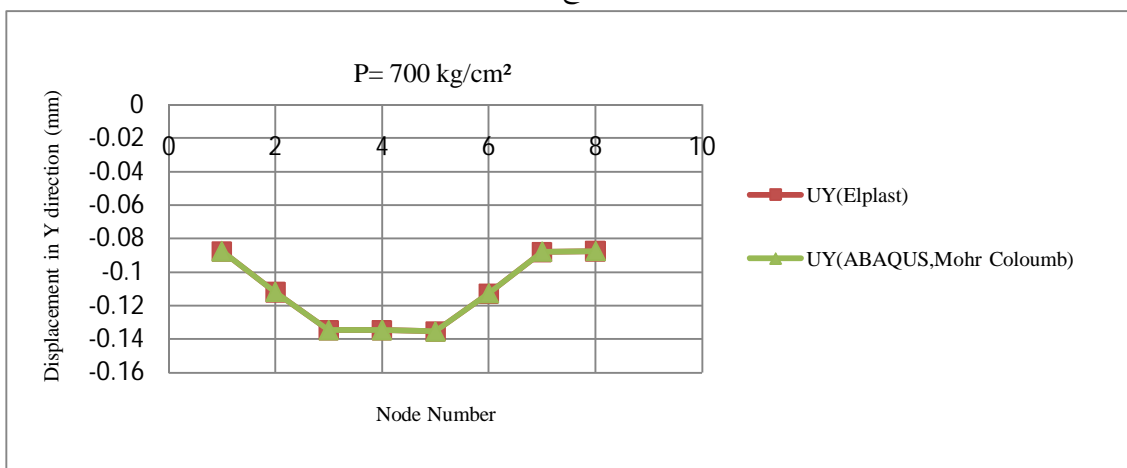
(الف)



(ب)



(ج)

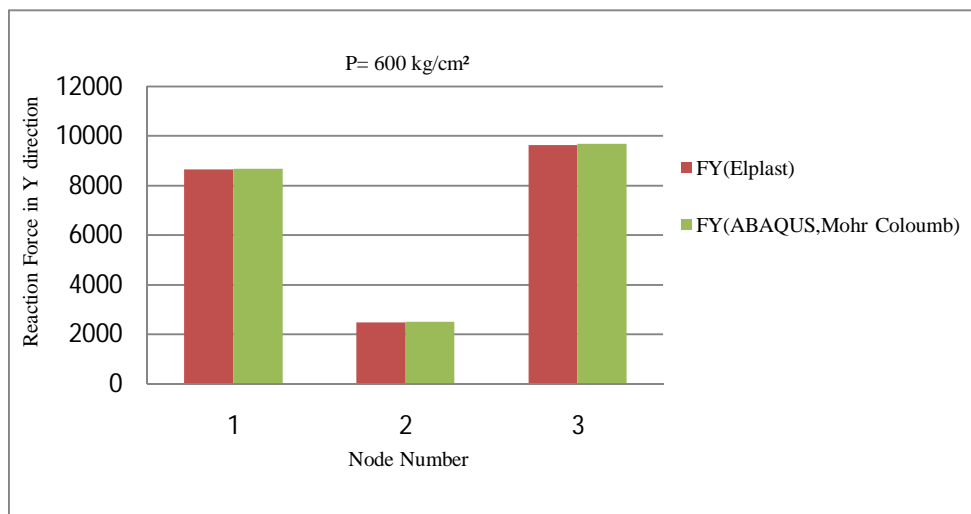


(د)

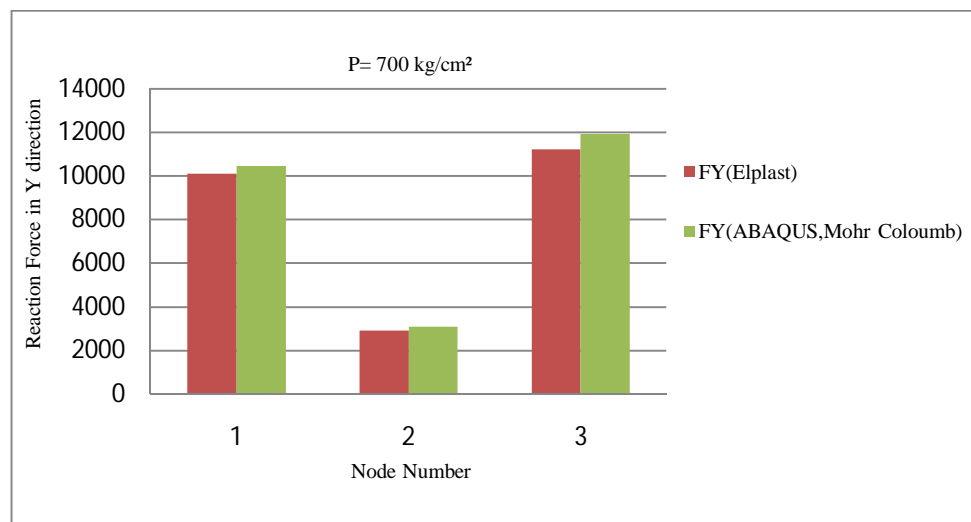
شکل 5-8: جایجایی گره های المان 5 در جهت های اصلی، الف و ب) بار 600 kg/cm^2 ، ج و د) بار 700 kg/cm^2

همانطور که مشاهده می شود، هر اندازه به بار وارده افزوده شود اختلاف میان دو برنامه با توجه به معیارهای ذکر شده بیشتر می شود و این به علت آنست که تعداد بیشتری از المان ها وارد قسمت پلاستیک شده و در ناحیه سخت شوندگی قرار می گیرند.

گره های 1، 2 و 3 از المان 1 را به صورت تصادفی تحلیل می کنیم.



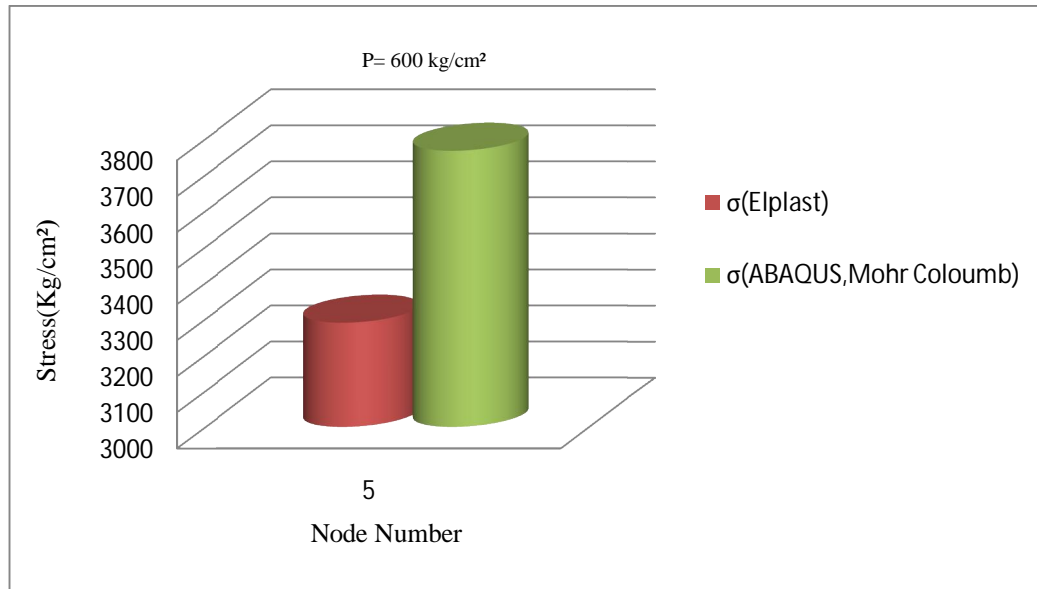
(الف)



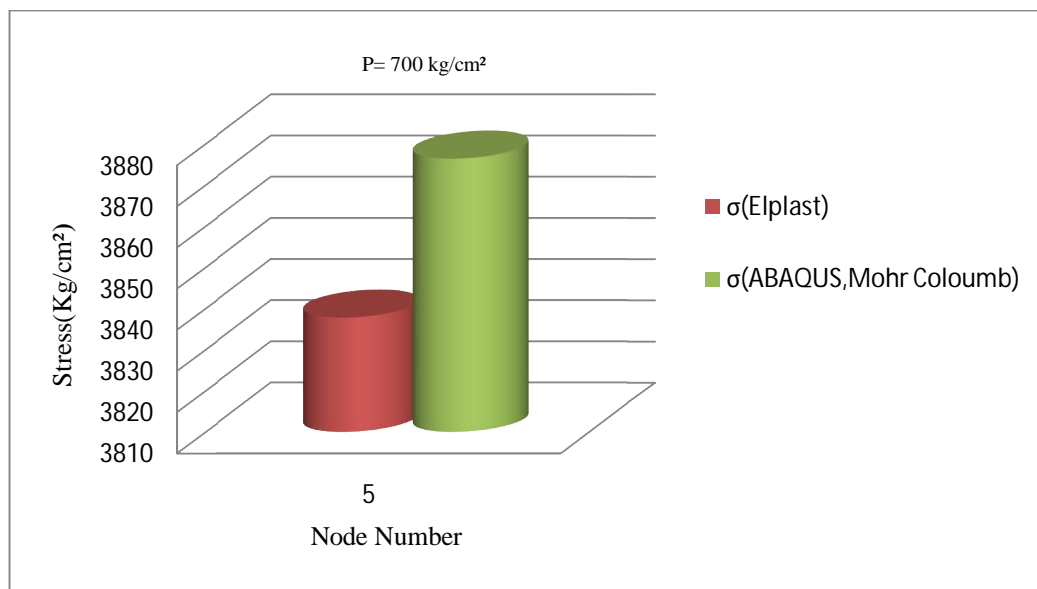
(ب)

شکل 5-9: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی گره های 1، 2 و 3 در جهت محور Y، (الف) بار 600 kg/cm²، (ب) بار 700 kg/cm²

مقایسه ای که برای تنش ها در نظر گرفتیم را برای گره شماره 5 انجام می دهیم، به علت آنکه گره از حد تسلیم خود خارج شده و وارد ناحیه پلاستیک در حالت سخت شوندگی قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می شود نتایج دو برنامه نزدیک بهم می باشد.



(الف)

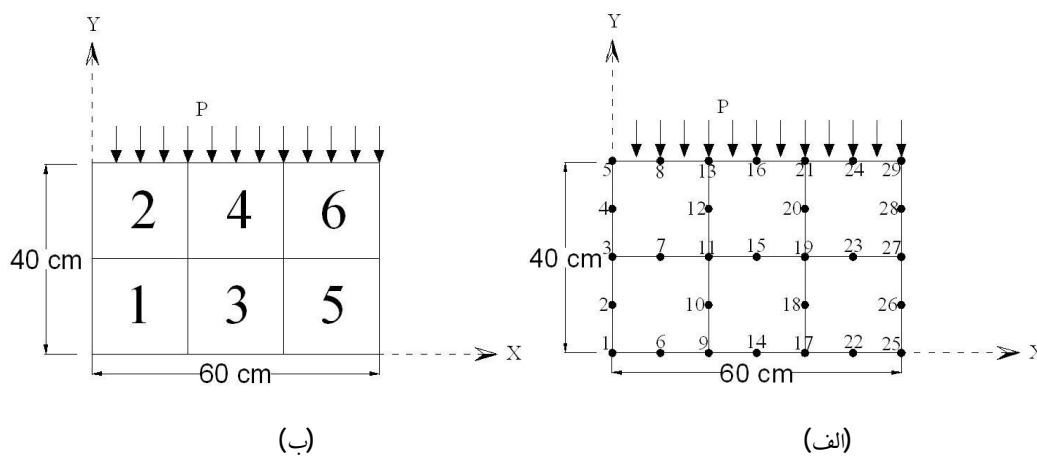


(ب)

شکل 5-10: تنش در گره 5 (الف) بار 600 kg/cm² ، (ب) بار 700 kg/cm²

3-1-5- مدل سوم:

در مدل سوم دو نوع تیر دو سر ساده و دو سر گیردار را با ابعاد و مشخصات مدل دوم که تحت بار لبه ای P می باشد، مورد آنالیز قرار می دهیم. ابعاد مدل سوم برابر است با 60×40 cm. مقدار بار اعمالی برابر 600 kg/cm^2 است.



شکل 5-11: معرفی مدل سوم، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها

مشخصات تیرهای دوسر گیردار و دو سر ساده در جدول زیر آمده است.

جدول 5-6: مشخصات فیزیکی تیرها

مدل	E			H
تیرهای دو سر ساده و دو سر گیردار	$2.1 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$	0.3	2400 Kg/m^2	$E/2 = 1.05 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$

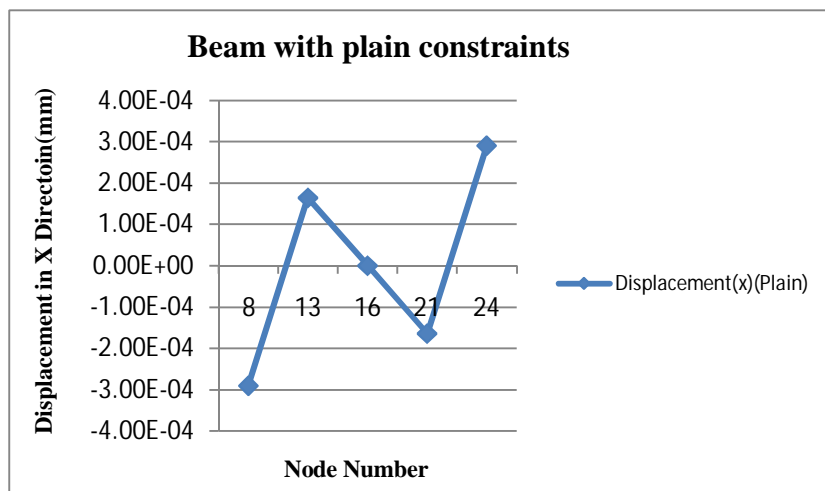
جدول 5-7 اطلاعات مربوط به مش بندی مدل سوم را نشان می دهد.

جدول 5-7: مشخصات مش بندی تیرها

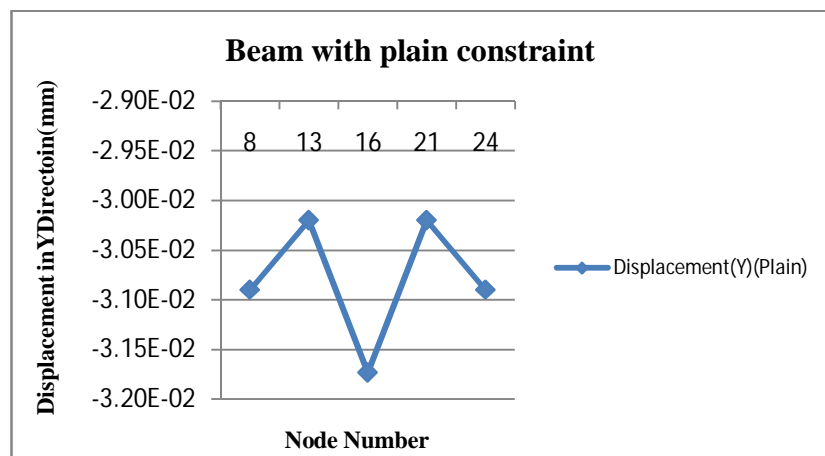
مدل	نوع المان	تعداد المان	تعداد گره	تعداد درجات آزادی
تیرهای دو سر ساده و دو سر گیردار	المان 8 گرهی	6	29	58

برای دو مثال ذکر شده در این مدل نمودارهای زیر برای جابجایی در جهات اصلی برای گره های 8، 13، 16، 21 و 24 و نیروهای عکس العمل تکیه گاهی برای گره های 1 و 25 در جداول 8-5، 9-5 آورده شده است.

نتایج برنامه الاستیک و پلاستیک برای تیر دو سر ساده به صورت زیر می باشد.

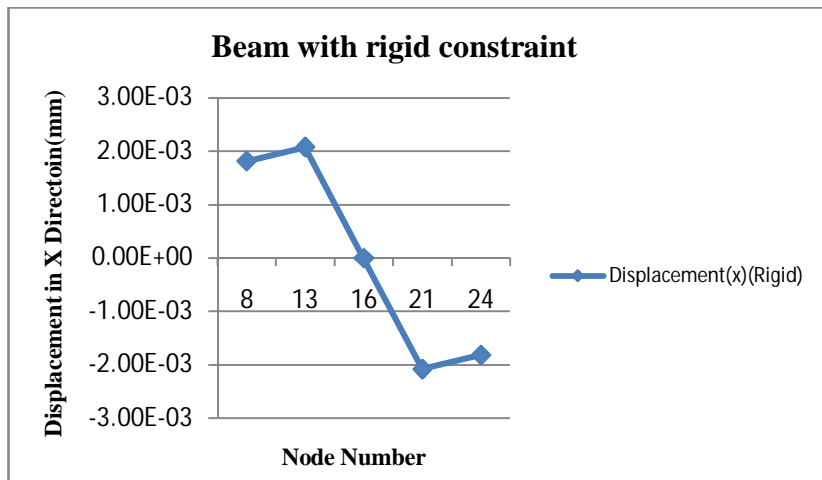


(الف)

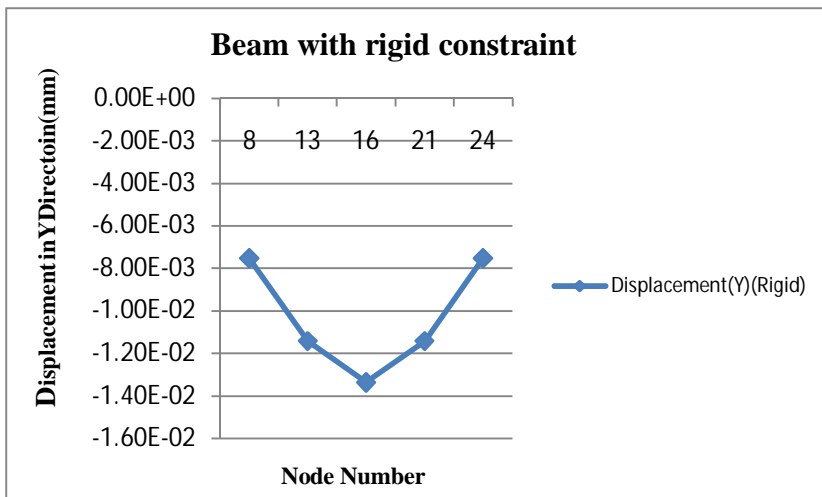


(ب)

شکل 5-12: نمودار جابجایی در جهات اصلی X و Y برای تیر دو سر ساده



(الف)



(ب)

شکل 5-13: نمودار جابجایی در جهات اصلی X و Y برای تیر دو سر گیردار

برای نیروهای عکس العمل تکیه گاهی خواهیم داشت.

جدول 5-8: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی برای تیر دو سر ساده

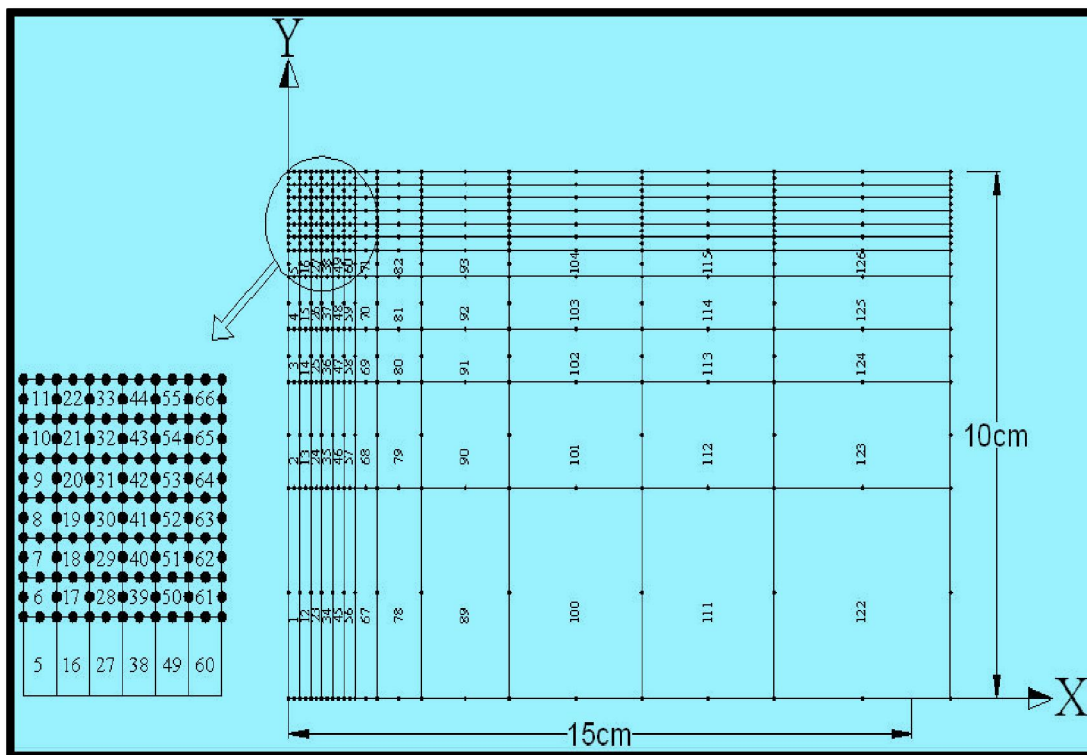
	Reaction Force(x)(Plain)	Reaction Force(y)(Plain)
1	1.14E+04	1.80E+04
25	-1.14E+04	1.80E+04

جدول 5-9: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی برای تیر دو سر گیردار

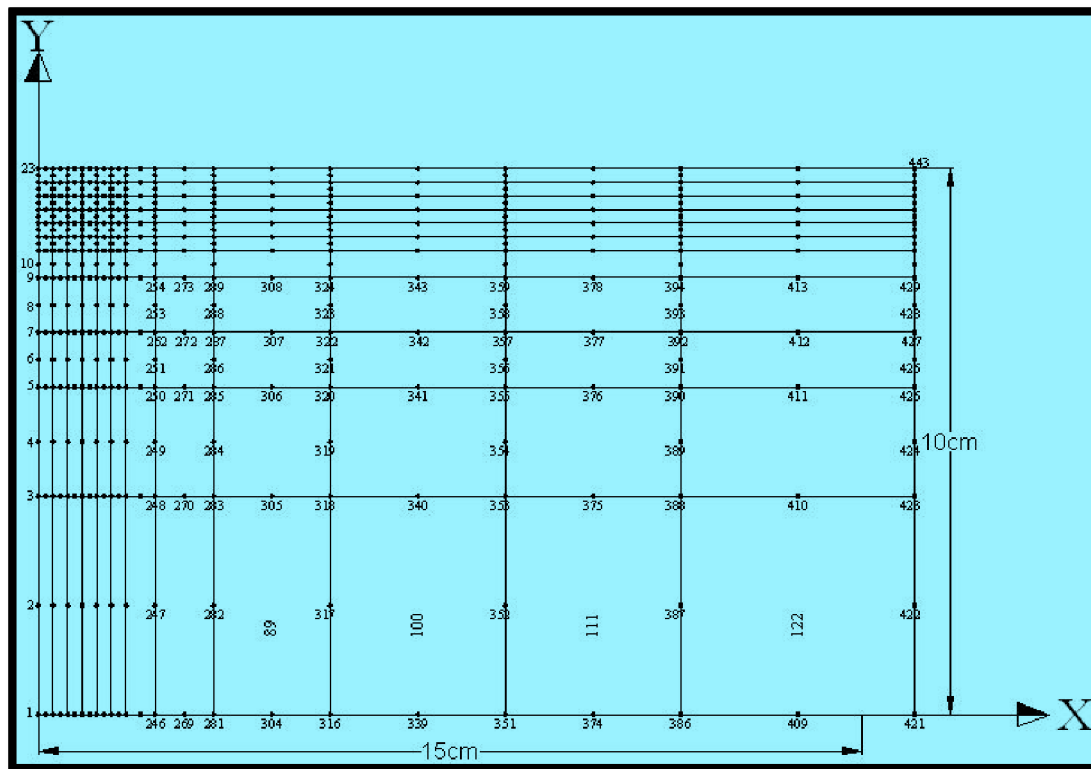
	Reaction Force(x)(Rigid)	Reaction Force(Y)(Rigid)
1	3.22E+03	1.99E+03
25	-3.22E+03	1.99E+03

4-1-5- مدل چهارم:

در مدل چهارم فونداسیونی به ابعاد 150×100 mm را که تحت نیروی فشاری است را در نظر می گیریم. لازم به ذکر است که ابعاد و نیروها در مقیاس کوچک آورده شده اند. این مدل در حالت کرنش صفحه ای تحلیل می شود. فونداسیون مورد نظر مطابق شکل زیر می باشد. شکل شماتیک از مدل و همچنین المان ها و گره ها در شکل شماره 5-14 نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل 5-14: معرفی مدل سوم، الف) نحوه نام گذاری المان ها، ب) نحوه نام گذاری گره ها

مشخصات مدل سوم مورد بررسی در جدول شماره 5-10 آمده است.

جدول 5-10: مشخصات فیزیکی فونداسیون

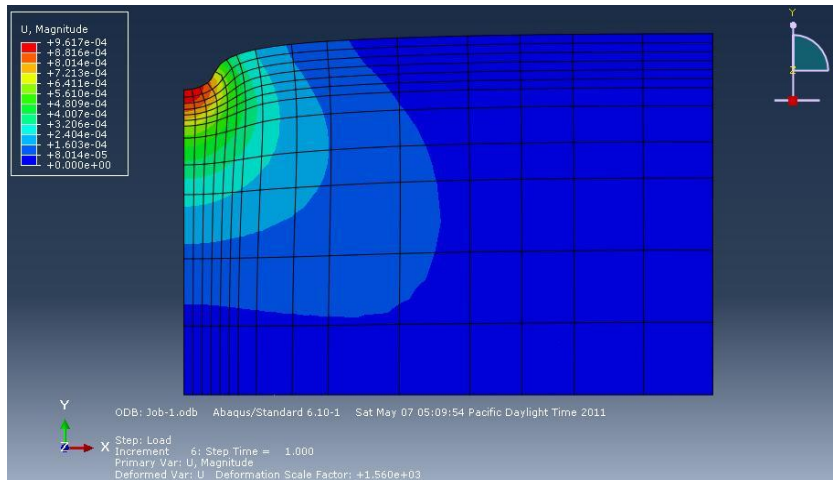
مدل	E			H
فونداسیون	$1 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$	0.325	4 Kg/cm^2	$E/2=0.5 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

جدول 5-11 اطلاعات مربوط به مش بندی مدل دوم را نشان می دهد.

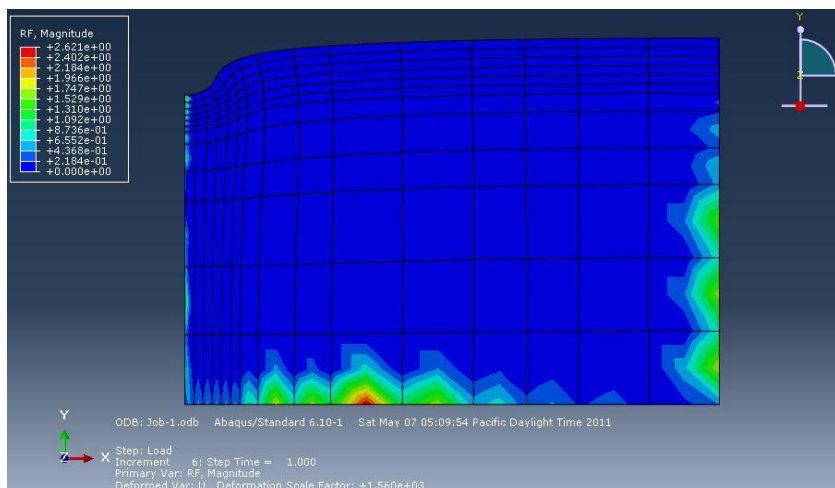
جدول 5-11: مشخصات مش بندی فونداسیون

مدل	نوع المان	تعداد المان	تعداد گره	تعداد درجات آزادی
فونداسیون	المان 8 گرهی	132	443	886

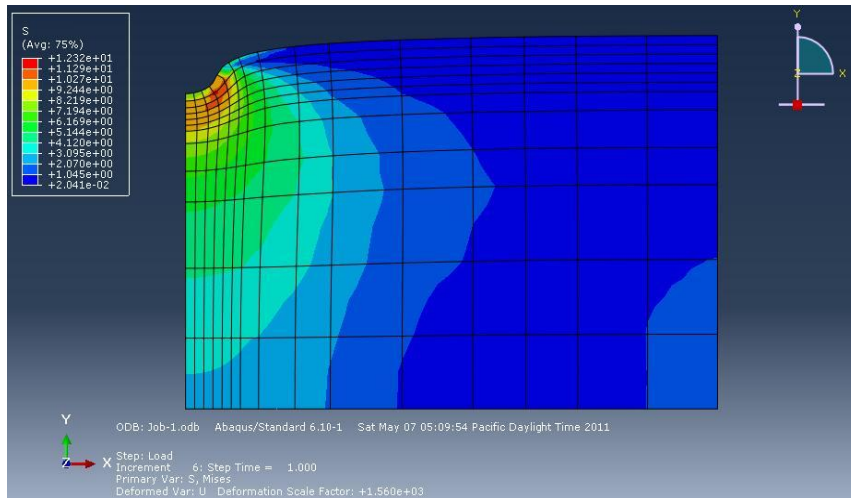
نحوه ی توزیع مقادیر جابجایی ها، نیروهای عکس العمل تکیه گاهی و همچنین مقادیر تنش ها در مدل ABAQUS در شکل 5-15 نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

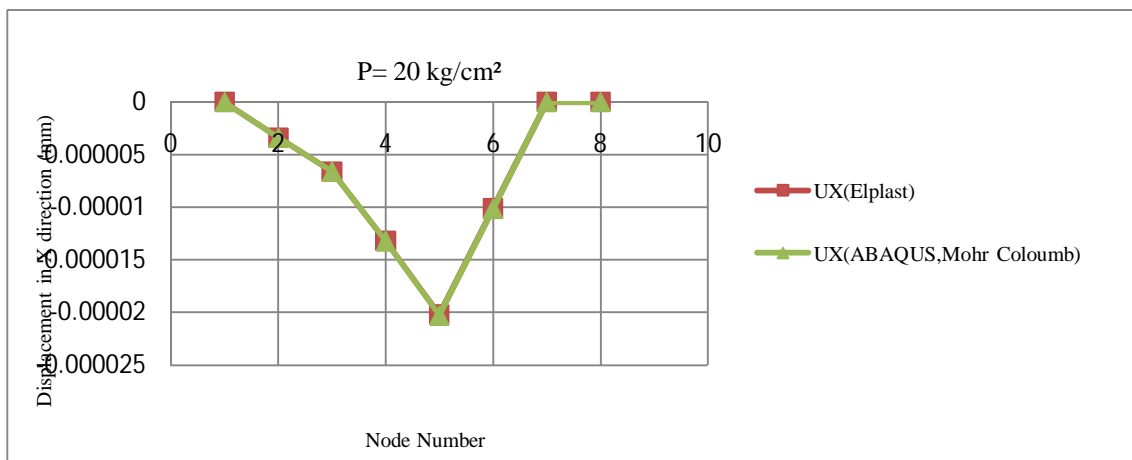


(ج)

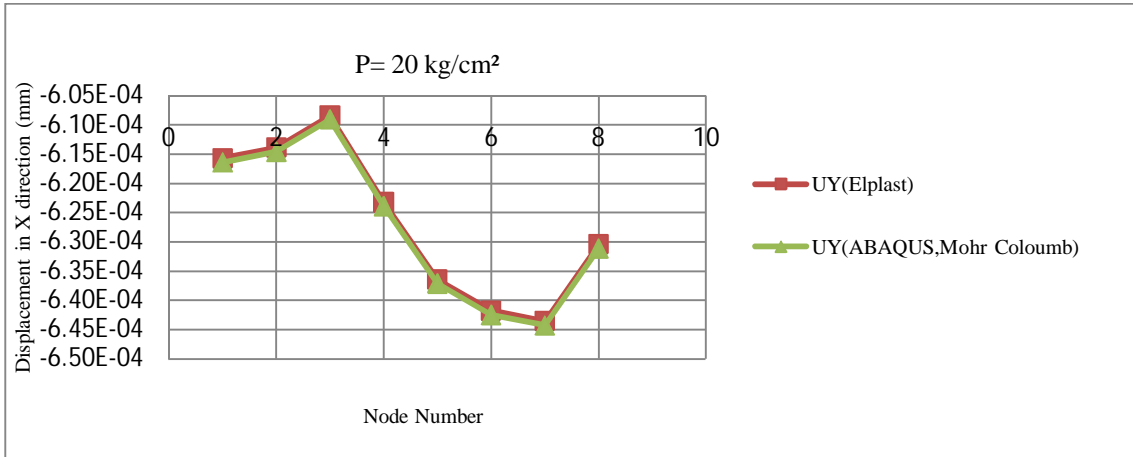
شکل 5-15: نتایج ABAQUS برای مدل سوم، الف) توزیع جابجایی، ب) توزیع نیروهای عکس العمل تکیه گاهی

ج) توزیع تنش

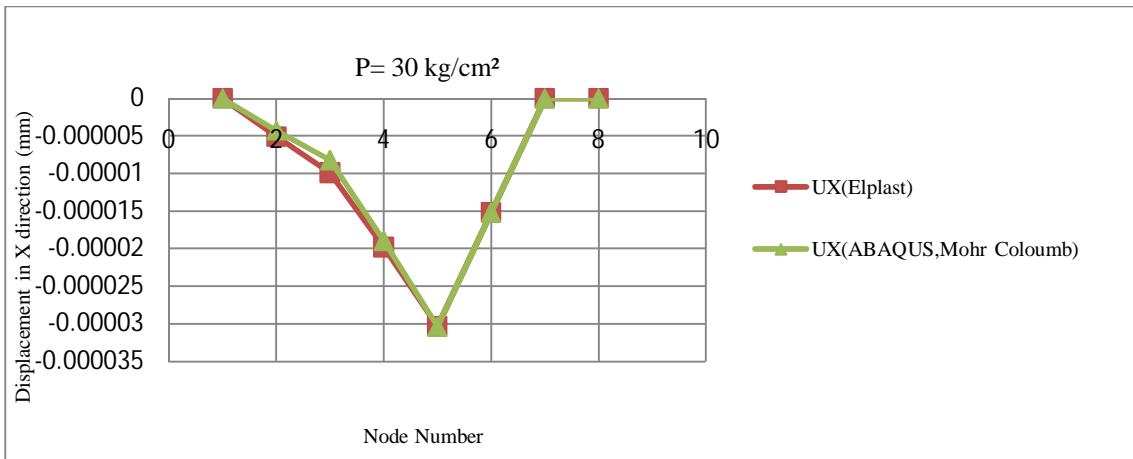
نمودارهایی که در شکل 5-16 آمده است، مقایسه جابجایی های دو برنامه را نشان می دهد. در این مدل، المان 10 را به طور تصادفی مورد بررسی قرار می دهیم. باید این نکته را خاطر نشان کرد، مطابق مدل های قبلی، در هر نمودار 8 نقطه که بیانگر گره های المان 10 هستند و به صورت پادساعتگرد شماره گذاری شده اند، مشخص می باشند.



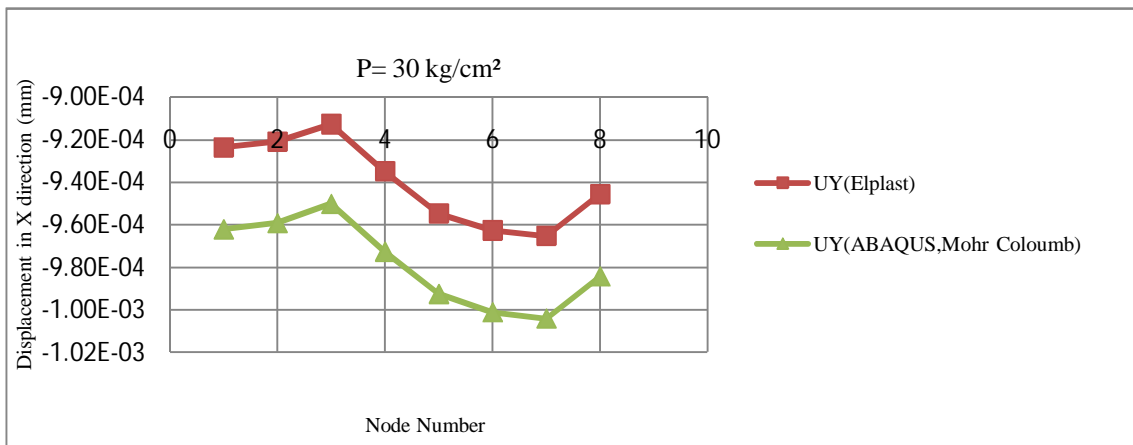
(الف)



(ب)



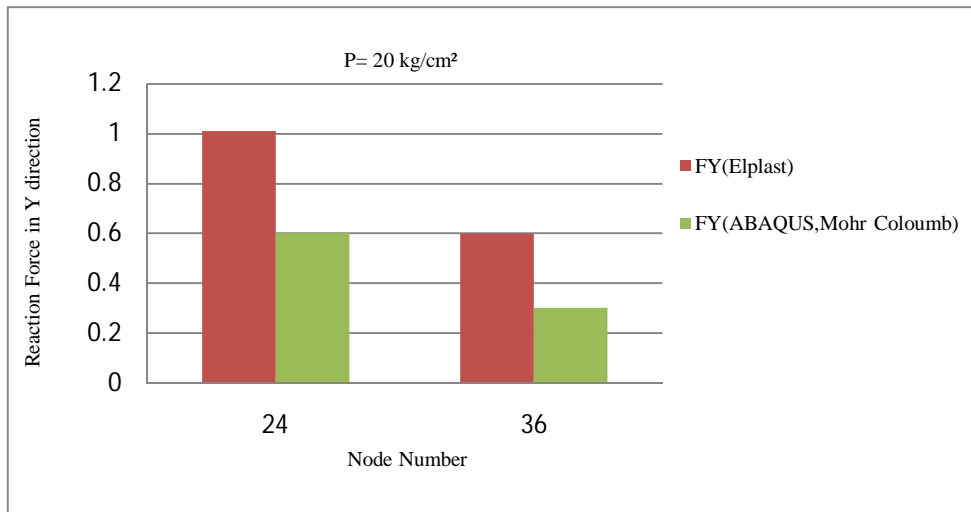
(ج)



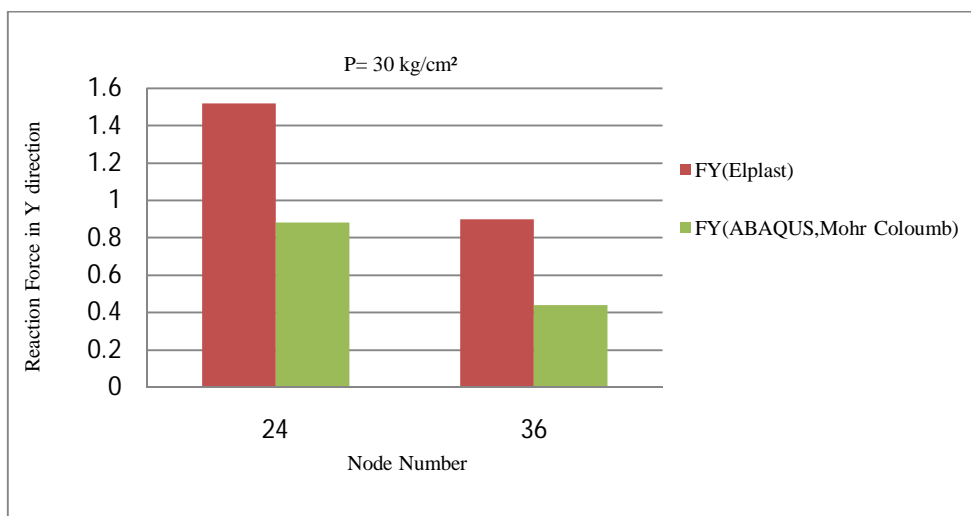
(د)

شکل 5-16: جابجایی گره های المان 10 در جهت های اصلی، الف و ب) بار 20 kg/cm^2 ، ج و د) بار 30 kg/cm^2

برای مقایسه نیروهای عکس العمل تکیه گاهی، دو گره به شماره های 24 و 36 از المان 1 انتخاب شده اند.



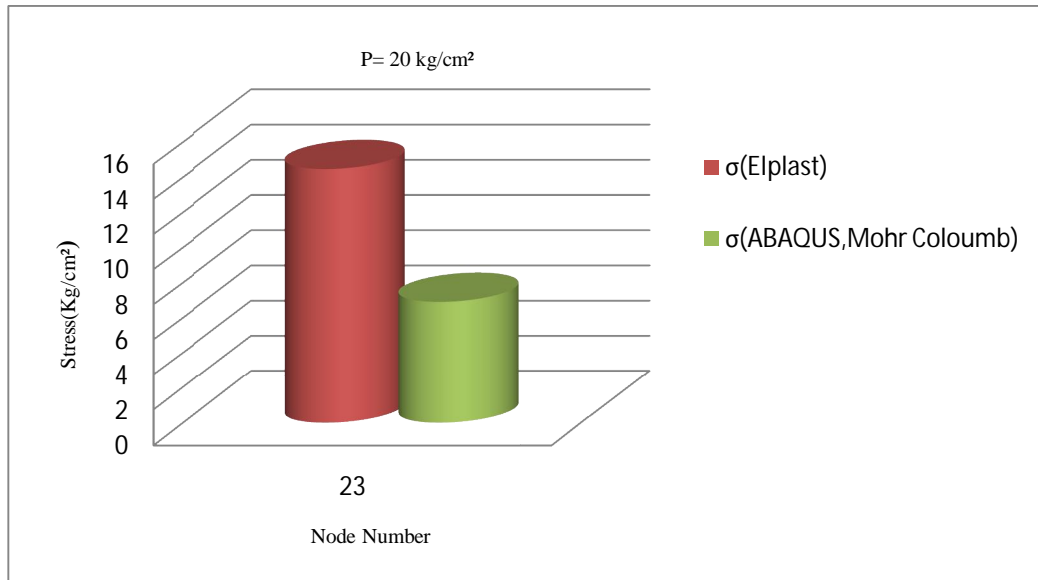
(الف)



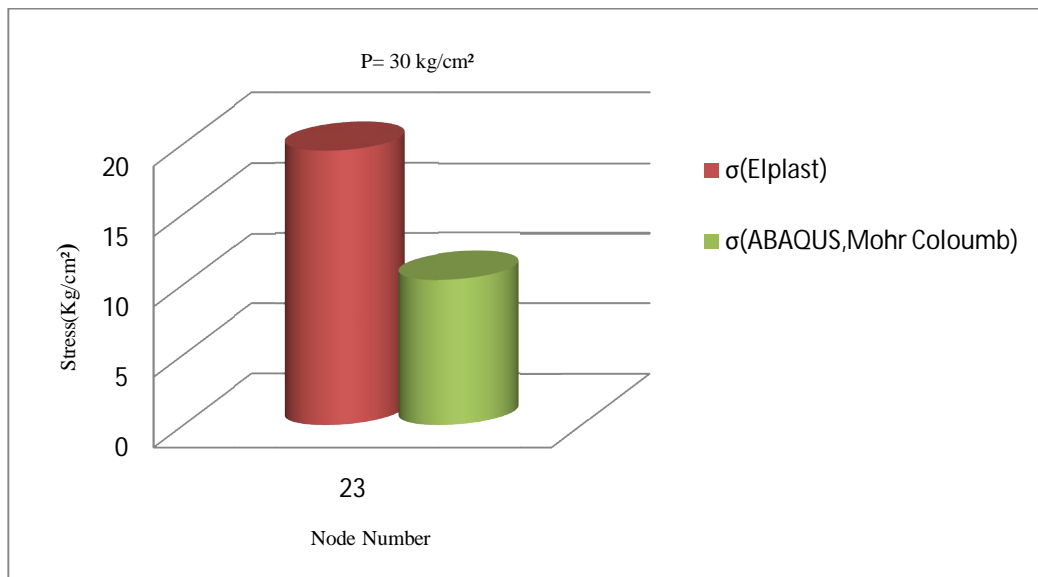
(ب)

شکل 5-17: نیروهای عکس العمل تکیه گاهی گره های 24 و 36 در جهت محور Y، الف) بار 20 kg/cm^2 ،
ب) بار 30 kg/cm^2

تنش ها را با در نظر گرفتن گره شماره 23 به عنوان یکی از گره هایی که از حد تسلیم خود خارج شده، انجام می دهیم. گره مورد نظر وارد ناحیه پلاستیک شده و در حالت سخت شوندگی قرار گرفته است.



(الف)



(ب)

شکل 5-18: تنش در گره 23، الف) بار 20 kg/cm^2 ، ب) بار 30 kg/cm^2

6- فصل ششم

نتیجه گیری

نتیجه گیری :

1. با مقایسه نتایج حاصل از آنالیز دو برنامه مشاهده می شود که اختلاف خروجی های برنامه مذکور که با زبان برنامه نویسی فرترن نوشته شده با برنامه ABAQUS، برای جابجایی گره ها در راستای محورهای مختصات، نیروهای عکس العمل تکیه گاهی و تنش در نقاط مختلف سازه مورد آنالیز بسیار نزدیک بهم بوده و این مقدار خطا کمتر از 0,1% می باشد.

2. دلیل این امر که چرا اختلاف مابین دو برنامه ناچیز می باشد، به شرح زیر است. این مقدار دقت به سبب عوامل مختلفی در برنامه و همچنین در برنامه اجزاء محدود ABAQUS می باشد که از آن جمله موارد می توان به موارد زیر اشاره کرد: انتخاب سطوح تسلیم مناسب که عبارتند از سطح تسلیم موهر-کولمب و همچنین سطح تسلیم دروکر-پراگر که در مقایسه با سطوح تسلیم قبل از خود نظیر سطوح تسلیم فون میسز و ترسکا دارای دقت بیشتری می باشد.

3. انتخاب مناسب المان ها برای تحلیل که در این مدل ها از المان های 8 گرهی استفاده شد و مشاهده کردیم که اختلاف ما بین دو برنامه نسبت به حالتی که از المان های 4 گرهی استفاده می شد، به شدت کاهش می یابد.

4. از عوامل تاثیرگذار دیگر می توان به اندازه المان ها اشاره کرد به طور مثال در مدل های 2 و 3 بدلیل آنکه بار به طور یکنواخت در سطح بارگیر توزیع شده است المان های با یک اندازه مورد استفاده قرار گرفته است ولی در مدل های 1 و 4 برای آنکه جواب ها با دقت زیادی ارائه شود در نقاطی که تمرکز تنش داشتیم از المان های با اندازه کوچکتر و هر چه از ناحیه تمرکز تنش فاصله می گیریم از المان های درشتتری استفاده شده است. نکته ذکر شده در هر دو برنامه لحاظ شده است.

5. این اختلاف که ما بین دو برنامه برای خروجی های مختلف می باشد و با افزایش بار خارجی این اختلاف زیاد می شود به سبب آنست که تعداد بیشتری از المان ها وارد ناحیه غیر خطی و در نتیجه قسمت سخت شوندگی خود می شوند و بدلیل آنکه قسمت سخت شوندگی برنامه به صورت خطی در نظر گرفته شده است در نهایت اختلاف آن بیشتر می شود.

پیشنهادات :

دقت جواب ها را باز هم می توان بهتر کرد که برای آنکه این امر میسر شود راه حل زیر پیشنهاد می شود.

1. استفاده از سطوح تسلیم با دقت بیشتر که از آن جمله می شود به سطح تسلیم دو رویه ای اشاره کرد که دارای عملکرد بسیار مناسبی می باشد و در عین حال بسیار پیچیده است.
 2. استفاده از معادلات غیر خطی برای ناحیه سخت شوندگی برای مثال می توان از منحنی های درجات بالاتر استفاده کرد که لازمه آن یافتن روابط مابین قسمت الاستیک و پلاستیک در این حالت می باشد و همچنین تعریف مناسب و دقیق روابط تئوری در برنامه می باشد.
 3. این برنامه همانطور که در پایان نامه اشاره شد برای حالت کرنش صفحه ای می باشد و برای آنکه قابلیت این برنامه افزایش پیدا کند پیشنهاد می شود که برای حالت های مختلفی از قبیل حالت تنش صفحه ای و خمش صفحه و غیره زیربرنامه های لازم نوشته و به برنامه اضافه گردد.
 4. در نهایت برای تکمیل این برنامه توصیه می شود که این برنامه را برای حالت 3 بعدی تعمیم داده شود که برای اجرایی شدن این امر می توان به بعضی از موارد آن اشاره کرد.
- تعریف تمامی روابط موجود برای حالت 3 بعدی، یافتن سطوح تسلیم مناسب، اضافه شدن بارهایی که در حالت 3 بعدی بوجود می آیند و غیره.

پیوست شماره A

زیربرنامه های مورد استفاده در برنامه الاستیک و پلاستیک:

زیر برنامه DIMEN:

وظیفه این زیر برنامه آماده کردن فضای مورد نیاز برای متغیرهایی است که در برنامه به کار می روند. فضای برخی از این متغیرها به صورت دینامیکی یعنی به اندازه مورد نیاز در مساله با ابعاد متفاوت تعریف شده اند. بنابراین اگر لازم باشد اندازه حداکثر ماتریس ها در حل مساله انتخاب شود فقط لازم است که بعد دستورات در برنامه اصلی (MAIN) یا زیر برنامه همراه با مجموع متغیرها در زیر برنامه DIMEN اصلاح می شود. در برنامه مورد نظر همه متغیرها به این روش تعریف می شوند.

زیر برنامه ZERO:

این زیر برنامه صرفا به منظور صفر کردن چندین آرایه بکار گرفته شده در برنامه استفاده شده است. این آرایه ها برای ذخیره نمودن داده های در طول فرایندهای تکرار و نموی به کار می روند. بنابراین لازم است در ابتدا صفر شوند.

زیر برنامه INVAR:

کار این زیربرنامه ارزیابی و محاسبه توابع و مستقل های تنشی گوناگون است که در شروع یا ادامه تغییرشکل پلاستیک برای دو معیار به کار رفته در این برنامه، مورد استفاده قرار گرفته اند.

جدول 1-A: مقادیر ثابت ها برای دو الگوی ارائه شده

تنش تسلیم یک محوری	سطح تنش موثر	تابع تسلیم
$C \cos \varphi$	$\frac{1}{3} J_1 \sin \phi + (J_2)^{\frac{1}{2}}$	موهر - کولمب
k	$\alpha J_1 + (J_2)^{\frac{1}{2}}$	دراگر - پراگر

تغییر شکل پلاستیک در هر نقطه ای که باشد، بستگی به سطح تنش آن نقطه داشته که در سومین ستون جدول آمده است. برای اینکه جریان پلاستیک اتفاق بیافتد، سطح تنش باید به مقدار داده شده در ستون آخر جدول 1-A برسد. این مقدار برای سطوح تسلیم موهر - کولمب و دراگر - پراگر برابر یک مقدار معادل بوده که به ترتیب توسط عبارات مستقل تنش در روابط 55-4 و 56-4 نشان داده شده اند. تمام مقادیر داده شده در ستون آخر جدول 1-A می تواند تابعی از پارامتر سخت شوندگی k باشد.

زیر برنامه INVAR صرفاً مولفه های تنش موثر یا مستقل های تنش را محاسبه کرده و با تابع مناسب در سومین ستون جدول بسته به اینکه کدام معیار تسلیم بکار رفته باشد ارزیابی می کند. انتخاب معیار تسلیم توسط پارامتر NCRIT که توسط زیر برنامه NCRUT وارد می شود امکان پذیر است. انتخاب های ممکن به شرح زیر است:

جدول 2-A: انتخاب های ممکن برای NCRIT

NCRIT=1	حد تسلیم موهر - کولمب
NCRIT=2	حد تسلیم دراگر - پراگر

زیر برنامه YIELDF:

وظیفه این زیربرنامه تعیین بردار a است که در رابطه 4-69 تعریف شده است. بردار a توسط رابطه 4-60 ارائه شده و C_1 ، C_2 ، C_3 در جدول 4-1 برای معیارهای تسلیم متفاوت بیان شده است و بردارهای a_1 ، a_2 ، a_3 توسط روابط 4-70، 4-71، 4-72 برای مسائل دو بعدی ارائه می شوند.

زیر برنامه FLOWPL:

هدف اصلی این زیربرنامه تعیین بردار d_D طبق 4-75 یا 4-76 است، که به نوع تحلیل بکار گرفته شده بستگی دارد. برنامه موجود فقط یک فرم خطی از سخت شوندگی کرنشی را در نظر می گیرد. در این حالت عبارت H' در رابطه 4-17 یک مقدار ثابت بوده که به عنوان ویژگی رفتاری ماده تلقی می شود.

زیر برنامه STIFFP:

این زیربرنامه وظیفه ارزیابی ماتریس سختی برای هر جزء را به عهده دارد و با آنچه در مورد الاستیک خطی وجود دارد فرق می کند. فقط در این برنامه ماتریس الاستیسته D_e (حداقل برای روش سختی مماسی) با ماتریس الاستو پلاستیک D_{ep} که توسط رابطه 4-36 تعریف شد جایگزین می شود. این زیربرنامه فقط وقتی که سختی جزء مجدداً بایستی محاسبه شود، بکار گرفته شده و توسط متغیر KRESL که در زیربرنامه ALGOR تعریف شد کنترل می شود. در هر حال سختی جزء باید در اولین مرحله از اولین افزایش بار محاسبه گردد. در این حالت رفتار الاستیک می باشد. هر بار دیگر که این زیربرنامه فعال می شود، سختی ها باید مجدداً محاسبه شده تا تغییر شکل های پلاستیک مواد بدست آمده و در نتیجه ماتریس D_{ep} بکار برده می شود. جدا از این تغییرات روش تنظیم سختی جزء مانند روش بکار رفته در مواد الاستیک است.

زیر برنامه LINEAR:

هدف از این زیربرنامه صرفاً تعیین تنش‌ها از جابجایی‌های بدست آمده با فرض رفتار الاستیک خطی می‌باشد. این زیربرنامه برای محاسبه نیروهای پسمانده که در زیربرنامه بعدی توضیح داده خواهد شد بکار می‌رود.

زیر برنامه RESIDU:

وظیفه این زیربرنامه محاسبه نیروهای گرهی معادل استاتیکی برای ارضا کردن پاسخ‌های تنش در شرائط الاستو پلاستیک است. از مقایسه نیروهای گرهی معادل با نیروهای اعمال شده، می‌توان نیروهای پس ماند را طبق رابطه 4-4 به دست آورد.

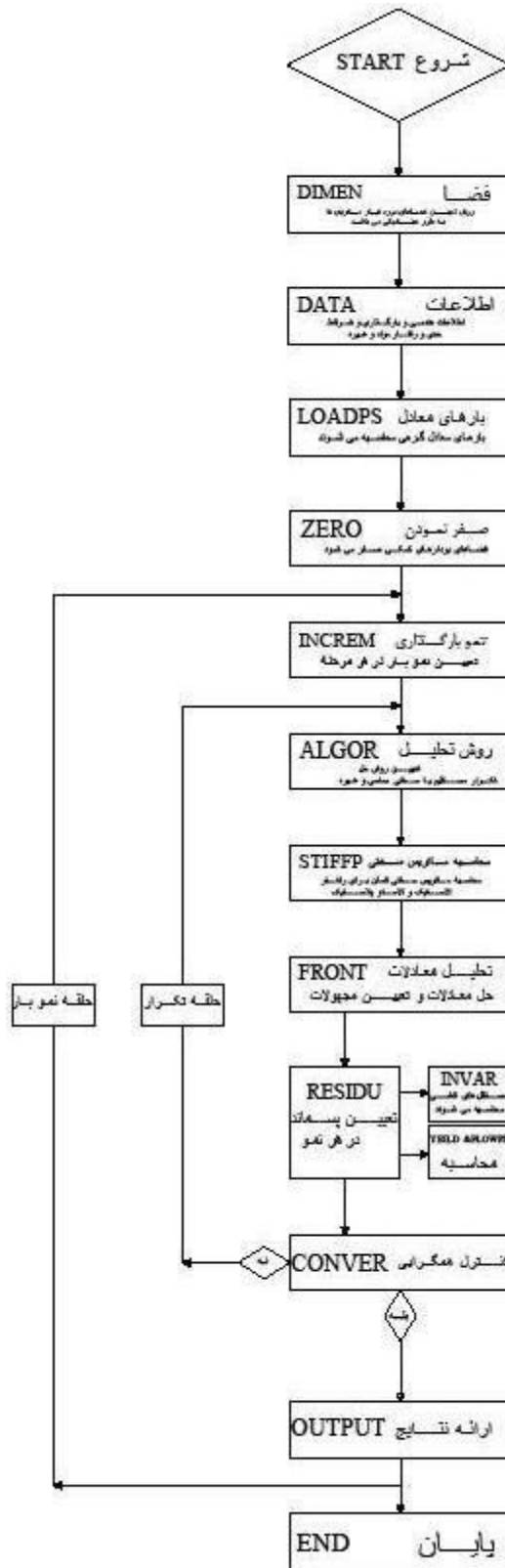
زیر برنامه OUTPUT:

این زیربرنامه نتایج خروجی را در یک تناوب که توسط پارامترهای خروجی (1) NOUPT، (2) NOUPT تعیین می‌شود. همچنین در این زیربرنامه تنش‌های اصلی و جهت آنها به کمک روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad 1-A$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad 2-A$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad 3-A$$



شکل A-1: چرخه محاسبات در برنامه ارتجاعی - خمیری دو بعدی

مراجع

دکتر اسپنسر جی سی، (1363) "مقدماتی از پلاستیسیته"، ترجمه اردشیر جهانشاهی، چاپ دوم، انتشارات امیرکبیر، تهران.

دکتر اون دی. ارجی، دکتر هینتون ای، (1381) "کاربرد روش اجزاء محدود در نظریه خمیری"، ترجمه دکتر سید امیرالدین صدرنژاد، چاپ اول، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

دکتر جانسون و، ملور پ، (1378) "پلاستیسیته مهندسی"، ترجمه کارن ابری نیا، چاپ دوم، انتشارات یا مهدی وابسته به گروه صنایع و معادن، تهران.

دکتر چن، وای، فا، (1384) "تئوری الاستیسیته و مدلسازی مواد"، ترجمه دکتر محمود یحیایی، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران.

دکتر رحیمیان م، دکتر اسکندری قادی م، (1377) "مکانیک محیط های پیوسته"، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه تهران، تهران.

دکتر سلاجقه ج، (1388) "تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته، مباحث ویژه در مکانیک جامدات و پلاستیسیته"، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان.

Armen.H.Jr , Pifko.A, and Levine.H.S, (1971), "Finite element analysis of structures in the plastic range", N.A.S.A. Contractor Report.

Bland.D.R, (1957), J. Mech. Phy. of Solids 6,71-78, "The associated flow rule of plasticity".

Booth.A.D, (1966), "Numerical Methods", Butterworth, London.

Chen.W.F, Mizuno.E, (1990) "Nonlinear Analysis in Soil Mechanics", Theory and Implementation, Elsevier science.

Chen.W.F, F.Saleeb.A,(1982) "Constitutive Equations for Engineering Materials", John Wiley & Sons,Inc.

Desai.C.S. and Abel.J. F., (1972), "An Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand Reinhold, New York.

Hinton.E ,and Owen.D.R.J., (1977), "Finite Element Programming", Academic Press.

- Hinton.E ,and Owen.D.R. J, (1980), "*Finite Element in plasticity*", Pineridge Press, Swansea, U.K.
- Hinton.E , and Owen.D.R. J., (1979), "*An Introduction to Finite Element Computations*", Pineridge Press, Swansea, U.K.
- Hill.R , (1950), "*The Mathematical Theory of Plasticity*", Oxford University Press.
- Hodge.P.G ,and White.G.N., (1950), "*A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity*" J. Appl. Mech.
- Hoffman.O , and Sachs.G, (1953), "*Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*",McGraw-Hill.
- Koiter.W. T. (1953), "*Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with singular yield surface*", Quart. Appl. Math.
- Krieg.R.D, and Krieg.D.B, (1977) J. Pressure Vessel Technology,99,4, 510-515."*Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic mode*", Trans. ASME.
- Lubliner.J, (2008), "*Plasticity theory*" , Pearson Education, Inc.
- Malvern.L.E, (1969) "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", Prentice-Hall, Inc.
- Mendelson.A, (1968), "*Plasticity*" Theory and Application (Mechanics Engineering).
- Nayak.G.C ,and Zienkiewicz.O.C, (1972), Journ. of the Struct. Div. Proc. of A.S.C.E , pp 949-953, "*Convenient form of stress invariants for Plasticity*".
- Owen.DRJ, D.Perić, (1998), "*Computational Methods for Plasticity*" Theory and Applications.
- Schreyer.H.L, Kulak.R.F, and Kramer.J.M, (1979), J. Pressure Vessel Tecknology,101,3, 226-234, "*Accurate numerical solutions for elastic-plastic models*", Trans. ASME.
- Seegerlind.L.J, (1976), "*Applied Finite Element Analysis*", John Wiley, New York.
- Yamada.Y, Yoshimura.N, and Sakurai.T. (1968). Int. J. Mech. Sci. 10, 343-354, "*Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by Finite Element Method*".

Zienkiewicz.O.C , Valliappan. S, and King.I.P., (1969), Int. J. Num. Meth. Engng. 1, 75-100, “*Elasto-plastic solutions of engineering problems; Initial stress finite element approach*”.

Zienkiewicz.O.C , (1977), “*The Finite Element Method*”, McGraw-Hill

Zienkiewicz.O.C , and Hinton.E , (1976), J. of the Franklin Institute, 302, Nos. 5 and 6, “*Reduced integration, function smoothing and non-conformity in finite element analysis (with special reference to thick Plates)*”.

Zienkiewicz.O.C , (1977), “*The Finite Element Method*”, McGraw-Hill

Zienkiewicz.O.C ,and Hinton.E, (1976), J. of the Franklin Institute, 302, Nos. 5 and 6, “*Reduced integration, function smoothing and non-conformity in finite element analysis (with special reference to thick Plates)*”.

Abstract

The object of this thesis is to describe the theoretical aspect of hardening plasticity and to develop a finite element code to solve nonlinear problems. This dissertation is intended to be more practical and therefore focuses on the computer implementation of nonlinear finite element schemes.

Nonlinearities arise in engineering situations from several sources. Nonlinear material response can result from elasto-plastic material behavior or from hyper-elastic effects of some form. Each of these nonlinearities may occur in a variety of structural types such as two- or three-dimensional solids, frames, plates or shells.

For this reason, elastic and the plastic relations thoroughly explained, furthermore the various yield criterions discussed in depth. Then the nonlinear solution methods are presented and finally a program for solving the elastic-plastic problems are developed. To verify the program, some conventional examples are analyzed and then the results are compared with a commercial finite element program.

Key words : Plasticity , Hardening , Numerical Methods , Finite Element Analysis .



Shahrood University Of Technology

Department of Civil Engineering

A Thesis Submitted for the Degree of Master Science

In Structural Engineering

Hardening Plasticity with Finite Element Analysis

Ramin Vaghei

Supervisor :

Dr. Reza Naderi

Advisor :

Dr. Behroz Hasani

June 2011