بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فنی و مهندسی

گروه عمران

توسعه فرمولبندی روش اسپلاینها در تحلیل دینامیکی مسایل دو بعدی الاستیک و تهیه کد نرم افزاری

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:

مهندس ناصر ظریف مقدم

دانشجو:

احسان ژیانی عیدگاهی مشهد

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهار ۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :فنی و مهندسی

گروه :عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای احسان ژیانی عیدگاهی مشهد

تحت عنوان: توسعه فرمولبندی روش اسپلاینها در تحلیل دینامیکی مسایل دو بعدی الاستیک و تهیه کد نرم افزاری

در تاریخ ۱۳۸۹/۳/۳ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ....

مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : بهروز حسنی		نام و نام خانوادگی : ناصر ظریف مقدم	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : رضا نادری		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی : علی کیهانی			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به پدر و مادرم

تشکر و قدردانی

از جناب آقای دکتر بهروز حسنی به عنوان استاد راهنما و آقای مهندس ظریف مقدم به عنوان استاد مشاور که در انجام این کار کمک شایانی به من کردند تقدیر و تشکر می‌کنم.

همچنین از کلیه عزیزانی که به هر نحوی در به ثمرنشستن این پایان نامه مرا یاری نمودند تشکر مینمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

بهار ۱۳۸۹

چکیده پایان نامه

در این پایان نامه تحلیل دینامیکی مسائل الاستیک دوبعدی به روش ایزوژئومتریک انجام شده است. در واقع در این پایان نامه در ابتدا معادلات مورد نیاز برای بدست آوردن ماتریس جرم تولید شده‌است. همچنین در اینجا به مقایسه روشهای اجزای محدود و ایزوژئومتریک پرداخته شده است. از دیگر کارهایی که مورد بررسی قرار گرفته، تاثیر افزایش نقاط کنترلی و افزایش درجه منحنی اسپلاین ها در بهبود جوابهای بدست آمده می باشد. بعلاوه با توجه به اینکه در تحلیل دینامیکی از روش نیومارک استفاده شده است، اثرات تغییر پارامترهای α و γ نیز به دو روش اشاره شده مورد بررسی و مقایسه قرارگرفته‌است.

کلمات کلیدی: تحلیل دینامیکی، اسپلاین‌ها، روش نیومارک، ایزوژئومتریک

فهرست مطالب

فصل اول ۱
مقدمه ۱
۱-۱مقدمه ۲
۱-۲ روشهای تحلیل سازه ها ۳
۱-۲-۱ تاریخچه ۳
فصل دوم ۶
حل معادله تعادل در تحلیل دینامیکی ۶
۲-۱ مقدمه ۷
۲-۲ مسائل مطرح در تحلیل دینامیکی ۷
۲-۳ تحلیل دینامیکی ۸
۲-۴ حل گام به گام روش نیومارک ۱۰
فصل سوم ۱۲
روش ایزوژئومتریک ۱۲
۳-۱ مقدمه ۱۳
۳-۲ مزایا و معایب ۱۳
۳-۳ سابقه موجود ۱۴
۳-۴ اصول و فرضیات ۱۴

۳-۵ منحنیها و سطوح اسپلاین وNURBS ۱۵

۳-۵-۱ مقدمه ۱۵

۳-۵-۲ تعریف توابع پایه B-Spline و خواص آن ۱۶

۳-۵-۳ برخی از خواص مهم توابع پایه B-Spline ۱۷

۳-۵-۴ مشتقات توابع پایهB-Spline ۱۸

۳-۵-۵ منحنیهای B-Spline ۱۹

۳-۵-۶ برخی از خواص منحنیهای B-Spline ۲۰

۳-۵-۷ سطوح B-Spline ۲۱

۳-۵-۸ منحنیها و سطوحNURBS ۲۲

۳-۵-۹ تکنیکهای مهم NURBS ۲۳

۳-۵-۱۰ مزایای مهم NURBS ۲۳

۳-۶ روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود ۲۴

فصل چهارم ۲۷

حل معادلات دیفرانسیل با روش اسپلاین ۲۷

۴-۱ مقدمه ۲۸

۴-۲ بدست آوردن فرمولبندی روش اسپلاین دو بعدی ۲۸

فصل پنجم ۴۵

حل چند مثال ۴۵

۵-۱ حل مثال ۴۶

فصل ششم ۶۲

نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۶۲

مراجع ۶۵

فهرست جداول

جدول ۳-۱ روشهای مختلف خانواده نیومارک...۹

جدول ۳-۲ مقایسه روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک...۲۵

فهرست اشکال

شکل ۳-۱ توابع درجه ۳ گرفته شده از ۱۸

شکل ۳-۲ مشتق توابع درجه ۳ گرفته شده از ۱۹

شکل ۳-۳ الف درونیابی لاگرانژ برای داده های ناپیوسته........ ۲۶

شکل ۳-۳ ب میرایی تغییرات برای داده های ناپیوسته با تکنیک نربز........ ۲۶

شکل ۵-۱ صفحه طره ای تحت اثر بار ثابت........ ۴۶

شکل ۵-۲ نمودار تغییرمکان-زمان انتهای آزاد صفحه مثال ۱........ ۴۷

شکل ۵-۳ نمودار تغییرمکان-زمان انتهای آزاد صفحه مثال ۲........ ۴۸

شکل ۵-۴ صفحه طره ای تحت اثر بار هارمونیک........ ۴۸

شکل ۵-۵ نمودار تغییرمکان-زمان مثال ۳........ ۴۹

شکل ۵-۶ نمودار تغییرمکان-زمان مثال ۴........ ۵۰

شکل ۵-۷ صفحه طره ای مثال ۵........ ۵۱

شکل ۵-۸ نمودار تغییرمکان-زمان مثال ۵- جرم سازگار........ ۵۲

شکل ۵-۹ نمودار تغییرمکان-زمان مثال ۵- جرم متمرکز........ ۵۳

شکل ۵-۱۰ مقایسه نمودارهای تغییرزمان-مکان با شبکه بندی مختلف بروش اجزای محدود........ ۵۴

شکل ۵-۱۱ نمودار تغییرمکان-زمان مثال ۶........ ۵۵

شکل ۵-۱۲ نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم سازگار..................................۵۶

شکل ۵-۱۳ نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم متمرکز.................................۵۷

شکل ۵-۱۴ نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم سازگار..................................۵۸

شکل ۵-۱۵ نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم متمرکز.................................۵۹

شکل ۵-۱۶ مقایسه دو روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود با خود و یکدیگر به کمک پارامترهای آلفا و گاما- جرم سازگار مثال ۸...۶۰

شکل ۵-۱۶ مقایسه دو روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود با خود و یکدیگر به کمک پارامترهای آلفا و گاما- جرمتمرکز مثال ۸...۶۱

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

تحلیل سازه در علوم مهندسی از اولین گامهای شناخت و ارزیابی صحیح مسایلی می باشد که در عمل با آن مواجه می شویم .این تحلیل به طور خاص در مکانیک سازه ها منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می شود که در حالت کلی دارای پیچیدگی بسیار زیادی می باشد .لذا باید به دنبال روشهایی جهت حل این معادلات باشیم تا بتوانیم شناخت و علم خود را توسعه بدهیم .در دهه های گذشته روشهای بسیاری برای تحلیل مسایل مهندسی و حل مشکلات پیش روی محققین ارایه شده است که برخی از مشهورترین آنها روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته ای از روشها با عنوان روشهای بدون شبکه می باشند .این روشها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و رفع مشکلات روشهای پیش از خود ارایه شده اند. اما وجود دلایلی سبب شده است تا هنوز خلاء بزرگی در مسیر پر فراز و نشیب محققین در تحلیل مسایل پیش رویشان وجود داشته باشد. برخی از این دلایل عبارتند از:

ضعف روشها در تولید دقیق شکل مسایل، عدم اقناع دقیق شرایط مرزی، مواجهه با مسایل پیچیده‌تر، نیاز به تولید شبکه و مسایل و مشکلات آن، پیچیده بودن برخی از الگوریتمهای مورد استفاده و غیره.

امروزه روشهای قدرتمندی برای حل مسایل در اختیار محققین قرار دارد. شاید بتوان گفت که اصلی-ترین دلیل پیشرفت و توانایی این روشها، توسعه علم کامپیوتر در بعد سخت افزاری و نر م افزاری می-باشد. بدون وجود کامپیوترهای قدرتمند هیچگاه قادر به حل دستگاه های معادلاتی که گاه دارای میلیونها مجهول بوده و به عنوان خروجی روشهای کنونی ارایه می شوند نخواهیم بود. لذا اغلب ملاحظه می‌شود که کیفیت، هزینه و زمان حل در روشهای موجود، ارتباط مستقیم با توانایی های کامپیوتر مورد استفاده دارد.

۱-۲ روشهای تحلیل سازه ها

۱-۲-۱ تاریخچه

تحلیل سازه ها با استفاده از روش اجزای محدود در دهه ۱۹۵۰ میلادی مرسوم شده و با تحلیل سازه های ساخته شده از تیرها شروع به گسترش و پیشرفت نمود. با گسترش تحقیقات و رفع برخی از معایب این روش در اواسط دهه ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ میلادی، تعداد زیادی از نرم افزارهای آکادمیک و تجاری بر مبنای این روش تهیه گردید. این نرم افزارها همگی بر مبنای دانشی بودند که تا آن زمان بدست آمده بود. محدودیتهای نرم افزاری و سخت افزاری کامپیوترها نیز در آن زمان نیز سبب ایجاد و حل نشدن برخی از مشکلات بود. اما پس از این زمان پیشرفتهای قابل توجهی در توسعه و نفوذ این روش به حوزه‌های دیگر علم اتفاق افتاد، اما با این وجود برخی از محدودیتهای این روش باقی ماند که از جمله می توان به نیاز روش اجزای محدود به المانها و گره‌ها نام برد. با وجود تحقیقات بسیار زیادی که بر روی روشهای تولید شبکه اجزای محدود انجام پذیرفت ولی تا به امروز هنوز یکی از جدی‌ترین مشکلات این روش می باشد. حداقل اشکال تولید شبکه مدت زمانی است که برای انجام آن صرف می شود که به طور میانگین حدود هشتاد درصد زمان حل مساله را به خود اختصاص می‌دهد(۱). ایجاد روشهای بدون شبکه در سالهای بعد از ۱۹۹۰ میلادی نیز به خاطر رفع این مشکلات شروع گردید که باز هم در آنها نیاز به تولید شبکه‌ای از گره‌ها وجود داشت. در خلال سالهای ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ میلادی تکنولوژی جدیدی توسعه یافت که عبارت بود از بیان جدیدی از منحنیها و سطوح و در حدود سال ۱۹۷۴ مفهوم توابع پایه اسپلاینها معرفی گردید(۲). در این روش منحنی‌ها و سطوح به هر شکل دلخواهی با استفاده از چندین تکه منحنی و سطح ساخته می‌شدند که پیوستگی بین این قطعات نیز به طور خودکار برقرار می‌گردید. با توجه به اینکه در این روش به محاسبات عددی نیاز است، لذا

پیشرفت نرم افزاری و سخت افزاری کامپیوترها به همراه کار بر روی تئوریهای این روش توسط محققین سبب توسعه بیشتر این روش گردید.

ایده استفاده از توابع پایه‌ای اسپلاین به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود در تحلیل مسائل مهندسی توسط Hollig و Kagan در سالهای ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ معرفی و تا حدودی توسعه یافت(۳،۴،۵). در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز که از توسعه توابع اسپلاین بدست می‌آیند توسط Hughes تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت. از سال ۲۰۰۵ به بعد Hughes و همکارانش سعی در توسعه این روش داشته‌اند که چندین مقاله نیز در این خصوص منتشر شده است (۶،۱۱،۱،۱۰،۹).

روش اجزاء محدود برای حل مسائل مهندسی در سالهای ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ بوجود آمد(۱۲). شاید بتوان گفت در این دوره مهندسی هوافضا بیشترین نقش را در پیشرفت این روش ایفا نمود. در پایان دهه ۱۹۶۰ اولین برنامه های کامپیوتری تجاری این روش مثل NASTRAN و بعدها برنامه هایی مانند ANSYS ، SAP، RISA و بسیاری دیگر از برنامه ها پدید آمدند. متعاقبا روش اجزاء محدود به سرعت در بسیاری از شاخه های مهندسی گسترش یافت بطوریکه امروزه بسیاری برنامه تجاری از این روش در دسترس می باشد.

برای غلبه بر این مشکلات و با الهام گرفتن از پیشرفتهای بدست آمده در زمینه مدلسازی هندسی و طراحی بوسیله کامپیوتر[۱] ایده تحلیل ایزوژئومتریک توسط Hughes در سال ۲۰۰۵طرح گردیده است(۱). در این روش با استفاده از خواص توابع پایه ای اسپلاین[۲] و نربز[۳] در تعریف دقیق منحنیها و سطوح، از این توابع به عنوان توابع درونیابی و تقریب سازی استفاده می شود. جدای از انعطاف پذیری این توابع در تقریب توابع با گرادیانهای بالا، استفاده از این توابع بهبود حل را به مراتب ساده

---

[۱]CAD (Computer Aided Design)

[۲]B-Spline Basis Functions

[۳]NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)

تر می سازد. بعنوان مثال سادگی ارتقاء درجه چندجمله ای تابع پایه، سهولت افزایش تعداد گره ها[۱] در بردار گره[۲]، افزایش تعداد نقاط کنترلی[۳] و یا تغییر محل آنها از جمله موارد افزایش دقت حل در این روش می باشند.

نحوه نگارش پایان نامه بدین صورت است که در فصل دوم تحلیل دینامیکی بیان می‌گردد و در فصل سوم به توضیح روش ایزوژئومتریک و مقایسه آن با اجزای محدود پرداخته میشود. در فصل چهارم نحوه بدست آوردن فرمولهای روش اسپلاین ها ارائه می شود و در فصل پنجم مثالهایی ارائه می شود تا توانایی این روش سنجیده شود. در فصل ششم به بیان نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات می پردازیم.

---

[۱] Knots

[۲] Knot Vector

[۳] Control Points

فصل دوم

حل معادلات تعادل در تحلیل دینامیکی

۲-۱ مقدمه

اگر بارگذاری سازه تابع زمان باشد، آنگاه پاسخ سازه نیز به زمان وابسته خواهد بود. محاسبات نشان می دهد اگر بارگذاری به صورت متناوب و با فرکانس کمتر از یک چهارم کمترین فرکانس طبیعی ارتعاش سازه باشد، پاسخ سازه به زحمت از پاسخ استاتیکی بیشتر می شود و بنابراین از روشهای شبه استاتیکی میتوان استفاده کرد. اما اگر فرکانس بارگذاری بیشتر و یا بار به صورت ناگهانی به سازه وارد شود، تحلیل دینامیکی مورد نیاز خواهد بود. برای تحلیل دینامیکی افزون بر ماتریس سختی، ماتریس جرم و ماتریس میرایی نیز مورد نیاز است. برای یک بارگذاری با بزرگی مشخص، پاسخ دینامیکی ممکن است کمتر یا بیشتر از پاسخ استاتیکی باشد. هر چه فرکانس بارگذاری به فرکانس طبیعی سازه نزدیکتر باشد، پاسخ سازه بزرگتر خواهد شد(۲۳).

۲-۲ مسائل مطرح در تحلیل دینامیکی

مهمترین مسائل مطرح در تحلیل دینامیکی عبارتند از:

الف- تعیین فرکانس طبیعی سازه و شکل مدهای ارتعاشی: فرکانس های طبیعی و مدهای ارتعاشی برای استفاده در برخی روشهای تعیین پاسخ سازه مورد نیازند. برای تعیین فرکانس های ارتعاشی و شکل مدهای ارتعاشی نیاز به حل مسئله مقادیر ویژه است.

ب- پاسخ سازه در برابر بارهای هارمونیک: بارهای هارمونیک به صورت توابع سینوسی یا کسینوسی از زمان هستند و به وسیله ماشین‌های دوار متصل به سازه، اعمال می شوند. در تحلیل هارمونیک، از پاسخ گذرا در آغاز بارگذاری صرفه نظر می‌شود و در عوض به دنبال پاسخ پایدار هستیم(منظور از پاسخ پایدار، پاسخی است که در فواصل زمانی یکسان تکرار می شود). در روشهای محاسباتی پاسخ هارمونیک، از فرکانس ها و مدهای ارتعاشی استفاده می شود.

ج- پاسخ سازه در برابر بارگذاری غیرمتناوب یا ناگهانی: در این حالت باید به دنبال پاسخ گذرا بود که آن را تاریخچه پاسخ می‌نامیم. در این حالت نیاز به انتگرالگیری از معادله حرکت نسبت به زمان داریم. اگر بارگذاری فقط تعداد کمی از کمترین فرکانسهای طبیعی سازه را تحریک کند، باید پاسخ سازه را برای یک بازه زمانی در حدود چند برابر بزرگترین زمان تناوب ارتعاشی سازه محاسبه کرد (نظیر بارگذاری زلزله). در این صورت روش رویهم‌گذاری مدها و یا روش انتگرال گیری مستقیم ضمنی مناسب خواهد بود. اگر بارگذاری تعداد زیادی از فرکانس‌های طبیعی سازه را تحریک کند، روش انتگرال گیری مستقیم صریح مناسب است.

د- ماکزیمم پاسخ سازه در برابر بارگذاری متناوب یا ناگهانی: روش حل استفاده از آنالیز طیف پاسخ است. در این روش از فرکانس‌های ارتعاشی، مدهای ارتعاشی سازه و تاریخچه پاسخ سازه یک درجه آزادی جرم-فنر تحت اثر بارگذاری مورد نظر استفاده می‌شود. این روش تقریبی است ولی روشی اقتصادی برای محاسبه تاریخچه پاسخ سیستم چند درجه آزادی است.

روشهای محاسباتی برای تحلیل دینامیکی به طور گسترده مستقل از روش تحلیل نظیر اجزای محدود یا ایزوژئومتریک هستند. در این روشها مهم وجود ماتریس سختی، جرم و میرایی است و مهم نیست که از کدام روش تحلیل بدست آمده باشد (۲۴).

۲-۳ تحلیل دینامیکی

معادله حرکت سازه در ارتعاش اجباری در اثر اعمال نیرو بصورت زیر است(۱۳)

$$\boldsymbol{M}\ddot{U} + \boldsymbol{C}\dot{U} + \boldsymbol{K}U = \boldsymbol{F} \qquad (۱-۲)$$

روش حل این معادله به چگونگی ماهیت نیروی وارده و اینکه از نوع هارمونیک یا متناوب ویا گذرا ویا نامشخص باشد بستگی دارد.

معادله فوق از لحاظ ریاضی بیانگر یک سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است و جواب معادلات را میتوان به وسیله روشهای استاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت تعیین نمود. ولی روشهای پیشنهادی برای حل سیستمهای عمومی معادلات دیفرانسیل در صورتی که مرتبه ماتریس ها بزرگ باشد میتوانند پرهزینه باشند. بنابراین در تحلیلهای عملی المانها، شماراندکی از روشهای موثر جالب توجه میباشند که عبارتند از روشهای انتگرالگیری مستقیم و جمع آثار مدها.(۲۳)

آنچه در این پایان نامه مدنظر است تحلیل دینامیکی گذرا است که زیر مجموعه روشهای انتگرالگیری مستقیم می باشد. در انتگرال گیری مستقیم معادله فوق با استفاده از یک روش عددی گام به گام انتگرال‌گیری می‌شوند. واژه مستقیم به این معنی است که پیش از انتگرالگیری عددی، تبدیل معادلات به فرم دیگری انجام نمی گیرد. روشهایی که در مجموعه روشهای انتگرال گیری مستقیم قرارمی گیرند عبارتند از: روش هوبولت، روش θ ویلسون و روش خانواده نیومارک. آنچه در اینجا مورد توجه قرار میگیرد روش نیومارک است که میتوان به صورت زیر خلاصه نمود.

جدول (۲-۱) – روشهای مختلف خانواده نیومارک

روش شتاب میانگین ثابت(پایدار)	$\gamma = 2\beta = 1/2$	$\alpha = 1/2$
روش شتاب خطی(پایدار مشروط)	$\gamma = 2\beta = 1/3$	$\alpha = 1/2$
روش تفاضل مرکزی(پایدار مشروط)	$\gamma = 2\beta = 0$	$\alpha = 1/2$
روش گالرکین(پایدار)	$\gamma = 2\beta = 8/5$	$\alpha = 3/2$
روش تفاضل پسرو(پایدار)	$\gamma = 2\beta = 2$	$\alpha = 3/2$

که α و γ پارامترهایی هستند که میتوان آنها را برای به دست آوردن دقت انتگرالگیری و پایداری روش تعیین نمود(۱۴).

لازم به یادآوری است که روش تفاضل مرکزی یک روش انتگرال گیری صریح است و روشهای هوبولت، ویلسون و نیومارک روشهای انتگرالگیری ضمنی است.

همچنین باید گفت که در این ارائه از اثر میرایی صرفه نظر شده است. لذا معادله حرکت سازه به شکل زیر در می آید:

$$\boldsymbol{M}\ddot{U} + \boldsymbol{K}U = \boldsymbol{F} \qquad (۲-۲)$$

۲-۴ حل گام به گام روش نیومارک

روش حل گام به گام با استفاده از روش انتگرال گیری نیومارک بصورت زیر است:

الف. محاسبات اولیه:

۱. ماتریس سختی و ماتریس جرم را تشکیل دهید.

2. U_0و $\dot{U}_0$ و $\ddot{U}_0$ را مشخص کنید.

۳. گام زمانی و پارامترهای آلفا و گاما را انتخاب کنید و مقادیر ثابت انتگرالگیری را محاسبه کنید.

$$\mathrm{a}_0 = \frac{1}{\gamma \Delta t^2} \qquad \mathrm{a}_1 = \frac{1}{\gamma \Delta t} \qquad \mathrm{a}_2 = \frac{1}{2\gamma} - 1 \qquad (۳-۲)$$

$$\mathrm{a}_3 = \Delta t(1-\alpha) \qquad \mathrm{a}_4 = \alpha \Delta t$$

۴. ماتریس سختی موثر را محاسبه کنید.

$$\widehat{\mathrm{K}} = K + \mathrm{a}_0 \mathrm{M} \qquad (۴-۲)$$

ب. برای هر گام زمانی:

۱. بارهای موثر را محاسبه کنید.

$$\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{t+\Delta t}} = \mathrm{F}_{\mathrm{t+\Delta t}} + M(\mathrm{a}_0\mathrm{U}_\mathrm{t} + \mathrm{a}_1\dot{\mathrm{U}}_\mathrm{t} + \mathrm{a}_2\ddot{\mathrm{U}}_\mathrm{t}) \quad (۵\text{-}۲)$$

۲. تغییر مکانها را بدست آورید.

$$\hat{K}\mathrm{U}_{\mathrm{t+\Delta t}} = \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{t+\Delta t}} \qquad (۶\text{-}۲)$$

۳. شتاب ها و سرعت ها را محاسبه کنید.

$$\ddot{U}_{\mathrm{t+\Delta t}} = \mathrm{a}_0(\mathrm{U}_{\mathrm{t+\Delta t}} - \mathrm{U}_\mathrm{t}) - \mathrm{a}_1\dot{\mathrm{U}}_\mathrm{t} - \mathrm{a}_2\ddot{\mathrm{U}}_\mathrm{t} \qquad (۷\text{-}۲)$$

$$\dot{\mathrm{U}}_{\mathrm{t+\Delta t}} = \dot{\mathrm{U}}_\mathrm{t} + \mathrm{a}_3\ddot{\mathrm{U}}_\mathrm{t} + \mathrm{a}_4\ddot{\mathrm{U}}_{\mathrm{t+\Delta t}} \qquad (۸\text{-}۲)$$

باید توجه داشت که در این ارائه ماتریس جرم هم به صورت گسترده و هم به صورت متمرکز مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع منظور از ماتریس جرم متمرکز ماتریسی است که درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر و درایه‌های قطراصلی آن مجموع درایه‌های هر سطر از ماتریس جرم گسترده میباشد.

فصل سوم

روش ایزوژئومتریک

۳-۱ مقدمه

در روش ایزوژئومتریک با استفاده از خواص توابع پایه ای اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنیها و سطوح، از این توابع بعنوان توابع درونیابی و تقریب سازی استفاده می شود. جدای ازانعطاف پذیری این توابع در تقریب توابع با گرادیانهای بالا، استفاده از این توابع بهبود حل را به مراتب ساده تر می سازد. بعنوان مثال سادگی ارتقاء درجه چندجمله ای تابع پایه، سهولت افزایش تعداد گره ها در بردار گره، افزایش تعداد نقاط کنترلی و یا تغییر محل آنها از جمله موارد افزایش دقت حل در این روش می باشند(۱۵).

۳-۲ مزایا و معایب

در این پژوهش سعی شده است تا با توجه به مزایایی که به علت استفاده از روش اسپلاینها حاصل میشوند، فرمولبندی این روش برای مسایل تنش و کرنش را بدست آورده و با تهیه نرم افزاری اقدام به مدلسازی و تحلیل دینامیکی این دسته ازمسایل بنماییم. از مزایای روش مذکور می توان به کاهش قابل توجه در ابعاد دستگاه معادلات و زمان حل مساله، نیاز به اطلاعات اندک در هنگام مدلسازی شکل مساله، تولید شکل اجسام با هندسه پیچیده، عدم نیاز به تولید گره و المان برای هندسه مساله، استفاده از اطلاعات مشترک برای تولید هندسه جسم و خواص مکانیکی آن، اقناع دقیق شرایط مرزی اشاره نمود(۱۶،۱۷).

معایب روش مسایل و مشکلاتی است که در واقع به علت نوپا بودن روش وجود دارند. مثلا چگونگی انتگرال گیری عددی، بدست آوردن فرمولبندی لازم برای مسایل، پیوستگی بین وصله ها، چگونگی اعمال بارهای متمرکز و سطحی و حجمی و غیره که بایستی به مرور بر این مشکلات غلبه نماییم.

۳-۳ سابقه موجود

لازم به ذکر است که قبل از شروع این پژوهش با توجه به جدید بودن روش مورد بحث و کمبود منابع مورد نیاز برای آشنایی بیشتر، کار برروی بدست آوردن فرمولبندی روش اسپلاین انجام گردید که مجموعا برای فرمولبندی و تهیه کدهای کامپیوتری مسایل یک بعدی و دوبعدی تک متغییره استاتیکی توسط ظریف مقدم حدود یک سال زمان صرف گردید تا برخی از ابهامات موجود آشکار و رفع گردد. در این مسیر کلیه مقالات ارایه شده از منابع مختلف تهیه شده و به طور دقیق مطالعه گردید. لذا با توجه به تجربه حاصل شده و با نظر به اینکه مدت زمان زیادی از ارایه روش مذکور نمیگذرد، لذا گسترش روش به حیطه محیطهای دو بعدی پیوسته شامل مسایل تنش/کرنش مسطح در تحلیل دینامیکی برای انجام این پژوهش مورد توجه واقع گردید. همچنین این روش اکنون با نام روش ایزوژئومتریک توسط هیوز[1] و همکارانش معرفی شده است که در واقع همان روش اسپلاین است که توسط کاگان[2] و هولیگ[3] ارایه شده و توضیحات آن قبلا ارایه گردید.

۴-۳ اصول و فرضیات

در این پایان نامه اصول و فرضیاتی به شرح ذیل در نظر گرفته شده اند:

- مسایل الاستیسیته تنش و کرنش مسطح مد نظر می باشد.
- مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در سراسر دامنه مساله ثابت است.
- مصالح در حیطه الاستیک می باشند.

[1] Hughes
[2] Kagan
[3] Hollig

- تغییر شکلها، کوچک در نظر گرفته می شوند.
- تحلیل سازه از نوع دینامیکی است.
- مدلسازی شکل سازه با استفاده از اسپلاینها خواهد بود.
- کلیه کدها در نرم افزار ویژوال فورترن تهیه می شوند.

۳-۵ منحنیها و سطوح اسپلاین وNURBS

۳-۵-۱ مقدمه

دو روش معمول و پر کاربرد جهت معرفی یک منحنی و یا یک سطح هندسی، استفاده از معادلات دقیق جبری و یا معادلات پارامتری می باشد. یک معادله دقیق به فرم $f(x,y)=0$ می باشد که در صفحه xy واقع می شود. این معادله رابطه بین متغیرهای Y و x را بر روی منحنی مشخص می کند. اما در معادلات پارامتری هر متغیر به طور جداگانه با یک رابطه جبری مشخص می شود. در این حالت فرم معادله به صورت زیر خواهد بود(۱۸).

$$C(u) = (x(u), y(u)) \qquad a \leq u \leq b \qquad (۱-۳)$$

اما منحنی هایی که بر معادلات دقیق مبتنی می باشند دارای اشکالاتی می باشند. مثلا برای آنکه یک منحنی از n نقطه بگذرد به یک معادله چند جمله ای با درجه n- 1 نیازخواهیم داشت. همچنین برای بیان یک شکل پیچیده با استفاده از چند جمله ایها یا اصلا قادر به این کار نبوده و یا اینکه به چندجمله ای‌هایی با درجات بالا نیاز داریم. در این حالت بایستی به راههای کارآمد دیگری متوسل شویم. استفاده از اسپلاینها می‌تواند تا حدود زیادی این مشکلات را برطرف کند، ولی تکنیک NURBS که بر مبنای اسپلاینها بوده و دارای تواناییهای بیشتری می باشد، قادر به حل بخش بسیاری از مشکلات در مدلسازی های پیچیده می باشد. در ادامه به فرمولبندیها و مفاهیم و

خصوصیات منحنی ها و سطوح NURBS [1] می پردازیم که لازم است خواننده قبل از مطالع این بخش، اطلاعات اولیه ای در خصوص B-Spline ها داشته باشد .

۳-۵-۲ تعریف توابع پایه B-Spline و خواص آن

روشهای متنوعی جهت تعریف توابع پایه B-Spline ها وجود دارد که برای آشنایی با آنها می توان به مراجع مختلف ازجمله(۱۸،۲) مراجعه نمود .در این پژوهش از یکی از معمولترین و پرکاربردترین توابع پایه جهت تعریف منحنی ها و سطوح پیچیده استفاده شده است.

فرض کنید که مجموعه $U=\{u_0,u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ دارای اعضایی باشد که در آنها شرط زیر برقرار باشد:

$$u_i \leq u_i + 1 \qquad i = 0,1,2,\ldots,m \tag{۳-۲}$$

u_iها را گره[2] و بردار U را بردار گره[3] می نامیم. i–امین تابع پایه B-Spline را که از درجه P (مرتبه$P+1$) می باشد را با $Ni,p(u)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم(۲)

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & if \quad u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{۳-۳}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_i} N_{i+1,p-1}(u) \tag{۳-۴}$$

توجه شود که

- تابع $N_{i,0}(u)$ تابعی پله ای بوده و جز در بازه نیمه باز $u \in [u_i, u_{i+1}[$ مقدار آن صفر میباشد.

---

[1] Non Uniform Rational B-Spline

[2] knot

[3] Knot Vector

❖ به ازای هر $p > 0$ تابع پایه $N_{i,p}(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه $p-1$ می‌باشد.

❖ محاسبه یک مجموعه از توابع پایه مستلزم داشتن یک بردار گره U و درجه p می‌باشد.

❖ دررابطه فوق درصورت مواجهه با تقسیم $\frac{0}{0}$ در ضرایب، مقدارآن راصفردرنظر می‌گیریم.

❖ بازه نیمه باز $[u_i, u_{i+1}[$ را بازه گره i-ام می نامیم.

❖ از این پس به جهت سادگی به جای $N_{i,p}(u)$ از $N_{i,p}$ استفاده می کنیم.

۳-۵-۳ برخی از خواص مهم توابع پایه B-Spline

در این بخش تعدادی از خواص مهم توابع پایه B-Spline را معرفی می کنیم (۱۸). بدین منظور بردار گره $U=\{u_0,u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ و درجه p را فرض نمایید .

✓ اگر u خارج از بازه $[u_i, u_{i+1}[$ باشد، آنگاه مقدار $N_{i,p}(u) = 0$ خواهد بود.

✓ بازای کلیه مقادیر i، p و u،همواره $N_{i,p}(u) \geq 0$ است.

✓ برای هر بازه دلخواه $[u_i, u_{i+1}[$ کلیه مشتقات توابع پایه $N_{i,p}(u)$ وجود دارند.

✓ در حالت خاص، اگر بردار گره به شکل $U = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1} \quad \underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\}$ باشد، به چند جمله ای برنشتاین درجه p معروف است.

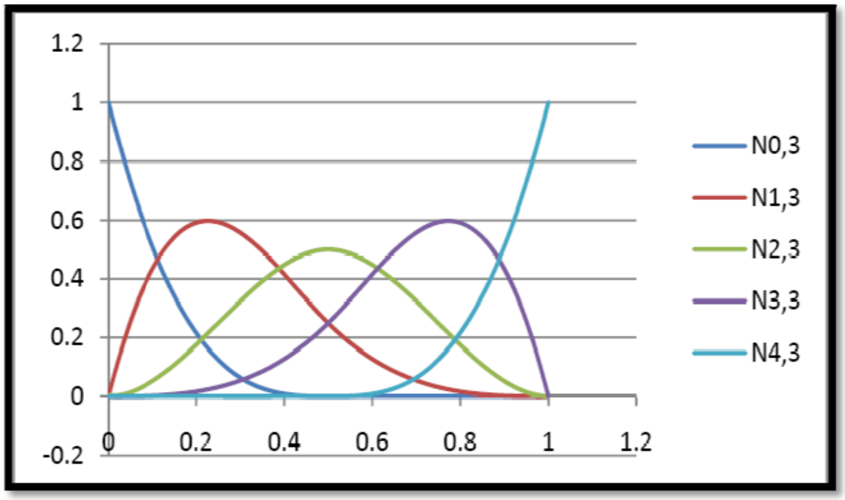
✓ اگر تعداد گرهها $m+1$ ، آنگاه $n+1$ تابع پایه وجود دارد و رابطه $n = m - p - 1$ برقرار خواهد بود.

✓ برای هر بازه دلخواه $[u_i, u_{i+1}[$ و کلیه u های متعلق به این بازه $\sum_{j=i-p}^{i} N_{j,p}(u) = 1$ خواهد بود.

یکی از مهمترین خصوصیت این تابع اینست که اگر گره‌های داخلی تکراری نباشند، آنها دارای پیوستگی C^{p-1} می‌باشند. اگر یک گره به تعداد k بار تکرارشده باشد، در آن گره تابع دارای پیوستگی C^{p-k} می باشد.

البته خواص دیگری نیز در این قسمت موجود است که برای جلوگیری از اطاله کلام از بیان آنها خودداری می شود .اثبات کلیه موارد مذکور نیز در مراجع (۲،۱۸) قابل دستیابی است.

به عنوان مثال در شکل (۳-۱) برای $n = 4$ توابع پایه درجه ۳ که از بردار گرهی باز $U = [0,0,0,0,0.5,1,1,1,1]$ تولید شده، نشان داده شده است(۱۵).



شکل(۳-۱): توابع پایه درجه ۳ شکل گرفته از $U = [0,0,0,0,0.5,1,1,1,1]$

۳-۵-۴ مشتقات توابع پایه B-Spline

مشتق توابع پایه مذکور در بخش قبلی را میتوان از رابطه زیر محاسبه نمود.

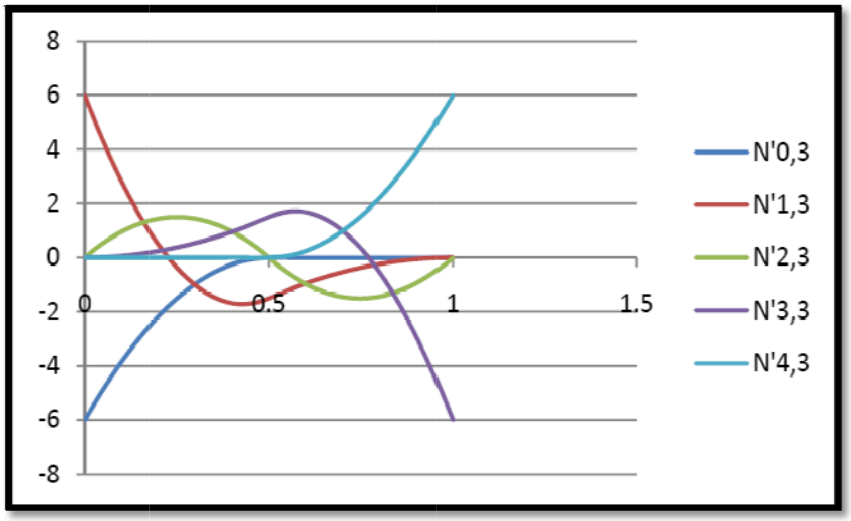
$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \qquad (۳-۵)$$

اکنون اگر $N_{i,p}^{(k)}(u)$ مشتق مرتبه kام تابع پایه $N_{i,p}(u)$ باشد، می‌توان توسط رابطه زیر آن را محاسبه نمود. توجه شود که مقدار k نبایستی از مقدار p تجاوز نماید.

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p\left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p}-u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right) \quad (۶-۳)$$

هرگاه مخرج کسرها در رابطه فوق مساوی صفر شد، آنگاه کل کسر را مساوی با صفر در نظر میگیریم.

برای بردار گرهی قبل، مشتق تابع درجه ۳ بصورت زیر است.



شکل(۳-۲):مشتق توابع پایه درجه ۳ شکل گرفته از $U=[0,0,0,0,0.5,1,1,1,1]$

۳-۵-۵ منحنیهای B-Spline

منحنیها و سطوح B-Spline را می توان با استفاده از توابع پایهB-Spline تعریف نمود. یک منحنی درجه p ام B-Spline را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود.

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) * p_i \quad (۷-۳)$$

که در آن$\{P_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(u)\}$مجموعه توابع پایه درجه p ام B-Spline میباشند .

بردار گره غیر تکراری[۱] و غیر یکنواخت[۲] U را به شکل زیر تعریف می کنیم .

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\} \qquad (۸-۳)$$

توجه شود که جز در مواردی که صریحا ذکر می شود، در بقیه حالات $a = 0$ و $b = 1$ فرض می‌شوند.

همچنین چندضلعی که توسط نقاط کنترلی $\{P_i\}$ ایجاد می‌شود را به عنوان چندضلعی‌کنترلی[۳] می‌نامیم.

برای محاسبه موقعیت یک نقطه بر روی منحنی، سه مرحله وجود دارد.

- یافتن بازه ای که u در آن واقع می شود .
- محاسبه کلیه توابع پایه غیر صفر مربوط به u
- ضرب توابع پایه محاسبه شده در مختصات نقاط کنترلی مربوطه .

۳-۵-۶ برخی از خواص منحنیهای B-Spline

اکنون تعدادی از خواص مهم منحنی‌های B-Spline را معرفی می کنیم.

- ا گر $n = p$ باشد و بردار گره به شکل $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ باشد، منحنی $C(u)$ یک منحنی بزیر($Bezier$) خواهد بود .
- منحنی $C(u)$ به صورت یک چندجمله ای تکه ای[۴] می باشد .
- نقاط ابتدا و انتهای هر منحنی بر نقاط ابتدا و انتهای چندضلعی کنترلی آن منطبق است .
- هر منحنی به صورت محدب در میان چند ضلعی کنترلی قرار می گیرد .

---

[۱] nonperiodic

[۲] nonuniform

[۳] control polygon

[۴] piecewise polynomial

❖ در صورتی که نقطه کنترلی P_i حرکت کند، منحنی$C(u)$ فقط در بازه $[u_i, u_{i+p+1}[$ دستخوش تغییرات می شود.

خصوصیات متنوع دیگری نیز در این خصوص موجود است که در مراجع (۱۰،۱۹) قابل مشاهده خواهد بود.

۳-۵-۷ سطوح B-Spline

یک سطح B-Spline از شبکه دوجهتی نقاط کنترلی، دو بردار گره و حاصلضربی مطابق تعریف زیرحاصل می شود.

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) * P_{i,j} \qquad (۳-۹)$$

که در این رابطه بردارهای گره به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\mathrm{U} = \{\underbrace{0,\dots,0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1,\dots,1}_{p+1}\} \qquad (۳-۱۰)$$

$$\mathrm{V} = \{\underbrace{0,\dots,0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1,\dots,1}_{q+1}\} \qquad (۳-۱۱)$$

که در آن بردار U دارای $r+1$ عضو و بردار V دارای $s+1$ عضو میباشند وداریم:

$$r = n + p + 1 \quad , \quad s = m + q + 1 \qquad (۳-۱۲)$$

برای محاسبه موقعیت یک نقطه بر روی سطح پنج مرحله به شرح زیر بایستی انجام شود(۹).

- یافتن بازه ای که u در آن واقع می شود .
- محاسبه کلیه توابع پایه غیر صفر مربوط به u
- یافتن بازه ای که v در آن واقع می شود.
- محاسبه کلیه توابع پایه غیر صفر مربوط به v
- ضرب توابع پایه محاسبه شده در مختصات نقاط کنترلی مربوطه طبق فرمول تولید سطح .

۳-۵-۸ منحنیها و سطوح NURBS

در این بخش به تعریف منحنیهای NURBS می پردازیم. یک منحنی درجه pام NURBS به صورت زیر تعریف می شود.

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i p_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \qquad a \leq u \leq b \tag{۱۳-۳}$$

که در آن $\{P_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی و $\{\mathrm{N}_{\mathrm{i,p}}(\mathrm{u})\}$ مجموعه توابع پایه درجه p ام B-Spline و $\{\mathrm{W}_i\}$وزن نقاط کنترلی می باشد. بردار گره نیز به شکل زیر تعریف می شود.

$$\mathrm{U} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \mathrm{u}_{\mathrm{p+1}}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\} \tag{۱۴-۳}$$

به جز مواردی که صریحا ذکر می شود، در سایر موارد فرض $a = 0$ و b=1 برقرار است. همچنین مقادیر وزنی W_{i} همواره بزرگتر از صفر فرض می شوند.

فرمول NURBS را می توان به صورت ساده تری نیز بازنویسی نمود. اگر $\mathrm{R}_{\mathrm{i,p}}\ (u)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(u) w_j} \tag{۱۵-۳}$$

آنگاه می توان فرمول منحنی NURBS را به شکل ساده‌تر زیر نوشت .

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u) * P_i \tag{۱۶-۳}$$

همچنین با تعریف به شکل زیر

$$R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \tag{۱۷-۳}$$

می توان سطح NURBS را با رابطه زیر تعریف نمود.

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(u,v) * P_{i,j} \tag{۱۸-۳}$$

۳-۵-۹ تکنیکهای مهم NURBS

تعدادی از تکنیکهای بسیار مهم و کارآمد در منحنیها و سطوح NURBS به شرح ذیل می باشد(۱۸).

- ❖ اضافه کردن گره(knot insetion)
- ❖ اصلاح گره(knot refinement)
- ❖ حذف گره (knot removal)
- ❖ ارتقای درجه(degree elevation)
- ❖ نزول درجه(degree reduction)

هر یک از تکنیکهای معرفی شده دارای روش و محل استفاده بخصوصی می باشد. با استفاده از تکنیکهای فوق قادر به ایجاد، کنترل و اصلاح کلیه منحنی‌ها و سطوح پیچیده ایجاد شده خواهیم بود که این امکان ما را قادر به حل مسایل بهینه سازی اشکال پیچیده پوسته ها خواهد نمود.

با توجه به گستردگی فراوان مبحث منحنی‌ها و سطوح NURBS علاقه مندان به مراجع(۱۸،۲) ارجاع داده می شوند.

۳-۵-۱۰ مزایای مهم NURBS

مزایای مهم NURBS که باعث استفاده از آنها در این پژوهش شده است به طور خلاصه عبارتند از :

- ❖ NURBS دارای یک پایه ریاضی قوی جهت تولید انواع منحنیها و سطوح تحلیلی مانند دایره،سهمی، هذلولی، کره و غیره و همچنین سطوح پیچیده غیر تحلیلی مانند بدنه هواپیما، کشتی، ماشین و غیره می باشد.
- ❖ الگوریتمها و مفاهیم NURBS ساده و قابل حس کردن و درک کردن می باشند .
- ❖ الگوریتمهای NURBS بسیار سریع بوده و دارای پایداری عددی بسیاری می باشند .
- ❖ منحنی‌ها و سطوح NURBS تحت اثر تبدیلاتی مانند انتقال، دوران و تصویر کردن، بدون

تغییر خواهند ماند.

❖ فرمول بندی $NURBS$ به راحتی قادر به تبدیل به الگوریتمهای برنامه نویسی می باشد .

درنتیجه مجموعه ای از خواص مهم ریاضی و برنامه نویسی کامپیوتری همراه با کاربردهای موفقیت آمیز NURBS در صنایع مختلف سبب استفاده از آن در این پژوهش شده است.

۳-۶ روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود

روش ایزوژئومتریک در اصل از ترکیب تکنیکهای طراحی توسط کامپیوتر[۱] (CAD) و روش اجزای محدود حاصل شده است(۲۰،۹). چهارچوب کلی تحلیل ایزوژئومتریک با استفاده از تکنیک نربز در مقایسه با روش اجزای محدود، مبتنی بر اصولی می‌باشد (۱) که عبارتند از:

۱- در این روش به جای المانها، شبه المانها را داریم که با ضرب بردارهای گره حاصل می‌شوند و باید توجه کرد که به هیچ عنوان مفهوم آن مانند المانها در روش اجزای محدود نمی‌باشد. به عنوان مثال در مسایل دوبعدی مانند مسایل تنش/کرنش مسطح این شبکه المان به صورت $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ خواهد بود که قبلا به آن اشاره گردیده است.

۲- ۲- المانها از تقسیم دامنه توسط دهانه های گرهی[۲] بدست می‌آیند.

۳- هندسه مساله با مشارکت شبکه نقاط کنترلی و توابع پایه تولید می‌شود.

۴- با استفاده از مفهوم ایزوپارامتریک[۳] مجهولات مانند تغییرمکانها، تنشها، سرعت، حرارت و غیره را با همان توابع پایه‌ای که برای تعریف هندسه استفاده کرده‌ایم، بیان می‌نماییم.

۵- درجات آزادی عبارتند از متغیرهای کنترلی[۴] که همان ضرایب توابع پایه می‌باشند.

۶- روند بهبود شبکه[۵] نیز با استفاده از اضافه کردن گره، ارتقای درجه توابع پایه و یا ترکیبی از آنها انجام می‌شود. این عمل مشابه با روشهای بهبود h ، p و hp در اجزای محدود است.

---

[۱] Computer Aided Design

[۲] Knot spans

[۳] Isoparametric

[۴] Control variables

[۵] Mesh refinement

البته روش جدیدی با نام روش بهبود k نیز در تحلیل ایزوژئومتریک امکان‌پذیر است که چون مبحث این پایان نامه نمی‌باشد توضیح داده نشده که می‌توان برای اطلاع بیشتر به مرجع (۱)رجوع نمود.

۷- در مرحله روی‌هم‌گذاری[۱]، همانند روش اجزای محدود، آرایه‌های محاسبه شده برای وصله‌ها[۲] در تحلیل ایزوژئومتریک در یک آرایه کلی قرار داده می‌شوند. برای ایجاد سازگاری در محل اتصال وصله‌ها، می‌توان از پارامترهای مشابه برای ساخت لبه‌ها یا سطوح دو طرف وصله[۳] استفاده نمود.

در جدول (۳-۲) می‌توان مقایسه‌ای بین روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک از دیدگاه مشابهت برخی مشخصه‌های کلیدی در هریک از دو روش را ملاحظه نمود.

جدول (۳-۲) – مقایسه روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک

روش اجزای محدود	روش ایزوژئومتریک
نقاط گرهی	نقاط کنترلی
متغیرهای گرهی	متغیرهای کنترلی
شبکه اجزای محدود	مقادیر گره ها در بردار گره
انجام درونیابی نقاط و متغیرهای گرهی با توابع پایه	عدم انجام درونیابی نقاط و متغیرهای کنترلی با توابع
هندسه تقریبی	هندسه دقیق
توابع پایه از نوع چندجمله ای های جبری	توابع پایه نربز
پدیده گیبز[۴]	میرایی تغییرات[۵]
زیر دامنه ها	وصله ها

پدیده گیبز در جدول فوق، در واقع ناپایداری ناشی از تقریب زدن داده های ناپیوسته با چندجمله ایهای جبری لاگرانژ می‌باشد که در شکل (۳-۳-الف) نشان داده شده است همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد نقاط و در نتیجه درجه چندجمله‌ای، این نوسان شدیدتر می‌شود. ولی اگر داده‌ها

---

[۱] Assemble

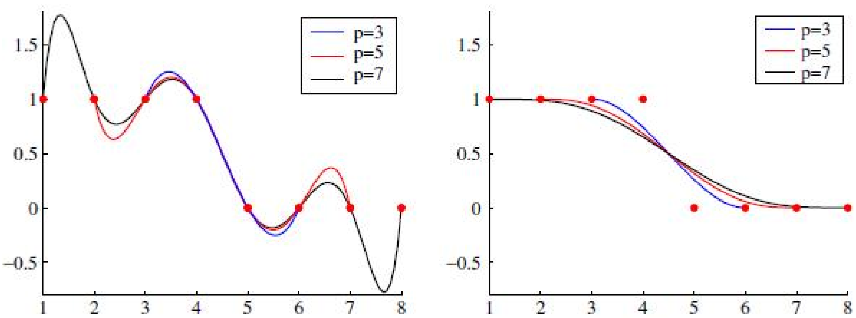
[۲] Patches

[۳] Patch Interfaces

[۴] Gibbs phenomena

[۵] Variation diminishing

به عنوان نقاط کنترلی در نظرگرفته شوند، استفاده از تکنیک نربز همانند شکل (۳-۳-ب) سبب مشاهده رفتاری متفاوت در منحنی‌های تولیدی خواهد شد و در واقع میرایی در تغییرات را شاهد خواهیم بود. این خصوصیت سبب می‌شود تا بتوانیم محلهایی را که دارای تغییرات زیادی در هندسه یا جوابها رخ می‌دهد مدل نماییم(۱).



الف ب

شکل (۳-۳) – الف) درونیابی لاگرانژ برای داده های ناپیوسته، ب) میرایی تغییرات برای داده های ناپیوسته با تکنیک نربز

فصل چهارم

حل معادلات دیفرانسیل با روش اسپلاین

۴-۱ مقدمه

در این فصل پس از معرفی حالت کلی معادله دیفرانسیل دوبعدی تک متغیره مورد استفاده در مکانیک جامدات اقدام به اثبات فرمول بندی روش اسپلاین نموده و از آن، جهت ایجادکدهای کامپیوتری برای حل مسایل استفاده خواهیم نمود.

از معادلات معروفی که در مکانیک سازه ها با آن مواجه می شویم می توان به معادله زیر اشاره نمود:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + pu + q = 0 \qquad (۴-۱)$$

این معادله بر بسیاری از مسایل فیزیکی حاکم است که می توان لیستی از آن را در مراجع (۱۴،۲۱،۲۲) ملاحظه نمود.

۴-۲ بدست آوردن فرمولبندی روش اسپلاین دو بعدی

فرمولبندی ارایه شده در این بخش برداشتی از گزارش پژوهشی ظریف مقدم در خصوص تحلیل استاتیکی به روش اسپلاین است که در دانشگاه صنعتی شاهرود موجود می‌باشد، که در ادامه ملزومات دستیابی به تحلیل دینامیکی مانند ماتریس جرم و فرمولبندی آن در فرمولها اعمال گردیده است.

مراحل بدست آوردن فرمولبندی بصورت زیر می‌باشد:

۱. معادلات دیفرانسیل حاکم در مسایل مسطح الاستیک عبارتند از:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = f_x - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (۴-۲-۱)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = f_y - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (۴-۲-۲)$$

۲.شرایط مرزی طبیعی

$$t_x = \left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x + c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y \qquad (۱-۳-۴)$$

$$t_y = c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x + \left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y \qquad (۲-۳-۴)$$

۳.در مسایل ایزوتروپیک تنش مسطح (plane stress)

$$c_{11} = \frac{E}{1-\mu^2} \quad , \quad c_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \qquad (۱-۴-۴)$$

$$\mathrm{c}_{12} = \mu\mathrm{c}_{11} = \mu\mathrm{c}_{22} \quad , \quad c_{66} = G_{12} \qquad (۲-۴-۴)$$

۴.در مسایل ایزوتروپیک کرنش مسطح (plane strain)

$$c_{11} = \frac{E(1-\mu)}{1-\mu-2\mu^2} \quad , \quad c_{22} = \frac{E(1-\mu^2)}{(1+\mu)(1-\mu-2\mu^2)} \qquad (۱-۵-۴)$$

$$\mathrm{c}_{12} = \frac{\mu E}{1-\mu-2\mu^2} \quad , \quad c_{66} = G_{12} \qquad (۲-۵-۴)$$

۵. نوشتن شکل ضعیف معادلات دیفرانسیل:کتاب ردی ص ۴۶۱

$$0 = h_e \oint_{\Omega_e}\left[\frac{\partial w_1}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + c_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial}\right) - w_1 f_x + \rho w_1 \ddot{u}\right]dxdy -$$

$he\Gamma e\ w1txd\Gamma$ (۱-۶-۴)

$$0 = h_e \oint_{\Omega_e}\left[c_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial w_2}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - w_2 f_y + \rho w_2 \ddot{v}\right]dxdy -$$

$he\Gamma e\ w2tyd\Gamma$ (۲-۶-۴)

۶. معادلات (۵) را بسط می دهیم

$$0 = h_e \oint_{\Omega_e}\left[c_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + c_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - w_1 f_x + \rho w_1 \ddot{u}\right]dxdy -$$

$he\Gamma e\ w1txd\Gamma$ (۱-۷-۴)

$$0 = h_e \oint_{\Omega_e} \left[c_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - w_2 f_y + \rho w_2 \ddot{v}\right] dxdy -$$

$he\Gamma e\ w2tyd\Gamma$ (۴-۷-۲)

۷. با جمع روابط(۶)به یک رابطه کلی می رسیم

$$0 = h_e \oint_{\Omega_e} \left[c_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{66}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \right.\right.$$

$\partial w2\partial x\partial u\partial y+\partial w2\partial x\partial v\partial xdxdy \quad -he\Omega e \quad w1fx+w2fy-\rho(w1u+w2v)dxdy-he\Gamma e$

$(w1tx+w2ty)d\Gamma$ (۴-۸)

۸. (۷)دارای یک قسمت bilinear و یک قسمت linear به شرح ذیل می باشند:

$B(u, w_1, v, w_2) =$

$$h_e \oint_{\Omega_e} \left[c_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{66}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \right.\right.$$

$\partial w2\partial x\partial u\partial y+\partial w2\partial x\partial v\partial xdxdy$ (۴-۹-۱)

$$l(w_1, w_2) = -h_e \oint_{\Omega_e} \left[w_1 f_x + w_2 f_y - \rho(w_1 \ddot{u} + w_2 \ddot{v})\right] dxdy - h_e \oint_{\Gamma_e} (w_1 t_x + w_2 t_y) d\Gamma$$

(۴-۹-۲)

۹. اکنون میتوان تابع نمایی به شرح زیر تشکیل داد:

$$\Pi = \frac{1}{2}B(u,u,v,v) - l(u,v)$$

$$B(u,u,v,v) = h_e \oint_{\Omega_e} \left[c_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + c_{66}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \right.\right.$$

$\partial v\partial x2dxdy$ (۴-۱۰-۱)

$$l(u,v) = -h_e \oint_{\Omega_e} \left[u f_x + v f_y - \rho(u\ddot{u} + v\ddot{v})\right] dxdy - h_e \oint_{\Gamma_e} (u t_x + v t_y) d\Gamma$$

(۴-۱۰-۲)

$$\Pi = \frac{1}{2}h_e\oint_{\Omega_e}\left[c_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + c_{66}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\right]dxdy + h_e\oint_{\Omega_e}\left[uf_x + vf_y - \rho(u\ddot{u} + v\ddot{v})\right]dxdy \quad - h_e\oint_{\Gamma_e}(ut_x + vt_y)d\Gamma$$

(۳-۱۰-۴)

۱۰. در (۹) دو مجهول وجود دارد که عبارتند از u و v که باید برای یافتن روابط روش اسپلاین این مجهولات را برحسب توابع پایه اسپلاینها نوشت. در اینجا اگر فرض شود که مختصات x و y هر نقطه در دامنه مساله به همراه u یک رویه و با v یک رویه دیگر را تولید می کنند مانند(۱۱):

$$S(r,s) = \frac{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}} = \sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)P_{i,j} \quad (۱-۱۱-۴)$$

که در این رابطه داریم

$$R_{i,j}^{p,q}(r,s) = \frac{N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}{\sum_{k=o}^{n}\sum_{l=0}^{m} N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}} \quad (۲-۱۱-۴)$$

۱۱. رابطه فوق را می‌توان برای رسیدن به هدفمان به شکل زیر بسط دهیم

$$X(r,s) = \frac{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}X_{i,j}}{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}} = \sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)X_{i,j}$$

(۱-۱۲-۴)

$$Y(r,s) = \frac{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}Y_{i,j}}{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}} = \sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)Y_{i,j}$$

(۲-۱۲-۴)

$$U(r,s)=\frac{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}U_{i,j}}{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}=\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}$$

(۴-۱۲-۳)

$$V(r,s)=\frac{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}V_{i,j}}{\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}=\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}$$

(۴-۱۲-۴)

۱۲. چون در (۹) مشتقات u و v ظاهر شده اند، لذا نمادسازی و محاسبه برخی مشتقات (۱۱) که مورد نیاز هستند را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_{xr}=\frac{\partial X(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}X_{i,j}$$

$$J_{xs}=\frac{\partial X(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}X_{i,j}$$

$$J_{yr}=\frac{\partial Y(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}Y_{i,j}$$

$$J_{ys}=\frac{\partial Y(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}Y_{i,j}$$

(۴-۱۳-۱)

$$J_{ur}=\frac{\partial U(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}$$

$$J_{us}=\frac{\partial U(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}$$

$$J_{vr}=\frac{\partial V(r,s)}{\partial r}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}$$

$$J_{vs}=\frac{\partial V(r,s)}{\partial s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}$$

که در این روابط داریم:

$$\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r} = R_{i,j}^{(r)}(r,s)$$

$$= \frac{\left(N_{i,p}^{'}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l} - \left(N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}^{'}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}}{\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}\right)^{2}}$$

$$= \frac{N_{i,p}^{'}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}} - \frac{\left(N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}^{'}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}}{\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}\right)^{2}}$$

(۲-۱۳-۴)

$$\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s} = R_{i,j}^{(s)}(r,s)$$

$$= \frac{\left(N_{i,p}(r)N_{j,q}'(s)w_{i,j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l} - \left(N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}'(s)w_{k,l}}{\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}\right)^{2}}$$

$$= \frac{N_{i,p}(r)N_{,q}'(s)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}} - \frac{\left(N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}'(s)w_{k,l}}{\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}\right)^{2}}$$

(۳-۱۳-۴)

۱۳. تعریف نیروهای گسترده در سطح بر اساس توابع اسپلاین:

$$\bar{f}_x(r,s) = f_x(x,y) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}f_{i,j}^{x}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)f_{i,j}^{x}$$ (۱-۱۴-۴)

$$\bar{f}_y(r,s) = f_y(x,y) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}f_{i,j}^{y}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)f_{i,j}^{y}$$ (۲-۱۴-۴)

۱۴. بعد از تبدیل پارامترهای x و y در روابط فوق به r و s به محاسبه ژاکوبی به صورت زیر نیاز خواهیم داشت:

$$dxdy = \bar{J}drds$$ (۱-۱۵-۴)

$$\bar{J} = \bar{J}(r,s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(r,s)}{\partial r} & \frac{\partial Y(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial X(r,s)}{\partial s} & \frac{\partial Y(r,s)}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xr} & J_{yr} \\ J_{xs} & J_{ys} \end{vmatrix} = J_{xr}J_{ys} - J_{yr}J_{xs}$$ (۲-۱۵-۴)

۱۵. فرمولهای مشتقگیری از پارامترهای تغییر مکان u و v نسبت به x و y که در حقیقت مشتقگیری از تابع نسبت به تابع می باشد عبارتند از:

$$\frac{\partial U(r,s)}{\partial X(r,s)} = \frac{\frac{\partial U \partial Y}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial U \partial Y}{\partial s\, \partial r}}{\frac{\partial X \partial Y}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial X \partial Y}{\partial s\, \partial r}} = \frac{J_{ys}}{\bar{J}} J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}} J_{us}$$

$$\frac{\partial U(r,s)}{\partial Y(r,s)} = \frac{-\frac{\partial U \partial X}{\partial r\, \partial s} + \frac{\partial U \partial X}{\partial s\, \partial r}}{\frac{\partial X \partial Y}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial X \partial Y}{\partial s\, \partial r}} = \frac{-J_{xs}}{\bar{J}} J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}} J_{us}$$

$$\frac{\partial V(r,s)}{\partial X(r,s)} = \frac{\frac{\partial V \partial Y}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial V \partial Y}{\partial s\, \partial r}}{\frac{\partial X \partial Y}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial X \partial Y}{\partial s\, \partial r}} = \frac{J_{ys}}{\bar{J}} J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}} J_{vs}$$

$$\frac{\partial V(r,s)}{\partial Y(r,s)} = \frac{-\frac{\partial V \partial X}{\partial r\, \partial s} + \frac{\partial V \partial X}{\partial s\, \partial r}}{\frac{\partial X \partial Y}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial X \partial Y}{\partial s\, \partial r}} = \frac{-J_{xs}}{\bar{J}} J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}} J_{vs} \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

۱۶. اکنون (۹) را با توجه به پارامترهایی که بر اساس توابع اسپلاین هستند می نویسیم

$$\Pi(\mathrm{r,s}) = \frac{1}{2}\mathrm{h_e}\int_0^1\int_0^1 \Bigg[c_{11}\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}J_{us}\right)^2 + \mathrm{c}_{22}\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}}J_{vs}\right)^2 +$$

$$2c_{12}\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}J_{us}\right)\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}}J_{vs}\right) +$$

$$c_{66}\left(\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}}J_{us}\right)^2 + \left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}J_{vs}\right)^2 +$$

$$2\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}}J_{us}\right)\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}J_{vs}\right)\right)\Bigg]\bar{J}drds +$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[u\bar{f}_x + v\bar{f}_y - \rho(u\ddot{u} + v\ddot{v})\right]\bar{J}drds + h_e\oint_{\Gamma_e}\left(ut_x + vt_y\right)d\Gamma$$

(۱-۱۷-۴)

$$\Pi(r,s) = \frac{1}{2}h_e\int_0^1\int_0^1\Bigg[c_{11}\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)^2 +$$

$$2c_{12}\Bigg(\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)$$

$$\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)\Bigg)+$$

$$c_{22}\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)^{2}+$$

$$c_{66}\Bigg(\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)^{2}+$$

$$2\Bigg(\left(\frac{-J_{xs}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}+\frac{J_{xr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)$$

$$\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}-\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)\Bigg)+$$

$$\left(\frac{J_{ys}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}-\frac{J_{yr}}{\bar{J}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)^{2}\Bigg]\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}\right)\bar{f}_x+\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}\right)\bar{f}_y-\right.$$
$$\rho uu+vv\,Jdrds+\ he\Gamma e\ utx+vtyd\Gamma$$

(۲-۱۷-۴)

۱۷. اکنون با توجه به تعریف زیر (۱۶) را به شکل ساده تری بازنویسی می کنیم

$$\varphi_{xr}=\varphi_{xr}(r,s)=\frac{J_{xr}}{\bar{J}}$$

$$\varphi_{xs}=\varphi_{xs}(r,s)=\frac{J_{xs}}{\bar{J}}$$

$$\varphi_{yr}=\varphi_{yr}(r,s)=\frac{J_{yr}}{\bar{J}}$$

$$\varphi_{ys}=\varphi_{ys}(r,s)=\frac{J_{ys}}{\bar{J}} \qquad (۱\text{-}۱۸\text{-}۴)$$

$$\Pi(r,s)=$$

$$\frac{1}{2}h_e\int_0^1\int_0^1\Bigg[c_{11}\left(\varphi_{ys}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}-\varphi_{yr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)^{2}+$$

$$2c_{12}\left(\left(\varphi_{ys}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}-\ \varphi_{yr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)\right.$$

$$\left.\left(-\varphi_{xs}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}+\ \varphi_{xr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)\right)+$$

$$c_{22}\left(-\varphi_{xs}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}+\ \varphi_{xr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)^{2}+$$

$$c_{66}\left(\left(-\varphi_{xs}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}+\ \varphi_{xr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)^{2}+\right.$$

$$2\left(\left(-\varphi_{xs}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}U_{i,j}+\ \varphi_{xr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}U_{i,j}\right)\right.$$

$$\left.\left(\varphi_{ys}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}-\ \varphi_{yr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)\right)+$$

$$\left.\left(\varphi_{ys}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}V_{i,j}-\ \varphi_{yr}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}V_{i,j}\right)^{2}\right]\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}\right)\bar{f}_x+\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}\right)\bar{f}_y-\right.$$
$$\rho uu+vv\,]drds+he\Gamma e\,utx+vtyd\Gamma$$

(۲-۱۸-۴)

۱۸. با انجام عملیات جبری روی (۱۷)، آن را به شکل فشرده تری بازنویسی می کنیم

$$\Pi(\mathrm{U_{i,j}},\mathrm{V_{i,j}})=\frac{1}{2}h_e\int_0^1\int_0^1\left[c_{11}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)^{2}+\right.$$

$$2c_{12}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)\right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)\right)+$$

$$c_{22}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)^{2}+$$

$$c_{66}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)^{2}+\right.$$

$$2\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)\right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)\right)+$$

$$\left.\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)^{2}\right)\right]\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}\right)\bar{f}_x+\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}\right)\bar{f}_y-\right.$$
$\rho uu+vv\,Jdrds+he\Gamma\,e\,utx+vtyd\Gamma$

(۱۹-۴)

۱۹. (۱۸) را بصورت زیر می نویسیم

$$\Pi(\mathrm{U_{i,j}},\mathrm{V_{i,j}})=\frac{1}{2}h_e\int_0^1\int_0^1\left[c_{11}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)^{2}+\right.$$

$$2c_{12}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)\right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)\right)+$$

$$c_{22}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)^{2}+$$

$$c_{66}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)^{2}+\right.$$

$$2\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}\right)\right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)\right)+$$

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\right)^{2}\right)\Bigg]\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}\right)\bar{f}_x+\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}\right)\bar{f}_y-\right.$$

$$\left.\rho\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\right]\bar{J}drs+$$

$$h_e\oint_{\Gamma_e}\left(ut_x+vt_y\right)d\Gamma \qquad (۲۰\text{-}۴)$$

۲۰. اکنون یکبار نسبت به U_{ij} و یکبار نسبت به V_{ij} مشتقگیری میکنیم.(قسمت آبی رنگ را فعلاً حذف می کنم)

$$\frac{\partial\Pi(U_{i,j},V_{i,j})}{\partial U_{i,j}}=h_e\int_0^1\int_0^1\left[c_{11}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)\right.$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}+$$

$$c_{12}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}+$$

$$c_{66}\left(\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)\right.$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}+$$

$$\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\Big]\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_x\right)\bar{J}drds-$$

$$h_e\rho\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{U}_{i,j}\right)\bar{J}drds=0 \qquad (۱-۲۱-۴)$$

$$\frac{\partial\Pi(U_{i,j},V_{i,j})}{\partial V_{i,j}}=h_e\int_0^1\int_0^1\Big[c_{12}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}+$$

$$c_{22}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}+$$

$$c_{66}\Bigg(\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)U_{i,j}+$$

$$\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\right)V_{i,j}\Big]\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_y\right)\bar{J}drds-$$

$$h_e\rho\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{V}_{i,j}\right)\bar{J}drds=0 \qquad (۲-۲۱-۴)$$

۲۱. نحوه بدست آوردن روابط قرمز رنگ بصورت زیر است:

$$I=\rho(u\ddot{u}+v\ddot{v})=\rho\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=$$

$$\rho\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \qquad (۱-۲۲-۴)$$

با مشتقگیری از رابطه نسبت به $U_{\mathrm{i,j}}$ و $V_{\mathrm{i,j}}$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial I}{\partial U_{i,j}}=\rho\left[\left(R_{i,j}^{p,q}\ddot{U}_{i,j}\right)+\frac{\partial}{\partial u_{i,j}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]$$

که با استفاده از خاصیت جابجایی در ترتیب مشتق پذیری میتوان نوشت

$$\rho\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{u}_{i,j}\right)+\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)u_{i,j}\right)}{\partial u_{i,j}}\right)\right)=$$

$$\rho\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{u}_{i,j}\right)+\rho\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\right)\right)}_{0}=$$

$$\Rightarrow\frac{\partial I}{\partial U_{i,j}}=\rho\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{u}_{i,j}\right) \qquad (۲-۲۲-۴)$$

و بطور مشابه میتوان نوشت

$$\frac{\partial I}{\partial V_{i,j}}=\rho\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{v}_{i,j}\right) \qquad (۳-۲۲-۴)$$

۲۲. اکنون با تعاریف زیر، (۱۹) را باز هم فشرده تر می کنیم

$$\chi_{i,j}^{(1)}=\ \varphi_{ys}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}-\ \varphi_{yr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s} \qquad (۱-۲۳-۴)$$

$$\chi_{i,j}^{(2)}=-\varphi_{xs}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}+\ \varphi_{xr}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s} \qquad (۲-۲۳-۴)$$

۲۳. با گذاشتن(۲۲) در (۱۹) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\Pi(U_{i,j},V_{i,j})}{\partial U_{i,j}}=h_e\int_0^1\int_0^1\Big[c_{11}\chi_{i,j}^{(1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(1)}U_{i,j}\ +c_{12}\chi_{i,j}^{(1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(2)}V_{i,j}\ +$$

$$c_{66}\left(\chi_{i,j}^{(2)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(2)}U_{i,j}+\chi_{i,j}^{(2)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(1)}V_{i,j}\right)\Big]\bar{J}drds-$$

$$h_e\rho\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{u}_{i,j}\right)\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_x\right)\bar{J}drds=0 \qquad (۱-۲۴-۴)$$

$$\frac{\partial \Pi(U_{i,j},V_{i,j})}{\partial V_{i,j}}=h_e\int_0^1\int_0^1\Big[c_{12}\chi_{i,j}^{(2)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(1)}U_{i,j}+c_{22}\chi_{i,j}^{(2)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(2)}V_{i,j}+$$

$$c_{66}\left(\chi_{i,j}^{(1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(2)}U_{i,j}+\chi_{i,j}^{(1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\chi_{i,j}^{(1)}V_{i,j}\right)\Big]\bar{J}drds-$$

$$h_e\rho\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)\ddot{v}_{i,j}\right)\bar{J}drds+$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_y\right)\bar{J}drds=0 \qquad (۲-۲۴-۴)$$

۲۴. با کمی عملیات جبری روی (۲۳) و با توجه به اندیسها در (۲۵) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Pi(U_{i,j},V_{i,j})}{\partial U_{i,j}}=$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(c_{11}\chi_{\alpha}^{(1)}\chi_{\beta}^{(1)}+c_{66}\chi_{\alpha}^{(2)}\chi_{\beta}^{(2)}\right)U_{i,j}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(c_{12}\chi_{\alpha}^{(1)}\chi_{\beta}^{(2)}+\right.\right.$$

c66χα(2)χβ(1)Vi,j   Jdrds+   *−heρ0101i=0nj=0mRαRβUi,jJdrds*

+he0101Ri,jp,q(r,s)fx Jdrds=0

(۱-۲۵-۴)

$$\frac{\partial \Pi(U_{i,j},V_{i,j})}{\partial U_{i,j}}=$$

$$h_e\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(c_{12}\chi_{\alpha}^{(2)}\chi_{\beta}^{(1)}+c_{66}\chi_{\alpha}^{(1)}\chi_{\beta}^{(2)}\right)U_{i,j}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(c_{22}\chi_{\alpha}^{(2)}\chi_{\beta}^{(2)}+\right.\right.$$

c66χα(1)χβ(1)Vi,j   *Jdrds+*

$$-h_e\rho\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{\alpha}R_{\beta}\ddot{V}_{i,j}\right]\bar{J}drds+h_e\int_0^1\int_0^1\left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_y\right)\bar{J}drds=0$$

(۲-۲۵-۴)

۲۵. توجه شود که در روابط فوق اندیسها دارای شرایط خاصی هستند که با تعاریف زیر آنها را درست میکنیم

$$\alpha = 0,1,\dots,(n+1)(m+1)-1 \qquad i = \alpha - (n+1)int\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \qquad j = int\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)$$

$$\beta = 0,1,\dots,(n+1)(m+1)-1 \qquad i = \beta - (n+1)int\left(\frac{\beta}{n+1}\right) \qquad j = int\left(\frac{\beta}{n+1}\right)$$

(۲۶-۴)

۲۶. با توجه به (۲۴) و (۲۵) درایه های ماتریسهای دستگاه معادلات به شکل زیر استخراج میشود

$$K_{\alpha\beta}^{(1)u} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(c_{11}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(1)} + c_{66}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(2)}\right) \bar{J} drds$$

$$K_{\alpha\beta}^{(1)v} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(c_{12}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(2)} + c_{66}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(1)}\right) \bar{J} drds$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)u} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(c_{12}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(1)} + c_{66}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(2)}\right) \bar{J} drds$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)v} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(c_{22}\chi_\alpha^{(2)}\chi_\beta^{(2)} + c_{66}\chi_\alpha^{(1)}\chi_\beta^{(1)}\right) \bar{J} drds$$

(۱-۲۷-۴)

$$M_{\alpha\beta} = \rho h_e \int_0^1 \int_0^1 (R_\alpha R_\beta) \bar{J} drds$$ (۲-۲۷-۴)

$$F_\alpha^u = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_x\right) \bar{J} drds$$

$$F_\beta^v = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(R_{i,j}^{p,q}(r,s)\bar{f}_y\right) \bar{J} drds$$ (۳-۲۷-۴)

۲۷. تشکیل دستگاه معادلات با $2(n+1)(m+1)$ معادله و $2(n+1)(m+1)$ مجهول

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_0 \\ \vdots \\ \ddot{U}_\alpha \\ \ddot{V}_0 \\ \vdots \\ \ddot{V}_\beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta}^{(1)u} & K_{\alpha\beta}^{(1)v} \\ K_{\alpha\beta}^{(2)u} & K_{\alpha\beta}^{(2)v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_\alpha \\ V_0 \\ \vdots \\ V_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0^u \\ \vdots \\ F_\alpha^u \\ F_\beta^v \\ \vdots \\ F_\beta^v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_0^u \\ \vdots \\ Q_\alpha^u \\ Q_\beta^v \\ \vdots \\ Q_\beta^v \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0,1,2,\dots,(n+1)(m+1)-1 \\ \beta = 0,1,2,\dots,(n+1)(m+1)-1 \end{cases} \qquad (۱-۲۸-۴)$$

Qها همان نیروهای خارجی وارد بر سازه هستند. البته توجه شود که فقط به نقاط کنترلی که در مرزهای وصله قرار دارند می توانیم نیرو وارد کنیم چون بر روی هندسه جسم قرار دارند.

۲۸. انتگرال گیری عددی

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(r,s)drds \qquad (۱-۲۹-۴)$$

$$r = r(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} r_i \psi_i(\xi,\eta)$$

$$s = s(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} s_i \psi_i(\xi,\eta) \qquad (۲-۲۹-۴)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r(\xi,\eta), s(\xi,\eta)) \det J(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi,\eta) d\xi d\eta \qquad (۳-۲۹-۴)$$

$$\bar{f}(\xi,\eta) = f(r(\xi,\eta), s(\xi,\eta)) \det J(\xi,\eta) \qquad (۴-۲۹-۴)$$

$$\frac{\partial r(\xi,\eta)\partial\xi}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n} r_i \psi'_{i\xi}(\xi,\eta) \quad , \quad \frac{\partial r(\xi,\eta)\partial\xi}{\partial\eta} = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \psi'_{i\eta}(\xi,\eta)$$

$$\frac{\partial r(\xi,\eta)\partial\xi}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n} s_i \psi'_{i\xi}(\xi,\eta) \quad , \quad \frac{\partial r(\xi,\eta)\partial\xi}{\partial\eta} = \sum_{i=1}^{n} s_i \psi'_{i\eta}(\xi,\eta) \qquad (۵-۲۹-۴)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial\xi} & \frac{\partial s}{\partial\xi} \\ \frac{\partial r}{\partial\eta} & \frac{\partial s}{\partial\eta} \end{bmatrix} \qquad (۶-۲۹-۴)$$

$$det[J] = \frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial s}{\partial\eta} - \frac{\partial s}{\partial\xi}\frac{\partial r}{\partial\eta} \qquad (۷-۲۹-۴)$$

$$I \cong \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_i W_j \bar{f}(\xi_i, \eta_i) \qquad (۴-۲۹-۸)$$

۲۹. توابع شکل عبارتند از:

$$For\ 4\ node\ we\ have\colon \begin{cases} \psi_1(\xi,\eta) = 0.25(1-\xi)(1-\eta) \\ \psi_2(\xi,\eta) = 0.25(1+\xi)(1-\eta) \\ \psi_3(\xi,\eta) = 0.25(1-\xi)(1+\eta) \\ \psi_4(\xi,\eta) = 0.25(1+\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

(۴-۳۰)

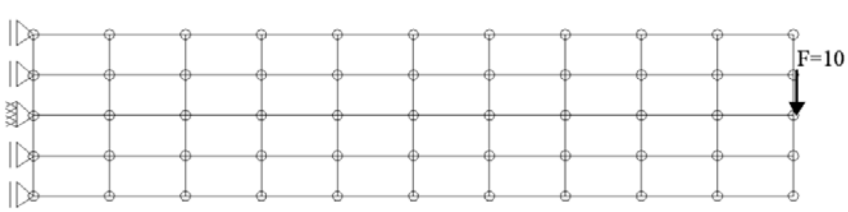
فصل پنجم

حل چند مثال

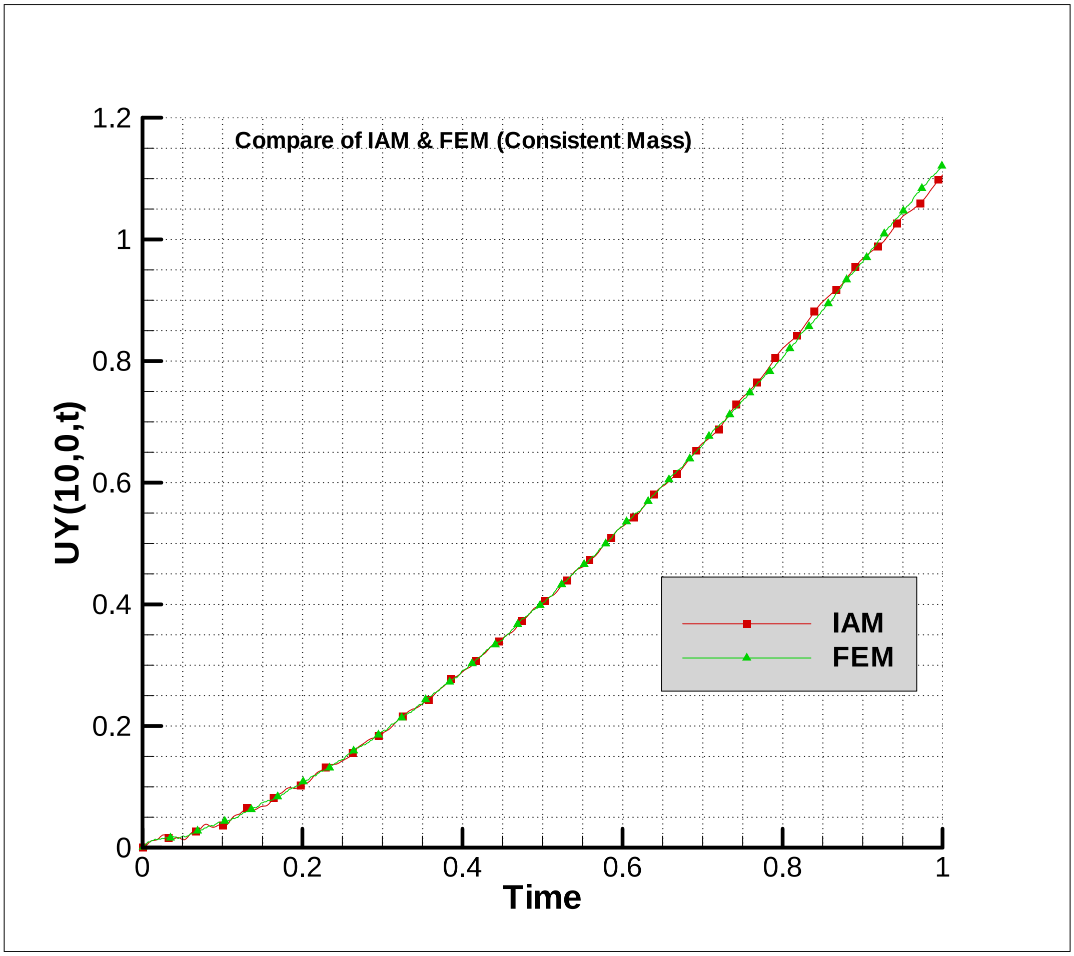
۵-۱ حل مثال

بواسطه عدم وجود مثال با حل دقیق درکتب علمی در اینجا مثال‌هایی ارائه می‌گردد که در آن به مقایسه حل به دو روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک پرداخته شده است.

مثال۱. صفحه یکسر گیردار یکسرآزاد مستطیلی به طول ۱۰ سانتیمتر و عرض ۲ سانتیمتر و به ضخامت ۱ سانتیمتر که به شکل زیر است را درنظر می‌گیریم. بار نقطه ای ۱۰ به گره میانی در انتهای آزاد اثر می کند و ماتریس جرم بصورت سازگار است. این مساله با روش ایزوژئومتریک و با تعداد ۵۵ نقطه کنترلی مطابق شکل (۵-۱) می‌باشد. البته دقت شود که در شکل (۵-۱) هر مستطیل یک المان نیست و اصلا در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک وجود ندارد. در واقع المانهای روش ایزوژئومتریک از حاصلضرب بردارهای گرهی بدست می‌آید. در حالت کلی گره ها در اجزای محدود بر روی دامنه قرار می‌گیرند در حالی که در روش ایزوژئومتریک نقاط کنترلی می‌توانند بر روی دامنه نباشند. بردار گره برای جهت طولی برابر با { ۱و۱و۱و۰،۷۵و۰،۵۰و۰،۲۵و۰و۰و۰} و برای جهت عرضی برابر با {۱و۱و۱و۰،۶۶و۰،۳۳ و۰و۰و۰} در نظر گرفته شده است. همچنین درجه توابع پایه اسپلاین در این مساله مساوی دو لحاظ گردیده است. تغییر مکان نقطه اثر نیرو بصورت زیر است.

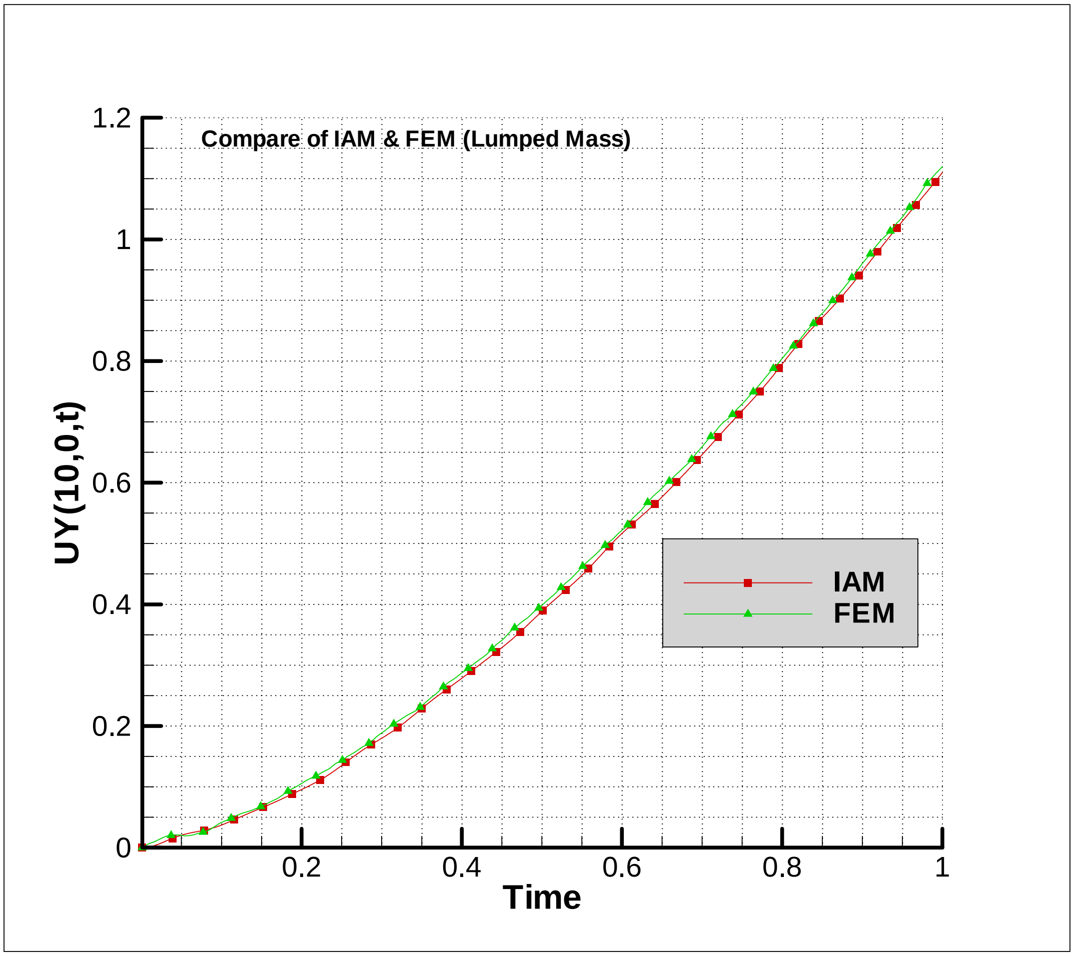


شکل (۵-۱)- صفحه طره ای تحت اثر بار ثابت



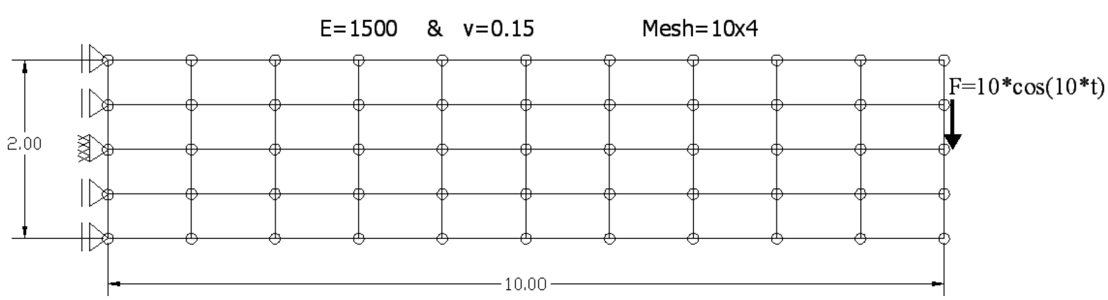
شکل (۵-۲) - نمودار تغییرمکان- زمان انتهای آزاد صفحه مثال۱

مثال۲. مثال ۱ را با ماتریس جرم متمرکز مجددا بررسی می‌نماییم.

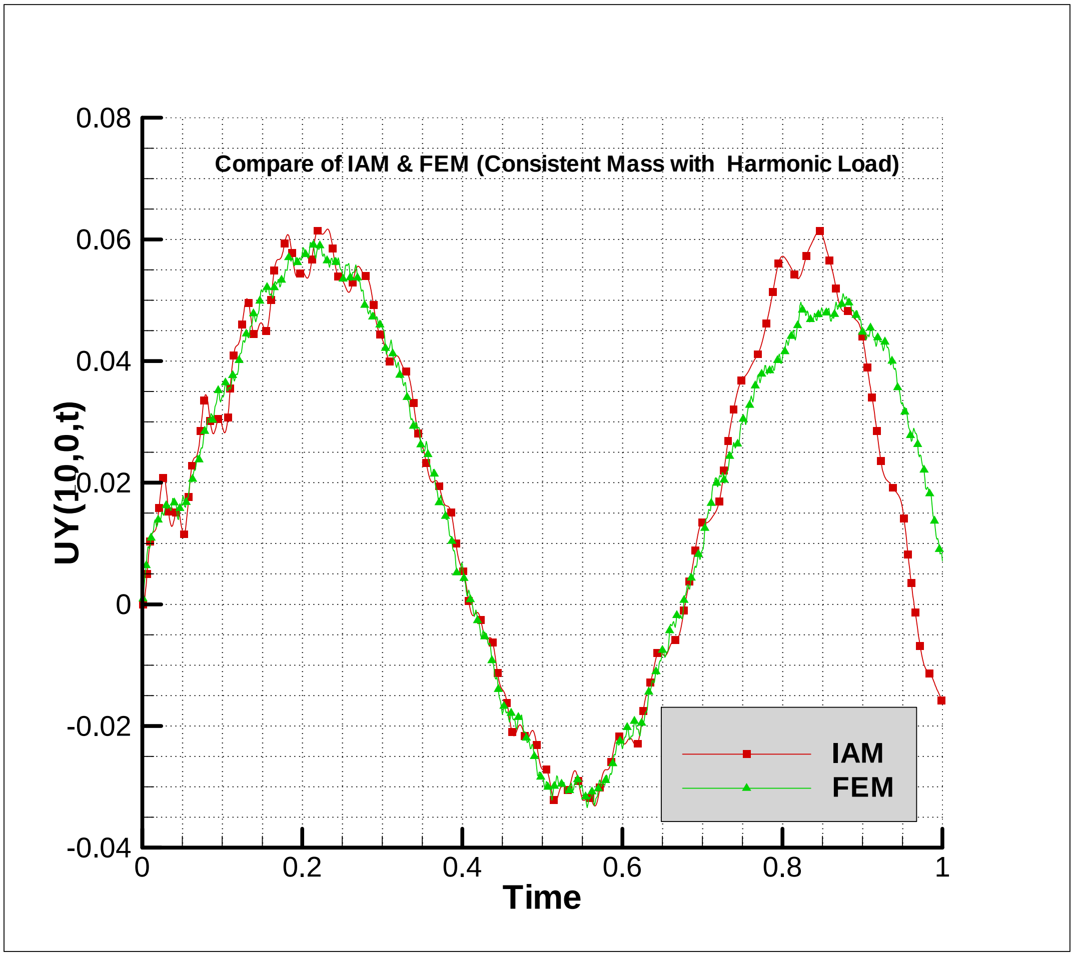


شکل (۵-۳) - نمودار تغییرمکان- زمان انتهای آزاد صفحه مثال ۲

مثال۳. صفحه طره ای مثال۱ را تحت اثر نیروی هارمونیک به شکل زیر را مورد بررسی قرار میدهیم.

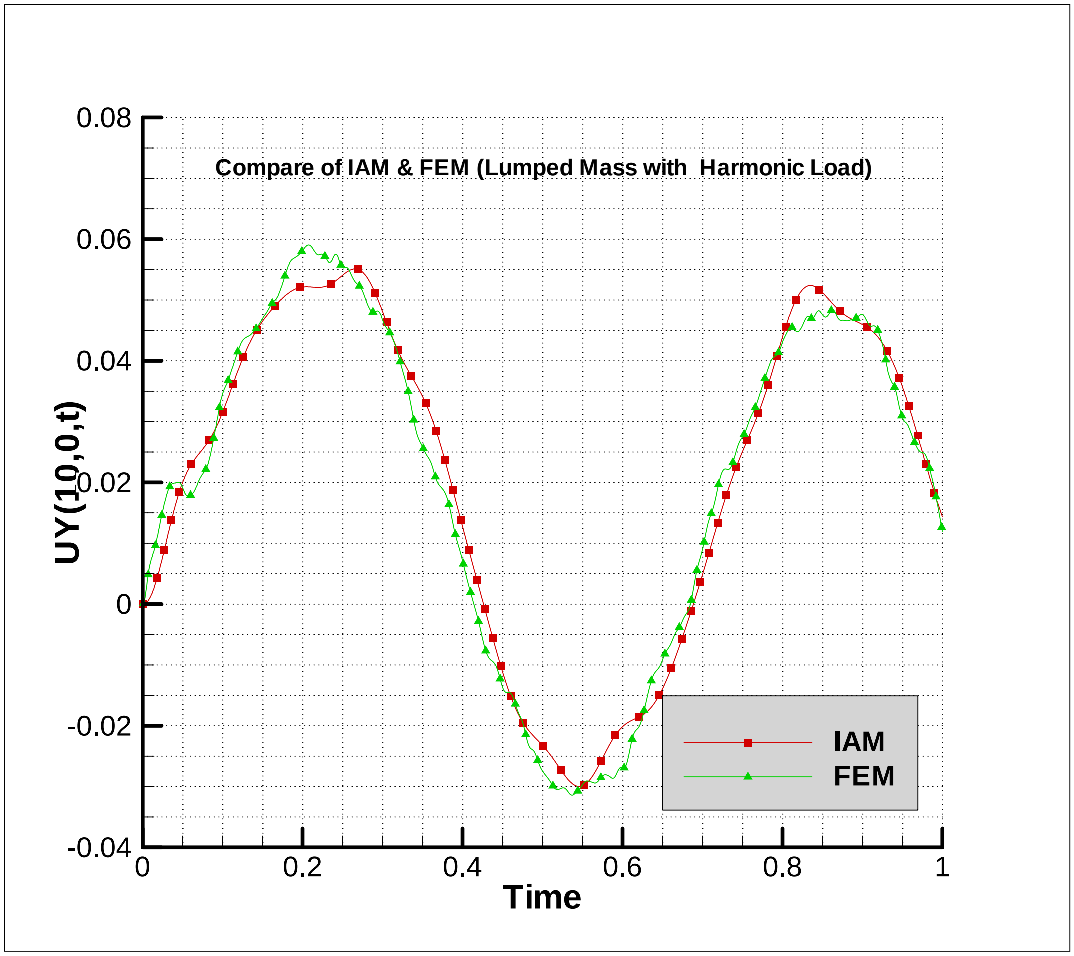


شکل(۵-۴)- صفحه طره‌ای تحت اثر بار هارمونیک



شکل (۵-۵)- نمودار تغییرمکان- زمان مثال ۳

مثال۴. مثال ۲ را تحت اثر بار هارمونیک مجددا بررسی مینماییم.

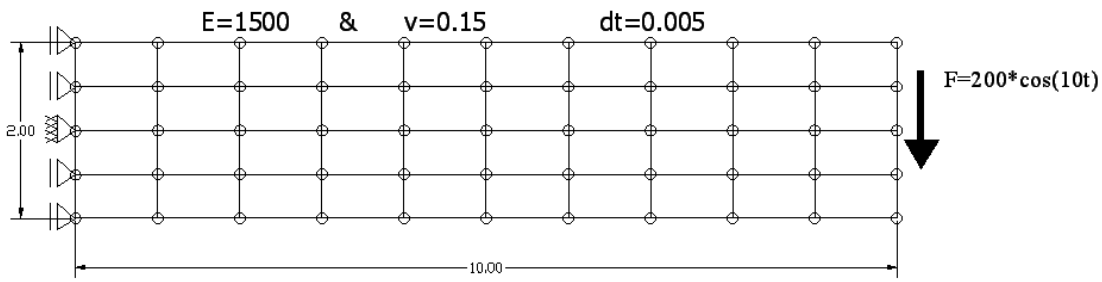


شکل(۵-۶)- نمودار تغییرمکان- زمان مثال ۴

در مثال‌های ارائه شده علاوه بر مقدار تغییر مکان، مدت زمان حل مسئله و مدت زمانی که صرف حل معادلات می‌شود با هم مقایسه گردید و دیده شد که با توجه به اینکه تعداد نقاط کنترلی در روش ایزوژئومتریک با تعداد گره ها در روش اجزای محدود مساوی ۵۵ در نظر گرفته شده است لذا دستگاه معادلات حاصله برای هر دو روش به طور مشابه دارای ۱۱۰ مجهول می‌باشد. پس از حل مساله، زمان مورد نیاز برای روش ایزوژئومتریک حدودا یک سوم روش اجزای محدود در مثال‌های مشابه بدست آمده است. لازم به تذکر است که نتایج ارائه شده در یک سیستم عامل و با یک مشخصات انجام شده است.

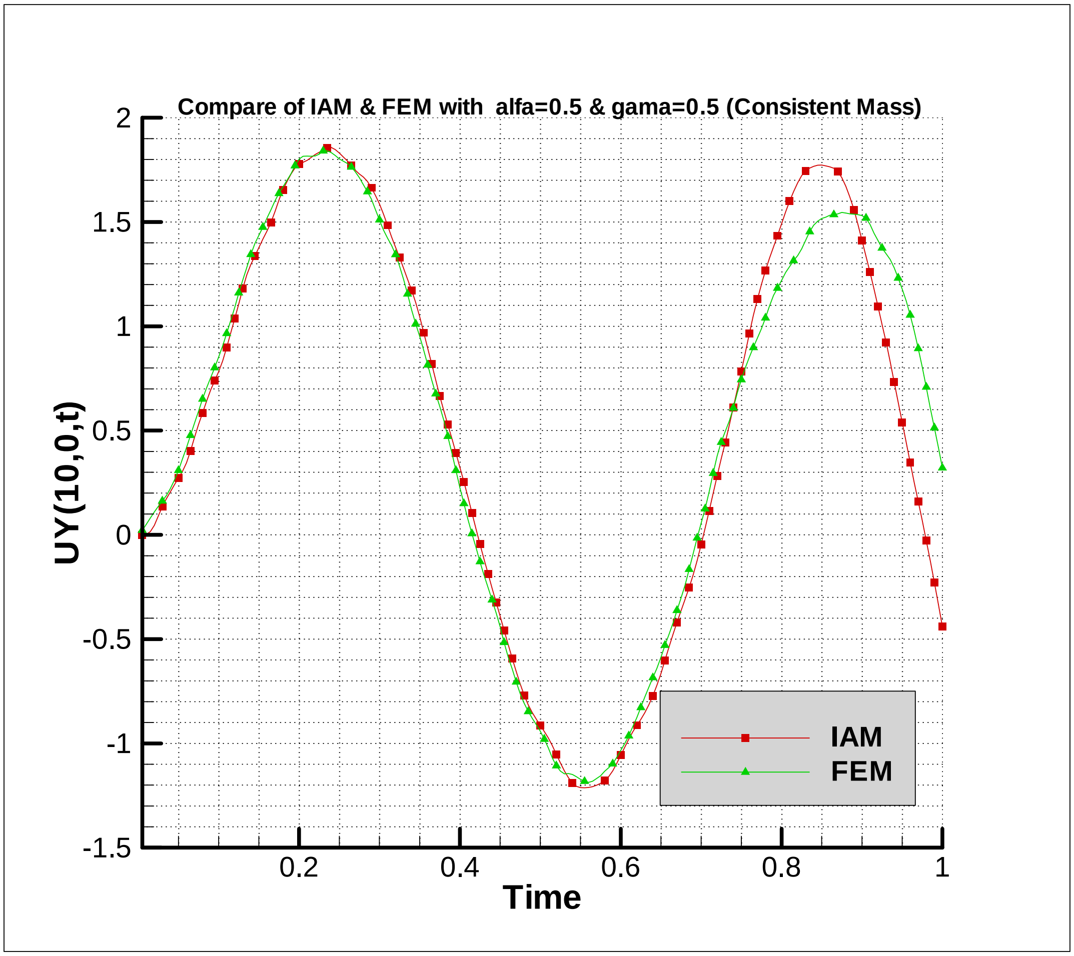
مثال۵. صفحه طره‌ای شکل زیر را که تحت اثر نیروی هارمونیک برشی در انتهای آزاد می باشد در نظر می‌گیریم. طول صفحه ۱۰ سانتیمتر و عرض و ضخامت آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتیمتر می باشد. تغییر مکان وابسته به زمان گره میانی انتهای صفحه را بررسی میکنیم.

$$E = 1500\ \frac{kg}{cm^2}\ ,\ \ v = 0.15\ \ ,\ \rho = 1\ \frac{kg}{cm^3}\ \ ,\ \ \Delta t = 0.005$$

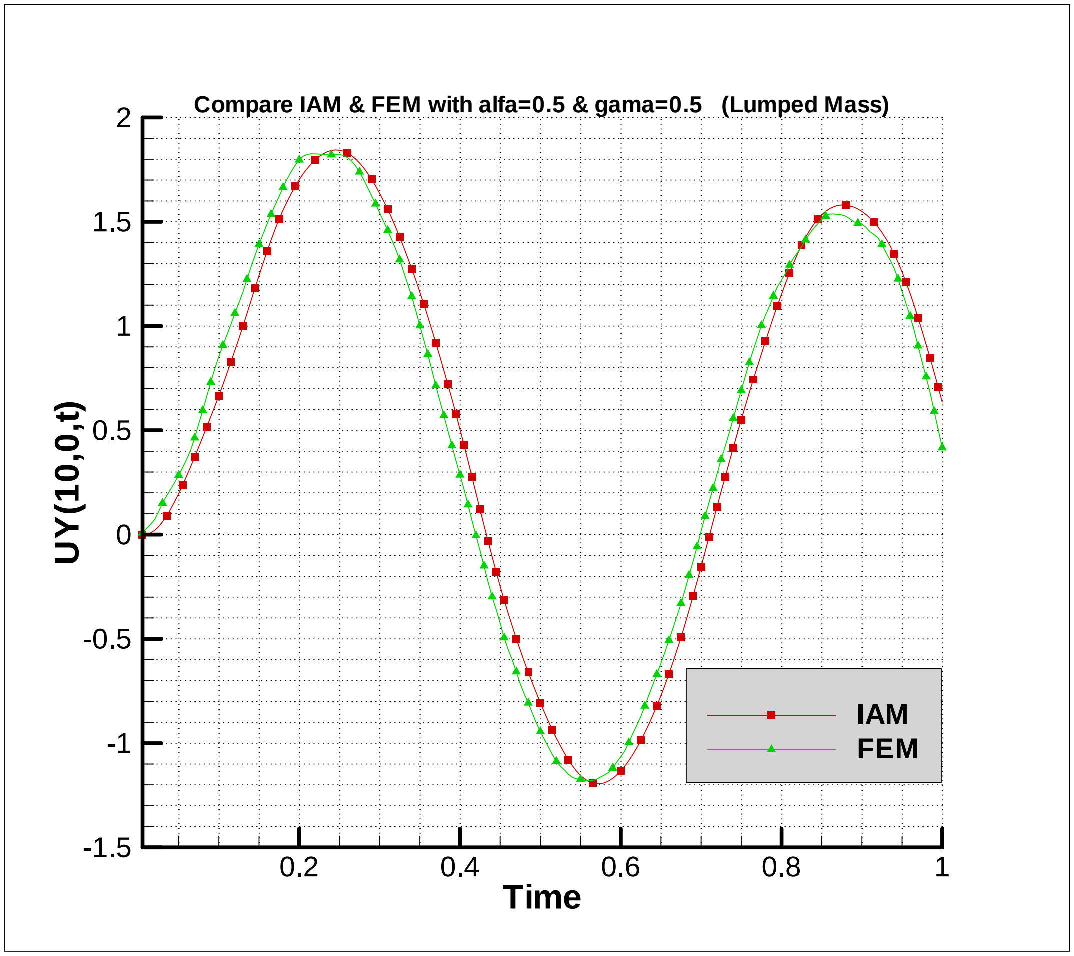


شکل (۵-۷)- صفحه طره‌ای مثال ۵

این مثال را نیز در دو حالت جرم متمرکز و سازگار مورد بررسی قرار دادیم که در نمودارهای زیر به طور خلاصه آمده است.

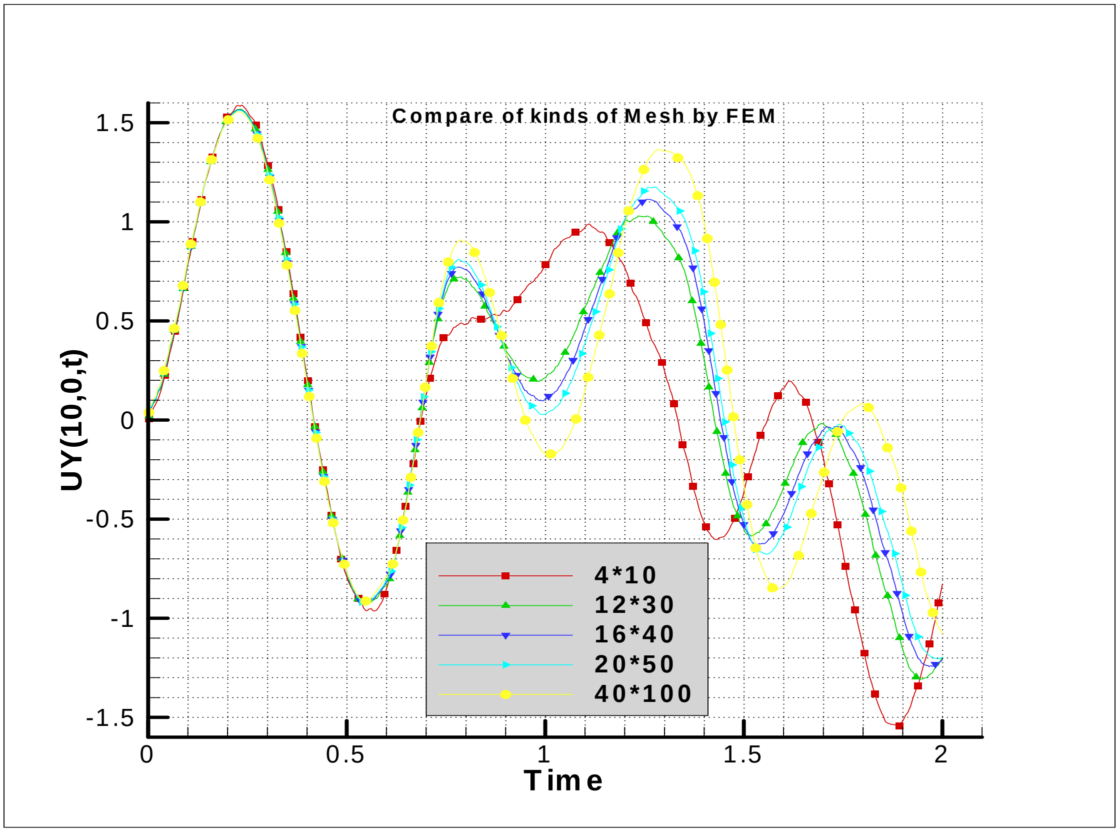


شکل(۵-۸) - نمودار تغییرمکان- زمان مثال ۵- جرم سازگار



شکل(۵-۹) - نمودار تغییر مکان- زمان مثال ۵- جرم متمرکز

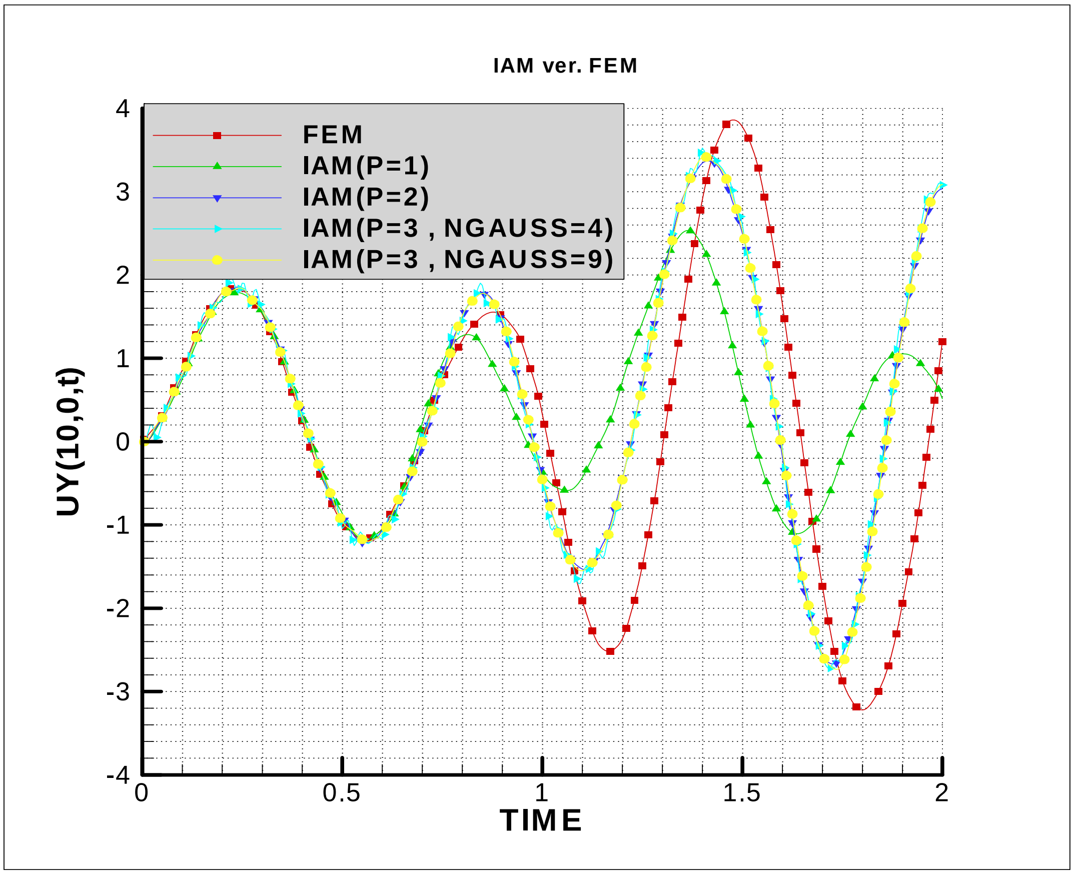
ملاحظه می شود که در هر دو حالت ماتریس جرم جواب‌های مناسبی بدست می‌آید و عدم انطباق کامل نمودارها قابل قبول است زیرا با توجه به اینکه در روند حل دینامیکی از تغییر مکان، سرعت و شتاب در گام زمانی قبل استفاده می‌گردد لذا این عدم انطباق قابل پیش بینی است. از طرفی این عدم انطباق در بررسی این صفحه با شبکه‌بندی‌های مختلف به کمک روش اجزای محدود نیز ملاحظه گردید که درشکل زیر نشان داده شده است.



شکل(۵-۱۰) - مقایسه نمودارهای تغییرمکان- زمان باشبکه‌بندی‌های مختلف به روش اجزای محدود

مثال ۶. اثر درجه منحنی اسپلاین ها بر دقت جواب

مثال قبل را با منحنی های درجه ۱ و ۲ و ۳ مورد بررسی قرار دادیم و با روش اجزای محدود مقایسه نمودیم که بصورت زیر می باشد.

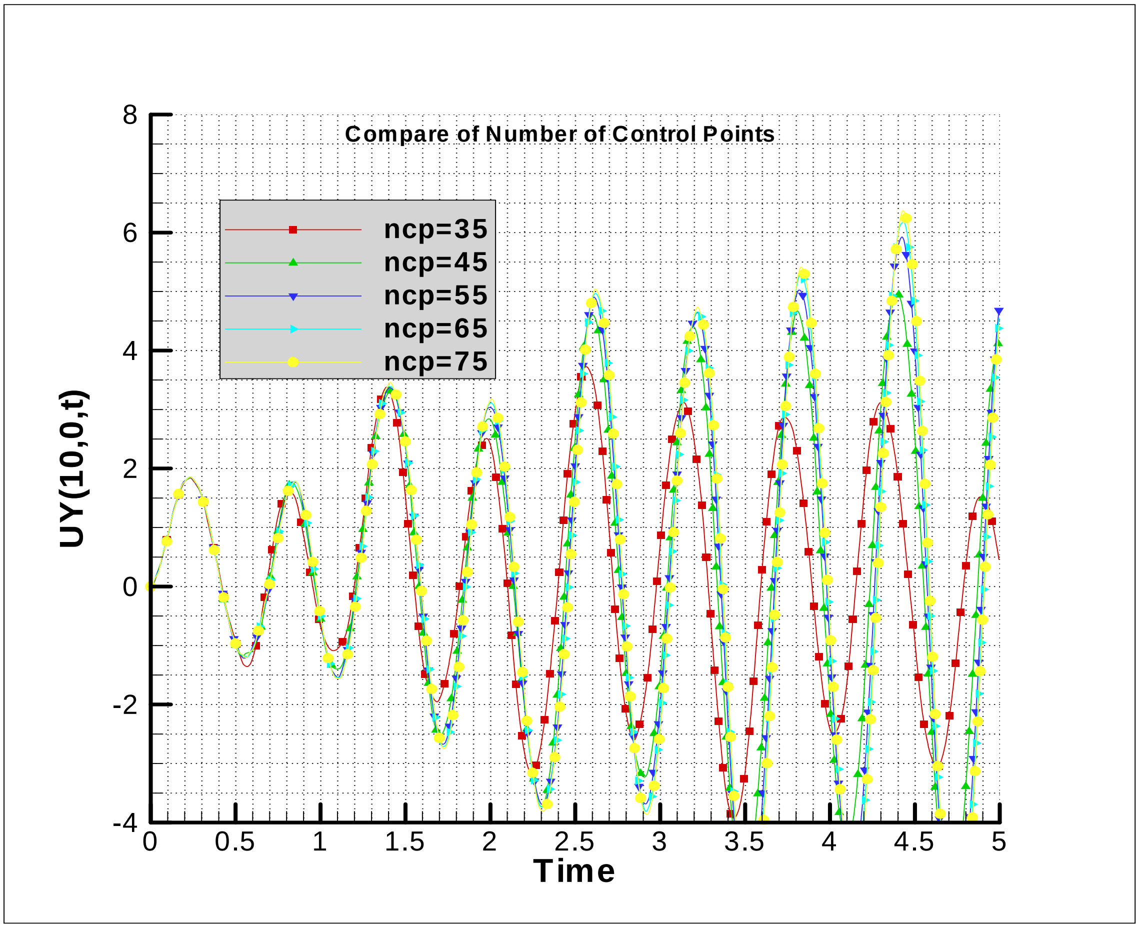


شکل(۵-۱۱) - نمودار تغییر مکان- زمان مثال ۶

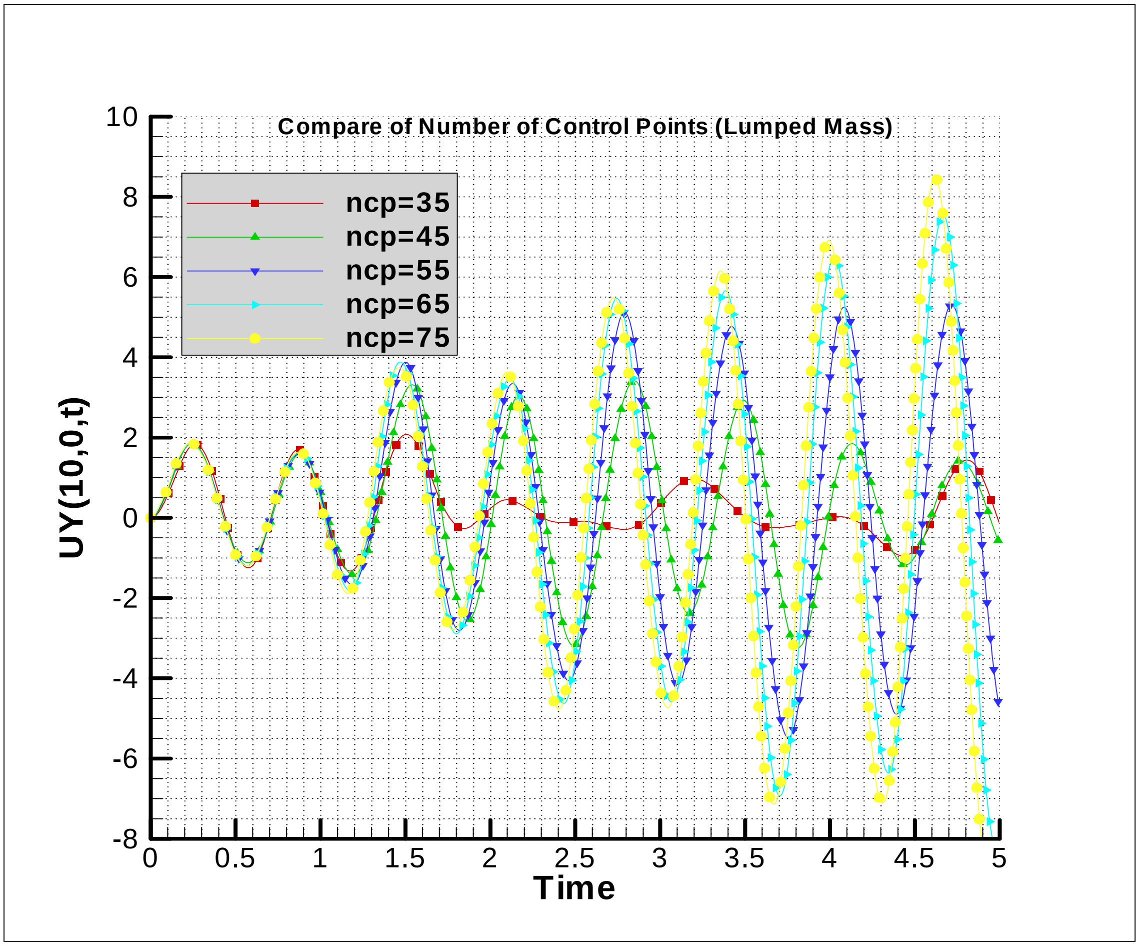
بعد از بررسی ملاحظه گردید که در$P =$ ۲ به نسبت $P =$ ۱ جوابها انطباق بهتری با روش اجزای محدود دارند. همچنین افزایش درجه منحنی به مقدار ۳ تاثیر چندانی بر بهبود جواب نداشت. همچنین بررسی انجام شده نشان داد که استفاده از ۹ نقطه گوسی در مقایسه با ۴ نقطه گوسی به هنگام استفاده از منحنی اسپلاین درجه ۳ تنها باعث بهتر شدن کیفیت نمودار تغییرمکان – زمان در تحلیل دینامیکی می شود.

مثال۷. اثر تعداد نقاط کنترلی بر دقت جواب

در این قسمت مثال ۵ را با ثابت نگهداشتن درجه منحنی اسپلاین و افزایش نقاط کنترلی در دو حالت جرم متمرکز و سازگار مورد بررسی قرار دادیم که در زیر مشاهده می‌شود.



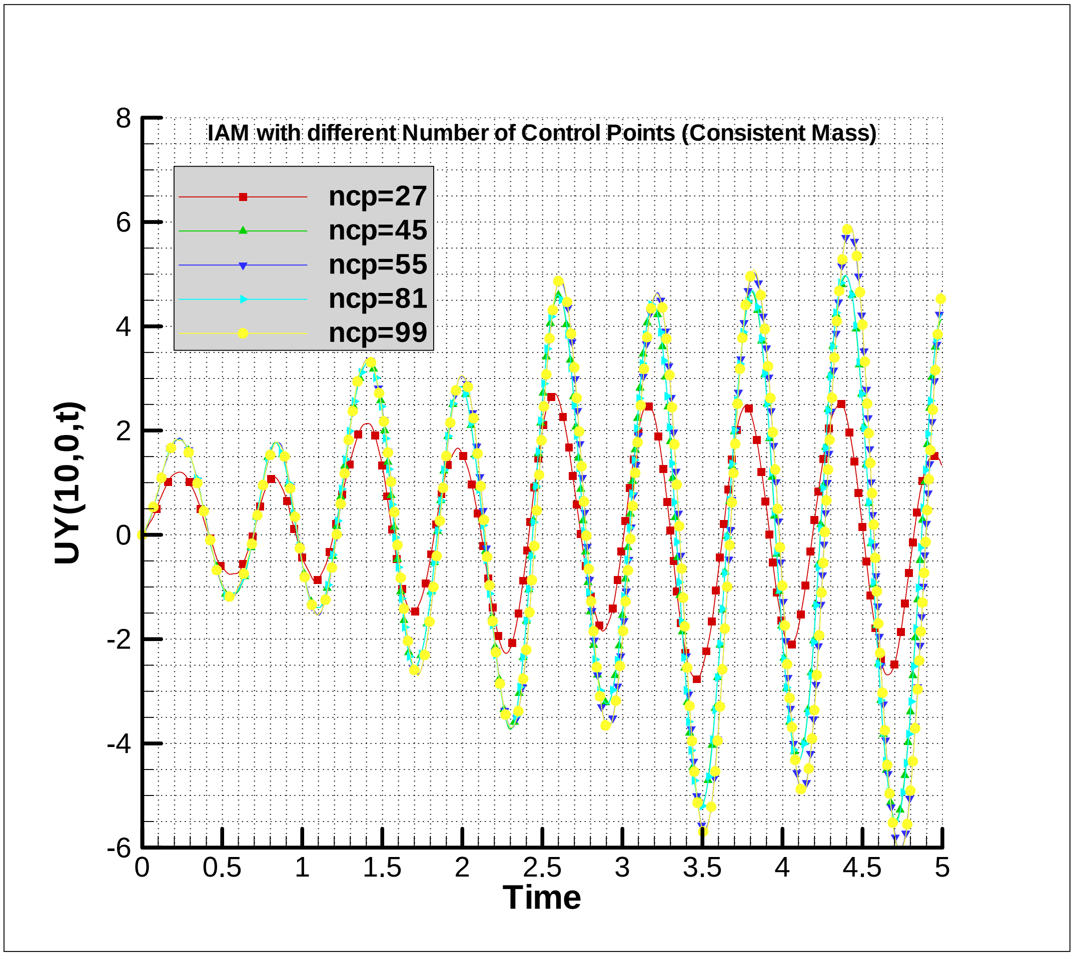
شکل(۵-۱۲) - نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم سازگار



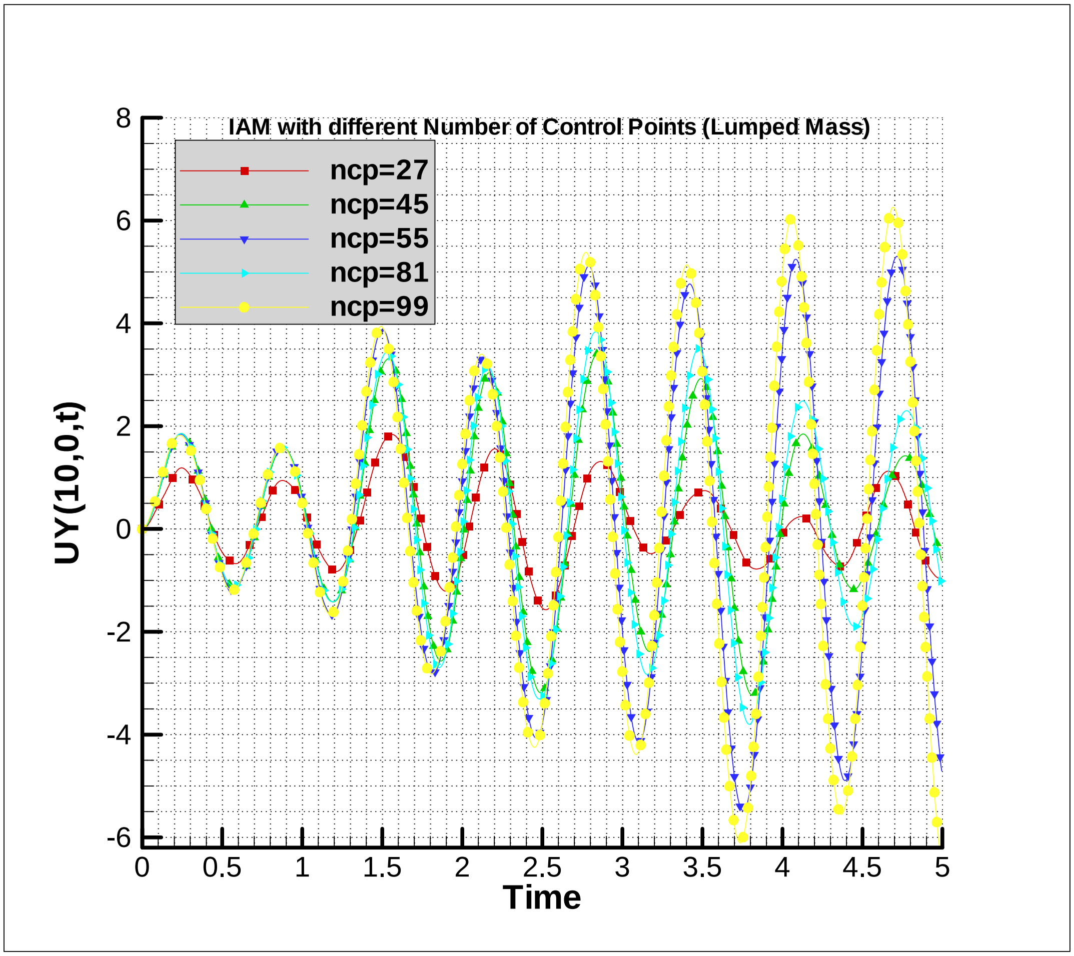
شکل(۵-۱۳) - نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم متمرکز

همانطور که ملاحظه می‌شود افزایش نقاط کنترلی باعث بهبود جواب خواهد شد البته این روند افزایش نقاط کنترلی باید با اصولی همراه باشد که در ادامه توضیح می‌دهیم.

به هنگام استفاده از ماتریس جرم متمرکز اگر نحوه افزایش نقاط به گونه‌ای باشد که نسبت فاصله طولی و عرضی نقاط کنترلی را کاهش دهد، این روند به بهبود جواب کمک می‌کند ولی در غیراینصورت چنین نخواهد بود که در شکل(۵-۱۵) ملاحظه می کنید.



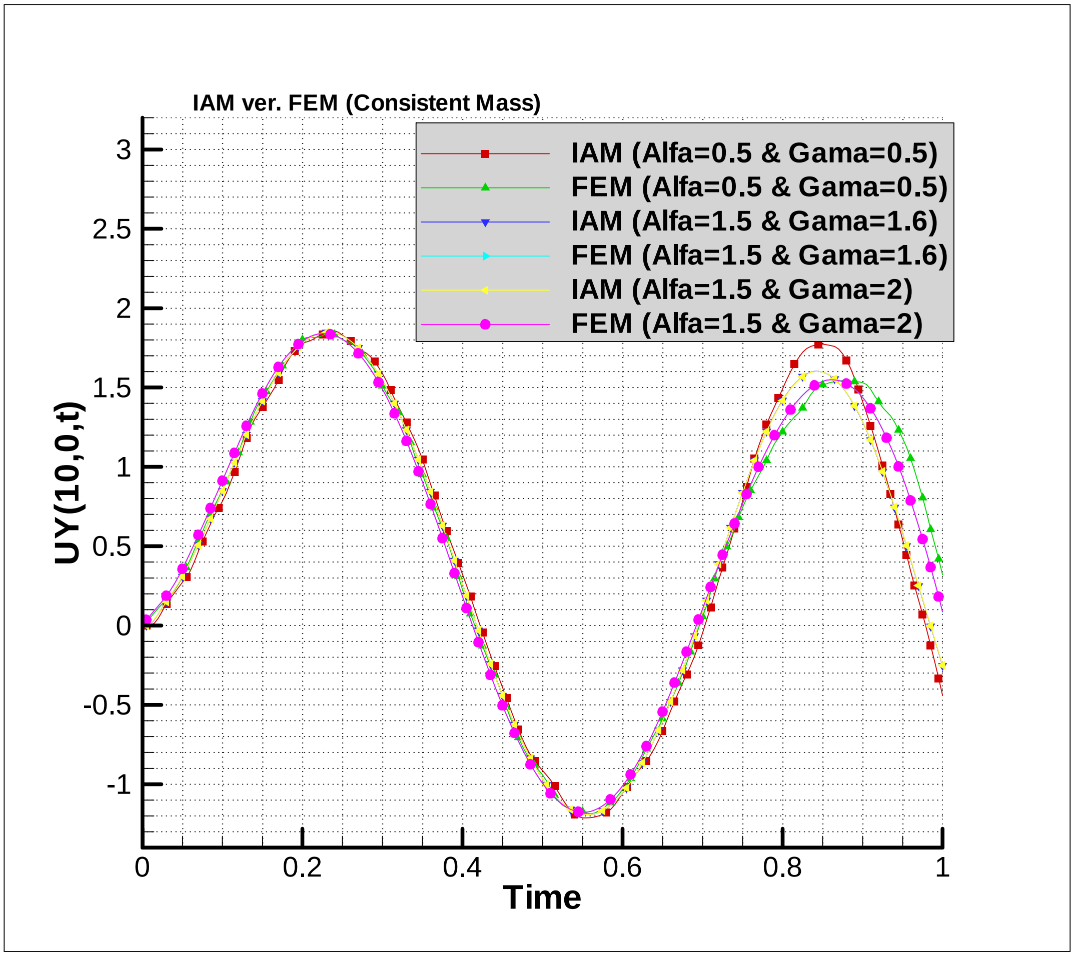
شکل(۵-۱۴) - نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم سازگار



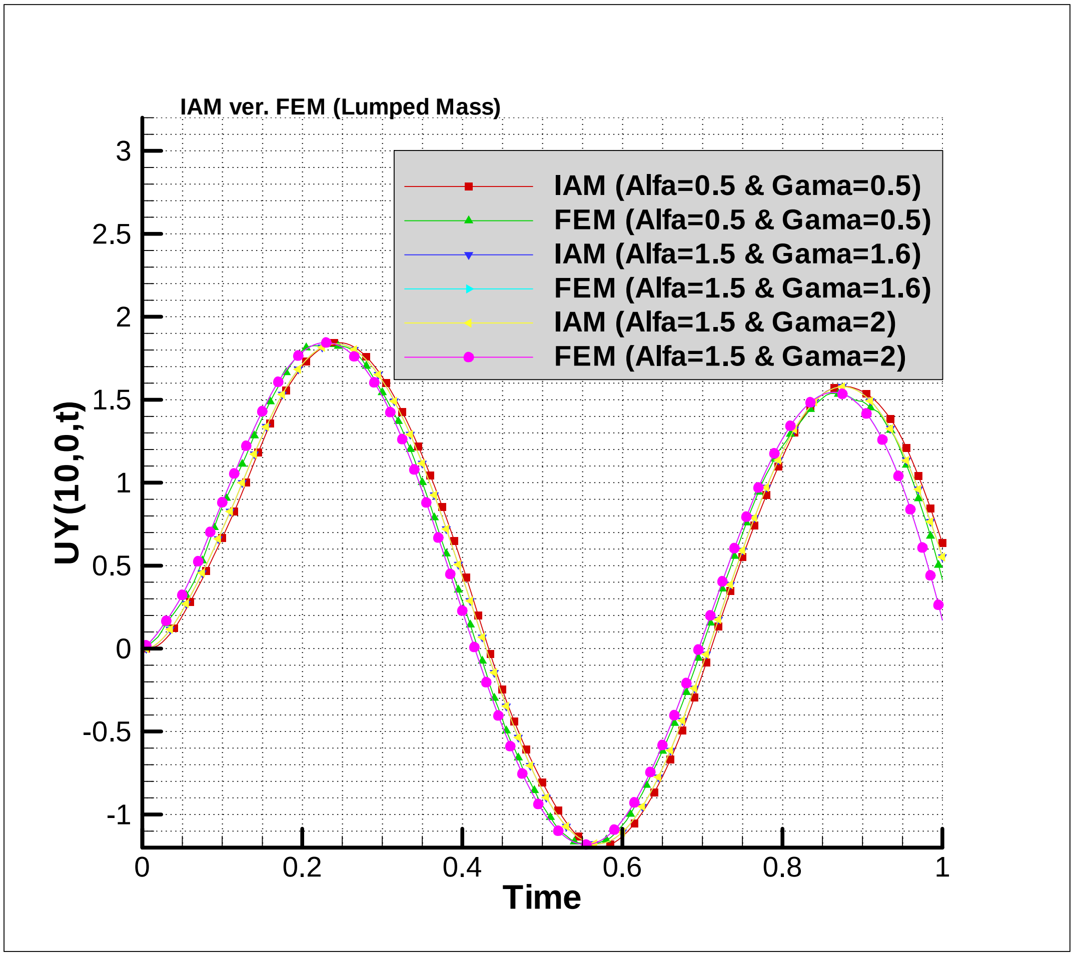
شکل(۵-۱۵) - نمودار مثال۷ با تعداد نقاط کنترلی متفاوت و ماتریس جرم متمرکز

مشاهده می شود که در حالتی که از ماتریس جرم متمرکز استفاده می شود، افزایش نقط کنترلی به تنهایی منجر به جواب دقیقتر نمی‌شود، بلکه این افزایش نقاط باید به نحوی باشد که نسبت فاصله طولی و عرضی نقاط کنترلی زیاد نباشد، زیرا با افزایش نقاط کنترلی به ۸۱ دیده می شود که جوابها از مقدار صحیح خود دور می‌شوند.

مثال۸. مثال ۵ را با تغییر پارامترهای γ و α مورد بررسی قرار می دهیم و دو روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود را در دو حالت جرم متمرکز و سازگار با هم مقایسه می‌کنیم.



شکل (۵-۱۶) - مقایسه دو روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود با خود و با یکدیگر به کمک پارامترهای آلفا و گاما – جرم سازگار مثال ۸



شکل (۵-۱۷) - مقایسه دو روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود با خود و با یکدیگر به کمک پارامترهای آلفا و گاما – جرم متمرکز مثال ۸

در واقع در این مثال روشهای شتاب میانگین ثابت، تفاضل مرکزی و تفاضل پسرو که از خانواده نیومارک می‌باشند با یکدیگر مقایسه می شوند که ملاحظه می‌شود جوابها در این سه روش تقریباً به یک جواب همگرا می‌شوند و از طرفی دو روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود نیز همگرایی خوبی با یکدیگر دارند و این در حالی است که در شرایط کاملاً یکسان از لحاظ سیستم عامل و تعداد مجهولات مسئله، مدت زمان صرف شده در روش اجزای محدود حدوداً ۳ تا ۴ برابر زمان صرف شده به کمک روش ایزوژئومتریک می باشد.

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادات

پس از بررسی های انجام شده نتایج حاصله بصورت زیر است:

- در مقایسه روش های ایزوژئومتریک و اجزای محدود در تحلیل دینامیکی مسایل دو بعدی الاستیک تحت اثر بارهای ثابت و هارمونیک دیده شد که روش ایزوژئومتریک نتایج مناسبی دارد و از لحاظ سرعت انجام محاسبات بسیار بهتر از روش اجزای محدود عمل می‌کند بطوری که در شرایط کاملا یکسان روش ایزوژئومتریک حدوداً ۳ تا ۴ برابر سریعتر از روش اجزای محدود می باشد.
- در حل مسائل هم ماتریس جرم سازگار و هم ماتریس جرم متمرکز جوابهای مناسبی بدست آمد.
- افزایش درجه منحنی اسپلاین ها و افزایش تعداد نقاط گوسی باعث بهبود جواب در تحلیل دینامیکی مسائل الاستیک گردید.
- در تحلیل دینامیکی به کمک ماتریس جرم متمرکز افزایش تعداد نقاط کنترلی باید با یک شرط همراه باشد تا به جوابی مناسبتر نائل گردد وآن اینست که نسبت فاصله طولی و عرضی نقاط کنترلی بزرگتر از ۴ نباشد و تا حد امکان به عدد یک نزدیک باشد.
- در مقایسه روشهای شتاب میانگین ثابت، تفاضل مرکزی و تفاضل پسرو با یکدیگر به کمک روش ایزوژئومتریک جوابهای مناسبی ارائه شد. علاوه بر این تحلیل دینامیکی با این سه روش به کمک روشهای اجزای محدود و ایزوژئومتریک با یکدیگر مقایسه شد و جوابها تقریباً بر یکدیگر منطبق شدند.
- عدم انطباق کامل جوابها در تحلیل دینامیکی به کمک دو روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک قابل پیش بینی است، زیرا در حل مسائل از شتاب، سرعت و جابجایی گام

زمانی قبل استفاده می شود به طوری که در بررسی انجام شده با روش اجزای محدود، با شبکه بندی های مختلف دیده شد که با افزایش تعداد گره ها و در نتیجه کوچک شدن المانها نمودار تغییر مکان- زمان گره‌ای مشخص، دیگر بر هم منطبق نیست اما، از شکل خاصی پیروی می کند.

کلیه کارهای انجام شده در این پژوهش در حیطه مسائل ایزوتروپیک بود و به عنوان کارهای پیشنهای می توان این بررسی‌ها را در رابطه با مسایل ارتوتروپیک نیز به انجام رساند. همچنین با توجه به در اختیار داشتن ماتریس جرم و سختی می‌توان کلیه محاسبات فوق را در حیطه مسائل ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با حضور میرایی به انجام رساند.

مراجع

الف)انگلیسی

1. Hughes T.G.R, Cottrell J.A., Bazilevs Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, *194 (2005) 4135–4195*.

2. Rogers D.F., "An Introduction to NURBS", *Morgan Kaufmann Publishers, (2001)*.

3. Hollig K., Reif U., Wipper J., "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems", *SIAM J. Numer. Anal. 39, 2, (2001) 442-462*

4. Kagan P., Fischer A., Bar-Yoseph P.Z., "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis", *Int. J. numer. Methods Engrg. 41 (1998) 435-458.*

5. Kagan P., Fischer A., Bar-Yoseph P.Z., "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element", *Int. J. numer. Methods Engrg. 57 (2003) 1145-1175.*

6. Auricchio F., Beira˜o da Veiga L., Buffa A., Lovadina C., Reali A., Sangalli G., A fully ''locking-free isogeometric approach for plane linear elasticity problems: A stream function formulation". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2007) 160–172*

7. Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Reali A., Sangalli G., "isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation", *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering* M. Papadrakakis, D.C. Charmpis, N.D. Lagaros, Y. Tsompanakis (eds.) Rethymno, Crete, Greece, *13-16* June (*2007*)

8. Reali A., Hughes T.G.R, "An Isogeometric Analysis Approach for the Study of Structural Vibrations" *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 5257–5296*

9. Cottrell J.A., Hughes T.G.R, Reali A., "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, *196 (2007) 4160–4183.*

10. Elguedj T., Bazilevs Y., Calo V.M., Hughes T.J.R., "B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, article in press*, (*2008*).

11. Hughes T.G.R, Cottrell J.A., Bazilevs Y., "Computational geometry as a basis for computational structures technology": *A look into the future, Innovation in computational structures technology, Saxe-Coburg Publications, (2006)*.

12. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., "The Finite Element Method", *5th edition, Butterworth-Heinemann, 2000.*

13. Clough R.W., Penzien J., "Dynamics of Structures", *McGraw-Hill, New York, 1993.*

14. Reddy J.N., "An Introduction to finite element Method". *(1998)*

15. Hassani B, Moghadam NZ. "Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spline basis functions". *Technical Report No.1015, Shahrood University of Technology, Iran, 2009.*

16. Hassani B, Khanzadi M, Tavakkoli SM, Moghaddam NZ. "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems". *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lisbon, Portugal, June 1 - 5, 2009.*

17. Hassani B, Moghaddam NZ, Tavakkoli SM. "Isogeometrical solution of Laplace equation", *Asian journal of civil engineering (building and housing) vol.10, no.6, 2009, P.579-592.*

18. Piegl L., Tiller W., "The NURBS Book", *2nd ed., Springer-Verlag, new York, (1997).*

19. Chopra A.K., "Dynamics of Structures". *Theory and Applications to Earthquake Engineering, second ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.*

20. Cottrell J.A., Reali A., Bazilevs Y., Hughes T.J.R., "Isogeometric analysis of structural vibrations"(*2006*)

21. Bhatti M.A., "Fundamental Finite Element Analysis and Applications". *John Wiley & Sons, (2005)*

22. Bhatti M.A., "Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures". *John Wiley & Sons, (2006)*

ب)*فارسی*

۲۳.صدرنژاد. ا.، "*مبانی روش اجزای محدود در دینامیک سازه ها*"، ص ۴۰۸

۲۴. عابدی ک. ، "*روشهای عناصرمحدود*"، ص ۲۲۳

ABSTRACT

In this thesis, dynamic analysis of elastic problems in two dimensions has been done by isogeometric method. In fact, at the first step required equations is generated to earn the mass matrix. Also the finite element method is compared with isogeometric method.Moreover the effect of increase the control points and spline curve degree on answers improving has been detected. Considering that dynamic analysis is used in Newmark method, the effect of changing the parameters α and γ is compared with denoted methods.

Key words: Dynamic Analysis, Splines, Newmark method, Isogeometric

Shahrood University of Technology
Architecture and Civil Engineering Faculty

Development of an Isogeometric Formulation and a Computer Program for Dynamic Structural Analysis

Ehsan Zhiany Eidgahi Mashhad

Supervisor:

Dr B.Hassani

Advisor:

MS N.Z. Moghaddam

Thesis submitted for the degree of Master of Science

Mey 2010