بسم الله الرحمن الرحيم

ć ½ w û Þ v ¾ ú Ý ā º î Ê ý v ¹

ā ¿ (û Å ¾ ú Ý ā ÿ ¾ ñ

º É ½ v Ĉ Å w þ É ½ w í Ă ù w ý û w ĉ w ~

w ă ¿ ¾ ù ¿ v ¡ v ā ¾ Ċ w Ċ ê ā ¤ £ Å ā w ¿ ă w w Å z ć Ă ¿ ¤ w Å Å Ā Ċ

¿ v ¾ £ Ă Ý ± Ā Ā ú Ö ¬ Å ù Ç ÿ ½ Ă z

w É Ā í ½ w ĉ ¿ w ù

5 w ú þ ă v ½ º Ċ £ w Å v

Ĉ þ Æ ³ ¿ ÿ ¾ Ą z ¾ ¤ í ¹

ć ½ ¹ w ý w Ñ ½ ¾ ¤ í ¹

º É ½ v Ĉ Å w þ É ½ w í Ă « ½ ¹ ¼ · v ¢ Ą « º É ½

3 3 ā w ú ĉ ¹

x

¹ ÿ ¾ ă w É   Ĉ ¤ Þ þ Í   ā w ò Ê ý v ¹

ć ½ w ú Þ ù 5 ā ÿ º î Ê ý ¾ ú ¹ Ý

ā ¿ (w Å v 5 ¾ ā ú ÿ Ý ¾ ñ

w É Ā í ć ½ w é j ĉ Ç Å w ü þ É ½ w í   Ă ù w ý   û w ĉ w ~

5 û v Ā þ Ý   ¢ ´ £

Ă Ý Ā ú ¬ ù   Ç ÿ ½   Ă z   w ă ¿ ¾ ù   ¡ v ¾ Ċ Ċ â £   ¿ v

¿ v ¾ £   ± Ā Ö Å

º É ½ v   Ĉ Å w þ É ½ w í   ë ½ º ù   ¸ ¼ · ¾ v ¸ 2 ¢ Ą ¼ w ¾ ĉ ½ ¹ Ĉ Î Î ¸ £

) ¢ å ¾ ñ   ½ v ¾ Ā é · Ă Ç ¼ ¾ ĉ Ċ Æ w z ¹ ½ ÿ Ā ù Ĉ z w ĉ ¿ ½ v   ¹ ½ Ā

i wÒ	5 ÿ ½ w Ê ù º Ċ £	i wÒ	5 w ú þ ă v ½
	Ĉ ö í Ā £ ć Ā º º þ ü Ą ñ º ¹ Ċ v Å Ā		Ĉ þ Æ ³ ¿ 5 ÿ ¾ Ĉ ñ Ą ¹ z v Ā ¾
			ć ½ ¹ w ý 5 ŵ Ñ ½ v ¾ Ā

i wÒ ù	Ĉ ö Ċ ú î £ ¡	i wÒ	5 ½ ÿ v ¹
	Ã w { Ý 5 Ĉ Ã ñ º þ v Ą Ā		Ĉ ý w Ą Ċ í 5 Ĉ Ĉ ñ ö ¹ Ý v Ā ³
	ć º ú		ć º ú ³ v 5 Ĉ ñ ³ ¹ v v ¾ Ā

©

5Ăz øĉºê£

Эپ٢ و•Я И

5 Ĉ ý v ¹ ½ º é ÿ ¾ î Ê £

º ý v ā ¹ ¾ í ć ½ w ĉ Ă ù w ý û w ĉ wĈ~ù ü÷ĉ¿vđ ÷¹wĀ¬·ý v¾ zô
ÿ ¾Ú ý ¢ é ¹ Ă í l Ĉ þ Æ ³ ¿ ÿ ¾ Ą z ¾ ¤ í ¹ ć w é j x
ÿ JĀ¢zÅ vĂ ùāw¹ý û w ĉ w ~ ü ĉ v ÷ w ¬ ý v ô ³ v ¾ ù ½ ¹ l
ü ĉ v û º Ċ Å ½ ¾ ú § Ă z y « Ā ù ¹ Ā · Ă ý v ¾ z º ù ć w
û v À ĉ À Ý ü ĉ v ć v ¾ z v ½ ć ¾ ¤ Ê Ċ zā ºĂÉ¯ Ă¾ûăw ý ¢ Ċûêwå

) ÷ º þ ù ÿ ¿ ½ j

Ă í l ā½ÿwÅ ć Ā¾¤Êý v ¹ Ĉ ö í Ā £ ć º Ą ù ć w é j ¿ v
û w Ê ĉ v ć v ¾ z û ÿ À å v ¿ ÿ ½ è Ċ å Ā £ ÿ) ÷ ½ v ¹ Ĉ ü

) ÷ ½ w ¤ Å v Ā ·

Ă ù w ý º Ą Þ £

¹ ÿ ¾ ă w É Ĉ ½ w þ ¾ ā ý ā £ ÿ ¾ Ă ÿ É ½ º É ½ v Ĉ Å É Ā É ½ ÿ ý w ā þ ÿ v ¹ ć Ā

5 ÷ Ā É Ĉ ½ ¹ º Ą Þ w Ñ ½ ¾ ¤ Ĉ ± w ý Ă â þ Æ ³ ¢ ý ¢ ¾ Ą z ā

) ¢ Å v ½ v ¹ ½ Ā · ¾ z ¢ õ w Í v ÿ ¢ ´ Í ¿ v ¶ ÿ ā º É ÷ w ¬ ý

) ¢ Å v ā º É ¹ w þ ¤ Å v ā ¹ w æ ¤ Å v Å ½ Ā ¶ ½ ¹ Ü « ¾ ù Ă z

w « ½ ª Ċ ă ¿ w Ċ ¤ ù v w ĉ Ĉ í ½ º ù Û Ā ý ª Ċ ă ¢ å w ĉ ½ ¶ ć v ¾ z ć ¾ ò ĉ

) ¢ Å v Ă ā v º ½ Ê v ý

Ĉ ¤ Þ þ Í < ÷ ā w ò Ê ý z v ¹ ÿ ¾ ¸ º É Æ ù ¾ ă Ĉ w É ê Ĉ ¤ Þ þ Í ā w ò Ê ý v ¹ ¶ Ă z è ö Þ ¤ ù

) º Ċ Å ½ º Shahrood University Of Technology è w; ¢ ÿ ¾ ă w É

û ý ĉ w © ¾ ¸ ¤ Æ ù ¡ đ w ê ù ½ ¹ º ý v ā ¹ Ā z ½ v ¼ ñ ¾ Ċ ¶ § w £ Ă ù w ý û

) ¢ Å v ā º É ¢ ĉ w Ý ½ Ă ù w ý

ā ª É w æ ¤ Å v w ĉ Ă ¤ å w ĉ Ĉ Å ¾ ¤ Å ¹ Ă ù w ý ¾ ā ù w ĉ ý É ½ ¶ þ w ³ Ý Ê Ô v Ă Ċ ö Ā

) ¢ Å v ā º É ¢ ĉ w Ý ½ Ĉ ý ¿ w Æ ý v ô Í Ĉ é Ē ¢ · Å v ó Ā Í v

, . *3 *3 2

¾ Ê ý ÿ è ³ ÿ ª ĉ w ¤ ý ¢ Ċ î

I ć v Ă ý w ĉ v ½ ć w ă Ă ù w ý ¾ z I x w ¤ í ·

y ö Ö ù ü ĉ v) º É w z Ĉ ù ¹ ÿ ¾ ă w É Ĉ ¤ Þ þ

) ¹ Ā É ¾ í » Ă Õ Ā z ¾ ù Ĉ ú

) º É w z Ĉ ú ý ¿ w ¬ ù Ü « ¾ ù ¾ í » ·

5 ā º Ċ î ¯

Ç ÿ ½ ì ú ā í ¿ w Å z ì w ĉ Ă Å þ Ā Ċ õ Ą z ~ Ā £ v ¾ ć z ¿ w Ĉ Å É ÿ ½ Ă t v ½ v I Ă ù

½ ¹ Ĉ w ú Z ý ù v y Å º w É þ w ù Ă þ ć Ċ Á Ą Ā z õ Ā ć ~ v Ā ¾ £ z Ç ÿ ć ½ ¿ w ¾ Å ù w { ¡ õ w ¾ á Ċ Ċ) â ¢ £ Å w ć ã [illegible]

Ă í Ĉ Ð ½ v ā Ĉ ¿ Ý w w Å Ă ā þ ć Ċ ¿ Ą w ± Å Ā ½ Ö Å Ă ¿ Ý þ Ā ú £ ¬ ½ ù º é ÿ v ½ w í Ç ÿ

) Ĉ ¹ ù Ă É Ĉ å Ĉ ¾ Û Þ w ù þ v é ½ þ ŵ ù Ă þ Ú Ă Ą ö ý ú v Ē ć ù ¹ ½ ¹ Ā Ā ù Ċ é ć ¿ ÿ w Å ã

Ĉ î Ċ ù w þ ĉ ¹ ć w ă ĝ ¾ ù ć Ĉ ÿ ù ă ć ¿ Ă ĉ þ ŵ Å º Ą ± z ¿ ¹ w Ă Å í Ā Í ć Ç v Ă ½ ü ĉ v ½

º ý ÿ ½ ½ ¹ Ă Ĉ í ù ¢ Ĉ Å å v ¾ Þ ² ù Ñ v ¾ ÿ £ ¾ đ ~ w z) ¹ º Ā Þ É z ¿ v Ĉ þ ú Ñ

¿ v ¾ £ ± Ā Ö Å Ă Ý Ā ú ¬ ù Ü z w £ Ĉ õ ÿ ¢ Å Ă v þ Ċ ć Ą ¹ z w ĉ ¿

) Ĉ º ù ă ¹ ¹ ½ v ¾ é w ù ½ w Ċ ¤ · v ½ ¹ Ĉ ¤

ì ĉ Á Ā õ Ā ~ Ā £ ć ¿ w Å Ă þ Ċ Ð Ą z ì Ċ ĉ ù t Ă w ù Ē Ĉ ù ÿ ¾ w ĉ Ą ³ ý é ½ v ¹ ¾ z ć

ĝ ¹ ¾ ŵ Ă t v ½ v ¿ v ¾ £ ± Ā Ö Å Ă Ý Ā ú ¬ ù Ç ÿ

Ü z v Ā £ I ¿ v ¾ £ ± Ā Ö Å Ă Ý Ā ú ¬ ù *5 ć Ç º ÿ Ċ ½ ö í I ¾ û î w Ċ ñ ~ Á v ć ÿ ¿*

w ă ¿ ¾ ù Ĉ þ ú Ñ ¢ í ¾ ³

y õ w Ö ù ¢ Å ¾ Ą å

ó ÿ v ô Î å

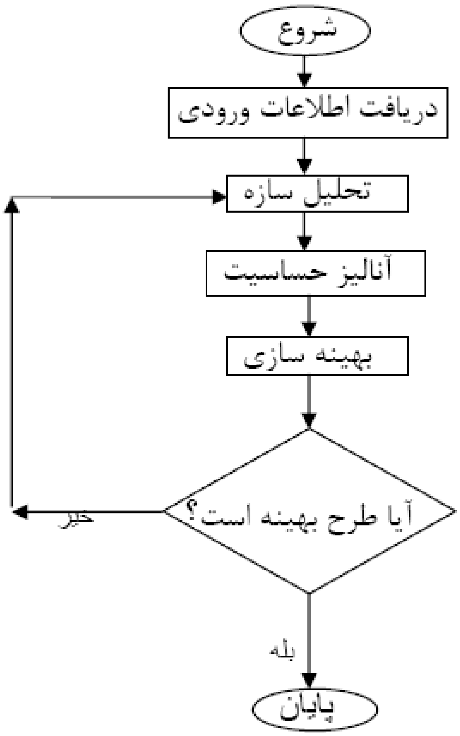
¡ w Ċ ö í

' Layout

Solid Isotropic Material with Penalization

÷wý Ăz Ì¸Êù ćwÒå ìĉ ½¹ ºþĉj¾å üĉv)º

)¹¾ĉ¼~ Ĉù ¡½Ă½ŕwzĈ ăìwņĒùĂ ĈĈĉ³£w³¾ýÕ ³Ăºwù¼v¢¹



wă ā¿wÅ ć¿ºþĄĉ÷,jĂĉþåĊÉĄz ½¹ Ĉöí

ĂĈv wĉ ÿ ºÉŵżÿĈûù¢ćwÅv½¹ÿĈăwá ±¾Õ ô{é

¢Åºz ½¹ ±v¾Õ Ăz Ăí ¢Åv ć½vÀzv Iìĉ ÁĀõĀ

Iìĉ ÁĀõĀ~Ā£ ć¿wÅ ĂþĊĄzÅw½þ¹ù)Ă¹Ċ¾õíÿvºăćvĀþz ć

¹Āz ºăÃÄ·ĂþĈùvĂÿĉĈ¾ŭw£æ)þĊĀþí¾ù Ăþùv¹ ûj Ă

Iìĉ ÁĀõĀ~Ā£ ć¿wÅ ĈĂùþĊÈĄÉzĀ~Ăõvw½Ēùĉ³ìv¾Õô³¢Ą÷«w

²õwÎù ¹º¬ù Üĉ¿Ā£ ÿ ã¼³ ãîº£ă Ô)ĉºvþ¾ÉÉwzI ćĈ½ùv

v½ ¾Úý ¹½Āù ãºă Üzw£ āĈºùŭÉ¢Åĉ¾Þ£ÁĂþĀ

ìĉ ÁĀõĀ~Ā£ ć¿wÅ ,ĂþĊĀĄ)º þćwĄ¤úýĈvþĊ½¹ ć¿wÅþ ŕĂ

¹ Design Domain

- Image Processing
- Operator

Ground Structure

Sequential Linear Programming

Sequential Quadratic Programming

Modified Method of Feasible Direction

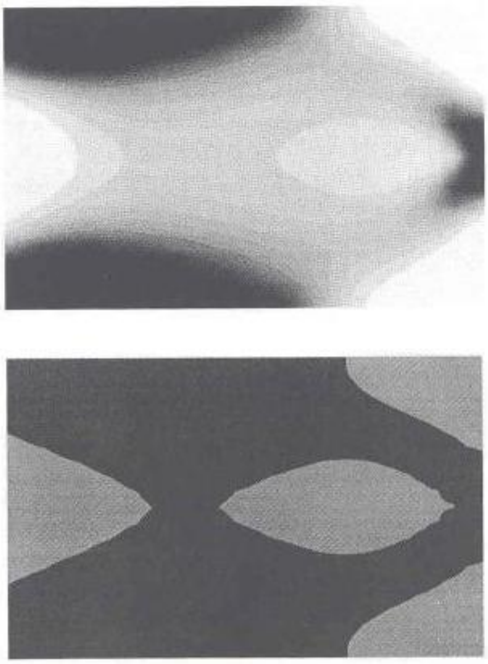
Hard kill/ Soft kill

Fully stress design

Effect stress

Principal Stress

Strain energy density



(الف)

(ب)

Ĉ ĉ w Ą ý   Ĉ ³ v ¾ Õ   ô î É   # x (--, Ăô¤îĊÉÆĊ ¤ Å đ v   ó ÿ º ù   ć w

’ć ¿ ẅ Å ú Ç ÿ ½

,) 8 7 º É Ĉ å,¾ Þ 3 ù 3 w ¯ Ā Å ½ Ď þ Å Ā £   ½ w z   ü Ç õ ÿ ½ v Ç ý ½ ¾ ü z ĉ v Ĉ ò þ Ċ

û ¹ ¾ í   Ì ¸ Ê ù   y ć Ċ v £ ¾ z £   Ĉ Ü ü z ĉ w º £ z ¹ ¿ w þ è ¤ ú Ā Ă v í   ć ½ Ā u £   ¿ v   Ç ÿ

¹ v º Þ £   ¾ z   ô ú ¤ Ê ù   y í ¾ ù Ĉ ü Ĉ å ¾ Þ ù ü ø Å Æ ¾ ñ ½ ¾ Ú ý ¹ v Ā

ü ĉ º Ĉ z ù   ) ¡ ¹ ¹ ¾ Ā Ċ Í ñ È ¸ º ý v ø Æ ¤ « É ½ ¹   ì ĉ ¹ Ā ĉ ¾ ~   ¡ ½ Ā Í   Ă z

w £   ô ³   Ĉ ñ º Ċ º Ċ ~   ÿ   ā º É   ô ĉ º { £   ć ¹ w Þ z v   ć ¿

I ì ĉ Á Ā õ Ā ~ Ā £   ć ¿ w Å   Ă þ Ċ Ą z   ô Ĉ w ã Æ ¾ Õ ¾ ½ z ¹   ć Ĉ ¹ ÿ v º ¾ Õ

ü Ċ ú ă   Ă z   ) ¹ w Ā ü z ¿   º ½ ă w Ċ Ā Æ z   Ă Ă þ ĉ w Ā Æ ã ¾ ~ ô ³ ÿ   ć ¾ v { ¾ ý z   Ĉ Ñ w

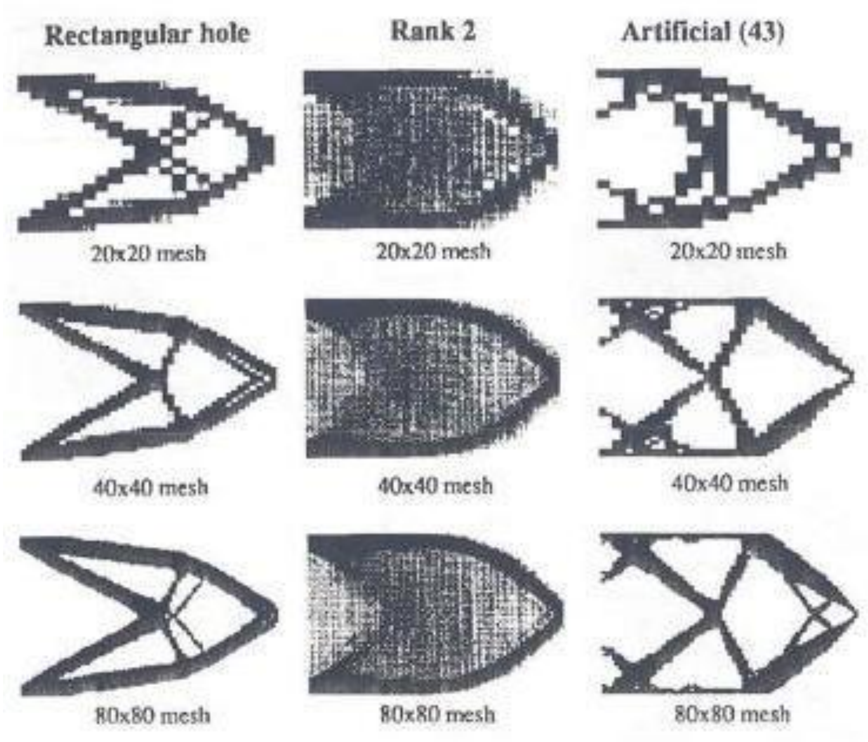
ã Ē ·   ¾ z   Ĉ ò þ Ċ Ĉ Ą ã z ¹ w ½ æ w ¤ Ċ Å Þ v ù   Ĉ ć ò w þ Ą Ċ É Ā ÿ z ½   ½) w ¹ Ċ Ā Þ É ù   ć w Ą É

ø Ċ ê ¤ Æ ù   ¾ Ĉ Ċ ù á   Ă ô þ î Ċ É Ą z Ă z v ½ I º ã þ º þ ă í   Ü z w £   ø Ċ ê ¤ Æ ù   ½

¹ Homogenization

² Bendsoe

[illegible]



[illegible]

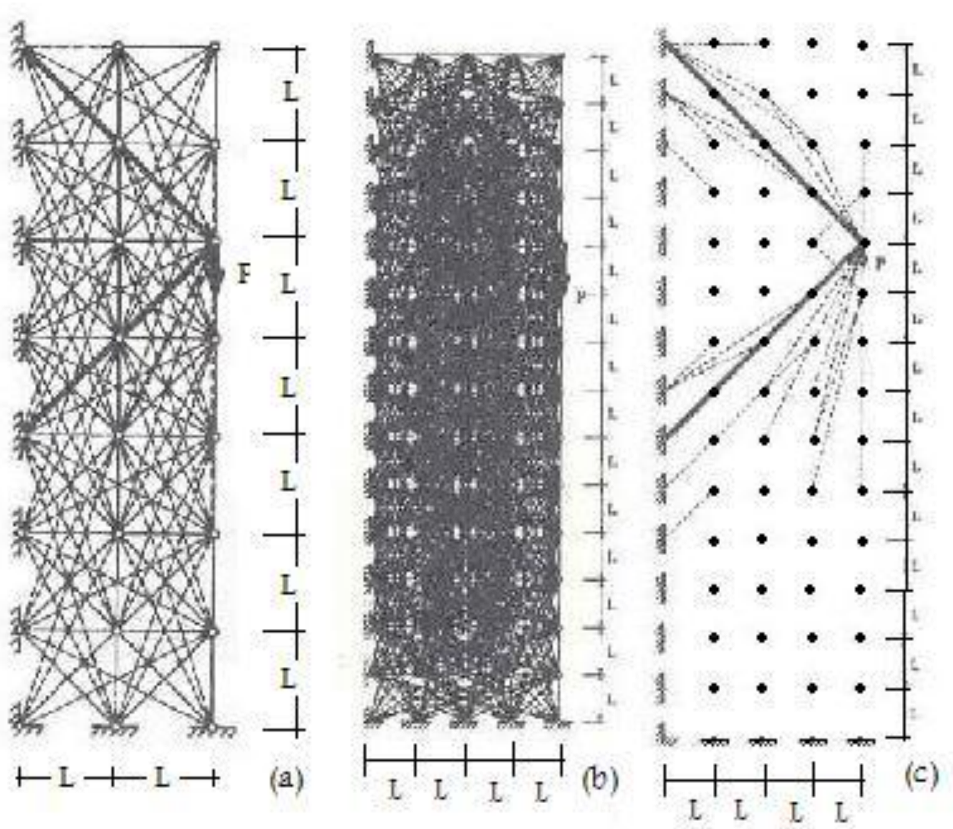
Ground Structure [illegible]

[illegible]

' Fully stress design

¯ Simultaneous failure design

[illegible]



Ground Structure [illegible]

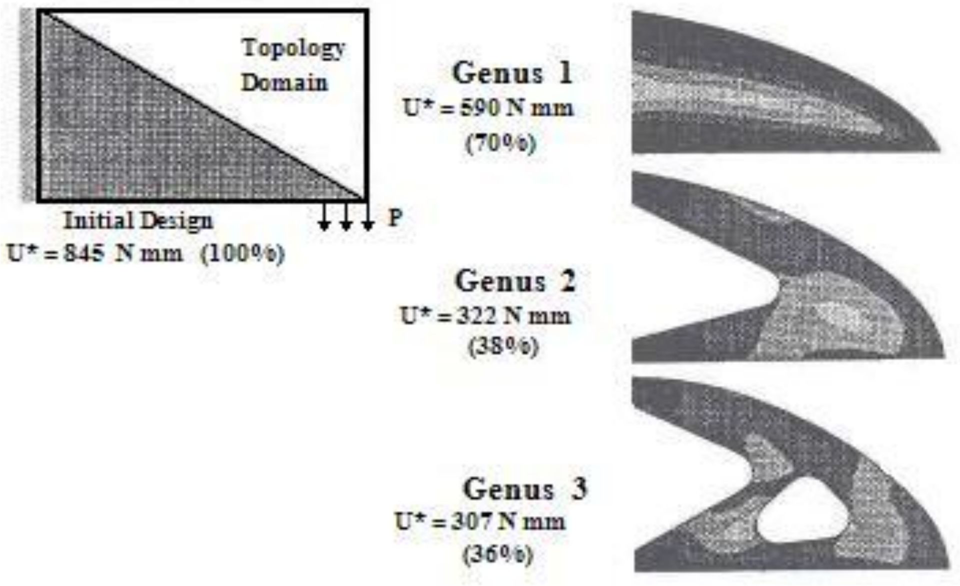
[illegible]

[illegible]

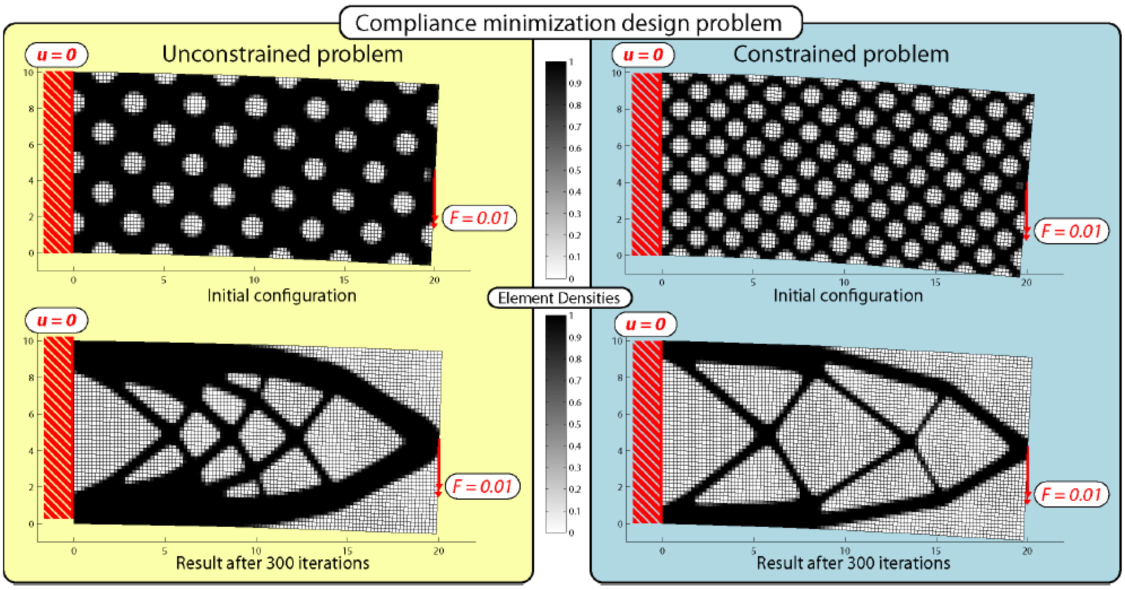
' Substructure

Variational Method

Clamped Beam



- Osher
- Sethian



Compliance minimization design problem
Unconstrained problem
Constrained problem
u = 0
F = 0.01
Initial configuration
Result after 300 iterations
Element Densities

÷ ÿ ¹ ô Î å

ć ¿ w Å Ă þ Ċ Ą z

, .

Ă ù [illegible]-ù

È ¸ z º [illegible] ½ [illegible] ½ w í Ă [illegible] ¼ Ă ± í ¾ Õ ü Ċ Ċ [illegible]

¹ ¾ z ½ w í ÿ ¡ w ê Ċ ê ´ £ Ă z Ă « Ā [illegible] z ü [illegible] ý [illegible] ù [illegible]

¹ Ā « [illegible] ½ Ă z ü ĉ v ć v [illegible] ý [illegible] þ [illegible]

) º ý v ā º ù j

½ ¹ Ă í ¢ Å v [illegible] Ĉ [illegible] w í { Å [illegible] { [illegible] ¾ ê £ ć w Ą É ÿ ½ [illegible]

Ă ö u Æ [illegible] v À [illegible] w [illegible] Ă ö u Æ ù ¹ w [illegible] v Ċ - Ă í ¹ [illegible] ý w ò [illegible] ĉ [illegible]

) ¹ ¾ í Ă { ö á Ĉ [illegible] { î [illegible] ê [illegible] ĉ [illegible] ÿ [illegible] v [illegible] ñ [illegible] Ą [illegible] ö ú Ý [illegible]

, /

- Preassigned parameters
- Design variables

$$g_j(X) \le 0 \quad j = 1,\dots,n_g$$

$$h_j(X) = 0 \quad j = 1,\dots,n_h$$

---

[1] Technological constraints

, Design space

- Feasible Design

. Feasible Region

/Unconstrained Design

0Constrained Design

$$\max f(X) = -\min[-f(X)]$$

$$z = f(\mathbf{X}) \to \min$$

$$g_j(\mathbf{X}) \le 0 \qquad j = 1,\dots,n_g$$

- Mathematical programming

$$f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X})$$

$$f(\mathbf{X}) \approx f^* + \nabla f^{*T}\,\Delta\mathbf{X} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{X}^T\,\mathbf{H}^*\,\Delta\mathbf{X}$$

$$\nabla^T f = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n}\right]$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_1 \partial \mathbf{X}_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_1 \partial \mathbf{X}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_n \partial \mathbf{X}_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^*$$

Unconstrained minimum

Constrained minimum

Hessian matrix

$$\Delta f = f(\mathbf{X}) - f^* = \nabla f^{*T}\Delta\mathbf{X} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{X}^T\mathbf{H}^*\Delta\mathbf{X} > 0$$

$$\nabla f^* = 0$$

$$q = \Delta\mathbf{X}^T\mathbf{H}^*\Delta\mathbf{X} > 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}dX_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_n}dX_n$$

$$h(\mathbf{X}) = 0$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial h}{\partial X_2}dX_2 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial X_n}dX_n = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} + \lambda\frac{\partial h}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} + \lambda\frac{\partial h}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} + \lambda\frac{\partial h}{\partial X_n}\right)dX_n = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1,\ldots,n_k$$

$$f(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_j} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n_h$$

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla h_j = 0$$

$$h_j(\mathbf{x}) \neq 0$$

Lagrange Multiplier

Lagrangian Function

Stationary point

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$g_j(\mathbf{X}) \le 0$$

[illegible] S_j [illegible]

$$h_j(\mathbf{X}, S_j) = g_j(\mathbf{X}) + S_j^2 = 0$$

[illegible] $g_j(\mathbf{X}) > 0$ [illegible] $g_j(\mathbf{X}) < 0$ [illegible] S_j [illegible] $g_j(\mathbf{X}) = 0$ [illegible] $S_j = 0$ [illegible]

[illegible]

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \lambda) = f + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \left(g_j + S_j^2\right)$$

[illegible]

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial X_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_j} = 2\lambda_j S_j = 0 \qquad i = 1, \dots, n_g$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_j} = \left(g_j + S_j^2\right) = 0 \qquad i = 1, \dots, n_g$$

[illegible] $g_j \le 0$ [illegible]

[illegible] $g_j = 0$ [illegible] S_j [illegible]

[illegible] λ_j [illegible]

Saddle points

Slack variables

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla g_j = 0$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, J$$

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j g_j \qquad \lambda_j \geq 0$$

Kuhn-Tucker conditions

) º Ĉ þ É w ö ù ø ú Ċ þ Ċ ù ì ĉ ć v ¾ z Ĉ å w í ÿ ÷ ¿ đ

Ă z Ó Ā z ¾ Ĉ ù ü w ¢ Ê ý w ³ v ½ ¹ ý ê Ô v Ă ã É þ ä ü ĉ ê v Ā É ç æ º û Þ É z

Ă þ Ċ Ą z ¾ Ú ý ¹ ½ g_j Ā Ô ù Å Ā Ä £ Ö ê ā ý º É) ¹ ö ¾ Ċ Đ ñ Ē ā £ Ç ú Ó ý ÿ ¼ É v ù ¾ é ô · v

ā º Ê ý ā ¹ ½ Ô ç ÿ ¾ É ¾ ¹ w £ w ĉ û w Ē ã w í Ĉ l ÿ º þ v í ¾ ĉ ¿ ¿ ÿ w l ¬ ¢ Æ É Ċ w ý

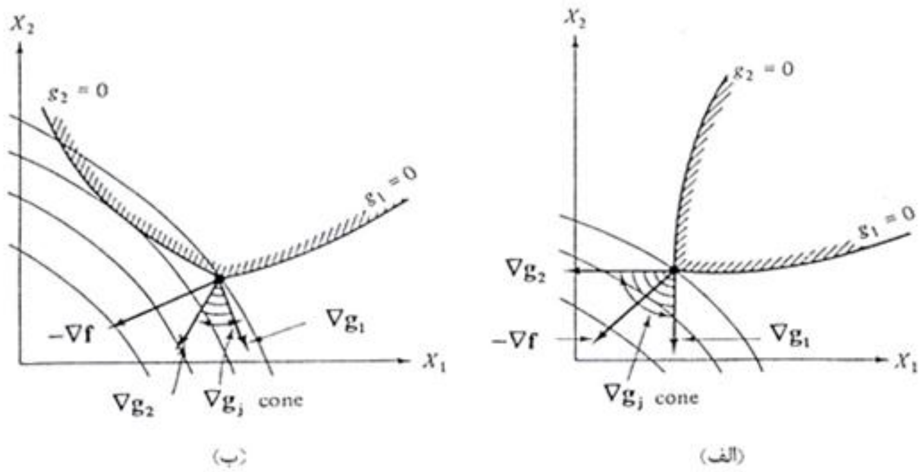
y Ċ í ¾ £ - ì Đ ĉ l w y Ą É ý ³ j ¾ z ć v ¾ z Ă í ć / $_j$ w ³ ă ú ĉ Ô v ú Ā v ý £ º Ċ ü ~ ĉ v ć ¾ ½ z Ā w Õ þ z v

Ă Ą Ċ Ă Ö ê ý ÿ ā , (- $ É û Ô ŵ Ā þ z é ¾ Ă v ù Ô ¢ ĉ õ v w ¾ ³ Ē w g_j ¾ ¿ ¼ # x) Ĉ ¹ Ö Ā · É û w

û Ĉ v ú Ā ý £ ÿ ½ ü Đ ô g_j y ¿ w ÿ ô Í ¹ ½ ³ v - ¹ Đ Ó Ă ¹ ý í ¾ Ç ¼ ù ê Ā º É ã ÿ w ¹ Ĉ É ù) º É w z

w Ą ý j ć v ¾ z ć / $_j$ w Ă ă ú Ĉ v ù Ā å) w ¹ ĉ Ā É Ĉ æ Ô þ ý ă º w É ý ā ¦ ¹ Ý ÿ w º z ´ ù Ă í ½ ¹ ¹ v ¹

) ¹ Ā É Đ w g_j ã w ¿ Ċ v z Ĉ Ö · Ĉ Đ { Ċ í ¾ £ y Æ



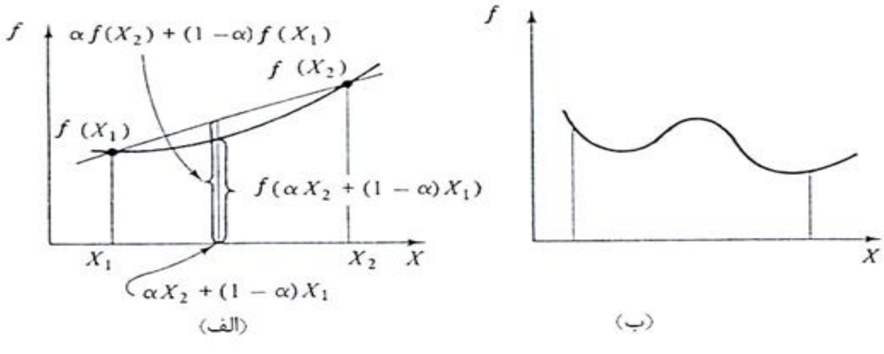
7, 8 º ý v ā º Ê ý Û w þ é v ¾ (û w £ í û Ó w ý , ¾ É Ó ä ÿ ¾ É v # x º ý v ā º É

¾ í w £ û w í Ô ĉ v ¾ É É ĉ w ¿ ù v ¿ j Ã ü ĉ ê v ¾ æ z û ĉ û Ă w ú Ā É £ ¾ í ½ Ā Õ Ċ Ą Ċ ù

û w ú Ĉ ă ù $_j$ y) Æ ³ É ¾ w z Ĉ Ö · ¡ đ ¹ w Þ ù û w ù À ú ă ô ³ Ă z ÷ À

Ĉ å w í ÿ ÷ ¿ đ Ô ĉ v ¾ É x º ´ ù ć ¿ w Å Ă þ Ċ Ą z Ă ö u

) º É º ă v Ā · ² ĉ ¾ Ê £ Ă ù w Ĉ z ù v è ½ Ö ù x º ø ú Ċ þ Ċ À ù



$\alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1)$
$f\ (X_2)$
$f\ (X_1)$
$f(\alpha X_2 + (1-\alpha) X_1)$
X_1
X_2
X
$\alpha X_2 + (1-\alpha) X_1$
(الف)
f
X
(ب)

---

¹ Analytical Methods

² Numerical Methods

[illegible]

$$\min \; f_0(\mathbf{x})$$
$$s.t. \; f_j(\mathbf{x}) \le 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

,-Schmit

$$f(\lambda) = \max \qquad \text{s.t.} \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(\mathbf{x}) \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$f(\lambda) = \min_{x} f(\mathbf{x}, \lambda)$$

$$\max_{\lambda} f(\lambda) = \max_{\lambda} \min_{x} f(\mathbf{x}, \lambda)$$

$$\min_{x} f(\mathbf{x}) = \min_{x} \max_{\lambda} f(\mathbf{x}, \lambda)$$

Separable

$$f(\lambda^*) = f(\mathbf{x}^*)$$ # (-$

û ¹ Ā z ¾ ĉ ¼ ~ ì Ċ î æ £ ÿ x ºĂ´íù

y Æ ³ ¾ z v ½ ÷ v º í ¾ ă û v Ā ¤ z Ă í º ý ¾ ĉ ¼ ~ ì Ċ

) ¹ Ā ú ý û w Ċ z Ĉ ³ v ¾ Õ ć w ă ¾ Ċ

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(x_i) \quad j = 1, \ldots, m$$ # (-$

º ă v Ā · ¾ ĉ ¼ ~ ì Ċ î æ £ ã À

Ü z ćw ĂĊ þ Ċ ù Ü ú « ¾ z v ¾ z I ¾ ĉ ¼ ~ (-$ ì Ċ î æ £

Ă í º Ċ z w Ċ ¹ ¾ ćí ½ Āä Ċ ¾ v ½ ¾ ĉ Ĉ ù ¡ I ¢ Å í Ăz j ā ¾ Ċ â w

$$\max f(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \max \left[f_i(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_{ji}(x_i) \right]$$

$$s.t.\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, m$$ # (-$

) ¹ ¾ ĉ ½ Ā í Ĉ ¤ ³ v ½) ü Ă ĉ z Â ý ¡ ½ Ā ñ í đ ü Ĉ z w £ ½

Ă ö u Æ ù Ă Ċ õ ÿ v ć w ă º Ċ é w z ¾ z v ¾ z û j ó ÿ v Ĉ

) ¢ Å v

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_j} = f_j\left(x(\lambda)\right)$$ # (-$

Ĉ æ ö ćw ¤ ă ĉ ½ Ā ò õ v ć ¾ Ċ ñ ½ w í Ă z ì w z û Ă ñ ÿ ¢ Å Ă ö ù Æ

½ ¹ w Ą ý Ĉ j ù ô ¢ ú Ċ ú w Ò å ½ ¢ ç w ý ¾ w ñ Ă ÿ í ¹ w ¬ ý j ¿ Ĉ v ù) ¹ Ā É

) ¹ Ĉ Ā ù É ¾ ¤ Ê Ċ z I ¢ Å v ø í Ĉ ³ v ¾ Õ ć w ă ¾ Ċ â ¤ ù

. ,

$$\min \quad f_0(x) \qquad \text{s.t.} \quad f_j(x) \le 0 \qquad j = 1,\dots,m$$

(SLP)

$$\min \quad f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0}$$

$$\text{s.t.} \quad f_j(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \le 0 \qquad j = 1,\dots,m$$

$$\text{and} \quad a_{li} \le x_i - x_{0i} \le a_{ui} \qquad i = 1,\dots,n$$

a_{ui}, a_{li}

x_i

x_0

Ă þ Ċ Ą z x_0 ¿ x_L Ă Ö º ê þ ý þ í Ă z ü Ċ ú Ò £ ¢ í ¾ ³ ¹ ÿ º ³ ü ĉ v ½ ¹ v

) ¹ Ā z º ă v Ā · ¾ £

ó Ā ³/ (Ő Ă í Ă # ¹ w Þ ù w z v ½ x_L Ĉ Ö w x_0 z ó Ĉ ÿ Å Ă Ă þ Ċ Ą z ÿ ā

ć ¿ w Å Ă þ Ċ Ą z Ĉ Ă ù õ ¾ w Æ ù î £ Ü é º v þ ÿ ĉ v ½ ¹ å w ü ĉ v ÿ) Ā Ĉ É þ í ½

ø Ċ ĉ Ā Ĉ ù z ü ĉ ø ¾ ý w Ā þ £ $ P $ ø Ĉ Ö · ā ¢ À ĉ ½ Ă Ă Æ ú ç w ¾ z # ½ w Ă

) ¹ Ĉ Ā ù É ā º Ċ ù w ý ć ¿ w Å Ă þ Ċ Ą z Ă · ¾ ¯ ì ĉ Ĉ Ö · ć

ć Ă w ¤ ă Æ z ¾ ¤ Ê Ė Ċ z ć ½ v À ć Ă w ă Æ ú Ö ¾ ù ÿ ¹ Ā z S L P ¾ ¤ Ç Å ÿ ¹ ½ ½ ¹ ¾ Õ w

¾ Ċ á ć À ĉ ½ ć Ă w ă Æ ç ¾ ¾ ã ò ¾ Õ ½ v À å v) Ā ¾ ý ĉ ¹ v ½ ć ¾ ø ¤ Ê Ė Ċ z Å Ă

Ă î þ ĉ v ó ÿ v SLP) ¹ ¹ ¾ v (ă v ½ ¹ Ă Þ ú ă ù ü ĉ v w Æ ù z) º þ ¤ Æ Ċ ý

º þ ĉ v Ĉ ¾ å È ĉ ¾ À ¿ v º ă ¹ w ĉ ¿ û v À Ċ ù Ă z ć Ă w þ ã ĉ À ă ¿ w Å

Ă z Ĉ ê Ö þ ù Ĉ ¤ é ÿ w Ą þ £ d ¹ Ā ¾ ú Ĉ ù ½ $ ¾) ü ¹ Ā v É w ā ½ û z ¾ ź v

¢ Ċ Å w Æ ³ ¡ w ê ¤ Ê ù ÿ ô Ċ ö ´ £ Ă þ ĉ À ă Ĉ ù ¾ Ú ý Ă Æ ĉ w ê

½ v ¹ ½ Ā · ¾ z Ĉ Ĉ ù ĉ ½ w S L P Æ z Ă Ė ć Ă ú v à v ć Ă w ç Æ ¾ ¹ ý Ĉ ½ v ½ w í Ä ~)

) ¢ Å v

Ă z Ĉ ý) ¹ v Ā É ò ú ă À ñ ¾ ă º þ ĉ v ¾ å Ă ¢ í ¾ ü ĉ v ¹ ý Ă õ w Æ ý Å w ü

ô Ċ õ ¹ ¿ v Ĉ Ê ø ¸ í z Ă) þ ¹ Ċ Ā Ą É z ì Ă ¯ z Ā í Ĉ ³ ø v ¾ Õ û º É ì ĉ ¹ À ý

È ĉ v À å v Ă þ Ċ Ą z Ă z û º É ì ĉ ¹ À ý ÷ w ò þ ă ¿ w Ċ ý

) Ĉ z ù w ĉ

ÿ Ĉ ø ù ĉ ô Ā ĉ É w ý ć ¢ w ¾ ê ñ Ā ½ À z Ă z Ă · Ċ ¾ Ą ¯ z ¾ ă Ĉ ½ v ¾ Õ ø Ċ ¿ ¤ v Æ ă Ă ½ ÿ Ĉ

) ø ĉ ÿ ¾ z È Ċ ~ Ă þ Ċ Ą z ¢ ú Å Ú Ă É ù ó w ² w Ĉ ù w ú w ă ½ Ö ·

ć w ă w Ö · w z ¹ Ā Ĉ ¾ ¤ ú ü ĉ ¢ Ĉ ù Å Ā ¹ À ý ô û Ā þ É Ċ ÿ Ą z ¹ Ā É z Ā

. .

Normalized

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(x) \\
s.t. \quad & f_j(x) \leq p f_j\left(x_{iL}^{*}\right) \quad p \geq 1
\end{aligned}
$$

#/ (1-$

$$
L = f\left(x_{iL}^{*}\right) - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j f_j\left(x_{iL}^{*}\right)
$$

#/ (2-$

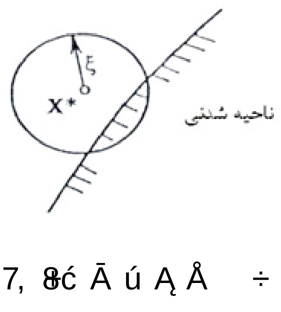
(SQP)

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \le \xi$$

$$\|\Delta \mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 \le \xi^2$$

$$\begin{aligned} &\min Z = f_0^* + \nabla f_0^{*T} \Delta \mathbf{x} \\ &s.t.\ \ f_j^* + \nabla f_j^{*T} \Delta \mathbf{x} \le 0 \qquad j = 1, \ldots, m \\ &\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} \le \xi^2 \end{aligned}$$



÷ Ā Å ô Î å

Ă Ý Ā Ç ú ÿ ¬ ½ ô ÿ Ĉ þ ú Ñ

¿ v ¾ £ ± Ā Ö Å

[illegible]

[illegible]

, (Implicit

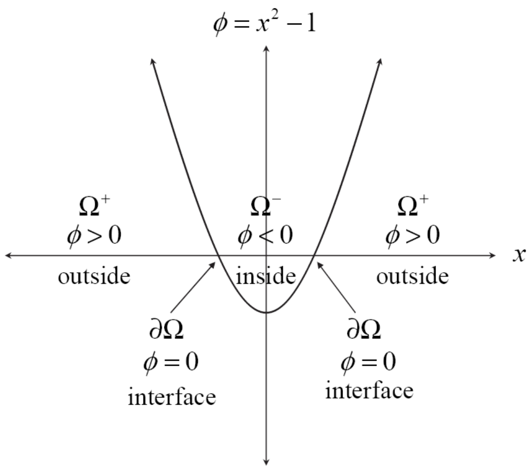
- (Hamilton-Jacobi

. (Osher & Sethian

- inside
- outside
- interface
- Codimension one
- explicit
- implicit
- isocontor

$f(x) = a$ ... $\phi(x)$ ... $f(x)$ ...

$f(x) = f(x) - a$ ... $f(x) = 0$ ...

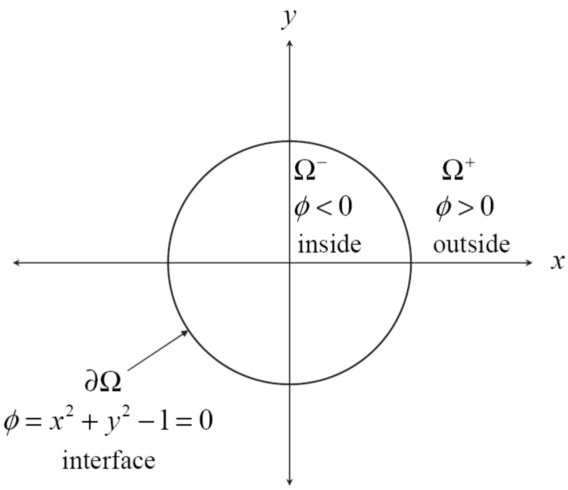


$f(x) = x^2 - 1$ ...

... $\{\mathbf{x} \,|\, |\mathbf{x}| < 1\}$ ...

... $\{\mathbf{x} \,|\, |\mathbf{x}| = 1\}$ ...

, (curves



$x^2 + y^2 = 1$

$(n-1)$

, (Surfaces

, (discretization

- (connectivity

. (merge

/ (pinch

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= 0 \\
f(\mathbf{x}) &< 0 \\
f(\mathbf{x}) &> 0
\end{aligned}
$$

(CAD)

$$f(\mathbf{x}) = \min\left(f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x})\right)$$

$$f(\mathbf{x}) = \max\left(f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x})\right)$$

' (Geometry toolbox

- (computer aided design

. (union

/ (intersection

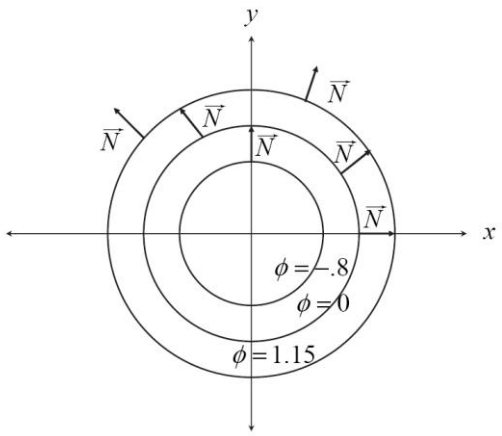
$f(\mathbf{x}) = -f_1(\mathbf{x})$

$f(\mathbf{x}) = \max\left(f_1(\mathbf{x}), -f_2(\mathbf{x})\right)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$



$f(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1$

complement

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$$N = \frac{|x|}{x}$$

$x > 0$

$|N|$

$D^+ f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

$D^- f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

$D^0 f$

(forward difference

(backward difference

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

[illegible]

$f(x) = x^2$

$x_{i+1} = x_i + \Delta x$, $x_{i-1} = x_i - \Delta x$, $x_i = 0$

$\Delta x = 1$

[illegible]

$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$

[illegible]

' (central difference

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$$k = -\nabla \cdot \mathbf{n} = -\left(\frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z}\right)$$

$$k = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$$

---

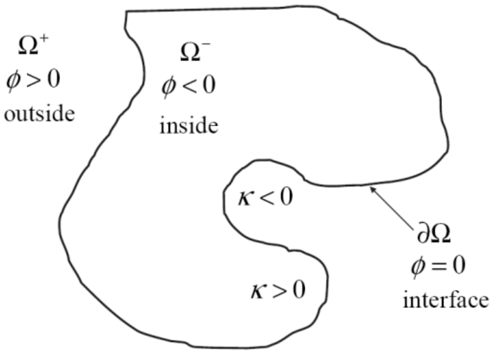
bilinear

thri-linear

smooth

well-behavior

Signe distance function



$$\kappa = (\phi_x^2\phi_{yy} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{xx} + \phi_x^2\phi_{zz} - 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} + \phi_z^2\phi_{xx} + \phi_y^2\phi_{zz} - 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} + \phi_z^2\phi_{yy}) / |\nabla\phi|^3$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$\kappa = \frac{2}{|\mathbf{x}|}$ … $\kappa = \frac{1}{|\mathbf{x}|}$

singularity

$$c^- = \begin{cases} 1 & if\ f(\mathbf{x}) \le 0 \\ 0 & if\ f(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

$$c^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & if\ f(\mathbf{x}) \le 0 \\ 1 & if\ f(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

Heaviside

$$H(f) = \begin{cases} 0 & if\ f \le 0 \\ 1 & if\ f > 0 \end{cases}$$

calculus toolbox

characteristic function

$$c^{+} = H(f(\mathbf{x})), \qquad c^{-} = 1 - H(f(\mathbf{x}))$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\, c^{-}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\big(1 - H(f(\mathbf{x}))\big)\, d\mathbf{x}$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\, H(f(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$$

$$d(\mathbf{x}) = \nabla H(f(\mathbf{x})).\mathbf{N}$$

$$d(\mathbf{x}) = H'(f(\mathbf{x}))\, \nabla f(\mathbf{x}).\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|} = H'(f(\mathbf{x}))\, |\nabla f(\mathbf{x})|$$

$$d(f) = H'(f)$$

dirac delta

5 ¢ É Ā ý ć º Þ z ì ĉ #,ć3(w.$¤ ÿ 2(.$Ü z w £ ¿ v

$$\breve{d}(\mathbf{x}) = d\left(\left|f(\mathbf{x})\right| - \left|\breve{f}(\mathbf{x})\right|\right) \qquad \text{#- +(.\$}$$

5 ¹ĈĀùăÉĉ ¾ Þ £ ¾µ ĉ ¿¿ ¾¡ù½ Āćþ ž ½ w £¾ z ¿ v ² Ö Å ó v

$$\oint_{W} f(\mathbf{x})\,\breve{d}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \qquad \text{#- ,(.\$}$$

Ă ú ă ½ w í ¹ Ā · ¡ ½ Ā Í Ĉ ùĂ z ÷ w ú ¤ õ ¹ ć ý ë ½ ¾ ¢ ž Ö z w ĉ ¤

#- ,(.$ ½ #- +(.$ ć ½ v ¼ òĈĉùw «© ½ w z ·)ó º v þ ¾ í ò ¤ ý v ¢ ú Æ ê ¾ ¤ Ê ù

5 É ø Ċ ă v Ā ·

$$\oint_{W} f(\mathbf{x})\,d\left(\left|f(\mathbf{x})\right| - \left|\breve{f}(\mathbf{x})\right|\right)d\mathbf{x} \qquad \text{#- -(.\$}$$

ć w Ò å ½ ¹ ó Ā Õ û w ú õ v ÿ ć º Þ z ÿ $d\mathbf{x}$ ć w Ò å ½ ¹

ô ³ ½ ¾ æ ¹ É w ë ž ¾ ¤ Ê ù ¿ ¾ $d(f(\mathbf{x}))$ « Ă Ă Ċ t ó ĉ w ú ý Þ z ¿ w ú ê º É w

¾ ĉ ¿ ¡ ½ Ā Í Ă z v ½ Ĉ ú º ý ĉ w ¢ Å ĉ º Ā z ă Ü Ā z å w £ ó ½ ¾ Ā ò ú þ ý ù v ü ĉ v

5 ø Ĉ ù þ õ ¾ Þ £

$$H(f) = \begin{cases} 0 & f < -e \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f}{2e} + \dfrac{1}{2\pi}\sin\left(\dfrac{\pi f}{e}\right) & |f| \le e \\ 1 & e < f \end{cases} \qquad \text{#- .(.\$}$$

Ă Å ā ¿ v º ý v Ă Ĉ ù v ½ Ý w ë ž ¾ ¤ Ê û ć ý ¾ Å z v ï ý ¾ Å Ý w þ ¹ ù Ā É ½ v º ê

5 Ĉ ù ¢ j Å ¹ Ă z ¾ ĉ ¿ ¡ ½ Ā Í Ă z w ¤ õ ¹ Ü z w

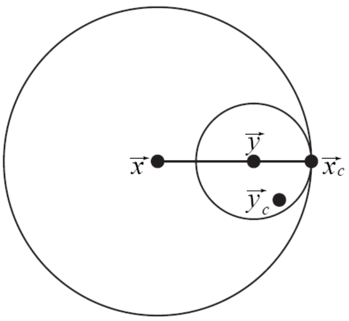
$$d(f) = \begin{cases} 0 & f < -e \\ \dfrac{1}{2e} + \dfrac{1}{2e}\sin\left(\dfrac{\pi f}{e}\right) & -e \le f \\ 0 & e < f \end{cases} \qquad \text{#- /(.\$}$$

#- -(.$ Ă Ö z v ½ ½ ¹ Ĉ² w Ö ù Å Ă ó z v ¾ ò ½ ý ā v ¿ w Ă « í v º ù ă ĉ ¹ v ç Ā å Ă

) ¹ ½ ÿ j ¢ Å ¹ Ă z ó Ā ú Þ ù ć ¹ º Ý

$$d(\mathbf{x}) = \min\left(\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\right|\right) \quad for\ all\ \mathbf{x}_i$$

$$d(x) = \left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\right|$$



$$\left|\nabla d\right| = 1$$

Distance function

$$\left|f(\mathbf{x})\right| = d(x) \quad for\ all\ x$$

$$f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) = 0 \quad for\ all\ \mathbf{x}$$

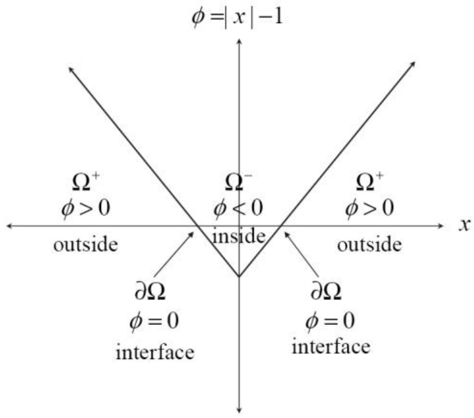
$$f(\mathbf{x}) = -d(\mathbf{x}) \quad for\ all\ \mathbf{x}$$

$$f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) \quad for\ all\ \mathbf{x}$$

$$\left|\nabla f\right| = 1$$

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x} - f(\mathbf{x})\mathbf{N}$$

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| - 1 \qquad |\nabla f| = 1 \quad for\ all\ x \neq 0$$



$|\nabla f| = 1$

$\vec{N} = \nabla f$

$k = \nabla \cdot$

$\nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{xy}$

[illegible]

[illegible] $f(\vec{x}) = c$ [illegible] $\vec{V}(\vec{x})$ [illegible]

[illegible] (u, v, w) [illegible]

[illegible]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}(\vec{x}) \qquad [illegible]$$

[illegible]

[illegible]

$$f_t + \vec{V} \cdot \nabla f = 0 \qquad [illegible]$$

[illegible]

$$\vec{V} \cdot \nabla f = u f_x + v f_y + w f_z \qquad [illegible]$$

[illegible] convection

$f(t, x^{+}) = k$ #. 4(.$

$$\frac{\mu f}{\mu t} + \frac{dx}{dt} Ð f(t, x) \quad \theta$$ #/ +(.$

÷½wĄ¯ ô Î å

ć wāă¿ wìÅĉ Á Ā õ Ā ~ Ā £

¿ v ¾£ ±ĀÖÅ ĂÝĀú

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

, (Bendsoe & Kikuchi

Sethian & Wiegmann

Osher & Santoaz

Allarie

[illegible]

, (Wang

- (Ruiter & keulen

. (Belytschko