

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده عمران - معماری

گروه عمران - سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد

## بهینه سازی سازه‌های پیوسته با استفاده از تغییرات مرزها

### به روشه مجموعه سطوح تراز

مازیار کوشان

اساتید راهنما:

دکتر بهروز حسنی

دکتر رضا نادری

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

۸۸ دیماه

# دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: عمران و معماری

گروه: عمران - سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مازیار کوشا

تحت عنوان:

بهینه سازی سازه های پیوسته با استفاده از تغییرات مرزها به روش مجموعه

سطح تراز

در تاریخ ۱۳۸۸/۱۱/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه بسیار خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور:	امضاء	اساتید راهنما:
	نام و نام خانوادگی: مهندس سید مهدی توکلی		نام و نام خانوادگی: دکتر بهروز حسنی
			نام و نام خانوادگی: دکتر رضا نادری

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور:
	نام و نام خانوادگی: مهندس عباس محمدی		نام و نام خانوادگی: دکتر علی کیهانی
			نام و نام خانوادگی: دکتر احمد احمدی

تقدیم به:

# پر و مادر عزیزم

## **تشکر و قدردانی:**

بر خود لازم می دانم که از همه عزیزانی که مرا در مراحل انجام این پایان نامه یاری کرده اند کمال تشکر و قدردانی خود را، به عمل آورم. از جناب آقای دکتر بهروز حسنی، که دقت نظر و راهنمایی های ارزنده ایشان همواره یاری رسان اینجگاب، در مراحل انجام این پایان نامه بوده است؛ و همچنین جناب آقای دکتر رضا نادری که با راهنمایی های مدبرانه خود موجب به ثمر رسیدن این پایان نامه شده‌اند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. و موفقیت هر چه بیشتری را برای این عزیزان آرزومندم.

همچنین مراتب سپاسگذاری خود را از آقای مهدی توکلی دانشجوی دوره دکتری سازه، که انجام این پایان نامه بدون کمک های ایشان میسر نبود ابراز می دارم. و توفيق روز افزون برای ایشان خواستارم.

## تعهد نامه

اینجانب مازیار کوشا دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته عمران- سازه دانشکده عمران- معماری دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی و دکتر رضا نادری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University Of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل راز داری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

۱۳۸۸/۱۱/۱۲

### مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده:

هدف از انجام این پایان نامه، ارائه روشی برای بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها به کمک روش تغییرات مرزه‌است. غالباً روش‌های تغییرات مرزی برای بهینه‌سازی توپولوژی مناسب نمی‌باشد اما در این پایان نامه روش کارا و قدرتمند مجموعه سطوح تراز در بهینه‌سازی سازه‌های ارتقایی خطی که تابع هدف و قیود مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد انتظار ما را اقناع می‌کند معرفی می‌شود.

در این روش، سازه‌ای که بهینه‌سازی می‌شود، مرزهای آن به صورت مدلی از مرزهای دینامیکی است که به وسیله یک تابع اسکالر ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شود. پرواضح است که در روند بهینه‌سازی، شکل و توپولوژی آن دست خوش تغییرات زیادی است ولی تابع مجموعه سطوح تراز توپولوژی تغییر یافته را به راحتی در اختیار ما قرار می‌دهد.

در نهایت برنامه آکادمیک TOLS به عنوان ابزاری برای حل مسائل بهینه سازی توپولوژیک سازه‌های پیوسته با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز ارائه گردید.

**واژگان کلیدی:** بهینه سازی سازه‌ها، بهینه سازی پیکر، روش مجموعه سطوح تراز، توابع ضمنی، حرکت ضمنی مرزها

## فهرست مطالب

۱	فصل اول: کلیات
۲	۱-۱ - مقدمه
۵	۱-۲-۱ - بهینه‌سازی توپولوژیک سازه ها
۶	۱-۳-۱ - روش نرم کشند و سخت کشند
۷	۱-۴-۱ - روش همگن سازی
۸	۱-۵-۱ - روش Ground Structure
۹	۱-۶-۱ - روش بابل
۱۱	۱-۷-۱ - روش مجموعه سطوح تراز
۱۳	فصل دوم: بهینه سازی
۱۴	۱-۲ - مقدمه
۱۵	۱-۲-۲ - فرمول بندی کلی
۱۵	۱-۲-۲ - متغیرهای طراحی
۱۵	۲-۲-۲ - قیود
۱۷	۳-۲-۲ - فضای طراحی
۱۷	۴-۲-۲ - تابع هدف
۱۸	۵-۲-۲ - رابطه سازی ریاضی
۱۹	۳-۲ - مفاهیم بهینه سازی

۲۰	- حداقل نامقید.....	۱-۳-۲
۲۱	- حداقل مقید (روش ضربگرهای لاغرانژ).....	۲-۳-۲
۲۴	- شرایط کان تاکر.....	۳-۳-۲
۲۵	- توابع و مجموعه‌های محدب.....	۴-۳-۲
۲۷	- روش‌های بهینه سازی و تقریب سازی.....	۴-۴-۲
۲۹	- روش دوگان.....	۵-۵-۲
۳۲	- برنامه ریزی دنباله ای .....	۶-۶-۲
۳۲	- برنامه ریزی خطی دنباله‌ای (SLP) .....	۱-۶-۲
۳۵	- برنامه ریزی درجه دوم دنباله‌ای (SQP) .....	۲-۶-۲
۳۷	فصل سوم: توابع ضمنی .....	
۳۸	- مقدمه.....	۱-۳
۳۹	- نقاط.....	۲-۳
۴۰	- منحنی‌ها.....	۳-۳
۴۲	- روشیه ها .....	۴-۳
۴۴	- ابزار هندسی.....	۳-۵
۵۰	- ابزار محاسبات .....	۳-۶
۵۳	- تابع فاصله .....	۳-۷
۵۳	- تابع فاصله علامتدار.....	۳-۸
۵۶	- انتقال .....	۳-۹

فصل چهارم: بهینه سازی توپولوژیک سازه های پیوسته به روش مجموعه سطوح تراز ..... ۵۸	
۵۹ ..... ۱-۴- مقدمه	
۶۰ ..... ۲-۴- معرفی و تاریخچه روش مجموعه سطوح تراز :	
۶۳ ..... ۳-۴- کاربرد روش مجموعه سطوح تراز در بهینه سازی توپولوژیک سازه	
۶۵ ..... ۴-۴- فرمولبندی مدل مجموعه سطوح تراز در مسائل بهینه سازی	
۶۷ ..... ۴-۵- الگوریتم بهینه سازی :	
۶۹ ..... ۴-۶- شرایط حل بهینه	
۷۴ ..... ۴-۷- حل عددی	
۷۶ ..... ۴-۷- ۱- نحوه محاسبه ضریب لاغرانژ قید حجم در مسئله بهینه سازی	
۷۷ ..... ۴-۸- نحوه حل معادله همیلتون ژاکوبی و تامین پایداری حل	
۸۱ ..... فصل پنجم: مثال های حل شده	
۸۲ ..... ۱-۵- مقدمه	
۸۳ ..... ۵-۲- توپولوژی قاب دو عضوی	
۸۸ ..... ۵-۳- توپولوژی بهینه تیر کنسول	
۹۷ ..... ۵-۴- تیر دوسر مفصل	
۱۰۰ ..... فصل ششم: نتایج و پیشنهادات	
۱۰۱ ..... ۶-۱- نتایج	
۱۰۲ ..... ۶-۲- پیشنهادات	
۱۰۴ ..... ضمیمه (الف) راهنمای TOLS	

- ۱۰۵ ..... راهنمای برنامه TOLS
- ۱۰۵ ..... ساختار برنامه TOLS
- ۱۰۶ ..... مشخصات برنامه
- ۱۰۶ ..... مراجع

فصل اول

کلیات

## ۱-۱ - مقدمه:

در طراحی سازه ها، بدست آوردن یک طرح بندی<sup>۱</sup> مناسب برای سازه امری لازم است. این طرح بندی بایستی به گونه ای باشد تا بتواند نیروهای واردہ را به شکلی امن و اقتصادی تحمل کند. بدین ترتیب طرح بندی مناسب سازه شامل اطلاعات توپولوژیک، شکل و ابعاد سازه می باشند. مسائل بھینه سازی را می توان در سه رده مختلف دسته بندی نمود که عبارتند از بھینه سازی توپولوژی، شکل و ابعاد سازه. در بھینه سازی توپولوژی سازه ها، هدف اصلی پیدا کردن تعداد مناسب حفره ها و محل آنها می باشد. به عنوان مثال در مورد یک خرپا، هدف از بھینه سازی توپولوژی، به دست آوردن تعداد بھینه اعضای خرپا و نحوه ارتباط آنها با هم می باشد. در بھینه سازی شکل سازه ها هدف اصلی پیدا کردن بهترین موقعیت مرزهای سازه است. برای مثال اگر خرپایی را در نظر بگیرید، حل مساله

---

<sup>۱</sup> Layout

بهینه سازی شکل خرپا، منجر به حل مساله ای می شود که جواب آن بهترین موقعیت مکانی گره های خرپا خواهد بود و متغیر های طراحی مساله بهینه سازی، مختصات گره های دو سر اعضای خرپا می باشد. نوع دیگر مسائل بهینه سازی، بهینه سازی ابعاد است که برای یک سازه خرپایی به مفهوم بدست آوردن حداقل سطح مقطع مورد نیاز هر یک از اعضا است.

بهینه سازی شکل و توپولوژی در دهه های اخیر پیشرفت های زیادی کرده و کاربردهای موقوفیت آمیزی در بهینه کردن مسائل علمی مهندسی داشته است. در بهینه سازی شکل هدف دست یابی به بهترین هندسه از دامنه طراحی است، با این فرض که بارگذاری و شرایط مرزی مشخص باشد. معرفی این نوع از بهینه سازی را می توان در کارهای هافتکا و جاندلی [۱] و دینگ [۲] و همچنین اولف و روزوانی [۳] مطالعه نمود. در نگاه اول این روش بسیار کلی به نظر می رسد. با این حال بهینه سازی شکل تنها قادر به بهینه کردن یک قالب اولیه با توپولوژی مشخص است.

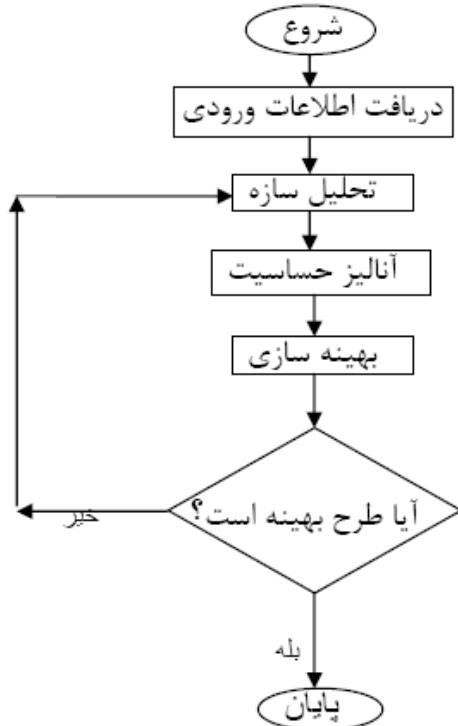
بنابراین در حالت کلی نیازمند روش های بهینه سازی هستیم که قادر به ایجاد تغییر در تعداد، موقعیت و نحوه ارتباط عناصر سازه ای باشند. در سال های اخیر تکنیک های مربوط به این نوع بهینه سازی معرفی شده اند. روش های زیادی برای حل مسئله توپولوژی وجود دارد. در یکی از تحقیقات اولیه که توسط بندسو و کیکوچی [۴] صورت گرفت، روش حل بر مبنای استفاده از ریز سازه بوده است. یک روش جایگزین برای آن، روش قانون توانی یا SIMP<sup>۱</sup> است [۵]. علاوه بر این روش ها، برخی روش های بر مبنای شهود نیز برای مسائل حداقل سازی کار خارجی یا دیگر توابع هدف مورد استفاده قرار گرفته اند. از میان این روش ها می توان به روش های تکاملی (ESO) اشاره کرد (ژی و استیون [۶]). برای مرور کلی بر بهینه سازی توپولوژی می توان به مرجع [۷] این پایان نامه مراجعه کرد.

هدف از بهینه سازی سازه ها، تولید سازه هایی است که با وجود وزن حداقل، از بیشترین

---

۱- Solid Isotropic Material with Penalization

مقاومت و سختی در برابر نیروهای واردہ برخوردار هستند. این فرآیند در یک فضای مشخص به نام دامنه طراحی<sup>۱</sup> و تحت اثر شرایط مشخص بارگذاری و تکیه گاهی صورت می‌پذیرد.



شکل ۱-۱- فرآیند کلی در بهینه سازی سازه ها

توپولوژی اولیه سازه یا از قبل طرح شده و دارای محدودیتهایی در ساخت می‌باشد و یا این‌که بایستی توسط یک مهندس طراحی شود. بهینه سازی توپولوژیک، ابزاری است که به طراح در بدست آوردن یک طرح بندی اولیه مناسب برای سازه، کمک بسیاری خواهد کرد. در بهینه سازی توپولوژیک، ابتدا فضایی را که به آن دامنه مرجع گفته می‌شود، تعریف می‌کنیم. این دامنه به گونه‌ای خواهد بود که فضای مورد نظر جهت طراحی را پوشش می‌دهد. به هنگام حل یک مساله بهینه سازی توپولوژیک، بارگذاری، شرایط تکیه گاهی و مشخصات مصالح معلوم می‌باشند. هدف حذف و توزیع مجدد مصالح در دامنه تعریف شده می‌باشد به گونه‌ای که در انتهای توپولوژی بدست آمده تابع هدف مورد نظر را در مساله بهینه سازی مینیمم کند<sup>[۸]</sup>. شکل ۱-۱ را ملاحظه کنید. در انتهای بهینه سازی توپولوژیک

---

<sup>۱</sup> Design Domain

سازه ها، ممکن است که طراح در بعضی از قسمت ها با توزیع نامناسب مصالح مواجه شود که برای رفع این مشکل می توان از پردازش تصویر<sup>۱</sup> استفاده نمود و با اعمال پردازش تصویر، توپولوژی جدیدی برای مساله مورد نظر حاصل می شود که اشکالات موجود را تا حدودی و یا کاملاً برطرف می کند.<sup>[۹]</sup>

بعد از انجام فرآیند بهینه سازی توپولوژیک می توان برای دستیابی به جواب های بهتر و اجرایی، اقدام به بهینه سازی شکل نمود. بدین منظور روش های مختلفی را می توان مورد استفاده قرار داد. همچنین می توان از بهینه سازی ابعادی بطور همزمان یا بعد از بهینه سازی شکل بهره جست.<sup>[۱۰]</sup> در بهینه سازی شکل، هندسه اولیه، بارگذاری و قیود تکیه گاهی از قبل معلوم بوده و سازه با استفاده از روش اجزای محدود تحلیل می شود. سپس با استخدام یک روش تکراری و محاسبه حساسیت شکل مساله به تغییر پارامتر های طراحی، از جواب اولیه به یک جواب بهینه می رسیم. بهینه سازی شکل می تواند به عنوان یک عملگر<sup>۲</sup> جهت بهبود بخشیدن به جواب های حاصل از بهینه سازی توپولوژی مورد استفاده واقع شود. البته می توان از پردازش تصویر به عنوان یک رابط میانی بین بهینه سازی توپولوژیک و شکل استفاده کرد که خود باعث رسیدن به جواب های بهتری خواهد شد.

## ۱-۲- بهینه سازی توپولوژیک سازه ها

بهینه سازی پیکره یا توپولوژیک سازه ها، ابزاری است که در طی سالیان اخیر الگوریتم های زیادی برای حل این نوع از مسائل ارائه شده است. شکل ۱-۱ را ملاحظه کنید. برخی از این روش ها عبارتند از:

الف ) روش سخت کشنده و نرم کشنده

ب ) روش همگون سازی

ج ) روش بابل

---

۱- Image Processing

۲- Operator

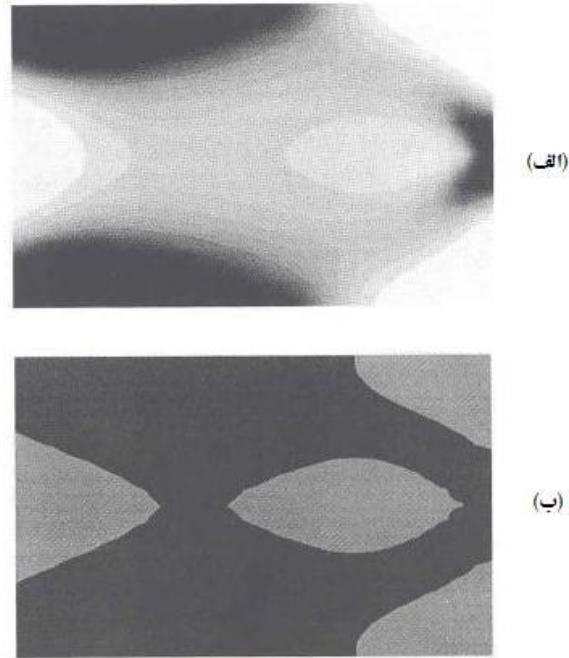
## د) روشناسی Ground Structure

روشهای (ب)، (ج) و (د) همگی دارای توابع هدف، متغیرهای طراحی و قیود بهینه سازی بوده و برای حل مساله بهینه سازی با استفاده از آنها بایستی از روش‌های برنامه ریزی ریاضی مانند روش‌های MMFD<sup>۳</sup>، SQP<sup>۴</sup>، SLP<sup>۱</sup> دارا نمی‌باشند و فقط سادگی این روش است که باعث استفاده از آن شده است. اساس این روش بر حذف مواد غیر موثر در حین فرآیند بهینه سازی بوده و مواد موثر باقیمانده شکلی را تولید می‌کنند که به عنوان شکل بهینه حاصل از این روش شناخته می‌شود.

### ۱-۳-۱- روش نرم کشند و سخت کشند<sup>۵</sup>

این روش در اصل یک تکنیک طراحی بر اساس تنشهای یکنواخت شده<sup>۶</sup> می‌باشد. در شروع کار محیط پیوسته با یک مش بندی ریز اجزای محدود، تقسیم بندی می‌شود. سپس یک آنالیز اجزای محدود بر روی دامنه اولیه سازه صورت می‌گیرد. بعضی از ثوابت مانند تنش موثر<sup>۷</sup> تنش اصلی<sup>۸</sup> و یا چگالی انرژی کرنشی<sup>۹</sup> برای هر المان محاسبه می‌شود. سپس مدول الاستیسیته نقاط مختلف سازه بر اساس تنش موجود در آن و با استفاده از روابط ساده مقاومت صالح تغییر می‌کند. این روش به صورت تکراری انجام می‌شود تا به جواب بهینه همگرا شود. سپس کانتورهای مدول الاستیسیته بر روی دامنه اولیه رسم می‌شوند. نواحی تیره تر نشانگر مقدار زیاد تر مدول الاستیسیته می‌باشند که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.

- 
- ۱- Sequential Linear Programming
  - ۲- Sequential Quadratic Programming
  - ۳- Modified Method of Feasible Direction
  - ۴- Hard kill/ Soft kill
  - ۵- Fully stress design
  - ۶- Effect stress
  - ۷- Principal Stress
  - ۸- Strain energy density



شکل ۲-۱- (الف) کانتورهای مدول الاستیسیته ب) شکل طراحی نهایی

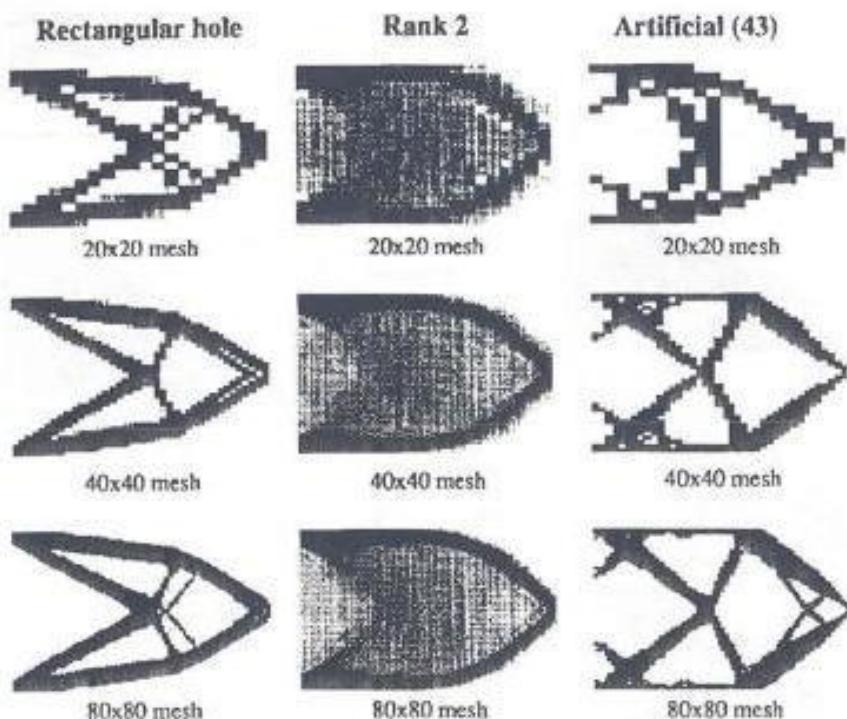
#### ۱-۴- روش همگن سازی<sup>۱</sup>

این روش و روش معیار بهینگی برای اولین بار توسط بندسو<sup>۲</sup> در سال ۱۹۸۸ معرفی شد [۱۰]. در این روش از تئوری همگن‌سازی استفاده می‌شود. بدین ترتیب که یک تابع برای مشخص کردن چگالی مواد در جسم معرفی می‌شود که این امر با در نظر گرفتن مواد مرکب مشتمل بر تعداد نامحدودی از سوراخهای ریز که به صورت پریوپاک در جسم پخش شده اند صورت می‌گیرد. بدین ترتیب مساله بهینه سازی توپولوژیک به مساله بهینه سازی ابعادی تبدیل شده و پیچیدگی حل تا حدودی برطرف می‌شود. به علت زیاد بودن متغیرهای طراحی در مسائل بهینه سازی توپولوژیک، استفاده از روش‌های برنامه ریزی ریاضی برای حل مساله بسیار زمانبر و پرهزینه خواهد بود. به همین علت برای حل این مسائل از روش‌های معیار بهینگی استفاده می‌شود. روش‌های معیار بهینگی برخلاف روش‌های برنامه ریزی ریاضی که به طور مستقیم تابع هدف را بهینه می‌کنند، به شکل غیر مستقیم

۱- Homogenization

۲- Bendsoe

برای اقناع معیارهای مرتبط با رفتار سازه تلاش می‌کنند. این معیارها یا به صورت ادراکی و یا با استفاده از روابط ریاضی استخراج می‌شوند. روش‌های "طرح بر اساس تنش‌های یکنواخت شده"<sup>۱</sup> و "طرح بر اساس مدهای خرابی همزمان"<sup>۲</sup> از جمله مثال‌های روش‌های معیار بهینگی مبتنی بر درک می‌باشند.



شکل ۱-۳-روش همگن سازی برای یک تیر طره عمیق به ازای مش بندی و مصالح مختلف

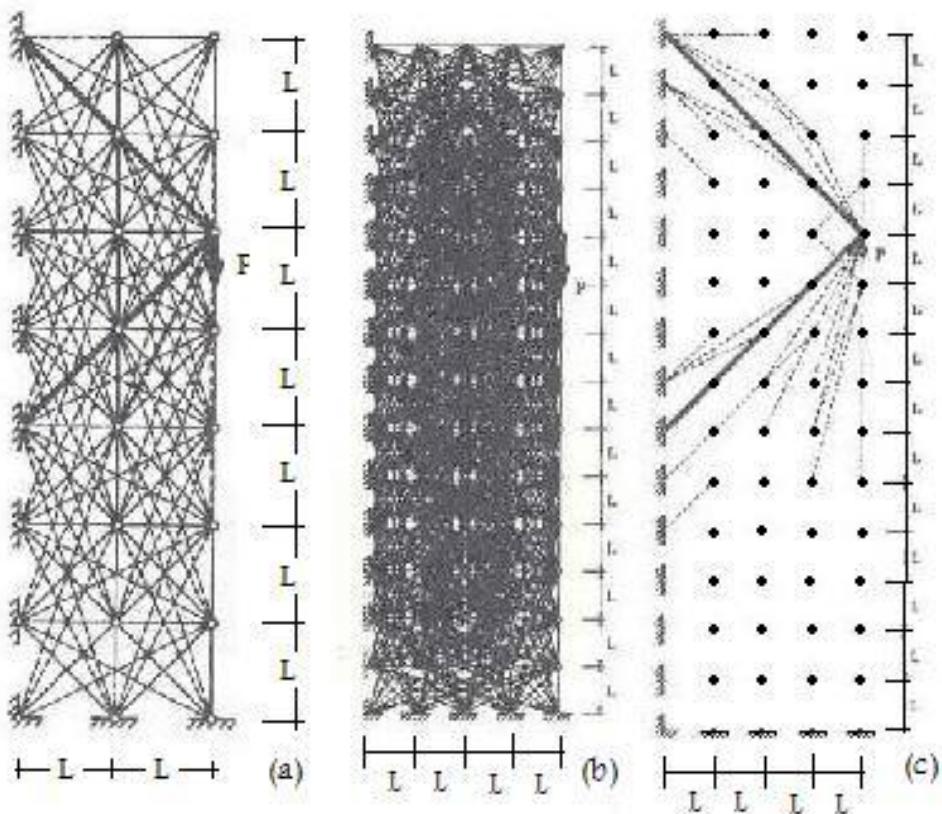
## Ground Structure - روش ۱-۵

این روش، روشی مناسب برای سازه‌های قابی و خرپایی می‌باشد و در حقیقت روشی ترکیبی است که بهینه سازی توپولوژیک، شکل و ابعاد را به طور همزمان انجام می‌دهد<sup>[۹]</sup>. در این روش مجموعه‌ای از نقاط به عنوان شبکه گره در فضای طراحی در نظر گرفته می‌شود. هر گره با تمام و یا مجموعه‌ای از گره‌های دیگر به وسیله اعضای خرپایی متصل می‌شود. با استفاده از روش معیار بهینگی

<sup>۱</sup> Fully stress design

<sup>۲</sup> Simultaneous failure design

زیر مجموعه ای از اعضای موجود<sup>۱</sup> از سازه اولیه استخراج می شود که به عنوان توپولوژی بهینه شناخته می شود. در این روش از یک سازه پایه شروع کرده و اعضا بی را که ابعاد آنها در طول فرآیند بهینه سازی به مقادیر کوچکی می رسد حذف می کنیم. جواب این روش نهایتا سازه ای به شکل خرپا می باشند. به عنوان مثال به شکل ۴-۱ توجه کنید.



شکل ۴-۱- بهینه سازی توپولوژیک با استفاده از روش Ground Structure

## ۱-۶- روش بابل

این روش در حقیقت روشی توسعه یافته بر اساس بهینه سازی شکل با استفاده از روش تغییرات مرزی می باشند. در این روش بهینه سازی توپولوژیک نیز مورد توجه واقع شده است. ایده اصلی این روش قرار دادن تکراری سوراخهایی در سازه می باشد که به واسطه آن توپولوژی سازه دستخوش تغییر می شود[۱۲]. در کنار این فرآیند، شکل خود سازه و سوراخهای آن نیز بهینه

---

<sup>۱</sup> Substructure

می‌شود. برای مدل‌سازی شکل سازه و سوراخ‌های آن می‌توان از منحنی‌های اسپلاین استفاده نمود. برای مسائل بهینه سازی با توابع عمومی ساده (مانند انرژی پتانسیل کل و حجم سازه) محل بهینه حفره‌ها را می‌توان با استفاده از روش‌های تغییراتی<sup>۱</sup> و به صورت آنالیتیک پیدا نمود ولی در حالت کلی بایستی از روش‌های عددی برای نائل شدن به هدف بهره جست. در این حالت یک حفره در نقطه اولیه دلخواه قرار می‌گیرد و سپس با استفاده از مفاهیم روش‌های برنامه ریزی ریاضی و یا روش‌های معیار بهینگی به سمت محل بهینه خودش هدایت می‌شود. مراحل فرآیند بهینه سازی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود[۱۱].

۱. ابتدا از سازه اولیه و فضای مرجع مساله شروع کرده و شکل مساله با توجه به تابع هدف و قیود مساله با استفاده از روش تغییرات مرزی بهینه می‌شود.

۲. یک سوراخ جدید به سازه اولیه اضافه می‌شود که باعث تغییر در توپولوژی سازه می‌شود. محل بهینه سوراخ با استفاده از روش‌های آنالیتیک و یا عددی پیدا می‌شود.

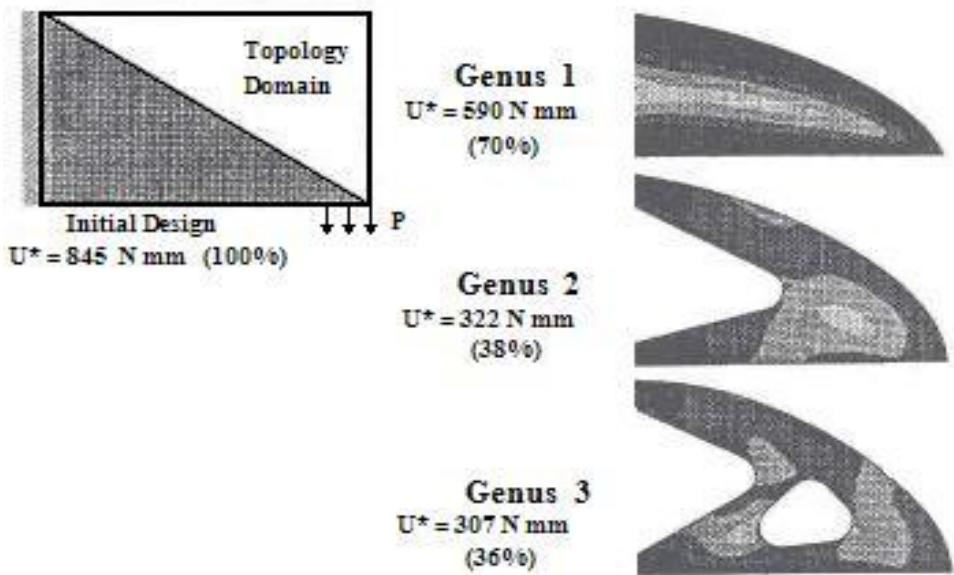
۳. برای پیدا کردن شکل بهینه سوراخ جدید و تعیین اثر آن بر دیگر مرزهای متغیر، فرآیند بهینه سازی انجام می‌شود.

۴. مراحل ۲ و ۳ تا هنگام اقناع شدن معیار همگرایی ادامه می‌یابند.

شکل ۱-۵ بیانگر کاربرد روش بابل در حل مسائل بهینه سازی توپولوژی برای یک تیر عمیق<sup>۲</sup> می‌باشد. در طول فرآیند بهینه سازی، سطحی که مواد آن را در بر گرفته اند ثابت می‌ماند و برابر است با سطحی که در طراحی اولیه در نظر گرفته شده است. همچنین می‌توان از این روش به عنوان یک روش ترکیبی برای بهینه سازی سازه‌ها نام برد.

<sup>۱</sup> Variational Method

<sup>۲</sup> Clamped Beam



شکل ۵-۱- بهینه سازی توپولوژی تیر طره عمیق با استفاده از روش بابل

### ۱- روش مجموعه سطوح تراز

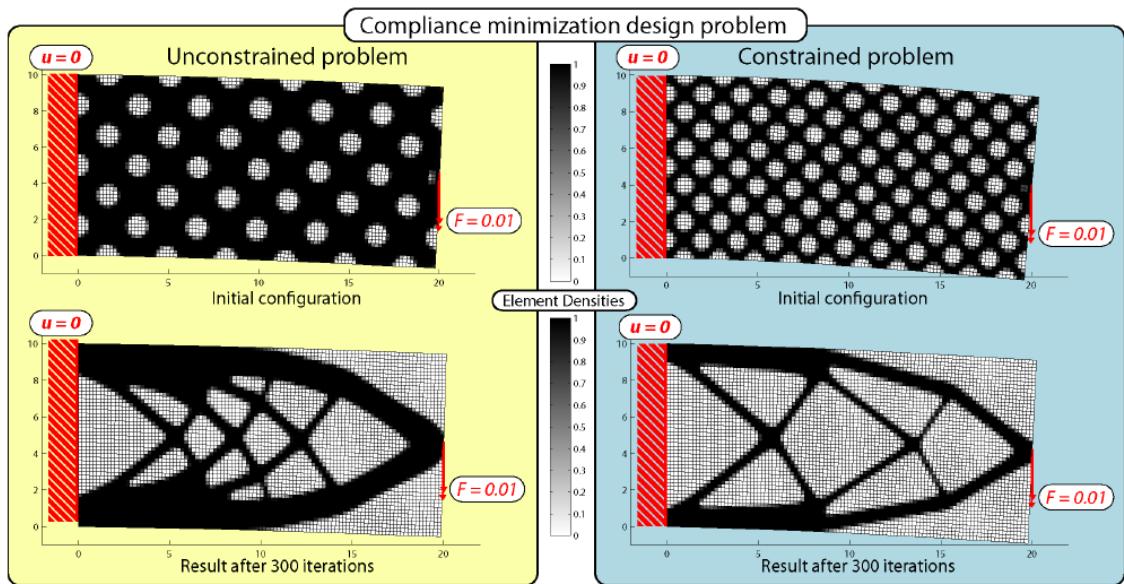
از زمانیکه روش مجموعه سطوح تراز توسط اشر<sup>۱</sup> و ستین<sup>۲</sup> برای بدست آوردن مرزهای مشترک و مرزهای آزاد معرفی شد، این روش در بسیاری از رشته‌ها و علوم مختلف به کاربرده شده است. امروزه روش مجموعه سطوح تراز در بهینه سازی شکل و توپولوژی بسیار مورد توجه قرار گرفته، و رایج گردیده است.

روش مجموعه سطوح تراز بسیار تطبیق پذیر و فرآگیر می‌باشد بطوری که به سادگی می‌توان گوشه‌های تیز، جدا شدن مرزها از یکدیگر و یا ادغام مرزهای مشترک را بیان کرد. این بیان ساده باعث ساده سازی مسئله بهینه سازی شکل و توپولوژی می‌گردد و نیازی به پارامتری کردن مرز مشترک نمی‌باشد.

در این روش هندسه سازه به صورتتابع ضمنی اسکالاری از بعد بالاتر تعریف می‌گردد و مرز

۱ - Osher

۲ - Sethian



۱-۶- بهینه سازی توبولوژی تیر طریق عمیق با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز. (الف) مسئله بهینه سازی نامقید و (ب) مسئله بهینه سازی مقید.

سازه توسط یک سطح تراز مشخصی معرفی می‌گردد و مرز جدید از حل معادله همیلتون ژاکوبی بدست می‌آید. در فصل‌های بعد روش مجموعه سطوح تراز به صورت کامل توضیح داده می‌شود.

## فصل دوم

### بهینه سازی

## ۱-۲ - مقدمه

روش‌هایی که معمولاً برای تعیین طرح بهینه به کار گرفته می‌شود را می‌توان به چند بخش تقسیم کرد. این روش‌ها بر اساس برنامه ریزی ریاضی به وجود آمده‌اند. با توجه به تحقیقات و کاربرد زیاد، این روش‌ها بسیار مفید هستند. در نتیجه الگوریتم‌های بسیار مناسبی برای این روش‌ها به وجود آمده‌اند.

انگیزه اصلی در توسعه روش‌های تقریبی کاهش هزینه‌های محاسباتی گرانی است که در روش‌های دیگر نمود پیدا می‌کند. از طرفی هنگامی که ابعاد مسئله افزایش می‌یابد حل مسئله بهینه سازی گاه غیر عملی است که با به کارگیری روش‌های تقریبی می‌توان به این مشکل غلبه کرد.

## ۲-۲- فرمول بندی کلی

### ۱-۲-۲ - متغیرهای طراحی

یک سیستم سازه‌ای توسط کمیت‌هایی بیان می‌شود که بعضی از آن‌ها را می‌توان به عنوان متغیر طراحی برای پروسه بهینه سازی در نظر گرفت. کمیت‌هایی که در حین این پروسه ثابت هستند پارامترهای از پیش تعیین شده<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. این پارامترها توسط الگوریتم‌های بهینه سازی تغییر نخواهند کرد. کمیت‌هایی که از پیش تعیین شده نیستند، متغیرهای طراحی<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. مجموعه پارامترهای از پیش تعیین شده و متغیرهای طراحی یک طرح را تشکیل می‌دهند. بنابراین تجربه طراح یا به خاطر محدودیت‌هایی، تعدادی از کمیت‌ها از پیش تعیین شده‌اند و می‌توان گفت به این خاطر مسئله بهینه سازی تا حد زیادی مختصر می‌شود. متغیرهای طراحی می‌توانند بیان کننده خواص زیر برای سازه باشند [۱۳].

۱ - خواص مکانیکی یا فیزیکی مصالح سازه

۲ - توپولوژی سازه یا نحوه ارتباط اعضا یا تعداد المان‌های یک سازه

۳ - هندسه یا ساختار یک سازه

۴ - ابعاد مقطع عرضی یا اندازه سازه

### ۲-۲-۲ - قیود

هر یک از مجموعه مقادیر متغیرهای طراحی، یک طرح سازه را تشکیل می‌دهند. مسلماً برخی از طرح‌ها قابل استفاده و برخی دیگر به دلیل پاره‌ای ملاحظات رفتاری، طرح غیر قابل قبولی هستند. اگر یک طرح تمام الزامات خود را برآورده کند به آن طرح شدنی می‌گویند. برای به دست آوردن یک طرح شدنی محدودیت‌هایی باید برآورده شوند که به آنها قید گفته می‌شود. از نقطه نظر فیزیکی

---

۱- Preassigned parameters

۲- Design variables

می‌توانیم دو نوع قید داشته باشیم:

۱- قیودی که بر متغیرهای طراحی اعمال می‌شوند و به دلایل غیر رفتاری محدوده تغییرات

متغیرها را محدود می‌کنند، قیود تکنولوژیکی<sup>۱</sup> یا قیود لبه‌ای نامیده می‌شوند. قید

تکنولوژیکی یک حد تعیین شده (همانند بالا و پایین) برای متغیرهای طراحی است، یا

رابطه‌ای است که مقدار نسبی گروهی از متغیرها را ثابت می‌کند. برای مثال می‌توان شبیب

حداقل یک سقف، یا ضخامت حداقل یک صفحه یا ارتفاع حداکثر یک پوسته را نام برد.

۲- به قیودی که از شرایط رفتاری سازه به دست می‌آیند قیود رفتاری می‌گویند. حدود اعمال

شده بر تنש‌های حداکثر، تغییر مکان‌ها و یا مقاومت کمانشی در یک سازه نمونه‌هایی از

این نوع قید هستند.

از نقطه نظر ریاضی قیدهای طراحی و رفتاری را می‌توان توسط مجموعه‌ای از نامساوی‌ها بیان

نمود:

$$g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (1-2)$$

که  $n_g$  تعداد قیدهای نامساوی و  $X$  بردار متغیرهای طراحی است.

اغلب در مسائل بهینه سازی سازه‌ای باید قیدهای تساوی با شکل کلی زیر بیان شوند:

$$h_j(X) = 0 \quad j = 1, \dots, n_h \quad (2-2)$$

که  $n_h$  تعداد قیدهای مساوی است. در بسیاری از موقع می‌توان از قیدهای تساوی برای حذف

متغیرها و در نهایت کاهش تعداد آنها استفاده نمود. گرچه در موقع خاص این کار ممکن است

پیچیده و وقت گیر باشد.

### ۳-۲-۲ - فضای طراحی<sup>۱</sup>

هر یک از متغیرهای طراحی دارای یک بعد در فضای طراحی هستند و هر یک از طرحها (مجموعه متغیرهای طراحی) نقطه‌ای را در فضای طراحی تشکیل می‌دهند. در حالت‌هایی که تنها دو متغیر داریم فضای طراحی به یک صفحه کاهش می‌یابد. در حالت کلی با  $n$  متغیر، یک فضای  $n$  بعدی داریم. با در نظر گرفتن تنها قیود نامساوی، مجموعه مقادیر متغیرهای طراحی که معادله  $(X_j = g_j)$  را اقناع می‌کنند سطحی را در فضای طراحی تشکیل می‌دهند. این سطح فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کند: ناحیه‌ای که  $g_j \leq 0$  و بقیه نواحی که  $g_j > 0$ . طرحی که همه قیود را اقناع می‌کند، طرح شدنی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود و مجموعه طرح‌های شدنی ناحیه شدنی<sup>۳</sup> را تشکیل می‌دهند. نقاط داخل ناحیه شدنی (جاهایی که  $\sum_{j=1}^n g_j < 0$ ) طرح‌های نامقید<sup>۴</sup> نامیده می‌شوند. نقاط روی سطح (طرح‌های شدنی که حداقل یکی از شروط  $(X_j = 0)$  را برآورده می‌کنند) طرح‌های مقید<sup>۵</sup> نامیده می‌شوند. زیر فضایی که دو یا چند قید  $(X_j = 0)$  برای آنها صدق می‌کند فصل مشترک نامیده می‌شوند. در صورتی که در یک نقطه طراحی برای قید  $j$  ام  $(X_j = 0)$  آن قید فعال و در صورتی که  $(X_j < 0)$  غیر فعال نامیده می‌شود.

### ۴-۲-۲ - تابع هدف

برای انتخاب بهترین طرح از میان بینهایت طرح موجود در ناحیه شدنی نیاز به تعریف یک تابع هدف داریم. تابع هدف، تابعی است که کمترین مقدار آن در عملیات بهینه سازی مورد نظر است. معمولاً یک تابع غیر خطی از متغیرهای طراحی  $X$  می‌باشد که ممکن است بیان کننده وزن، هزینه مربوط به سازه یا... باشد. همیشه فرض بر این است که تابع هدف  $(f = z)$  مینیمم شود. البته

۱- Design space

۲- Feasible Design

۳- Feasible Region

۴ Unconstrained Design

۵ Constrained Design

برای موقعي که نیاز به ماکزیمم داریم مشکلی پیش نمی آید، چون جایی که  $(X^f - \text{مینیمم})$  شود،  $(X^f - \text{ماکزیمم})$  خواهد شد.

$$\max f(X) = -\min[-f(X)] \quad (3-2)$$

انتخاب تابع هدف گام مهمی در عملیات بهینه سازی است. در حالت کلی تابع هدف بیان کننده مهمترین ویژگی یک طرح است. وزن مهمترین تابع هدف مورد استفاده در بهینه سازی است، زیرا به راحتی به صورت کمی تعریف می شود. ولی حداقل وزن همیشه ارزانترین گزینه نیست. هزینه تابع هدفی است که اهمیت بالاتری در عمل دارد، ولی معمولاً به دست آوردن یک تابع واقعی وزن بسیار مشکل است. همچنین توابع دیگری مثل هزینه های نگهداری، هزینه های تعمیر، اطمینان و... ممکن است به عنوان تابع هدف مطرح باشند. با توجه به اهمیت هر یک از موارد ذکر شده تابع هدف مورد نظر ساخته می شود.

### ۵-۲-۲ - رابطه سازی ریاضی

مسئله بهینه سازی، انتخاب بهینه از متغیرهای طراحی است به طوری که تابع هدف مورد نظر مینیمم شود و مجموعه های از قیدها برآورده شوند. برای هر مجموعه مقادیر داده شده از متغیرهای طراحی رفتار سازه می تواند توسط معادلات تحلیل محاسبه شود. می توان با در نظر گرفتن قواعد محاسباتی این معادلات را از فرمول بندی ریاضی حذف کرده و به دسته ای از معادلات ضمنی برای قیدها رسید. توابع قید صریح تنها برای سازه های معین استاتیکی یا سازه های ساده وجود خواهند داشت.

با این فرض که تمام قیود مساوی می توانند حذف شوند، می توان مساله طرح بهینه را از نظر ریاضی به انتخاب متغیرهای طراحی به صورتی تعریف کرد که معادلات زیر برقرار باشند:

$$z = f(\mathbf{X}) \rightarrow \min \quad (4-2)$$

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g$$

در فرمول بندی یک مساله بهینه سازی باید به نکات زیر توجه شود:

۱- تمام قیود نامساوی باید به صورت  $\leq$  "بیان شوند. هر قید نامساوی می‌تواند به این فرم

تبديل شود.

۲- اگر مقدار تابع هدف به وسیله ضرب کردن آن در یک عدد ثابت تغییر کند، طرح

بهینه تغییر نخواهد کرد، اگرچه مقدار تابع هدف تغییر می‌کند.

۳- قیود نامساوی را نیز می‌توان در یک عدد ثابت ثابت ضرب کرد بدون اینکه اثری در جواب

بهینه داشته باشد.

۴- توجه به این نکته بسیار مهم است که افزایش تعداد قیدها موجب جمع شدن محدوده

شدنی می‌شود و همچنین با حذف قیود، محدوده شدنی گسترش می‌یابد. هنگامی که

محدوده شدنی جمع می‌شود، طرح‌های شدنی کمتری وجود خواهد داشت و در پس آن

مقدار حداقل تابع هدف افزایش می‌یابد.

### ۳-۲- مفاهیم بهینه سازی

روش‌های حلی که معمولاً برای تعیین طرح بهینه به کار گرفته می‌شوند را می‌توان به چند

بخش تقسیم کرد. این روش‌ها براساس برنامه ریزی ریاضی<sup>۱</sup> به وجود آمده اند. با توجه به تحقیقات و

پر کاربرد بودن این روش‌ها بسیار مفید هستند. در نتیجه الگوریتم‌های بسیار مناسبی برای این

روش‌ها به وجود آمده است.

در روش‌های مبتنی بر برنامه ریزی ریاضی، جواب بهینه یک مسئله در یک نقطه بهینه مطلق

منحصر به فرد به دست خواهد آمد. در برخی از مسائل سازه‌ای نقاط بهینه نسبی، علاوه بر نقاط بهینه

مطلق وجود دارند. اکسترمم نسبی در برخی مسائل برنامه ریزی ریاضی ممکن است به دلیل ماهیت

تابع شکل و قیدها به وجود آید.

بهینه سازی را می‌توان به دو گروه تعیین حداقل نامقید<sup>۱</sup> و تعیین حداقل مقید<sup>۲</sup> تقسیم کرد. در بهینه سازی نامقید، قید وجود ندارد و حل مسئله ساده تر به نظر می‌رسد، اما در بهینه سازی مقید، فرمول بندی بر اساس بر قراری توابع قید و رسیدن به جواب بهینه خواهد بود.

### ۱-۳-۲ - حداقل نامقید

اگر شرایط زیر برای  $(\mathbf{X})$  در  $\mathbf{X}^*$  برقرار باشد،  $\mathbf{X}^*$  یک نقطه حداقل نسبی است:

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X}) \quad (5-2)$$

بسط سری تیلور تابع  $f$  حول  $\mathbf{X}^*$  را بحسب جملات درجه دوم می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(\mathbf{X}) \cong f^* + \nabla f^T \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{H}^* \Delta \mathbf{X} \quad (6-2)$$

که  $f^*$  و  $\nabla f^*$  در  $\mathbf{X}^*$  محاسبه می‌شوند.  $\nabla f$  بردار مشتقات اول یا بردار گرادیان  $f$  است

که با  $G$  نمایش داده می‌شود و  $H$  ماتریس مشتقات دوم یا ماتریس هسیان<sup>۳</sup> است:

$$G^T \equiv \nabla f^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n} \right\} \quad (7-2)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_1 \partial \mathbf{X}_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_1 \partial \mathbf{X}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_n \partial \mathbf{X}_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{X}_n^2} \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

بردار تغییر متغیرهای طراحی می‌شود:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^* \quad (9-2)$$

اگر فرض شود که  $\mathbf{X}^*$  حداقل نسبی باشد:

۱- Unconstrained minimum

۲- Constrained minimum

۳- Hessian matrix

$$\Delta f \equiv f(\mathbf{X}) - f^* = \nabla f^{*T} \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^T H^* \Delta \mathbf{X} \geq 0 \quad (10-2)$$

تنها با در نظر گرفتن جملات مرتبه اول، استنباط می‌شود که تنها زمانی  $\Delta f^* \geq 0$  برای تمام مقادیر

ممکن  $\Delta \mathbf{X}$  صادق است که:

$$\nabla f^* = 0 \quad (11-2)$$

معادله بالا نشان دهنده شرایط لازم برای نقطه حداقل یک تابع  $n$  متغیره با مشتقات پیوسته است. با

در نظر گرفتن جمله دوم رابطه (10-2):

$$q \equiv \Delta \mathbf{X}^T H^* \Delta \mathbf{X} \geq 0 \quad (12-2)$$

معادله بالا شرط کافی برای حداقل نسبی  $(\mathbf{X}) f$  در  $\mathbf{X}^*$  است. دو معادله بالا تضمین کننده این است که  $\mathbf{X}^*$  حداقل نسبی است.

### ۲-۳-۲ - حداقل مقید (روش ضربگرهای لاغرانژ)

برای این بخش مساله بهینه سازی یک تابع با قیود مساوی در نظر گرفته می‌شود. در نقطه بهینه، تغییرات دیفرانسیل در تابع هدف  $(\mathbf{X}) f$  بر حسب تغییرات دیفرانسیل  $\mathbf{X}$ ، باید صفر باشد:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1} d\mathbf{X}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2} d\mathbf{X}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n} d\mathbf{X}_n \quad (13-2)$$

اگر تنها یک شرط زیر در نظر گرفته شود:

$$h(\mathbf{X}) = 0 \quad (14-2)$$

پس تغییرات دیفرانسیل  $h$  خواهد شد:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}_1} d\mathbf{X}_1 + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}_2} d\mathbf{X}_2 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}_n} d\mathbf{X}_n = 0 \quad (15-2)$$

با توجه به معادلات بالا:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1} + \lambda \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}_1} \right) d\mathbf{X}_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}_2} \right) d\mathbf{X}_2 + \cdots + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}_n} \right) d\mathbf{X}_n = 0 \quad (16-2)$$

که در آن  $\lambda$  یک پارامتر مجهول است و به آن ضربگر لاغرانژ<sup>۱</sup> می‌گویند. از معادله بالا به دست

می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i} + \lambda \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{X}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (17-2)$$

بنا براین یک سیستم با  $n+1$  معادله و مجهول وجود خواهد داشت. در حالتی که چند قید

مساوی باشد:

$$h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_k \quad (18-2)$$

برای هر قید یک ضربگر لاغرانژ لازم است.

در تابع لاغرانژین<sup>۲</sup> زیر

$$\phi(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j h_j(\mathbf{X}) \quad (19-2)$$

برای پیدا کردن نقطه بحرانی<sup>۳</sup> باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (20-2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = 0 \quad i = 1, \dots, n_h \quad (21-2)$$

برای برقراری معادلات بالا، نیاز است که معادلات تعادل زیر برقرار باشد:

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla h_j = 0 \quad (22-2)$$

$$h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad (23-2)$$

باید توجه شود که این روابط ممکن است منجر به یک دستگاه غیر خطی از معادلات شود که

دارای چندین جواب باشد. تمام جواب‌ها، حداقل مقید نیستند و برخی از آنها حداقل محدود شده‌اند و یا نقاط

۱- Lagrange Multiplier

۲- Lagrangian Function

۳- Stationary point

زینی<sup>۱</sup> هستند.

مفهوم هندسی معادله (۲۲-۲) این است که در نقطه مینیمم،  $\nabla f$  باید توسط یک مجموعه خطی از بردارهای عمود بر سطوح داده شده توسط رابطه (۱۹-۲) قابل بیان باشد. می توان مفهوم ضرایب لاگرانژ را برای قیدهای نامساوی نیز بیان کرد.

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (24-2)$$

با اضافه کردن متغیرهای کمبود<sup>۲</sup>،  $S_j$

$$h_j(\mathbf{X}, S_j) = g_j(\mathbf{X}) + S_j^2 = 0 \quad (25-2)$$

اگر  $g_j(\mathbf{X}) > 0$  آنگاه  $S_j \neq 0$  و اگر  $g_j(\mathbf{X}) = 0$  آنگاه  $S_j = 0$

معادله (۲۵-۲) ارضا نخواهد شد. با اعمال روش ضرایب لاگرانژ در این حالت، تعریف می کنیم:

$$\phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \lambda) = f + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j (g_j + S_j^2) \quad (26-2)$$

شرط ایستایی  $\phi$  به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (27-2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial S_j} = 2\lambda_j S_j = 0 \quad i = 1, \dots, n_g \quad (28-2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = (g_j + S_j^2) = 0 \quad i = 1, \dots, n_g \quad (29-2)$$

معادلات (۲۹-۲) نشان می دهد که  $g_j$  اقناع شده است. معادلات (۲۸-۲) بیان می کنند که

یکی از  $\lambda_j$  یا  $S_j$  برابر صفر است، به این معنی که یک قید یا فعال است ( $g_j = 0$ ) و باید در (۲۷-۲) در نظر گرفته شود، و یا غیر فعال است ( $\lambda_j = 0$ ). معادلات (۲۷-۲) ملزم به این است که  $\nabla f$  در

۱-Saddle points

۲-Slack variables

زیرفضای ساخته شده توسط گرادیان‌های قیدهای فعال قرار بگیرد.

### ۳-۳-۲ - شرایط کان تاکر<sup>۱</sup>

می خواهیم به جای حل مجموعه معادلات (۲۷-۲)، (۲۸-۲) و (۲۹-۲)، آزمایشی را بیان کنیم که بتوان نقطه مورد نظر را با آن بررسی کرد. مجموعه‌ای از اعداد صحیح ( $j \leq n_g$ ) را به عنوان اندیس برای قیدهای  $g$  که در نقطه مورد بررسی فعال هستند تعریف می‌کنیم. نقطه  $\mathbf{X}$  می‌تواند مینیمم باشد اگر تمام قیدها  $0 \leq g_j$  اقناع شوند (۲۹-۲) را ببینید) و همچنین اگر  $\lambda_j$  وجود داشته باشد طوری که

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla g_j = 0 \quad (30-2)$$

معادلات (۳۰-۲) با در نظر گرفتن تنها قیدهای فعال پایه ریزی شده‌اند. با این تعریف حال می‌توان معادلات (۲۸-۲) را در نظر نگرفت.

برای اینکه معادلات (۳۰-۲) برقرار باشند و  $\mathbf{X}$  مینیمم محلی نباشد باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, J \quad (31-2)$$

معادلات (۳۰-۲) و (۳۱-۲) شرایط کان تاکر برای یک مینیمم نسبی می‌باشند. مخروطی را تعریف می‌کنیم که  $\nabla g$  درون آن قرار بگیرد، بنابراین  $\nabla g \geq \lambda \nabla f$  برای  $0 \leq \lambda \leq 1$  درون آن قرار می‌گیرد. مجموعه تمام ترکیبات نامنفی خطی

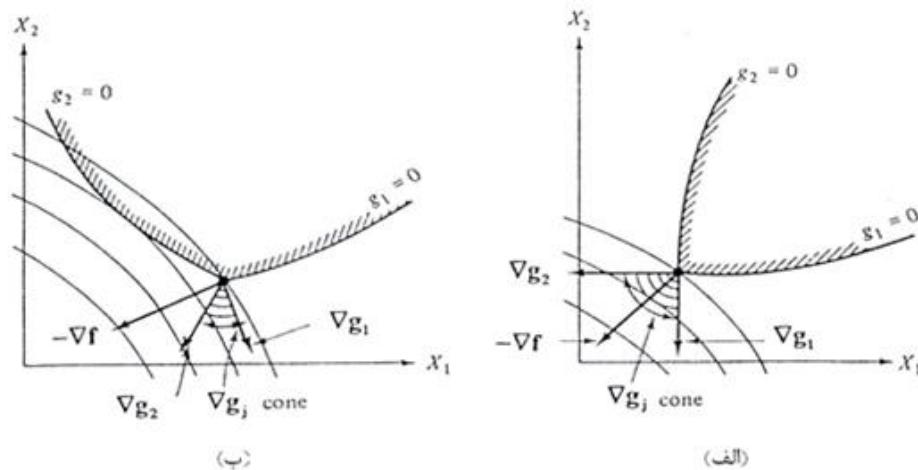
$$\sum_{j=1}^J \lambda_j \nabla g_j \quad \lambda_j \geq 0 \quad (32-2)$$

یک مخروط محدب را تشکیل می‌دهد. شرایط کان تاکر بیانگر این است که  $\nabla f$ -داخل مخروط محدب تشکیل شده از عمودهای قیدهای فعال ( $J = 1, \dots, J_g$ ) قرار می‌گیرد. این‌ها شرایط لازم برای مینیمم نسبی بودن یک نقطه هستند، ولی کافی نمی‌باشند. برای مسائل برنامه

۱- Kuhn-Tucker conditions

ریزی محدب، شرایط کان تاکر، شرایط لازم و کافی برای یک مینیمم مطلق می‌باشند.

شکل ۱-۲-۱-شکل ۲- مفهوم هندسی دو بعدی این شرایط را نشان می‌دهد. در حالت مربوط به شکل ۱-۲ الف  $\nabla f$ -داخل مخروط تشکیل شده توسط  $\nabla g_j$  قرار نمی‌گیرد. نقطه مورد نظر بهینه نیست، زیرا  $f$  می‌تواند بدون اینکه از قیدها تجاوز کند، کاهش یابد. شرایط کان تاکر برآورده نشده اند، بنابراین نمی‌توان  $\lambda$ ‌های نامنفی را طوری پیدا کرد که برای آنها  $\nabla f$ - برحسب یک ترکیب خطی از  $\nabla g_j$ ‌ها بیان شود. در حالت مربوط به شکل (۱-۲-ب)، شرایط اقناع شده و نقطه بهینه می‌باشد. مشاهده می‌شود که  $\nabla f$ - درون مخروط حاصل از  $\nabla g_j$  قرار دارد و این را نمی‌توان جابجایی انجام داد که باعث کاهش در محدوده شدنی شود. می‌توان  $\lambda$ ‌های نامنفی یافت که برای آنها  $\nabla f$ - برحسب ترکیبی خطی از  $\nabla g_j$ ‌ها بیان شود.



شکل ۱-۲-الف(الف)شرط کان-تاکر اقناع شده اند (ب)شرط کان-تاکر اقناع نشده اند. [۱۰]

به طور خلاصه می‌توان گفت می‌توان برای آزمایش مینیمم کردن یک نقطه از شرایط کان تاکر استفاده کرد. کاربرد عملی این شرایط ملزم به حل همزمان معادلات خطی برحسب  $\lambda$  می‌باشد. همان طور که پیشتر گفته شد شرایط کان تاکر برای یک مسئله بهینه سازی محدب شرایط لازم و کافی برای مینیمم مطلق می‌باشند. مفهوم برنامه ریزی محدب در ادامه تشریح خواهد شد.

#### ۴-۳-۲ - توابع و مجموعه‌های محدب

با تعاریف توابع محدب و مجموعه‌های محدب می‌توان به ماهیت توابع هدف و قید پی برد. یک

تابع  $(\mathbf{X}) f$  در صورتی محدب است که برای هر نقطه  $\mathbf{X}_1$  و  $\mathbf{X}_2$  درون دامنه آن، مقدار تابع کمتر از

یا مساوی با درون یابی خطی از  $(\mathbf{X}_1) f$  و  $(\mathbf{X}_2) f$  باشد؛ یعنی اینکه:

$$f[\alpha \mathbf{X}_2 + (1-\alpha) \mathbf{X}_1] \leq \alpha f(\mathbf{X}_2) + (1-\alpha)f(\mathbf{X}_1) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (33-2)$$

در صورتی که نامساوی اکید تبدیل شود، تابع اکیدا محدب است. تابع محدب در

شکل (۲-۲-الف) شرح داده شده است. اگر تابع  $f$  محدب باشد، در آن صورت تابع  $(-f)$  مقعر است.

یک تابع خطی هم محدب است هم مقعر. ولی محدب یا مقعر اکید نیست. یک تابع ممکن است نه

محدب باشد نه مقعر. (شکل (۲-۲-ب) را ببینید)

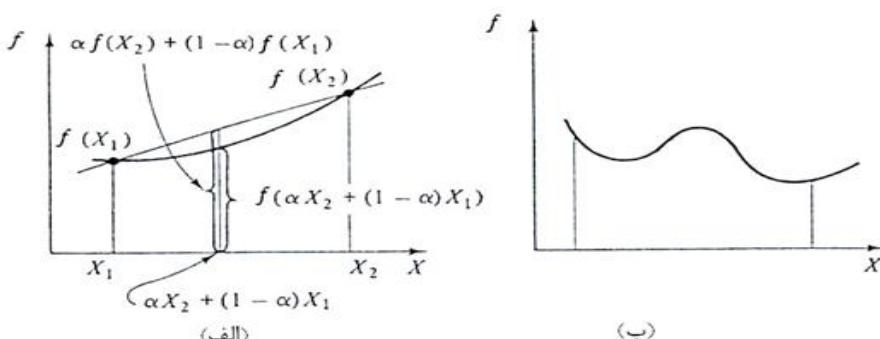
یک مجموعه از نقاط در صورتی محدب است که خط ارتباط دهنده هر ۲ نقطه از آن مجموعه

تماماً در داخل مجموعه قرار گرفته باشد. از نقطه نظر ریاضی مجموعه‌ای محدب است که برای تمام

$\mathbf{X}_1$  و  $\mathbf{X}_2$  های درون مجموعه و  $0 < \alpha < 1$ ، نقطه  $\mathbf{Y} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha) \mathbf{X}_2$  نیز درون مجموعه واقع

شود. تابع  $(\mathbf{X}) f$  که روی یک مجموعه محدب تعریف شده است، محدب است اگر و تنها اگر

ماتریس هسیان مربوط به آن در تمام نقاط درون مجموعه مثبت نیمه معین یا مثبت معین باشد.



شکل ۲-۲-الف) تابع محدب ب) تابع غیر محدب. [۱۰]

یک مسئله برنامه ریزی مینیمم سازی در صورتی محدب است که تابع هدف  $(\mathbf{X}) f$  و تابع

نامساوی قید  $(\mathbf{X}) g$  آن محدب باشند. در این حالت می‌توان نشان داد که ناحیه شدنی تشکیل شده

از یک قید نامساوی تنها نیز محدب است. علاوه بر آن فصل مشترک نواحی محدب نیز خود محدب می‌باشد. بنابراین اگر ناحیه مربوط به هر کدام از قیدهای  $g_j \leq 0$  محدب باشد، ناحیه‌ای که با اعمال همه قیود تعریف می‌شود نیز محدب است. مسئله‌ای که قیود مساوی  $(X)_j$  را دارد، در صورتی محدب است که علاوه بر محدب بودن  $(X)_j$  خطی باشند. از آنجا که یک قید تساوی تنها، یک ناحیه محدب است، فصل مشترک قیدهای تساوی خطی نیز محدب محسوب می‌شود. از آنجا که تمام توابع خطی محدب هستند یک مسئله برنامه‌ریزی خطی همواره یک مسئله محدب است. یک قید مساوی غیر خطی همواره یک ناحیه شدنی غیر محدب را برای مسئله تعریف می‌کند.

برای مسائل برنامه‌ریزی محدب شرایط لازم کان تاکر، کافی هم هستند. نتیجه مهم از تعاریف ذکر شده در بالا این است که در مسائل برنامه‌ریزی محدب هر مینیمم محلی، مینیمم سراسری است. البته در بسیاری از موقع تشخص محدب بودن همه توابع یک مسئله کار آسانی نیست. برای اکثر مسائل طراحی بهینه نمی‌توان نشان داد که محدب هستند. اگرچه بسیاری از توابع تقریبی که معرفی خواهند شد، محدب هستند.

#### ۴-۲ - روش‌های بهینه‌سازی و تقریب سازی

روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها به طور مشخص به دو دسته روش‌های تحلیلی<sup>۱</sup> و روش‌های عددی<sup>۲</sup> تقسیم می‌شوند. اساساً روش‌های تحلیلی بر جنبه مفهومی تاکید دارند، در حالی که روش‌های عددی وجه الگوریتمی پیدا می‌کنند.

روش‌های تحلیلی از تئوری ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش تغییرات و غیره در مطالعه المان‌های سازه‌ای ساده مثل تیر، ستون یا صفحه استفاده می‌کنند. این روش‌ها اغلب برای

۱- Analytical Methods

۲- Numerical Methods

مطالعات اساسی بر روی مولفه‌های سازه‌ای به شکل منفرد مناسب هستند و زمینه‌ای برای کاربرد در سیستم سازه‌ای بزرگ ندارند.

طراحی سازه‌ها با تعدادی از توابع نامعلوم ارائه می‌شود که هدف پیدا کردن شکل کلی این توابع است. همان طور که در قسمت قبل شرح داده شد، طراحی بهینه به شکل تئوری از حل یک سری از معادلات که بیان کننده شرایط بهینه (شرایط کان تاکر) می‌باشند به دست می‌آید. اگرچه روش‌های تحلیلی از لحاظ عملی با سازه‌های واقعی انطباق ندارند اما بررسی رفتار آنها در درک مسائل عملی نقش مهمی خواهد داشت.

روش‌های عددی معمولاً از محاسبات عددی و یا برنامه‌ریزی ریاضی استفاده می‌کنند. پیشرفتهای اخیر در این زمینه مدیون رشد سریع ظرفیت محاسبات به وسیله برنامه‌ها می‌باشد که باعث تسهیل در حل مسائل واقعی در مقیاس‌های بزرگ می‌گردند. در روش‌های عددی یک طراحی نزدیک به بهینه به شکل خودکار به عنوان نقطه شروع در نظر گرفته می‌شود. سپس یک جستجوی اصولی برای رسیدن به یک طراحی بهینه عموماً در قالب یک فرایند تکراری انجام می‌گیرد.

برخی از روش‌های برنامه ریزی ریاضی مثل الگوریتم‌های برنامه ریزی خطی، درجه دوم، دینامیکی، هندسی و غیره با توجه به کاربرد مخصوص آنها در حل مسائل بهینه سازی توسعه پیدا کرده‌اند. در این میان یک سری الگوریتم‌های کلی تر به عنوان برنامه ریزی غیر خطی، برای حل مسائل بهینه سازی به شکل عمومی استنتاج شده است. اگرچه عمر برنامه‌ریزی‌های ریاضی کوتاه می‌باشد، لیکن در این زمینه الگوریتم‌های زیادی برای حل مسائل عددی توسعه پیدا کرده‌اند.

انگیزه اصلی در توسعه روش‌های تقریبی کاهش هزینه‌های محاسباتی گرانی است که در روش‌های دیگر نمود پیدا می‌کند. از طرفی هنگامی که ابعاد مسئله افزایش می‌یابد حل مسئله بهینه سازی گاه غیر عملی است که با به کار گیری روش‌های تقریبی می‌توان به این مشکل غلبه کرد.

اشمیت<sup>۱</sup> و همکارانش در اواسط دهه هفتاد مفاهیم تقریب سازی را پیگیری کردند. اگر بخواهیم بین تقریب سازی تابع و تقریب سازی مسئله وجه تمایز قائل شویم، می‌توان گفت تقریب سازی تابع یک بیان ساده و متفاوت از تابع هدف و یا توابع قید است و تقریب سازی مسئله عبارت است از جایگزینی بیان اصلی مسئله با مسئله‌ای که تقریباً معادل آن اما با راه حل آسان‌تر می‌باشد.

تقریب سازی بر اساس دامنه کاربرد آن در فضای طراحی می‌تواند به سه دسته تقسیم شود: تقریب‌های محلی، تقریب‌های سراسری و تقریب‌های برد متوسط. در یک تقریب محلی، تقریب فقط در همسایگی یک نقطه از فضای طراحی معتبر است. اساس این تقریب‌ها بر فرمول بندی کردن یک مسئله تقریبی (تابع هدف و یا توابع قید) بنا شده و حاصل آن به دست آوردن یک نقطه بهینه است. هنگامی که فرایند بهینه سازی با این نقطه اولیه آغاز می‌شود نقطه جدید بهینه حاصل می‌شود که به نقطه بهینه واقعی نزدیکتر است و با تکرار این عملیات جواب مسئله به سمت جواب بهینه همگرا می‌شود. تقریب‌های محلی شاید مرسوم ترین تقریب‌های استفاده شده در مسائل بهینه سازی باشند.

تقریب‌های سراسری در تمام فضای طراحی و یا بخش بزرگی از آن معتبر هستند. این روش‌ها برای تعریف فرمول یک مسئله بهینه سازی با استفاده از نتایج خروجی به کار می‌روند و تابعی تقریبی با فرمولی متفاوت تولید می‌کنند که محاسبات بهینه سازی برای آن آسان‌تر خواهد بود. و سرانجام تقریب برد متوسط سعی دارد تقریب محلی را با کیفیت سراسری تعمیم دهد.

## ۲-۵- روشن دوگان

یکی از روش‌های برنامه ریزی ریاضی که کاربرد زیادی دارد و در بسیاری از روش‌های تقریبی نیز به کار گرفته می‌شود، روش دوگان است. مسئله بهینه سازی با فرم کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min f_0(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad f_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (34-2)$$

مسئله دوگان متناظر با آن به این صورت تعریف می‌شود: مقادیر  $\lambda$ ، (ضرایب لاغرانژ) طوری

تعیین شوند که:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &\rightarrow \max \\ s.t. \quad \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{35-۲}$$

که  $\phi(\lambda)$  تابع دوگان است. تابع لاغرانژین به صورت زیر است:

$$\phi(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(\mathbf{x}) \quad j = 1, \dots, m \tag{36-۲}$$

و تابع دوگان

$$\phi(\lambda) = \min_x \phi(\mathbf{x}, \lambda) \tag{37-۲}$$

می‌باشد. می‌توان در بسیاری مواقع مسئله دوگان را حل نمود و جواب بهینه را بهبود بخشد.

نقطه بهینه  $\mathbf{x}^*$  و ضرایب لاغرانژ متناظر با آن  $\lambda^*$  برای تابع لاغرانژین (36-۲) یک نقطه زین اسبی را تعريف می‌کنند. این نقطه متناظر با یک ماکزیمم نسبت به  $\lambda$  و یک مینیمم نسبت به  $\mathbf{x}$  است. بنابراین می‌توانیم تابع لاغرانژین را بر حسب  $\lambda$  تنها (37-۲) تعريف کنیم.

از آنجا که تابع دوگان  $\phi(\lambda)$  یک ماکزیمم نسبت به  $\lambda$  در نقطه بهینه است، هدف پیدا کردن

عبارت زیر است:

$$\max_{\lambda} \phi(\lambda) = \max_{\lambda} \min_x \phi(\mathbf{x}, \lambda) \tag{38-۲}$$

همچنین این مسئله می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\min_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \max_{\lambda} \phi(\mathbf{x}, \lambda) \tag{39-۲}$$

درمسائل غیر خطی، جایی که تابع اولیه محدب و از نظر ریاضی تفکیک پذیر<sup>۱</sup> است، مسئله دوگان بسیار کاربرد دارد. اگر مسئله اولیه و دوگان آن هر دو محدب باشند، حل‌های متناظر با آنها شروط بهینگی مشابه‌ای را اقناع می‌کنند. هر دو مسئله معادل هم هستند و مقادیر بهینه آن‌ها برابرند:

$$\phi(\lambda^*) = f(\mathbf{x}^*) \quad (40-2)$$

در تقریب سازی‌هایی که مورد بحث قرار خواهند گرفت، شرط محدب و تفکیک پذیر بودن بسیار با اهمیت است. توابع هدف و قید در صورتی تفکیک پذیرند که بتوان هر کدام را بر حسب توابعی یک متغیره از متغیرهای طراحی بیان نمود.

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ f_j(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n f_{ji}(x_i) \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (41-2)$$

در صورت تفکیک پذیر بودن توابع هدف و قید،تابع لاغرانژین مسئله نیز تفکیک پذیر خواهد بود. با استفاده از (۳۷-۲) و این ویژگی که مینیمم یک تابع تفکیک پذیر، برابر جمع مینیمم‌های توابع یک متغیره آن است، می‌توان مسئله دوگان را به صورت زیر تعریف کرد:  $\lambda$  را طوری بیابید که

$$\begin{aligned} \max \phi(\lambda) &= \sum_{j=1}^m \max \left[ f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ji}(x_i) \right] \\ s.t. \quad \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (42-2)$$

محاسبه تابع لاغرانژین ( $\lambda$ )  $\phi$  در این صورت به راحتی صورت می‌پذیرد. یک ویژگی جالب تابع دوگان این است که مشتقات جزئی اول آن برابر با قیدهای اولیه مسئله است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = f_j(x(\lambda)) \quad (43-2)$$

مسئله دوگان یک مسئله بهینه سازی نامقید است که با به کارگیری الگوریتم‌های مختلفی می‌تواند به راحتی حل شود. از آنجا که روش‌های دوگان در فضای  $\lambda$  عمل می‌کنند، اهمیت آنها در مسائلی که تعداد قیدها در مقایسه با متغیرهای طراحی کم است، بیشتر می‌شود.

## ۶-۲ - برنامه ریزی دنباله ای

### ۱-۶-۲ - برنامه ریزی خطی دنباله ای (SLP)

تقریب های قید و روش های تحلیل تقریبی بیشتر هنگامی مفیدند که هزینه محاسباتی یک بار ارزیابی تابع هدف قیدها و مشتقاشان نسبت به هزینه محاسباتی مربوط به عملیات بهینه سازی مانند محاسبه جهت های جست وجو بسیار بیشتر است. این حالت واقعی در بسیاری از مواردی است که برای تحلیل یک سازه که با تعداد زیادی متغیر طراحی تعریف می شود از یک مدل اجزای محدود با هزاران درجه آزادی استفاده می کنیم. بنابراین کاهش تعداد تحلیلهای مورد نیاز برای فرایند طراحی در کاربرد الگوریتم های بهینه سازی در مدل سازه بر اساس تقریب ها ارزشمند است. ساده ترین و مشهور ترین رهیافت تقریب برنامه ریزی خطی دنباله ای (SLP) است. یک مساله ای بهینه سازی به شکل زیر

در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{44-۲}$$

رهیافت (SLP) از یک طراحی آزمایشی  $x_0$  شروع می کند و تابع هدف و قیدها را با تقریب های خطی بدست آمده از بسط سری تیلور حول نقطه  $x_0$  جایگزین می کند.

$$\begin{aligned} \min & f_0(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\ \text{s.t.} & f_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \text{and} & a_{li} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{ui} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{45-۲}$$

مجموعه قیود آخر حدود حرکت نامیده می شوند که  $a_{li}$  و  $a_{ui}$  به ترتیب کران پائین و بالای تغییرات مجاز  $x_i$  یا مقدار مجاز تغییرات  $x_i$  است.

به سبب تقریب به کار رفته و حدود حرکت، طراحی نهائی مساله خطی سازی شده،  $x_L$  به ندرت به طراحی بهینه به شکل قابل قبولی نزدیک است. با این وجود اگر حدود حرکت به اندازه کافی

کوچک باشند که یک تقریب خوبی را در این حدود حرکت تضمین کنند  $x_0$  از  $x_L$  به نقطه بهینه نزدیک تر خواهد بود.

بنابراین می‌توانیم  $x_0$  را با  $x_L$  جایگزین کرده و بهینه سازی خطی را با معادله (۴۵-۲) که حول نقطه شروع جدید خطی شده تکرار کنیم. این فرایند تکرار می‌شود و ما در واقع مساله بهینه سازی اصلی را با رشته‌ای از مسائل برنامه ریزی خطی (LP) جایگزین کرده ایم (بنابراین می‌توانیم بگوییم برنامه ریزی خطی دنباله‌ای). هر بهینه سازی خطی یک چرخه بهینه سازی نامیده می‌شود.

روش SLP به خاطر در دسترس بودن بسته‌های نرم افزاری LP مطمئن در بیشتر بسته‌های کتابخانه سیستم رایانه‌ها جاذبه بیشتری دارد. از طرف دیگر بسته‌های نرم افزاری برنامه ریزی غیر خطی مطمئن به سادگی در دسترس نیستند. با این همه راهبرد SLP مسائل متعددی دارد. اول اینکه هزینه‌های محاسباتی مربوط به عملیات بهینه سازی را به میزان زیادی افزایش می‌دهد زیرا فرایند بهینه سازی بارها تکرار می‌شود. (معمولًا پنج تا چهل بار). بنابراین، این راهبرد تنها وقتی منطقی به نظر می‌رسد که هزینه این محاسبات بهینه سازی در مقایسه با هزینه تحلیل و مشتقات حساسیت کمتر باشد. پس کارایی بسته‌های نرم افزاری LP که در SLP به کار می‌رود از اهمیت بسزایی برخوردار است.

دومین مساله این که بدون یک انتخاب مناسب حدود حرکت فرایند هرگز همگرا نمی‌شود. به طور کلی حدود حرکت باید با نزدیک شدن طراحی به بهینه کم کم کوچک شود. بخشی از دلیل کوچک ساختن حدود حرکت این است که دقیق تقریب مورد نیاز هنگام نزدیک شدن به بهینه افزایش می‌یابد.

هنگامی که از طراحی بهینه دور هستیم در هرچرخه به موفقیت‌های بزرگتری نایل می‌شویم و می‌توانیم خطاهای قابل ملاحظه‌ای را تحمل کرده و در همان حال به سمت بهینه پیش برویم. هنگامی که به بهینه نزدیک می‌شویم موفقیت کمتر می‌شود و ممکن است این بهبود با خطاهای

تقریب از بین بود. از طرف دیگر کاهش زود هنگام حدود حرکت در فرایند ممکن است باعث کاهش بی مورد سرعت همگرایی نیز بشود. به ویژه هنگامی که طراحی اولیه از بهینه واقعی دور است. دلیل کاهش حدود حرکت هنگامی مشخص می‌شود که طراحی نهایی یک چرخه در مقایسه با تحلیل دقیق نسبت به طراحی اولیه آن چرخه (که طراحی نهایی چرخه قبلی است) ناکافی باشد یا بهبودی در  $f_0$  به وجود نیاورد. معمولاً حدود حرکت حدود ده تا پنجاه درصد مقدار قبلی شان کوچک می‌شوند تا این که برای یک حدود حرکت مشخص تابع هدف از یک روداری داده شده کمتر بهبود یابد. انتخاب معمول حدود حرکت در شروع حدود ده تا سی درصد مقدار متغیرهای طراحی است. با این وجود، این گونه انتخاب تنها وقتی منطقی است که یک متغیر طراحی به سبب حرکت به سمت عوض شدن علامتش بسیار کوچک نباشد. در چنین حالتی انتخاب حدود حرکت بین ده تا سی درصد مقدار نمونه‌ای (و نه مقدار فعلی) از آن متغیر طراحی منطقی به نظر می‌رسد.

مشکل سوم SLP که گاهی بوجود می‌آید این است که طراحی شروع غیر قابل قبول باشد. اثرات مشترک تقریب و حدود حرکت می‌توانند شرایطی بوجود آورند که مساله‌ی بهینه سازی خطی شده یک جواب قابل قبول نداشته باشد یعنی اگر نقطه اولیه یک مساله نسبت به قیدهای نرمال سازی<sup>۱</sup> شده غیر قابل قبول باشد و حدود حرکت کوچک باشد، ناحیه‌ای که با حدود حرکت تشکیل می‌شود ممکن است بطور کلی خارج از فضای طراحی خطی شده باشد و به یک مساله غیر قابل قبول بیانجامد.

ممکن است طراحی بهین بdst آمده برای یک مساله خطی سازی شده در هر چرخه‌ای از فرایند SLP قیدهای مساله اصلی را نقض کند. چنین نقض قیدهایی معمولاً با بهبود تابع هدف بوجود می‌آید. همچنین ممکن است از یک جواب مساله خطی به جواب مساله خطی دیگر تابع هدف بهبودی نداشته باشد. این مشکلات را می‌توان با تغییر حدود حرکت حل کرد. با این وجود هیچ کدام

از دو مشکل را نمی‌توان در همگرایی کلی SLP مانع اصلی تلقی کرد. در بحث بعدی به این مطلب می‌پردازیم که چگونه می‌توان در مورد یک طراحی جدید بدست آمده از LP قضاوت کرد که آیا هنگامی که تابع هدف بهتر با نقض قید همراه است یک بهبود است و یا هنگامی که مجموعه قید بهتر برآورده شده اند ولی تابع هدف افزایش یافته می‌تواند بهبود به حساب آید.

فرض کنید جواب بهمینه LP در  $i$  امین چرخه  $x_{iL}^*$ ، به یک مجموعه قیود فعال یا نقض شده  $f_j(x_{iL}^*)$ ،  $j \in J$  انجامیده که  $J$  مجموعه قیدهای فعال است. جواب مساله خطی سازی شده را می‌توانیم به عنوان جواب دقیق مساله خطی بهبود یافته زیر در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ s.t. \quad & f_j(x) \leq pf_j(x_{iL}^*) \quad p = 1 \end{aligned} \quad (46-2)$$

مساله اصلی که می‌خواهیم حل کنیم برای  $p = 0$  است. با استفاده از روابط حساسیت جواب بهینه به پارامترهای مسئله رابطه (46-2) می‌توانیم حدس بزنیم که مقدار بهینه تابع هدف برای مساله بهبود نیافته عبارت است از:

$$L = f(x_{iL}^*) - \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j(x_{iL}^*) \quad (47-2)$$

که  $L$  تابع لاگرانژین است. این موضوع رهیافت زیر را بازگو می‌نماید: اگر تابع هدف و بحرانی ترین قیدها بهبود یابند، همواره طراحی جدید پذیرفته می‌شود. اگر تابع هدف بهبود یافته و برآورده شدن قیدها بدتر شده یا بر عکس، مقدار لاگرانژین‌ها را مقایسه می‌کنیم. اگر لاگرانژین در پایان یک چرخه از مقدار لاگرانژین در ابتدای چرخه کوچک تر شده باشد آن گاه طراحی جدید پذیرفته می‌شود. اگر از طرف دیگر لاگرانژین افزایش یافته باشد در حدود حرکت باید تجدید نظر کرد و آن را بهبود بخشید.

## ۲-۶-۲ - برنامه ریزی درجه دوم دنباله‌ای (SQP)

برخی از موانع روش SLP را می‌توان به کمک یک برنامه ریزی درجه دوم برای تولید زیر

مسئله‌ها و حل مکرر آنها، برطرف نمود. ابتدا یک مسیر حرکت  $\Delta\mathbf{x}$  پیدا کرده و سپس اندازه گام حرکت در جهت  $\Delta\mathbf{x}$  برای کاهش تابع هدف تعیین می‌شود.

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \xi \quad (48-2)$$

که  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  طول گام حرکت و  $\xi$  یک عدد کوچک مثبت است. با جایگزین کردن

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 \right)^{1/2} \quad (49-2)$$

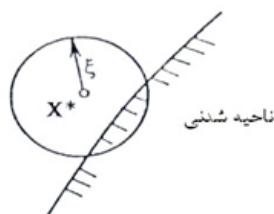
در (48-2) داریم:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 \leq \xi^2 \quad (50-2)$$

همان گونه که در شکل (3-2) مشاهده می‌شود، نقطه جدید باید در کره‌ای به شعاع  $\xi$  و به مرکز نقطه فعلی قرار گیرد. بنابراین زیر مسئله تقریبی که در هر تکرار باید حل شود به این صورت است:  $\Delta\mathbf{x}$  را طوری بیابید که:

$$\begin{aligned} \min Z &= f_0^* + \nabla f_0^{*T} \Delta\mathbf{x} \\ s.t. \quad f_j^* + \nabla f_j^{*T} \Delta\mathbf{x} &\leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{x} &\leq \xi^2 \end{aligned} \quad (51-2)$$

که  $\nabla f_j^*$  در نقطه  $\mathbf{x}^*$  محاسبه شده اند و معادله آخر یک قید سهموی طول گام حرکت است. در صورتی که  $\xi$  خیلی کوچک و نقطه فعلی  $\mathbf{x}^*$  در ناحیه غیر شدنی باشد، ممکن است این مسئله جواب نداشته باشد.



شکل ۳-۲- قید طول گام سهموی [۱۰]

## فصل سوم

# توابع ضمنی و روش مجموعه سطوح تراز

### ۱-۳ - مقدمه

در این فصل مفاهیم و کاربردهایی از سطوح ضمنی<sup>۱</sup> و خواص مفید آن که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد را توضیح می‌دهیم. بررسی کاملی را می‌توانید در مرجع [۱۴] پیدا کنید. در این فصل خواصی را بررسی می‌کنیم که بر روی حالت کلی توابع ضمنی کاراست. همچنین در این فصل با روش مجموعه سطوح تراز که بر روی توابع ضمنی تعریف می‌شود آشنا می‌شویم. روش مجموعه سطوح تراز به روش‌های ضمنی پارامتر زمان را اضافه می‌کند. علت اصلی که باعث رشد این روش، در حل عددی معادله حرکت وابسته به زمان رویه ضمنی با روش همیلتون-ژاکوبی<sup>۲</sup> بود. این از کارهای اولیه اُشر و ستین<sup>۳</sup> بوده است. در این فصل به بررسی روش (L.S) و حل عددی معادلات به روش (HJ) می‌پردازیم.

---

۱- Implicit

۲- Hamilton-Jacobi

۳- Osher & Sethian

### ۲-۳ - نقاط

در فضای یک بعدی، فرض کنید می‌خواهیم خطی را با استفاده از نقاط  $x=+1$  و  $x=-1$  به سه قسمت تقسیم کنیم. به این معنا که  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  و  $(1, +\infty)$  سه زیر مجموعه مجزا از این خط باشد. قسمت  $\Omega^+ = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  را به عنوان قسمت داخلی<sup>۱</sup> دامنه و  $\Omega^- = (-1, +1)$  را قسمت خارجی<sup>۲</sup> دامنه تعریف می‌کنیم. مرز بین دو قسمت داخل و خارج را دو نقطه‌ی  $\partial\Omega = \{-1, +1\}$  تشکیل می‌دهد و به نام وجه مشترک<sup>۳</sup> می‌شناسیم. در فضای یک بعدی، فضای داخل و خارج نیز یک بعدی می‌باشند. به صورت کلی در فضای  $\mathbb{R}^n$ ، زیر مجموعه‌ها از درجه  $n$  می‌باشد و سطح مشترک از درجه  $1-n$  می‌باشد. به عبارت دیگر مرز مشترک هم بعد یک<sup>۴</sup> (درجه مرز مشترک یک درجه کمتر است) می‌باشد.

در بیان وجه مشترک به صورت صریح<sup>۵</sup> نقاطی که تشکیل دهنده مرز مشترک می‌باشند به صورت آشکارا نوشته می‌شود همانند آنچه که در بالا ذکر گردید. ( $\partial\Omega = \{-1, +1\}$ ). مرز مشترک در بیان ضمنی<sup>۶</sup> به صورت یک ایزو کانتور<sup>۷</sup> یا سطح تراز ازتابع تعریف می‌شود. به عنوان مثال ایزو کانتور صفر در تابع  $\phi(x) = x^2 - 1$  مجموعه نقاطی است که  $\phi(x) = 0$  می‌باشد، همان طور که در شکل ۱-۳ نشان داده شده است مرزمشترک دقیقاً  $\partial\Omega = \{-1, +1\}$  است. لازم به ذکر می‌باشد که، تابع  $\phi(x)$  در فضای یک بعدی تعریف شده است در صورتیکه ایزوکانتور آن یک درجه کمتر می‌باشد.

به طور کل در فضای  $\mathbb{R}^n$  ایزوکانتور تابع ضمنی  $\phi(x)$  که  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ، از درجه  $1-n$  می‌باشد.

۱ - inside

۲ - outside

۳ - interface

۴ - Codimension one

۵ - explicit

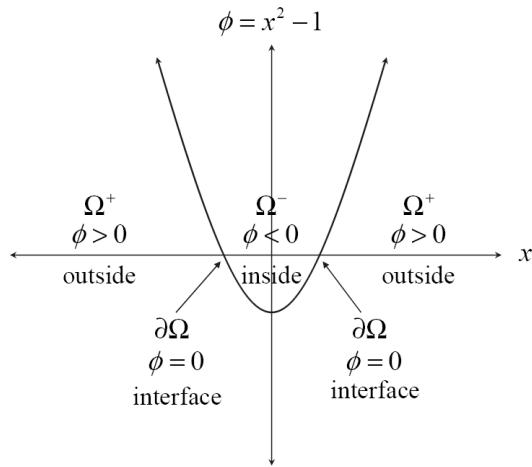
۶ - implicit

۷ - isocontor

در بالا از  $\phi(x) = 0$  به عنوان سطح تراز صفر تعریف شده است ولی در حالت کلی از هر  $a$  و

$a \in \mathbb{R}$  نیز می‌توان استفاده کرد. آنگاه می‌توانیم  $\phi(x)$  را به صورت زیر تعریف کنیم که در آن

$$\phi(x) = \phi(x) - a \quad \text{صورت } \phi(x) = 0 \text{ ایزوکانتر صفر آن خواهد بود.}$$



شکل ۱-۳- تابع ضمنی  $\phi(x) = x^2 - 1$

### ۱-۳- منحنی‌ها<sup>۱</sup>

در فضای دو بعدی، مرز مشترک، منحنی می‌باشد که فضای  $\mathbb{R}^2$  را به زیر مجموعه‌های غیر

صفر تبدیل می‌کند. در این قسمت منحنی‌ها را بسته فرض می‌کنیم از این رو دو قسمت داخل و

خارج به راحتی تعریف می‌شوند. به عنوان مثال فرض کنید  $\phi(x) = x^2 + y^2 - 1$ ، به طوریکه مرز

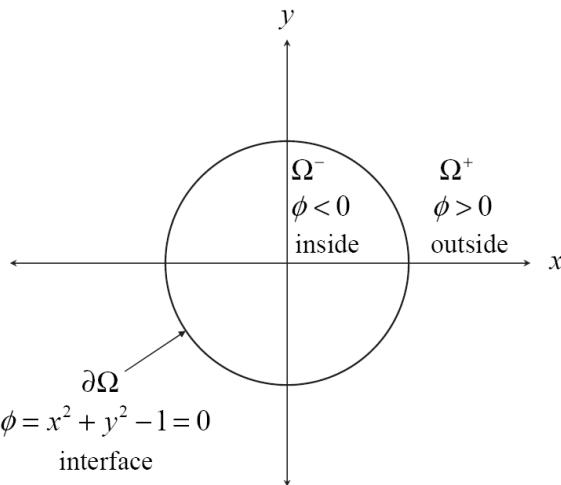
مشترک به صورت  $\phi = 0$  یک سطح تراز که به صورت یک دایره واحد  $\{\mathbf{x} | |\mathbf{x}| = 1\}$  تعریف

می‌شود. در شکل ۲-۳ ناحیه داخل و خارج توضیح داده شده است.

اگر بخواهیم مرز مشترک فوق را به صورت صریح بیان کنیم، آنگاه داریم  $\partial\Omega = \{\mathbf{x} | |\mathbf{x}| = 1\}$

بنابراین در بیان صریح مرز مشترک نیازمند آن هستیم که تمامی نقاط معرفی شوند، هر چند در مثال

فوق این نوع نمایش ساده می‌باشد ولی در حالت کلی این کار می‌تواند مشکل ساز باشد.



شکل ۲-۳- منحنی ضمنی  $x^2 + y^2 = 1$

در حالت کلی، برای بیان پارامتری منحنی با تابع برداری  $\mathbf{x}(s)$  و پارامتر  $s$  در بازه  $[s_0, s_f]$  به شرط بسته بودن منحنی  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}(s_f)$  نیاز می‌باشد.

هرچند که استفاده از نمایش صریح دربیان مرزمشترک فوق ساده می‌باشد، اما در منحنی‌های پیچیده دو بعدی این کار ساده نمی‌باشد. راه ساده‌ای که برای تقریب زدن بیان صریح بکار برده می‌شود، گسسته سازی پارامتر  $s$  به مجموعه‌ای از نقاط محدود  $s_0 < \dots < s_{i-1} < s_i < s_{i+1} < \dots < s_f$  مولفه به طوری که زیر بازه‌های  $[s_i, s_{i+1}]$  لزوماً با هم برابر نباشد. برای هر نقطه از فضای پارامتری  $s$ ، مولفه دوم متناظر با آن بر روی منحنی را به صورت  $\mathbf{x}(s_i)$  نمایش داده می‌شود. واضح است که هرچه تعداد نقاط گسسته سازی بیشتر شود منحنی با کیفیت دقیق‌تری خواهیم داشت.

گسسته سازی در بیان ضمنی نیز به سادگی بدست می‌آید، به جز در تمام فضای  $\mathbb{R}^2$  که دارای مرز نمی‌باشد. به همین دلیل از گسسته سازی مجموعه کراندار  $D$  که زیر مجموعه  $\mathbb{R}^2$  می‌باشد، استفاده می‌شود. برای تقریب تابع ضمنی  $\phi$  از تعداد نقاط محدود  $(x_i, y_i)$  for  $i = 1, \dots, N$  است که بجای بررسی یک بعدی در زیر بازه برای گسسته سازی دامنه  $D$  استفاده می‌شود. روشی است که بجای بررسی یک بعدی در زیر بازه می‌باشد فضای دوبعدی  $D$  را بررسی کنیم. یکی از نقص‌های گسسته سازی در بیان ضمنی نسبت به بیان صریح گسسته سازی فضایی از درجه بالاتر می‌باشد.

به طور کلی در فضای  $\mathbb{E}^n$ ، برای گسسته سازی به بیان صریح نیازمند بررسی فضای  $n-1$  بعدی است و حال آنکه در بیان ضمنی، فضای  $n$  بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این کار یکی از ضعف‌های بیان ضمنی مرز مشترک می‌باشد، که با جایگزین کردن نقاط  $\mathbf{x}$  در نزدیکی مرز مشترک و بررسی نکردن سایر نقاط در دامنه  $D$  می‌توان از بررسی کل فضای  $n$  بعدی اجتناب کرد.

از آنجائیکه بررسی ایزوکانتور  $\phi(x) = 0$  دارای اهمیت می‌باشد، فقط نقاط  $\mathbf{x}$  در نزدیکی این سطح تراز که مرز مشترک را به صورت دقیق مشخص می‌کند نیاز می‌باشد، و بقیه نقاط فضای  $D$  مهم نمی‌باشند. کلاسه کردن نقاطی در نزدیکی مرزمشترک در بیان ضمنی روشنی محلی برای گسسته سازی می‌باشد. هنگامی که مجموعه نقاط گسسته سازی انتخاب شدند، مقدار تابع ضمنی متناظر با آن  $\phi(\mathbf{x})$  ذخیره سازی می‌شود.

در هر حال گسسته سازی صریح یا ضمنی موقعیت مرزمشترک را در تعداد نقاط محدودی بیان می‌کند. برای بدست آوردن تقریبی سایر نقاط می‌توان از درونیابی استفاده کرد. به عنوان مثال می‌توان از درونیابی چند جمله‌ای برای تعیین شکل مرز مشترک در بین نقاط معلوم استفاده کرد. اسپیلاین‌ها نیز برای این کار مناسب می‌باشند. به طور مشابه در بیان ضمنی مرز مشترک نیز مقدار  $\phi$  برای نقاط محدودی مشخص می‌باشد، از درونیابی برای بدست آوردن سایر نقاط نیز استفاده می‌شود.

### <sup>۱</sup>- رویه ها<sup>۲</sup>

در فضای سه بعدی مرز مشترک رویه‌ای می‌باشد، که فضای  $\mathbb{E}^3$  را به حجم‌های غیر صفر تقسیم می‌کند. رویه بسته‌ای را در نظر می‌گیریم که دامنه را به دو قسمت داخل و خارج تقسیم می‌کند. به عنوان مثال تابع  $\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  را در نظر بگیرید به طوریکه مرز مشترک به صورت  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  تعریف می‌شود، که کره‌ای با شعاع واحد می‌باشد. بیان صریح مرز مشترک به صورت

$\partial\Omega = \{ \mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| = 1 \}$  نوشته می‌شود. قسمت داخلی به صورت  $\{ \mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < 1 \}$  و قسمت خارجی

$\partial\Omega = \{ \mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| > 1 \}$  تعریف می‌شود.

برای رویه‌های پیچیده، که شکل تحلیل آن موجود نمی‌باشد دوباره نیاز به گسسته سازی می‌باشد. گسسته سازی<sup>۱</sup> وقتی که رویه به شکل صریح بیان می‌گردد تا حدودی مشکل می‌باشد، چون برای بدست آوردن همبندی<sup>۲</sup> به تعدادی نقاط بر روی رویه نیاز می‌باشد، ولی در فضای دوبعدی همبندی به علت ترتیب آنها مشخص بود، یعنی  $(s_i, \mathbf{x}(s_{i+1}), s_{i+1})$  همبند می‌باشد. از طرفی دیگر اگر همبندی مشخص نباشد تعیین همبندی کاری سخت به نظر می‌رسد. مثلاً برای رویه‌های سوراخ دار این کار نیاز به استفاده از الگوریتم‌های خاص که دقیق هم نیستند دارد. همچنانی همبندی در طول زمان برای رویه‌های دینامیکی تغییر می‌کند. به عنوان مثال سطح روی آب استخراجی پر از بچه را در نظر بگیرید. برای بیان پارامتری سطح آب همبندی باستی بطور متناوب، هرگاه که قسمتی از رویه‌ها با هم ادغام<sup>۳</sup> یا از هم جدا<sup>۴</sup> می‌شوند، بررسی شود. در فضای دوبعدی این کار قابل مدیریت می‌باشد. در فضای سه بعدی بررسی ادغام و جدا شدن مرز مشترک، به علت مشکلاتی از قبیل ایجاد سوراخ در رویه، پیچیده تر است.

یکی از زیباترین خواص رویه‌های ضمنی آن است که به همبندی نقاط نیاز نمی‌باشد، یک شبکه بندی یکنواخت کارتزین  $\{(x_i, y_j, z_k) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p\}$  می‌تواند به راحتی برای عمومیت دادن در فضای دو بعدی مورد استفاده قرار گیرد. یکی از قدرتمند‌ترین وجوه بیان ضمنی رویه‌ها آن است که می‌توان از فضای دو بعدی به فضای سه بعدی به راحتی منتقل شد.

---

۱- discretization

۲- connectivity

۳- merge

۴- pinch

### ۳-۵- ابزار هندسی<sup>۱</sup>

در بیان ضمنی مرز مشترک ابزار هندسی قوی وجود دارد که قابل استفاده می‌باشند. به عنوان مثال هنگامی که  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  ایزوکانتور تشکیل دهنده مرز مشترک تعریف می‌شود می‌توان به سادگی دریافت که نقطه  $\mathbf{x}_0$  در داخل مرز یا خارج یا بر روی آن قرار دارد. تنها لازم است که علامت  $\phi$  را مورد بررسی قرار داد.

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= 0 \rightarrow \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) &< 0 \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \phi(\mathbf{x}) &> 0 \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega^+\end{aligned}\quad (3 - 1)$$

حال اگر مرز به صورت صریح بیان شود، فهم این که، نقطه  $\mathbf{x}_0$  در داخل یا خارج از مرز می‌باشد کار دشواری خواهد بود، به این منظور می‌بایست از نقطه  $\mathbf{x}_0$  خطی را به طول نامحدود امتداد داد آنگاه تعداد نقاط قطع منحنی را بشماریم. اگر این تعداد زوج باشد نقطه خارج از مرز می‌باشد و اگر این تعداد فرد باشد نقطه مورد نظر داخل مرز می‌باشد. پر واضح است برای ارزیابی نقطه  $\mathbf{x}_0$  با بیان ضمنی آن راحت‌تر است.

بدست آوردن شکل هندسی سازه با استفاده از توابع ضمنی نسبت به توابع پارامتری ساده‌تر می‌باشد. این امر دارای اهمیت ویژه‌ای است، برای مثال، در طراحی به کمک کامپیوتر<sup>۲</sup> (CAD) اگر  $\phi_1$  و  $\phi_2$  دو تابع ضمنی متفاوت باشند، آنگاه:

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}))$$

تابع ضمنی است که اجتماع<sup>۳</sup> نواحی داخلی  $\phi_1$  و  $\phi_2$  را نمایش می‌دهد. به طور مشابه،  $\phi(\mathbf{x}) = \max(\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}))$  تابع ضمنی است که تقاطع<sup>۴</sup> (اشتراک) نواحی داخلی  $\phi_1$  و  $\phi_2$  را نمایش

---

<sup>۱</sup>- Geometry toolbox

<sup>۲</sup>- computer aided design

<sup>۳</sup>- union

<sup>۴</sup>- intersection

می‌دهد. مکمل<sup>۱</sup>  $\phi(\mathbf{x}) = -\phi_1(\mathbf{x})$  توسط  $\phi(\mathbf{x})$  قابل تعریف است. همچنین نواحی را که از تفریق  $\phi(\mathbf{x}) = \max(\phi_1(\mathbf{x}), -\phi_2(\mathbf{x}))$  بدست می‌آید به صورت نواحی داخلی  $\phi_1$  و نواحی داخلی  $\phi_2$  نمایش می‌دهد.

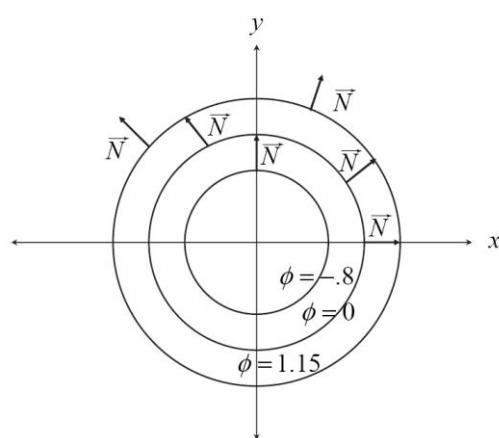
گرادیان تابع ضمنی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (2-3)$$

مقدار  $\nabla \phi$  در نقطه  $\mathbf{x}_0$  برداری است در جهت بردار نرمال (به سمت خارج در جهت افزایش  $\phi$ ) مرز مشترک می‌باشد. بنابراین بردار نرمال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (3-3)$$

در بیان ضمنی مرز مشترک، مرز مشترک در دامنه‌ای با یک بعد بیشتر معرفی می‌گردد، از این رو داشتن اطلاعات در فضای با بعد بیشتر مفید می‌باشد. به عنوان مثال، بجای تعریف بردار واحد نرمال  $\mathbf{N}$  با معادله (۳ - ۳) برای نقاط روی مرز مشترک می‌توان تابع  $N$  را برای تمام نقاط روی دامنه با استفاده از رابطه (۳ - ۳) تعریف کرد.



شکل ۳-۳-۳- ایزوکانتورهای تابع  $\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1$

۱- complement

در شکل شکل ۳-۳ تعدادی از ایزوکانتورهای دو بعدی  $\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1$  همراه با چند بردار نرمال نشان داده شده است.

اولین مثال یک بعدی را به یاد آورید که در آن  $\phi(x) = x^2 - 1$  به طوری که بردار نرمال به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{N} = \frac{|x|}{x}$$

بنابراین جهت بردار  $\mathbf{N}$  به ازای  $x > 0$  به سمت راست و برای  $x < 0$  به سمت چپ می‌باشد.

بردار نرمال نقطه  $x=0$  تعریف نشده می‌باشد (مخرج کسر صفر می‌شود). اما می‌توان با استفاده از تکنیک‌هایی از مسائل پیش آمده در آن جلوگیری کرد. در مثال‌های دو بعدی و سه بعدی قبل نیز در نقطه  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  نیز تمام مشتقات جزئی صفر می‌شود و رفتار مشابهی را در این نقطه خواهیم داشت.

لازم به یادآوری است که اضافه کردن مقدار کوچک دلخواه  $\epsilon$  به مخرج کسر معادله (۳ - ۳) ایده خوبی نمی‌باشد چون  $|\mathbf{N}| \neq 1$  خواهد بود.

در معادله (۳ - ۳) برای به دست آوردن مقدار مشتق می‌توان آن را تقریب زد. برای این کار روش‌های بسیاری موجود است. به عنوان مثال می‌توان از تفاضل پیش رونده<sup>۱</sup> استفاده کرد که به اختصار می‌توان آن را به صورت  $D^+ \phi$  معرفی کرد.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (4 - 3)$$

را می‌توان به اختصار برای تفاضل پسروندۀ<sup>۲</sup> مرتبه اول معرفی کرد.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (5 - 3)$$

و تفاضل مرکزی<sup>۱</sup> از مرتبه دو را با  $D^0 \phi$  و با رابطه زیر معرفی می‌کنیم:

<sup>۱</sup> - forward difference

<sup>۲</sup> - backward difference

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{2\Delta x} \quad (6-3)$$

به طور مشابه روابط فوق برای بدست آوردن مشتقات در جهات  $y, z$  با اندیس های  $j$  و  $k$  ظاهر می شوند. روابط فوق ساده ولی کامل می باشند.

زمانی که از تفاضل محدود در رابطه فوق استفاده می شود مخرج رابطه (3-3) به سمت صفر می کند. در حالت تحلیل به سادگی می توان نرمال دلخواهی را انتخاب کرد. هر چند که انتخاب بردار نرمال تا اندازه ای تعیین شده است. مقدار نرمال برابر است با حرکت کوچک  $\phi$  بر روی شبکه کارتزین در حد گرد کردن خط، این تغییرات جزئی در مقدار  $\phi$  بر روی خطاهای محلی تفاضل محدود تاثیر گذار می باشد.

مثال 1- $\phi(x) = x^2$  در شبکه بندی کارتزین به صورت گستته در نظر بگیرد. و فرض کنید با مقدار دقیق  $\phi$  در آن نقاط تعریف شده است ( $x_i = 0$  و  $x_{i-1} = -\Delta x$  و  $x_{i+1} = \Delta x$ ). آنگاه از تفاضل پیشرونده مقدار  $N_i = +1$  و از روش تفاضل پسرونده مقدار  $N_i = -1$  و از تفاضل مرکزی مقداری نخواهیم داشت چون مخرج کسر صفر می شود. هر چند که با تغییر  $\phi_{i+1}$  به اندازه کوچک  $\epsilon > 0$  خواهیم داشت  $N_i = 1$  و به صورت مشابه اگر  $\phi_{i-1}$  را به اندازه  $\epsilon$  تغییر دهیم مقدار  $N_i = -1$  را خواهیم داشت بنابراین برای هر روشی که در یک تغییر یا اختلال کوچک در داده ها ثابت (پایدار) می باشند، می توان مقدار  $N_i$  را زمانی که مخرج به سمت صفر می کند به صورت تصادفی انتخاب کرد.

به طور مشابه در مثال های دو بعدی و سه بعدی ذکر شده نیز  $N = \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|}$  مورد قبول در تمام نقاط می باشد بجز در نقطه مبدأ که در این صورت انتخاب  $N$  به صورت دلخواه می باشد.

اگر  $\phi$  تابعی خوش رفتار نرم باشد آنگاه مقدار نرمال مرز مشترک را می توان از تقریب زدن بین

<sup>1</sup>- central difference

مقدادر  $\mathbf{N}$  بر روی گرههای معلوم شبکه کارتزین استفاده کرد. به این معنا که با داشتن مقدار  $\mathbf{N}$  در همسایگی نقطه  $\mathbf{x}_0$  بر روی شبکه دکارتی می‌توان مقدار  $\mathbf{N}$  در  $\mathbf{x}_0$  را با درونیابی به دست آورد.<sup>۱</sup> هرگاه که از روش‌های تفاضل مرکزی، پیشرونده یا پسرونده استفاده شود درونیابی خطی، دو خطی<sup>۲</sup> یا سه خطی<sup>۳</sup> مناسب است.

روش درونیابی برای بدست آوردن مقدادر  $\mathbf{N}$  نیازمند آن است که تابع  $\phi$  به صورت نرم<sup>۴</sup> و خوش رفتار<sup>۵</sup> باشد، به این معنا که می‌بایست در انتخاب  $\phi$  دقت مناسبی را به خرج داد. به عنوان مثال انتخاب  $\phi$  با نواسان زیاد یا گرادیان‌های شیب دار بیش از حد لزوم غیر منطقی می‌باشد. یکی از بهترین انتخاب‌های  $\phi$  استفاده از تابع فاصله علامتدار<sup>۶</sup> است که در قسمت بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اچنا مرز مشترک به صورت دیورژانس بردار  $\mathbf{N} = (n_1, n_2, n_3)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{N} = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} \quad (7 - 3)$$

از این رو برای نواحی محدب  $\kappa > 0$  می‌باشد و برای نواحی مقعر  $\kappa < 0$  می‌باشد. شکل ۷-۳ این موضوع را نشان می‌دهد.

با جایگزینی رابطه (۳-۳) در معادله (۷-۳) خواهیم داشت:

$$\kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (8 - 3)$$

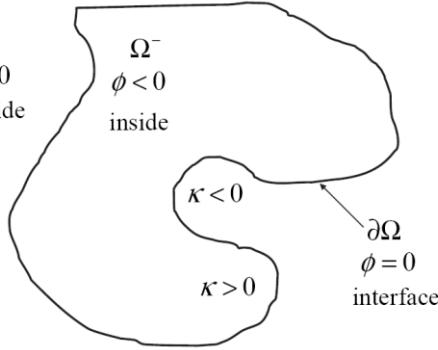
<sup>۱</sup> - bilinear

<sup>۲</sup> - thri-linear

<sup>۳</sup> - smooth

<sup>۴</sup> - well-behavior

<sup>۵</sup> - Signe distance function



شکل ۴-۳- نواحی مکر و محدب

با ساده سازی رابطه فوق اینها را بر حسب مشتق مرتبه اول و دوم  $\phi$  به صورت زیر نوشت:

$$\kappa = (\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{xx} + \phi_x^2 \phi_{zz} - 2\phi_x \phi_z \phi_{xz} + \phi_z^2 \phi_{xx} + \phi_y^2 \phi_{zz} - 2\phi_y \phi_z \phi_{yz} + \phi_z^2 \phi_{yy}) / |\nabla \phi|^3 \quad (9-3)$$

مشتق جزئی مرتبه دوم  $\phi_{xx}$  را می‌توان به صورت تفاضل محدود نوشت:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (10-3)$$

رابطه فوق را می‌توانیم به اختصار به صورت  $D^+ D^-_x \phi$  یا  $D^-_x D^+_x \phi$  نوشت.  $D^+$  و  $D^-$  در روابط

(۳-۴) و (۳-۵) تعریف شده اند. زیرنویس  $x$  نشان دهنده راستای اعمال مشتق می‌باشد. مشتق

دوم  $\phi_{xy}$  با استفاده از روابط تفاضل محدود به صورت  $D^0_x D^0_y \phi$  یا  $D^0_y D^0_x \phi$  تعریف می‌شود.

در مثال یک بعدی،  $\phi(x) = x^2 - 1$  می‌باشد مگر در نقطه مبدأ که در معادله

(۳-۹) تعریف نشده می‌باشد. بنابراین تابع دارای نقطه بحرانی<sup>۱</sup> می‌باشد، که قابل رفع شدن است.

ولی می‌توان  $\kappa = 0$  را برای تمامی نقاط تعریف کرد در مثال های دو بعدی و سه بعدی قبل،

$\kappa = \frac{2}{|\mathbf{x}|}$  در تمام نقاط به جز مبدأ می‌باشد در اینجا نقاط بحرانی رفع نمی‌شوند. مقدار  $\kappa$

وقتی که به نزدیکی نقطه مبدأ حرکت می‌کنیم، به سمت بینهایت می‌کند.

مقدار اینها بر روی مرز مشترک از درجه یک در فضای دو بعدی برابر یک می‌باشد. این مقدار

۱- singularity

در مرز مشترک از درجه دوم در فضای سه بعدی برابر دو می باشد. علت این اختلاف آن است که دایره در فضای دو بعدی به استوانه در فضای سه بعدی تبدیل شده است.

### ۳-۶- ابزار محاسبات<sup>۱</sup>

تابع مفسر  $\chi^-$  برای فضای داخلی  $\Omega^-$  به صورت زیر تعریف می شود:

(۱۱ - ۳)

$$\chi^- = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

تابع مفسر  $\chi^+$  برای نواحی خارجی  $\Omega^+$  به صورت زیر تعریف می شود:

(۱۲ - ۳)

$$\chi^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 1 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

هنگامی که عملیات خاصی بر روی مرز نیاز نمی باشد، تنها داشتن نواحی داخلی و خارجی اهمیت دارد. این کار توسط یک دسته بندی نواحی درونی و بیرونی انجام شده است توابع  $\chi^\pm$ ، توابع ای چند بعدی برای متغیر  $\mathbf{x}$  می باشند.

کار کردن با متغیر یک بعدی  $\phi$  راحت تر است بنابراین تابع یک بعدی هویساید (Heaviside)

را تعریف می کنیم:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi \leq 0 \\ 1 & \text{if } \phi > 0 \end{cases} \quad (۱۳ - ۳)$$

تابع  $H$  از درجه یک می باشد هر چند که  $\phi$  تابعی از  $\mathbf{x}$  می باشد. این تابع به ما اجازه

می دهد که در فضای یک بعدی کار کنیم. با توجه به تعریف تابع  $H$  به راحتی داریم:

۱- calculus toolbox

۲- characteristic function

$$\chi^+ = H(\phi(\mathbf{x})) \quad , \quad \chi^- = 1 - H(\phi(\mathbf{x}))$$

بنابراین تابع  $H$  یک متغیره تعریف شد تا بتوان از تابع مفسر در روابط به سادگی استفاده کرد.

انتگرال حجم (سطح یا طول در فضای  $\mathbb{R}^2$  یا  $\mathbb{R}^3$ ) از تابع  $f$  بر روی فضای داخلی  $\Omega^-$  به

شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \chi^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (14-3)$$

انتگرال گیری بر کل دامنه  $\Omega$  انجام می‌گردد، اما تابع  $\chi^-$  به صورت خودکار محدوده  $\Omega^+$  را

خارج می‌کند در صورت استفاده از تابع هویسايد در رابطه قبل داریم:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \quad (15-3)$$

به صورت مشابه برای فضای خارجی  $\Omega^+$  مرز مشترک داریم:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (16-3)$$

با تعریف جهت برای تابع هویسايد در جهت نرمال تابع دیراک دلتا<sup>۱</sup> حاصل می‌شود.

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \nabla H(\phi(\mathbf{x})).\mathbf{N} \quad (17-3)$$

نکته آن است که این توزیع تنها در مرز مشترک  $\partial\Omega$  جائیکه  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  است، غیر صفر است.

بالاستفاده از قضیه مشتق زنجیری برای بدست آوردن گرادیان  $H$ ، تعریف نرمال از رابطه (۱۳-۳) و

این حقیقت که  $|\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 = |\nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x})|$  رابطه (۱۷-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = H'(\phi(\mathbf{x})) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} = H'(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| \quad (18-3)$$

در فضای یک بعدی، تابع دلتا مشتقی از تابع هویسايد تعریف می‌شود:

$$\delta(\phi) = H'(\phi) \quad (19-3)$$

تابع دلتا در تمامی نقاط برابر صفر است مگر بر روی مرز  $\phi = 0$ . بنابراین می‌توان معادله

<sup>۱</sup>- dirac delta

(۱۷ - ۳) و (۱۸ - ۳) را با استفاده از تابع دلتای یک بعدی نوشت:

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| \quad (۲۰ - ۳)$$

انتگرال سطح از تابع  $f$  بر روی مرز  $\partial\Omega$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (۲۱ - ۳)$$

هر چند انتگرال بر روی تمام  $\Omega$  می‌باشد اما تابع دیراک دلتا به صورت خودکار همه قسمت‌های اضافی را به جز مرز مشترک از انتگرال خارج می‌کند. با جایگذاری (۲۰ - ۳) در (۲۱ - ۳) داشت:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad (۲۲ - ۳)$$

$d\mathbf{x}$  المان حجم در فضای سه بعدی و المان سطح در فضای دو بعدی و المان طول در فضای یک بعدی می‌باشد. از آنجائیکه  $\delta(\phi(\mathbf{x}))$  در تمام نقاط به جز مرز مشترک صفر می‌باشد در حل عددی تقریب مناسب برای انتگرال فوق بدست نمی‌آید به این منظور تابع هویسايد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon \leq \phi \leq \varepsilon \\ 1 & \varepsilon < \phi \end{cases} \quad (۲۳ - ۳)$$

یک مقدار مناسب برای  $\varepsilon = 1.5\Delta x$  است. که باعث می‌شود عرض مرز مشترک را به اندازه سه المان از شبکه بزرگ کند. بنابراین تابع دلتا به صورت زیر به دست نمی‌آید:

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon \leq \phi \leq \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < \phi \end{cases} \quad (۲۴ - ۳)$$

دلتا اصلاح شده از رابطه فوق این اجازه را به ما می‌دهد که انتگرال سطح در رابطه (۲۲ - ۳) را با استفاده از روش‌های عددی معمول به دست آورد.

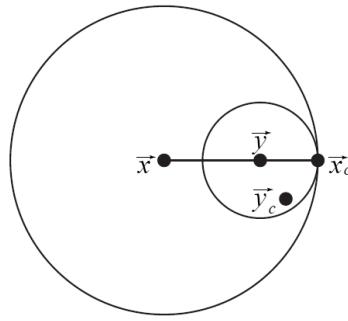
### ۷-۳ - تابع فاصله<sup>۱</sup>

تابع فاصله  $d(\mathbf{x})$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\mathbf{x}) = \min(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|) \quad \text{for all } \mathbf{x}_i \in \partial\Omega \quad (25 - ۳)$$

عبارت فوق به این معناست که  $d(\mathbf{x}) = 0$  زمانی است که  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  روی مرز باشد. از دیدگاه هندسی، اگر  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  آنگاه  $d(\mathbf{x}) = 0$  در غیر این صورت برای نقطه خارج از مرز  $\mathbf{x}$  معلوم، نزدیکترین نقطه بر روی مرز را پیدا می‌کنیم. و این نقطه را  $\mathbf{x}_c$  می‌نامیم. آنگاه

$$d(x) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \quad (3 - 26)$$



شکل ۳-۵- نزدیک ترین نقطه به مرز مشترک

حال برای هر نقطه  $\mathbf{y}$  بر روی خط واصل  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_c$ ، نقطه‌ای است بر روی مرز که نزدیک ترین فاصله را به نقطه  $\mathbf{y}$  دارد. این مطالب در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. به عبارت دیگر، خط واصل بین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_c$ ، نزدیکترین فاصله برای تابع  $d$  می‌باشد. مقدار  $-\nabla d$  در هر نقطه روی خط واصل  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_c$ ، برداری است که شروع آن از  $\mathbf{x}$  به  $\mathbf{x}_c$  می‌باشد.

$$|\nabla d| = 1 \quad (27 - ۳)$$

### ۸-۳ - تابع فاصله علامتدار

تابع فاصله علامتدار تابع ضمنی  $\phi$  است بطوری که:

۱- Distance function

$$|\phi(\mathbf{x})| = d(x) \quad \text{for all } x \quad (28 - 3)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= d(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) &= -d(\mathbf{x}) \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \phi(\mathbf{x}) &= d(\mathbf{x}) \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{aligned} \quad (29 - 3)$$

تابع فاصله علامتدار علاوه بر خواص توابع ضمنی ذکر شده در فصل قبل خواص جدیدی نیز

دارد برای مثال

$$|\nabla \phi| = 1 \quad (30 - 3)$$

تابع فاصله دارای مینیمم محلی در  $d = 0$  می‌باشد، که باعث مشکل در تخمین مقادیر مشتق

بر روی یا نزدیک مرز می‌شود.

برای نقطه‌ای معلوم  $\mathbf{x}$  و استفاده از این تعریف که  $\phi(\mathbf{x})$  یک تابع فاصله علامتدار برای نزدیکترین نقطه به مرز مشترک می‌باشد می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x} - \phi(\mathbf{x}) \mathbf{N} \quad (31 - 3)$$

در مثال اول فصل از رابطه  $\phi(\mathbf{x}) = x^2 - 1$  برای بیان ضمنی مرز  $\{-1, 1\}$  استفاده کردیم. برای

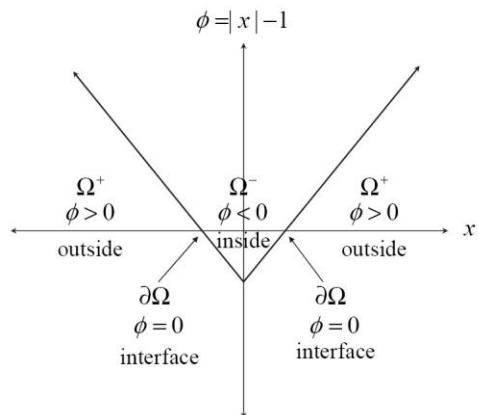
بیان تابع ضمنی علامت فاصله همین نقاط داریم  $\phi(\mathbf{x}) = |x| - 1$  همانطور که در شکل شکل ۳-۶ نشان داده شده است.

تابع فاصله علامتدار  $\phi(\mathbf{x}) = |x| - 1$ ، همان مرز  $\partial\Omega$  و فضای داخلی  $\Omega^-$  و فضای خارجی  $\Omega^+$  را تولید می‌کند.

$$\phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| - 1 \rightarrow |\nabla \phi| = 1 \quad \text{for all } x = 0 \quad (32 - 3)$$

در نقطه  $x = 0$  مشتق تابع فاصله علامتدار تعریف نشده است. در ابتدا این امر مشکل ساز به

نظر می‌رسد به عنوان مثال برای تعیین نرمال در نقطه  $x = 0$ ، مقدار آن به سمت بینهایت می‌گذارد. اما مقدار در این نقطه مقدار محدودی بین  $[0, 1]$  در شبکه کارتزین معمولی خواهد بود.



شکل ۶-۳- تابع علامت فاصله

همانطور که در قسمت قبل اشاره شد می‌خواهیم تابع ضمنی را تا آنجا که امکان دارد نرم را انتخاب کنیم. به این منظور با توجه به خصوصیات تابع علامت فاصله، با استفاده از این تابع به نتایج مطلوبی می‌رسیم. مخصوصاً برای نقاط بحرانی که به صورت عددی حل شده باشند یک انتخاب مناسب برای مرز مشترک می‌باشد. علت اصلی در انتخاب تابع فاصله علامتدار این است که  $|\nabla \phi| = 1$  در تمامی نقاط بجز نزدیکی نقاط بحرانی است. این کار باعث ساده سازی بسیاری از فرمول‌های اشاره شده در این فصل با حذف نرمال آن خواهد بود. به عنوان مثال معادله (۳ - ۳) تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$\vec{N} = \nabla \phi \quad (3 - 33)$$

معادله (۳ - ۷) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\kappa = \Delta \phi \quad (34 - 3)$$

به طوری که  $\Delta \phi$  لaplاسین  $\phi$  تعريف می‌گردد.

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{xy} \quad (35 - 3)$$

که نباید با علامت  $\Delta x$  که به معنای سایز سلول‌های شبکه کارتزین می‌باشد اشتباه گرفته شود.

پر واضح است که رابطه (۳ - ۳۵) در مقایسه با رابطه (۳ - ۹) بسیار ساده گردیده است.

### ۹-۳ - انتقال<sup>۱</sup>

فرض کنید سرعت  $\mathbf{V}(x)$  برای تمام نقاط بر روی مرز  $\phi(\vec{x}) = 0$  مشخص باشد. حال می‌خواهیم تمام نقاط رویه را با سرعت  $(u, v, w) = \vec{V}(x)$  حرکت دهیم. راحت‌ترین راه برای بررسی این مسئله حل معادله دیفرانسیل معمولی:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}(\vec{x}) \quad (36-3)$$

برای هر نقطه  $x$  روی مرز مشترک است. رابطه فوق به رابطه لAGRANZIEN رشد مرز معروف می‌باشد. از آنجایی که بینهایت نقطه بر روی مرز مشترک داریم (به جز در فضای یک بعدی) می‌باشد. برای حرکت آن از گسته‌سازی به تعداد اجزای محدودی استفاده کرد. در صورتی که همبندی نقاط از بین نرود این کار به آسانی انجام می‌پذیرد. متأسفانه، حتی در سرعت‌های جزئی نیز تغییرات زیاد است و باعث می‌شود که المان‌های مرز دچار اعوجاج شود و همبندی آنها از بین برود و محاسبات دقت لازم را نخواهد داشت. در مرجع [۱۵] در مورد استفاده از روش اصلاح مشبندی برای نگه داشتن نظم در تغییرات مرزها بحث شده است. هرچند که با انجام این کار، حفظ نرمی و نظم، انجام محاسبات دقت لازم را دارا نمی‌باشند.

برای اجتناب از ناپایداری، تغییرات المان‌های رویه‌ها و عملیات بر روی توپولوژی مرزها، از توابع ضمنی معرف مرز برای رشد مرز نیز استفاده می‌کنیم. به این منظور از ساده‌ترین رابطه‌ی انتقال استفاده می‌کنیم.

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (37-3)$$

به طوریکه اندیس  $t$  بیانگر مشتق جزئی نسبت به متغیر زمان  $t$  می‌باشد. و علامت  $\nabla$  اپراتور گرادیان می‌باشد بنابراین داریم:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \vec{\phi} = u \phi_x + v \phi_y + w \phi_z \quad (38-3)$$

این ترم از معادلات دیفرانسیل جزئی است که حرکت مرز را مشخص می‌کند. این معادله به رابطه‌ی اولی رشد مرز نیز معروف است. از آنجائیکه مرز به صورت ضمنی مشخص می‌باشد برخلاف آنچه که در رابطه‌ی لاغرانژی حرکت داشتیم که پیدا کردن مرز به صورت المان بود. رابطه (۳ - ۳۷) به معادله مجموعه سطوح تراز نیز معروف است که توسط اشر و ستین برای پیدا کردن عددی مرز در

حال نمو معرفی گردیده است. [۱۶]

این رابطه در معادلات گازها و احتراق و پیدا کردن مرزهای شعله توسط مارک اشتاین نیز بیان گردیده است [۱۷]. برای اثبات روابط فوق داریم سطح تراز  $k$  از تابع ضمنی  $\phi$  را به صورت :

$$\phi(t, x^+) = k \quad (39 - ۳)$$

حال با مشتق گیری و استفاده از قانون زنجیری خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \nabla \phi(t, x) = 0 \quad (40 - ۳)$$

با حل معادله فوق که به معادله مجموعه سطوح تراز یا معادله همیلتون ژاکوبی معروف است، نقاط جدید بدست می‌آید که شکل و توپولوژی جدید آن بدست می‌آید. در فصل بعد توضیحات کاملتری برای حل ارائه خواهد شد.

## فصل چهارم

بهینه سازی توپولوژیک سازه های  
پیوسته به روش مجموعه سطوح تراز

## ۱-۴ - مقدمه

هدف این فصل، ارائه روشی برای بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها به کمک روش‌های تغییرات مرزه است. غالباً روش‌های تغییرات مرزی برای بهینه‌سازی توپولوژی قوی نمی‌باشد اما در این بخش روش کارا و قدرتمند مجموعه سطوح تراز در بهینه‌سازی سازه‌های ارتقایی خطی که تابع هدف و قیود مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد انتظار ما را اقناء می‌کند معرفی می‌شود.

در این روش، سازه‌ای که بهینه‌سازی شود، مرزهای آن به صورت مدلی از مرزهای دینامیکی (متحرک) است که به وسیله یک تابع اسکالار ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شود. پر واضح است که در روند بهینه‌سازی، شکل و توپولوژی آن دست خوش تغییرات زیادی است ولی تابع مجموعه سطوح تراز توپولوژی تغییر یافته را به راحتی در اختیار ما قرار می‌دهد.

روش مجموعه سطوح تراز زیر مجموعه‌ای از روش IMB (حرکت ضمنی مرز) محسوب می‌شود و به سادگی این امکان را به ما می‌دهد که همواره مرز مشترک اعم از شکل سوراخ‌ها، جدا شدن و به هم پیوستن مرزها را در اختیار ما می‌گذارد. در این فصل همچنین روش حل عددی در بهینه‌سازی

سازه‌ها که از حل عددی معادله دیفرانسیل همیلتون ژاکوبی بدست می‌آید بسط داده می‌شود.

## ۲-۴-معرفی و تاریخچه روش مجموعه سطوح تراز

یکی از پر چالش‌ترین موضوعات تحقیق در زمینه بهینه‌سازی سازه، بهینه‌سازی توپولوژی است.

اخیراً توجهات زیادی به این موضوع به خاطر کاربرد قدرتمندی که در حوزه‌های صنعتی بیشماری دارد، شده است. از کارهای اولیه‌ای که توسط بندسو و کیکوچی<sup>۱</sup> [۴] انجام شده است، روش‌های زیادی در دهه‌های اخیر برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک توسعه پیدا کرده است. برای اطلاعات کاملتر مرجع [۱۸] را نگاه کنید.

همانطور که در فصل دوم اشاره شد، بهینه‌سازی توپولوژیکی سازه‌های پیوسته به علت عدم دسترسی آسان به مرز و تغییرات آن از روش و مفاهیم توزیع مصالح بیشتر استفاده شده است. از رایج‌ترین روش‌ها می‌توان به روش همگون‌سازی [۴] و چگالی متغیر (SIMP) [۵, ۱۹] اشاره کرد. که این روش‌ها به صورت خلاصه در فصل دوم توضیح داده شده است. در روش‌های فوق، توپولوژی بهینه تقریباً شامل المان‌هایی است که دارای چگالی ۰ یا ۱ می‌باشد. لازم به یادآوری می‌باشد که الگوریتم‌های عددی برای این دو روش بر پایه المان هستند. چهارچوب کلی محاسبات روش‌های المان محور گسسته‌سازی فضای طرح اولیه همواره به صورت مستطیل‌های یکنواخت اجزای محدود می‌شود و متغیرهای طراحی به صورت ثابت برای جزء محدود در نظر گرفته می‌شود.

اگرچه محاسبات بر پایه المان تا حدودی کارآمد و موفقیت آمیز در حل مسائل بهینه‌سازی می‌باشد اما هنوز پارامترهای نامطلوبی دارد. یکی از معایب بهینه‌سازی با استفاده از روش‌های المان محور در بیان اطلاعات مربوط به هندسه سازه می‌باشد مانند موقعیت و شکل مرزها، بردار نرمال یا انحنای مرزها مشخص نمی‌باشد.

به طور کل در این روش‌ها مرز بین قسمت جامد [مصالح پر] و قسمت خالی دقیقاً مشخص

---

۱- Bendsoe & Kikuchi

نمی‌باشد و در بهینه‌سازی با این روش‌ها، مرزها به صورت زیگزاگ ظاهر می‌شوند.

بنابراین برای دستیابی به توپولوژی که به واقعیت در عمل نزدیک باشد نیازمند عملیات بعدی از جمله بهینه‌سازی شکل برای کاهش تمرکز تنش می‌باشیم. همچنین می‌بایست مرزها را به صورت نرم‌تری درآورد که این کار بعضاً آسان نمی‌باشد و مستلزم هزینه زیادی می‌باشد.

برای فائق آمدن به مشکل‌های اشاره شده در بالا، اخیراً الگوریتم‌های بهینه‌سازی توپولوژی وابسته به هندسه‌ی بیشتری پیشنهاد شده است. بارزترین مشخصه این روش‌ها، معرفی تابع شکل و توپولوژی سازه به صورت ضمنی می‌باشد. از آنجایی که بیشتر این روش‌ها از سطوح تراز صفر تابع ضمنی توپولوژی برای تعریف مرز سازه استفاده می‌شود، به این روش مجموعه سطوح تراز نیز می‌گویند. ایده اصلی در بیان تابع توپولوژی، بر پایه روش حرکت تکاملی این تابع براساس حساسیت تابع هدف و قیود آن می‌باشد. بهینه‌سازی سازه‌ها به روش مجموع سطح تراز برای اولین بار توسط ستین و ویگمن<sup>۱</sup> [۲۰] آغاز شد. در کارهای اولیه، آنها سعی کردند طرحی را با کمترین حجم پیدا کنند که به مقدار انرژی مشخصی نیز در همان زمان برسد. آنها برای بدست آوردن مرز مشترک از معادله همیلتون ژاکوبی با تابع سرعت ساخته شده‌ای استفاده کردند. در مرجع [۲۱] اوشر و سانتوز<sup>۲</sup>، روش مجموعه سطوح تراز را برای مسائلی که شامل سیستم‌های لرزشی مانند فرکانس تشدید شده یا گپ طیفی برای بهینه‌سازی با قید حجم است استفاده کردند.

در کارهای الری<sup>۳</sup> و همکارانش [۲۲]، یک چهارچوب محاسباتی برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با روش مجموعه سطوح تراز معرفی شده است. از گرادیان شکل برای رشد تابع مجموعه سطوح تراز استفاده شده است و الگوریتم عددی برای حل تابع مجموع سطح تراز ارائه شده است. در

---

۱-Sethian & Wiegmann

۲-Osher & Santoaz

۳- Allarie

کارهای ونگ<sup>۱</sup> و همکارانش [۲۳,۲۴] نتیجه فوق بدست آمده است و روش‌های عددی را توسعه داده است. در مقالات آنها مثال‌های عددی زیادی حل گردیده است تا عملکرد این روش را ثابت کند و اهمیت ادامه تحقیقات در این روش را نشان می‌دهد. همچنین آنها این روش را برای مواد مركب نیز تعمیم دادند [۲۵]. تابع تعریف توپولوژی [TDF] توسط رویتر و کیولن<sup>۲</sup> [۲۷,۲۶] برای حل مسائل طرح بهینه توپولوژی استفاده گردید و روش معیار بهینگی برای پیدا کردن مقادیر بهینه بکار برده شد. اخیراً بلیچکو<sup>۳</sup> و همکارانش [۲۸] روش دیگری را در بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته ارائه کرده است. در کار آنها مقادیر نقاط گره‌ای تابع ضمنی تعریف کننده توپولوژی و شکل سازه به عنوان متغیر طراحی به صورت مستقیم استفاده گردیده است. روش معیار بهینگی برای بدست آوردن مقادیر بهینه به کار گرفته شده است. مثال‌های عددی نیز ارائه گردیده که کارآمدی روش را اثبات می‌کند.

در مقایسه با روش‌های سنتی المان محور بهینه‌سازی پیکره، روش گره محور در بهینه‌سازی دارای مزایای روشی است مانند تعریف هندسه‌ی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد. در هر مرحله از بهینه‌سازی تمام اطلاعات هندسه سازه در تابع ضمنی بیان کننده توپولوژی سازه موجود است. از آنجایی که شکل و پیکره یا شرایط مرزی در هر مرحله قابل دسترسی می‌باشد مزیت بسیار جالبی است. جدا از این تغییرات توپولوژی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد و پس از بهینه‌سازی نیاز به روش‌های پردازش تصویر و بهینه‌سازی شکل نمی‌باشد.

اگرچه روش نقطه محور با استفاده از توابع TDF برای حل مسائل بالقوه مناسب است ولی همچنان محدودیت‌هایی دارد. اولین محدودیت به حل معادله همیلتون ژاکوبی برای روش مجموعه سطوح تراز برمی‌گردد. محدودیت از این قرار است که برای پایداری عمومی، گام‌های زمانی می‌بایست شرایط CFL در نظر گرفته شود این نکته به آن معناست که در هر مرحله، مجموعه سطوح تراز

---

۱- Wang

۲- Ruiter & keulen

۳- Belytschko

می‌توانند به اندازه یک سلول شبکه حرکت کند. این محدودیت باعث کاهش سرعت در همگرایی جواب می‌گردد. در این پایان نامه با سامان دهی و دوباره مقدار دهی<sup>۱</sup> تابع  $\phi$  این محدودیت را از بین برده‌ایم. توضیحات بیشتر در قسمت‌های بعدی خواهد آمد.

### ۳-۴- کاربرد روش مجموعه سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه

چنانچه در فصل قبل اشاره شد با تعریف تابع  $\phi$  از بعد  $n$  و در نتیجه آن بوجود آمدن مرز مشترک در یک سطح تراز معین در بعد  $(n-1)$  می‌توان مرزها را تعیین نمود. می‌توان با تغییر  $\phi$  توپولوژی و شکل مرزهای مشترک را تغییر داد. این قابلیت اجازه می‌دهد که مدل مرزها و توپولوژی سازه را در روند بهینه‌سازی تغییر دهد. بنابراین مرزها می‌توانند به قسمت‌های جدیدی "جدا" شوند و مرزهای جدیدی را تولید کنند و بر عکس تعدادی از مرزهای جدا از هم می‌توانند به همدیگر پیوسته و مرز واحدی را ایجاد کند. به خاطر پارامتری نبودن بیان رویه‌ها مشکلات پارامتری کردن و بدست آوردن سطوح مانند دوباره پارامتری کردن سطوح تغییر یافته برای بدست آوردن مرزها را نداریم لذا از حجم محاسبات و پیچیدگی حل مسئله کاسته می‌شود. از این رو روش مجموعه سطوح تراز که در سال‌های اخیر در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها استفاده شده است مورد توجه و بررسی در این پایان‌نامه قرار گرفته است.

در حالت کلی، برای بیان رویه‌ها در مدل مجموعه سطوح تراز به صورت تابع ضمنی اسکالر با بعد بالاتر در یک سطح تراز تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi: R^3 &\rightarrow R \\ \phi = \{x: \phi(x) = k\} \end{aligned} \tag{۴۱ - ۳}$$

که  $k$  عددی دلخواه و یک سطح تراز منحنی می‌باشد.  $x$  نقطه‌ای در فضای  $R^3$  است که سطح تراز  $k$  می‌باشد. به بیان دیگر  $x$  مجموعه‌ای از نقاط در فضای  $R^3$  است که سطح تراز  $k$  ام تابع  $\phi$  می‌باشد.

روند بهینه‌سازی می‌تواند با اجازه دادن به تغییرات دینامیکی در زمان تابع مجموعه سطوح تراز بیان گردد. شکل دینامیکی تابع مجموعه سطوح تراز به صورت زیر می‌باشد:

$$S(t) = \{x(t) : \phi(x(t), t) = k\} \quad (42 - 3)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از دو طرف رابطه‌ی فوق و اعمال قانون مشتق‌گیری زنجیری رابطه‌ی "همیلتون ژاکوبی" زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \nabla \phi(x, t) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (43 - 3)$$

این رابطه مقادیر تابع  $\phi$  وابسته به زمان مسئله را تعریف می‌کند.

در مدل دینامیکی مجموعه سطوح تراز روند بهینه‌سازی می‌تواند به صورت زیر بیان گردد.

فرض کنیم  $\frac{dx}{dt}$  حرکت نقاط بر روی سطوح مدل که از بهینه‌سازی تابع هدف بدست آمده در نظر گرفته شود آنگاه این ترم می‌تواند بیانگر موقعیت  $x$  و هندسه سطح در آن نقطه می‌باشد. بنابراین مرز بهینه‌سازی از حل معادله دیفرانسیلی جزئی زیر بر روی  $\phi$  بدست می‌آید.

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = -\nabla \phi(x) \frac{dx}{dt} = -\nabla \phi(x) \mathbf{V}(x, \phi) \quad (44 - 3)$$

که در این رابطه  $\mathbf{V}(x, \phi)$  بیانگر "بردار سرعت"<sup>۱</sup> بر روی سطح مدل مجموعه سطوح تراز می‌باشد که بستگی به تابع هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی دارد.

در این نوع فرمول‌بندی با استفاده از مدل مجموعه سطوح تراز دارای دو مزیت تئوری و عملی می‌باشد. اولاً، مدل مجموعه سطوح تراز دارای پیکربندی انعطاف‌پذیر (سازگار) مخصوصاً در بهینه‌سازی توپولوژی می‌باشد. تابع اسکالر سه بعدی  $\phi$  تعریف می‌گردد تا به راحتی توپولوژی سطوح (مدل) را در اختیارداشته باشیم. مجموعه سطوح تراز به سادگی می‌تواند شکل سطوح پیچیده مرزهای سوراخ جدا شدن مرزها از هم و یا پیوستن چندین مرز به هم را بیان کند. بنابراین نیاز به بدست

۱- Speed Vector

آوردن مجدد پارامترهای مدل تغییر یافته که در بیان صریح به آن نیازمندیم را نداریم [۲۹]. ثانیاً این مدل قابلیت استفاده از هر نوع المان و تعداد درجات آزادی زیادی را دارد. همچنین روش‌های عددی مختلفی برای بدست آوردن مقادیر  $\phi$  کارآمد و مناسبی از رابطه (۳ - ۴۴) دارد. در ادامه جزئیات روش و تکنیک‌های حل عددی آن برای دست یابی به تopolوژی بهینه سازه‌های پیوسته به تفصیل توضیح داده می‌شود.

#### ۴-۴- فرمولبندی مدل مجموعه سطوح تراز در مسائل بهینه سازی

در این بخش فرمولبندی روش مجموعه سطوح تراز در بدست آوردن طرح بهینه را در سازه‌های ارتجاعی خطی بیان می‌کنیم. اطلاعاتی درمورد پیکره، شکل و سایز سازه برای بدست آوردن طرح بهینه از طریق مدل مجموعه سطوح تراز همواره در اختیار داریم. حال می‌بایست صورت مسئله بهینه سازی را تشکیل داد. در حالت کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad J(u) &= \int_D F(u) d\Omega, \\ \text{subject to : } \int_D E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega &= \int_D p v d\Omega + \int_{\partial D_t} \tau v dS \\ u|_{\partial D_u} &= u_0 \quad \forall v \in U \\ \int_D d\Omega &\leq V_{\max} \end{aligned} \quad (45-3)$$

در اینجا فضای طراحی با  $D$  و مرز آن با  $\partial D$  معرفی شده است. معادله تعادل ارتجاعی خطی به صورت تغییراتی نوشته شده که در آن  $u$  تغییر مکان‌های قابل قبول سینماتیکی میدان جابجایی  $U$  می‌باشد.  $E_{ijkl}$  تانسور الاستیسیته مواد،  $\varepsilon_{ij}$  تانسور کرنش‌ها،  $p$  نیروهای حجمی<sup>۱</sup>،  $\tau$  نیروهای سطحی<sup>۲</sup> وارد شده بر روی سطح  $\partial D_t$  بر روی مرز  $\partial D$ ، و  $u_0$  تغییر مکان‌های تکیه گاهی معین روی سطح  $u$  بر مرز  $\partial D_u$  تعریف شده‌اند.

۱- Body force

۲- Traction force

آخرین نامساوی محدودیت مقدار مصالح بر روی دامنه که به مقدار  $V_{\max}$  محدود گردیده است.

به عبارت دیگر نامساوی ذکر شده قید حجم مسئله بهینه‌سازی می‌باشد.

مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق به دنبال پیدا کردن مرز بهینه  $\partial D$  در فضای  $D$  می‌باشد. بنابراین

تابع هدف  $J(u)$  می‌بایست برای فیزیک و هندسه‌ی خاصی که توسط تابع  $F$  تعریف شده است مینمی

گردد.

برای استفاده از مدل مجموعه سطوح تراز در رابطه فوق، از تابع ضمنی  $(x)\phi$  از درجه بالاتر

برای تعریف مرز در فضای  $\bar{D}$  که  $D \subset \bar{D}$  است تعریف می‌کنیم.

از سطح تراز  $k = 0$  برای بیان مرز مشترک استفاده می‌کنیم بنابراین برای تعریف فضای داخل

و خارج توسط تابع  $\phi$  داریم

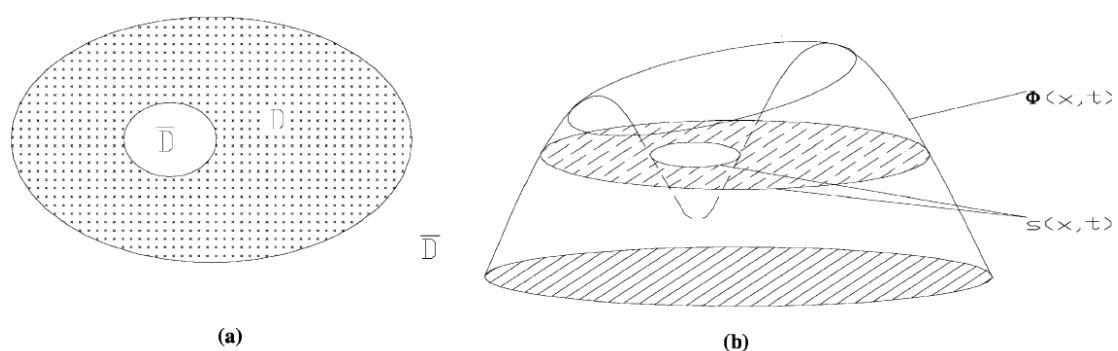
$$\phi(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \partial D \quad (46 - ۳)$$

$$\phi(x) < 0 \quad \forall x \in \bar{D} \setminus \partial D \quad (47 - ۳)$$

که شکل دامنه و مدل مجموعه سطوح تراز در شکل ۱-۴ مشخص گردیده است. در شکل

سمت چپ دامنه طرح  $D$  در دامنه بزرگتر  $\bar{D}$  نمایش داده شده است. در شکل سمت راست مدل

مجموعه سطوح تراز  $S$  که تابع  $(x)\phi$  را معرفی می‌کند نشان داده است.



شکل ۱-۴ - دامنه طرح و مدل مجموعه سطوح

بنابراین مدل مجموعه سطوح تراز برای مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق به صورت زیر می‌تواند بیان

گردد:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad J(u, \phi) = \int_{\bar{D}} F(u) H(\phi) d\Omega, \\ & \text{subject to: } a(u, v, \phi) = L(v, \phi), u|_{\partial D_u} \quad \forall v \in U, (48 - 3) \\ & \qquad \qquad \qquad V(\phi) \leq V_{\max} \end{aligned}$$

به طوریکه :

$$\begin{aligned} a(u, v, \phi) &= \int_{\bar{D}} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} H(\phi) d\Omega, \\ b(v, \phi) &= \int_{\bar{D}} p v H(\phi) d\Omega + \int_{\bar{D}} \tau v \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega, \\ V(\phi) &= \int_{\bar{D}} H(\phi) d\Omega \end{aligned} \quad (49 - 3)$$

در این رابطه  $\delta(x)$  تابع دیراک و  $H(\phi)$  تابع هویساید می‌باشد.

#### ۴-۵-الگوریتم بهینه‌سازی

در این قسمت با توجه به رابطه‌ی (۳ - ۴۸) روند بهینه‌سازی تشریح می‌شود. پروسه‌ی بهینه‌سازی بر روی تابع اسکالر  $\phi$  که بر روی دامنه ثابت  $\bar{D}$  تعریف شده، اعمال می‌شود. این روند را می‌توان از دیدگاه یک مسئله ریاضی نگاه کرد.

کلید اصلی در روند بهینه‌سازی، حرکت مرز دامنه طرح که توسط مدل مجموعه سطوح تراز بیان گردیده براساس تغییرات حساسیت با توجه به تابع هدف می‌باشد. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که تابع هدف دیگر نتواند رشد داشته باشد. این روش بهینه‌سازی بر پایه تکامل (رشد) منحنی‌ها و رویه‌های در روش مجموعه سطوح تراز [۲۹] می‌باشد که نحوه رشد رویه‌های مجموعه سطوح تراز در رابطه (۳ - ۴۴) بیان شده است. نکته اصلی در عملی بودن روش مجموعه سطوح تراز بدست آوردن مقدار "تابع سرعت" مناسب در رابطه (۳ - ۴۴) می‌باشد آنگاه شکل مرزهای بهینه با توجه به تابع هدف و قیود مسئله بدست خواهد آمد. همانطور که در رابطه (۳ - ۴۴) نشان داده شد، تابع سرعت

می‌باشد به صورت شکل مرزها و تغییرات حساسیت بیان شود. بر جستگی این روش بیان شده در تعیین تابع سرعت به عنوان رابط بین روند بهینه‌سازی سازه و روش قدرتمند مجموعه سطوح تراز می‌باشد.

الگوریتم بهینه‌سازی را به صورت گام به گام اشاره می‌کنیم و در قسمت بعد توضیحات کاملتری ارائه می‌گردد.

گام اول: مقدار دهی اولیه تابع مجموعه سطوح تراز  $\phi(x, 0)$  در زمان  $t=0$  برای دامنه  $\bar{D}$  برای این کار از تابع فاصله علامتدار برای تعریف  $(x)\phi$  برای بیان مرز اولیه طرح  $D$  استفاده می‌کنیم. سپس معادله تعادل را حل کرده (تحلیل می‌کنیم) و مقادیر جابجایی نقاط را بدست آوریم.

$$a(u, v, \phi) = L(v, \phi), \quad u|_{\partial D_u} = u_0(x), \quad \forall v \in U \quad (50 - 3)$$

گام دوم: یافتن جابجایی کمکی  $w$  از معادله مزدوج:

$$a(u, v, \phi) = \langle J_u(u, \phi), v \rangle, \quad w|_{\partial D_u} = 0 \quad \forall v \in U \quad (51 - 3)$$

که در اینجا  $\langle J_u(u, \phi), v \rangle$  به معنی مشتق فرچت<sup>۱</sup>  $J(u, \phi)$  نسبت به  $u$  در جهت  $v$  می‌باشد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\langle J_u(u, \phi) \rangle = \int_D \frac{\partial F(u)}{\partial u} v H(\phi) d\Omega. \quad (52 - 3)$$

گام سوم: تابع وزن  $\mu(x) \neq 0$  بر روی دامنه ثابت  $\bar{D}$  انتخاب کرده و ضریب لاغرانژی  $\lambda$  قید حجم را محاسبه می‌کنیم.

<sup>۱</sup>مشتق فرچت معمولاً در حساب تغییرات کاربرد دارد

$$\lambda = -\frac{\int_{\bar{D}} \mu^{-2}(x) \beta(u, w, \phi) \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega}{\int_{\bar{D}} \mu^{-2}(x) \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega}$$

$$\lambda_+ = \max[\lambda, 0], \quad \mu(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{D} \quad (53 - 3)$$

$$\beta(u, w, \phi) = F(u) + pw - \tau w \nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(w)$$

به طوریکه  $\beta(u, w, \phi)$  حساسیت تابع هدف  $J(u, \phi)$  نسبت به تغییرات مرز طرح می‌باشد.

گام چهارم: محاسبه تابع سرعت  $V_n(x)$  که معرف سرعت مجموعه سطوح تراز تابع  $\phi$  در راستای نرمال آن می‌باشد. به عبارت دیگر،  $V_n(x) \equiv (dx/dt)N(x) = -V(x, \phi)N(x)$  (رابطه ۳ - ۴) را ببینید. این تابع سرعت می‌باشد. با استفاده از معادله زیر را اقناع کند.

$$-\int_{\bar{D}} (\beta(u, w, \phi) + \lambda_+) \delta(\phi) \psi(x) d(x) = \int_{\bar{D}} \mu^2(x) V_n(x) \psi(x) d\Omega \quad (54 - 3)$$

برای هر تابع پیوسته  $\psi(x)$

گام پنجم: حل معادله همیلتون ژاکوبی زیر برای بدست آوردن  $\phi$  های جدید  $\phi(x, t)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = V_n(x) |\nabla \phi|, \quad (55 - 3)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\partial \bar{D}} = 0.$$

گام ششم: شرط پایان دهنده را کنترل می‌کنیم. اگر شرط اقناع گردید جواب همگرا شده است. در غیر این صورت مراحل یک تا پنج را تا همگرا شدن جواب ادامه می‌دهیم. شرط پایانی را می‌توان به صورت مقدار خطای مشخص  $\gamma$  محدود کرد.

$$\int_{\bar{D}} |V_n(x)| \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega \leq \gamma \quad (56 - 3)$$

#### ۴-۶- شرایط حل بهینه

در این بخش شرایط لازم برای بهینه بودن مسئله بهینه سازی بیان شده در رابطه (۳ - ۴) را بررسی و نشان می‌دهیم الگوریتم ارائه شده همگرا می‌باشد. قضایای زیر درستی الگوریتم را نشان

می‌دهند.

قضیه ۱: مقادیر سری تابع  $\{\phi(x, t_i), i = 0, 1, 2, \dots\}$  بدست آمده از روند بهینه سازی، یک سری نزولی برای مسئله بهینه سازی رابطه (۳ - ۴۵) می‌باشد.

اثبات: ابتدا از معادلات رابطه (۳ - ۴۸) مشتق سویی می‌گیریم

$$\left\langle \frac{\partial a(u, v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \psi d\Omega \quad (57 - ۳)$$

$$\left\langle \frac{\partial a(u, v, \phi)}{\partial u}, \delta u \right\rangle = a(\delta u, v, \phi) \quad (58 - ۳)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L(v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle &= \int_{\bar{D}} \delta(\phi) p v \psi d\Omega + \int_{\bar{D}} \left( \delta'(\phi) |\nabla \phi| \psi + \delta(\phi) \frac{\nabla \phi \nabla \psi}{|\nabla \phi|} \right) d\Omega \\ &= \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \left( p v - \tau v \nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) \psi d\Omega + \int_{\bar{D}} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi d\Omega \end{aligned} \quad (59 - ۳)$$

$$\left\langle \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \psi d\Omega \quad (60 - ۳)$$

مشتق سویی تابع هدف به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left\langle \frac{\partial (u, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) F(u) \psi d\Omega \quad (61 - ۳)$$

$$\left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, \delta u \right\rangle = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F(u)}{\partial u} H(\phi) \delta u d\Omega \quad (62 - ۳)$$

برای هر تابع پیوسته  $\psi(x) \in C^0(\bar{D})$

برای روشن شدن رابطه (۶۲ - ۳) به صورت تابع صریح  $\psi$ ، معادله مزدوج زیر را برای پیدا کردن میدان کمکی جابجایی  $w$  حل می‌کنیم.

$$a(v, w, \phi) = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F(u)}{\partial u} H(\phi) v d\Omega, \quad w|_{\partial D_u} = 0 \quad \forall v \in U \quad (63 - ۳)$$

بنابراین، از دیفرانسیل گرفتن معادله  $a(u, v, \phi) = L(v, \phi)$  نسبت به  $\phi$  در جهت  $\psi$  خواهیم

داشت:

$$a(\delta u, v, \phi) = \left\langle \frac{\partial L(v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(u, v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \quad (64 - 3)$$

با جایگذاری معادلات (۶۴ - ۳)، (۶۳ - ۳)، (۶۹ - ۳) و (۶۷ - ۳) در معادله (۶۲ - ۳) خواهیم

داشت

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, \delta u \right\rangle &= \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \left( p v - \tau v \nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{jk}(w) \right) \psi d\Omega \\ &\quad + \int_{\bar{D}} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi d\Omega \end{aligned} \quad (65 - 3)$$

با استفاده از روش ضربگر لاغرانژی، تابع هدف جدید  $\bar{J}(u, \phi)$  را که کاملاً با مسئله بهینه سازی رابطه (۴۸ - ۳) معادل است را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \bar{J}(u, \phi) = J(u, \phi) + \lambda_+ (V(\phi) - V_{\max}), \\ \text{sub.to} \quad & a(u, v, \phi) = L(v, \phi), \quad u|_{\partial D_u} = u_0 \\ & \lambda_+ (V(\phi) - V_{\max}) = 0 \\ & \lambda_+ \geq 0 \end{aligned} \quad (66 - 3)$$

در اینجا  $\lambda_+$  ضریب لاغرانژی و دو قید آخر شرایط تکمیل کننده می‌باشد یعنی زمانی که

$V(\phi) = V_{\max}$ ,  $\lambda > 0$  برقرار می‌باشد، آنگاه  $\lambda_+ = 0$ ؛ در غیر این صورت  $V(\phi) < V_{\max}$  نامساوی

بنابراین مشتق فرچت تابع هدف جدید  $\bar{J}(u, \phi)$  به شکل

$$\left\langle \frac{d\bar{J}(u, \phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle + \lambda_+ \left\langle \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \quad (67 - 3)$$

با جایگذاری روابط (۶۰ - ۳)، (۶۱ - ۳) و (۶۵ - ۳) در رابطه (۶۷ - ۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \bar{J}(u, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle &= \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \left( F(u) + pw - \tau v \nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{jk}(w) + \lambda_+ \right) \psi d\Omega \\ &+ \int_{\partial D} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi d\Gamma = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) (\beta(u, w, \phi) + \lambda_+) \psi d\Omega + \int_{\partial D} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi d\Gamma \end{aligned}$$

(۶۸ - ۳)

بنا بر شرایط کان تاکر، شرایط مسئله بهینه سازی را داریم

(۶۹ - ۳)

$$\begin{aligned} \beta(u, w, \phi) + \lambda_+ \Big|_{\partial D} &= 0, & \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial \bar{D}} &= 0 \\ \lambda_+ (V(\phi) - V_{\max}) &= 0, & \lambda_+ &\geq 0 \end{aligned}$$

با انتخاب تابع وزن  $V_n(x)$ ، می‌توان تابع سرعت  $V_n(x)$  را به شکل زیر تولید کرد:

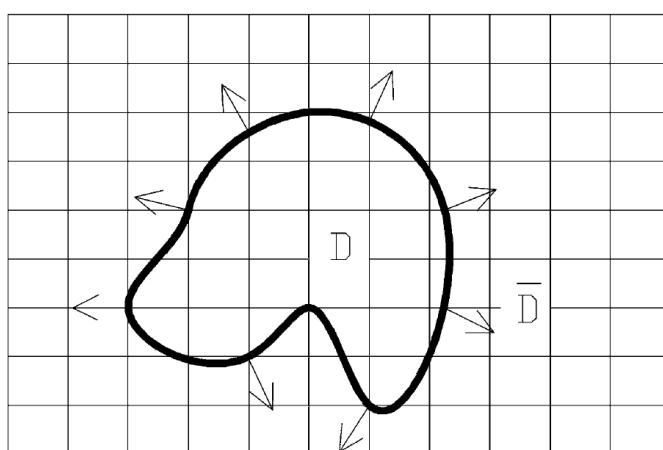
$$\int_{\bar{D}} \mu^2(x) V_n(x) \psi d\Omega = - \int_{\bar{D}} \delta(\phi) (\beta(u, w, \phi) + \lambda_+) \psi d\Omega \quad \text{and} \quad V_n \Big|_{\partial \bar{D}} = 0 \quad (70 - 3)$$

تابع سرعت  $V_n(x)$  بیان کننده مقدار دقیق حساسیت تابع (۶۸ - ۳) از مسئله بهینه سازی

رابطه (۳ - ۶۶) می‌باشد. بنابراین، سری  $\{\phi(x, t_i)\}$  بدست آمده از حل معادله همیلتون ژاکوبی، یک

سری نزولی مسئله بهینه سازی (۳ - ۴۴) می‌باشد.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = V_n |\nabla \phi|, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial \bar{D}} = 0 \quad (71 - 3)$$



شکل ۲-۴ - حرکت مرز سازه

همانطور که در شکل ۲-۴ نشان داده شده است، معادلات فوق حرکت مرز مدل مجموعه سطوح تراز را فقط در جهت نرمال مرز سازه تعریف می‌کنند.  
برای پایان دادن اثبات این قضیه، می‌توانیم مقدار ضربگر لاغرانژی  $\lambda_+$  را با استفاده از شرایط کان تاکر (۳ - ۶۹) بدست آورد. زمانیکه  $\lambda_+ \neq 0$ ، شرط ثابت بودن حجم  $dV(\phi)/dt = 0$  منتج به رابطه زیر می‌شود

$$(72 - ۳)$$

$$\int \delta(\phi) V_n |\nabla \phi| d\Omega$$

با جایگذاری معادله (۳ - ۷۰) در رابطه (۳ - ۷۲) خواهیم داشت

$$\int \delta^2(x) \mu^{-2}(x) (\beta(u, w, \phi) + \lambda_+) |\nabla \phi| d\Omega = 0 \quad (73 - ۳)$$

پس با ساده سازی معادله فوق می‌توان مقدار ضربگر لاغرانژی  $\lambda_+$  را بدست آورد.

$$\lambda_+ = - \frac{\int_{\bar{D}} \delta(\phi) \mu^{-2}(x) \beta(u, w, \phi) |\nabla \phi| d\Omega}{\int_{\bar{D}} \delta(\phi) \mu^{-2}(x) |\nabla \phi| d\Omega} \quad (74 - ۳)$$

اگر مقدار بدست آمده از رابطه (۳ - ۷۴) برای ضربگر لاغرانژ  $\lambda_+ < 0$  باشد، می‌بایست  $\lambda_+ = 0$  را بنا به شرایط کان تاکر در نظر گرفت.

حال با استفاده از معادلات (۳ - ۷۱)، (۳ - ۶۵) و (۳ - ۶۱) مشتق تابع هدف (۳ - ۴۵) را

نسبت به زمان داریم

$$\begin{aligned} \frac{dJ(u, \phi)}{\partial u} &= \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial \phi}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \int \delta(\phi) \beta(u, w, \phi) V_n |\nabla \phi| d\Omega \end{aligned} \quad (75 - ۳)$$

با جایگذاری روابط (۳ - ۷۰) در معادله (۳ - ۷۵) می‌توان نوشت:

$$\frac{dJ(u, \phi)}{dt} = - \int_{\bar{D}} \mu^2(x) V_n^2(x) |\nabla \phi| d\Omega - \lambda_+ \int_{\bar{D}} \delta(\phi) V_n(x) |\nabla \phi| d\Omega. \quad (76 - ۳)$$

شرایط کان تاکر (۳ - ۶۹) و قید حجم (۳ - ۷۲) را در نظر بگیرید، حال جمله پایانی معادله (۳ - ۷۶) برابر صفر می‌باشد. بنابر این داریم

$$\frac{dJ(u, \phi)}{dt} \leq 0 \quad (77 - ۳)$$

زمانی حالت مساوی اتفاق می‌افتد که  $\delta(\phi)V_n = 0$  باشد. رابطه فوق اثبات قضیه یک می‌باشد. وانگهی، اگر  $(x)\mu$  را تابع کرنلی از  $\phi$  و تابع کرنل یک تابع دیراک نرم مانند تابع گوس باشد، فرض گردد. آنگاه پارامترهای تابع کرنل در سری به سمت صفر میل می‌کند. به این معنا که می‌توان شرایط بهینه‌گی مسئله بهینه سازی از معادلات (۳ - ۶۹) و (۳ - ۷۶) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\beta(u, w, \phi) + \lambda_+|_{\partial D} = 0 \quad (78 - ۳)$$

بنابراین،

$$\lambda_+ = -\frac{\int_{\partial D} \beta(u, w, \phi) dS}{\int_{\partial D} dS} \quad (79 - ۳)$$

و  $\lambda_+$  از میانگین پارامتر حساسیت  $\beta(u, w, \phi)$  در کل دامنه طراحی  $\partial D$  حاصل می‌گردد. بعلاوه می‌توان تغییرات حساسیت مرز را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\beta(u, w, \phi) = F(u) + pw - \tau w\kappa - E_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(w), \quad (80 - ۳)$$

در این رابطه  $\kappa = \nabla(\nabla\phi / |\nabla\phi|)$  و همان احنای مرز رویه می‌باشد. بنابر این قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲. شرط لازم در حل بهینه مسئله بهینه سازی توبولوژیک اشاره شده آن است که حساسیت  $\beta(u, w, \phi)$  در تمام نقاط روی مرز سازه بهینه مقداری ثابت باشد.

#### ۴- حل عددی

برای دستیابی به الگوریتم بهینه سازی اشاره شده در این فصل به چند پیشنباز در مسائل عددی نیاز داریم. در الگوریتم نشان داده شده، هندسه مرز سازه‌ای که بهینه سازی می‌شود به صورت

سطح تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز تعریف شده است. برای بیان عددی تابع مجموعه سطوح تراز می‌توان از هر روش ساده‌ای استفاده کرد. معمولاً از شبکه ساده با سلول‌های مستطیلی استفاده می‌گردد. توابع درونیابی ساده‌ای برای مجموعه نقاط شبکه مانند زیر استفاده کرد.

$$\phi(x, t) = \sum_i \phi_i(t) N_i(x) \quad (81 - ۳)$$

که  $\phi_i(t)$  مقادیر گره‌ای تابع مجموعه سطوح تراز و  $N_i(x)$  تابع درونیاب استاندارد می‌باشد. مقادیر گره‌ای در روند بهینه سازی تغییر می‌کند.

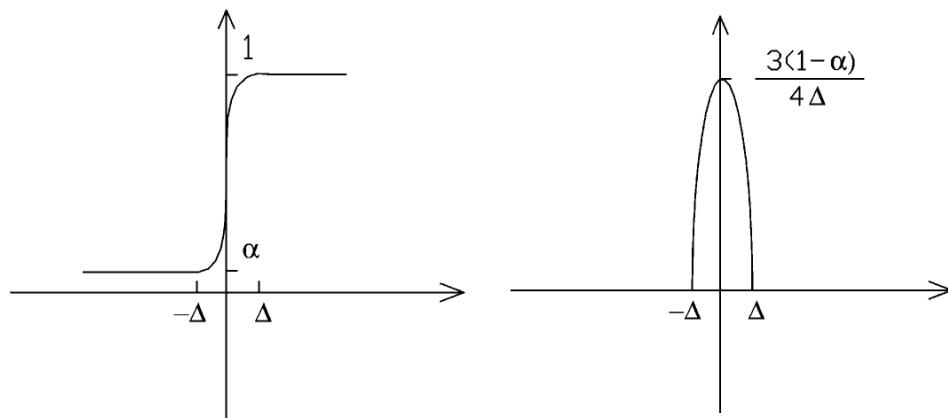
در حالت کلی، معادله تعادل مسائل ارتقای خطی به روش اجزای محدود حل می‌گردد. از این رو می‌توان از شبکه اجزای محدود برای معرفی هندسه توسط مدل مجموعه سطوح تراز استفاده گردد. از توابع تقریب زده  $H(x)$  و  $\delta(x)$  زیر در روند تحلیل و بهینه سازی استفاده می‌شود.

$$(82 - ۳)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{4\Delta} \left(1 - \frac{x^2}{\Delta^2}\right), & |x| \leq \Delta \\ 0, & |x| > \Delta \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} \alpha & x < -\Delta \\ \frac{3(1-\alpha)}{4} \left(\frac{x}{\Delta} - \frac{x^3}{3\Delta^3}\right) + \frac{1+\alpha}{2} & -\Delta \leq x < \Delta \\ 1 & x \geq \Delta \end{cases} \quad (83 - ۳)$$

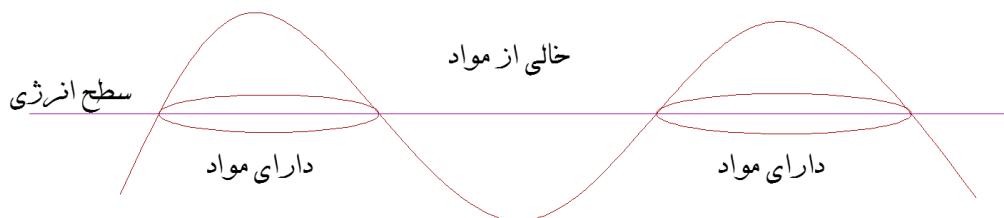
که  $\alpha$  مقدار کوچک مثبتی برای تضمین پایداری معادله (۳ - ۵۰) در عدم تشکیل نقاط بحرانی، و  $\Delta$  عرض تقریب سازی توابع  $H(x)$  و  $\delta(x)$  همانطور که در شکل ۴-۳ نشان داده شده است، می‌باشد.



شکل ۳-۴- تقریب عددی توابع هویساید و دیراک

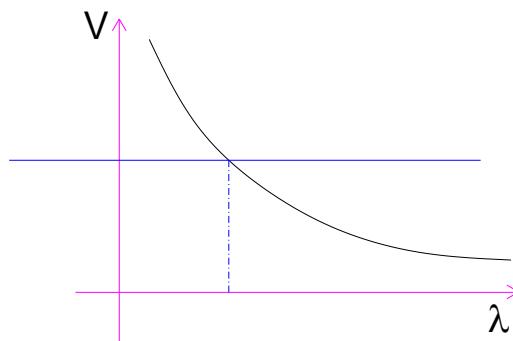
#### ۱-۷-۴ - نحوه محاسبه ضریب لاغرانژ قید حجم در مسئله بهینه سازی

چنانچه در بخش‌های قبل اشاره شد برای دست یافتن به توپولوژی بهینه می‌بایست معادله مجموعه سطوح تراز (۳ - ۴۴) را حل نمود. و همانطور که اشاره شد  $V = \beta - \lambda_+ - \lambda_-$  می‌باشد. این میدان سرعت ارتباط بین مدل تحلیلی و رابطه همیلتون ژاکوبی است.  $\beta$  در رابطه فوق و در غیاب نیروهای سطحی و حجمی انرژی کرنشی و  $\lambda_+$  ضریب لاغرانژ حجم می‌باشد. به طور طبیعی اگر فرض شود که توپولوژی نهایی در محلی دارای مواد است که انرژی کرنشی در آن محل‌ها بیشتر از مواد خالی است. بنابراین با توجه به شکل ۴-۴ می‌توان گفت که با افزایش  $\lambda_+$  میزان  $\lambda_+ - \beta$  کاهش خواهد یافت و می‌تواند مقدار منفی داشته باشد و سبب کاهش مواد خواهد شد و با کاهش  $\lambda_+ - \beta$  به سمت مقدار مثبت میل خواهد کرد که باعث افزایش مواد خواهد شد بنابر این  $\lambda_+ - \beta$  با هم نسبت عکس دارد.



شکل ۴-۴- رابطه سطح انرژی و میزان مواد

بنابر این نمودار تغییرات حجم نسبت به ضریب لاغرانژ قید حجم بصورت زیر رسم نمود. در این حالت مقدار  $\lambda$  را می‌توان با استفاده از روش‌هایی مثل نیوتن رافسون و نصف کردن بازه<sup>۱</sup> محاسبه کرد.



شکل ۴-۵- نمودار تغییرات حجم نسبت به ضریب لاغرانژ

#### ۴-۸- نحوه حل معادله هامیلتون ژاکوبی و تامین پایداری حل

به طور کل معادلات دیفرانسیل را می‌توان به سه بخش هایپربولیک<sup>۲</sup>، پارabolیک<sup>۳</sup> و الیپتیک<sup>۴</sup> تقسیم بندی نمود. در این صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول هامیلتون ژاکوبی از دسته معادلات

۱- Bisection

۲- Hypercolic

۳- Parabolic

۴- Elliptic

هایپربولیک بحساب می‌آید. پس از مشخص شدن مقادیر  $\phi$  و  $V_n$  در هر نقطه از شبکه ایجاد شده در دامنه، می‌توان از روش‌های عددی برای تغییر  $\phi$  به جلو در یک زمان مشخص استفاده نمود. ساده‌ترین روش رو به جلوی اولری<sup>۱</sup> می‌باشد که بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + V |\nabla \phi| &= 0 \\ \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + V^n |\nabla \phi| &= 0 \end{aligned} \quad (84 - ۳)$$

فرض کنید معادله فوق را بصورت باز شده زیر بنویسیم.

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u^n \phi_x^n + v^n \phi_y^n + w^n \phi_z^n = 0 \quad (85 - ۳)$$

برای سادگی حالت یک بعدی آن را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u^n \phi_x^n = 0 \quad (86 - ۳)$$

که در این رابطه علامت  $u^n$  نشان دهنده تغییر  $\phi$  در جهت راست یا چپ می‌باشد. با توجه به این که  $u^n$  در نقاط مختلف شبکه تغییر می‌کنند، در ادامه بر روی یک نقطه از شبکه مرکز می‌شویم بنابراین

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u_i^n (\phi_x)_i^n = 0 \quad (87 - ۳)$$

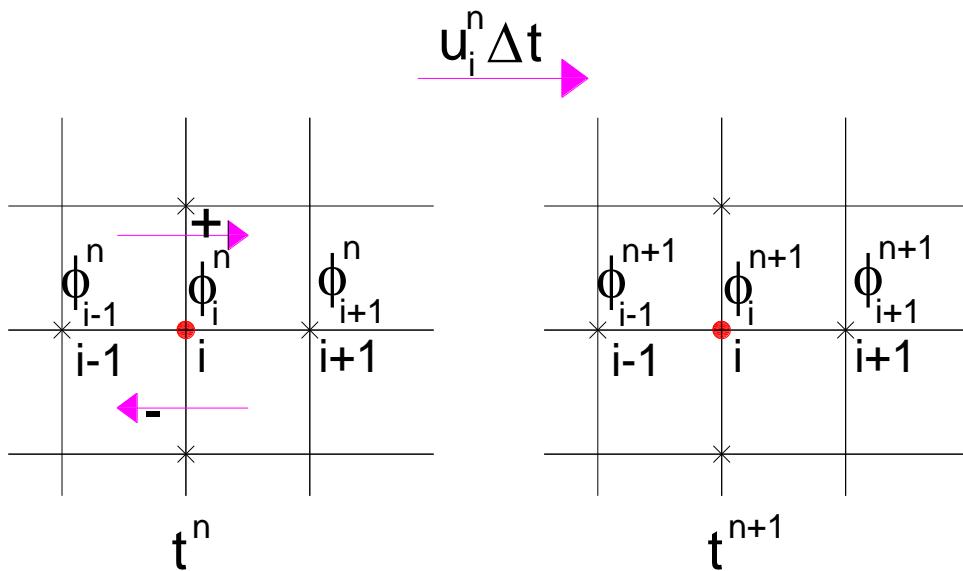
در صورتی که  $u_i > 0$  باشد  $\phi$  از چپ به راست جابجا خواهد شد. بنا بر روش مشخصه‌ها، می‌بایست برای تغییر  $\phi$  و محاسبه  $\phi_{i+1}$  در انتهای زمانی  $\Delta t$  به سمت چپ  $x_i$  نگاه کرد. مشابهًا برای  $u_i < 0$  با توجه به تغییر  $\phi$  از راست به چپ در انتهای بازه زمانی  $\Delta t$  از مقادیر سمت راست  $x_i$  برای محاسبه  $\phi_{i+1}$  استفاده می‌شود. در شکل ۶-۴ این روش نشان داده شده است.

۱- forward Euler

$$u_i < 0 \longrightarrow D^+ = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta t} \quad (88-3)$$

$$u_i > 0 \longrightarrow D^- = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta t}$$

انتخاب روش تقریب مشتقهای فضایی بر پایه علامت  $u$  را روش upwind می‌نامند.



شکل ۶-۴- روش upwind برای تقریب مشتقهای

برای پایداری حل می‌باشد از شرایط CFL استفاده کرد. این روش بر این اصل استوار است

که "امواج عددی حداقل با سرعت امواج فیزیکی انتشار میابد". بنابر این

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > |u| \quad (89-3)$$

بنابر شرایط CFL هر مرحله زمانی را می‌توان بصورت زیر محدود کرد.

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max\{|u|\}} \quad (90-3)$$

و یا

$$\Delta t \left( \frac{\max\{|u|\}}{\Delta x} \right) = \alpha \quad (91-3)$$

۱- Courant-Friedrichs-Lowy condition

که  $\alpha$  عدد CFL نامیده می‌شود و  $0 < \alpha < 1$ ، معنواً  $\alpha = 0.9$  بهینه است ولی محافظه

کارانه  $\alpha = 0.5$  در نظر گرفته می‌شود.

در حالت سه بعدی شرایط CFL بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta t \left( \frac{\max(|\vec{V}|)}{\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}} \right) = \alpha \quad (92 - 3)$$

## فصل پنجم

کاربردها، نتایج و مثال‌های حل شده در بهینه سازی توپولوژیک سازه‌ها با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز

## ۱-۵ مقدمه

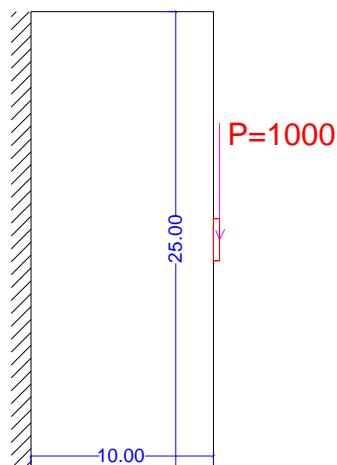
در سالهای اخیر بکارگیری بهینه‌سازی توبولوژیک جهت طراحی سازه‌های مختلف بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این فصل مثال‌ها و کاربردهایی از بهینه‌سازی توبولوژیک دو بعدی که نتایج آن از روش توضیح داده شده در فصل قبل با استفاده از برنامه<sup>۱</sup> TOLS بدست آمده، ارائه می‌شود. تابع هدف انرژی کرنشی سازه با قید حجم مصالح می‌باشد. هدف از این فصل نشان دادن کارا بودن روش مجموعه سطوح تراز در بهینه سازی توبولوژیک سازه‌ها می‌باشد. در این فصل همچنین مراحل (گامهای) بهینه سازی با شرایط اولیه متفاوت مثل تعداد مش، درصد مصالح به کار رفته، سوراخ‌های اولیه و سایر پارامترهای لازم در بهینه سازی بررسی می‌گردد. تابع هدف انرژی کرنشی سازه و قید حجم مصالح می‌باشد. در تمامی مسائل این فصل برای تعریف تابع ضمنی مجموعه سطوح تراز  $\phi$ ، از گره‌های اجزای محدود برای معرفی نقاط  $\phi$  استفاده شده است و از تابع درونیابی در تحلیل اجزای محدود برای تقریب زدن  $\phi$  استفاده گردید.

---

۱ - برنامه کامپیوتری بهینه سازی توبولوژیک سازه‌ها به روش مجموعه سطوح تراز

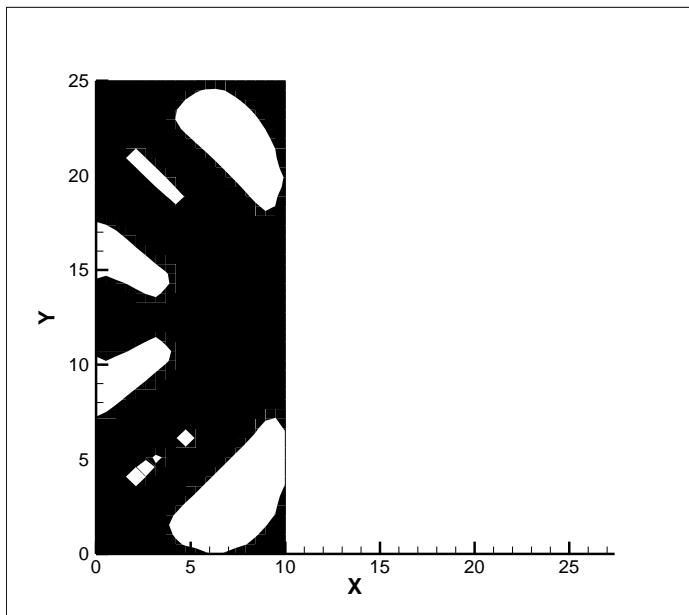
## ۲-۵ - توبولوژی قاب دو عضوی

برای تحقیق در درستی الگوریتم بهینه‌سازی اشاره شده در فصل قبل توسط برنامه نوشته شده TOLS ، یک مسئله کلاسیک ساده قاب دو عضوی را در نظر می‌گیریم. شکل و دامنه اولیه این مسئله به صورت یک بستر عمیق می‌باشد که درجهات آزادی یک لبه‌ی آن بسته می‌باشد و در لبه‌ی دیگر بار متتمرکز در وسط آن وارد می‌شود. حل تحلیلی توبولوژی بهینه این مسئله همان طور که در مرجع [۱۱] آمده است به صورت یک قاب دو عضوی که بار وارد به مرز اشاره شده توسط دو عضو با زاویه ۴۵ درجه تحمل می‌شود. برای حل عددی این مسئله ابعاد و شکل بارگذاری و دامنه طراحی شکل ۱-۵ آمده است. در این مسئله دامنه طراحی به صورت ۲۵ واحد ارتفاع و ۱۰ واحد عرض و یک بار ۱۰۰۰ در وسط لبه‌ی سمت راست وارد شده است و قید حجم آن  $30 \times 30 \times 1000$  درصد حجم مصالح دامنه طرح می‌باشد. برای مشبندی این مسئله از  $20 \times 50 \times 50$  المان استفاده شده است.

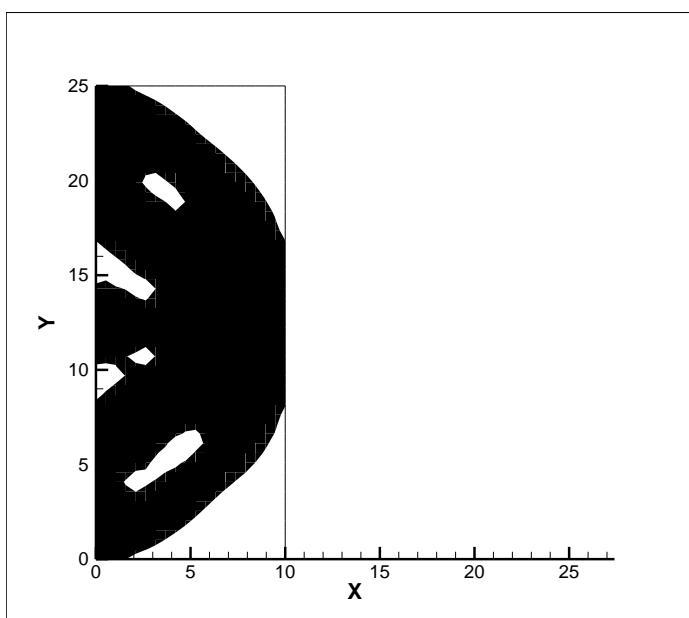


شکل ۱-۵ - شرایط مرزی و بارگذاری مسئله قاب دو عضوی

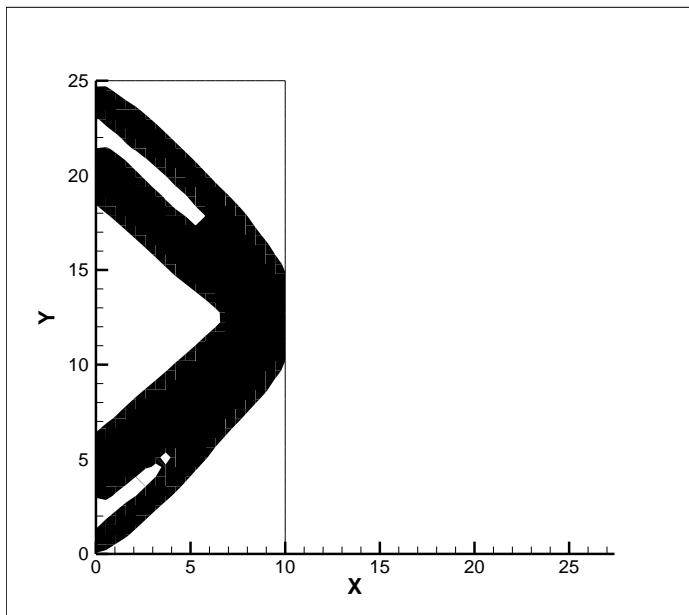
دامنه اولیه طرح را به دو حالت متفاوت در نظر گرفته‌ایم. در حالت اول  $(x, 0) \in \phi$  تمام دامنه معرفی شده فوق را نمایش می‌دهد. در تمامی حالات مقدار  $\Delta = 0.15$  و  $\alpha = 0.001$  برای تخمین عددی توابع هویساید و دیراک دلتا در روند بهینه‌سازی استفاده شده است. در این حالت نتایج بهینه سازی و تاریخچه آن ارائه شده است.



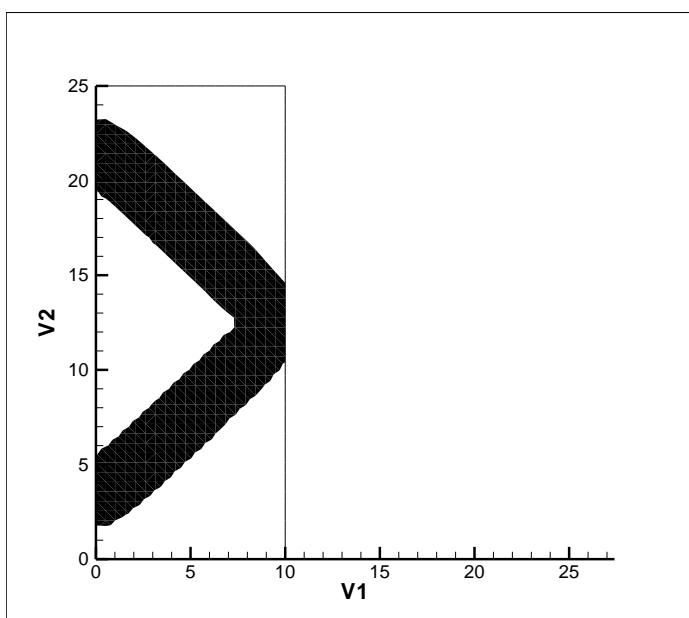
شکل ۲-۵- طرح بهینه در مرحله پنجم قاب دو عضوی



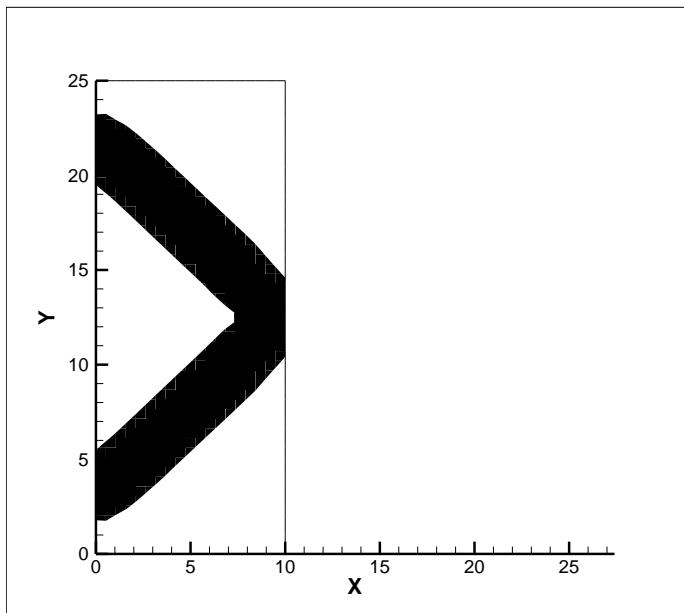
شکل ۳-۵- طرح بهینه در مرحله دهم قاب دو عضوی



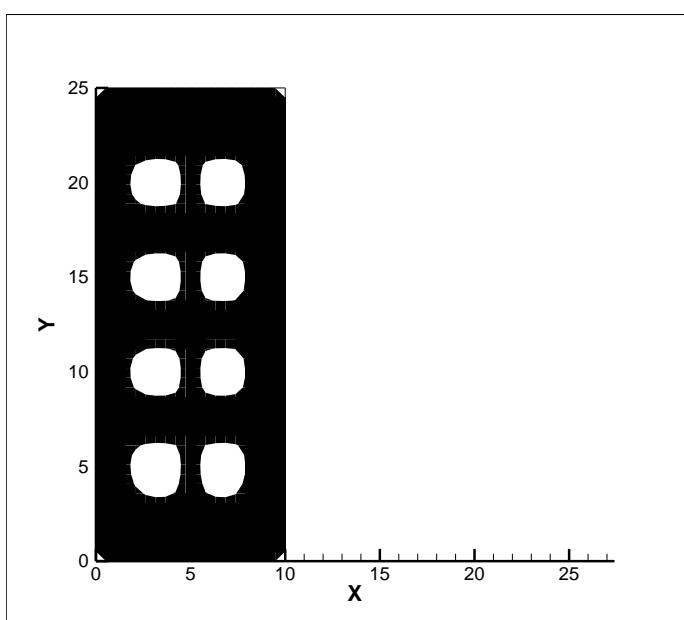
شکل ۴-۵- طرح بهینه در مرحله بیستم قاب دو عضوی



شکل ۵-۵- طرح بهینه در مرحله سی ام قاب دو عضوی

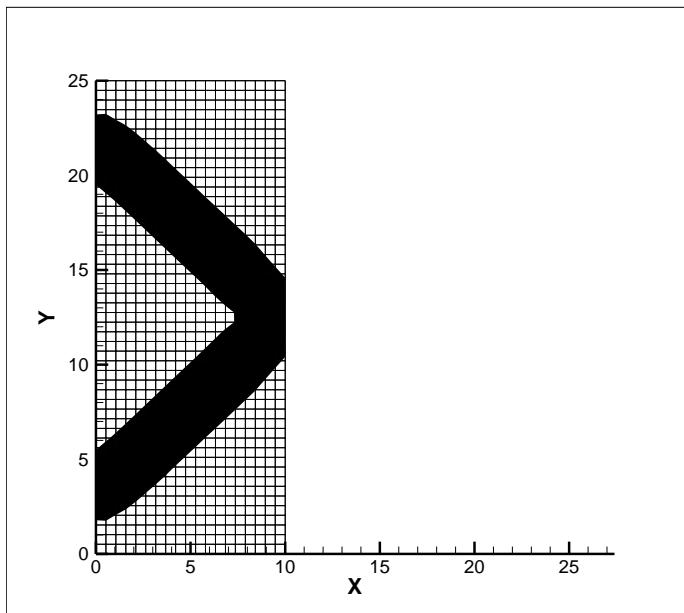


شکل ۶-۵- طرح بهینه نهایی قاب دو عضوی



شکل ۷-۵- توپولوژی اولیه طرح

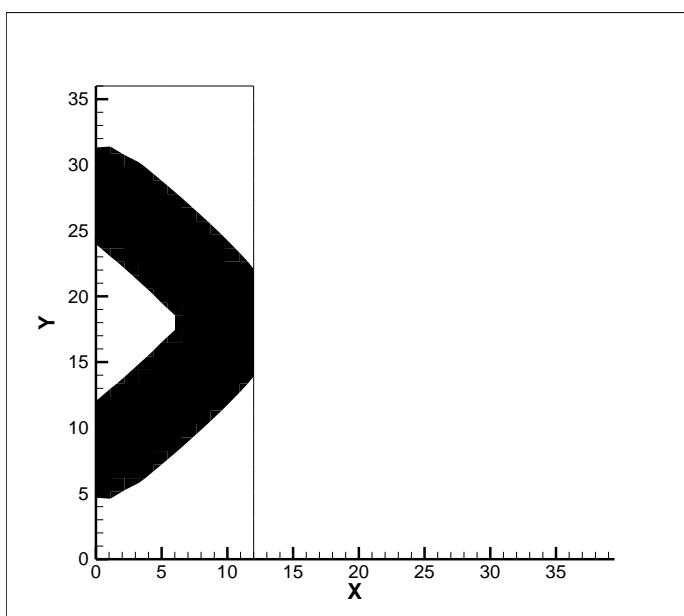
در حالت دوم از دو ردیف سوراخ در جهت کوتاه و چهار ردیف سوراخ در جهت بلند جمعاً هشت سوراخ استفاده شده است. شکل ۷-۵ را ببینید. در این حالت تعداد مراحل تکرار به نصف رسیده و نتیجه مشابهی برای توپولوژی بهینه بدست آمده که در



شکل ۸-۵- طرح بهینه در حالت وجود هشت سوراخ اولیه در دامنه طرح

حال حالت دوم را برای درصد مصالح بیشتری برای نشان دادن درستی الگوریتم بهینه سازی

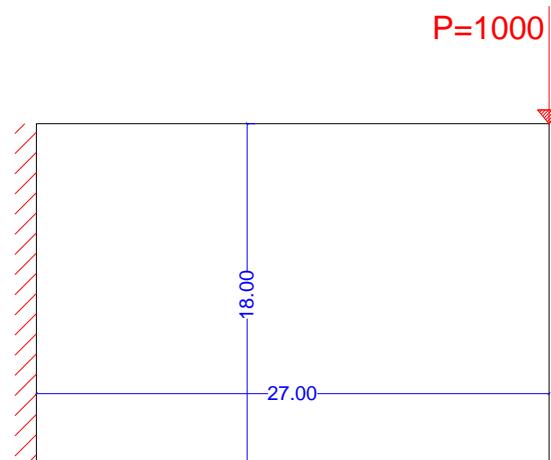
مسئله حل می کنیم. در این حالت قید حجم را ۴۵ درصد حجم کل در نظر می گیریم. شکل بهینه در این حالت به صورت زیر می باشد.



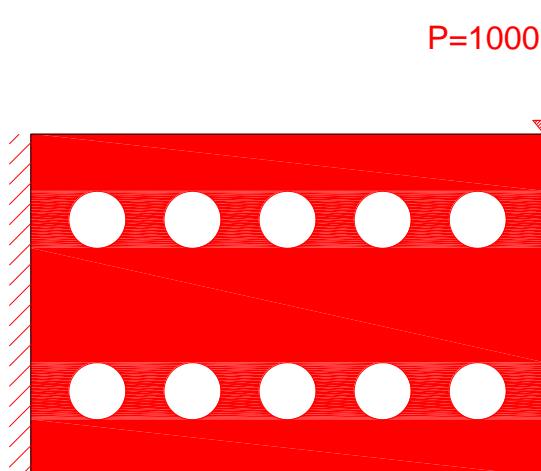
شکل ۹-۵- توپولوژی بهینه قاب دو عضوی با قید حجم ۴۵ درصدی

### ۳-۵- تپولوژی بهینه تیر کنسول

یکی از مسائل پر کاربرد در بهینه سازی سازه‌های دوبعدی، بهینه سازی تیر کنسول می‌باشد. اهمیت این مسئله در کنترل درستی برنامه نوشته شده و مقایسه آن با سایر روش‌های بهینه سازی می‌باشد. در شکل ۱۰-۵ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله مشخص شده است. برای مدل کردن این فضا از المان‌های چهارگرهی تنش مسطح استفاده شده است. مدل شامل ۷۵۹ گره می‌باشد که با مشبندی  $32 \times 22$  به ۷۰۴ المان محدود تقسیم‌بندی شده است. نسبت طول به عرض تیر کنسول نیز ۳ به ۲ می‌باشد. در این مثال از دو ردیف سوراخ ۵ تایی برای شرایط اولیه در نظر گرفته شده است(شکل ۱۱-۵).

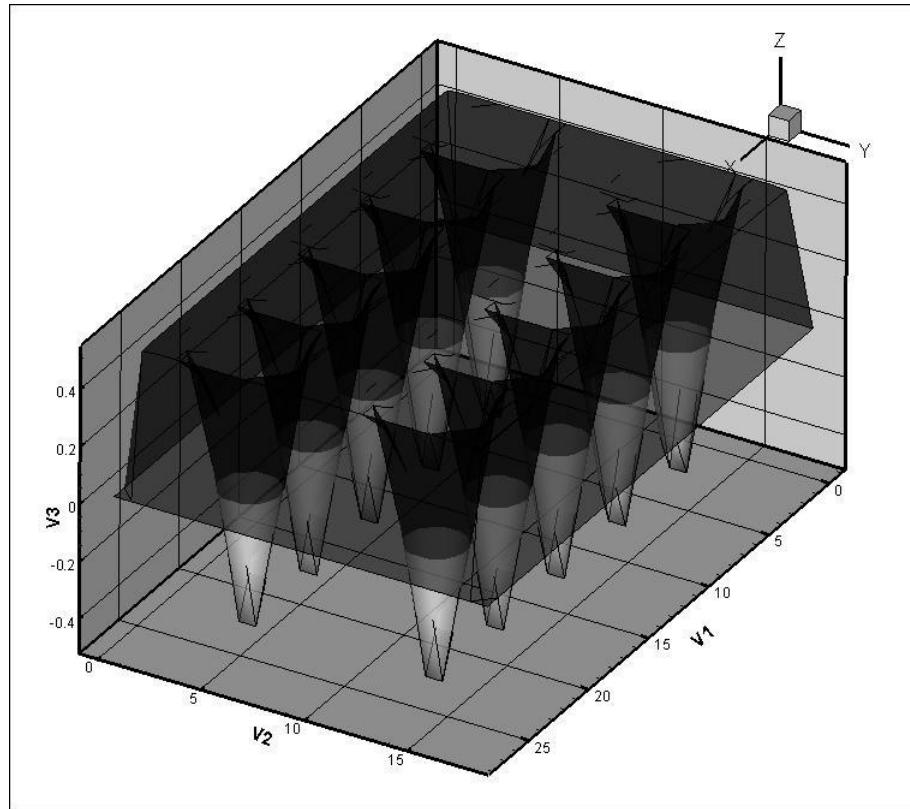


شکل ۱۰-۵ - شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری تیر کنسول

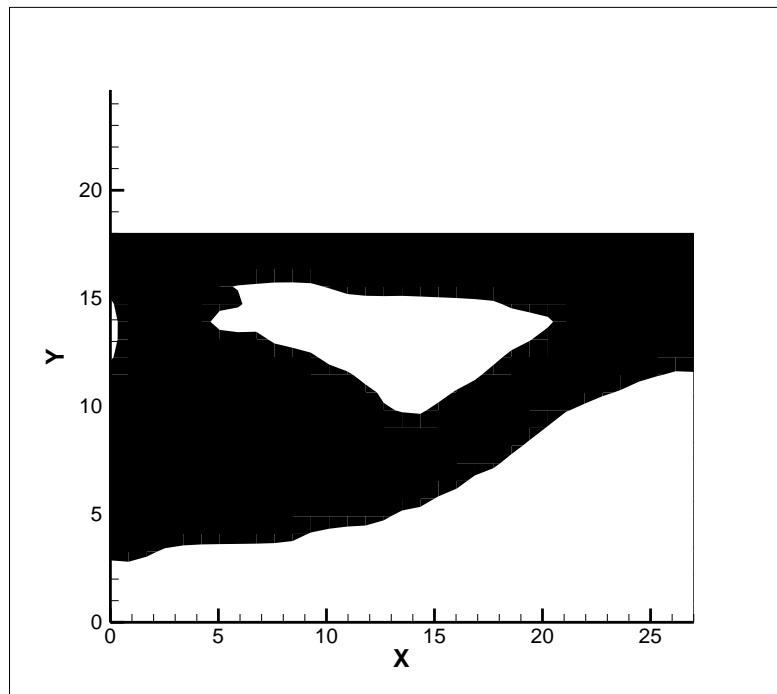


شکل ۱۱-۵ - طرح اولیه تیر کنسول با ده سوراخ

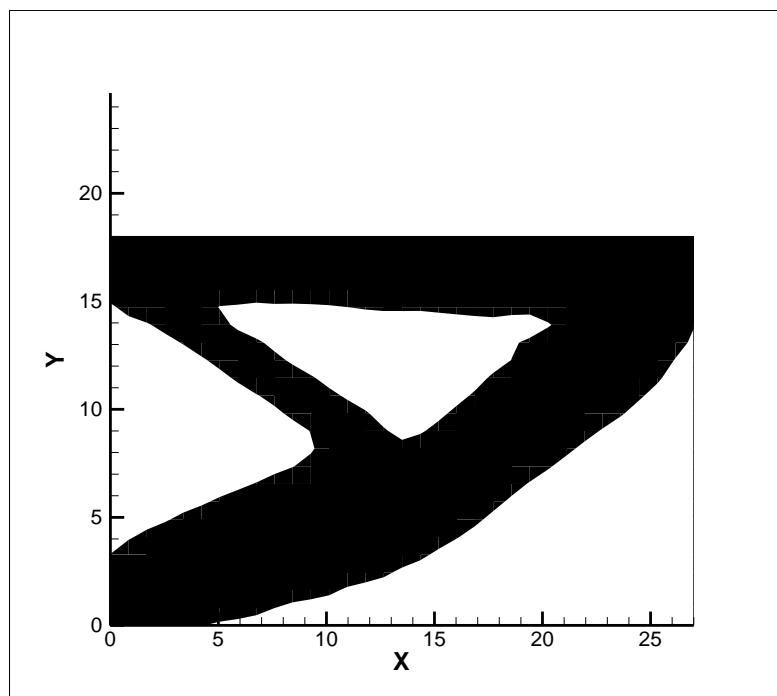
در این مثال مقادیر  $\Delta = 0.4$ ,  $\alpha = 0.001$  در نظر گرفته شده است. قید حجم برابر ۵۵ درصد سطح کل می‌باشد. نتایج بهینه سازی با استفاده از برنامه TOLS و روند حل در زیر آمده است. لازم به توضیح می‌باشد که از برنامه Tecplot برای ترسیم نتایج حاصل از برنامه TOLS استفاده گردیده است.



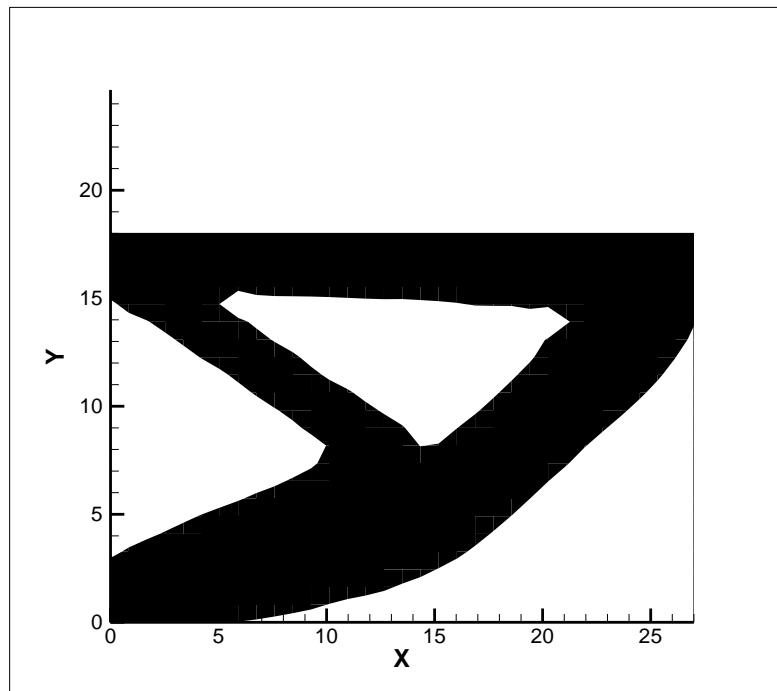
شکل ۱۲-۵ - تابع مجموعه سطوح تراز اولیه



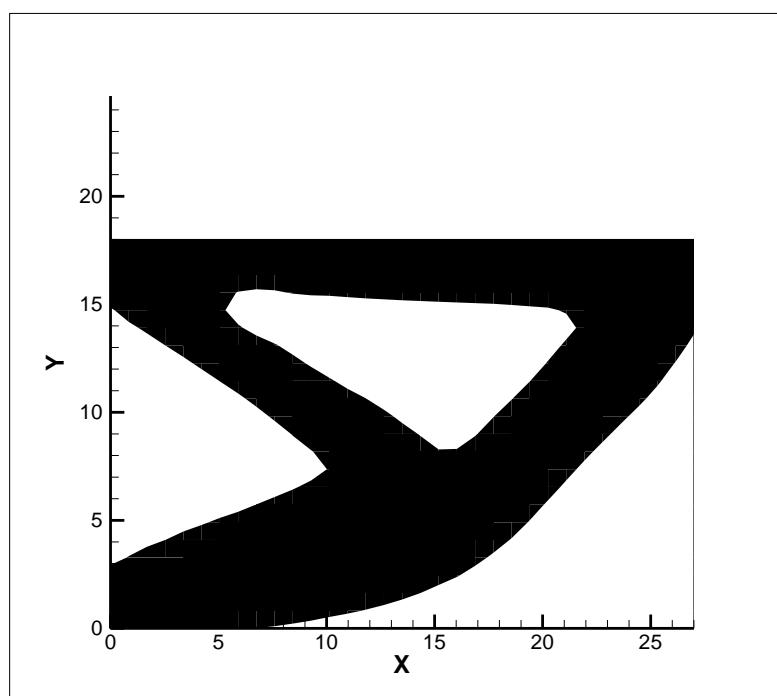
شکل ۱۳-۵ - نتیجه تکرار مرحله پنجم



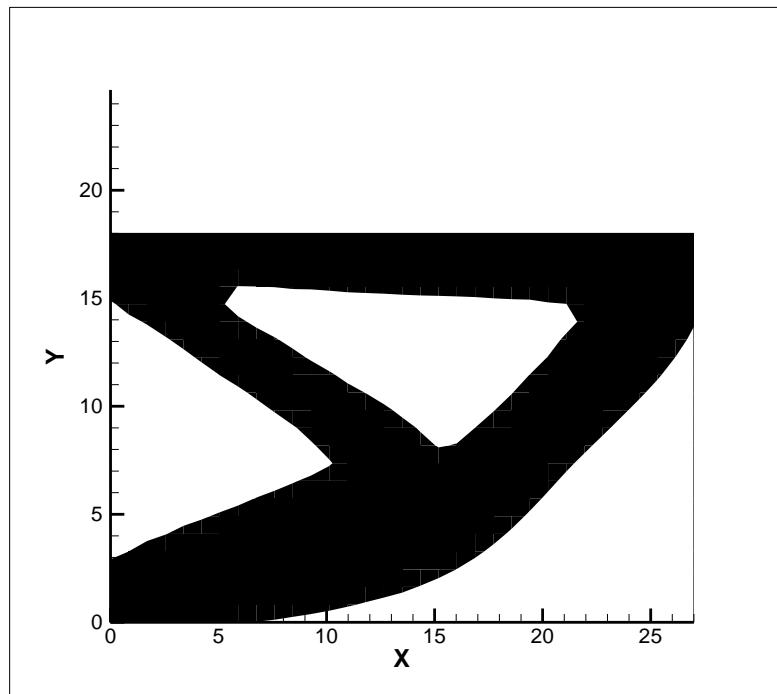
شکل ۱۴-۵ - نتیجه تکرار مرحله پانزدهم



شکل ۱۵-۵ - نتیجه تکرار مرحله بیست و پنجم

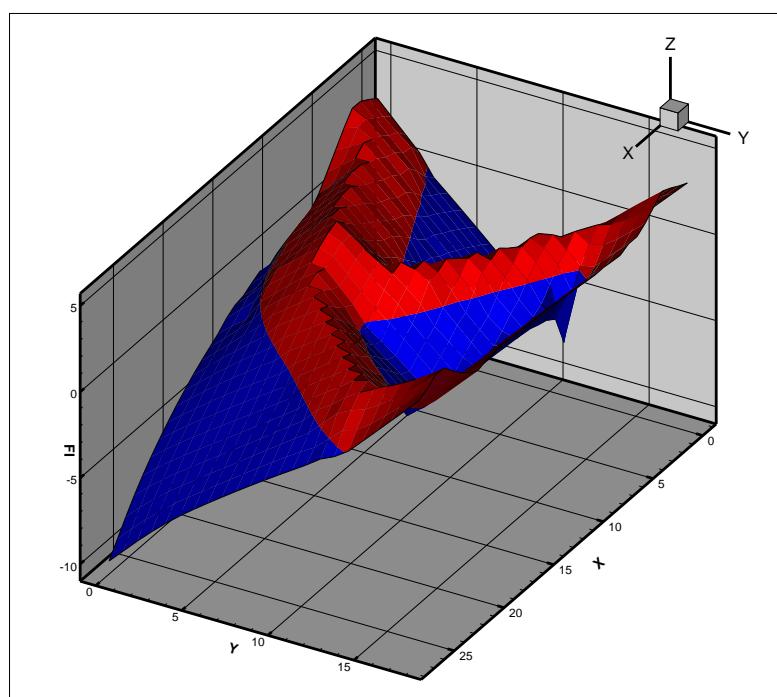


شکل ۱۶-۵ - نتیجه تکرار مرحله پنجم



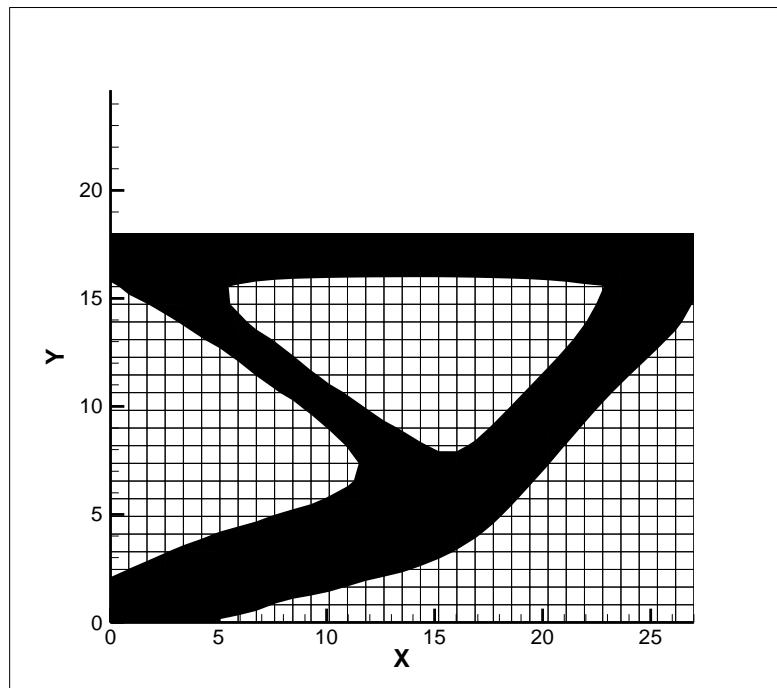
شکل ۱۷-۵ - نتیجه مرحله هشتادم و طرح نهایی

در این مثال پس از هر بار تکرار دوباره مقدار  $\phi$  توسط سابرتوین مربوطه دوباره مقدار دهی می‌شود برای مثال مقادیر تابع مجموعه سطوح تراز را برای جواب بهینه در نشان داده است.



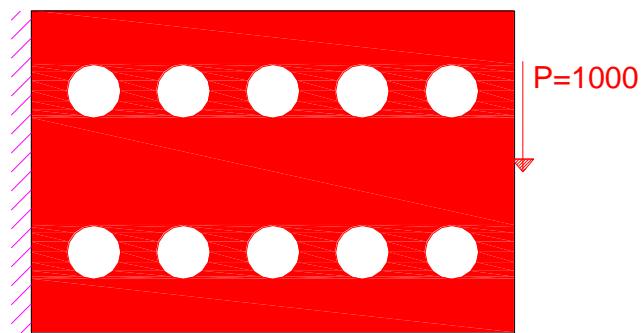
شکل ۱۸-۵ - تابع مجموعه سطوح تراز جواب بهینه

مثال فوق را با همان شرایط مرزی، بارگذاری، مشبندی و ثابت‌های نرم کننده مرز (ثابت‌های توابع هویساید و دیراک) مثال قبل با قید حجم  $40$  درصدی حجم کل را حل می‌کنیم. طرح بهینه را در شکل ۱۹-۵ - طرح بهینه کنسول با قید حجم  $40$  درصدشکل  $19-5$  ببینید. در این شکل مرزهای سازه از درون المان‌ها عبور کرده است. پر واضح است، همان طور که در فصل قبل اشاره شد، این روش بهینه سازی، مستقل از المان در بدست آمدن توپولوژی بهینه می‌باشد. در این روش ناحیه خاکستری که در بهینه سازی به روش‌های المان محور دیده می‌شود، وجود ندارد. همچنین مرز سازه و اطلاعات مربوط به هندسه سازه در هر مرحله از بهینه‌سازی در اختیار ما می‌باشد. چکربردهایی که غالباً در بهینه سازی بوجود می‌آید در این روش دیده نمی‌شود.

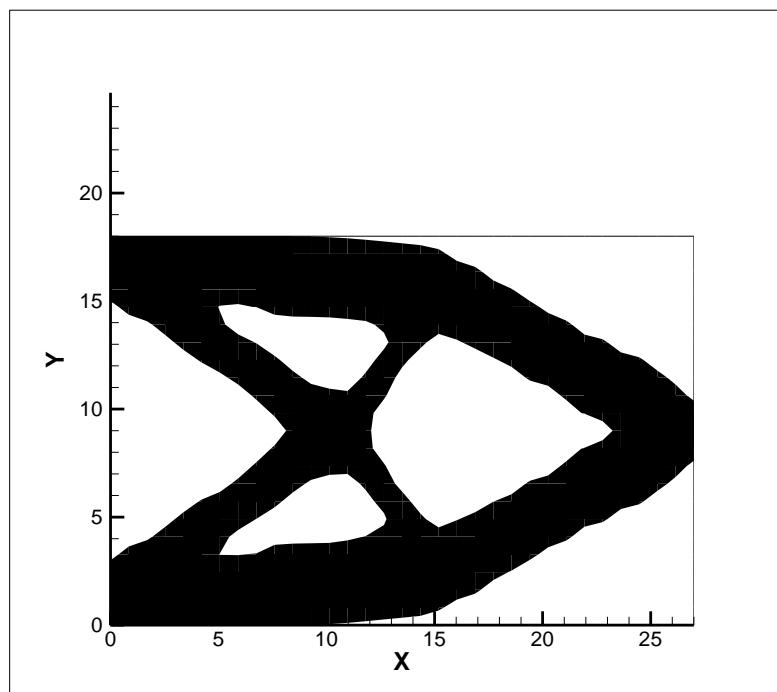


شکل ۱۹-۵ - طرح بهینه کنسول با قید حجم  $40$  درصد

مثال فوق را با تغییر در محل بار وارد به سازه، حل می‌گردد. در این مسئله محل بار از انتهای بالا به انتهای وسط مطابق وارد گردیده است. توبولوژی بهینه را در نمایش داده شده است.

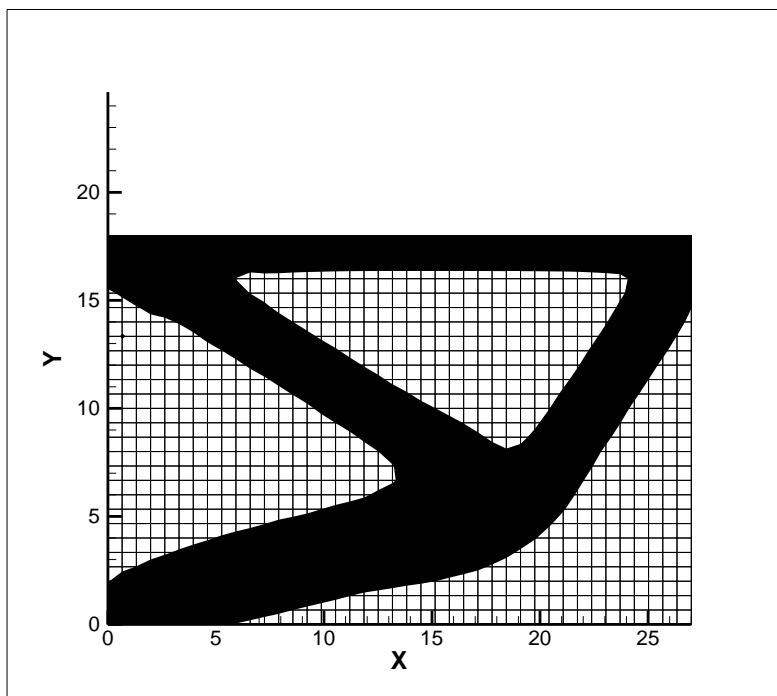


شکل ۲۰-۵- شرایط اولیه و بار گذاری تیر کنسول



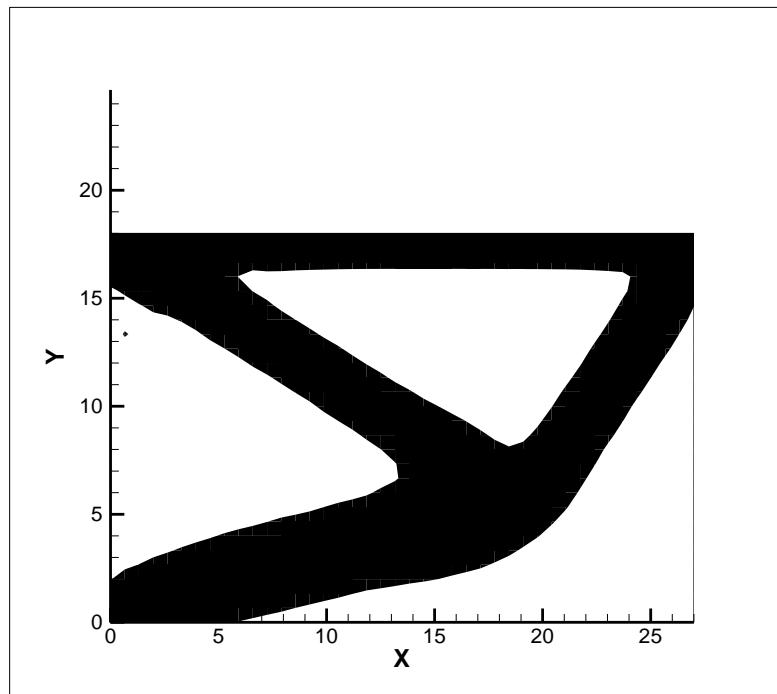
شکل ۲۱-۵- طرح بهینه تیر کنسول

تیر کنسول مفروض شکل ۱۰-۵ را با همان شرایط مرزی در نظر بگیرید. میخواهیم با تغییر در تعداد مش این مسئله را حل کنیم. مدل شامل ۱۱۷۶ گره میباشد که با مشبندی  $41 \times 27$  به المان محدود تقسیم‌بندی شده است. در این مثال از دو ردیف سوراخ ۵ تایی برای شرایط اولیه در نظر گرفته شده است. در این مثال قید حجم را ۴۵ درصد حجم کل گرفته شده است. در این مسئله مقادیر  $\Delta = 0.1, \alpha = 0.001$  در نظر گرفته شده است.

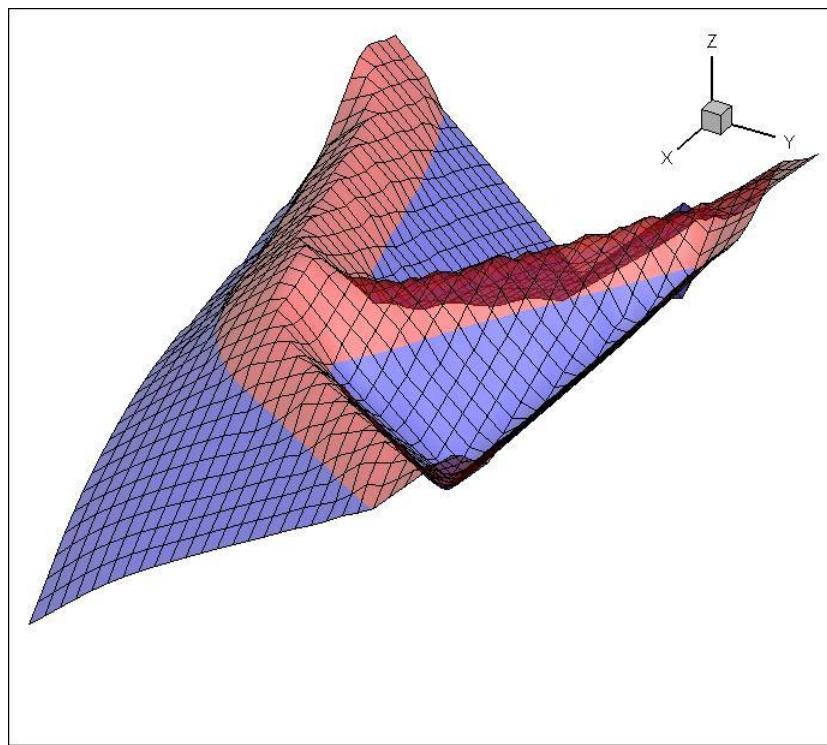


شکل ۲۲-۵- طرح بهینه تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصدی

در این حالت مرز سازه نرمتر شده است ولی زمان محاسبات بیشتر شد. تعداد تکرار ها در این مرحله ده درصد کاهش یافت. همین مسئله با همین مفروضات را برای قید حجم ۳۵ درصدی حل میکنیم. در شکل ۲۳-۵ توپولوژی طرح بهینه را میبینید و در شکل ۲۴-۵ تابع مجموعه سطوح تراز در حالت بهینه نهایی نشان داده شده است.



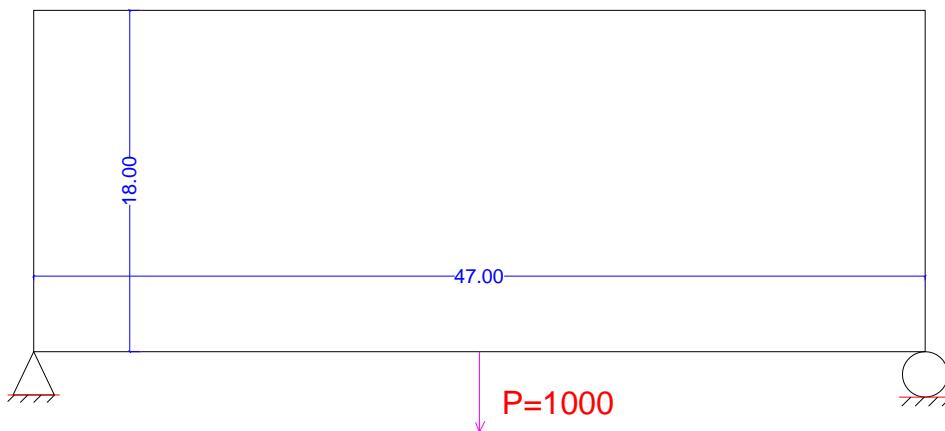
شکل ۲۳-۵- طرح بهینه تیر کنسول با ۱۱۰۷ المان با قید حجم ۳۵ درصدی



شکل ۲۴-۵- تابع مجموعه سطوح تراز برای تیر کنسول بهینه شده

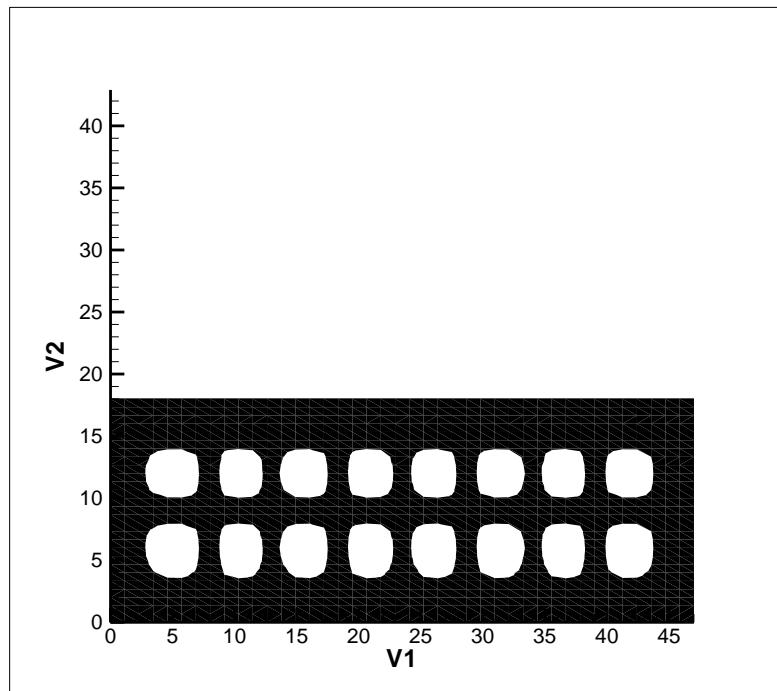
#### ۴-۵ - تیر دوسر مفصل

تیر دو سر مفصل ساده شکل ۲۵-۵ را در نظر بگیرید. با واردہ بر این سازه در وسط قرار گرفته است. برای مدل کردن این فضا از المان های چهارگرهی تنش مسطح استفاده شده است. مدل شامل ۱۱۷۶ گره می باشد که با مشبندی  $27 \times 41$  به ۱۱۰۷ المان محدود تقسیم بندی شده است. در این مثال از دو ردیف سوراخ ۸ تایی برای شرایط اولیه در نظر گرفته شده است(شکل ۲۶-۵).

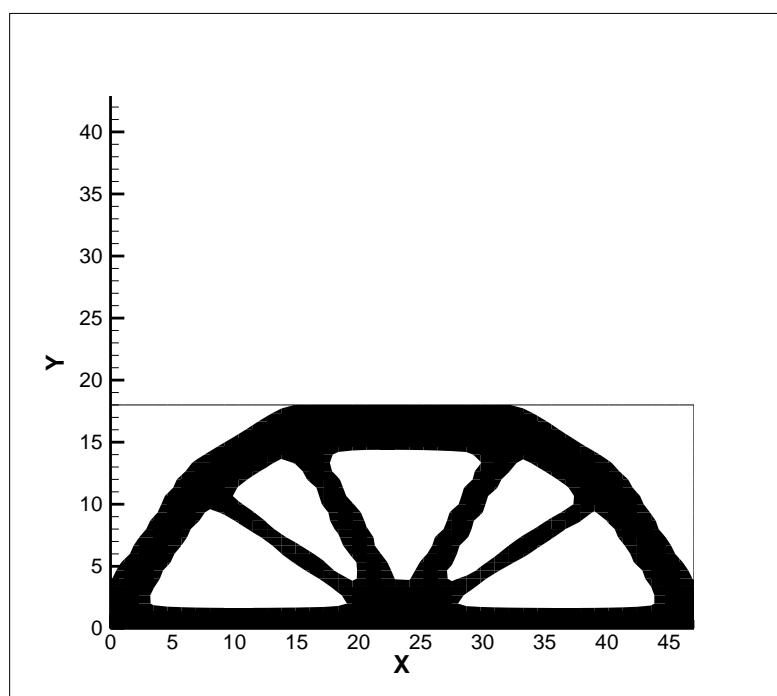


شکل ۲۵-۵ - تیر دو سر مفصل ساده

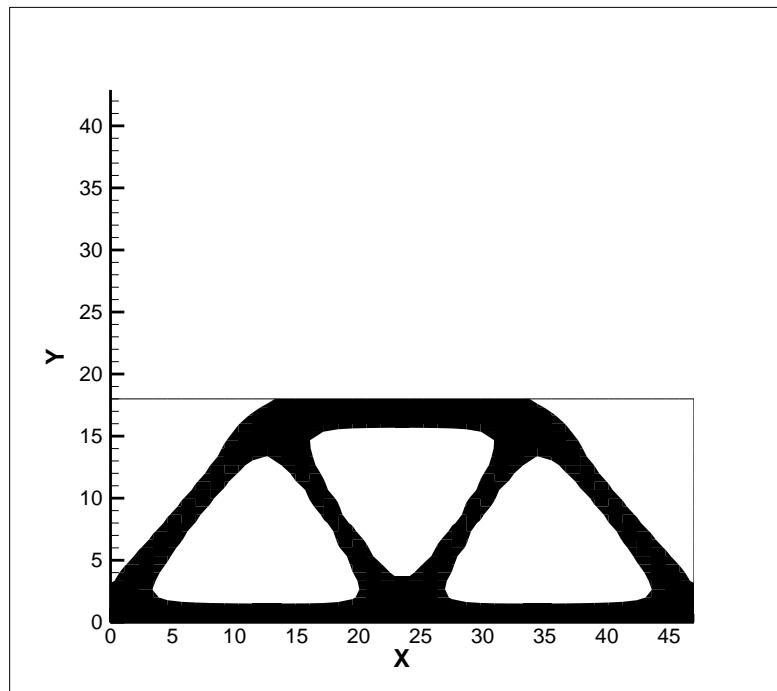
برای حل بهینه این سازه از دو قید حجم متفاوت استفاده گردیده است. در شکل ۲۷-۵ توپولوژی بهینه تیر دوسر مفصل برای قید حجم ۴۰ درصدی حل شده است. در شکل ۲۸-۵ توپولوژی بهینه تیر دوسر مفصل برای قید حجم ۳۰ درصدی نشان داده شده است.



شکل ۲۶-۵- توبولوژی اولیه تیر دو سر مفصل



شکل ۲۷-۵- توبولوژی بهینه تیر دو سر مفصل با قید حجم ۴۰ درصدی



شکل ۲۸-۵- توبولوژی بهینه تیر دو سر مفصل با قید حجم ۳۰ درصدی

## فصل ششم

### نتائج و پیشنهادات

## ۱- نتایج

در این پایان نامه روش مجموعه سطوح تراز برای بهینه سازی سازه های پیوسته بسط داده شد.

در این روش، راه جدیدی که اخیراً برای بیان مرز سازه به روش مجموعه سطوح تراز معرفی شده، استفاده گردید. در این روش علاوه بر بهینه سازی توپولوژیک، شکل سازه نیز بهینه می‌گردد. استفاده از مدل مجموعه سطوح تراز در بهینه سازی توپولوژیک سازه‌ها این امکان را به ما می‌دهد که همواره اطلاعات مربوط به هندسه سازه را در اختیار داشته باشیم. از دیگر مزایای این روش آن است که توپولوژی سازه به راحتی قابل تغییر می‌باشد و نیاز به تکرار در ایجاد شبکه اجزای محدود و یا بدست آوردن پارامترهای هندسی سازه نمی‌باشد. مرزها به سادگی می‌توانند به هم‌دیگر متصل شده و مرز واحدی را تشکیل دهد یا برعکس، سوراخ‌هایی از جدا شدن مرزها تولید شود. در روند بهینه سازی نیز با توجه به مستقل بودن سازه نسبت به المان، مرزهای سازه نرم‌تر از روش‌های المان محور می‌باشد.

همچنین با بکار گیری تابع مجموعه سطوح تراز در مسئله بهینه سازی، پس از اتمام فرایند، مرزها نیاز به پردازش بیشتر ندارند و در واقع شکل سازه نیز بهینه می‌شود. از دیگر مزایای این روش نسبت به روش‌های المان-محور<sup>۱</sup> عدم حضور ناحیه خاکستری در اطراف مرز می‌باشد. به علاوه، چکربوردهایی که گاه‌آ در بهینه سازی توپولوژیک سازه‌های پیوسته بوجود می‌آید در این روش دیده نمی‌شود. در روند بهینه سازی به این نتیجه رسیدیم نیاز به اقنان قید حجم در هر مرحله از بهینه سازی نمی‌باشد و می‌توان در چند تکرار اولیه این کار را تدریج‌آ انجام داد. این کار باعث کاهش زمان بهینه سازی می‌گردد که از جهت هزینه محاسباتی دارای اهمیت می‌باشد.

در فصل دوم به بیان روابط و فرمول‌بندی مسائل بهینه سازی و روش‌های حل اشاره شده است که در فصل چهارم از آن استفاده گردید.

در فصل سوم با معرفی توابع ضمنی و ابزار آن آشنا شدیم. مزیت این روش در بیان مرزها و پیدا کردن و تغییر دادن شکل و توپولوژی رویه‌ها یا منحنی‌ها می‌باشد. همچنین ابزار کارایی برای اینگونه توابع معرفی گردید که در فصل چهارم کلید اصلی مسئله بهینه سازی می‌باشد. به علاوه تابع فاصله علامتدار به عنوان یک ابزار مهم در روند بهینه سازی فصل چهارم نشان داده شد.

## ۲-۶ - پیشنهادات

این روش دارای قابلیت‌های توسعه بسیاری است. به عنوان مثال، موضوعاتی که در ادامه کار می‌تواند مورد تحقیق گرفته و احتمالاً منجر به نتایج بهتری می‌شود، در زیر اشاره می‌شود.

- برای حل عددی معادله همیلتون ژاکوبی می‌توان از اجزای محدود استفاده کرد. امید

می‌رود با انجام این کار دقیق انجام محاسبات بیشتر و زمان حل آن کاهش یابد.

- با توجه به این که در بهینه سازی سازه‌ها مختصات نقاط تغییر نمی‌کند می‌توان به

جای استفاده از حل معادله همیلتون ژاکوبی برای بهبود ضمنی متغیرهای طراحی از

---

۱- Element base

روش‌های معیار بهینه‌گی برای تغییر مقادیر تابع مجموعه سطوح تراز استفاده کرد.

- تاثیر استفاده از روش‌های ریاضی و بکار گیری روش‌هایی نظیر MMA و CONLIN بر روی نتایج و نیز زمان محاسباتی می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.
- در ادامه می‌توان مسائل سه بعدی را حل کرد و به کد TOLS اضافه کرد.

**ضمیمه (الف)**

# **TOLS راهنمای**

## **TOLS برنامه راهنمای**

برنامه TOLS یک برنامه کامپیوتری آکادمیک برای انجام بهینه‌سازی توپولوژیک دو بعدی سازه‌ها در محیط‌های پیوسته می‌باشد. این برنامه کاملاً مستقل و وابسته به هیچ نرم‌افزار دیگری نیست و تمامی مراحل بهینه‌سازی از جمله تحلیل سازه‌های دو بعدی را با دقت بسیار بالا در خود گنجانده است. در این برنامه سعی شده است فرمت فایل ورودی تا حد امکان شبیه نرم‌افزارهای معروف اجزاء محدود باشد. به این منظور برای تولید فایل ورودی برنامه کمکی نوشته شد. این برنامه در ادامه برنامه TOPS به کمک مهندس مهدی توکلی تهیه گردیده است.

## **TOLS برنامه ساختار**

-CHEK، OPTIMIZATION، ANALYSIS، INPUT، OUTPUT از پنج قسمت اصلی TOLS برنامه می‌باشد. که هر کدام از قسمت‌های فوق شامل بخش‌ها و زیربخش‌های دیگری می‌باشد.

INPUT: در این قسمت کلیه اطلاعات مورد نیاز برنامه از یک فایل ورودی خوانده می‌شود و برای استفاده در برنامه پردازش می‌گردد.  
ANALYSIS: این قسمت وظیفه آنالیز مدل اجزاء محدود را به عهده دارد. این قسمت شامل بخش‌های زیر می‌باشد:

▪ PROPERTIES : در این بخش ماتریس الاستیسیته هر المان که در هر مرحله

بهینه‌سازی متغیر است محاسبه می‌شود.

▪ ELEMENT : در این بخش ماتریس سختی المان محاسبه می‌شود.

▪ LOADING : در این بخش محاسبات مربوط به بارگذاری که منجر به بدست آمدن

ماتریس نیروها می‌شود ، گنجانده شده است.

▪ STRESS : در این بخش تنش‌ها با توجه به نوع المان محاسبه می‌شوند. در این بخش

همچنین تنش‌های اصلی و جهات آنها نیز محاسبه می‌شوند.

▪ **SOLVER** : در این بخش معادله  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$  با استفاده از حل‌گرهای FRONTAL و یا

▪ **SKY** حل می‌شود.

▪ **ANALYSIS COMMANDER** : این بخش اتاق فرمان قسمت ANALYSIS می‌باشد

▪ و این قسمت را مدیریت می‌کند.

▪ **OPTIMIZATION**: در این قسمت فرامین مربوط به بهینه‌سازی توپولوژیک دو بعدی سازه‌ها

گنجانده شده است. این قسمت شامل بخش‌های زیر می‌باشد.

▪ **MAIN**: این بخش بدنه اصلی الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژیک را تشکیل می‌دهد.

▪ **REINITILIZATION**: در این بخش روش‌های ارتقاء‌دهی متغیرهای طراحی و

▪ همچنین محاسبات مربوط به فرض اولیه این متغیرها گنجانده شده است.

▪ **OUTPUT** : نتایج بدست آمده از برنامه TOLS از طریق این قسمت به فایل‌های خروجی منتقل

▪ می‌شود.

### مشخصات برنامه

برنامه کامپیوتری TOLS به مدت یک سال با راهنمایی استاد فرزانه مهندس مهدی توکلی

تهیه شده و یک برنامه مستقل بهینه‌سازی توپولوژیک است. همان طورکه اشاره شد این برنامه به

منظور بهینه‌سازی توپولوژیک دو بعدی سازه‌ها در محیط‌های پیوسته نوشته شده است. روش‌های بکار

برده شده در این برنامه تماماً در فصل‌های این پایان‌نامه به تفصیل بحث شده‌اند. این برنامه برای

مهندسين ابزاری بشمار می‌رود تا توپولوژی بهینه و اجرائي سازه خود را بیابند.

## مراجع

- [1]. Haftka, R.T., Gandhy, R.V., 1986, *Structural shape optimization A survey*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 57, 91–106
- [2]. Ding, Y. 1986, *Shape optimization of structures: A Literature Survey*, Comput Struct., 24, 985–1004
- [3]. Olhoff, N., Rozvany, GIN. (eds.) 1995, WCSMO-1, Proc. First World Cong. on *Structural and Multidisciplinary Optimization*, (held in Goslar, May 28–June 2). Oxford: Pergamon.
- [4]. Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. 1988, *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2, 197–224
- [5]. Bendsoe, M.P. 1989, *Optimal shape design as a material distribution problem*, Struct. Optim. 1, 193–202
- [6]. Xie, Y.M.; Steven, G.P. 1997, *Evolutionary structural optimization*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [7]. Bendsoe, M.P. 1995, *Optimization of structural topology, shape, and material*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [8] ظریف مقدم، ن. ۱۳۸۳، پایان نامه کارشناسی ارشد، بهینه سازی شکل سازه‌ها با استفاده از روش تغییرات مرزی، دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [9] J. Sienz., 1994, Ph.D Thesis, *Integrated structural modeling, adaptive analysis and shape optimization*, Civil Engineering University of Swansea, UK.
- [10] U. Kirsch, 1993, *Structural Optimization Fundamentals and Application*, Springer-Verlag.
- [11] B. Hassani, E. Hinton, 1999, *Homogenization and Structural Topology Optimization*, Springer.
- [12] H.A. Eschenauer, V.V. Kobelev, A. Schumacher, 1994, *Bubble Method*

*for topology and shape optimization of structures*, Springer-verlag.

- [13] Fleury C., Braibant V., 1986, *Structural optimization - a new dual method using mixed variable*, Int. J. Num. Meth. Eng. 23,409-428
- [14] Bloomenthal, J., Bajaj, C., Blinn, J., Cani-Gascuel, M.-P., Rockwood, A., Wyvill, B., and Wyvill, G., 1997, *Introduction to Implicit Surfaces*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco.
- [15] Zhang, Y.L., Yeo, K.S., Khoo, B.C., and Wang, C., *3D Jet Impact of Toroidal Bubbles*, J. Comput. Phys. 166, 336-360 (2001).
- [16] Tryggvason, G, Bunner, B., Juric, D., Tauber, W., Nas, S., Han, J., Al-Rawahi, N., and Jan, Y.-J., 2001, *A Front Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow*, J. Comput. Phys. V. 169, 708-759.
- [17] Williams, F.A., 1985, *The Mathematics of Combustion*, (J.D. Buckmaster, ed.), SIAM, Philadelphia, PA, 97-131.
- [18] Eschenauer HA, Olhoff N., 2001, *Topology optimization of continuum structures: A review*, Applied Mechanics Review, Vol. 54 331-390.
- [19] Rozvany GIN, Zhou M and Birker T., 1992, *Generalized shape optimization without homogenization*. Structural Optimization, Vol. 4 250-252.
- [20] Sethian JA, Wiegmann A., 2000, *Structural boundary design via level set and immersed interface methods*. Journal of Computational Physics, Vol.163 489-528.
- [21] Osher SJ, Santosa F., 2001, *Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. Frequence of a two density inhomogeneous drum*. Journal of Computational Physics, Vol. 171 272-288.
- [22] Allaire G, Jouve F and Toader AM., 2002, *A level set method for shape optimization*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie I, Vol. 334 1125-1130.
- [23] Wang MY, Wang XM and Guo DM., 2003, *A level set method for structural topology optimization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192 227-246.
- [24] Wang X, Wang MY and Guo D., 2004, *Structural shape and topology optimization in a level-set framework of region representation*. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 27 1-19.
- [25] Wang MY, Wang XM., 2004, “Color” level sets: *A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials*. Computer Methods in Applied

Mechanics and Engineering, Vol. 193 469 – 496.

- [26] Petersen NL., 2000, *Maximization of Eigenvalues using topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 20 2-12.
- [27] de Ruiter MJ, van Keulen F., 2004, *Topology optimization using a topology description function*. to appear in Structural and Multidisciplinary Optimization.
- [28] Belytschko T, Xiao SP and Parimi C., 2003, *Topology optimization with implicit functions and regularization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol., 57 1177-1196.
- [29] J.A. Sethian, 1999, *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, Cambridge University Press.
- [30] Sethian, J., Theory, 1995, *Algorithms, and Applications of Level Set Methods for Propagating Interfaces*, Dept. of Mathematics, University of California, Berkeley.

**Abstract:**

The purpose of this thesis is to use the boundary variation techniques for structural topology, as well as, shape optimization. The conventional boundary variation methods are not suitable for topology optimization of elastic structures with mean compliance and the volume of the consumable material as the objective function and the constraint respectively.

In this approach the moving boundaries of the structure during the optimization process is modeled by the zero level set of an implicit scalar function of a higher dimension. This easily provides us with the appropriate variation of shape and topology of the structure.

To verify the applicability and performance of the method an academic program, given the name TOLS (Topology Optimization with Level Set) was developed and a few examples were executed.

*Keywords:* Structural optimization, Topology optimization, Level set method, Implicit function, Implicit moving boundary



**Shahrood University of Technology**

Structural Engineering Department

M. Sc. Thesis

Structural Topology optimization using level set  
method

Maziyar Kousha

**Supervisors:**

Dr. B. Hassani

Dr. R. Naderi

**Date: Jan, 2010**