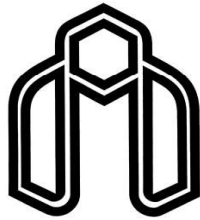


بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران - معماری

گروه عمران - سازه

تحلیل ایزوژئومتریک و بهینه سازی شکل

سازه‌های با تقارن محوری

ابوالفضل حجت پناه منتظری

اساتید راهنما:

دکتر بهروز حسنی

دکتر رضا نادری

استاد مشاور:

مهندس ناصر ظریف مقدم

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ماه ۸۸

ب

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: عمران و معماری

گروه: عمران - سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای ابوالفضل حجت پناه منتظری

تحت عنوان:

تحلیل ایزوژئومتریکی و بهینه سازی شکل سازه ها با تقارن محوری

در تاریخ ۱۳۸۸/۴/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور:	امضاء	اساتید راهنما:
	نام و نام خانوادگی: مهندس ناصر ظریف مقدم		نام و نام خانوادگی: دکتر بهروز حسنی
			نام و نام خانوادگی: دکتر رضا نادری

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور:
	نام و نام خانوادگی: مهندس عباس محمدی		نام و نام خانوادگی: دکتر علی کیهانی
			نام و نام خانوادگی: دکتر احمد احمدی

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی:

بر خود لازم می دانم که از همه عزیزانی که مرا در مراحل انجام این پایان نامه یاری کرده اند کمال تشکر و قدردانی خود را، به عمل آورم. از جناب آقای دکتر بهروز حسنی، که دقت نظر و راهنمایی های ارزنده ایشان همواره یاری رسان اینجانب، در مراحل انجام این پایان نامه بوده است؛ و همچنین جناب آقای دکتر رضا نادری که با راهنمایی های مدبرانه خود موجب به ثمر رسیدن این پایان نامه شده‌اند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. و موفقیت هر چه بیشتری را برای این عزیزان آرزومندم.

همچنین مراتب سپاس‌گذاری خود را از آقای مهدی توکلی دانشجوی دوره دکتری سازه که با در اختیار قرار دادن برنامه کامپیوتری خود (برنامه تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح)، کمک شایانی به انجام این پایان نامه کردند، ابراز می دارم؛ و توفیق روز افزون برای ایشان خواستارم.

تعهد نامه

اینجانب ابوالفضل حجت پناه منتظری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته عمران- سازه دانشکده عمران- معماری دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل ایزوژئومتریك و بهینه سازی شکل سازه های با تقارن محوری. تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی و دکتر رضا نادری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University Of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل راز داری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

۱۳۸۸/۴/۳۰

مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

تحلیل سازه در علوم مهندسی از اولین گامهای شناخت و ارزیابی صحیح مسائلی می باشد، که در عمل با آن مواجه می شویم. این تحلیل به طور خاص در مکانیک سازه ها منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می شود، که در حالت کلی دارای پیچیدگی بسیار زیادی می باشد. لذا باید به دنبال روش هایی جهت حل این معادلات باشیم؛ تا بتوانیم شناخت و علم خود را توسعه دهیم. در دهه های گذشته روش های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی و حل مشکلات پیش روی محققین ارائه شده است که برخی از مشهورترین آنها روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته ای از روش ها با عنوان روش های بدون شبکه می باشند. روشی که اخیراً برای تحلیل مسائل مهندسی ارائه شده روش ایزوژئومتریکی می باشد. روش تحلیل ایزوژئومتریکی اولین بار در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز معرفی شد، و در پی آن است که ضعف های دیگر روش های تحلیل را رفع کند.

در این پایان نامه ابتدا به بررسی روش تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته شده است؛ و فرمول بندی آن برای مسائل دو بعدی تنش مسطح و کرنش مسطح ارائه شده، سپس این فرمول بندی برای مسائل متقارن محوری تعمیم داده شده است. در راستای اهداف این پایان نامه برنامه ای کامپیوتری به نام IsoOptimizer تولید شده است، که قادر به تحلیل سازه های متقارن محوری، به روش ایزوژئومتریکی می باشد. برای کنترل صحت نتایج این برنامه و همچنین بررسی عملکرد روش ایزوژئومتریکی برای سازه های متقارن محوری مسائل مختلفی از این دست، توسط برنامه مورد تحلیل قرار گرفت، که مقایسه نتایج آن با حل دقیق و یا حل اجزای محدود توسط برنامه انسیس، مؤید صحت جواب های برنامه نوشته شده برای تحلیل به روش ایزوژئومتریکی می باشد. همچنین این نتایج نشان دهنده عملکرد خوب ایزوژئومتریکی در تحلیل سازه های متقارن محوری می باشد.

یکی دیگر از اهداف این پایان نامه بررسی عملکرد، کاربرد تحلیل ایزوژئومتریکی در بهینه سازی

شکل سازه ها می باشد. در این راستا با استفاده از سابروتینهای DOT و اضافه کردن آنها به برنامه IsoOptimizer، قابلیت حل مسائل بهینه سازی به برنامه اضافه شده است. مثال هایی از نحوه کاربرد تحلیل ایزوژئومتریك در بهینه سازی سازه های متقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته که در انتهای فصل پنجم ارائه شده است.

واژگان کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریك، نرزه، بهینه سازی شکل، سازه های متقارن محوری.

فهرست مطالب

فصل اول: کلیات.....	۱
۱-۱ - مقدمه	۲
۲-۱ - تاریخچه و روند شکل گیری.....	۲
فصل دوم: معرفی منحنی ها و سطوح نریز.....	۷
۱-۲ - فرم ضمنی و پارامتری	۸
۲-۲ - منحنی های بزیر	۹
۳-۲ - منحنی ها و سطوح بی- اسپلاین	۱۲
۱-۳-۲- تعریف و خواص توابع پایه ای بی- اسپلاین.....	۱۳
۲-۳-۲- مشتق توابع پایه ای بی- اسپلاین.....	۱۶
۳-۳-۲- دیگر ویژگی های توابع پایه ای بی- اسپلاین.....	۱۷
۴-۳-۲- تعریف منحنی های بی- اسپلاین.....	۱۸
۵-۳-۲- تعریف سطوح بی- اسپلاین.....	۲۱
۶-۳-۲- مشتق سطوح بی- اسپلاین.....	۲۲
۴-۲ - منحنی و سطوح نریز.....	۲۳
۱-۴-۲- معرفی منحنی های نریز.....	۲۳
۲-۴-۲- معرفی سطوح نریز.....	۲۴
۳-۴-۲- مشتق سطوح نریز.....	۲۵
فصل سوم: تحلیل ایزوژئومتریک.....	۲۷
۱-۳ - مقدمه	۲۸
۲-۳ - فرمول بندی تحلیل ایزوژئومتریک.....	۲۹

۲۹ محیط پیوسته کشسان	۳-۲-۱
۳۵ معرفی هندسه	۳-۲-۲
۳۶ محاسبه ماتریس سختی	۳-۳
۳۶ معرفی انتگرال ماتریس سختی	۳-۳-۱
۳۷ روش انتگرال گیری گاوس	۳-۳-۲
۳۹ حل عددی انتگرال ماتریس سختی	۳-۳-۳
۴۲ سازه های دارای تقارن محوری	۳-۴
۴۷ ماتریس سختی سازه های متقارن محوری	۳-۵
۴۷ محاسبه انتگرال ماتریس سختی	۳-۵-۱
۵۰ برنامه IsoOptimizer	۳-۶
۵۱ ساختار اصلی برنامه IsoOptimizer	۳-۶-۱
۵۶ فصل چهارم: بهینه سازی شکل سازه ها	
۵۷ مقدمه	۴-۱
۵۹ بهینه سازی شکل سازه ها	۴-۲
۵۹ روش تغییرات مرزی	۴-۲-۱
۶۰ روش رشد تطبیقی	۴-۲-۲
۶۲ تعریف مساله بهینه سازی شکل	۴-۳
۶۲ توابع هدف	۴-۴
۶۳ تابع وزن و حجم کل	۴-۴-۱
۶۴ تابع انرژی کرنشی	۴-۴-۲
۶۴ تابع تنش یکنواخت	۴-۴-۳

۶۵ ۴-۴-۴- تابع تنش حداکثر
۶۶ ۴-۴-۵- تابع تمرکز تنش
۶۸ ۴-۵- توابع قید
۷۰ ۴-۵-۱- قیود حجم و وزن
۷۰ ۴-۵-۲- قیود تغییر مکان
۷۱ ۴-۵-۳- قیود تنشها
۷۲ ۴-۵-۴- قیود مربوط به نقاط کنترلی
۷۲ ۴-۶- متغیرهای طراحی
۷۲ ۴-۷- الگوریتم بهینه سازی
۷۵ ۸-۴- روش SQP
۷۸ فصل پنجم: بررسی مثال ها
۷۹ ۵-۱- مقدمه
۸۰ ۵-۱-۱- لوله بلند جدار ضخیم
۸۶ ۵-۱-۲- صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز
۹۳ ۵-۱-۳- صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در مرکز
۹۶ ۵-۱-۴- مخزن بزرگ آب
۱۰۰ فصل ششم: نتایج و پیشنهادات
۱۰۱ ۶-۱- مقدمه
۱۰۱ ۶-۲- نتایج
۱۰۳ ۶-۳- پیشنهادات
۱۰۴ مراجع

فهرست اشکال:

- شکل ۱-۱- پوسته های نازک حساسیت زیادی را نسبت به نقص های هندسی از خود نشان می دهند..... ۴
- شکل ۲-۱- کیفیت مش لایه های مرزی تأثیر مهمی در بهبود دقت نتایج دارد..... ۵
- شکل ۱-۲- منحنی بزییر درجه ۳..... ۱۰
- شکل ۲-۲- نمودار توابع پایه ای منحنی های بزییر..... ۱۱
- شکل ۳-۲- منحنی دارای چند جمله ای های قطعه ای درجه ۳..... ۱۳
- شکل ۴-۲- توابع پایه ای بی- اسپلاین از درجات ۰، ۱ و ۲..... ۱۴
- شکل ۵-۲- توابع پایه ای موثر برای محاسبه تابع $N_{1,3}$ ۱۵
- شکل ۶-۲- توابع پایه ای درجه ۳ موثر برای (ξ_3, ξ_4) ۱۶
- شکل ۷-۲- یک منحنی درجه ۳..... ۱۹
- شکل ۸-۲- نمونه یک سطح بی- اسپلاین. (الف) شبکه نقاط کنترلی؛ (ب) سطح مربوطه..... ۲۱
- شکل ۹-۲- شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز که در هر دو جهت از درجه ۲ می باشد..... ۲۵
- شکل ۱-۳- گسسته سازی دامنه در تحلیل ایزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی؛..... ۳۰
- شکل ۲-۳- زیردامنه نریز و المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای..... ۳۹
- شکل ۳-۳- تحلیل دو بعدی در حالت های تنش مسطح، کرنش مسطح و تقارن محوری..... ۴۲
- شکل ۴-۳- تنش ها و کرنش های ایجاد شده در مسائل تقارن محوری..... ۴۳
- شکل ۵-۳- نمونه از فایل ورودی برنامه IsoOptimizer..... ۵۲
- شکل ۱-۴- فرآیند کلی در بهینه سازی سازه ها..... ۵۸
- ۲-۴- محاسبه تنش مماسی σ_t از روی تنشهای عمومی برای مرز یک سازه..... ۶۶
- شکل ۱-۵- لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی..... ۸۰
- شکل ۲-۵- کانتور های تغییر مکان و تنش های ایجاد شده در جسم..... ۸۲

- شکل ۳-۵- نحوه قرار گیری نقاط کنترلی..... ۸۳
- شکل ۴-۵- کانتور های تغییر مکان و تنش های ایجاد شده در جسم مربوط به حل ایزوژئومتریکی..... ۸۳
- شکل ۵-۵- نمودار های نشان دهنده خطای تحلیل به صورت درصد خطا..... ۸۴
- شکل ۶-۵- مقایسه تغییر مکان ها و تنش های بدست آمده از حل دقیق و حل ایزوژئومتریکی..... ۸۵
- شکل ۷-۵- صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز..... ۸۶
- شکل ۸-۵- مدل اجزای محدود صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز..... ۸۷
- شکل ۹-۵- کانتور تغییر مکان های شعاعی برای صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز..... ۸۷
- شکل ۱۰-۵- کانتور تغییر مکان ها در جهت محور Zها برای صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز..... ۸۸
- شکل ۱۱-۵- کانتور تنش های شعاعی ایجاد شده در صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز..... ۸۸
- شکل ۱۲-۵- کانتور تنش های مماسی ایجاد شده در صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز..... ۸۹
- شکل ۱۳-۵- کانتور های تغییر مکان حل ایزوژئومتریکی..... ۹۰
- شکل ۱۴-۵- کانتور های تنش های ایجاد شده در جسم ناشی از حل ایزوژئومتریکی..... ۹۰
- شکل ۱۵-۵- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تغییر مکان های شعاعی..... ۹۱
- شکل ۱۶-۵- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تغییر مکان های در جهت Z..... ۹۱
- شکل ۱۷-۵- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تنش های شعاعی..... ۹۲
- شکل ۱۸-۵- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تنش

های مماسی. ۹۲

شکل ۵-۱۹- شکل اولیه صفحه دایره ای شکل، دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی. ۹۳

شکل ۵-۲۰- صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی و ارتفاع اولیه ۷. ۹۴

شکل ۵-۲۱- کانتور تغییر مکان عمودی صفحه دایره ای شکل برای طرح اولیه. ۹۵

شکل ۵-۲۲- طرح بهینه صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی. ۹۵

شکل ۵-۲۳- کانتور تغییر مکان های عمودی صفحه دایره ای شکل بهینه شده. ۹۵

شکل ۵-۲۴- طرح اولیه مخزن استوانه ای شکل. ۹۷

شکل ۵-۲۵- کانتورهای تغییر مکان. ۹۸

شکل ۵-۲۶- کانتور های تغییر مکان های شکل بهینه سازه. ۹۹

فصل اول

کلیات

۱-۱ - مقدمه

در این پایان نامه به معرفی روش جدیدی برای تحلیل مسائلی که معادلات حاکم بر آنها معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی است، خواهیم پرداخت. این روش دارای شباهت هایی با روش اجزای محدود می باشد، همچنین از جهاتی مشابه روش بدون مش^۱ است. اگرچه این روش بیشتر بر مبنای هندسه تحلیلی می باشد، و از روش های طراحی به کمک کامپیوتر (CAD^۲) الهام گرفته شده است. اولین هدف از بکار گیری این روش پاسخ به این سوال بود که، چگونه به وسیله گسسته سازی^۳ با چشمه های بزرگ باز هم به هندسه دقیق برسیم؟ هدف دیگر ساده سازی اصلاح مش ها^۴ به وسیله حذف نیاز به، ارتباط با هندسه CAD، هنگامی که مش اولیه ساخته شده است [۱].

۲-۱ - تاریخچه و روند شکل گیری

علاقه به تحلیل اجزای محدود در مهندسی در سال های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت.

۱- meshless method

۲- Computer Aided Design

۳- discretization

۴- mesh refinement

مهندسين هوا فضا در نقطه عطف فعاليت ها در طول اين دوره قرار داشتند. بعد از سال ۱۹۶۰ اولين برنامه هاي تجاري كامپيوتري (مانند Stardyne, NASTRAN, ASKA و ...) ظاهر شدند. به همين ترتيب روش اجزاي محدود در ديگر رشته هاي مهندسي و بقيه علوم گسترش پيدا كرد، بطوري كه در حال حاضر در گستره وسيعي از علوم و فنون از اين روش استفاده شده، و برنامه هاي كامپيوتري تجاري فراواني در دسترس مي باشد.

با وجود آنكه هندسه يكي از زير بناهاي تحليل مي باشد، طراحي به كمك كامپيوتر (CAD) بصورتی كه ما امروزه می شناسیم، در سال های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ معرفی و رشد پیدا کرد. شاید بتوان به اين سوال كه ، چرا شيوه معرفي هندسه در اجزاي محدود و CAD داراي تفاوت هاي زيادي با هم می باشند؟ اينگونه جواب داد كه، برنامه هاي اجزاي محدود از نظر تكنيكي مدت زمان زيادي قبل از اينكه روش هاي مدرن CAD رواج پيدا كنند، رشد و توسعه يافتند. اما در حال حاضر CAD نسبت به مهندسي به كمك كامپيوتري (CAE)^۱ صنعت بزرگتري محسوب مي شود. در حال حاضر محاسبه دقيق حجم صنايع CAD و CAE به دليل گستردگي کاربرد آنها مشكل مي باشد، اما كارشناسان آن را در حدود يك تا دو بيليون دلار براي CAE و ۵ تا ۱۰ بيليون دلار براي CAD تخمين مي زنند.

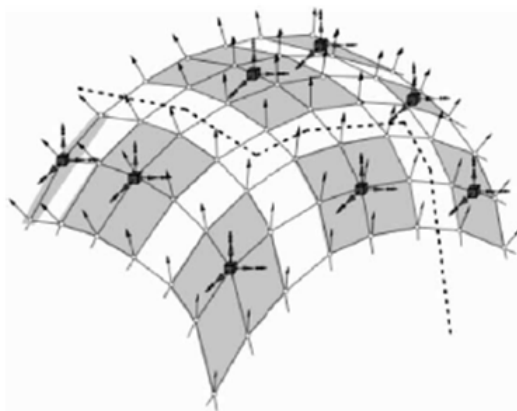
در يك عمليات مهندسي بطور خلاصه مي توان گفت كه طراحي ها در سيستم CAD هستند و المان از روي داده هاي CAD توليد مي شوند. اين عمل باعث ايجاد يك تعريف هندسي كاملاً متفاوت براي فضاي پارامتری تحليل می شود، كه در حقيقت فقط يك تقريب از هندسه واقعي می باشد.

در بعضی مسائل می توان تولید المان را بصورت خودكار انجام داد، اما در بيشتر مسائل در بهترين حالت فقط مي توان اين عمل را به صورت نيمه خودكار انجام داد. هنوز در صنايع بزرگ نقشه ها در CAD طراحي مي شوند و المان ها بر اساس آن توليد مي شوند؛ تخمين زده مي شود كه، حدوداً ۸۰٪ زمان تحليل مسائل در صنايعي مانند خودروسازي، هوافضا و كشتي سازي صرف توليد المان ها مي شود. در صنعت خودروسازي توليد المان براي تمام اجزاي يك اتومبيل حدود چهار ماه

۱- Computer Aided Engineering

طول می کشد، این در صورتی است که تغییرات در طراحی های روزانه صورت می گیرد، حال اگر نتوانیم در این مدت المان های جدید بر مبنای تغییرات طراحی را تولید کنیم، قادر به استفاده از مزایای تحلیل در طراحی نمی باشیم [۱].

هنگامی که شبکه المان ها ساخته شد بایستی که برای کاهش خطای تحلیل، شبکه المان ها اصلاح شود. که این عمل در هر تکرار خود احتیاج به برقراری ارتباط با سیستم CAD دارد، در صورتی که این ارتباط در اغلب موارد ناممکن می باشد؛ که این نشان می دهد که چرا حل تطبیقی^۱ بجای اینکه به یک فن آوری صنعتی تبدیل شود، هنوز در حد پروژه های دانشگاهی باقی مانده است.



شکل ۱-۱- پوسته های نازک حساسیت زیادی را نسبت به نقص های هندسی از خود نشان می دهند. هندسه دارای انحنای یک نمونه از قسمت هایی است که المان بندی اجزای محدود می تواند باعث ایجاد عیوب هندسی شود [۲].

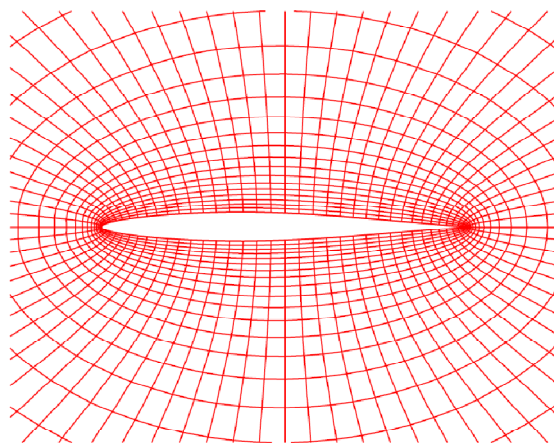
مقدار تقریب هندسی ذاتی در شبکه های المان، دقت تحلیل مسائل را مشخص می کند. به عنوان مثال در این زمینه می توان تحلیل پوسته های نازک را نام برد که بسیار به عیوب هندسی حساس هستند. (شکل ۱-۱) حساسیت به هندسه را، همچنین می توان در مسائل مکانیک سیالات مشاهده کرد.

ساختار هندسه در اجزای محدود، (که همان شبکه المان ها می باشد)، پرهزینه، زمان بر و همچنین باعث کاهش دقت در حل مسئله می شود. این مشکل باعث شده که، در مقیاس کوچک در

۱- adaptive refinement analysis

صنعت CAE تلاش های مفیدی در جهت تغییرات یا جایگزینی روش اجزای محدود با روش های دیگر که بیشتر شبیه به CAD باشد، صورت پذیرد. این تلاش ها باعث گسترش برنامه کامپیوتری به نام RASNA شد، که در آن از ترکیب هندسه دقیق مسئله، باحل تطبیقی P-refinement اجزای محدود استفاده شده بود.

اهمیت این نتایج به این دلیل است، که کمیت های محاسبه شده در روی مرزها، معمولاً در مهندسی کاربردی، مهمتر هستند، و مرزها نقاطی می باشند که، خطاهای هندسی در آنها مضرترین هستند. علاوه بر این در بیشتر تحلیل های اجزای محدود هنوز از المان های با مرتبه پایین استفاده می شود؛ که این باعث خطاهای هندسی بزرگی می شود [۱].



شکل ۱-۲- کیفیت مش لایه های مرزی تأثیر مهمی در بهبود دقت نتایج دارد.

موفقیت RASNA باعث می شود که، یک شرکت فعال در زمینه CAD کار آنها را ادامه دهد. آنها به دلیل ارتباط محکمی که با هندسه CAD در برنامه خود فراهم کرده بودند، و شاید مهمتر از آن توانایی انجام حل تطبیقی به روش P-refinement، توانستند به نتایج قابل اعتمادتری دست یابند. روش ایزوژئومتریک بطور مشابه الهام گرفته شده است؛ اما سعی شده بصورت دقیق تری از هندسه CAD استفاده شود؛ همچنین چند جمله ای های اجزای محدود، بطور کلی از روند محاسبه حذف شده اند.

در تحلیل به روش ایزوژئومتریك محاسبات بر مبنای استفاده از نربز (NURBS)^۱ - که یک فن آوری استاندارد برای سیستم های CAD می باشد- انجام می شود. ایده این روش اولین بار توسط هیوز^۲ و همکارانش در سال ۲۰۰۵ ارائه شد [۳]. آنها پیشنهاد کردند، که ابتدا هندسه دقیق به وسیله سطوح نربز ایجاد شود و سپس یک شبکه المان با چشمه های درشت توسط المان های نربز ساخته شود. به این ترتیب در اصلاح شبکه المان ها نیاز به ارتباط با سیستم CAD نمی باشد، و می توان به سادگی شبکه المان ها را اصلاح کرد به همین دلیل امکان گسترش هر چه بیشتر آن در صنعت وجود دارد [۱].

در روش حاضر از همان متغیرهایی که در تعریف هندسه مسئله استفاده شده است، برای تعریف هندسه مدل تحلیلی و همچنین تحلیل استفاده می شود، به همین دلیل، نام تحلیل ایزوژئومتریك توسط هیوز برای آن انتخاب شده است.

۱- Non-Uniform Rational B-Spline

۲- T.J.R. Hughes

فصل دوم:

معرفی منحنی ها و

NURBS سطوح

۱-۲ - فرم ضمنی و پارامتری [۴]

بطور کلی دو روش رایج برای نشان دادن منحنی ها و سطوح در هندسه تحلیلی، معادلات ضمنی و توابع پارامتری هستند. معادله ضمنی یک منحنی در صفحه xy . بصورت $f(x, y) = 0$ می باشد. این معادله نشان دهنده رابطه بین مختصه x و مختصه y یک نقطه روی منحنی است، که معادله ارائه شده برای منحنی در این فرم، منحصر به فرد می باشد. به عنوان مثال فرم ضمنی برای یک دایره به شعاع واحد در حالتی که مرکز آن در مبدا باشد بصورت $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ است.

در فرم پارامتری، هر مختصه نقاط روی منحنی بصورت منفرد و بوسیله یک تابع صریح از یک متغیر مستقل تعریف می شود.

$$C(\xi) = (x(\xi), y(\xi)) \quad a \leq \xi \leq b \quad (1 - 2)$$

بنابراین $C(\xi)$ یک مقدار برداری است، که تابعی از متغیر مستقل ξ می باشد. مقدار ξ در بازه بسته $[a, b]$ می باشد. که این بازه بصورت قراردادی انتخاب می شود و معمولاً آن را بصورت

نرمال شده $[0,1]$ ارائه می دهند.

برای یک ربع دایره با مشخصات حالت قبل می توان معادله پارامتری زیر را ارائه کرد:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \cos(\xi) \\ y(\xi) &= \sin(\xi) \end{aligned} \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} \quad (2-2)$$

اگر در معادله $(2-2)$ از تغییر متغیر $t = \tan(\frac{\xi}{2})$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3-2)$$

بنابراین همانطور که مشاهده می شود، معادلات یک منحنی در حالت پارامتری منحصر به فرد نمی باشد.

هر کدام از روش های فوق دارای مزایا و معایبی است و نمی توان یکی از آنها را به عنوان یک روش بهتر انتخاب کرد. دو مثال معروف در این زمینه بصورت زیر است:

۱- محاسبه یک نقطه روی یک منحنی یا روی یک سطح، که در حالت ضمنی مشکل می باشد.

۲- تعیین اینکه یک نقطه داده شده بر روی منحنی یا سطح قرار دارد، که در حالت پارامتری مشکل می باشد.

برای مدل کردن یک شکل در کامپیوتر استفاده از فرم پارامتری ساده تر می باشد.

۲-۲- منحنی های بزیئر^۱

یک منحنی بزیئر از درجه n بصورت زیر تعریف می شود:

۱- Bézier Curves

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) P_i \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4-2)$$

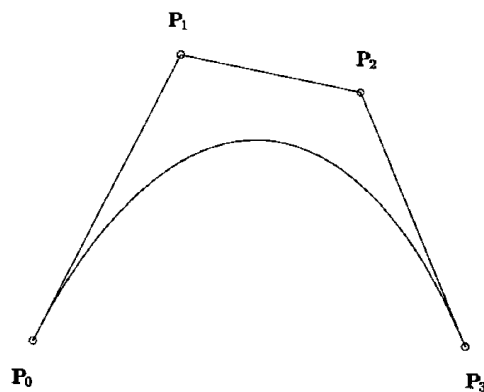
به $\{B_{i,n}(\xi)\}$ توابع پایه ای بزیر گفته می شود، که در حقیقت چند جمله ای های درجه n برنشتین هستند که بصورت زیر می باشند:

$$B_{i,n}(\xi) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \xi^i (1-\xi)^{n-i} \quad (5-2)$$

به نقاط $\{P_i\}$ نقاط کنترلی^۱ گفته می شود، ضمن اینکه همانطور که ملاحظه می شود ξ بایستی که در بازه $[0,1]$ قرار گیرد.

به عنوان مثال یک منحنی بزیر از درجه ۳ به صورت زیر می باشد:

$$C(\xi) = (1-\xi)^3 P_0 + 3\xi(1-\xi)^2 P_1 + 3\xi^2(1-\xi) P_2 + \xi^3 P_3$$



شکل ۱-۲- منحنی بزیر درجه ۳

از مهمترین ویژگی های منحنی بزیر می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- چند ضلعی کنترلی^۲ (چند ضلعی که از به هم متصل کردن نقاط کنترلی ایجاد می شود). می تواند شکل منحنی را تخمین بزند.

- نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی روی منحنی قرار دارند ($P_0 = C(0)$ و $P_3 = C(1)$)

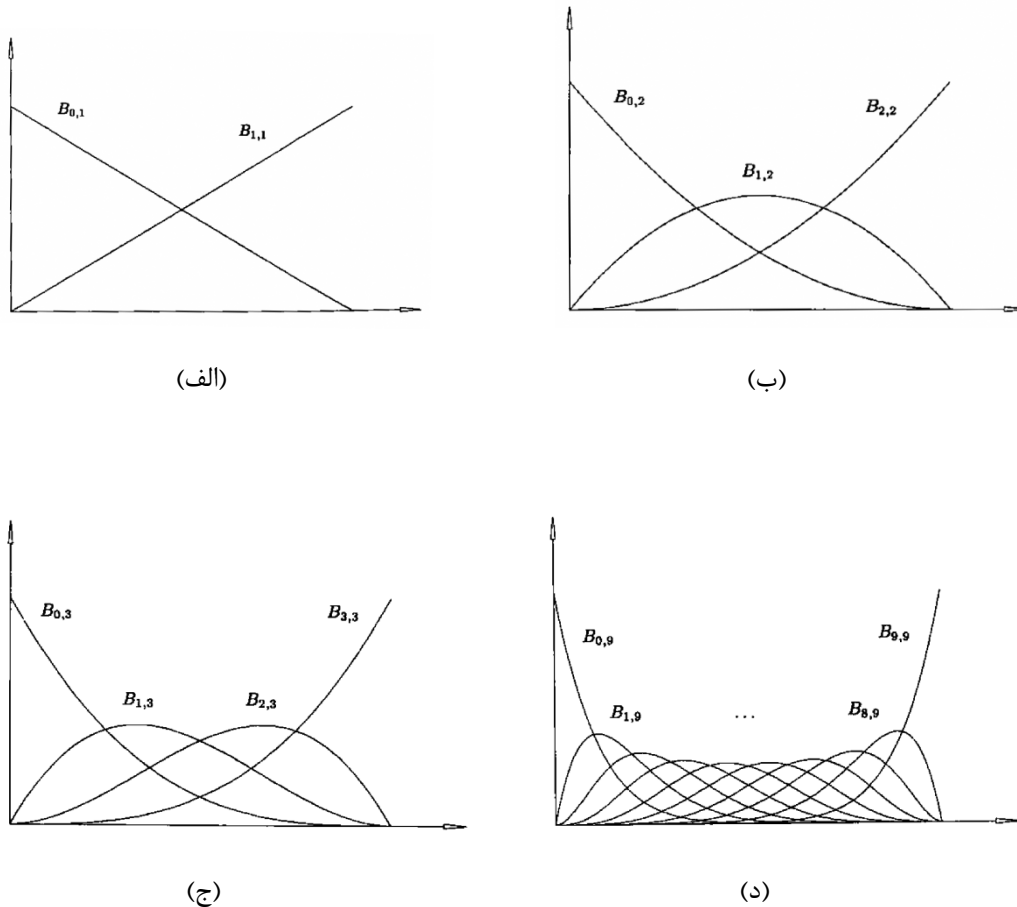
- شیب منحنی در نقاط انتهایی موازی با شیب خط اتصال نقاط کنترلی می باشد. ($P_3 - P_2$)

۱- control points

۲- control polygon

$$(P_1 - P_0)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد برای معرفی یک منحنی (یا سطح) در معادلات بزیر احتیاج به توابع پایه ای می باشد. که این توابع نشان دهنده خصوصیات هندسی می باشند در شکل ۲-۲ توابع پایه ای $\{B_{i,n}(\xi)\}$ برای $n = 1, 2, 3, 9$ نشان داده شده است.



شکل ۲-۲- نمودار توابع پایه ای منحنی های بزیر (چند جمله ای برنشتین) الف $n=1$ و ب $n=2$ و ج $n=3$ و د $n=9$

این توابع دارای خواص زیر می باشند:

۱- منفی نبودن: برای هر $0 \leq \xi \leq 1, n, i$ آنگاه داریم: $B_{i,n}(\xi) \geq 0$

۲- برای هر $\xi \in [0, 1]$ داریم: $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) = 1$

۳- $B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$

۴- هر تابع پایه ای $B_{i,n}(\xi)$ در بازه $[0, 1]$ دقیقاً دارای یک ماکزیمم در $\xi = \frac{i}{n}$ می باشد.

۵- تقارن: به ازای هر n ، مجموعه چند جمله ای های $\{B_{i,n}(\xi)\}$ نسبت به $\xi = \frac{1}{2}$ دارای

تقارن می باشد.

۶- تعریف بازگشتی^۱:

$$B_{i,n}(\xi) = (1-\xi)B_{i,n-1}(\xi) + \xi B_{i-1,n-1}(\xi) \quad (۲-۶)$$

که در آن اگر $i > n$ و $i < 0$ باشد آنگاه $B_{i,n}(\xi) \equiv 0$

۷- مشتق تابع پایه ای بزیر بصورت زیر تعریف می شود:

$$B'_{i,n}(\xi) = \frac{dB_{i,n}(\xi)}{d\xi} = n(B_{i-1,n-1}(\xi) - B_{i,n-1}(\xi)) \quad (۲-۷)$$

باید توجه کرد که در فرمول (۲-۷) $B_{-1,n-1}(\xi) \equiv B_{n,n-1}(\xi) \equiv 0$ می باشد.

۲-۳- منحنی ها و سطوح بی-اسپلاین^۲

همانطور که ملاحظه شد منحنی هایی که فقط دارای یک چند جمله ای می باشند، (مانند منحنی های بزیر) می توانند در اغلب موارد به کار برده شوند. اما این منحنی ها دارای معایبی از جمله موارد زیر می باشند:

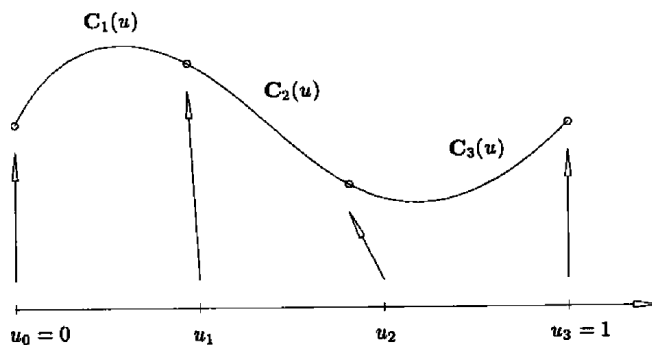
- هنگامی که قصد داریم به تعداد زیادی نقطه منحنی را برازش دهیم، مجبور به استفاده از چند جمله ای هایی با درجات بالا می شویم، به عنوان مثال برای برازش یک منحنی بزیر به n نقطه نیاز به چند جمله ای از درجه $(n-1)$ داریم. که استفاده از درجات بالا باعث افزایش حجم محاسبات و همچنین ناپایداری های عددی می شود.
- برای ایجاد اشکال پیچیده باز هم نیاز به چند جمله ای هایی از درجات بالا وجود دارد.
- در طراحی اشکال مختلف برای تغییر در قسمتی از منحنی، بایستی علاوه بر نقاط کنترلی

۱ - recursive definition

۲ - B-Spline

آن قسمت، بسیاری از نقاط کنترلی دیگر را هم اصلاح کرد. به عبارت دیگر قابلیت کنترل محلی^۱ روی منحنی بسیار کم می باشد.

برای حل این مشکلات از منحنی هایی با چند جمله ای های قطعه ای استفاده می کنیم. در شکل ۲-۳ منحنی $C(\xi)$ که دارای $m (= 3)$ قطعه چند جمله ای درجه n می باشد، نشان داده شده است، که $C(\xi)$ در بازه $\xi \in [0, 1]$ تعریف شده است.



شکل ۲-۳ - منحنی دارای چند جمله ای های قطعه ای درجه ۳ که دارای سه قسمت می باشد.

یک منحنی بی-اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n f_i(\xi) P_i \quad \xi \in [0, 1] \quad (2-18)$$

که در آن P_i نقاط کنترلی و $\{f_i(\xi), i = 0, \dots, n\}$ توابع چند جمله ای قطعه ای^۲ (توابع پایه ای با درجه و پیوستگی مناسب) می باشند. لازم به ذکر است که پیوستگی منحنی بوسیله توابع پایه ای تعیین می شوند، از این رو می توان بدون اینکه پیوستگی منحنی تغییر کند می توان نقاط کنترلی را اصلاح کرد.

۲-۳-۱- تعریف و خواص توابع پایه ای بی-اسپلاین^۳

$\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ مجموعه ای متوالی و غیر نزولی از اعداد حقیقی می باشد، یعنی در آن به

۱ - Local support property

۲ - piecewise polynomial functions

۳ - B-Spline Basis function

ازای $i = 0, \dots, m-1$ داریم $\xi_{i+1} \geq \xi_i$. به ξ_i گره ۱ و به مجموعه Ξ بردار گره ای ۲ گفته می شود. در این صورت آمین تابع پایه ای بی اسپلاین از درجه p (مرتبه $p+1$) که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می شود بصورت زیر تعریف می شود:

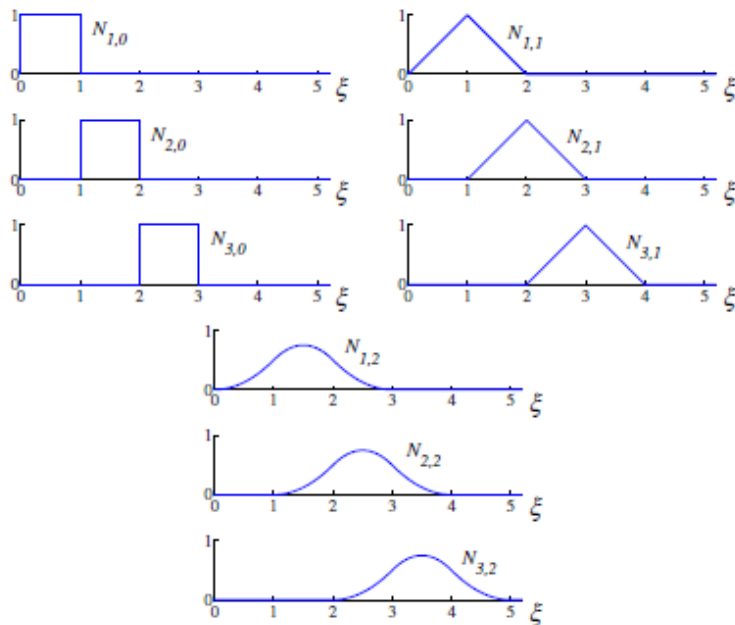
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۹-۲)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

- $N_{i,0}(\xi)$ تابعی تکه ای می باشد، بطوری که در همه نقاط برابر صفر است بجز در بازه نیمه باز $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

- برای $p > 0$ ، تابع $N_{i,p}(\xi)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه ای با درجه $p-1$ می باشد.

- به بازه نیمه باز $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ آمین دهانه گره ای ۳ گفته می شود، که می تواند طول آنها صفر باشد، زیرا استفاده از گره های تکراری در بردار گره ای مجاز می باشد.

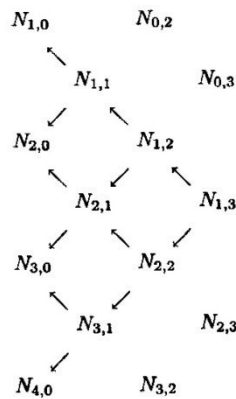


شکل ۲-۴- توابع پایه ای بی-اسپلاین از درجات ۰، ۱ و ۲

- ۱ - knot
- ۲ - knot vector
- ۳ - knot span

برخی از خواص مهم توابع پایه ای بی- اسپلاین که در واقع تعیین کننده خصوصیات منحنی ها و سطوح بی- اسپلاین می باشند در زیر آورده شده است. در اینجا p درجه تابع و $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ بردار گره ای می باشد.

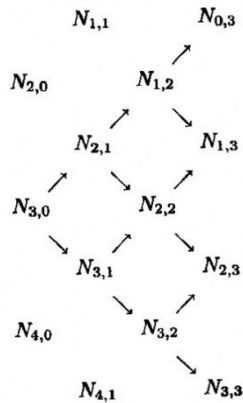
۱- اگر ξ خارج از بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$ باشد آنگاه $N_{i,p}(\xi)$ صفر است. (این نکته باعث وجود ویژگی کنترل محلی می شود) این ویژگی در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود، ترکیبی از توابع $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}$ و $N_{4,0}$ می باشد، بنابراین $N_{1,3}$ در بازه $[\xi_1, \xi_5)$ غیر صفر می باشد.



شکل ۲-۵- توابع پایه ای موثر برای محاسبه تابع $N_{1,3}$

۲- برای دهانه گره مثل $[\xi_j, \xi_{j+1})$ ، حداکثر $(p+1)$ تابع پایه ای $N_{i,p}$ غیر صفر وجود دارد، که شامل توابع $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$ می باشد. این ویژگی در شکل ۲-۶ نشان داده شده است؛ به عنوان مثال برای بازه $[\xi_3, \xi_4)$ ، از توابع درجه صفر، فقط تابع درجه صفر $N_{i,0}$ غیر صفر می باشد، بنابراین توابع درجه ۳ غیر صفر روی بازه $[\xi_3, \xi_4)$ شامل توابع $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$ می باشد.

۳- برای همه مقادیر i, p, ξ ها مقدار تابع پایه ای $N_{i,p}(\xi)$ نامنفی است.



شکل ۲-۶- توابع پایه ای درجه ۳ موثر برای (ξ_3, ξ_4)

۴- برای هر دهانه گره مانند $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ داریم: $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(\xi) = 1$ به ازای $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$

۵- همه مشتقات $N_{i,p}(\xi)$ در داخل دهانه های گره ای موجود است. و اگر تعداد تکرار هر گره را با k نشان دهیم $N_{i,p}(\xi)$ در هر گره $p - k$ بار مشتق پذیر و پیوسته می باشد. بنابراین افزایش درجه تابع باعث افزایش پیوستگی، و افزایش تعداد گره های تکراری باعث کاهش پیوستگی می شود.

۶- بجز در حالت $p = 0$ ، تابع $N_{i,p}(\xi)$ دقیقاً دارای یک ماکزیمم می باشد.

لازم به ذکر است که تعداد گره های تکراری برای محاسبه پیوستگی تابع $N_{i,p}$ ، فقط در بازه $[\xi_{i-p}, \xi_i]$ محاسبه می شود.

۲-۳- مشتق توابع پایه ای بی- اسپلاین

مشتق اول توابع پایه از رابطه زیر بدست می آید:

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2-10)$$

در حالت کلی مشتق مرتبه k ، $N_{i,p}(\xi)$ بصورت زیر است:

$$N_{i,p}^{(k)}(\xi) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right) \quad (2-11)$$

که در آن مقدار k نبایستی از p بیشتر شود (مقدار مشتق مراتب بالاتر صفر می باشد). در حالتی که در مخرج کسرها که تفاضل دو گره می باشد صفر ایجاد شود، مقدار آن کسر برابر صفر در نظر گرفته می شود.

همچنین می توان مشتق مرتبه k توابع پایه ای بی-اسپلین را بصورت زیر نیز محاسبه کرد. این رابطه مشتق مرتبه k ام این توابع را بر حسب مشتق مرتبه k ام توابع مرتبه پایین تر آنها ارائه می کند.

$$N_{i,p}^{(k)}(\xi) = \frac{p}{p-k} \left(\frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^{(k)}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{(k)}(\xi) \right) \quad (12-2)$$

$$k = 0, \dots, p-1$$

۳-۳-۲- دیگر ویژگی های توابع پایه ای بی-اسپلین

در صورتی که p درجه توابع پایه ای بی-اسپلین ثابت باشد، فقط بردار گره ای تعیین کننده مقدار تابع $N_{i,p}(\xi)$ می باشد. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد ولی در این پایان نامه فقط از نوع خاصی از بردارهای گره ای بنام بردارهای گره ای نامتناوب^۱ (یا باز^۲) استفاده می کنیم. این نوع بردارها به فرم زیر نشان داده می شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a_1, \dots, a_p}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b_1, \dots, b_p}_{p+1} \right\} \quad (13-2)$$

همانطور که ملاحظه می شود در بردارهای گره ای نامتناوب گره های ابتدا و انتهای بردار $p+1$ مرتبه تکرار می شوند. با توجه به تعریف بردارهای گره ای نامتناوب برای آنها می توان دو نکته زیر را ذکر کرد:

۱- استفاده از بردار گره ای به فرم $\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$ منتج به چند جمله ای های برنشتین

۱- nonperiodic knot vector

۲- open

از درجه p می گردد. در واقع توابع پایه ای برنشتین حالت خاصی از توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند.

۲- اگر $m+1$ تعداد گره ها، $n+1$ تعداد توابع پایه ای و p درجه توابع باشد؛ آنگاه رابطه $n = m - p - 1$ بین آنها برقرار است، همچنین $N_{n,p}(b) = 1, N_{0,p}(a) = 1$ می باشد.

۲-۳-۴- تعریف منحنی های بی-اسپلاین

در این قسمت به معرفی منحنی ها و سطوح بی-اسپلاین و برخی از ویژگی های آنها پرداخته و سپس مشتق آنها را معرفی خواهیم کرد.

منحنی بی-اسپلاین از درجه p بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (2-14)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی است، و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین می باشد، که روی بردار گره ای نامتناوبی بصورت زیر تعریف شده است:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2-15)$$

بردار گره ای فوق دارای $m+1$ گره است. معمولاً فرض می شود که $a=0$ و $b=1$ می باشد. به چند ضلعی که از متصل کردن نقاط کنترلی به هم ایجاد می شود، چند ضلعی کنترلی گفته می شود.

برخی از ویژگی های منحنی های بی-اسپلاین عبارتند از:

۱- اگر $n=p$ و $\Xi = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ باشد، آنگاه منحنی بی-اسپلاین تبدیل به یک منحنی بزیر می شود.

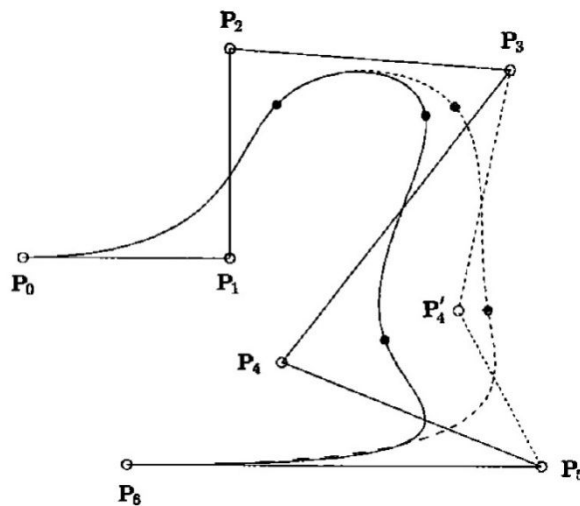
۲- $C(\xi)$ یک منحنی چند جمله ای قطعه ای^۱ می باشد؛ اگر p درجه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره ها باشند آنگاه رابطه $m = n + p + 1$ را می توان برای آنها نوشت.

۳- نقاط کنترلی ابتدا و انتها دقیقاً روی منحنی قرار دارند، یعنی: $C(0) = P_0$ و $C(1) = P_n$

۴- برای اعمال یک نگاهت بر روی منحنی فقط کافی است این نگاهت را بر نقاط کنترلی منحنی اعمال کنیم.

۵- تمام نقاط منحنی در داخل چند ضلعی کنترلی محذب ایجاد شده به وسیله نقاط کنترلی قرار می گیرد.

۶- منحنی های بی- اسپلاین دارای قابلیت اصلاح محلی (ناحیه ای) می باشند، بدین مفهوم که اگر P_i را تغییر دهیم منحنی $C(\xi)$ فقط در ناحیه ای داخل بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ تغییر می کند. زیرا به ازای $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ ، $N_{i,p}(\xi) = 0$ می باشد (شکل ۲-۷).



شکل ۲-۷- یک منحنی درجه ۳ بر روی بردار گره ای $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ تعریف شده است، با تغییر نقطه کنترلی P_4 به P_4' فقط قسمتهایی از منحنی که داخل بازه $[1/4, 1]$ قرار دارند تغییر می کنند.

۷- پیوستگی و مشتق پذیری منحنی $C(\xi)$ مانند توابع پایه ای $N_{i,p}(\xi) = 0$ می باشد، بنابراین در نقاط بین گره ها بطور نامحدود پیوسته و مشتق پذیر است و در روی نقاط

^۱- piecewise polynomial curve

گره ای $p - k$ مرتبه مشتق پذیر و پیوسته می باشد. که در آن k تعداد تکرار گره مورد نظر می باشد.

مشتق مرتبه k ام منحنی های بی- اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود، که برای یک ξ ثابت بر اساس مشتق مرتبه k ام توابع پایه ای آن محاسبه می شود.

$$C^{(k)}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(\xi) P_i \quad (2-16)$$

اگر در بردار گره ای Ξ گره ابتدا و انتهای آن را حذف کنیم می توان Ξ' را به صورت زیر تعریف کرد، که دارای $(m-1)$ گره می باشد.

$$\Xi' = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p \right\} \quad (2-17)$$

از تعریف فوق می توان نتیجه گرفت که $N_{i+1,p-1}(\xi)$ روی بردار گره ای Ξ برابر با $N_{i,p-1}$ روی بردار گره ای Ξ' می باشد. بنابراین برای مشتق مرتبه اول منحنی $C(\xi)$ می توان تعریف زیر را ارائه کرد:

$$C'(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p-1}(\xi) Q_i \quad (2-18)$$

که در آن $Q_i = p \frac{P_{i+1} - P_i}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}}$ و $N_{i,p-1}(\xi)$ روی بردار گره ای Ξ' محاسبه شده است،

بنابراین $C'(\xi)$ یک منحنی بی- اسپلاین از درجه $(p-1)$ می باشد.

با تعمیم روابط (2-18) و استفاده از رابطه بازگشتی توابع پایه ای (معادله (2-9)) و با

تعریف $P_i^{(0)} = P_i$ می توان مشتقات مرتبه بالاتر را نیز محاسبه کرد.

$$C^{(k)}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(\xi) P_i^{(k)} \quad (2-19)$$

که در آن:

$$\mathbf{P}_i^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{P}_i & k = 0 \\ \frac{p-k+1}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} (\mathbf{P}_{i+1}^{(k-1)} - \mathbf{P}_i^{(k-1)}) & k > 0 \end{cases}$$

$$\Xi^{(k)} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p-k+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-k+1} \right\}$$

و

۲-۳-۵- تعریف سطوح بی- اسپلاین

سطوح بی- اسپلاین تشکیل شده است از شبکه نقاط کنترلی^۱ که در دو جهت قرار گرفته اند،

دو بردار گره ای و حاصل ضرب توابع پایه ای بی- اسپلاین که بصورت زیر تعریف می شود:

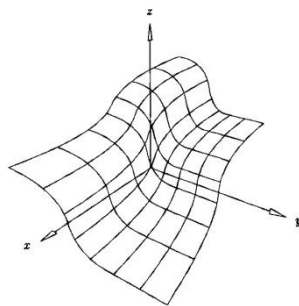
$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (2-20)$$

که در آن:

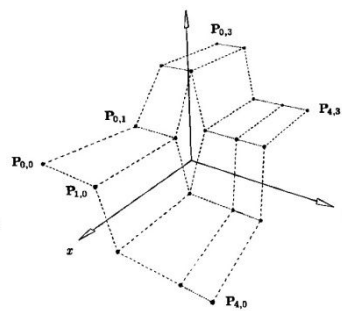
$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

بطوری که بردار گره ای Ξ دارای $r+1$ گره و \mathcal{H} دارای $s+1$ گره می باشد.



(ب)



(الف)

شکل ۲-۸- نمونه یک سطح بی- اسپلاین. (الف) شبکه نقاط کنترلی؛ (ب) سطح مربوطه.

^۱- control net

۲-۳-۶- مشتق سطوح بی- اسپلاین

مشتق سطوح بی- اسپلاین در سوی ξ ($S_\xi(\xi, \eta)$) و سوی η ($S_\eta(\xi, \eta)$) را می توان

بصورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} S(\xi, \eta) = S_\xi(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m N_{i,p-1}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j}^{(1,0)} \quad (21-2)$$

که در آن:

$$P_{i,j}^{(1,0)} = p \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}}$$

$$\Xi^{(0)} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p \right\}$$

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}$$

همچنین بطور مشابه داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} S(\xi, \eta) = S_\eta(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} N_{i,p}(\xi) N_{j,q-1}(\eta) P_{i,j}^{(0,1)} \quad (22-2)$$

که در آن:

$$P_{i,j}^{(0,1)} = q \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\eta_{j+q+1} - \eta_{j+1}}$$

$$\Xi^{(0)} = \Xi$$

$$\mathcal{H}^{(0)} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_q, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_q \right\}$$

در حالت کلی می توان مشتق سطوح بی- اسپلاین را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial \xi^k \partial \eta^l} S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{m-l} N_{i,p-k}(\xi) N_{j,q-l}(\eta) P_{i,j}^{(k,l)} \quad (23-2)$$

که در آن:

$$P_{i,j}^{(k,l)} = (q-l+1) \frac{P_{i,j+1}^{(k,l-1)} - P_{i,j}^{(k,l-1)}}{\eta_{j+q+1} - \eta_{j+1}}$$

۴-۲ - منحنی و سطوح نربز^۱

۴-۲-۱ - معرفی منحنی های نربز

یک منحنی نربز از درجه p بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (2-24)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره ای نامتناوب زیر تعریف شده اند.

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}$$

و با فرض اینکه $a=0$ و $b=1$ و به ازای تمام آنها، $w_i > 0$ باشد، می توان رابطه (۲-۲۴)

را بصورت زیر نوشت:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p} P_i \quad (2-25)$$

که در معادله (۲-۲۵) داریم:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (2-26)$$

که $\{R_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای نسبی هستند، که در حقیقت یک تابع کسری قطعه ای می باشند.

مشق مرتبه k منحنی نربز را می توان بصورت زیر تعریف کرد:

^۱- NURBS (NonUniform Rational B-Spline)

$$C^{(k)}(\xi) = \frac{A^{(k)}(\xi) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(\xi) C^{(k-i)}(\xi)}{w(\xi)} \quad (27-2)$$

که در آن:

$$A^{(k)}(\xi) = w(\xi) C^{(k)}(\xi) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^i(\xi) C^{(k-i)}(\xi)$$

۲-۴-۲- معرفی سطوح نریز

یک سطح نریز که در جهت ξ از درجه p ، و در جهت η از درجه q باشد، را می توان به

وسیله توابع کسری قطعه ای بصورت زیر تعریف کرد:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (28-2)$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می باشد که در دو جهت تعریف شده است؛

همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن ها، $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند که بر روی

بردار های گره ای زیر تعریف شده اند.

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

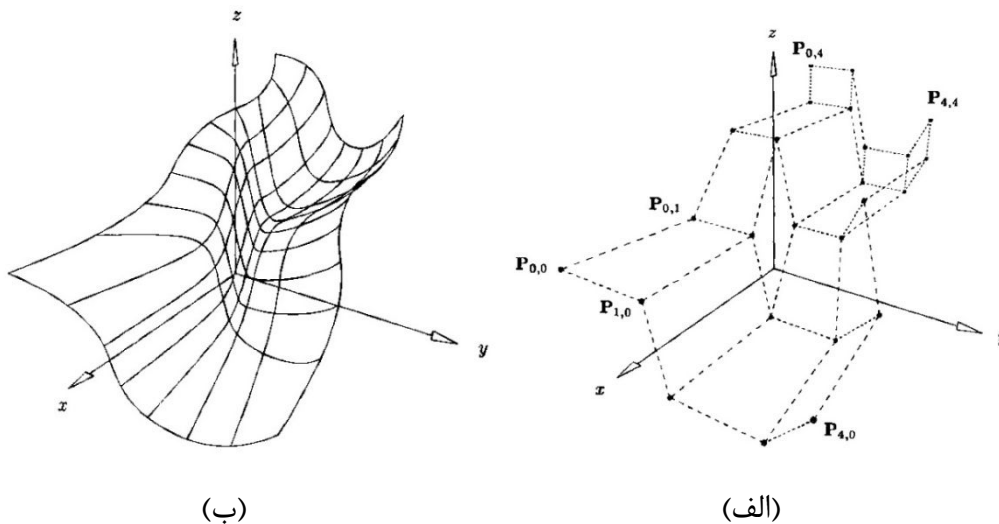
که در روابط فوق همچنان تساویهای $s = m + q + 1$ و $r = n + p + 1$ برقرار می باشد.

در روابط (۲۸ - ۲) اگر توابع پایه ای نسبی قطعه ای را بصورت

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (29-2)$$

تعریف کنیم؛ خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (2-30)$$



شکل ۲-۹- شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز که در هر دو جهت از درجه ۲ می باشد.

(الف) شبکه نقاط کنترلی؛ (ب) سطح نربز.

۲-۴-۳- مشتق سطوح نربز [۵]:

مشتق سطوح نربز به وسیله یک مشتق گیری معمولی از رابطه (۲ - ۲۸) بدست می آید. که

نتیجه آن بصورت زیر است:

$$S_{\xi} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{\xi}}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}} \right) \quad (2-31)$$

$$S_{\eta} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{\eta}}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}} \right)$$

که در آن \bar{N} و \bar{D} به ترتیب عبارات صورت و مخرج رابطه (۲ - ۲۸) می باشند؛ که مشتق

آنها به صورت زیر است:

$$\bar{N}_\xi = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}$$

$$\bar{N}_\eta = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}$$

(۳۲ - ۲)

$$\bar{D}_\xi = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}$$

$$\bar{D}_\eta = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j}$$

فصل سوم:

تحليل ايزوژنومتريك

۱-۳ - مقدمه

همانطور که در فصل اول اشاره شد، مفهوم تحلیل ایزوژئومتریکی برگرفته از، روش های هندسه کامپیوتری، اجزای محدود و روش نقاط محدود می باشد. در این فصل قصد داریم، به معرفی فرمول بندی روش تحلیل ایزوژئومتریکی بپردازیم. برای این منظور همانند اجزای محدود می توان از طریق کاربردهای فیزیکی ویژه، یا بصورت یک مفهوم ریاضی عام به معرفی روش پرداخت، در اینجا روش اول را اختیار می کنیم و بدین ترتیب بررسی خود را به مجموعه ای از مسائل مربوط به مکانیک سازه ها محدود می کنیم.

در بسیاری از مسائل مهندسی پیدا کردن توزیع تنش و کرنش، در محیط های پیوسته کشسان مورد نظر است. بنابراین در اینجا به بررسی موضوع در قالب یک مثال بسیار ساده تحلیل تنش مسطح^۱ در یک برش نازک می پردازیم.

۱- Plane stress

۲-۳- فرمول بندی تحلیل ایزوژئومتری

۱-۲-۳- محیط پیوسته کشسان

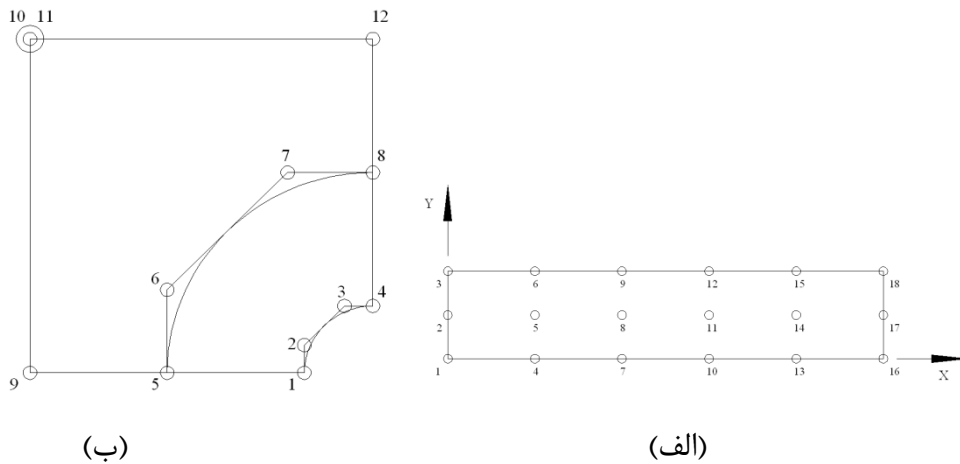
برای مدل کردن یک منحنی یا سطح در نربز معمولاً نیاز داریم، که کل دامنه منحنی یا سطح مورد نظر را، به چند زیردامنه^۱ تقسیم کنیم. و هر زیردامنه را بصورت جداگانه به وسیله نربز، مدل کنیم. در فصل مشترک زیردامنه ها بایستی پیوستگی لازم، بسته به شکل مدل برقرار باشد. به همین دلیل ابتدا فرمول بندی ایزوژئومتری برای زیردامنه ها محاسبه کرده و سپس بایستی آنها را با هم اسمبل کنیم.

به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در ایزوژئومتری ابتدا باید آن محیط را به یک محیط گسسته تبدیل کرد، این عمل در ایزوژئومتری با استفاده از مفهوم سطوح در نربز صورت می گیرد. همانطور که در فصل دوم اشاره شد، یک صفحه در محیط نربز تشکیل شده است از یکسری توابع پایه ای، نقاط کنترلی و بردارهای گره ای. بطوری که نقاط کنترلی، تشکیل دهنده شبکه ای از نقاط هستند؛ و هر نقطه که در روی رویه نربز واقع شده باشد، به وسیله درونیابی بین نقاط کنترلی، با استفاده از توابع پایه ای نربز مشخص می شود. در حقیقت می توان یک رویه نربز را در صورت معلوم بودن بردارهای گره ای، با مشخص نمودن نقاط کنترلی آن تعریف کرد. از این مفهوم می توان بطور همزمان، هم در تعریف هندسه مسئله و هم در تعریف فضای پارامتری مورد نیاز تحلیل مسئله استفاده کرد.

برای گسسته سازی یک محیط پیوسته در تحلیل ایزوژئومتری از نقاط کنترلی نربز استفاده می گردد. همانطور که اشاره شد بر خلاف روش های کلاسیک اجزای محدود، که برای تعریف هندسه و فضای پارامتری تحلیل از دو محیط متفاوت استفاده می کنند، در روش ایزوژئومتری تعریف هندسه و فضای پارامتری مورد نیاز تحلیل هر دو در محیط نربز صورت می گیرد. که این نکته یکی از

۱- Patch

مزایای مهم این روش نسبت به اجزای محدود می باشد.



شکل ۳-۱- گسسته سازی دامنه در تحلیل ایزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی؛

(الف) تیر طره؛ (ب) صفحه سوراخ دار.

بطور کلی در روش ایزوژئومتریک مقدار مجهول مسئله (به عنوان مثال تغییر مکان)، در نقاط کنترلی نریز محاسبه می شود؛ و سپس به وسیله توابع پایه ای نریز در بقیه نقاط تقریب زده می شود. حال اگر نقاط کنترلی را طوری انتخاب کنیم که، مولفه های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y) ، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند، و همچنین مولفه سوم مختصات این نقاط (P_z) را طوری محاسبه کنیم، که درونیایی بین این نقاط به وسیله توابع پایه ای نریز نشان دهنده، تغییر مکان آن نقطه باشد؛ در حقیقت می توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه $x\gamma$ نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (z) نسبت به صفحه $x\gamma$ نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد.

تابع تغییر مکان: هر زیر دامنه^۱ دارای تعدادی نقاط کنترلی $\{P_{i,j}\}$ می باشد. فرض کنیم تغییر

مکان در هر نقطه داخل زیر دامنه به صورت یک بردار ستونی \hat{u} تقریب زده شود:

^۱- Patch

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_i \sum_j R_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} \quad (1-3)$$

به عنوان مثال در حالت دو بعدی داریم:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

$\mathbf{P}_{i,j}$ ها نمایشگر بردار مولفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نرَبز می باشند، که خود دارای دو مولفه می باشد یکی برای تغییر مکان در جهت u و دیگری برای تغییر مکان در جهت v .

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{Bmatrix} P_{u i,j} \\ P_{v i,j} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

و همچنین $R_{i,j}$ توابعی معلوم از مکان می باشند؛ و به وسیله آنها می توان تغییر مکان در هر نقطه دلخواه داخل زیر دامنه را از روی تغییر مکان نقاط کنترلی درونیابی کرد. این توابع عملکردی مانند توابع شکل در اجزای محدود دارند.

همانطور که قبلاً اشاره شد توابع $R_{i,j}$ همان توابع پایه ای نرَبز می باشند؛ و مطابق آنچه در مورد این توابع در فصل دوم ذکر شد این توابع معمولاً در دستگاه مختصات نرمالی مانند $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ محاسبه می شوند. حال اگر برای هر زیر دامنه یک دستگاه مختصات نرمال محلی در نظر گرفته شود می توان محاسبات را بطور ساده تری در این دستگاه مختصات انجام داد.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j} \mathbf{P}_{u i,j} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j} \mathbf{P}_{v i,j} \end{Bmatrix} \quad (4-3)$$

توابع پایه ای بکار رفته در معادله (۳-۴) همانطور که در فصل دوم ذکر شد دارای ویژگی های زیادی می باشند که می توان از آنها برای ساده تر شدن محاسبات استفاده کرد یکی از این ویژگی ها که در بخش ۲-۳-۱- و شکل ۲-۶ بدان اشاره شد؛ نشان می دهد که برای هر ξ, η فقط تعداد

محدودی از این توابع غیر صفر می باشند، بطوری که اگر فرض کنیم ξ, η به ترتیب در دهانه های گره ای \bar{u} و \bar{v} قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1})$)، و درجه توابع پایه ای در جهت بردار گره ای \bar{u} ، p و در جهت بردار گره ای \bar{v} ، q باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه ای غیر صفر وجود خواهد داشت.

بنابراین می توان معادله (۳ - ۴) را به معادله زیر کاهش داد:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{cases} = \begin{cases} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l} \mathbf{P}_{u,k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l} \mathbf{P}_{v,k,l} \end{cases} \quad (۳ - ۵)$$

همچنین می توان معادله (۳ - ۵) را به فرم ماتریسی زیر نوشت [۶]:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (۳ - ۶)$$

که در آن $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان های نقاط کنترلی به فرم زیر است:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T \quad (۳ - ۷)$$

و $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه ای نسبی نرَبز به فرم زیر است:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (۳ - ۸)$$

همچنین $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی زیر می باشد:

$$\bar{\mathbf{P}} = [P_{u,i-p,j-q} \quad P_{v,i-p,j-q} \quad \dots \quad P_{u,i-p,j} \quad P_{v,i-p,j} \quad \dots \quad P_{u,i,j} \quad P_{v,i,j}]^T \quad (۳ - ۹)$$

کرنش ها: با معلوم بودن تغییر مکان در نقاط داخل هر زیر دامنه می توان کرنش ها را در هر

نقطه دلخواه بدست آورد؛ این فرآیند همواره منجر به رابطه ای می شود که می توان آن را به فرم

ماتریسی زیر نوشت [۷]:

$$\varepsilon = Lu \quad (3 - 10)$$

که در آن u بردار تغییر مکان ها، ε کرنش، و L عملگر دیفرانسیل می باشد؛ که برای مسائل دو بعدی بصورت زیر تعریف می شود:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3 - 11)$$

با استفاده از معادله (3 - 6) می توان کرنش را بصورت زیر تقریب زد:

$$\varepsilon = B\bar{P} \quad (3 - 12)$$

که در آن $B = L\bar{R}$ می باشد.

تنش ها: در حالت کلی ممکن است ماده داخل هر زیر دامنه تحت تاثیر کرنش های اولیه، برای مثال کرنش های حاصل از تغییرات دما، انقباض، رشد کریستالی و غیره، قرار داشته باشد. اگر این کرنش ها با ε_0 نشان داده شود، تنش ها در جسم، ناشی از تفاوت بین کرنش های موجود و کرنش های اولیه خواهد بود.

علاوه بر این بهتر است چنین فرض شود که جسم مورد نظر، از ابتدا تحت تاثیر مجموعه ای از تنش های اولیه باقیمانده، σ_0 معلوم، قرار گرفته، که پیش بینی آنها بدون اطلاع کامل از تاریخچه ماده مورد نظر ناممکن است. این تنش ها را می توان به آسانی به تنش های دیگر افزود. بنابراین، با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطه بین تنش ها و کرنش ها خطی و بصورت زیر خواهد بود:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (3 - 13)$$

که در آن D ماتریس کشسانی و نمایشگر خواص ماده مورد نظر است:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

در مسائل تنش مسطح، تنش نیز نظیر کرنش ها تعریف شده و دارای سه مؤلفه است:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-15)$$

یکی از روش هایی که در اجزای محدود برای هم ارزشسازی استاتیکی نیروهای گره ای با تنش های مرزی و بارهای گسترده و نهایتاً محاسبه ماتریس سختی، استفاده می شود؛ بکار بردن روش تغییر مکان مجازی می باشد. به این ترتیب که ابتدا یک تغییر مکان گره ای فرضی (مجازی) را اعمال و کارهای داخلی و خارجی را که نیروهای مختلف در اثنای این تغییر مکان انجام می دهند، مساوی فرض می کنیم [۷].

از همین روش می توان برای محاسبه ماتریس ضرایب در ایزوژئومتریک نیز استفاده کرد؛ به طوری که اگر در یک زیر دامنه مانند Ω که دارای مرزهای Γ می باشد، نیروهای کالبدی \mathbf{b}^1 و نیروهای سطحی \mathbf{t}^2 وجود داشته باشند، می توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (3-16)$$

با استفاده از معادلات (۳-۶) و (۳-۱۲) می توان نوشت:

$$\delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{R}} \delta \bar{\mathbf{P}} \quad (3-17)$$

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B} \delta \bar{\mathbf{P}} \quad (3-18)$$

حال با جایگذاری معادلات فوق در معادله (۳-۱۶) داریم:

۱- Body forces

۲- Traction forces

$$\int_{\Omega} \delta \bar{P}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{P}^T \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \bar{P}^T \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (۱۹ - ۳)$$

با حذف $\delta \bar{P}$ و استفاده از رابطه (۳ - ۱۳) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (۲۰ - ۳)$$

از طرفی می توان $\boldsymbol{\varepsilon}$ را از معادله (۳ - ۱۲) محاسبه نمود:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (۲۱ - ۳)$$

در نهایت می توان این رابطه را به صورت خطی زیر نوشت:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (۲۲ - ۳)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس ضرایب (سختی)، \mathbf{U} مجهولات مسئله (تغییر مکان ها) و \mathbf{F} نیروهای

خارجی وارده بر زیر دامنه می باشند؛ که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (۲۳ - ۳)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (۲۴ - ۳)$$

با حل دستگاه معادلات (۳ - ۲۲) می توان مجهولات مسئله را محاسبه نمود.

۳-۲-۲- معرفی هندسه

در اجزای محدود ایزوپارامتریک برای تقریب زدن هندسه، از همان توابع شکلی استفاده

می شود، که برای تقریب زدن مجهول مسئله در نقاط داخلی جزء استفاده شده بود. مشابه آنچه در

مورد اجزای محدود ایزوپارامتریک ذکر شد، در ایزوژئومتریک نیز بکار برده می شود؛ یعنی از همان

توابع پایه ای که برای درون یابی مجهول مسئله در نقاط داخلی زیر دامنه استفاده شده بود، برای

برآورد کردن هندسه مسئله هم استفاده می شود. با این تفاوت که در اینجا با توجه به استفاده از

روابط نرئز می توان هندسه مسئله را بطور دقیق برآورد کرد.

برای تشکیل هندسه در محیط نرژ، احتیاج به نقاط کنترلی و بردارهای گره ای می باشد. بردارهای گره ای از پارامترهای مؤثر تعیین توابع پایه ای هستند؛ بنابراین بردارهای گره ای بکار رفته در تعیین هندسه همان بردارهای گره ای مربوط به تحلیل مسئله می باشند. همچنین نقاط کنترلی مورد استفاده هم همان نقاطی هستند که برای تحلیل مسئله بکار رفته اند؛ و در حقیقت ما در یک مسئله دو بعدی از مؤلفه های اول و دوم مختصات نقاط کنترلی برای تعریف هندسه و از مؤلفه سوم آن به عنوان مجهول مسئله استفاده می کنیم. بنابراین می توان برای تعریف هندسه از روابط زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{x i,j} \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{y i,j} \end{aligned} \quad (3-25)$$

که در آن ξ, η پارامترهایی در مختصات نرمال هستند (یعنی $0 \leq \xi, \eta \leq 1$)، و $P_{y i,j}, P_{x i,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه های مختصات نقاط کنترلی می باشند.

۳-۳- محاسبه ماتریس سختی

۳-۳-۱- معرفی انتگرال ماتریس سختی

همانطور که در بخش ۳-۲ ذکر شد، می توان با حل دستگاه معادلات (۳-۲۲) مجهولات مسئله را محاسبه نمود. در معادله (۳-۲۲) ضریب مجهولات بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) d\Omega \quad (3-26)$$

که این انتگرال نشان دهنده ماتریس سختی یک زیر دامنه می باشد. که تشابه زیادی با انتگرال ماتریس سختی در اجزای محدود دارد، اما بایستی توجه داشت که این دو دارای تعاریف متفاوتی با هم می باشند.

با توجه به رابطه ارائه شده برای ماتریس سختی می توان ابعاد این ماتریس را حدس زد. اگر تعداد نقاط کنترلی را با NP نشان دهیم، و تعداد درجات آزادی آنها را ۲ فرض کنیم، ابعاد ماتریس سختی $2NP \times 2NP$ می باشد، که یک ماتریس مربعی است.

جهت خودکار سازی روش ایزوژئومتریکی برای محاسبه انتگرال های ماتریس سختی از انتگرال گیری عددی استفاده می کنیم روش های مختلفی برای انتگرال گیری عددی مانند قاعده سیمپسون^۱، فرمول نیوتن-کوتز^۲، روش انتگرال گیری گاوس^۳ و غیره وجود دارد، که در این بحث از روش انتگرال گیری گاوس استفاده خواهیم کرد.

۳-۲- روش انتگرال گیری گاوس

از آنجا که روش ایزوژئومتریکی به مقدار زیادی انتگرال گیری نیاز دارد، لازم است بیشترین دقت ممکن را همراه با کمترین هزینه (وقت کامپیوتر) به دست آورد. یکی از دقیقترین روش های انتگرال گیری عددی، فرمول انتگرال گیری گاوس است. انتگرال معین زیر را در نظر بگیرید:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (۳ - ۲۷)$$

که از روی n عدد مفروض، از مقادیر $f(x)$ ، به صورت عددی باید محاسبه شود. گاوس مسأله تعیین مقادیری از x را بررسی کرد که برای دستیابی به بیشترین دقت ممکن باید انتخاب شوند. به عبارت دیگر، چگونه بازه (a, b) را باید تقسیم بندی کرد تا بهترین نتایج ممکن را بدهد؟ گاوس دریافت که n نقطه بازه نایستی هم فاصله باشند، بلکه بایستی نسبت به نقطه میانی بازه به طور متقارن قرار گیرند. برخی از نتایج بررسی های گاوس، در زیر آمده است. فرض کنید γ به $f(x)$ اشاره دارد که در انتگرالی مانند انتگرال رابطه (۳ - ۲۷) باید محاسبه شود. تغییر متغیری را

۱- Simpson's Rule

۲- Newton-cotes Formula

۳- Gaussian Quadrature

به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x(r) = \frac{1}{2}(b-a)r + \frac{1}{2}(b+a) \quad (28-3)$$

به طوری که حدهای بی بعد انتگرال گیری r مساوی -1 و $+1$ شوند. مقدار جدید $y(r)$ عبارت است از:

$$y = f(x) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)r + \frac{1}{2}(b+a)\right] = \Phi(r) \quad (29-3)$$

با توجه به معادله (28-3) که $dx = \frac{1}{2}(b-a)dr$ ، انتگرال اولیه به صورت زیر در می آید:

$$I = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 \Phi(r) dr \quad (30-3)$$

گوس نشان داد که انتگرال معادله (30-3) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\int_{-1}^1 \Phi(r) dr = \sum_{i=1}^n W_i \Phi(r_i) \quad (31-3)$$

که r_i و W_i مقادیر جدول بندی شده توابع وزن و طول وابسته به n نقطه در بازه بی بعد $(-1, 1)$ را نشان می دهند. بدین ترتیب، نتیجه نهایی عبارت است از:

$$I = \frac{1}{2}(b-a) \sum_{i=1}^n W_i \Phi(r_i) = \sum_{i=1}^n f(x(r_i)) W_i \quad (32-3)$$

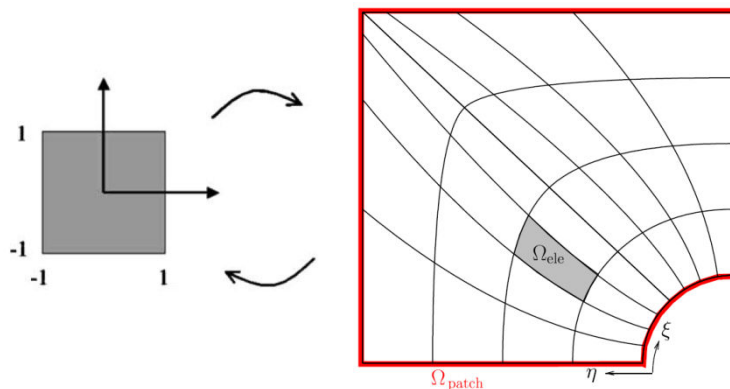
همچنین، گوس نشان داد که این معادله، از چند جمله ای درجه $(2n-1)$ دقیقاً انتگرال می گیرد. برای انتگرال های در فضای چند بعدی (باگستره -1 تا $+1$)، مجموعه ای چندگانه از نقاط و وزن ها می توان بدست آورد، جدولی از نقاط گوس و وزن ها در فضای دو بعدی در زیر ارائه شده است.

جدول ۳-۱- مختصات و وزن های نقاط انتگرال گیری گاوس [۸].

m	r_i	W_i
1	0.0	2.0
2	0.577350269189626. . .	1.0
	-0.577350269189626. . .	1.0
3	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
	-0.774596669241483	0.555555555555556
4	0.339981043583856	0.652145154862526
	-0.339981043583856	0.652145154862526
	0.861136311590453	0.347854845137454
	-0.861136311590453	0.347854845137454

۳-۳-۳- حل عددی انتگرال ماتریس سختی

برای استفاده از انتگرال گیری به روش گاوس احتیاج به المان بندی زیردامنه داریم، تا بتوانیم از نقاط گاوس و وزن های ارائه شده برای المان های چهارضلعی در اجزای محدود استفاده کنیم المان بندی در ایزوژئومتری با استفاده از دهانه های گره ای نریز انجام می شود. بطوری که هر زیر مجموعه بصورت $[\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ یک المان نریز^۱ نامیده می شود. در شکل ۳-۲ نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است.



شکل ۳-۲- زیردامنه نریز و المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای

حال می توان با انتگرال گیری به روش گاوس بر روی هر یک از این المان ها، انتگرال را روی

۱- NURBS element

کل سطح هر زیردامنه محاسبه نمود.

در بخش ۲-۳ ماتریس سختی هر زیر دامنه بصورت زیر ارائه شد:

$$\mathbf{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) d\Omega \quad (3-33)$$

همانطور که ملاحظه می شود این انتگرال وابسته به $\mathbf{B}(\xi, \eta)$ می باشد که بصورت زیر تعریف

می شود:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \quad (3-34)$$

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی احتیاج به مشتقات R نسبت به x, y در دستگاه

مختصات کلی داریم. که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نربز، ژاکوبین زیر را

تعریف می کنیم:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3-36)$$

که در آن $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه ای نربز می باشند. همچنین با توجه به اینکه

همه پارامترهای انتگرال ماتریس سختی برحسب مختصات فضای پارامتری نربز می باشد؛ ساده ترین راه برای انتگرال گیری استفاده از همین فضای پارامتری می باشد. که این عمل باعث ایجاد $\det \mathbf{J}_1$ در انتگرال ماتریس سختی می شود. بنابراین می توان رابطه (۳ - ۳۳) را بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{DB}(\xi, \eta) \det \mathbf{J}_1 d\xi d\eta \quad (37-3)$$

همانطور که در بخش ۳-۳-۲ ذکر شد، در انتگرال گیری گاوس بایستی مقدار تابع داخل انتگرال، در نقاط گاوس محاسبه شود؛ ضمن اینکه نقاط گاوس نقاطی از پیش تعیین شده است، که برای المان های مختلف از جمله المان های چهار ضلعی در اجزای محدود محاسبه شده. در المان های چهار ضلعی این نقاط در دستگاه مختصات نرمال یا سرندیپیتی^۱ مشخص شده است، بنابراین برای اینکه بتوانیم از این نقاط ارائه شده بهره ببریم، بایستی از یک نگاشت استفاده کنیم. بطوری که این نگاشت مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی المان نام را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نربز (ξ, η) منتقل می کند.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \\ \eta &= \frac{1}{2} [(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)] \end{aligned} \quad (38-3)$$

که در روابط فوق r, s مؤلفه های مختصات نقاط در دستگاه سرندیپیتی المان و ξ, η مؤلفه های مختصات در دستگاه نرمال زیر دامنه نربز می باشد.

این نگاشت در انتگرال گیری باعث ایجاد ژاکوبین بصورت زیر می شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad d\xi d\eta = \det \mathbf{J}_2 dr ds \quad (39-3)$$

۱- Serendipity coordinate

که در آن

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) & , & & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 & , & & \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (3-40)$$

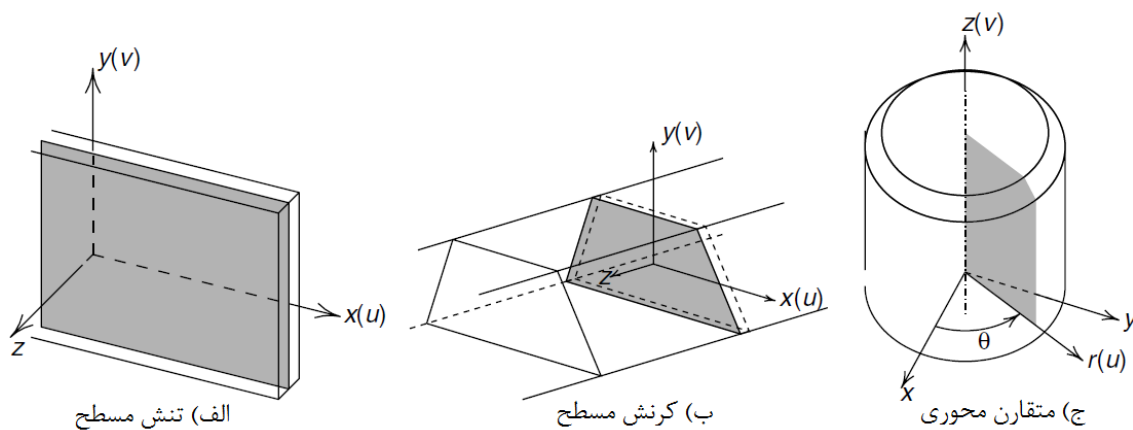
بنابراین می توان رابطه (۳ - ۳۷) برای ماتریس سختی را به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات

سرنديپیتی المان نوشت:

$$K_{patch} = \sum \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(r,s) \mathbf{D} \mathbf{B}(r,s) \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 dr ds \quad (3-41)$$

۴-۳ - سازه های دارای تقارن محوری

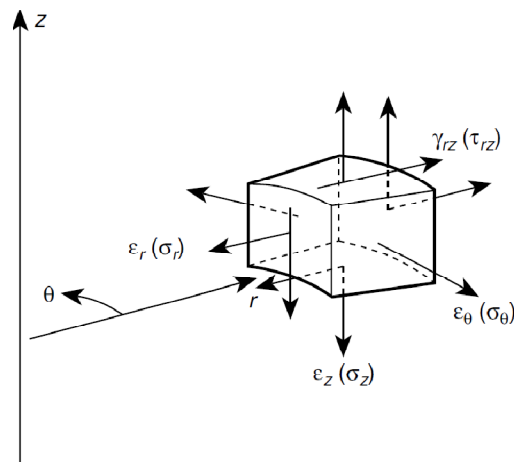
تحلیل اجسامی که تقارن محوری دارند و بار اعمالی به آنها نیز متقارن محوری است در بسیاری از پروژه های مهندسی مورد نیاز است. از کاربرد های این نوع تحلیل می توان بررسی تنش و کرنش های اعمالی به یک مخزن بزرگ تحت فشار، تحلیل جریان سیال در لوله ها، دیسک های توربین ها و پی های استوانه ای قرار گرفته بر روی توده های خاکی را نام برد.



شکل ۳-۳- تحلیل دو بعدی در حالت های تنش مسطح، کرنش مسطح و تقارن محوری

سازه های متقارن محوری سازه هایی هستند که از نظر هندسه، خواص ماده، شرایط مرزی و بارگذاری در دستگاه مختصات استوانه ای نسبت به θ مستقل هستند (شکل ۳-۳). وجود تقارن

محوری تضمین می کند که هیچ نوع حرکت و تغییر مکانی در امتداد زاویه θ وجود ندارد. بنابراین در یک مدل تقارن محوری تغییر مکان ها و کرنش های ناشی از باگذاری، صرفاً در امتداد شعاعی و محوری وجود خواهند داشت. شکل (شکل ۳-۴) نشان دهنده تنش ها و کرنش های ایجاد شده برای یک جسم دارای تقارن محوری در دستگاه مختصات استوانه ای می باشد [۹].



شکل ۳-۴- تنش ها و کرنش های ایجاد شده در مسائل تقارن محوری

همانطور که ذکر شد، سازه های دارای تقارن محوری نسبت به θ مستقل هستند بنابراین تحلیل اینگونه مسائل هم نسبت به θ مستقل خواهد بود، در نتیجه مسئله سه بعدی در مختصات (r, θ, z) به مسئله دو بعدی در صفحه $r-z$ کاهش پیدا می کند.

البته بایستی توجه داشت که المان های ایجاد شده روی این سطح، نه بیان کننده یک سطح، بلکه نماد حجمی است که از دوران المان ها حول محور z ایجاد می شود. هر نقطه روی این سطح تنها می تواند در امتداد r و z حرکت نماید. واضح است که عدم حرکت در امتداد θ به معنی صفر بودن کرنش در آن امتداد نیست. زیرا حرکت گره در امتداد شعاعی، محیط دایره ای را که از دوران آن نقطه حول محور تقارن ایجاد می شود، تغییر محیط منجر به ایجاد کرنش در امتداد θ خواهد شد.

با توجه به مطالب بیان شده در بخش های قبلی در مورد تحلیل ایزوژئومتریکی و همچنین خواص سازه دارای تقارن محوری، می توان این نوع سازه ها را همانند مسائل تنش و یا کرنش مسطح،

به وسیله سطوح نریز در حالت دو بعدی مدل کرد. حال اگر نقاط کنترلی را طوری انتخاب کنیم که، مولفه های اول و دوم مختصات این نقاط (P_r, P_z) ، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند، و همچنین مولفه سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه کنیم، که درونیابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه ای نریز نشان دهنده، تغییر مکان آن نقطه باشد؛ در حقیقت می توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه rz نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه rz نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد.

بنابراین اگر حرکت های شعاعی (در جهت r) و محوری (در جهت z) هر نقطه را به ترتیب با u و v نشان دهیم؛ می توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نریز را بصورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درونیابی کرد.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i \sum_j R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u_{i,j}} \\ \sum_i \sum_j R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v_{i,j}} \end{Bmatrix} \quad (3-42)$$

همچنین می توان معادله فوق را به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (3-43)$$

که در آن $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان های نقاط کنترلی به فرم زیر است:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T \quad (3-44)$$

و $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه ای نسبی نریز به فرم زیر است:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

همچنین $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی زیر می باشد:

$$\bar{\mathbf{P}} = [P_{u_{i-p,j-q}} \quad P_{v_{i-p,j-q}} \quad \dots \quad P_{u_{i-p,j}} \quad P_{v_{i-p,j}} \quad \dots \quad P_{u_{i,j}} \quad P_{v_{i,j}}]^T \quad (3-46)$$

کرنش ها: بردار کرنش ها در مسائل دارای تقارن محوری دارای چهار مولفه مستقل از هم می باشد؛ که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \quad (3 - 47)$$

با معلوم بودن تغییر مکان در نقاط داخل هر زیر دامنه می توان کرنش ها را در هر نقطه دلخواه بدست آورد. که می توان رابطه زیر را در فرم ماتریسی برای آن نوشت:

$$\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3 - 48)$$

که در آن \mathbf{u} بردار تغییر مکان ها، ε کرنش، و \mathbf{L} عملگر دیفرانسیل می باشد؛ که برای مسائل متقارن محوری بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3 - 49)$$

با استفاده از رابطه کرنش - تغییر مکان می توان کرنش را بصورت زیر تقریب زد:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} \quad (3 - 50)$$

که با توجه به ماتریس دیفرانسیل گیری \mathbf{L} ماتریس \mathbf{B} برای مسائل تقارن محوری بصورت زیر است:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial r} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial z} & \dots \\ \frac{R(\xi, \eta)}{r} & 0 & \dots \\ \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial z} & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial r} & \dots \end{bmatrix} \quad (51-3)$$

تنش ها: با توجه به مطالب گفته شده در بخش های قبلی می توان چهار مولفه تنش را بصورت زیر برای بردار تنش ها در نظر گرفت:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (52-3)$$

با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطه بین تنش ها و کرنش ها خطی و بصورت زیر خواهد بود:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (53-3)$$

که در آن \mathbf{D} ماتریس خواص مصالح می باشد و از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (54-3)$$

۳-۵- ماتریس سختی سازه های متقارن محوری

همانند مسائل تنش و کرنش مسطح برای هم ارز سازی استاتیکی نیروهای گره ای با تنش های مرزی و بار های گسترده و نهایتاً محاسبه ماتریس سختی می توان از روش کار مجازی استفاده کرد. و که در این حالت می توان رابطه زیر را برای آن نوشت:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dv - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (3-55)$$

که در آن V حجم سازه می باشد.

با تکرار روندی که در مورد مسائل تنش و کرنش مسطح ذکر شد؛ می توان ماتریس سختی را بصورت زیر برای مسائل متقارن محوری نوشت با این تفاوت که انتگرال گیری در این حالت بجای سطح بر روی حجم دامنه مسئله انجام می شود.

$$\mathbf{K}_{patch} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (3-56)$$

همچنین بردار نیروها به وسیله انتگرال زیر قابل محاسبه است:

$$\mathbf{F} = \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} dv + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3-57)$$

۳-۵-۱- محاسبه انتگرال ماتریس سختی:

همانطور که در بخش قبل ذکر شد، انتگرال ماتریس سختی در مسائل متقارن محوری بایستی بر روی حجم زیر دامنه های نریز محاسبه شود. این عمل با استفاده از المان حجمی نریز امکان پذیر است؛ این المان از دوران یک المان سطحی نریز حول محور تقارن ایجاد می شود؛ که به صورت یک حلقه با سطح مقطع چهار ضلعی می باشد.

بنابراین می توان انتگرال ماتریس سختی را برای هر زیر دامنه نریز بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}_{patch} = \int \int \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz d\theta \quad (3-58)$$

بایستی توجه داشت که جزء حجم در مختصات استوانه ای بصورت $dv = r dr dz d\theta$ می باشد. همچنین با توجه با این نکته که مسائل متقارن محوری مستقل از θ می باشند می توان این انتگرال را بصورت دو بعدی زیر تبدیل کرد:

$$K_{patch} = 2\pi \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \quad (۵۹ - ۳)$$

همانطور که ملاحظه می شود برای محاسبه ماتریس سختی احتیاج به محاسبه ماتریس B می باشد؛ که در آن نیاز به محاسبه مشتق $\frac{\partial R}{\partial r}$ و $\frac{\partial R}{\partial z}$ می باشد. در صورتی که R ، r و z هر سه تابعی از مختصات فضای پارامتری نریز یعنی ξ و η می باشند. به همین دلیل برای محاسبه این مشتقات ژاکوبین زیر را تعریف می کنیم.

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (۶۰ - ۳)$$

با این تعریف داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{Bmatrix} = J_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (۶۱ - ۳)$$

که در آن $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ همان مشتقات جزئی توابع پایه ای نریز می باشند؛ که در بخش ۲-۴-۳ توضیح داده شده است.

همچنین با توجه به اینکه همه پارامترهای انتگرال ماتریس سختی، در دستگاه مختصات فضای پارامتری نریز بیان شده است؛ ساده ترین راه برای محاسبه انتگرال سختی استفاده از همین دستگاه مختصات می باشد. که این عمل باعث ایجاد ژاکوبین $\det J_1$ در رابطه انتگرال ماتریس سختی

می‌شود.

$$drdz = \det \mathbf{J}_1 d\xi d\eta \Rightarrow K_{patch} = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{DB}(\xi, \eta) r \det \mathbf{J}_1 d\xi d\eta \quad (۶۲ - ۳)$$

برای محاسبه انتگرال فوق می‌توان از روش گاوس استفاده کرد. در انتگرال‌گیری گاوس بایستی مقدار تابع داخل انتگرال، در نقاط گاوس محاسبه شود؛ ضمن اینکه نقاط گاوس نقاطی از پیش تعیین شده است، که برای المان‌های مختلف از جمله المان‌های چهار ضلعی در اجزای محدود محاسبه شده. در المان‌های چهار ضلعی این نقاط در دستگاه مختصات نرمال یا سرنديپیتی مشخص شده است، بنابراین برای اینکه بتوانیم از این نقاط ارائه شده بهره ببریم، بایستی از یک نگاشت استفاده کنیم. بطوری که این نگاشت مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرنديپیتی المان نام را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نریز (ξ, η) منتقل می‌کند.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \\ \eta &= \frac{1}{2} [(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)] \end{aligned} \quad (۶۳ - ۳)$$

که در روابط فوق r, s مؤلفه‌های مختصات نقاط در دستگاه سرنديپیتی المان و ξ, η مؤلفه‌های مختصات در دستگاه نرمال زیر دامنه نریز می‌باشد.

این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ژاکوبین بصورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad d\xi d\eta = \det \mathbf{J}_2 drds \quad (۶۴ - ۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) & , & & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 & , & & \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (۶۵ - ۳)$$

بنابراین می توان رابطه ماتریس سختی را به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سردیپیتی
المان ها نوشت:

$$K_{patch} = \sum \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(r,s) \mathbf{DB}(r,s) r \det J_1 \det J_2 dr ds \quad (3-66)$$

همانطور که ملاحظه می شود انتگرال با این روش به جمع تبدیل می شود.

۶-۳- برنامه IsoOptimizer

برای بهره بردن از مزایای روش تحلیل ایزوژئومتریکی و بررسی عملکرد این روش در تحلیل
سازه های دارای تقارن محوری و همچنین کاربرد این روش در بهینه سازی شکل سازه ها، بر اساس
فرمول بندی که در این فصل ارائه شد، برنامه ای تهیه کرده ایم، که قادر به تحلیل سازه های متقارن
محوری به روش ایزوژئومتریکی می باشد. این برنامه در ابتدا توسط آقای مهندس توکلی برای تحلیل
سازه ها در حالت تنش مسطح نوشته شده بود و سپس توسط اینجانب برای تحلیل سازه های متقارن
محوری تعمیم داده شد.

برای بکار بردن تحلیل ایزوژئومتریکی در بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری مجدداً
برنامه ای تهیه کردیم که در آن تحلیل سازه با استفاده از برنامه نوشته شده برای تحلیل
ایزوژئومتریکی انجام می شود، و همچنین حل مسائل بهینه سازی به وسیله سابروتینهای DOT که
توسط پروفیسور وندریلات و همکارانشان تهیه شده است، انجام می گیرد.

در نهایت حاصل این کار تولید برنامه ای به نام IsoOptimizer می باشد؛ که قادر به انجام
تحلیل سازه ها به روش ایزوژئومتریکی در حالت های تنش و کرنش مسطح، متقارن محوری و همچنین
بهینه سازی شکل اینگونه سازه به سه روش MMFD، SLP و SQP می باشد. برنامه IsoOptimizer
به زبان برنامه نویسی فرترن نوشته شده که این عمل در محیط نرم افزار Compaq Visual Fortran
صورت گرفته است.

این برنامه شامل دو قسمت اصلی تحلیل سازه و بهینه سازی می باشد، که هر کدام از این بخش ها دارای قسمت های مختلفی است که در ادامه به توضیحاتی در این زمینه خواهیم پرداخت.

۳-۶-۱- ساختار اصلی برنامه IsoOptimizer

بطور کلی این برنامه دارای بخش ها و قسمت های زیر می باشد:

- بخش تحلیل به روش ایزوژئومتریک.

- قسمت مربوط به محاسبه توابع شکل (توابع پایه ای نربز).

- قسمت مربوط محاسبه ماتریس سختی.

- قسمت حل دستگاه معادلات.

- قسمت مربوط به محاسبه تنش ها و تغییر مکان ها.

- قسمت مربوط به ارائه خروجی های برنامه.

- بخش بهینه سازی شکل.

- قسمت محاسبه تابع هدف.

- قسمت محاسبه توابع قید.

- قسمت بهنگام سازی متغیرهای طراحی.

- قسمت حل مسئله بهینه سازی (DOT).

اولین قسمت در این برنامه مربوط به سابروتین دریافت کننده ورودی ها می باشد. که در آن اطلاعات مربوط به تحلیل و بهینه سازی از روی فایل متنی که قبلاً ساخته شده است خوانده می شود.

شکل ۳-۵ نشان دهنده نمونه ای از فایل های ورودی می باشد، که در آن پارامترهای مختلفی معرفی می شوند. اولین پارامتر AnlyOpt می باشد که می تواند دارای دو مقدار ۱ و ۲ باشد، در حالت ۱ برنامه فقط به تحلیل سازه خواهد پرداخت و در حالت ۲ علاوه بر تحلیل سازه عملیات بهینه سازی

شکل نیز بر روی سازه انجام خواهد گرفت.

پس از آن اطلاعات مربوط به تحلیل سازه خوانده خواهد شد، که پارامترهای ورودی آن به طور خلاصه به این شرح است. پارامتر Type که نشان دهنده نوع سازه (تنش مسطح، کرنش مسطح و متقارن محوری) می باشد؛ npach که تعداد زیر دامنه های نربز را نشان می دهد؛ ntctp نشان دهنده تعداد کل نقاط کنترلی می باشد. ndim معرف تعداد درجات آزادی سازه و همچنین پارامتر nintp که تعیین کننده تعداد نقاط گوسی بکار رفته در انتگرال گیری می باشد.

```

Expipe125.txt - Notepad
File Edit Format View Help
Result Pipe125.txt
##### AnlyOpt #####
!AnlyOpt: 1=Analysis 2=optimization
1
#####
##### Analysis Data #####
#####
##pre Load Data##
!Type: 1=PlaneStress 2=PlaneStrain 3=Axisymmetric
-Type -npach -ntctp -ndime -nintp
3 1 33 2 4
-ipach -doapx -nxknt -doapy -nyknt
1 3 14 2 5
#Output Data
-xdir -ydir
150 150
##Load Data##
-control Point Coordinates
1 5 0 0 1
2 5 0.5 0 1
3 5 1 0 1
4 5.125 0 0 1
5 5.125 0.5 0 1
6 5.125 1 0 1
7 5.25 0 0 1
8 5.25 0.5 0 1
9 5.25 1 0 1
10 5.375 0 0 1
11 5.375 0.5 0 1
12 5.375 1 0 1
13 5.5 0 0 1
14 5.5 0.5 0 1
15 5.5 1 0 1
16 5.625 0 0 1
17 5.625 0.5 0 1
18 5.625 1 0 1
19 5.75 0 0 1
20 5.75 0.5 0 1
Ln 1, Col 1

```

شکل ۳-۵- نمونه از فایل ورودی برنامه IsoOptimizer.

پس خوانده شدن پارامترهای فوق توسط برنامه، درجه توابع پایه ای نربز و تعداد مولفه های بردار های گره ای در هر جهت، به ترتیب توسط پارامترهای doapx، doapy، nxknt و nyknt به برنامه معرفی می شود.

پارامترهای Xdir و Ydir نشان دهنده تعداد نقاطی می باشد که تغییر مکان ها و تنش ها در آنها بایستی محاسبه و در خروجی ارائه شود. در ادامه مختصات نقاط کنترلی و وزن هر یک و همچنین مولفه های بردارهای گره ای هر زیردامنه نربز به برنامه معرفی می شود.

در بخش بهینه سازی اطلاعاتی از قبیل روش حل مسئله (SLP، MMFD، SQP و SLP)، ماکزیمم یا مینیمم کردن تابع هدف، تعداد متغیرهای طراحی، مقدار اولیه متغیرهای طراحی و همچنین مقدار

- حداکثر و حداقل مجاز هر یک از متغیرهای طراحی به برنامه معرفی می شود.
- محاسبه توابع شکل: می توان گفت که توابع پایه ای نریز در ایزوژئومتریک همانند توابع شکل در اجزای محدود می باشد. این توابع به وسیله فرمول هایی که در بخش ۲-۴-۲- ارائه شد، توسط سابروتینی به نام shapfunc2D در برنامه می شود.
 - محاسبه ماتریس سختی: این قسمت توسط سابروتینی به نام StiffAxisymmetric انجام می پذیرد که در آن در حقیقت محاسبه انتگرال ماتریس سختی که در بخش ۳-۵-۱- ارائه شد، صورت می پذیرد. همانطور که اشاره شد این عمل با استفاده از روش انتگرال گیری گوس صورت می گیرد، که در نهایت منجر به تولید ماتریس سختی کل سازه خواهد شد.
 - حل دستگاه معادلات: پس از محاسبه ماتریس سختی و همچنین بردار نیروها و تغییر مکان ها می توان دستگاه معادلاتی به فرم $KU = F$ را تشکیل داد که از حل آن در ایزوژئومتریک برای مسائل دو بعدی مقدار مولفه سوم نقاط کنترلی محاسبه خواهد شد. حل این دستگاه معادلات توسط سابروتینی به نام GSolver انجام می شود، در این سابروتین از روش حذفی گوس برای حل معادلات استفاده شده است.
 - محاسبه تغییر مکان ها و تنش ها: برای رسم کانتورهای تنش و تغییر مکان سازه و یا کشیدن نمودارهای آن نیاز به محاسبه تنش ها و تغییر مکان ها در نقاط مختلف سازه می باشد. این محاسبات به وسیله دو سابروتین Disp2D و Stress2DAxi صورت می گیرد. تعداد نقاطی که تنش ها و تغییر مکان ها برای آنها محاسبه می شوند توسط کاربر در فایل ورودی به وسیله دو پارامتر Xdir و Ydir مشخص می شود. بطوری که برنامه محاسبات را در جهت بردارگره ای i در تعداد Xdir نقطه و در جهت بردار گرهِ ای j در تعداد Ydir نقطه انجام می دهد. تعداد کل نقاط معادل حاصلضرب تعداد نقاط در

جهت ξ و η می باشد.

- ارائه خروجی های برنامه: خروجی برنامه در بخش تحلیل که همان تنش ها و تغییر مکان های محاسبه شده در قسمت قبل می باشد؛ در فایلی متنی، به نامی که توسط کاربر در اولین خط فایل ورودی مشخص شده نوشته خواهد شد. این خروجی ها برای سازه های متقارن محوری در هشت ستون در فایل خروجی نوشته خواهد می شود، دو ستون اول نشان دهنده مختصات نقاطی می باشد که تنش ها و تغییر مکان ها برای آنها محاسبه شده است. این مختصات ها از رابطه (۳ - ۲۵) بدست می آیند. همچنین ستون سوم نشان دهنده تغییر مکان های سازه در جهت r و ستون چهارم نشان دهنده تغییر مکان های سازه در جهت z می باشد. ستون های پنجم تا هشتم به ترتیب نشان دهنده تنش های σ_{rz} ، $\sigma_{\theta\theta}$ ، σ_{zz} ، σ_{rr} می باشد.

- بخش بهینه سازی شکل

در این بخش ابتدا سازه توسط بخش قبلی برنامه مورد تحلیل قرار گرفته و سپس به وسیله سابروتین های مختلف این برنامه عملیات بهینه سازی شکل سازه انجام می گیرد.

- محاسبه تابع هدف: در این قسمت مقدار تابع هدف مسئله که می تواند حجم (سطح مقطع)، سختی، انرژی کرنشی و ... باشد، محاسبه می شود. و مقدار آن در پارامتری به نام OBJ قرار می گیرد. پارامتر OBJ در سابروتین های DOT معرف تابع هدف می باشد.

- محاسبه توابع قید: توابع قید در برنامه توسط سابروتین Constraint محاسبه می شوند و مقدار آنها در پارامتری به نام G قرار می گیرد این مقدار از تقسیم پارمتر مقید شده (به عنوان مثال تنش و یا تغییر مکان یک نقطه) بر مقدار مجاز آن پارامتر، منهای یک محاسبه می شود. بطوری که مقدار تابع قید بایستی همیشه منفی باشد.

- قسمت بهنگام سازی متغیرهای طراحی: در این قسمت پارامترهایی بر اساس خروجی های

DOT که در حقیقت همان مقادیر جدید متغیرهای طراحی می باشند، به روز رسانی می شوند. بطوری که در تحلیلی که در مرحله بعد انجام می شود از این پارامتر ها برای تحلیل استفاده می شود.

- قسمت حل مسئله بهینه سازی: همانطور که اشاره شد حل مسئله بهینه سازی در این برنامه توسط سابروتین های DOT انجام می شود. حل مسئله بهینه سازی در این برنامه دارای یک روند تکراری است، به این ترتیب که ابتدا سازه مورد تحلیل قرار گرفته و بر اساس نتایج بدست آمده مقادیر تابع هدف و توابع قید مشخص می شود؛ این مقادیر توسط برنامه به سابروتین های DOT معرفی شده و DOT بر اساس مقادیر معرفی شده مقدار متغیرهای طراحی را تغییر می دهد. در حقیقت DOT مشخص می کند که هر متغیر طراحی در چه جهت و چه مقدار تغییر کند. حال با توجه به خروجی های DOT که همان مقدار جدید متغیرهای طراحی می باشند سازه مجدداً مورد تحلیل قرار می گیرد و بر اساس آن مقادیر جدید تابع هدف و توابع قید مشخص شده و به DOT معرفی می شوند؛ این روند آنقدر تکرار می شود تا مقدار تغییرات متغیرهای طراحی از حد معینی کمتر شود.

فصل چهارم

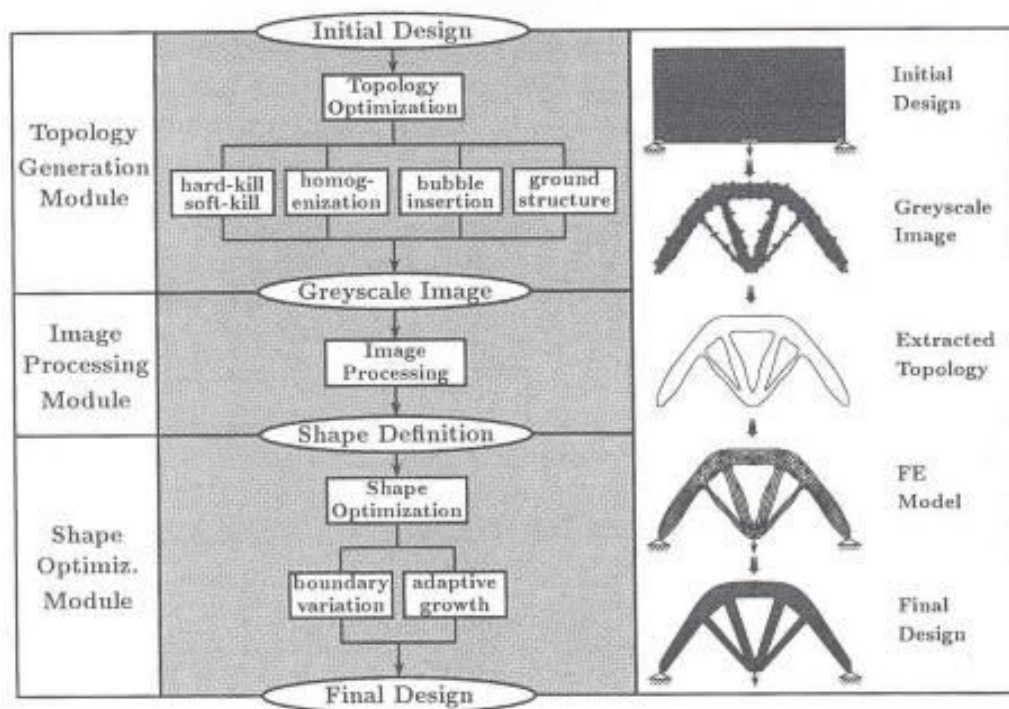
بهینه سازی شکل سازه ها

۴-۱ - مقدمه

در طراحی سازه ها، بدست آوردن یک طرح بندی^۱ مناسب برای سازه امری لازم است. این طرح بندی بایستی به گونه ای باشد تا بتواند نیروهای وارده را به شکلی امن و اقتصادی تحمل کند. بدین ترتیب طرح بندی مناسب سازه شامل اطلاعات توپولوژیک، شکل و ابعاد سازه می باشد. بهینه سازی ابزاری ارزشمند است که می تواند برای تولید یک طرح بندی جدید و موثر، مورد استفاده طراحان قرار بگیرد و این چیزی فراتر از تجربه و کارآزمودگی هر طراحی خواهد بود. هدف از بهینه سازی سازه ها، تولید سازه هایی است که با وجود وزن حداقل، از بیشترین مقاومت و سختی در برابر نیروهای وارده برخوردار هستند. این فرآیند در یک فضای مشخص به نام دامنه طراحی^۲ و تحت اثر شرایط مشخص بارگذاری و تکیه گاهی صورت می پذیرد.

۱- Layout

۲- Design Domain



شکل ۴-۱- فرآیند کلی در بهینه سازی سازه ها

توپولوژی اولیه سازه یا از قبل طرح شده و دارای محدودیتهایی در ساخت می باشد و یا اینکه بایستی توسط یک مهندس طراحی شود. بهینه سازی توپولوژیک، ابزاری است که به طراح در بدست آوردن یک طرح بندی اولیه مناسب برای سازه، کمک بسیاری خواهد کرد. در بهینه سازی توپولوژیک، ابتدا فضایی را که به آن دامنه مرجع گفته می شود، تعریف می کنیم. این دامنه به گونه ای خواهد بود که فضای مورد نظر جهت طراحی را پوشش می دهد. به هنگام حل یک مساله بهینه سازی توپولوژیک، بارگذاری، شرایط تکیه گاهی و مشخصات مصالح معلوم می باشند. هدف حذف و توزیع مجدد مصالح در دامنه تعریف شده می باشد به گونه ای که در انتها توپولوژی بدست آمده تابع هدف مورد نظر را در مساله بهینه سازی مینیمم کند. شکل ۴-۱ را ملاحظه کنید. در انتهای بهینه سازی توپولوژیک سازه ها، ممکن است که طراح در بعضی از قسمتها با توزیع نامناسب مصالح مواجه شود که برای رفع این مشکل می توان از پردازش تصویر^۱ استفاده نمود و با اعمال پردازش تصویر، توپولوژی جدیدی برای

^۱- Image Processing

مساله مورد نظر حاصل می شود که اشکالات موجود را تا حدودی و یا کاملاً برطرف می کند. [۱۰]

بعد از انجام فرآیند بهینه سازی توپولوژیک می توان برای دستیابی به جوابهای بهتر و اجرایی، اقدام به بهینه سازی شکل نمود. بدین منظور روشهای مختلفی را می توان مورد استفاده قرار داد که در ادامه بطور مفصل به آن خواهیم پرداخت. همچنین می توان از بهینه سازی ابعادی بطور همزمان یا بعد از بهینه سازی شکل بهره جست [۱۱]. در بهینه سازی شکل، هندسه اولیه، بارگذاری و قیود تکیه گاهی از قبل معلوم بوده و سازه تحلیل می شود. سپس با استخدام یک روش تکراری و محاسبه حساسیت شکل مساله به تغییر پارامترهای طراحی، از جواب اولیه به یک جواب بهینه میرسیم. بهینه سازی شکل می تواند به عنوان یک عملگر^۱ جهت بهبود بخشیدن به جوابهای حاصل از بهینه سازی توپولوژی مورد استفاده واقع شود. البته می توان از پردازش تصویر به عنوان یک رابط میانی بین بهینه سازی توپولوژیک و شکل استفاده کرد که خود باعث رسیدن به جوابهای بهتری خواهد شد.

۲-۴ - بهینه سازی شکل سازه ها

در سالیان اخیر روشهای متعددی برای بهینه کردن شکل سازه ها ابداع شده است. ولی از این میان به دو روشی که بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است اشاره می شود.

۴-۲-۱ - روش تغییرات مرزی^۲

در این روش از منحنی های پارامتری درجه سه اسپلاین برای مدل کردن مرزهای سازه مورد نظر استفاده می شود. در مسائل دو بعدی می توان از دسته ای از فرمولبندی ها استفاده کرد که سبب تولید منحنی میشوند و در مسائل سه بعدی، فرمولبندی مورد استفاده سبب ایجاد رویه میشوند. برای تعریف اسپلاین ها می توان از چندین مشخصه آنها استفاده کرد. یکی از آنها، مختصات نقاط کلیدی اسپلاین می باشد که به عنوان متغیر طراحی مساله بهینه سازی نیز در نظر گرفته شده است.

۱- Operator

۲- Boundary Variation Method

۴-۲-۲- روش رشد تطبیقی^۱

این روش، به صورت یک دریافت درونی و احساسی می‌باشد که از بهینه سازی شکل سازه با استفاده از روش تغییرات مرزی بدست آمده است و اولین بار توسط شخصی به نام ماتک^۲ در سال ۱۹۸۹ ارائه شد. این روش از روش بهینه سازی شکل با استفاده از تغییرات مرزی ساده تر بوده و بیشتر به آنالیز مساله متکی می‌باشد [۱۲].

روش رشد تطبیقی در تلاش است تا برای انجام فرآیند بهینه سازی از شبیه سازی رشد حیوانات و گیاهان استفاده کند. ایده اصلی این روش این است که سیستمهای بیولوژیکی که قابلیت تحمل نیروها را دارند در نتیجه تکامل در طی میلیونها سال بهینه شده اند. این عمل به خاطر وجود رقابتی شدید برای کسب انرژی و فضای زندگی در طبیعت می‌باشد که به منظور بدست آوردن شانس بیشتر برای زندگی صورت میگیرد. عبارتی آنها مقاومتی بیشتر را در ازای وزن کمتر جستجو میکنند. از میان سازه های بیولوژیک که توانایی رشد تطبیقی را نیز دارا می‌باشد می‌توان به درختها اشاره کرد. آنها به گونه ای شکل گرفته اند که امکان جذب بیشترین نور را داشته باشند^۳ و جهت آنها متمایل به سمت نور بوده و به عبارتی سعی در تولید تاج بزرگتر دارند.

ماتک شمار زیادی از درختان طبیعت را جهت تعیین درستی دو قانون مکانیکی حاکم بر رشد درختان مورد مطالعه قرار داد. این دو قانون عبارتند از مینیمم کردن بار خارجی و فرضیه تنش ثابت بر سطح درختان.

مینیمم کردن بار خارجی تلاشی برای بهتر کردن پایداری عمومی به همراه در نظر گرفتن مهمترین حالات بارگذاری می‌باشد. مثلا می‌توان به نگه داشتن مرکز ثقل تاج درخت بر روی ریشه آن اشاره کرد. تنش ثابت نیز اصلی بدیهی است و بیان می‌کند که سازه های بیولوژیک سعی دارند تا به

۱- Adaptive Growth Method

۲- Mattheck

۳- Phototropism

گونه ای رشد کنند که در زمانهای مختلف و تحت اثر حالات مختلف بارگذاری، بر روی سطح آنها تنش ثابت به وجود آید. این مورد یک حالت بهینه مکانیکی است که سعی دارد تا خطوط شکست را که معمولا از سطح شروع میشوند مینیمم کند. به عبارتی دیگر، هیچ نقطه ای بر روی سطح وجود ندارد که تنش آن بیشتر از نقاط دیگر باشد. موارد دیگری نیز توسط ماتک ارائه شده اند که می توان به رشد شاخ گوزن ها، رشد ناخنهای گربه سانان و غیره اشاره کرد.

پایه این قاعده کلی را می توان در رفتار یک درخت به هنگام ایجاد یک برخورد مکانیکی میان تنه درخت و یک جسم سخت (مانند سنگ) جستجو نمود. مثلا وقتی که یک درخت دچار بریدگی و جراحت می شود، تنشهای بزرگتری در محل شکاف ایجاد می شود. در نتیجه درخت سعی می کند تا به حالت تنشهای یکنواخت اولیه برگردد و این کار را با اضافه کردن مقدار بیشتری از مواد در محل جراحت انجام میدهد. بدین ترتیب درخت با استفاده از رشد تطبیقی در سطح محل برخورد مکانیکی، تنشهای حداکثر را کاهش میدهد.

بیشترین احتمال وقوع شکست (به خصوص توسط بارهای خستگی) نیز در سطوح با تنشهای محلی زیاد است که اغلب سبب این اتفاق، وجود شکافهای سطحی می باشد. بدین ترتیب یک طراحی مکانیکی که توزیع تنش در آن یکنواخت است، (مخصوصا در سطح آن) را می توان به عنوان طرحی بهینه فرض کرد.

از آنجایی که در بعضی حالات تنشهای سه بعدی وجود دارد، با استفاده از تنشهای فون میز نتایج بهتری برای فرضیه تنشهای ثابت بدست می آید. در حالت کلی ممکن است از تنشهای اصلی ماکزیمم و یا چگالی انرژی کرنشی استفاده شود.

پیش از این محققین روشهای زیادی برای بدست آوردن حالت یکنواخت تنشهای فون میز پیشنهاد کرده اند. اخیرا ماتک روشی را برای بهینه سازی شکل سازه ها با کمک کامپیوتر پیشنهاد

کرده است^۱ که در آن از رشد درختان تقلید می‌شود. ایده اصلی در این روش که بسیار بحث برانگیز نیز می‌باشد این است که نه تنها محصولات بیولوژیکی بهینه هستند بلکه روشی را هم که آنها در طبیعت برای رسیدن به شکل بهینه طی میکنند بهینه می‌باشد و به همین خاطر می‌توان آن را به صورت یک فرآیند بهینه سازی، شبیه سازی نمود. اگرچه که ممکن است تصور شود که فرآیندهای تکاملی در طبیعت دارای روند بسیار کندی هستند. برای اطلاعات بیشتر در زمینه روش پیشنهادی ماتک می‌توان به مرجع [۱۲] رجوع کرد.

۳-۴ - تعریف مساله بهینه سازی شکل

در این بخش چگونگی تعریف مساله بهینه‌سازی شکل بیان می‌شود. در حالت کلی می‌توان مساله بهینه سازی را بصورت زیر عنوان نمود.

$$\begin{aligned} \min \text{ or } \max \quad & f(x) \\ g_j(x) \leq 0 \quad & j = 1, 2, 3, \dots, m \\ h_k(x) = 0 \quad & k = 1, 2, 3, \dots, l \\ x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad & i = 1, 2, 3, \dots, n_{dv} \end{aligned} \quad (۱ - ۴)$$

که x بردار متغیرهای طراحی، $f(x)$ تابع هدف که مینیمم یا ماکزیمم می‌شود، $g(x)$ و $h(x)$ به ترتیب توابع قیود نامساوی و مساوی و x_i^l و x_i^u حدود پایین و بالای متغیرهای طراحی x_i می‌باشند.

۴-۴ - توابع هدف

یکی از علل پرداختن به بهینه سازی شکل بعد از بهینه سازی توپولوژی، امکان تعریف انواع توابع هدف می‌باشد در حالی که این امکان در بهینه سازی توپولوژی، بسیار محدود می‌باشد. تعدادی از توابع هدف معمول و پر کاربرد در بهینه سازی شکل عبارتند از:

۱- Computer Aided Design - CAD

- تابع وزن و یا حجم کل سازه و مصالح مصرفی^۱
- تابع انرژی کرنشی^۲
- تابع یکنواخت کننده تنش^۳
- تابع تنش ماکزیمم^۴
- تابع تمرکز تنش^۵

در ادامه توضیحات تکمیلی و تعاریف توابع هدف نامبرده ارائه می‌شود.

۴-۴-۱- تابع وزن و حجم کل

یکی از ساده ترین و در عین حال پرکاربردترین توابع هدف در بهینه سازی شکل سازه ها، مینیمم سازی وزن و یا حجم سازه و مصالح مصرفی در آن می‌باشد. تابع هدف حجم با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود.

$$F_V = \int_{\Omega} d\Omega \quad (۴ - ۲)$$

با استفاده از روش اختلافات محدود^۶ می‌توان مشتق تابع هدف را نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه کرد.

$$\frac{\partial F_V}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta F_V}{\Delta x_i} = \frac{F_V(x_i + \Delta x_i) - F_V(x_i)}{\Delta x_i} \quad (۴ - ۳)$$

برای مینیمم کردن وزن فرض می‌شود که وزن مخصوص، تابعی از متغیرهای طراحی نباشد. بنابراین می‌توان با ضرب ثابت γ در رابطه فوق، وزن سازه را محاسبه کرد. بدین ترتیب تابع هدف وزن

۱- Total volume or weight

۲- Strain Energy

۳- Stress leveling function

۴- Maximum stress

۵- Stress Concentration

۶- Forward difference

سازه به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$F_W = \int_{\Omega} \gamma d\Omega \quad (4 - 4)$$

مشتق این تابع را نیز به طور مشابه می‌توان با استفاده از روش اختلافات محدود به شکل زیر

بدست آورد.

$$\frac{\partial F_W}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta F_W}{\Delta x_i} = \frac{F_W(x_i + \Delta x_i) - F_W(x_i)}{\Delta x_i} \quad (5 - 4)$$

۴-۴-۲- تابع انرژی کرنشی

از دیگر توابعی که به عنوان تابع هدف مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع انرژی کرنشی است.

انرژی کرنشی سازه را می‌توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد.

$$F_{\omega} = \int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \quad (6 - 4)$$

مشتق تابع انرژی کرنشی با توجه به ثابت بودن ماتریس الاستیسیته D از رابطه زیر قابل

محاسبه است.

$$\frac{\partial F_{\omega}}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^T D^{-1} \sigma + \sigma^T D^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega \quad (7 - 4)$$

۴-۴-۳- تابع تنش یکنواخت

استفاده از این تابع هدف بمنظور دستیابی به یک طرح سازه ای با تنشهای یکنواخت شده

می‌باشد. یعنی می‌خواهیم کلیه تنشهای سازه برابر با حالت ایده آل باشد. البته این نوع تابع هدف را

نمی‌توان برای هر حالتی مورد استفاده قرار داد. تابع هدف در این حالت از مجموع مربعات اختلاف

بین تنشهای موجود و تنش هدف شکل می‌گیرد. بنابر این سعی بر این است که تا حد امکان تابع

هدف کاهش یابد و در حالت ایده آل مقدار آن مساوی صفر می‌شود. برای تعریف تنش یکنواخت از

توابع متنوعی می‌توان استفاده کرد که یکی از آنها به شکل زیر است.

$$F_L = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_0)^2 d\Omega \quad (۸ - ۴)$$

در این رابطه مقدار σ می‌تواند مساوی تنش معادل و یا تنش اصلی ماکزیمم باشد. مقدار σ_0 نیز برابر است با تنش پیشنهادی طراح و یا میانگین تنش موجود بر روی دامنه سازه. مشتق رابطه فوق نیز با فرض ثابت بودن تنش هدف σ_0 به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial F_L}{\partial x_i} = 2 \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} d\Omega \quad (۹ - ۴)$$

در سال ۱۹۹۰ شخصی به نام کیمیش^۱ یک تابع هدف اصلاح شده برای حالت تنش یکنواخت و یکسان سازی تنشها ارائه کرد. رابطه او به شکل زیر است [۱۰].

$$F_L = \int_{\Omega} (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 d\Omega \quad (۱۰ - ۴)$$

این رابطه کاملاً غیر خطی بوده و مشتق آن به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial F_L}{\partial x_i} = 4 \int_{\Omega} (\sigma^2 - \sigma_0^2) \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} d\Omega \quad (۱۱ - ۴)$$

از امتیازات این تابع این است که مشتق دوم آن پیوسته می‌باشد.

۴-۴-۴- تابع تنش حداکثر

تابع هدف در این حالت می‌تواند ماکزیمم مقدار تنش اصلی و یا ماکزیمم مقدار تنش معادل انتخاب شود. بنابراین تابع هدف به شکل زیر خواهد بود.

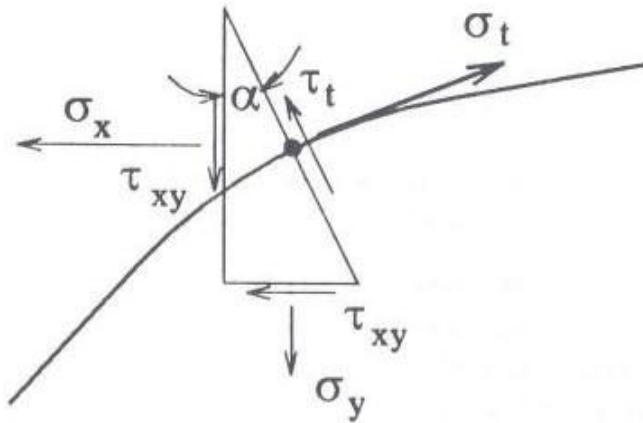
$$F_s = \sigma_{\max} \quad (۱۲ - ۴)$$

و مشتق این رابطه برابر است با:

۱- Kimmich

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{\max}}{\partial x_i}$$

(۴-۱۳)



۴-۲- محاسبه تنش مماسی σ_t از روی تنشهای عمومی برای مرز یک سازه

۴-۴-۵- تابع تمرکز تنش

این تابع هدف در زمره توابعی است که جهت حداقل کردن تمرکز تنشها در بخشهایی از سازه به کار میرود. تنشی که متمرکز شده است همان تنش σ_t است که به صورت مماس بر سطح یا مرز سازه عمل می کند. (شکل (۴-۲) را ملاحظه کنید.) این تنش مماسی^۱ می تواند توسط مقادیر عمومی تنش توسط رابطه زیر محاسبه شود.

$$\sigma_t = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (۴-۱۴)$$

که σ_x ، σ_y و τ_{xy} مولفه های عمومی تنش در دستگاه مختصات عمومی کارتزین و α زاویه ایست که بین جهت مثبت محور x ها و مرز سازه در محل تقاطع ایجاد می شود. مشتق تنش مماسی فوق نیز توسط رابطه زیر قابل محاسبه است.

۱- Tangential Stress

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_i} \sin^2 \alpha + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x_i} \sin 2\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} (-\sigma_x \sin 2\alpha + \sigma_y \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha) \quad (۴-۱۵)$$

با بکار بردن این روابط و جستجوی تنش مماسی حداکثر واقع بر روی مرزهای سازه و استفاده از یک روش مناسب بهینه سازی می توان به تولید شکلی با حداقل تمرکز تنش اقدام نمود.

بنابر این تابع هدف عبارتست از:

$$F_c = \sigma_{t_{\max}} \quad (۴-۱۶)$$

که مشتق آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial F_c}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{t_{\max}}}{\partial x_i} \quad (۴-۱۷)$$

دومین تابع هدفی که می توان برای تمرکز تنش معرفی کرد بر مبنای شرایط بدست آمده توسط شخصی به نام نبر^۱ در سال ۱۹۷۲ می باشد. او بیان می کند زمانی شکل مرزهای سازه بهینه است که تنشهای مماسی در سراسر بزرگترین بخش ممکن از مرز سازه، ثابت باشد. این موضوع بدین مفهوم است که حداقل کردن تمرکز تنش معادل است با یکنواخت سازی تنش مماسی در طول مرز طراحی سازه. این تابع هدف فقط برای توزیع حداقل تنش مناسب است؛ و لزوماً ما را به سمت سازه‌ای با وزن کمتر رهنمون نمی کند. در این دسته از مسائل زمانی حداقل وزن بدست می آید که تنشهای مماسی در سراسر مرزهای طراحی ماکزیمم شود.

یک تابع هدف ساده که توسط نبر برای حداقل کردن تمرکز تنش در سازه ارائه شده است عبارتست از جمع تنشهای مماسی در کلیه نقاط کنترلی واقع بر روی مرز بخشی از سازه که به شکل زیر بیان می شود.

۱- Neuber

$$F_c = \sum_{i=1}^{nkey} \left(\frac{\sigma_{t,i} - \sigma_{t,i_{av}}}{\sigma_{t,i_{av}}} \right)^2 \quad (18 - 4)$$

که در این رابطه $nkey$ تعداد نقاط کنترلی قطعه مرزی است که در طول فرآیند بهینه سازی، شکل آن دستخوش تغییرات می شود. $\sigma_{t,i_{av}}$ نیز میانگین تنش مماسی در نقاط کلیدی می باشد. مشتق این رابطه نیز به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$\frac{\partial F_c}{\partial x_i} = 2 \sum_{i=1}^{nkey} \left(\frac{\sigma_{t,i} - \sigma_{t,i_{av}}}{\sigma_{t,i_{av}}^2} \right) \frac{\partial \sigma_{t,i}}{\partial x_i} \quad (19 - 4)$$

همچنین می توان روابط فوق را به شکل انتگرالی بر روی طول کل مرز متغیر تعریف کرد. بدین ترتیب داریم:

$$F_c = L^{-1} \int_{\Gamma} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_{t_{av}}}{\sigma_{t_{av}}} \right)^2 d\Gamma \quad (20 - 4)$$

که در این رابطه L کل طول مرز متغیر و $\sigma_{t_{av}}$ برابر است با میانگین تنش محاسبه شده با رابطه زیر:

$$\sigma_{t_{av}} = \frac{\int_{\Gamma} \sigma_i d\Gamma}{L} \quad (21 - 4)$$

مشتق این رابطه نیز برابر خواهد بود با:

$$\frac{\partial F_c}{\partial x_i} = 2L^{-1} \int_{\Gamma} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_{t_{av}}}{\sigma_{t_{av}}^2} \right) \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} d\Gamma - L^{-2} \frac{\partial L}{\partial x_i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_{t_{av}}}{\sigma_{t_{av}}^2} \right)^2 d\Gamma \quad (22 - 4)$$

۴-۵- توابع قید

همانگونه که میدانیم، گاهی اوقات لازم است مقادیر تنشها، تغییر مکانها و غیره در بعضی از نقاط سازه از حدود مشخصی فراتر نروند. بنابراین لازم است توابعی را برای کنترل مقادیر متغیرهای طراحی در غالب توابع قید تعریف کنیم. بنابراین در فرآیند بهینه سازی شکل، تغییرات متغیرهای

طراحی به گونه ای خواهد بود که هیچ یک از قیود تعریف شده را نقض نکند.

در اینجا می توان به چند روش قیود را تعریف نمود که عبارتند از:

- انتخاب کلیه نقاط دامنه
- انتخاب نقاط از پیش تعیین شده
- انتخاب کلیه نقاط روی مرز سازه

یکی دیگر از نکات مهم که بایستی برای قیود در نظر گرفت، نرمال کردن آنها می باشد. نرمال کردن قیود باعث ایجاد شرایط عددی بهتری برای انجام فرآیند بهینه سازی شکل می شود [۱۳]. بنابراین برای حد پایین^۱ قیود نامساوی خواهیم داشت:

$$g^l = \frac{G^l - G(x)}{|G^l|} \leq 0 \quad (۴ - ۲۳)$$

و برای حد بالای^۲ قیود نامساوی خواهیم داشت:

$$(۴ - ۲۴)$$

$$g^u = \frac{G(x) - G^u}{|G^u|} \leq 0$$

در روابط فوق $G(x)$ می تواند حجم، تنش، وزن، تغییرمکان و یا هر عامل دیگری باشد و G^l و G^u بترتیب حدود پایین و بالای تابع قید می باشند. مشتق توابع قید فوق را می توان از روابط زیر بدست آورد.

۱- Lower Bound

۲- Upper Bound

$$\frac{\partial g^l}{\partial x_i} = - \frac{1}{|G^l|} \frac{\partial G^l}{\partial x_i} \quad (۲۵ - ۴)$$

$$\frac{\partial g^u}{\partial x_i} = \frac{1}{|G^u|} \frac{\partial G^u}{\partial x_i} \quad (۲۶ - ۴)$$

۴-۵-۱- قیود حجم و وزن

این قیود، توابعی عمومی هستند که به شکل زیر تعریف میشوند:

$$g_V^l = \frac{V^l - V}{V^l} \leq 0 \quad (۲۷ - ۴)$$

$$g_V^u = \frac{V - V^u}{V^u} \leq 0 \quad (۲۸ - ۴)$$

که در این روابط مقادیر V^l و V^u حدود بالا و پایین حجم مواد تشکیل دهنده سازه می باشند.

به طور مشابه برای تابع قید وزن نیز خواهیم داشت:

$$g_W^l = \frac{W^l - W}{W^l} \leq 0 \quad (۲۹ - ۴)$$

$$g_W^u = \frac{W - W^u}{W^u} \leq 0 \quad (۳۰ - ۴)$$

برای محاسبه مشتقات $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ و $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ توابع مذکور، همانند روابط قبل از روش اختلافات پیشرو

استفاده میکنیم.

۴-۵-۲- قیود تغییر مکان

این توابع نیز کاربرد بسیاری در حل مسائل بهینه سازی شکل داشته و غالباً در اکثر مسائل

مورد استفاده واقع میشوند. توابع قیود تغییر مکان اغلب به شکل زیر بیان میشوند.

$$g_D^l = \frac{D^l - D}{|D^l|} \leq 0 \quad (۳۱ - ۴)$$

$$g_D^u = \frac{D - D^u}{|D^u|} \leq 0 \quad (۴ - ۳۲)$$

که در این روابط D^l و D^u حدود بالا و پایین تغییرمکان در همه و یا تعدادی از گره ها می‌باشند. این قیود را می‌توان به طور عمومی برای کلیه گره ها و یا به طور محلی برای نقاط کنترلی تعریف کرد. علاوه بر اینها بایستی توجه داشت که قیود تغییرمکان برای هر درجه آزادی به شکل جداگانه تعریف میشوند. مثلا در یک و یا مجموعه ای از گره ها، برای تغییرمکان جهات x و y می‌توان از قیود متفاوتی استفاده کرد. مشتقات توابع قید تغییرمکان را نیز می‌توان همانند روابط قبل و با استفاده از روش اختلافات پیشرو محاسبه نمود و از آنها جهت استفاده در آنالیز حساسیت بهره جست.

۴-۵-۳- قیود تنشها

دسته ای از قیود که تقریبا در تمام مسائل بهینه سازی شکل بایستی مورد استفاده قرار گیرند، همین قیود مربوط به تنشهای بوجود آمده در سازه می‌باشند. این قیود در حالت کلی به شکل زیر بیان میشوند:

$$g_S^l = \frac{S^l - S}{|S^l|} \leq 0 \quad (۴ - ۳۳)$$

$$g_S^u = \frac{S - S^u}{|S^u|} \leq 0 \quad (۴ - ۳۴)$$

که مقادیر S^l و S^u به ترتیب، حدود پایین و بالای تنش مجاز می‌باشند. تنش S در روابط فوق می‌تواند تنش معادل σ_{equ} ، تنش اصلی حداکثر $\sigma_{Pr_{max}}$ و یا تنش اصلی حداقل $\sigma_{Pr_{min}}$ باشد. در مورد قیود تنش می‌توان همانند قیود تغییرمکان، به صورت عمومی در سراسر دامنه و یا به صورت محلی در نقاط کنترلی استفاده کرد.

۴-۵-۴- قیود مربوط به نقاط کنترلی

برای نقاط کنترلی نیز می‌توان قیودی در نظر گرفت که مهمترین آنها اولاً ایجاد محدودیت حرکتی و تعیین جهت حرکت و ثانياً ایجاد همبستگی بین آنها می‌باشد.

۴-۶- متغیرهای طراحی

در حل مسائل بهینه سازی چگونگی انتخاب و تعریف متغیرهای طراحی از مراحل بسیار مهم در فرآیند حل مسائل می‌باشد. اهمیت این انتخاب را می‌توان در این جمله خلاصه کرد که داشتن سرعت بالا در حل مسائل و امکان دستیابی به جواب بهینه، بدون انتخاب صحیح متغیرهای طراحی امری دور از انتظار است. در این مرحله شخص طراح بایستی از قبل تصمیم بگیرد که در چه نقاطی از سازه امکان ایجاد تغییرات و تعریف متغیر طراحی وجود دارد و همچنین با توجه با تعریف محل و جهت حرکت متغیرهای طراحی، تغییرات ایجاد شده چگونه خواهد بود.

در کارهایی که در گذشته در این زمینه انجام شده است، انواع مختلفی از متغیرهای طراحی جهت حل مسائل بهینه سازی شکل مورد استفاده قرار گرفته اند. مثلاً در یکی از آنها موقعیت مکانی گره های واقع بر مرزهای سازه و در دیگری ضرایب چندجمله ایهای تعریف کننده مرزها به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه سازی در نظر گرفته می شد. در روشهای بعدی از اسپلینها به عنوان مدل کننده مرزهای سازه استفاده شد و مختصات نقاط کنترلی اسپلین به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه سازی استخدام شدند.

۴-۷- الگوریتم بهینه سازی

با استفاده از اطلاعاتی که از حساسیت های تحلیلی و طراحی نتیجه می شود، برای تولید شکل های با مقادیر تابع هدف ارتقا یافته ، از روش های برنامه نویسی ریاضی استفاده می شود . در برنامه نویسی ریاضی هر درون یابی از دو مرحله اساسی تشکیل شده است [۱۴] :

۱- محاسبه مقادیر توابع هدف و قیود و گرادیان های آن ها با توجه به همه متغیر های طراحی برای یک روش حل عملی .

۲- محاسبه تغییرات بهینه محلی برای متغیر های طراحی .

مراحل ۱ و ۲ تا زمانی که مینیموم محلی برای تابع هدف پیدا شوند تکرار می شوند .
روند بهینه سازی معمولا با متغیر پیش نهادی طراحی x_i^0 شروع می شود، که به صورت ورودی به برنامه معرفی شده است. سپس طراحی به کمک تغییر در متغیر طراحی x_i به هنگام می شود:

$$x_i^q = x_i^{q-1} + \alpha r^q \quad (۴ - ۳۵)$$

در رابطه (۴ - ۳۵)، q شماره تکرارها و r نشان دهنده بردار جهت یابی ها است. جهت r عموما جهتی امکان پذیر است به سمت کمینه یا بیشینه کردن تابع هدف $f(x)$ است. کمیت α ، پارامتر جابجایی برای جهت r است [۱۵].

روش حل بستگی به خصوصیات توابع هدف و توابع قید دارد. یک دسته بندی ساده به صورت زیر است:

الف- برنامه ریزی خطی^۱: زمانی که هم توابع هدف و هم توابع قید به صورت خطی نسبت به متغیر طراحی x باشند یا اینکه به صورت خطی در نظر گرفته شده باشند.

ب- برنامه ریزی درجه دو^۲: زمانی که توابع هدف درجه دو هستند یا درجه دو فرض می شوند و توابع قید خطی هستند یا به صورت خطی در نظر گرفته شده باشند.

پ- برنامه ریزی غیر خطی^۳: زمانی که هم توابع هدف و هم توابع قید غیر خطی باشند.
دو روش اول برای دسته خاصی از مسائل بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرند. روش های

۱ - Linear programming

۲ - Quadratic programming

۳ - Nonlinear programming

برنامه ریزی غیر خطی متشکل است از دسته ای از الگوریتم ها که برای حل مسائل عمومی بهینه سازی مطرح شده اند. پیچیده ترین فرم مسائل بهینه سازی آنهایی هستند که شامل توابع هدف و توابع قید غیر خطی هستند. مسئله بهینه سازی شکل، یک مسئله بهینه سازی چند متغیره دارای قید است که با استفاده از الگوریتم برنامه ریزی غیر خطی به بهترین وجه قابل حل است. بر اساس اینکه مسئله بهینه سازی به چه صورت حل می شود، روش برنامه ریزی غیر خطی به دو گروه تقسیم می شود:

۱- روش های غیر مستقیم^۱: این روش ها شامل تکنیک هایی برای حل مسئله بهینه سازی اصلی با استفاده از تبدیل به یک مسئله معادل است. مثال هایی از این روش به قرار زیر است:

۱-۱- روش پنالتی یا روش های نرده ای^۲: در این روش مسئله اصلی به مسئله ای تبدیل می شود که در آن یک تابع پنالتی مقید نشده یا یک تابع افزوده^۳ به صورت بازگشتی کمینه می شود [۱۵]. می توان نشان داد که حل متوالی کمینه سازی به حل مسئله اصلی بهینه سازی می انجامد.

۱-۲- روش های دو گانه^۴: این روش ها مسئله بهینه سازی را با فرموله کردن مسئله دو گانه ای که مجهولات آن، ضرایب لاگرانژ هستند، حل می کند. از موارد شناخته شده این روش می توان به الگوریتم MMA^۵ اشاره کرد. برای اطلاعات بیشتر در این مورد می توان به مرجع [۱۶] مراجعه کرد.

۲- روش های مستقیم^۶: این روش ها مسئله بهینه سازی را بجای تبدیل به یک مسئله معادل، مستقیماً حل می کنند. مثال های از این روش عبارتند از:

-
- ۱ - Indirect method
 - ۲ - Penalty or Barrier method
 - ۳ - Augmented
 - ۴ - Dual method
 - ۵ - Method of Moving Asymptotes
 - ۶ - Direct method

۱-۲- روش های گرادیان^۱: در این روش ها، ارضای قیود با جستجوی یک خط تامین می شود. این روش ها در یک فضای امکان پذیر از مسئله کار می کنند. یکی از الگوریتم های شناخته شده از این دسته الگوریتم CONMIN^۲ است. این الگوریتم توسط پروفیسور واندرپلات^۳ و همکارانش تهیه شده است. جزئیات بیشتر را می توان در مرجع نوزدهم جستجو کرد.

۲-۲- روش های ترتیبی و بازگشتی^۴: در این روش ها مسئله بهینه سازی غیر خطی به وسیله زیر مسئله های خطی یا درجه دو، در یک نقطه تقریب زده می شوند که آنها به صورت ترتیبی حل می شوند. از الگوریتم های شناخته شده این گروه می توان SQP^۵ را نام برد. همچنین فرم خاصی از روش های ترتیبی، روش SLP^۶ است که در آن زیر مسئله ها به صورت خطی هستند [۱۷].

تقسیم بندی ارائه شده، سیمای کوچکی از روش های بهینه سازی موجود را ارائه می دهد. الگوریتم های مختلفی ممکن است برای حل مسائل بهینه سازی به کار گرفته شوند؛ متداول ترین این الگوریتم ها عبارتند از SQP، MMA و SLP. هر کدام از این روش ها مزیت ها و معایب مربوط به خود را دارد. به هر حال یک استراتژی خوب، این است که از پتانسیل های این روش ها استفاده کرده و در قالب یک روش بهینه سازی ترکیبی، آن را بکار بریم [۱۸]. در این تحقیق از روش SQP برای حل مسائل بهینه سازی استفاده شده است.

۴-۸- روش SQP

در این قسمت خلاصه ای از روش SQP ارائه می شود. با در نظر گیری بسط درجه دو سری

تیلور برای تابع $F(x)$ حول نقطه x^0 داریم:

-
- ۱ - Gradient method
 - ۲ - Constraint minimization
 - ۳ - Vanderplaats
 - ۴ - Sequential, recursive or successive method
 - ۵ - Sequential Quadratic Programming
 - ۶ - Sequential Linear Programming

$$F(x) = F(x^0) + \nabla F(x^0)^T \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T H(x^0) \delta x \quad (۴ - ۳۶)$$

که در آن $\delta x = x - x^0$ و $\nabla F(x^0)$ بردار گرادیان تابع F در نقطه x^0 است. ∇F_i به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (۴ - ۳۷)$$

همچنین ماتریس هسین^۱، $H(x^0)$ با رابطه زیر تعریف می شود:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \quad (۴ - ۳۸)$$

این چنین فرض می شود که بردار گرادیان و ماتریس هسین، در رابطه فوق معمولاً تقریب خوبی برای تابع $F(x)$ دارند، مخصوصاً زمانی که x^0 نزدیک به نقطه بهینه باشد. همانطور که قبلاً ذکر شد مسائل برنامه ریزی درجه دو، مسائلی هستند که در آن ها تابع هدف به صورت یک تابع درجه دو قیود توابع خطی فرض می شوند. در الگوریتم SQP یک روال ترتیبی برای حل زیر مسئله های درجه دو وجود دارد. توابع هدف این زیر مسئله ها همان ضرایب قسمت خطی گرادیان تابع هدف مسئله سازی اصلی است؛ در حالی که برای قسمت درجه دو از تقریب زنی هسین، برای ضرایب لاگرانژ تابع هدف مسئله اصلی، استفاده می شود. قیود زیر مسئله ها، تقریبی خطی از مسئله اصلی می باشد. می توان نشان داد که بردار r به دست آمده از حل زیر مسئله ها، که در x تعریف می شود، برداری است که جهت آن به صورت تقریبی به سمت نقطه کمینه یا بیشینه محلی برای تابع هدف، می باشد؛ مخصوصاً زمانی که x^0 نزدیک به نقطه اکسترمم باشد. با مشخص شدن جهت r ، یک مسئله جهت یابی یک بعدی برای به هنگام کردن متغیر ها حل می شود. از یک تابع پنالتی خارجی برای نگه داشتن جهت r در محدوده مجاز استفاده می شود [۱۵]. توضیحات

۱ - Hessian matrix

بیشتر در این مورد را می توان در مراجع ۴ و ۱۲ یافت، اما به طور خلاصه مراحل کار به صورت زیر است:

- ۱- تعیین یک جواب اولیه برای x_i^0 .
- ۲- یک تقریب اولیه برای ماتریس هسین از قسمت درجه دو تابع هدف.
- ۳- حل یک زیر مسئله جهت یابی برای r با حل زیر مسئله های درجه دو.
- ۴- انجام یک جستجوی یک بعدی برای کمینه کردن تابع پناالتی خارجی.
- ۵- به هنگام کردن جواب ها.
- ۶- کنترل همگرایی؛ اگر جواب کمینه محلی پیدا شد، متوقف می شود و اگر نه به مرحله دوم بر می گردد.

فصل پنجم:

بررسی مثال ها

۵-۱ مقدمه

اهداف اصلی از انجام این پایان نامه را می توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش اول بررسی و تعمیم روش تحلیل ایزوژئومتریك برای سازه های با تقارن محوری و بخش دوم بهینه سازی شکل اینگونه از سازه ها با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریك می باشد.

تحلیل ایزوژئومتریك و فرمول بندی آن در فصل سوم بطور کامل مورد بحث قرار گرفت؛ همچنین در راستای اهداف این پایان نامه برنامه ای کامپیوتری به نام IsoOptimizer به زبان فرترن تهیه شد، که قادر به تحلیل سازه های دو بعدی، در حالت تنش مسطح، کرنش مسطح و همچنین سازه های دارای تقارن محوری به روش ایزوژئومتریك می باشد. برای نشان دادن صحت تحلیل های انجام شده به وسیله این برنامه مثالهایی در انواع مختلف مورد تحلیل قرار گرفته، و با حل دقیق و یا حل اجزای محدود با استفاده از نرم افزار های موجود در این زمینه مانند انسیس^۱ مورد مقایسه قرار

^۱ -Ansys

گرفته است.

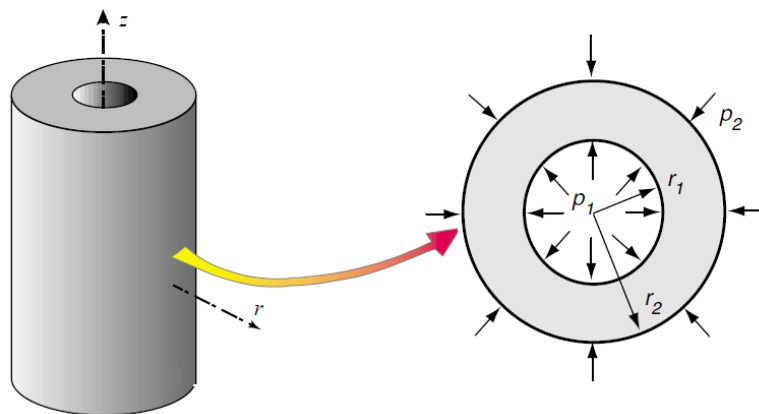
همچنین برای حل مسائل بهینه سازی شکل سازه ها از سابروتنه‌های DOT، که توسط پروفیسور وندریپلات نوشته شده است استفاده گردیده؛ بنابراین برنامه قادر به حل مسائل بهینه سازی به سه روش MMFD، SLP و SQP می باشد.

در ادامه این فصل ابتدا به ارائه مثال هایی می پردازیم که در آنها سازه های متقارن محوری با استفاده از روش ایزوژئومتریک مورد تحلیل قرار گرفته اند. و سپس نمونه هایی از مسائل بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری مورد بررسی قرار می گیرند.

۵-۱-۱- لوله بلند جدار ضخیم

یکی از مسائلی که معمولاً برای کنترل صحت تحلیل های انجام شده توسط برنامه های اجزای محدود مورد بررسی قرار می گیرد، لوله بلند جدار ضخیم، تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت می باشد. این مسئله با استفاده از برنامه IsoOptimizer مورد بررسی قرار گرفته که نتایج آن در این قسمت مورد بررسی قرار می گیرد.

این مسئله شامل یک لوله بلند به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 می باشد. (شکل ۵-۱) این مسئله علاوه بر داشتن شرایط تقارن محوری، به دلیل بلند بودن طول لوله کرنش در جهت محور Z ها معلوم و برابر صفر می باشد.



شکل ۵-۱- لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی.

حل دقیق:

حل دقیق این مسئله به کمک تئوری الاستیسیته انجام شده است به صورت زیر است [۱۹]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2}\end{aligned}\quad (۱ - ۵)$$

و با استفاده از رابطه کرنش تغییر مکان و همچنین قانون هوک تغییر مکان شعاعی بصورت زیر

محاسبه می شود:

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \left[-\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} + (1-2\nu) \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r \right] \quad (۲ - ۵)$$

که در روابط فوق E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسان، r_1 شعاع داخلی، r_2 شعاع خارجی،

p_1 فشار وارده بر سطح لوله و p_2 فشار وارده بر سطح خارجی لوله می باشد.

حل دقیق این مسئله با فرض بکار بردن مصالحی با $E = 2 \times 10^5$ و $\nu = 0.3$ انجام شده است.

همچنین شعاع داخلی $r_1 = 5$ ، شعاع خارجی $r_2 = 6.25$ (ضخامت 1.25)، فشار داخلی $p_1 = 20$ و

فشار خارجی $p_2 = 10$ می باشد.

کانتورهای تغییر مکان شعاعی و همچنین تنش های ایجاد شده در جسم که با استفاده از حل

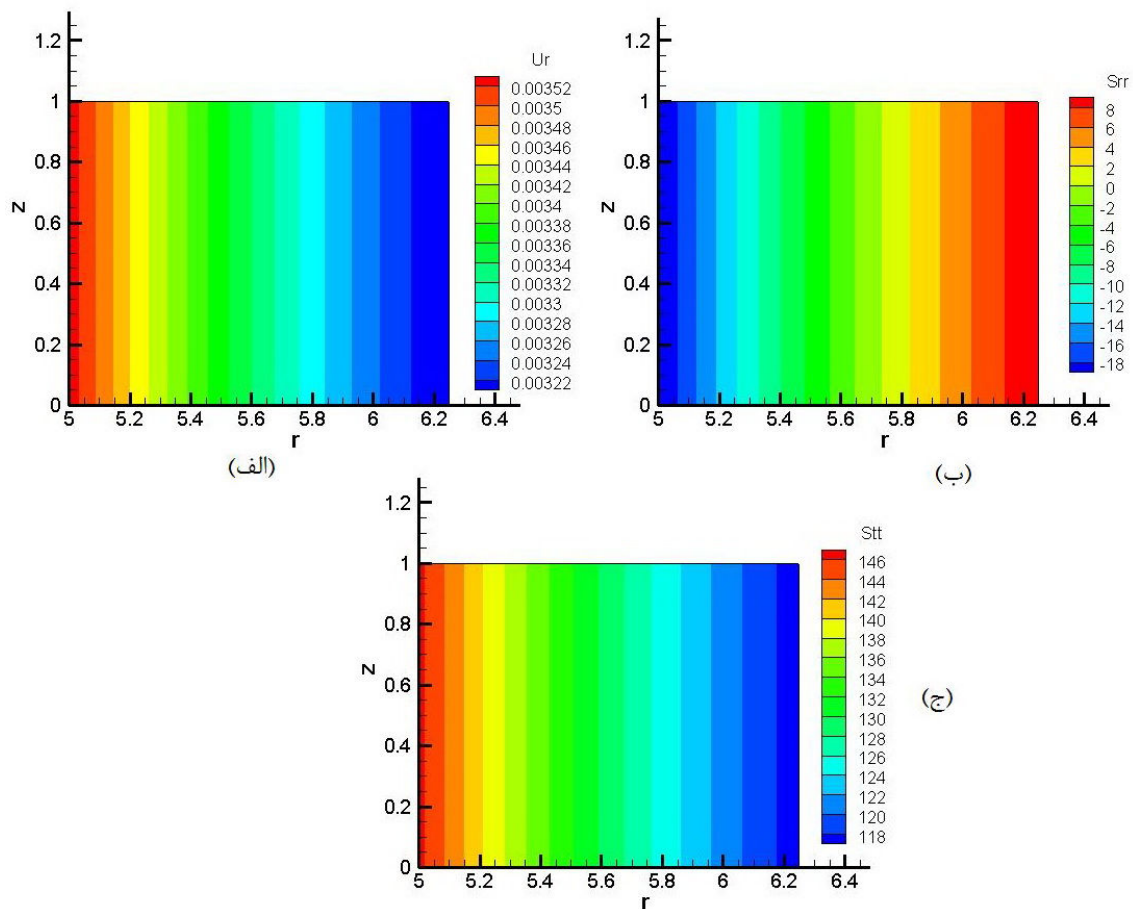
دقیق بدست آمده اند در شکل ۲-۵ نشان داده شده است.

حل ایزوژئومتریکی :

برای مدل کردن این مسئله در ایزوژئومتریکی از یک زیر دامنه نریز استفاده شده است. مدل

تحلیلی این مسئله بصورت یک مستطیل با عرض $1/25$ و ارتفاع واحد می باشد. برای مدل سازی

هندسی و تحلیلی این جسم از ۳۳ نقطه کنترلی نریز استفاده شده است؛ بطوری که در جهت شعاعی از ۱۱ نقطه کنترلی و در جهت z از ۳ نقطه کنترلی بهره برده شده است. (شکل ۵-۳) در هنگام مدل سازی این مسئله بایستی به این نکته توجه داشت که به دلیل بلند بودن طول لوله کرنش در جهت z صفر می باشد، بنابراین بایستی تعداد نقاط کنترلی و درجه توابع پایه ای نریز در جهت z به گونه ای انتخاب شود که در این جهت فقط یک المان نریز تولید شود.

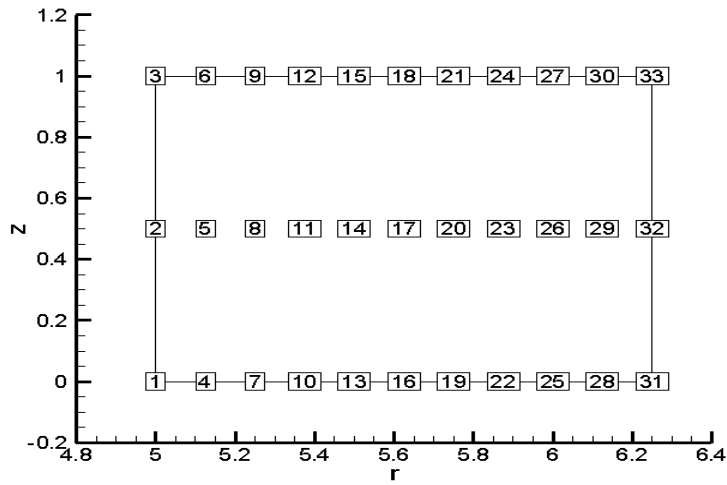


شکل ۵-۲- کانتورهای تغییر مکان و تنش های ایجاد شده در جسم مربوط به حل دقیق مسئله. (الف) کانتور تغییر مکان، (ب) کانتور تنش های شعاعی، (ج) کانتور تنش های مماسی.

در این مثال درجه توابع پایه ای نریز در جهت بردار گره ای ξ_1 (جهت شعاعی)، از درجه ۳ و در جهت بردار گره ای η_1 (جهت z) از درجه ۲ در نظر گرفته شده است. مختصات بردارهای گره ای به صورت زیر است:

$$\xi = \{0, 0, 0, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, 1, 1, 1\}$$

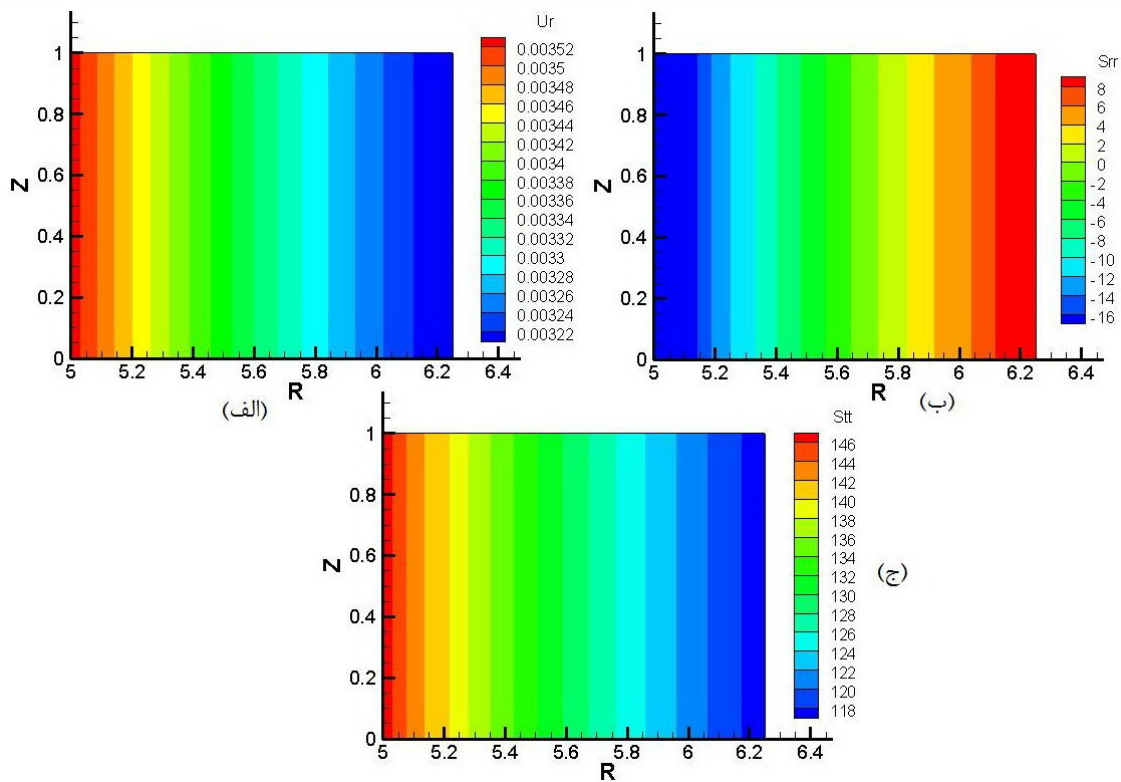
$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$



شکل ۵-۳- نحوه قرار گیری نقاط کنترلی.

کانتورهای تغییر مکان و تنش ها، که با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک بدست آمده در

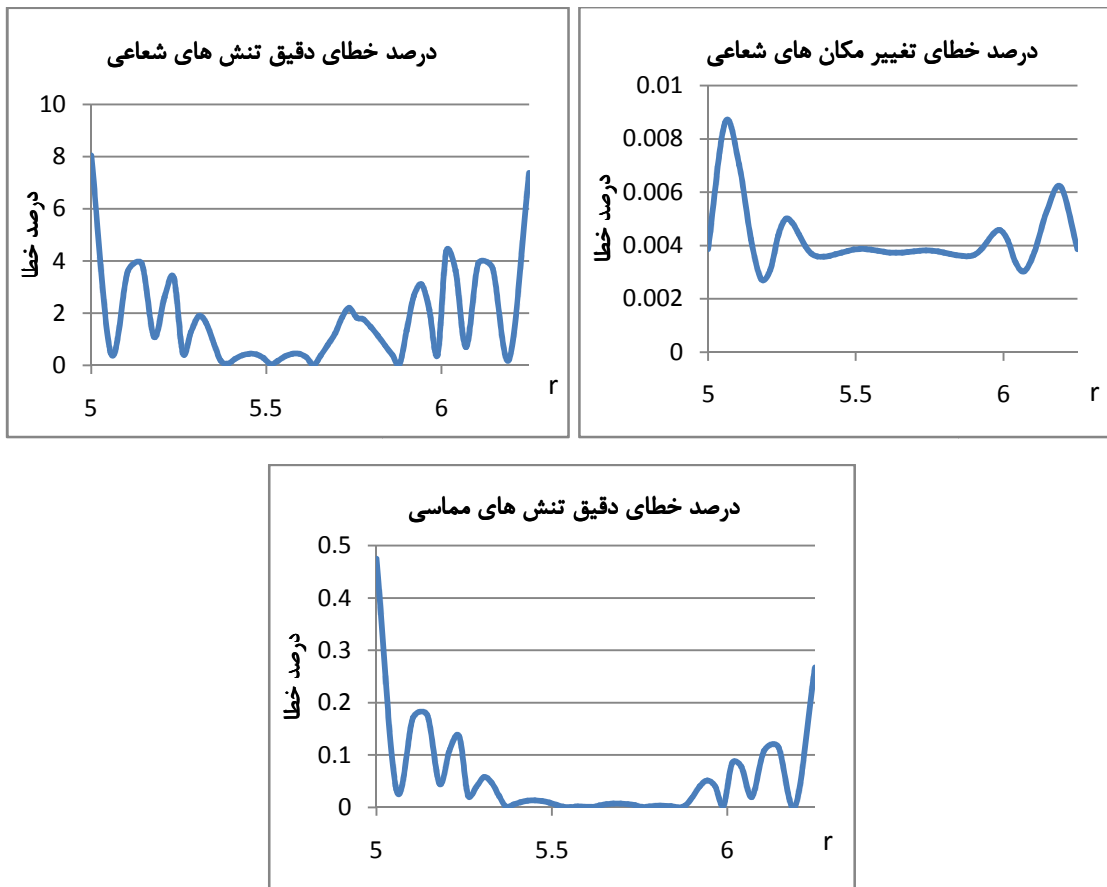
شکل ۵-۴ قابل مشاهده است.



شکل ۵-۴- کانتور های تغییر مکان و تنش های ایجاد شده در جسم مربوط به حل ایزوژئومتریک. (الف) کانتور تغییر

مکان های شعاعی، (ب) تنش های شعاعی، (ج) تنش های مماسی.

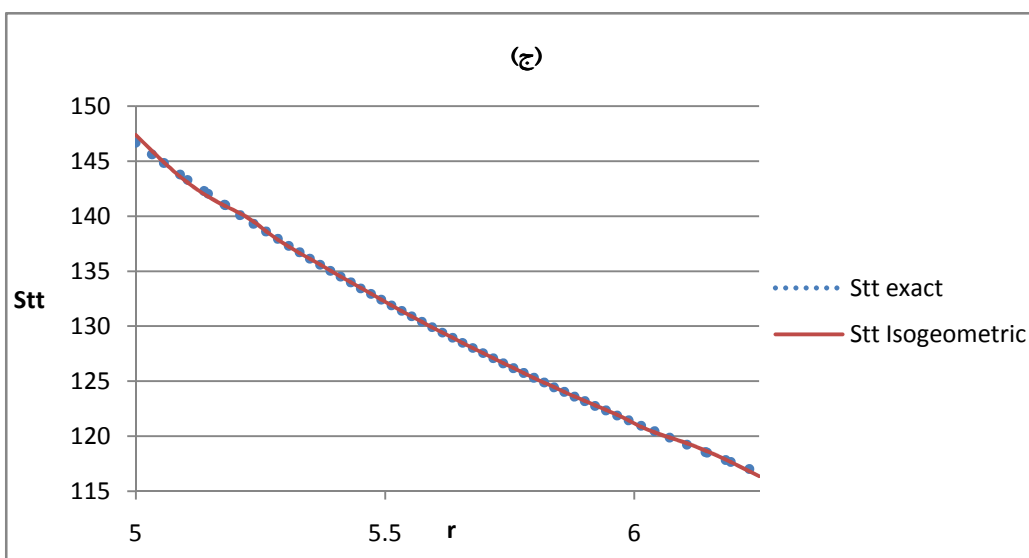
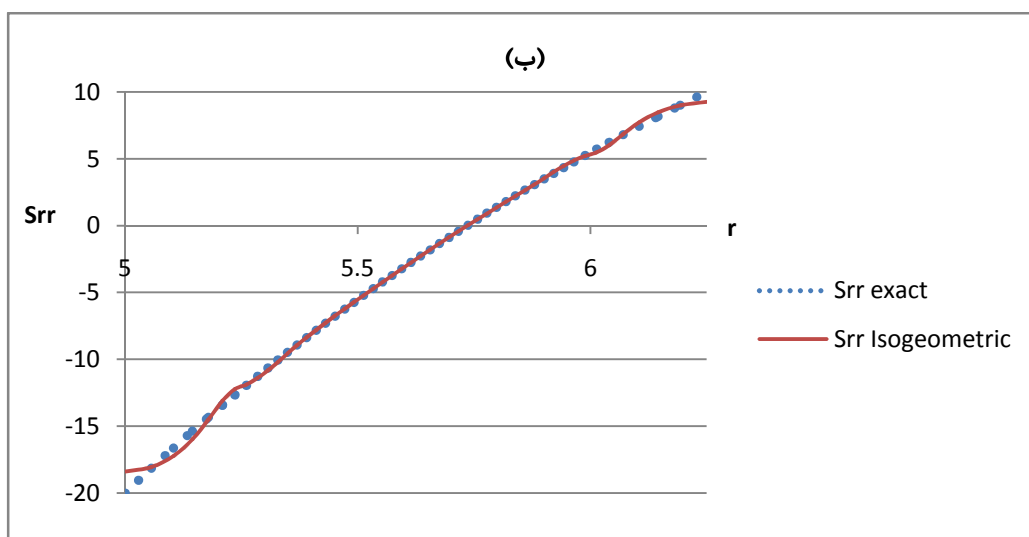
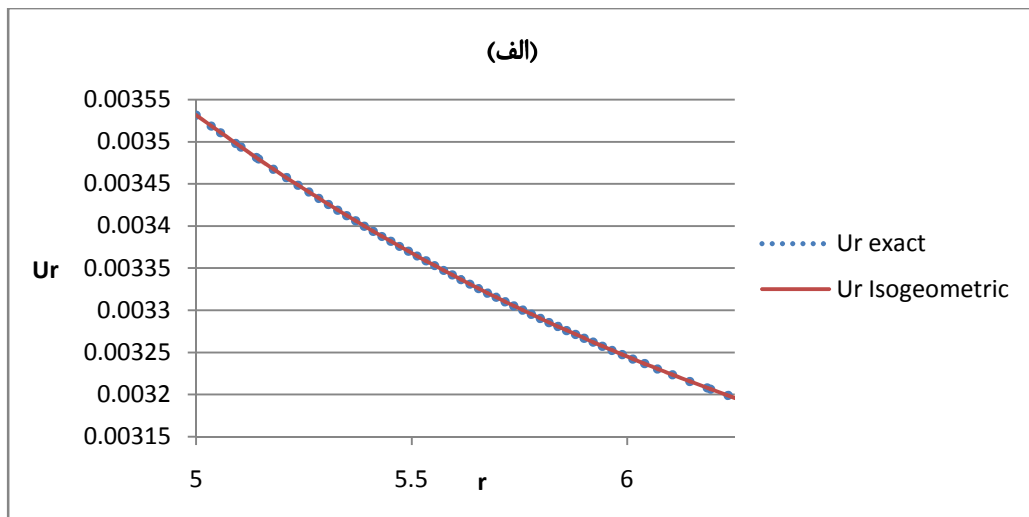
درصد خطای تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریکی به ازای تغییرات در جهت شعاعی در شکل ۵-۵ ارائه شده است. با توجه به مستقل بودن این تغییرات از مختصات z این نمودارها برای قسمت پایینی مدل (در $z = 0$) رسم شده است.



شکل ۵-۵- نمودارهای نشان دهنده خطای تحلیل به صورت درصد خطا.

ملاحظه می شود درصد خطای تغییر مکان شعاعی بسیار کم می باشد؛ و جواب های بدست آمده بسیار نزدیک به جواب دقیق می باشد. اما نرم خطای تنش ها در نواحی نزدیک به مرزها مقداری افزایش یافته است. نمودار مقایسه ای بین تغییر مکان ها و تنش های بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و حل دقیق در شکل ۵-۶ قابل ملاحظه است.

همانطور که در نمودارهای شکل ۵-۵ و شکل ۵-۶ مشخص است؛ حل انجام شده به وسیله برنامه ایزوژئومتریکی انطباق خوبی با حل دقیق دارد؛ که این نشان دهنده صحت نتایج تحلیل برنامه کامپیوتری است.



شکل ۵-۶- مقایسه تغییر مکان ها و تنش های بدست آمده از حل دقیق و حل ایزوژئومتریکی. (الف) مقایسه تغییر مکان های شعاعی، (ب) مقایسه تنش های شعاعی، (ج) مقایسه تنش های مماسی.

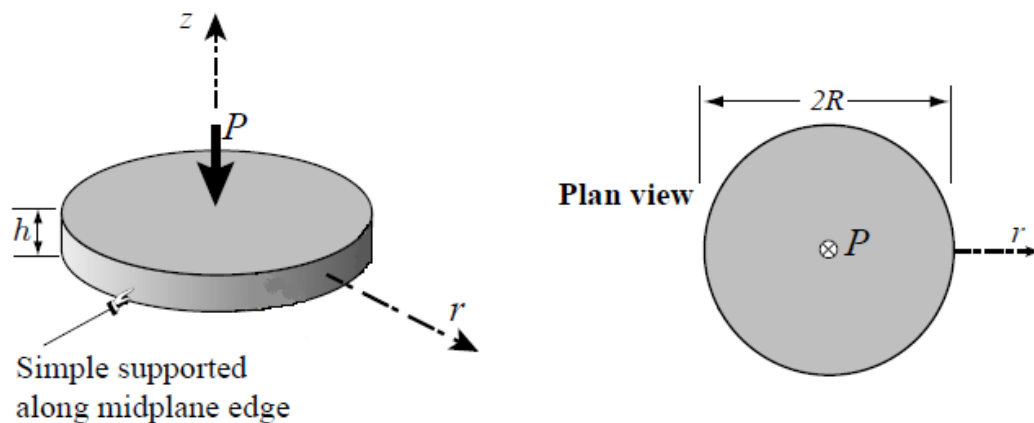
۵-۱-۲- صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز

یکی دیگر از مسائلی که برای کنترل صحت نتایج برنامه تحلیل ایزوژئومتریکی سازه های متقارن محوری بکار برده شده است؛ صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز می باشد. در این مسئله یک بار متمرکز در مرکز صفحه قرار می گیرد و لبه های خارجی به وسیله تکیه گاه های مفصلی مقید می شود.

این مسئله با استفاده از برنامه نوشته شده برای تحلیل ایزوژئومتریکی، مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج آن با نتایج نرم افزار تحلیل اجزای محدود/انسیس^۱ مورد مقایسه قرار گرفته است.
تعریف مسئله:

این مسئله شامل یک صفحه دایره ای شکل به شعاع $R = 10$ و ضخامت $h = 1$ می باشد که بار متمرکز $p = 10$ در مرکز آن قرار گرفته است. (شکل ۵-۷)

همچنین مدول الاستیسیته برابر $E = 1000$ و ضریب پواسان $\nu = 0.3$ می باشد.



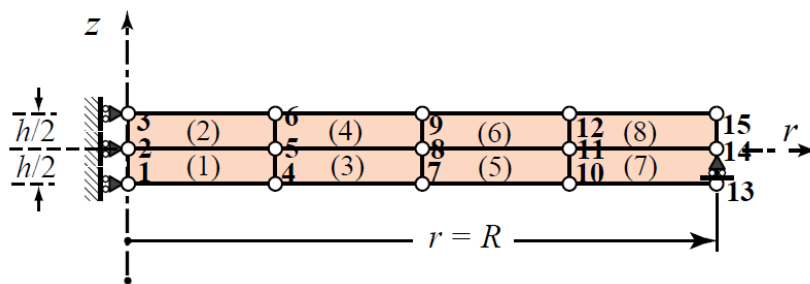
شکل ۵-۷- صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز.

حل اجزای محدود:

برای حل اجزای محدود این مسئله از نرم افزار انسیس که نرم افزاری بسیار معتبر در زمینه تحلیل اجزای محدود می باشد کمک گرفته شده است. مدل مورد استفاده برای تحلیل این مسئله

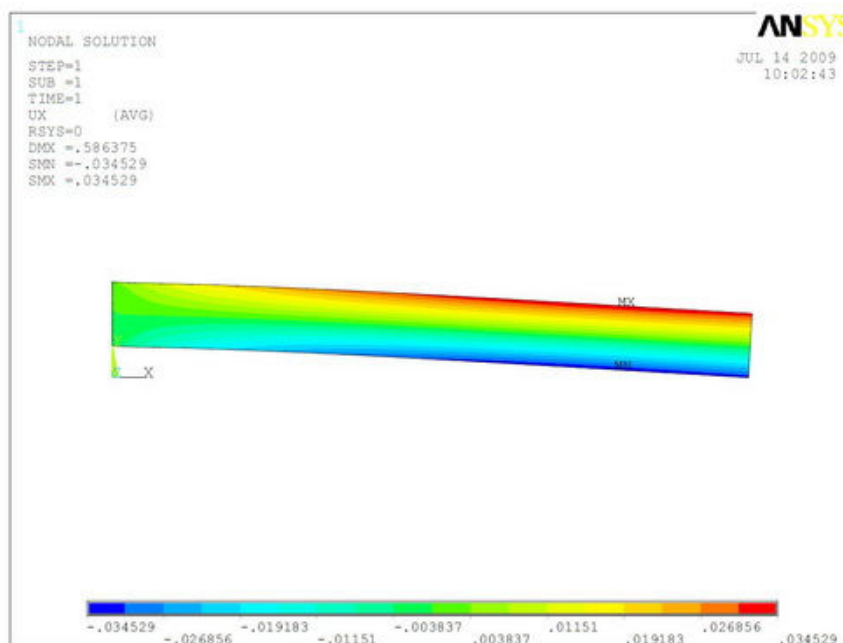
^۱ - Ansys

بصورت یک مستطیل می باشد که لبه بیرونی آن به در میانه ارتفاع به وسیله تکیه گاه های مفصلی مقید شده است. همچنین لبه داخلی آن که در حقیقت محور تقارن جسم و محل اعمال نیرو می باشد، در جهت شعاعی مقید شده است. در این لبه نیروی متمرکز بین نقاط گره ای المان ها مرزی توزیع شده است. شکل ۸-۵ نشان دهنده مدل اجزای محدود جسم می باشد که به دلیل اینکه شکل وضوح بیشتری داشته باشد از تعداد المان های کمتری استفاده شده است اما در عمل برای بالا بردن دقت نتایج تعداد المان ها بیشتر می باشند.

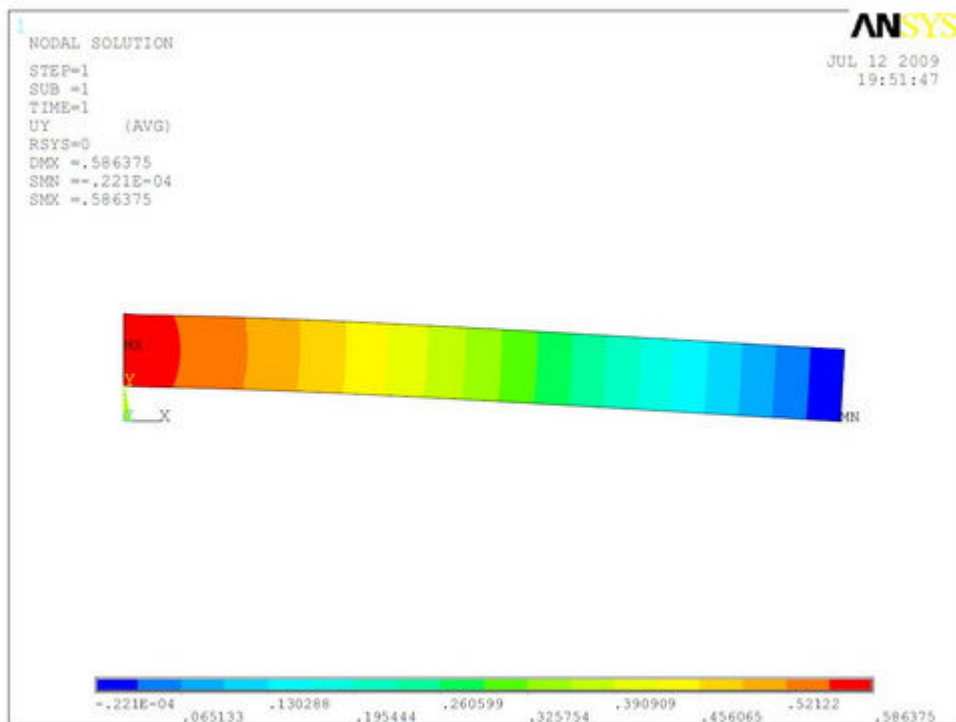


شکل ۸-۵- مدل اجزای محدود صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز.

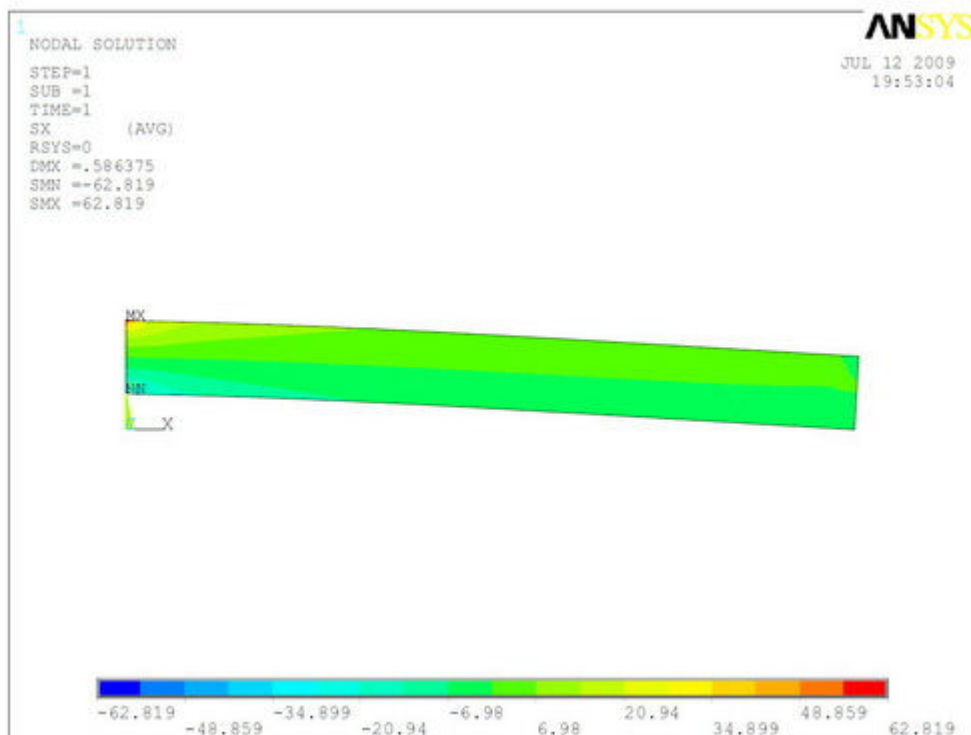
کانتور های تغییر مکان های شعاعی و تغییر مکان های در جهت محور z ها و همچنین تنش های ایجاد شده در جسم، در شکل ۹-۵ تا شکل ۱۲-۵ نشان داده شده است.



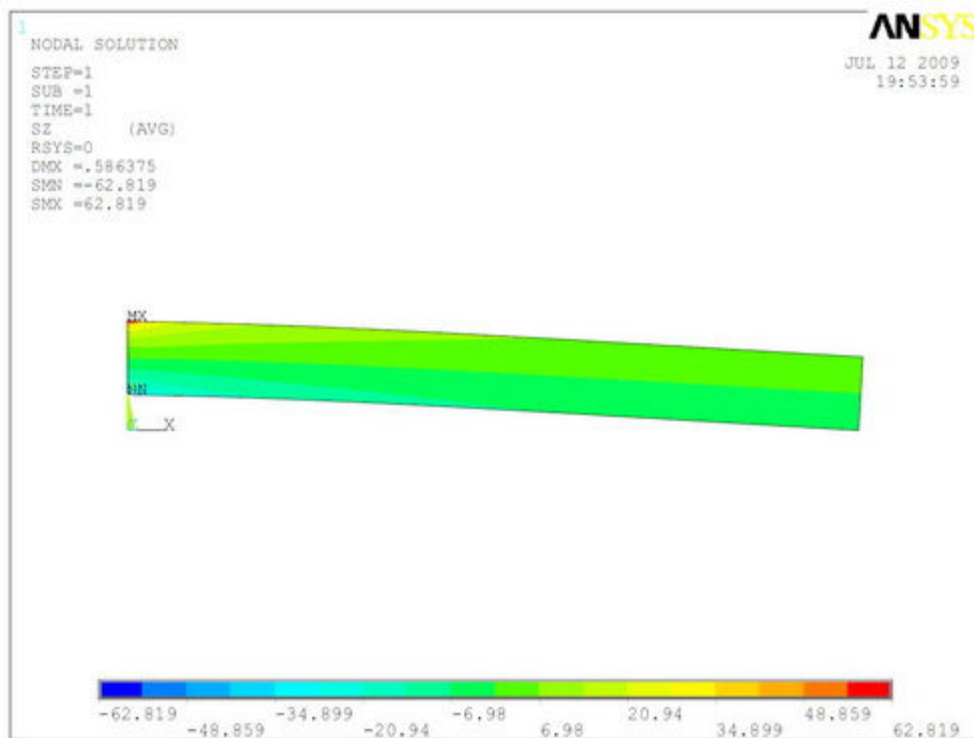
شکل ۹-۵- کانتور تغییر مکان های شعاعی برای صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز.



شکل ۵-۱۰- کانتور تغییر مکان ها در جهت محور Zها برای صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز.



شکل ۵-۱۱- کانتور تنش های شعاعی ایجاد شده در صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز.

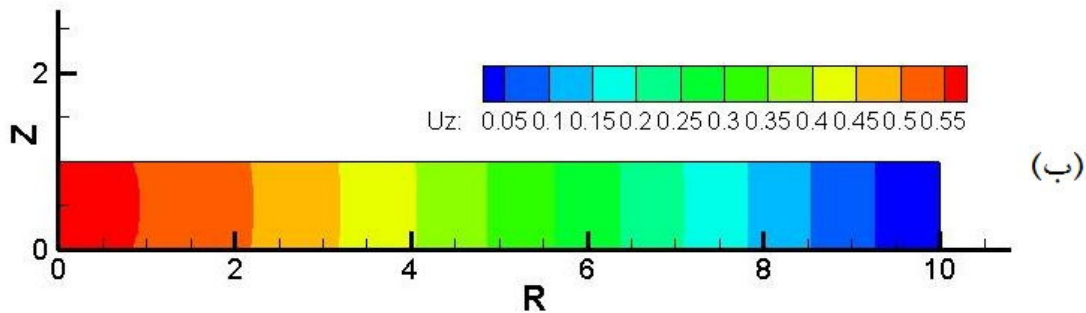
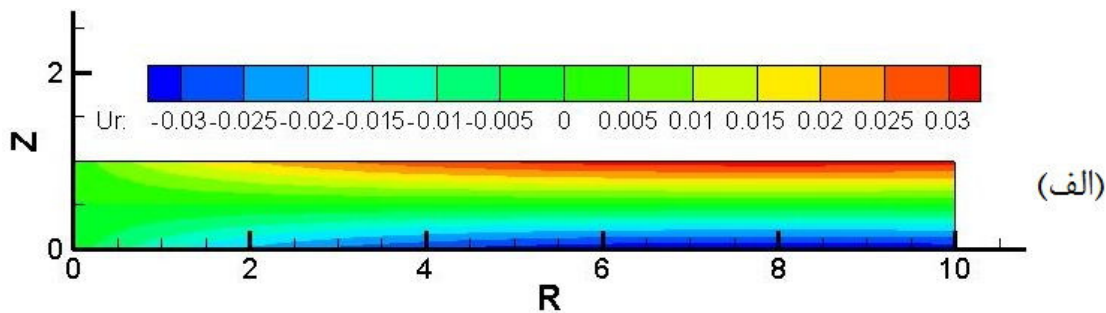


شکل ۵-۱۲- کانتور تنش های مماسی ایجاد شده در صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز.

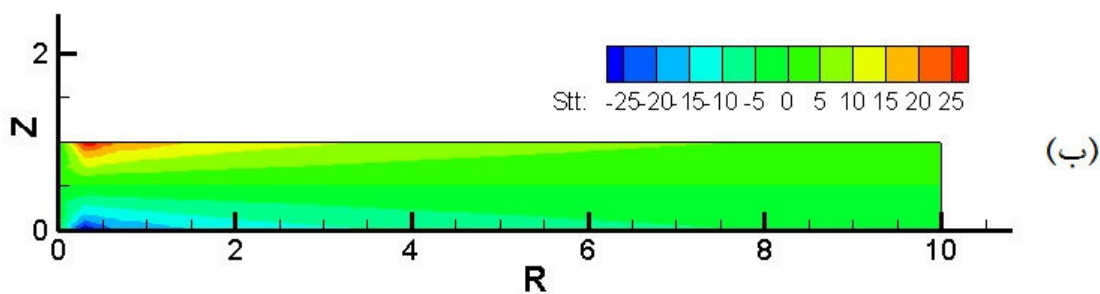
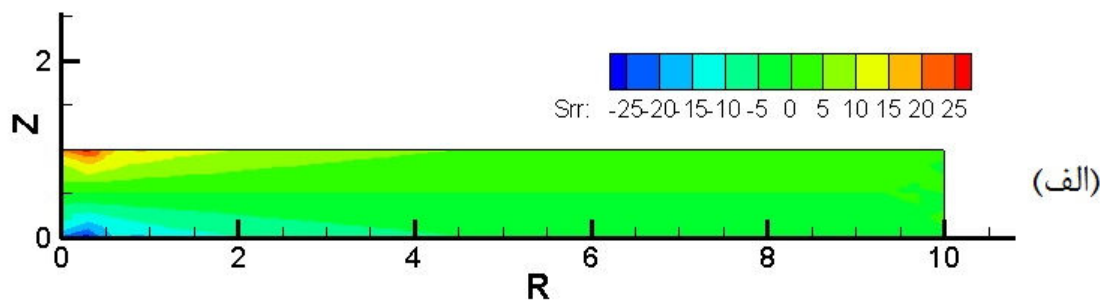
حل ایزوژئومتریکی:

برای مدل سازی این مسئله در ایزوژئومتریک از یک زیر دامنه نریز استفاده شده است. برای مدل کردن این مسئله از ۲۱۰ نقطه کنترلی استفاده شده است. تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۳۰ و در جهت محور Zها برابر ۷ می باشد. درجه توابع پایه ای نریز در هر دو جهت ξ و η (بردارهای گره ای) برابر ۳ می باشد. بنابراین با توجه به رابطه $m = n + p + 1$ تعداد مولفه های بردارهای گره ای در جهت ξ برابر ۳۴ و در جهت η برابر ۱۱ می باشد.

نتایج حاصل از حل ایزوژئومتریکی بصورت کانتورهای تغییر مکان های شعاعی و تغییر مکان های در جهت محور Zها در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده است. همچنین شکل ۵-۱۴ نشان دهنده تنش های ایجاد شده در جسم است.



شکل ۵-۱۳- کانتور های تغییر مکان حل ایزوژئومتریکی، (الف) کانتور تغییر مکان شعاعی، (ب) کانتور تغییر مکان در جهت محور zها.

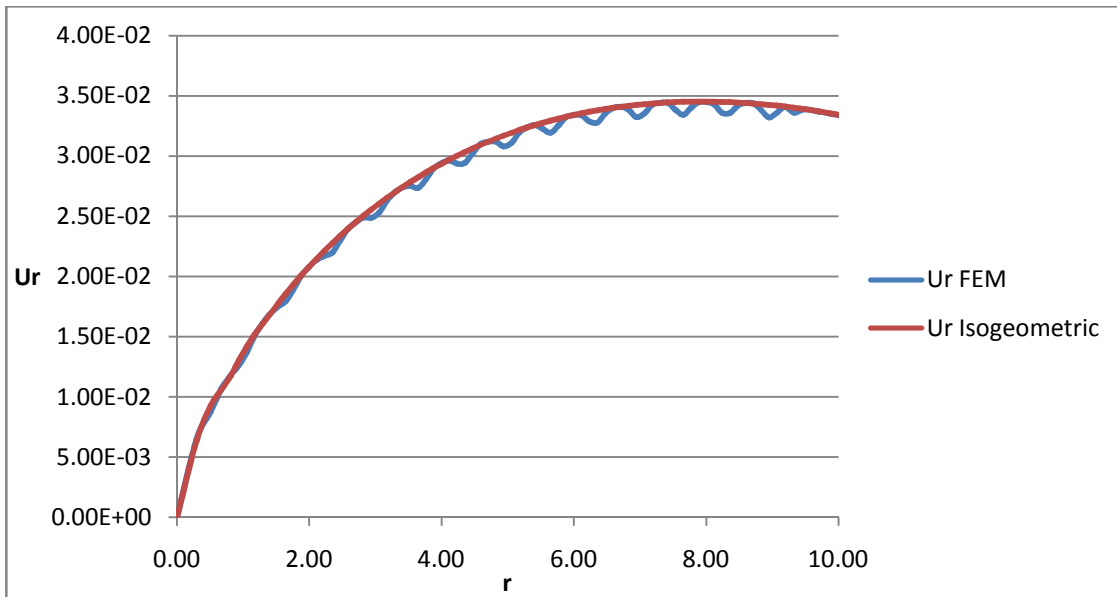


شکل ۵-۱۴- کانتور های تنش های ایجاد شده در جسم ناشی از حل ایزوژئومتریکی، (الف) تنش های شعاعی، (ب) تنش های مماسی.

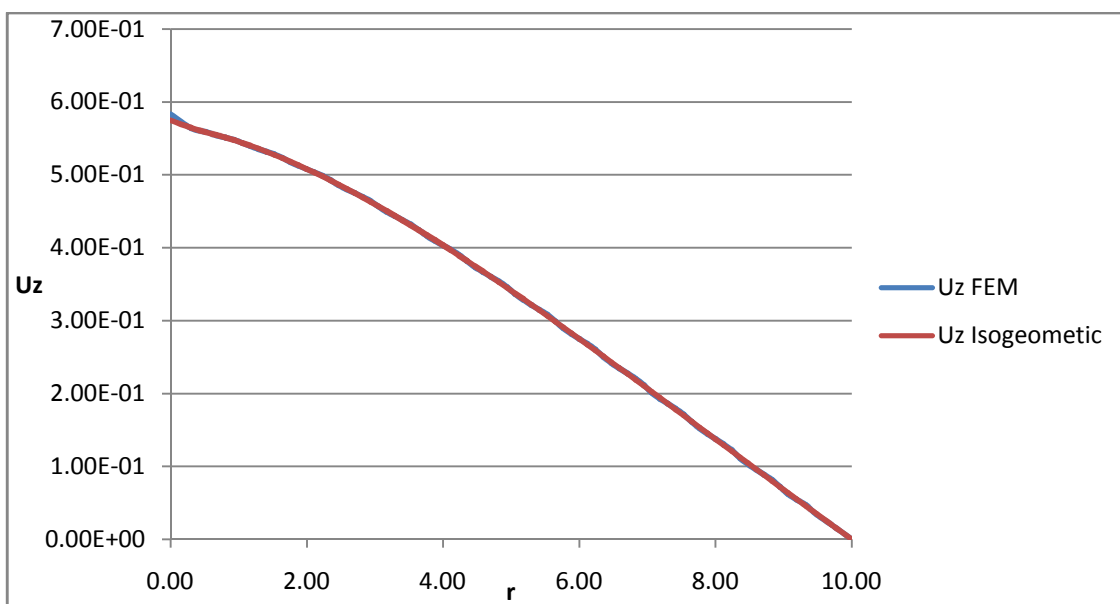
نمودار های مقایسه ای بین نتایج بدست آمده از حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی در

شکل ۵-۱۵ تا شکل ۵-۱۸ ارائه شده است. این نمودارها در $z = 1$ یعنی قسمت بالایی جسم به ازای

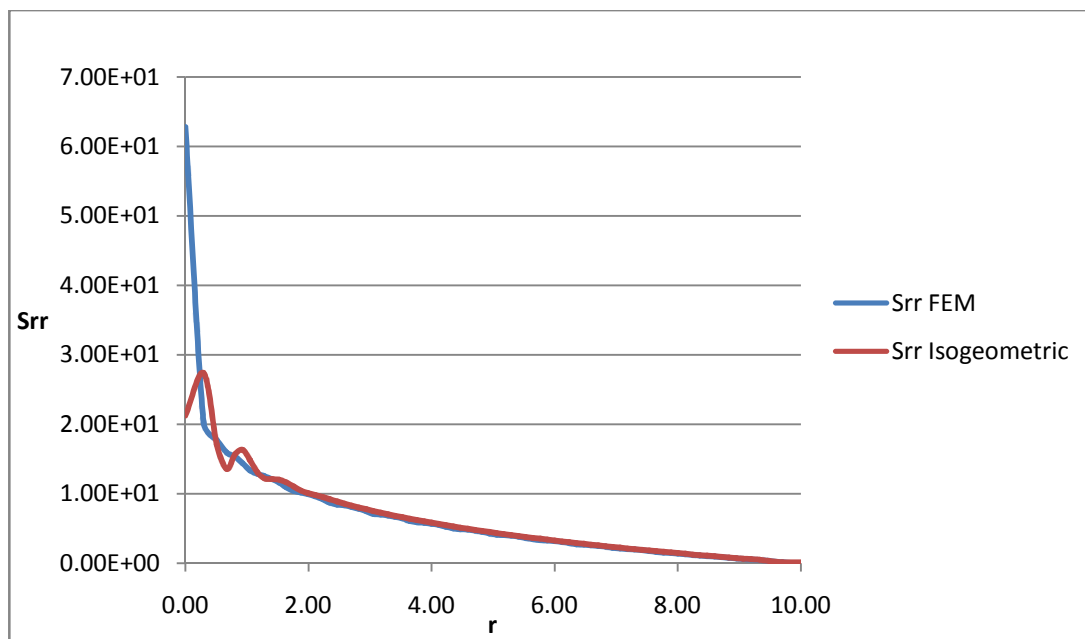
تغییرات شعاعی رسم شده اند.



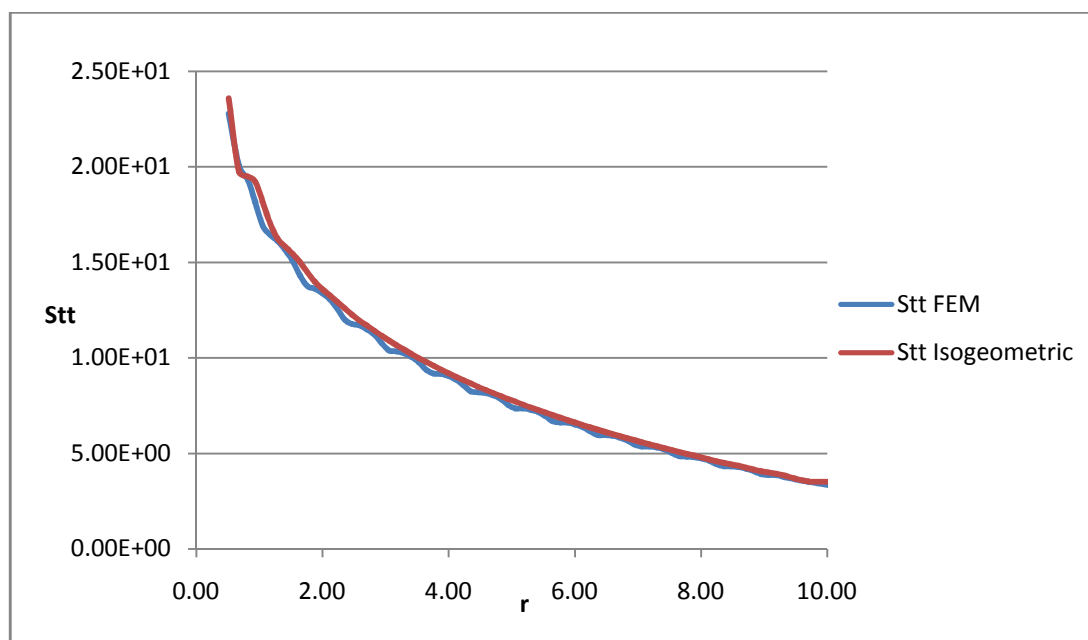
شکل ۵-۱۵- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تغییر مکان های شعاعی.



شکل ۵-۱۶- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تغییر مکان های در جهت z.



شکل ۵-۱۷- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تنش های شعاعی.



شکل ۵-۱۸- نمودار مقایسه ای بین نتایج حل اجزای محدود و حل ایزوژئومتریکی برای تنش های مماسی.

همانطور که قبلا ذکر شد، یکی دیگر از اهداف این پایان نامه استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی در بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری می باشد. در این راستا برای حل مسائل بهینه سازی سازه ها از سابروتینهای DOT استفاده شده است. DOT زیرروال یا سابروتینی است که به زبان برنامه

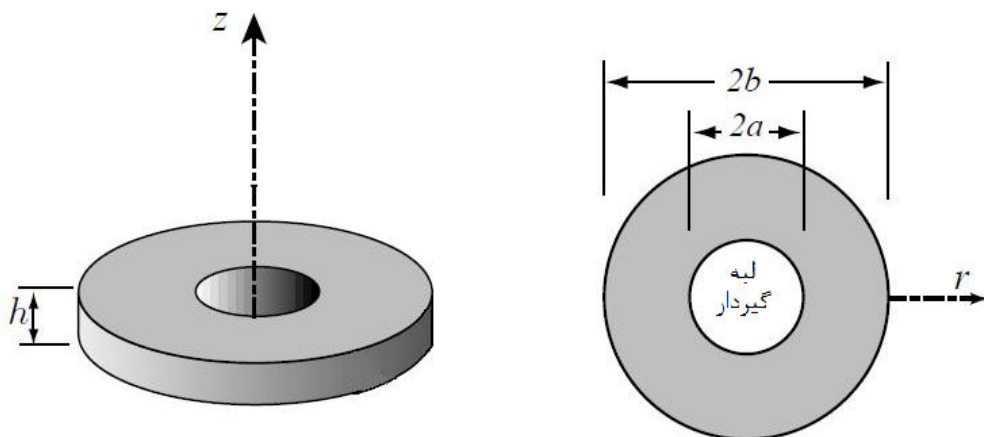
نویسی فرتن توسط پروفیسور وندریلات نوشته شده. و قادر است مسائل بهینه سازی مقید را با استفاده از سه روش MMFD، SLP و SQP حل نماید.

برای استفاده از این سابروتینها ابتدا بایستی سابروتینهای دیگری نوشته شود که قادر به محاسبه مقدار تابع هدف، مقدار قیود و بهنگام سازی مقدار متغیرهای طراحی باشد. سپس به وسیله یک برنامه اصلی ارتباط بین سابروتینهای ذکر شده، سابروتینهای DOT و همچنین برنامه تحلیل ایروژئومتریک را برقرار کرد؛ تا بتوان مسائل بهینه سازی سازه ها را حل نمود.

مثال هایی از سازه های متقارن محوری که با استفاده از همین روش عملیات بهینه سازی روی آنها انجام شده است، در این قسمت مورد بررسی قرار می گیرند.

۵-۱-۳- صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در مرکز

اولین مثالی که در این راستا مورد بررسی قرار می گیرد صفحه ای دایره ای شکل به شعاع خارجی ۴۰ و شعاع داخلی ۱۰ می باشد (شکل ۵-۱۹). که در لبه داخلی به وسیله تکیه گاه گیردار مقید شده است.



شکل ۵-۱۹- شکل اولیه صفحه دایره ای شکل، دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی.

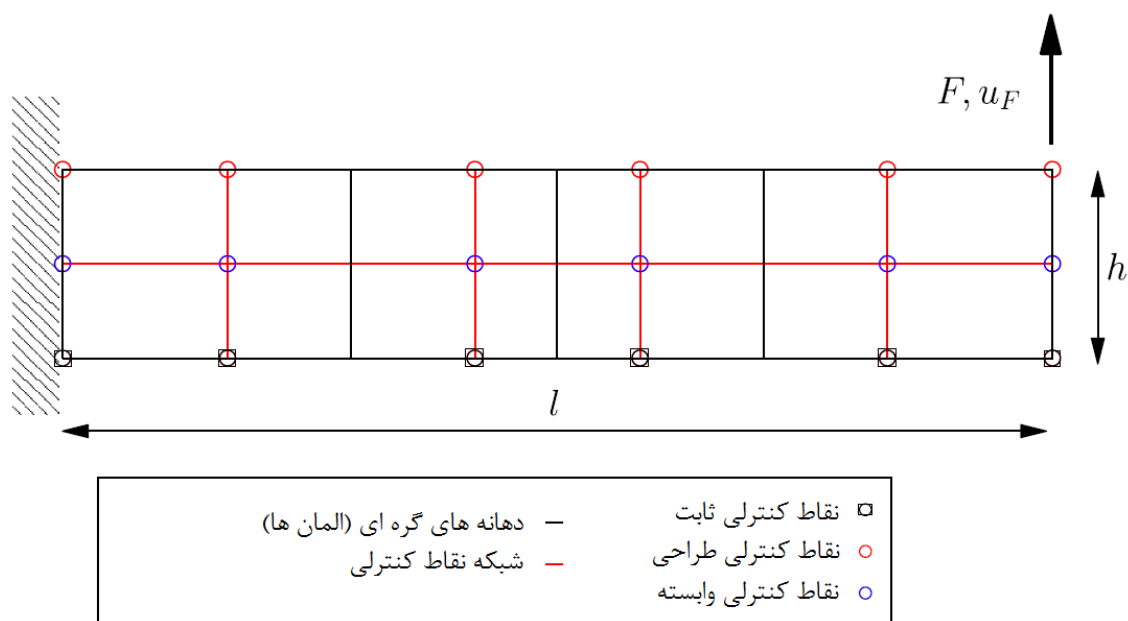
ارتفاع این صفحه در حالت اولیه برابر ۷ در نظر گرفته شده؛ همچنین این صفحه تحت تاثیر بار خطی عمودی در لبه خارجی خود به شدت $F = 10$ بر واحد طول می باشد.

تابع هدف در این مسئله بهینه سازی مینیمم کردن تغییر مکان های عمودی لبه خارجی جسم

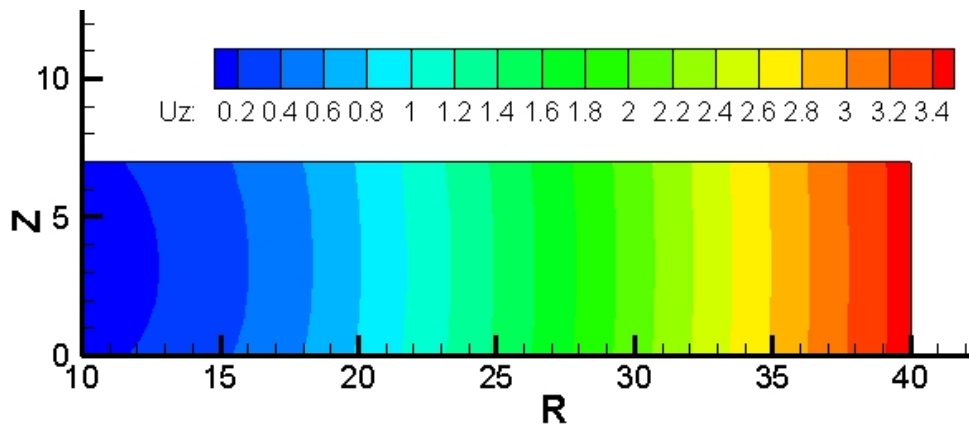
یعنی محل اعمال نیرو می باشد. با این قید که سطح مقطع استفاده شده ۷۰٪ حداکثر سطح مقطع تعریف شده یعنی ۳۰۰ باشد. مدل اولیه این مسئله با توجه به دارا بودن تقارن محوری، به شکل مستطیلی به طول ۳۰ و ارتفاع ۶ می باشد که دامنه تغییرات ارتفاع در فرآیند بهینه سازی حداکثر ۱۰ و حداقل ۱/۵ در نظر گرفته شده است.

برای مدل سازی این جسم در ایزوژئومتریک از ۱۸ نقطه کنترلی استفاده شده، بطوری که تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۶ و در جهت ارتفاعی برابر ۳ می باشد.

متغیرهای طراحی در این مسئله موقعیت نقاط کنترلی ردیف بالایی شکل می باشد که این نقاط کنترلی می توانند در جهت z حرکت کنند. موقعیت نقاط کنترلی ردیف پایین ثابت در نظر گرفته شده و همچنین همانطور که در شکل ۵-۲۰ مشاهده می شود اگر نقاط کنترلی ردیف بالایی که به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده به سمت پایین حرکت کنند این احتمال وجود دارد که از نقاط کنترلی ردیف میانی عبور کنند؛ به همین دلیل نقاط کنترلی ردیف میانی به عنوان متغیرهای طراحی وابسته در نظر گرفته شده است؛ به این صورت که همواره موقعیت این نقاط کنترلی به نوعی تنظیم شود که در نقطه میانی بین نقاط کنترلی ردیف بالا و پایین واقع شود.



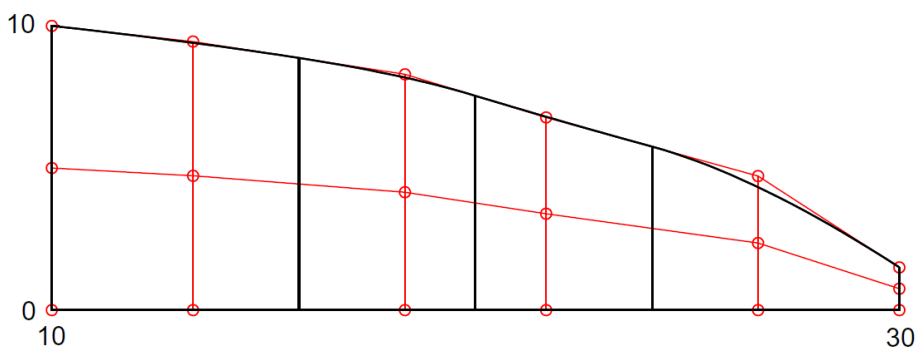
شکل ۵-۲۰- صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی و ارتفاع اولیه ۷.



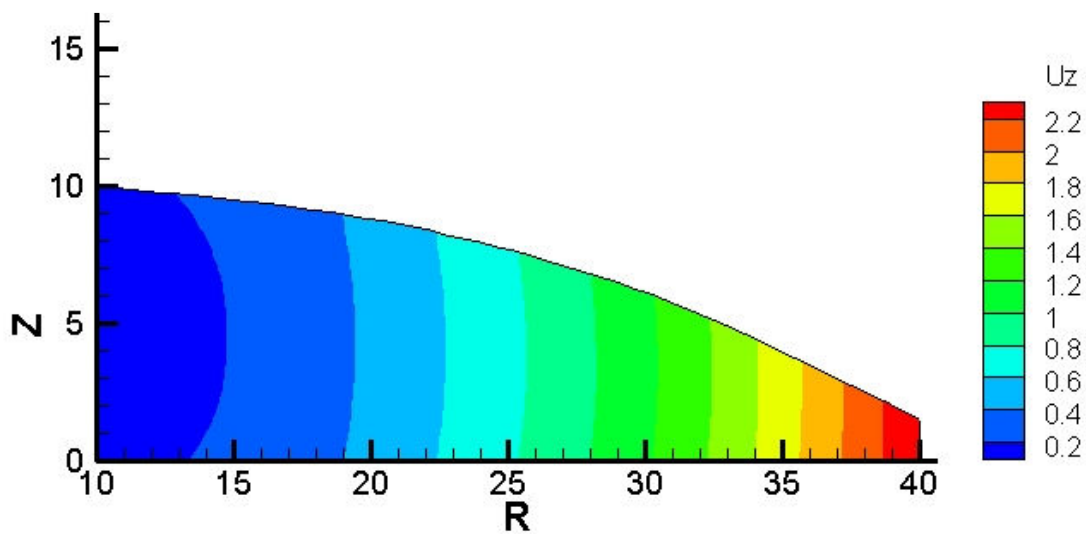
شکل ۵-۲۱ - کانتور تغییر مکان عمودی صفحه دایره ای شکل برای طرح اولیه.

بهینه سازی این مسئله با استفاده از روش SQP انجام شده است که نتیجه نهایی آن بصورت

شکل ۵-۲۲ و شکل ۵-۲۳ می باشد.



شکل ۵-۲۲ - طرح بهینه صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی.



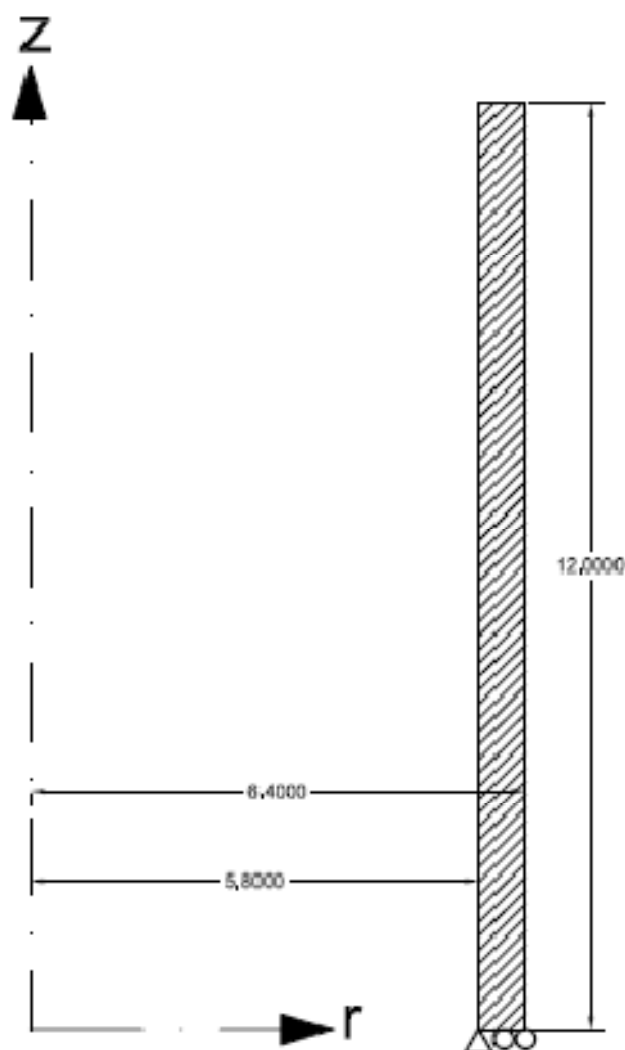
شکل ۵-۲۳ - کانتور تغییر مکان های عمودی صفحه دایره ای شکل بهینه شده.

همانطور که ملاحظه می شود در این مسئله با استفاده از تعداد بسیار کمی متغیر طراحی در مقایسه با روش های بهینه سازی مبتنی بر اجزای محدود جواب بهینه حاصل شد. بطوری که در روش های مبتنی بر اجزای محدود تعداد متغیر طراحی برابر با تعداد نقاط گره ای قرار گرفته بر روی مرزها می باشد.

همچنین در مقایسه با روش بهینه سازی با استفاده از تغییرات مرزی که در آنها برای کم کردن متغیرهای طراحی، مرزها سازه به وسیله منحنی های بی-اسپلاین تعریف می شوند؛ این مزیت در استفاده از تحلیل ایزوژئومتریك وجود دارد که مانند روش تغییرات مرزی در هر تکرار نیاز به المان بندی دوباره وجود ندارد. نیاز به المان بندی در هر تکرار باعث افزایش هزینه های محاسباتی و همچنین زمان محاسبه می شود.

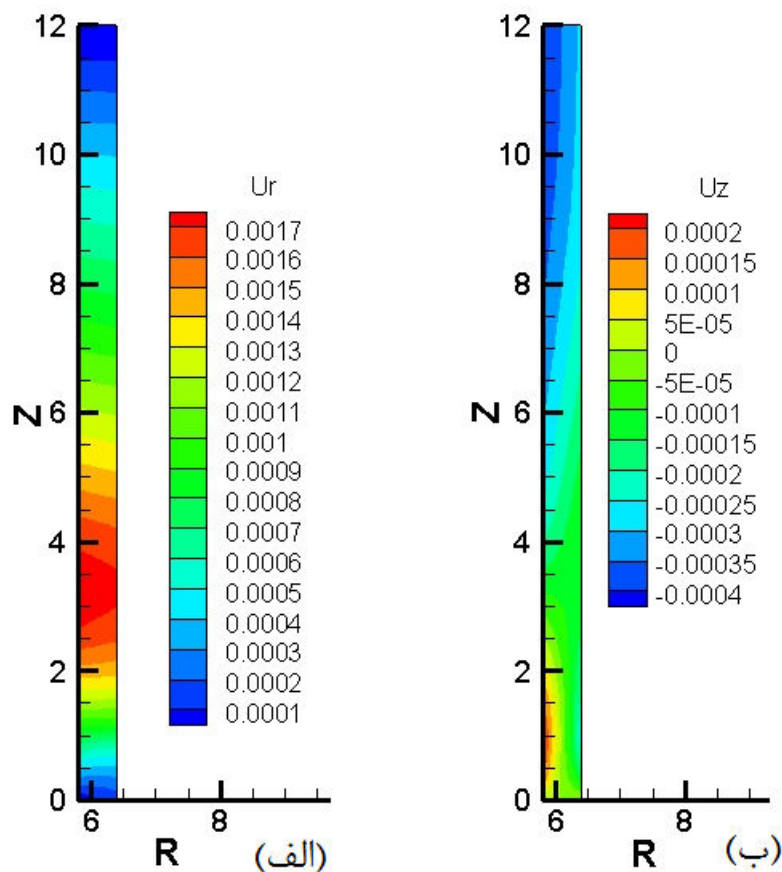
۵-۱-۴- مخزن بزرگ آب

مثال بعدی در زمینه بهینه سازی شکل شامل یک مخزن بزرگ آب به شکل متقارن محوری تحت بارگذاری هیدرواستاتیکی می باشد. شکل این مخزن بصورت استوانه است که در قسمت پایینی دارای تکیه گاه های گیردار می باشد. شعاع داخلی این مخزن $5/8$ و شعاع خارجی آن $6/4$ می باشد. این مخزن تحت فشار هیدرواستاتیکی آب در دیواره خود داخلی قرار دارد که این فشار در بالاترین نقطه برابر صفر و در پایین مخزن برابر ρgh است. ارتفاع این مخزن برابر 12 می باشد. (شکل ۵-۲۴)



شکل ۵-۲۴- طرح اولیه مخزن استوانه ای شکل

برای مدل سازی این مخزن در ایزوژئومتریکی از یک زیر دامنه نریز که دارای ۷۲ نقطه کنترلی می باشد استفاده شده است. تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۶ و در جهت محور z برابر ۱۲ در نظر گرفته شده است. درجه توابع پایه ای نریز در هر دو جهت برابر ۳ است؛ بنابراین تعداد مولفه های بردار گره ای در جهت شعاعی برابر ۱۰ و در جهت محور z برابر ۱۶ می باشد. شکل ۵-۲۵ نشان دهنده کانتور تغییر مکان های شعاعی و کانتور تغییر مکان های عمودی طرح اولیه سازه می باشد.



شکل ۵-۲۵- کانتورهای تغییر مکان، (الف) کانتورهای تغییر مکان های شعاعی، (ب) کانتورهای تغییر مکان های عمودی.

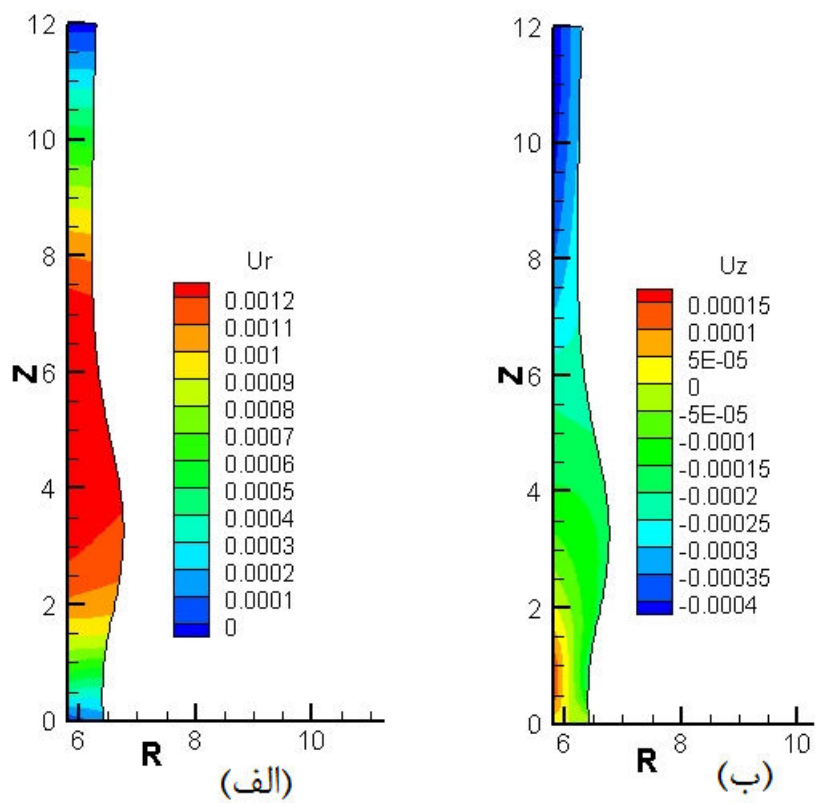
تابع هدف در این مسئله مینیم کردن حداکثر تغییر مکان شعاعی می باشد؛ و قید در این مسئله حجم مصالح استفاده شده می باشد. بطور که حداکثر حجم مصالح استفاده شده نبایستی بیشتر از حجم اولیه مصالح باشد.

موقعیت افقی نقاط کنترلی قرار گرفته در روی مرز خارجی سازه به عنوان متغیرهای طراحی انتخاب شده است و نقاط کنترلی مرز داخلی ثابت فرض شده؛ همچنین نقاط کنترلی بین مرزهای داخلی و خارجی به عنوان متغیرهای طراحی وابسته در نظر گرفته شده است.

مقدار اولیه متغیرهای طراحی برابر $6/4$ است و دامنه تغییرات متغیرهای طراحی در بازه ۶ تا

۷ قرار دارد.

نتایج حل مسئله به روش SQP بصورت می باشد.



شکل ۵-۲۶- کانتور های تغییر مکان های شکل بهینه سازه، (الف) کانتور تغییر مکان های شعاعی، (ب) کانتور تغییر مکان های عمودی.

فصل ششم:

نتایج و پیشنهادات

۶-۱ - مقدمه

هدف از نگارش این فصل بیان خلاصه ای از نتایج و دستاوردهای حاصله در طول انجام این پایان نامه می باشد. همچنین برآنیم تا پیشنهاداتی را جهت ادامه تحقیقات مطرح سازیم. همانگونه که قبلاً نیز بیان شد، هدف اصلی از انجام این پایان نامه بررسی روش تحلیل ایزوژئومتریکی و تعمیم آن برای مسائل متقارن محوری، و همچنین هدف دیگر بررسی عملکرد استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی در حل مسائل بهینه سازی بوده است. تلاش صورت گرفته در این راستا منجر به تولید برنامه ای به نام IsoOptimizer شده که قادر به تحلیل مسائل متقارن محوری به روش ایزوژئومتریکی و بهینه سازی شکل این نوع از سازه ها می باشد. صحت عملکرد این برنامه با حل مثال هایی و مقایسه آنها با جواب دقیق و یا جواب تحلیل به روش اجزای محدود کنترل شده است.

خلاصه ای از نتایج حاصل از انجام این پایان نامه در ادامه بیان شده است.

۶-۲ - نتایج

مهمترین نتیجه حاصل از انجام این پایان نامه ارائه فرمول بندی و تعمیم روش ایزوژئومتریکی

برای حل مسائل متقارن محوری می باشد که با حل مثال های مختلف نتایج قابل قبول این روش برای سازه های متقارن محوری نشان داده شده است.

حل مثال های تحلیل متقارن محوری و مقایسه آنها با جواب دقیق و یا جواب تحلیل اجزای محدود توسط برنامه انسیس نشان دهنده نتایج بسیار خوب تحلیل ایزوژئومتریکی، در محاسبه مقدار تغییر مکان های سازه می باشد؛ که در یک مورد به نظر می رسد جواب های بدست آمده برای تغییر مکان های سازه جواب های بهتری نسبت به جواب های بدست آمده از نرم افزار انسیس می باشد. بررسی نتایج بدست آمده از روش تحلیل ایزوژئومتریکی برای مسائل متقارن محوری نشان دهنده نتایج قابل قبولی برای تنش های ایجاد شده در سازه می باشد؛ اگرچه بررسی نمودارهای تنش نشان دهنده خطاهای نسبتاً بیشتری در مرزهای زیر دامنه نرَبز می باشد. که این مسئله احتیاج به تحقیق بیشتر در این زمینه دارد.

در بررسی جواب های بدست آمده برای تغییر مکان های سازه عملکرد بسیار خوب تحلیل ایزوژئومتریکی در اعمال شرایط مرزی همگن مشهود است.

یکی از مشکلاتی که در حین انجام این پایان نامه با آن مواجه شدیم، نحوه اعمال شرایط مرزی نیرویی می باشد، در مقالاتی که تا کنون در زمینه ایزوژئومتریکی منتشر شده هیچگونه گزارشی در این مورد بیان نشده است، و به نظر می رسد نیاز به تحقیق بیشتر در این زمینه وجود دارد.

همانطور که انتظار می رفت، حل مسائل بهینه سازی با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی در عمل باعث ایجاد جوابی بهینه با مرزهای هموارتری شده است. که این به دلیل تعریف هندسه توسط توابع نرَبز، در تحلیل ایزوژئومتریکی می باشد.

با توجه به نتایج بدست آمده و مشکلاتی که در حین انجام این پایان نامه با آن مواجه شدیم، در این قسمت پیشنهاداتی جهت ادامه تحقیقات ارائه می گردد.

۳-۶- پیشنهادات

در این تحقیق مش بندی (انتخاب بردارهای گره ای) عموماً بصورت یکنواخت صورت گرفته این در حالی است که به نظر می رسد کیفیت مش بندی در جواب های حاصله موثر باشد؛ بنابراین پیشنهاد می شود کیفیت مش بندی و تاثیر آن بر نتایج و همچنین نحوه بهبود بخشیدن به آن مورد بررسی قرار گیرد.

این تحقیق برای مسائل در حالت دو بعدی انجام شده است؛ که پیشنهاد می گردد برای حالت کلی و مسائل سه بعدی تعمیم داده شود.

همانطور که ذکر شد یکی از مشکلات موجود، نحوه اعمال شرایط مرزی نیرویی، بخصوص در حالتی که مرز یا نیرو دارای شکل پیچیده ای است، می باشد. که احتیاج به تحقیق بیشتری برای رفع این مشکل وجود دارد.

حداقل تعداد نقاط کنترلی بکار رفته در تحلیل ایزوژئومتریک، که می تواند منتج به جواب با دقت مناسب شود؛ یکی دیگر از مسائلی است که در این زمینه مطرح است.

- [1] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 194 (39–41) (2005) 4135–4195
- [2] M. Gee, W.A. Wall, E. Ramm, *Parallel multilevel solutions of nonlinear shell structures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.
- [3] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, *Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 4160–4183
- [4] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)*, Second ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] D.F. Rogers, *An Introduction to NURBS With Historical Perspective*, Academic Press, San Diego, CA, 2001.
- [6] Wolfgang A. Wall, Moritz A. Frenzel, Christian Cyron, *Isogeometric structural shape optimization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) 2976–2988
- [7] O. Zienkiewicz, R. Taylor, *The Finite Element Method*, sixth ed, vols.1–3, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [8] david V. Hutton, *Fundamentals Of Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, New York, 2004.
- [9] S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory Of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [10] J. Siens. *Integrated structural modeling, adaptive analysis and shape optimization*. Ph.D Thesis. Civil Engineering University of Swansea, UK, 1994.
- [11] U. Kirsch. *Structural Optimization Fundamentals and Application*. Springer-Verlag. 1993.
- [12] B. Hassani, E. Hinton. *Homogenization and Structural Topology Optimization*. Springer. 1999.
- [13] G.N. Vanderplaats. *Numerical optimization techniques for engineering design*. McGraw-Hill, New York 1984.
- [14] S.M.B.Afonso. *Shape optimization of shells under static and free vibration conditions*. PhD thesis. Department of civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK. 1995.

- [15] M.Ozaka, *Analysis and optimal design of structures with adaptivity*. Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK, 1993
- [16] K. Svanberg, *The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization*, Int. J. Numer. Meth. Engrg. 24 (2) (1987) 359–373.
- [17] G. Hadely, Addison Wesley, *Linear Programming*, 1962.
- [18] K.-U. Bletzinger, S. Kimmich, E. Ramm, *Efficient modeling in shape optimal design*, Comput. Syst. Engrg. 2 (5–6) (1991) 483–495.
- [19] Martin H. Sadd, *ELASTICITY Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier Butterworth–Heinemann, 2005.

Abstract:

Most of problems encountered in structural engineering deals with solving partial differential equations which generally is not an easy task. In the last few decades, several methods have been suggested for solving these equations where the finite elements, finite difference, boundary elements and meshfree methods are amongst the most common. Recently, the so named 'Isogeometrical Analysis' method was suggested and since then many researchers have been trying to overcome the difficulties of the method.

In this research, after introducing the isogeometrical method in general, its formulation for the plane stress/strain case is presented and further developed for the axisymmetrical problems. This is followed by developing a computer program, specifically for the solution of axisymmetric problems, given the name IsoOptimizer. This program enables user to solve axisymmetric problems with the Isogeometrical method.

To verify the performance of the developed program, a few examples were taken into consideration and the obtained results were compared with the analytical solution as well as the results of the ANSYS software. It is shown that the results of the developed computer program are in a very good agreement with the exact and finite element solutions.

In the next step, the developed tool was employed for structural shape optimization of the axisymmetric problems. For this purpose, the DOT mathematical programming subroutines were used. To demonstrate the performance of the method, a few examples are presented in Chapter 5.

Keywords: Isogeometrical analysis, NURBS, Shape optimization, Axisymmetric Structures



Shahrood University of Technology

Structural Engineering Department

M. Sc. Thesis

**Isogeometrical Analysis and shape optimization
of Axisymmetric Structures**

A. Hojjatpanah Montazeri

Supervisors:

Dr. B. Hassani

Dr. R. Naderi

Date: July, 2009