

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



پردیس خوارزمی

مهندسی عمران گرایش خاک و پی

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل معادله تراوش با استفاده از موجک

نگارنده : ایلیا آقاسی زاده شعر باف

استاد راهنما

دکتر امیر بذرافشان مقدم

استاد مشاور

دکتر مجید عرفانیان اورعی

شهریور ماه ۱۳۹۵

شماره: ۲۲۸۴/۰۳ الف
تاریخ: ۱۷، ۷، ۹۵
ویرایش

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای ایلیا آقاسی زاده شعرباف به شماره دانشجویی ۹۲۰۲۳۵۴ رشته: مهندسی عمران گرایش مکانیک خاک و پی تحت عنوان حل معادله تراوش با استفاده از موجک که در تاریخ: ۹۵/۶/۱۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: خوب) امتیاز (۱۷,۷۹) <input checked="" type="checkbox"/>	دفاع مجدد <input type="checkbox"/>	مردود <input type="checkbox"/>
نوع تحقیق: نظری <input checked="" type="checkbox"/>	عملی <input type="checkbox"/>	

- ۱- عالی (۲۰ - ۱۹)
۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)
۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)
۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر امیر بذرافشان مقدم	استاد	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر مجید عرفانیان اوزعی		
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر علی عباس نژاد	استاد	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی عجمی	استاد	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر سعید گلپایان	استاد	

نام و نام خانوادگی:
تاریخ و امضاء:
پویش جوارزین

این پایان نامه را تقدیم میکنم به:

پدر و مادر جنم که همواره حامی و مشوق من بودند و بی‌خارید نم امتداد اندیشه‌های بلندشان است "بردستان پر مهرشان بوسه می‌زنم"....
برادران عزیزم، احسان و امین که هیچ توفیقی بدون حمایت‌های ایشان مقدور نخواهد بود.....

تقدیم به

طروت نخط‌های زندگی ام، همسر عزیزم پگاه به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفتش، که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

تقدیم به

فرزندان باایا تم

پوریا و پرنام

که گرمی کلامشان و مهر نامتشان سرمایه‌ی جاودانی زندگی من است.

و باسکرویره از یار و همراه دوران تحصیل

مهندس مجتبی رسکار

باشکدر از اساتید کرامتقدم

دکتر امیربزرگ افشان مقدم

دکتر محمد عرفانیان اورعی

اساتید بزرگوار می که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و فرصت آموختن علم و دانش از محضر ایشان برایم بس گرانها بود. تدوین این پایان نامه بدون دقت نظر و راهنمایی های ارزنده ایشان میسر نبود. همواره مدیون لطف و محبتشان خواهم بود.

باشکدر از سرکار خانم زهر انجمنی

بدلیل راهنمایی های ایشان در تدوین این پایان نامه

و تقدیم به

روح پرفروش استاد فقید

دکتر بهمن علی داد

که کنجینه دانسته های خویش را بزرگوارانه در اختیارم نهادند

تعهد نامه

اینجانب ایلیا آقاسی زاده شعر باف دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته عمران گرایش خاک و پی دانشکده پردیس خوارزمی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل معادله تراوش با استفاده از آنالیز موجک تحت راهنمایی دکتر امیر بذرافشان مقدم متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

چکیده

معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی اهمیت و کاربرد فراوانی در مسائل علمی و مهندسی دارند. هنگام حل این قبیل از معادلات تحت شرایطی با معادلات جدیدی مواجه می شویم که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می شود. این معادلات، معادله انتگرال نامیده می شوند. در اکثر مسائل برق، الکترومغناطیس، مخبرات و غیره مستقیماً با این دسته از معادلات مواجه می شویم. حل این معادلات همواره با برخی مشکلات از قبیل پیچیدگی محاسبات، به دست نیامدن دقت لازم برای جواب ها و غیره توأم بوده است و مطالعات فراوانی برای یافتن روش های مناسب جهت کاهش هرچه بیشتر مشکلات مطرح شده انجام گرفته است. در سال های اخیر نشان داده شده است که موجک ها برای حل این نوع معادلات بسیار مناسب هستند و برای کاهش هزینه محاسبات به طور وسیعی در مسائل فوق بکار برده شده اند. تحقیقات متعدد انجام شده در زمینه حل معادلات انتگرال، قابلیت موجک های متعامد را نسبت به سایر پایه های کلاسیک نشان می دهد. موجک هایی که در ابتدا برای حل معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفتند، عموماً موجک های متعامد بودند. علت این امر می تواند استفاده این موجک ها برای اولین بار در پردازش سیگنال ها باشد. دو دلیل عمده برای استفاده از موجک ها در حل معادلات انتگرال وجود دارد. اول این که در بسط یک تابع یا یک سیگنال با استفاده از موجک ها، ضرایب اولیه در بسط موجک اکثر اطلاعات مربوط به تابع یا سیگنال را دارا می باشند و در نتیجه نسبت به سایر پایه ها با تعداد جملات کمتری می توان دقت خوبی برای جواب به دست آورد. اما دومین و عمده ترین امتیاز موجک ها داشتن ماتریس های عملیاتی تنک می باشد، که باعث می شود دستگاه معادلات جبری حاصل به سادگی حل شوند. از جمله ویژگی های مطلوب موجک ها در حل معادلات انتگرال داشتن محمل فشرده، متقارن، گشتاور های صفر، فرم بسته و غیره است. موجک هار رده خاصی از توابع است که به عنوان اولین موجک شناخته می شود، و اولین بار توسط آلفرد هار، ریاضیدان مجارستانی در سال ۱۹۰۹ پیشنهاد شد. موجک هار با دارا بودن مزیت های گفته شده در بالا، ساده ترین موجک ممکن نیز می باشد. تا کنون معادله دیفرانسیل تراوش با روش های گوناگونی حل شده است. در این پایان نامه معادله تراوش را با استفاده موجک حل خواهیم نمود. اگرچه ذکر این مطلب ضروریست که تحقیق حاضر شروعی بر حل معادلات با شرایط مرزی پیچیده تر در رابطه با مکانیک خاک و پی می باشد.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل، معادله تراوش، آنالیز موجک

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱.....	فصل ۱ : مقدمه.....
۲.....	۱-۱ نظریه مقدماتی.....
۲.....	۲-۱ گرادیان (شیب هیدرولیکی).....
۴.....	۳-۱ قانون داریسی.....
۵.....	۴-۱ ضریب نفوذپذیری.....
۶.....	۵-۱ آزمایش های تعیین نفوذپذیری.....
۱۱.....	۶-۱ ملاحظات تعیین نفوذپذیری خاک در آزمایشگاه.....
۱۲.....	۷-۱ نفوذ پذیری معادل در خاک های لایه بندی شده.....
۱۲.....	۸-۱ رابطه پیوستگی و شبکه جریان.....
۱۶.....	۹-۱ مروری بر تحقیقات گذشته.....
۱۷.....	۱۰-۱ حل مساله نمونه با استفاده از روش عددی.....
۱۹.....	فصل ۲ : موجک هار.....
۲۰.....	۱-۲ مقدمه.....
۲۱.....	۲-۲ آنالیز موجک.....
۲۳.....	۳-۲ کاربرد موجک ها در علوم مختلف.....
۲۵.....	۴-۲ تعاریف و قضیه ها.....
۲۹.....	۵-۲ توابع هار.....
۳۰.....	۶-۲ توابع هار گویا.....
۳۲.....	۷-۲ حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک هار.....

۳۷.....	فصل ۳ حل معادله تراوش با استفاده از موجک هار.....
۳۸.....	۱-۳ حل معادله
۴۳.....	۲-۳ نتیجه گیری.....
۴۴.....	۱-۲-۳ حل مسئله نمونه با استفاده از آنالیز موجک.....
۴۵.....	۲-۲-۳ پیشنهادات
۴۶.....	واژه نامه انگلیسی به فارسی.....
۴۸.....	مراجع.....

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل (۱-۱): فشار، ارتفاع و بار آبی کل برای جریان در داخل خاک.....	۳
شکل (۲-۱) : تغییرات سرعت v با گرادین هیدرولیکی A	۴
شکل (۳-۱) تغییرات سرعت جریان با شیب هیدرولیکی در خاک رس.....	۵
شکل (۴-۱) آزمایش نفوذ پذیری با بار آبی ثابت.....	۷
شکل (۵-۱) آزمایش نفوذ پذیری با بار آبی نزولی.....	۸
شکل (۶-۱): روش انجام آزمایش نفوذ پذیری خاک به روش چاه پمپاژ.....	۹
شکل (۷-۱): امان خاک برای رابطه پیوستگی.....	۱۳
شکل (۸-۱) جریان عبوری از خاک دو لایه.....	۱۴
شکل (۹-۱) شبکه جریان در زیر یک سد (مسئله نمونه).....	۱۵
شکل (۱۰-۱) مقادیر بار آبی بعد از تکرار دهم.....	۱۸
شکل (۱-۲) مقایسه روش های مختلف تحلیل سیگنال ها.....	۲۲
شکل (۲-۲) نمودار تعدادی از توابع هار(موجک مادر).....	۲۲

فهرست جداول

صفحه	عنوان
۵.....	جدول (۱-۱): مقادیر نمونه ضریب نفوذپذیری.....
	جدول (۲-۱): بعضی از روش های محاسبه نفوذپذیری خاک ها در محل به روش هد
۱۰.....	افتان یا خیزان.....

فصل ١

مقدمه

۱-۱ مقدمه

خاک مجموعه ای از ذرات جامد و حفرات بین آنهاست. در نتیجه آب می تواند از یک نقطه پر انرژی به نقطه کم انرژی تر جریان پیدا کند. این مسئله از نقطه نظر تخمین میزان جریان های زیرزمینی تحت شرایط هیدرولیکی مختلف، زهکشی در حین اجرای ساختمان ها در داخل سفره های آب زیرزمینی، مطالعه پایداری سدهای خاکی و سازه های حائل خاک تحت نیروهای نشت، و همچنین تحکیم خاک های رسی، حائز اهمیت می باشد.

در این فصل توضیحاتی در مورد مفاهیم و نظریه های پایه ای نشت (تراوش آب در خاک) ارائه خواهد شد و سپس معادله تراوش بررسی می گردد. همچنین مرور مختصری خواهیم داشت بر کار های انجام شده قبلی که مرتبط با موضوع تحقیق حاضر می باشند و در ادامه به بررسی و شرح روش کار این تحقیق برای حل معادله تراوش با استفاده از مویجک ها خواهیم پرداخت.

۱-۲ گرادیان (شیب هیدرولیکی)

طبق رابطه برنولی، بار آبی کل یک نقطه آب در حال جریان مجموع بار فشار، بار سرعت و بار ارتفاعی می باشد. یعنی:

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} + Z \quad (1-1)$$

که در آن:

$$h = \text{بار آبی کل}$$

$$p = \text{فشار}$$

$$v = \text{سرعت}$$

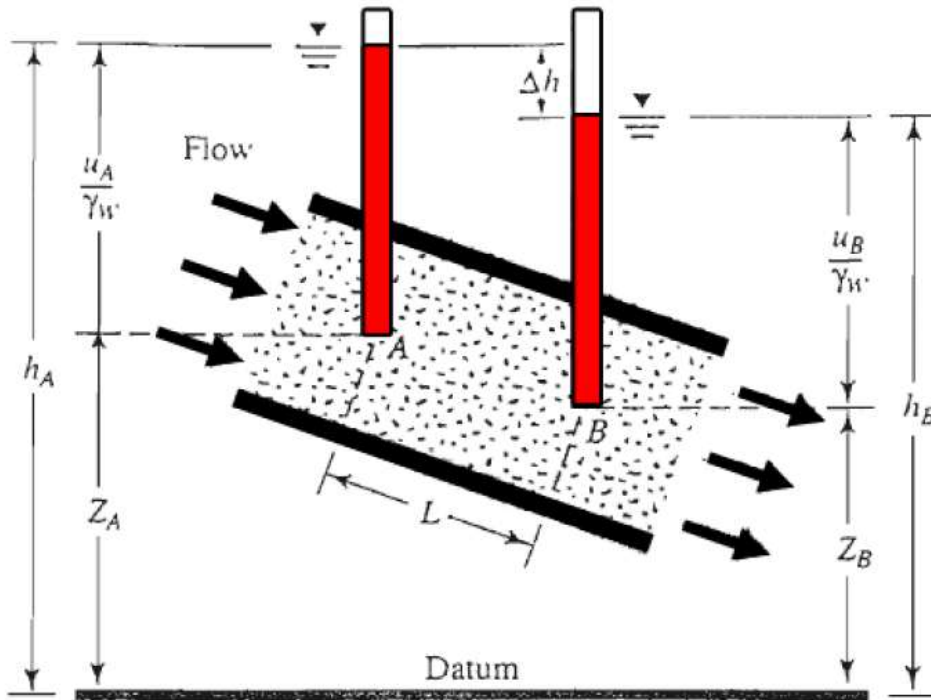
$$g = \text{شتاب ثقل}$$

$$\gamma_w = \text{وزن مخصوص آب}$$

اگر رابطه برنولی برای حالت جریان آب از داخل محیط متخلخل خاک در نظر گرفته شود، به علت سرعت کم جریان، از بار سرعت می توان صرف نظر کرد و بار آبی کل را به صورت زیر نوشت:

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + Z \quad (2-1)$$

شکل (۱-۱) ارتباط بین فشار، ارتفاع و بار کل جریان در داخل خاک را نشان می دهد. پیزومترها در نقاط A و B نصب شده اند. تراز صعود آب در داخل لوله پیزومتری نصب شده در نقاط A و B به ترتیب تراز پیزومتری A و B خوانده می شود. بار فشار در هر نقطه، ارتفاع ستون آب در پیزومتر نصب شده در آن نقطه است. بار ارتفاعی هر نقطه، فاصله قائم آن نقطه تا یک تراز مبنا می باشد.



شکل (۱-۱): فشار، ارتفاع و بار آبی کل برای جریان در داخل خاک [1]

افت (اتلاف) بار بین دو نقطه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Delta h = h_A - h_B = \left(\frac{p_A}{\gamma_w} + Z_A \right) - \left(\frac{p_B}{\gamma_w} + Z_B \right) \quad (3-1)$$

افت بار Δh را می توان در شکل بی بعد به صورت زیر نوشت:

$$i = \frac{\Delta h}{L} \quad (4-1)$$

که در آن:

i = گرادیان (شیب) هیدرولیکی

L = فاصله بین نقاط A و B. به عبارت دیگر طولی از جریان که افت بار در آن رخ می دهد. در حالت کلی، تغییرات سرعت v بر حسب تغییرات گرادیان i مطابق شکل (۲-۱) می باشد. این شکل به سه ناحیه زیر تقسیم می شود.

الف: ناحیه جریان لایه ای (ناحیه I)

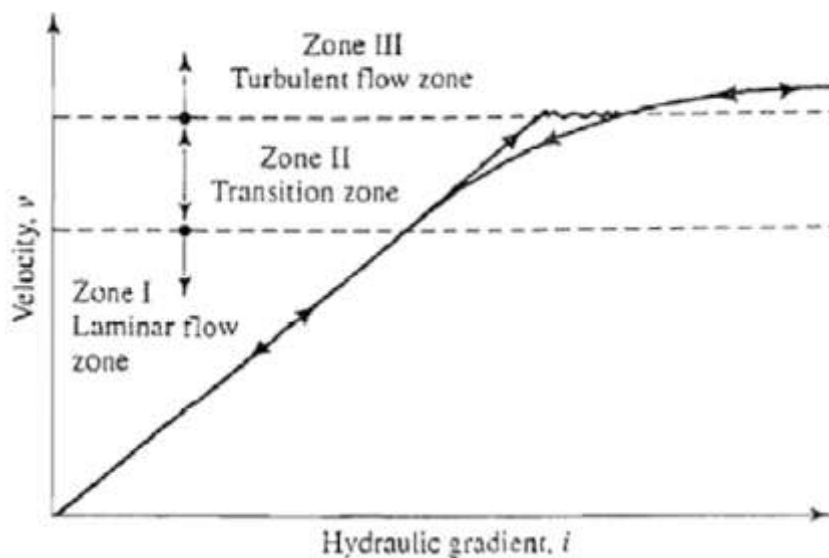
ب: ناحیه انتقال (ناحیه II)

ج: ناحیه جریان آشفته (ناحیه III)

وقتی که شیب هیدرولیکی به تدریج افزایش می یابد، جریان در نواحی I و II به صورت لایه ای باقی مانده و سرعت v رابطه خطی با شیب هیدرولیکی خواهد داشت. در شیب هیدرولیکی زیاد، جریان آشفته می شود. وقتی که شیب هیدرولیکی کاهش می یابد، جریان لایه ای فقط در ناحیه I وجود خواهد داشت. در خیلی از خاک ها، جریان آب از فضای حفرات بین دانه های خاک را می توان لایه ای فرض نمود که برای آن:

$$v \propto i \quad (5-1)$$

در سنگ ها، شن و ماسه درشت ممکن است جریان آشفته وجود داشته باشد که برای این حالت رابطه فوق اعتبار خود را از دست می دهد.



شکل (۲-۱): تغییرات سرعت v با گرادیان هیدرولیکی i [1]

۳-۱ قانون دارسی

در سال ۱۸۵۶، دارسی رابطه ساده خود را برای سرعت جریان آب در خاک اشباع به صورت زیر منتشر نمود:

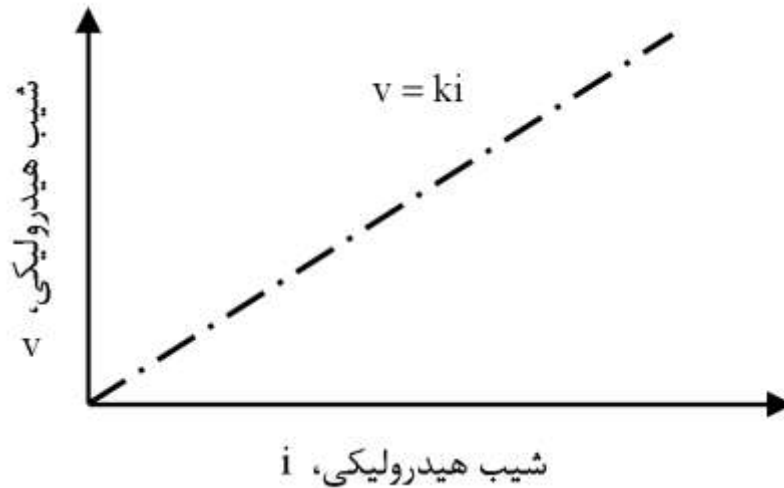
$$v = k i \quad (6-1)$$

که در آن:

v = سرعت جریان که عبارت است از مقدار آبی که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر امتداد جریان عبور می کند.

k = ضریب نفوذ پذیری

از رابطه دارسی این طور بر می آید که بین سرعت جریان v و شیب هیدرولیکی i یک رابطه خطی وجود دارد (شکل (۳-۱)) که از مرکز مختصات می گذرد.



شکل (۳-۱): تغییرات سرعت جریان با شیب هیدرولیکی در خاک رس [1]

۴-۱ ضریب نفوذ پذیری

ضریب نفوذ پذیری دارای همان واحد سرعت جریان است. ضریب نفوذ پذیری بر حسب $\frac{cm}{s}$ یا $\frac{m}{day}$ بیان می شود.

ضریب نفوذ پذیری خاک ها به عوامل متعددی بستگی دارد. این عوامل عبارتند از: ویسکوزیته سیال، اندازه و توزیع اندازه حفرات، منحنی دانه بندی، نسبت تخلخل، زبری سطح دانه ها و درجه اشباع خاک. در خاک های رس دار، ساختار خاک تاثیر مهمی در ضریب نفوذ پذیری دارد. سایر عوامل مهم که در نفوذ پذیری رس های موثرند عبارتند از: تمرکز یونی و ضخامت لایه آبی که اطراف ذرات رسی نگه داشته شده است. ضریب نفوذ پذیری برای خاک های مختلف به مقدار زیادی تفاوت می کند. در جدول (۱-۱) حدود تغییرات ضریب نفوذ پذیری برای خاک های مختلف ارائه شده است.

جدول (۱-۱): مقادیر نمونه ضریب نفوذ پذیری [1]

نوع خاک	k	
	cm / sec	m / day
شن تمیز	1.0 – 100	864 – 86400
ماسه درشت	1.0 – 0.01	864 – 8.64
ماسه ریز	0.01 – 0.001	8.64 – 0.86
لای	0.001 – 0.00001	0.86 – 0.0086
رس	کمتر از 10^{-6}	0.00086 کمتر از

نفوذپذیری مطلق خاک، از خاکی به خاک دیگر متفاوت بوده و بستگی به فضای خالی خاک دارد. به عنوان مثال در درشت دانه ها که فضای خالی بیشتر است، نفوذپذیری نیز بیشتر است و یا در خاکی که دارای دانه های تیز گوشه است، نفوذپذیری کمتر از خاکی است که دارای دانه های گرد گوشه می باشد. عامل دیگری که در نفوذپذیری مطلق خاک موثر است زبری سطح دانه ها است. به این شکل که هرچه دانه های خاک سطح زبرتری داشته باشند، به علت اصطکاک و اتلاف بیشتر انرژی آب، باعث کاهش نفوذپذیری می شوند.

ضریب نفوذپذیری خاک های غیر اشباع کوچکتر از خاک های اشباع بوده و با افزایش درجه اشباع به سرعت افزایش می یابد.

برای تعیین ضریب نفوذپذیری خاک در دمای ثابت، برخی روابط تجربی نیز ارائه شده است که مهمترین آن ها عبارتند از:
برای خاک های ماسه ای:

$$k \propto \frac{e^3}{1+e} \quad (7-1)$$

برای ماسه نسبتا یکنواخت:

$$k \propto D_{10}^2 \quad (8-1)$$

۱-۵ آزمایش های تعیین نفوذپذیری

نفوذپذیری خاک را با استفاده از تجهیزات آزمایشگاهی در آزمایشگاه می توان تعیین نمود. برای خاک هایی با نفوذپذیری بین 1×10^{-3} تا 1×10^{-2} می توان از نفوذسنج با هد ثابت و خاک های با نفوذپذیری بین 1×10^{-6} تا 1×10^{-2} می توان از روش هد افتان استفاده نمود. در رس ها، نفوذپذیری را می توان از طریق آزمایش ادئومتر (تحکیم) نیز بدست آورد.

التبه تعیین نفوذپذیری خاک در آزمایشگاه به طور کلی نتایج قابل اطمینانی بدست نمی دهد زیرا نمونه خاک دستخورده شده و این مسأله می تواند مقادیر نفوذپذیری خاک را تغییر دهد. رس ها و سیلت ها ممکن است دارای لنز ماسه ای بوده و نسبت به نفوذپذیری ناهمسانگرد باشند بنابراین مقادیر بدست آمده در آزمایشگاه می تواند تفاوت چشمگیری نسبت به مقادیر محلی داشته باشند.

دو روش استاندارد برای تعیین ضریب نفوذپذیری در آزمایشگاه وجود دارد:

الف) آزمایش با بار آبی ثابت

ب) آزمایش با بار آبی نزولی

در زیر به طور خلاصه هر دو آزمایش تشریح می شود.

الف) آزمایش با بار آبی ثابت در آزمایشگاه

در شکل (۱-۴) اصول کلی دستگاه آزمایش با بار ثابت نشان داده شده است. در این آزمایش دبی آب ورودی طوری تنظیم می شود که اختلاف بار بین ورودی و خروجی در طی آزمایش ثابت باقی بماند.

بعد از ثابت شدن اختلاف بار و دبی ورودی، توسط یک ظرف مدرج، مقدار آب خروجی در مدت زمان مشخص اندازه گیری می شود. کل آب جمع شده را می توان مطابق زیر تعریف کرد:

$$Q = Avt = A(ki)t \quad (9-1)$$

که در آن:

Q = حجم آب جمع شده ، A = سطح مقطع نمونه خاک ، t = مدت جمع آوری آب

از طرفی می توان نوشت:

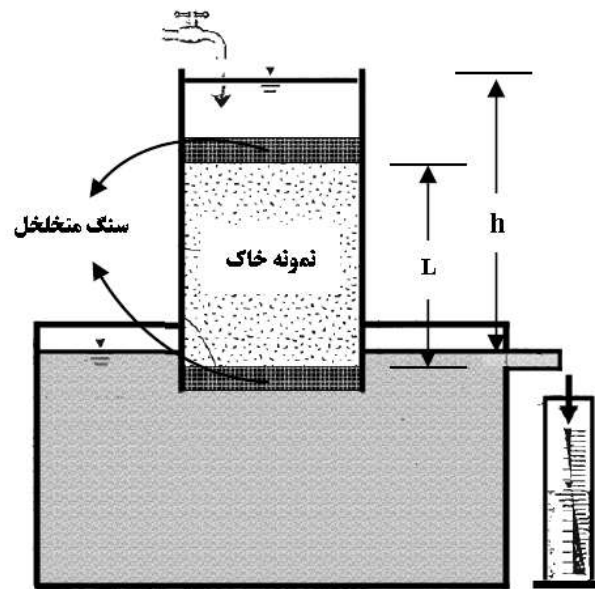
$$i = \frac{h}{L} \quad (10-1)$$

که L طول نمونه می باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$Q = A \left(k \frac{h}{L} \right) t \quad (11-1)$$

یا

$$k = \frac{QL}{Aht} \quad (12-1)$$



شکل (۴-۱): آزمایش نفوذ پذیری با بار آبی ثابت [1]

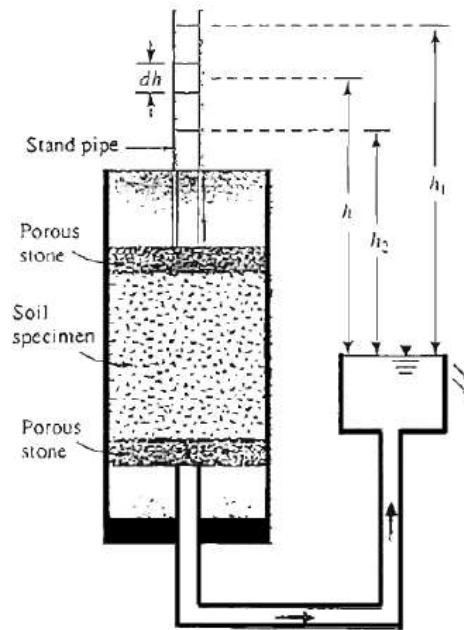
ب) آزمایش با بار آبی متغییر در آزمایشگاه

در شکل (۵-۱) اصول کلی دستگاه آزمایش تعیین نفوذپذیری با بار آبی متغییر نشان داده شده است. آب از طریق یک لوله قائم وارد خاک می شود. در زمان $t = 0$ اختلاف پتانسیل اولیه h_1 ثبت شده و به آب اجازه داده می شود که از میان نمونه خاک جریان یابد. اختلاف پتانسیل نهایی در زمان $t = t_F$ مساوی h_2 ثبت می گردد. نفوذپذیری در روش بار آبی متغییر با استفاده از رابطه زیر بدست می آید:

$$k = 2.303 \frac{aL}{At} \log_{10} \frac{h_1}{h_2} \quad (13-1)$$

که در آن:

a = سطح مقطع لوله قائم، A = سطح مقطع نمونه خاک، L = طول نمونه خاک و t = مدت زمانی که در آن آب از ارتفاع h_1 به h_2 کاهش می یابد. آزمایش با پتانسیل (بار آبی) متغییر یا نزولی برای خاک های ریزدانه با ضریب نفوذپذیری کم مفید است.



شکل (۱-۵): آزمایش نفوذپذیری با بار آبی نزولی [1]

آزمایش های محلی یا صحرایی، نتایج قابل اطمینان تری از نفوذپذیری بدست می دهند زیرا منعکس کننده شرایط واقعی خاک محل می باشند.

الف) آزمایش پمپاژ:

در آزمایش پمپاژ آب از داخل یک گمانه مرکزی به بیرون پمپاژ شده و سطح آب در چاه های شاهد اطراف، ثبت و کنترل می گردد (شکل (۱-۶)). آب آنقدر از داخل گمانه به بیرون پمپاژ می شود تا شرایط جریان پایدار حاکم گردد. این مسأله ممکن است چندین روز به طول انجامد. اگر فرض شود که خاک همگن و همسانگرد بوده و گمانه یا چاه به طور کامل در داخل خاک اشباع نفوذ می نماید آنگاه نفوذپذیری خاک را با استفاده از رابطه زیر می توان محاسبه نمود:

$$q = \frac{\pi k (h_2^2 - h_1^2)}{2.3 \log_{10} \frac{r_2}{r_1}} \quad (14-1)$$

یا

$$k = \frac{2.3 q \log_{10} \frac{r_2}{r_1}}{\pi (h_2^2 - h_1^2)} \quad (15-1)$$

که در این معادله:

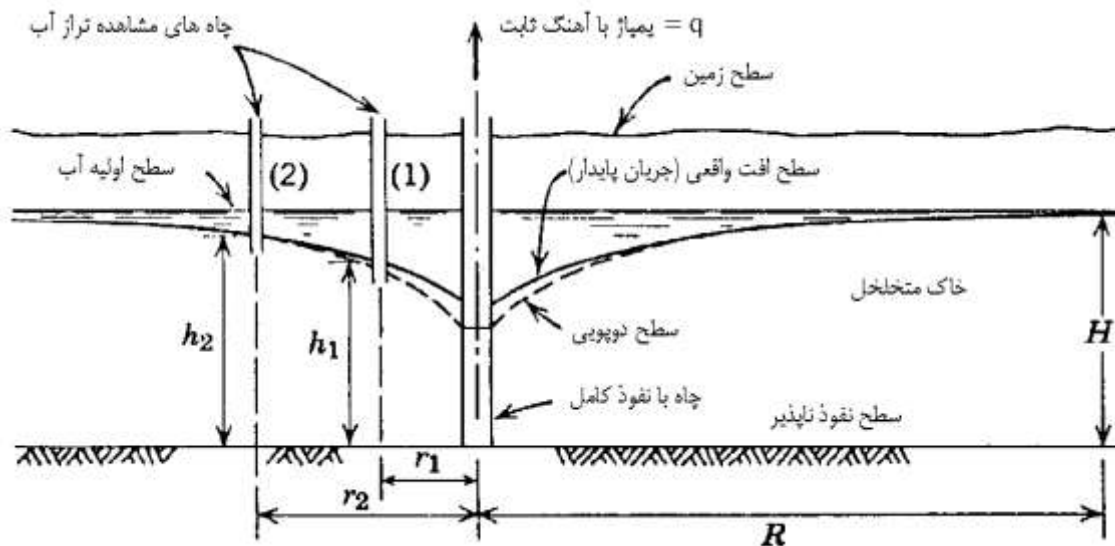
$$q = \text{آهنگ جریان (آهنگ پمپاژ)}$$

$$h_1 \text{ و } h_2 = \text{ترازهای آب در چاههای مشاهده ۱ و ۲}$$

$$r_1 \text{ و } r_2 = \text{فواصل شعاعی چاه های مشاهده ۱ و ۲}$$

$$k = \text{نفوذپذیری خاک}$$

هرچه گمانه ها از چاه اصلی دورتر شوند، سطح آب در آن ها بالاتر خواهد رفت. اگر گمانه را آنقدر از چاه اصلی دور کنیم تا سطح آب در آن برابر سطح آب زیرزمینی قبل از پمپاژ شود، آنگاه فاصله مرکز گمانه تا مرکز چاه اصلی، شعاع تاثیر چاه خواهد بود و با r_e نمایش داده می شود. ارتفاع سطح آب در چاه اصلی h_w به ازاء شعاع چاه r_w بدست می آید.



شکل (۱-۶): روش انجام آزمایش نفوذپذیری خاک به روش چاه پمپاژ [1]

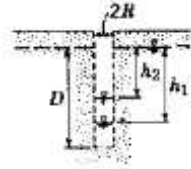
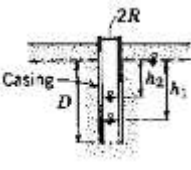
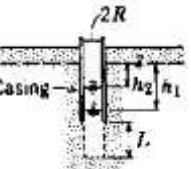
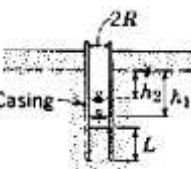
(ب) آزمایش هد افتان یا خیزان:

با مشاهده آهنگ کاهش یا افزایش تراز آب در داخل گمانه ای که می تواند دارای پوشش جدار کامل یا جزئی باشد آزمایش های ساده ای می توان در عمق های کم انجام داد. آزمایش با هد افتان می تواند به دلیل تجمع مواد سیلتی در کف گمانه یا دیگر عوامل همانند غیریکنواختی مصالح باعث ایجاد خطا در نتایج شود.

به طور کلی، بهتر است که به جای انجام آزمایش های متعدد به روش هد متغییر چند آزمایش به روش پمپاژ انجام شود هرچند هزینه انجام این آزمایش ها بالاتر باشد.

تعدادی از روش های آزمایش با استفاده از هدهای متغییر در جدول (۱-۲) ارائه شده است.

جدول (۲-۱): بعضی از روش های محاسبه نفوذپذیری خاک ها در محل به روش هد افتان یا خیزان [1]

شرایط	نمودار	ضریب شکل	نفوذپذیری	کاربرد
گمانه بدون غلاف		$F = 16\pi DSR$	$k = \frac{R}{16DS} \times \frac{(h_2 - h_1)}{(t_2 - t_1)}$	ساده ترین روش محاسبه نفوذپذیری، در خاک های لایه ای قابل استفاده نیست. برای بدست آورد مقادیر S از طریق نمودارهای مربوطه بدست می آید.
گمانه غلاف دار		$F = \frac{11R}{2}$	$k = \frac{2\pi R}{11(t_2 - t_1)} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$	برای محاسبه نفوذپذیری در اعماق کم در زیر تراز آب زیر زمینی استفاده می شود. در صورت استفاده از روش هد افتان به علت سیلنتی شدن کف گمانه ممکن است نتایج غیر قابل اطمینان بدست آید.
گمانه غلاف دار به همراه غلاف متخلخل یا بدون غلاف		$F = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{L}{R}\right)}$	$k = \frac{R^2}{2L(t_2 - t_1)} \ln\left(\frac{L}{R}\right) \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$	برای محاسبه نفوذپذیری در اعماق زیاد در زیر سطح آب زیرزمینی استفاده می شود.
گمانه غلاف دار به طوری که ستونی از خاک به طول L در داخل غلاف قرار گرفته		$F = \frac{11\pi R^2}{2\pi R + 11L}$	$k = \frac{2\pi R + 11L}{11(t_2 - t_1)} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$	مهم ترین کاربرد این روش محاسبه نفوذپذیری قائم در خاک های ناهمسانگرد می باشد.

برای $\frac{D}{R} < 50$

برای $6 \text{ in} \leq D \leq 60 \text{ in}$

برای $\frac{L}{R} > 8$

۱-۶ ملاحظات تعیین نفوذپذیری خاک در آزمایشگاه

باید توجه داشت که تعیین قابلیت نفوذپذیری خاک در آزمایشگاه روشی غیر قابل اطمینان بوده و بعضی از علل آن به قرار زیر می باشد:

۱- در اکثر موارد ضریب قابلیت نفوذپذیری افقی خاک مورد نظر است ولی در آزمایشگاه ضریب نفوذپذیری عمودی حاصل می شود.

۲- در ماسه ضریب نفوذپذیری افقی و عمودی با هم اختلاف بسیار دارند و معمولاً به علت اینکه رسوبات ماسه ای به طرق مختلف ته نشین شده اند، ضریب قابلیت نفوذپذیری افقی ده ها و یا صدها برابر بیشتر از ضریب قابلیت نفوذپذیری عمودی است.

۳- برای خاک هایی با نفوذپذیری بین 1×10^{-3} تا $1 \times 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ می توان از نفوذسنج با هد ثابت و خاک های با نفوذپذیری بین 1×10^{-6} تا $1 \times 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ می توان از روش هد افتان استفاده نمود. در رس ها، نفوذپذیری را می توان از طریق آزمایش ادنومتر نیز بدست آورد.

۴- زمانی که خاک های ریزدانه (رس و سیلت) مورد آزمایش قرار می گیرند، زمان یافتن ضریب نفوذپذیری طولانی است و در نتیجه نشست خاک و یا تبخیر آب در نتیجه آزمایش تاثیر بسیار دارد.

۵- در آزمایشگاه معمولاً برای کم کردن زمان آزمایش از شیب های هیدرولیکی زیاد استفاده می شود (معمولاً ۵ و یا بیشتر) ولی در طبیعت شیب هیدرولیکی معمولاً کم بوده و حدود آن بین ۰/۱ تا ۲ است.

۶- برای آزمایش خاک های رس احتیاج به شیب های هیدرولیکی زیاد است که آب در نمونه جریان یابد. در نتیجه مقدار ضریب نفوذپذیری بدست آمده قابل اطمینان نیست. در خاک های ماسه ای اگر شیب هیدرولیکی زیادتر از حد باشد باعث جوشش در ماسه شده و نسبت تخلخل را تغییر داده و ضریب نفوذپذیری غیر قابل اطمینانی حاصل می شود.

۷- رس ها و سیلت ها ممکن است دارای لنز ماسه ای بوده و نسبت به نفوذپذیری ناهمسانگرد باشند بنابراین مقادیر بدست آمده در آزمایشگاه می تواند تفاوت چشمگیری نسبت به مقادیر محلی داشته باشند.

۸- آزمایشات صحرائی برای تعیین ضریب نفوذپذیری خاک بهتر است و نتایج بدست آمده قابل اطمینان تر می باشد زیرا منعکس کننده شرایط واقعی خاک محل می باشند، ولی عیب آن ها طولانی تر بودن زمان آزمایش و زیاد بودن هزینه های اجرای آزمایش می باشد.

۷-۱ نفوذ پذیری معادل در خاک های لایه بندی شده

بر حسب طبیعت رسوبات (نهشته های) خاک، ضریب نفوذپذیری یک لایه، ممکن است با جهت جریان تغییر یابد. ضریب نفوذپذیری برای خاک های لایه بندی شده که جهت جریان به صورت افقی و یا قائم باشد به شرح زیر به دست می آید.
ضریب نفوذپذیری معادل جریان افقی در خاک های لایه بندی شده

$$k_{H(eq)} = \frac{\sum(k_{H_i}H_i)}{\sum(H_i)} \quad (16-1)$$

و داریم:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n \quad (17-1)$$

$$i = i_1 = i_2 = \dots = i_n \quad (18-1)$$

ضریب نفوذپذیری معادل جریان قائم در خاک های لایه بندی شده

$$k_{v(eq)} = \frac{\sum(H_i)}{\sum\left(\frac{H_i}{k_{v_i}}\right)} \quad (19-1)$$

و داریم:

$$h = h_1 + h_2 + \dots + h_n \quad (20-1)$$

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n \quad (21-1)$$

۸-۱ رابطه پیوستگی

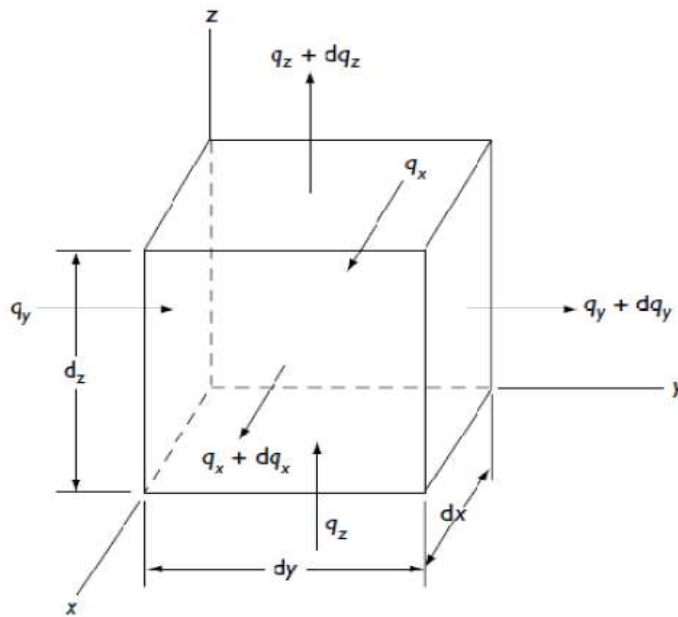
در قسمت های قبلی، حالت های ساده ای از جریان مورد توجه قرار گرفت که برای محاسبه دبی جریان در آن ها، کاربرد مستقیم قانون داری کفایت می کرد اما در خیلی از حالات، جریان آب در خاک نه تنها در یک امتداد نیست، بلکه در تمام سطح عمود بر جریان نیز یکنواخت نمی باشد. بنابراین در چنین شرایطی از رویکردی متفاوت برای محاسبه دبی و فشار جریان استفاده می نمایم.

با فرض غیرقابل تراکم بودن آب و عدم تغییر حجم در توده خاک و با مساوی قرار دادن دبی جریان ورودی و دبی جریان خروجی در شکل (۷-۱) معادله پیوستگی جریان به صورت زیر به دست می آید:

$$\left[\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dzdy + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right] - [v_x dzdy + v_z dx dy] = 0 \quad (22-1)$$

یا

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (23-1)$$



شکل (۷-۱): المان خاک برای رابطه پیوستگی [1]

با توجه به قانون داریسی سرعت جریان را می توان به صورت زیر نوشت:

$$v_x = k_x i_x = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (۲۴-۱)$$

$$v_z = k_z i_z = k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (۲۵-۱)$$

که در این جا k_x و k_z به ترتیب ضریب نفوذپذیری در جهت های عمودی و افقی اند. با ترکیب روابط فوق می توان بیان نمود:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (۲۶-۱)$$

اگر خاک نسبت به ضریب نفوذپذیری همگشت باشد یعنی $k_x = k_z$ ، معادله پیوستگی قبل برای جریان دوبعدی چنین ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (۲۷-۱)$$

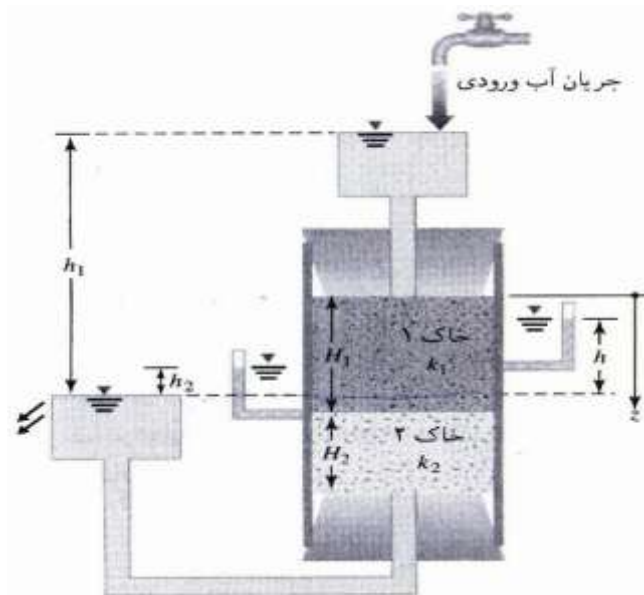
از معادله بالا می توان برای حل مسائل جریان ساده استفاده نمود. برای به تصویر کشیدن این موضوع مطابق شکل (۸-۱) مساله جریان یک بعدی را در نظر بگیرید که در آن بار ثابتی از جریان آب عبوری از خاک دو لایه حفظ می شود. اختلاف بار میان خاک شماره ۱ و پایین لایه خاک شماره ۲ h_1 است. از آنجا که جریان تنها در جهت Z است، معادله پیوستگی به صورت زیر ساده می شود.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$h = A_1 z + A_2$$

که در این جا A_1 و A_2 مقادیر ثابت اند.



شکل (۸-۱): جریان عبوری از خاک دو لایه [1]

برای بدست آوردن A_1 و A_2 مربوط به جریان عبوری از لایه خاک شماره ۱، باید شرایط مرزی را دانست. این شرایط عبارتند از:

$$\text{شرط ۱: در } z = 0, \quad h = h_1$$

$$\text{شرط ۲: در } z = H_1, \quad h = h_2$$

بنابراین داریم:

$$A_2 = h_1$$

$$h_2 = A_1 H_1 + h_1$$

یا

$$A_1 = -\left(\frac{h_1 - h_2}{H_1}\right)$$

از ترکیب معادلات بالا خواهیم داشت:

$$h = -\left(\frac{h_1 - h_2}{H_1}\right)z + h_1 \quad \left(\text{برای } 0 \leq z \leq H_1 \right)$$

برای جریان عبوری از لایه خاک شماره ۲ شرایط مرزی عبارتند از:

$$\text{شرط ۱: در } z = H_1, \quad h = h_2$$

$$\text{شرط ۲: در } z = H_1 + H_2, \quad h = 0$$

بنابراین داریم:

$$A_2 = h_2 - A_1 H_1$$

$$0 = A_1 (H_1 + H_2) + (h_2 - A_1 H_1)$$

یا

$$A_1 = -\left(\frac{h_2}{H_2}\right)$$

از ترکیب معادلات بالا خواهیم داشت:

$$h = -\left(\frac{h_2}{H_2}\right)z + h_2\left(1 + \frac{H_1}{H_2}\right) \quad \left(H_1 \leq z \leq H_1 + H_2 \quad \text{برای} \right)$$

در هر زمان معین جریان عبوری از لایه خاک شماره ۱ با جریان عبوری از لایه خاک شماره ۲ برابر است [1,2]، بنابراین:

$$q = k_1\left(\frac{h_1 - h_2}{H_1}\right)A = k_2\left(\frac{h_2 - 0}{H_2}\right)A$$

که در این جا:

A = سطح مقطع خاک

k_1 = ضریب نفوذپذیری لایه خاک شماره ۱

k_2 = ضریب نفوذپذیری لایه خاک شماره ۲

$$h_2 = \frac{h_1 k_1}{H_1 \left(\frac{k_1}{H_1} + \frac{k_2}{H_2}\right)}$$

۹-۱ مروری بر تحقیقات گذشته

در این قسمت به طور خلاصه به تعدادی از تحقیقات مشابه موضوع این پایان نامه اشاره خواهیم نمود.

۱- عطارنژاد رضا و ربانی محمود، ۱۳۸۹، حل مسئله تراوش با روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا

خلاصه مقاله

در این مقاله، به بررسی مساله تراوش در محیط همگن به کمک روش عددی انتگرال حلقوی منفرد مجزا پرداخته می شود. الگوریتم انتگرال حلقوی منفرد مجزا از سال ۱۹۹۹ به بعد برای حل عددی مسایل مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. زیربنای اصلی این الگوریتم، تئوری پخش و انتشار امواج است. این الگوریتم، دقت روش های کلی و انعطاف پذیری روش های محلی را در حل مسایل مکانیک سیالات و مکانیک جامدات را دارد. در این مقاله در ابتدا موضوع تراوش در یک محیط دوبعدی ساده و سپس در زیر سدهای بتنی و سدهای بتنی با پرده آبنند با معادله حاکم لاپلاس برای اولین بار به روش DSC و با استفاده از هسته شانون تنظیم شده، مورد تحلیل قرار گرفته و جواب های حاصل از این روش با روش تفاضلات محدود مقایسه شده اند؛ نتایج حاکی است که در حل معادله لاپلاس، با پذیرش حجم عملیات بیشتر) انتخاب عرض نوار محاسباتی بزرگتر (M) و بهینه سازی عامل ۲، این روش جواب های دقیق تری نسبت به روش تفاضلات محدود دارد [3].

۲- محمدی کوروش ۲۰۱۵، حل عددی معادله جریان یک بعدی آب در خاک با استفاده از روش

عملگرهای مرجع

خلاصه مقاله

در این مقاله یک مدل عددی برای حل جریان یک بعدی آب در محیط غیر اشباع معرفی گردیده است. جریان آب در لایه های غیر اشباع خاک تابع یک معادله غیر خطی است، که حل تحلیلی آن بجز در موارد معدود و ساده شده امکان پذیر نیست. در این تحقیق معادلات دیفرانسیلی حرکت آب در خاک، با استفاده از یک روش تفاضلات محدود جدید موسوم به روش عملگرهای مرجع حل گردید. روش عملگرهای مرجع برای جایگزین کردن معادلات دیفرانسیل جزئی با یک رشته معادلات تقریبی انتخاب گردید که قابل حل کردن با روش های عددی هستند. بسیاری از روش ها استاندارد تفاضلات محدود، حالت خاصی از این روش اند. ولی بر خلاف آنها، با استفاده از این روش می توان محیط های با مرز نامنظم را هم مدل نمود. یک مدل یک بعدی برای پیش بینی مکش آب خاک (بار فشاری منفی) و مقدار رطوبت در خاک غیر همگن، که دارای لایه بندی متفاوت است، با استفاده از روش عملگرهای مرجع ساخته شده، و با تعدادی حل تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید. نتایج نشان دهنده دقت خوب و قابل قبول مدل در شبیه سازی حرکت آب در خاک می باشد. [4].

۳- فرشید مسیبی، جمشید بذریچ ۱۳۹۲، حل معادلات جریان آب در خاک با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی

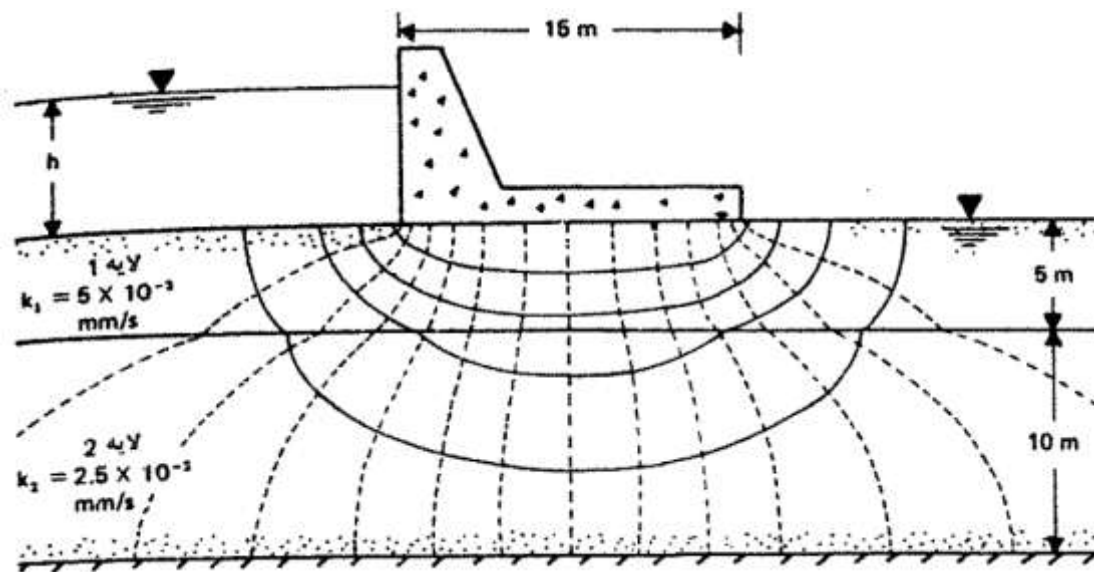
خلاصه مقاله

حل معادلات دیفرانسیل جزئی که تقریباً تمام مسائل مهندسی به آن منتهی میگردد، یکی از چالشهای بزرگ محققین و مهندسين است. حل دقیق این معادلات جز در موارد خاص امکان پذیر نمیشود که این امر باعث هرچه پررنگ تر شدن نقش روشهای عددی در حل معادلات گردیده است. یکی از روشهایی که اخیراً برای حل این معادلات توسعه داده شده، روش بدون شبکه توابع پایه نمایی است. در این روش تابع مجهول به صورت یک ترکیب خطی از توابع نمایی پایه در نظر گرفته میشود و ضرایب آن نیز با استفاده از شرایط مرزی بدست میآید. در این مقاله معادلات حاکم بر جریان آب درون خاک و میزان پتانسیل در هر نقطه از خاک در زیر سد با استفاده از این روش حل شده است. نتایج حاصله نشان میدهد که این روش پاسخ مناسبی برای مسأله مورد نظر به همراه دارد [5].

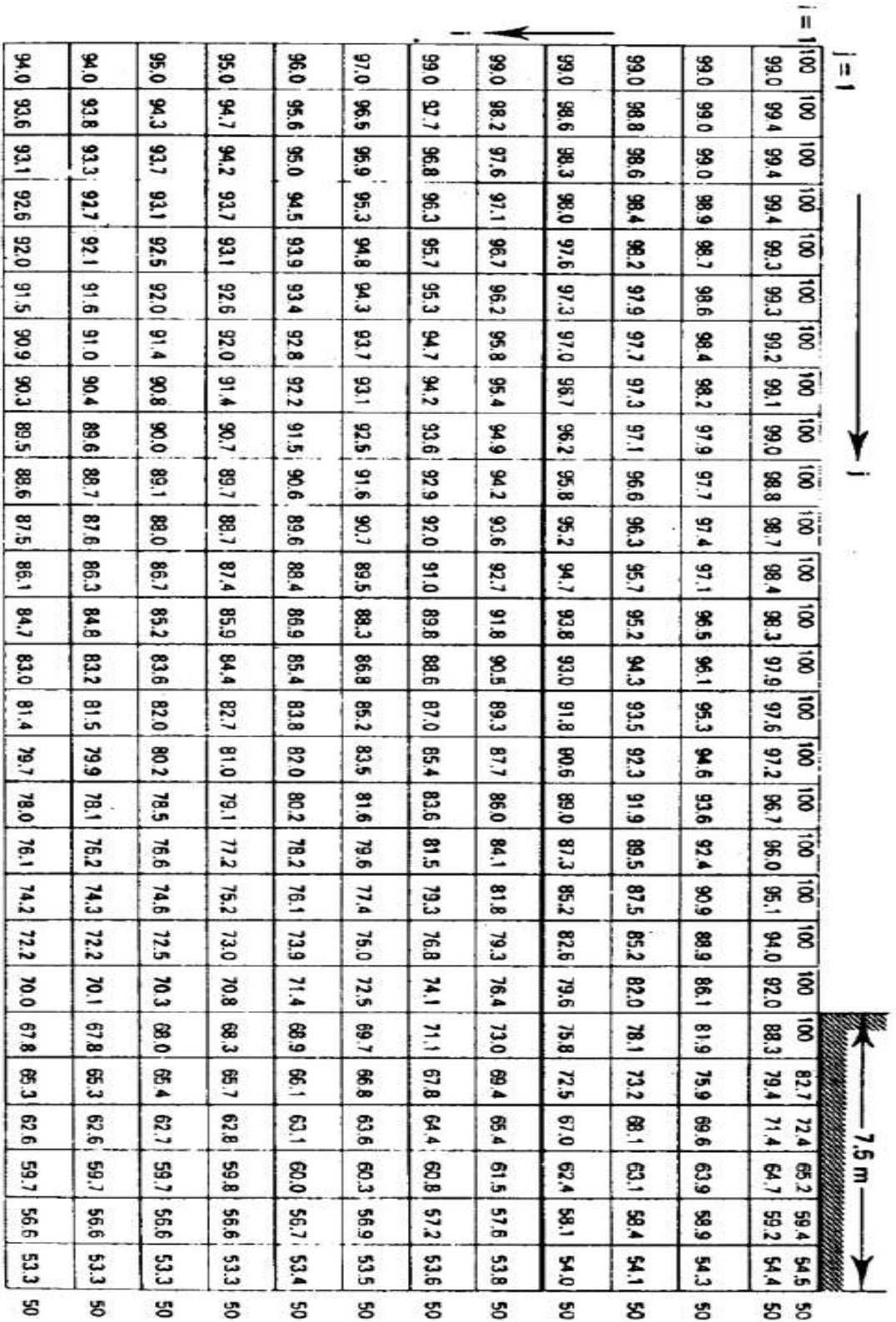
۱-۱۰ حل نمونه مساله با استفاده از روش عددی

در این قسمت به نتایج حل عددی مثال ذکر شده صفحه ۲۳۴ کتاب مکانیک خاک پیشرفته داس (مرجع [1]) اشاره خواهیم نمود.

مسئله محاسبه بارهای آبی در نقاط مختلف در زیر سد نشان داده در شکل (۱-۹) را در نظر می گیریم. با فرض $\Delta x = \Delta z = 1.25m$ ، از آنجا که شبکه جریان در زیر سد متقارن خواهد بود، ما فقط نصف سمت چپ را ناحیه زیر سد را در نظر خواهیم گرفت. مقادیر بارهای آبی برحسب درصد بعد از تکرار دهم به صورت شکل (۱-۱۰) می باشد.



شکل (۱-۹) شبکه جریان در زیر یک سد (مسئله نمونه)



شکل (۱-۱) مقادیر بار آبی بعد از تکرار دهم

فصل ۲

موجک هار

۲-۱ مقدمه

اصلی ترین شاخه ریاضیات که توسط دانشمند فرانسوی ژوزف فوریه^۱، در سال ۱۸۰۷ ارائه شد و منجر به پیدایش موجکها گردید، نظریه آنالیز فرکانس بود که هم اکنون این تئوری، آنالیز فوریه نامیده می شود. فوریه برای نخستین بار طی ارائه رساله ای در آکادمی علوم پاریس ایده ی نمایش یک تابع بر حسب توابع دیگر را مطرح کرد. نظریه فوریه دری را به روی یک دنیای جدید تابعی باز کرد. بعد از سال ۱۸۰۷، با کشف مفاهیمی نظیر همگرایی سریهای فوریه، سیستمهای متعامد و غیره، مطالعه آنالیز سیگنال جای خود را به آنالیز مقیاس واگذار کرد. آنالیز مقیاس عبارت است از مطالعه تابع $f(x)$ با ایجاد ساختارهای ریاضی برای $f(x)$ ، که در مقیاس متغیر هستند. به این ترتیب که ابتدا یک تابع ساخته می شود، سپس با یک مقدار ثابت انتقال داده می شود و در مقیاس تغییر می کند. برای تقریب یک سیگنال این روند مکرراً انجام می شود. چون این روش میانگین نوسان سیگنال در مقیاسهای مختلف را اندازه گیری می کند، دارای خطای کمی می باشد. در واقع برای آن که تابع $f(x)$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود، می توان از مجموعه ای نامتناهی توابع سینوس وار استفاده نمود. عبارت دیگر فوریه نشان داد که تابع $f(x)$ را می توان بوسیله ی ترکیب خطی بی نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin ax$ و $\cos ax$ نمایش داد. با گذشت زمان ضعف پایه های فوریه نمایان شد. مثلاً برای فرمول بندی پردازش سیگنال های پیچیده نظری تصاویر، نه تنها ایده آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند، زیرا قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نمی باشند. در سال ۱۹۰۹ هار اولین کسی بود که به موجک ها اشاره کرد.

در سال ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختارهای تکین موضوعی به فکر اصلاح پایه های فوریه افتادند و بعد از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورله^۲ در آزمایشگاهی متعلق به الف آکیلن متوجه شد، که پایه های فوریه ابزار مطمئنی برای اکتشافات زیر زمین نیست، که این موضوع از مهمترین دلایل کشف موجک ها گردید. در سال ۱۹۷۶ میرو و مالت^۳ از پایه های موجک متعامد توانستند آنالیز چند ریزگی^۴ را بسازند و مالت تجزیه موجک ها و الگوریتم های بازسازی را با به کار بردن آنالیز چند ریزگی بوجود آورد و تحول عظیمی در آنالیز موجک ایجاد نمود [5,6]. در سال ۱۹۸۰ ایوس میر^۵ ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه های موجکی متعامد و ژان مورله مفهوم و تبدیل موجک را به عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین لرزه و گراسمن^۶ فیزیکدان فرانسوی نیز فرمول وارونی را برای تبدیل موجک بدست آوردند [7,8,9]. در سال ۱۹۸۸ نخستین دسته از موجک های متعامد با محمل فشرده توسط دابشی^۷ ساخته شد [10]. در سال ۱۹۹۰ مورنزی^۸ و آنتوان^۹ موجک ها

1 Joseph Fourier

2 Jean Morlet

3 Stéphane Mallat

4 MultiResolution Analysis (MRA)

5 Yves Meyer

6 Alex Grossmann

7 Daubechies

8 R. Murenzi

9 J.-P. Antoine

را به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد بزرگتر گسترش دادند و بدین ترتیب بود که آنالیز موجک^{۱۰} پایه گذاری گردید [11]. همچنین در سال ۱۹۹۰ شرایط لازم و کافی برای تعامد موجک ها توسط لاوتون^{۱۱} [12] و در سال ۱۹۹۲ نظریه موجک های دو بدو متعامد توسط کوهن^{۱۲} و همکارانش برای رفع مشکل اساسی نامتقارن بودن موجک ها ارائه گردید [13]. موجکها در زمینه های مختلفی از علوم و مهندسی مانند پردازش تصاویر، پردازش سیگنال [6] و آنالیز عددی [14] کاربرد فراوانی دارند.

۲- آنالیز موجک

آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتا جدید و قابل توجه در ریاضیات محض است، و پیشینه چندین دهه تحقیق و پژوهش در آنالیز هارمونیک (همساز) را دارا است. آنالیز موجک امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته های علوم و مهندسی دارد و امکانات جدیدی برای درک جنبه های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط توابع روبرو هستیم، ولی این بسط برحسب موجک ها انجام می شود. موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط برحسب انتقال ها و اتساع های این توابع انجام می گیرد، بر خلاف چند جمله ای های مثلثاتی، موجک ها در فضا به صورت موضعی بررسی می شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکی بین توابع و ضرایب آن ها برقرار می شود، و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می توان با استفاده از موجک ها فرمول بندی کرد و اطلاعات مکانی (یا زمانی) موضعی بیشتری بدست آورد. بطور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم های عددی سریع برای محاسبه ی عملگرهای انتگرالی اثر می گذارد. آنالیز موجک، حاصل ۵۰ سال کار ریاضی است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده ترین پرسش های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، دانشین های انعطاف پذیر ساده تری از طریق آنالیز همساز ارائه شد. مستقل از این نظریه که درون ریاضیات محض جای دارد، صورت های مختلفی از این رهیافت را در طی دهه ی گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری (به شکل های آینه ای متعامد و الگوریتم های هرمی)، و استخراج نفت دیده ایم. آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنال های گذرای که سریعا تغییر می کنند، صدا و سیگنال های صوتی، جریان های الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه ای و داده های طیف نمایی^{۱۳} و در کنترل نیروگاه های برق از طریق صفحه ی نمایش کامپیوتر به کار می رود. همچنین بعنوان ابزاری علمی، برای روشن ساختن ساختارهای پیچیده ای که در تلاطم (مانند موج دریا)، جریان های جوی، و در بررسی ساختارهای ستاره ای از آن استفاده می شود. این آنالیز به عنوان یک ابزار عددی می تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی مقیاس بزرگ محاسبات بکاهد، بدین ترتیب که با تغییر ضریب هموار سازی، ماتریسهای متراکم را به شکل ماتریسهای تنکی که به سرعت قابل محاسبه باشد در آورد. آنالیز موجک

10 Wavelet Analysis

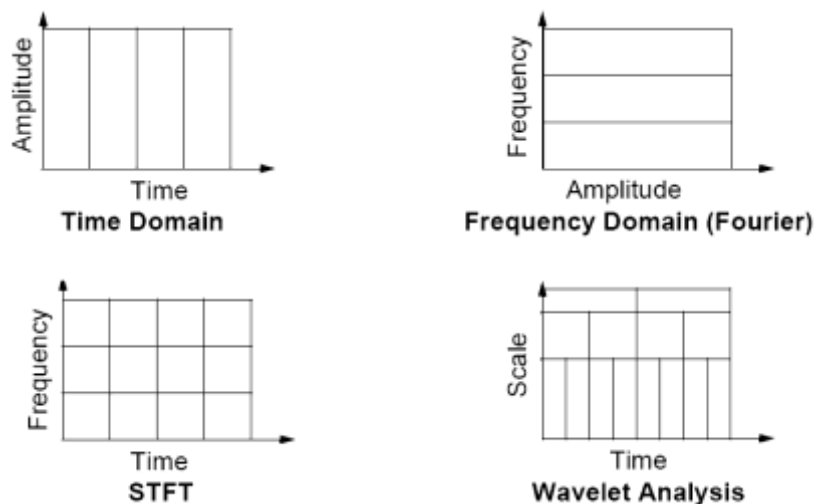
11 Lawton

12 Cohen

13 NMR

امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی^{۱۴}، سی تی اسکن^{۱۵}، جداسازی بافت های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تراشه های هوشمند، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی^{۱۶} و عملکردهای تشدید مغناطیسی^{۱۷} اشاره نمود [15].

آنالیز موجکی تکنیکی کارآمد جهت آنالیز و تقریب سازی سیگنال های ناپایدار بوده و قادر است به خوبی محتوای فرکانسی و اطلاعات زمانی مربوطه را تفکیک نموده و نشان دهد. همچنین موجک ها توانایی تحلیل زمان-فرکانس بصورت محلی را نیز دارند. به این معنی که یک ناحیه مشخص از یک موج، با بزرگنمایی آنالیز شده تا جزئیات بیشتری از اطلاعات زمان-فرکانسی در اختیار قرار دهد. بر خلاف تبدیل فوریه که در موج های دارای ناپیوستگی قادر به تشخیص محل ناپیوستگی نیست، تبدیل موجکی بطور واضح زمان دقیق ناپیوستگی را نشان می دهد. آنالیز موجکی توانایی نشان دادن جزئیاتی را دارد که بقیه روشها آن را در نظر نگرفته و یا حذف می کنند (نظیر نقاط تفکیک، ناپیوستگی در مشتقات مرتبه بالا و...) [16]. شکل (۱-۲) تفاوت روشهای مطرح شده را بطور ساده نشان می دهد.



شکل (۱-۲) مقایسه روش های مختلف تحلیل سیگنال ها

همانگونه که در شکل فوق ملاحظه می گردد در آنالیز موجکی، عرض پنجره تحلیل در محور زمان و محور فرکانس متغیر بوده و می تواند مقادیر مختلفی داشته باشد در حالیکه در آنالیز فوریه پنجره ای، پنجره فوق ثابت بوده و تغییر نمی نماید.

14 MRI
15 CAT
16 MR Spectroscopy
17 FMRI

۲-۳ کاربرد موجک ها در علوم مختلف

پیدایش موجک ها تحول عظیمی را در بسیاری از شاخه های علوم مختلف از قبیل دینامیک مولکولی، فیزیک، نجوم، زلزله شناسی، اپتیک، مکانیک کوانتم، پردازش تصویر، آنالیز هواشناسی، فشار خون، ضربان قلب، آزمایش دی ان ای و پردازش گفتار و غیره پدید آورده است. در زیر به طور خلاصه به بیان برخی از این پیشرفت ها می پردازیم.

- بینایی مصنوعی برای روباتها

در اوایل دهه ۱۹۸۰، دیوید مار در لابراتوار هوش مصنوعی دانشگاه ام آی تی شروع به کار روی بینایی مصنوعی برای روبات ها نمود. او با مطالعه سیستم بینایی انسان در پی یافتن راهی برای ساخت روبات های بینا بود. وی در تحقیقاتش را روی جوانب میکانیکی و غیر ارادی بینایی انسان متمرکز نمود. تئوری مار، که بر روی پردازش تصویر در سیستم بینایی انسان استوار بود، ساختار پیچیده ای دارد که شامل چندین مرحله پردازش است. در هر مرحله از پردازش، سیستم شبکیه مستمراً یک نمایش از تصویر به شیوه ای هندسی، مقیاس بندی می کند. اما مباحث مار عمدتاً به کشف شدت تغییرات مرتبط بودند. او بیان کرد که شدت تغییرات در مقیاس های مختلف یک تصویر رخ می دهند. نابراین شناسایی بهینه آن ها مستلزم استفاده از اپراتورهایی در اندازه های مختلف است. او هم چنین بیان کرد که تغییرات ناگهانی در اولین پردازش تصویر باعث به وجود آمدن قله یا دره می شوند. برای بررسی این دو فرضیه باید یک فیلتر بینایی با دو ویژگی مورد استفاده قرار گیرد؛ اول این که باید یک اپراتور دیفرانسیل باشد و دوم این که قادر به عمل در هر مقیاس مطلوب باشد. اپراتوری که مار آن را به کار برد، یک موجک بود که امروزه موجک مار نامیده می شود.

- استفاده از تبدیل موجک برای استخراج ویژگیهای سیگنال EEG

سیگنال بینایی EEG به عنوان نشان گر فعالیت مغز، اطلاعات غنی درباره عملکرد و وضعیت مغز دارد. امروزه پس از پشت سر گذاشتن مشکلات ثبت این سیگنال ضعیف، پردازش و تحلیل آن اهمیت ویژه ای دارد. زیرا تفسیر آن کاری مشکل بوده و اکثر اطلاعات موجود در آن با چشم قابل مشاهده نیستند. از طرفی متخصصان بیهوشی نیاز به پارامتری معادل با سطح هوشیاری دارند و ارزیابی تغییرات آن با وضعیت EEG که لازمه آن کمی سازی اطلاعات موجود در سیگنال هوشیاری است. روش های مختلف در این زمینه ارائه شده اند. اخیراً تبدیل موجک که یک تبدیل زمان-فرکانس است، برای کمی سازی این سیگنال مورد استفاده قرار گرفته است که نسبت به سایر روشهای ارائه شده دارای نتایج مطلوبی است. شناسایی مشخصات ترک در المان های سازه ای از طریق تبدیل موجک بسیاری از شکست های سازه ای به علت گسیختگی مواد تشکیل دهنده رخ می دهد. این گسیختگی ها با ترک توام می باشند و در صورت گسترش تهدیدی جدی برای رفتار سازه محسوب می شوند. به همین جهت روش های تشخیص و نمایان سازی ترک موضوع تحقیقات گسترده ای می باشد که تا کنون انجام شده و متدهای فراوانی برای آن ارائه شده اند که به مدیریت رفتار و عملکرد مورد انتظار از سازه می پردازند. تاثیر ترک

در رفتار دینامیکی سازه به صورت تغییرات موضعی سختی است. روش های گوناگونی در راستای بررسی و تشخیص این تغییرات ارائه شده است که هر کدام دارای توانایی ها و ضعف هایی می باشند. یکی از روش های کلاسیک در این زمینه تبدیل فوریه می باشد که اطلاعات مربوط به فرکانس های موجود در یک سیگنال را ارائه می کند و لیکن از زمان رخ دادن یک فرکانس خاص هیچ اطلاعی به دست نمی دهد. برای تشخیص مکان ترک آگاهی از زمان رخ دادن یک فرکانس اهمیت ویژه ای دارد. به این ترتیب تبدیل فوریه در این مورد با ضعف مواجه می شود. روش جدید و کارآمدی که در سالهای اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته تبدیل موجکاست که قابلیت بالایی در شناسایی ناپیوستگی ها و یا ناهماهنگی ها مانند کاهش ناگهانی سختی دارد. نتایج کار با موجک ها در این زمینه نشانگر کارایی بالای آن ها در تشخیص زمان و مکان ترک می باشد. تشخیص آوای صدا دار از آوای بی صدا به کمک تبدیل موجک تشخیص صوت از شاخه های مهم و کاربردی در مبحث پردازش گفتار می باشد. الگوریتم ها و تبدیل های مختلفی در این زمینه ارائه شده است که دارای مزایا و معایبی می باشند. اما یکی از تبدیل های کاربردی و موفق در این راستا تبدیل موجک می باشد که کاربرد قابل توجهی در تشخیص آوای صدا دار از آوای بی صدا دارد. مزیت تبدیل موجک نسبت به سایر تبدیل ها در این است که الگوریتم های ارائه شده با تبدیل موجک قابلیت تبدیل شدن به سخت افزار دارند و چون در بیشتر مواقع سرعت اجرا و اعلام نتایج سخت افزار نسبت به نرم افزار بیشتر است، انتخاب این تبدیل ها در کاربردهای مذکور بیشتر مورد توجه می باشد [17].

چند دسته مهم از کاربردهای پردازش تصویر با استفاده از موجک به شرح زیر می باشند:

- کاربردهای عکاسی مانند ارتقا و بازسازی تصاویر قدیمی، بازسازی تصاویر خراب شده با نویز و بهبود ظاهر تصاویر معمولی.
 - کاربردهای پزشکی مانند ارتقا ویژگی های تصاویر اشعه ایکس، تولید تصاویر ماموگرافی، ام آر آی و سی تی اسکن.
 - کاربردهای امنیتی مانند تشخیص حرکت در دزدگیرها، تشخیص اثر انگشت، تشخیص چهره و تشخیص امضا.
 - کاربردهای نظامی مانند تشخیص و رهگیری خودکار اهداف متحرک یا ثابت از هوا یا زمین.
 - کاربردهای سنجش از راه دور مانند ارتقاء و تحلیل تصاویر هوایی و ماهواره ای برداشته شده از مناطق مختلف جغرافیایی که در کاربرهای نقشه برداری، کشاورزی، هواشناسی و موارد دیگر مفید هستند.
 - کاربردهای فشرده سازی تصویر مانند ذخیره سازی، ارسال تصاویر تلویزیون با کیفیت بالا و ارسال تصاویر متحرک و زنده از روی شبکه اینترنت و یا خط تلفن.
 - کاربردهای صنعتی مرتبط با خودکار سازی صنایع مانند تفکیک محصولات مختلف براساس شکل یا اندازه، آشکارسازی نواقص و شکستگی های موجود در محصولات، تعیین محل اشیاء و اجرای فرایند تولید با استفاده از روبات ها و بینایی ماشین.
- برخی دیگر از کاربردهای آنالیز موجک عبارتند از:

- یافتن نقاط ناپیوسته در سیگنال
- نویزبرداری از سیگنال
- فشرده سازی سیگنال
- فشرده سازی تصاویر
- حل معادلات دیفرانسیل و ...

۴-۲ تعاریف و قضیه ها

در این بخش، برخی از مفاهیمی که در مویک ها کاربرد فراوانی دارند، معرفی و تعدادی از قضایا و تعاریف مربوط به آن ها را مرور می کنیم.

تعریف: $L^p(a, b)$ یک فضای تابعی است که عناصر آن توابع اندازه پذیر روی بازه (a, b) بوده و در شرط زیر صدق می کنند:

$$f(x) \in L^p(a, b), \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \quad (1-2)$$

در تعریف فوق اگر قرار دهیم $p=2$ فضای فوق $L^2(a, b)$ فضای توابع به طور مربعی انتگرال پذیر می باشد. ضرب درونی دو تابع u, v در این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$(u(x), v(x)) = \int_a^b u(x) v(x) dx \quad (2-2)$$

بنابراین $L^2(a, b)$ یک فضای ضرب درونی می باشد. نرم تابع u در این فضا به شکل زیر تعریف می شود:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_a^b u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-2)$$

تعریف: مجموعه توابع f_i یک پایه ریس^{۱۸} برای $L^2(a, b)$ نامیده می شود هرگاه:

۱. هر عضو u در $L^2(a, b)$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از اعضای f_i نوشت. یعنی:

$$u(x) = \sum_i c_i f_i(x) \quad (4-2)$$

بعبارت دیگر: i

$$\overline{\text{span}\{f_i, i \in \mathbb{Z}\}} = L^2(a, b) \quad (5-2)$$

۲. اعداد مثبت A, B موجود باشند بگونه ای که برای هر u دلخواه از فضا با ترکیب خطی رابطه

بالا داشته باشیم:

$$A\|u\|^2 \leq |c_i|^2 \leq B\|u\|^2 \quad (6-2)$$

تعریف: تابع دلتای کرونکر^{۱۹} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (7-2)$$

تعریف: محمل^{۲۰} تابع $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بستار مجموعه تمام نقاطی مانند $x \in \Omega$ است که $f(x)$ مخالف صفر باشد و آن را با نماد زیر نمایش می دهیم:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}} \quad (8-2)$$

اگر محمل تابع f زیر مجموعه ای فشرده از \mathbb{R}^n باشد، آنگاه می گوییم تابع f محمل فشرده^{۲۱} دارد. یک مثال معروف از توابع با محمل فشرده، تابع بی شمار بار مشتق پذیر زیر است:

$$\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (9-2)$$

که محمل این تابع بازه $(-1, 1)$ است. مثال معروف دیگر از این قبیل توابع، تابع

$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (10-2)$$

که به تابع مقیاس هار^{۲۲} معروف است. محمل آن بازه $[0, 1]$ بوده و در معادله

$$h(x) = h(2x) + h(2x - 1) = h(2x) + h_1(2x) \quad (11-2)$$

صدق می کند که در آن $h_k = h(x - k)$, $(k \in \mathbb{Z})$. این تابع بر انتقال های صحیح خود عمود است، یعنی:

$$(h, h_k) = \int h(x)h(x - k)dx = \delta_{0k} \quad (12-2)$$

تعریف: یکی از مفاهیم اساسی نظریه موجک کلاسیک معادله مقیاس^{۲۳} است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \quad (13-2)$$

که در آن ϕ را تابع مقیاس می نامند.

با کمک تابع مقیاس، مفاهیمی همچون تقریب های چند ریزگی^{۲۴} موجکها، گسسته سازی سریع^{۲۵} و الگوریتم های اصلاحی^{۲۶} معرفی می شوند. برای مشاهده جزئیات بیشتر می توان به مراجع [18] و [19] مراجعه نمود.

تعریف: تابع $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ را تابع مقیاس^{۲۷} می نامیم، اگر در معادله زیر صدق کند.

19 Kronecker delta

20 Support

21 Compact support

22 Haar scaling function

23 Scaling or Refinable equation

24 Multi Resolution Approximation

25 Fast decomposition

26 Reconstruction algorithms

27 Scaling function

$$\phi(x) = \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k \phi(2x - k) \quad (14-2)$$

که در آن $a_k \in \mathbb{C}$ را ضریب مقیاس می نامند.

موجک $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ یک موجک متعامد^{۲۸} نامیده می شود، اگر مجموعه توابع $\{\phi_{j,k}\}$

که $\phi_{j,k}(x) = \left\{ 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ می باشد، در رابطه زیر صدق کند.

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{m,k}, \quad m, l, j, k \in \mathbb{Z} \quad (15-2)$$

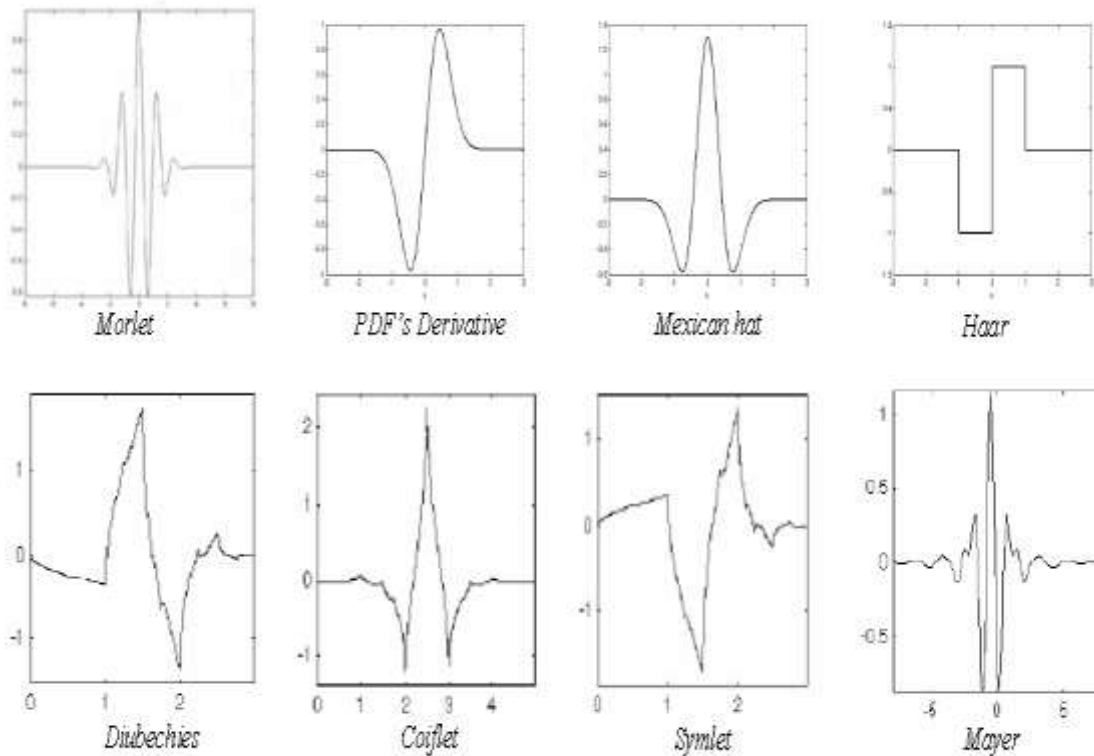
ولی اگر

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle = 0 \quad j \neq l \quad (16-2)$$

موجک ϕ موجک شبه متعامد نامیده می شود.

موجکهایی که به طور وسیع در پردازش سیگنال مورد استفاده قرار می گیرند، موجکهای متعامد هستند.

در کاربردهای مذکور بر خلاف روشهای حل معادلات انتگرال خود موجک هیچ گاه ساخته نمی شود و توابع مقیاس و ضرایب بسط موجک مورد نیاز هستند. در شکل (۲-۲) نمودار تعدادی از توابع موجک رسم شده است.



شکل(۲-۲): نمودار تعدادی از توابع هار (موجک مادر) [18]

مثال: تابع هار^{۲۹} یک تابع متعامد است و در معادله زیر صدق کند.

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) \quad (۱۷-۲)$$

زیرا برای $k \neq 0$ محمول توابع $\phi(x)$ و $\phi(x - k)$ تنها یک نقطه مشترک می توانند داشته باشند.

مثال: تابع کلاهی^{۳۰} به صورت زیر تعریف می شود

$$\phi(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۸-۲)$$

$\phi(x)$ در معادله مقیاس زیر صدق می کند

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x+1) + \phi(2x) + \frac{1}{2}\phi(2x-1) \quad (۱۹-۲)$$

که یک تابع متعامد نمی باشد.

تعریف: اگر ثابت هائی مانند A, B موجود باشند که $0 < A \leq B$ به طوری که برای هر دنباله

$$\{c_k\} \in L^2 \text{ داشته باشیم}$$

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \|\sum_k c_k^* \phi(x-k)\|_2^2 \leq B \sum_k |c_k|^2 \quad (۲۰-۲)$$

آن گاه تابع مقیاس $\phi \in L^2$ دارای انتقال پایدار است.

با فرض $A = B = 1$ اگر تابع ϕ متعامد باشد، پایدار نیز خواهد بود [18].

تعریف: دنباله $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ از زیر فضاهای L^2 را یک تقریب چندریزیگی $L^2(\mathbb{R})$ می نامیم هر گاه

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

و دارای خواص زیر نیز باشد

۱. $U_n V_n$ در $L^2(\mathbb{R})$ چگال است.

۲. $U_n V_n = \{0\}$

۳. $f(x) \in v_n \leftrightarrow f(2x) \in v_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

۴. $f(x) \in v_n \leftrightarrow f(x - 2^{-n}k) \in v_n \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$

۵. تابعی مانند $\phi \in L^2$ وجود دارد به طوری که $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ تشکیل یک پایه

پایدار برای V_0 می دهد.

این تابع پایه ای ϕ را تابع مقیاس می نامند. MRA را متعامد گویند اگر ϕ متعامد باشد. ویژگیهای

اول و دوم نشان می دهند که $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک دنباله تو در تو از زیر فضاهایی است که $L^2(\mathbb{R})$ را می

پوشاند. یعنی اینکه هر تابع به طور مربعی انتگرال پذیر می تواند به هر اندازه دلخواه با تابعی که متعلق

به حداقل یکی از زیر فضاهای $\{V_n\}$ است، تقریب زده شود. ویژگی سوم بیان می کند که زیر فضاهای

فوق می توانند از طریق تظریف با توانهایی از ۲ از یکدیگر مشتق شوند. همچنین ویژگی مذکور یک

29 Haar function

30 Hat function

تفسیر شهودی از ویژگیهای دنباله $\{V_n\}$ را ارائه می دهد. بعنوان مثال تابع $f(2x)$ ویژگیهای ظریف تری نسبت به $f(x)$ را داراست بنابراین دنباله فوق به زیر فضای بالاتری متعلق است.

تصویر متعامد یک تابع دلخواه $f \in L^2$ روی V_n به صورت زیر معرفی می شود

$$P_n f = \sum_k \langle f, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k} \quad (21-2)$$

می گوییم که توابع در V_n دارای مقیاس 2^{-n} هستند و $P_n f$ را تقریبی از f در مقیاس 2^{-n} گوییم.

لم: به ازای هر $f \in L^2$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ آنگاه $P_n f \rightarrow f$ در L^2 [18].

تعریف: تابع مقیاس ϕ دارای مرتبه تقریب q است اگر

$$\|f - p_n f\| = O(2^{-nq}) \quad (22-2)$$

تعریف: چند موجکها تعمیمی از موجکها هستند، که تابع مقیاس آن به صورت تابع برداری زیر نشان داده می شود

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_r(x) \end{pmatrix} \quad (23-2)$$

معادله مقیاس نظیر تابع چند مقیاس $\phi(x)$ ^{۳۱} به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi(x) = \sqrt{m} \sum_{k_0}^{k_1} H_k \phi(mx - k), \quad k \in Z \quad (24-2)$$

که در آن $m \geq 2$ را فاکتور تأخیر می نامند و ضرایب H_k ماتریس های $r \times r$ می باشند.

تابع مقیاس برداری را متعامد گویند هرگاه

$$\langle \phi(x), \phi(x - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \phi(x - k)^* dx = \delta_{0,k}, I \quad (25-2)$$

این ضرب داخلی یک ماتریس $r \times r$ است.

چند موجک ها نسبت به موجک ها دارای مزایایی هستند. از جمله می توان به کوچک بودن محمل، همواری و مرتبه تقریب بالا، متقارن و متعامد بودن آن ها اشاره کرد.

۵-۲ توابع هار

موجک هار رده ای خاص از توابع است که به عنوان اولین موجک شناخته می شود. این رده از موجک ها اولین بار توسط آلفرد هار، ریاضیدان مجارستانی در سال ۱۹۰۹ پیشنهاد شد. موجک هار ساده ترین موجک ممکن می باشد. مشکل این موجک این است که پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر نمی باشد. تابع مقیاس $\phi_0(t)$ برای توابع هار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (26-2)$$

همچنین $\psi(t)$ را موج مادر می نامند، و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (27-2)$$

مابقی توابع هار با در نظر گرفتن دو عملگر انتقال و تاخیر از موج مادر طبق معادله زیر تولید می شود.

$$\psi_{n,k}(t) = \left\{ 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n t - k) \right\}, \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad (28-2)$$

$$\mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}$$

از آن جایی که موجک های هار متعامد هستند، بنابراین داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{n_1} t - k_1) \psi(2^{n_2} t - k_2) dt = \delta_{n_1, n_2} \delta_{k_1, k_2} \quad (29-2)$$

۲-۶ توابع هار گویا

مجموعه متعامد از موجک های هار، گروهی از موجک های مربعی با $-2^{\frac{i}{2}}, +2^{\frac{i}{2}}$ برای $i = 0, 1, \dots$ هستند. لینچ^{۳۲} [20] و ریز^{۳۳} [21, 22] برای اولین بار، از موجک های گویا، با حذف ضرایب توان های دو از ابتدای موجک های هار، استفاده نمودند. این تغییرات موجب ظهور و استفاده از نوع جدیدی از موجک ها بنام موجک های هار گویا^{۳۴} گردید.

تبدیلات توابع هار گویا تمام ویژگی های تبدیلات هار اصلی را دارا بوده و می توانند به طور موثر و کارآمدتری در مسائل کاربردی مورد استفاده قرار گیرند. موجک های توابع هار گویا تنها دارای سه دامنه نوسان $+1$ و -1 و 0 می باشند. از این رو کار کردن با این موجک ها بسیار ساده می باشد.

تعریف: توابع هار گویای $h_l(t)$ برای هر $l = 1, 2, \dots$ که $l = 2^i + j$ ، با $i = 0, 1, \dots$ و $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ به صورت $h_l(t) = RH(2^i t - j)|_{[0,1]}$ تعریف می شود.

$$RH(2^i t - j) = \begin{cases} 1, & j2^{-i} \leq t < (j + \frac{1}{2})2^{-i} \\ -1, & (j + \frac{1}{2})2^{-i} \leq t < (j + 1)2^{-i} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (30-2)$$

برای عدد صحیح $i = 0, 1, \dots$ ، 2^i نشان دهنده ی عرض موجک و $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ پارامتر انتقال می باشد.

گزاره: در توابع RH برای هر $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ خاصیت ضرب پذیری برای هر $0 < l < q$ ، عبارتست از:

32 Lynch

33 Reis

34 Rationalized Haar (RH) wavelet

- ۱- اگر $l = 0$ باشد آن گاه $h_l(t)h_q(t) = h_q(t)$.
- ۲- اگر h_q در نیمه مثبت موج h_l قرار گیرد آن گاه $h_l(t)h_q(t) = h_q(t)$.
- ۳- اگر h_q در نیمه منفی موج h_l قرار گیرد آن گاه $h_l(t)h_q(t) = -h_q(t)$.
- لم: دنباله $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد کامل در فضای $L^2[0,1]$ است [23].

تعریف: اگر $i \in Z^+ \cup \{0\}$ و $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ در این صورت خاصیت تعامدی به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\langle h_l(t), h_q(t) \rangle = \int_0^1 h_l(s) h_q(s) ds = \begin{cases} 2^{-i}, & l = q = 2^i + j \\ 1, & l = q = 0 \\ 0, & l \neq q \end{cases} \quad (31-2)$$

لم: [23] اگر $f(t) \in C[0,1]$ باشد، آنگاه سری

$$\sum_n 2^i \langle f(t), h_n(t) \rangle h_n(t) \quad (32-2)$$

به صورت یکنواخت همگرا به $f(t)$ که در آن

$$\langle f(t), h_l(t) \rangle = \int_0^1 f(s) h_l(s) ds \quad (33-2)$$

اگر تابع $f(t) \in L^2([0,1])$ و بردارهای C و $H_m(t)$ به صورت زیر

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_{m-1}]^T \quad (34-2)$$

و

$$H_m(t) = [h_0(t), h_1(t), \dots, h_{m-1}(t)]^T \quad (35-2)$$

تعریف شوند، آنگاه تابع $f(t)$ را می توان به صورت تعداد متناهی جمله از توابع RH به صورت زیر تقریب زد.

$$f(t) \cong \sum_{l=0}^{m-1} c_l h_l(t) = C^T H_m(t) \quad (36-2)$$

که در آن $m = 2^{\alpha+1}$ و $\alpha = 0, 1, \dots$ و c_l ضرایب توابع RH به صورت زیر محاسبه می شود.

$$c_l = \frac{\langle f(t), h_l(t) \rangle}{\langle h_l(t), h_l(t) \rangle} \quad (37-2)$$

تعریف: اگر $h_l(t)$ یک موجک هار گویا باشد در این صورت انتگرال آن عبارت است از

$$\int_0^1 h_l(s) ds = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases} \quad (38-2)$$

بنابراین با استفاده از تعریف $H_m(t)$ داریم

$$\int_0^1 H_m(s) ds = V_m \quad (39-2)$$

و

$$\int_0^t H_m(s) ds = P H_m(t) \quad (40-2)$$

که در آن $V_m = [1,0,0, \dots, 0]$ و

$$P = P_{m \times m} = \frac{1}{2^m} \begin{pmatrix} 2^m P_{\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}} & -\Phi_{\frac{m}{2}} \\ \Phi_{\frac{m}{2}}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (41-2)$$

و

$$\Phi_m = \left[H_m \left(\frac{1}{2^m} \right), H_m \left(\frac{3}{2^m} \right), \dots, H_m \left(\frac{2^m-1}{2^m} \right) \right] \quad (42-2)$$

که در آن

$$\Phi_1 = [1] \quad , \quad P_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (43-2)$$

و

$$D_{m \times m} = \text{diag} \left(1, 1, 2, 2, 2^2, \dots, 2^2, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} \right) \quad (44-2)$$

بنابراین معکوس Φ_m عبارت است از

$$\Phi_m^{-1} = \left(\frac{1}{m} \right) \Phi_m^T D_{m \times m} \quad (45-2)$$

هر تابع دلخواهی مانند $y(t)$ را که

$$\int_0^1 y^2(t) dt < \infty \quad (46-2)$$

باشد را می توان بر حسب موجک های هار به صورت زیر بسط داد [24,25].

$$y(t) = c_0 h_0(t) + c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) + \dots \quad (47-2)$$

که در آن

$$c_i = \int_0^1 y(t) h_i(t) dt \quad (48-2)$$

۲-۷ حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک هار

در آنالیز عددی، حل معادله دیفرانسیل معمولی و جزئی معمولاً پیچیده و خسته کننده می باشد و همچنین روش اجرایی آن بسیار آهسته صورت می پذیرد. معمولاً در حل معادلات مربوط به رشته های مهندسی روش اجرایی سریع مد نظر می باشد. یک روش ساده و سریع محاسباتی در حل معادلات مربوطه، استفاده از موجک می باشد.

آنالیز موجک محاسبات طولانی را کوتاه تر و همچنین محاسبات را بوسیله دستور و فرمانهای نرم افزاری انجام می دهد، که کمک شایانی در حل معادلات مربوطه خواهد داشت.

می دانید که تبدیل موجک یا آنالیز موجک در چند سال اخیر وسیله بسیار موثری در حل معادلات دیفرانسیل های معمولی و خطی بوده به طوری که علاوه بر حل معادلات تبدیل موجک در پردازش تصویر، فشرده سازی اطلاعات، حذف نویز و ... پیشرفت های چشمگیری داشته است.

در حل معادله دیفرانسیل با استفاده از روش های موجک افرادی به نام چن و هیسو ماتریس عملگری از پایه های انتگرال را روی موجک ها پیدا کردند و توانستند معادلات دیفرانسیل مورد بررسی را حل کنند.

معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر توسط لپیک حل شد و علاوه بر آن لپیک از تبدیل موجک ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی استفاده کرد.

تبدیل موجک ها توسط تابع پله ای $\psi(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (49-2)$$

که به این موجک، موجک مادر گفته می شود.

مابقی توابع ها با در نظر گرفتن دو عملگر انتقال و تاخیر از موج مادر طبق معادله زیر تولید می شود.

$$\psi(x) = \psi(2^i x + k) \quad (50-2)$$

$$\begin{cases} \psi(x) = \psi(x + k) & \text{جابجایی یا انتقال} \\ \psi(x) = \psi(2^i x) & \text{مقیاس یا اتساع} \end{cases} \quad (51-2)$$

این دو ویژگی برجسته موجک ها در حل معادلات دیفرانسیل بسیار موثر هستند.

برای حل یک معادله دیفرانسیل خطی با استفاده موجک ها خواهیم داشت.

$$A_1 y^{(n)}(x) + A_2 y^{(n-1)}(x) + \dots + A_n y^1(x) = f(x) \quad (52-2)$$

که $x \in [A, B]$ و با شرایط اولیه مشخص $y^1(A)$ و $y^{(n-2)}(A)$ و $y^{(n-1)}(A)$ داریم $m = 2(2^j)$ و بازه $[A, B]$ را به m زیر بازه تقسیم می کنیم. به طوری که $\Delta x = \frac{B-A}{m}$ و ابعاد ماتریس $m \times m$ خواهد بود [26].

با توجه به مقدمات و تعاریف ذکر شده در این فصل، در مرجع [26] چند گام زیر برای حل معادلات دیفرانسیل بیان شده که این الگوریتم یکی از مبانی حل معادله موضوع این پایان نامه می باشد. این گام ها عبارتند از:

گام ۱: فرض کنید

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^m a_i h_i(x) \quad (53-2)$$

که h ماتریس ها و a_i ضرایب موجک ها می باشند.

ماتریس h برای میزان $j=2$ به صورت زیر می باشد.

$$y''(x) = \sum_{i=1}^m a_i h_i(x)$$

گام ۲:

$$y^{(v)}(x) = \sum_{i=1}^m a_i P_{2,i}(x) + \sum_{\sigma=0}^{2-0-1} \frac{1}{\sigma!} (x-0)^\sigma y_0^\sigma = \sum_{i=1}^m a_i P_{2,i}(x) + 1 + x$$

گام ۳:

$$y''(x) + y(x) = \sin x + x \cos x$$

$$\sum_{i=1}^m a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^m a_i P_{2,i}(x) + 1 + x = \sin x + x \cos x$$

$$\sum_{i=1}^m a_i [h_i(x) + P_{2,i}(x)] = \sin x + x \cos x - 1 - x$$

ماتریس P به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 & 15^2 & 17^2 & 19^2 & 21^2 & 23^2 & 25^2 & 27^2 & 29^2 & 31^2 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 & 15^2 & 287 & 343 & 391 & 431 & 463 & 487 & 503 & 511 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 79 & 103 & 119 & 127 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 79 & 103 & 119 & 127 \\ 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & \\ \frac{1}{2!} \frac{1}{32^2} & 1 & 7 & & & & & & & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 \\ & & 1 & 7 & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 7 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 7 & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 7 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 7 & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & 7 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 7 & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 7 & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 7 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & 7 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 7 & & \end{pmatrix}$$

گام ۴: محاسبه کردن مولفه a_i

گام ۵: به دست آوردن حل عددی برای $y(x)$

تعدادی از نتایج حاصل به شرح زیر می باشد.

$x(/32)$	حل با آنالیز موجک	حل دقیق	میزان خطا
1	1.030777	1.030767	0.000010
3	1.089527	1.089496	0.000031
5	1.144880	1.144700	0.000180
31	1.663308	1.652763	0.010545

مثال ۲: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر به ازای $j=3$.

$$y^{(4)}(x) + xy(x) = 16 \sin 2x + x \sin 2x$$

$$x \in [0,1] \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2 \quad , \quad y''(0) = 0 \quad , \quad y'''(0) = -8$$

حل:

از گام های ۱ تا ۳ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^m a_i [h_i(x) + xP_{4,i}(x)] = 16 \sin 2x + x \sin 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4$$

نتایج حاصل بعد از گام های ۴ و ۵ به شرح زیر می باشد:

$x(/32)$	حل با آنالیز موجک	حل دقیق	میزان خطا
1	0.062459	0.062459	0.000000
3	0.186405	0.186403	0.000002
5	0.307463	0.307439	0.000024
31	1.010991	0.933514	0.077477

فصل ۳

حل معادله تراوش با استفاده

از موجک هار

۳-۱ حل معادله

در ابتدا بعضی معادلات و تعریف های ذکر شده در مورد موجک هار یادآوری می شود.

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & \alpha \leq x < \beta \\ -1 & \beta \leq x < \gamma \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱-۳)$$

که $\alpha = \frac{k}{m}$ و $\beta = \frac{k+0.5}{m}$ و $\gamma = \frac{k+1}{m}$. عدد صحیح $m = 2^j$ ، $(j = 0, 1, 2, 3, \dots, J)$ درجه موجک را نشان می دهد و $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1$ پارامتر انتقال می باشد. ماکزیمم درجه دقت J میباشد. اندیس i با استفاده از فرمول زیر محاسبه می شود.

$$i = m + k + 1$$

در این خصوص کمترین مقدار $i = 2$ به ازای $m = 1$ و $k = 0$ به دست می آید. و بیشترین مقدار $i = 2M$ به ازای $M = 2^j$ به دست می آید. از آن چه که گفته شد میزان $i = 1$ متناسب است با سنجش تابع در بازه $[0, 1]$.

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲-۳)$$

حالا مجموعه نقاط $x_l = \frac{(l-0.5)}{2M}$ را تعریف می کنیم به طوری که $l = 1, 2, 3, \dots, 2M$.
داریم:

$$h_1(x) = [1, 1, 1, 1] \quad (۳-۳)$$

$$h_2(x) = [1, 1, -1, -1] \quad (۴-۳)$$

$$h_3(x) = [1, -1, 0, 0] \quad (۵-۳)$$

$$h_4(x) = [0, 0, 1, -1] \quad (۶-۳)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$H_4(x) = [h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (۷-۳)$$

$H_4(x)$ را ماتریس ضرایب هار می نامند. که یک ماتریس مربعی مرتبه ۴ می باشد و تعریف می کنیم $H(i, l) = (h_i(x_l))$ که دارای ابعاد $2M \times 2M$ می باشد. حالا معادله انتگرالی رابطه $h_i(x)$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$q_i(x) = \int_0^x h_i(t) dt \quad (۸-۳)$$

در مجموعه نقاط، معادله $q_i(x)$ از رابطه $Q(i, l) = q_i(x_l)$ حاصل می شود که Q یک ماتریس $2M \times 2M$ می باشد.

حالا خواهیم داشت:

$$Q_n = P_n H_n \quad (9-3)$$

که به ترتیب P_n و H_n را انتگرال و ماتریس ضرایب هار می نامیم. عملگر ماتریس انتگرال P که یک ماتریس مربعی $2M$ می باشد را به صورت زیر می توان تعریف نمود.

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(t) dt \quad (10-3)$$

$$P_{i,n+1}(x) = \int_0^x P_{i,n}(t) dt \quad (11-3)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

این انتگرال ها را با استفاده از رابطه $h_i(x)$ و برای ۴ تای اول بازنویسی می کنیم.

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \alpha & x \in [\alpha, \beta) \\ \gamma - x & x \in [\beta, \gamma) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (12-3)$$

$$P_{i,2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 & x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2}(\gamma - x)^2 & x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{4m^2} & x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (13-3)$$

$$P_{i,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x - \alpha)^3 & x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{4m^2}(x - \beta) - \frac{1}{6}(\gamma - x)^3 & x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{4m^2}(x - \beta) & x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (14-3)$$

$$P_{i,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x - \alpha)^4 & x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{8m^2}(x - \beta)^2 - \frac{1}{24}(\gamma - x)^4 + \frac{1}{192m^4} & x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{8m^2}(x - \beta)^2 + \frac{1}{192m^4} & x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (15-3)$$

ما میدانیم که تمام موجک های هار با یکدیگر متعامد هستند.

$$\int_0^1 h_i(x)h_l(x)dx = \begin{cases} 2^{-j} , & i = l = 2^i + k \\ 0 , & i \neq l \end{cases} \quad (۱۶-۳)$$

بنابراین ساختار آنها تحت انتقال پایا است. هر معادله انتگرال پذیر $y(x)$ در فاصله $[0,1]$ می تواند بوسیله سری های هار بسط داده شود.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(x) \quad (۱۷-۳)$$

ضرایب c_i را به صورت زیر می توان تعیین نمود:

$$c_0 = \int_0^1 y(x)h_0(x)dx \quad (۱۸-۳)$$

$$c_i = 2^j \int_0^1 y(x)h_i(x)dx \quad (۱۹-۳)$$

که $x \in [0,1]$ ، $0 \leq k < 2^j$ ، $j \geq 0$ ، $i = 2^j + k$ به طوری که میزان خطا از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\varepsilon = \int_0^1 [y(x) - \sum_{i=1}^m c_i h_i(x)]^2 dx \quad (۲۰-۳)$$

به طوری که $m = 2^j$ و $j = 0,1,2, \dots$ ، معمولاً بسط سری های $y(x)$ شامل یک سری جملات نامتناهی است. اگر $y(x)$ تکه ای ثابت باشد.

$$y(x) \cong \sum_{i=1}^m c_i h_i(x) = c_m^T h_m(x) \quad (۲۱-۳)$$

به طوری که ضرایب c_m^T و بردارهای تابع هار $h_m(x)$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$c_m^T = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_m] \quad (۲۲-۳)$$

$$h_m(x) = [h_1(x), h_2(x), h_3(x), \dots, h_m(x)]^T \quad (۲۳-۳)$$

که T ترنسپوز می باشد.

با توجه به نکات بیان شده حل معادله به صورت زیر می باشد:

$$u(x,0) = f_0(x) , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = f_1(x) \quad \text{و شرایط مرزی} \quad u(0,t) = g_0(t) , \quad u(1,t) = g_1(t) \quad \text{می باشد.}$$

داریم:

$$\ddot{u}''(x,t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad , \quad t \in (t_s, t_{s+1}) \quad (۲۴-۳)$$

از معادله بالا انتگرال گیری می کنیم، در ابتدا دو بار بر حسب t از t_s تا t_s و دو بار بر حسب x از 0 تا x .

$$\dot{u}''(x,t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \dot{u}''(x, t_s) \quad (۲۵-۳)$$

$$u''(x,t) = \frac{1}{2}(t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + (t - t_s)\dot{u}''(x, t_s) + u''(x, t_s) \quad (۲۶-۳)$$

$$u'(x, t) = \frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i p_{1,i}(x) + (t - t_s)[\dot{u}'(x, t_s) + \dot{u}'(0, t_s)] + u'(x, t_s) - u'(0, t_s) + u'(0, t) \quad (۲۷-۳)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x) + (t - t_s)[\dot{u}(x, t_s) - \dot{u}(0, t_s) - x\dot{u}'(0, t_s)] + u(x, t_s) - u(0, t_s) + x[u'(0, t) - u'(0, t_s)] + u(0, t) \quad (۲۸-۳)$$

با دو بار مشتق گیری از رابطه فوق بر حسب t خواهیم داشت:

$$\dot{u}(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x) + \dot{u}(x, t_s) + \dot{u}(0, t) - \dot{u}(0, t_s) + x[\dot{u}'(0, t) - \dot{u}'(0, t_s)] \quad (۲۹-۳)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x) + \ddot{u}(0, t) + x[\ddot{u}'(0, t)] \quad (۳۰-۳)$$

با توجه به شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت:

$$u(x, 0) = f_0(x), u'(x, 0) = f_1(x), u(0, t) = g_0(t), u(1, t) = g_1(t)$$

$$u(0, t_s) = g_0(t_s), u(1, t_s) = g_1(t_s), \dot{u}(0, t) = \dot{g}_0(t), \dot{u}(1, t) = \dot{g}_1(t)$$

$$\ddot{u}(0, t) = \ddot{g}_0(t), \ddot{u}(1, t) = \ddot{g}_1(t), \ddot{u}(0, t_s) = \ddot{g}_0(t_s), \ddot{u}(1, t_s) = \ddot{g}_1(t_s)$$

به ازای $x = 1$ در فرمول های $u(x, t)$ ، $\dot{u}(x, t)$ و $\ddot{u}(x, t)$ با استفاده از شرایط بالا خواهیم داشت:

$$u'(0, t) - u'(0, t_s) = -\frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - (t - t_s)[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s) - \dot{u}'(0, t_s)] + g_1(t) - g_0(t) + g_0(t_s) - g_1(t_s) \quad (۳۱-۳)$$

$$\dot{u}'(0, t) - \dot{u}'(0, t_s) = g_1(\dot{t}) - g_0(\dot{t}) + g_0(\dot{t}_s) - g_1(\dot{t}_s) - (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) \quad (۳۲-۳)$$

$$\ddot{u}'(0, t) = -\sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - \ddot{g}_0(t) + \ddot{g}_1(t) \quad (۳۳-۳)$$

حال با جایگذاری سه معادله به دست آمده در معادلات قبلی و به ازای $x \rightarrow x_l$ و $t \rightarrow t_{s+1}$ خواهیم داشت.

$$u''(x_l, t_{s+1}) = \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) + (t_{s+1} - t_s) \dot{u}''(x_l, t_s) + u''(x_l, t_s) \quad (34-3)$$

$$u'(x_l, t_{s+1}) = \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{1,i}(x_l) + (t_{s+1} - t_s) \dot{u}'(x_l, t_s) + u'(x_l, t_s) - \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - (t_{s+1} - t_s)[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s)] + g_1(t_{s+1}) - g_1(t_s) + g_0(t_s) - g_0(t_{s+1}) \quad (35-3)$$

$$u(x_l, t_{s+1}) = \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x_l) + (t_{s+1} - t_s)[\dot{u}(x_l, t_s) - \dot{g}_0(t_s)] - x_l[g_1(t_s) - g_0(t_s) + g_0(t_{s+1}) - g_1(t_{s+1})] + g_0(t_{s+1}) \quad (36-3)$$

$$\dot{u}(x_l, t_{s+1}) = (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x_l) + \dot{u}(x_l, t_s) - \dot{g}_0(t_s) - x_l[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s)] - x_l(t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - x_l[\dot{g}_0(t_{s+1}) - \dot{g}_1(t_{s+1})] + \dot{g}_0(t_{s+1}) \quad (37-3)$$

$$\ddot{u}(x_l, t_{s+1}) = \sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{2,i}(x_l) - x_l P_{2,i}(1)] - x_l[\ddot{g}_0(t_{s+1}) - \ddot{g}_1(t_{s+1})] + \ddot{g}_0(t_{s+1}) \quad (38-3)$$

ما می دانیم که:

$$P_{2,i}(1) = \begin{cases} 0.5 & , \quad i = 1 \\ \frac{1}{4m^2} & , \quad i > 1 \end{cases} \quad (39-3)$$

و در نهایت روابط به دست آمده را در معادله اصلی جایگذاری و با استفاده از نرم افزارهای مربوطه کد نویسی و حل می نماییم.

مثال: معادله زیر را به ازای $j=4$ و $c=3$ و $\Delta t = 0.00001$ حل می نماییم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$$

شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = u_0 \sin(\pi x) \quad , \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

شرایط مرزی:

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(1, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

حل دقیق:

$$u(x, t) = u_0 \cos(\pi ct) \sin(\pi x)$$

نتایج حل با آنالیز موجک:

$$u(x_l, 0) = u_0 \sin(\pi x_l), u''(x_l, 0) = -\pi^2 u_0 \sin(\pi x_l), \dot{u}''(x_l, 0) = 0, \\ \dot{u}(x_l) = 0$$

برای $t=0.2$ و $u_0 = 1$ خواهیم داشت:

$xl/64$	حل با آنالیز موجک	حل دقیق
1	-1.515e-002	-1.516e-002
3	-4.531e-002	-4.534e-002
5	-7.503e-002	-7.509e-002
63	-1.515e-002	-1.516e-002

۲-۳ نتیجه گیری

شکل کلی معادله تراوش به صورت زیر می باشد:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$k_x \ddot{u}(z_l, x_{s+1}) + k_z u''(z_l, x_{s+1}) = 0$$

با جایگذاری روابط به دست آمده در معادله فوق خواهیم داشت:

$$k_x \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{2,i}(z_l) - z_l P_{2,i}(1)] - z_l [\ddot{g}_0(x_{s+1}) - \ddot{g}_1(x_{s+1})] + \ddot{g}_0(x_{s+1}) \right] \\ + k_z \left[\frac{1}{2} (x_{s+1} - x_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(z_l) + (x_{s+1} - x_s) \dot{u}''(z_l, x_s) \right. \\ \left. + u''(z_l, x_s) \right] = 0$$

نکته: به منظور اشتباه نشدن تابع موجک h و h در فرمول تراوش، نماد h در فرمول تراوش را به نماد u تغییر داده ایم.

۳-۲-۱ حل مسئله نمونه با استفاده از روش آنالیز موجک

حال مثال بخش ۱-۱۰ را با استفاده از روش موجک هر حل می نماییم.

با فرض ثابت بودن (خطی بودن تغییرات) ارتفاع آب داریم:

$$\ddot{g}_1(x_{s+1}) = 0 \text{ و } \ddot{g}_0(x_{s+1}) = 0$$

$$k_x \left[\sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{2,i}(z_l) - z_l P_{2,i}(1)] \right] + k_z \left[\frac{1}{2} (x_{s+1} - x_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(z_l) \right]$$

$$= -k_z [(x_{s+1} - x_s) \dot{u}''(z_l, x_s) + u''(z_l, x_s)]$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i \left(k_x [P_{2,i}(z_l) - z_l P_{2,i}(1)] + k_z \frac{1}{2} (x_{s+1} - x_s)^2 h_i(z_l) \right)$$

$$= -k_z [(x_{s+1} - x_s) \dot{u}''(z_l, x_s) + u''(z_l, x_s)]$$

نتایج حاصله به ازای $j = 1$ به صورت زیر می باشد.

نتایج حاصل با ازای $x = 25m$ به صورت زیر می باشد.

$z(m)$	0	3.75	7.5	11.25	15
$h(\%)$	99.98	81.99	74.09	70.79	70.13

نتایج مثال حل شده در فصول اول و سوم بخش های ۱-۱۰ و ۳-۲-۱ که یکی با روش حل عددی و دیگری آنالیز موجکی حل شده است را در جدول ذیل مقایسه می نماییم.

$z(m)$	موجک هر $h(\%)$	حل عددی $h(\%)$	میزان خطا
0	99.98	100	0.01154
3.75	81.99	82	0.01264
7.5	74.09	74.1	0.01782
11.25	70.79	70.8	0.01425
15	70.13	70	0.01265

با توجه به داده های بالا مشاهده می کنیم که میزان خطا در حد قابل قبولی می باشد. می توان از روش آنالیز موجک برای حل معادله تراوش و دیگر معادلات مکانیک خاک نیز استفاده نمود. در پژوهش دیگری همزمان با این پژوهش، حل معادله تحکیم با استفاده از آنالیز موجک هر انجام شده است و نتایج حاصله از آن نیز قابل قبول می باشد.

از جمله مزیت‌های حل معادلات با آنالیز موجک، استفاده از محاسبات ماتریسی در تعیین جوابهای عددی می باشد، که موجب افزایش دقت و سرعت محاسبات می شود. کاهش حجم محاسبات و ارائه زمان اجرا از مزایای این روش محسوب می شود. با افزایش میزان رزولیشن (l) می توان تعداد بیشتری از داده ها را در فاصله نزدیک تر به دست آورد، به طوری که به ازای $l=3$ ماتریس مورد نظر تبدیل به یک ماتریس 16×16 می شود و مشخصا تعداد جواب ها نیز افزایش می یابد. اما باید این نکته را در نظر گرفت که با افزایش رزولیشن و در پی آن افزایش درایه های ماتریس، حل معادله ماتریسی مربوطه مشکل می گردد.

۲-۲-۳ پیشنهادات

در این پژوهش سعی شده است معادله تراوش آب در خاک با فرض های اولیه ساده با استفاده از روش موجک ها حل گردد. تحقیق حاضر شروعی بر حل معادلات با شرایط مرزی پیچیده تر در رابطه با مکانیک خاک و پی می باشد. پیشنهاد می گردد که پژوهشگران با استفاده از فرض های پیچیده تر سعی نمایند معادله تراوش و یا دیگر معادلات مکانیک خاک را با استفاده از این روش حل نمایند.

Contraction	انقباضی
Compact	فشرده
Cauchy principal value	مقدار اصلی کوشی
Convex	محدب
Compact support	محمل فشرده
Cauchy type	نوع کوشی
Countinuous mapping	نگاشت پیوسته
difference kernel	هسته تفاضلی
Function Space	فضای تابع
Fast decomposition	گسسته سازی سریع
Haar scaling function	تابع مقیاس هار
Haar function	تابع هار
Hat function.....	تابع کلاهی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Homogeneous	همگن
Hammerstein	همرشتین
Hermitian kernel	هسته هرمیتی
Kronecker delta	تابع دلتای کرونکر
Kernel	هسته
Lipschitzian	لیپ شیتز
MultiResolution Analysis.. ..	آنالیز چندریزگی
Measure	اندازه
Multiscaling function	چند مقیاس
Method perturbation homotopy	روش هموتوپی HMP
Method of Cosine And Sine wavelets	روش موجک های CAS
Method transformation differential	روش DT
Nonlinear Hammerstein integral Equation	معادله انتگرال غیر خطی همرشتین
Nonhomogeneous	ناهمگن
Normal kernel	هسته نرمال
Orthogonal	متعامد

Ordered	مرتب
Probabilistic	احتمالی
Powerdomain	دامنه توانی
Program Fragment	قطعه برنامه
Reconstruction algorithms	الگوریتم اصلاحی
Riesz Basis	پایه ریس
Rationalized Haar wavelet	موجک های هار گویا
Regular local	موضعی منظم
Stably	پایدار
Scaling function	تابع مقیاس
Schauder Fixed-Point thm.....	قضیه نقطه ثابت شودر
Symmetric kernel.....	هسته متقارن
Support	محمل
Scaling or Refinable equation	معادله مقیاس
Semantic Domain	دامنه معنایی
Singular integral equation	معادله انتگرال منفرد
Volterra integral equation	معادله انتگرال ولترا
Volterra integro-differential equations	معادله انتگرال - دیفرانسیل ولترا
Valuation	ارزیابی
Wavelet Analysis	آنالیز موجک

- [1] Braja M.Das, (2008), “**advanced soil mechanics**”, Vol. 1 third edition, Taylor&Francis, New York, P 170-275.
- [2] Braja M.Das, (2009), “**principal of geotechnical engineering**”, Vol. 1 fifth edition, Thomson, California state university, P 139-198.
- [3] شرفی، حسن و یزدان شمس ملکی، (۱۳۹۲)، " مقایسه ی عددی حل های معادله ی تحکیم یک بعدی ترزاقی به روشهای تفاوت های محدود، اجزاء محدود و تحلیلی در ترسیم منحنی های همزمان ۱ تحکیم "، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان.
- [4] Sepulveda Anon N., (1991) “**Solution of the one-dimensional consolidation theory equation with a pseudospectral method**”, Proceedings of the 4th International Symposium on Land Subsidence, p10, Houston, TX, USA.
- [5] عباسی نادر، رحیمی حسن، فاخر علی، (۱۳۸۴) " بررسی رفتار تحکیم پذیری خاک های ریزدانه نرم با استفاده از دستگاه تحکیم هیدرولیکی " مجله تحقیقات مهندسی کشاورزی، شماره ۲۵، دوره ۶: ص ۹۵ تا ۱۱۲.
- [5] S. G. Mallat, (1989), “**Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of** , **Trans.AMS**”, Vol. 315, Issue 1 pp. 69-87.
- [6] Y. Meyer, (1992), “**Wavelets and Operators**”, Vol. 1 Cambridge University Press.
- [7] A. Grossmann, J. Modet, T. Paul, (1985), “**Transforms associated to square integrable group representations**”, 1. General results, J.Math. Phys. 26 (10) (1985) 2473–2479.
- [8] A. Grossmann, J. Modet, T. Paul, (1986), “**Transforms associated to square integrable group representations.2. Examples**”, Ann. Inst. Henri Poincare 45 (3) (1986) 293–309.
- [9] A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, (1987), “**Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms**”, Adv. Electron. Electron Phys. S 19 (1987) 289–306.
- [10] I. Daubechies, (1992), “**Ten Lectures on wavelets**”, SIAM, Philadelphia, PA.
- [11] J. P. Antoine, P. Carrette, R. Murenzi, B. Piette, (1993), “**Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform**”, Signal Processing Volume 31, Issue 3, April 1993, Pages 241–272.
- [12] W. M. Lawton, (1991), “**Necessary and sufficient conditions for constructing orthogonal wavelet bases**” Journal of Mathematical Physics, Vol. 32, Issue 1 pp. 57-61.
- [13] A. Cohen, (2003), “**Wavelets method in numerical analysis**”, Elsevier, Amsterdam.
- [14] A. Cohen, I. Daubechies, J. Feauveau, (1992), “**Biorthogonal bases of compactly supported wavelets**” Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 5 pp. 485– 560.

[15] Donggao Deng, Guangzhou, Daren Huang, Hangzhou, Rong-Qing Jia, Wei Lin, Guangzhou, and Jianzhong Wang, (2002), **“Wavelet Analysis and Applications”** , A co-publication of the AMS and International Press of Boston, Inc.

[16]] Nayebi, K., Sodagar, I., and Barnwell, T.P. (1992), **“The wavelet transform and time-varying tiling of the time-frequency plane”** . IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 147-150.

[17] عرفانیان اورعی م، (۱۳۹۴)، رساله دکتری: **“ حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از موجک های هار ”**، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی.

[18]] F. Keinert, (2004), **“Wavelets and Multiwavelets”** , Chapman Hall/CRC.

[19] H. L. Resnikoff, R. O. Wells, (1998), **“Wavelet Analysis, The scalable structure of information”** Springer-Verlag.

[20] M. Razzaghi, J. Nazarzadeh, (1999), **“Walsh functions”** Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering 23 p 429–440.

[21] J. J. Reis, R. T. Lynch, J. Butman, (1976), **“Adaptive Haar transform video bandwidth reduction system for RPVs”** , Proceedings of Annual Meeting of Society of Photo-Optic Institute of Engineering (SPIE), SanDiego, CA, (1976) 24–35.

[22] R. T. Lynch, J. J. Reis, (1976), **“Haar transform image condng”** Proceedings of the National Telecommunications Conference, Dallas, TX, p 441–443.

[23] P. Wojtaszczyk, (1997), **“A Mathematical Introduction to Wavelets”** , Cambridge University Press.

[24]] STRANG, (1992), **“G.Wavelet transforms versus Fourier transforms”** , Research notes, MIT, pp. 1–18.

[25]] STRANG, (1989), **“G.Wavelet and dilation equations a brief introduction”** , SIAM Rev., 31,pp. 614-627.

[26]] phang chang,phang piau, (2008), **“Haar Wavelet Matrices Designation in Numerical Solution of Ordinary Differential Equations”** IAENG International Journal of Applied Mathematics, Volume 38 No.3.

[27]] Inderdeep Singh, Sangeeta Arora, Sheo Kumar , (2015), **“NUMERICAL SOLUTION OF WAVE EQUATION USING HAAR WAVELET ”** International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 98 No. 4, 457-469.

[28] G. Hariharan and K. Kannan, (2013), **“An Overview of Haar Wavelet Method for Solving Differential and Integral Equations ”** World Applied Sciences Journal, Volume 23 No. 1201-14.

[29] بذرافشان مقدم، ا و باقری پور، م ، (۱۳۸۷)، رساله دکتری: **“ آنالیز تاریخیچه زمانی با استفاده از تئوری موجکی ”**، چهارمین. کنگره ملی مهندسی عمران. دانشگاه تهران، ایران.

[30] S.S.Dragomir, (2007), “**Inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces**”, Vol. 2 Demonstratio Mathematica,Poland,p 411-417.

پیوست ۱: تعاریف و اصطلاحات

موجک: دسته ای از توابع ریاضی هستند که برای تجزیه سیگنال پیوسته به مولفه های فرکانسی آن بکار می رود که رزولوشن هر مولفه برابر با مقیاس آن است. تبدیل موجک تجزیه تابع بر مبنای توابع موجک می باشد. موجک ها (که به عنوان موجک های دختر شناخته می شوند) نمونه های انتقال یافته و مقیاس شده یک تابع (موجک مادر) با طول متناهی و نوسانی شدیداً میرا هستند [30].

تبدیل موجک پیوسته: (CWT) Continuous wavelet transform

تبدیل موجک گسسته: (DWT) Discrete wavelet transform

تبدیل موجک سریع: (FWT) Fast wavelet transform

تجزیه بسته های موجک: (WPD) Wavelet packet decomposition

تبدیل موجک ساکن: (SWT) Stationary wavelet transform

آنالیز چند رزولیشن: (Multi resolution analysis) منظور از آنالیز چند رزولوشن، تحلیل سیگنال در فرکانسهای مختلف با رزولوشن های متفاوت است. بر خلاف تبدیل فوریه زمان-کوتاه، در آنالیز چند رزولوشن، با هر یک از مؤلفه های فرکانسی به طور یکسان رفتار نمی شود. در حقیقت هدف آنالیز چند رزولوشن، ارائه رزولوشن زمانی مناسب و رزولوشن فرکانسی نادقیق در فرکانس های بالا و در مقابل، رزولوشن فرکانسی خوب و رزولوشن زمانی ضعیف در فرکانس های پائین است.

درجه بندی دودویی: به منظور گسسته کردن تبدیل موجک، ابتدا پارامتر مقیاس بر حسب یک درجه بندی لگاریتمی، گسسته می شود. پس از آن، متغیر زمان با توجه به پارامتر مقیاس گسسته می شود به نحوی که برای هر مقیاس، یک نرخ نمونه برداری جداگانه استفاده شود. اصطلاحاً گفته می شود نمونه برداری بر روی یک درجه بندی دودویی انجام پذیرفته است.

فضای نرم دار: فرض کنید X یک فضای برداری میدان مختلط C باشد. تابع حقیقی $\|\cdot\|: X \rightarrow R$ را که در شرایط زیر صدق کند، یک نرم روی X می نامیم.

$$1. \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{برای هر } x \in X \text{ و } \|x\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0$$

$$2. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ (نا مساوی مثلث)}$$

$$3. \quad \|\gamma x\| = |\gamma| \|x\| \quad \text{برای هر } x \in X \text{ و } \gamma x \in C$$

یک فضای برداری مختلط X که دارای نرم باشد را یک فضای نرم دار می گوئیم.

فضای هیلبرت: یک فضای برداری کامل است که نرم آن (معادل قدر مطلق) از طریق ضرب نرده ای تعریف می شود.

ماتریس تنک: ماتریسی است که اکثر عناصر آن صفر باشد. هنگامی که ابعاد ماتریس به حدی بزرگ شود که در حافظه نگنجد و نیز تعداد زیادی از درایه های موجود صفر باشد [30].

Abstract

Ordinary & differential equations arise in many scientific & engineering problems. Sometimes while solving this type of equations, we will encounter with new equations that their unknown functions appear under an integral sign. These equations are called as Integral equations. There are two problems during solving these equations, complicated calculations & result accuracy. Many studies have been done to find a solution to reduce the mentioned problem. In recent years, wavelet is used for solution of integral equations, it will reduce calculating costs, broadly. Researches showed that orthogonal wavelet is capable than classic basis. Orthogonal wavelet was first wavelets which used to solve integral equations, because of they used in signal processing, from the first time.

There are two reasons for using wavelets, first, when wavelet is used for extension of a function or signal, initial coefficients in wavelet extension have most of the function or signal information, so, accurate results can be achieved with less terms than the other basis. Second reason which is more major than the first one is scattered operational matrices that cause to easy solution of algebraic equation system. Among the wavelet desirable features in solving integral equations, simplest orthonormal wavelet with compact support are remarkable. Haar wavelet is a sequence that is now recognized as the first known wavelet basis and extensively used as a teaching example. The Haar sequence was proposed in 1909 by Alfréd Haar. The Haar wavelet is also the simplest possible wavelet. seepage differential equation has been solved with different methods. In this thesis, we will solve the seepage differential equation by using wavelet. Although, it should be mention that the present research is beginning of the soil mechanic equations solution with more complicated boundary conditions.

Key words: differential equations, . seepage differential, wavelet



Shahrood University of Technology

Kharazmi Campus

Msc thesis in Geotechnique

A wavelet–based solution of the seepage equation

By: Iliya Aghasizade.Sh

Supervisor

Dr A. Bazrafshan. M

Consultant

Dr M. Erfanian.O

Sep 2016