

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده‌ی عمران

رشته‌ی عمران گرایش سازه

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها به‌روش مجموعه‌ی سطوح تراز و تحلیل
آیزوژئومتریک.

نگارنده: حسن علی جهانگیری

استادان راهنما:

دکتر رضا نادری

دکتر سید مهدی توکلی

بهمن ۱۳۹۴



دانشکده: عمران

گروه: سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حسن علی جهانگیری به شماره دانشجویی: ۹۲۰۴۶۶۴

تحت عنوان:

بهینه سازی توپولوژی سازه ها به روش مجموعه ی سطوح تراز و تحلیل آیزوژئومتری

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه
مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی: دکتر رضا نادری
	نام و نام خانوادگی: دکتر سید مهدی توکلی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: آقای دکتر مهدی گلی		نام و نام خانوادگی: آقای دکتر وحید رضا کلات جاری
			نام و نام خانوادگی: آقای دکتر بهروز حسنی

خداوندا به ما توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن
بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی
دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی
بی نمود، گستاخی بی خامی، مناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی
در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی آنکه دوستت بدارند را عنایت فرما .
سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره‌ی
روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان.
آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و
عمر و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویشتن را در طریق علم
و معرفت بیازماید.

با تشکر و قدردانی فراوان از ...

تمامی همراهانی که مرا در این امر مهم یاری و یآوری نموده‌اند.

تعهد نامه

اینجانب حسن علی جهانگیری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته‌ی سازه دانشکده‌ی عمران دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها به‌روش مجموعه‌ی سطوح تراز و تحلیل آیزوژئومتریک تحت راهنمایی دکتر رضا نادری و دکتر سید مهدی توکلی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه شاهرود» و یا «Shahrood University» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

بهینه‌سازی سازه‌ها با در نظر گرفتن شرایط و محدودیت‌های موجود یا همان قیود طراحی همواره یکی از اهداف مهندسان و طراحان بوده است. تاکنون تحقیقات زیادی بر روی بهینه‌سازی انجام شده و روش‌های مختلفی برای طرح بهین پیشنهاد شده است. به‌طور کلی روش‌های بهینه‌سازی را می‌توان به سه دسته‌ی روش‌های ریاضی، معیار بهینگی و فرا اکتشافی تقسیم نمود. لازمه‌ی استفاده از روش‌های ریاضی محاسبه‌ی مشتقات تابع هدف و قیود نسبت به متغیرهای طراحی است که اصطلاحاً تحلیل حساسیت نام دارد. ساختار کلی بهینه‌سازی سازه‌ها تحت سه زیرمجموعه‌ی کلی بهینه‌سازی ابعادی، بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی توپولوژیک تقسیم‌بندی می‌شود. در این تحقیق از روش ریاضی مجموعه‌ی سطوح تراز به‌منظور بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های الاستیک دوبعدی استفاده شده است. در این روش، سازه‌ای که بهینه می‌شود مرزهای آن به‌صورت مدلی از مرزهای دینامیکی است که به‌وسیله‌ی یک تابع اسکالر از بعد بالاتر معرفی می‌شود. همچنین روش آیزوژئومتریک به‌منظور تحلیل سازه‌ها به‌کار گرفته شده است. در این روش توابع مجهول (جابجایی‌ها) با استفاده از توابع پایه‌ی اسپلاین که در تولید هندسه‌ی مسئله و نیز تشکیل تابع مجموعه‌ی سطوح تراز به‌کار می‌روند تقریب زده می‌شوند.

در این تحقیق انرژی کرنشی، وزن و ترکیب همزمان انرژی کرنشی و وزن سازه به‌عنوان توابع هدف و محدودیت تنش‌ها و وزن سازه به‌عنوان قیود مسئله‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است. به‌منظور نشان دادن کارایی روش مجموعه‌ی سطوح تراز در مسئله‌ی بهینه‌یابی توپولوژی و صحت معادلات و تحلیل حساسیت به‌دست آمده، چندین مثال دوبعدی با استفاده از برنامه‌ی کامپیوتری تهیه شده در این پایان نامه، ارائه شده است.

کلید واژگان: بهینه‌سازی توپولوژی، مجموعه‌ی سطوح تراز، تحلیل حساسیت، تحلیل آیزوژئومتریک.

فهرست مطالب

۱	فصل اول: کلیات
۲	۱-۱- مقدمه
۷	۱-۲- تاریخچه
۸	۱-۳- اهداف کلی پایان نامه
۹	۱-۴- برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته شده در راستای پایان نامه
۱۰	۱-۵- ساختار کلی پایان نامه
۱۱	فصل دوم: روش تحلیل آیزوژئومتریک
۱۲	۲-۱- مقدمه
۱۵	۲-۲- مبانی روش تحلیل آیزوژئومتریک
۱۷	۲-۳- بی-اسپلاین‌ها و توابع نربز
۱۷	۲-۳-۱- بردارهای گرهی
۱۹	۲-۳-۲- توابع پایه
۲۱	۲-۳-۳- مشتقات توابع بی-اسپلاین
۲۳	۲-۳-۴- منحنی بی-اسپلاین
۲۴	۲-۳-۵- سطوح بی-اسپلاین
۲۶	۲-۳-۶- احجام بی-اسپلاین
۲۷	۲-۳-۷- بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت (NURBS)
۲۹	۲-۳-۸- مشتقات توابع پایه‌ی نربز
۲۹	۲-۴- نربز به عنوان پایه‌ای برای تحلیل
۳۱	۲-۵- تحلیل آیزوژئومتریک در مسائل تنش مسطح
۳۲	۲-۵-۱- فرمول‌بندی تحلیل آیزوژئومتریک

۳۵	۶-۲- مقایسه‌ی روش آیزوژئومتریک با روش اجزای محدود
۳۷	فصل سوم: بهینه‌سازی
۳۸	۳-۱- مقدمه
۳۹	۳-۲- تعاریف اولیه
۳۹	۳-۲-۱- متغیرهای طراحی
۴۰	۳-۲-۲- تابع هدف
۴۰	۳-۲-۳- قیود
۴۱	۳-۳- فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی
۴۲	۳-۴- انواع روش‌های بهینه‌سازی
۴۳	۳-۴-۱- تحدب
۴۴	۳-۴-۲- تابع محدب
۴۵	۳-۴-۳- مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب و نتایج حاصل از آن
۴۵	۳-۴-۴- روش تشخیص تحدب و تقعر
۴۶	۳-۴-۵- معیار سیلوستر
۴۷	۳-۴-۶- شرایط کاروش-کان-تاکر
۴۸	۳-۴-۷- برنامه‌ریزی خطی ترتیبی (SLP)
۵۰	۳-۴-۸- برنامه‌ریزی درجه‌دوم ترتیبی (SQP)
۵۱	فصل چهارم: توابع ضمنی و روش مجموعه‌ی سطوح تراز
۵۲	۴-۱- مقدمه
۵۲	۴-۲- نقاط
۵۴	۴-۳- منحنی‌ها
۵۶	۴-۴- رویه‌ها
۵۷	۴-۵- ابزار هندسی
۶۳	۴-۶- ابزار محاسبات

۶۴	۷-۴- تابع فاصله‌ی علامت‌دار
۶۷	۸-۴- انتقال
۶۹	فصل پنجم: بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته با روش مجموعه‌ی سطوح تراز
۷۰	۱-۵- مقدمه
۷۱	۲-۵- معرفی و تاریخچه روش مجموعه‌ی سطوح تراز
۷۵	۳-۵- کاربرد روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها
۷۷	۴-۵- فرمول‌بندی مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در مسائل بهینه‌سازی
۷۹	۵-۵- الگوریتم بهینه‌سازی
۸۲	۶-۵- شرایط حل بهینه
۸۶	۷-۵- حل عددی
۸۷	۸-۵- آنالیز حساسیت
۸۷	۱-۸-۵- مقدمه
۸۸	۲-۸-۵- روش‌های تحلیلی آنالیز حساسیت
۸۹	۱-۲-۸-۵- روش تحلیلی مستقیم
۹۱	۲-۲-۸-۵- روش تحلیلی الحاقی
۹۱	۳-۲-۸-۵- مقایسه‌ی روش تحلیلی مستقیم با الحاقی
۹۳	فصل ششم: مثال‌های عددی
۹۴	۱-۶- مقدمه
۹۵	۱-۱-۶- مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید وزن
۹۸	۲-۱-۶- مثال‌های عددی حل‌شده با روش اجزای محدود
۱۱۰	۳-۱-۶- روش پیشنهادی اقناع قید حجم و مسائل حل‌شده با آن (FEA)
۱۲۱	۴-۱-۶- مثال‌های حل‌شده با تحلیل آیزوژئومتری
۱۳۲	۵-۱-۶- مثال‌های حل‌شده با روش پیشنهادی اقناع قید حجم (IGA)
۱۴۱	۶-۱-۶- مسئله‌ی چندهدفه (انرژی کرنشی، وزن و تنش)

۱۵۹	فصل هفتم: نتایج و پیشنهادات
۱۶۰	۷-۱- مقدمه
۱۶۰	۷-۲- نتایج
۱۶۳	۷-۳- پیشنهادات
۱۶۵	منابع

فصل اول

کلیات

۱-۱- مقدمه

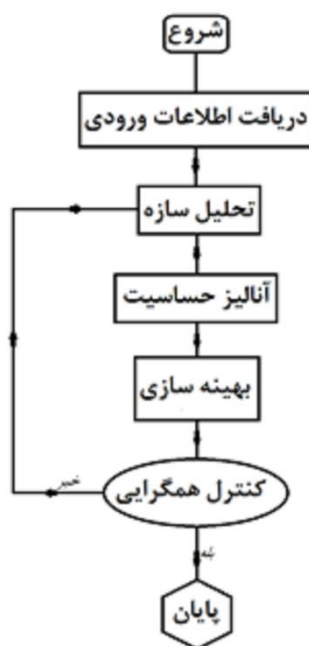
در طراحی سازه‌ها به دست آوردن یک طرح‌بندی مناسب امری ضروری است. این طرح‌بندی می‌بایست به گونه‌ای باشد تا بتواند نیروهای وارده را به شکلی ایمن و اقتصادی تحمل کند. بدین ترتیب طرح‌بندی مناسب سازه شامل اطلاعات توپولوژیکی، شکل و ابعاد سازه می‌باشد. مسائل بهینه‌سازی را می‌توان در سه رده‌ی مختلف دسته‌بندی نمود که عبارتند از بهینه‌سازی توپولوژی، بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی ابعاد سازه. در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها هدف پیدا کردن تعداد و مکان مناسب حفره‌هاست. در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها هدف پیدا کردن بهترین موقعیت مختصات نقاط و مرزهای سازه است. در بهینه‌سازی ابعادی هدف به دست آوردن حداقل سطح مقطع مورد نیاز برای هریک از اعضای سازه است.

بهینه‌سازی شکل و توپولوژی در دهه‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی کرده و کاربردهای موفقیت‌آمیزی در بهینه کردن مسائل علمی مهندسی داشته است. همان‌گونه که بیان شد در بهینه‌سازی شکل هدف دستیابی به بهترین هندسه از دامنه‌ی طراحی است با این فرض که بارگذاری و شرایط مرزی مشخص باشد. معرفی این نوع از بهینه‌سازی را می‌توان در کارهای هافتکا و جاندلی [۱] دینگ [۲] و همچنین اولف و روزوانی [۳] مشاهده نمود. در نگاه اول این روش بسیار کلی به نظر می‌رسد با این حال بهینه‌سازی شکل تنها قادر به بهینه کردن یک قالب اولیه با توپولوژی مشخص است.

بنابراین در حالت کلی نیازمند روش‌های بهینه‌سازی هستیم که قادر به ایجاد تغییر در تعداد، موقعیت و نحوه‌ی ارتباط عناصر سازه‌ای باشند. در سال‌های اخیر تکنیک‌های مربوط به این نوع بهینه‌سازی معرفی شده‌اند. روش‌های زیادی برای حل مسئله‌ی توپولوژی وجود دارد. در یکی از تحقیقات اولیه که توسط بندسو و کیکوچی [۴] صورت گرفت، روش حل برمبنای استفاده از ریزسازه‌ها

بوده است. یک روش جایگزین برای آن، روش قانون توانی یا SIMP^۱ است [۵]. علاوه بر این روش‌ها، برخی روش‌های فرا اکتشافی^۲ نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از این میان می‌توان به روش تکاملی ESO^۳ بر مبنای تلاش‌های ژن و استیون [۶] اشاره کرد. به‌منظور مرور کلی بر روی بهینه‌سازی توپولوژی و روش‌های آن می‌توان به مرجع [۷] این پایان‌نامه مراجعه نمود.

به‌طور کلی هدف از بهینه‌سازی سازه‌ها به‌دست آوردن سازه‌ای است که با وجود وزن کم، از بیشترین مقاومت و سختی در برابر نیروهای وارده برخوردار باشد. این فرایند در یک فضای مشخص به‌نام دامنه‌ی طراحی^۴ و تحت اثر شرایط مشخص بارگذاری و تکیه‌گاهی صورت می‌گیرد.



شکل (۱-۱) فرایند کلی در بهینه‌سازی سازه‌ها

توپولوژی اولیه‌ی سازه یا از قبل طرح شده و دارای محدودیت‌هایی در ساخت است و یا این‌که می‌بایست توسط طراح، طراحی شود. بهینه‌سازی توپولوژی، ابزاری است که به طراح در به‌دست آوردن

^۱ Solid Isotropic Material with Penalisation

^۲ Meta-heuristic

^۳ Evolutionary Structural Optimization

^۴ Design Domain

یک طرح‌بندی اولیه‌ی مناسب برای سازه‌ی موجود، کمک بسیاری خواهد کرد. در بهینه‌سازی توپولوژی ابتدا فضایی را که به آن دامنه‌ی مرجع گفته می‌شود تعریف می‌کنیم. این دامنه به‌گونه‌ای خواهد بود که فضای مورد نظر جهت طراحی را پوشش می‌دهد. به هنگام حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی، شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی و مشخصات مصالح معلوم بوده و هدف حذف یا توزیع مجدد مصالح در دامنه‌ی تعریف شده می‌باشد به‌گونه‌ای که در انتها توپولوژی به‌دست آمده، تابع هدف^۱ مورد نظر را در مسئله‌ی بهینه‌سازی، بهینه کند. با توجه به شکل (۱-۱) فرایند بهینه‌سازی توپولوژی شامل سه قسمت اصلی مدل هندسی^۲ مسئله، تحلیل سازه^۳ و آنالیز حساسیت^۴ مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد. ابتدا باید مدل هندسی مناسب را برای دامنه‌ی طراحی انتخاب کنیم و مقادیر اولیه‌ای را برای متغیرهای طراحی^۵ در نظر بگیریم، سپس یک مدل تحلیلی مناسب برای تحلیل سازه‌ها انتخاب می‌کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم را جهت مراحل بهینه‌سازی در مورد حساسیت و مقدار توابع قید^۶ مربوط به هر متغیر طراحی در اختیار قرار دهد. پس از انجام مرحله‌ی تحلیل الگوریتم بهینه‌سازی، مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی محاسبه خواهد شد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و به قسمت تحلیل فرستاده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع و نتایج حساسیت قیده‌ای ضمنی برای طراحی جدید حاصل می‌شود. در انتها اگر معیار لازم برای خاتمه‌ی محاسبات اقماع شده بود محاسبات خاتمه می‌یابد. در غیر این‌صورت الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدید از متغیرهای طراحی را به ما می‌دهد. برای تحلیل سازه‌ها می‌بایست معادلات حاکم بر مسئله‌ی طراحی توسط یک روش تحلیل عددی حل شود تا مجهولات یا همان تغییر مکان‌ها محاسبه شوند.

^۱ Objective function

^۲ Geometric Modeling

^۳ Structural Analysis

^۴ Sensitivity analysis

^۵ Design variables

^۶ Constraint function

حل معادلات حاکم بر رفتار یک سیستم از مهم‌ترین مسائلی است که همواره در زمینه‌های علوم و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجایی که تنها موارد محدودی از این معادلات را می‌توان مستقیماً با روش‌های تحلیلی حل نمود روش‌های عددی زیادی در دهه‌های اخیر برای حل چنین معادلاتی پیشنهاد شده است. توسعه‌ی روش‌های عددی با ظهور رایانه رشد چشمگیری داشته‌اند و امروزه به کمک رایانه و با استفاده از این روش‌ها قادر به حل معادلات بسیار پیچیده در حوزه‌های متنوعی از علوم می‌باشیم. برخی از روش‌های عددی معروف عبارتند از روش تفاضل محدود^۱، روش اجزای محدود^۲، روش نقاط محدود^۳ و روش‌های جدیدتر مانند روش‌های بدون مش^۴ که این روش‌ها هریک به دنبال افزایش کارایی، دقت، سرعت و ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسائل و رفع مشکلات روش‌های قبلی بوده‌اند [۸].

از پرکاربردترین این روش‌ها، روش اجزای محدود می‌باشد که روشی عددی برای یافتن حل تقریبی بسیاری از مسائل مهندسی است. اصطلاح اجزای محدود برای نخستین بار از سوی کلاف^۵ مورد استفاده قرار گرفت. هرچند این روش برای اولین بار جهت تحلیل تنش در سازه‌ی هواپیما به کار گرفته شد، ولی کاربرد آن در بسیاری از زمینه‌های مهندسی به سرعت رو به گسترش نهاد. پیدایش روش تحلیل اجزای محدود در علوم مهندسی به سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی برمی‌گردد. در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی اولین برنامه‌های تجاری به نام‌های نسترن^۶، آسکا^۷ و استاردین^۸ تولید گردید. مبنای تمامی این برنامه‌ها روش اجزای محدود بود.

^۱ Finite difference

^۲ Finite element

^۳ Specific areas

^۴ Meshless

^۵ Clough

^۶ NASTRAN

^۷ ASKA

^۸ Stadyne

یک المان، یک جزء از یک محیط پیوسته‌ی شبکه‌بندی شده است که به‌منظور ساده‌سازی هندسه‌ی محیط پیوسته و معادلات حاکم بر آن ایجاد می‌شود. روش اجزای محدود ما را قادر می‌سازد تا یک مسئله با بینهایت درجه آزادی را به چندین زیر مسئله با درجات آزادی محدود تبدیل نماییم تا بدین‌وسیله حل آن آسان‌تر شود. در روش مرسوم اجزای محدود از توابع پایه‌ی درون‌یاب لاگرانژی یا هرمیتی به‌صورت فراگیر استفاده می‌شود که تقریب‌سازی فضای حل و هندسه با این توابع صورت می‌گیرد. در روش اجزای محدود ایجاد یک مدل تحلیلی که منطبق بر هندسه‌ی دقیق باشد کاری بسیار دشوار و مستلزم هزینه‌ی محاسباتی بسیار بالایی می‌باشد. در ادامه‌ی پیشرفت روش‌های عددی، روش‌هایی که جدا از مفهوم المان بودند، به نام روش‌های بدون مش معرفی شدند که این روش‌های نیز همانند اجزای محدود توانایی تعریف هندسه‌ی دقیق در محیط تحلیل را نداشتند و مشکلاتی نظیر دشواری انتگرال‌گیری، ضعف در اعمال شرایط مرزی و دقت محاسباتی پایین را به همراه داشتند.

انگیزه‌ی انجام نخستین فعالیت‌ها در زمینه‌ی تحلیل آیزوژئومتریک^۱ از شکاف موجود بین دنیای تحلیل اجزای محدود و مدل‌سازی رایانه‌ای بوده است. در مراحل نخستین، یکی از مهم‌ترین زمینه‌های تحقیق در تحلیل هم‌هندسی ایجاد ارتباط بین دو دسته‌ی طراحی و تحلیل و همچنین مشخص‌سازی موانع و راه‌حل‌های ارائه‌شده‌ی موجود در هر دسته بوده است. مسلماً یکپارچه‌سازی تحلیل و هندسه‌ی یک مسئله دشوار است و به‌نظر می‌رسد که بایستی تغییرات اساسی برای یکپارچه‌سازی کامل طراحی مهندسی و فرایندهای آنالیز انجام شود. گرایش‌های اخیر در محاسبات مهندسی خواستار افزایش دقت و یکپارچگی کامل برای تمامی فرایندهای مدل‌سازی و آنالیز می‌باشد [۹].

روش تحلیل هم‌هندسی در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش برای رفع نقایص بیان شده معرفی شد [۱۰]. توابع هندسی محاسباتی زیادی وجود داشتند که می‌توانستند به‌عنوان توابع پایه در

^۱ Isogeometric

تحلیل هم‌هندسی به کار روند. انتخاب بی-اسپلاین^۱ و نربز^۲ به عنوان پایه‌ی اولیه به دلیل پرکاربرد بودن این توابع در ایجاد هندسه‌ی محاسباتی در طراحی مهندسی می‌باشد. نربزها به عنوان یک پایه برای آنالیز، نسبت به توابع پایه‌ی چندجمله‌ای قطعه‌قطعه‌ی مرسوم به راحتی تعمیم داده می‌شوند و اصلاح می‌گردند و برای مدل‌سازی دقیق مقاطع مخروطی بسیار مناسب می‌باشند. این توانایی نربزها یعنی ترکیب توانایی‌های هندسی و توانایی‌های تحلیلی به خوبی در تحلیل هم‌هندسی نمایان شده است.

۱-۲- تاریخچه

از زمانی که روش مجموعه‌ی سطوح تراز^۳ توسط اش و ستیان برای به دست آوردن مرزهای مشترک و مرزهای آزاد معرفی شد این روش در بسیاری از رشته‌ها و علوم مختلف به کار برده شده است. امروزه روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی شکل و توپولوژی بسیار مورد توجه قرار گرفته است.

روش مجموعه‌ی سطوح تراز بسیار تطبیق پذیر و فراگیر می‌باشد به طوری که به سادگی می‌تواند گوشه‌های تیز، جدا شدن مرزها از یکدیگر و یا ادغام مرزهای مشترک را بیان کند. این بیان ساده باعث ساده‌سازی مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل و توپولوژی می‌گردد و نیازی به پارامتری کردن مرز مشترک نمی‌باشد.

^۱ B-spline

^۲ Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)

^۳ Level Set

در این روش هندسه‌ی سازه به صورت تابع ضمنی اسکالر از بعد بالاتر تعریف می‌گردد و مرز سازه توسط یک سطح تراز مشخص معرفی می‌گردد و مرز جدید از حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی^۱ به دست می‌آید. در فصل‌های بعد روش مجموعه‌ی سطوح تراز به صورت کامل توضیح داده می‌شود.

۱-۳- اهداف کلی پایان‌نامه

به طور کلی تبیین فرمول‌بندی روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها و ارائه‌ی روشی مناسب برای تحلیل حساسیت در این روش از اهداف کلی این پایان‌نامه می‌باشد. با این وجود با توجه به نوظهور بودن روش تحلیل آیزوژئومتری و نیاز به کار فراوان در این زمینه، به منظور تحلیل، مدل‌سازی هندسه‌ی دامن و تشکیل رویه‌ی سطح تراز از این روش استفاده شده است؛ لذا در تمامی مراحل بهینه‌سازی از این روش و نتایج به دست آمده از آن استفاده می‌شود.

مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی یکی از کامل‌ترین و بهینه‌ترین نتایج را به دنبال دارد مخصوصاً در مدل‌هایی که دارای تمرکز تنش ذاتی نیستند این مسئله به خوبی نمایان است. ولی در مدل‌هایی که دارای تمرکز تنش ذاتی هستند مانند تیر ال-شکل این مسئله بهینه‌سازی قادر به حذف مصالح از ناحیه‌ی دارای تمرکز تنش نیست لذا در این پایان‌نامه سعی شده تا با اضافه کردن محدودیت‌های تنش، تمرکز تنش را از روی مصالح حذف کرده تا باز هم این مسئله بهینه‌سازی همچنان یکی از کامل‌ترین توابع هدف در بهینه‌سازی در نظر گرفته شود. لذا در این پایان‌نامه مسئله‌ی

^۱ Hamilton-Jacobi

جدید دیگری به صورت چندهدفه^۱ بیان می‌شود که همزمان انرژی کرنشی و وزن را کمینه کرده و قیود تنش موضعی را نیز اقلان می‌کند.

انتخاب ساختاری مناسب برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی از مهم‌ترین عناصر حل مسائل است. همچنین تحلیل حساسیت با شرح دقیق و جزئیات فرمول‌بندی به عنوان بخشی تفکیک‌ناپذیر از بهینه‌سازی به روش‌های ریاضی است که در این پایان‌نامه به آن پرداخته خواهد شد.

ارائه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ای مناسب برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی، لازم و بدون آن حل این مسائل غیرممکن خواهد بود. در نتیجه نوشتن برنامه‌ای مناسب در این راستا از اهداف دیگری است که در این پایان‌نامه بدان پرداخته شده است.

۱-۴- برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته شده در راستای این پایان‌نامه

همان‌طور که اشاره شد بدون ارائه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ای مناسب انجام کلیه‌ی بخش‌های دیگر پایان‌نامه بی‌فایده و غیرقابل اجرا خواهد بود. لذا برنامه‌ای جهت حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی به روش مجموعه‌ی سطوح تراز (LSM) نوشته شده است. در پایان نیز تعدادی مثال جهت بررسی صحت فرمول‌بندی‌ها و برنامه‌ی کامپیوتری، حل و ارائه شده است.

^۱ Multi objective function

۱-۵- ساختار کلی پایان نامه

به طور کلی این پایان نامه شامل هفت فصل می باشد. در فصل حاضر به مقدماتی راجع به پایان نامه اشاره شده است. در فصل دوم روش تحلیل آیزوژئومتریک به عنوان روشی جدید و پرکاربرد بررسی شده و فرمول بندی های لازم جهت تحلیل مسائل تنش مسطح به صورت مختصر ارائه شده است.

در فصل سوم اصول و مبانی کلی بهینه سازی توپولوژی سازه ها و برخی روش های متداول برای این منظور بررسی شده اند. در فصل چهارم روش مجموعه ی سطوح تراز به عنوان یک روش مناسب برای ردیابی و پیش بینی رفتار توابع مورد بررسی قرار گرفته است و توابع و تکنیک های مورد نیاز برای استفاده از این روش شرح داده شده است.

در فصل پنجم بهینه سازی با روش مجموعه ی سطوح تراز بیان شده همچنین فرمول بندی های مورد استفاده در این روش استخراج شده است. همچنین در این فصل با استفاده از آنالیز حساسیت، سرعت نرمال حاکم بر مسئله ی بهینه سازی همچون موتور بهینه یاب و مهم ترین عنصر برای بهینه یابی مسائل، استخراج شده است.

در فصل ششم مثال های عدد متنوعی تعریف شده است. ابتدا به مثال های عددی حل شده با استفاده از روش تحلیل اجزای محدود پرداخته شده و سپس به نتایج حل شده با استفاده از روش تحلیل آیزوژئومتریک پرداخته می شود. در ضمن در این فصل یک روش عددی مناسب به منظور اقناع قید حجم مبتنی بر خواص تابع فاصله ی علامت دار تشریح شده است.

در فصل هفت نتایج و پیشنهادات به دست آمده در راستای این پایان نامه به اختصار تشریح شده است.

همچنین در انتها منابع و مراجع مورد استفاده در این پایان نامه آورده شده است.

فصل دوم

روش تحلیل

آیزوژنومتریک

۲-۱- مقدمه

روش‌های عددی مختلفی در دهه‌های اخیر برای تحلیل سازه‌ها توسعه یافته‌اند. از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به ترتیب شکل‌گیری، به روش‌های تفاضل محدود، اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد؛ به عبارت دیگر می‌توان گفت که این روش‌ها روش حل معادلات دیفرانسیل جزئی بوده و علاوه بر تحلیل سازه‌ها در بسیاری از مسائل مهندسی مانند حل معادلات حاکم بر مسائل مکانیک سیالات، الاستیسیته و پلاستیسیته، انتشار امواج و غیره به کار می‌روند. امروزه روش اجزای محدود به عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و با استفاده از آن نرم‌افزارهای تجاری مختلفی تهیه شده است که در صنعت کاربردی فراوان دارد.

با وجود این پیشرفت‌های قابل ملاحظه، این روش دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به نحوه‌ی تعریف مرزهای هندسی اشاره کرد. در روش اجزای محدود با توجه به تقریب هندسه، نزدیک شدن به هندسه‌ی واقعی کاملاً وابسته به نحوه‌ی شبکه‌بندی است و در برخی مسائل پیچیده از لحاظ هندسی رسیدن به آن بسیار مشکل است. همچنین اقناع شرایط مرزی در این روش‌ها به‌ویژه در روش‌های بدون مش با مشکلاتی مواجه است. از سوی دیگر بهبود حل، چه از لحاظ تقریب هندسه و یا متغیرهای مجهول، منجر به ایجاد تغییرات در شبکه‌بندی می‌شود که در نهایت سبب افزایش تعداد معادلات و بالا رفتن زمان حل می‌گردد. علاوه بر این در روش اجزای محدود حل مسائلی که در آن‌ها ساخت چندین شبکه‌ی جدید در حین حل مسئله لازم است؛ می‌تواند هزینه‌ی طرح را به مراتب افزایش دهد.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود و بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ پیشرفت‌های چشمگیری در علم مدل‌سازی هندسه و یا طراحی به کمک رایانه (کد)^۱ صورت گرفت.

^۱ Computer Aided Design (CAD)

امروزه به گمان بسیاری از دانشمندان، مدل‌سازی هندسه دارای صنعت بسیار بزرگ‌تری نسبت به تحلیل می‌باشد. در صورتی که تحلیل برمبنای هندسه استوار باشد؛ استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل در رفع نقاط ضعف آن نماید. به این منظور هیوز و همکارانش روش تحلیل آیزوژئومتریک را در سال ۲۰۰۵ پیشنهاد نمودند. نام این روش برگرفته از مفهوم آیزوپارامتریک^۱ در روش اجزای محدود می‌باشد. با توجه به دقت بالا در مدل‌سازی هندسه و همچنین استفاده از شرایط یکسان در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول، نام این روش تحلیل آیزوژئومتریک انتخاب شده است.

به دلیل استفاده از روش آیزوژئومتریک به عنوان روش تحلیل در این پایان‌نامه لازم است تا به شرح این روش قدرتمند پرداخته شود. این بخش به شرح روش مذکور و فرمول‌بندی آن می‌پردازد.

روش آیزوژئومتریک در بسیاری از موارد مشابه روش اجزای محدود است و از سوی دیگر در مواردی مشابه روش‌های بدون شبکه می‌باشد؛ اما از نظر هندسی این روش بر پایه‌ی اصول طراحی به کمک رایانه سازماندهی شده و از آن الهام گرفته است. هدف اولیه از به وجود آوردن این روش این بود که بتوان فارغ از میزان ریز یا درشت بودن شبکه، هندسه را به صورت دقیق مدل‌سازی کنیم.

علیرغم آنکه هندسه زیربنای تحلیل به‌شمار می‌رود، طراحی به کمک رایانه، به شکلی که امروزه وجود دارد در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به وجود آمد. این موضوع علت اختلاف زیادی را که بین نمایش هندسه در اجزای محدود و طراحی به کمک رایانه وجود دارد نشان می‌دهد. سال‌ها پیش‌تر از این که طراحی به کمک رایانه شکل بگیرد، برنامه‌های اجزای محدود رشد کرده بودند اما اکنون طراحی به کمک رایانه، صنعتی بزرگ‌تر از تحلیل به‌شمار می‌رود و رشد سریع‌تری داشته است.

^۱ Isoparametric

توجه به این نکته ضروری است که شبکه‌ی اجزای محدود که ما آن را به عنوان مدلی نسبتاً دقیق می‌شناسیم تنها تقریبی از هندسه‌ی کد است. این تقریب می‌تواند در موارد زیادی باعث خطاهایی در نتیجه‌ی تحلیل شود. در نتیجه واضح است که بهتر است روش اجزای محدود را تغییر دهیم و یا آن را با روشی که ارتباط بهتری با کد داشته باشد جایگزین کنیم. روش آیزوژئومتریک تلاش می‌کند این کار را انجام دهد و توصیف چندجمله‌ای اجزای محدود را به کلی حذف کند.

اساس روش آیزوژئومتریک بر مبنای توابع نرَبز است. توابع نرَبز همان توابعی هستند که به عنوان توابع استاندارد در سیستم‌های کد استفاده می‌شوند. دلیل این انتخاب در سیستم‌های کد این است که نرَبزها معمول‌ترین تکنیک تشکیل هندسه‌ی محاسباتی در کد می‌باشند. به تعبیری می‌توان این روش را بسط و تعمیم قدرتمند روش تحلیل اجزای محدود سنتی به حساب آورد؛ مانند آنچه در روش اجزای محدود وجود دارد در این جا نیز از مفهومی مشابه خاصیت آیزوپارامتریک استفاده می‌شود. به این منظور که در این جا نیز از همان توابعی که برای مدل کردن هندسه استفاده شده است در تقریب تابع مجهول نیز استفاده خواهد شد.

این فصل ابتدا به معرفی توابع بی-اسپلاین می‌پردازد و سپس توابع نرَبز بررسی می‌شود و در ادامه روش مشتق‌گیری از این توابع بیان می‌گردد. مقایسه‌ی بین روش اجزای محدود و آیزوژئومتریک نیز یکی از اهداف این فصل می‌باشد. در انتها نیز از نتایج آن استفاده شده و فرمول‌بندی تحلیل آیزوژئومتریک در مسائل دوبعدی بررسی خواهد شد.

۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریک

در روش اجزای محدود دو مفهوم شبکه^۱ و المان وجود دارند که المان دارای دو مفهوم است؛ یکی المانی که در فضای المان مرجع وجود دارد و دیگری المان موجود در فضای فیزیکی. المان‌ها معمولاً به وسیله‌ی مختصات نقاط گرهی خود تعریف می‌شوند و درجات آزادی، مقادیر تابع پایه در گره‌ها هستند. توابع پایه در اجزای محدود درون‌یاب هستند و می‌توانند دارای مقادیر مثبت یا منفی باشند.

در تئوری نرَبز، توابع پایه معمولاً درون‌یاب نیستند. در این تئوری دو مفهوم برای شبکه وجود دارد؛ یکی شبکه‌ی کنترلی^۲ و دیگری شبکه‌ی فیزیکی. نقاط کنترلی، شبکه‌ی کنترلی را تعریف می‌کنند و شبکه‌ی کنترلی درون‌یابی از نقاط کنترلی است. شبکه‌ی کنترلی بر هندسه‌ی واقعی منطبق نیست. در واقع این شبکه داربستی است که هندسه را کنترل می‌کند. شبکه‌ی کنترلی شبیه شبکه‌ی المان‌های چندضلعی اجزای محدود است. متغیرهای کنترلی درجات آزادی هستند و بر روی نقاط کنترلی واقع شده‌اند. در نرَبز برخلاف اجزای محدود، شبکه‌ی کنترلی می‌تواند تغییرات شدیدی داشته باشد ولی در عین حال هندسه‌ی فیزیکی مسئله معتبر باقی خواهد ماند.

شبکه‌ی فیزیکی تجزیه‌ای از هندسه‌ی واقعی است. در شبکه‌ی فیزیکی دو مفهوم برای المان‌ها وجود دارد؛ یکی زیر دامنه^۳ و دیگری بازه‌ی گرهی^۴. زیر دامنه‌ها را در حقیقت می‌توان المان‌های بزرگ نامید. در بیشتر مسائل موجود می‌توان هندسه را تنها با یک زیر دامنه مدل کرد. هر زیر دامنه دارای دو وجه است. یکی در فضای المان مرجع و دیگری در فضای فیزیکی. هر زیر دامنه را می‌توان به

^۱ Mesh

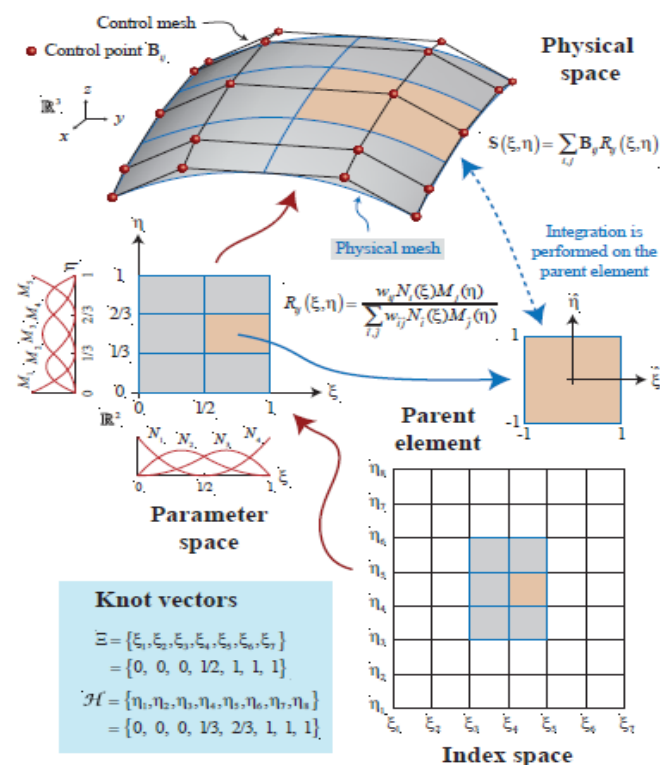
^۲ Control Mesh

^۳ Patches

^۴ Knot Span

بازه‌های گرهی تجزیه کرد. گره‌ها در فضای یک، دو و سه‌بعدی به ترتیب نقطه، خط و صفحه هستند. بازه‌های گرهی به وسیله‌ی گره‌ها مرزبندی شده‌اند. این بازه‌ها حوزه‌ی المان را جایی که توابع پایه هموار هستند تعریف می‌کنند. در گره‌های این اجزاء، توابع پایه دارای پیوستگی C^{p-m} هستند که p درجه‌ی چندجمله‌ای و m تعداد تکرار نقاط گرهی در بردار گرهی می‌باشد. بازه‌های گرهی برای انتگرال‌گیری عددی بسیار مناسب می‌باشند. این بازه‌ها را می‌توان به عنوان المان‌های کوچک در نظر گرفت زیرا کوچک‌ترین جزئی هستند که ما به آن‌ها می‌پردازیم.

مفهوم مهم دیگری که وجود دارد و کلیدی برای فهم نربز است؛ فضای شاخص^۱ زیر دامنه است. این فضای شاخص، هر گره را به‌طور ویژه مشخص می‌کند و گره‌هایی را که تکرار بیشتر از یک دارند؛ متمایز می‌کند. نمایش کلی این مفاهیم در شکل (۲-۱) قابل مشاهده است.



شکل (۲-۱) شمای کلی از مفهوم نربز برای سطحی با یک المان [۱۱].

^۱ Index Space

۲-۳- بی-اسپلاین ها و توابع نرَبز

استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد دامنه با مرز نوسانی شود. از سوی دیگر ساختن اشکال پیچیده با استفاده از چندجمله‌ای‌ها نیازمند بالا بردن درجه‌ی آن‌هاست و نمی‌توان تنها با استفاده از یک چندجمله‌ای چنین اشکالی را مدل کرد. اسپلاین‌ها این مشکل را حذف کردند؛ زیرا این توابع ترکیبی از چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند. این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند با مرتبه‌های پیوستگی دلخواه به یکدیگر متصل شوند و یک منحنی را تشکیل دهند. تابع اسپلاین درجه سه که دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنا را دارد یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز می‌باشد [۱۲] و [۱۳]. یانگ و چوی [۱۴] نشان دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم آنالیز حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برایبنت و همکاران [۱۵] از توابع مخلوط بی-اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند؛ که مشخص شد توابع مخلوط انعطاف‌پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد می‌کنند. با استفاده از فرمول‌های بی-اسپلاین نظم و همواری موردنیاز برای مرز دامنه به دست خواهد آمد و فرمول‌بندی تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن خواهد شد.

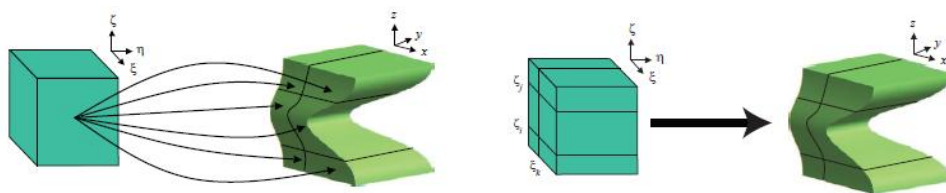
۲-۳-۱- بردارهای گرهی^۱

یک بردار گرهی در یک بعد مجموعه‌ای از اعداد در فضای پارامتری است که به شکل $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ نوشته می‌شود که $\xi_i \in R$ ، i امین گره است و $i = 1, 2, \dots, n+p+1$ و p مرتبه‌ی چندجمله‌ای و n تعداد توابع پایه است. گره‌ها فضای پارامتری را به المان‌ها تقسیم می‌کنند و مرزهای

^۱ Knot vectors

المان در فضای فیزیکی تصویر خطوط گرهی تحت نگاشت بی-اسپلاین هستند. بازه‌ی (ξ_i, ξ_{i+1}) را یک دهانه‌ی گرهی می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد؛ زیرا گره‌ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند. اگر فاصله‌ی بین گره‌ها مساوی باشد در این حالت بردار گرهی را یکنواخت^۱ می‌نامیم، در غیر این صورت این بردار غیریکنواخت^۲ خواهد بود. اگر یک عدد برای بیش از یک گره تکرار شود به آن گره‌ی تکراری می‌گوییم. یک بردار گرهی را باز نامیم هرگاه اولین و آخرین گره‌های آن $p+1$ بار تکرار شوند. در مسائل یک‌بعدی، توابع پایه که از بردارهای گرهی باز شکل گرفته‌اند یک درون‌یاب در انتهای بازه‌ی فضای پارامتری (ξ_i, ξ_{i+1}) و در چند بعد نیز در گوشه‌های زیر المان‌ها درون‌یاب می‌باشند؛ اما لزوماً گره‌های داخلی را درون‌یابی نمی‌کنند. این یک تمایز بین گره‌ها در مفهوم آیزوژئومتریک (Knots) و مفهوم اجزای محدود (Nodes) است.

یکی دیگر از تفاوت‌های موجود بین روش اجزای محدود و روش آیزوژئومتریک در این است که در اجزای محدود سنتی، فضای پارامتری هر المان به صورت مجزا است ولی در روش آیزوژئومتریک فضای پارامتری هر زیردامنه جداست و هر زیر دامنه خود شامل المان‌هایی است که به وسیله‌ی بردارهای گرهی تشکیل شده‌اند و با مفهوم المان در اجزای محدود متفاوت است. مفاهیم فوق در شکل زیر قابل مشاهده است.



شکل (۲-۲) نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در اجزای محدود کلاسیک (سمت چپ) و نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در روش آیزوژئومتریک (سمت راست) [۱۱].

^۱ Uniform

^۲ Non-Uniform

۲-۳-۲- توابع پایه

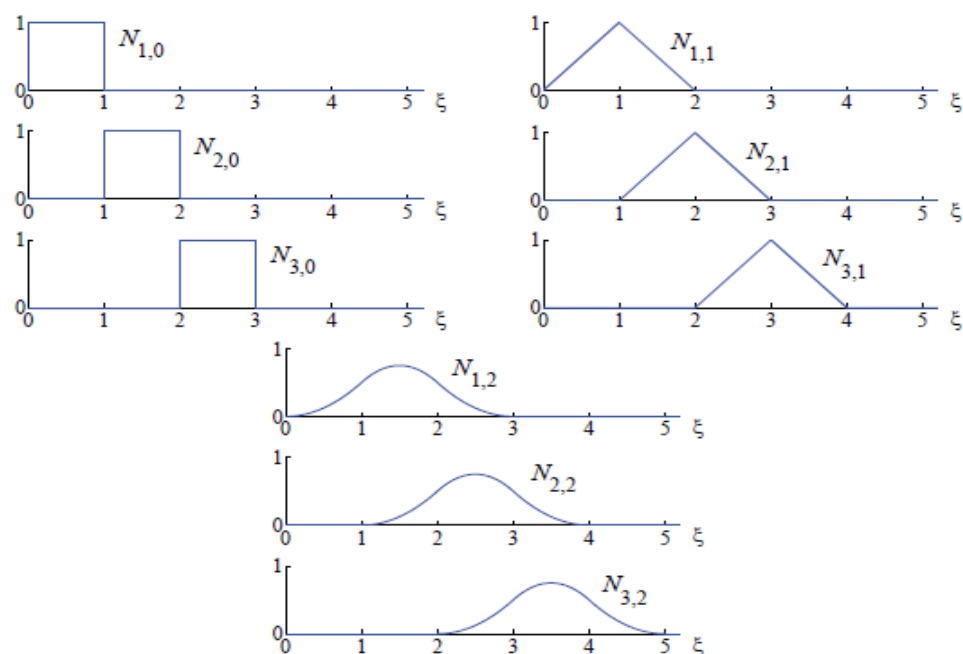
توابع پایه ی بی-اسپلاین به صورت بازگشتی با شروع از اعداد ثابت تعریف می شود.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (1-2)$$

برای $p=1,2,3,\dots$ داریم:

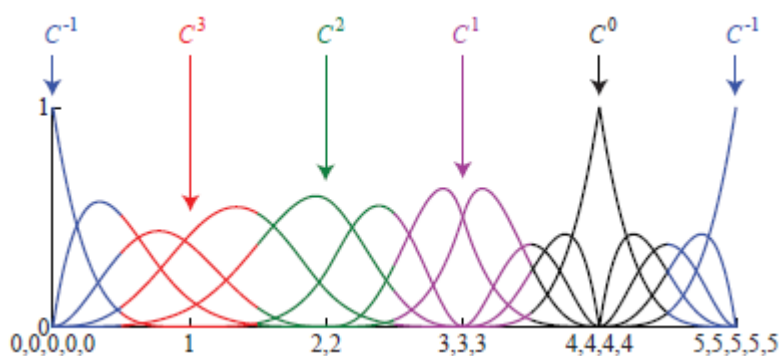
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2-2)$$

یک مثال ابتدایی از نتایج روابط فوق برای بردار گرهی یکنواخت در شکل (۲-۳) نمایش داده شده است. توجه شود که برای $p=0$ و $p=1$ توابع پایه به ترتیب مانند همان توابع ثابت تکه ای و توابع اجزای محدود خطی هستند اما برای $p \geq 2$ موضوع کمی متفاوت است. توابع بی-اسپلاین مرتبه دوم (همچنین توابع پایه ی نریز) با یکدیگر مشابه هستند و فقط هرکدام نسبت به تابع قبلی چند واحد منتقل شده اند. این مسئله در مقایسه با توابع اجزای محدود مرتبه دوم که برای گره های انتهایی و میانی با هم تفاوت دارند کمی متفاوت است. این الگوی مشابه برای بی-اسپلاین های با مرتبه ی بالاتر نیز به همین شکل ادامه می یابد و می تواند باعث امتیاز بزرگی در حل معادلات نسبت به توابع اجزای محدود که کاملاً نامتشابه هستند؛ شود.



شکل (۳-۲) توابع پایه‌ی بی-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ [۱۱].

یک نمونه از توابع پایه برای بردار گرهی غیریکنواخت و باز در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. توجه شود که توابع پایه در ابتدا و انتها دارای پیوستگی از مرتبه‌ی C^{-1} و در $\xi = 4$ دارای پیوستگی از مرتبه‌ی C^1 هستند در حالی که در سایر نقاط پیوستگی آن‌ها در شکل مشخص شده است. به‌طور کلی توابع پایه با مرتبه‌ی p دارای $p-1$ مشتق پیوسته هستند. اگر یک گره k بار تکرار شود تعداد مشتقات پیوسته‌ی آن k مرتبه کاهش می‌یابد.



شکل (۴-۲) توابع پایه‌ی درجه چهار برای بردار گرهی یکنواخت و باز $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\}$ [۱۱].

برخی ویژگی‌های مهم توابع بی-اسپلاین به شرح زیر می‌باشد:

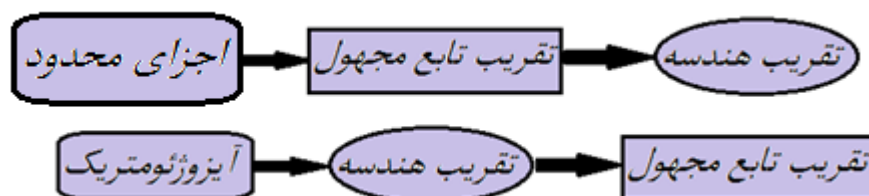
$$1- \quad \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1. \quad \text{جمع مقادیر این توابع برابر واحد است.}$$

$$2- \quad \text{هر تابع } N_{i,p} \text{ به بازه‌ی } [\xi_i, \xi_{i+p+1}] \text{ محدود می‌شود.}$$

$$3- \quad \text{هر تابع پایه، غیر منفی است لذا همه‌ی ضرایب ماتریس جرم که بر پایه‌ی بی-اسپلاین}$$

$$\text{ساخته شده‌اند بزرگ‌تر یا مساوی با صفر است. } N_{i,p}(\xi) \geq 0 ; \quad \forall \xi.$$

از دیگر تفاوت‌های بین دو روش اجزای محدود و آیزوژئومتریک این است که در روش اجزای محدود تابع مجهول به وسیله‌ی توابع پایه تقریب زده می‌شود و سپس از همان توابع برای مدل سازی هندسی استفاده خواهد شد ولی در روش آیزوژئومتریک برعکس این حالت است یعنی ابتدا هندسه‌ی دامنه توسط توابع پایه مدل می‌شوند و سپس از همین توابع برای تقریب تابع مجهول استفاده خواهد شد. شکل زیر بیان گر این اختلاف است.



شکل (۵-۲) تفاوت‌های مفهوم تحلیل هم‌هندسی و تحلیل اجزای محدود

۳-۳-۲- مشتقات توابع بی-اسپلاین

مشتقات توابع پایه بی-اسپلاین را می‌توان به راحتی برحسب بی-اسپلاین‌های از مرتبه‌ی پایین‌تر نشان داد. این مسئله با توجه به تعریف بازگشتی این توابع چندان عجیب نیست. برای چند جمله‌ای مرتبه p و بردار گرهی Ξ مشتق تابع پایه‌ی i ام به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3-2)$$

با مشتق گیری از دو طرف رابطه ی فوق می توان آن را برای مشتقات مرتبه ی بالاتر به شکل زیر

بسط داد.

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) &= \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \\ &\quad \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \end{aligned} \quad (4-2)$$

با بسط دادن رابطه ی (۴-۲) به وسیله ی رابطه ی (۳-۲) می توانیم به عبارت زیر بر حسب توابع

مرتبه ی پایین تر $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$ برسیم:

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+k,p-k}(\xi) \quad (5-2)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1 \\ \alpha_{k,0} &= \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ \alpha_{k,j} &= \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \\ \alpha_{k,k} &= \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{aligned} \quad (6-2)$$

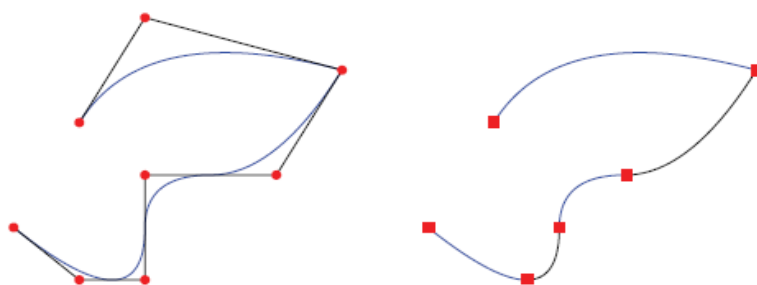
در نتیجه بسیاری از این ضرایب در حضور گره های تکراری صفر خواهند بود.

۲-۳-۴- منحنی بی-اسپلین

منحنی‌های بی-اسپلین در R^d با استفاده از ترکیب خطی توابع پایه‌ی بی-اسپلین ساخته می‌شوند. ضرایب توابع پایه به‌عنوان نقاط کنترلی در نظر گرفته می‌شوند. این نقاط به نوعی شبیه به مختصات نقاط گرهی در تحلیل اجزای محدود هستند. درون‌یابی خطی تکه‌ای نقاط کنترلی، چندضلعی کنترلی را تشکیل می‌دهد. برای n تابع بی-اسپلین $N_{i,p}$; $i=1,2,\dots,n$ و نقاط کنترلی متناظر $B_i \in R^d$ یک منحنی بی-اسپلین به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (۷-۲)$$

یک نمونه از این منحنی‌ها برای تابع پایه‌ی درجه‌دو در شکل (۶-۲) نشان داده شده است. توجه شود که منحنی در نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی به این خاطر که بردار گرهی باز است دارای پیوستگی صفر است و همین‌طور در نقطه‌ی کنترلی ششم به دلیل این که تعداد دفعات تکرار گرهی $\xi=4$ برابر با مرتبه‌ی تابع چندجمله‌ای است؛ دارای پیوستگی صفر می‌باشد. همچنین توجه شود که منحنی در اولین، آخرین و ششمین نقطه کنترلی مماس بر چندضلعی کنترلی است لذا این نقاط را درون‌یابی می‌کند. منحنی در هر مکانی که گرهی تکراری $\xi=4$ وجود دارد پیوستگی مرتبه‌ی $C^{p-2} = C^0$ دارد.



شکل (۶-۲) منحنی بی-اسپلین و نقاط کنترلی (سمت چپ) و منحنی بی-اسپلین و شبکه‌ی ایجاد شده به وسیله‌ی موقعیت گره‌ها (سمت راست) [۱۱].

برخی از خواص مهم منحنی بی-اسپلین به شرح زیر است:

- ۱- این منحنی‌ها در جاهایی غیر از تکرار گره‌ها یا نقاط کنترلی دارای مشتقات پیوسته‌ی مرتبه‌ی $p-1$ هستند.
- ۲- تکرار k مرتبه‌ی یک نقطه‌ی کنترلی تعداد مشتقات پیوسته‌ی k را کاهش می‌دهد.
- ۳- جابجایی نسبی یک منحنی بی-اسپلین با اعمال جابجایی به نقاط کنترلی آن به دست می‌آید که این خاصیت کوواریانس سلبی^۱ نام دارد.

۲-۳-۵- سطوح بی-اسپلین

برای شبکه‌ی کنترلی $\{B_{i,j}\}; i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m$ و بردارهای گرهی $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ یک سطح بی-اسپلین حاصل از ضرب تانسوری به صورت زیر تعریف می‌شود:

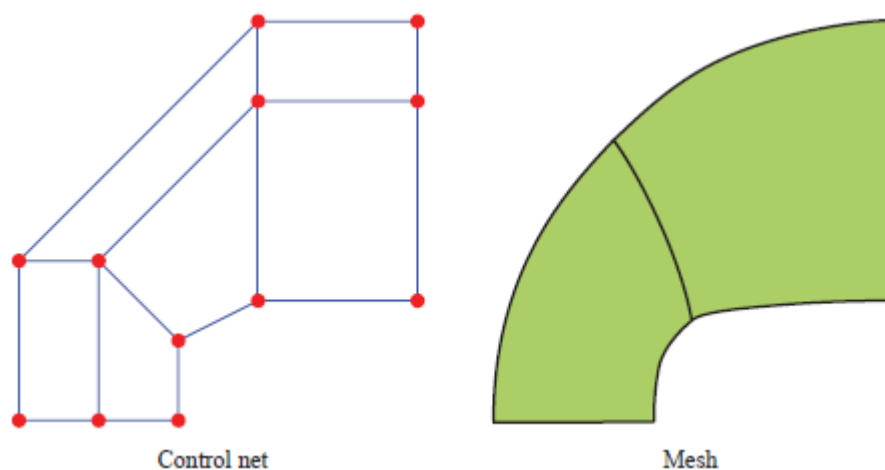
$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (۸-۲)$$

که در آن $N_{i,p}$ و $M_{j,q}$ توابع پایه‌ی منحنی‌های بی-اسپلین هستند. نمونه‌ای از یک سطح بی-اسپلین به همراه مختصات شبکه‌ی نقاط کنترلی آن در جدول (۲-۱) نمایش داده شده است و نیز در شکل (۲-۷) سطح بی-اسپلین به همراه شبکه‌ی کنترلی مربوط به آن مشخص شده است. بردارهای گرهی این شکل به صورت $\xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ و $\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ می‌باشد.

^۱ Affine Covariance

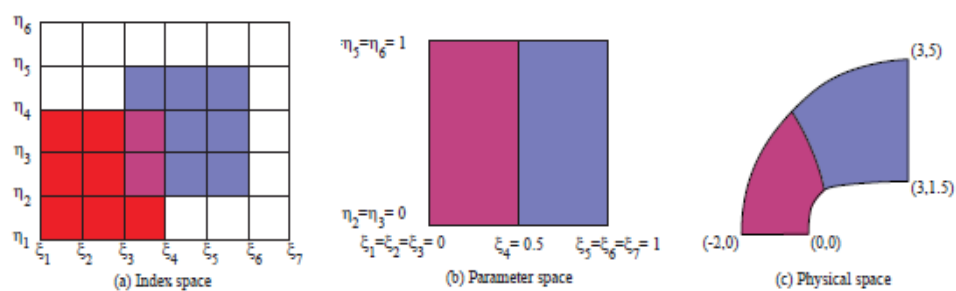
جدول (۱-۲) مختصات نقاط کنترلی شکل (۷-۲) [۱۱].

i	j	$B_{i,j}$
1	1	(0, 0)
1	2	(-1, 0)
1	3	(-2, 0)
2	1	(0, 1)
2	2	(-1, 2)
2	3	(-2, 2)
3	1	(1, 1.5)
3	2	(1, 4)
3	3	(1, 5)
4	1	(3, 1.5)
4	2	(3, 4)
4	3	(3, 5)



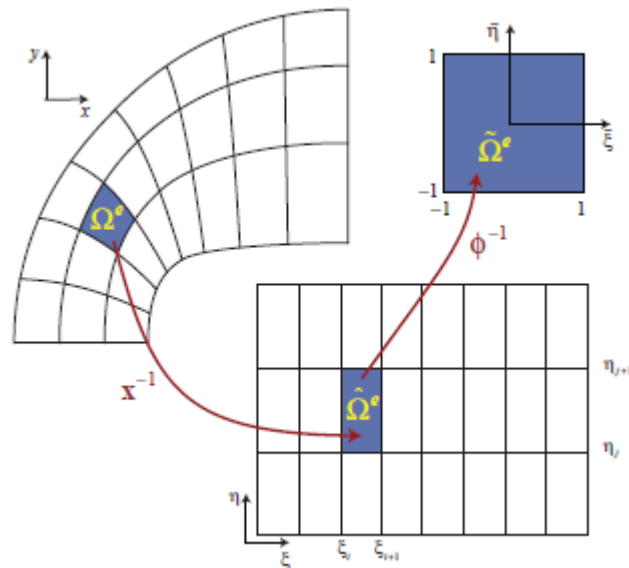
شکل (۷-۲) سطح بی-اسپلاین برای $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ و $\mathcal{H} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ [۱۱].

و در نهایت فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی به شکل زیر به دست می‌آید.



شکل (۸-۲) فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۷-۲) و جدول (۱-۲) [۱۱].

برای آرایه‌های انتگرال‌گیری عددی ساخته شده از روی بی-اسپلاین‌ها، المان به‌عنوان دهانه‌های گرهی $[\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ در نظر گرفته می‌شوند. برای درک بهتر یک المان مرجع دوبعدی و تصویر آن در فضای فیزیکی به شکل (۹-۲) توجه کنید. در انتگرال‌گیری با استفاده از تغییر متغیر و قوانین انتگرال‌گیری گوسی به المان مرجع برمی‌گردیم.



شکل (۹-۲) المان گوس و تصویر آن در فضای فیزیکی و پارامتری [۱۱].

۲-۳-۶- احجام بی-اسپلاین

احجام بی-اسپلاین حاصل از ضرب تانسوری همانند سطوح بی-اسپلاین تعریف می‌شوند. برای شبکه‌ی کنترلی $\{B_{i,j,k}\}; i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m, k=1,2,\dots,L$ و بردارهای گرهی $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ ، $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ و $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{L+r+1}\}$ یک حجم بی-اسپلاین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^L N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (9-2)$$

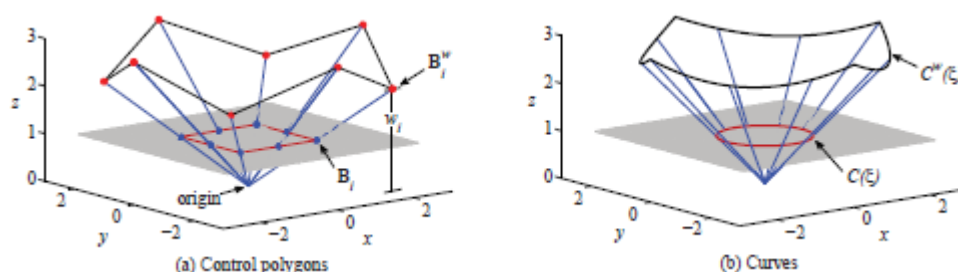
۲-۳-۷- بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت (NURBS)

اشکال هندسی در R^d را می‌توان با انتقال تصویری اشکال بی-اسپلاین در R^{d+1} به دست آورد. مقاطع مخروطی مانند دایره، بیضی، استوانه و کره را می‌توان به طور دقیق با انتقال تصویری منحنی‌های درجه دو قطعه‌ای ساخت. در شکل (۱۰-۲) این مطلب نمایش داده شده که در آن یک دایره در R^2 از منحنی بی-اسپلاین درجه دو قطعه‌ای در R^3 ساخته شده است. انتقال تصویری یک منحنی بی-اسپلاین، یک چندجمله‌ای نسبی به فرم $C_R(\xi) = f(\xi)/g(\xi)$ است که f و g در آن چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای هستند. نحوه‌ی ساخت یک منحنی بی-اسپلاین نسبی در R^d به این صورت است که اگر $\{B_i^w\}$ مجموعه‌ای از نقاط کنترلی برای یک منحنی بی-اسپلاین در R^{d+1} با بردار گرهی باشد این نقاط به عنوان نقاط کنترلی، همچون تصویری برای منحنی نربز مورد نظر در R^d در نظر گرفته می‌شوند. نقاط کنترلی در R^d از تصویر نقاط کنترلی تصویر شده با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$(B_i)_j = (B_i^w)_j ; j = 1, 2, \dots, d \quad (10-2)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (11-2)$$

که در آن $(B_i)_j$ مؤلفه‌ی j ام بردار B_i است و w_i به عنوان i امین وزن در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۱۰-۲) ساخت منحنی بی-اسپلاین نسبی از منحنی بی-اسپلاین [۱۱].

با توجه به شکل (۲-۱۰-۱) وزن مؤلفه‌ی قائم نقاط کنترلی منحنی بی-اسپلاین قطعه‌ای را

در فضای R^r تعریف می‌کنند. توابع پایه‌ی نسبی و منحنی نربز به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{w(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (12-2)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i \quad (13-2)$$

سطوح و احجام نسبی به‌طور مشابه برحسب توابع پایه‌ی نسبی تعریف می‌شوند:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (14-2)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^L N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}} \quad (15-2)$$

از خواص مهم نربز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- مجموع مقادیر توابع پایه‌ی نربز برابر واحد است.
- ۲- پیوستگی توابع پایه‌ی نربز همانند بی-اسپلاین‌ها است.
- ۳- انتقال نسبی با اعمال انتقال بر نقاط کنترلی به‌دست می‌آید؛ یعنی نربز خاصیت کوواریانس سلی دارد.
- ۴- اگر وزن‌ها برابر باشند نربز همان بی-اسپلاین خواهد بود.
- ۵- سطوح و احجام نربز انتقال تصویری اشکال چندجمله‌ای هستند.

۲-۳-۸- مشتقات توابع پایه‌ی نربز

از آنجایی که توابع نربز از روی بی-اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند، مشتقات آن‌ها وابسته به مشتقات بی-اسپلاین‌هاست.

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{w(\xi) N'_{i,p}(\xi) - w'(\xi) N_{i,p}(\xi)}{(w(\xi))^2} \quad (16-2)$$

که در آن:

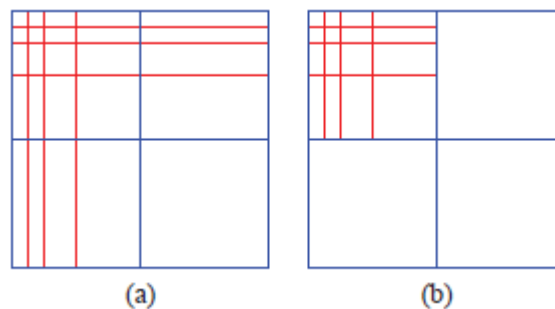
$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi), \quad w'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi) w_i \quad (17-2)$$

۲-۴- نربز به‌عنوان پایه‌ای برای تحلیل

چهارچوب تحلیل بر مبنای نربز شامل مؤلفه‌های زیر است [۱۶]:

- ۱- شبکه برای یک زیر المان نربز به‌صورت حاصل ضرب بردارهای گرهی تعریف می‌شود. به‌عنوان مثال در سه بعد، یک شبکه به‌صورت $\Xi \times H \times Z$ به‌دست می‌آید.
- ۲- دهانه‌های گرهی حوزه‌ی مسئله را به المان تقسیم می‌کنند.
- ۳- زیربنای هر تابع پایه تنها تعداد کمی المان است.
- ۴- نقاط کنترلی اختصاص داده شده به توابع پایه، هندسه را تشکیل می‌دهند.
- ۵- از مفهوم آیزوپارامتریک در این‌جا نیز استفاده می‌شود؛ یعنی پارامترهای مجهول مسئله برحسب همان توابع پایه‌ای تقریب زده می‌شوند که برای نمایش هندسه به‌کار رفته‌اند.

- ۶- استراتژی اصلاح شبکه از ترکیب تکنیک‌های گره‌گذاری و افزایش مرتبه به‌دست می‌آیند. این کار استفاده از روش‌های مشابه اصلاح h ، p و نیز اصلاح جدید k را فراهم می‌کند.
- ۷- آرایه‌های ساخته شده از زیرالمان‌های آیزوپارامتریک نریز می‌توانند همچون روش اجزای محدود برای تشکیل آرایه‌های کلی برهم‌گذاری^۱ شوند. سازگاری بین زیرالمان‌های نریز با استفاده از نمایش یکسان نریز در لبه و سطح، برای مرز مشترک زیرالمان‌ها به‌دست می‌آید. در شکل (۲-۱۱) استفاده از روش پیوسته‌ی گالرکین نمایش داده شده است. اصلاح از زیرالمانی به زیرالمان دیگر انتقال می‌یابد. دو روش جایگزین طبق شکل (۲-۱۱) وجود دارد. یکی روش ناپیوسته‌ی گالرکین است که می‌تواند در سطح زیرالمان انجام شود. با استفاده از فرمول‌بندی تغییراتی سازگاری به‌صورت ضعیفی تحمیل می‌شود. روش دیگر استفاده از معادلات مقید برای نقاط و متغیرهای کنترلی است تا به این وسیله سازگاری نقطه‌ای در مرز مشترک زیرالمان‌ها را به‌دست آوریم.

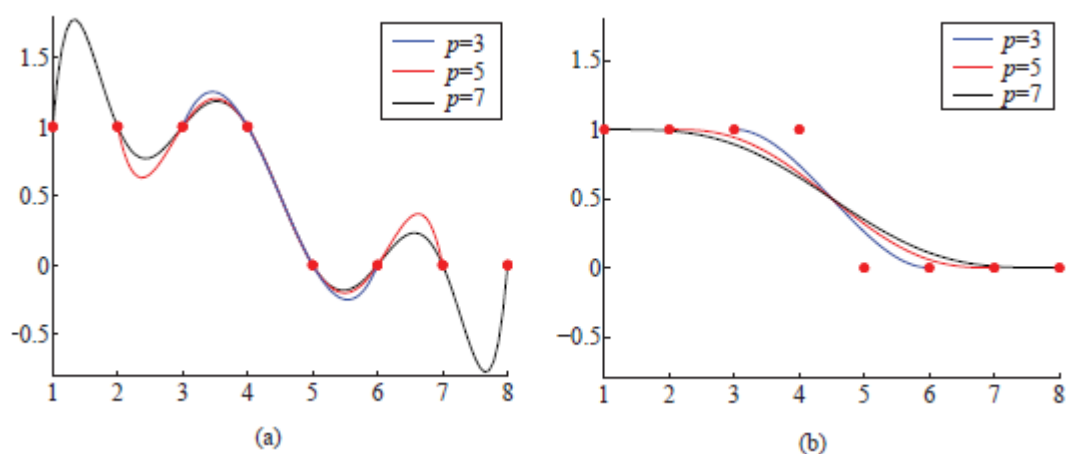


شکل (۲-۱۱) روش ناپیوسته‌ی گالرکین (سمت چپ) و روش پیوسته (سمت راست) [۱۱].

مشهور است که توابع درونیاب اجزای محدود برای تطبیق کردن داده‌های ناپیوسته دارای نوسان هستند. یک مثال از این مطلب در شکل (۲-۱۲) نشان داده شده است که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه سوم، پنجم و هفتم ناپیوستگی بین هشت نقطه را در R^2 درونیابی می‌کنند. توجه شود که همچنان‌که درجه‌ی چندجمله‌ای افزایش می‌یابد دامنه‌ی نوسانات افزایش می‌یابد. این پدیده را

^۱ Assemble

پدیده‌ی گیبز^۱ می‌نامند. وقتی از همین اطلاعات به‌عنوان نقاط کنترلی در نربز استفاده می‌شود رفتار کاملاً متفاوتی مشاهده می‌شود. در شکل (۲-۱۲) منحنی‌های نربز یکنوا هستند که خاصیت میرایی تغییرات^۲ را نشان می‌دهد. این خاصیت در نمایش لایه‌های تیز برتری ایجاد می‌کند.



شکل (۲-۱۲) مقایسه‌ی تطبیق داده‌های ناپیوسته. روش اجزای محدود (سمت چپ) و روش آیزوژئومتری (سمت راست) [۱۱].

۲-۵- تحلیل آیزوژئومتری در مسائل تنش مسطح

هدف از این بخش نمایش فرمول‌بندی روش آیزوژئومتری در مسائل تنش مسطح می‌باشد.

^۱ Gibbs Phenomena

^۲ Variation Diminishing

۲-۵-۱- فرمول بندی تحلیل آیزوژئومتری

تابع تغییر مکان در مسائل تنش مسطح را می توان با استفاده از توابع پایه ی نریز به صورت زیر

تقریب زد:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) p_{i,j}^u \quad (18-2)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) p_{i,j}^v \quad (19-2)$$

در این روابط $R_{i,j}(\xi, \eta)$ توابع پایه ی نریز می باشند. با توجه به خاصیت بازه ی تأثیر توابع

درون یاب، روابط فوق را می توان برای $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ و $\eta \in [\eta_i, \eta_{i+1}]$ به صورت زیر ساده نمود:

$$\bar{u}^{i,j} = \begin{Bmatrix} u^{i,j} \\ v^{i,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) p_{k,l}^u \\ \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) p_{k,l}^v \end{Bmatrix} = \bar{N} \cdot \bar{P} \quad (20-2)$$

که در رابطه ی فوق $\bar{N}$ را می توان به صورت بسط یافته ی زیر نوشت:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{i-p_1, j-p_2} & 0 & \dots & R_{i-p_1, j} & 0 & \dots & R_{i, j} & 0 \\ 0 & R_{i-p_1, j-p_2} & \dots & 0 & R_{i-p_1, j} & \dots & 0 & R_{i, j} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

و همچنین $\bar{P}$ عبارت است از:

$$\bar{P} = [p_{i-p, j-p}^u p_{i-p, j-p}^v \dots p_{i-p, j}^u p_{i-p, j}^v \dots p_{i, j}^u p_{i, j}^v]^T \quad (22-2)$$

رابطه ی تنش- کرنش و تعریف کرنش ها در مسائل الاستیسیته مطابق روابط زیر است:

$$\sigma = \varepsilon C \quad (23-2)$$

$$\varepsilon = D \bar{u} \quad (24-2)$$

که در این روابط C و D به ترتیب ماتریس الاستیسیته و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی می باشند و در هر مسائل تنش مسطح به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

از روابط تنش-کرنش و تعریف کرنش ها در رابطه ی (24-2) می توان نتیجه گرفت که:

$$B = D\bar{N} \quad ; \quad \varepsilon = D\bar{u} = B\bar{P} \quad (27-2)$$

در ادامه می توان مشابه با فرمول بندی روش اجزای محدود در مسائل تنش مسطح با استفاده از اصل کار مجازی، ماتریس ضرایب را به دست آورد. برای ناحیه ی فرضی Ω^p رابطه ی کار مجازی به صورت زیر می باشد:

$$\int_{\Omega^p} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega^p} \delta \bar{u}^T b d\Omega - \int_{\Gamma^p} \delta \bar{u} t d\Gamma = 0 \quad (28-2)$$

که در این رابطه t و b به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی می باشند. با استفاده از رابطه ی کرنش-تغییر مکان (27-2) تغییرات کرنش ها به صورت زیر بیان می شوند:

$$\delta \varepsilon = B \delta \bar{P} \quad (29-2)$$

اکنون با قرار دادن رابطه‌ی فوق در قسمت اول رابطه‌ی کار مجازی و با به‌کارگیری $\delta u = \bar{N} \delta \bar{P}$ برای مابقی قسمت‌های این رابطه و حذف $\delta \bar{P}$ به دلیل غیر صفر شدن آن‌ها در رابطه‌ی کار مجازی، ماتریس ضرایب K و ماتریس نیروها F به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$K = \int_{\Omega^p} B^T C B d\Omega \quad (30-2)$$

$$F = \int_{\Omega^p} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma^p} N^T t d\Gamma \quad (31-2)$$

بنابراین مقادیر مجهول نقاط کنترلی را می‌توان از حل دستگاه معادلات زیر محاسبه نمود:

$$K \bar{P} = F \quad (32-2)$$

چنان‌که اشاره شد مشابه با مفهوم روش آیزوپارامتریک در روش اجزای محدود در این روش نیز از تقریب یکسان تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. با این تفاوت که در این جا هندسه به‌مراتب دقیق‌تر مدل‌سازی می‌شود؛ بنابراین در مسئله‌ی تنش مسطح، هندسه‌ی دامنه به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) p_{i,j}^x \quad (33-2)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) p_{i,j}^y \quad (34-2)$$

که در این روابط $p_{i,j}^y$ و $p_{i,j}^x$ مختصات نقاط کنترلی می‌باشند. همان‌طور که قبلاً در تقریب تابع مجهول نیز اشاره شد در روابط فوق همه‌ی پارامترها برحسب ξ و η نوشته شده‌اند که لزوماً نیاز به نگاشت در محاسبات، همانند روش اجزای محدود را ایجاب خواهند کرد.

۲-۶- مقایسه‌ی روش آیزوژئومتریک با روش اجزای محدود

می‌توان تفاوت‌ها و مشابهت‌های دو روش آیزوژئومتریک و اجزای محدود را به‌صورت خلاصه و در جدول زیر بیان نمود:

جدول (۲-۲) مقایسه‌ی مشابهت‌ها و تفاوت‌های روش اجزای محدود و روش آیزوژئومتریک

روش اجزای محدود	روش آیزوژئومتریک
تفاوت‌ها	
نقاط گرهی	نقاط کنترلی
متغیرهای گرهی	متغیرهای کنترلی
شبکه‌ی اجزای محدود	فواصل گره‌ها در بردار گرهی
هندسه‌ی تقریبی	هندسه با دقت بالا
توابع پایه از نوع چندجمله‌ای‌های جبری	توابع پایه‌ی بی-اسپلاین و نرَبز
زیردامنه‌ها	وصله‌ها
پدیده‌ی گیبز	میرایی نوسانات
مشابهت‌ها	
واحد شدن مجموع مقادیر ^۱	واحد شدن مجموع مقادیر
مفهوم آیزوپارامتریک	مفهوم آیزوپارامتریک
کوواریانس سلبی	کوواریانس سلبی

^۱ Partition of unity

فصل سوم

بهینه‌سازی

۳-۱- مقدمه

بهینه‌سازی عبارت است از رسیدن به بهترین نتیجه در مورد یک عملیات در حالی که محدودیت‌های مشخصی برای این منظور در نظر گرفته شده باشد. بر اساس تعریف وایلد^۱، بهینه‌سازی بهترین طراحی قابل قبول بر اساس یک معیار کیفی از پیش تعیین شده است [۱۷].

در مسائل سازه‌ها پس از مرحله‌ی تحلیل و استخراج مقادیر مجهول یا تغییر مکان‌ها و محاسبه‌ی تنش، از این نتایج برای طرح مهندسی سازه استفاده می‌شود. هدف از این طرح یافتن بهترین سازه از لحاظ عملکرد و اقتصادی بودن آن است که به آن بهینه‌سازی سازه‌ها گفته می‌شود [۱۸].

یکی از انواع مسائل بهینه‌سازی، بهینه‌سازی توپولوژی می‌باشد که در این فصل به آن اشاره خواهد شد. به طور کلی در بهینه‌سازی توپولوژی ابتدا فضایی را که به آن دامنه‌ی مرجع گفته می‌شود تعریف می‌کنیم. این دامنه باید به گونه‌ای باشد که فضای طراحی را پوشش دهد. به هنگام حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی، شرایط تکیه‌گاهی، بارگذاری و مشخصات مصالح معلوم بوده و هدف حذف و توزیع مجدد مصالح در دامنه‌ی تعریف شده می‌باشد به طوری که در انتها توپولوژی به دست آمده تابع هدف مورد نظر را بهینه کند. توابعی که هدف طراحی و یا قیود را مشخص می‌کنند معمولاً انرژی کرنشی، وزن، تنش ماکزیمم و جابجایی ماکزیمم هستند.

^۱ Douglas Wilde

۳-۲- تعاریف اولیه

فرمول‌بندی و شکل کلی مسائل بهینه‌سازی بر اساس چند پارامتر اصلی تعریف می‌شود که شامل متغیرهای طراحی، تابع هدف و توابع قید می‌باشند و در ادامه به توضیح هریک می‌پردازیم.

۳-۲-۱- متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی پارامترهایی هستند که مقداری آزادی تغییر در آن‌ها داریم و با تغییر آن‌ها اصلاح لازم را در سازه‌ی مورد نظر ایجاد می‌کنیم که این پارامترها معمولاً سطح مقطع اعضا و یا خصوصیات دیگری از مصالح و خواص هندسی اعضای سازه‌ی موجود هستند و به دو دسته‌ی گسسته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند.

به‌طور کلی یک سیستم سازه‌ای توسط کمیت‌هایی بیان می‌شود که بعضی از آن‌ها را می‌توان به‌عنوان متغیرهای طراحی برای فرایند بهینه‌سازی در نظر گرفت. کمیت‌هایی که در حین این فرایند ثابت هستند پارامترهای از پیش تعیین شده نامیده می‌شوند. این پارامترها توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی تغییر نخواهند کرد. کمیت‌هایی که از پیش تعیین شده نیستند را متغیرهای طراحی می‌نامیم. مجموعه‌ی پارامترهای از پیش تعیین شده و متغیرهای طراحی، یک طرح را تشکیل می‌دهند. متغیرهای طراحی می‌توانند بیان‌کننده‌ی خواص زیر برای سازه باشند [۱۹].

۱- خواص مکانیکی یا فیزیکی مصالح سازه

۲- توپولوژی یا نحوه‌ی ارتباط اعضا یا المان‌های یک سازه

۳- هندسه یا ساختار یک سازه

۴- ابعاد یا سطح مقطع عرضی یا اندازه‌ی سازه

۳-۲-۲- تابع هدف

تابع هدف تابعی است که می‌توان آن را به‌عنوان معیاری جهت تعیین میزان مؤثر بودن طراحی در نظر گرفت. جهت بهینه‌سازی سازه‌ها انرژی کرنشی، وزن، تغییر مکان، تنش، فرکانس لرزش، بارهای کمانش و هزینه و یا ترکیبی از این موارد را می‌توان به‌عنوان تابع هدف در نظر گرفت. وقتی که چند تابع هدف داریم با توجه به پیچیده بودن مسئله سعی می‌کنیم که تابع هدف را به یک تابع کاهش دهیم که این عمل را یا با ترکیب کردن توابع هدف انجام می‌دهیم یا تابع هدفی را که از همه مهم‌تر است انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب بهترین طرح از میان بینهایت طرح موجود در ناحیه‌ی شدنی، نیاز به تعریف یک تابع هدف داریم. انتخاب تابع هدف گام مهمی در عملیات بهینه‌سازی است. در حالت کلی تابع هدف بیان‌کننده‌ی مهم‌ترین ویژگی یک طرح است که باید بهینه شود.

۳-۲-۳- قیود

حدودی که برای متغیرهای طراحی وجود دارد و نمی‌توانند از آن‌ها تجاوز کنند را قیدهای طراحی می‌نامند که به دو دسته‌ی قیدهای مساوی و قیدهای نامساوی تقسیم می‌شوند. هر یک از مجموعه‌ی مقادیر متغیرهای طراحی، یک سازه را تشکیل می‌دهند. واضح است که برخی از طرح‌ها قابل استفاده و برخی دیگر به دلیل پاره‌ای ملاحظات رفتاری، غیرقابل قبول هستند.

اگر یک طرح تمام الزامات خود را برآورده کند به آن طرح شدنی گفته می‌شود. برای به‌دست آوردن یک طرح شدنی محدودیت‌هایی باید برآورده شوند که به آن‌ها قید گفته می‌شود. از نظر فیزیکی دو نوع قید وجود دارد:

۱- به قیودی که بر متغیرهای طراحی اعمال می‌شوند و به دلایل غیر رفتاری محدوده‌ی تغییرات متغیرها را محدود می‌کنند قیود تکنولوژیکی یا قیود لبه‌ای می‌گویند. قید تکنولوژیکی یک حد تعیین شده برای متغیرهای طراحی است یا رابطه‌ای است که مقدار نسبی گروهی از متغیرها را ثابت می‌کند. برای مثال می‌توان شیب حداقل یک سقف، ضخامت حداقل یک صفحه یا ارتفاع حداکثر یک پوسته را نام برد.

۲- به قیودی که از شرایط رفتاری سازه به دست می‌آیند قیود رفتاری می‌گویند. حدود اعمال شده بر تنش‌های حداکثر، تغییر مکان‌ها و یا مقاومت کمانشی در یک سازه نمونه‌هایی از این نوع قید هستند.

۳-۳- فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی

فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) \leq 0 ; i=1, \dots, n_g \\ h_k(x) = 0 ; k=1, \dots, n_e \end{cases} \quad (1-3)$$

زمانی که با تابع هدفی سر و کار داریم که قرار است ماکزیمم شود به راحتی جهت استانداردسازی می‌توانیم مینیمم کردن منفی آن را در نظر بگیریم و چنین مطلبی در مورد قیدهای نامساوی نیز وجود دارد.

یک مسئله‌ی بهینه‌سازی را خطی گوییم هرگاه هم تابع هدف و هم قیود، توابعی خطی از متغیرهای طراحی باشند و در این موارد از شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی به نام برنامه‌ریزی خطی^۱ استفاده می‌کنیم. مسئله‌ی بهینه‌سازی را غیرخطی گوییم هرگاه یا تابع هدف یا قیود، توابعی غیرخطی از متغیرهای طراحی باشند.

یکی از مسائل اصلی در بهینه‌سازی، تعیین قیده‌های فعال^۲ است زیرا اگر بخواهیم تمام قیده‌ها را در نظر بگیریم هزینه‌ی محاسبات بسیار زیاد خواهد شد.

۳-۴- انواع روش‌های بهینه‌سازی

در حین تکامل بهینه‌سازی روش‌های بسیاری به وجود آمده و استفاده شده‌اند که برخی از آن‌ها خیلی زود به دست فراموشی سپرده شده و برخی به جایگاه ویژه‌ای دست پیدا کرده‌اند. به طور کلی می‌توان این روش‌ها را به دو دسته‌ی خطی و غیرخطی تقسیم کرد.

برنامه‌ریزی خطی به حل مسائل خطی می‌پردازد و البته درصد کمی از مسائل فیزیکی هستند که این خاصیت را داشته باشند؛ بنابراین پاره‌ای از روش‌ها به تقریب خطی مسائل غیرخطی می‌پردازند و از آن جمله می‌توان به روش SLP^3 اشاره کرد. حل مسائل خطی به سادگی با روش‌هایی همچون سیمپلکس^۴ قابل انجام است؛ بنابراین می‌توان مسائل غیرخطی زیادی را با این روش حل کرد.

^۱ Linear programming

^۲ Active constraints

^۳ Sequential Linear Programming

^۴ Simplex

دسته‌ی دیگری از روش‌ها وجود دارند که به حل مسائل محدب^۱ می‌پردازند. اگرچه بسیاری از مسائل بهینه‌سازی غیر محدب هستند ولی با روش‌هایی همچون SQP^2 می‌توان این مسائل را تقریب زده و به مسائل محدب تبدیل کرد.

البته برخی روش‌های دیگر نیز وجود دارند که به دنبال مسیری مماس بر مرز قیده‌های فعال می‌گردند^۳ و برخی به دنبال دور شدن از مرز قیده‌ها هستند^۴. در آن‌ها می‌بایست تعیین کرد که نیاز است چه مقدار بر روی مسیر به دست آمده جلو رفت. این عمل با روشی موسوم به جستجوی خطی یک‌بعدی^۵ انجام می‌شود و در انتها تعیین می‌شود که آیا حرکت جدیدی نیاز هست یا خیر.

۳-۴-۱- تحدب

با تعریف توابع محدب و مجموعه‌های محدب می‌توان به ماهیت توابع هدف و قید پی برد. مجموعه‌ی $S \subset R^n$ را محدب گوئیم اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و برای هر $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S \quad (2-3)$$



شکل (۳-۱) مجموعه‌ی محدب و غیر محدب.

^۱ Convex

^۲ Sequential Quadratic Programming

^۳ Gradient Projection Methods

^۴ Interior Penalty Function Methods or Feasible Direction Method

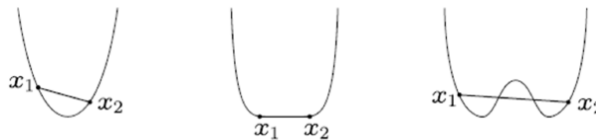
^۵ One Dimentional Line Search

به عبارت دیگر یک مجموعه را محدب گوییم هرگاه همه‌ی نقاط روی خطی که دو نقطه‌ی موجود در مجموعه را به هم وصل می‌کند درون مجموعه باشند. این مطلب در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.

۳-۴-۲- تابع محدب

تابع $f: S \rightarrow R$ (روی مجموعه‌ی محدب $S \subset R^n$) را محدب گوییم اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $x_1 \neq x_2$ و $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (3-3)$$



شکل (۳-۲) تابع محدب اکید (سمت چپ)، تابع محدب (وسط) و تابع غیرمحدب (سمت راست).

به عبارت دیگر نمودار تابع محدب f یا بر روی خط اتصال دو نقطه‌ی دلخواه روی گراف قرار دارد یا زیر آن خط قرار می‌گیرد. اگر علامت کوچک‌تر-مساوی به علامت کوچک‌تر تبدیل شود تابع f را محدب اکید^۱ می‌نامیم.

اگر $(-1 \times f)$ محدب باشد تابع f را مقعر^۲ می‌گوییم.

^۱ Strictly Convex

^۲ Concave

۳-۴-۳- مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب و نتایج حاصل از آن

اگر تابع هدف و تمام توابع قید محدب باشند مسئله‌ی بهینه‌سازی را محدب گویند.

- اگر مسئله محدب باشد مینیمم محلی برای تابع مورد نظر، مینیمم مطلق نیز می‌باشد.
 - وقتی که محدوده‌ی شدنی مسئله، بسته یا کران‌دار باشد همواره یک حل برای آن وجود دارد.
 - اگر تابع هدف محدب اکید و توابع قید محدب باشند حداکثر یک جواب وجود دارد.
- بنابراین اگر محدوده‌ی شدنی مسئله کران‌دار باشد تنها و تنها یک جواب وجود دارد. در نتیجه اگر در این حالت یک مینیمم محلی را به دست آوریم یعنی مینیمم مطلق را به دست آورده‌ایم.

۳-۴-۴- روش تشخیص تحدب و تقعر

برای تشخیص یک تابع محدب یا مقعر می‌توانیم از گرادیان یا ماتریس هسین^۱ استفاده کنیم.

قضیه‌ی ۳-۱: اگر مجموعه‌ی S محدب و تابع f مشتق‌پذیر و پیوسته باشد، f محدب (اکید) است اگر و تنها اگر ∇f یکنوا (اکید) باشد.

- تابع g را یکنوا گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ داشته باشیم:

$$(X_2 - X_1)^T (g(X_2) - g(X_1)) \geq 0 \quad (4-3)$$

^۱ Hessian

قضیه‌ی ۳-۲: برای تابع $f: S \rightarrow R$ که S محدب بوده و f دو بار مشتق‌پذیر باشد داریم:

الف- f محدب است اگر و تنها اگر هسین $\nabla^2 f$ مثبت نیمه معین باشد.

ب- f محدب اکید است اگر $\nabla^2 f$ مثبت باشد.

- ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت نیمه معین گوییم اگر $X^T A X \geq 0$

- ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت معین گوییم اگر $X^T A X > 0$

در روابط فوق $X \in R^{n \times 1}$ یک بردار دلخواه از x است.

ولی چون کنترل کردن تمامی این تعاریف کار سخت و زمان‌بری است می‌توانیم از معیار

سیلوستر^۱ استفاده کنیم.

۳-۴-۵- معیار سیلوستر

ماتریس متقارن $A \in R^{n \times n}$ را مثبت معین گوییم اگر و تنها اگر دترمینان تمام زیر ماتریس‌های

$k \times k$ که از سمت چپ و بالای ماتریس A جدا شده‌اند به ازای هر $k = 1, \dots, n$ مثبت باشند.

^۱ Sylvester's Criterion

۳-۴-۶- شرایط کاروش-کان-تاکر (KKT)^۱

به منظور بررسی این که آیا نقطه‌ای مینیمم محلی (کلی) است یا نه ملزم به استفاده از شرایط

KKT هستیم. برای این منظور لازم است ابتدا تابع لاگرانژ^۲ را تعریف کنیم:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n_e} \lambda_k g_k(\mathbf{x}) \quad (۵-۳)$$

که λ_i ها را ضرایب لاگرانژ^۳ می‌نامند.

با این تعریف شرایط کاروش-کان-تاکر به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \leq 0 ; x_j = x_j^{\max} \quad (۶-۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = 0 ; x_j^{\min} < x_j < x_j^{\max} \quad (۷-۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \geq 0 ; x_j = x_j^{\min} \quad (۸-۳)$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (۹-۳)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (۱۰-۳)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (۱۱-۳)$$

مشتق جزئی $\mathcal{L}$ نسبت به متغیرهای طراحی برابر است با:

^۱ Karush-Kuhn-Tucker

^۲ Lagrangian function

^۳ Lagrange multiplier

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \quad (12-3)$$

هر نقطه که شرایط (۶-۳) تا (۱۱-۳) را اقلان کند یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر (KKT) نامیده می‌شود. برای مسائل غیرمحدب شرایط KKT لازمند ولی کافی نیستند. به عبارت دیگر نقاط بهینه‌ی موضعی همواره در بین نقاط KKT یافت می‌شوند اما ممکن است نقاط کاروش-کان-تاکری وجود داشته باشند که نقطه‌ی بهینه‌ی موضعی نباشند. برای مسائل محدب نقطه‌ی KKT همواره یک نقطه‌ی بهینه است.

قضیه‌ی ۳-۳: فرض کنید P یک مسئله‌ی محدب باشد و (x^*, λ^*) یک نقطه‌ی KKT برای P باشد. در این صورت x^* یک نقطه‌ی مینیمم محلی (و البته مینیمم مطلق) برای P می‌باشد.

۳-۴-۷- تقریب برنامه‌ریزی خطی ترتیبی (SLP)

در برخی از مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها تابع هدف و همه‌ی قیدها به عنوان توابعی صریح از متغیرهای طراحی نوشته می‌شوند اما در اکثر مسائل یافتن چنین توابع صریحی غیرممکن است. برای حل این مشکل لازم است مسئله‌ی اصلی را به مجموعه‌ای از زیرمسئله‌های صریح که تقریبی از مسئله‌ی اصلی هستند تبدیل کنیم و به جای مسئله‌ی اصلی این زیرمسئله‌ها را حل کنیم. در ادامه دو مورد از این تقریب‌ها را که تقریب‌هایی محدب هستند و کاربرد زیادی در حل مسائل بهینه‌سازی دارند معرفی می‌کنیم.

در SLP تابع هدف و توابع قید همگی در متغیر طراحی x^k به کمک دو جمله‌ی اول بسط تیلور^۱ تقریب زده می‌شوند و به توابع خطی تبدیل می‌گردند. این عمل مسئله را به شکل زیر تقریب می‌زند:

$$(SLP) = \begin{cases} \min_x f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) \\ s. t. \quad g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T (x - x^k); i = 1, \dots, l \\ -l_j^k \leq x_j - x_j^k \leq u_j^k; j = 1, \dots, n \\ x \in X \end{cases} \quad (۱۳-۳)$$

که در آن l_j^k و u_j^k حدود جابه‌جایی هستند و به این دلیل به کار می‌روند که خطی‌سازی انجام شده فقط در نزدیکی طراحی موجود، معتبر است. این حدود در طی روند تکرار مسئله توسط کاربر اصلاح می‌شوند. هنگامی که $g_i(x^k)$ و $\nabla g_i(x^k)$ محاسبه شدند تمام عبارت‌ها به عنوان توابع صریح از x مشخص شده‌اند بنابراین SLP در حقیقت تقریب صریحی از مسئله‌ی بهینه‌سازی است.

در مسئله‌ی SLP فوق از آن جایی که تابع هدف و تمام قیدها توابع نسبی از x هستند و به عبارتی همه‌ی آن‌ها را می‌توان به شکل $a^T x + b$ که a و b در آن ثابت هستند نوشت؛ نتیجه می‌گیریم که این توابع محدب هستند. در نتیجه SLP یک مسئله‌ی محدب است. با توجه به این که SLP یک تقریب خطی است مسئله‌ی به دست آمده را می‌توان به کمک روش‌هایی همچون الگوریتم سیمپلکس حل کرد.

^۱ Taylor expansion

۳-۴-۸- برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی (SQP)

با اضافه کردن عبارت درجه‌دوی بسط تیلور به تابع هدف در SLP به تقریب برنامه‌ریزی

درجه دوم ترتیبی SQP می‌رسیم.

$$(SQP) = \begin{cases} \min_x f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \\ \quad \frac{1}{2} (x - x^k)^T H(x^k) (x - x^k) \\ s. t. \quad g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T (x - x^k); i = 1, \dots, l \\ \quad x \in X \end{cases} \quad (۱۴-۳)$$

که در آن $H(x^k)$ نشان دهنده‌ی تقریب مرتبه اول و مثبت نیمه معین هسین تابع f در x^k

است. این تقریب منجر به تشکیل تابع هدف محدب می‌شود و بنابراین SQP یک مسئله‌ی محدب

می‌باشد. همچنین در این تقریب نیازی به حدود جابه‌جایی نمی‌باشد زیرا SQP نسبت به SLP تقریب

بهتری از مسئله‌ی اصلی ایجاد می‌کند.

فصل چهارم

توابع ضمنی و روش

مجموعه‌ی سطوح تراز

۴-۱- مقدمه

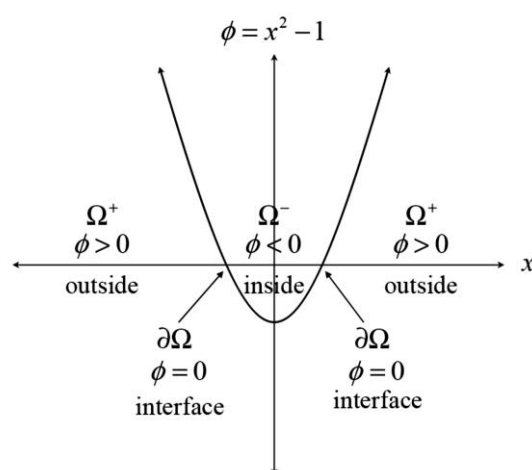
در این فصل مفاهیم و کاربردهایی از روش سطوح تراز و خواص مفید آن را که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد توضیح می‌دهیم. بررسی کامل در این مورد را می‌توان در مرجع [۲۰] یافت.

در این فصل خواصی را بررسی می‌کنیم که بر روی حالت کلی توابع ضمنی کاراست. همچنین در این فصل با روش مجموعه‌ی سطوح تراز که بر روی توابع ضمنی تعریف می‌شود آشنا می‌شویم. روش مجموعه‌ی سطوح تراز به روش‌های ضمنی، پارامتر زمان را اضافه می‌کند. علت اصلی رشد این روش، در حل عددی معادله‌ی حرکت وابسته به زمان رویه‌های ضمنی با استفاده از حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی می‌باشد. اولین افرادی که به این موضوع پی برده و روی این روش کار کردند اش و ستیان بودند. در این فصل به بررسی روش (LSM) و حل عددی معادلات به روش (HJ) می‌پردازیم.

۴-۲- نقاط

فرض کنید در فضای یک‌بعدی می‌خواهیم خطی را با استفاده از نقاط $x = +1$ و $x = -1$ به سه قسمت تقسیم کنیم. به این معنا که $(-\infty, -1)$ ، $(-1, +1)$ و $(+1, +\infty)$ سه زیرمجموعه‌ی مجزا از این خط باشند. قسمت $\Omega^- = (-1, +1)$ را به عنوان قسمت داخلی دامنه و $\Omega^+ = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$ را قسمت خارجی دامنه تعریف می‌کنیم. مرز بین دو قسمت داخلی و خارجی را دو نقطه‌ی $\partial\Omega = \{-1, +1\}$ تشکیل می‌دهد و به نام وجه مشترک می‌شناسیم. در فضای یک‌بعدی، فضای داخل و خارج نیز یک‌بعدی می‌باشند. به صورت کلی در فضای R^n ، زیرمجموعه‌ها از درجه‌ی n می‌باشند و سطح مشترک از درجه‌ی $n-1$ می‌باشد؛ به عبارت دیگر درجه‌ی مرز مشترک یک درجه کمتر خواهد بود.

در بیان وجه مشترک به صورت صریح نقاطی که تشکیل دهنده‌ی مرز مشترک می‌باشند به صورت آشکارا نوشته می‌شوند مطابق آنچه در بالا ذکر گردید. $\partial\Omega = \{-1, +1\}$ ، مرز مشترک در بیان ضمنی به صورت یک آیزوکانتور یا سطح تراز تعریف می‌شود. به عنوان مثال آیزوکانتور صفر^۱ در تابع $\phi(x) = x^2 - 1$ مجموعه نقاطی است که در آن $\phi(x) = 0$ می‌باشد. همان طور که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است مرز مشترک دقیقاً $\partial\Omega = \{-1, +1\}$ است. لازم به ذکر است که تابع $\phi(x)$ در فضای یک بعدی تعریف شده است در صورتی که آیزوکانتور آن یک درجه کمتر می‌باشد.



شکل (۱-۴) تابع ضمنی $\phi(x) = x^2 - 1$

به طور کلی در فضای R^n آیزوکانتور تابع ضمنی $\phi(x)$ که $x \in R^n$ ، از درجه‌ی $n-1$ می‌باشد.

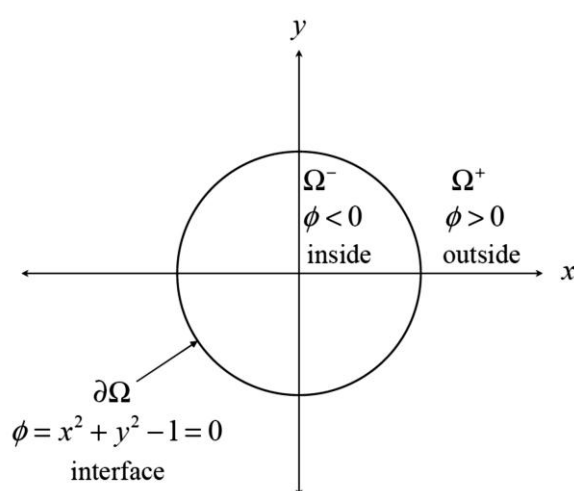
در بالا از $\phi(x) = 0$ به عنوان سطح تراز صفر تعریف شده است ولی در حالت کلی از هر $\phi(x) = a$ و $a \in R$ نیز می‌توان استفاده کرد. آن گاه می‌توانیم $\phi(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم که در آن صورت $\phi(x) = 0$ آیزوکانتور صفر آن خواهد بود.

$$\phi(x) = \phi(x) - a \quad (1-4)$$

^۱ Zero level set

۳-۴- منحنی‌ها

مرز مشترک در فضای دوبعدی، منحنی می‌باشد که فضای R^2 را به زیرمجموعه‌های غیر صفر تبدیل می‌کند. در این قسمت منحنی‌ها را بسته فرض می‌کنیم از این‌رو دو قسمت داخل و خارج به راحتی تعریف می‌شوند. به عنوان مثال فرض کنید $\phi(x) = x^2 + y^2 - 1$ ، به طوری که مرز مشترک $\phi = 0$ یک سطح تراز به صورت یک دایره‌ی واحد $\partial\Omega = \{x \mid |x| < 1\}$ خواهد بود که در شکل (۲-۴) ناحیه‌ی داخل، خارج و مرز مشترک آن مشخص شده است.



شکل (۲-۴) منحنی ضمنی $x^2 + y^2 = 1$

اگر بخواهیم مرز مشترک فوق را به صورت صریح بیان کنیم آن گاه داریم: $\partial\Omega = \{x \mid |x| = 1\}$ بنابراین در بیان صریح مرز مشترک نیازمند آن هستیم که تمامی نقاط معرفی شوند هرچند در مثال فوق این نمایش ساده می‌باشد ولی در حالت کلی این کار می‌تواند مشکل ساز باشد.

در حالت کلی برای بیان پارامتری منحنی با تابع برداری $x(s)$ و پارامتر s در بازه‌ی $[s_0, s_f]$ ، به شرط بسته بودن منحنی $[x(s_0) = x(s_f)]$ نیاز می‌باشد.

هرچند استفاده از نمایش صریح در بیان مرز مشترک فوق ساده می‌باشد ولی در منحنی‌های پیچیده‌ی دوبعدی این کار ساده نخواهد بود. راه ساده‌ای که برای تقریب زدن بیان صریح به کار برده می‌شود گسسته‌سازی پارامتر s به مجموعه‌ای از نقاط محدود $s_0 < \dots < s_{i-1} < s_i < s_{i+1} < \dots < s_f$ به‌طوری‌که زیربازه‌های $[s_i, s_{i+1}]$ لزوماً با هم برابر نباشد؛ است. برای هر نقطه از فضای پارامتری s_i مؤلفه‌ی دوم متناظر با آن بر روی منحنی، به صورت $x(s_i)$ نمایش داده می‌شود. واضح است که هر چه تعداد نقاط گسسته‌سازی افزایش یابد منحنی باکیفیت دقیق‌تری خواهیم داشت.

گسسته‌سازی در بیان ضمنی نیز به سادگی به دست می‌آید به جز در تمام فضای R^2 که دارای مرز نمی‌باشد. به همین دلیل از گسسته‌سازی مجموعه‌ی کران دار D که زیرمجموعه‌ی R^2 می‌باشد استفاده می‌شود. برای تقریب تابع ضمنی ϕ از تعداد نقاط محدود $(x_i, y_i); i=1, \dots, N$ برای گسسته‌سازی دامنه‌ی D استفاده می‌شود. روشن است که به جای بررسی یک‌بعدی در زیر بازه‌ی $[s_0, s_f]$ می‌بایست فضای دوبعدی D را بررسی کنیم. یکی از نقص‌های گسسته‌سازی در بیان ضمنی نسبت به بیان صریح، گسسته‌سازی فضایی از درجه‌ی بالاتر می‌باشد.

به‌طور کلی در فضای R^n برای گسسته‌سازی به بیان صریح، نیازمند بررسی فضای $(n-1)$ بعدی است و حال آن‌که در بیان ضمنی فضای (n) بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این کار یکی از ضعف‌های بیان ضمنی مرز مشترک است که با جایگزین کردن نقاط x در نزدیکی مرز مشترک و بررسی نکردن سایر نقاط در دامنه‌ی D می‌توان از بررسی کل فضای n بعدی اجتناب کرد.

از آن جایی که در این جا بررسی آیزوکانتور $\phi(x) = 0$ دارای اهمیت می‌باشد فقط نقاط x در نزدیکی این سطح تراز که مرز مشترک را به صورت دقیق مشخص می‌کند نیاز می‌باشد و مابقی نقاط فضای D مهم نمی‌باشند. کلاسه کردن نقاطی در نزدیکی مرز مشترک در بیان ضمنی روشی برای

گسسته‌سازی می‌باشد. هنگامی که مجموعه‌ی نقاط گسسته‌سازی انتخاب شدند مقدار تابع ضمنی متناظر با آن $\phi(x)$ ذخیره‌سازی می‌شوند.

در هر حال گسسته‌سازی صریح یا ضمنی، موقعیت مرز مشترک را در تعداد نقاط محدودی بیان می‌کند. برای به دست آوردن مقدار تقریبی سایر نقاط می‌توان از درون‌یابی استفاده کرد. به عنوان مثال می‌توان از درون‌یابی چندجمله‌ای برای تعیین مرز مشترک در بین نقاط معلوم استفاده نمود. اسپلاین‌ها نیز برای این کار مناسب می‌باشند. به طور مشابه در بیان ضمنی مرز مشترک نیز مقدار ϕ برای نقاط محدودی مشخص می‌باشد لذا می‌بایست از درون‌یابی برای به دست آوردن سایر نقاط استفاده شود.

۴-۴- رویه‌ها

در فضای سه بعدی مرز مشترک رویه‌ای می‌باشد که فضای R^3 را به حجم‌های غیر صفر تقسیم می‌کند. رویه‌ی بسته‌ای را در نظر می‌گیریم که دامنه را به قسمت داخل و خارج تقسیم می‌کند. به طور مثال تابع $\phi(x) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ را در نظر بگیرید به طوری که مرز مشترک به صورت $\phi(x) = 0$ تعریف می‌شود که کره‌ای با شعاع واحد می‌باشد. بیان صریح مرز مشترک به صورت $\partial\Omega = \{x \mid |x| = 1\}$ نوشته می‌شود. قسمت داخلی به صورت $\partial\Omega = \{x \mid |x| < 1\}$ و قسمت خارجی به صورت $\partial\Omega = \{x \mid |x| > 1\}$ تعریف می‌شود.

برای رویه‌های پیچیده که شکل تحلیلی آن وجود ندارد دوباره نیاز به گسسته‌سازی می‌باشد. گسسته‌سازی وقتی که رویه به شکل صریح بیان می‌گردد تا حدودی مشکل است چون برای به دست آوردن هم‌بندی به تعدادی نقاط بر روی رویه نیاز می‌باشد ولی در فضای دوبعدی هم‌بندی به علت

ترتیب آن‌ها، مشخص خواهد بود یعنی $x(s_i)$ به نقاط $x(s_{i+1})$ و $x(s_{i-1})$ هم‌بند می‌باشد. مثلاً برای رویه‌های سوراخ‌دار این کار نیاز به استفاده از الگوریتم‌های خاصی که دقیق هم نمی‌باشند؛ دارد.

همچنین هم‌بندی در طول زمان برای رویه‌های دینامیکی تغییر می‌کند. به‌عنوان مثال سطح خارجی آب‌های پرتلاطم را در نظر بگیرید. برای بیان پارامتری سطح آب، هم‌بندی بایستی به‌طور متناوب هرگاه که قسمتی از رویه‌ها با هم ادغام یا از هم جدا می‌شوند بررسی شود. در فضای دوبعدی این کار قابل مدیریت می‌باشد. در فضای سه‌بعدی بررسی ادغام و جدا شدن مرز مشترک به علت مشکلاتی از قبیل ایجاد سوراخ در رویه، پیچیده‌تر است.

یکی از بارزترین خواص رویه‌های ضمنی آن است که به هم‌بندی نقاط نیازی نمی‌باشد. یک شبکه‌بندی یکنواخت کارتزین $\{(x_i, y_j, z_k) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p\}$ می‌تواند به‌راحتی برای عمومیت دادن در فضای دوبعدی مورد استفاده قرار گیرد. یکی از قدرتمندترین وجوه بیان ضمنی رویه‌ها آن است که می‌توان از فضای دوبعدی به فضای سه‌بعدی به‌راحتی منتقل شد.

۴-۵- ابزار هندسی

در بیان ضمنی مرز مشترک ابزار هندسی قدرتمندی وجود دارد که قابل استفاده می‌باشد. به‌عنوان مثال هنگامی که $\phi(x) = 0$ به‌عنوان آیزوکانتور تشکیل دهنده‌ی مرز مشترک تعریف می‌شود می‌توان به‌سادگی دریافت که نقطه‌ی x_0 در داخل مرز یا خارج یا بر روی آن قرار دارد. تنها لازم است که علامت ϕ را مورد بررسی قرار داد.

$$\begin{cases} \phi(x) > 0 \rightarrow x \in \Omega^+ \\ \phi(x) = 0 \rightarrow x \in \partial\Omega \\ \phi(x) < 0 \rightarrow x \in \Omega^- \end{cases} \quad (۲-۴)$$

حال اگر مرز به صورت صریح بیان شود فهم این که نقطه‌ی x_0 در داخل یا خارج از مرز می‌باشد کار دشواری خواهد بود به این منظور می‌بایست از نقطه‌ی x_0 خطی را به طول نامحدود امتداد داد آن گاه تعداد نقاط قطع منحنی را شمارش نمود. اگر این تعداد زوج باشد نقطه خارج از مرز است و اگر این تعداد فرد باشد نقطه‌ی مورد نظر در داخل مرز قرار دارد. پر واضح است که برای ارزیابی نقطه‌ی x_0 ، بیان ضمنی آن راحت تر است.

به دست آوردن شکل هندسی سازه با استفاده از توابع ضمنی نسبت به توابع پارامتری ساده تر می‌باشد. این امر دارای اهمیت ویژه‌ای است. برای مثال در طراحی به کمک رایانه (CAD) اگر ϕ_1 و ϕ_2 دو تابع ضمنی متفاوت باشند آن گاه $\phi(x) = \min(\phi_1(x), \phi_2(x))$ تابعی ضمنی است که اجتماع نواحی داخلی ϕ_1 و ϕ_2 را نمایش می‌دهد. به طور مشابه $\phi(x) = \max(\phi_1(x), \phi_2(x))$ تابعی ضمنی است که اشتراک نواحی داخلی ϕ_1 و ϕ_2 را نمایش می‌دهد. مکمل $\phi(x)$ توسط $\phi(x) = -\phi_1(x)$ قابل تعریف است. همچنین نواحی را که از تفاضل نواحی داخلی ϕ_2 و نواحی داخلی ϕ_1 به دست می‌آید به صورت $\phi(x) = \max(\phi_1(x), -\phi_2(x))$ نمایش می‌دهیم.

گرادیان^۱ تابع ضمنی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (3-4)$$

مقدار $\nabla \phi$ در نقطه‌ی x_0 برداری است که در جهت بردار نرمال^۲ (به سمت خارج در جهت افزایش ϕ) مرز مشترک می‌باشد؛ بنابراین بردار نرمال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

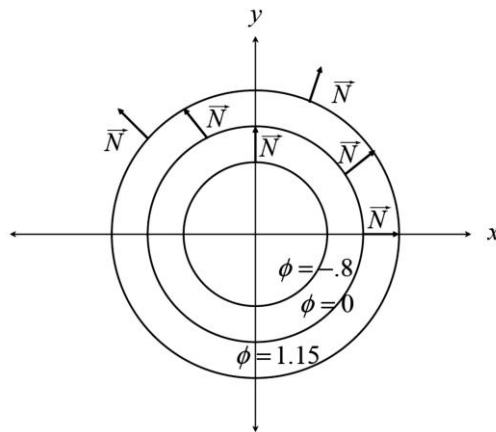
^۱ Gradient

^۲ Normal vector

$$N = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (4-4)$$

در بیان ضمنی مرز مشترک، مرز مشترک در دامنه‌ای با یک بعد بیشتر معرفی می‌گردد. از این‌رو داشتن اطلاعات در فضای با بعد بیشتر مفید می‌باشد. به‌عنوان مثال به‌جای تعریف بردار واحد نرمال N با رابطه‌ی (۴-۴) تنها برای نقاط روی مرز مشترک، می‌توان N را برای تمام نقاط روی دامنه با استفاده از رابطه‌ی (۴-۴) تعریف کرد.

در شکل (۳-۴) تعدادی از آیزوکانتورهای دویعدی $\phi(x) = x^2 + y^2 - 1$ همراه با چند بردار نرمال نشان داده شده است.



شکل (۳-۴) آیزوکانتورهای تابع $\phi(x) = x^2 + y^2 - 1$

اگر فرض کنیم $\phi(x) = x^2 - 1$ ؛ بردار نرمال آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = \frac{x}{|x|} \quad (5-4)$$

بنابراین جهت بردار N به‌ازای $x > 0$ به سمت راست و برای $x < 0$ به سمت چپ می‌باشد. بردار نرمال برای نقطه‌ی $x = 0$ تعریف نشده است اما می‌توان با استفاده از تکنیک‌هایی از مشکلات پیش‌آمده

در آن جلوگیری کرد. در مثال‌های دوبعدی و سه‌بعدی قبل نیز در نقطه‌ی $x = 0$ تمام مشتقات جزئی صفر می‌شود و رفتار مشابهی را در این نقطه خواهیم داشت. لازم به یادآوری است که اضافه کردن مقدار کوچک دلخواه $\varepsilon > 0$ به مخرج کسر رابطه‌ی (۴-۴) ایده‌ی خوبی نمی‌باشد چون $|N| \neq 1$ خواهد شد.

در رابطه‌ی (۳-۴) برای به‌دست آوردن مقدار مشتق می‌توان آن را تقریب زد. برای این کار روش‌های بسیاری موجود است. به‌عنوان مثال می‌توان از تفاضل پیش‌رونده‌ی^۱ مرتبه اول استفاده کرد؛ که به‌اختصار می‌توان آن را به‌صورت $D^+\phi$ معرفی کرد.

$$D_x^+\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (۶-۴)$$

$D^-\phi$ را می‌توان به‌اختصار برای تفاضل پس‌رونده‌ی^۲ مرتبه اول معرفی کرد:

$$D_x^-\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (۷-۴)$$

و تفاضل مرکزی^۳ از مرتبه‌ی دو را با $D^0\phi$ و با رابطه‌ی زیر معرفی می‌کنیم:

$$D_x^0\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (۸-۴)$$

به‌طور مشابه روابط فوق برای به‌دست آوردن مشتقات در جهات y و z با اندیس‌های j و k

ظاهر می‌شوند. روابط فوق بسیار ساده ولی کامل و کافی می‌باشند.

^۱ Forward Difference

^۲ Backward Difference

^۳ Central Difference

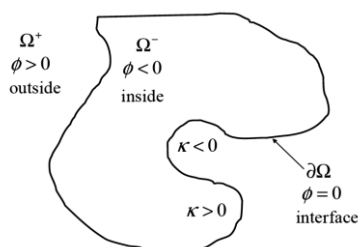
زمانی که از تفاضل محدود در رابطه‌ی فوق استفاده می‌شود مخرج رابطه‌ی (۴-۴) به سمت صفر میل می‌کند. اگر ϕ خوش‌رفتار باشد آنگاه مقدار نرمال مرز مشترک را می‌توان از تقریب زدن بین مقدار N بر روی گره‌های معلوم شبکه‌ی کارتیزین به دست آورد. به این معنا که با داشتن مقدار N در همسایگی نقطه‌ی x_0 بر روی شبکه‌ی دکارتی می‌توان مقدار N در x_0 را با درون‌یابی به دست آورد.

روش درون‌یابی برای به دست آوردن مقادیر N نیازمند آن است که تابع ϕ به صورت نرم و خوش‌رفتار باشد به این معنا که می‌بایست در انتخاب ϕ دقت مناسبی را به خرج داد. به عنوان مثال انتخاب ϕ با نوسانات زیاد یا گرادیان با شیب بیش از حد لزوم غیرمنطقی می‌باشد. یکی از بهترین انتخاب‌های ϕ استفاده از تابع فاصله‌ی علامت‌دار^۱ است؛ که در قسمت بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

انحنای^۲ مرز مشترک به عنوان دیورژانس^۳ بردار $N = (n_1, n_2, n_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \nabla \cdot N = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} \quad (۹-۴)$$

از این رو برای نواحی محدب $\kappa > 0$ و برای نواحی مقعر $\kappa < 0$ می‌باشد. شکل (۴-۴) این موضوع را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۴) نواحی محدب و مقعر

با جایگزینی رابطه‌ی (۴-۴) در رابطه‌ی (۹-۴) خواهیم داشت:

^۱ Signed distance function

^۲ Curvature

^۳ Divergence

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (10-4)$$

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی فوق نیاز به یافتن مشتق جزئی^۱ مرتبه‌ی دو می‌باشد. به‌عنوان مثال

ϕ_{xx} را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (11-4)$$

در مثال یک‌بعدی $\phi(x) = x^2 - 1$ مقدار κ برابر صفر می‌باشد مگر در نقطه‌ی مبدأ که تعریف

نشده است؛ بنابراین تابع دارای نقطه‌ی تکین^۲ می‌باشد که رفع شدنی است. ولی می‌توان $\kappa = 0$ را برای

تمامی نقاط تعریف کرد. در مثال‌های دوبعدی و سه‌بعدی قبل، به ترتیب $\kappa = \frac{1}{|x|}$ و $\kappa = \frac{2}{|x|}$ در تمامی

نقاط به‌جز مبدأ می‌باشد در این‌جا نقاط تکین رفع شدنی نیستند. مقدار κ وقتی در نزدیکی مبدأ حرکت می‌کنیم به سمت بینهایت میل می‌کند.

مقدار انحنا بر روی مرز مشترک از درجه‌ی یک در فضای دوبعدی برابر یک می‌باشد. این مقدار

در مرز مشترک از درجه‌ی دوم در فضای سه‌بعدی برابر دو می‌باشد. علت اختلاف آن است که دایره در

فضای دوبعدی به استوانه در فضای سه‌بعدی تبدیل می‌شود.

^۱ partial derivative

^۲ Singular point

۴-۶- ابزار محاسبات

تابع یک‌بعدی هویساید^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\phi) = \begin{cases} 1; & \phi > 0 \\ 0; & \phi \leq 0 \end{cases} \quad (۱۲-۴)$$

این تابع به ما کمک می‌کند تا انتگرال‌گیری را فقط برای فضای خارجی مرز مشترک Ω^+ محاسبه کنیم.

با تعریف جهت برای مشتق تابع هویساید در جهت نرمال، تابع دلتای دیراک^۲ حاصل می‌شود:

$$\hat{\delta}(\phi(x)) = \nabla H(\phi(x)) \cdot N \quad (۱۳-۴)$$

توجه به این نکته لازم است که این توزیع تنها در مرز مشترک $\partial\Omega$ جایی که $\phi(x) = 0$ است؛ غیر صفر می‌شود. با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری زنجیره‌ای برای به دست آوردن گرادیان H خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}(\phi(x)) = H'(\phi(x)) \nabla \phi(x) \cdot \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)|} = H'(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| \quad (۱۴-۴)$$

در فضای یک‌بعدی، تابع دلتا به صورت مشتقی از تابع یک‌بعدی هویساید تعریف می‌شود:

$$\hat{\delta}(\phi) = H'(\phi) \quad (۱۵-۴)$$

^۱ Heaviside

^۲ Dirac delta

تابع دلتا در تمامی نقاط برابر صفر است مگر بر روی مرز $\phi(x) = 0$ ؛ بنابراین می‌توان روابط (۱۳-۴) و (۱۴-۴) را با استفاده از تابع دلتای یک‌بعدی نوشت:

$$\hat{\delta}(x) = \delta(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| \quad (۱۶-۴)$$

با استفاده از تابع دلتا می‌توان انتگرال سطح هر تابع را بر روی مرز $\partial\Omega$ محاسبه کرد.

از آن جایی که $\delta(\phi(x))$ در تمام نقاط به‌جز مرز مشترک صفر است؛ در حل عددی تقریب مناسب برای انتگرال به‌دست نمی‌آید لذا تابع هویساید را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon < \phi < \varepsilon \\ 1 & \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (۱۷-۴)$$

یک مقدار مناسب $\varepsilon = \min(\Delta x, \Delta y)$ است؛ بنابراین تابع دلتا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon < \phi < \varepsilon \\ 0 & \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (۱۸-۴)$$

دلتای اصلاح‌شده از رابطه‌ی فوق این اجازه را به ما می‌دهد که انتگرال سطح را با استفاده از روش‌های عددی معمول به‌دست آوریم.

۴-۷- تابع فاصله‌ی علامت‌دار

تابع فاصله‌ی علامت‌دار تابعی ضمنی از ϕ است به‌طوری‌که:

$$|\phi(x)| = d(x) \quad ; \quad x \in \Omega \quad (19-4)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \phi(x) = +d(x) \rightarrow x \in \Omega^+ \\ \phi(x) = 0 \rightarrow x \in \partial\Omega \\ \phi(x) = -d(x) \rightarrow x \in \Omega^- \end{cases} \quad (20-4)$$

تابع فاصله‌ی علامت‌دار علاوه بر خواص توابع ضمنی ذکر شده؛ خواص جدیدی نیز دارد برای

مثال:

$$|\nabla \phi| = 1 \quad (21-4)$$

تابع فاصله‌ی علامت‌دار دارای مینیمم محلی در $d = 0$ می‌باشد که باعث مشکل در تخمین

مقادیر مشتق در نزدیکی مرز می‌شود.

برای نقطه‌ی معلوم x و استفاده از این تعریف که $\phi(x)$ یک تابع فاصله‌ی علامت‌دار برای

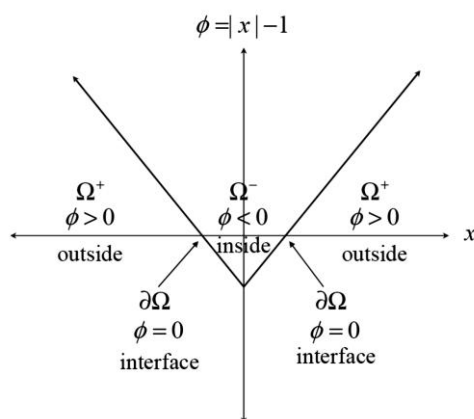
نزدیک‌ترین نقطه به مرز مشترک می‌باشد می‌توان نوشت:

$$x_c = x - \phi(x)N \quad (22-4)$$

در مثال ابتدای فصل از رابطه‌ی $\phi(x) = x^2 - 1$ برای بیان ضمنی مرز $\{-1, 1\}$ استفاده شد.

برای بیان تابع ضمنی فاصله‌ی علامت‌دار این نقاط داریم $\phi(x) = |x| - 1$ همان‌طور که در شکل (۴-۵)

نشان داده شده است.



شکل (۴-۵) تابع فاصله‌ی علامت‌دار

تابع فاصله‌ی علامت‌دار $\phi(x) = |x| - 1$ همان مرز $\partial\Omega$ و فضای داخلی Ω^- و فضای خارجی Ω^+ را تولید می‌کند.

$$\phi(x) = |x| - 1 \rightarrow |\nabla\phi| = 1 \quad ; \quad x \in \Omega \quad (۴-۲۳)$$

در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق تابع فاصله‌ی علامت‌دار تعریف نشده است. در ابتدا این امر مشکل‌ساز به نظر می‌رسد. به‌عنوان مثال برای تعیین نرمال در نقطه‌ی $x = 0$ مقدار آن به سمت بینهایت میل می‌کند اما مقدار در این نقطه مقدار محدودی بین $[-1, 1]$ در شبکه‌ی کارترین معمولی خواهد بود.

همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد می‌خواهیم تابع ضمنی را تا آن‌جا که امکان دارد خوش‌رفتار، نرم و هموار انتخاب کنیم. به‌این‌منظور با توجه به ویژگی‌های تابع فاصله، با استفاده از این تابع به نتایج مطلوبی می‌رسیم. مخصوصاً برای نقاط تکین که به‌صورت عددی حل شده باشند یک انتخاب مناسب برای مرز مشترک می‌باشد.

۴-۸- انتقال^۱

فرض کنید سرعت $V(x)$ برای تمام نقاط بر روی مرز $\phi(\bar{x}) = 0$ مشخص باشد. حال می‌خواهیم تمام نقاط رویه را با سرعت $v(\bar{x}) = (u, v, w)$ انتقال دهیم. راحت‌ترین راه برای بررسی این مسئله حل معادله‌ی دیفرانسیل زیر برای هر نقطه‌ی x روی مرز مشترک است.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \vec{v}(\bar{x}) \quad (۴-۲۴)$$

رابطه‌ی فوق به رابطه‌ی لاگرانژین رشد مرز^۲ معروف می‌باشد. از آن جایی که بینهایت نقطه بر روی مرز مشترک داریم (به جز در فضای یک‌بعدی) می‌بایست برای حرکت آن از گسسته‌سازی به صورت اجزای محدود استفاده کرد. در صورتی که هم‌بندی نقاط از بین نرود این کار به آسانی انجام می‌پذیرد. برای اجتناب از ناپایداری، تغییرات المان‌های رویه‌ها و عملیات بر روی توپولوژی مرزها، از توابع ضمنی معرف مرز برای رشد مرز نیز استفاده می‌کنیم. به این منظور از ساده‌ترین رابطه‌ی انتقال استفاده خواهیم کرد:

$$\phi_t + \vec{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (۴-۲۵)$$

به طوری که اندیس t بیان‌گر مشتق جزئی نسبت به متغیر زمان می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$\vec{v} \cdot \nabla \phi = u \phi_x + v \phi_y + w \phi_z \quad (۴-۲۶)$$

این رابطه، از جمله معادلات دیفرانسیل جزئی است که حرکت مرز را مشخص می‌کند. این معادله به رابطه‌ی اولری رشد مرز^۳ نیز معروف است. رابطه‌ی (۴-۲۵) به معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح

^۱ Transition

^۲ Lagrangian equation of boundary evolution

^۳ Eulerian equation of boundary evolution

تراز نیز معروف است که توسط اثر و ستیان برای پیدا کردن مقدار عددی مرز در حال رشد معرفی گردیده است [۲۱].

این رابطه در معادلات گازها و احتراق و پیدا کردن مرزهای شعله‌های آتش توسط اشتاین نیز بیان گردیده است [۲۲]. برای اثبات روابط فوق و در نظر گرفتن سطح تراز k از تابع ضمنی ϕ داریم:

$$\phi(x, t) = k \quad (27-4)$$

حال با مشتق‌گیری و استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای^۱ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(x, t)) = \frac{\partial}{\partial t}(k) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \nabla \phi(x, t) = 0 \quad (28-4)$$

با حل معادله‌ی فوق که به معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز یا معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی معروف است؛ نقاط جدید به دست می‌آیند که توپولوژی و شکل تغییر یافته را مشخص می‌کنند.

^۱ Chain rule derivative

فصل پنجم

بهینه‌سازی توپولوژی

سازه‌های پیوسته به روش

مجموعه‌ی سطوح تراز

۵-۱- مقدمه

هدف این فصل ارائه‌ی روشی برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها به کمک روش تغییرات مرزها^۱ است. برای این منظور روشی کارا و قدرتمند به نام روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی سازه‌های ارتجاعی خطی که تابع هدف و قیود مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد نظر را اقناع می‌کند معرفی می‌شود.

در این روش مرزهای سازه‌ای که بهینه‌سازی می‌شود به صورت مدلی از مرزهای دینامیکی^۲ است که به وسیله‌ی یک تابع ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شود. واضح است که در روند بهینه‌سازی، شکل و توپولوژی آن دست‌خوش تغییرات زیادی خواهد شد ولی تابع مجموعه‌ی سطوح تراز توپولوژی تغییر یافته را به راحتی در اختیار ما قرار می‌دهد.

روش مجموعه‌ی سطوح تراز زیرمجموعه‌ای از روش حرکت ضمنی مرزها (IMB)^۳ محسوب می‌شود و این امکان را فراهم می‌کند که تغییرات مرز مشترک اعم از شکل حفرات، جدا شدن و به هم پیوستن مرزها را نشان دهد. در این فصل روش حل عددی در بهینه‌سازی سازه‌ها که از حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل همیلتون-ژاکوبی به دست می‌آید بسط داده می‌شود.

^۱ Evolution of border method

^۲ Dynamic boundary

^۳ Implicit motion boundaries

۵-۲- تاریخچه

یکی از مهم‌ترین موضوعات تحقیق در زمینه‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها، بهینه‌سازی توپولوژی است. اخیراً توجه زیادی به این موضوع به‌خاطر کاربردی که در حوزه‌های صنعت دارد؛ شده است. از کارهای اولیه‌ای که توسط بندسو و کیکوچی^۱ [۴] انجام شده است، روش‌های زیادی در دهه‌های اخیر برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک توسعه پیدا کرده است. برای اطلاعات کامل‌تر به مرجع [۲۳] مراجعه شود.

همان‌طور که در فصل دوم اشاره شد، بهینه‌سازی توپولوژیکی سازه‌های پیوسته به علت عدم دسترسی آسان به مرز و تغییرات آن از روش و مفاهیم توزیع مصالح بیشتر استفاده شده است. از رایج‌ترین روش‌ها می‌توان به روش همگن‌سازی^۲ [۴] و چگالی متغیر (*SIMP*) [۵، ۲۴] اشاره کرد. در روش‌های فوق، توپولوژی بهینه تقریباً شامل المان‌هایی است که دارای چگالی ۰ یا ۱ می‌باشد. لازم به یادآوری می‌باشد که الگوریتم‌های عددی برای این دو روش بر پایه‌ی المان هستند. چهارچوب کلی محاسبات روش‌های المان‌محور، گسسته‌سازی فضای طرح اولیه به‌صورت مستطیل‌های یکنواخت اجزای محدود می‌باشد و متغیرهای طراحی به‌صورت ثابت برای هر جزء محدود در نظر گرفته می‌شود. اگرچه محاسبات بر پایه‌ی المان تا حدودی کارآمد و موفقیت‌آمیز در حل مسائل بهینه‌سازی می‌باشد اما هنوز پارامترهای نامطلوبی دارد. یکی از معایب بهینه‌سازی با استفاده از روش‌های المان‌محور در بیان اطلاعات مربوط به هندسه‌ی سازه می‌باشد؛ مثلاً موقعیت و شکل مرزها، بردار نرمال یا انحنای مرزها مشخص نمی‌باشد.

^۱ Bendsoe & Kikuchi

^۲ Homogenization

به‌طور کل در این روش‌ها مرز بین قسمت پر و قسمت خالی دقیقاً مشخص نمی‌باشد و در بهینه‌سازی با این روش‌ها، مرزها به‌صورت زیگزاگ ظاهر می‌شوند.

بنابراین برای دستیابی به توپولوژی که به واقعیت در عمل نزدیک باشد نیازمند عملیات دیگری از جمله بهینه‌سازی شکل برای کاهش تمرکز تنش می‌باشیم. همچنین می‌بایست مرزها را به‌صورت نرم‌تری درآورد که این کار بعضاً آسان نمی‌باشد و مستلزم هزینه زیادی می‌باشد.

برای فائق آمدن بر مشکل‌های اشاره شده در فوق، اخیراً الگوریتم‌های بهینه‌سازی توپولوژی وابسته به هندسه‌ی بیشتری پیشنهاد شده است. بارزترین مشخصه‌ی این روش‌ها، معرفی تابع شکل و توپولوژی سازه به‌صورت ضمنی می‌باشد. از آنجایی که در بیشتر این روش‌ها از سطوح تراز صفر تابع ضمنی توپولوژی برای تعریف مرز سازه استفاده می‌شود، به این روش مجموعه‌ی سطوح تراز نیز می‌گویند. ایده اصلی در بیان تابع توپولوژی، بر پایه‌ی روش حرکت تکاملی این تابع بر اساس حساسیت تابع هدف و قیود آن می‌باشد. بهینه‌سازی سازه‌ها به روش مجموعه‌ی سطوح تراز برای اولین بار توسط ستین و ویگمن^۱ [۲۵] آغاز شد. در کارهای اولیه، آن‌ها سعی کردند طرحی را با کمترین حجم پیدا کنند که به مقدار انرژی مشخصی نیز در همان زمان برسد. آن‌ها برای به‌دست آوردن مرز مشترک از معادله‌ی همیلتون ژاکوبی با تابع سرعت ساخته‌شده‌ای استفاده کردند. در مرجع [۲۶] اشر و سانتوزا^۲، روش مجموعه سطوح تراز را برای مسائلی که شامل سیستم‌های لرزشی مانند فرکانس تشدید شده یا گپ طیفی برای بهینه‌سازی با قید حجم است استفاده کردند.

در کارهای الایر^۳ و همکارانش [۲۷]، یک چهارچوب محاسباتی برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با روش مجموعه سطوح تراز معرفی شده است که از گرادیان شکل^۴ برای رشد تابع مجموعه‌ی

^۱ Sethian & Wiegmann

^۲ Osher & Santoz

^۳ Allarie

^۴ Shape Gradient

سطوح تراز استفاده شده است و الگوریتم عددی برای حل تابع مجموعه‌ی سطوح تراز ارائه شده است. کارهای ونگ^۱ و همکارانش [۲۸ و ۲۹] روش‌های عددی را توسعه داده‌اند. در مقالات آن‌ها مثال‌های عددی زیادی حل گردیده است تا عملکرد این روش را ثابت کند و اهمیت ادامه تحقیقات در این روش را نشان می‌دهد. همچنین آن‌ها این روش را برای مواد مرکب^۲ نیز تعمیم دادند [۳۰]. تابع تعریف توپولوژی^۳ [TDF] توسط رویتر و کیولن^۴ [۳۱ و ۳۲] برای حل مسائل طرح بهینه‌ی توپولوژی استفاده گردید و روش معیار بهینگی برای پیدا کردن مقادیر بهینه به کار برده شد. اخیراً بلیچکو^۵ و همکارانش [۳۳] روش دیگری را در بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته ارائه کرده‌اند. در کار آن‌ها مقادیر نقاط گرهی تابع ضمنی تعریف‌کننده‌ی توپولوژی و شکل سازه به عنوان متغیر طراحی به صورت مستقیم استفاده گردیده است و روش معیار بهینگی برای به دست آوردن مقادیر بهینه به کار گرفته شده است. مثال‌های عددی نیز ارائه گردیده که کارآمدی روش را اثبات می‌کند.

در مقایسه با روش‌های سنتی المان‌محور بهینه‌سازی توپولوژی، روش گره‌محور در بهینه‌سازی دارای مزایای روشی است مثلاً تعریف هندسه‌ی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد. در هر مرحله از بهینه‌سازی تمام اطلاعات هندسه‌ی سازه، در تابع ضمنی بیان‌کننده توپولوژی سازه موجود است. از آنجایی که شکل و پیکره یا شرایط مرزی در هر مرحله قابل دسترسی می‌باشد مزیت بسیار جالبی است. همچنین تغییرات توپولوژی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد و پس از بهینه‌سازی نیاز به روش‌های پردازش تصویر و بهینه‌سازی شکل نمی‌باشد.

اگرچه روش نقطه‌محور با استفاده از توابع TDF برای حل مسائل بالقوه مناسب است ولی همچنان محدودیت‌هایی دارد. اولین محدودیت به حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی برای روش مجموعه‌ی

^۱ Wang

^۲ Composite

^۳ Topology Description Function

^۴ Ruiter & keulen

^۵ Belytschko

سطوح تراز برمی‌گردد. محدودیت از این قرار است که برای پایداری عمومی گام‌های زمانی، می‌بایست شرایط CFL^1 در نظر گرفته شود. این نکته بدان معناست که در هر مرحله، مجموعه‌ی سطوح تراز می‌توانند به اندازه یک سلول شبکه حرکت کنند. این محدودیت باعث کاهش سرعت در همگرایی جواب می‌گردد.

لوو و همکارانش [۳۴] یک روش برای حل معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز ارائه کردند. در کار آن‌ها از روش تقسیم عملگر تجمعی نیمه‌ضمنی^۲ برای حل معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز استفاده شده است. در روش آن‌ها، تغییرات توپولوژیکی به‌طور خودکار در طول روند بهینه‌سازی، بدون نیاز به روش‌های مصنوعی^۳ انجام شده است. اخیراً توکلی و همکارانش [۳۵] روش ایزوژئومتریکی را برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها مورد استفاده قرار داده‌اند. آن‌ها به‌منظور بهینه‌سازی، از روش مجانب‌های پویا^۴ (MMA) استفاده کرده‌اند. همچنین در نتیجه‌ی کار آن‌ها مشخص شد که با افزایش تعداد وصله‌ها توپولوژی به‌دست آمده بدتر می‌شود که به دلیل افزایش ناحیه‌ی اتصال وصله‌ها می‌باشد. همچنین شجاعی و همکارانش [۳۶ و ۳۷] روش مجموعه‌ی سطوح تراز را با استفاده از روش ایزوژئومتریکی^۵ تعمیم دادند. در کار آن‌ها برای تعریف رویه‌ی سطح تراز از توابع پایه‌ی شعاعی^۶ استفاده شده و برای تعیین ضریب لاگرانژ قید حجم از روش عددی افزایشی به همراه ضریب جریمه^۷ استفاده کرده‌اند. همچنین ونگ و همکاران بهینه‌سازی توپولوژی را برای مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید وزن و یک قید تنش نیز تعمیمی دادند. در کار آن‌ها قید تنش موردنیاز در هر مرحله، بیشترین تنش موجود در بین تمام نقاط انتگرال‌گیری گوسی^۸ در میان کل دامنه می‌باشد [۳۹]. همچنین آلبرتو فانسلو و

^۱ Courant–Friedrichs–Lewy

^۲ Semi-Implicit additive operator

^۳ Artificial Schemes

^۴ Method of Moving Asymptotes

^۵ Isogeometric Analysis

^۶ RBF: Radial Basis Function

^۷ Augmented Lagrangian With Penalization Parameter

^۸ Gaussian integration points

همکاران وزن مینیمم را با استفاده از قیود تنش محلی با استفاده از روش مجموعه‌ی سطوح تراز به دست آوردند [۴۰].

۵-۳- کاربرد روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد با تعریف ϕ از بعد n و در نتیجه به وجود آمدن مرز مشترک در یک سطح تراز معین در بعد $(n-1)$ می‌توان مرزها را تعیین نمود. می‌توان با تغییر ϕ توپولوژی و شکل مرزهای مشترک را تغییر داد. این قابلیت اجازه می‌دهد که مدل مرزها و توپولوژی سازه در روند بهینه‌سازی تغییر یابد؛ بنابراین مرزها می‌توانند به قسمت‌های جدیدی تقسیم شده و مرزهای جدیدی را تولید کنند و یا برعکس، تعدادی از مرزهای جدا از هم می‌توانند به همدیگر پیوسته و مرز واحدی را ایجاد کنند. به‌خاطر پارامتری نبودن بیان مرز رویه‌ها، مشکلات پارامتری کردن و به دست آوردن سطوح مانند دوباره پارامتری کردن سطوح تغییر یافته برای به دست آوردن مرزها را نخواهیم داشت لذا از حجم محاسبات و پیچیدگی حل مسئله کاسته می‌شود. از این رو روش مجموعه‌ی سطوح تراز که در سال‌های اخیر در بهینه‌سازی سازه‌ها استفاده شده است مورد توجه و بررسی در این پایان‌نامه قرار گرفته است.

در حالت کلی رویه‌ها در مدل مجموعه‌ی سطوح تراز به صورت تابع ضمنی اسکالر با بعد بالاتر در یک سطح تراز معین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi: R^3 &\rightarrow R \\ \phi &= \{x : \phi(x) = k\} \end{aligned} \quad (۱-۵)$$

که k عددی دلخواه و بیان‌کننده‌ی یک سطح تراز منحنی می‌باشد. x نقطه‌ای در فضا بر روی سطح تراز k می‌باشد. به بیان دیگر x مجموعه‌ای از نقاط در فضای R^3 است که سطح تراز k تابع ϕ می‌باشد.

روند بهینه‌سازی می‌تواند با اجازه دادن به تغییرات دینامیکی در زمان تابع مجموعه‌ی سطوح تراز بیان گردد. شکل دینامیکی تابع مجموعه‌ی سطوح تراز به صورت زیر می‌باشد:

$$S(t) = \{x(t) : \phi(x(t), t) = k\} \quad (2-5)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از دو طرف رابطه‌ی فوق و اعمال قانون مشتق‌گیری زنجیره‌ای، رابطه‌ی همیلتون-ژاکوبی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \nabla \phi(x, t) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3-5)$$

این رابطه مقادیر تابع ϕ وابسته به زمان مسئله را تعریف می‌کند.

در مدل دینامیکی مجموعه‌ی سطوح تراز، حرکت نقاط بر روی سطوح مدل که از بهینه‌سازی تابع هدف به دست آمده در نظر گرفته می‌شود لذا این ترم می‌تواند بیان‌گر موقعیت x و هندسه‌ی سطح در آن نقطه باشد؛ بنابراین مرز بهینه‌سازی از حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر بر روی ϕ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = -\nabla \phi(x) \frac{dx}{dt} = -\nabla \phi(x) V(\phi, x) \quad (4-5)$$

که در این رابطه $V(\phi, x)$ بیان‌گر بردار سرعت بر روی سطح مدل مجموعه‌ی سطوح تراز می‌باشد که بستگی به تابع هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی دارد.

این نوع فرمول‌بندی در مدل مجموعه‌ی سطوح تراز دارای دو مزیت است. اولاً مدل مجموعه‌ی سطوح تراز دارای پیکره‌بندی انعطاف‌پذیر می‌باشد. تابع اسکالر سه‌بعدی ϕ تعریف می‌گردد تا به راحتی توپولوژی سطوح را در اختیار داشته باشیم. مجموعه‌ی سطوح تراز به سادگی می‌تواند شکل پیچیده‌ی مرز حفرات، جدا شدن مرزها و یا پیوستن چندین مرز را بیان کند؛ بنابراین نیاز به به دست آوردن مجدد

پارامترهای مدل تغییر یافته که در بیان صریح به آن نیازمندیم نمی‌باشد [۳۸]. ثانیاً این مدل قابلیت استفاده از هر نوع المان و تعداد درجات آزادی را دارد. همچنین روش‌های عددی مختلفی برای به‌دست آوردن مقادیر ϕ قابل استفاده می‌باشد. در ادامه جزئیات روش و تکنیک‌های حل عددی آن برای دستیابی به توپولوژی بهینه‌ی سازه‌های پیوسته مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۴-۵- فرمول‌بندی مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در مسائل بهینه‌سازی

در این بخش فرمول‌بندی روش مجموعه‌ی سطوح تراز در به‌دست آوردن طرح بهینه را در سازه‌های ارتجاعی خطی بیان می‌کنیم. اطلاعاتی در مورد پیکره، شکل و ابعاد سازه برای به‌دست آوردن طرح بهینه از طریق مدل مجموعه‌ی سطوح تراز همواره در اختیار داریم. حال می‌بایست صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی را تشکیل داد. در حالت کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & J(u) = \int_D F(u) d\Omega \\ \text{s.t.} \quad & : \int_D E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega = \int_D p v d\Omega + \int_{\partial D_t} \tau v dS \\ & u|_{\partial D_u} = u_0 \quad \forall v \in U \\ & \int_D d\Omega \leq V_{\max} \end{aligned} \quad (5-5)$$

در این جا فضای طراحی با D و مرز آن با ∂D معرفی شده است. معادله‌ی تعادل ارتجاعی خطی به‌صورت تغییراتی نوشته شده که در آن ll تغییر مکان‌های قابل قبول سینماتیکی میدان جابجایی U می‌باشد. E_{ijkl} تانسور الاستیسیته مواد، ε_{ij} تانسور کرنش‌ها، p نیروهای حجمی^۱، τ نیروهای

^۱ Body force

سطحی^۱ وارد شده بر روی سطح ∂D_t بر روی مرز ∂D و u_0 تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی معین روی سطح ∂D_u بر روی مرز ∂D تعریف شده؛ می‌باشند.

آخرین نامساوی محدودیت مقدار مصالح بر روی دامنه می‌باشد که به مقدار $V_{\max}$ محدود گردیده است. به عبارت دیگر نامساوی ذکر شده قید حجم مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد.

مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق به دنبال پیدا کردن مرز بهینه ∂D در فضای D می‌باشد؛ بنابراین تابع هدف $J(u)$ می‌بایست برای فیزیک و هندسه‌ی خاصی که توسط تابع F تعریف شده است مینیمم گردد.

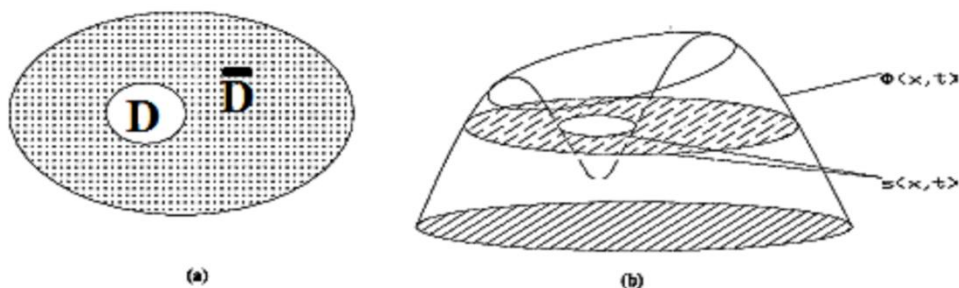
برای استفاده از مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در رابطه‌ی فوق از تابع ضمنی $\phi(x)$ از درجه‌ی بالاتر برای تعریف مرز در فضای $\bar{D}$ که $D \subset \bar{D}$ ؛ استفاده می‌کنیم.

از سطح تراز $k=0$ برای بیان مرز مشترک استفاده می‌کنیم؛ بنابراین برای تعریف فضای داخل و خارج توسط تابع ϕ داریم:

$$\begin{aligned} \phi(x) &> 0 \quad \forall x \in D \setminus \partial D \\ \phi(x) &< 0 \quad \forall x \in \bar{D} \setminus \partial D \end{aligned} \quad (۶-۵)$$

که شکل دامنه و مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در شکل (۵-۱) مشخص گردیده است. در شکل سمت چپ دامنه‌ی طرح D در دامنه‌ی بزرگ‌تر $\bar{D}$ نمایش داده شده است. در شکل سمت راست مدل مجموعه‌ی سطوح تراز S که تابع $\phi(x)$ را معرفی می‌کند نشان داده شده است.

^۱ Traction force



شکل (۱-۵) دامنه‌ی طرح و مدل مجموعه‌ی سطوح تراز

بنابراین مدل مجموعه‌ی سطوح تراز برای بیان مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق به‌صورت زیر بیان

می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & J(u) = \int_{\bar{D}} F(u) H(\phi) d\Omega \\
 s. t. \quad & : \int_{\bar{D}} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) H(\phi) d\Omega = \\
 & \int_{\bar{D}} p v H(\phi) d\Omega + \int_{\bar{D}} \tau v \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega \quad (7-5) \\
 & u|_{\partial D_u} = u_0 \quad \forall v \in U \\
 & \int_{\bar{D}} H(\phi) d\Omega \leq V_{\max}
 \end{aligned}$$

در فرمول‌بندی فوق $\delta(\phi)$ و $H(\phi)$ به ترتیب تابع دیراک و تابع هویساید می‌باشند.

۵-۵- الگوریتم بهینه‌سازی

در این قسمت با توجه به فرمول‌بندی فوق، روند بهینه‌سازی تشریح خواهد شد. فرایند

بهینه‌سازی بر روی تابع اسکالر ϕ که بر روی دامنه‌ی ثابت $\bar{D}$ تعریف شده، اعمال می‌شود. این روند را

می‌توان از دیدگاه یک مسئله‌ی ریاضی نگاه کرد.

کلید اصلی در روند بهینه‌سازی، حرکت مرز دامنه‌ی طرح که توسط مدل مجموعه‌ی سطوح تراز بیان گردیده، بر اساس تغییرات حساسیت با توجه به تابع هدف، می‌باشد. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که تابع هدف دیگر نتواند رشد داشته باشد. این روش بهینه‌سازی بر پایه‌ی تکامل منحنی‌ها و رویه‌های تشکیل شده در روش مجموعه‌ی سطوح تراز می‌باشد [۳۸] که نحوه‌ی رشد رویه‌های مجموعه‌ی سطوح تراز در رابطه‌ی (۴-۵) بیان شده است. نکته‌ی اصلی در عملی بودن روش مجموعه‌ی سطوح تراز به دست آوردن مقدار تابع سرعت در رابطه‌ی (۴-۵) است. آن‌گاه شکل مرزهای بهینه با توجه به تابع هدف و قیود مسئله به دست خواهد آمد. همان‌طور که در رابطه‌ی (۴-۵) نشان داده شد، تابع سرعت می‌بایست به صورت شکل مرزها و تغییرات حساسیت بیان شود. برجستگی این روش در تعیین تابع سرعت به عنوان رابط میان روند بهینه‌سازی و روش مجموعه‌ی سطوح تراز می‌باشد.

در این قسمت الگوریتم بهینه‌سازی را به صورت گام‌به‌گام اشاره می‌کنیم و در قسمت بعد توضیحات کامل‌تری ارائه می‌گردد.

گام اول: مقداردهی اولیه‌ی^۱ تابع مجموعه‌ی سطوح تراز $\phi(x, 0)$ در زمان $t = 0$ برای دامنه‌ی $\bar{D}$. برای این کار از تابع فاصله‌ی علامت‌دار برای تعریف $\phi(x)$ به منظور بیان مرز اولیه‌ی طرح D استفاده می‌کنیم. سپس معادله‌ی تعادل را حل کرده و مقادیر جابجایی نقاط را به دست می‌آوریم.

$$a(u, v, \phi) = L(v, \phi) ; u|_{\partial D_u} = u_0 ; \forall v \in U \quad (۸-۵)$$

گام دوم: یافتن جابجایی الحاقی^۲ w از معادله‌ی مزدوج:

$$a(u, v, \phi) = \langle J_u(u, \phi), v \rangle ; w|_{\partial D_u} = 0 ; \forall v \in U \quad (۹-۵)$$

^۱ Initialization

^۲ Adjoint Displacement

که در این جا $\langle J_u(u, \phi), v \rangle$ به معنای مشتق فرجت^۱ $J(u, \phi)$ نسبت به u در جهت $v(x)$ می‌باشد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\langle J_u(u, \phi) \rangle = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F(u)}{\partial u} v H(\phi) d\Omega. \quad (۱۰-۵)$$

گام سوم: محاسبه‌ی تابع سرعت^۲ $v_n(x)$ که معرف سرعت رشد مجموعه‌ی سطوح تراز تابع ϕ در راستای نرمال آن می‌باشد. تابع سرعت مورد نظر از آنالیز حساسیت تابع لاگرانژین مسئله‌ی بهینه‌سازی به دست می‌آید که در قسمت‌های بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

گام چهارم: محاسبه‌ی ضریب لاگرانژ قید حجم. ضریب لاگرانژ قید حجم نیز مستقیماً از آنالیز حساسیت تابع لاگرانژین مسئله‌ی بهینه‌سازی به دست می‌آید که در قسمت‌های بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

گام پنجم: حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی زیر برای به دست آوردن ϕ های جدید:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = v_n(x) |\nabla \phi| \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial \bar{D}} = 0 \quad (۱۱-۵)$$

گام ششم: شرط پایان‌دهنده را کنترل می‌کنیم. اگر شرط اتمام گردید جواب همگرا شده است. در غیر این صورت مراحل یک تا پنج، تا همگرا شدن جواب ادامه می‌یابد. شرط پایانی را می‌توان به صورت مقدار خطای مشخص دلخواه γ محدود کرد.

$$\int_{\bar{D}} |v_n(x)| \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega \leq \gamma \quad (۱۲-۵)$$

^۱ Frechet derivative

^۲ Normal velocity field

۵-۶- شرایط حل بهینه

در این بخش شرایط لازم برای بهینه بودن مسئله‌ی بهینه‌سازی بیان شده در بخش (۵-۵) را بررسی کرده و نشان می‌دهیم الگوریتم ارائه شده در جهت بهینگی همگرا خواهد شد. قضایای زیر درستی الگوریتم را نشان می‌دهند.

قضیه‌ی ۱: مقادیر سری تابع $\{\phi(x, t_i), i = 0, 1, 2, \dots\}$ به‌دست آمده از روند بهینه‌سازی، یک سری نزولی برای مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی (۵-۵) می‌باشد.

اثبات: ابتدا از روابط (۷-۵) مشتق سویی^۱ می‌گیریم:

$$\left\langle \frac{\partial a(u, v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \psi \, d\Omega \quad (۱۳-۵)$$

$$\left\langle \frac{\partial a(u, v, \phi)}{\partial u}, \delta u \right\rangle = a(\delta u, v, \phi) \quad (۱۴-۵)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L(v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle &= \int_{\bar{D}} \delta(\phi) p v \psi \, d\Omega + \\ &\int_{\bar{D}} \left(\delta'(\phi) |\nabla \phi| \psi + \delta(\phi) \frac{\nabla \phi \nabla \psi}{|\nabla \phi|} \right) d\Omega \quad (۱۵-۵) \\ &= \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \left(p v - \tau v \nabla \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) \psi \, d\Omega + \int_{\bar{D}} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \psi \, d\Omega \quad (۱۶-۵)$$

مشتق سویی تابع هدف به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

^۱ Directional derivative

$$\left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\bar{D}} \delta(\phi) F(u) \psi \, d\Omega \quad (17-5)$$

$$\left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, \delta u \right\rangle = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F(u)}{\partial u} H(\phi) \delta u \, d\Omega \quad (18-5)$$

در روابط فوق ψ هر تابع پیوسته با شرط $\psi = \psi(x) \in C^0(\bar{D})$ می‌تواند باشد.

برای روشن شدن رابطه‌ی (۱۸-۵) به صورت تابع صریح ψ ، معادله‌ی مزدوج زیر را برای پیدا کردن میدان جابه‌جایی الحاقی w حل می‌کنیم.

$$a(u, w, \phi) = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F(u)}{\partial u} H(\phi) w \, d\Omega \quad ; \quad w|_{\partial D_u} = 0 \quad \forall w \in U \quad (19-5)$$

بنابراین با دیفرانسیل گرفتن از معادله‌ی $a(u, v, \phi) = L(v, \phi)$ نسبت به ϕ در جهت ψ خواهیم

داشت:

$$a(\delta u, v, \phi) = \left\langle \frac{\partial L(v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(u, v, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \quad (20-5)$$

با جایگذاری روابط (۱۳-۵)، (۱۵-۵)، (۱۹-۵) و (۲۰-۵) در رابطه‌ی (۱۸-۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, \delta u \right\rangle &= \int_{\bar{D}} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \, d\Omega + \\ &\int_{\bar{D}} \delta(\phi) \left(p v - \tau v \nabla \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(w) \right) \psi \, d\Omega \end{aligned} \quad (21-5)$$

با استفاده از روش ضربگر لاگرانژی، تابع هدف جدید $\bar{J}(u, \phi)$ را که کاملاً با مسئله‌ی

بهینه‌سازی رابطه‌ی (۷-۵) معادل است را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \bar{J}(u, \phi) = J(u, \phi) + \lambda_+(V(\phi) - V_{\max}) \\
S.t. \quad & a(u, v, \phi) = L(v, \phi); \quad u|_{\partial D_u} = u_0 \\
& \lambda_+(V(\phi) - V_{\max}) = 0 \\
& \lambda_+ \geq 0
\end{aligned} \tag{۲۲-۵}$$

در این جا λ_+ ضریب لاگرانژ قید حجم و دو شرط آخر اقناع‌کننده‌ی شرایط همگرایی می‌باشند یعنی تا زمانی که نامساوی $V(\phi) \leq V_{\max}$ برقرار باشد، طبق شرط کان-تاکر $\lambda_+ = 0$ در غیر این صورت $\lambda_+ > 0$ می‌باشد؛ بنابراین مشتق فرجت تابع هدف جدید $\bar{J}(u, \phi)$ به شکل زیر خواهد بود.

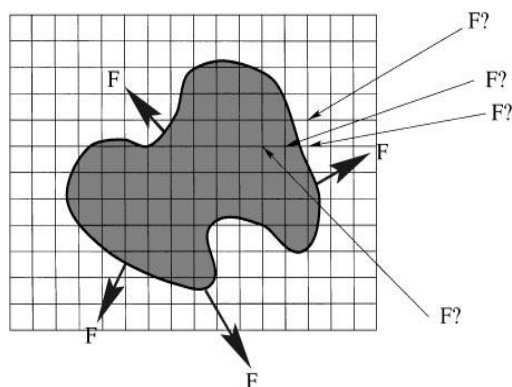
$$\left\langle \frac{\partial \bar{J}(u, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J(u, \phi)}{\partial u}, u \right\rangle + \lambda_+ \left\langle \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \tag{۲۳-۵}$$

با جایگذاری روابط (۱۶-۵)، (۱۷-۵)، (۲۱-۵) در رابطه‌ی (۲۳-۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{D}} \delta(\phi) \left(F(u) + pw - \tau \nabla \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(w) \right) \psi \, d\Omega \\
& + \int_{\partial \bar{D}} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{۲۴-۵}$$

تابع سرعت $v_n(x)$ بیان‌کننده‌ی مقدار دقیق حساسیت رابطه‌ی (۲۴-۵) از مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی (۲۲-۵) می‌باشد؛ بنابراین سری $\{\phi(x, t_i)\}$ به‌دست آمده از حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی، یک سری نزولی مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد.

همان‌طور که در شکل (۲-۵) نشان داده شده است؛ معادلات فوق حرکت مرز مدل مجموعه‌ی سطوح تراز را فقط در جهت نرمال مرز سازه تعریف می‌کند.



شکل (۲-۵) حرکت مرز سازه

برای محاسبه‌ی مشتق تابع هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی (۵-۵) نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} J(u, \phi) &= \int_D H'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} F(u) d\Omega \\
 &= \int_D \delta(\phi) |\nabla \phi| v_n F(u) d\Omega \\
 &= \int_D \delta(\phi = p) \int_{\{\phi=p\}} F(u) v_n ds \quad dp \quad (25-5) \\
 &= \int_{\{\phi=p=0\}} F(u) v_n ds \\
 &= \int_{\partial\Omega} F(u) v_n ds
 \end{aligned}$$

حال با توجه به روش تندترین شیب برای محاسبه‌ی سرعت نرمال خواهیم داشت:

$$\langle G_n, v_n \rangle = -J'(u, \phi) v_n \quad \forall v_n \in \mathcal{W} \quad (26-5)$$

در رابطه‌ی فوق $\mathcal{W}$ یک فضای مناسب از فضای هیلبرت^۱ است. با فرض $\mathcal{W} = L^2(\partial\Omega)$ خواهیم

داشت:

$$\langle G_n, v_n \rangle = \int_{\partial\Omega} G_n v_n ds \quad (27-5)$$

^۱ Hilbert space

لذا مقدار عددی سرعت نرمال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} J'(u, \phi) v_n &= \int_{\partial\Omega} F(u) v_n ds \Rightarrow \\ \int_{\partial\Omega} G_n v_n ds &= \langle G_n, v_n \rangle = -J'(u, \phi) v_n \\ &= - \int_{\partial\Omega} F(u) v_n ds \quad \forall v_n \in L^2(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (28-5)$$

لذا یک مقدار مناسب برای سرعت نرمال بر روی مرز انتخاب $v_n = s_n = -G$ می‌باشد.

۵-۷- حل عددی

برای دستیابی به الگوریتم بهینه‌سازی اشاره شده در این فصل به چند پیش‌نیاز در مسائل عددی نیاز داریم. در الگوریتم نشان داده شده، هندسه‌ی مرز سازه‌ای که بهینه‌سازی می‌شود به صورت سطح تراز صفر تابع مجموعه‌ی سطوح تراز تعریف شده است. برای بیان عددی تابع مجموعه‌ی سطوح تراز می‌توان از هر روش ساده‌ی عددی بهره جست. معمولاً از شبکه‌ی ساده با سلول‌های مربعی استفاده می‌گردد. همچنین می‌توان از هر یک از توابع درونیاب برای مجموعه نقاط شبکه مانند زیر استفاده کرد.

$$\phi(x, t) = \sum_i \phi_i(t) N_i(x) \quad (29-5)$$

در رابطه‌ی فوق $\phi_i(t)$ مقادیر گرهی تابع مجموعه‌ی سطوح تراز و $N_i(x)$ تابع درونیاب استاندارد می‌باشد. مقادیر گرهی در روند بهینه‌سازی تغییر کرده و باعث ایجاد تغییر در توپولوژی کل سازه می‌گردند.

معمولاً از خاصیت آیزوپارامتریک روش تحلیل سازه استفاده شده و از همان توابع درونیاب به کار رفته برای تقریب تابع مجهول و تقریب هندسی، برای تشکیل رویه‌ی سطح تراز نیز استفاده می‌شود.

به منظور حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی و تأمین پایداری حل می‌توان از روش‌ها عددی همچون روش روبه‌جلوی اولری برای تغییر ϕ در یک زمان مشخص استفاده کرد.

به طور کلی معادلات دیفرانسیل را می‌توان به سه دسته‌ی هایپربولیک، پارابولیک و الیپتیک تقسیم‌بندی نمود. در این صورت معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول همیلتون-ژاکوبی از دسته معادلات هایپربولیک به حساب می‌آید. با استفاده از روش عددی رو به جلوی اولری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + v |\nabla \phi| &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + v^n |\nabla \phi^n| &= 0 \end{aligned} \quad (30-5)$$

برای پایداری حل می‌بایست از شرایط CFL استفاده کرد. طبق شرایط CFL هر مرحله‌ی زمانی را می‌توان به صورت زیر محدود کرد.

$$\Delta t < \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\max\{|v_n|\}} \quad (31-5)$$

۵-۸- آنالیز حساسیت

۵-۸-۱- مقدمه

تحلیل حساسیت را می‌توان به این شکل تعریف کرد که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های مسئله را بررسی می‌کند. به این وسیله می‌توان میزان تغییرات خروجی‌های مسئله را بر اساس تغییرات

در ورودی‌های مختلف از نظر کمی و کیفی تعیین کرد. در حقیقت تحلیل حساسیت یک پیش‌نیاز اساسی برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی به روش ریاضی می‌باشد.

در مسائل بهینه‌سازی نیاز داریم تا از تابع هدف و توابع قید برحسب متغیرهای طراحی مشتق‌گیری نماییم و اصطلاحاً حساسیت تابع هدف و توابع قید را نسبت به متغیرهای طراحی به‌دست آوریم. اصولاً این‌گونه روش‌ها به دلیل انجام تحلیل حساسیت از سایر روش‌ها بسیار سودمندتر هستند و بسیار سریع‌تر پاسخ را برای ما تعیین می‌کنند؛ زیرا با تعیین مشتقات حساسیت می‌توانیم برحسب شدت اثر تغییرات یک متغیر بر روی تابع هدف و توابع قید، متغیری را انتخاب کرده و تغییر دهیم که تغییرات در آن شدت بیشتری بر روی تابع هدف و توابع قید داشته باشد و در نتیجه خود را سریع‌تر به جواب نزدیک کنیم.

به‌طور کلی سه روش برای تعیین مشتقات حساسیت وجود دارد: ۱- روش تفاضل محدود ۲- روش تحلیلی ۳- روش نیمه‌تحلیلی.

با توجه به این‌که در این مقاله از روش تحلیلی برای آنالیز حساسیت استفاده شده است لذا تنها این روش بررسی خواهد شد.

۵-۸-۲- روش‌های تحلیلی آنالیز حساسیت

در روش تحلیلی از تعریف مشتق و محاسبه‌ی آن برای تعیین حساسیت‌ها استفاده می‌شود.

شکل کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \min \hat{g}(x) = g(x, \bar{u}(x)) \\ \text{s.t. } g(x, \bar{u}(x)) \leq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, l \\ x \in X = \{x \in R^n : x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n\} \end{cases} \quad (32-5)$$

لازم است با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری زنجیره‌ای، مشتق تابع هدف نسبت به متغیرهای

طراحی را محاسبه کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i(x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i(x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} \quad (33-5)$$

در این بخش دو روش تحلیلی متفاوت بررسی خواهد شد. یکی روش مستقیم^۱ و دیگری روش

الحاقی^۲.

۵-۸-۲-۱- روش تحلیلی مستقیم.

در روش مستقیم، $\frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j}$ با مشتق‌گیری از معادلات تعادل به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) + K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} \quad (34-5)$$

که می‌توان این رابطه را به‌فرم زیر بازنویسی کرد:

$$K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \quad (35-5)$$

^۱ Direct method

^۲ Adjoint method

به عبارت سمت راست معادله‌ی فوق، شبه‌بار گفته می‌شود.

به‌طور مثال اگر مینیمم کردن انرژی کرنشی به‌عنوان هدف در نظر گرفته شود یعنی:

$$\hat{g}(x) = g(x, \bar{u}(x)) = \frac{1}{2} \bar{u}(x)^T k(x) \bar{u}(x) \quad (36-5)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial g_i(x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial F(x^k)^T}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \quad (37-5)$$

$$\frac{\partial g_i(x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial \bar{u}} = K(x^k) \bar{u}(x^k) \quad (38-5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \quad (39-5)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} &= \frac{\partial F(x^k)^T}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) + \\ &\bar{u}(x^k)^T K(x^k) K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \\ &= 2 \bar{u}(x^k)^T \frac{\partial F(x^k)^T}{\partial x_j} - \bar{u}(x^k)^T \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \end{aligned} \quad (40-5)$$

حال اگر فرض شود تغییرات نیرو نسبت به جابجایی ناچیز است خواهیم داشت:

$$\frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} = -\bar{u}(x^k)^T \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \quad (41-5)$$

۵-۸-۲-۲- روش تحلیلی الحاقی.

می‌دانیم:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial u} K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \quad (۴۲-۵)$$

اگر تابع λ_i را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u} K(x^k)^{-1} \right)^T = K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial g_i}{\partial u} \right)^T \quad (۴۳-۵)$$

در این روش ابتدا به حل معادله‌ی زیر برای تعیین λ_i می‌پردازیم:

$$K(x^k) \lambda_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u} \right)^T \quad (۴۴-۵)$$

سپس با جایگذاری در رابطه‌ی زیر حساسیت به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \lambda_i^T \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \quad (۴۵-۵)$$

۵-۸-۲-۳- مقایسه‌ی روش تحلیلی مستقیم با الحاقی.

در روش مستقیم باید ابتدا معادله‌ی (۴۳-۵) را برای هر x_j حل کنیم (n بار) و سپس نتایج را

در رابطه‌ی (۴۵-۵) به تعداد $l+1$ مرتبه برای هر متغیر طراحی قرار دهیم. در روش الحاقی باید معادله‌ی

(۴۴-۵) برای تابع هدف و هر تابع قید به اندازه‌ی $l+1$ مرتبه حل شود و نتیجه‌ی آن به تعداد n مرتبه

برای هر تابع در رابطه‌ی (۴۵-۵) قرار داده شود. در نتیجه وقتی تعداد قیدها از متغیرهای طراحی کمتر

است، روش الحاقی و زمانی که تعداد قیدها از متغیرهای طراحی بیش‌تر روش مستقیم مناسب‌تر خواهد بود.

فصل ششم

مثال‌های عددی

۶-۱- مقدمه

در این بخش جهت روشن‌تر شدن موضوع و ارزیابی میزان اثربخشی تحلیل حساسیت در بهینه کردن جواب‌ها و سرعت حل و نیز کارایی روش مجموعه‌ی سطوح تراز سه دسته مسئله‌ی بهینه‌سازی مدنظر قرار می‌گیرد. مسئله‌ی اول شامل مینیمم کردن انرژی کرنشی^۱ سازه تحت قید وزن می‌باشد. مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی فرم نسبتاً فراگیر برای مسائل بهینه‌سازی بوده که علاوه بر ماکزیمم کردن سختی^۲ کل سازه، تنش‌ها و جابجایی‌ها را نیز تا حدود زیادی اصلاح می‌کند. ولی زمانی که مدل طراحی دارای تمرکز تنش ذاتی باشد (مانند سازه‌ی ال-شکل) این مسئله نمی‌تواند تمرکز تنش را رفع کند لذا می‌بایست برای حل این مشکل و رسیدن به توپولوژی بهینه‌ی کاربردی، از قرار دادن قید تنش برای رفع تمرکز تنش استفاده کرد. باتوجه به این موضوع مسئله‌ی دوم شامل مینیمم کردن وزن^۳ تحت قیود محلی تنش می‌باشد. در ادامه برای رسیدن به توپولوژی بهینه‌ی (تا حدود زیادی) فراگیر و کاربردی، مسئله‌ی سوم شامل مینیمم کردن انرژی کرنشی و وزن به‌طور همزمان^۴ تحت قیود محلی تنش می‌باشد.

در این بخش ضمن حل مثال‌های متعددی که از منابع بهینه‌سازی اقتباس شده است؛ آنالیز حساسیت هر یک از مسائل بهینه‌سازی به‌منظور محاسبه‌ی سرعت نرمال روش مجموعه‌ی سطوح تراز به‌طور کامل تشریح شده است.

^۱ Strain energy minimization

^۲ Stiffness maximization

^۳ Weight minimization

^۴ Multi objective function

۶-۱-۱- مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید وزن

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(u, \phi) = \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} u^T k u H(\phi) d\Omega \\ \text{S.t.: Equilibrium} \\ V(\phi) = \int_{\bar{D}} H(\phi) d\Omega \leq V_{\max} = \xi V_{\text{Tot}} ; (\xi: \text{Volume Fraction}) \\ \text{Design Restrictions} \end{array} \right. \quad (1-6)$$

فرم لاگرانژین مسئله‌ی فوق بدین صورت خواهد بود:

$$\mathcal{L}(u, \phi) = J(u, \phi) + \lambda_v (V(\phi) - V_{\max}) + a(u, w) - \ell(w) \quad (2-6)$$

در روابط فوق w ضریب لاگرانژی قید تعادل^۱ می‌باشد.

با هر یک از روابط تحلیلی مستقیم یا الحاقی می‌توان سرعت نرمال را یافت در این پایان‌نامه

از روش مستقیم استفاده شده است. لذا فرم مشتق کلی تابع لاگرانژین برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}'(u, \phi) = J'(u, \phi) + \lambda_v (V'(\phi) - V_{\max}) + a'(u, w) - \ell'(w) \quad (3-6)$$

در ادامه مشتق مستقیم هر یک از ترم‌های فوق به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند (توجه شود

که نیروهای حجمی در این مقاله در نظر گرفته نمی‌شوند):

^۱ Equilibrium constraints

$$\begin{aligned}
J'(u, \phi) &= \int_{\Omega} u^T k u' d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^T k u v_n ds \\
V'(\phi) &= \int_{\partial\Omega} v_n ds \\
a'(u, w) &= \int_{\Omega} w^T k u' d\Omega + \int_{\Omega} w'^T k u d\Omega + \int_{\partial\Omega} w^T k u v_n ds \\
\ell'(w) &= \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\partial\Omega} f w v_n ds + \int_{\Gamma_N} t w ds + \int_{\Gamma_N} (\nabla(t w))^T n + \kappa t w v_n ds
\end{aligned} \tag{۴-۶}$$

از فصل قبل می‌دانیم که:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \phi} = -K^{-1} \left(\frac{\partial k}{\partial \phi} u \right) \tag{۵-۶}$$

لذا با جایگذاری رابطه‌ی فوق در روابط (۴-۶) و در نظر گرفتن $f = 0$ و اینکه $v_n = 0$ on Γ_N

و جمع کردن تمام ترم‌های شامل سرعت نرمال خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^T k u v_n ds + \lambda_v \int_{\partial\Omega} v_n ds + \int_{\partial\Omega} w^T k u v_n ds = 0 \tag{۶-۶}$$

همچنین برای محاسبه‌ی w ، مجموع تمام ترم‌های شامل u' را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u^T k u' d\Omega + \int_{\Omega} w^T k u' d\Omega = 0 \Rightarrow \\
&\int_{\Omega} u^T k u' d\Omega + \int_{\Omega} w^T k u' d\Omega = 0 \Rightarrow \\
&\int_{\Omega} u^T k (-k^{-1} (\frac{\partial k}{\partial \phi} u)) d\Omega + \int_{\Omega} w^T k (-k^{-1} (\frac{\partial k}{\partial \phi} u)) d\Omega = 0 \Rightarrow \\
&\int_{\Omega} u^T k (-k^{-1} (\frac{\partial k}{\partial \phi} u)) d\Omega + \int_{\Omega} w^T k (-k^{-1} (\frac{\partial k}{\partial \phi} u)) d\Omega = 0 \Rightarrow \\
&-\int_{\Omega} u^T \frac{\partial k}{\partial \phi} u d\Omega - \int_{\Omega} w^T \frac{\partial k}{\partial \phi} u d\Omega = 0 \Rightarrow \\
&\int_{\Omega} w^T \frac{\partial k}{\partial \phi} u d\Omega = -\int_{\Omega} u^T \frac{\partial k}{\partial \phi} u d\Omega ; \int_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial \phi} d\Omega = \int_{\partial\Omega} k v_n ds \\
&W = U \quad \Rightarrow \quad Self \ adjo \ int.
\end{aligned} \tag{۷-۶}$$

با جایگذاری مقدار به‌دست آمده از رابطه‌ی (۶-۷) در رابطه‌ی (۶-۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^T \text{ku} v_n ds + \lambda_v \int_{\partial\Omega} v_n ds - \int_{\partial\Omega} u^T \text{ku} v_n ds = \\ -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^T \text{ku} v_n ds + \lambda_v \int_{\partial\Omega} v_n ds \end{aligned} \quad (۸-۶)$$

حال با استفاده از روش تندترین شیب^۱ که در فصل قبل اشاره شد، سرعت نرمال به‌فرم زیر

محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} G v_n ds = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^T \text{ku} v_n ds + \lambda_v \int_{\partial\Omega} v_n ds \Rightarrow \\ G = -\frac{1}{2} u^T \text{ku} + \lambda_v \Rightarrow v_n = -G \Rightarrow \\ v_n = \frac{1}{2} u^T \text{ku} - \lambda_v \quad \text{on } \partial\Omega \quad \text{OR} \quad \phi = 0 \end{aligned} \quad (۹-۶)$$

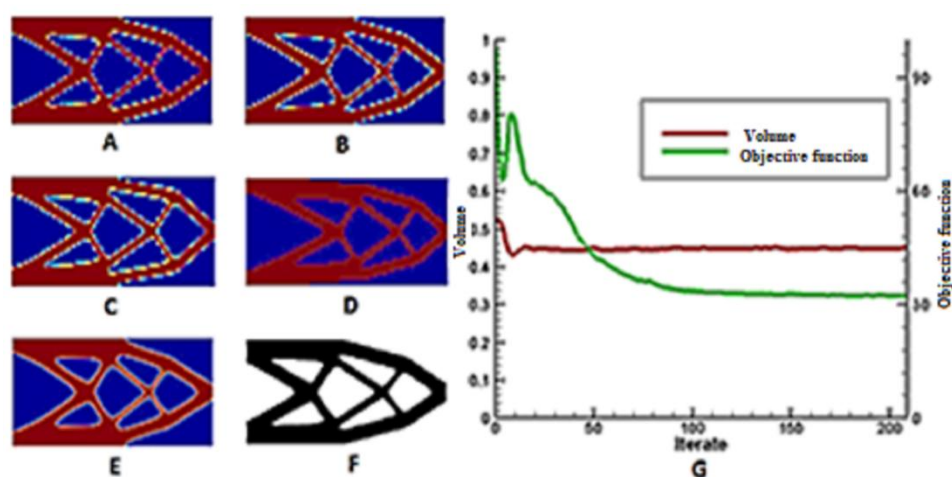
برای محاسبه‌ی ضریب لاگرانژ قید حجم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T \frac{\partial k}{\partial \phi} u d\Omega + \lambda_v \int_{\Omega} H'(\phi) d\Omega = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T k u \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega = \lambda_v \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega \Rightarrow \\ \lambda_v^+ = \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T k u \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega}{\int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega} \end{aligned} \quad (۱۰-۶)$$

^۱ Steepest descent

۶-۱-۲- مثال‌های حل شده با روش تحلیل اجزای محدود

ابتدا می‌بایست نتایج با یکی از منابع موجود بررسی شود به همین دلیل یکی از مسائل مهمی که در اکثر منابع موجود است انتخاب و با نتیجه‌ی به‌دست آمده مقایسه شده است که توپولوژی و مقادیر همگرایی به‌ترتیب در شکل (۱-۶) و جدول (۱-۶) قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۱-۶) مقایسه‌ی نتیجه‌ی به‌دست آمده با نتایج منابع

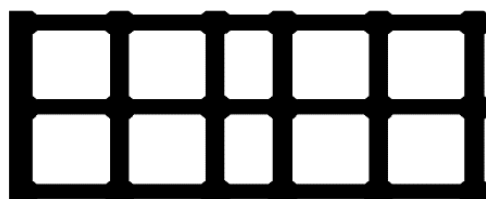
جدول (۱-۶) نتایج به‌دست آمده در مقالات مختلف (A-E) و نتیجه‌ی به‌دست آمده در این مقاله (F).

قید حجم	Compliance	محقق
۰,۴۵	۶۵,۸	<i>Allaire et al. (۲۰۰۴), ۸۰× ۴۰</i>
۰,۴۵	۶۴,۶	<i>Van Dijk et al. (۲۰۰۹), ۸۰× ۴۰</i>
۰,۴۵	۶۵,۸	<i>Wang and Wang (۲۰۰۶), ۸۰× ۴۰</i>
۰,۴۵	۶۸,۶	<i>Challis (۲۰۱۰), ۸۰× ۴۰</i>
۰,۴۵	۷۱,۹	<i>Takezawa et al. (۲۰۱۰), ۱۶۰× ۸۰</i>
۰,۴۵	۲× ۳۲,۲=۶۴,۴	مقاله‌ی موجود، ۵۰× ۲۵

الف- تیرهای کوتاه:

در تمامی مثال‌ها این بخش نسبت طول به ارتفاع برابر با ۲ در نظر گرفته شده و کل دامنه با ۱۳۲۶ نقطه‌ی گرهی به‌صورت المان‌های محدود چهار گرهی تنش مسطح مدل شده است. فواصل گره‌ها در هر دو جهت برابر با ۰,۱ بوده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۱ و ۰,۳ در نظر گرفته شده است.

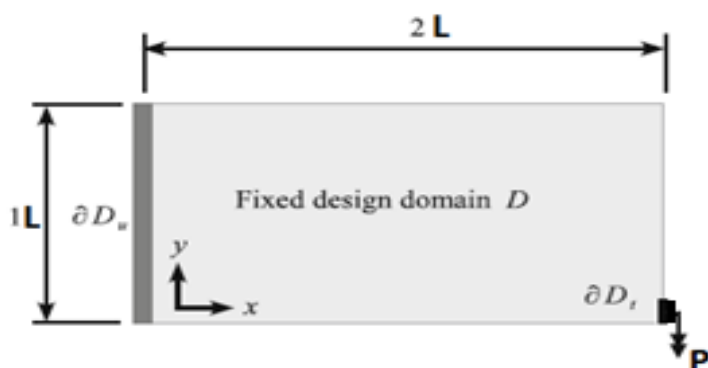
همچنین ورودی اولیه برای این گروه از مثال‌ها به‌صورت شکل زیر می‌باشد.



شکل (۶-۲) ورودی اولیه در تیرهای کوتاه

۱- تیر طره

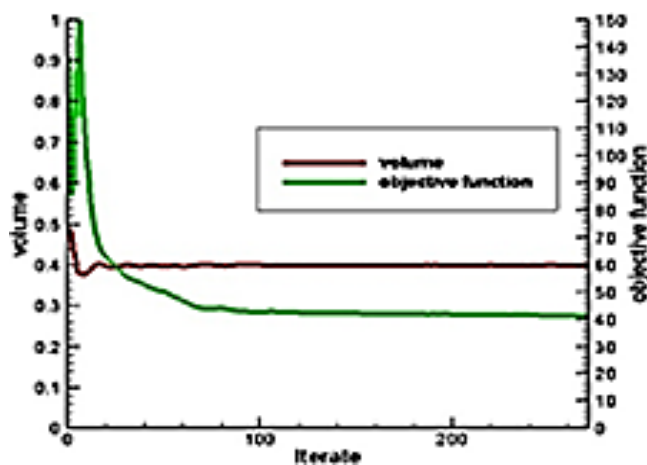
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۴ و ۵) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۳-۶) شرایط بارگذاری



شکل (۴-۶) توپولوژی بهینه

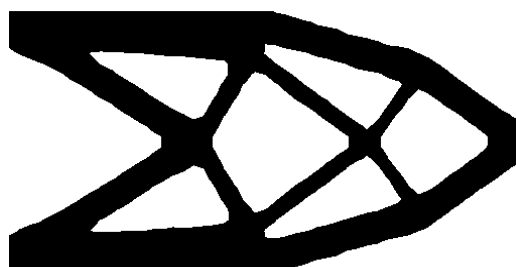


شکل (۵-۶) نمودار روند همگرایی

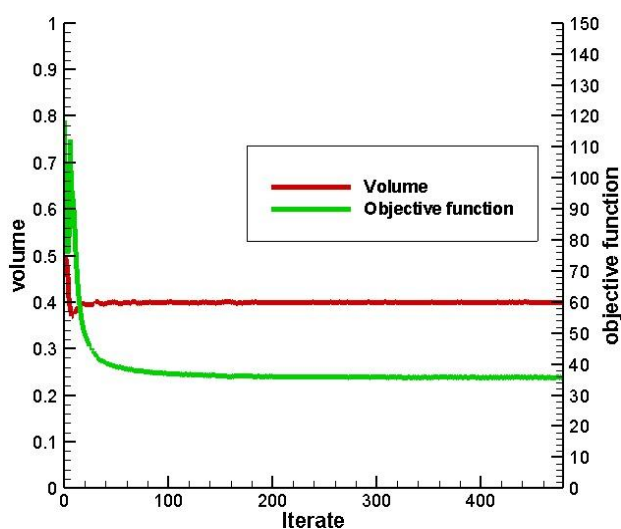
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۷ و ۸) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



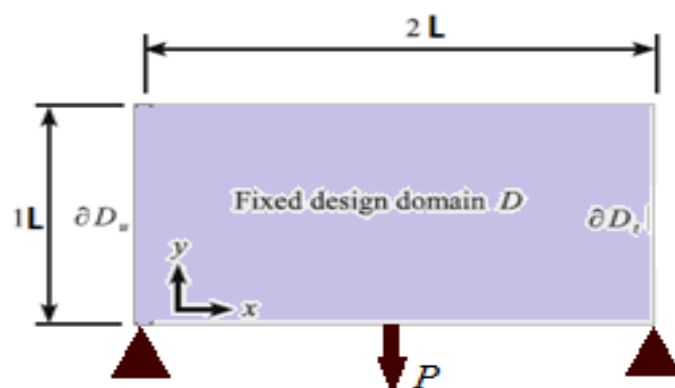
شکل (۷-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۸-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

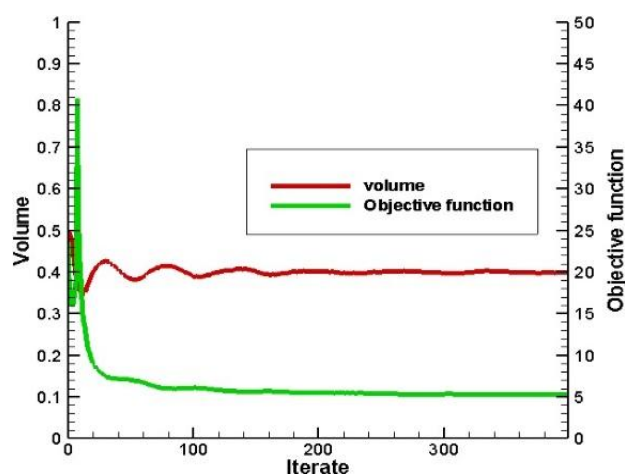
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۰ و ۱۱) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۹-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



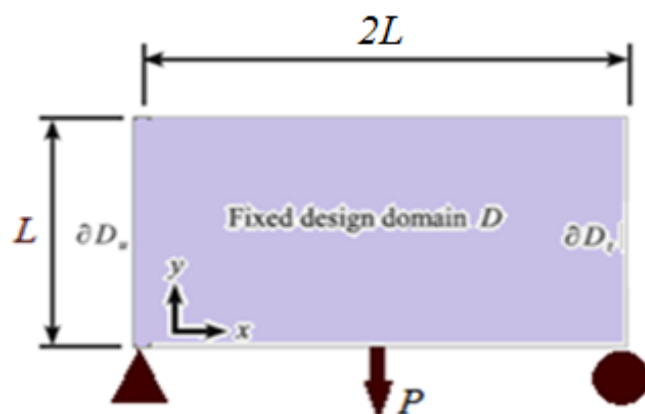
شکل (۱۰-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۱۱-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

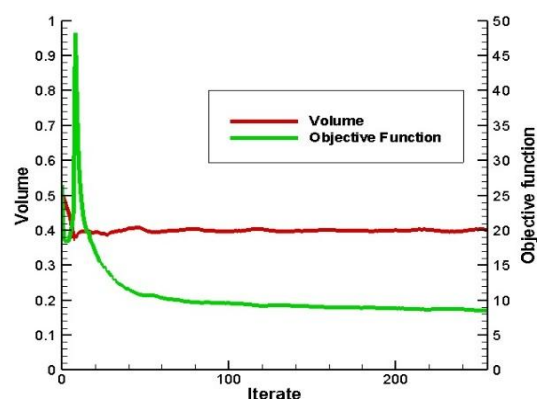
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۳ و ۱۴) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۱۲-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۱۳-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۱۴-۶) نمودار روند همگرایی

ب- تیرهای بلند:

در تمامی مثال‌ها این بخش نسبت طول به ارتفاع برابر با ۴ در نظر گرفته شده و کل دامنه با ۲۶۲۶ نقطه‌ی گرهی به صورت المان‌های محدود چهار گرهی تنش مسطح مدل شده است. فواصل گره‌ها در هر دو جهت برابر با ۰,۱ بوده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۱ و ۰,۳ در نظر گرفته شده است.

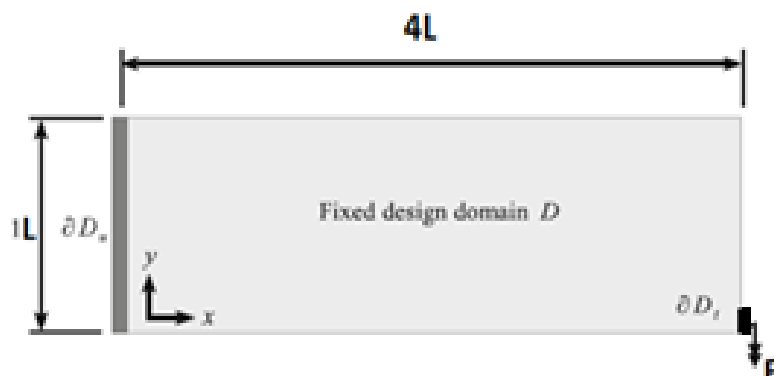
همچنین ورودی اولیه برای این گروه از مثال‌ها به صورت شکل زیر می‌باشد.



شکل (۶-۱۵) ورودی اولیه در تیرهای کوتاه

۱- تیر طره

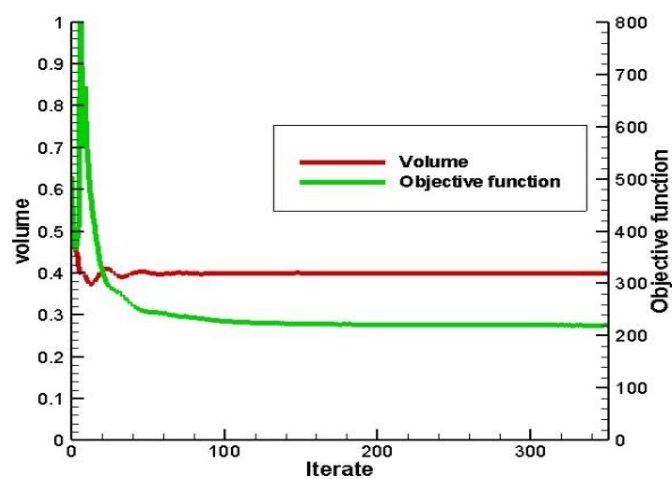
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۷ و ۱۸) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۱۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۶-۱۷) توپولوژی بهینه‌ی



شکل (۶-۱۸) نمودار روند همگرایی

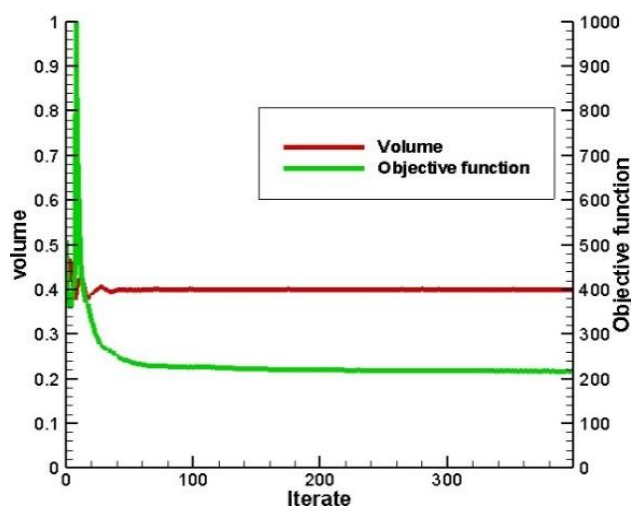
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۲۰ و ۲۱) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۱۹) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



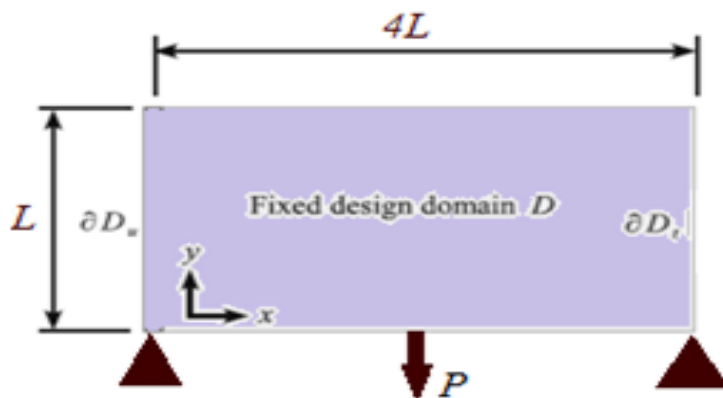
شکل (۶-۲۰) توپولوژی بهینه



شکل (۶-۲۱) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

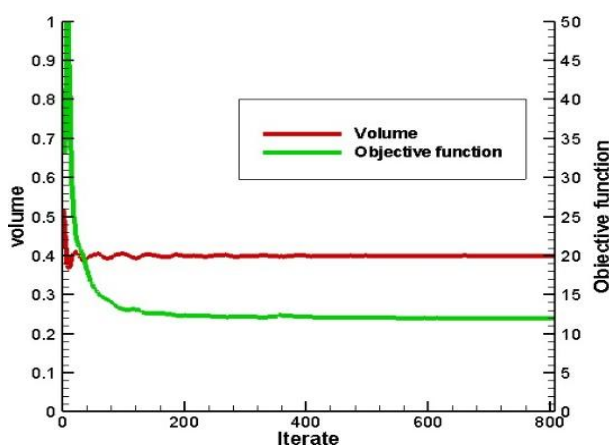
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۲۳ و ۲۴) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۲۲-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



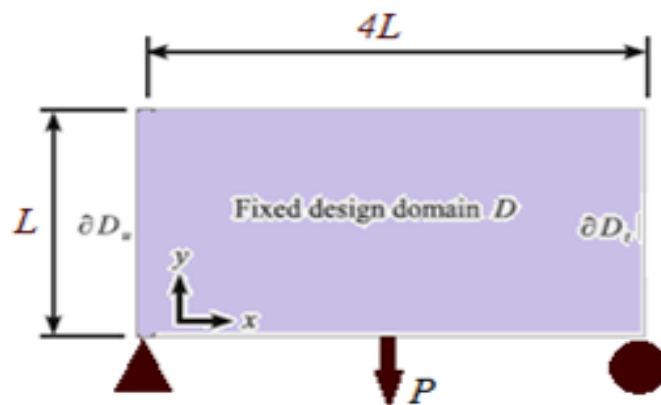
شکل (۲۳-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۲۴-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

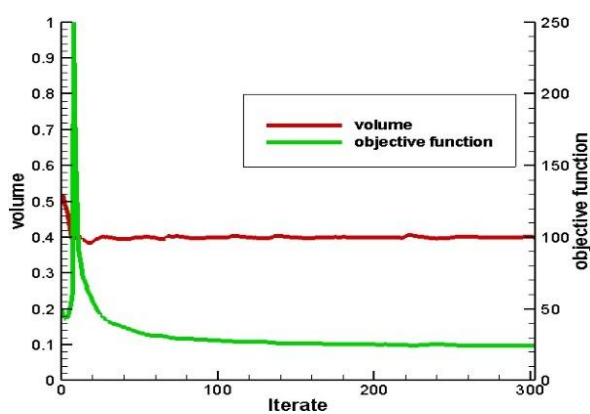
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۲۶ و ۲۷) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۲۵-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



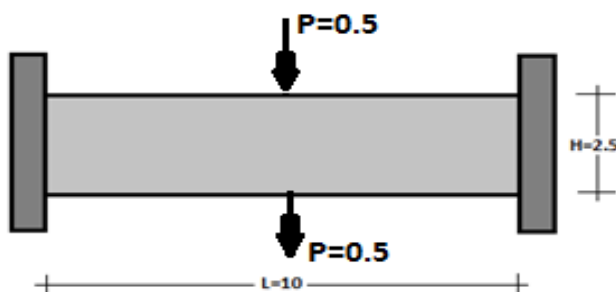
شکل (۲۶-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۲۷-۶) نمودار روند همگرایی

۴- تیر دوسرگیردار

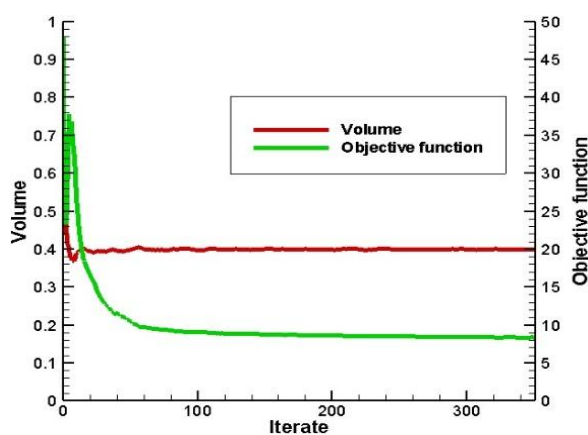
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۲۹ و ۳۰) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۴-۲۸) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۴-۲۹) توپولوژی بهینه



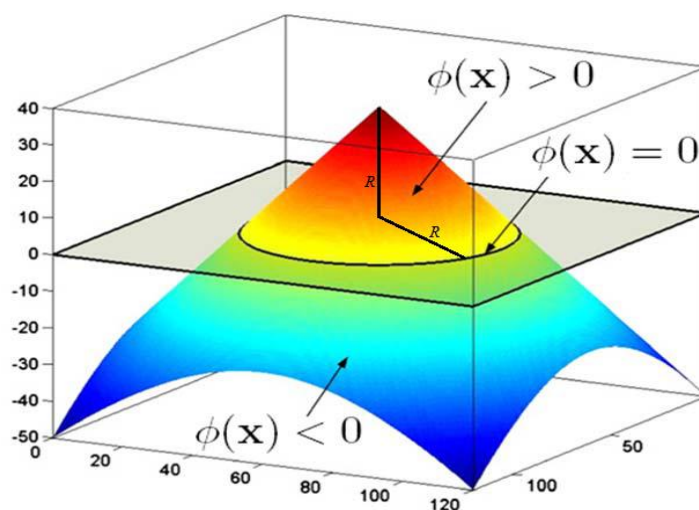
شکل (۴-۳۰) نمودار روند همگرایی

۳-۱-۶- روش پیشنهادی اقناع قید حجم

برای استفاده از این روش می‌بایست با خواص تابع فاصله‌ی علامت‌دار آشنایی داشت.

همان‌طور که در شکل (۳۱-۶) مشاهده می‌شود یکی از عمده‌ترین خصوصیات تابع فاصله‌ی

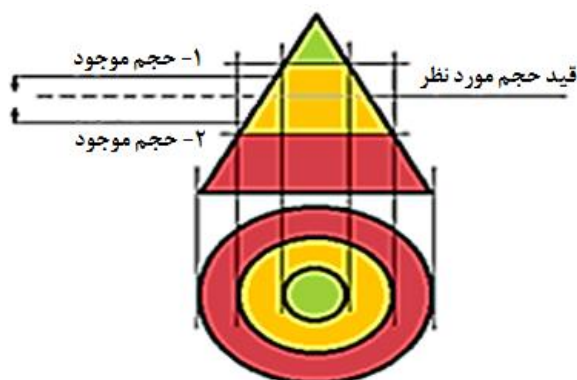
علامت‌دار این است که نواحی با شیب‌های حدوداً برابر واحد ایجاد می‌کند.



شکل (۳۱-۶) تابع فاصله‌ی علامت‌دار

در این حالت باتوجه به شکل زیر می‌توان یک رابطه‌ی تکرارشونده برای اقناع قید حجم در نظر

گرفت.



شکل (۳۲-۶) تقسیم‌بندی سطوح تراز و احجام

با توجه به شکل فوق و در نظر داشتن این نکته که همواره حجم مصالح موجود بر روی سطح تراز صفر قرار دارد، مشخص است که اگر حجم موجود در ناحیه‌ی ۱ قرار داشته باشد کل رویه‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز می‌بایست به سمت بالا انتقال یابد تا به حجم افزوده شده و به سمت همگرایی پیش رویم و بالعکس اگر حجم موجود در ناحیه‌ی ۲ قرار داشته باشد برای نزدیک شدن به همگرایی می‌بایست از حجم موجود مصالح کم شده لذا کل رویه‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز می‌بایست به سمت پایین کشیده شود.

برای این منظور می‌توان با یک رابطه‌ی عددی تکرارشونده به قید حجم مورد نظر رسید.

با تعریف پارامتر η موسوم به پارامتر تغییر سطح به صورت زیر، خواهیم داشت:

$$\eta^{k+1} = \max\left(\eta^k + \frac{1}{\Lambda^k} \left[\frac{\int H(\phi) d\Omega}{V^*} - 1 \right], 0\right) \quad (11-6)$$

$$\Lambda^{k+1} = \alpha \cdot \Lambda^k$$

در این مرحله به منظور جلوگیری از نوسانات شدید حجم در نواحی نزدیک به همگرایی، از تابع

$f(\eta) = \ln(1 + \eta)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی مورد نظر با اعمال

پارامتر تغییر سطح به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$\phi^{k+1} = \phi^k - ((\Delta t \cdot v_n) - f(\eta)) \cdot |\nabla \phi|$$

$$v_n = \frac{1}{2} u^T k u \quad (12-6)$$

در ادامه تمام مسائل فوق با این روش دوباره حل خواهند شد.

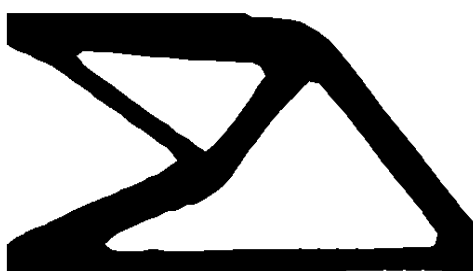
الف- تیرهای کوتاه:

۱- تیر طره

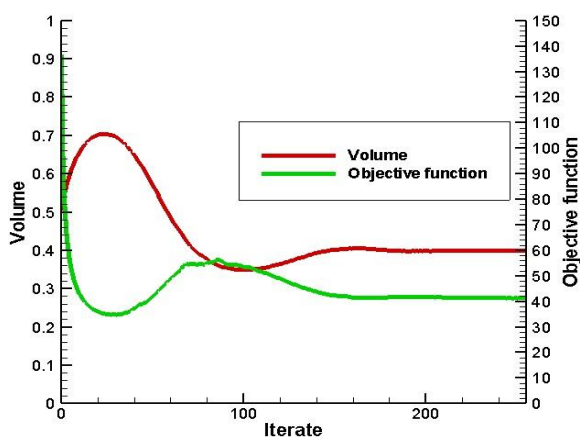
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۳۴ و ۳۵) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۳۳-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری

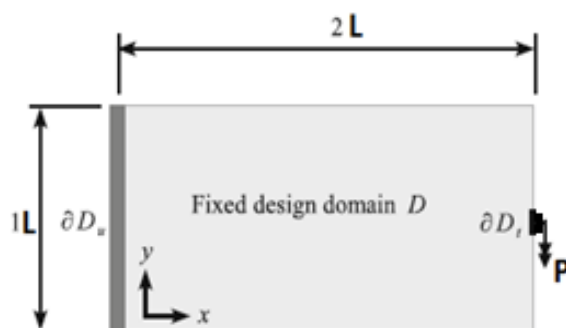


شکل (۳۴-۶) توپولوژی بهینه

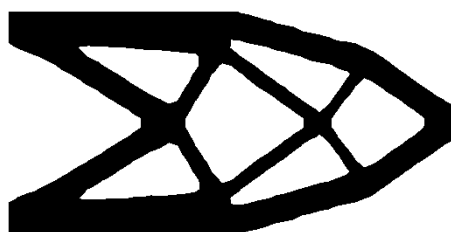


شکل (۳۵-۶) نمودار روند همگرایی

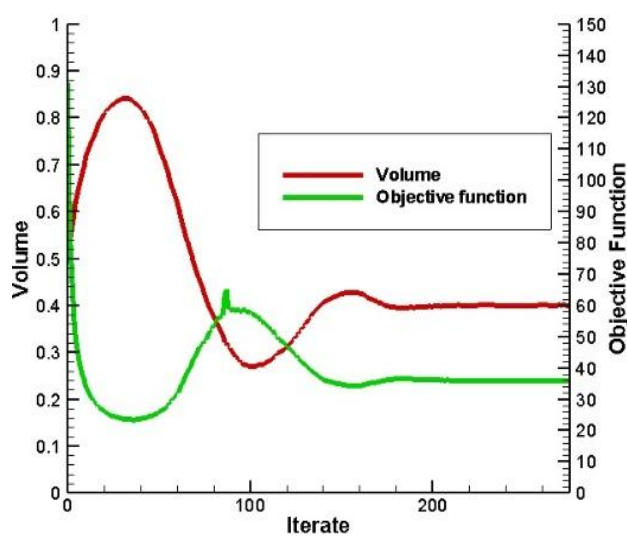
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۳۷ و ۳۸) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۳۶-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



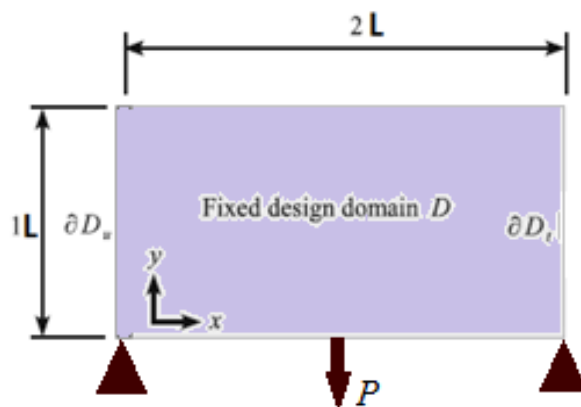
شکل (۳۷-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۳۸-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

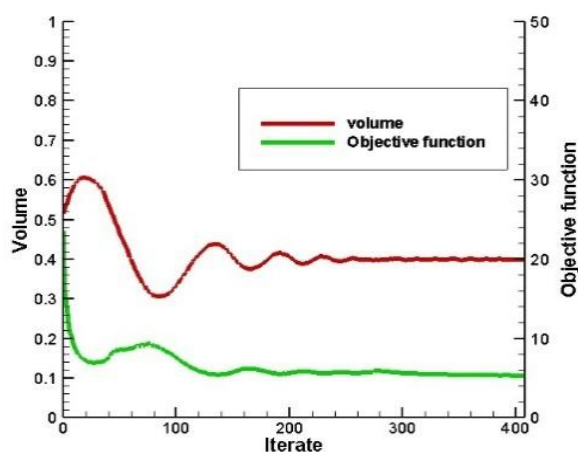
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۴۰ و ۴۱) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۳۹-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



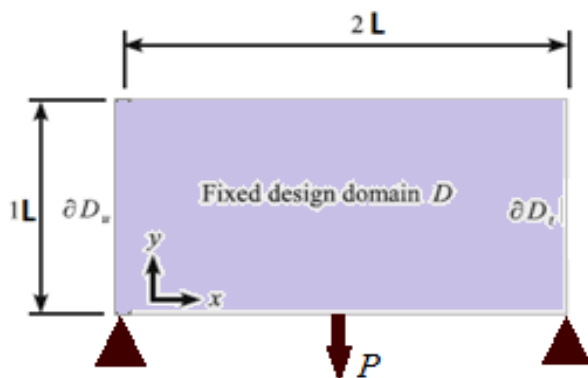
شکل (۴۰-۶) توپولوژی بهینه



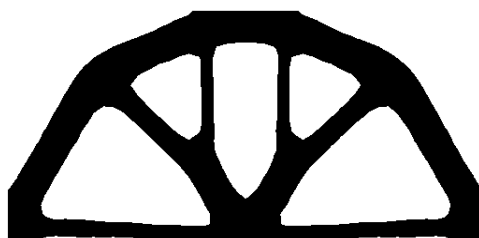
شکل (۴۱-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

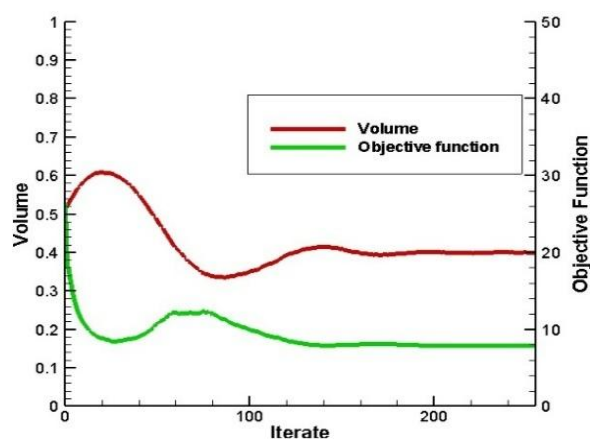
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۴۳ و ۴۴) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۴۲-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۴۳-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۴۴-۶) نمودار روند همگرایی

ب- تیرهای بلند:

۱- تیر طره

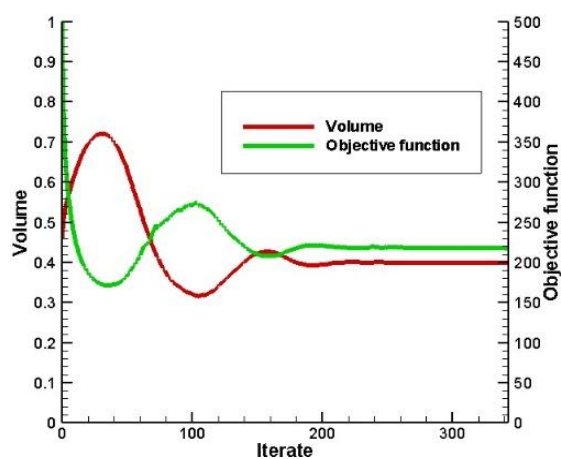
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۴۶ و ۴۷) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۴۵-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۴۶-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۴۷-۶) نمودار روند همگرایی

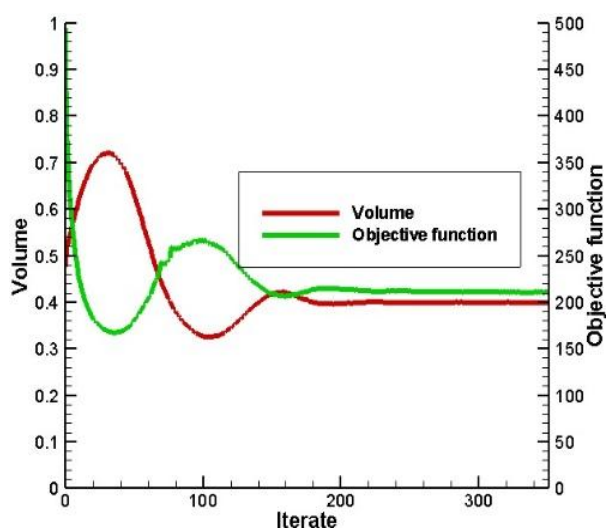
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۴۹ و ۵۰) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۴۸-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



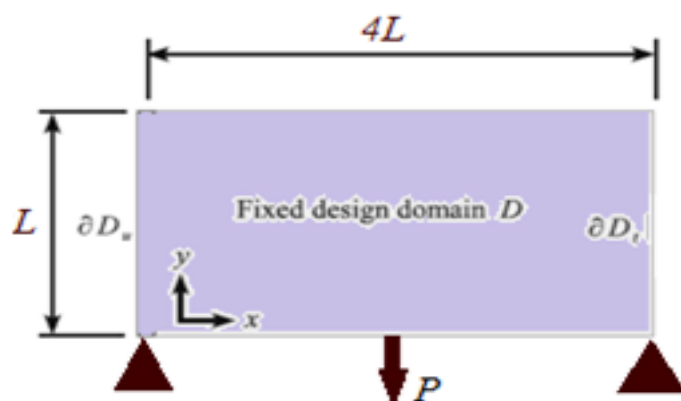
شکل (۴۹-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۵۰-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

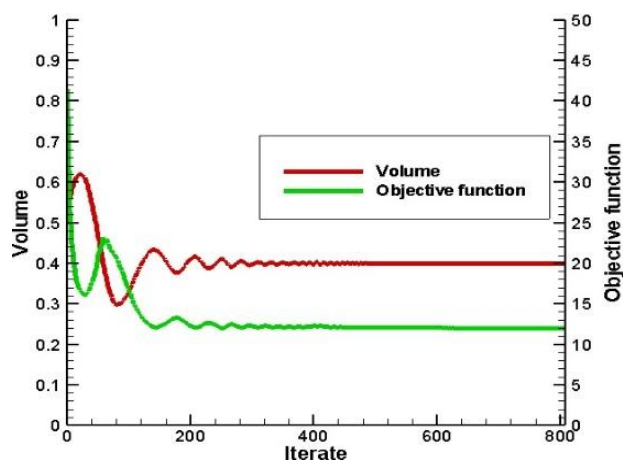
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۵۲ و ۵۳) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۵۱-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



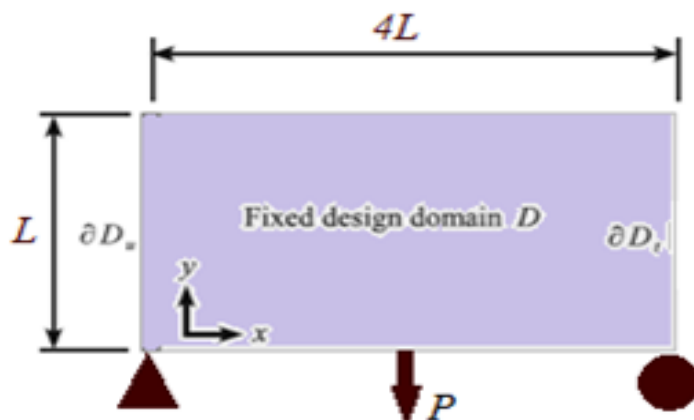
شکل (۵۲-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۵۳-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

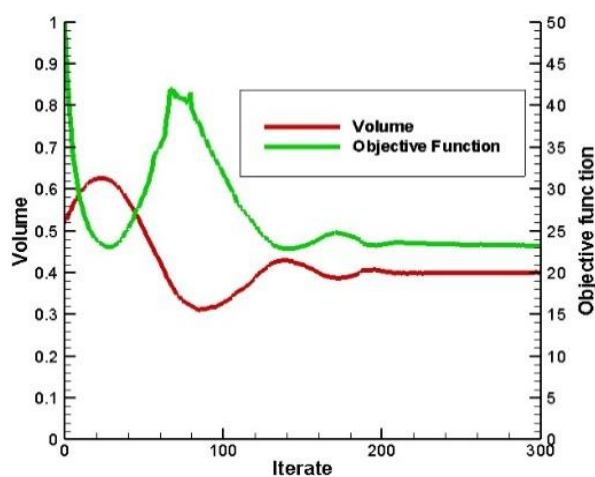
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۵۵ و ۵۶) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۵۴-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



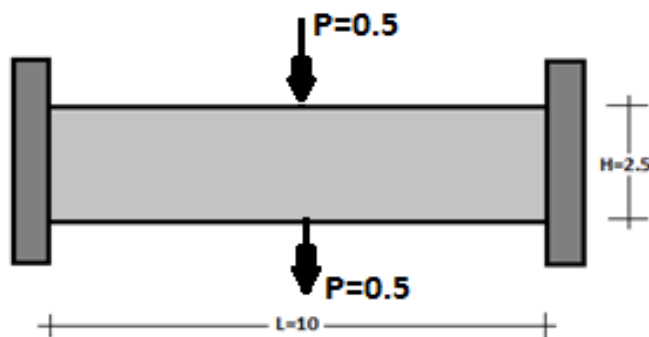
شکل (۵۵-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۵۶-۶) نمودار روند همگرایی

۴- تیر دوسرگیردار

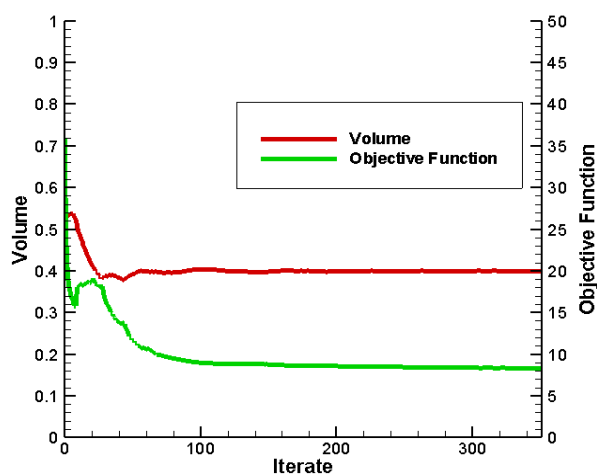
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۵۸ و ۵۹) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۵۷-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۵۸-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۵۹-۶) نمودار روند همگرایی

۶-۱-۴- مثال‌های حل شده با روش تحلیل آیزوژئومتریک

الف- تیرهای کوتاه:

در تمامی مثال‌ها این بخش نسبت طول به ارتفاع برابر با ۲ در نظر گرفته شده و کل دامنه با ۱۳۲۶ نقطه‌ی کنترلی که توسط دو وصله‌ی نرئز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۳ در نظر گرفته شده است.

همچنین برای هر دو وصله مقادیر بردارهای گرهی به صورت زیر به دست آمده است

$$\eta = \xi = \{0, 0, 0, 0.04167, 0.08334, \dots, 0.9167, 0.9584, 1, 1, 1\}$$

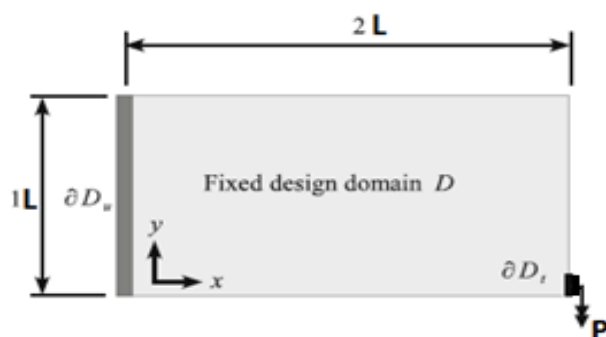
همچنین ورودی اولیه برای این گروه از مثال‌ها به صورت شکل زیر می‌باشد.



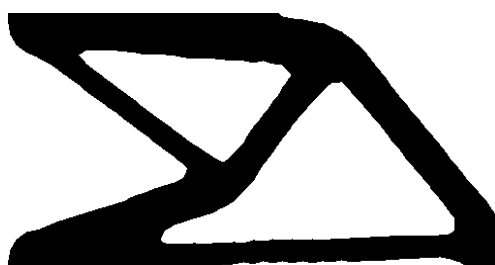
شکل (۶-۶۰) ورودی اولیه در تیرهای کوتاه

۱- تیر طره

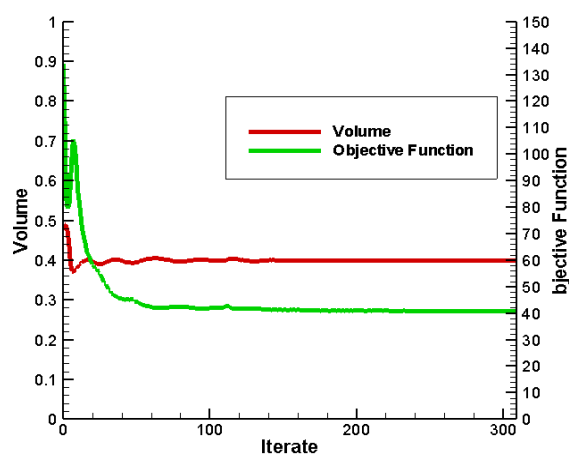
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۶۲ و ۶۳) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۶۱) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری

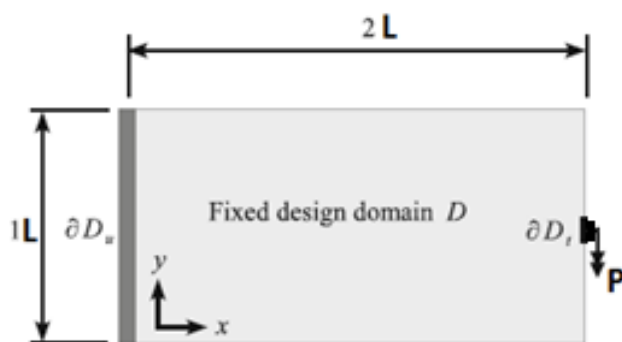


شکل (۶-۶۲) توپولوژی بهینه

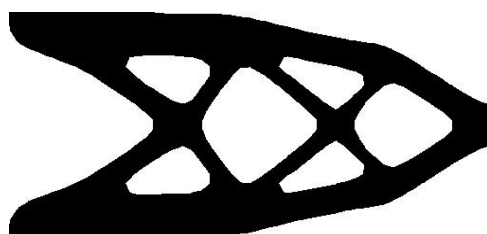


شکل (۶-۶۳) نمودار روند همگرایی

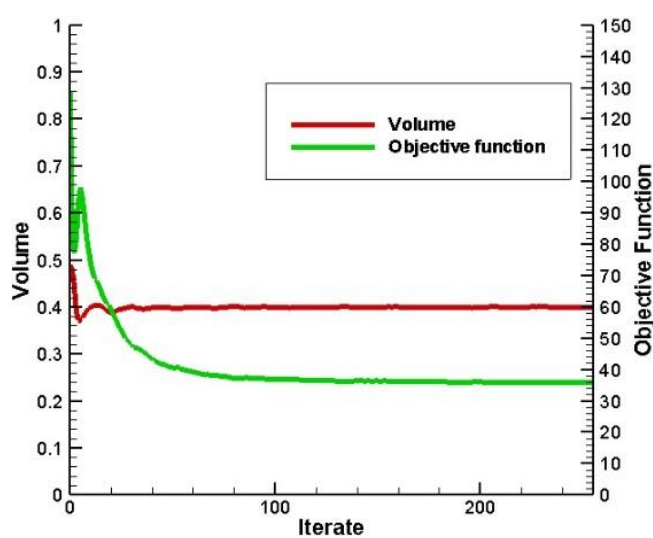
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۶۵ و ۶۶) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶۴-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



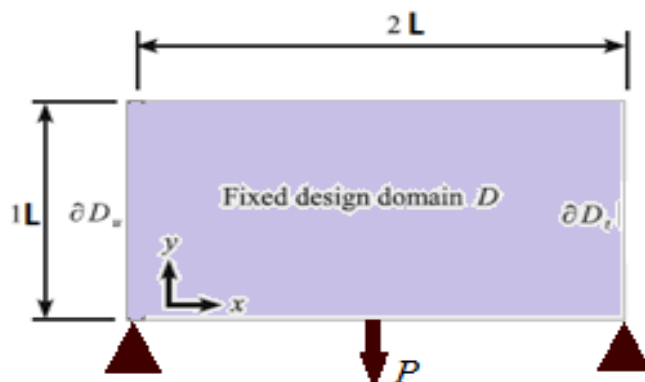
شکل (۶۵-۶) توپولوژی بهینه



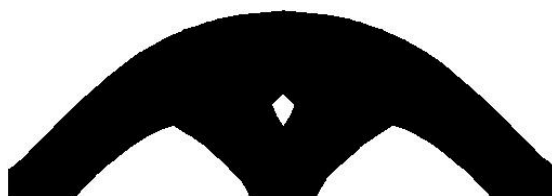
شکل (۶۶-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

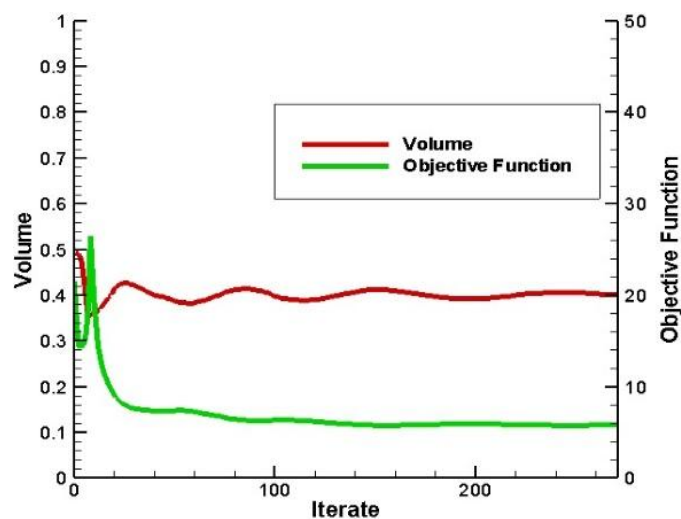
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۶۸ و ۶۹) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۶۷) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



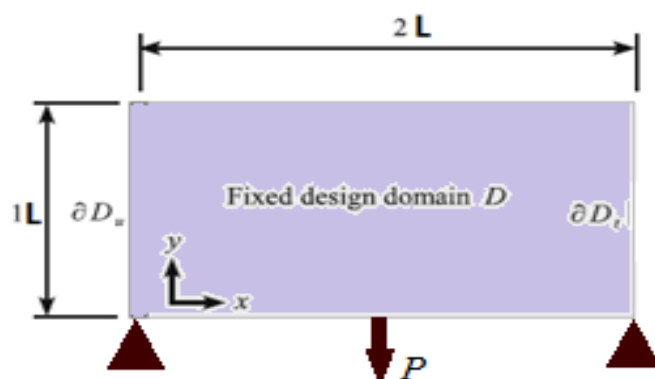
شکل (۶-۶۸) توپولوژی بهینه



شکل (۶-۶۹) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

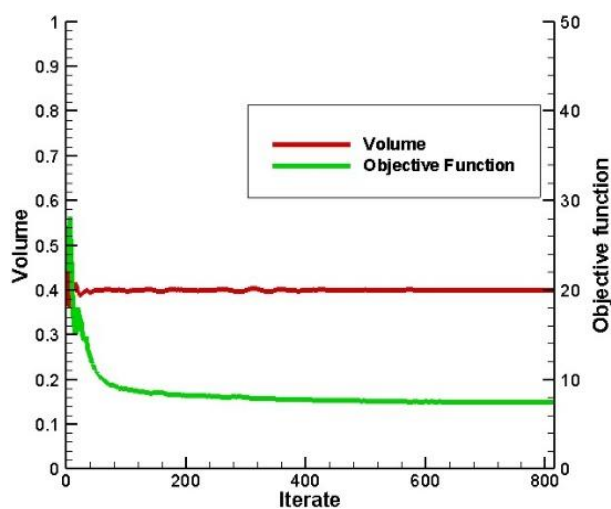
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۷۱ و ۷۲) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۷۰) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۶-۷۱) توپولوژی بهینه



شکل (۶-۷۲) نمودار روند همگرایی

ب- تیرهای بلند:

در تمامی مثال‌ها این بخش نسبت طول به ارتفاع برابر با ۴ در نظر گرفته شده و کل دامنه با ۲۶۲۶ نقطه‌ی کنترلی که توسط چهار وصله‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۳ در نظر گرفته شده است.

همچنین برای هر چهار وصله مقادیر بردارهای گرهی به صورت زیر به دست آمده است

$$\eta = \xi = \{0, 0, 0, 0.04167, 0.08334, \dots, 0.9167, 0.9584, 1, 1, 1\}$$

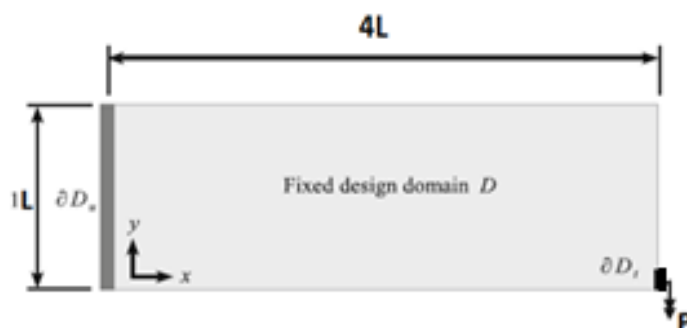
همچنین ورودی اولیه برای این گروه از مثال‌ها به صورت شکل زیر می‌باشد.



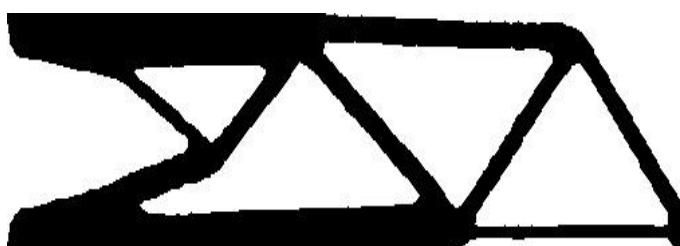
شکل (۶-۷۳) ورودی اولیه در تیرهای بلند

۱- تیر طره

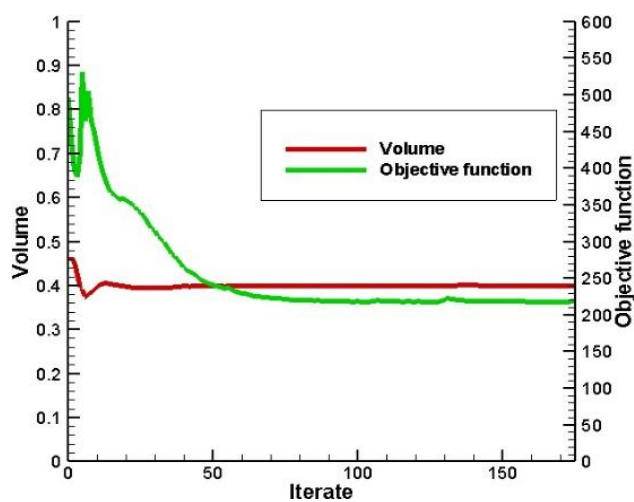
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۷۵ و ۷۶) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۷۴-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۷۵-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۷۶-۶) نمودار روند همگرایی

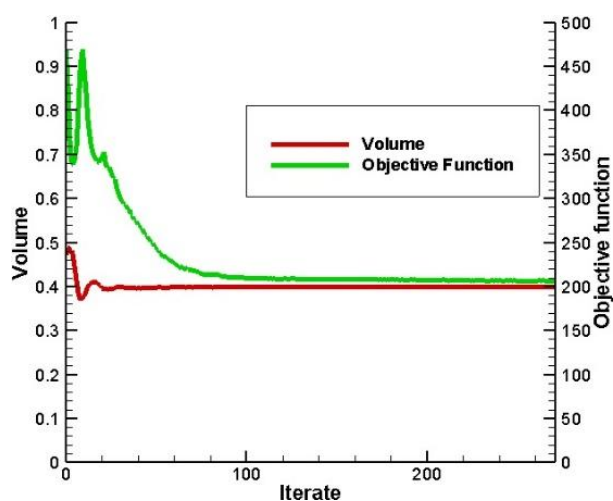
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۷۸ و ۷۹) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۷۷-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



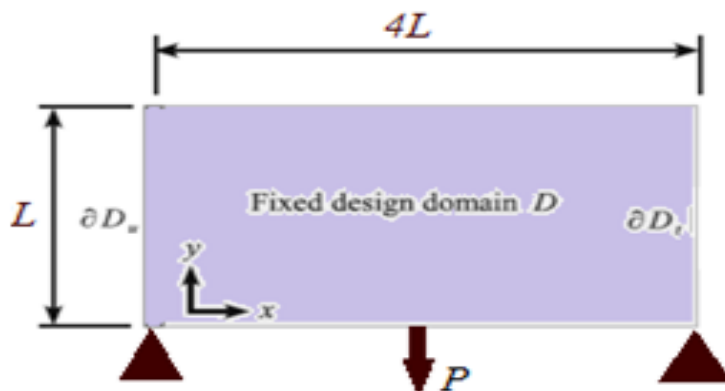
شکل (۷۸-۶) توپولوژی بهینه



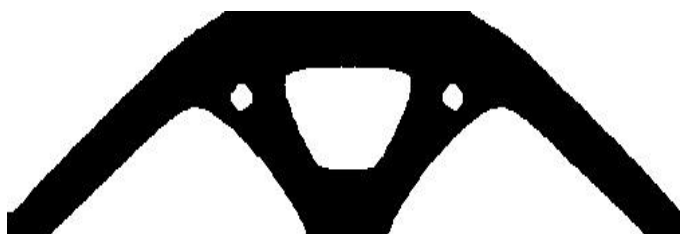
شکل (۷۹-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

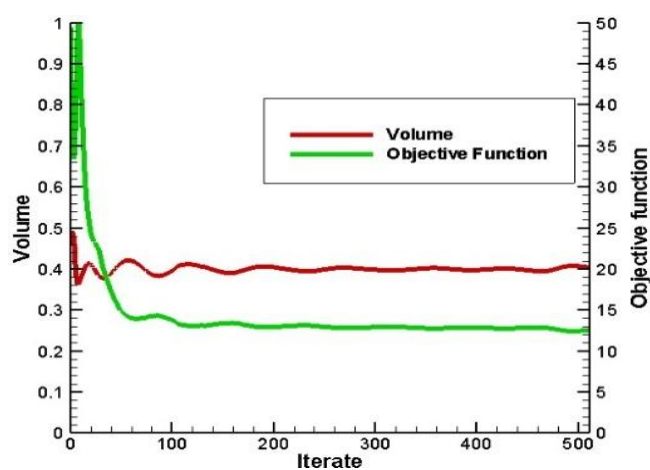
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۸۱ و ۸۲) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۸۰-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



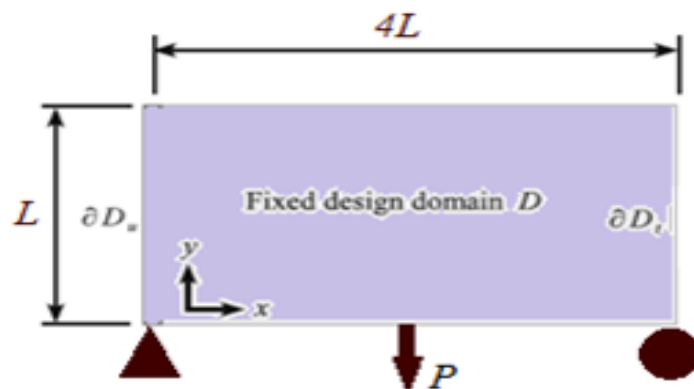
شکل (۸۱-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۸۲-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

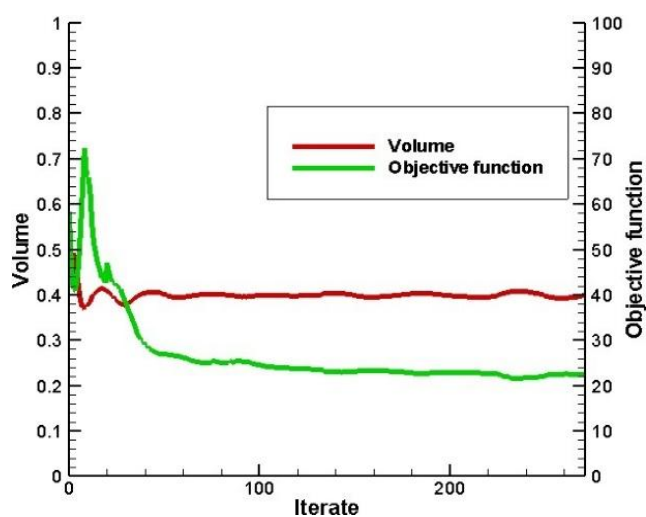
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۸۴ و ۸۵) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۸۳-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



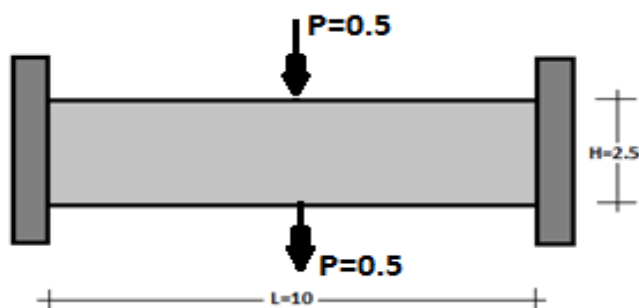
شکل (۸۴-۶) توپولوژی بهینه



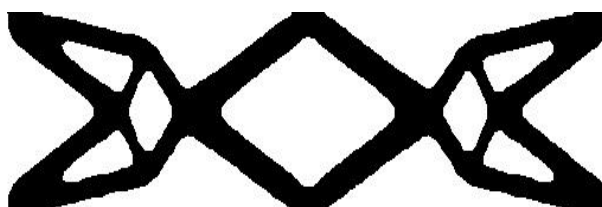
شکل (۸۵-۶) نمودار روند همگرایی

۴- تیر دوسرگیردار

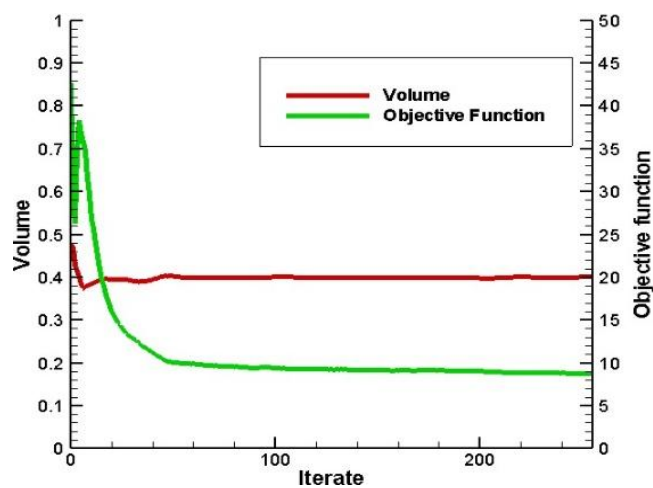
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۸۷ و ۸۸) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۸۶-۴) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۸۷-۴) توپولوژی بهینه



شکل (۸۸-۴) نمودار روند همگرایی

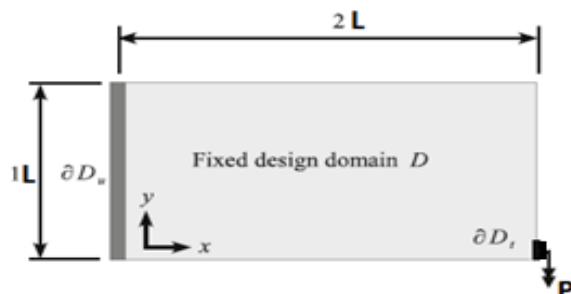
۶-۱-۵- روش پیشنهادی اقناع قید حجم

روش پیشنهاد شده در قسمت قبل برای روش تحلیل آیزوژئومتریک نیز قابل استفاده خواهد بود لذا در ادامه تمام مسائل فوق با این روش حل خواهد شد.

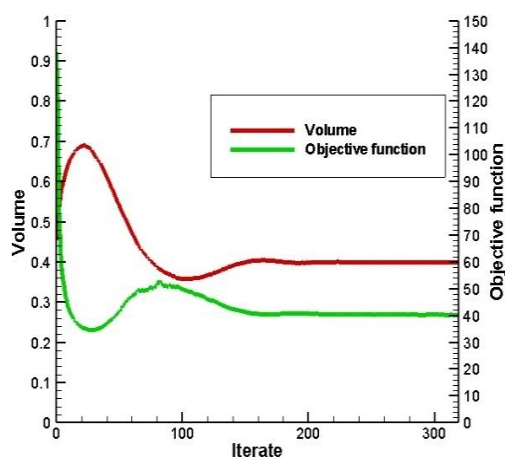
الف- تیرهای کوتاه:

۱- تیر طره

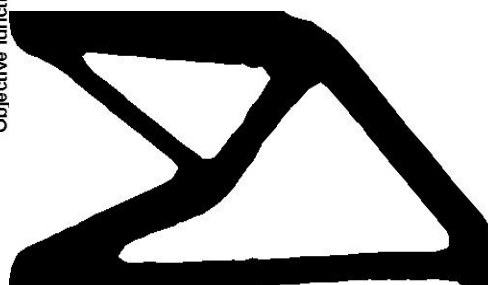
مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۹۰ و ۹۱) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۶-۸۹) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری

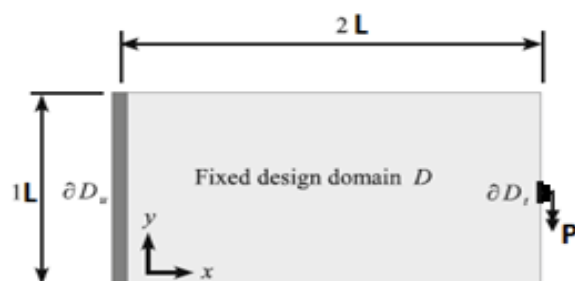


شکل (۶-۹۱) نمودار روند همگرایی

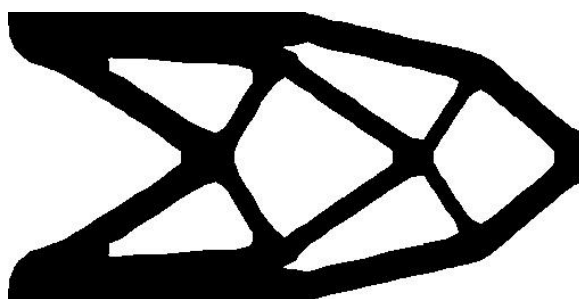


شکل (۶-۹۰) توپولوژی بهینه

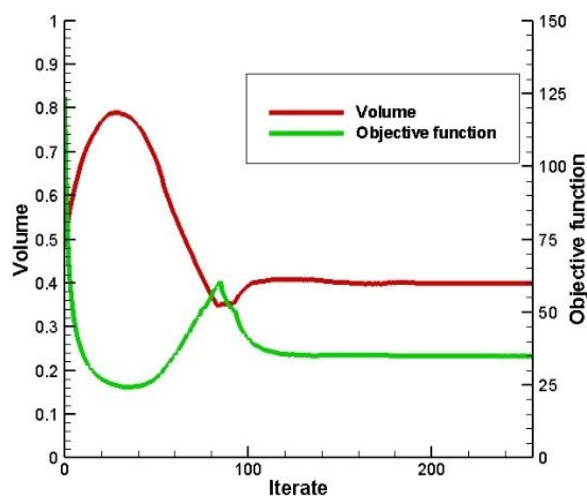
مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۹۳ و ۹۴) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۹۲-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



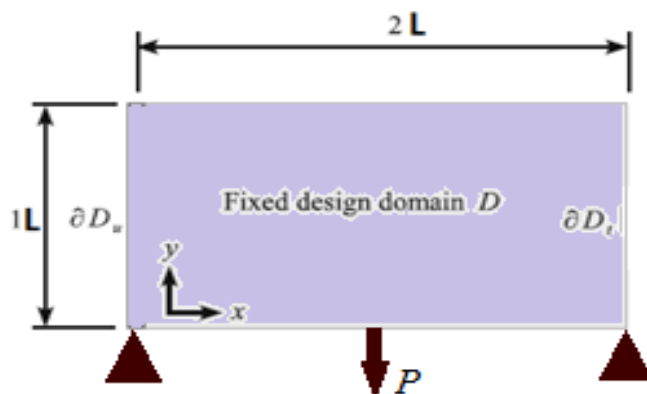
شکل (۹۳-۶) توپولوژی بهینه شکل



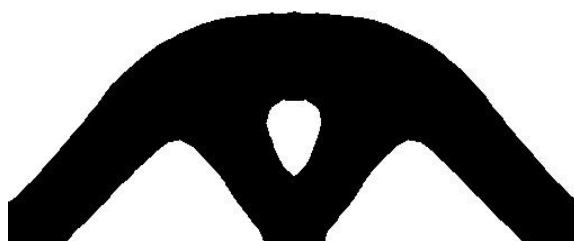
شکل (۹۴-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

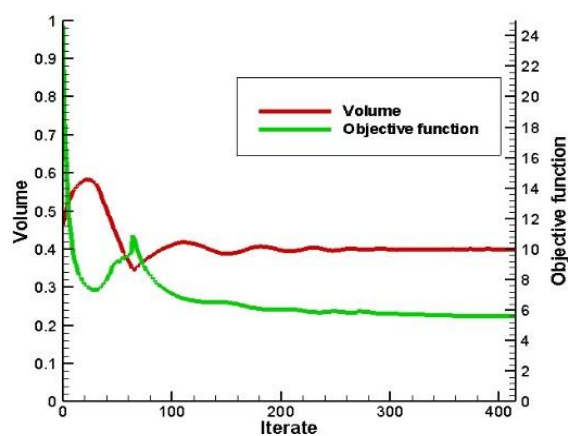
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۹۶ و ۹۷) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۹۵-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



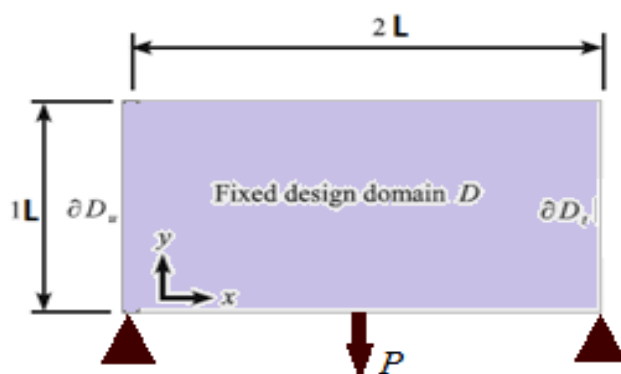
شکل (۹۶-۶) توپولوژی بهینه



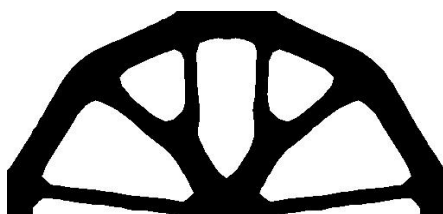
شکل (۹۷-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

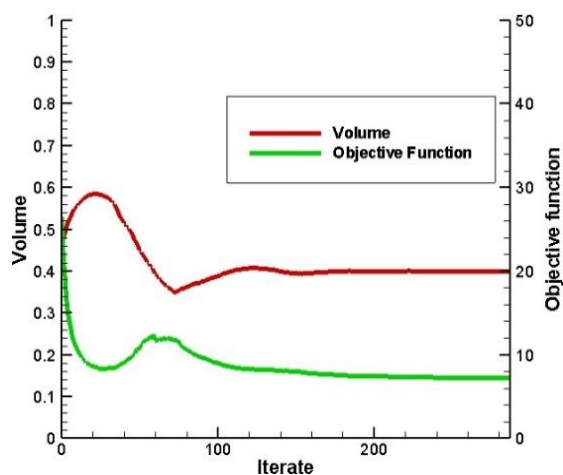
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۹۹ و ۱۰۰) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۹۸-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۹۹-۶) توپولوژی بهینه



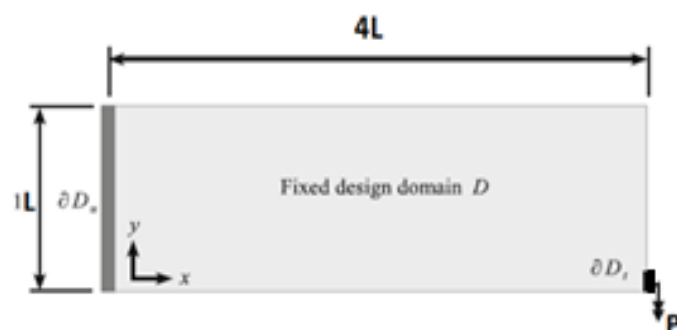
شکل (۱۰۰-۶) نمودار روند همگرایی

ب- تیرهای بلند:

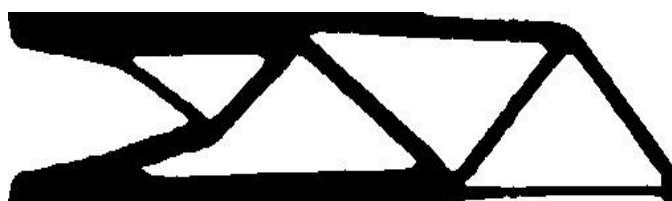
۱- تیر طره

مثال ۱: در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۰۲ و ۱۰۳)

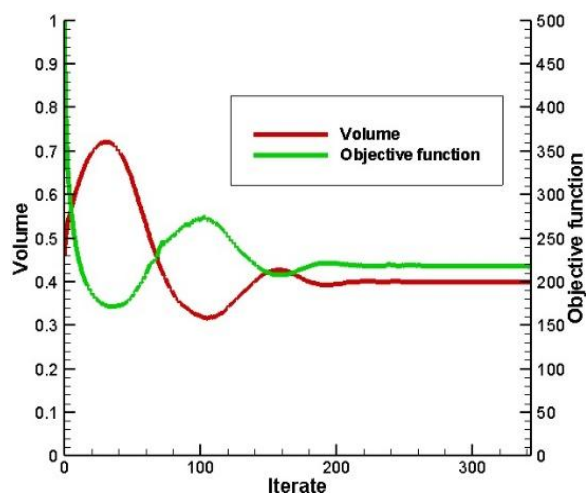
توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۱۰۱-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۱۰۲-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۱۰۳-۶) نمودار روند همگرایی

مثال ۲: مثال فوق را با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌کنیم. در شکل زیر شرایط

بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۰۵ و ۱۰۶) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی

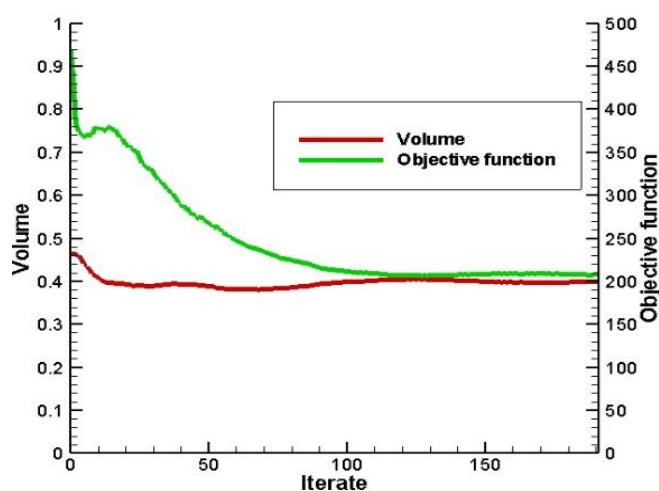
این مثال نشان داده شده است.



شکل (۱۰۴-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



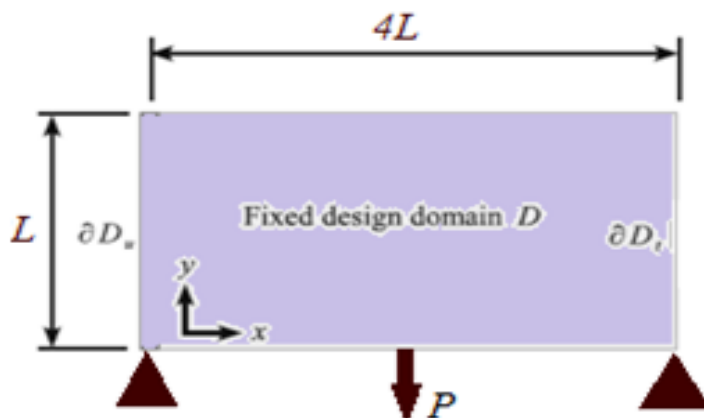
شکل (۱۰۵-۶) توپولوژی بهینه



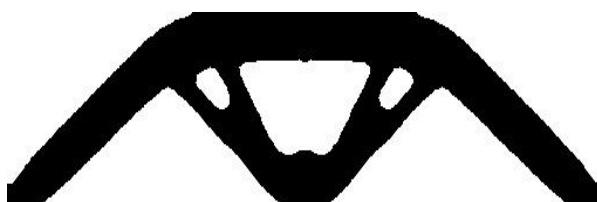
شکل (۱۰۶-۶) نمودار روند همگرایی

۲- تیر میشل

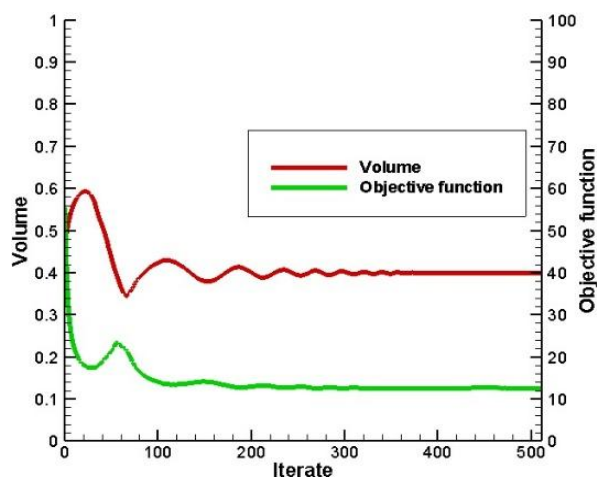
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۰۸ و ۱۰۹) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۱۰۷-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



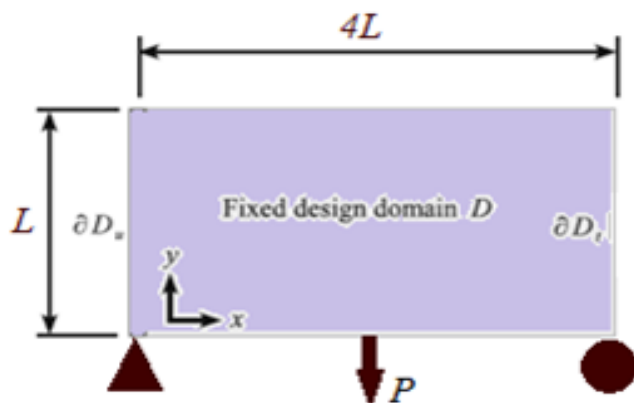
شکل (۱۰۸-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۱۰۹-۶) نمودار روند همگرایی

۳- تیر ساده

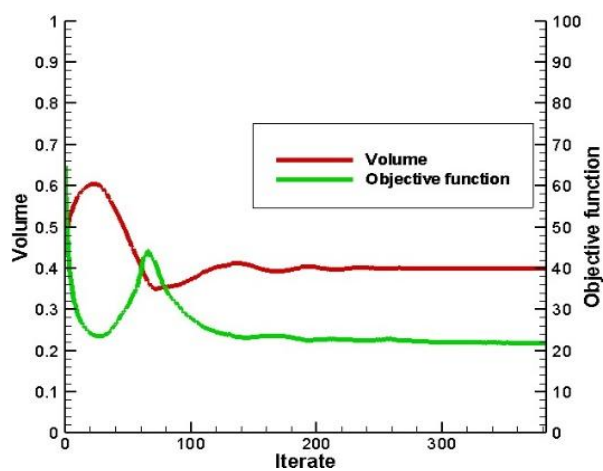
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۱۱ و ۱۱۲) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۱۱۰-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



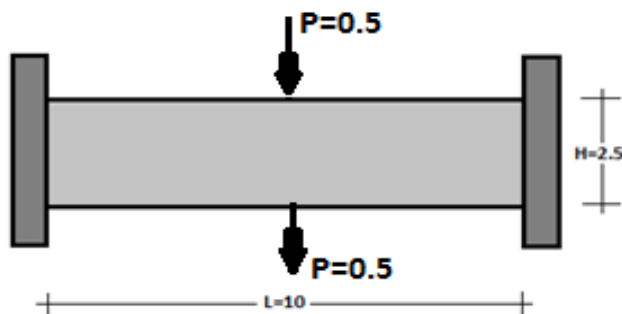
شکل (۱۱۱-۶) توپولوژی بهینه



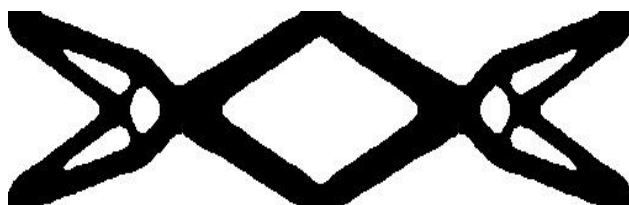
شکل (۱۱۲-۶) نمودار روند همگرایی

۴- تیر دوسرگیردار

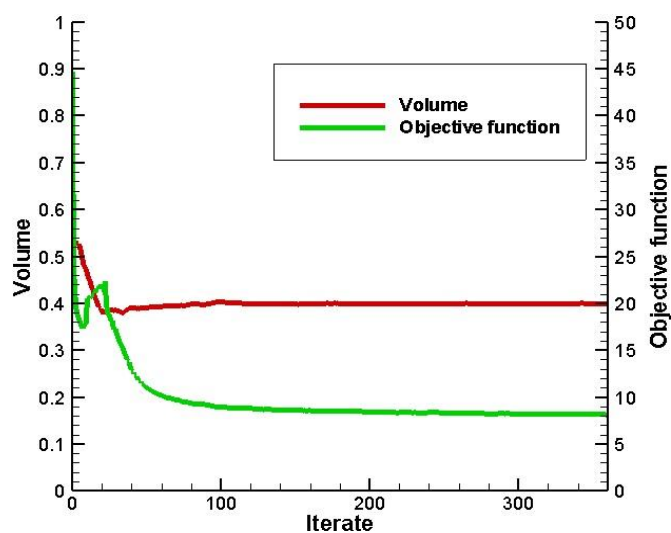
در شکل زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۱۴ و ۱۱۵) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



شکل (۱۱۳-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۱۱۴-۶) توپولوژی بهینه



شکل (۱۱۵-۶) نمودار روند همگرایی

۶-۱-۶- مسئله‌ی چندهدفه

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} J(u, \phi) = \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} u^T \text{kuH}(\phi) d\Omega \\ V(\phi) = \int_{\bar{D}} H(\phi) d\Omega \end{array} \right. \\ \text{S.t.: Equilibrium} \\ g(u) = \sigma_{vm}(u) - \sigma_{\max} \leq 0 ; \\ \text{Design Restrictions} \end{array} \right. \quad (۱۳-۶)$$

رابطه‌ی تنش فون میزس^۱ به صورت زیر است:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (۱۴-۶)$$

۶-۱-۶-۱- پدیده‌ی تکین شدن^۲

پدیده‌ی تکین شدن برای اولین بار در [۴۱] مشاهده شد. در یک مسئله‌ی خریای سه‌عضوی نشان داده شد که زمانی که وزن به عنوان تابع هدف کمینه می‌شود و تنش‌های موضعی به عنوان قیود مسئله در نظر گرفته شده‌اند، جواب صحیح مسئله‌ی بهینه‌سازی به دست نمی‌آید. برای این منظور از تکنیک رهاسازی^۳ استفاده شده است. دو روش عمده برای رهاسازی یکی رهاسازی ϵ [۴۲] و دیگری رهاسازی $p-q$ [۴۳] است.

^۱ Von Mises

^۲ Stress singularity

^۳ Stress Relaxation techniques

الف) رهاسازی ε :

در این تکنیک قیود مسئله‌ی بهینه‌سازی بدین ترتیب تغییر خواهند کرد:

$$g(u) = \sigma_{vm}(u) - \sigma_{\max} + \psi(\phi) \leq 0 \quad (15-6)$$

که در آن ψ به‌منظور جلوگیری از تکین شدن قیود موضعی به کار می‌رود و رابطه‌ای که برای آن وجود دارد به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \psi(\phi) &= \varepsilon \left(\frac{\rho-1}{\rho} \right); \quad 0 < \varepsilon \ll 1; \\ \rho_e &= \frac{\int_{\Omega^e} H(\phi) d\Omega^e}{\int_{\Omega^e} d\Omega^e} \end{aligned} \quad (16-6)$$

همان‌طور که مشخص است:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g(u) = -\infty \leq 0; \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (17-6)$$

ب) رهاسازی p - q :

در این تکنیک قیود بدین ترتیب تغییر خواهند نمود:

$$g(u) = \left\{ \sigma_{vm}(u) \times \rho^{p-q} - \sigma_{\max} \right\} \leq 0; \quad p > q \quad (18-6)$$

همان‌طور که مشخص است:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g(u) = -\sigma_{\max} \leq 0; \quad p > q \quad (19-6)$$

به‌طور کلی با کاهش شدید چگالی مصالح بر روی یک المان، این المان به یک المان ضعیف^۱ تبدیل شده لذا با افزایش تغییر مکان‌های هر نقطه از این المان، تنش در آن افزایش چشمگیری پیدا می‌کند که با تکنیک‌های رها سازی جلوی این افزایش تنش ناخواسته گرفته خواهد شد.

در پایان‌نامه از تکنیک رها سازی ε استفاده شده و رابطه‌ای که برای این منظور در نظر گرفته شده است به‌فرم زیر خواهد بود:

$$\psi(\phi) = \varepsilon \left(\frac{\ln \rho}{\rho} \right); \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (20-6)$$

فرم لاگرانژین مسئله‌ی فوق به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L}(u, \phi) = J(u, \phi) + V(\phi) + \sum_{i=1}^{ns} \lambda_i g_i(u, \psi(\phi)) + a(u, w) - \ell(w) \quad (21-6)$$

ملاحظه می‌شود که رابطه‌ی فوق تقریباً مشابه با رابطه‌ی (۳-۶) بوده فقط قیود تنش محلی به آن اضافه شده است پس آنالیز حساسیت آن‌ها مشابه می‌باشد لذا در این قسمت فقط به آنالیز حساسیت قیود تنشی با استفاده از روش تحلیلی مستقیم می‌پردازیم.

از فصل قبل می‌دانیم که:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \phi} = -K^{-1} \left(\frac{\partial k}{\partial \phi} u \right) \quad (22-6)$$

لذا خواهیم داشت:

^۱ Weak element

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_i(u, \psi(\phi))}{\partial \phi} &= \frac{\partial(\sigma_{vm} - \sigma_{max})}{\partial \phi} + \frac{\partial(\psi(\phi))}{\partial \phi} = \frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial \phi} + \frac{\partial \psi(\phi)}{\partial \phi} \\
 &= \frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial u} u' + \psi'(\phi) \\
 &= \frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial u} (-K^{-1}(\frac{\partial k}{\partial \phi} u)) + \psi'(\phi)
 \end{aligned} \tag{۲۳-۶}$$

لذا با استفاده از روش تندترین شیب، سرعت نرمال مربوط به قیود تنش‌ی به صورت زیر به دست

خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 v_{ns} &= -\lambda \left(\frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial u} (-K^{-1}(k'u)) + \psi'(\phi) \right) ; \text{ on } \partial \phi \text{ OR } \phi = 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{vm}^i}{\partial u} &= \frac{BD}{2\sigma_{vm}} ((2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}), (6\sigma_{xy}))
 \end{aligned} \tag{۲۴-۶}$$

لذا رابطه‌ی سرعت نرمال برای کل مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_n = \frac{1}{2} u^T k u - 1 + v_{ns} \tag{۲۵-۶}$$

۶-۱-۶-۱- مثال‌های حل شده

در این قسمت سه مسئله‌ی بهینه‌سازی حل شده و سازه‌ی بهینه به دست آمده است ابتدا مسئله‌ی کمینه کردن وزن تحت قیود موضعی تنش حل شده تا تخمینی از وزن کمینه به دست آید؛ سپس مسئله‌ی کمینه کردن انرژی کرنشی تحت قید وزن حل شده که در این قسمت قید وزن برابر با وزن به دست آمده از مسئله‌ی کمینه کردن وزن قرار داده شده است و در انتها نیز مسئله‌ی چندهدفه حل خواهد شد که در آن انرژی کرنشی و وزن همزمان کمینه شده و تنش‌های موضعی به عنوان قیود مسئله در نظر گرفته می‌شوند.

به منظور اعمال قیود تنش به مسائل مینیمم کردن انرژی، می‌بایست از مثال‌هایی استفاده شود که در آن دامنه‌ی طرح دارای تمرکز تنش ذاتی می‌باشد زیرا از آن جایی که می‌دانیم مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تا آن جایی که ممکن است می‌تواند تنش‌ها را هم اصلاح کند ولی در مثال‌های دارای تمرکز تنش ذاتی قادر به اصلاح ناحیه‌ی دارای تمرکز تنش نمی‌باشد. یکی از مثال‌های فراگیر در این زمینه، مثال سازه‌ی ال-شکل می‌باشد.

مثال ۱: تیر ال-شکل با بارگذاری در وسط ارتفاع

در تمامی مثال‌های این بخش بار واحد P بر سازه وارد شده و کل دامنه با ۱۱۰۵ نقطه‌ی کنترلی که توسط دو وصله‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده؛ مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۳ در نظر گرفته شده است.

همچنین برای وصله‌ی اول مقادیر بردارهای گرهی به صورت زیر بوده

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.0667, 0.133, \dots, 0.867, 0.933, 1, 1, 1\}$$

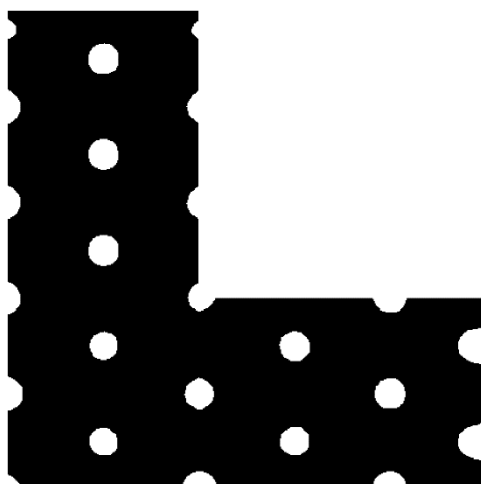
$$\eta = \{0, 0, 0, 0.0256, 0.0513, \dots, 0.949, 0.974, 1, 1, 1\}$$

و نیز برای وصله‌ی دوم مقادیر بردارهای گرهی به صورت زیر خواهد بود.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.0435, 0.087, \dots, 0.913, 0.957, 1, 1, 1\}$$

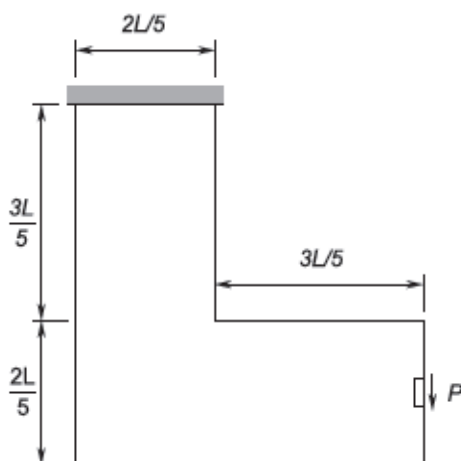
$$\eta = \{0, 0, 0, 0.0667, 0.133, \dots, 0.867, 0.933, 1, 1, 1\}$$

همچنین ورودی اولیه برای این گروه از مثال‌ها به صورت شکل زیر می‌باشد.



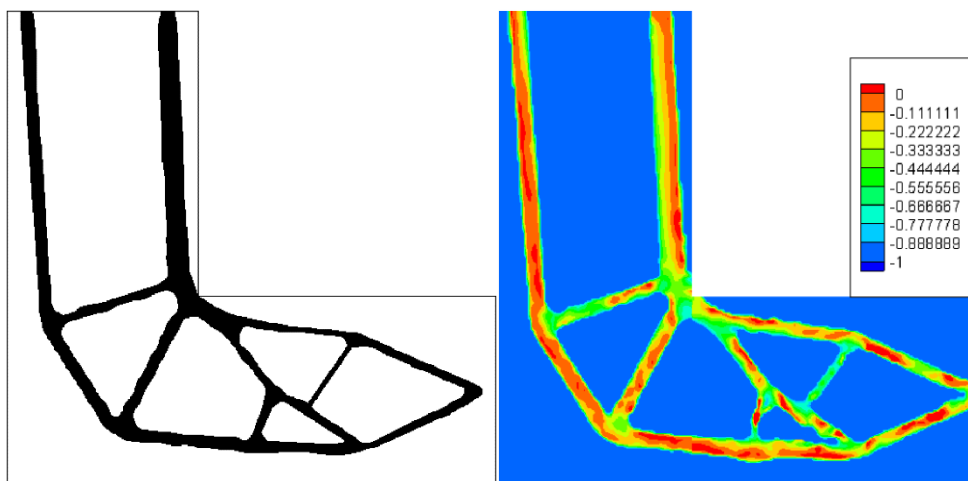
شکل (۶-۱۱۶) ورودی اولیه در تیرهای ال-شکل

در اشکال زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و نیز توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است. برای اعمال قیود تنشی به این سازه از ۲۵۹۲۰ نقطه‌ی تنشی در کل سازه استفاده است و حداکثر تنش به ۹۰ محدود می‌شود. نتایج مربوط به این مسئله در اشکال زیر موجود است.

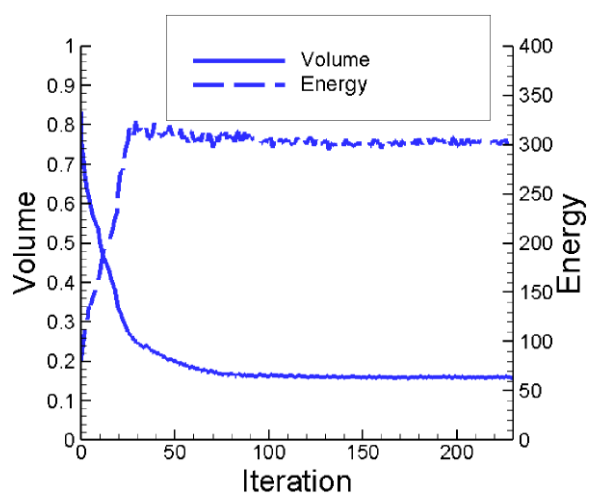


شکل (۶-۱۱۷) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری

❖ کمینه کردن وزن



شکل (۶-۱۱۸) توپولوژی بهینه (سمت چپ) و کانتورهای تنش (سمت راست)



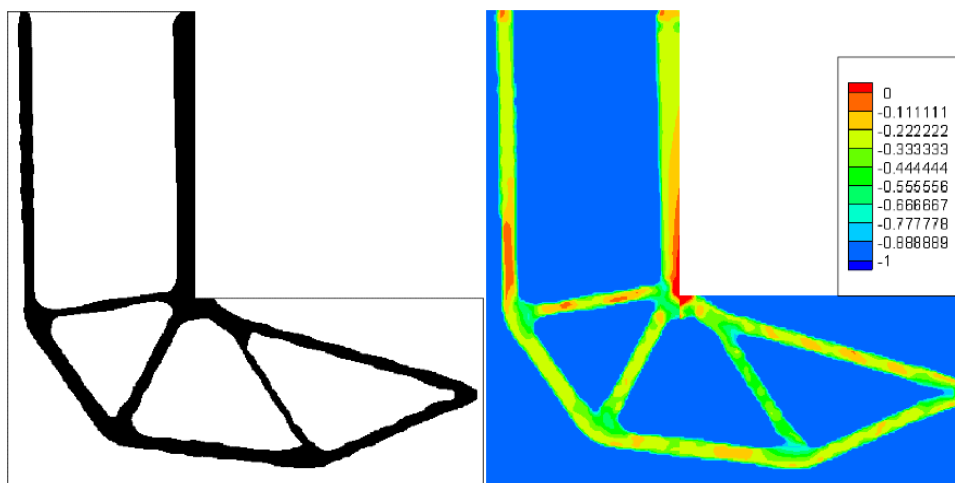
شکل (۶-۱۱۹) نمودار روند همگرایی

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

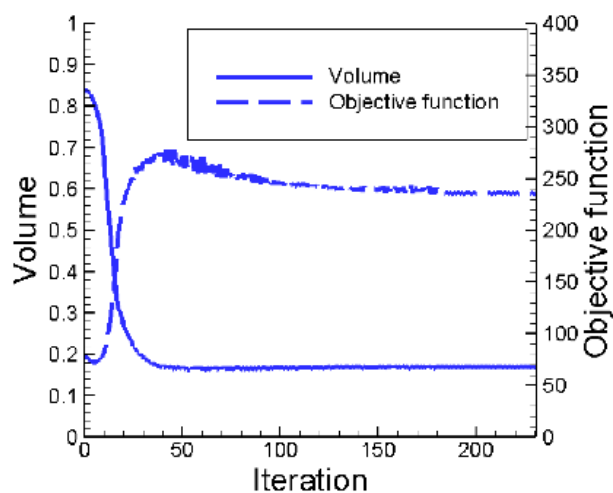
جدول (۶-۲) خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۱۵,۹۴	۹۲,۴۶	۹۰	۳۰۴,۷۴

❖ کمینه کردن انرژی کرنشی



شکل (۶-۱۲۰) توپولوژی بهینه (سمت چپ) و کانتورهای تنش (سمت راست)



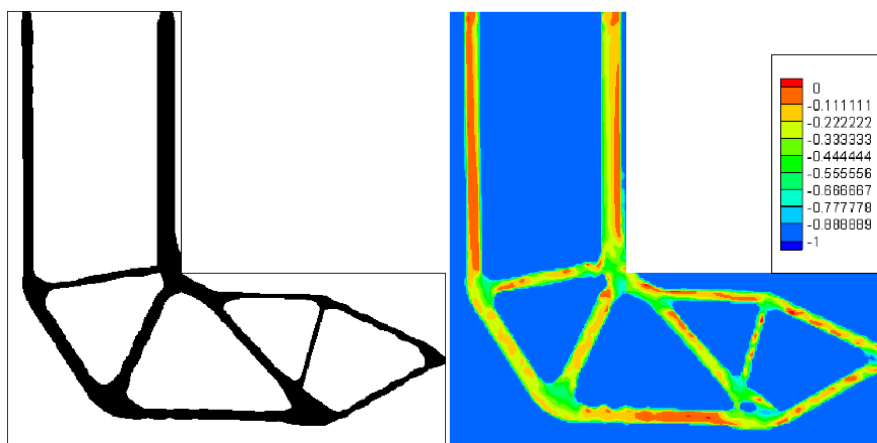
شکل (۶-۱۲۱) نمودار روند همگرایی

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

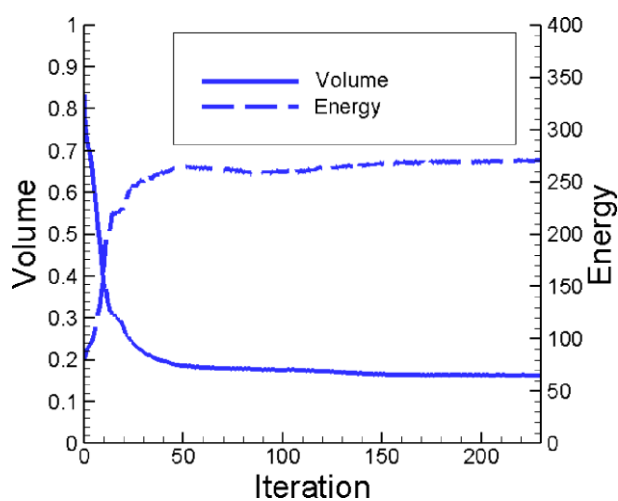
جدول (۶-۳) خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۱۷	۱۸۹,۲	-	۲۳۶,۶۵

❖ کمینه کردن انرژی کرنشی و وزن



شکل (۶-۱۲۲) توپولوژی بهینه (سمت چپ) و کانتورهای تنش (سمت راست)



شکل (۶-۱۲۳) نمودار روند همگرایی

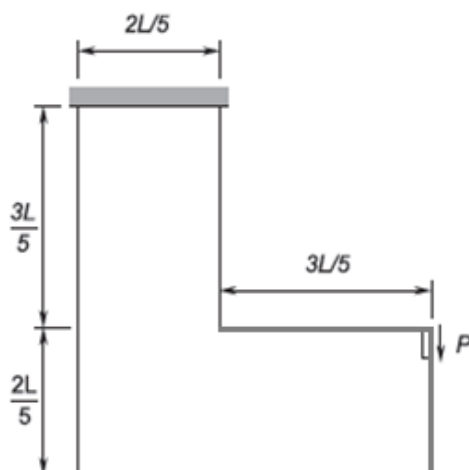
در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

جدول (۶-۴) خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده از طرح بهینه.

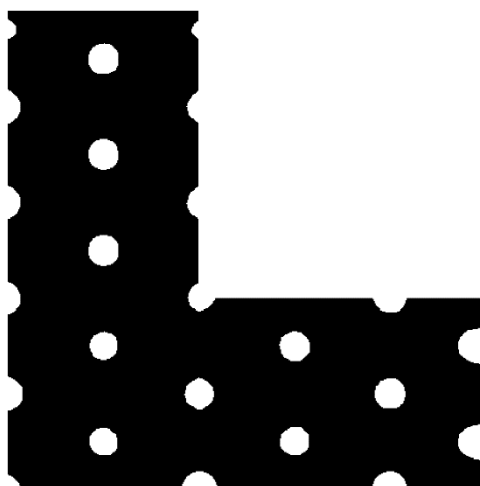
درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۱۶,۳	۹۰,۴۳	۹۰	۲۷۰,۶۱

مثال ۲: تیر ال-شکل با بارگذاری در انتهای فوقانی ارتفاع

به‌عنوان مثال دوم همین مسئله فقط با تغییر در محل اعمال بار دوباره حل می‌شود. شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی، ورودی اولیه و نیز نتایج بهینه‌سازی در اشکال زیر نشان داده شده است.

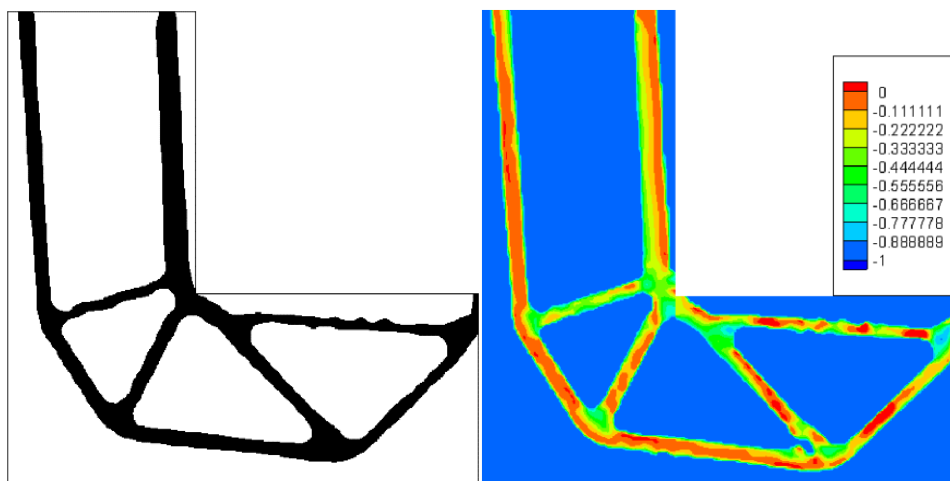


شکل (۶-۱۲۴) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری

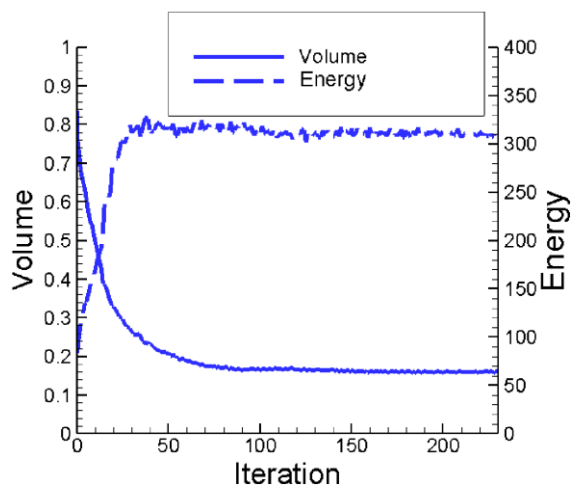


شکل (۶-۱۲۵) ورودی اولیه در تیرهای ال-شکل

❖ کمینه کردن وزن



شکل (۶-۱۲۵) توپولوژی بهینه (سمت چپ) و کانتورهای تنش (سمت راست)



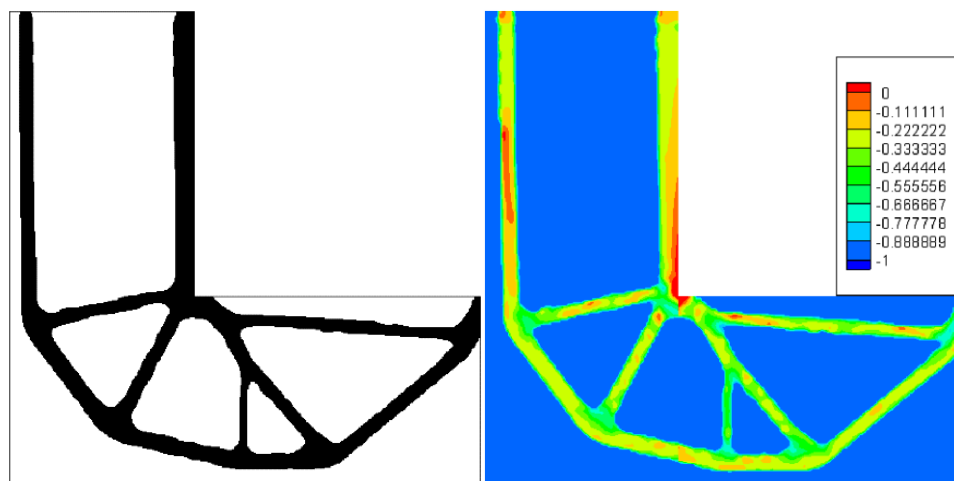
شکل (۶-۱۲۶) نمودار روند همگرایی

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

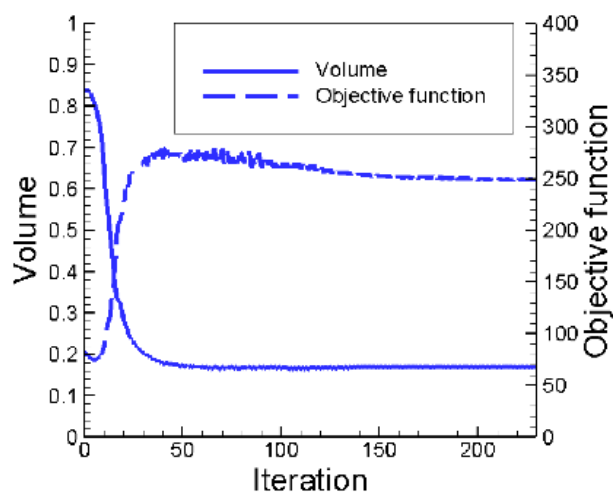
جدول (۶-۵) خلاصه‌ای از نتایج به‌دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۱۶,۰۳	۹۱,۸	۹۰	۳۰۶,۷۶

❖ کمینه کردن انرژی کرنشی



شکل (۶-۱۲۷) توپولوژی بهینه (سمت چپ) و کانتورهای تنش (سمت راست)



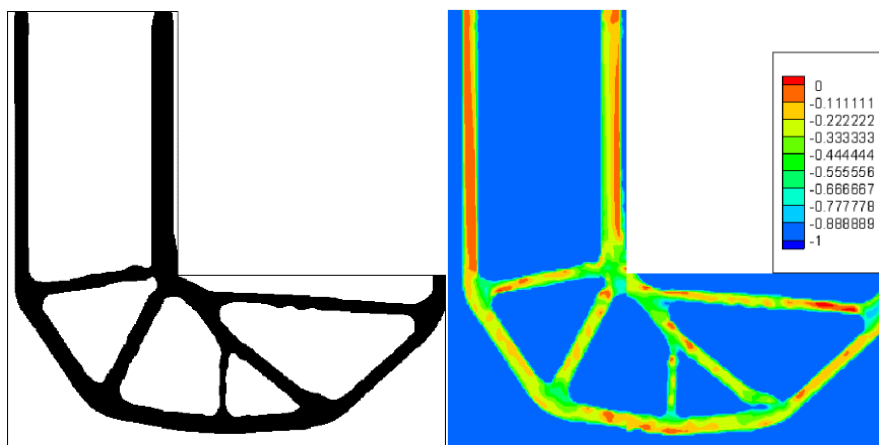
شکل (۶-۱۲۸) نمودار روند همگرایی

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

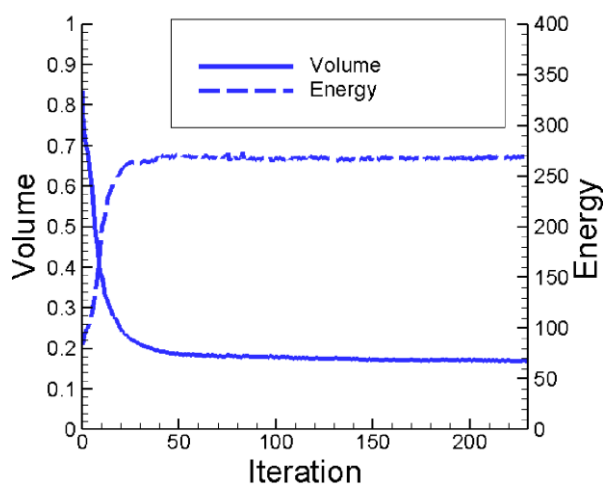
جدول (۶-۶) خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۱۷	۱۸۶,۸۵	–	۲۴۷,۲۳

❖ کمینه کردن انرژی کرنشی و وزن



شکل (۶-۱۲۹) توپولوژی بهینه (سمت چپ) و کانتورهای تنش (سمت راست)



شکل (۶-۱۳۰) نمودار روند همگرایی

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

جدول (۶-۷) خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۱۶,۸۴	۹۰,۹۳	۹۰	۲۶۸,۲۹

مثال ۳: تیر طره

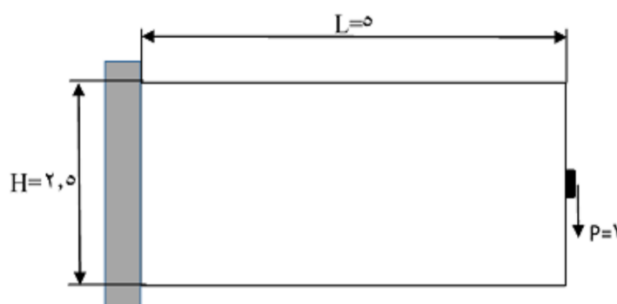
تیر طره از جمله مثال‌هایی است که در هندسه‌ی آن دارای تمرکز تنش ذاتی نیست و فقط عموماً تمرکز تنش در ناحیه‌ی تکیه‌گاه‌ها اتفاق می‌افتد.

در تمامی مثال‌های این بخش بار واحد P بر سازه وارد شده و کل دامنه با ۱۳۲۶ نقطه‌ی کنترلی که توسط دو وصله‌ی نرئز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده؛ مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۳ در نظر گرفته شده است.

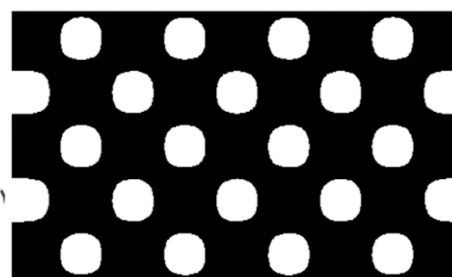
بردارهای گرهی به‌دست آمده برای هر کدام از وصله‌ها به‌صورت زیر است.

$$\eta = \xi = \{0, 0, 0, 0.04167, 0.08334, \dots, 0.9167, 0.9584, 1, 1, 1\}$$

در اشکال زیر شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی و نیز ورودی اولیه برای شروع روند همگرایی این مسئله و همچنین توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است. برای اعمال قیود تنشی به این سازه از ۳۱۵۰۰ نقطه‌ی تنشی در کل سازه استفاده است و حداکثر تنش به ۱۰ محدود می‌شود. نتایج مربوط به این مسئله در اشکال زیر موجود است.

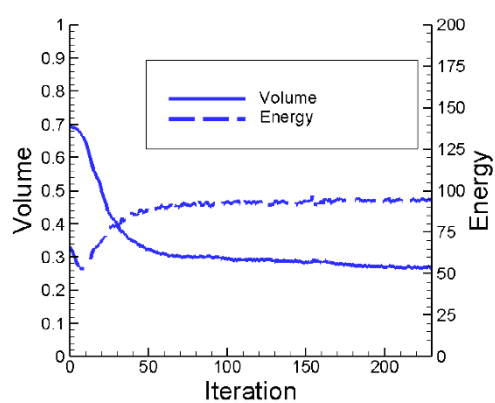
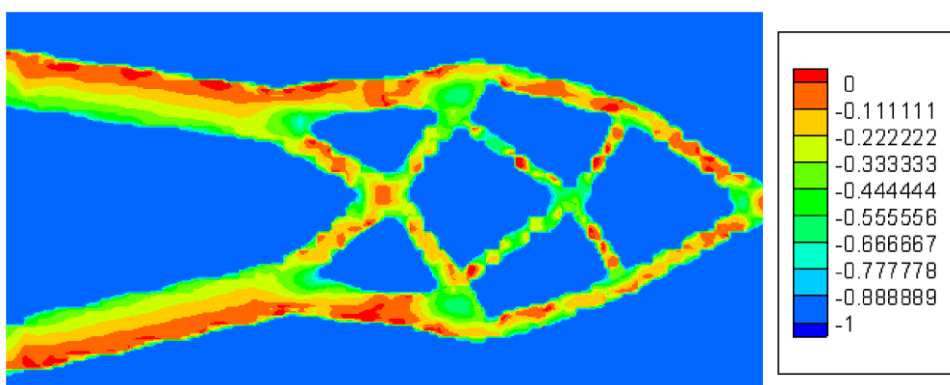
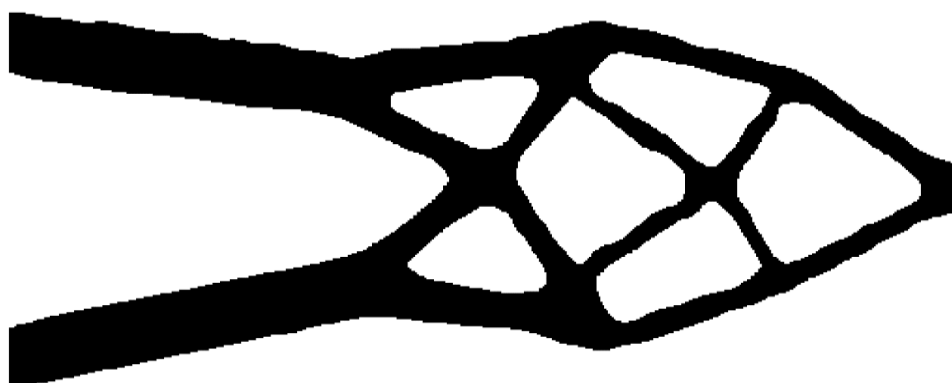


شکل (۶-۱۳۳) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری



شکل (۶-۱۳۲) ورودی اولیه در تیرهای طره

❖ کمینه کردن وزن



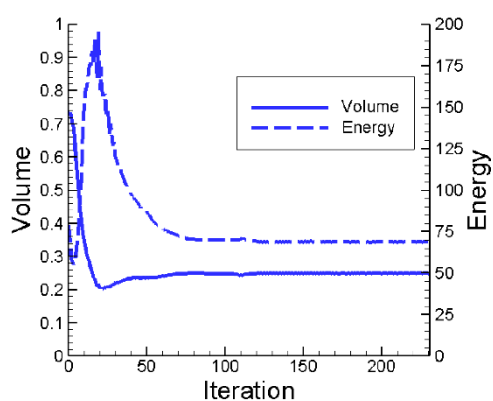
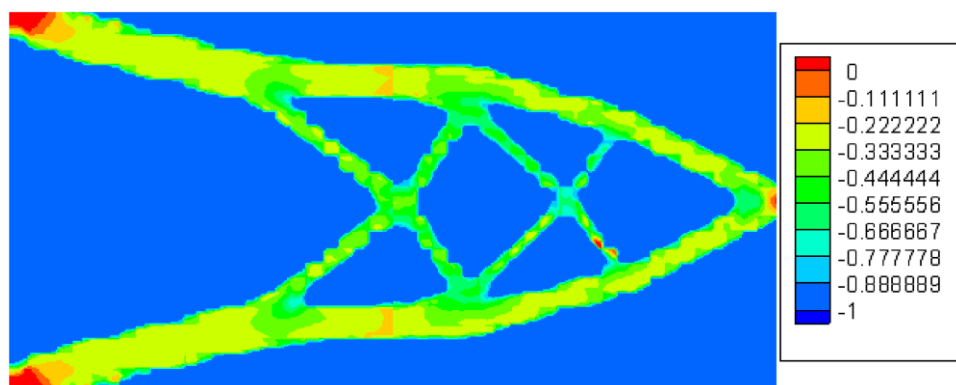
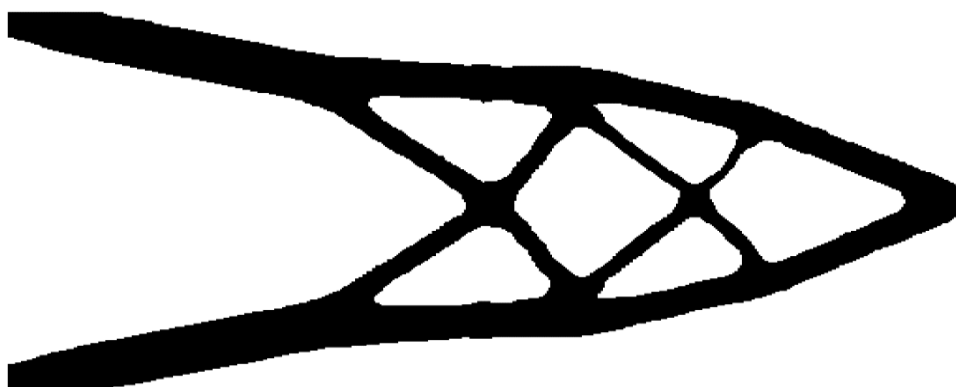
شکل (۶-۱۳۳) توپولوژی بهینه (بالا) کانتورهای تنش (وسط) و نمودار روند همگرایی (پایین)

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

جدول (۶-۸) خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۲۶,۳۵	۱۰,۴۸	۱۰	۹۵,۹۵

❖ کمینه کردن انرژی کرنشی



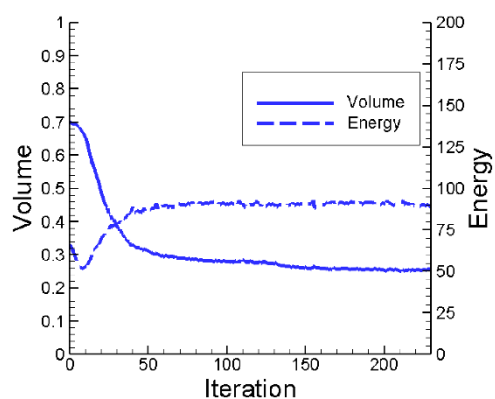
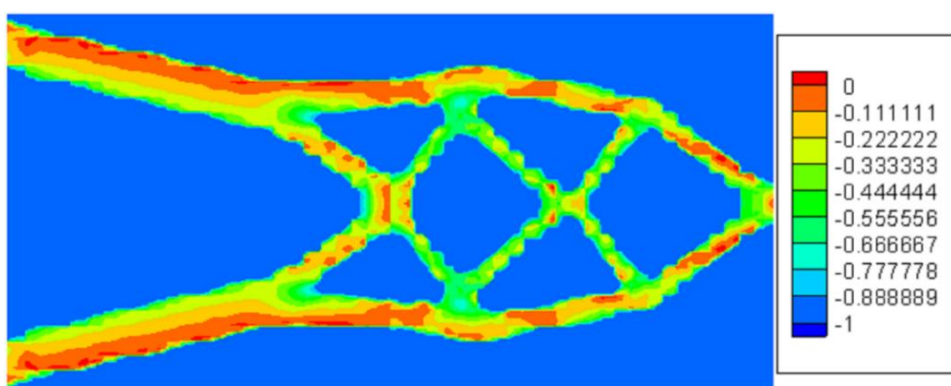
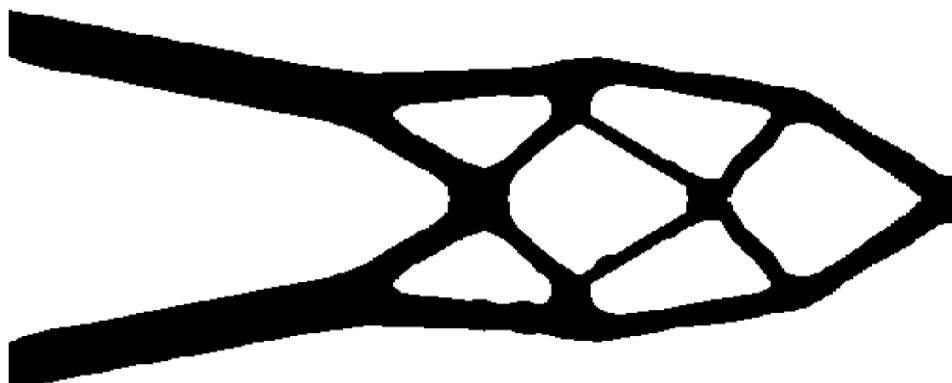
شکل (۶-۱۳۴) توپولوژی بهینه (بالا) کانتورهای تنش (وسط) و نمودار روند همگرایی (پایین)

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

جدول (۶-۹) خلاصه‌ای از نتایج به‌دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۲۵	۲۱,۷۱	—	۶۹,۲۲

❖ کمینه کردن انرژی کرنشی و وزن



شکل (۶-۱۳۵) توپولوژی بهینه (بالا) کانتورهای تنش (وسط) و نمودار روند همگرایی (پایین)

در جدول زیر مشخصات مربوط به این توپولوژی ذکر شده است.

جدول (۶-۱۰) خلاصه‌ای از نتایج به‌دست آمده از طرح بهینه.

درصد وزن	حداکثر تنش	قید تنش	انرژی کرنشی
۲۵,۱	۱۰,۳۲	۱۰	۸۸,۵۴

فصل هفتم

نتایج و پیشنهادات

۷-۱- مقدمه

در فصول قبل روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها و همچنین روش تحلیل آیزوژئومتریک به‌طور مفصل بررسی شدند و همچنین مثال‌های عددی برای بررسی کارایی این روش‌ها مورد مطالعه قرار گرفتند در این فصل نتایج کلی حاصل از این مطالعات به‌صورت خلاصه ذکر می‌گردد. همچنین در پایان پیشنهادهایی جهت فعالیت‌های آتی ارائه خواهد شد.

۷-۲- نتایج

روش مجموعه‌ی سطوح تراز به‌عنوان روشی قدرتمند به‌طور مفصل در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفت. استفاده از مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها این امکان را فراهم می‌کند که همواره اطلاعات مربوط به هندسه‌ی سازه را در اختیار داشته باشیم. از دیگر مزایای این روش این است توپولوژی سازه به‌راحتی قابل تغییر می‌باشد و نیاز به تکرار در ایجاد شبکه‌ی اجزای محدود و یا به‌دست آوردن پارامترهای هندسی سازه نمی‌باشد. مرزها به‌سادگی می‌توانند به همدیگر متصل شده و مرز واحدی را تشکیل دهند و یا برعکس، سوراخ‌هایی از جدا شدن مرزها تولید شوند. در روند بهینه‌سازی نیز با توجه به مستقل بودن سازه نسبت به المان، مرزهای سازه بسیار نرم و هموارتر از روش‌های المان‌محور می‌باشد.

همچنین با به‌کارگیری تابع مجموعه‌ی سطوح تراز در مسئله‌ی بهینه‌سازی پس از اتمام فرایند بهینه‌سازی، مرزها نیاز به پردازش بیشتر ندارند و در واقع شکل سازه نیز تا حدود زیادی بهینه می‌شود. از دیگر مزایای این روش نسبت به روش‌های المان‌محور، عدم حضور ناحیه‌ی خاکستری در اطراف مرز می‌باشد.

استفاده از قيود تنش منجر به ايجاد سازه‌ای بهينه که در عمل نیز قابل استفاده می‌باشد؛ خواهد شد.

همچنین ترکیب این روش با روش تحلیل آیزوژئومتریك این کمک را به طراح می‌کند تا به راحتی با تعداد بسیار کمتری نقطه نسبت به روش اجزای محدود، اشکال منحنی و پیچیده را مدل کرده و بهینه‌سازی این اشکال پیچیده را انجام دهد.

مشابه روش‌های عددی دیگر در روش آیزوژئومتریك نیز می‌توان از مبانی پایه‌ی مشابهی

همچون مفهوم آیزوپارامتریك استفاده کرد.

با توجه به انعطاف‌پذیری بالای نرزه‌ها در مدل‌سازی هندسه و تقریب توابع مجهول می‌توان با تعداد نقاط کنترلی کم دقت بالایی در مدل‌سازی هندسه و تقریب توابع مجهول به دست آورد که این مسئله حجم معادلات را بسیار کاهش می‌دهد و سبب می‌شود با حجم کمتری از محاسبات و سرعت بیشتر نسبت به روش‌های عددی دیگر، به دقت مشابهی در حل برسیم.

استراتژی‌های اصلاح شبکه^۱ همچون اصلاح h و p و همچنین اصلاح جدید k در این روش کاربرد دارند و همچون روش اجزای محدود می‌توان از این استراتژی‌ها استفاده کرد.

در روش آیزوژئومتریك نقاط کنترلی سطوح حل، (مجهولات مسئله) لزوماً بر هندسه و فیزیک حل منطبق نیستند و بنابراین دو مفهوم شبکه‌ی کنترلی و فیزیکی در این روش مطرح است. نقاط کنترلی، شبکه‌ی کنترلی را ایجاد می‌کنند که این شبکه، در مسائل دوبعدی شامل اعضای چهارضلعی و در مسائل سه‌بعدی شامل اعضای شش‌وجهی است. نقاط کنترلی توسط این شبکه درونیابی می‌شوند. این فرآیند سبب انعطاف‌پذیری نرزه‌ها در مدل کردن هندسه‌های پیچیده می‌شود.

^۱ Mesh refinement

با استفاده از نریزها تعریف هندسه‌ی مسئله با دقت بسیار بالا انجام می‌شود، لذا می‌توان با استفاده از این مزیت شکل مرزها را به‌صورت مناسبی با دقت بالا مدل کرد. ضمن اینکه به کمک نریزها امکان مدل‌سازی اشکالی همچون دایره و بیضی در حالت دوبعدی و کره و بیضی‌گون در حالت سه‌بعدی با دقت بالایی وجود دارد.

در این روش تغییرات سطوح مرزی در حین بهینه‌سازی خللی در یکنواختی آن‌ها ایجاد نمی‌کند و در حین بهینه‌سازی با تغییراتی که در مرز ایجاد می‌شود همواری لازم همچنان حفظ می‌شود.

یکی از مهم‌ترین مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های متداول که از روش اجزای محدود استفاده می‌کنند؛ حذف مرحله‌ی ساخت شبکه‌ی اجزای محدود در حین مراحل بهینه‌سازی است. این کار سبب کاهش قابل‌ملاحظه‌ی حجم محاسبات به‌ویژه در مسائل سه‌بعدی می‌شود.

استفاده از توابعی که تحلیل مسائل توسط آن‌ها انجام می‌شود به‌عنوان توابعی که مدل هندسی را ایجاد می‌کنند، باعث می‌شود مشکل دوگانگی مدل تحلیل و مدل طراحی که مشکلی بزرگ در سایر روش‌های عددی است حل شود و به این وسیله مدل تحلیل و طراحی به هم پیوند داده شوند. به‌این‌ترتیب دیگر نیازی به کار اضافی جهت تبدیل مدل طراحی به مدل تحلیل و برعکس وجود ندارد. در بهینه‌سازی معمولاً کمینه کردن وزن از نظر اقتصادی و کمینه کردن انرژی کرنشی سازه از نقطه نظر سازه‌ای همواره برای طراحان از جمله مهم‌ترین و قوی‌ترین مسائل بهینه‌سازی به‌شمار رفته‌اند؛ لذا در این پایان‌نامه به‌گونه‌ی مناسبی هم وزن و هم انرژی کرنشی به‌طور همزمان به‌عنوان تابع هدف در نظر گرفته شده است تا سازه‌ی بهینه‌شده هم از لحاظ اقتصادی و هم از لحاظ عملکرد سازه‌ای بهینه شود و توپولوژی به‌دست آمده حالت کاربردی‌تری به‌خود بگیرد. همان‌طور که مشخص است در مسئله‌ی کمینه کردن وزن هیچ شرطی برای افزایش سختی سازه وجود ندارد لذا توپولوژی بهینه فقط روندی را پیش می‌گیرد تا قیود تنش را اقلان کند. ولی مسئله‌ی کمینه کردن انرژی کرنشی هم مفهوم با بیشینه کردن سختی کل سازه است لذا سازه‌ی نهایی مورد اعتمادتر و قابل اطمینان‌تر از

مسئله‌ی کمینه کردن وزن خواهد بود. لذا با ترکیب این دو به‌عنوان تابع هدف، کمینه‌ترین وزن و بیشینه‌ترین سختی (کمینه‌ترین انرژی کرنشی) همزمان با اقناع قیود تنش‌ی به‌دست می‌آید. همچنین چنانکه مشاهده شد؛ در حالت مسئله‌ی چندهدفه، قیود تنش بسیار سریع‌تر و پیوسته‌تر همگرا شدند. همچنین با اعمال رهاسازی مناسب به‌راحتی پدید تکینگی تنش‌های موضعی کنترل شد.

۷-۲- پیشنهادات

در این پایان نامه شکل کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی به این صورت بررسی شد که ابتدا انرژی کرنشی به‌عنوان تابع هدف و حجم به‌عنوان قید طراحی در نظر گرفته شد و سپس قیود تنش محلی نیز به آن اضافه شد. همان‌طور مشخص است مینیمم کردن انرژی کرنشی از لحاظ سازه‌ای و مینیمم کردن وزن نیز از نظر اقتصادی یکی از مهم‌ترین مسائل بهینه‌سازی می‌باشند. لذا با ترکیب این دو به‌طور همزمان به‌عنوان تابع هدف و در نظر گرفتن قیود تنش محلی به‌عنوان محدودیت‌های مسئله می‌توان به سازه‌ای که هم از لحاظ اقتصادی به‌صرفه بوده و هم از لحاظ سازه‌ای ایمن باشد، دست یافت. می‌توان به‌منظور بهینه‌سازی، از مصالح غیرخطی یا از مصالح در فاز پلاستیک استفاده نمود. همچنین می‌توان مسائل را با در نظر گرفتن هندسه‌ی غیرخطی سازه بررسی کرد. یکی دیگر از مسائل مورد نظر طراحان پدیده‌ی خستگی سازه تحت اثر بارهای نوسانی یا ضربه‌ای یا رفت و برگشتی است که می‌توان با استفاده از روش مجموعه‌ی سطوح تراز توپولوژی بهینه‌ی این سازه‌ها را نیز یافت.

مراجع:

- [1]. Haftka, R.T., Gandhi, R.V., 1986, Structural shape optimization A survey, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 57, 91–106
- [2]. Ding, Y. 1986, Shape optimization of structures: A Literature Survey, *Comput Struct.*, 24, 985–1004
- [3]. Olhoff, N., Rozvany, GIN. (eds.) 1995, *WCSMO-1, Proc. First World Cong. on Structural and Multidisciplinary Optimization*, (held in Goslar, May 28–June 2). Oxford: Pergamon.
- [4]. Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. 1988, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2, 197–224
- [5]. Bendsoe, M.P. 1989, Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim. I*, 193–202
- [6]. Xie, Y.M.; Steven, G.P. 1997, *Evolutionary structural optimization*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [7]. Bendsoe, M.P. 1995, *Optimization of structural topology, shape, and material*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [8]. Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Inc.
- [9] Wall, W. A. Frenzel, M. A., and Cyron, C., 2008; *Isogeometric structural optimization*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 197, pp. 2976-2988
- [10] T.J.R. Hughes; 2000, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Mineola, NY.
- [11] T.J.R. Hughes, J. Cottrel and Y. Bazilevs (2009), “*Isogeometric Analysis Toward integration of CAD and FEA*”, Wiley.
- [12] L.M.Kurshin, P.M.Onoprienko, (1976) “*Determination of the shapes of doubly connected bar section of maximum torsional stiffnes*”, *Prikl. Mat. Mekh*, vol. 40, no 6, pp. 1078-1084.
- [13] M.Weck, P.Steinke (1983) “*An efficient technique in shape optimization*”, *J. Structural mech*, vol. 11, no. 4, pp. 433-449.

-
- [14] R.J.Yang, K.Choi, (1985) “Accuracy of finite element based shape design sensitivity analysis “, *ASCE J.Structural Mech*, vol. 13, no. 2, pp. 223-239.
- [15] V.Braibent, C.Fleury. (1984), “shape optimal design: A performing C.A.D oriented formulation”, in *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th structural Dynamic and Material Conference*, CA.
- [16] T.J.R Hughes, J.Cotrel. and Y. Bazilevs (2005), “Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4135-4195.
- [17] Wilde, D.J, (1978), *Globally Optimal Design*, John wiley and sons, NewYork.
- [18] Allaire G., Jouve F.; A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:3269–3290. DOI: 10.1016/j.cma.2004.12.018, 2005.
- [19] Fleury C., Braibant V., 1986, Structural optimization - a new dual method using mixed variable, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 23,409-428
- [20] Bloomenthal, J., Bajaj, C., Blinn, J., Cani-Gascuel, M.-P., Rockwood, A., Wyvill, B., and Wyvill, G., 1997, *Introduction to Implicit Surfaces*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco.
- [21] Tryggvason, G, Bunner, B., Juric, D., Tauber, W., Nas, S., Han, J., Al-Rawahi, N., and Jan, Y.-J., 2001, A Front Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow, *J. Comput. Phys.* V. 169, 708–759.
- [22] Williams, F.A., 1985, *The Mathematics of Combustion*, (J.D. Buckmaster, ed.), SIAM, Philadelphia, PA, 97–131.
- [23] Eschenauer HA, Olhoff N., 2001, Topology optimization of continuum structures: A review, *Applied Mechanics Review*, Vol. 54 331-390.
- [24] Rozvany GIN, Zhou M and Birker T., 1992, Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, Vol. 4 250-252.
- [25] Sethian JA, Wiegmann A., 2000, Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, Vol.163 489-528.
- [26] Osher SJ, Santosa F., 2001, Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. Frequence of a two density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, Vol. 171 272-288.
- [27] Allaire G, Jouve F and Toader AM., 2002, A level set method for shape optimization. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie I*, Vol. 334 1125-1130.

-
- [28] Wang MY, Wang XM and Guo DM., 2003, A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192 227-246.
- [29] Wang X, Wang MY and Guo D., 2004, Structural shape and topology optimization in a level-set framework of region representation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27 1-19.
- [30] Wang MY, Wang XM., 2004, "Color" level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193 469 – 496.
- [31] Petersen NL., 2000, Maximization of Eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20 2-12.
- [32] de Ruiter MJ, van Keulen F., 2004, Topology optimization using a topology description function, *Struct Multidisc Optim*.
- [33] Belytschko T, Xiao SP and Parimi C., 2003, Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol., 57 1177-1196.
- [34] Luo J., Luo Z., Chen L., Tong L., Wang M.Y.; A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization, *Journal of Computational Physics*, 227:5561–5581. DOI: 10.1016/j.jcp.2008.02.003, 2008.
- [35] Tavakkoli S.M., Hassani B., Ghasemnejad H.: ISOGOMETRIC TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES BY USING MMA, *Int. J. Optim. Civil Eng.*, 2013; 3(2):313-326.
- [36] Shojaee S, Mohamadian M. Piecewise constant level set method for structural topology optimization with Mbo type of projection, *Struct Multidisc Optim*, 2011; 44(4): 455–69.
- [37] Shojaee S, Mohamadian M. and Valizadeh N. composition of Isogepmetric analysis whith level set method for structural topology optimization, *Int. J. Optim. Civil Eng.*, 2012; 2(1):47-70.
- [38] J.A. Sethian, 1999, *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, Cambridge University Press.
- [39] Xu Guo, Wei Sheng Zhang, Michael Yu Wang, Peng Wei; Stress-related topology optimization via level set approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (2011) 3439–3452.
- [40] Hélio Emmendoerfer Jr., Fancello EA, Barcellos CS. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *Int. J. Numer. Meth. Engng* (2014); DOI: 10.1002/nme.4676.

- [41] G. Sved and Z. Ginos, *Structural optimization under multiple loading*, *International Journal of Mechanical Sciences* **10**, 803 (1968).
- [42] G. D. Cheng and X. Guo, “ ε -relaxed” approach in structural topology optimization, *Structural Optimization* **13**, 258 (1997).
- [43] M. Bruggi, *On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization*, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **36**, 125 (2008).

Abstract

There are three types of optimization methods in literature called mathematical, optimality criteria and meta-heuristic based approaches. In this thesis, the level set method which is from mathematical based approaches is applied for topology optimization of structures. In order to describe the boundaries of a structure, zero level of an implicit function from a higher dimension with respect to the geometry, called level set function, is considered. Changes in this function can easily model splitting and merging of the structural elements. Strain energy minimization subject to volume constraint, volume minimization subject to local stress limitations constraints and multi objective function “strain energy and volume” minimization subject to local stress limitations constraints are three types of optimization problems that discussed in this thesis. Since derivatives of objective and constraints functions are needed in LSM, sensitivity analysis forms part of this research and an analytical approach is developed for this purpose. Also, In order to satisfy the volume constraint a simple method is introduced based on sensitivity analysis. For the sake of comparison and verification the results are compared with conventional level set method by demonstrating a few examples.

The IsoGeometric Analysis (IGA) method is employed for structural analysis. In this method unknown function (deformation) is approximated by Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) basis functions which are also used for creating geometry of the structure and construct the level set function. Consequently, by changing the position of control points of NURBS, the geometry and the analysis model will change, simultaneously. Therefore, there is no need to regenerate the analysis model during the optimization iterations, which is the case when the Finite Element (FE) method is used as the analysis engine. In order to verify the derived sensitivity equations, demonstrate the ability of LSM in solving topology optimization problems and check the code that written in this thesis, several two dimensional illustrative examples are presented.

Key Words: topology optimization, level set level, sensitivity analysis, IsoGeometric analysis.



Shahrood University of Technology

Faculty of Civil Engineering

M.Sc. Thesis in Structural Engineering

***Topology optimization of structures via level set method and
IsoGeometric analysis.***

By: H. A. Jahangiry

Supervisors:

Dr. R. Naderi

Dr. S.M. Tavakkoli

Date: January ۲۰۱۶