



دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده عمران و معماری

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد  
رشته عمران گرایش سازه

## **استفاده از روشهای مجانبی در بهینه سازی توپولوژی مسائل تنش صفحه ای**

**سروش چراغی**

استاد راهنما

**دکتر بهروز حسنی**

بهمن ۸۷

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده عمران و معماری

# استفاده از روشهای مجانبی در بهینه سازی توپولوژی مسائل تنش صفحه ای

دانشجو: سروش چراغی

استاد راهنما

دکتر بهروز حسنی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته عمران گرایش سازه

بهمن ۸۷

## دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : عمران و معماری

گروه : عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای **سروش چراغی**

تحت عنوان:

*استفاده از روشهای جانبی در بهینه سازی توپولوژی مسائل تنش صفحه ای*

در تاریخ ۱۳۸۷/۱۱/۱۴ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

(رساله دکتری) مورد ارزیابی و با درجه **بسیار خوب** مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور:	امضاء	اساتید راهنما:
	نام و نام خانوادگی : -		نام و نام خانوادگی : آقای دکتر بهروز حسنی
	نام و نام خانوادگی : -		نام و نام خانوادگی : -

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور:
	نام و نام خانوادگی : آقای مهندس محمدی		نام و نام خانوادگی : آقای دکتر کیهانی
			نام و نام خانوادگی : آقای دکتر احمدی
			نام و نام خانوادگی : -
			نام و نام خانوادگی : -

تقدیم به پدر و مادر و برادرهایم

## تشکر و قدردانی

بسیار مدیون محبت های استاد عزیزم جناب آقای دکتر بهروز حسنی می باشم که علاوه بر حق استادی ، الگوی اخلاق ، رفتار و شخصیت برای بنده بوده و خواهد بود. امیدوارم این تلاش مختصر رضایت ایشان را در بر داشته باشد. همیشه بهترین آرزو ها را برای ایشان خواستارم.

جا دارد ، از جناب پروفیسور سونبرگ (Krister Svanberg) هم بخاطر کمک ها و راهنمایی هایشان و در اختیار گذاشتن مثال هایی برای حل به روش MMA تشکر کنم .

هم چنین دوست عزیز ، جناب آقای مهندس توکلی ، بخاطر در اختیار گذاشتن برنامه حل توپولوژیک به روش معیار بهینگی ، بسیار سپاسگزارم. و جناب آقای کریم بیات سرمدی معلم کلاس اول ابتدایی به خاطر تمام خاطرات خوب آن روزها.

سروش چراغی

زمستان ۸۷

## تعهد نامه

اینجانب **سروش طبعی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد / دکتری رشته **سازه**  
دانشکده **معماران** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه / رساله **استفاده از زیرساخت‌های مکانیکی در سازه‌های**  
**تبدیل انرژی ماسبل بندش صنعتی** تحت راهنمایی **جناب دکتر سیدرضا حسینی** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه / رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه / رساله رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ: ۱۴ بهمن ۱۳۹۷

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد .

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه / رساله وجود داشته باشد .

# استفاده از روشهای مجانبی در بهینه سازی توپولوژی مسائل تنش صفحه ای

## سروش چراغی

**چکیده:** استفاده از روشهای تحلیلی در برخی مسائل، خسته کننده، گاهی غیر عملی و به خصوص در بهینه سازی سازه ها که با سازه های بزرگ مقیاس سر و کار داریم، بسیار هزینه بر می باشند.

دلایل نامناسب بودن این روش ها، زیاد شدن متغیرهای طراحی و قیود، غیرخطی شدن توابع طراحی، و یا ضمن بودن توابع هزینه و قید می باشد. این عوامل باعث گسترش جایگزینی روش های تقریبی به جای این روش ها، به صورتی که به محتوی آسیب نرساند، گردید.

در بهینه سازی سازه ها، یک متد باید عمومیت و انعطاف داشته باشد، و قادر باشد، نه تنها متغیرهای طراحی مثل اندازه المانها را بکار برد، بلکه متغیرهایی مثل شکل، زوایا و ... را نیز در برگیرد. در ضمن قادر باشد همه نوع قید به شرطی که مشتقات توابع قید نسبت به متغیرهای طراحی قابل محاسبه باشند را بر مسأله اعمال کند؛ از طرفی قابلیت راه اندازی مسائل برنامه ریزی غیرخطی معمول را داشته باشد.

به اعتقاد آقای سونبرگ روش تقریبی (Method of Moving Asymptotes) نه

تنها این خصوصیات را دارد، بلکه برای استفاده و اجرا کردن در مسائل، بسیار آسان می باشد.



در اینجا سعی شده پس از توضیح مختصر درباره روش‌های بهینه‌سازی معمول و تقریبی، روش تقریبی MMA که عمومیت خوبی بین بهینه‌سازها پیدا کرده است را مورد توجه قرار داده و با ارائه یک برنامه که از این روش استفاده می‌کند، مثال‌هایی را در توپولوژی مسائل تنش صفحه‌ای حل و نتایج را با نتایج روش معیار بهینگی (به طوری که شرایط یکسانی از نظر تابع هدف و قید و متغیرهای طراحی رعایت شده باشد) مقایسه نمود.

در ادامه برنامه دیگری ارائه می‌شود که قید تنش نیز به مسأله اعمال شود تا انعطاف روش در داشتن قیده‌های مختلف نمایان شود. پس از آن تأثیرپذیری نتایج مسأله نسبت به پارامترهای MMA مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در نهایت با توجه به این که با تغییراتی در کدهای MMA می‌توان جواب روش‌های تقریبی و متوالی SLP و CONLIN را نیز بدست آورد، مثال‌هایی به این سه روش حل و جواب‌ها را مقایسه می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** بهینه‌سازی توپولوژی ، مسائل تنش صفحه ای ، روشهای مجانبی ، برنامه ریزی محدب ، برنامه ریزی غیر خطی

## فهرست

فصل اول: مقدمه.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
فصل دوم: مفاهیم بهینه‌سازی.....	۶
۱-۲- مقدمه.....	۷
۲-۲- تعاریف اولیه.....	۸
۱-۲-۲- تابع هدف.....	۸
۲-۲-۲- توابع قید.....	۸
۳-۲-۲- متغیرهای طراحی.....	۹
۳-۲- بهینه‌سازی سازه‌ها.....	۱۰
۱-۳-۲- بهینه‌سازی ابعاد.....	۱۰
۲-۴-۲- بهینه‌سازی شکل.....	۱۱
۳-۳-۲- بهینه‌سازی توپولوژی.....	۱۲
۱-۳-۳-۲- بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های ناپیوسته.....	۱۳
۲-۳-۳-۲- بهینه‌سازی توپولوژی برای سازه‌های پیوسته.....	۱۳
فصل سوم: بهینه‌سازی عددی.....	۱۵
۱-۳- مقدمه.....	۱۶
۲-۳- انواع روشهای بهینه‌سازی.....	۱۶
۱-۲-۳- روشهای بهینه‌سازی نامقید.....	۱۸
۱-۱-۲-۳- روش تندترین کاهش.....	۲۰
۲-۱-۲-۳- روش گرادیان مزدوج.....	۲۱

۲۴	..... روش نیوتن ۳-۱-۲-۳
۲۵	..... روشهای شبه نیوتن ۴-۱-۲-۳
۲۵	..... روشهای بهینه‌سازی مقید ۲-۲-۳
۲۵	..... روشهای تابع جریمه ۱-۲-۲-۳
۲۸	..... برنامه‌ریزی خطی متوالی (SLP) ۲-۲-۲-۳
۲۹	..... برنامه‌ریزی مرتبه دوم متوالی ۳-۲-۲-۳
۲۹	..... روش جهات امکان‌پذیر ۴-۲-۲-۳
۳۳	..... فصل چهارم: مفاهیم تقریب‌سازی
۳۴	..... ۱-۴ - مقدمه
۳۵	..... ۲-۴ - تقریب‌های محلی
۳۶	..... ۱-۲-۴ - تقریب‌های مرتبه اول
۳۷	..... ۲-۲-۴ - تقریب‌های مراتب بالاتر
۳۸	..... ۳-۴ - تقریب‌های سراسری
۳۹	..... فصل پنجم: بررسی روشهای متوالی و تقریبی
۴۰	..... ۱-۵ - مقدمه
۴۰	..... ۲-۵ - روش برنامه‌ریزی متوالی
۴۱	..... ۱-۲-۵ - برنامه‌ریزی خطی متوالی
۴۲	..... ۱-۱-۲-۵ - ویژگی‌های SLP
۴۳	..... ۲-۲-۵ - برنامه‌ریزی محدب متوالی
۴۵	..... ۳-۲-۵ - خطی‌سازی محدب
۴۶	..... ۴-۲-۵ - متد حرکت مجانبها (MMA)
۴۹	..... ۵-۲-۵ - برنامه‌ریزی غیرخطی متوالی

۴۹	..... MMA و CONLIN بررسی انواع تقریب‌های
۵۰	..... تقریب‌های مرتبه اول ۱-۶-۲-۵
۵۲	..... تقریب‌های مرتبه دوم ۲-۶-۲-۵
۵۴	..... فصل ششم: بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها به روش معیار بهینگی
۵۵	..... ۱-۶- مقدمه
۵۵	..... ۱-۱-۶- کلیات
۵۷	..... ۲-۱-۶- مدل‌های مواد
۶۳	..... ۲-۶- شرایط بهینگی کان - تاکر
۶۷	..... ۳-۶- مدل ریاضی برای مسئله بهینه‌سازی توپولوژیکی سازه‌ها
۷۰	..... ۴-۶- معیار بهینگی برای بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها
۷۰	..... ۱-۴-۶- شرایط بهینگی
	<b>فصل هفتم: استفاده از تکنیک‌های پردازش تصویر</b>
۷۳	..... در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها
۷۴	..... ۱-۷- مقدمه
۷۵	..... ۱-۱-۷- چکربوردها
۷۷	..... ۲-۱-۷- وابستگی حل به نحوه مش‌بندی
۷۸	..... ۳-۱-۷- مینیمم محلی
۷۹	..... ۲-۷- روش حذف چکربرد با استفاده از تکنیک‌های پردازش تصویر
۸۳	..... ۳-۷- حذف وابستگی حل به نحوه مش‌بندی
۸۵	..... فصل هشتم: روش پیاده کردن متد MMA و برنامه ی آن
۸۶	..... ۱-۸- جنبه‌های مدل کردن برای کاربرد MMA در برنامه
۸۶	..... ۱-۱-۸- مسئله بهینه‌سازی فرض شده

۸۷.....	۸-۱-۲- مسائل NLP
۸۷.....	۸-۱-۲-۱- برخی فرضیات و پیشنهادات
۸۷.....	۸-۱-۳- مسائل حداقل مربعات
۸۸.....	۸-۱-۴- مسائل مین - ماکس
۸۹.....	۸-۱-۵- زیرمسئله MMA
۹۱.....	۸-۲- برنامه حل مسأله توپولوژیک تنش صفحه‌ای
۹۴.....	۸-۲-۱- برنامه اول
۹۵.....	۸-۲-۲- مثال های عددی
۱۱۰.....	۸-۲-۳- برنامه دوم
۱۱۶.....	فصل نهم: نتایج
۱۲۱.....	مراجع

## اشکال

- شکل ۱-۲- بهینه سازی ابعاد ..... ۱۱
- شکل ۲-۲- بهینه سازی شکل ..... ۱۱
- شکل ۳-۲- بهینه سازی توپولوژی سازه های ناپیوسته ..... ۱۳
- شکل ۴-۲- بهینه سازی توپولوژی برای سازه های پیوسته ..... ۱۴
- شکل ۱-۳- نمودار نمایش تابع جریمه داخلی ..... ۲۷
- شکل ۲-۳- نمودار نمایش تابع جریمه خارجی ..... ۲۸
- شکل ۳-۳- انتخاب جهت جستجو با استفاده از روش جهات امکان پذیر ..... ۳۰
- شکل ۱-۵- برنامه ریزی خطی ..... ۴۱
- شکل ۲-۵- تفسیر Move limit ..... ۴۲
- شکل ۳-۵- تفسیر متد SCP ..... ۴۳
- شکل (۴-۵) پروسه استفاده MMA برای یک متغیر طراحی  $x^e$  را نشان می دهد. تابع  $f(x)$
- تابع ضمنی و تا  $\tilde{f}^{(k)}$  تابع تقریب شده است ..... ۴۷
- شکل (۱-۸) الگوریتم بهینه سازی ..... ۹۳
- شکل (۲-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA) ..... ۹۶
- شکل (۳-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA) ..... ۹۹
- شکل (۴-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA) ..... ۱۰۲
- شکل (۵-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA) ..... ۱۰۵
- شکل (۶-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA) ..... ۱۰۸

## نمودارها

- نمودار (۱-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی)..... ۹۷
- نمودار (۲-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی)..... ۱۰۰
- نمودار (۳-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی)..... ۱۰۳
- نمودار (۴-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی)..... ۱۰۶
- نمودار (۵-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی)..... ۱۰۹
- نمودار (۶-۸) روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف..... ۱۱۲
- نمودار (۷-۸) روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف..... ۱۱۵

## جداول

جدول (۸-۱) مقایسه روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف..... ۱۱۱

جدول (۸-۲) مقایسه روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف..... ۱۱۴



# فصل ۱

## مقدمه

## ۱-۱- مقدمه

بهینه‌سازی<sup>۱</sup>، رسیدن به نتیجه بهتر، در مورد یک عملیات با محدودیت‌های مشخص می‌باشد.

انسان محصور در طبیعت، ذاتاً تمام فعالیت‌هایش را به شکلی انجام می‌دهد که در انرژی صرفه‌جویی کند. این اصل، بخاطر استفاده حداکثر از منابع محدود موجود در طبیعت می‌باشد. اختراعات اولیه اهرمها و قرقره‌ها، به خوبی بیانگر این مطلب است.

سابقه تدوین بهینه‌سازی سازه به قرن هیجدهم میلادی باز می‌گردد. اهمیت طراحی سازه‌ها با وزن می‌نیمم، اولین بار توسط صنایع هوا - فضا مورد توجه قرار گرفت. در شاخه‌های دیگر علوم ممکن است هزینه در درجه اول اهمیت باشد.

---

<sup>۱</sup> - Optimization

در کل، تکنیک بهینه‌سازی، روشی برای کاهش زمان، بهبود کیفیت، کاهش هزینه و ... می‌باشد.

روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها به طور مشخص به دو دسته روش‌های تحلیلی<sup>۱</sup> و روش‌های عددی<sup>۲</sup> تقسیم‌بندی می‌شوند. اساساً روش‌های تحلیلی بر جنبه مفهومی تأکید دارند، در حالیکه روش‌های عددی وجه الگوریتمی پیدا می‌کنند.

روش‌های تحلیلی معمولاً از تئوری ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش‌های تغییرات و غیره در مطالعه المان‌های سازه‌ای ساده مثل تیر، ستون یا صفحه استفاده می‌کنند. این روش‌ها اغلب برای مطالعات اساسی بر روی مؤلفه‌های سازه‌ای به شکل منفرد مناسب هستند و زمینه‌ای برای کاربرد در سیستم‌های سازه‌ای بزرگ ندارند.

در عمل، طراحی سازه با تعدادی از توابع نامعلوم ارائه می‌شود که هدف پیدا کردن شکل کلی این توابع است. طراحی بهینه به شکل تئوری دقیقاً از حل یک سری از معادلات که بیان‌کننده شرایط بهینه می‌باشند بدست می‌آید. اگرچه روش‌های تحلیلی از لحاظ عملی با سازه‌های واقعی انطباق ندارند اما بررسی رفتار آنها در درک مسائل عملی نقش مهمی خواهد داشت.

روش‌های عددی معمولاً از محاسبات عددی و یا برنامه‌نویسی ریاضی استفاده می‌کنند. پیشرفت‌های اخیر در این زمینه مدیون رشد سریع ظرفیت محاسبات بوسیله برنامه‌ها می‌باشد، که باعث تسهیل در حل مسائل واقعی در مقیاس‌های بزرگ می‌گردد. در روش‌های عددی یک طراحی نزدیک به بهینه به شکل خودکار به عنوان نقطه شروع در نظر گرفته می‌شود، سپس یک جستجوی اصولی برای رسیدن به طراحی بهینه عموماً در قالب یک فرآیند تکراری انجام می‌گیرد. برخی از روش‌های برنامه‌نویسی ریاضی مثل الگوریتم‌های برنامه‌نویسی خطی، درجه دوم، دینامیکی و هندسی و غیره با توجه به کاربردهای آنها در حل مسائل بهینه‌سازی توسعه پیدا کرده‌اند.

---

<sup>۱</sup> - Analytical Methods

<sup>۲</sup> - Numerical Methods

در این میان یک سری الگوریتم‌های کلی‌تر به عنوان برنامه‌نویسی غیرخطی<sup>۱</sup>، برای حل مسائل بهینه‌سازی به شکل عمومی استنتاج شده است. اگرچه عمر برنامه‌نویسی‌های ریاضی کوتاه می‌باشد، لیکن در این زمینه الگوریتم‌های زیادی برای حل مسائل عددی، مانند روشهای تقریبی توسعه پیدا یافته‌اند.

انگیزه اصلی در توسعه روشهای تقریبی کاهش هزینه‌های محاسباتی گرانی است که در روشهای دیگر نمود پیدا می‌کند. از طرفی هنگامیکه ابعاد مسئله افزایش می‌یابد حل مسئله بهینه‌سازی گاه غیرعملی است که با به کارگیری روشهای تقریبی می‌توان به این مشکل غلبه کرد. در ابتدا، برای آشنایی با مفاهیم بهینه‌سازی، به طور مختصر درباره آنها صحبت کرده و هم‌چنین دسته‌بندی روشهای بهینه‌سازی را مرور می‌کنیم.

سپس روشهای بهینه‌سازی عددی که روشهای تقریبی از آن مشتق شده را بیان کرده و در ادامه به بیان مفاهیم تقریب‌سازی می‌پردازیم و روشهای آنرا مطالعه می‌نمائیم.

در بخش بعدی، روشهای تقریبی و متوالی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و این‌که چگونه برای کاهش زمان از روشهای تقریبی به صورت تکراری استفاده می‌گردد تا نتیجه بهینه حاصل گردد و روش تقریبی مجانبی MMA که عمومیت بیشتری پیدا کرده را با جزئیات بیان می‌نمائیم. در فصل بعد توضیح مختصری درباره معیار بهینگی در بهینه‌سازی سازه‌های دهیم که برای مقایسه با نتایج روش تقریبی از آن استفاده می‌کنیم.

در ادامه به طور اجمالی درباره تکنیک‌های حذف نویز که در بهینه‌سازی توپولوژی برای جلوگیری از بوجود آمدن اعضای نامطلوب می‌گردد و از آن در نتایج روش تقریبی و معیار بهینگی استفاده شده صحبت می‌گردد.

در انتها پروسه استفاده از روش تقریبی در یک برنامه به زبان فرترن توضیح داده شده و مثالهایی حل و پس از مقایسه با روش معیار بهینگی از آن نتیجه‌گیری می‌شود و یک برنامه نیز

---

<sup>۱</sup> - Non-Linear Programming

طراحی شده تا با اضافه کردن قید تنش، قابلیت انعطاف‌پذیری متد MMA آشکار گردد و در ادامه، تأثیرپذیری جواب‌ها از تغییر پارامترهای MMA و هم‌چنین قابلیت تبدیل کد MMA به روش SLP و CONLIN و مقایسه جواب‌ها را از نظر می‌گذرانیم.

## فصل ۲

### مفاهیم بهینه‌سازی

## ۲-۱- مقدمه

بهینه‌سازی، پیدا کردن محل و مقدار کمینه یک تابع، سریع و ارزان می‌باشد. برای کمینه کردن تابع، پارامترهایی برای تغییر وجود خواهد داشت که متغیر طراحی<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. طراحی، به شکل یافتن مقدار بیشینه و یا کمینه تابعی به نام تابع هدف<sup>۲</sup> تعریف می‌شود. برای اینکه به طراحی قابل قبول برسیم باید الزامات خاصی از طراحی برآورده شود، این الزامات قیود طراحی<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. بهینه‌سازی با تغییر متغیرهای طراحی کمک می‌کند تا مقدار بیشینه و یا کمینه‌ای را برای تابع هدف در عین برآورده شدن ضوابط قیود طراحی، پیدا کنیم. شکل کلی مسئله بهینه‌سازی با فرمول‌بندی ریاضی برابر است با:

$$\begin{aligned} & \text{Minimise} && f(x) \\ & \text{s.t.} && g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, M \\ & && A_i \leq x_i \leq B_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1-2)$$

---

<sup>۱</sup> - Design Variables  
<sup>۲</sup> - Objective Function  
<sup>۳</sup> - Constraints Function

که  $F(X)$  تابع هدف و  $g(X)$ ها توابع قید و نامساوی‌های معرفی شده حدود متغیرهای طراحی را نشان می‌دهند.

## ۲-۲- تعاریف اولیه

### ۲-۲-۱- تابع هدف

به منظور پیدا کردن بهترین طراحی ممکن، باید ضوابطی و ملاک‌هایی (بهبود کردن وزن، هزینه، استحکام، مقاومت و ...) برای طبقه‌بندی طراحی‌ها تعریف بکنیم. این ملاک‌ها که همیشه توابعی از متغیرهای طراحی می‌باشند تابع هدف نامیده می‌شوند. اگر بزرگتر بودن تابع هدف ملاک باشد (مثل: سختی و غیره) مسئله موجود یک مسئله بیشینه‌سازی خواهد بود، و اگر کمتر شدن تابع هدف منظور نظر قرار بگیرد (مثل: وزن، هزینه و غیره) با مسئله کمینه‌سازی مواجه خواهیم شد. به منظور پرداختن به یک قاعده اسلوب‌مند و برخورد با یک نوع مسئله می‌توانیم مسئله بیشینه‌سازی را به مسئله کمینه‌سازی با تعریف زیر تبدیل کنیم:

$$\max \{f(x)\} = - \min \{-f(x)\} \quad (۲-۲)$$

### ۲-۲-۲- توابع قید:

طراحی یک سیستم معمولاً تحت تأثیر مجموعه‌ای از الزامات و یا محدودیت‌ها قرار دارد. برای یک سیستم سازه‌ای این الزامات می‌تواند مشخص کننده ایمنی سازه باشد، مثلاً نباید تنش در اعضا از حد خاصی تجاوز کند. گاهی برای مقایسه و یا انجام محاسبات آسان‌تر نیاز می‌شود که قیود را به شکل بی‌بعد بیان کنیم (نرمالیزه کردن)<sup>۱</sup>. برای مثال قید تنش در یک المان بصورت زیر نرمالیزه می‌گردد [۲۲]:

$$\sigma_i^{equiv} \leq \sigma_{allow} \quad G_i(x) = \frac{\sigma_i^{equiv}}{\sigma_{allow}} \leq 1 \quad or \quad 1 - \frac{\sigma_i^{equiv}}{\sigma_{allow}} \geq 0 \quad (۳-۲)$$

<sup>۱</sup> - Normalization



## ۲-۲-۳- متغیرهای طراحی:

پارامترهای متغیری که در فرآیند تصمیم‌گیری ظاهر می‌شوند، متغیرهای طراحی نامیده می‌شوند. این متغیرها غالباً به دو صورت گسسته<sup>۱</sup> و پیوسته<sup>۲</sup> تقسیم‌بندی می‌شوند و مسئله متناظر با هر نوع متغیر با نام مشابه مسئله گسسته و یا مسئله پیوسته معرفی می‌شوند.

متغیرهای گسسته فقط می‌توانند مقادیر مشخصی از مجموعه داده شده را اختیار کنند (مشابه با اعداد صحیح) مانند: یک تعداد مشخص از میلگردهای با شماره‌های خاص از جداول مربوط، در حالیکه متغیرهای پیوسته می‌توانند هر ارزشی (معادل با اعداد حقیقی) را در مجموعه داده شده اختیار کنند، مانند مختصات یک گره.

یک فضای  $n$  بعدی مشخص که هر محور مختصات آن بیانگر یک متغیر طراحی فضای طراحی<sup>۳</sup>  $x_i, (i=1, \dots, n)$  است، نامیده می‌شود و هر نقطه در این فضا با یک نقطه طراحی متناظر است. مجموعه مقادیر  $X$  که در رابطه  $g_j(X) = 0$  صدق کنند، یک سطحی در فضای طراحی تشکیل می‌دهند که به آن سطح قید<sup>۴</sup> می‌گویند.

هر کدام از متغیرهای طراحی متناسب با الزامات خاصی که ایجاد می‌کنند، فضای طراحی را به دو ناحیه امکان‌پذیر<sup>۵</sup> و امکان‌ناپذیر<sup>۶</sup> تقسیم می‌کنند. ناحیه‌ای که در آن  $g_j(x) < 0$  می‌باشد، فضای امکان‌پذیر و ناحیه  $g_j(x) > 0$  فضای امکان‌ناپذیر می‌باشند. نقطه بهینه قابل قبول در فضای امکان‌پذیر کلی قرار می‌گیرد. مکان هندسی همه نقاطی که به ازای آنها تابع هدف یک مقدار ثابت و مشخص اتخاذ می‌کند، سطوحی در فضای طراحی به نام کنتورهای تابع هدف<sup>۷</sup> ایجاد می‌کنند [۸].

---

<sup>۱</sup> - Discrete Variables

<sup>۲</sup> - Continuous Variables

<sup>۳</sup> - Design Space

<sup>۴</sup> - Constraint Surface

<sup>۵</sup> - Feasible Region

<sup>۶</sup> - Infeasible Region

<sup>۷</sup> - Contours of Objective Function

با رسم سطوح هدف به همراه سطوح قید به آسانی می‌توان نقطه بهینه را پیدا کرد. اما هنگامیکه تعداد متغیرهای طراحی زیاد شوند ترسیم این سطوح بسیار پیچیده و حتی غیرعملی است بنابراین در این حالت حل مسئله تنها به شکل ریاضی انجام‌پذیر خواهد شد.

## ۲-۳- بهینه‌سازی سازه‌ها

بهینه‌سازی سازه‌ای، یک تکنیک در جهت اصلاح برخی جنبه‌های سازه از یک سازه مهندسی می‌باشد.

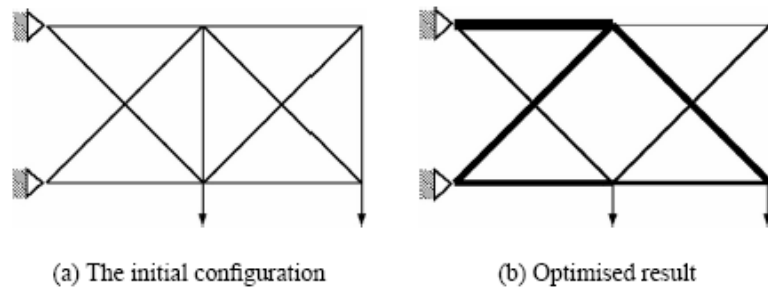
از نظر زمینه‌های کاربرد، این تکنیک به سه دسته، ابعاد، شکل و توپولوژی تقسیم می‌شود.

## ۲-۳-۱- بهینه‌سازی ابعاد<sup>۱</sup>:

بهینه‌سازی ابعاد شامل بهبود سطح مقطع یا ضخامت المان‌های مشخصی از سازه خواهد بود. طراحی سازه‌ها اغلب موضوعیت ابعاد دارند (مانند ضخامت یک قطعه‌ای از صفحه و یا پوسته و یا مساحت سطح مقطع میله‌ها). طبیعی است که مهندس سازه بخواهد ضخامت یک صفحه و یا پوسته را به منظور کاهش وزن کلی سازه تغییر دهد. در یک مدل سازه‌ای، ممکن است ضخامت صفحه یک پارامتر متغیر در نظر گرفته شود اگر چه هندسه سازه در این حالت تغییر نخواهد کرد. سطح مقطع یک تیر یا اعضای یک خرپا نیز می‌تواند یک متغیر طراحی در نظر گرفته شود. اگر سطح مقطع یک شکل مستطیلی داشته باشد، آنگاه مساحت آن به شکل  $(A = b \times h)$  تعریف خواهد شد. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله پارامترهای  $b$  و  $h$  می‌توانند به عنوان متغیر طراحی در مسئله مورد نظر به کار گرفته شوند.

---

<sup>۱</sup> - Size Optimization



شکل ۲-۱- بهینه سازی ابعاد

### ۲-۴-۲- بهینه سازی شکل<sup>۱</sup>:

در مقایسه با بهینه سازی ابعاد، بهینه سازی شکل پیچیده تر رفتار می کند. عموماً در مسئله های بهینه سازی شکل، مختصات گره های مدل های اجزا محدود<sup>۲</sup> به عنوان متغیر طراحی انتخاب می گردد که می تواند در طول طراحی به شکل متوالی اصلاح شود.

متغیرهای طراحی هندسه مرزهای سازه را تعریف می کنند.

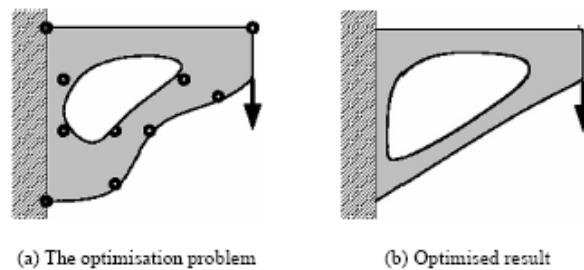
برخی یا تمام پارامترهایی که مرز را تعریف می کنند به عنوان متغیرها می توانند انتخاب

شوند، به عنوان مثال نقطه های انتهایی خطها.

بوسیله تغییر محل این نقاط، شکل مرز هندسی سازه تغییر می یابد. ابزار بهینه سازی محل

نقاط متناظر با بهترین کارایی سازه را پیدا می کند.

شکل زیر یک مثال برای بهینه سازی شکل را نشان داده است.



شکل ۲-۲- بهینه سازی شکل

<sup>۱</sup> - Shape Optimization  
<sup>۲</sup> - Finite Element

روشهای متفاوت برای بهینه‌سازی شکل:

استفاده از مختصات گره‌های اجزاء محدود.

استفاده از تعریف مرزها بوسیله B-Sp lines, Bezier SP lines و غیره.

روش تابع پایه، شکل بهینه به صورت یک ترکیب خطی از چندین شکل پایه پیدا می‌شود.

### ۲-۳-۳- بهینه‌سازی توپولوژی<sup>۱</sup>:

بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی ابعاد، تغییرات جزئی در هندسه سازه را به نمایش می‌گذارند. در حالیکه بهینه‌سازی توپولوژی طرح کلی یک سازه را مشخص می‌کند. به عنوان مثال بهینه‌سازی شکل می‌تواند ابعاد و موقعیت یک حفره در داخل یک صفحه را تغییر بدهد و قادر نخواهد بود که حفره را به شکل کامل حذف و یا حفره جدیدی تعریف بکند. بهینه‌سازی توپولوژی معلوم می‌کند که آیا حفره می‌تواند حذف و یا حفره جدیدی معرفی بشود. در واقع بهینه‌سازی توپولوژی، پیشنهاد طراحی اولیه را در اختیار می‌گذارد. در مرحله طراحی یک سازه، موضوعیت و طرح کلی یک سازه توسط بهینه‌سازی توپولوژی مشخص خواهد شد. نتیجه حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی، به عنوان طراحی منتخب برای ایجاد یک مدل اجزا محدود جدید به کار می‌رود. محاسبات شبیه‌سازی و بهینه‌سازی شکل در مرحله بعدی بر روی این مدل انجام می‌گیرد. در بهینه‌سازی توپولوژی فقط شرایط تکیه‌گاهها، نیروها و فضای طراحی، تعریف شده است؛ که برای این تعاریف طرح بهینه سازه پیدا می‌شود.

بهینه‌سازی توپولوژی به دو دسته سازه‌های ناپیوسته و پیوسته تقسیم می‌شود.

---

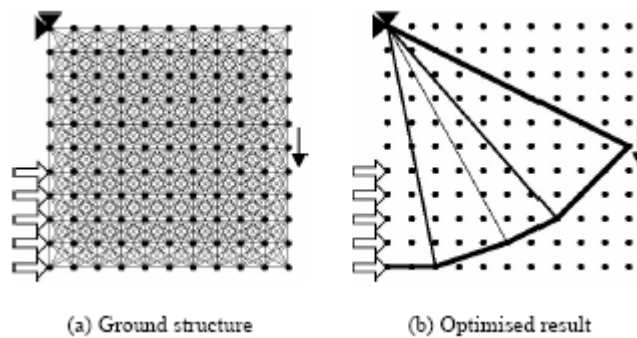
<sup>۱</sup> - Topology Optimization

### ۲-۳-۳-۱- بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های ناپیوسته<sup>۱</sup>:

در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل ناپیوسته، هدف پیدا کردن تعداد، بعد و ارتباط بهینه اعضای سازه‌ای از یک سازه پایه<sup>۲</sup> می‌باشد.

این سازه پایه یا زمینه شامل تمام اعضای ممکن می‌باشد. یک سازه زمینه و طرح بهینه آن برای یک تیر طره در زیر نمایش داده شده است.

ما در اینجا تنها با سازه‌های پیوسته سروکار خواهیم داشت.



شکل ۲-۳- بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های ناپیوسته

### ۲-۳-۳-۲- بهینه‌سازی توپولوژی برای سازه‌های پیوسته<sup>۳</sup>:

هدف بهینه‌سازی توپولوژی برای سازه‌های پیوسته، بدست آوردن بهترین طرح سازه درون یک فضای طراحی<sup>۴</sup> داده شده می‌باشد.

یک ابزار معمول، محاسبه سخت‌ترین چیدمان از یک جرم تعریف‌شده از ماده می‌باشد.

فضای طراحی به اجزاء محدود تقسیم شده و مواد با تغییر چگالی در هر المان دوباره آرایش داده می‌شوند. متغیرهای بهینه‌سازی چگالی المانها می‌باشند. در مرحله نهایی، المانها به صورت قسمت توپر (چگالی یک) و خالی (چگالی صفر) نمایش داده می‌شوند. شکل زیر نمایشی از یک طرح بهینه از فضای طراحی یک تیر طره می‌باشد.

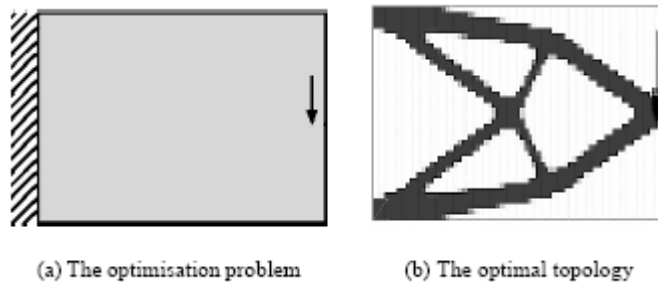
<sup>۱</sup> - Discrete Structures

<sup>۲</sup> - Ground Structure

<sup>۳</sup> - Continuous Structures

<sup>۴</sup> - Design Space

در قسمتهایی از فضای طراحی، المانهایی با چگالی بین ۰ و ۱ تشکیل می‌شود که این المانها با توجه به المانهای هم‌جوار آنها باید به سمتی سوق داده شود.



شکل ۲-۴- بهینه‌سازی توپولوژی برای سازه‌های پیوسته

## فصل ۳

### بهینه‌سازی عددی

### ۳-۱- مقدمه

روشهای بهینه‌سازی به دو گروه عمده مقید و نامقید تقسیم می‌شوند. اکثر روشهای بهینه‌سازی بر پایه برنامه‌ریزی ریاضی استوار شده‌اند، که به مقدار توابع و اطلاعات حساسیت در نقطه طراحی داده شده نیاز دارند. در ادامه برخی روشهای بهینه‌سازی به طور خلاصه معرفی می‌شوند.

### ۳-۲- انواع روشهای بهینه‌سازی

مبنای اکثر روشهای بهینه‌سازی غیرخطی عددی، تولید دنباله‌ای از مقادیر تقریبی است که به سمت تابع هدف بهبود می‌یابند. این فرآیندها از گام‌های زیر تشکیل می‌شود:

الف- شروع از یک نقطه آغازین  $X$

ب- تعیین یک جهت مناسب  $S_i$  (برای شروع  $i=1$ ) که به سمت عمومی کمینه است.

ج- یک طول گام مناسب  $\lambda$  برای حرکت در امتداد جهت  $S_i$  پیدا کنید.

د- تقریب جدید  $X_{i+1}$  را به صورت زیر به دست آورید.  $X_{i+1} = X_i + \lambda_i S_i$



ه- بهینه بودن را در نقطه جدید آزمایش می‌کنید. اگر  $X_{i+1}$  بهینه است روش را متوقف

کنید و در غیر اینصورت  $i = i + 1$  قرار داده و گام (ب) را تکرار نمایید.

اگر  $F(X)$  تابع هدفی باشد که باید بهینه شود و با فرض معلوم بودن امتداد  $S_i$ ، مسئله

یافتن  $\lambda_i$ ، عبارتست از تعیین مقدار آن به گونه‌ای که  $F(X_{i+1}) = F(X_i + \lambda_i + S_i) = F(\lambda_i)$  را به

ازای مقادیر ثابت  $X_i, S_i$  کمینه کند. از آنجائیکه  $F$  به صورت تابعی از تنها متغیر  $\lambda_i$  درمی‌آید،

روشهای یافتن  $\lambda_i$  را روشهای بهینه‌سازی یک‌بعدی گویند. روشهای کمینه‌سازی یک‌بعدی شامل

روشهای تحلیلی و روشهای عددی می‌باشد. در این میان روشهای عددی شامل روشهای حذفی

(جستجوی نامتناهی، جستجوی کامل، روش فیبوناچی<sup>۱</sup>، روش نسبت طلایی<sup>۲</sup> و ...) و روشهای

درونیابی درجه دوم<sup>۳</sup>، درونیابی درجه سوم<sup>۴</sup> و روش ریشه مستقیم می‌باشد.

روشهای بهینه‌سازی حساب دیفرانسیل یک روش تحلیلی است و برای توابع پیوسته

مشتق پذیر قابل استفاده می‌باشد. در این روش، محاسبه مقدار عددی تابع هدف، آخرین گام

فرآیند است. زیرا مقدار بهینه تابع هدف پس از تعیین مقادیر بهینه متغیرهای طراحی محاسبه

می‌شود. در روشهای عددی بهینه‌سازی، برخلاف این رفتار می‌شود. یعنی ابتدا مقادیر تابع هدف را

به ازای مقادیر مختلفی از متغیرهای طراحی یافته و آنگاه نتایج را با توجه به جواب بهینه به دست

می‌آوریم. روشهای حذفی را می‌توان حتی در بهینه‌سازی توابع گسسته به کار برد. روشهای

درونیابی درجه دوم و درجه سوم با تقریب‌های چند جمله‌ای سر و کار دارند و روش ریشه مستقیم

به درونیابی خطی مشتق یک تابع می‌پردازد [۱].

### ۳-۲-۱- روشهای بهینه‌سازی نامقید:

<sup>۱</sup> - Fibonacci Method

<sup>۲</sup> - Golden Section Method

<sup>۳</sup> - Quadratic Fitting

<sup>۴</sup> - Cubic Fitting

یک مسئله بهینه‌سازی نامقید شامل یافتن مقادیر بردار طراحی  $X$  می‌باشد به گونه‌ای که یک تابع هدف را بدون در نظر گرفتن هیچ قیدی کمینه نماید. اهمیت مطالعه چنین روشهایی از آنجایی نمود می‌یابد که در بسیاری از روشهای نیرومند و ساده حل مسائل بهینه‌سازی مقید، از جمله روشهای تابع جریمه، باید مسئله را به یک مسئله بهینه‌سازی نامقید تبدیل نموده و سپس حل نماییم.

اکثر روشهای بهینه‌سازی نامقید تکراری هستند. یعنی با شروع از یک جواب آغازین و به شیوه‌ای متوالی به سمت نقطه کمینه پیش می‌روند. تنها تفاوت انواع مختلف این روشها، در چگونگی نقطه جدید  $X_{i+1}$  و یا به عبارتی تعیین  $\lambda_i, S_i$  می‌باشد. این روشها، به دو دسته عمده روشهای جستجوی مستقیم (بدون نیاز به مشتق‌گیری) و روشهای گرادیان (نیازمند به مشتق‌گیری) تقسیم‌بندی می‌شوند.

روشهای جستجوی مستقیم در یافتن کمینه، تنها به ارزیابی تابع هدف نیاز دارند و از مشتق‌های جزئی تابع استفاده نمی‌کنند. این روشها برای مسائل ساده‌ای که تعداد نسبتاً کمی متغیر دارند مناسب هستند. معمولاً کارایی این روشها کمتر از روشهای شیبی است. روشهای شیبی، علاوه بر ارزیابی تابع به ارزیابی مشتقات تابع هدف نیاز دارند. از آنجائیکه در این روشها اطلاعات بیشتری درباره تابع مورد کمینه‌سازی استفاده می‌شود، در نتیجه در مقایسه با روشهای جستجوی مستقیم کاراتر هستند. روشهای شیبی را روشهای گرادیان<sup>۱</sup> نیز می‌نامند.

مشتقات جزئی یک تابع  $f$ ، نسبت به هر یک از  $n$  متغیر را مجموعاً گرادیان تابع گویند و

با  $\nabla f$  نشان می‌دهند:

---

<sup>۱</sup> - Gradient Method

$$\nabla f = \left\{ \begin{array}{l} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \partial f / \partial x_n \end{array} \right\} \quad (1-3)$$

گرادیان، برداری از  $n$  مؤلفه است و دارای یک خاصیت بسیار مهم می‌باشد. اگر از هر نقطه در فضای  $n$  بعدی، در امتداد جهت گرادیان حرکت کنیم، مقدار تابع با بیشترین نرخ افزایش می‌یابد. بنابراین جهت گرادیان، جهت تندترین افزایش نامیده می‌شود.

اما متأسفانه جهت تندترین افزایش، یک خاصیت موضعی است و سراسری نیست. یعنی هنگامیکه از نقطه موردنظر دور می‌شویم جهت بردار گرادیان یا جهت تندترین افزایش تغییر می‌کند.

با توجه به اینکه بردار گرادیان جهت تندترین افزایش را ارائه می‌کند، بنابراین، منفی بردار گرادیان نشان دهنده جهت تندترین کاهش است. لذا می‌توان انتظار داشت که هر روشی که از بردار گرادیان استفاده می‌کند، نسبت به روشی که از این بردار استفاده نمی‌کند، نقطه کمینه را سریعتر بدست می‌آورد. با این حال ممکن است ارزیابی گرادیان به راحتی انجام نشود و یا محاسبه آن نیازمند زمان و هزینه زیادی باشد. در چنین حالاتی می‌توانیم از روابط تفاوت محدود<sup>۱</sup> برای تقریب زدن مشتق جزئی استفاده کنیم. رابطه تفاوت محدود پیشرو به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_m} \approx \frac{f(x_m + \Delta x_i u_i) - f(x_m)}{\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-3)$$

برای دستیابی به نتایج بهتر می‌توانیم از رابطه تفاوت محدود مرکزی در یافتن مشتقات

جزئی تقریبی  $\partial f / \partial x_i$  استفاده کنیم:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_m} \approx \frac{f(x_m + \Delta x_i u_i) - f(x_m - \Delta x_i u_i)}{2\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-3)$$

<sup>۱</sup> - Finite Difference

در محاسبات عملی، مقدار  $\Delta x_i$  را باید به دقت انتخاب کرد. اگر  $\Delta x_i$  بسیار کوچک باشد، ممکن است تفاوت بین مقادیر تابع که در  $(X_m + \Delta x_i u_i)$  و  $(X_m - \Delta x_i u_i)$  ارزیابی می‌شوند، بسیار کوچک شده و خطای گرد کردن اعداد مسلط شود. از طرف دیگر، اگر  $\Delta x_i$  بسیار بزرگ باشد، امکان مسلط شدن خطای نقصانی در محاسبات وجوه خواهد داشت.

هنگامیکه توابع هدف و قیود، به شکل جملاتی غیرخطی از متغیرهای طراحی بیان شوند، مسئله برنامه‌ریزی، غیرخطی قلمداد می‌شود. اکثر مسائل مهندسی بدلیل شرایط خاصی که به مسائل آنها حاکم است، در این رسته قرار می‌گیرند. از این‌رو بوسیله روشهای بهینه‌سازی غیرخطی، که عموماً عددی و متوالی هستند محاسبه می‌گردند.

اگر در مسئله طراحی قیدی وجود نداشته باشد، مسئله بهینه‌سازی نامقید نامیده می‌شود. اگرچه اکثر مسائل مهندسی دارای قید هستند، اما می‌توانند با استفاده از روش‌هایی مانند روشهای تابع جریمه و روش مضارب لاگرانژ به نوع نامقید تبدیل شده و سپس حل شوند [۱].

### ۳-۱-۱- روش تندترین کاهش<sup>۱</sup>:

همانطور که ذکر گردید، روشهای عددی برای حل معادلات بهینه‌سازی، یک فرآیند تکراری است که در هر سیکل تلاش می‌کند، بردار  $X$  را در جهت بهینه بهبود بدهد. اگر  $X_i$  بردار مقادیر متغیرهای طراحی در  $i$ -امین تکرار باشد، آنگاه نقطه طراحی در  $(i+1)$ -امین تکرار از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i S_i \quad (۳-۴)$$

که  $S_i$  جهت جستجو و  $\lambda_i$ ، طول گام بهینه نامیده می‌شود. که در واقع ترکیب آنها مقدار حرکت در جهت مشخص بهینه را تعیین می‌کند. اگر جهت جستجو مشخص باشد، پارامتر  $\lambda$ ، با

<sup>۱</sup> - Steepest Descent Method

پیدا کردن کمینه تابع هدف بدست می‌آید. روش تندترین کاهش از گرادیان تابع هدف برای تعیین جهت جستجو بهره می‌گیرد [۲۴].

استفاده از منفی بردار گرادیان به عنوان یک جهت برای کمینه‌سازی، اولین بار توسط کوشی<sup>۱</sup> در روش تندترین کاهش، صورت گرفت. در این روش، از یک نقطه آزمون اولیه  $X_i$  شروع و به طور تکراری طبق قاعده زیر به سمت نقطه بهینه حرکت می‌کنیم.

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i S_i = X_i - \lambda_i \nabla f_i \quad (۵-۳)$$

که  $\lambda_i$  طول گام بهینه در امتداد جهت جستجوی  $S_i = -\nabla f_i$  است.

به دلایل متعددی این روش در بسیاری از مسائل کارا نیست. از جمله اینکه جهت تندترین کاهش یک خاصیت موضعی است، و یا اینکه اگر کنترهای تابع هدف شکل نامنظمی داشته باشند فرآیند به طور نومیدکننده‌ای کند می‌شود.

### ۳-۲-۱-۲- روش گرادیان مزدوج<sup>۲</sup>:

دشواریهای همگرایی در روش تندترین کاهش، به شکل عمده‌ای با معرفی روش گرادیان مزدوج (فلچر - ریویس<sup>۳</sup>) اصلاح می‌شود. این روش، هر جهت جستجوی جدید را به صورت ترکیبی خطی از همه جهات جستجوی قبلی، و گرادیانی که جدیداً تعیین شده است، به دست می‌آورد.

الگوریتم این روش، به شکل زیر بیان می‌گردد [۱]:

۱- انتخاب مقدار حدس اولیه  $X_1$

۲- یافتن مقدار  $\nabla f_1 = \nabla f(x_1)$  و جایگزینی  $S_1 = -\nabla f$

۳- تعیین مقدار  $\lambda_1$  با استفاده از می‌نیم کردن  $f(X_1 + \lambda_1 S_1)$

۴- قرار دادن  $X_2 = X_1 + \lambda_1 S_1$  و  $i = 2$

<sup>۱</sup> - Cauchy

<sup>۲</sup> - Conjugate Gradient Method

<sup>۳</sup> - Fletcher-Reeves

۵- پیدا کردن  $\nabla f_i = \nabla f(x_i)$  و تعیین مقدار  $S_i$  از رابطه زیر:

$$S_i = \nabla f_i + \left( \frac{|\nabla f_i|^2}{|\nabla f_{i-1}|^2} \right) S_{i-1}$$

۶- محاسبه طول گام بهینه  $\lambda_i$  در جهت  $S_i$  و تعیین نقطه جدید:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i S_i$$

۷- شرایط بهینگی نقطه جدید را آزمایش کنید، اگر این نقطه بهینه است، فرآیند را متوقف

سازید، در غیر اینصورت  $i = i + 1$  قرار داده و گام پنجم به بعد را تا رسیدن به همگرایی تکرار کنید.

معیار بهینگی<sup>۱</sup>:

شرایط بهینگی را می‌توانیم با تغییرات تابع هدف در هر سیکل، و یا تغییرات متغیرهای

طراحی کنترل نماییم. مثلاً اگر:

$$\left| \frac{F(X_i) - F(X_{i+1})}{F(X_i)} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (۶-۳)$$

و یا اگر:

$$|X_{i+1} - X_i| \leq \varepsilon_2 \quad (۷-۳)$$

آنگاه  $X_{opt} \approx X_{i+1}$  فرض شده و تکرارها متوقف می‌گردد [۲۵].

مثال زیر در درک فرآیند روش فلچر-ریویس کمک کننده می‌باشد. کمینه تابع زیر را با

شروع  $X_1 = \{0\}$  از نقطه به دست آورید [۱]:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

حل:

<sup>۱</sup> - Optimality Criteria

$$\nabla f = \left\{ \begin{array}{l} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 4x_1 + 2x_2 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 \end{array} \right\} \quad \text{تکرار ۱:}$$

$$\nabla f_1 = \nabla f(X_1) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$$

جهت جستجو را  $S_1 = -\nabla f = (-1, 1)$  در نظر می‌گیریم. برای یافتن طول گام بهینه  $\lambda_1$  در

امتداد  $S_1$ ، مقدار  $f(X_1 + \lambda_1 S_1)$  را نسبت به  $\lambda_1$  کمینه کنید:

$$f(X_1 + \lambda_1 S_1) = f(-\lambda_1, \lambda_1) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1$$

و در  $\lambda_1 = 1$  مقدار  $df/d\lambda = 0$  می‌شود. پس:

$$X_2 = X_1 + \lambda_1 S_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} + 1 \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

تکرار ۲:

چون  $\nabla f_2 = \nabla f(x_2) = (-1, -1)$  جهت جستجوی بعدی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_2 = \nabla f_2 + \frac{|\nabla f_2|^2}{|\nabla f_1|^2} S_1$$

وقتی که  $|\nabla f_1|^2 = |\nabla f_2|^2 = 2$ ، آنگاه:

$$S_2 = -\left\{ \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right\} + \frac{2}{2} \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array} \right\}$$

برای یافتن  $\lambda_2$ ، عبارت زیر را نسبت به  $\lambda_2$  کمینه می‌کنیم:

$$f(X_2 + \lambda_2 S_2) = f(-1, 1 + 2\lambda_2) = 4\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 1$$

از آنجائیکه  $df/d\lambda_2 = 8\lambda_2 - 2$  در  $\lambda_2 = 1/4$  صفر می‌شود، داریم:

$$X_3 = X_2 + \lambda_2 S_2 = -\left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1.5 \end{array} \right\}$$

نقطه  $X_3$ ، نقطه بهینه جواب می‌باشد. زیرا:

$$\nabla f_3 = \nabla f(X_3) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad |\nabla f_3|^2 = 0$$

در نتیجه،  $S_3 = 0$  و بنابراین قادر به حرکت در جهتی دیگر نخواهیم بود.

یکی از مزایای روش گرادیان مزدوج فلچر - ریویس، عدم نیاز به حافظه زیاد برای محاسبه در تکرارهای متوالی می‌باشد. بنابراین اگر در یک مسئله بهینه‌سازی شامل تعداد زیادی از متغیرهای طراحی، با محدودیت حافظه مواجه باشیم، این روش می‌تواند بسیار مناسب باشد [۲۵].

### ۳-۲-۱-۳- روش نیوتن<sup>۱</sup>:

روشهایی که تاکنون بررسی شد، از اطلاعات حساسیت مرتبه اول تابع هدف، برای یافتن نقطه بهینه استفاده می‌کنند. روش نیوتن از اطلاعات حساسیت مرتبه دوم برای ساختن تابع مرتبه دوم استفاده می‌کند. ماتریس هسین<sup>۲</sup>، یعنی ماتریس مشتقات جزئی مرتبه دوم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H(X^k) \equiv \left[ \frac{\partial^2 f(X^k)}{\partial X_i^k \partial X_j^k} \right] \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (۸-۳)$$

که پارامتر  $k$  نمایانگر شماره تکرار می‌باشد. نقطه بهینه جدید از رابطه حاصل می‌شود:

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^{k+1} \quad (۹-۳)$$

که:

$$\Delta X^{k+1} = -H(X^k)^{-1} \cdot \nabla f(X^k) \quad (۱۰-۳)$$

از آنجائیکه روش نیوتن از مشتق‌های دوم تابع هدف استفاده می‌کند، غالباً آن را روش مرتبه دوم می‌گویند. روشهایی مانند روش تندترین کاهش و روش فلچر - ریویس، روشهای مرتبه اول نامیده می‌شوند [۱۰][۱۳].

### ۳-۲-۱-۴- روشهای شبه نیوتن<sup>۳</sup>:

<sup>۱</sup> - Newton Method

<sup>۲</sup> - Hessian Matrix

<sup>۳</sup> - Quasi-Newton Methods



اگر چه روش نیوتن، با استفاده از همگرایی مرتبه دوم، سریع تر از روش های گذشته به جواب بهینه می رسد، اما دشواری و هزینه بر بودن محاسبات ماتریس هسین<sup>۱</sup> در هر تکرار و نیز عدم همگرایی در برخی مسائل، از معایب این روش به شمار می آید.

روشهای شبه نیوتن مزایای هر دو روش تندترین کاهش و روش نیوتن را در برمی گیرند. این روش ها تنها به اطلاعات حساسیت مرتبه اول نیاز دارند و به منظور تسریع همگرایی ماتریس هسین را با استفاده از تقریب بدست می آورند. روش (DFP)<sup>۲</sup> و روش (BFGS)<sup>۳</sup> از جمله روشهای شبه نیوتن به حساب می آیند. برای دستیابی به اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [۱]، [۱۲] و [۱۳] مراجعه نمایید.

### ۳-۲-۲- روشهای بهینه سازی مقید

در روشهای گذشته، می توان مسئله مقید را به دنباله ای از مسائل نامقید تبدیل و حل نمود و جوابهای مسائل نامقید را به جواب مسئله مقید اصلی همگرا کرد. برای حل مسئله مقید تبدیل شده، هر روش مسائل نامقید می تواند بکار رود. در این بخش روشهایی که مستقیماً مسائل مقید را حل می کنند، شرح داده می شود.

### ۳-۲-۲-۱- روشهای تابع جریمه<sup>۴</sup>:

روشهای تابع جریمه، مسئله بهینه سازی را به فرمولبندی جدیدی تبدیل می کند، به گونه ای که جوابهای عددی با حل دنباله ای از مسائل کمینه سازی نامقید جستجو می شوند. اگر مسئله بهینه سازی را به شکل زیر فرض کنیم:

$X$  را باید به گونه ای بیابیم که تابع هدف  $f(X)$  را به شرط قیدهای زیر کمینه کند.

$$g_i(X) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11-3)$$

<sup>۱</sup> - Hessian Matrix

<sup>۲</sup> - Davidon-Fletcher-Powell

<sup>۳</sup> - Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno

<sup>۴</sup> - Penalty Function Methods

این مسئله با ساختن یک تابع به شکل زیر، به یک مسئله کمینه‌سازی نامقید تبدیل می‌شود.

$$\phi_k = \phi(X, r_k) = f(X) + \sum_{j=1}^m G_j [g_j(X), r_k] \quad (12-3)$$

که  $G_j$  تابعی از قید  $r_k, g_j$  یک ثابت مثبت است که پارامتر جریمه نامیده می‌شود. عبارت دوم در سمت راست رابطه (۱۲-۳) را به عبارت جریمه می‌نامند. اگر کمینه‌سازی نامقید تابع  $\phi$  برای دنباله‌ای از مقادیر پارامتر جریمه  $r_k (k=1,2,\dots)$  تکرار شود، جواب آن به جواب مسئله اصلی که در رابطه (۱۱-۳) بیان شده است، همگرا می‌شود. به همین دلیل روشهای تابع جریمه را، با عنوان روشهای کمینه‌سازی نامقید متوالی (SUMT)<sup>۱</sup> هم می‌نامند.

فرمول‌بندی تابع جریمه برای مسائل با قیدهای نامساوی را می‌توان به دو دسته، یعنی روشهای داخلی و خارجی طبقه‌بندی کرد. برخی از شکلهای معمول تابع جریمه  $G_j$  برای فرمول‌بندی تابع جریمه داخلی<sup>۲</sup> عبارتند از:

$$G_j = -\frac{1}{g_j(X)} \quad (13-3)$$

$$G_j = \log(-g_j(X)) \quad (14-3)$$

و برخی از شکلهای تابع  $G_j$ ، که در فرمول‌بندی تابع جریمه خارجی<sup>۳</sup> معمول هستند به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} G_j &= \max\{0, g_j(x)\} \\ G_j &= [\max\{0, g_j(x)\}]^p \end{aligned} \quad (15-3)$$

در روشهای داخلی، همه کمینه‌های نامقید  $\phi_k$  در داخل ناحیه امکان‌پذیر قرار می‌گیرند و با تغییر  $r_k$  به شیوه‌ای خاص (به شکل نزولی)، به جواب مسئله بهینه‌سازی اصلی همگرا می‌شوند. در

<sup>۱</sup> - Sequential Unconstrained Minimization Technique

<sup>۲</sup> - Interior Penalty Function

<sup>۳</sup> - Exterior Penalty Function

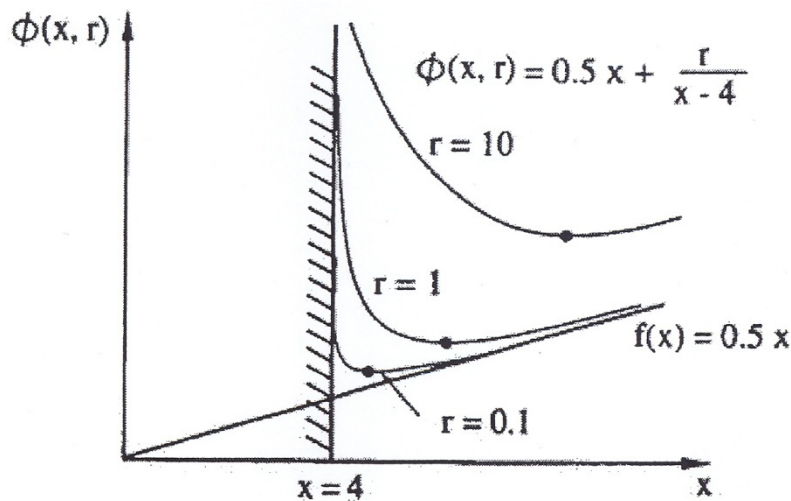
روشهای خارجی، همه کمینه‌های نامقید  $\phi_k$ ، در داخل ناحیه امکان‌پذیر واقع می‌شوند، و با تغییر  $r_k$  به شکل صعودی، از خارج از ناحیه امکان‌پذیر، به جواب مطلوب همگرا می‌شوند.

به عنوان مثال مسئله بهینه‌سازی زیر به روش تابع جریمه داخلی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 0.5x \\ \text{such that } g(x) &= 4 - x \leq 0 \end{aligned} \quad (16-3)$$

$$\Rightarrow \min \phi(x, r) = 0.5x - \frac{r}{4-x} \quad (17-3)$$

$$r = r_1, r_2, \dots \quad r_i \rightarrow 0, \quad r_i > 0$$



شکل ۳-۱- نمودار نمایش تابع جریمه داخلی

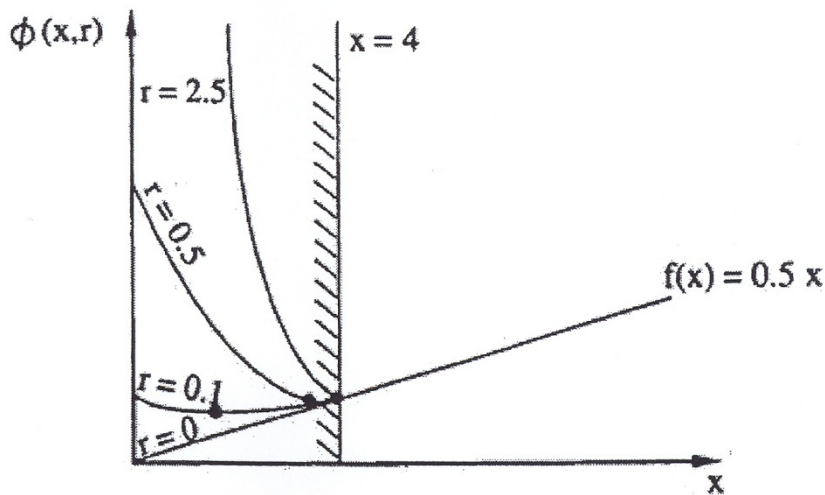
همانطور که در شکل (۳-۱) پیداست می‌توان دید که با کاهش متوالی  $r_k$ ، کمینه‌های

نامقید تابع  $\phi(X, r_k)$  به نقطه بهینه همگرا می‌شوند. از طرف دیگر، در روش تابع جریمه خارجی

همگرایی با افزایش متوالی  $r_k$  به دست می‌آید (شکل (۳-۲)).

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 0.5x \\ \text{such that } g(x) &= 4 - x \leq 0 \end{aligned} \quad (18-3)$$

$$\Rightarrow \min \phi(x, r) = 0.5x + r[\max(0, 4-x)]^2 \quad (19-3)$$



شکل ۲-۳- نمودار نمایش تابع جریمه خارجی

توابع جریمه مسئله بهینه‌سازی مقید را به یک مسئله نمونه نامقید تبدیل می‌کنند. در این حالت روشهای مرسوم بهینه‌سازی نامقید که پیش از این مرور کردیم، مانند روشهای شبه نیوتن برای کمینه کردن تابع  $\phi$  مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱].

### ۲-۲-۲-۳- برنامه‌ریزی خطی متوالی (SLP):

روش SLP، مسئله غیرخطی را با یک سلسله از مسائل بهینه‌سازی خطی، به شکل متوالی جایگزین می‌کند. همانطور که پیش از این ذکر شد در هر تکرار روش سیمپلکس برای پیدا کردن مسئله برنامه‌ریزی خطی قابل استفاده می‌باشد.

مفهوم اصلی این روش، ساده است. ابتدا، یک تقریب بسط سری تیلور خطی از توابع قید و هدف می‌سازیم. سپس مسئله بهینه‌سازی جدید را جایگزین مسئله غیرخطی اصلی می‌نماییم. در این حالت، هنگامیکه به مقادیر تابع هدف و قیدها نیاز داشته باشیم، بسیار راحت و ارزان از تقریب خطی محاسبه خواهند شد. همچنین از آنجائیکه مسئله جدید بدست آمده خطی است، گرادیان‌های توابع هدف و قیود مستقیماً از بسط سری تیلور در دسترس هستند.

<sup>۱</sup> - Sequential Linear Programming

با استفاده از مقادیر تابع و اطلاعات حساسیت، مسئله غیرخطی با استفاده از بسط سری

تیلور مرتبه اول، در هر تکرار، به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X^k) + \nabla f^T \Delta x^k \\ \text{subject to} \quad & g_i(X^k) + \nabla g_i^T \Delta x^k \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j^L \leq x_j \leq x_j^U \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (20-3)$$

پارامتر  $k$  نشان دهنده شماره تکرار می‌باشد.

اگرچه اطلاعات حساسیت برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به کار نمی‌آید، اما برای

تقریب زدن مسئله غیرخطی با یک مسئله خطی معادل به این اطلاعات نیازمند خواهیم بود [۱۰].

### ۳-۲-۲-۳- برنامه‌ریزی مرتبه دوم متوالی<sup>۱</sup> (SQP):

در مقایسه با روشهای قبلی، که از اطلاعات حساسیت مرتبه اول برای تعیین جهت

جستجوی  $S$  استفاده می‌کردند. روش SQP در هر تکرار متوالی، یک مسئله مرتبه دوم را حل

می‌کند که دارای تابع هدف مرتبه دو و قیدهای خطی می‌باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^k) + \nabla f^T S + \frac{1}{2} S^T H S \\ \text{subject to} \quad & g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k) S \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (21-3)$$

مسئله بدست آمده در هر تکرار می‌تواند با روش جهات امکان‌پذیر و با استفاده از شرایط

کان-تاکر<sup>۲</sup> حل شود [۱۰][۱۲].

### ۳-۲-۲-۴- روش جهات امکان‌پذیر<sup>۳</sup>:

روش جهات امکان‌پذیر سعی می‌کند تا جایی که امکان دارد از مرز قیدها دور بماند. در این

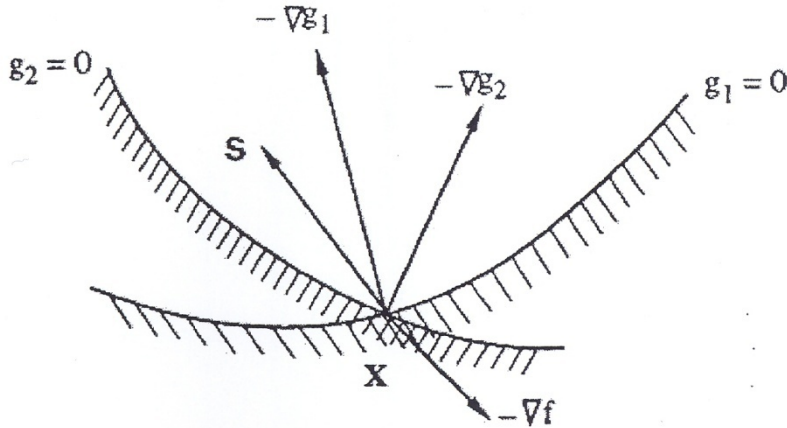
روش، تکرار معمولاً از مرزهای فضای امکان‌پذیر شروع می‌شود.

<sup>۱</sup> - Sequential Quadratic Programming

<sup>۲</sup> - Kuhn Tucker Condition

<sup>۳</sup> - Feasible Directions Method

شکل زیر را در نظر بگیرید. در این شکل، فرض شده که  $X$  نقطه بدست آمده از تکرار قبل است.



شکل ۳-۳- انتخاب جهت جستجو با استفاده از روش جهات امکان پذیر

در این مرحله می خواهیم جهت جستجوی  $S$  حرکت کنیم، نقطه  $X$  بعدی در فضای امکان پذیر قرار می گیرد، و دوم اینکه حرکت در این جهت باعث بهبود مقدار تابع هدف می شود. بردار  $S$  طوری تعیین می شود که اگر حداقل به اندازه یک گام کوچک در آن جهت حرکت کنیم، همچنان جستجو در فضای امکان پذیر باقی می ماند و به سرعت این حوزه را ترک نمی کند. این شرایط برآورده می شود، اگر:

$$S^T \cdot \nabla g_j(X_i) \leq 0 \quad (22-3)$$

و جهت  $S$  سبب کاهش مقدار تابع هدف می گردد، اگر:

$$S^T \cdot \nabla f(X_i) \leq 0 \quad (23-3)$$

جهت  $S$  در نقطه  $X_i$  جهت امکان پذیر<sup>۱</sup> خواهد بود اگر در رابطه (۲۲-۳) صدق کند و یک جهت امکان پذیر مفید<sup>۲</sup> نامیده می شود اگر در رابطه (۲۳-۳) نیز صدق نماید [۲۶].  
با در دسترس بودن گرادیان تابع هدف و قیود قادر خواهیم بود مسئله بهینه سازی غیرخطی زیر را حل نماییم:

<sup>۱</sup> - Feasible Direction  
<sup>۲</sup> - Usable Feasible Direction

$$\begin{aligned} \min \quad & F(X) \\ \text{subject to} \quad & g_j(X) \leq 0 \quad j=1, M \\ & X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \end{aligned} \quad (24-3)$$

با فرض داشتن یک نقطه اولیه، همانند روشهای گذشته برای مسئله غیرخطی و با یافتن

جهت جستجو و تعیین طول گام مناسب در آن جهت، در جهت بهینه حرکت می‌نماییم.

$$X^k = X^{k-1} + \lambda.S^k \quad (25-3)$$

مراحل مختلف روش جهات امکان‌پذیر به شرح زیر می‌باشد [25].

$$k = 0, x = x^0 \quad -1$$

$$k = k + 1 \quad -2$$

$$\{g_j(x^{k-1}) j=1, M\} \text{ و } F(x^{k-1}) \text{ ارزیابی} \quad -3$$

$$\text{مشخص کردن مجموعه قیود بحرانی} \quad -4$$

$$\text{محاسبه } \nabla F(x^{k-1}) \text{ و نیز } \nabla g_j(x^{k-1}), \text{ برای قیود بحرانی} \quad -5$$

$$\text{مشخص کردن یک جهت جستجوی } S^k \quad -6$$

$$\text{انجام یک جستجوی یک بعدی برای یافتن طول گام } \lambda \quad -7$$

$$\text{قرار دادن } X^k = X^{k-1} + \lambda.S^k \quad -8$$

$$\text{کنترل همگرایی برای رسیدن به نقطه بهینه، اگر شرایط بهینگی برآورده شود خروج از} \quad -9$$

برنامه و در غیر اینصورت رجوع به مرحله ۲

روش جهات امکان‌پذیر شامل دو روش جهات امکان‌پذیر زوتندیک<sup>۱</sup>، و روش تصویر گرادیان

روزن<sup>۲</sup> می‌باشد. تفاوت این دو روش تنها در شیوه تولید جهات امکان‌پذیر است.

در روش زوتندیک، اگر نقطه آغازین در داخل (و نه در مرزهای) ناحیه امکان‌پذیر واقع شود،

جهت منفی گرادیان را به عنوان جهت امکان‌پذیر مفید در نظر می‌گیریم. لیکن اگر نقطه آغازین

در مرز ناحیه امکان‌پذیر واقع شود، برخی از قیدها فعال خواهند بود، و جهت امکان‌پذیر مفید به

<sup>۱</sup> - Zoutendijk

<sup>۲</sup> - Rosen Gradient Projection Method

گونه‌ای پیدا می‌شود که در روابط (۲۲-۳) و (۲۳-۳) صدق نماید. اما در مقابل، روش تصویر گرادیان روزن از تصویر منفی گرادیان تابع هدف بر قیده‌های که فعلاً فعال هستند، استفاده می‌کند [۱][۲۶].



## فصل ۴

### مفاهیم تقریب‌سازی

#### ۴-۱- مقدمه

استفاده از روشهای برنامه‌ریزی غیرخطی برای مسائل بهینه‌سازی بزرگ پرهزینه می‌باشد از اینرو اشمیت<sup>۱</sup> و همکارانش در اواسط دهه هفتاد، مفاهیم تقریب‌سازی را پی‌ریزی کردند. تقریب‌سازی براساس دامنه کاربرد آن در فضای طراحی می‌تواند به سه دسته تقسیم شود: تقریب‌های محلی، تقریب‌های سراسری و تقریب‌های برد متوسط. در یک تقریب محلی، تقریب محلی، تقریب فقط در همسایگی یک نقطه از فضای طراحی معتبر است. در یک تقریب سراسری، مفاهیم تقریبی در تمام فضای طراحی و یا حداقل بخش بزرگی از آن دارای اعتبار است و سرانجام تقریب برد متوسط سعی دارد تقریب محلی را با کیفیت سراسری تعمیم بدهد. اگر بخواهیم بین تقریب‌سازی تابع و تقریب‌سازی مسئله وجه تمایز قائل بشویم. تقریب‌سازی مسئله عبارتست از جایگزینی بیان اصلی مسئله با مسئله‌ای که تقریباً معادل آن اما با راه حل آسان‌تر می‌باشد [۳].

---

<sup>۱</sup> - Schmit

#### ۴-۲- تقریب‌های محلی<sup>۱</sup>

تقریب‌های محلی در همسایگی نقطه‌ای که تولید شده معتبر است. اساس این تقریب‌ها بر فرموله کردن یک مسئله تقریبی (تابع هدف و یا توابع قید) بنا شده و حاصل آن بدست آوردن یک نقطه بهینه می‌باشد. هنگامیکه فرآیند تقریب‌سازی با این نقطه اولیه تکرار می‌شود، نقطه جدید بهینه حاصل می‌شود که به نقطه بهینه واقعی نزدیک‌تر خواهد بود و با تکرار این عملیات جواب مسئله به سمت جواب بهینه واقعی همگرا می‌گردد. تقریب‌های محلی شاید مرسوم‌ترین تقریب‌های استفاده شده در مسایل بهینه‌سازی باشند.

یکی از الگوریتم‌های قوی برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی الگوریتم سیمپلکس است که توسط دانتزیک<sup>۲</sup> در سال ۱۹۴۷ پیشنهاد شد. کارایی زیاد این الگوریتم ایده تبدیل مسائل غیرخطی بوسیله خطی‌سازی کردن تابع هدف و قیود را بوجود آورد. خطی‌سازی استفاده آسان از الگوریتم سیمپلکس را فراهم کرد و این تلاش‌ها منجر به روش برنامه‌ریزی خطی متوالی (SLP)<sup>۳</sup> و همچنین استفاده وسیع از تقریب‌های سری تیلور خطی شد [۳].

#### ۴-۲-۱- تقریب‌های مرتبه اول<sup>۴</sup>:

کاربردی‌ترین تقریب محلی براساس استفاده از مقدار تابع و مشتقات مرتبه اول آن در یک نقطه طراحی می‌باشد. عدم وجود مشتقات بالاتر سبب حصول یک تقریب خطی می‌شود. ساده‌ترین نوع این تقریب‌های خطی، تقریب براساس بسط سری تیلور می‌باشد. بسط این سری با مشتقات مرتبه اول برای تابع داده شده  $g(x)$  برابر است با:

$$g_L(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} \quad (1-4)$$

<sup>۱</sup> - Local Approximation

<sup>۲</sup> - Dantzig

<sup>۳</sup> - Sequential Linear Programming

<sup>۴</sup> - First Order Approximation

برای بعضی از کاربردهای بهینه‌سازی تقریب خطی حتی در نقاطی از فضای طراحی که نزدیک نقطه شروع یا اولیه هستند دقت مناسبی ندارد. بنابراین گاهی نیاز می‌شود که برای رسیدن به یک دقت مناسب جملات اضافه بسط سری تیلور را نگه داریم. این عمل مستلزم انجام محاسبات پیچیده و پرهزینه مشتقات مراتب بالاتر است. به جای انجام این محاسبات، محققین تقریب‌های دیگری را پیشنهاد دادند که فقط از مشتقات مراتب اول استفاده می‌کنند، اما نسبت به تقریب خطی دقت بیشتری را می‌توانند فراهم کنند.

یکی از این تقریب‌ها، تقریب معکوس<sup>۱</sup> است که یک تقریب خطی از  $y_i$  (تابع معکوس  $x_i$ ) است.

$$y_i = \frac{1}{x_i} \quad (۲-۴)$$

به عنوان مثال در مطالعات بهینه‌سازی مربوط به صفحات و یا خرپاها معمولاً متغیرهای طراحی، سطح مقطع اعضای خرپا یا ضخامت المان‌های تنش صفحه‌ای است و در سازه‌ها عموماً قیود تنش و یا تغییر مکان نسبت به معکوس این متغیرها خطی می‌باشند. تقریب معکوس به شکل جملات زیر برحسب متغیرهای طراحی اصلی بیان می‌شود:

$$g_R(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \frac{x_{0i}}{x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} \quad (۳-۴)$$

تقریب دیگری توسط استارنس و هافتکا پیشنهاد شده که ترکیبی از تقریب خطی و تقریب معکوس است. برای بدست آوردن این تقریب ابتدا حاصل تفریق تقریب معکوس از تقریب خطی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$g_L(X) - g_R(X_0) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{0i})^2}{x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} \quad (۴-۴)$$

<sup>۱</sup> - Reciprocal Approximation

علامت هر کدام از جملات سری با علامت نسبت  $(\partial g / \partial x_i) / x_{0i}$  که می‌تواند به شکل حاصلضرب  $x_{0i}(\partial g / \partial x_i)$  نوشته شود مشخص می‌گردد. اگر این حاصلضرب مثبت باشد می‌توان نتیجه گرفت که تقریب خطی بزرگتر است و در غیر اینصورت تقریب معکوس بزرگتر است. از آنجائیکه قیود معمولاً به شکل نامنفی  $g(x) \leq 0$  بیان می‌شوند تقریبی که مثبت‌تر باشد محافظه‌کارانه‌تر خواهد بود. تقریب محافظه‌کار<sup>۱</sup> با انتخاب جملات بزرگتر به شکل زیر بیان می‌شوند:

(۵-۴)

$$g_c(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^n G_i (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0}$$

$$G_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{0i}(\partial g / \partial x_i) \geq 0 \\ x_{0i} / x_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

که در آن:

هنگامیکه مقدار  $G_i = 1$  باشد، تقریب موردنظر متناظر با تقریب خطی و در صورتیکه

$G_i = x_{0i} / x_i$  باشد متناظر با تقریب معکوس خواهد بود [۳].

#### ۴-۲-۲- تقریب‌های مراتب بالاتر<sup>۲</sup>:

تقریب‌های مراتب بالاتر، منجر به دقت بیشتری در مسائل بهینه‌سازی می‌شوند اما باید به

این نکته توجه کرد که گاهی هزینه محاسبه مشتقات درجات بالاتر بسیار زیاد خواهد بود.

تقریب مرتبه دوم به سه نوع اطلاعات مقدار تابع، مشتقات مرتبه اول و مشتقات مرتبه دوم

نیاز دارد و اگر در فضای  $n$  بعدی بررسی بشود بسط سری تیلور آن شامل  $(n+1)(n+2)/2$

جمله خواهد بود. از این‌رو استفاده از این تقریب چندان مرسوم نمی‌باشد [۲].

قالب کلی تقریب مرتبه دوم بوسیله بسط سری تیلور به شکل زیر خواهد بود:

<sup>۱</sup> - Conservative Approximation

<sup>۲</sup> - Higher Order Approximations

$$g_Q(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x_0} \quad (6-4)$$

تقریب درجه دوم معکوس با خطمشی مشابه تقریب درجه اول معکوس به این شکل زیر

بدست آمد:

$$g_{QR}(X) = g(X_0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_{0i}}{x_i} \right) \left( 2 - \frac{x_{0i}}{x_i} \right) (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_{0i}}{x_i} \right) \left( \frac{x_{0j}}{x_j} \right) (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x_0} \quad (7-4)$$

هافتکا<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۹ عملکرد تقریب‌های مرتبه اول و دوم را در بهینه‌سازی سازه‌ها

مقایسه کرد و به این نتیجه رسید که تقریب‌های مرتبه دوم تعداد سیکل‌های مورد نیاز فرآیند

بهینه‌سازی را ۱۰ تا ۵۰ درصد کاهش می‌دهد [۹].

### ۳-۴ - تقریب‌های سراسری<sup>۲</sup>

تقریب‌های سراسری در تمام فضای طراحی و یا بخش بزرگی از آن معتبر هستند. این

روش‌ها معمولاً در تعریف فرمول یک مسئله بهینه‌سازی، از نتایج خروجی استفاده می‌کنند و تابعی

تقریبی با فرمولی متفاوت تولید می‌کند که محاسبات بهینه‌سازی برای آن آسان‌تر خواهد بود.

هنگامیکه مسئله بهینه‌سازی تعداد زیادی نقطه بهینه داشته باشد، تقریب‌های محلی

ناکارآمد می‌شوند، به همین دلیل تقریب‌های سراسری در مواقعی که مسئله با چندین نقطه بهینه

موضعی مواجه است و می‌خواهیم نقطه بهینه کلی را پیدا کنیم کارایی مناسب و بیشتری دارند

{۲}

تکنیک‌های تقریب‌های سراسری شامل تولید سطوح پاسخ<sup>۳</sup> می‌باشند.

<sup>۱</sup> - Haftka

<sup>۲</sup> - Global Approximation

<sup>۳</sup> - Response Surface Method

## فصل ۵

### بررسی روشهای متوالی و تقریبی

## ۵-۱- مقدمه

در فصول گذشته، درباره روشهای بهینه‌سازی مشتمل بر نامقید و مقید و روشهای تقریبی (مرتبه اول، مراتب بالاتر) صحبت گردید. در این فصل برآنیم تا کمی جزئی‌تر بر روی این روشها و ارتباط آنها با یکدیگر و سیر حرکت آنها بحث نمائیم.

## ۵-۲- روش برنامه‌ریزی متوالی<sup>۱</sup>

ایده اساسی برنامه‌ریزی متوالی ساختن تقریب از تابع  $g_i(x)$  می‌باشد. زمانی که تقریبها صحیح باشند، مسائل هم به صورت تحلیلی یا یک متد عددی مؤثر می‌توانند حل شوند. به مسائل تقریب‌شده، زیرمسئله<sup>۲</sup> گفته می‌شود. حل این زیرمسئله‌ها، تقریبی از مسئله اصلی می‌باشد، به این دلیل، پروسه حل بارها تکرار می‌گردد.

---

<sup>۱</sup> - The Sequential Programming Method (SCP)

<sup>۲</sup> - Subproblem

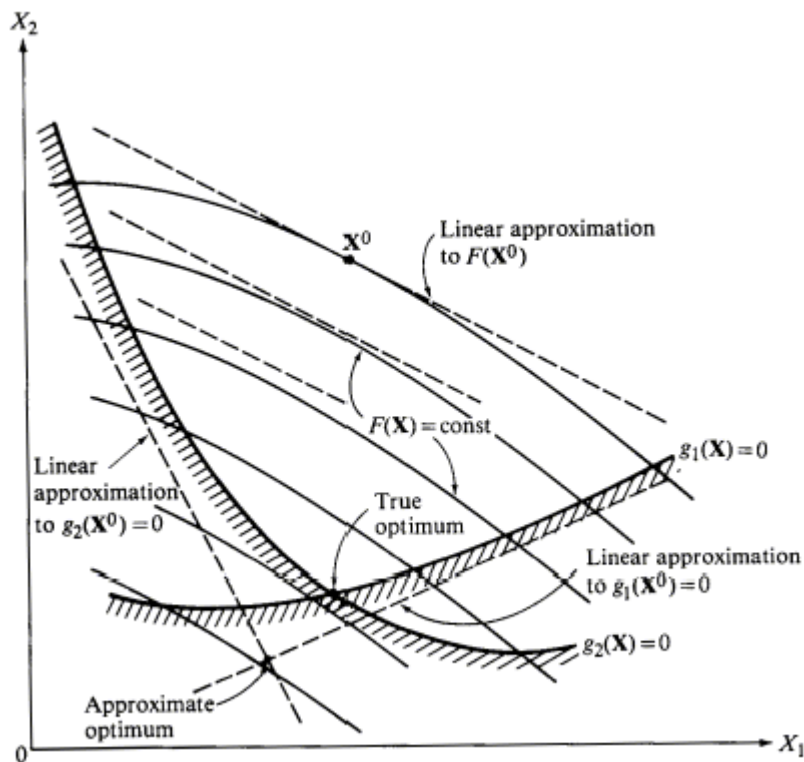


### ۵-۲-۱- برنامه‌ریزی خطی متوالی<sup>۱</sup>

می‌توان یک بسط تیلور از تابع در نقطه فعلی  $x^{(k)}$  ساخت، اگر فقط ترم‌های خطی مدنظر باشد، تقریب خطی بوده و بوسیله متد سیمپلکس<sup>۲</sup> قابل حل خواهد بود. به این نوع از متد تقریب، برنامه‌ریزی خطی متوالی گفته می‌شود.

$$g_i(x) \approx g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k) \cdot (x - x^k) \quad (1-5)$$

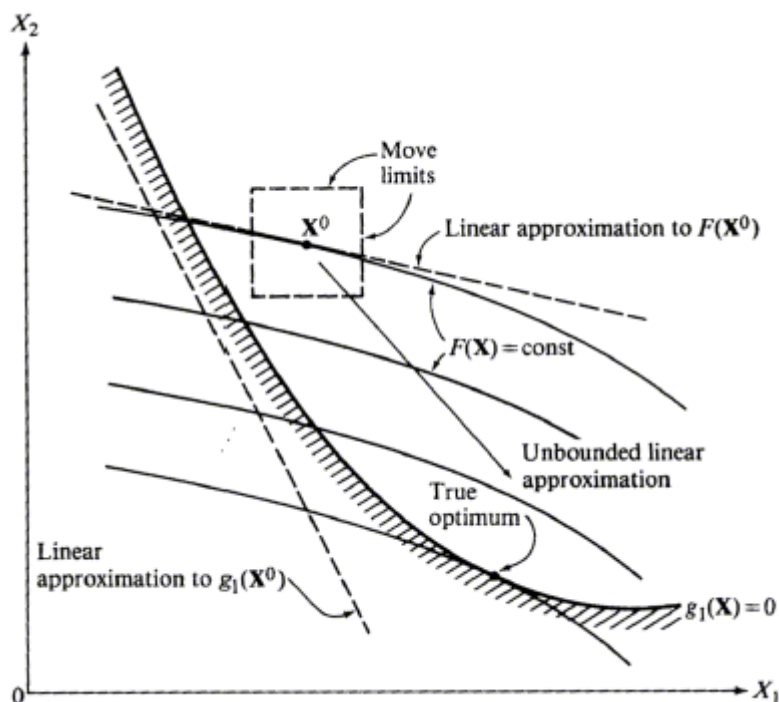
وقتی مسئله اصلی محدب باشد، بهینه خطی شده تمایل به خارج افتادن از نقطه بهینه اصلی دارد.



شکل ۵-۱- برنامه‌ریزی خطی

یک تقریب خطی با توجه به چگونگی غیرخطی بودن تابع اصلی، تنها در یک پنجره کوچکی اطراف نقطه فعلی، مناسب می‌باشد.

<sup>۱</sup> - Sequential Linear Programming  
<sup>۲</sup> - Simplex Method



شکل ۵-۲- تفسیر Move Limits

غلبه بر این موضوع، با معرفی Move Limits، انجام پذیر می باشد. Move Limits یک

قید اضافی می باشد که حل تابع تقریب شده را محدود می کند به همسایگی نقطه تقریب شده.

Move Limits در خلال پروسه حل می تواند تنظیم شود.

### ۵-۲-۱-۱- ویژگی های SLP

بر اساس تقریب های خطی تابع هدف و توابع قید می باشد.

زیرمسئله بوسیله متد سیمپلکس قابل حل است.

قابل استفاده برای مسائل با متغیرهای طراحی و قیدهای خیلی زیاد.

روشی آسان و کارآمد می باشد.

به تنظیم Move Limits در مسائل غیرخطی احتیاج دارد که اگر Move Limits

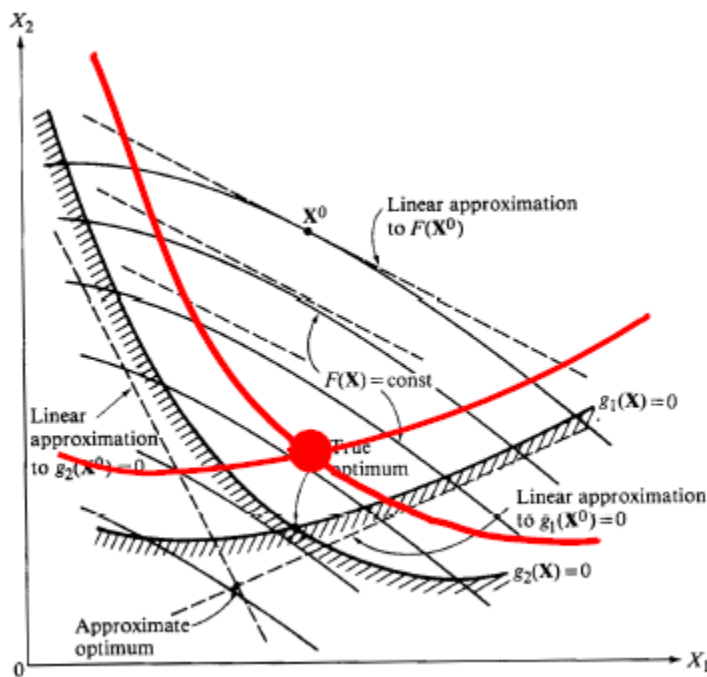
بسیار کوچک باشد، پروسه آهسته و اگر بسیار بزرگ باشد، حل احتمالاً غیرعملی خواهد بود.

برای توابع بسیار غیرخطی، هم گرایی بسیار آهسته صورت می گیرد.

### ۵-۲-۲- برنامه‌ریزی محدب متوالی<sup>۱</sup>

تقریب‌های مرتبه اول شبیه SLP بسیار جذاب‌اند، بخاطر اینکه تنها به گرادیان‌ها احتیاج دارند و نه مشتقات مراتب بالاتر.

اما مشکل وابستگی به Move Limits و تمایل به حالت نوسانی را دارد. این مشکل، ایده برنامه‌ریزی محدب را بوجود آورد. این متد، تقریب‌های محافظه‌کارانه دارند و تخمین نقطه بهینه، داخل فضای قابل قبول قرار می‌گیرد.



شکل ۵-۳- تفسیر متد SCP

این متد مسئله غیرمحدب معمول را بوسیله تقریب محدب در توابعی صریح، جایگزین می‌کند.

مسئله اصلی بوسیله بکار بستن تقریب‌های متوالی بوسیله جواب مرحله قبل بدست می‌آید.

دو مفهوم را برای این متد بیان می‌کنیم:

خطی‌سازی محدب<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> - Sequential Convex Programming

## روش حرکت مجانبها<sup>۲</sup>

در این متد، قیدها باید به گونه‌ای تقریب شوند که جواب داخل ناحیه قابل قبول قرار گیرد. الگوریتم‌های معیار بهینگی<sup>۳</sup> برای بهینه‌سازی سازه‌ای برای مسائل حداقل با یک قید مناسب می‌باشند. این روش، روش کاربردی مناسبی است ولی هنگامی که مسئله پیچیده می‌شود مانند زمانی که چندین قید وجود دارند، مسئله OC باید با یک SCP جایگزین گردد. فلئوری<sup>۴</sup> (۱۹۸۲) نشان داد که SCP یک تعمیم از متد OC می‌باشد.

متدهای برنامه‌ریزی متوالی بر اساس دو مفهوم بنا شده‌اند:

جایگزینی مسائل بوسیله یک توالی از مسائل محدب تقریب‌شده بوسیله حل این مسائل

تقریب‌شده با برنامه‌ریزی ریاضی مناسب مانند SQP.

## مزایای SCP

مفهوم تقریب‌ها و پروسه حل این مسائل تقریب‌شده مستقل از تعداد و طبیعت قیدها می‌باشد.

به نظر می‌رسد که متدهای دوال<sup>۵</sup> با این مسائل خیلی خوب منطبق باشند، زمانی که مسائل بهینه‌سازی به فضای دوالی که بعد آن معادل تعداد قیدهای فعال می‌باشد، برگردانده شود.

می‌توانند قیدهای سازه‌ای دقیق و مناسب برای کاهش تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به

حل بهینه، انتخاب شوند [۱۸].

## ۵-۲-۳- خطی سازی محدب<sup>۶</sup>

---

<sup>۱</sup> - Convex Linearisation (Conlin)

<sup>۲</sup> - Method of Moving Asymptotes (MMA)

<sup>۳</sup> - Optimal Criteria

<sup>۴</sup> - Fleury

<sup>۵</sup> - Dual Method

<sup>۶</sup> - (Conlin)Convex Linearisation

یکی از اولین کوشش‌های موفق در الگوریتم برنامه‌ریزی محدب برای مسائل غیرخطی معمول، این روش می‌باشد.

این روش بر اساس جانشینی متغیر انجام می‌گیرد. برخی از متغیرهای تقریب SLP بوسیله معکوس‌هایشان جایگزین می‌گردند.

$$g_i(x) \approx g_i(x^{(k)}) + \sum_{(1)} \frac{\delta g_i}{\delta x_j} (x_j - x_j^{(k)}) + \sum_{(2)} \frac{\delta g_i}{\delta y_j} (y_j - y_j^{(k)})$$

$$\text{where } y_j = \frac{1}{x_j}$$

This can converted to

$$g_i(x) \approx g_i(x^{(k)}) + \sum_{(1)} \frac{\delta g_i}{\delta x_j} (x_j - x_j^{(k)}) + \sum_{(2)} \frac{\delta g_i}{\delta y_j} \frac{x_i}{x_j^{(k)}} (x_j - x_j^{(k)})$$

where sum (1) is used if  $\frac{\delta g_i}{\delta x_j} \geq 0$ , and sum (2) is used otherwise

(۲-۵)

به عبارت دیگر این متد، مسئله اصلی را با یکسری تقریب‌های تفکیک‌پذیر و محدب جایگزین می‌کند.

در تقریب بسط تیلور قیدها، گرادیان‌ها، هنگامی که علامت منفی دارند با متغیرهای خودشان یا زمانی که علامت مثبت دارند با معکوس متغیرها ضرب شده‌اند. برای تابع هدف نیز تقریب یکسان پیدا می‌شود.

متد CONLIN توسط فلئوری معرفی گردید. تقریب در این متد، محافظه‌کارانه می‌باشد.

## ویژگی‌های متد CONLIN

توابع تفکیک‌پذیر و محدب به طوری که متد دوال مورد استفاده قرار می‌گیرد.  
از تقسیم بر صفر باید دوری کرد.

اگر نابجا از CONLIN استفاده شود، همگرایی آهسته و نوسانی خواهد بود.

### ۵-۲-۴- متد حرکت مجانبها (MMA)<sup>۱</sup>

یک روش برنامه‌ریزی محدب می‌باشد. فرمول‌بندی آن کمی متفاوت و پیچیده می‌باشد.  
این روش توسط کریستر سوانبرگ<sup>۲</sup> معرفی گردید و از مفهوم CONLIN برگرفته شده است، اما بیشتر از CONLIN عمومیت پیدا کرد.

در عوض ضریب گرادیان‌ها در تقریب، با متغیر  $x_i$  و معکوس آن، به ترتیب در  $(u_i - x_i)$  و  $(x_i - l_i)$  ضرب می‌شوند.

پارامترهای  $u$  و  $l$  برای تنظیم محافظه‌کاری تقریب و کارایی پروسه‌های حل، استفاده شده‌اند. تقریب هم‌چنان تفکیک‌پذیر و محدب می‌باشد.

فرم مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای به این صورت می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq \bar{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, M \\ & 0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max} \quad e = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3-5)$$

$M$  تعداد قیدها،  $N$  تعداد المانها، تابع  $f$ ، تابع هدف، تابع  $f_i$ ، تابع قیدها و  $x_{\min}$  و  $x_{\max}$  حد پائین و بالای متغیرهای طراحی می‌باشند. توابع ضمنی  $f_i$ ، با توابع صریح  $f_i^{(k)}$  تقریب شده‌اند.

انتخاب این توابع تقریبی بر اساس گرادیان‌ها و مقادیر توابع محاسبه شده قبلی می‌باشد.

<sup>۱</sup> - Method of Moving Asymptotes (MMA)

<sup>۲</sup> - krister svanberg

$$\begin{aligned} \min : & \quad \tilde{f}^{(k)}(x) \\ \text{s.t.} : & \quad \tilde{f}_i^{(k)}(x) \leq \bar{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, M \\ & \quad 0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max} \quad e = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4-5)$$

k تعداد تکرار می‌باشد. بردار  $x^{(0)}$ ، پیشنهاد آغازین می‌باشد. در MMA، هر تابع تقریبی

$\tilde{f}_i^{(k)}(x)$ ، بوسیله یک خطی‌سازی از  $f_i(x)$  در متغیرهای نوع  $\frac{1}{U_e - x_e}$  یا  $\frac{1}{x_e - L_e}$  بدست

می‌آید که وابسته به علامتهای مشتقات در  $x^{(k)}$  می‌باشد. به طوری که  $L_e$  و  $U_e$  پارامترهایی هستند که  $L_e < x^{e(k)} < U_e$  را ارضا می‌کنند:

(5-5)

$$\tilde{f}_i^{(k)}(x) = \sum_{e=1}^N \left( \frac{P_{ie}}{U_e - x^e} + \frac{q_{ie}}{x^e - L_e} \right) + r_i$$

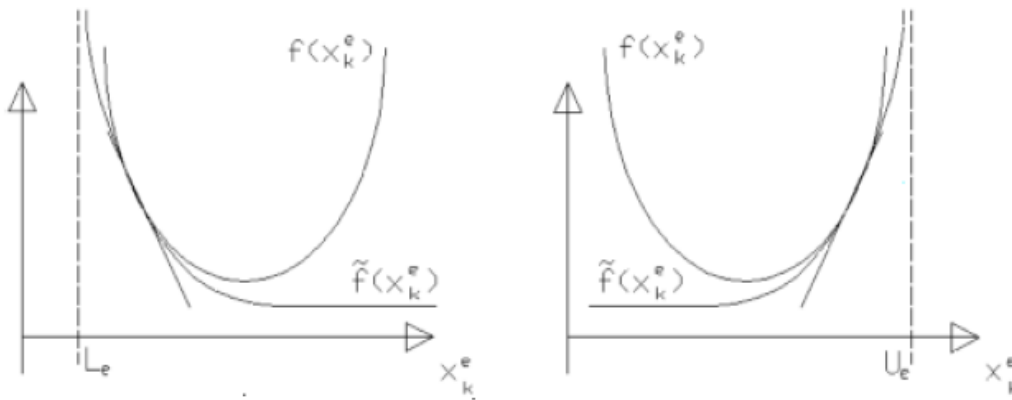
$$\text{IF} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x} > 0 \quad \text{at} \quad x^{(k)} \quad \text{then:} \quad P_{ie} = (U_e - x^{e(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \Lambda \quad q_{ie} = 0$$

$$\text{IF} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x} < 0 \quad \text{at} \quad x^{(k)} \quad \text{then:} \quad q_{ie} = -(x^{e(k)} - L_e)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \Lambda \quad P_{ie} = 0$$

$$\tilde{f}_i^{(k)}(x^{(k)}) = f_i^{(k)}(x^{(k)})$$

$r_i$  به طوری انتخاب شده است که مقادیر نقاط مجانبی  $L_e$  و  $U_e$  به طور معمول میان

تکرارها تغییر یافته‌اند و بنابراین این نقاط تابعی از  $K$  می‌باشند.



شکل (4-5) پروسه استفاده MMA برای یک متغیر طراحی  $x^e$  را نشان می‌دهد. تابع  $f(x)$  تابع ضمنی و تا

تابع تقریب شده است.  $\tilde{f}^{(k)}$

نقاط مجانبی  $L_e$  و  $U_e$  همیشه مقادیر محدود داده شده‌اند. یک راه تحلیلی برای مقداردهی به این نقاط استفاده شده است.

مجانباها به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند وقتی برای طراحی بهینه تکرار می‌کنیم. و از همین موضوع، نامگذاری این متد، گرفته شده است.

در کار ما انرژی معادل با  $f_0(x)$  می‌باشد و سازه با یک مقدار قطعی از حوزه طراحی  $V_0$

مقید شده است.  $f_1(x) = fV_0$

$$ku = F \rightarrow \frac{\partial k}{\partial x^e} u + k \frac{\partial u}{\partial x^e} = 0 \quad (6-5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x^e} = \frac{\partial u^T}{\partial x^e} ku + u^T \frac{\partial k}{\partial x^e} u + u^T k \frac{\partial u}{\partial x^e} = -p(x^e)^{p-1} u^e k_0 u^e = -P(x^e)^{p-1} q_e$$

در معادله (6-5) فرض شده که نیروها مستقل از طراحی‌اند:  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

مشتق تابع قید:

$$\frac{\partial V}{\partial x^e} = V^e \quad (7-5)$$

مزیت بزرگ استفاده MMA این است که در MMA،  $\tilde{f}_i(x)$  محسوب است و نزدیک به

رفتار توابع قید و هدف عمل می‌کند.

## ویژگی‌های MMA

استفاده از تقریب‌های محافظه‌کارانه‌تر از SLP

حل مسائل با متغیرهای خیلی زیاد و قیدهای زیاد

استفاده از متد دوال چون توابع تفکیک‌پذیر و محدب‌اند.

الگوریتم پایدار، به علت تنظیم خودکار توسط پارامتر  $u$  و  $\ell$

برای  $u = \infty$  و  $\ell = 0$ ، متد CONLIN پوشش داده می‌شود.

برای  $u = \infty$  و  $\ell = -\infty$  متد SLP پوشش داده می‌شود.



اگر هم‌گرا باشد، هم‌گرایی سریع می‌باشد.

بعضی وقتها واگرا می‌باشد [۱۹].

### ۵-۲-۵- برنامه‌ریزی غیرخطی متوالی<sup>۱</sup>

این روش، برای بهینه‌سازی سازه بسیار معروف می‌باشد. اساس این متد بر تعویض مسئله

مقید شده اصلی با زیرمسئله غیرخطی می‌باشد.

زیرمسئله غیرخطی، به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{Minimise } q(\Delta x) = \frac{1}{2} \Delta x^T W \Delta x + \nabla f^T \Delta x + f$$

$$\text{subject to the constraints } \nabla c_i(x)^T \Delta x + c_i(x) \geq 0, \quad i \in I$$

$$\nabla c_i(x)^T \Delta x + c_i(x) = 0, \quad i \in E.$$

(۸-۵)

W، ماتریس هسیان می‌باشد.

### ویژگی‌های SQP

بسیار کارآمد

پیشنهاد شده برای کاربردهای بهینه‌سازی سازه‌ای

مناسب برای مسائل با تعداد قیدهای زیاد

### ۵-۲-۶- بررسی انواع تقریب‌های CONLIN و MMA

گسترش تکنیک‌های کارآمد برای تقریب پاسخ‌های سازه‌ای، جنبه مهم دیگری از

برنامه‌ریزی محدب متوالی (SCP) می‌باشد. تقریب‌ها باید محدب و تفکیک‌پذیر باشند. انتخاب

تقریب مناسب مهمترین کار اولیه در حل این مسائل با سرعت بالا می‌باشد.

<sup>۱</sup> - Sequential Quadratic Programming (SQP)

## ۵-۲-۶-۱- تقریب‌های مرتبه اول

همانطور که ذکر شد، ساده‌ترین تقریب مرتبه اول همان بسط سری تیلور مرتبه اول می‌باشد. این تقریب خطی برای قید حجم، کارآمد می‌باشد اما غیرمحدب بودنش، آنرا غیرقابل اطمینان کرده است. برای قیدهای سازه‌ای بهتر است که تقریب محدب باشد، بنا به دلایلی که ذکر شد.

برای بهینه‌سازی سازه‌ای، قانون کلیدی متغیرهای معکوس کاملاً شناخته شده است. بسط قیدها در نرم‌افزارهایی از متغیرهای معکوس، مسئله را به تقریب دقیق‌تر که علاوه بر آن محدب می‌باشد، راهنمایی می‌کند؛ (اگر همه مشتقات منفی باشد) اگر مشتقات علامتهای مختلف داشته باشند، CONLIN با تقریب متغیرهای معکوس، به تقریب‌های محدب دقیق‌تری دست می‌یابد.

برای این منظور، CONLIN یک بسط در ترم‌های متغیرهای معکوس که مشتقات منفی دارند و ترم‌های متغیرهای مستقیم که مشتقات مثبت دارند را ترکیب می‌کند.

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{\frac{\delta x}{\delta x_i} \geq 0} \frac{\delta g(x^0)}{\delta x_i} (x_i - x_i^0) - \sum_{\frac{\delta x}{\delta x_i} \leq 0} \frac{\delta g(x^0)}{\delta x_i} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (9-5)$$

$x^0$  نقطه طراحی فعلی می‌باشد.

برای کاربردهای عملی طراحی توپولوژیک، امروزه استفاده از روابط چگالی سختی با یک توان از چگالی‌های حد میانه معمول می‌باشد.

$$E = \mu^P E^0 \quad \text{و} \quad \rho = \mu \rho^0 \quad \text{به طوری که} \quad E \quad \text{و} \quad \rho \quad \text{به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون.}$$

در این حالت، مسئله توزیع ماده با مسئله بهینه‌سازی با المان‌های خمشی ورق یکسان می‌باشد. بنابراین برخی اوقات بهتر است که یک بسط در ترم‌هایی از یک توان  $P$  استفاده کنیم که متغیرهای معکوس می‌باشد:

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{p} (x_i^0)^{p+1} \frac{\delta g(x^0)}{\delta x_i} \left( \frac{1}{(x_i)^p} - \frac{1}{(x_i^0)^p} \right) \quad (10-5)$$

مانع تقریب‌های قبلی این می‌باشد که انحنای آن‌ها ثابت شده است. برای برآزش بهتر با مشخصات مسئله، می‌توان تقریب MMA را استفاده کرد:

$$\tilde{g}(x) = r^0 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{U_i - x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{x_i - L_i} \quad (11-5)$$

با

$$p_1 = \max \left\{ 0, (U_i - x_i)^2 \frac{\delta g_j(x^0)}{\delta x_i} \right\} \quad q_1 = \max \left\{ 0, -(x_i - L_i)^2 \frac{\delta g_j(x^0)}{\delta x_i} \right\} \quad (12-5)$$

پارامترهای  $U_i$  و  $L_i$ ، مجانبهای حرکتی متد می‌باشند. آنها می‌توانند با یک قانون تدریجی مبتنی بر نوسان متغیرهای طراحی تغییر کنند.

در حل مسائل توزیع ماده در این روش، نرخ نزول سریع، در ۱۰ تکرار اولیه رخ می‌دهد، اما هم‌گرایی اطراف نقطه بهینه آهسته‌تر می‌شود و در نهایت ۲۰ تا ۴۰ تکرار یا بیشتر به طور معمول برای رسیدن به حل مناسب لازم می‌نماید. با این وجود در مقایسه با نتایج مترادف با متد معیار بهینگی که انجام شده است، CONLIN و MMA، نتایج بهتری نشان داده‌اند.

کارایی CONLIN معمولاً رضایت‌بخش است. اما تحذب و ویژگی‌های محافظه‌کارانه تقریب در CONLIN وقتی که مشتقات علامتهای مختلف دارند، بسیار مهم است.

عیب اصلی CONLIN، معرفی تحذب ثابت توسط تقریب می‌باشد، و به این دلیل تقریب ممکن است که خیلی زیاد یا خیلی کم، محافظه کارانه باشد، که باعث هم‌گرایی آهسته یا غیر پایدار به سمت بهینه باشد.

برای جبران این مسئله، سوانبرگ<sup>۱</sup>، تقریب MMA را معرفی کرد که تعمیم و اصلاح CONLIN با بکار بردن دو ست (set) از مجانبها می‌باشد. انتخاب مجانبهای حرکتی، راهی برای اصلاح انحنا و برازش بهتر کاراکترهای مسئله می‌باشد.

به علت اینکه MMA، بهتر برازش می‌کند با تحذب مسئله، MMA اغلب کمی جزئی سریع‌تر از CONLIN می‌باشد.

یک اشکال تقریب‌های مرتبه اول، کاهش سرعت پیشرفت به بهینه در همسایگی بهینه می‌باشد.

برای شتاب هم‌گرایی در مراحل نهائی، ما نیاز به تقریب‌های بهتر بر اساس اطلاعات انحنا داریم.

## ۵-۲-۶-۲- تقریب‌های مرتبه دوم

هدف اصلی کاهش تعداد تکرار برای رسیدن به طراحی بهینه می‌باشد، هنگامی که در قسمت تخت تابع هدف قرار داریم، و یا زمانی که در نزدیکی نقطه بهینه می‌باشیم. برای شتاب پروسه در این مراحل، تقریب مرتبه دوم بسیار کمک‌کننده است. متأسفانه، محاسبات مشتقات مرتبه دوم، هزینه‌بر می‌باشد، به‌خصوص برای مسائل توپولوژیکی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد می‌باشد.

---

<sup>۱</sup> - svanberg

تقریب مرتبه دوم MMA به این شرح می باشد:

$$\tilde{g}(x) = C_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - b_i}$$

(۱۳-۵)

انتخاب خودکار پارامترها [۱۸]:

$$a_i = -(x_i^0 - b_i)^2 \frac{\delta g(x^0)}{\delta x_i} \quad b_i = x_i^0 + 2 \frac{\delta g(x^0)}{\delta x_i} / \max \left( E, \frac{\delta^2 g(x^0)}{\delta x_i^2} \right) \quad (0 < E < 1)$$

(۱۴-۵)

## فصل ۶

بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها به روش

معیار بهینگی

## ۶-۱- مقدمه

### ۶-۱-۱- کلیات

برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه می‌توان از روشهای برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی<sup>۱</sup> استفاده نمود. این روشها را می‌توان برای حل هر مسئله بهینه‌سازی از جمله بهینه‌یابی سازه‌ها بکار برد. زمانیکه از این روشها در بهینه‌سازی سازه‌ها استفاده می‌شود معمولاً به محاسباتی نظیر محاسبه تابع هدف<sup>۲</sup>، توابع قیدی<sup>۳</sup> و مشتقات آنها نیاز می‌باشد. از این‌رو زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات در روشهای برنامه‌ریزی ریاضی وابستگی زیادی به تعداد متغیرهای طراحی<sup>۴</sup> در مسئله دارد [۵]. بنابراین زمانیکه تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد این روشها بسیار زمان‌بر و پرهزینه می‌باشند.

---

<sup>۱</sup> - non-linear mathematical programming

<sup>۲</sup> - objective function

<sup>۳</sup> - constraint functions

<sup>۴</sup> - design variables

در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها تعداد متغیرهای طراحی وابسته به تعداد المانهای تقسیم‌کننده فضای طراحی می‌باشد. از آنجائیکه غالباً تعداد المانها در یک مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک زیاد است بنابراین استفاده از روشهای برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها غیرعملی است. برای فائق آمدن بر این مشکل روشهای معیار بهینگی<sup>۱</sup> پیشنهاد شده‌اند.

ایده روشهای معیار بهینگی در سال ۱۹۰۴ توسط میشل<sup>۲</sup> معرفی شد و در سالهای ۱۹۶۰ به بعد این روشها در کنار روشهای برنامه‌ریزی ریاضی برای حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها توسعه یافتند. روشهای معیار بهینگی برخلاف روشهای برنامه‌ریزی ریاضی که بطور مستقیم تابع هدف را بهینه می‌کنند، بصورت غیرمستقیم برای اقناع مجموعه‌ای از معیارهای مرتبط با رفتار سازه تلاش می‌کنند که این معیارها یا بصورت درکی و یا با پایه و اساس ریاضی استخراج می‌شوند. روشهای «طرح بر اساس تنش یکنواخت‌شده»<sup>۳</sup> و «طرح بر اساس مدهای خرابی همزمان»<sup>۴</sup> مثالهای از روشهای معیار بهینگی درکی می‌باشند. روشهای معیار بهینگی که مبنای ریاضی دارند اغلب بر پایه شرطهای بهینگی کان-تاکر<sup>۵</sup> استوار می‌باشند که در این فصل به این روشها پرداخته می‌شود. روشهای معیار بهینگی در بهینه‌سازی سازه‌ها بوسیله دو گروه از محققین مورد استفاده قرار گرفته است. دسته اول محققانی هستند که از این روشها در حل آنالیتیک بهره گرفتند و دسته دوم این روشها را در حل عددی مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها بکار بردند [۵]. با توسعه تحقیقات روش معیار بهینگی گسسته - پیوسته که دارای مزایای بیشتری نسبت به دو روش فوق و کاربردی‌تر از روشهای معیار بهینگی پیوسته می‌باشند، معرفی شدند. برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به مرجع [۵] مراجعه کرد.

---

<sup>۱</sup> - optimality criteria

<sup>۲</sup> - michell

<sup>۳</sup> - fully stressed design

<sup>۴</sup> - simultaneous failure design

<sup>۵</sup> - Kuhn-tucker



با افزایش سریع حجم محاسبات در کامپیوترهای مدرن و نیاز به گسسته‌سازی در بیشتر مسائل علمی، روشهای معیار بهینگی گسسته - پیوسته بر اساس شرایط بهینگی کان - تاکر برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک دوبعدی سازه‌ها در محیط‌های پیوسته مورد توجه قرار گرفته است. برای ایجاد پیوستگی بین مطالب این فصل در بخش ۶-۲ شرایط بهینگی کان - تاکر در حالت کلی از مرجع [۵] گزارش می‌شود.

### ۶-۱-۲- مدلهای مواد

بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها ترکیب پیچیده‌ای از بهینه‌سازی ابعاد و شکل می‌باشد. یکی از مشکلاتی که در بهینه‌سازی سازه بوسیله تغییرات مرزی وجود دارد این است که در طرح نهائی، توپولوژی جسم نسبت به جسم اولیه تغییر نمی‌کند. عبارت دیگر برای بهینه‌یابی کامل یک سازه بایستی توپولوژی آن مشخص باشد.

بطور معمول استفاده از تکنیکهای بهینه‌یابی شکل با روش تغییراتی مرزی به چندین بار تغییر مش در حین بهینه‌سازی نیازمند است. بنابراین اعمال تغییرات توپولوژی جسم با استفاده از این روش بسیار پیچیده می‌نماید. در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها می‌بایستی بتوانیم سوراخهایی در جسم بوجود آوریم که انجام آن با روش تغییرات مرزی شدنی نیست. مضاف بر اینکه بر خلاف روشهای بهینه‌سازی شکل که در آنها مرزهای طراحی می‌توانند بوسیله مجموعه‌ای از قسمت‌های هندسی ساده (مثل خطوط، سهمی‌ها و ...) تعریف شوند، در مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک این کار با استفاده از تعداد محدودی از پارامترها انجام پذیر نمی‌باشد.

معرفی یک تابع برای مشخص ساختن چگالی مواد در جسم با در نظر گرفتن مواد مرکب مشتمل بر تعداد نامحدودی از سوراخهای ریز که بصورت پرئودیک در این جسم پخش شده‌اند، مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها را به یک مسئله بهینه‌سازی ابعادی تبدیل می‌کند و پیچیدگی این مسائل تا حدودی برطرف می‌شود. در واقع استفاده از ایده بکارگیری جسم سلولی

با ریزسازه‌های پرئودیک<sup>۱</sup>، طبیعت بودن یا نبودن مواد در توپولوژی جسم را از مقیاس ماکروسکوپی به مقیاس میکروسکوپی رهنمون شده و باعث پایداری حل می‌گردد.

راههای زیادی برای معرفی ریزسازه‌های فوق وجود دارد که آنها را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. دسته اول ریزسازه‌های مرکب لایه‌ای (ranked layered materials) و دسته دوم میکروسلول‌ها با حفره‌های داخلی می‌باشند. تئوری همگن‌سازی (homogenization theory) برای محاسبه خواص مکانیکی ماکروسکوپی این مواد بکار می‌رود. در مورد مواد لایه‌ای معادله همگن‌سازی می‌تواند بصورت آنالیتیک حل شود و برای میکروسلول‌های حفره‌دار این معادله معمولاً بوسیله روشهای عددی مثل روش اجزاء محدود حل می‌شود.

در عمل پس از انتخاب فضای مرجع و تقسیم‌بندی آن به المانهای محدود، فرض می‌شود که هر المان شامل مواد سلولی با ساختار خاص خود می‌باشد. پارامترهای هندسی این ریزسازه‌ها بعنوان متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بایستی توجه کرد که مسئله در یک فضای ثابت حل می‌شود و بنابراین در تحلیل به روش المان محدود، مدل المان محدود در حین الگوریتم بهینه‌سازی تغییر نمی‌کند.

راه حل دیگری نیز برای مدل کردن مواد در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک گسسته وجود دارد. در این روش بودن یا نبودن مواد با استفاده از تابع تقریب مناسبی که تابع چگالی مصالح مصنوعی نامیده می‌شود، مشخص می‌گردد. به این نوع مواد معمولاً مواد مصنوعی اطلاق می‌شود. با استفاده از این مواد می‌توان خواص مکانیکی ماکروسکوپی مواد را بدون استفاده از مطالعات همگن‌سازی بدست آورد. لیکن این کار دقت کمتری نسبت به خواص مکانیکی بدست آمده از معادلات همگن‌سازی را نتیجه می‌دهد.

با استفاده از مدل‌های مواد فوق‌الذکر مصالح بکار رفته بصورت توده‌ای از مواد خلل و فرج‌دار مدل می‌شود. در مسئله بهینه‌سازی تعریف‌شده با این روش پارامترهای هندسی حفره‌ها متغیرهای

---

<sup>۱</sup> - microstructures

طراحی مسئله می‌باشند. در صورتیکه در قسمتی از جسم تنها حفره‌های این ریزسازه‌ها بوجود آید، در توپولوژی جسم حفره‌ای ایجاد خواهد شد و در صورتیکه در این ریزسازه‌ها حفره بوجود نیاید در آن محل توپولوژی جسم حاوی مواد جامد است. با توجه به اینکه در این فصل از مواد مصنوعی با میکروسلول‌های حفره‌دار استفاده می‌شود، ابتدا میکروسلول‌ها با حفره‌های داخلی و سپس مواد مصنوعی در ادامه بحث می‌شوند.

**حفره‌های ریزمقیاس مستطیلی** - در انتخاب ریزسازه‌ها، شکل ریزسازه یکی از مهمترین مسائلی است که بایستی به آن توجه کرد. شکل انتخاب شده بایستی بگونه‌ای باشد که چگالی مواد در ریزسازه بتواند کل مقدار ۰ تا ۱ را پوشش دهد. برای مثال استفاده از حفره‌های دایروی (و یا کروی در حالت سه‌بعدی) مانع از آن خواهد شد که سلول مستطیل شکل (و یا مکعب مستطیل در حالت سه‌بعدی) بطور کامل بصورت حفره درآید از طرف دیگر شکل حفره بایستی با کمترین تعداد پارامتر تعریف شود تا میزان متغیرهای طراحی در مسئله بهینه‌سازی به حداقل برسد. سلولهای مربعی با حفره‌های مستطیل شکل در مرکز آنها ساده‌ترین شکل برای این منظور می‌باشند.

اگر بعد سلول مربعی با  $\varepsilon$  که مقدار مثبت و بسیار کوچک است نشان داده شود آنگاه اندازه سوراخ با  $\varepsilon a$  و  $\varepsilon b$  مشخص می‌گردد. با استفاده از این مدل سطح اشغال شده توسط مواد جامد بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Omega_s = \int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega \quad (1-6)$$

که در این رابطه  $0 \leq a \leq 1$  و  $0 \leq b \leq 1$  و  $\Omega$  فضای طراحی و  $\Omega_s$  قسمت جامد فضای طراحی را نشان می‌دهد.

در حالت کلی سوراخهای ریزمقیاس در جسم سلولی می‌توانند نسبت به محورهای مختصات بصورت زاویه‌دار در نظر گرفته شوند که این انحراف زاویه  $\theta$  بر ماتریس الاستیسیته تأثیر می‌گذارد. بنابراین در محاسبات زاویه  $\theta$  بعنوان یک متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. با توجه

به نکات فوق هر نقطه  $x \in \Omega$  دارای مقادیر  $a$  و  $b$  و  $\theta$  می باشد که متغیرهای طراحی مسئله بهینه سازی می باشند.

$$a = a(x) , b = b(x) , c = c(x) \quad (2-6)$$

در عمل این توابع بوسیله توابع ثابتی در هر المان از فضای طراحی گسسته سازی شده، تقریب زده می شوند و بنابراین ابعاد و زاویه یک ریزسازه در هر المان ثابت فرض می شود. در نتیجه ماتریس الاستیسیته همگن شده نیز برای هر المان ثابت خواهد بود. بنابراین در فضای دوبعدی اگر دامنه به  $N$  المان محدود تقسیم شود  $3 \times N$  متغیر طراحی در مسئله بهینه سازی توپولوژیک سازه وجود دارد.

قسمت جامد ریزسازه ها از نوع مواد ایزوتروپیک فرض می شود زیرا سوراخ مستطیل شکل در جسم سلولی حالت ارتوتروپیک را بوجود می آورد. در مسائل الاستیسیته دوبعدی (مسائل تنش مسطح و کرنش مسطح) قانون هوک بصورت زیر برقرار است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3-6)$$

که در این رابطه  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) تنشها،  $\varepsilon_{ij}$  کرنشها و  $c_{ij}$  اعضاء ماتریس سختی کاهش یافته مواد می باشند. توجه شود که برای مواد با ساختمان سلولی اعضاء ماتریس الاستیسیته  $C$  تابعی از  $a$  ،  $b$  ،  $\theta$  می باشند.

$$C = C(a, b, \theta) \quad (4-6)$$

وابستگی  $C$  به  $a$  ،  $b$  بوسیله تئوری همگن سازی محاسبه می شود و تأثیر  $\theta$  در مسائل دوبعدی با استفاده از قاعده چرخش بصورت زیر اعمال می شود.

$$C(a, b, \theta) = R^T(\theta) \cdot C(a, b) \cdot R(\theta) \quad (5-6)$$

که در این رابطه  $R$  ماتریس چرخش است. تأثیر پارامترهای طراحی بر ماتریس الاستیسیته در بخشهای بعدی مفصلاً بحث می‌شود. به این نکته نیز بایستی توجه کرد که در مسائل دوبعدی برای سلول واحد تابع چگالی، تابعی از  $a$  و  $b$  است.

$$\rho = \rho(a, b) = (1 - ab)\rho_s \quad (6-6)$$

که در این رابطه  $\rho_s$  چگالی مواد جامد می‌باشد.

**مواد مصنوعی:** در صورتیکه شکل و توپولوژی یک سازه را بصورت موادی که در یک فضای طراحی توزیع می‌شوند در نظر بگیریم سازه را می‌توان بوسیله تابع  $X$  توصیف کرد که این تابع در هر نقطه  $X$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi(X) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } X \in \Omega_s \text{ material} \\ 0, & \text{if } X \in \Omega \setminus \Omega_s \text{ no material} \end{cases} \quad (7-6)$$

با فرض ایزوتروپی برای قسمت جامد وجود دارد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\rho(X) = \chi(X)\rho \quad (8-6)$$

$$C(X) = \chi(X)C$$

که در این رابطه  $\rho^0$  و  $C^0$  به ترتیب چگالی و ماتریس الاستیسیته قسمت جامد همگن می‌باشند.

در حل عددی مسئله بهینه‌سازی تابع  $X(x)$  گسسته‌سازی می‌شود و بنابراین در هر المان از فضای طراحی  $X(x)$  متغیرهای طراحی مسئله می‌باشند. اما این فرمولبندی بسیار پرهزینه است و پیشنهاد نمی‌شود. ساده‌ترین راه برای رفع این مشکل جایگزین کردن تابع پیوسته  $\xi(x)$  بجای تابع گسسته  $X(x)$  می‌باشد، بنابراین:

$$\rho(X) = \xi(X)\rho \quad (9-6)$$

$$C(X) = \xi(X)C \quad (10-6)$$

که در این رابطه  $0 \leq \xi(x) \leq 1$  و  $x \in \Omega$  می‌باشند. توجه شود که مطابق رابطه (۹-۶)

حجم مواد  $V$  بصورت زیر بدست می‌آید.

$$V = \int_{\Omega} \xi(X) d\Omega \quad (۱۱-۶)$$

اگرچه روابط (۹-۶) و (۱۰-۶) سبب ساده شدن الگوریتم بهینه‌سازی می‌شوند اما در این

حالت جواب سازه بهینه شده دارای نواحی خلل و فرج‌دار زیادی است. از نقطه نظر مهندسی حلی

که منجر به وجود فقط قسمت جامد و یا فقط حفره شود عملی‌تر است. از اینرو بهتر است که

نواحی خلل و فرج‌دار با استفاده از جریمه‌ای که به  $\xi(x)$  تعلق می‌گیرد حذف شوند. این ایده

بوسیله رزوانی مطرح گردید. بنابراین رابطه (۱۰-۶) بصورت زیر تغییر می‌یابد.

$$C(X) = \xi(X)^{\mu} C \quad (۱۲-۶)$$

که در این رابطه  $\mu$  عامل جریمه و بزرگتر از ۱ (معمولاً بین ۳ و ۹) می‌باشد.

تابع چگالی مصنوعی  $\xi$  برای ساختن ریزسازه‌های مصنوعی با بعضی پارامترهای هندسی در

ارتباط است. بعنوان مثال برای ساختن جسم سلولی شامل سلول‌های واحد با حفره‌های

مستطیل شکل،  $\xi(x)$  بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\xi(X) = 1 - a(X)b(X) \quad (۱۳-۶)$$

همانطور که اشاره شد در مدل بکار رفته فرض می‌شود که مصالح حاوی تعداد زیادی

سلول‌های مربع شکل با حفره‌های مستطیلی بوده و پارامترهای  $a(x)$  و  $b(x)$  در هر المان ثابت

می‌باشند. با فرض ایزوتروپیک بودن مصالح، ماتریس الاستیسیته مدل مواد مصنوعی بصورت زیر

است:

$$C = \frac{E(1-ab)^{\mu}}{(1-V)^2} \begin{bmatrix} 1 & V & \cdot \\ V & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & (1-V)/2 \end{bmatrix} \quad (۱۴-۶)$$

## ۲-۶- شرایط بهینگی کان - تاکر

یک مسئله بهینه‌سازی بصورت کلی زیر بیان می‌شود:

$$\text{Minimize } f(X) \quad (15-6)$$

$$\text{Subject to } h_j(X) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n_h$$

$$g_k(X) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_g$$

در این رابطه  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  متغیرهای طراحی و  $n_h$  و  $n_g$  به ترتیب تعداد قیدهای

مساوی و نامساوی می‌باشند. قیدهای نامساوی را می‌توان با اضافه کردن یک متغیر اضافی بصورت قیدهای مساوی نوشت.

$$g_k(X) + s_k^2 = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_g \quad (16-6)$$

شرایط لازم برای مینیمم کردن یک تابع تحت قیدهای مساوی را می‌توان با استفاده از

تکنیکهای کلاسیک ضرائب لاگرانژ بدست آورد. در مسئله کلی (15-6) تابع لاگرانژین بصورت زیر

نوشته می‌شود:

$$\ell(X, s, \lambda, v) = f(X) + \sum_{j=1}^{n_h} \lambda_j h_j(X) + \sum_{k=1}^{n_g} v_k (g_k(x) + s_k^2) \quad (17-6)$$

که در این رابطه  $\lambda_j$  و  $v_k$  می‌باشند. شرایط ایستایی<sup>۱</sup> برای تابع لاگرانژین فوق بصورت زیر

می‌باشد.

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n_h} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n_g} v_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (18-6)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_j} = h_j = 0 \quad j = 1, \dots, n_h \quad (19-6)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial v_k} = g_k + s_k^2 = 0 \quad k = 1, \dots, n_g \quad (20-6)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial s_k} = 2v_k s_k = 0 \quad k = 1, \dots, n_g \quad (21-6)$$

در واقع معادلات (19-6) و (20-6) به ترتیب قیدهای تساوی و قیدهای نامساوی (15-6)

می‌باشند. روابط (21-6) که به شرایط سوئیچینگ معروفند نشان می‌دهد که یا  $V_k$  یا  $S_k$  (یا هر

<sup>۱</sup> - stationary conditions

دو آنها) صفر می‌باشند. حالت  $S_k = 0$  بدین معنی است که قیدهای  $g_k$  فعال می‌باشند. زمانیکه  $S_k \neq 0$  و  $V_k = 0$  باشد بدین معنی است که قیدهای  $g_k$  غیرفعال و در نتیجه می‌توان تأثیر آنها را بر حل حذف نمود. اگر هر دو  $S_k = 0$  و  $V_k = 0$  باشد بدین معنی است که سطح  $g_k = 0$  همواره نقطه بهینه را اقلع می‌کند و این نقطه را بایستی با استفاده از تابع هدف و دیگر قیدها بدست آورد.

از روابط (۲۰-۶) و (۲۱-۶) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$g_k \leq 0, \quad v_k g_k = 0 \quad (22-6)$$

چنین به نظر می‌رسد که با جایگزینی روابط فوق بجای روابط (۲۰-۶) و (۲۱-۶) قیدی از مسئله حذف نشود. معادله (۱۸-۶) را می‌توان بصورت کلی زیر نوشت:

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_h} \lambda_j \nabla h_j + \sum_{k=1}^{n_{ga}} v_k \nabla g_k = 0 \quad (23-6)$$

که در این رابطه  $n_{ga}$  تعداد قیدهای فعال می‌باشد ( $n_{ga} \leq n_g$ ). از رابطه فوق چنین برمی‌آید که  $\nabla f$  در فضای ایجاد شده بوسیله  $\nabla h_j$  و  $\nabla g_k$  که فعال می‌باشند قرار دارد. بعبارت دیگر  $\nabla f$  بایستی بصورت ترکیب خطی از عمودهای سطوح  $h_j = 0$  و  $g_k$  در حالت فعال بیان شود.

تا کنون با استفاده از تئوری ضرایب لاگرانژ که سبب ایجاد مجموعه‌ای از اعداد حقیقی  $\lambda_j$  و  $V_k$  می‌شود، به یک سیستم معادلات غیرخطی (۱۸-۶) - (۲۱-۶) دست یافتیم که بایستی این دستگاه معادلات را حل کنیم. روابط (۱۸-۶) - (۲۱-۶) در این دستگاه معادلات شرایط لازم برای یک نقطه ایستا می‌باشند.

اکنون شرایط کان - تاکر را مورد بحث قرار می‌دهیم. در سال ۱۹۵۱ تئوری کان - تاکر با اضافه کردن یک دسته شرط اضافی به شرایط فوق معرفی شد. البته این شرطهای اضافی که شرطهای کان - تاکر نامیده می‌شوند فقط برای مسائل با قیدهای نامساوی معتبر می‌باشند. لازم به ذکر است که مسئله کلی (۱۵-۶) را می‌توان با قیدهای نامساوی نوشت. برای مثال  $h = 0$  را



میتوان به صورت دو رابطه نامساوی  $h \leq 0$  و  $-h \geq 0$  نوشت. روش دیگری که عملی تر نیز می باشد این است که با استفاده از تکنیکهای ضرائب لاگرانژ، تابع هدف جدید با قیدهای مساوی در مسئله بصورت فرم لاگرانژی نوشته شود که در اینصورت شکل کلی مسئله بصورت قیدهای نامساوی خواهد شد. بنابراین برای راحتی کار شکل کلی مسئله بهینه سازی بصورت زیر ساده می شود:

$$\text{Minimize } F(x) \quad (24-6)$$

$$\text{Subject to } g_k \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_g$$

مطابق تئوری کان - تاکر اگر  $X$  یک مینیمم موضعی از  $F(x)$  که قیدها را اقلع می کند باشد، آنگاه ضرایبی  $V_k$  وجود دارند که:

$$\nabla F(x) + \sum_{k=1}^{n_g} \nabla g_k(x) = 0 \quad (25-6)$$

$$v_k g_k = 0 \quad k = 1, \dots, n_g$$

$$v_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n_g$$

نامساوی و دو تساوی رابطه (25-6) شرایط کان - تاکر نامیده می شوند. تفاوت بین شرایط کان - تاکر و آنچه که از تئوری ضرایب لاگرانژ بدست آوردیم همواره مثبت بودن  $V_k$  است. عبارت دیگر در تئوری ضرائب لاگرانژ از علامت  $V_k$  سخنی به میان نیامد و این شرط یک شرط اضافی است که کان و تاکر آنرا معرفی کردند.

سعی بر آنست که بدانیم آیا نقطه مورد نظر نقطه مینیمم است یا خیر. اگر نقطه مینیمم محلی نباشد. آنگاه می توان یک بردار جابجایی  $u$  در داخل فضای شدنی پیدا نمود که با حرکت کردن در امتداد آن تابع هدف کاهش یابد. برای این بردار جابجایی در فضای شدنی می توان نوشت:

$$u^T \nabla g_k < 0 \quad (26-6)$$

$U$  در صورتی قابل استفاده است که مقدار تابع  $F$  در امتداد آن کاهش یابد بدین معنی که:

$$u^T (-\nabla F) > 0 \quad (27-6)$$

با جایگزینی  $-\nabla F$  از رابطه (۶-۲۵) در رابطه فوق می توان نوشت:

$$u^T \left( \sum_{k=1}^{n_{ga}} v_k \nabla g_k \right) > 0 \quad (۶-۲۸)$$

که در اینصورت می توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{n_{ga}} v_k (u^T \nabla g_k) > 0 \quad (۶-۲۹)$$

بنابراین با توجه به روابط (۶-۲۶) و (۶-۲۹) نتیجه می شود که شرط اینکه نقطه یک نقطه

بهینه باشد آنست که  $V_k \geq 0$  (که در اینصورت رابطه (۶-۲۹) غیرممکن خواهد شد).

با استفاده از شرایط کان - تاکر می توان آزمایش نمود که آیا نقطه کاندید شده، نقطه

مینیمم است یا خیر و از این روش بجای حل مجموعه معادلات غیرخطی استفاده کرد.

بنابراین به طور کلی شرایط بهینگی لازم برای مسئله بهینه سازی با فرم کلی (۶-۱۵)

بصورت زیر خلاصه می شود:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n_h} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n_g} v_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (۶-۳۰)$$

$$h_j = 0 \quad j = 1, \dots, n_h$$

$$g_k \leq 0 \quad k = 1, \dots, n_g$$

$$g_k v_k = 0 \quad k = 1, \dots, n_g$$

$$v_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n_g$$

توجه شود که با عوض شدن مسئله بهینه سازی از صورت کمینه سازی به صورت

بیشینه سازی با عوض کردن علامت ترمهای قیدی در توابع لاگرانژین (۶-۱۷) و نیز عوض کردن

جهت قیدهای نامساوی، علامت ضرائب  $V_k$  در شرایط کان - تاکر (۶-۲۵) عوض می شود.

### ۶-۳- مدل ریاضی برای مسئله بهینه سازی توپولوژیکی سازه ها

یک مسئله کلی الاستیسیته خطی تحت اثر نیروهای حجمی بکار برده شده در دامنه  $\Omega$  و

نیروهای سطحی در  $\Gamma_f$  را در نظر می گیریم. سطح دامنه  $\Omega$  دارای مرز  $\Gamma$  شامل  $\Gamma_d$  که تغییر

مکانها در آن تعریف شده‌اند و  $\Gamma_t$  که بارهای سطحی در آن بکار برده شده‌اند می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که:

$$\Gamma_t \cup \Gamma_d = \Gamma \quad (31-6)$$

$$\Gamma_t \cap \Gamma_d = \emptyset$$

با بکارگیری روش تغییر مکان مجازی، معادلات تعادل با مساوی قرار دادن کار مجازی داخلی و خارجی بدست آورده می‌شوند. با فرض اینکه  $u$  میدان تغییر مکان که تعادل سازه الاستیک را تعریف می‌کند باشد و  $v$  میدان تغییر مکان مجازی مجاز سینماتیکی باشد می‌توان نوشت:

$$v \in V \text{ where } V = \{v | v \in (H^1(\Omega))^3 \text{ and } v = \cdot \text{ on } \Gamma_d\} \quad (32-6)$$

پس برای یک سازه ارتجائی با مرز ثابت  $\Gamma_d$  می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(v) (C \varepsilon(u)) d\Omega = \int_{\Omega} f^T v d\Omega + \int_{\Gamma_t} t^T v d\Gamma \quad (33-6)$$

با بهره‌گیری از تحلیل حساب تغییراتی و تابع نماها و استفاده از فرم انرژی دوخطی برای کار داخلی و فرم بار خطی برای کار خارجی رابطه (33-6) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \quad (34-6)$$

که در این رابطه:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon^T(v) \cdot (C \varepsilon(u)) d\Omega \quad (35-6)$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot v d\Gamma \quad (36-6)$$

هدف از مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها که در این فصل مورد بحث قرار گرفته این است که سخت‌ترین سازه ممکن را با استفاده از یک مقدار مصالح معین بیابیم. مینیمم بودن مقدار کار خارجی با میدان تغییر مکان حقیقی و یا مینیمم بودن  $\ell(u)$ ، ماگزیمم بودن سختی عمومی یک

سازه را فراهم می‌کند. بنابراین مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها با قرار دادن  $\ell(u)$  بعنوان تابع هدف بصورت زیر ساخته می‌شود

$$\text{Minimize } \ell(u) \quad (37-6)$$

$$\text{Subject to } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

and design restrictions

که در این رابطه محدودیتهای طراحی،  $a(n, v)$  و  $\ell(u)$  توابعی از متغیرهای طراحی می‌باشند. چنانکه قبلاً دیدیم، متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک پارامترهای هندسی سوراخهای ریزمقیاس مصالح فرض شده برای مسئله می‌باشند (برای مثال پارامترهای  $a$  و  $b$  و  $\theta$  در مصالح شامل سلولهای مربعی با سوراخهای مستطیل شکل).

با جایگزین کردن  $u \in V$  بجای  $v$  در رابطه (34-6) معادله زیر بدست می‌آید:

$$a(u, u) = \ell(u) \quad (38-6)$$

یادآوری می‌شود که  $\frac{1}{2}a(u, u)$  نشان‌دهنده انرژی کرنشی است بنابراین نتیجه گرفته می‌شود که مینیمم کردن  $\ell(u)$  معادل مینیمم کردن انرژی کرنشی است. از سوی دیگر انرژی پتانسیل کل را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) \quad (39-6)$$

با جایگزینی رابطه (38-6) در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\Pi(u) = -\frac{1}{2}\ell(u) \quad (40-6)$$

از رابطه فوق چنین نتیجه می‌شود که مینیمم کردن  $\ell(u)$  معادل ماگزیمم کردن انرژی

پتانسیل کل می‌باشد، بنابراین مسئله کلی بهینه‌سازی (37-6) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\text{Maximize } \Pi(u) \quad (41-6)$$

$$\text{Subject to } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

and design restrictions

با استفاده از اصل مینیمم کردن انرژی پتانسیل رابطه (۴۱-۶) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\max \min \Pi(u) \quad (42-6)$$

*design*  $v \in V$

*subject to design restrictions*

دلیل ساختن مسئله بهینه سازی بر اساس انرژی پتانسیل کل آنست که این روش کلی است و همیشه مسئله بهینه سازی را برای سخت ترین سازه تعریف می کند. حال آنکه در مورد مسئله ای با تغییر مکانهای مرزی از قبل تعریف شده غیر صفر و در غیاب نیروهای حجمی و سطحی، سخت ترین سازه در حالت انرژی کرنشی ماگزیمم رخ می دهد ولی در بیشتر موارد دیگر انرژی کرنشی می بایست مینیمم شود. بنابراین نمی توان از انرژی کرنشی و یا  $\ell(u)$  با اطمینان در همه مسائل بعنوان تابع هدف بهره گرفت [۵].

در حالت کلی با تحمیل تغییر مکانهای مرزی تعریف شده  $\bar{u}$  در  $\Gamma_d$  با استفاده از روش جریمه خارجی و بکارگیری یک ضریب جریمه به اندازه کافی بزرگ  $\beta$  انرژی پتانسیل کل بصورت زیر نوشته می شود.

$$\Pi_\beta(v) = \int_\Omega \varepsilon(v) \cdot C \cdot \varepsilon(u) d\Omega - \int_\Omega f \cdot v d\Omega - \quad (43-6)$$

$$\int_{\Gamma_t} t \cdot v d\Gamma + \beta \int_{\Gamma_d} (v - \bar{u})^2 d\Gamma$$

توجه شود که مینیمم کردن  $\Pi_\beta(v)$  معادل است با حل معادلات تعادل.

در صورتیکه از مدل مواد با سوراخهای مستطیل شکل استفاده شود با در نظر گرفتن  $a$ ،  $b$  و

$\theta$  بعنوان متغیرهای طراحی مسئله بهینه سازی (۴۲-۶) بصورت زیر بیان می شود

$$\max_x \quad \min_n \quad \Pi_\beta(v) \quad (44-6)$$

$$a, b, \theta \quad v \in V$$

$$\text{subject to} \quad \Omega_s = \int_\Omega (1 - ab) d\Omega \leq \bar{\Omega}_s$$

$$\text{and} \quad 0 \leq a, b \leq 1$$

که  $\bar{\Omega}_s$  حد بالای حجم مصالح جامد می باشد. معادله (۴۴-۶) معادل است با:

$$\begin{aligned} \max \quad & \Pi(u) & (45-6) \\ a, b, \theta \\ \text{subject to} \quad & \Omega_s \leq \bar{\Omega}_s \\ \text{and} \quad & 0 \leq a, b \leq 1 \end{aligned}$$

#### ۴-۶- معیار بهینگی برای بهینه سازی توپولوژیک سازه ها

##### ۴-۶-۱- شرایط بهینگی

در این بخش شرایط بهینگی برای مسائل دوبعدی در محیطهای پیوسته مورد بحث قرار می گیرند. برای مدل کردن مواد در مسائل دوبعدی از ریزسازه های مربع با حفره های مستطیل شکل به ابعاد  $a$  ،  $b$  استفاده می شود. قابل توجه است که در حالت دوبعدی یک زاویه برای مشخص ساختن انحراف ریزسازه ها بایستی در نظر گرفت. بنابراین متغیرهای طراحی در مسئله  $a$  ،  $b$  خواهند بود.

مسئله بهینه سازی (۴۵-۶) را می توان به صورت زیر تعمیم داد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \Pi(u) & (46-6) \\ a^e, b^e, \theta^e \\ \text{subject to} \quad & A_s \leq \bar{A}_s \\ \text{and} \quad & 0 \leq a, b \leq 1 \end{aligned}$$

که در این رابطه  $A_s$  سطح مصالح جامد و  $\bar{A}_s$  حد بالای سطح مصالح در مسائل دوبعدی

می باشند. رابطه فوق در حالت گسسته بصورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \Pi(u) & (47-6) \\ a^e, b^e, \theta^e & (e = 1, \dots, N) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) A^e - \bar{A}_s \leq 0 \\ \text{and} \quad & a^e - 1 \leq 0, -a^e \leq 0, & e = 1, \dots, N \\ & b^e - 1 \leq 0, -b^e \leq 0, & e = 1, \dots, N \end{aligned}$$

که در این رابطه  $N$  تعداد المانها بوده و  $\Pi(u)$  در فضای گسسته بصورت زیر می باشد.

$$\Pi(u) = \frac{1}{\gamma} \sum_{e=1}^N \int_{A^e} \varepsilon^T(u) C^e \varepsilon(u) dA - \sum_{e=1}^N \int_{A^e} u^T f dA - \quad (48-6)$$

$$\sum_{e=1}^N \int_{\Omega_t^e} u^T t d\Omega.$$

اکنون با معرفی ضرایب لاگرانژ  $\lambda_{a_0}^e, \lambda_{a_1}^e, \lambda_{b_0}^e, \lambda_{b_1}^e, \lambda_{c_0}^e$  و  $A$  تابع لاگرانژین در مسئله

(47-6) بصورت زیر ساخته می شود.

$$\ell = \Pi(u) - \Lambda [\sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) A^e - \bar{A}_S] - \sum_{e=1}^N \lambda_{a_0}^e (-a^e) - \quad (49-6)$$

$$\sum_{e=1}^N \lambda_{a_1}^e (a^e - 1) - \sum_{e=1}^N \lambda_{b_0}^e (-b^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_{b_1}^e (b^e - 1)$$

شرایط ایستایی  $\ell$  نسبت به  $a$  عبارتست از:

$$\frac{\partial \Pi(u)}{\partial a^e} + \Lambda b^e A^e + \lambda_{a_0}^e - \lambda_{a_1}^e = 0 \quad e = 1, \dots, N \quad (50-6)$$

با جایگزینی  $\Pi(u)$  از رابطه (48-6)، رابطه فوق را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{1}{\gamma} \int_{A^e} \varepsilon^T(u) \frac{\partial C^e}{\partial a^e} \varepsilon(u) dA - \int_{A^e} u^T \frac{\partial f}{\partial a^e} dA + \Lambda b^e A^e + \lambda_{a_0}^e - \lambda_{a_1}^e = 0 \quad (51-6)$$

.

بطور مشابهی، شرط ایستایی تابع لاگرانژین نسبت به  $b^e$  بصورت زیر خواهد بود

$$\frac{1}{\gamma} \int_{A^e} \varepsilon^T(u) \frac{\partial C^e}{\partial b^e} \varepsilon(u) dA - \int_{A^e} u^T \frac{\partial f}{\partial b^e} dA + \Lambda a^e A^e + \lambda_{b_0}^e - \lambda_{b_1}^e = 0 \quad (52-6)$$

.

$$\frac{1}{\gamma} \int_{A^e} \varepsilon^T(u) \frac{\partial C^e}{\partial \theta^e} \varepsilon(u) dA = 0 \quad (53-6)$$

با استفاده از شرایط کان - تاکر مشابه رابطه (30-6)، شرایط سوئیچینگ بدست می آیند.

بنابراین مجموعه ای از معادلات غیرخطی در یک مسئله دوبعدی ایجاد می کنند که بایستی

حل شوند. حل این معادلات منجر به پیدا شدن نقطه ای در فضای طراحی می گردد که شرایط لازم

برای بهینگی را اقماع می کند. اما حل این معادلات کار چندان ساده ای نیست از اینرو سعی می شود

تا با بکارگیری یک الگوریتم معیار بهینگی مسئله را حل کنیم [5]. این معیارها بر اساس یک روش

بهبود تدریجی پایه گذاری می شوند بطوریکه با شروع از یک نقطه شدنی در فضای طراحی در هر

مرحله متغیرهای طراحی ارتقاء داده می‌شوند. به این ترتیب حل به تدریج به سمت نقطه بهینه حرکت می‌کند. روشی که بوسیله این مفهوم پایه‌گذاری شود به لحاظ محاسباتی روشی بسیار کاراست، اگرچه این روش نمی‌تواند همواره همگرایی حل را تضمین کند [۵].



## فصل ۷

استفاده از تکنیکهای پردازش تصویر در  
بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها

## ۷-۱- مقدمه

در فصول قبل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها با استفاده از روش معیار بهینگی و روش تقریبی MMA مورد بحث قرار گرفت و مثالهای از مسائل الاستیسیته دوبعدی نیز ارائه شد. در این فصل ضمن اشاره به ناپایداریهای بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها به رفع این مشکلات پرداخته می‌شود. بطور کلی ناپایداریهای بهینه‌سازی توپولوژیک را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود {۱۴}.

**چکربوردها<sup>۱</sup>:** در بعضی از مسائل پس از بهینه‌سازی توپولوژی سازه در توپولوژی بهینه نواحی با المانهای پر از مواد و المانهای بدون مواد بصورت تکراری (مثل صفحه شطرنج) بوجود می‌آید که به این نواحی چکربورد گفته می‌شود.

---

<sup>۱</sup> - checkerboards

**وابستگی حل به نحوه مش بندی<sup>۱</sup>:** در یک مسئله بهینه سازی توپولوژیک، با استفاده از شبکه های المان مختلف جهت گسسته سازی فضای طراحی، نتایج یکسانی بدست نمی آید. به این ناپایداری «وابستگی حل به نحوه مش بندی» اطلاق می شود.

**مینیمم محلی<sup>۲</sup>:** در یک مسئله بهینه سازی توپولوژیک با یک شبکه اجزاء محدود ثابت بازای پارامترهای مختلف الگوریتم بهینه سازی (مثلاً بازای نقاط شروع متفاوت) نتایج حل مختلف خواهد بود. این ناپایداری بعلت وجود مینیمم های محلی در مسئله بهینه سازی توپولوژیک است {۱۴}.

در این فصل به رفع مشکل چکربوردها در بهینه سازی توپولوژیک دوبعدی سازه ها با استمداد از تکنیکهای پردازش تصویر پرداخته می شود. همچنین با توجه به وابستگی توپولوژی سازه بهینه شده به نحوه مش بندی فضای طراحی و پارامترهای بهینه سازی، در این فصل سعی بر آنست که بتوان پاسخ نهایی توپولوژی جسم را کنترل نمود. حذف وابستگی نتیجه بهینه سازی توپولوژیک به نحوه مش بندی و پارامترهای بهینه سازی و همچنین جلوگیری از بوجود آمدن عضوهای نامطلوب در توپولوژی جسم بهینه، از نقطه نظر مهندسی بسیار حائز اهمیت است.

### ۷-۱-۱- چکربوردها

بندسو، الاف و راسموسن در سال ۱۹۹۲ توپولوژی تیر استاندارد MBB یک تیر دو سر ساده است که تحت اثر یک نیروی متمرکز در وسط دهانه و در وجه فوقانی خود، قرار گرفته است. تفسیر ناپایداری چکربورد و دلیل بوجود آمدن آن توسط زیگموند، ژاگ، هابر و دایاز در سال ۱۹۹۵ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. آنها بر این عقیده اند که چکربوردها در اثر استفاده از المانهای محدود مرتبه پایین در گسسته سازی فضای طراحی ایجاد می شوند (۱۵).

---

<sup>۱</sup> - mesh dependency  
<sup>۲</sup> - local minima

روشهای متفاوتی برای غلبه بر مسئله چکربورد ارائه شده است. روش بسیار ساده‌ای که برای حذف مسئله چکربورد می‌توان بکار برد جایگزین کردن متوسط دانسیته نواحی چکربورد بجای آن نواحی در خلال مراحل بهینه‌سازی است. اگرچه این روش را می‌توان براحتی پیاده‌سازی نمود اما با توجه به اینکه سختی نواحی چکربورد بدلیل بی‌نهایت شدن مقدار تنشها در گوشه‌های المانهای پر از مواد صفر است (۴) نمی‌توان آنرا با سختی ناحیه خاکستری جایگزین نمود.

روش دیگر برای جلوگیری از مسئله چکربورد استفاده از المانهای مرتبه بالا در تقسیم‌بندی فضای طراحی است. اگرچه با استفاده از این المانها در مسائل عملی هیچ الگوی چکربوردی گزارش نشده است اما ژاک " هابر " دایاز و زیگموند (۴) بر این عقیده‌اند که در مورد خاصی استفاده از این المانها نیز مسئله چکربورد را حل نمی‌کند. بعلاوه استفاده از المانهای مرتبه بالا (۸ و ۹ گرهی) در مسائل تنش مسطح سبب افزایش زمان انجام محاسبات به میزان قابل ملاحظه‌ای می‌شود.

در سال ۱۹۹۳ روشی توسط کیکوچی " دایاز و بندسو برای رفع مسئله چکربورد پیشنهاد شد. در این روش که بعد از هر مرحله بهینه‌سازی بکار برده می‌شود فضای طراحی بصورت مجموعه‌ای از چهار المان بهم چسبیده در نظر گرفته می‌شود. در صورتیکه این چهار المان بصورت چکربورد باشند پارامترهای طراحی در این المانها تغییر داده می‌شوند. این روش حذف چکربورد تا حدودی قسمتهای چکربورد را حذف می‌کند اما بدلیل همپوشانی نداشتن این مجموعه المانها با یکدیگر بعضی از قسمتهای چکربورد حذف نمی‌شود(۴).

در سال ۱۹۹۴ زیگموند (۴) در قسمتی از پایان‌نامه دکترای خود برای حذف چکربورد روشی پیشنهاد نمود که در آن برای حذف چکربورد از تکنیکهای پردازش تصویر استفاده شده است. یک الگوریتم مناسب برای حذف چکربورد بایستی دارای شرایط زیر باشد:

- ۱- الگوهای چکربورد بایستی بطور کامل حذف شوند.
- ۲- زمان انجام محاسبات بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش نیابد.
- ۳- بایستی بتوان براحتی آنرا پیاده‌سازی کرد.

۴- ناپستی سبب ناپایداری الگوریتم بهینه‌سازی شود.

۵- بایستی برای هر فضای طراحی قابل استفاده باشد.

زیگموند معتقد است روش او شرایط فوق را داراست. این روش بطور کامل در این فصل

گزارش می‌شود.

### ۷-۱-۲ وابستگی حل به نحوه مش‌بندی

نتایج حل مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک به نحوه مش‌بندی فضای طراحی وابسته است (۴).

زمانیکه از مش‌ریز برای تقسیم‌بندی فضای طراحی استفاده می‌شود سازه بهینه شده شامل سوراخهای کوچک و عضوهای باریک است حال آنکه در حالتیکه از مش درشت در این مسئله استفاده شود سوراخها بزرگتر و ابعاد اعضا نیز ضخیمتر بدست می‌آید. به لحاظ عملی داشتن یک توپولوژی بهینه با سوراخها و اعضا بزرگ مناسب‌تر است ولی از طرف دیگر برای بالا بردن دقت حل بایستی مش‌بندی تا حد امکان ریز باشد. بنابراین بایستی این وابستگی را حذف نمود تا بتوان نتایج عملی‌تر و دقیقتری را بدست آورد.

چندین روش برای حذف وابستگی حل به نحوه مش‌بندی (مثل روش کنترل محیطی {۴})

پیشنهاد شده است. در این فصل به روشی که زیگموند پیشنهاد کرده است پرداخته می‌شود. در این روش نیز از تکنیکهای حذف نویز بهره گرفته می‌شود که این روش نسبت به روش حذف چکربرد دارای ماتریس تکانه متفاوتی است. جالب‌تر اینکه این روش چکربرد را نیز حذف می‌کند. بعبارت دیگر این روش یک روش جامع برای حذف چکربرد و وابستگی حل به نحوه مش‌بندی بشمار می‌رود.

گاهی اوقات در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها اعضایی در توپولوژی جسم ایجاد می‌شوند که

نسبت به اعضا دیگر بسیار ریزتر و یا حالت خاکستری رنگ دارند. این اعضا اصطلاحاً اعضا نامطلوب

نامیده می‌شوند. نکته قابل توجه اینکه با بکارگیری روش حذف وابستگی حل به نحوه مش‌بندی

می توان اعضا نامطلوب را حذف نمود که این مسئله کاربرد این روش را در مسائل عملی افزایش داده است.

بعلت جامع بودن این روش در حذف چکر بوردها و حذف وابستگی حل به نحوه مش بندی در این فصل آن را بطور کامل گزارش می کنیم. این روش در برنامه بهینه سازی توپولوژیک بصورت دوبعدی استفاده شده است.

### ۳-۱-۷ مینیمم محلی

حل مثالهای متعدد بهینه سازی توپولوژیک سازه ها با فضای طراحی تقسیم بندی شده یکسان و با پارامترهای بهینه سازی متفاوت جوابهای متفاوتی را بدنبال دارد. این نکته بیانگر آن است که در مسئله بهینه سازی توپولوژیک مینیمم های محلی زیادی وجود دارد (۴). برای رفع این مشکل روش پیوسته سازی معرفی شده است.

در روش پیوسته سازی که اولین بار توسط ژاگ در سال ۱۹۹۴ استفاده شد ضریب جریمه در روند بهینه سازی متغیر است. ایده روش پیوسته سازی بدین گونه است که ضریب جریمه از مقدار  $\mu_0$  در مرحله اول بهینه سازی شروع شده و با افزایش  $\Delta\mu$  در هر چند مرحله از روند بهینه سازی تا  $\mu_{max}$  و یا تا همگرایی مسئله بهینه سازی ادامه می یابد.

روش پیوسته سازی بصورت های متفاوتی استفاده می شود. بعنوان نمونه زیگموند (۴) در پایان نامه دکترای خود اعتقاد دارد که در روش پیوسته سازی مسئله بهینه سازی با ضریب جریمه  $\mu_0$  تا مرحله همگرایی ادامه می یابد سپس  $\mu_0$  به اندازه  $\Delta\mu$  افزایش یافته و دوباره مسئله بطور کامل حل می شود و این کار تا  $\mu_{max}$  تکرار می شود که البته این روش بسیار پرهزینه بنظر می رسد. در سال ۱۹۹۸ زیگموند (۱۴) تغییر عقیده داده و معتقد است که در روش فیلتر با استفاده از تکنیکهای حذف نویز بهتر است مسئله را بعلت وجود نواحی خاکستری در مراحل اولیه

با  $\mu_{\max}$  آغاز کرده و در مرحله بهینه‌سازی آن را کاهش دهیم تا به مقدار  $\mu_0$  برسد و یا همگرایی حاصل شود.

با توجه به تحقیقات انجام شده هر کدام از روشهای فوق در یک نوع از مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک پاسخ بهتری می‌دهند.

## ۷-۲- روش حذف چکربرد با استفاده از تکنیکهای پردازش تصویر

این بخش به معرفی تکنیکهای کاهش نویز در پردازش تصویر و کاربرد آن برای حذف الگوهای چکربرد در بهینه‌سازی توپولوژیک می‌پردازد.

به تابع شدت روشنایی در حالت دوبعدی یک تصویر اطلاق می‌شود که می‌توان آنرا با  $F(i, j)$  نمایش داد. این تابع مقدار شدت روشنایی را در هر نقطه نشان می‌دهد. بنابراین روشنایی شکلی از انرژی است که غیر صفر و محدود می‌باشد (۱۶)  $(0 < F(i, j) < \infty)$ . در روش پردازش تصویر گسسته تصویر گرافیکی به تعداد محدودی از پیکسل‌ها تقسیم می‌شود. هر کدام از این پیکسل‌ها در تصویر مقدار انرژی را بصورت یک رنگ نمایش می‌دهند. یکی از مسائل عمومی در پردازش تصویر وجود آمدن نویز است که می‌تواند در اثر خطاهایی نظیر خطای حساسگر الکتریکی تبدیلها و ... ایجاد شود. تکنیکهای حذف نویز در پردازش تصویر سعی در تصحیح این خطاها دارند. در کتاب پردازش تصویر گسسته نوشته گنزالز و وینز (۱۶) این تکنیکها همراه با مثال و کاربرد آنها به تفصیل بحث شده است.

فضای طراحی تقسیم‌بندی شده در بهینه‌سازی توپولوژیک را می‌توان بصورت یک تصویر گسسته در نظر گرفت که هر المان نشان دهنده یک پیکسل می‌باشد و چگالی در هر المان را می‌توان بوسیله درجه خاکستری بودن تصور کرد. بطوریکه سفید به معنی فضای خالی و مشکی به معنی فضای پر از مواد باشد. الگوی چکربرد بصورت یک نویز ناخواسته در توپولوژی جسم بهینه تفسیر می‌شود و می‌توان آن را بوسیله تکنیکهای پردازش تصویر حذف نمود.

انواع تکنیکهای حذف نویز اعم از خطی و غیرخطی را ممکن است بتوان در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک بکار برد. اگرچه بطور کلی تکنیکهای غیرخطی بیشتر از روشهای خطی کارایی دارند اما استفاده از این تکنیکها در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک توصیه نمی‌شوند زیرا این روشها یکنواختی مسئله طراحی را در روند بهینه‌سازی بهم می‌زنند (۲). تکنیکهای خطی حذف نویز را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم‌بندی نمود. دسته اول تکنیکهایی می‌باشند که بر پایه تبدیلات فوریه استوارند و دسته دوم تکنیکهای کانولوشن می‌باشند. روشهایی که بر پایه تبدیلات فوریه استوارند را تنها می‌توان برای مش‌های منظم مستطیلی بکار برد بنابراین برای استفاده از این روشها بایستی تقسیم‌بندی فضای طراحی را به تقسیمات منظم مستطیلی محدود نمود که همیشه این کار عملی نیست. زیگموند برای حذف چکربرد از تکنیکهای کانولوشن استفاده نموده است. در روشهای که بر مبنای کانولوشن استوارند رنگ (دانسیته) هر پیکسل (المان) مطابق با اطلاعات پیکسلهای مجاور (صفحه فیلتر) تغییر می‌کند. چنانکه اشاره شد رنگ هر پیکسل در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام از تصویر با  $F(i, j)$  مشخص می‌گردد. تصویر خروجی فیلتر شده  $G(i, j)$  را می‌توان بصورت زیر فرمول‌بندی کرد.

$$G(i, j) = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L F(m, n)H(i - m + c, j - n + c) \quad (1-7)$$

که در این رابطه  $H$  ماتریس پاسخ تکانه نامیده می‌شود و یک ماتریس مربعی با بعد  $L \times L$  می‌باشد. این ماتریس با توجه به هدف عملیات فیلتر (مثل ترمیم تصویر و یا حذف لبه‌ها) انتخاب می‌شود. متغیر  $c$  بصورت  $c = (L+1)/2$  تعریف شود که  $L$  تعداد پیکسل‌ها در هر وجه پنجره فیلتر است.

برای حذف نواحی چکربرد در مسائل دوبعدی بهینه‌سازی توپولوژیک می‌توان از ماتریس تکانه زیر استفاده نمود (۴).

$$H = \left(\frac{1}{b+1}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$



در این رابطه  $b$  فاکتور فیلتر و  $b \in [1, \infty]$ . زمانیکه  $b = 1$  باشد یک میانگین گیری ساده در پنجره فیلتر انجام می شود و زمانیکه  $b$  به سمت بی نهایت میل کند  $G(i, j)$  نیز به سمت  $F(i, j)$  میل خواهد کرد و بنابراین هیچ فیلتری انجام نمی شود. نکته قابل توجه اینکه در اینجا  $L = 3$  است و:

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L H(i, j) = 1 \quad (3-7)$$

روش حذف نویز کانوولوشن را می توان به سادگی در بهینه سازی توپولوژیک بکار برد. با بکارگیری این روش روی نتایج بهینه سازی توپولوژیک نواحی چکربرد به نواحی خاکستری تبدیل می شوند که این طرح نیز نامطلوب است. از طرف دیگر بکارگیری این روش بصورت فوق در حین مراحل بهینه سازی امکان پذیر نیست و سبب ناپایداری روند بهینه یابی می گردد. بنابراین زیگموند (۴) پیشنهاد نمود که تکنیک های حذف نویز بایستی بگونه ای مناسب با مسئله بهینه سازی ادغام شوند.

زمانیکه مدل مواد مصنوعی است مسئله بهینه سازی و شرایط بهینگی بصورت ترمهایی از چگالی انرژی کرنشی نوشته می شود. در این مورد زیگموند پیشنهاد نمود انرژی کرنشی یک المان با میانگین گیری وزنی بین انرژیهای کرنشی خود المان و المانهای مجاور که در یک پنجره فیلتر قرار دارند تعویض شود. بنابراین انرژی کرنشی هر المان در هر مرحله از بهینه سازی بصورت زیر تغییر می کند:

$$\overline{\omega}_e = \frac{\sum_{i=1}^{n_H^e} H_i^* \omega_i}{\sum_{i=1}^{n_H^e} H_i^*} \quad (4-7)$$

که در این رابطه  $\omega_e, \overline{\omega}_e$  به ترتیب انرژیهای کرنشی قبل و بعد از فیلتر می باشند و  $n_H^e$  تعداد المانهای پنجره فیلتر می باشد. بعنوان نمونه در یک مش بندی با استفاده از المانهای چهارضلعی  $n_H^e \leq 9$  می باشد. در رابطه (۴-۷) ماتریس  $H^*$  ماتریس سطری ماتریس  $H$  بدون

فاکتور مقیاسی یعنی  $\frac{1}{(b+2)^2}$  می باشد.

برای مدل مصنوعی ایزوتروپیک با چگالی هر المان دوبعدی بصورت  $\rho = 1 - ab$  ماتریس الاستیسیته  $C$  بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$C = \rho^\mu C^0 \quad (5-7)$$

که در این رابطه  $C^0$  ماتریس الاستیسیته مواد همگن و  $\mu$  ضریب جریمه می‌باشد. با استفاده از رابطه فوق انرژی کرنشی هر المان را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\omega_e = \rho_e^\mu \omega_e^0 \quad (6-7)$$

که انرژی کرنشی  $\omega_e^0$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\omega_e^0 = \int_{\Omega^e} u^T C^0 u d\Omega \quad (7-7)$$

که در این رابطه  $u$  ماتریس تغییر مکان و  $\Omega^e$  سطح المان می‌باشد. با استفاده از روابط (7-7) و (6-7) می‌توان انرژی کرنشی نسبی تغییر یافته هر المان را بصورت زیر نوشت.

$$\overline{\omega_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n_H^e} H_i^* \omega_i \rho_i^\mu}{\rho_e^\mu \sum_{i=1}^{n_H^e} H_i^*} \quad (8-7)$$

البته بایستی به این نکته توجه داشت که با بکارگیری روش فوق مسئله اصلی بهینه‌سازی تغییر می‌کند و مقدار تابع هدف بسمت نقطه بهینه با جستجوی پاسخی بدون نواحی چکربرد در روند بهینه‌سازی حرکت می‌کند. اگرچه استفاده از مقادیر پایین  $b$  نتایج بهتری به لحاظ اندازه عضوهای بوجود آمده در توپولوژی جسم ارائه می‌دهد اما در حالتیکه  $b$  بزرگتر انتخاب شود مقدار کمتری برای انرژی کرنشی بدست می‌آید. مقادیر بین ۱۰ تا ۱۵ برای  $b$  جهت حذف کامل چکربرد گزارش شده است (۴).

چنانکه در مقدمه این فصل نیز اشاره شد حل مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها به نحوه مش‌بندی فضای طراحی خصوصاً زمانیکه از مدل مصنوعی استفاده می‌شود وابسته است (۴). برای مثال زمانیکه از یک مش‌بندی ریز استفاده می‌شود عضوهای سازه‌ای باریک و حفره‌های کوچک

زیادی بوجود می‌آید. از نقطه نظر عملی بهتر است که حفره‌ها بزرگ و اعضا نیز اجرائی باشند. از این رو کنترل وابستگی حل به نحوه مش‌بندی بسیار حائز اهمیت است.

### ۳-۷- حذف وابستگی حل به نحوه مش‌بندی

چنانچه در بخش ۷-۱-۲ اشاره شد برای حذف وابستگی حل به نحوه مش‌بندی روشهای متفاوتی ارائه شده است که در این فصل به روش زیگموند (۴) پرداخته شده است. زیگموند برای رفع وابستگی حل به نحوه مش‌بندی و برای عملی‌تر شدن نتایج بهینه‌سازی توپولوژیک با توسعه روش کانولوشن از بوجود آمدن عضوهایی با بعد کمتر از  $r_{min}$  جلوگیری نمود. فیلتر کانولوشن در این روش بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\widehat{H}_i = a_i[r_{min} - r(e, i)] \quad i \in \{1, 2, \dots, n_H^e\} \quad (9-7)$$

که در این رابطه  $a_i$  سطح المان  $i$  و  $r(e, i)$  فاصله بین مراکز المانهای  $e$  و  $i$  می‌باشند و  $n_H^e$  تعداد المانهای که رابطه  $r(e, i) \leq r_{min}$  را اقناع می‌کنند می‌باشند.

بایستی توجه داشت که در این روش نیاز به یک حلقه جستجو برای المانهای مجاور به المان مورد نظر دارد. اگرچه این جستجو به لحاظ محاسباتی پرهزینه به نظر می‌رسد اما این کار تنها یک بار در ابتدای هر مرحله بهینه‌سازی انجام می‌شود و از طرف دیگر پاسخ حیرت‌آور این روش این عیب را بخوبی می‌پوشاند.

در این روش زمانیکه از مدل مواد مصنوعی استفاده شود چگالی انرژی کرنشی المان  $e$  بصورت زیر تغییر می‌یابد.

$$\widehat{\omega}_e = \frac{\sum_{i=1}^{n_H^e} \widehat{H}_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{n_H^e} \widehat{H}_i} \quad (10-7)$$

زیگموند با استفاده از این روش بخصوص همراه با روش پیوسته‌سازی جوابهای بسیار عالی را گزارش کرده است که وابستگی حل به نحوه مش‌بندی و همچنین چکربرد در آنها رفع شده

است. نتایج زیگموند نشان می‌دهد که نتایج حل با انتخاب  $r_{\min}$  بصورت ۱ و ۱ برابر بعد المان مشابه پاسخ روش حذف چکربرد با  $b = 15$  است. بنابراین برای حذف چکربرد در روش حذف وابستگی حل به مش بایستی  $r_{\min}$  حداقل ۱ و ۱ برابر بزرگترین بعد المان انتخاب شود.

## فصل ۸

# روش پیاده کردن متد MMA و برنامه آن

۸-۱- جنبه‌های مدل کردن برای کاربرد MMA در برنامه

۸-۱-۱- مسئله بهینه‌سازی فرض شده

با فرض متغیرهای طراحی  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ،  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$  داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{minimize} \quad & f_0(x) + z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + 0.5 y_i^2) \\
 \text{subject to} \quad & f_i(x) - a_i z - y_i \leq f_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1-8) \\
 & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & z \geq 0,
 \end{aligned}$$

$x$ ، متغیر حقیقی و  $y$  و  $z$  متغیر مصنوعی می‌باشد.  $a_i, c_i \geq 0$

۸-۱-۲- مسائل NLP

اگر بخواهیم مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x) \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \leq f_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(۲-۸)

برای قرار دادن معادله (۱-۸) به فرم (۲-۸) ابتدا برای تمام آنها،  $a_i = 0$  قرار می‌دهیم و  $z = 0$  برای هر حل بهینه از معادله (۱-۸).

برای هر  $i$ ، یک عدد بزرگ  $C_i$ ، پس  $y_i = 0$  می‌شود و  $x$  یک حل بهینه در معادله (۲-۸) می‌گردد.

توجه شود که مسئله (۱-۸) همیشه حل‌های شدنی دارد.

### ۸-۱-۲-۱- برخی فرضیات و پیشنهادات

ترجیحاً باید قیدها را طوری مقیاس کرد که برای تمام  $i$  ها  $1 \leq f_i^{\max} \leq 100$  باشد. تابع هدف  $f_0(x)$  باید ترجیحاً به صورت  $1 \leq f_0(x) \leq 100$  برای جواب مستدل بر روی متغیرها، مقیاس شود. متغیرهای  $x_i$  باید ترجیحاً برای تمام  $j$  ها به صورت  $0.1 \leq x_j^{\max} - x_j^{\min} \leq 100$  باشد.

در خصوص اعداد بزرگ بر روی ضرایب  $C_i$ ، باید بخاطر دلایل عددی سعی شود که مقادیر به شدت بزرگ روی این ضرایب (شبه  $10^{10}$ ) اجتناب کرد.

با توجه به مقادیر  $f_i$  و  $f_0(x)$ ، می‌توان  $C_i$  را برابر ۱۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰ فرض کرد.

سرانجام، در خصوص حدود قیدها  $x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}$  ممکن است برخی اوقات حالتی باشد که حد پائین یا بالا تعریف نشده باشد. در این حالت باید یک حد مصنوعی متناسب اختیار کرد.

باید از  $x_j^{\max} - x_j^{\min}$  به صورت غیرضروری بزرگ دوری کرد.

### ۸-۱-۳- مسائل حداقل مربعات

مسئله عمومی این روش به این صورت است:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{i=1}^p (h_i(x) - \bar{h}_i)^2 \\
& \text{subject to} && g_i(x) \leq g_i^{\max}, && i = 1, \dots, q \\
& && x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, && i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

(۳-۸)

$h_i$  و  $g_i$ ، توابع دیفرانسیل هستند به طوری که  $\bar{h}_i$  و  $g_i^{\max}$  قیدها را می‌دهند.

تابع  $f_i$  و پارامترهای  $a_i$  و  $C_i$  و  $f_i^{\max}$  باید طبق زیر در معادله (۱-۸) انتخاب شوند.

$$\begin{aligned}
m &= 2p + q, \\
f_0(x) &= 0, \\
f_i(x) &= h_i(x), \quad i = 1, \dots, p \\
f_i^{\max} &= \bar{h}_i, \quad i = 1, \dots, p \\
f_{p+i}(x) &= -\bar{h}_i(x), \quad i = 1, \dots, p \\
f_{p+i}^{\max}(x) &= -\bar{h}_i, \quad i = 1, \dots, p \\
f_{2p+i}(x) &= g_i(x), \quad i = 1, \dots, q \\
f_{2p+i}^{\max}(x) &= g_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, q \\
a_i &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\
c_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 2p \\
c_{2p+i} &= \text{large number}, \quad i = 1, \dots, q
\end{aligned}$$

(۴-۸)

#### ۸-۱-۴- مسائل مین - ماکس

مسئله عمومی به این شرح است:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \max_{i=1, \dots, p} \{h_i(X)\} \\
& \text{subject to} && g_i(X) \leq g_i^{\max}, && i = 1, \dots, q \\
& && x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, && j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

(۵-۸)

$h_i$  و  $g_i$ ، توابع دیفرانسیل و  $g_i^{\max}$  قید را می‌دهد. توابع  $f_i$  و پارامترهای  $a_i$  و  $C_i$  و  $f_i^{\max}$  باید طبق زیر در معادله (۱-۸) اختیار می‌شوند.



$$\begin{aligned}
m &= p + q, \\
f_0(x) &= 0, \\
f_i(x) &= h_i(x), \quad i = 1, \dots, p \\
f_i^{\max} &= 0, \quad i = 1, \dots, p \\
f_{p+i}(x) &= g_i(x), \quad i = 1, \dots, q \\
f_{p+i}^{\max}(x) &= g_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, q \\
a_i &= 1, \quad i = 1, \dots, p \\
a_{p+i} &= 0, \quad i = 1, \dots, q \\
c_i &= \text{large number}, \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned}
\tag{۶-۸}$$

### ۸-۱-۵- زیرمسئله MMA

MMA متدی برای حل مسائل بر روی معادلات (۸-۱) می باشد که به صورت زیر قابل

کاربرد است: در هر تکرار، نقطه تکرار فعلی  $(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)})$  داده شده است.

سپس یک زیرمسئله صریح تقریبی تولید شده است. در این زیرمسئله توابع  $f_i(x)$  با توابع

محدب تقریبی  $\bar{f}_i^{(k)}(x)$  جایگزین می گردند.

این تقریبها بر اساس اطلاعات گرادینان در نقطه تکرار فعلی و اما همچنین (به طور ضمنی)

بر روی اطلاعات نقاط تکرار قبلی می باشد. زیرمسئله حل شده و حل بهینه واحد به نقطه تکرار

بعدی  $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)})$  می رود.

سپس یک زیرمسئله جدید تولید می شود و ... زیرمسئله به این شرح است:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \bar{f}_0^{(k)}(x) + z + 0.05z^2 + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + 0.5y_i^2) \\
\text{subject to} \quad & \bar{f}_0^{(k)}(x) - a_i z - y_i \leq f_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& z \geq 0,
\end{aligned}
\tag{۷-۸}$$

توابع تقریبی  $\bar{f}_i^{(k)}(x)$  به این شکل انتخاب شده اند:

$$\tilde{f}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (8-8)$$

وقتی

$$p_{ij}^{(k)} = \left( u_j^{(k)} - x_j^{(k)} \right)^2 \left( \left( \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right)^+ + k_{ij}^{(k)} \right),$$

$$q_{ij}^{(k)} = \left( x_j^{(k)} - l_j^{(k)} \right)^2 \left( \left( \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right)^- + k_{ij}^{(k)} \right),$$

$$r_i^{(k)} = f_i \left( x^{(k)} \right) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right),$$

$$\alpha_j^{(k)} = \max \left\{ x_j^{\min}, 0.9l_j^{(k)} + 0.1x_j^{(k)} \right\},$$

$$\beta_j^{(k)} = \min \left\{ x_j^{\max}, 0.9u_j^{(k)} + 0.1x_j^{(k)} \right\},$$

(8-9)

به طوری که

$$\left( \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right)^+ = \max \left\{ 0, \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right\} \text{ and } \left( \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right)^- = \max \left\{ 0, \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right\},$$

(8-10)

قانون پیش فرض برای جدید کردن مجانب‌های پایین  $l_j^{(k)}$  و مجانب‌های بالا  $u_j^{(k)}$  به این

شکل‌اند. وقتی که در دو تکرار اول می‌باشیم یعنی  $k=1$  و  $k=2$ :

$$l_j^{(k)} = x_j^{(k)} - 0.5 \left( x_j^{\max} - x_j^{\min} \right),$$

$$u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + 0.5 \left( x_j^{\max} - x_j^{\min} \right),$$

(8-11)

در تکرارهای بعدی وقتی  $k \geq 3$

$$l_j^{(k)} = x_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} \left( x_j^{(k-1)} - l_j^{(k-1)} \right),$$

$$u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} \left( u_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)} \right),$$

(۱۲-۸)

به طوری که:

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0.7 & \text{if } \left( x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right) \left( x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right) < 0, \\ 1.2 & \text{if } \left( x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right) \left( x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right) > 0, \\ 1 & \text{if } \left( x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right) \left( x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right) = 0, \end{cases}$$

(۱۳-۸)

مقادیر پیش فرض پارامترهای  $K_{ij}^{(k)}$  هستند:

$$k_{ij}^{(k)} = 10^{-3} \cdot \left| \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) \right| + \frac{10^{-6}}{u_j^{(k)} - l_j^{(k)}}, \text{ for } i = 0, 1, \dots, m \text{ and } j = 1, \dots, n.$$

(۱۴-۸)

این مطلب بیان می‌کند که همه توابع تقریبی  $\bar{f}_i^{(k)}(x)$  به شدت محدب‌اند؛ و همیشه یک

حل واحد برای زیرمسئله MMA وجود دارد.

صرف‌نظر از مقادیر پارامترهای  $K_{ij}^{(k)}$ ، توابع  $\bar{f}_i^{(k)}$  همیشه تقریب‌های مرتبه اول توابع اصلی

$f_i$  در نقطه تکرار فعلی می‌باشند (۲۰):

$$\bar{f}_i^{(k)} \left( x^{(k)} \right) = f_i \left( x^{(k)} \right) \text{ and } \frac{\delta \bar{f}_i^{(k)}}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right) = \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \left( x^{(k)} \right).$$

(۱۵-۸)

## ۸-۲- برنامه حل مسأله توپولوژیک تنش صفحه‌ای

در اینجا ما بر روی دو برنامه کار کردیم. برنامه اول به این صورت می‌باشد که با متد

MMA، انرژی کرنشی یک فضای طراحی صفحه‌ای را با توجه به کسر حجم مشخص کمینه کرده

و جواب‌های به دست آمده را با جواب‌های به دست آمده از حل همین مثال‌ها به روش معیار بهینگی، مقایسه می‌کند.

در ادامه قید تنش را به برنامه اضافه می‌کنیم، تا توانایی برنامه را در داشتن قیدهای مختلف ارزیابی گردد و سپس تأثیرپذیری جواب‌های مثال‌ها از تغییر پارامترهای روش MMA مورد بحث قرار می‌گیرد.

نهایتاً با تغییر در کد برنامه MMA که منجر به تغییر روش MMA به متدهای دیگر می‌شود، مثال‌هایی را با روش MMA حل و با این روش‌ها مقایسه می‌نماییم.

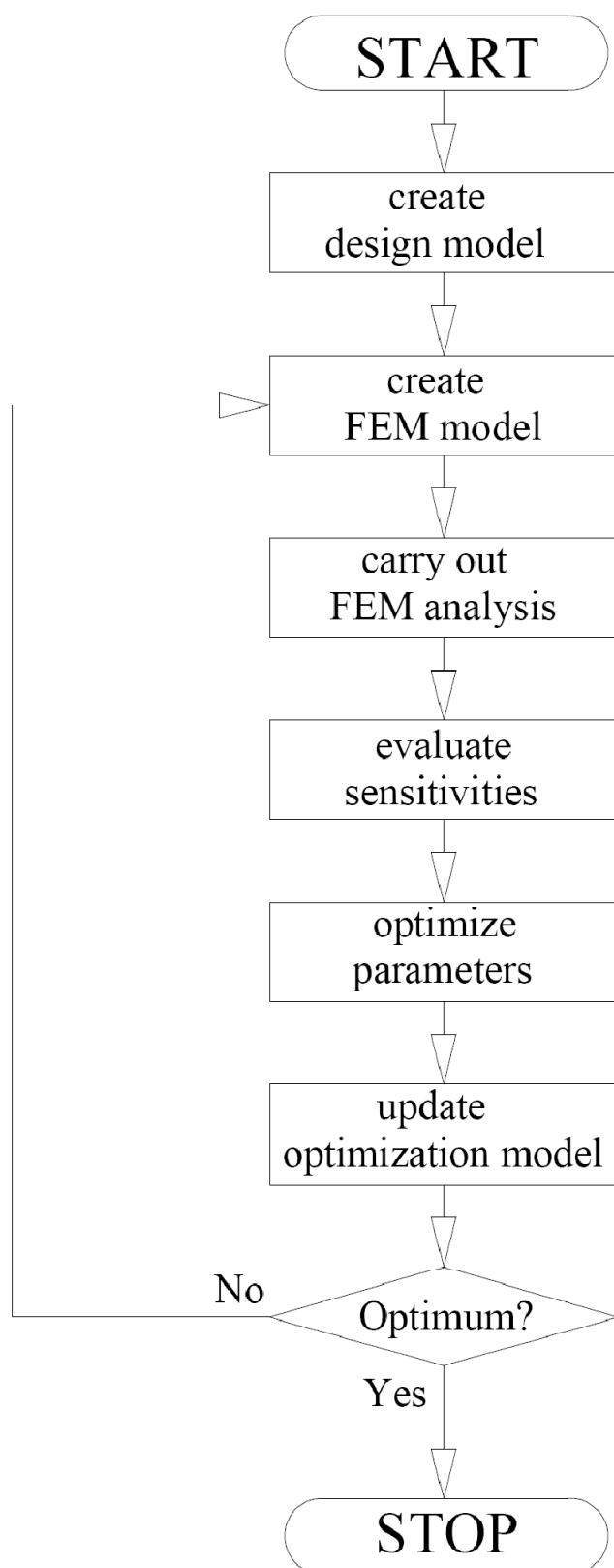
در نگاه کلی، این برنامه شامل حدود ۴۰۰۰ خط برنامه نویسی به زبان فرترن می‌باشد که حدود ۳۰۰ خط کد MMA به آن اضافه گردیده است.

طراحی کلی برنامه به این صورت می‌باشد که پس از ورود اطلاعات فضای طراحی، محاسبه مساحت طراحی هر المان را خواهیم داشت و سپس بارگذاری و در ادامه محاسبه تنش های هر المان با روش SKY.

پس از آن پارامترهای اصلی MMA معرفی می‌گردد و دوباره مرحله بارگذاری و محاسبه تنش هر المان را خواهیم داشت. پس از این مرحله، انرژی کرنشی مدل، و همین طور تنش های اصلی، تنش مسطح، ماتریس الاستیسیته و ماتریس سختی و Shape Function محاسبه می‌گردد. سپس توابع هدف و قید و مشتق های آنها به برنامه معرفی و مرحله بهینه سازی انجام و پارامترهای بهینه سازی ارزیابی می‌گردد.

اگر شاخصه های بهینه سازی ارضا نشده باشد به تعداد تکرار ۱ واحد اضافه و آنالیز مدل، محاسبه انرژی کرنشی و دیگر مراحل برای مرتبه دیگر تکرار می‌گردد. اگر فاکتورهای بهینه سازی ارضا شده باشد جواب نهایی ارائه می‌گردد.

الگوریتم کلی کار به صورت شکل (۸-۱) می‌باشد.



شکل (۸-۱) الگوریتم بهینه سازی

## ۸-۲-۱- برنامه اول

این برنامه همان طور که ذکر شد برای بهینه‌یابی توپولوژی مسائل تنش صفحه‌ای شکل گرفته است و طراحی کلی آن برای کمینه کردن تابع هدف انرژی کرنشی فضای طراحی در حضور قید کسر حجم، می‌باشد. متغیرهای طراحی همان سطح المان‌های فضای طراحی می‌باشند. فضای طراحی یک صفحه با خصوصیات مشخص می‌باشد که به اجزای محدود تبدیل می‌گردد.

این برنامه از چند جزء کلی (سابروتین) تشکیل شده است. اولین بخش، Input یا خواندن فایل مشخصات، شامل:

معرفی فضای طراحی، مدل اجزاء محدود، فضای طراحی با معرفی محل گره‌ها و تشکیل المان‌های محدود، تعداد گره‌ها، تعداد المانها، معرفی تکیه‌گاه‌ها و مشخصات تکیه‌گاهها، معرفی نیروهای وارد بر فضای طراحی، شامل تعداد و مقدار نیروها، راستا و نقطه اثر نیروها، مشخص کردن نوع المان‌ها، خصوصیات فضای طراحی، مثل مدول الاستیسیته و ضریب یانگ، معرفی قید و ضریب Move Limit و مقدار شعاع  $r$  برای حذف چکر بورد می‌باشد.

بخش بعدی برنامه، بخش آنالیز و مدل کردن فضای طراحی، المانها، نیروها و قیدها و تحلیل برنامه با حل گر اسکای و محاسبه تنش و ... می‌باشد.

بخش بعدی برنامه، بخش بهینه‌ساز است، که با استفاده از متد MMA، وظیفه بهینه‌سازی مسأله را به عهده دارد که خود شامل زیر برنامه‌های main برای معرفی قیدها و توابع هدف و متغیرهای طراحی و مشتقات توابع و زیر برنامه کد MMA برای خواندن قید و تابع هدف و ... بهینه کردن تابع هدف به وسیله آنها و زیر برنامه معرفی و کنترل مجانب‌های حرکتی که در تعریف توابع تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌باشد.

در قسمت بهینه‌سازی مسأله بخش پردازش تصویر برای جلوگیری از اعضای نامطلوب گنجانده شده است.

بخش بعدی، قسمت خروجی برنامه می‌باشد که مقدار تابع هدف را در هر سیکل می‌دهد و

همین طور خروجی برای بدست آوردن شکل بهینه شده فضای طراحی در هر تکرار به وسله برنامه نوشته شده به زبان ویژوال بیسیک.

حال چند مثال مختلف در این زمینه حل می کنیم:

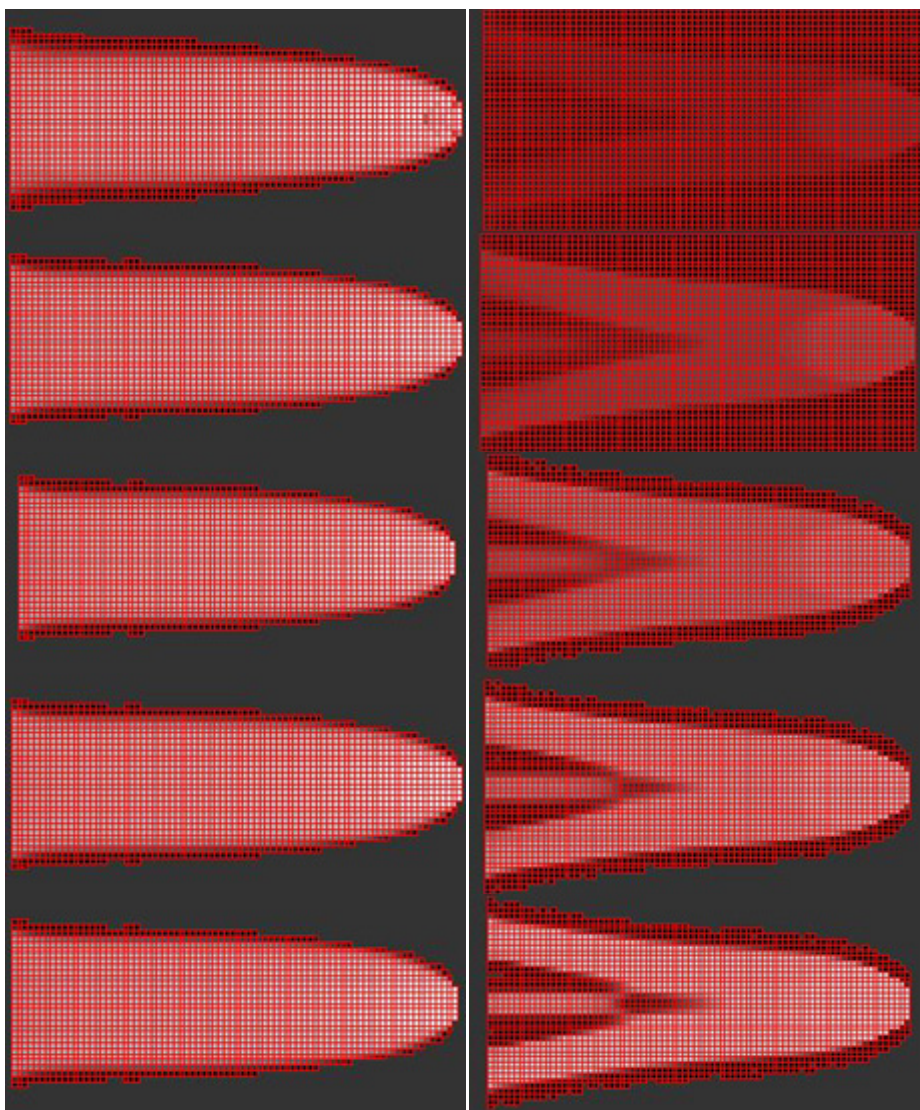
#### ۸-۲-۲- مثال های عددی

در این بخش چندین مثال با متد MMA حل می شود و جواب ها با نتایج بدست آمده از روش معیار بهینگی مقایسه می گردد. این مسائل ، با پارامتر های برابر برای دو روش حل شده تا قابل قیاس باشند.

**مثال اول :** فضای طراحی به صورت یک تیر طره عمیق در نظر گرفته شده

است . مشخصات مواد در این مثال  $E=10000$  و  $V=0.3$  می باشد و نسبت حجم مواد به حجم فضای طراحی ( کسر حجم ) ۵۰ درصد و  $I=0.22$  برای حذف چکربورد فرض شده .

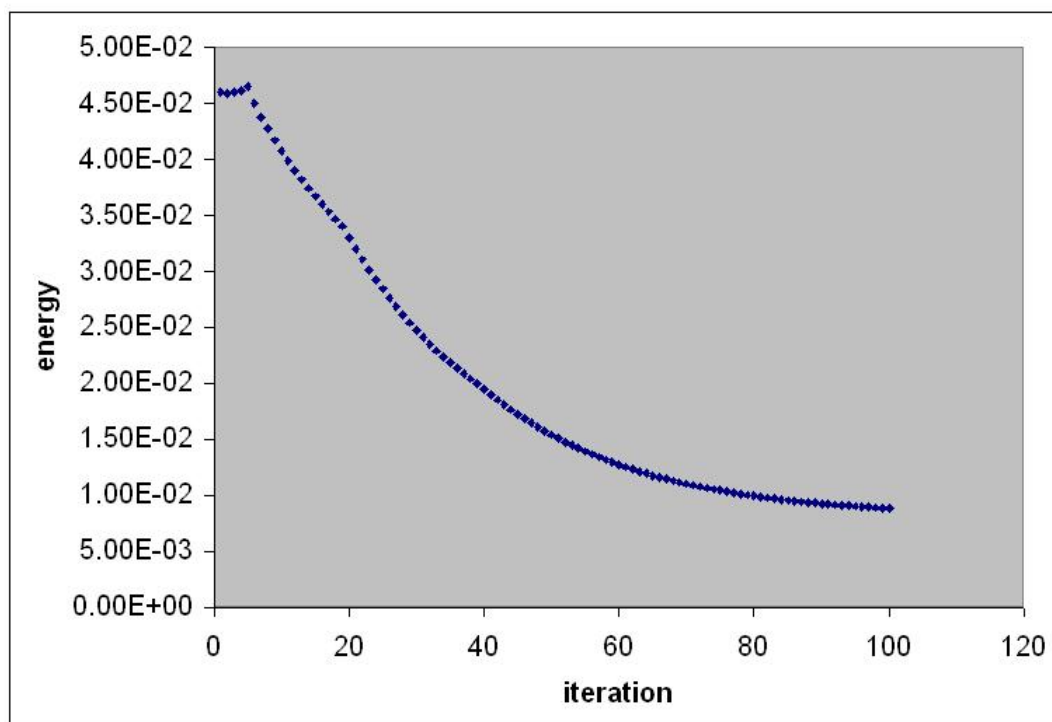
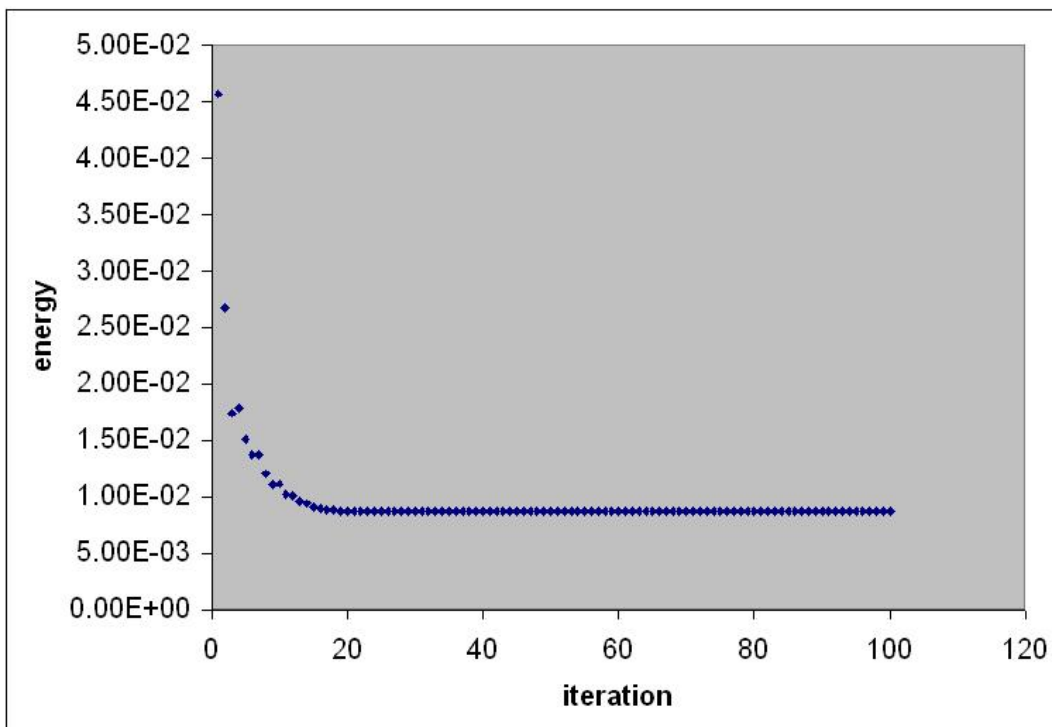
برای مش بندی فضای طراحی از المان چهار گرهی تنش مسطح استفاده شده است . تیر طره مورد نظر تحت اثر بار متمرکز در وسط لبه سمت راست خود قرار گرفته است. بار کششی به صورت افقی و برابر ۱۰۰۰ فرض می شود.



شکل (۲-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA)



نمودار (۸-۱) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی )



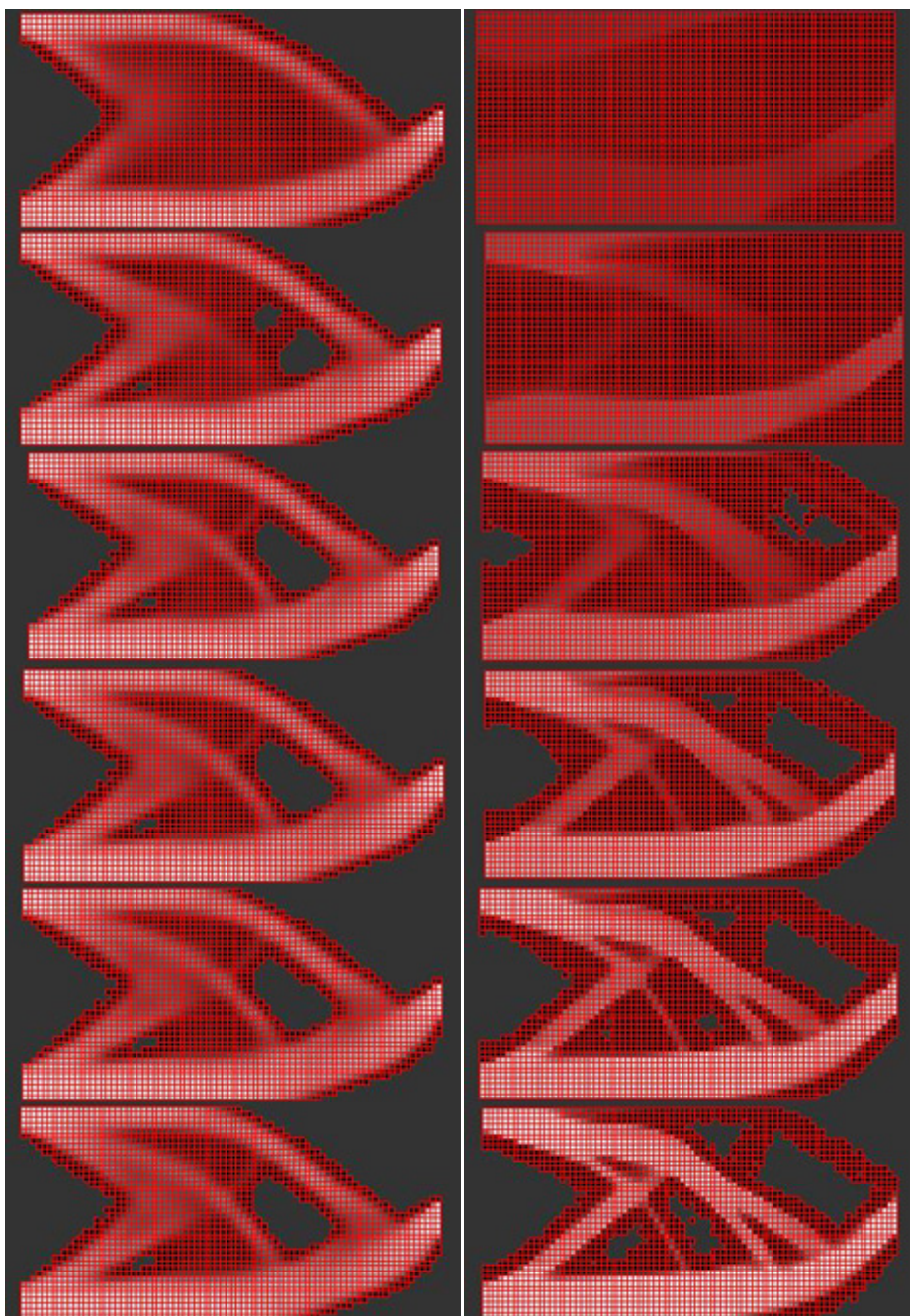
همانطور که از شکل‌ها (شکل (۸-۲)) می‌توان متوجه شد، در متد MMA، با توجه به تقریبی بودن آنها، خیلی سریع‌تر به شکل بهینه می‌رسیم ولی در نهایت، دقت شکل روش معیار بهینگی را ندارد.

اولین جواب در متد MMA، ۲-  $4/57 \times 10$  بدست آمده که در نهایت به ۳-  $8/76 \times 10$  رسیده در مقابل در روش دیگر ۲-  $4/6 \times 10$  کسب شده که به جواب ۳-  $8/86 \times 10$  ختم گردیده است.

با مشاهده نمودارها (نمودار (۸-۱))، می‌بینیم که در روش MMA، در تکرار ۱۵، به هم‌گرایی رسیده‌ایم و این موضوع دیده می‌شود که در تکرار ۳ و ۴ یک اختلال وجود دارد، در مقابل در روش دیگر در ۵ تکرار اول وجود اختلال نمایان است ولی پس از تکرار ۵، تابع شروع به هم‌گرایی کرده ولی با توجه به نمودار، کاملاً مشخص است که به هم‌گرایی کامل نرسیده‌ایم و بعد از تکرار ۱۰۰ نیز نمودار تمایل دارد تا به عدد پایین‌تری هم‌گرا شود و این از شیب نمودار قابل تصور می‌باشد؛ یعنی به عددی کمتر از نتیجه نهایی فعلی و چه بسا کمتر از نتیجه نهایی روش MMA برسد.

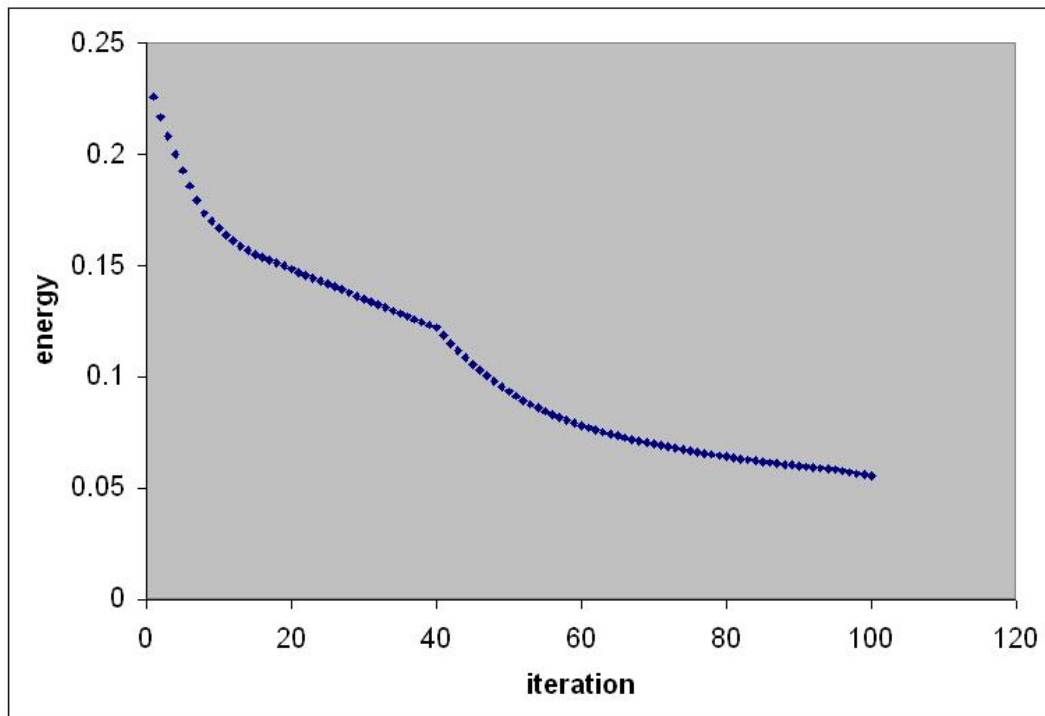
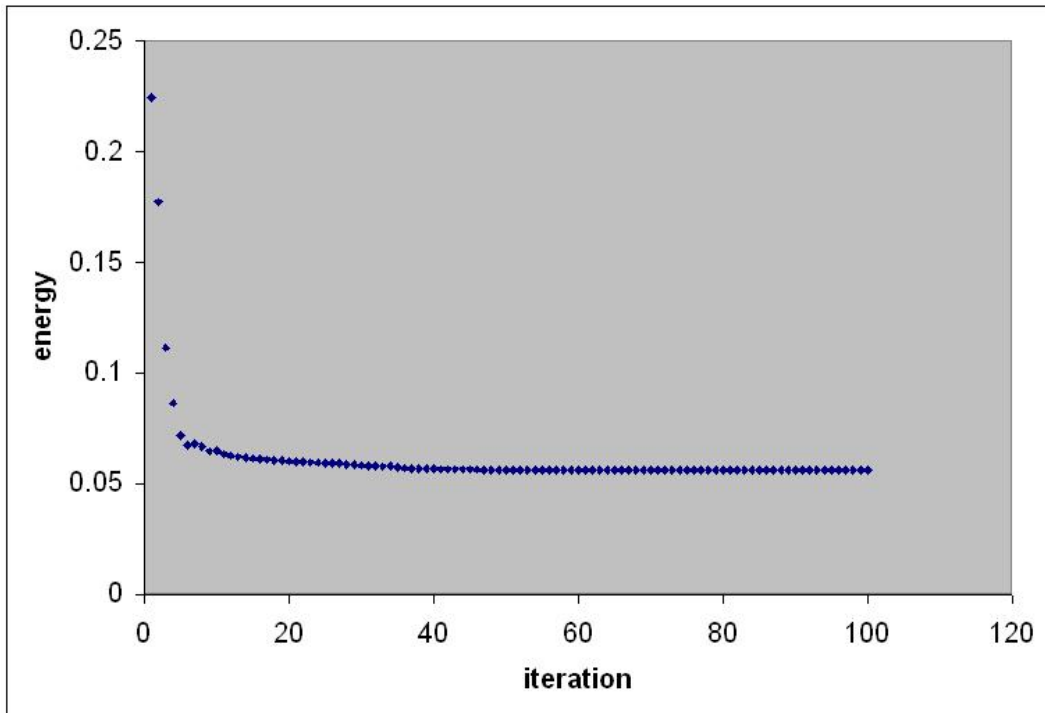
**مثال دوم :** فضای طراحی تیرطره عمیق با فرضیات  $E=10000$  و  $V=0.3$  و کسر حجم

۵۰٪ و شعاع چکربرد ۰/۰۲۲ فرض شده که نیروی کششی ۱۰۰۰ با زاویه ۴۵ درجه با راستای X و در جهت عکس عقربه‌های ساعت به لبه سمت راست وارد می‌گردد. برای مش‌بندی از المان چهار گرهی تنش مسطح استفاده شده است.



شکل (۳-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA)

نمودار (۲-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی )



با نگاه کردن به شکل‌های بدست آمده (شکل (۸-۳))، می‌توان این نکته را دریافت که شکل ابتدایی برای متد MMA در مراحل اولیه ظاهر گردیده که نشان از سرعت هم‌گرایی است به کمیته تابع هدف ولی در نهایت شکل نهایی کار، شکلی با اعضای کاملاً جدا از هم نمی‌باشد و یک حالت محو در اعضای میانی مشهود است. در طرف دیگر شکل روش دیگر در سیکل‌های آخر، ظاهر گردیده ولی دارای اعضای قابل تفکیک می‌باشد.

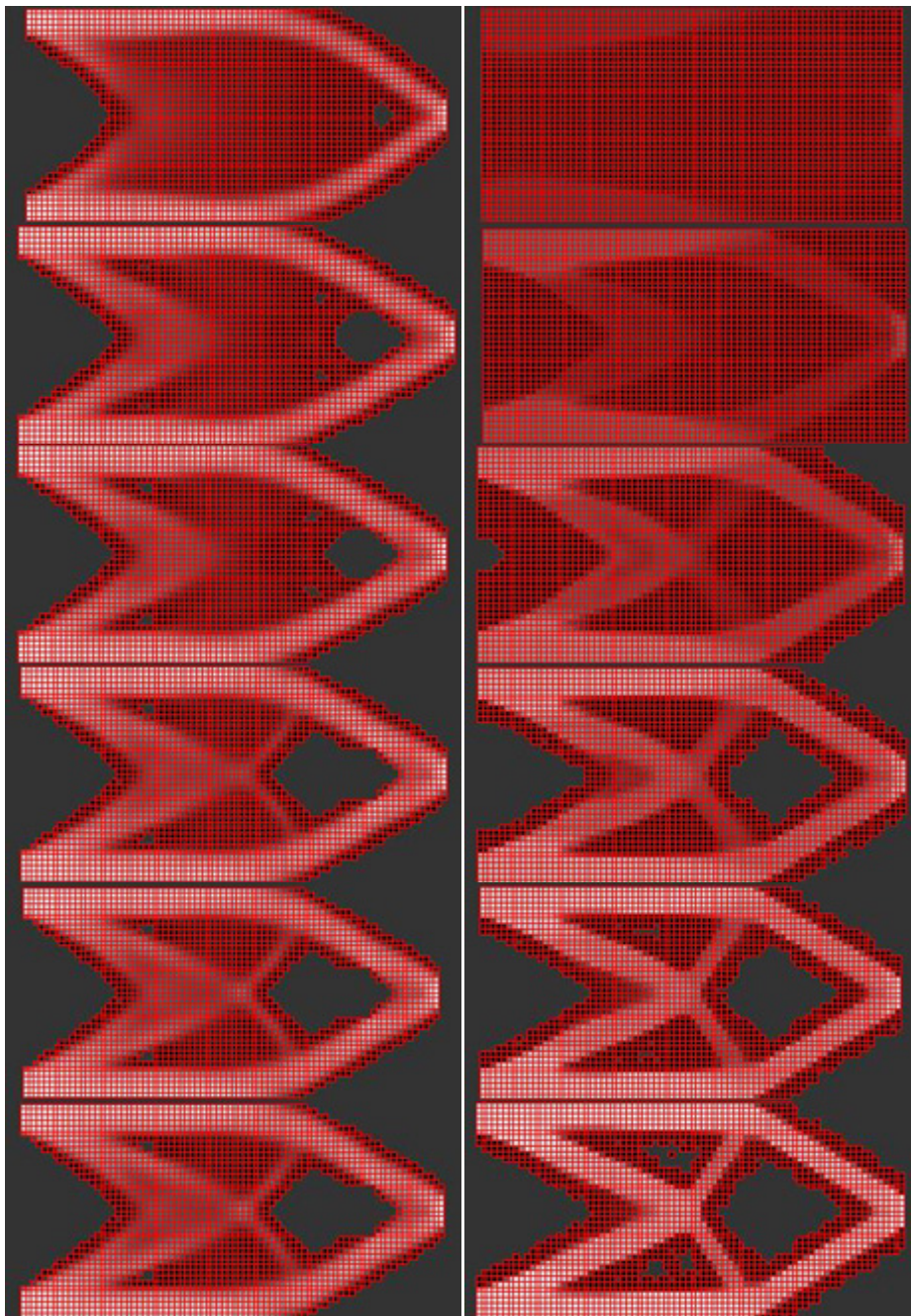
در روش MMA اولین جواب ارائه شده ۰/۲۲۴۴ می‌باشد که به ۰/۰۵۶ رسیده و در روش دیگر جواب ابتدایی و انتهایی عبارت‌اند از ۰/۲۲۵۹ و ۰/۰۵۵۵.

از نمودارها (نمودار (۸-۲)) می‌توان سرعت هم‌گرایی متد MMA را در قیاس با روش دیگر دریافت و اینکه در روش معیار بهینگی تا قبل از تکرار ۴۰، شیب نمودار هم‌گرایی به عدد دیگری است ولی از تکرار ۴۰ به بعد، شیب تغییر کرده و تمایل به هم‌گرایی نسبت به جواب دیگری دارد.

ولی در نهایت با اینکه این روش عدد کمتری نسبت به MMA ارائه داده باز قابل تصور است که بعد از ۱۰۰ تکرار هنوز برای کسب عدد کمینه‌تر برای تابع هدف می‌توان به این روش امیدوار بود.

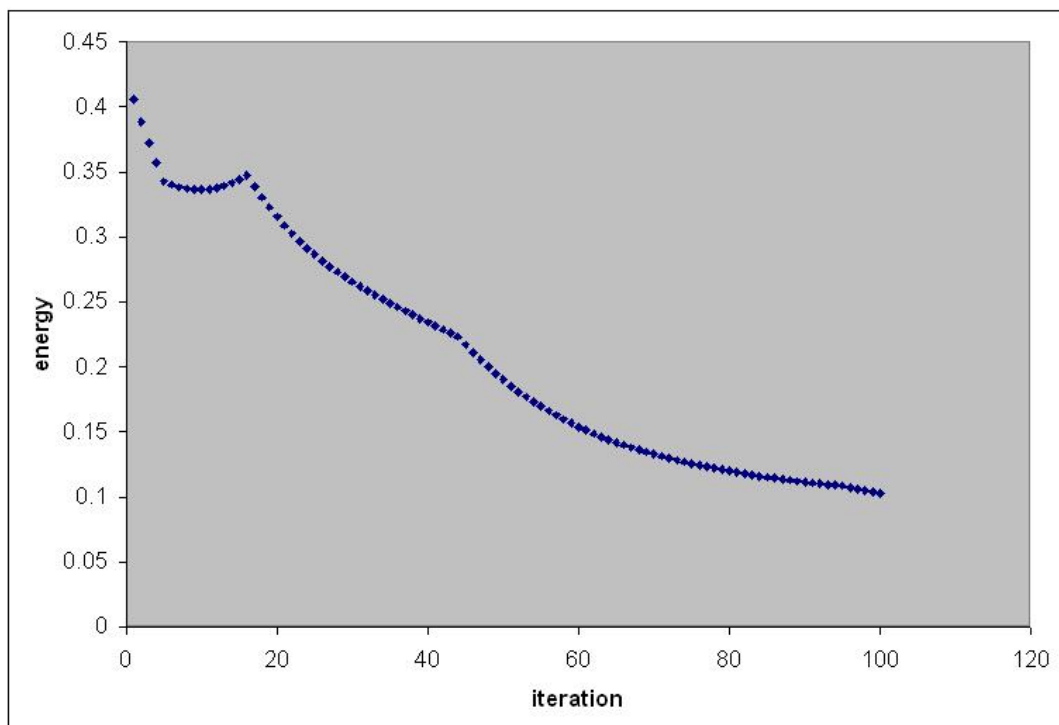
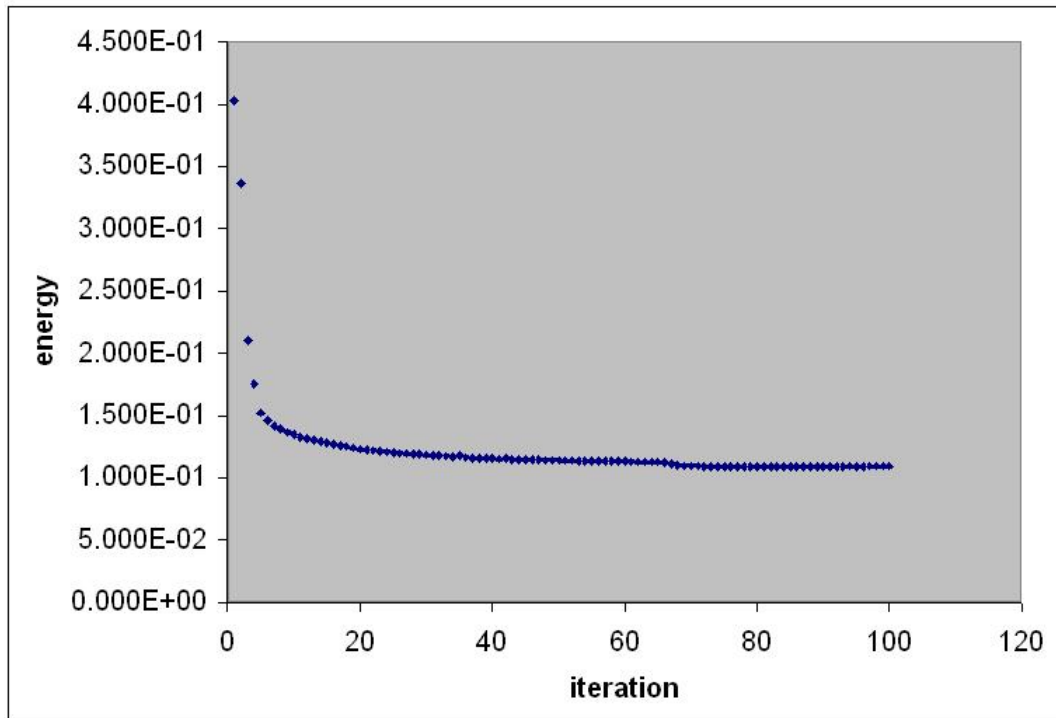
**مثال سوم:** همان فرضیات مثال قبل با این تفاوت که بار متمرکز به صورت قائم به لبه

سمت راست وارد می‌گردد.



شکل (۴-۸) مراحل بهینه‌یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA)

نمودار (۳-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی )



همانطور که می‌بینیم سرعت ظاهر شدن شکل (شکل (۸-۴)) در روش MMA در همان تکرارهای اولی می‌باشد ولی شکل نهایی دارای اعضای محو در وسط فضای طراحی است و در مقابل در روش دیگر، شکل‌گیری کار در سیکل‌های انتهایی، ولی فضای طراحی به شکلی با اعضای کاملاً آشکار تبدیل گردیده است.

در کل از شکل‌ها می‌توان تفاوت حالت تقریبی MMA را در سرعت ظاهر شدن شکل ولی در نهایت شکلی با اعضای محو نسبت به روش دیگر نتیجه گرفت.

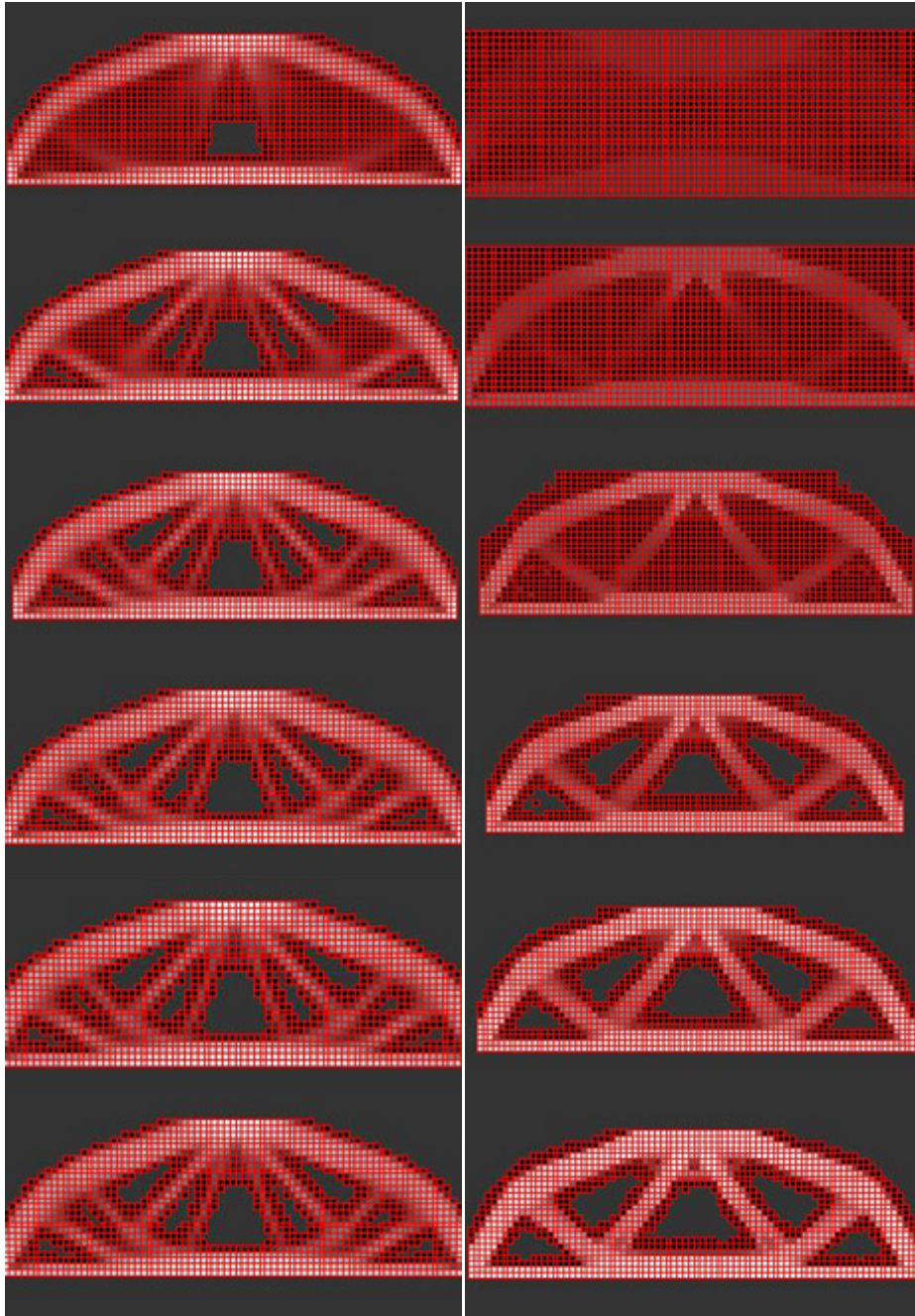
با نگاه به نمودارها (نمودار (۸-۳)) ایجاد اختلال در روش معیار بهینگی راه قبل از ۱۶ تکرار اول می‌توان مشاهده کرد و همین‌طور سرعت هم‌گرایی روش MMA در قبل از ۲۰ تکرار اولیه.

جواب ارائه شده توسط متد MMA  $0/403$  می‌باشد که به عدد  $0/109$  کمینه گردیده و روش دیگر جواب‌های ابتدایی و انتهای  $0/405$  و  $0/102$  را نشان می‌دهد که به جواب کمتری نسبت به روش MMA رسیده‌ایم و هنوز هم با توجه به شیب نمودار احتمال رسیدن به جواب کمتر قابل تصور می‌باشد ولی آنچه که برای ما مهم می‌باشد و در سازه‌های بزرگ مقیاس قابل تأمل است سرعت MMA در هم‌گرا شدن در چند تکرار اول است که می‌تواند باعث اغماض ما از تفاوت اندک جواب نهایی بعد از سیکل‌های بسیار زیاد باشد.

**مثال چهارم :** یک تیر دو سر ساده به طول ۳ و ارتفاع ۱ با فرضیات تنش مسطح در نظر

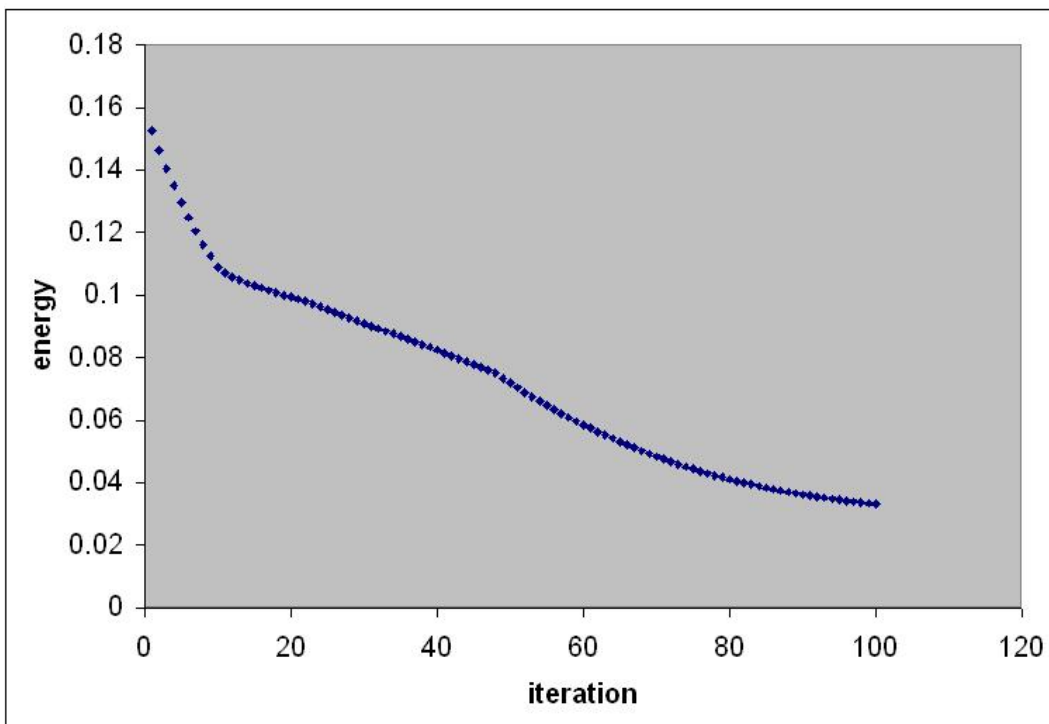
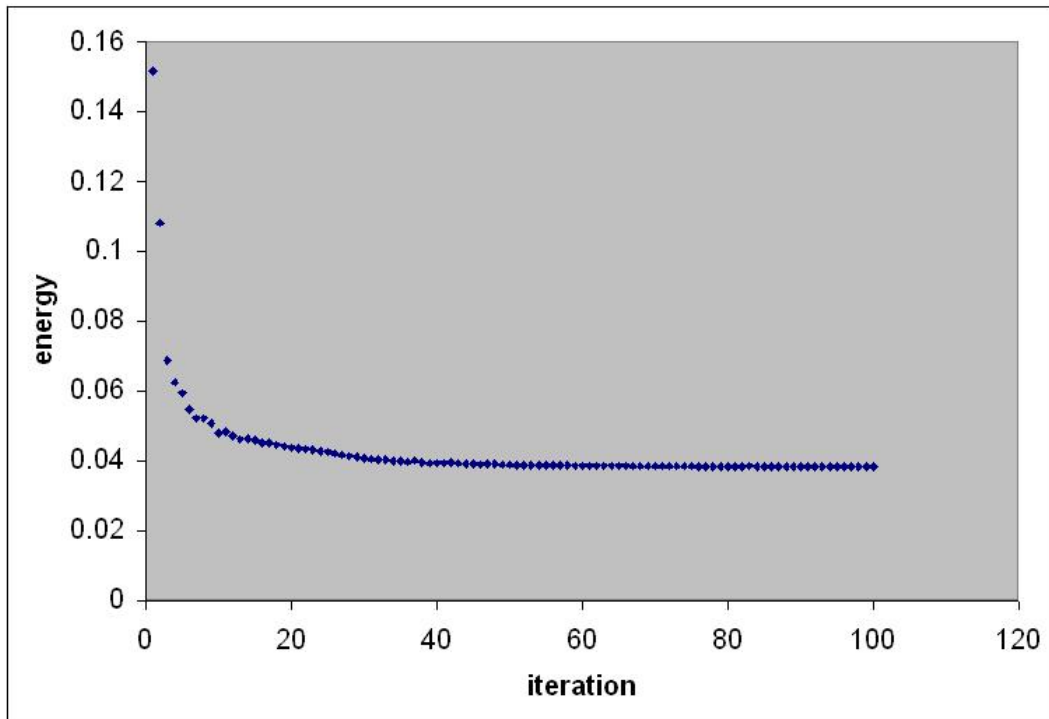
گرفته شده است. این تیر در وسط لبه بالایی تحت اثر یک نیروی متمرکز فشاری برابر ۱۰۰۰ واحد قرار گرفته،  $E=10000$  و  $V=0.3$  فرض گردیده است. کسر حجم ۵۰ درصد می‌باشد و از المان چهار گرهی تنش مسطح برای مش بندی استفاده گردیده است و شعاع فرض شده برای چکربرد  $0/022$  می‌باشد.





شکل (۵-۸) مراحل بهینه‌یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA)

نمودار (۴-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی )



در این مثال در روش MMA جواب‌های ابتدایی و نهایی به ترتیب عبارتند از ۰/۱۵۱ و ۰/۰۳۸ و در مقابل برای روش دیگر جواب‌های ۰/۱۵۲ و ۰/۰۳۲ را بدست آوردیم.

با نگاه به شکل تیر ساده (شکل (۸-۵))، باز شکل‌گیری سریع اعضا در روش MMA قابل رویت است ولی شکل نهایی در روش دیگر اعضا درشت و تفکیک شده‌ای به ما داده، در صورتی که شکل نهایی روش MMA دارای اعضا ظریف و محو شده‌ای است.

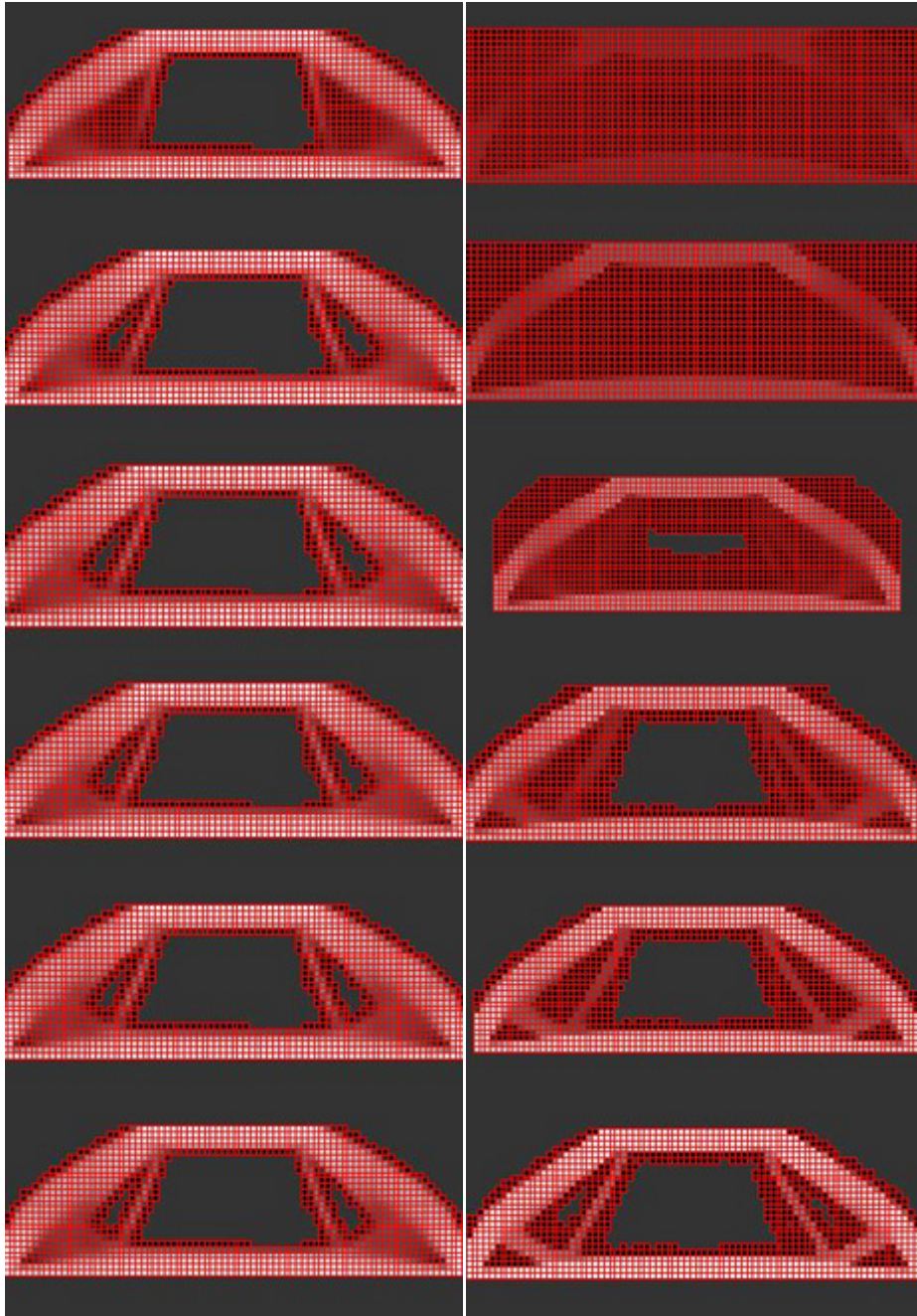
شکل نهایی روش دیگر، حالت مطلوب را ارائه داده، در حالی که روش MMA رسیدن به شکل اولیه را با سرعت بیشتری نتیجه داده است.

در نمودار (نمودار (۸-۴)) روش MMA، هم‌گرایی سریع این بار نیز نمایان می‌باشد، در مقابل جواب نهایی کمتر را در روش دیگر داریم و اختلال در هم‌گرایی قبل از تکرار ۱۰ و تکرار ۵۰ که دو بار در شیب نمودار و پیشرفت به سمت جواب کمینه، بازنگری شده است.

**مثال پنجم :** همان فرضیات مثال چهارم با این تفاوت که در لبه بالایی به جای یک بار متمرکز ، ۲ بار متمرکز با نیروی برابر و به فاصله یک سوم از هر دو لبه تیر قرار می‌گردند.

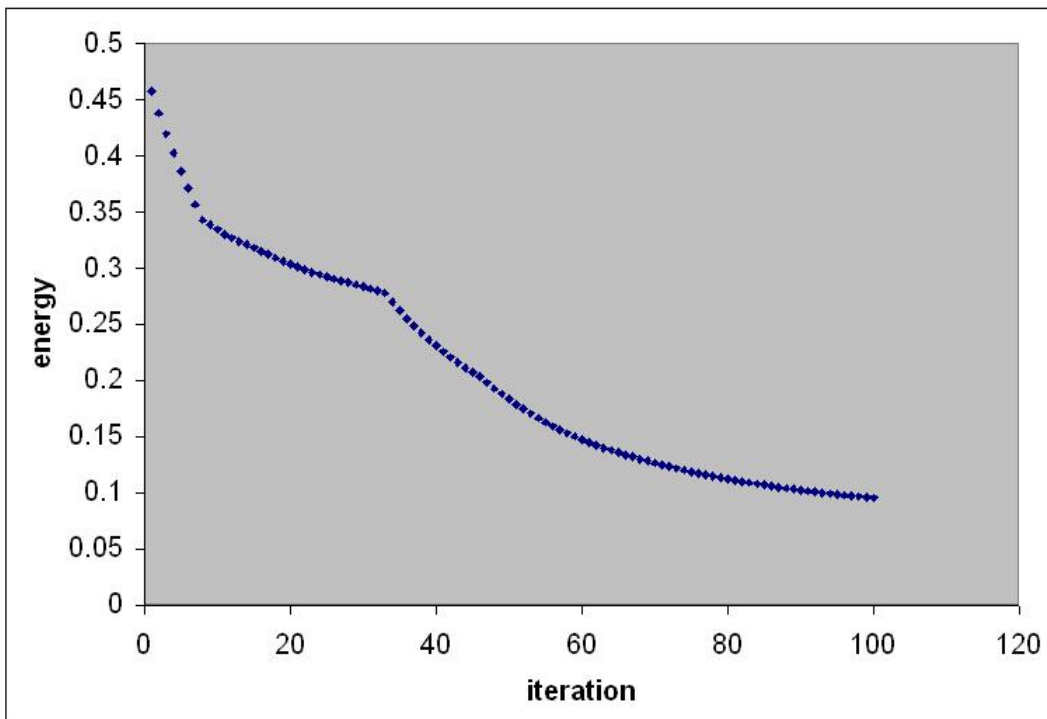
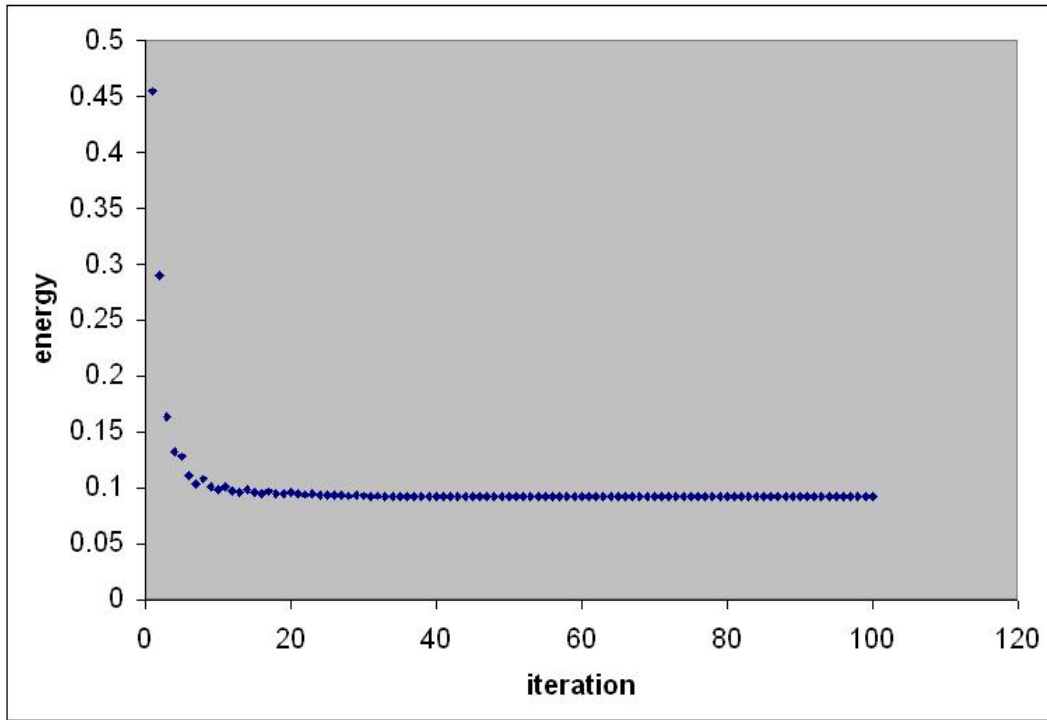
این مثال نیز نتایج چهار مثال قبل مشاهده می‌گردد. رسیدن به شکل (شکل (۸-۶)) با سرعت بیشتر در MMA و شکل نهایی با اعضا مطلوب‌تر در روش دیگر.

در نمودارها (نمودار (۸-۵)) نیز همان نتایج قبل مشاهده گردید. سرعت هم‌گرایی در MMA و جواب کمینه تر در روش دیگر، با توجه به ۲ بار بازنگری پیشرفت هم‌گرایی در روش دیگر برای کسب جواب بهینه.



شکل (۶-۸) مراحل بهینه یابی توپولوژی (سمت راست معیار بهینگی سمت چپ MMA)

نمودار (۵-۸) روند بهینه یابی توپولوژی (بالا MMA پایین معیار بهینگی )



۸-۲-۳- این برنامه با اضافه کردن قید تنش به برنامه قبلی، طراحی شد و شامل تمام زیر برنامه‌ها و ویژگی‌های برنامه قبل است بجز خروجی شکل، تا ویژگی متد MMA در داشتن چندین قید برخلاف روش‌هایی مثل معیار بهینگی، آشکار گردد.

از توضیحات تکراری در مورد این برنامه پرهیز می‌کنیم و با ارائه چند مثال سعی می‌کنیم که بیشتر به شناخت این روش و کارایی منحصر به فرد آن و انعطاف‌پذیری آن بپردازیم.

**مثال ششم)** یک تیر دو سر ساده به طول ۳ و عرض ۱ می‌باشد. با فرضیات تنش مسطح که بار گسترده بر لبه بالایی آن و با فرض مقدار ۱۰۰۰ به صورت فشاری وارد می‌گردد. مشخصات مصالح به قرار  $E=10000$  و  $V=0/3$  با شعاع چکرپورد ۰.۰۲۲ و کسر حجم ۵۰٪ و قید تنش حداکثر ۱۰۰ می‌باشد.

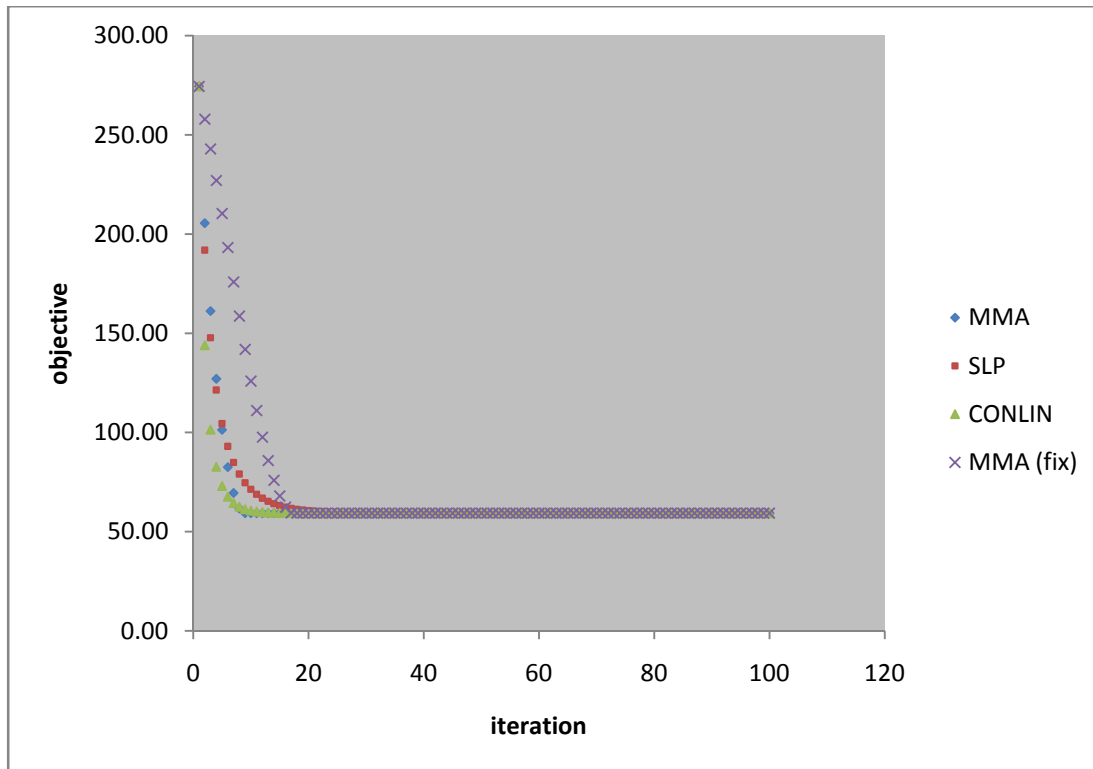
در این مثال یک بار برنامه با متد MMA اجرا می‌شود، بار دیگر با توجه به اختیار کردن عددی بزرگ برای U و عددی کوچک برای L، متد برنامه را تبدیل به متد SLP و بار دیگر با اختیار کردن عددی بزرگ برای U و  $L=0$ ، متد CONLIN را اجرا می‌کنیم.

یک بار نیز مجانب‌های متد MMA را ثابت در نظر می‌گیریم، به طوری که اولین مجانب‌های U و L که در تکرار اول محاسبه می‌شوند در تکرارهای بعدی نیز از همان مجانب‌ها استفاده می‌شود.

جدول (۱-۸) مقایسه روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف

ITE	MMA	SLP	CONLIN	MMA (fix)
۱	۲۷۴.۴۲۸۹	۲۷۴.۴۲۸۹	۲۷۴.۴۲۸۹	۲۷۴.۴۲۸۹
۲	۲۰۵.۴۸۵۳	۱۹۱.۸۸۶۱	۱۴۳.۹۳۴۵	۲۵۷.۹۰۵۶
۳	۱۶۱.۱۵۷۷	۱۴۷.۷۳۷۷	۱۰۱.۳۹۴۷	۲۴۲.۹۱۵۸
۴	۱۲۷.۰۱۲۹	۱۲۱.۴۱۱۱	۸۲.۶۴۳۲	۲۲۷.۰۰۳۹
۵	۱۰۱.۲۹۳۶	۱۰۴.۴۹۲۹	۷۳.۰۱۱۴	۲۱۰.۳۵۴۹
۶	۸۲.۴۹۹۰	۹۳.۰۲۲۴	۶۷.۶۲۰۶	۱۹۳.۲۰۸۹
۷	۶۹.۴۹۴۹	۸۴.۹۳۲۰	۶۴.۴۴۶۴	۱۷۵.۸۵۴۹
۸	۶۱.۶۷۲۲	۷۹.۰۵۳۱	۶۲.۵۱۸۴	۱۵۸.۶۱۸۶
۹	۵۹.۲۷۶۶	۷۴.۶۸۲۸	۶۱.۳۲۴۸	۱۴۱.۸۴۴۲
.		.	.	۱۲۵.۸۷۴۳
.		.	.	۱۱۱.۰۲۸۸
.		.	.	۹۷.۵۸۸۸
۱۸		۶۱.۲۹۹۹	۵۹.۳۱۲۷	۵۹.۲۷۶۶
.		.	.	
.		.	.	
.		.	.	
۳۶		۵۹.۳۲۱۲	۵۹.۲۷۶۶	
.		.	.	
.		.	.	
.		.	.	
۷۵		۵۹.۲۷۶۶		

نمودار (۸-۶) روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف



جواب بهینه متد MMA ۵۹/۲۷۶۶ و بعد از تکرار نهم هم‌گرا شد (جدول (۸-۱))، با فیکس کردن مجانب‌های U و L جواب بهینه روش MMA، برابر جواب مجانب‌های لغزان گردید ولی بعد از تکرار هجدهم، هم‌گرایی مشاهده شد.

در روش سنتی SLP، جواب بهینه بعد از تکرار هفتاد و پنجم کسب گردید و در روش CONLIN که به نوعی مادر روش MMA خوانده می‌شود جواب بهینه در تکرار سی و ششم مشاهده گردید.

همان طور که می‌بینیم (نمودار (۸-۶)) در آزمایشی که برای تمام این روش‌های تقریبی انجام شد می‌توان سرعت هم‌گرا شدن فوق‌العاده بالای روش MMA در مقایسه با بقیه را نتیجه گرفت که بخاطر انعطافی است که مجانب‌های طراحی شده برای این روش در هر سیکل به این



متد می‌دهند که البته با ثابت شدن مجانب‌ها فرض کردن یک مجانب در تمام تکرارها، هم‌گرایی را در تکرارهای بالاتری کسب کردیم.

متد SLP و CONLIN، بسیار محافظه کارانه، هم‌گرا می‌شوند و این بخاطر نداشتن مجانب‌هاست و البته وضعیت SLP از CONLIN آهسته‌تر بود که به واسطه اختیار کردن تقریب‌های خطی در هر تکرار می‌باشد.

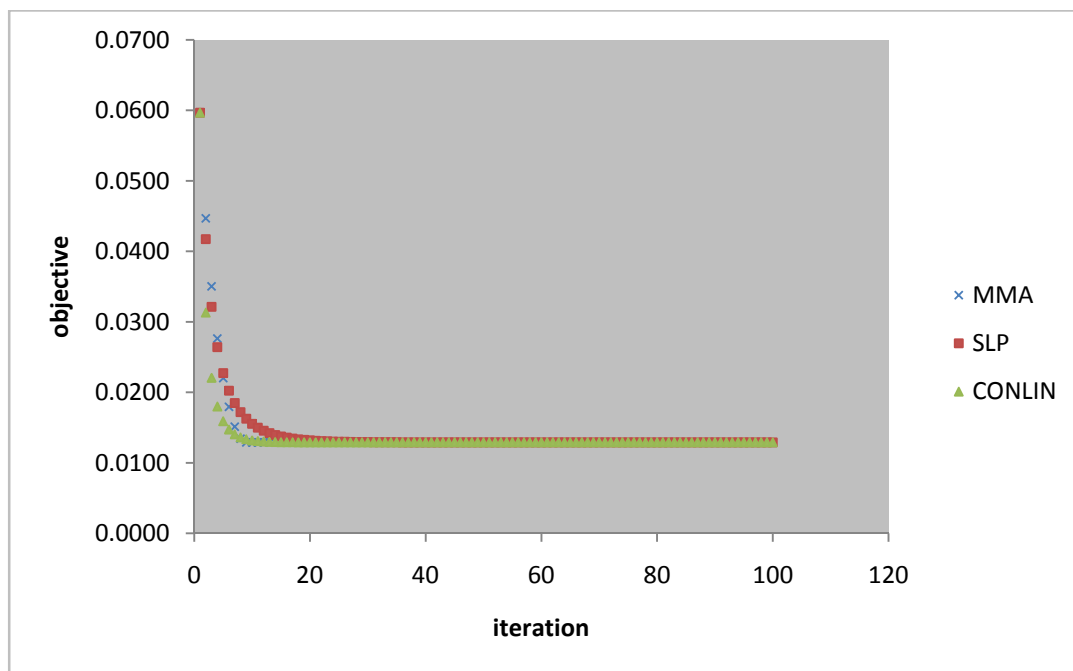
**مثال هفتم)** در این مثال یک تیر ساده که البته هر دو تکیه‌گاه را مشابه هم و مقید در هر دو جهت  $X$  و  $Y$  به طوری که تیر را نامعین می‌کنند فرض شده، مشخصات  $E$  و  $V$  و اندازه تیر مشابه مثال شش و یک نیروی کششی  $1000$  در لبه پائینی تیر در وسط، به تیر وارد می‌شود المان مورد استفاده همان المان چهار گرهی تنش مسطح برای مثال‌های قبل است.

در این مثال آزمایش بر روی تیر نامعین بواسطه روش‌های MMA، CONLIN و SLP با وجود چند قید مد نظر بود.

جدول (۸-۲) مقایسه روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف

ITE	MMA	SLP	CONLIN
۱	۰.۰۵۹۶۶۱	۰.۰۵۹۶۶۱	۰.۰۵۹۶۶۱
۲	۰.۰۴۴۶۷۳	۰.۰۴۱۷۱۶	۰.۰۳۱۲۹۲
۳	۰.۰۳۵۰۳۶	۰.۰۳۲۱۱۸	۰.۰۲۲۰۴۳
۴	۰.۰۲۷۶۱۳	۰.۰۲۶۳۹۵	۰.۰۱۷۹۶۷
۵	۰.۰۲۲۰۲۱	۰.۰۲۲۷۱۷	۰.۰۱۵۸۷۳
۶	۰.۰۱۷۹۳۵	۰.۰۲۰۲۲۳	۰.۰۱۴۷۰۱
۷	۰.۰۱۵۱۰۸	۰.۰۱۸۴۶۴	۰.۰۱۴۰۱۱
۸	۰.۰۱۳۴۰۸	۰.۰۱۷۱۸۶	۰.۰۱۳۵۹۲
۹	۰.۰۱۲۸۸۷	۰.۰۱۶۲۳۶	۰.۰۱۳۳۳۲
.		.	.
.		.	.
.		.	.
۲۴		۰.۰۱۳۰۰۹	۰.۰۱۲۸۸۷
.		.	
.		.	
.		.	
۴۹		۰.۰۱۲۸۸۷	

نمودار (۷-۸) روند بهینه یابی توپولوژی روشهای مختلف



در متد MMA، جواب بهینه کسب شده  $2 - 10 \times 1/2887$  و این بعد از سیکل نهم بود (جدول (۷-۸))، در روش سنتی SLP بعد از تکرار چهل و نهم مسأله به جواب هم‌گرا شد و در روش CONLIN بعد از بیست و چهارمین تکرار مسأله به هم‌گرایی به این عدد رسید. در این مثال نیز سرعت روش تقریبی MMA کاملاً مشهود است (نمودار (۷-۸)) و این همان انعطافی است که مجانب‌ها در هر سیکل به جواب و در واقع انتخاب تابع تقریبی جایگزین می‌دهند و از طرفی SLP به واسطه انتخاب توابع تقریبی جایگزین خطی نسبت به CONLIN محافظه‌کارانه‌تر می‌نمود.

## فصل ۹

### نتایج

در بخش اول ، برنامه ای طراحی شد که با متد MMA ، تابع هدف انرژی فضای طراحی که تیرهایی با ضخامت نازک برای کسب نتایج تنش صفحه‌ای را در حضور قید کسر حجم خاص کمینه می کرد. متغیرهای طراحی ، سطح المان های محدود از فضای مدل شده توسط اجزا محدود بودند چند مثال حل گردید.

با توجه به مثال های ارائه شده و نتایج بدست آمده توسط برنامه حل توپولوژیک تنش صفحه‌ای به روش تقریبی MMA و مقایسه نتایج ارائه شده توسط برنامه موجود به روش معیار بهینگی و با توجه به یکسان گرفتن شرایط بین دو برنامه و مثال ها ، نتایج زیر قابل رویت است:

با نگاه به شکل های بدست آمده ، موردی که در هر ۵ مثال به وضوح قابل بیان می شود ،  
ظاهرشدن سریع شکل مثال ها ، در روش MMA می باشد.

در مثال اول سرعت ظاهرشدن شکل در روش MMA کاملاً مشهود است ولی موضوعی  
که مطرح می شود در این مثال می توان گفت که تغییر قابل ذکری شکل اولیه با نهایی ندارد و در  
واقع می توان گفت که شکل نهایی بدست آمده از روش MMA برای این مثال همان شکلی است  
که در تکرار های اولیه کسب می گردد.

در روش دیگر شکل دارای فضای خالی در میان فضای طراحی می گردد ولی نقطه ضعف  
این شکل نسبت به شکل روش MMA وجود اعضای نازک در شکل می باشد ؛ با توجه به این که  
کسب اعضای نازک مطلوب ما نیست

در مثال دوم شکل ظاهر شده در روش MMA شامل اعضای محو می باشد حتی بعد از  
۱۰۰ تکرار این مشکل را تا حدودی روش دیگر نیز دارد ، باید اضافه کرد که شکل نهایی روش  
دیگر دارای اعضای نازک نیز می باشد.

در مثال سوم شکل بدست آمده از روش دیگر کاملاً مطلوب ما می باشد در صورتی که  
روش MMA اعضای محو به ما داده و تنها حسن آن سرعت شکل گیری اولیه است . نکته قابل  
ذکر برای اشکال مثال چهارم و پنجم همان نکات مورد بحث در مثال سوم می باشد .

در کل سرعت ظاهر شدن شکل در روش MMA ولی در نهایت اعضای محو و از طرفی  
شکل مطلوب تر در روش دیگر قابل تامل است.

با توجه به نمودارها ، سرعت هم گرایی در روش MMA می باشد که در کمتر از ۱۰  
تکرار بدون اینکه اختلال قابل ذکری دیده شود به عدد کمینه مورد نظرش هم گرا گردیده.

در روش دیگر نمودارها روند یکسانی ندارند و در هر مثال در تکرار های مختلف ، یک  
اختلال در هم گرایی می توان دید از طرف دیگر سرعت بسیار کمی نسبت به MMA برای هم  
گرایی دارند.

در نهایت می توان با توجه به شیب نمودار حدس زد که پس از ۱۰۰ تکرار روش دیگر قابلیت کمینه تر کردن تابع هدف را دارا باشد.

نتیجه نهایی روش دیگر ، با اختلاف ناچیزی در ۱۰۰ تکرار کمتر از روش MMA می باشد .

در بخش بعدی برنامه ای با روش MMA طراحی گردید که بتواند مسائل تنش صفحه ای را با داشتن چند قید حل کند ، این ویژگی خاص MMA در مقابل روش هایی مثل معیار بهینگی می باشد که تنها قابلیت داشتن یک قید را دارند ، از طرفی ویژگی منحصر به فرد روش MMA در تبدیل آسان آن به روش های دیگر مثل برنامه ریزی خطی تکراری (SLP) و CONLIN می باشد که این بواسطه وجود مجانب ها در روش MMA برای تعریف تابع تقریبی می باشد.

مثال اولی که ارائه گردید ، برای روش MMA ، SLP ، CONLIN امتحان شد و همچنین با ثابت نگه داشتن مجانب ها ، در واقع انتخاب مجانب فرض شده در تکرار اول برای بقیه تکرار ها انعطاف مجانب سنجیده شد.

نتیجه کلی قابل بیان اینکه در تمام این روش ها ، عدد کمینه یکسانی کسب گردید.

البته در روش های SLP ، CONLIN ، عدد نهایی با تقریب چهار عدد پس از اعشار با کمینه روش MMA برابر گردید.

سرعت روش MMA فوق العاده بود و این بواسطه انتخاب مجانب ها می نمود ، به این دلیل که با ثابت شدن مجانب ها کسب جواب کمینه با تکرار بیشتری حاصل گردید.

و نکته دیگر اینکه روش های SLP و CONLIN بسیار محافظه کارانه تر در مقابل روش MMA می نمود.

در مثال بعدی تیر نامعین با روش MMA و SLP و CONLIN مقایسه گردید و همین نتیجه مثال قبل قابل بیان بود ، یعنی سرعت MMA در مقابل محافظه کارانه بودن دو

روش دیگر ولی نهایتاً می توان به یک کمینه برای تابع هدف رسید.

در مثال های ساده ای نظیر کمینه کردن وزن خرپای سه میله ای در مقابل قید تنش ،  
که آقای سونبرگ خود ارائه داده بود همین نتایج بدست آمده توسط ما برای توپولوژی تنش  
صفحه ای حاصل گردیده بود.

در نهایت می توان این موضوعات را که برای کار جالب به نظر می رسند ذکر کرد:

-امتحان قیده‌های مختلف دیگر بر روی برنامه و سازه های پیچیده و کاربردی

-حل مساله های سه بعدی

-تعمیم به توپولوژی شکل و سایز

- تعمیم به تقریب های مرتبه بالاتر

-سازه های پوسته ای

-تحقیق بر این موضوع که آیا این روش در مسایلی با مشکل روبرو می شود؟ جمع بندی

نقاط ضعف.



## منابع و مراجع

۱ . اس.اس.رائو ، ۱۳۷۳ ، بهینه سازی (تئوری و کاربرد) ، جلد اول و دوم ، شهیدی پور ، چاپ اول ، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، مشهد

2. Alvarez, L.F. , (2000), Ph.D thesis , " *Approximation model building for design optimization using the response surface methodology and genetic programming* " , University of Bradford, UK

3. Barthelemy, J.M. ; Haftka, R.T. 1993 , " *Approximation concepts for optimum structural design - a review* " Struct . optim , 5, 129–144

4. B. Hassani, E. Hinton , " *Homogenization and Structural topology optimization* " ,1999

5. O. Sigmund, " *Design of material structure using topology optimization* " Ph.D Thesis Department of Solid Mechanics , Technical University of Denmark , 1994

6. Fadel, G.M. ; Riley , M.F. ; Barthelemy , J.F.M 1990 " *Two point exponential approximation methods for structural optimization* " , Struct . Optim . 2 ,117–124

7. Haftka , R.T. , Starnes , j , 1976 " *Applications of a quadratic extended interior penalty function for structural optimization* " , AIAA J.14 ,718–724

8. Haftka , R.T .1991 ; " *Combining local and global approximations* " , AIAA J.29 , 1523–1525

9. Haftka, R.T.1989; " *First- and Second-order constraint approximations in structural optimization* " . Comp.mech.

10. Haftka, R.T. ; Gurdal , Z .1992 ; " *Elements of structural optimization* " , Dordrecht : kluwer

11. Arora , jasbirs. : " *Introduction to optimum design* " , vol. 1

12. Kirsch,U. 1993 : " *Structural optimization (Fundamentals and*

*Applications*)", Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,1993

13. Kuester ,J.L , Mize ,J.H ,1973 : " *Optimization Techniques with Fortran* ", McGraw – Hill, New York ,1973

14. O.Sigmund : " *Numerical instabilities in Topology Optimization: A survey on procedure dealing with checkerboards , Mesh-dependencies and local minima*" , Review Article , Structural optimization, 16,pp68-75,1998

15. A.R.Diaz , O.Sigmund : " *checkerboard patterns in layout optimization* ", structural optimization, 10, pp 40-45,1995

16. R.C.Gonzales ,R.E.Woods" *Digital image processing* ", Addison Wesley longman.LTD, 1993

17. Sydow, Antje, : " *Structural Optimization of Machine Parts Considering Their Fabrication* " , M.Sc Thesis , 2003, Inst. Of struc. Mech. , Un. Of Stuttgart, germany

18. Duysinx, Pierre, : " *Layout Optimization : A Mathematical Programming Approach*", Aerospace Laboratory, Ins. Of Mech. University of Liege , Belgium,1997

19. Svanberg , K , 1987 : " *The method of moving asymptots - a new method for structural optimization* ",Int. J. Num, Meth, Eng. 24,359–373

20. Svanberg , K : " *Some modelling aspects for the fortran implementation of MMA* ", 2004, Opt. and Sys. Theory, Dep, of math. ,KTH, SE 10044, Stockholm, Sep 2004

21. Schmit , L.A ; Miura , H. 1976 : " *Approximation concepts for efficient structural synthesis* ". NASA CR -2552

22. Toropov , V.V. 2003 : " *Bradford University Research group on Engineering Optimization* ", Math. And Mech. ,Bradford, Bradford

23. Thomas ,H.L. ; Vanderplaats ,G.N. 1991 : " *An improved approximation for stress constraints in plate structures* ". Proc. Opti 91 (held in Boston, MA)

24. Vanderplaats ,G.N ; Salajegheh ,E .1989 : " *A new approximation method for stress constraints in structural synthesis* ". AIAA J. 27,352–358

25. Vanderplaats ,G.N ,1993 : " *DOT user`s manual* " Goleta, GA:VMA Engineering

26. Vanderplaats G.N ,1984 : " *Numerical Optimization Techniques For Engineering Design* ", McGraw - Hill ,N.Y. ,1984

# *Topology optimization of plane stress problems by using the asymptotic approximation methods*

*Soroosh Cheraghi*

## **Abstract**

In some problems Applying heuristic methods are tedious and sometimes inoperative and specially in structural optimization that we deal with high scaled structures are very expensive.

The unsuitable reasons these methods are, high design variables, to get non-linear functions, or implicit functions. It causes to tabernacle approximating methods while it doesn't damage main problems.

A method for structural optimization should be flexible and general. It should be able to handle not only element sizes as design variables, but also, for instance, shape variables and material orientation angles. It should be also be able to handle 'all kinds' of constraints, provided only that the derivatives of the constraint functions with respect to the design variables could be calculated. Thus, the method should be able to handle general non-linear programming problems.

Prof. Krister Svanberg believe that these requirements and wishes are to a rather large extent met by the method of moving asymptotes (MMA) and MMA is easy to implement and use.

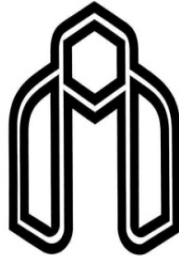
Here, we try to explain general and approximating method in optimization specially MMA, Shortly.

Then we present a program by FORTRAN by using MMA for solution of topology optimization of plane stress problems and compare its result with optimality criteria.

Then we present a program with stress constraint and we show the influence of changing parameters on result.

Finally we compare our program with traditional method such as SLP and approximating method such as CONLIN by changing in the code of MMA.

Keywords: Approximation Methods – Topology Optimization – Plane Stress –Method of Moving Asymptote ( MMA )



Shahrood University of Technology  
Department of Civil Engineering

# Topology optimization of plane stress problems by using the asymptotic approximation methods

THE THESIS  
SUBMITTED AS A PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS  
M.Sc Thesis in Structural Engineering

**Soroosh Cheraghi**

Supervisor  
**Dr. Behrooz Hassani**

jan 2009