بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده عمران

گروه مهندسی آب و محیط زیست - گرایش هیدرولیک

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

مدل سازی جریان غیرماندگار حاوی سیال غیر نیوتنی با در نظر گرفتن اندرکنش سیال سازه در سیستم لوله

علی مجد

استاد راهنما

دکتر احمد احمدی

اساتید مشاور

دکتر علیرضا کرامت

دکتر محمود نوروزی

شهریور ماه ۹۴

دانشگاه شاهرود

دانشکده مهندسی عمران

گروه مهندسی آب و محیط زیست

رساله دکتری آقای علی مجد

تحت عنوان: مدل سازی جریان غیرماندگار حاوی سیال غیر نیوتنی با در نظر گرفتن اندرکنش سیال سازه در سیستم لوله

در تاریخ ۱۳۹۴/۶/۲۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه بسیار خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر احمد احمدی		نام و نام خانوادگی: دکتر علیرضا کرامت	
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمود نوروزی	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر بهروز حسنی		نام و نام خانوادگی: دکتر سعید گلیان	
نام و نام خانوادگی: دکتر محسن شاه مردان			
نام و نام خانوادگی: رامین امینی			

تعهد نامه

اینجانب علی مجد دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی عمران - هیدرولیک دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شـاهرود نویسنده رساله " مدل سازی جریان غیرماندگار حاوی سیال غیر نیوتنی با در نظر گرفتن اندرکنش سیال سازه در سیستم لولـه " تحت راهنمائی دکتر احمد احمدی به عنوان استاد راهنمای اول متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصا لت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه / رساله تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی یا امتیازی در هیج جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام <<دانشگاه صنعتی شاهرود>> و یا <<shahrood university of technology>> به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه / رساله رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

✷متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیرشده پایان نامه / رساله وجود داشته باشد.

تقدیم به

همسرم عزیزم که در تمامی این سال ها باتمامی وجودپذیرای همه سختی ها بوده و

امید روزهای روشن آینده است،

خانواده ام که همیشه پشتیبانی هایشان مایه دلگرمی ام بوده است.

تشکر و قدردانی

سپاس خدا را که همواره بیش از آن چه از او خواسته‌ام عطا فرموده است. همچنین از تمامی کسانی که من را در تهیه این رساله یاری کردند، بدین وسیله قدردانی می‌نمایم:

دکتر احمد احمدی، به خاطر آموزش‌ها، رهنمودها، حمایت‌های پیوسته، تشویق‌ها و دلگرمی‌هایشان در تمام دوران دانشجویی دکتری‌ام؛

دکتر علیرضا کرامت، به خاطر ارایه نظرات پربار در زمینه حل مسایل موجود و مباحث مربوطه و نیز به خاطر دوستی و حمایت‌هایش در تمامی مدت آشناییمان؛

دکتر محمود نوروزی، دکتر رامین امینی، دکتر سید فضل الله ساغروانی و دکتر بهروز حسنی که از رهنمودهای علمی آنها سود برده‌ام.

چکیده

در سیستم لوله‌ها یک تغییر ناگهانی در یکی از پارامترهای جریان سبب ایجاد نوسانات فشار خواهد شد، که به آن جریان غیرماندگار گفته می‌شود. در مباحث مربوط به جریان‌های غیرماندگار در لوله یکی از فرضیات اساسی که همواره مورد استفاده قرار گرفته، فرض وجود سیال نیوتنی در سیستم بوده است. در این تحقیق با صرف نظر کردن از این فرض معادلات جریان غیرماندگار در لوله از ابتدا بررسی گردید و در استخراج معادلات فرض شده است که سیال موجود در سیستم، سیالی غیرنیوتنی باشد. تفاوت اساسی که در استخراج معادلات با روش‌های گذشته وجود دارد عدم جایگزینی رابطه خطی تنش برشی سیال نیوتنی با نرخ برش است. و در ادامه استحصال معادلات حاکم، تاثیر روابط ساختاری سیال غیرنیوتنی لحاظ شده است.

از آن جا که معادلات سازه مستقل از رفتار غیرنیوتنی سیال می‌باشد، لذا از معادلات موجود در این بخش استفاده گردید. البته تغییرات اندکی جهت هماهنگی با مدل سازی دو بعدی صورت گرفت. پس از بدست آوردن معادلات حاکم بر مسئله می‌بایست با استفاده از روش‌های عددی به حل این مجموعه معادلات اقدام نماییم. که در این راستا جهت اطمینان از روش‌ها و الگوریتم‌های حل معادلات جریان غیرماندگار از دو روش عددی استفاده گردید.

در روش اول برای محاسبه انتگرال گیری زمانی از روش انتگرال گیری رانج کوتای مرتبه چهارم استفاده شد. همچنین برای گسسته سازی عبارت‌های مکانی از فرم تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده گردید. جهت از بین بردن این نوسانات عددی عبارت‌های مستهلک کننده مرتبه دوم به معادلات پایه اضافه گردید. در روش دوم، روش خطوط مشخصه دو بعدی به کار گرفته شد. که بخش‌های سهموی آن توسط تفاضل مرکزی مرتبه دوم گسسته سازی گردید. همچنین روش اجزا محدود برای حل

معادلات سازه استفاده شد. معادلات سازه با معادلات هیدرولیکی جریان به صورت کوپله تحلیل شده‌اند.

پس از راست آزمایی روش‌های عددی با نتایج آزمایشگاهی موجود، اثرات سیال غیرنیوتنی مورد تجزیه و تحلیل گرفت که نشان دهنده تغییرات قابل توجه ای در تاریخچه زمانی فشار و همچنین تغییرات عمده ای در توزیع پروفیل سرعت لزجت سیال می‌باشد. از آن جمله می‌توان به اثر افزایش فشار و اثر لاین پکینگ در اثر افزایش نازک شدگی برش اشاره نمود. بر این اساس در نظر گرفتن اثرات غیرنیوتنی سیال اجتناب ناپذیر خواهد بود. همچنین اثرات اندرکنش سیال سازه نیز تاثیر قابل توجه و فزاینده‌ای در نوسانات فشار ایجاد خواهد کرد که نشان دهنده لزوم بررسی دقیق و اعمال اثرات اندرکنش سیال سازه می‌باشد.

کلمات کلیدی: جریان غیرماندگار لوله، سیال غیرنیوتنی تعمیم یافته، اندرکنش سیال سازه

لیست مقالات چاپ شده

Majd, Ali, A. Ahmadi, and A. Keramat. "Investigation of Non-Newtonian Fluid Effects During Transient Flows in a Pipeline." *Journal of Mechanical Engineering* (2015): 12.

احمدی ا.، مجد ع.، نوروزی م.، (۱۳۹۴) "بررسی اثر سیال غیرنیوتنی در جریان غیرماندگار در سیستم لوله‌ها"، *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه ها و شاره ها* شماره ۱، دوره ۵، صفحه ۲۱۱-۲۱۹

مجد ع.، احمدی ا. (۱۳۹۴)، "تحلیل جریان غیرماندگار سیال شبه پلاستیک در سیستم لوله"، دهمین کنگره بین‌المللی مهندسی عمران، تبریز

احمدی ا.، مجد ع. (۱۳۹۱)، "مقایسه اثر اصطکاک غیرماندگار در حالت‌های مختلف جریان غیرماندگار" نهمین کنگره بین المللی مهندسی عمران، اصفهان

احمدی ا.، مجد ع. (۱۳۹۰)، "مقایسه رابطه اصطکاک غیرماندگار واردی-براون و زیلک در بهبود عملکرد اصطکاک غیرماندگار در مدل‌های جدایی ستون مایع" ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، سمنان

آزادی ح.، احمدی ا.، مجد ع.، کرامت ع. (۱۳۹۰) "تحلیل دینامیکی شبکه‌های لوله توزیع سیال با در نظر گرفتن پدیده جدایی ستون مایع" ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، سمنان

فهرست

۱ مقدمه ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- اهداف مطالعه حاضر ۳

۱-۳- فصل بندی رساله ۴

۲ پیشینه و کلیات ۵

۲-۱- جریان غیرماندگار کلاسیک ۶

۲-۱-۱- جدایی ستون سیال ۹

۲-۱-۲- اصطکاک غیرماندگار ۱۰

۲-۱-۳- روش‌های حل معادلات جریان غیرماندگار ۱۲

۲-۲- کلیاتی درباره سیالات غیرنیوتنی ۱۵

۲-۳- تحلیل تداخلی سیال - سازه ۲۱

۲-۳-۱- طبقه بندی انواع مدل سازی‌های کوپله ۲۲

۲-۳-۲- انواع مکانیزم‌های کوپله ۲۳

۲-۳-۳- اثر تداخلی پواسن ۲۴

۲-۳-۴- اثر تداخلی تقاطع (اتصال) ۲۵

۳ معادلات حاکم و مدل‌های ریاضی ۲۹

۳-۱- مقدمه ۳۰

۳-۲- معادله پیوستگی در دستگاه مختصات استوانه ای ۳۱

۳-۳- معادله ممنتوم در دستگاه مختصات استوانه ای ۳۵

۳-۳-۱- معادله ممنتوم در راستای شعاعی ۳۶

۳-۳-۲- معادله ممنتوم در راستای زاویه ای ۳۷

۳-۳-۳- معادله ممنتوم در راستای محوری ۳۷

۳-۴- روابط اصطکاک غیرماندگار ۳۸

۳-۴-۱- تخمین توابع وزنی ۴۱

۳-۵- سیالات غیرنیوتنی ۴۳
۳-۵-۱- رفتار شناسی و دسته بندی سیال غیرنیوتنی ۴۳
۳-۵-۲- روابط حاکم بر رفتار سیالات غیر نیوتنی ۵۰
۳-۶- معادلات اندرکنش سیال سازه ۵۷
۳-۶-۱- معادلات پیوستگی و ممنتوم اندرکنش سیال سازه ۵۷
۳-۶-۲- معادلات ارتعاش محوری سازه ۶۱
۳-۶-۳- صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در ارتعاش محوری ۶۶
۳-۶-۴- شرایط مرزی ۶۸

۴ روش‌های عددی ۷۱
۴-۱- مقدمه ۷۲
۴-۲- روش تفاضل محدود ۷۲
۴-۲-۱- توضیح روش رانج کوتا و روابط استخراج شده ۷۶
۴-۲-۲- عبارت‌های کاهنده مجموع تغییرات ۷۸
۴-۲-۳- فرم گسسته معادله پیوستگی در روش رانج کوتا ۸۱
۴-۲-۴- نحوی محاسبه عبارت‌های کاهنده در معادله پیوستگی ۸۲
۴-۲-۵- حل معادله ممنتوم به روش رانج کوتا ۸۴
۴-۲-۶- شرایط مرزی ۸۷
۴-۳- روش خطوط مشخصه ۸۸
۴-۳-۱- استخراج معادلات مشخصه در سیستم مختصات دو بعدی ۸۹
۴-۳-۲- شرایط مرزی روش خطوط مشخصه ۹۸
۴-۴- روش حل معادلات سازه و اندرکنش سیال سازه ۹۸

۵ بررسی، مقایسه و تحلیل نتایج ۱۰۰
۵-۱- مقدمه ۱۰۱
۵-۲- بررسی صحت مدل‌های عددی ۱۰۱
۵-۲-۱- بررسی اثر شبکه بندی نقاط محاسباتی در روش رانج کوتا ۱۰۶
۵-۲-۲- بررسی نتایج آزمایشگاهی و عددی افت فشار در بازه طولانی مدت ۱۰۹

۵-۲-۳- مقایسه نتایج روش عددی تفاضل محدود دو بعدی با نتایج عددی یک بعدی...... ۱۱۱
۵-۲-۴- نتایج روش خطوط مشخصه.. ۱۱۱
۵-۳- بررسی اثرات اعمال سیال غیرنیوتنی.. ۱۱۴
۵-۳-۱- نتایج مدل تفاضل محدود دو بعدی رانج کوتا ۱۱۵
۵-۳-۲- نتایج مدل عددی خطوط مشخصه ۱۲۰
۵-۳-۳- مدل پاور لاو ۱۲۲
۵-۳-۴- تاریخچه تنش برشی ۱۲۵
۵-۴- مدل اندرکنش سیال سازه.. ۱۲۶

۶ خلاصه، نتیجه گیری و پیشنهادات ۱۳۰
۶-۱- خلاصه.. ۱۳۱
۶-۲- نتیجه گیری ۱۳۳
۶-۳- پیشنهادات ۱۳۵

فهرست اشکال

شکل ۳-۱ دسته بندی سیالات نیوتنی تعمیم یافته ۴۵

شکل ۳-۲ نمودار شماتیک رفتار سیال با نازک شدگی برش ۴۶

شکل ۳-۳ نمایش مقادیر مختلف لزجت ظاهری برای محلول پلیمری پلی اکلیریمید ۴۷

شکل ۳-۴ تغییرات لزجت سیال با نرخ برش در مدل قانون توانی ۵۶

شکل ۳-۵ طرح نشان دهنده متغیرهای تعریف شده در توصیف تنش بر دیواره لوله، نمای جانبی (صفحه *z-r*) ۶۳

شکل ۳-۶ طرح نشان دهنده متغیرهای تعریف شده در توصیف تنش بر دیواره لوله، نمای مقطع لوله (صفحه $r-\phi$)۶۴

شکل ۴-۱ استفاده از شیب نقطه میانی در روش رانج کوتا ۷۷

شکل ۴-۲ عملکرد تابع سویچ به ازای مقادر مختلف *r* ۸۱

شکل ۴-۳ شبکه در راستای شعاعی ۹۱

شکل ۴-۴ شبکه خطوط مشخصه ۹۲

شکل ۵-۱ تاریخچه فشار در محل شیر به روش رانج کوتا و نتایج آزمایشگاهی هلمبو........................ ۱۰۳

شکل ۵-۲ تاریخچه فشار در نقطه میانی به روش رانج کوتا و نتایج آزمایشگاهی هلمبو ۱۰۳

شکل ۵-۳ تاریخچه سرعت میانگین در دو نقطه از لوله توسط روش عددی رانج کوتا ۱۰۴

شکل ۵-۴ پروفیل سرعت در عرض مقطع در نقطه میانی لوله با استفاده از روش رانج کوتا...................... ۱۰۵

شکل ۵-۵ اثر تعداد نقاط محاسباتی در راستای محوری لوله به ازا ۵۰ و ۱۰۰ نقطه ۱۰۶

شکل ۵-۶ اثر حذف عبارت‌های مستهلک کننده عددی به ازا تعداد نقاط محاسباتی ۵۰ (بالا) و ۱۰۰ (پایین) ۱۰۷

شکل ۵-۷ مقایسه اثر تعداد نقاط انتخابی در راستای شعاعی لوله ۱۰۸

شکل ۵-۸ اثر حذف عبارت‌های مستهلک کننده عددی به ازا تعداد نقاط محاسباتی ۵۰ (بالا) و ۱۰۰ (پایین) ۱۰۹

شکل ۵-۹ مقایسه نتایج برونون و همکاران(راست) با نتایج مدل عددی رانج کوتا مطالعه حاضر(چپ) ۱۱۰

شکل ۵-۱۰ مقایسه عددی نتایج تفاضل محدود دو بعدی با یک بعدی همراه مدل اصطکاک غیرماندگار ۱۱۱

شکل ۵-۱۱ تاریخچه فشار در محل شیر و نقطه میانی با استفاده از روش خطوط مشخصه دو بعدی ۱۱۲

شکل ۵-۱۲ پروفیل سرعت در مقطع میانی در زمان‌های تناوب با استفاده از روش خطوط مشخصه دو بعدی ۱۱۳

شکل ۵-۱۳ تاریخچه فشار در محل شیر با استفاده از روش‌های خطوط مشخصه و تفاضل محدود دو بعدی ۱۱۳

شکل ۵-۱۴ تاریخچه فشار در محل نقطه میانی با استفاده از روش‌های خطوط مشخصه و تفاضل محدود دو بعدی۱۱۳

شکل ۵-۱۵ نمودار تغییرات لزجت بر حسب نرخ برش ۱۱۵

شکل ۵-۱۶ تاریخچه فشار در محل شیر با در نظر گرفتن مدل غیر نیوتنی کراس با استفاده از روش رانج کوتا..... ۱۱۶
شکل ۵-۱۷ تاریخچه فشار در محل نقطه میانی با در نظر گرفتن مدل کراس با استفاده از روش رانج کوتا......... ۱۱۶
شکل ۵-۱۸ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 50\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش رانج کوتا........... ۱۱۷
شکل ۵-۱۹ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 20\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش رانج کوتا........... ۱۱۷
شکل ۵-۲۰ توزیع تنش برشی در میانه لوله در سطع مقطع برای سیال نیوتنی.................................. ۱۱۹
شکل ۵-۲۱ توزیع تنش برشی در مقطع لوله در محل نقطه میانی لوله در مدل کراس ۱۱۹
شکل ۵-۲۲ توزیع لزجت سیال در مقطع لوله در محل نقطه میانی لوله در مدل کراس ۱۱۹
شکل ۵-۲۳ تاریخچه فشار در محل شیر با در نظر گرفتن مدل کراس با استفاده از روش MOC......................... ۱۲۰
شکل ۵-۲۴ تاریخچه فشار در محل نقطه میانی با در نظر گرفتن مدل کراس با استفاده از روش MOC ۱۲۰
شکل ۵-۲۵ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 50\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش MOC ۱۲۱
شکل ۵-۲۶ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 20\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش MOC ۱۲۱
شکل ۵-۲۷ تغییرات لزجت سیال بر حسب نرخ برش... ۱۲۲
شکل ۵-۲۸ تاریخچه زمانی مقادیر فشار با در نظر گرفتن مدل کراس در محل شیر (چپ) و گره میانی (راست) ... ۱۲۳
شکل ۵-۲۹ پروفیل سرعت در نقطه میانی در زمان‌های مختلف با روش رانج کوتا ۱۲۴
شکل ۵-۳۰ توزیع تنش برشی در مقطع میان لوله در مدل پاورلاو (راست *n=0.6* ، چپ *n=0.8*) ۱۲۵
شکل ۵-۳۱ توزیع لزجت سیال در مقطع میان لوله در مدل پاورلاو (راست *n=0.6* ، چپ *n=0.8*) ۱۲۵
شکل ۵-۳۲ تاریخچه زمانی مقادیر تنش برشی دیواره در گره میانی ۱۲۶
شکل ۵-۳۳ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله اتصال برای سیال نیوتنی ۱۲۷
شکل ۵-۳۴ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله پواسون برای سیال نیوتنی................................. ۱۲۷
شکل ۵-۳۵ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر همزمان کوپله اتصال و پواسون برای سیال نیوتنی................. ۱۲۸
شکل ۵-۳۶ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله اتصال برای سیال غیرنیوتنی................................. ۱۲۹
شکل ۵-۳۷ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله پواسون برای سیال غیرنیوتنی ۱۲۹
شکل ۵-۳۸ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر همزمان کوپله اتصال و پواسون برای سیال نیوتنی................. ۱۲۹

فهرست جداول

جدول ۳-۱ ضرایب تابع نمایی در تابع وزنی جریان آرام ۴۲
جدول ۵-۱ مشخصات مدل آزمایشگاهی هلمبو و رئلو ۱۰۱
جدول ۵-۲ مشخصات مدل آزمایشگاهی برونون و همکاران ۱۰۹

فهرست علائم

تانسور تنش	$\mathbf{T}$
زمان	t
تانسور گرادیان سرعت	$\mathbf{v}$
مولفه‌های سرعت سیال	v_i
محورهای دستگاه مختصات	x_i
نرخ برش در جریان‌های برشی	$\dot{\gamma}_1$
زبری لوله	ε
کرنش جداره لوله در مختصات استوانه‌ای	$\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$
لزجت سیال غیرنیوتنی	η
لزجت سیال غیرنیوتنی در نرخ برش صفر	η_0
چگالی سیال	ρ
چگالی جداره لوله	ρ_t
تنش جاری شدن	σ_Y
تنش‌های جداره لوله	$\sigma_z, \sigma_\phi, \sigma_r$
تنش‌های میانگین جداره لوله	$\bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_\phi, \bar{\sigma}_r$
مولفه‌های تنش	τ_{ij}
لزجت سیال نیوتنی	μ
لزجت سینماتیکی سیال	v
ضرایب مدل راینر ریولین	ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3
سطح مقطع لوله	A
نیروهای حجمی	B_i
سرعت انتشار موج در سیال	c
سرعت انتشار موج در جداره لوله	c_t
تانسور نرخ تغییر شکل	$\mathbf{D}$
قطر داخلی لوله	D
ضریب الاستیسیته لوله	E
ضخامت جداره لوله	e
بردارهای یکه دستگاه مختصات	$\mathbf{e}$
ضریب اصطکاک دارسی وایسباخ	f
ضریب اصطکاک دارسی در حالت ماندگار	f_0
ضریب اصطکاک دارسی در حالت غیرماندگار	f_u
شتاب گرانش	g
فشار پیزومتری	H
مدول بالک سیال	K
ضرایب مدل کراس	k, n
ضرایب مدل سیال قانون توانی	m, n
فشار میانگین سطح مقطع لوله	P
فشار سیال	p
دبی سیال در لوله	Q
شعاع لوله	R
محورهای مختصات استوانه ای	r, θ, z

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

جریان غیرماندگار جریانی است که خصوصیات آن در هر نقطه با زمان تغییر کند. زمانیکه جریان از یک حالت ماندگار به حالت ماندگار دیگری تغییر شرایط می‌دهد، جریان غیر ماندگار ما بین را جریان میرا (گذرا) می‌نامند. ضربه قوچ یا چکش آبی نوعی جریان میرا است که در خطوط لوله می‌تواند در اثر بسته شدن شیرها یا توقف ناگهانی پمپ و یا هر گونه تغییر سرعت، که ممکن است ناشی از یک گرفتگی باشد، ایجاد شود.

مباحث مربوط جریان‌های غیرماندگار در لوله‌ها از اواخر قرن نوزدهم میلادی مطرح بوده‌اند[۱] و بسیاری از مباحث بنیادی آن در قرن بیستم شناسایی و مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته‌اند. برخی از مسایلی که در این زمینه دارای اهمیت هستند شامل این موارد می‌باشند: تشکیل معادلات حاکم اساسی و بررسی انتشار امواج فشاری در سیال و جداره لوله، پدیده جدایی ستون سیال، بررسی اثرات اصطکاک غیرماندگار، اثر جنس جداره لوله، اثرات ارتعاش سازه لوله که به عنوان اندرکنش سیال سازه شناخته می‌شود و اثرات وجود روزنه در لوله که به آن پدیده نشت اطلاق می‌گردد.

یکی از فرضیات اساسی که در تمامی موارد بالا مشترک می‌باشد، فرض سیال نیوتنی است. همه مطالعات و آزمایشاتی که تا کنون در این زمینه انجام شده است به علت آن که اهداف و موضوعات مورد نظر مرتبط با سیالات نیوتنی به خصوص آب بوده است، لذا فاصله ای بین موضوع جریان غیرماندگار لوله و مباحث گسترده سیالات غیرنیوتنی ایجاد شده است. این فاصله سبب شده که امکان استفاده از تجربیات و امکانات هر کدام از زمینه‌ها از بین رود.

۱-۲- اهداف مطالعه حاضر

در این رساله سعی شده تا با از میان برداشتن فرض پایه ای سیال نیوتنی ارتباطی بین دو حوزه جریان‌های غیرماندگار لوله و مباحث سیالات غیرنیوتنی برقرار کرد، تا با توجه به رشد روز افزون علم و تکنولوژی بتوان از قابلیت‌های موجود هر کدام از این زمینه ها، در رفع موانع و ایجاد طرح‌های نو در مباحث علمی و صنعتی بهره جست.

برای رسیدن به این هدف ضروری است تا با دقت فراوان در مبانی مطالعات و آزمایشات انجام شده، روابط و معادلات پایه را با توجه به فرض جدید سیال غیرنیوتنی از ابتدا بازنویسی نمود. در جریان‌های غیرماندگار لوله با توجه به این که برخی از مشخصات مسئله مانند لزجت سیال در سطح مقطع ثابت می‌باشد لذا بسیاری از معادلات و روش‌های حل به صورت یک بعدی ارائه شده‌اند. به همین دلیل ضروری بود تا علاوه بر فرض لزجت متغیر سیال و محاسبه مقدار آن معادلات جریان را با فرض سیال غیرنیوتنی به صورت چند بعد بدست آورده شود. این معادلات حاکم پایه ای برای بخش‌های بعدی قرار گرفته‌اند.

یکی دیگر از اهداف رساله بررسی اثر ارتعاش جداره ی لوله بوده است. از آن جا که معادلات حاکم بر جداره لوله مستقل از معادلات ساختار سیال است و فقط متغیرهای جریان به سازه وارد می‌شود لذا در معادلات سازه تغییر بنیادینی ایجاد نمی شود و می‌توان با اصلاحات اندکی از روابط پیشین بهره برد. با استفاده از این توصیف اثرات ناشی از اندرکنش سیال سازه در معادلات جریان غیر ماندگار سیال غیرنیوتنی اعمال شده است. اعمال اثرات جدار لوله در معادلات هیدرولیک همچون معادلات حاکم بر سیال نیوتنی به صورت کوپله می‌باشد. با حل معادلات سازه و هیدرولیک به صورت کوپله، می‌توان به نتایج مورد نظر دست یافت.

سپس با استفاده از دو روش عددی متخلف معادلات استخراج شده مذکور، بر خلاف روش‌های یک بعدی معمول به صورت دو بعدی حل شده، و در نهایت نتایج بدست آمده با استفاده از این دو روش عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند.

۱-۳- فصل بندی رساله

در فصل اول رساله چنانچه گذشت، مقدمه و اهداف مطالعه آورده شده است. در فصل دوم کلیات موضوع رساله به همراه مروری بر مطالعات گذشته سایر محققین آورده شده است. این فصل در سه بخش کلیات جریان غیرماندگار سیال نیوتنی، بررسی مطالعه سیالات غیرنیوتنی و اندرکنش سیال سازه جمع آوری گردیده است. معادلات حاکم بر جریان غیرماندگار سیال غیرنیوتنی در فصل سوم استخراج شده است. در ادامه این فصل درباره روابط ساختاری سیال غیرنیوتنی بحث شده و در انتهای این فصل معادلات اندرکنش سیال سازه ارائه گردیده است. در فصل چهارم با استفاده از دو روش عددی تفاضل محدود رانج کوتا و خطوط مشخصه به صورت دو بعدی معادلات بدست آمده حل شده‌اند. در فصل پنجم نیز نتایج حاصل از الگوریتم‌های حل را ابتدا راست آزمایی نموده، سپس به تجزیه و تحلیل نتایج بدست آمده پرداخته شده است. در فصل ششم و انتهایی خلاصه ای از مطالعات و تحقیقات انجام شده در این پژوهش گنجانده شده و در نهایت نتایج کلی رساله و پیشنهادات برای تحقیقات بیشتر ارائه گردیده است.

فصل دوم

پیشینه و کلیات

۲-۱- جریان غیرماندگار کلاسیک

مثال‌های متعددی از کاربردهای مفید و موثر جریان غیرماندگار قابل بیان است. از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. جریان متناوب در رگ ها، خطوط انتقال و توزیع شبکه‌های آبرسانی شهری و نیروگاه‌های برق آبی، نیروگاه‌های هسته ای، جریان در مخازن موقت سیستم‌های گاز طبیعی تحت فشار، مسایل موجود در کارخانه‌ها و صنایع شیمیایی و بسیاری موارد دیگر، که معمولا این پدیده اثر مخرب و تعیین کننده‌ای در طراحی‌ها و کنترل انواع سیستم‌ها دارا می‌باشد[۱].

موضوع جریان غیرماندگار مایعات خصوصا آب از اواسط قرن نوزدهم میلادی مورد توجه قرار گرفت[۱] و در میانه قرن بیستم با توسعه زیر ساخت‌ها و صنایع نیاز به تحلیل‌ها و طراحی‌های دقیق‌تری احساس گردید. بر این اساس هم اکنون برای تحلیل جریان گذرا[1] در سیستم‌های لوله مفاهیم کاملا بسط داده شده ای بر پایه اصول مکانیک سیالات وجود دارد.

در مباحث مربوط به جریان سیالات به طور کلی می‌توان تعاریف و دسته بندی‌های زیر را انجام داد. به جریانی ماندگار گفته می‌شود که تغییری در شرایط جریان در یک نقطه در زمان‌های مختلف صورت نگیرد در حالی که در جریان غیرماندگار مشخصات جریان در یک نقطه با زمان متغیر خواهد بود. عبارات ضربه قوچ (چکش آبی)[2] و جریان گذرا عباراتی مترادف هستند که معمولا برای توصیف جریان غیرماندگار سیال در خطوط لوله به کاربرده می‌شوند، که سابقا محدود به سیال آب بوده است. به همین علت در حال حاضر در برخی از مطالعات جدید عبارت چکش سیال[3] مورد استفاده قرار

---

[1] *Transient state flow*

[2] *Water hammer*

[3] *Fluid hammer*

می‌گیرد. جریان متناوب ماندگار[1] یا جریان تناوبی[2] و یا جریان متناوب[3] به جریاناتی اطلاق می‌گردد که مشخصات جریان در بازه‌های زمانی ثابت تکرار می‌شوند. همچنین در تحلیل جریان غیرماندگار به مسائلی که سیال به صورت غیرقابل تراکم و دیواره ی مجرا به صورت صلب در نظر گرفته شود، سرج[4] گفته می‌شود[۱].

همان طور که بیان شد جریان غیرماندگار جریانی است که خصوصیات آن در هر نقطه با زمان تغییر کند. زمانی که جریان از یک حالت ماندگار به حالت ماندگار دیگری تغییر شرایط می‌دهد، جریان غیرماندگار ما بین را جریان میرا (گذرا) می‌نامند. ضربه قوچ در خطوط لوله می‌تواند در اثر بسته شدن شیرها یا توقف ناگهانی پمپ ایجاد شود. به عنوان مثال فرض می‌شود که شیر پایین دست خط لوله در زمان $t = t_0$ کاملاً باز و آب با سرعت V_0 در حال حرکت باشد. در این لحظه شیر بطور ناگهانی بسته می‌شود. در نتیجه بسته شدن شیر، سرعت جریانی که از شیر عبور می‌کند، بطور ناگهانی به صفر می‌رسد و بر اثر تبدیل انرژی جنبشی به انرژی فشاری، فشار در پشت شیر افزایش می‌یابد. این افزایش فشار باعث می‌شود که یک موج فشاری به سمت بالا دست شروع به حرکت کند. موج فشاری در محل مخزن منعکس خواهد شد و مابین شیر و مخزن به حرکت رفت و برگشتی خود ادامه خواهد داد. ولی به علت تلفات ناشی از اصطکاک، این موج در حین حرکت مستهلک می‌گردد و بالاخره در زمان $t = t_1$ فشار در تمامی خط لوله مساوی با ارتفاع نظیر فشار مخزن خواهد شد و جریان کاملاً متوقف می‌شود. بنابراین زمانیکه $t < t_0$ و $t_1 < t$ باشد، مشخصات جریان نسبت به زمان ثابت است و جریان ماندگار محسوب می‌گردد. ولی وقتی که $t_0 < t < t_1$ باشد شرایط در حال تغییر از

---

[1] *Steady oscillatory flow*

[2] *Periodic flow*

[3] *Pulsatile flow*

[4] *Surge*

وضعیت اولیه به وضعیت نهایی است و جریان میرا خواهد بود.

در خلال ربع قرن اول قرن بیستم اکثر قریب به اتفاق مطالعات انجام شده در قاره اروپا بوده است. اولین مفاهیمی که مورد بررسی قرار گرفت مربوط به مبحث سرج است که توسط میچد[1] [۲] و جکفسکی[2][۳] منتشر شده است که آزمایشات جکفسکی در سال‌های ۱۸۹۷ تا ۱۸۹۸ در مسکو انجام شده است. همچنین او در همان سال‌ها قانون محاسبه مقدار فشار در اثر بستن آنی شیر را برای سیستم ساده شیر لوله مخزن بدست آورد. این قانون بیان می‌دارد که میزان افزایش فشار در اثر بستن آنی شیر از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\Delta H = \frac{cV_0}{g} \qquad (۱-۲)$$

که در این رابطه c سرعت انتشار موج صوت در سیال است. همچنین V_0 سرعت اولیه سیال در لوله و g شتاب جاذبه زمین می‌باشند.

آلیو[3] در سال‌های ۱۹۰۳ تا ۱۹۱۳ تحلیل‌های دقیق تئوری ارائه نمود که پایه ای برای تئوری‌های مدرن قرار گرفت. همچنین از موارد مهم قابل ذکر بررسی‌های گیبسون درباره فشار ایجاد شده در پنستاک‌ها توسط بستن دریچه‌های توربین می‌باشد که در سال ۱۹۲۰ انجام شد.

در ادامه اولین کنگره ضربه قوچ در سال ۱۹۳۳ در شیکاگو برگزار گردید. که اولین مشارکت قاره آمریکا در این مباحث بوده است. در این کنگره به بررسی دقیق مطالعات انجام شده تا آن زمان پرداخته شد.

---

[1] *Michaud*

[2] *Joukowsky*

[3] *Allievi*

. در دهه‌های اخیر پس از تکمیل مبانی اولیه درباره موضوعاتی همچون جدایی ستون مایع، اندرکنش سیال سازه، اصطکاک غیرماندگار و پدیده نشت هر چند از ابتدا تاثیر گذاری آن‌ها قطعی بوده است، مورد توجه بیشتر قرار گرفته که به سبب دانش آن‌ها می‌توان تحلیل دقیق‌تری از فیزیک مسئله جریان غیرماندگار بدست آورد.

۲-۱-۱- جدایی ستون سیال [۱]

در صورتی که نوسات فشار در لوله سبب کاهش فشار به مقداری کمتر از فشار بخار سیال گردد، سیال درون لوله تبخیر شده و در واقع از فاز مایع به فاز گازی تغییر خواهد کرد که باعث ایجاد پدیده جدایی ستون مایع می‌گردد و در این صورت دیگر معادلات استاندارد ضربه قوچ برقرار نمی‌باشند. در این حالت ممکن است حفره‌های بخار و یا نواحی سیالی- بخاری گسترده تشکیل شوند که هر کدام از آن‌ها شرایط و معادلات متفاوتی را ایجاب می‌کند. جهت تحلیل و شبیه سازی این پدیده مدل‌های مختلفی شامل مدل حفره‌ایی بخاری گسسته و مدل گازی حفره‌ایی گسسته و مدل کاویتاسیون وجه مشترک تعمیم یافته ارائه گردیده است.

یکی از مهم‌ترین مقالاتی که در این زمینه منتشر شده است توسط برگانت [۲] و همکاران [۴] تهیه شده است. در این مقاله که یک مقاله مروری دقیق می‌باشد از شناخت پدیده در حدود سال‌های ۱۹۰۰ تا استفاده از روش‌های نوین تا زمان نگارش (۲۰۰۶) جمع آوری شده است. لازم به ذکر است که هر یک از سه نویسنده این مقاله رساله دکتری خود را در زمینه جدایی ستون سیال انجام داده‌اند، و در ادامه تحقیقات آزمایشگاهی و عددی بسیاری در این زمینه داشته‌اند.

---

[1] *Liquid column separation*

[2] *Bergant*

در سال‌های بعد مدل‌های کامل‌تری با افزودن مدل‌های اصطکاک غیرماندگار در مدل‌های کلاسیک جدایی ستون مایع و همچنین در نظر گرفتن اثرات ویسکوالاستیک جداره لوله و اندرکنش سیال سازه به بررسی دقیق‌تر این پدیده پرداخته شده است[۵-۱۱].

۲-۱-۲- اصطکاک غیرماندگار[1]

در مدل‌های کلاسیک و معمول روابط ضربه قوچ جهت مدل سازی ترم اصطکاک، معمولا در الگوریتم‌های استاندارد حل معادلات از مقادیر ماندگار و شبه ماندگار ضریب اصطکاک استفاده می‌شود. این فرضیات زمانی نتایج قابل قبول خواهند داشت که تغییرات جریان اندک باشد که در این حالات تنش‌های برشی دیوار رفتاری شبه استاتیکی از خود بروز می‌دهد[۱]. راستی آزمایی‌هایی که برای نتایج آزمایشگاهی با نتایج عددی توسط مدل‌های اصطکاک ماندگار صورت گرفته است حاکی از اختلاف بسیار در میرایی و تغییر فاز در نمودار فشار می‌باشد[۱۲]. علت اختلاف در نمودارها را می‌توان به دلیل تفاوت در پروفیل سرعت مرتبط دانست. تفاوت‌ها ناشی از شرایط جریان (سریع یا کند بودن غیرماندگاری، لایه‌ای یا آشفته بودن جریان) و ویژگی‌های سیال جریان (لزجت) می‌باشد.

از بارزترین تحقیقات انجام شده در زمینه اصطکاک غیرماندگار می‌توان به مقاله تحلیلی زیلیک اشاره نمود [۱۳]. وی در این تحقیق برای جریان‌های غیرماندگار لایه ای در حالت تک بعدی روابطی تحلیلی بدست آورد که همچنان به عنوان مرجع برای مقایسه دیگر مسائل مشابه به کار می‌رود. یکی از مشکلات استفاده از این مدل پیچیده بودن آن و نیاز به محاسبات قابل ملاحضه کامپیوتری است. در حقیقت به علت وابسته بودن اصطکاک غیرماندگار به تاریخچه سرعت از شروع غیرماندگاری، لازم

[1] *Unsteady friction*

است که برای همه گام‌های زمانی محاسبات تکرار گردد، به همین سبب نیاز به پردازش قابل توجه ای می‌باشد و استفاده از آن را در کارهای مهندسی غیر قابل استفاده می‌نماید.

واردی و براون[1] [۱۴]تحقیقات ارزنده ای در ارتباط با یافتن مدل‌های ریاضی برای اصطکاک غیرماندگار در جریان‌های آشفته انجام دادند. نتیجه این بررسی‌ها منجر به ارائه مدل‌هایی شد که تاکنون مورد قبول محققین دیگر واقع شده است. این مدل‌ها برای دو حالت جداگانه پیشنهاد شده‌اند. این روابط بر اساس زبری و صاف بودن جداره لوله تقسیم بندی می‌شوند. اما روش دست یافتن به این روابط یکسان می‌باشد. نویسندگان با تقسیم سطح مقطع لوله به نواحی مختلف برای هر کدام توزیع لزجت‌های مختلفی در نظر گرفته و بر این اساس روابطی ارائه نموده‌اند که به ازای مقادیر متفاوت عدد رینولدز جریان و مشخصات فیزیکی و هندسی مسئله عبارت اصطکاک غیرماندگار محاسبه می‌گردد. اما مشکلی که همچنان با آن مواجه هستیم مشابه روش زیلیک انجام محاسبات پیچیده با حجم بالا و قابل توجه می‌باشد.

ویتکوسکی[2] و همکاران[۱۵] جهت بر طرف نمودن حجم محاسبات زیاد در مدل‌های پیشین با استفاده از تخمین توابع وزنی مورد استفاده در روش‌های قبل توسط توابع نمایی توانستند راه حلی عملی برای به کاربردن مدل‌های پیشین پیشنهاد دهند. آنان با معادل سازی توابع ده جمله ای نمایی با توابع وزنی در مدل‌های قبل، ضرایب توابع پیشنهادی را به گونه ای تخمین زدند که کمترین خطا در مدل‌های پیشنهادی ایجاد گردد. همچنین آن‌ها با انجام تحلیل‌ها در حوزه فرکانسی و مقایسه دقیق با دیگر مدل‌ها کارآمد بودن روش خود را هم از نظر دقت نتایج عددی و هم از نظر سرعت حل به اثبات رساندند.

---

[1] *Vardy and Brown*

[2] *Vitkovsky*

۲-۱-۳- روش‌های حل معادلات جریان غیرماندگار

تمامی روش‌های حل جریان غیرماندگار بر اساس معادلات پیوستگی و ممنتوم و معادله حالت و همچنین در برخی موارد استفاده از معادله انرژی می‌باشد. بر اساس این معادلات پایه روش‌های مختلفی به کاربرده می‌شود که متناسب با هر کدام از آن محدودیت هایی ایجاد خواهد شد. در ادامه اشاره مختصری به این روش‌ها می‌شود.

روش گرافیکی: اولین روش هایی که مورد استفاده قرار گرفت روش‌های حسابی و گرافیکی می‌باشد[۱۶]. در حقیقت این روش‌ها مربوط به زمان قبل از ماشین‌های الکترونیکی می‌باشد. این روش‌ها با فرضیات بسیار ساده کننده مانند صرفنظر کردن از عبارت اصطکاک محاسبه می‌شده‌اند که روش هایی با دقت کم اما گاه مفهومی و همراه با درک بهتر از مسئله بوده‌اند.

روش خطوط مشخصه: یکی از محبوبترین روش‌های به کار گرفته شده روش خطوط مشخصه است. از آن جا که معادلات ضربه قوچ به فرم معادلات هذلولی بوده و پدیده انتشار موج در سیال نقش اصلی را ایفا می‌کند، لذا این روش همخوانی بسیار مناسبی با فیزیک پدیده دارد و در نتیجه نتایج با دقت بالایی مورد انتظار است. از جمله مطالعات قابل توجه و ابتدایی توسط لیستر[۱۷] در سال ۱۹۶۰ بوده است که وی استفاده از شبکه خطوط مشخصه با بازه‌های طولی ثابت و گام‌های زمانی ثابت با نسبت سرعت موج را بررسی نموده و نشان داده است که کاربرد آن نسبت به مدل‌های دیگر مناسب‌تر است که از آن پس این روش به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش اجزا محدود: به دلیل این که تغییرات اندکی در مسایل فیزیک جامدات وجود دارد این روش در مکانیک جامدات بسیار موثر و مفید می‌باشد و همچنین به میزان کمتری در مسایل دیگر مکانیک سیالات، اما در پدیده ضربه قوچ از آن جا که با تغییرات ناگهانی و حرکت امواج مواجه هستیم این

روش کارایی خود را از دست می‌دهد. چنانچه واضح است، این روش عددی به عنوان یک روش کارا در مسائل، به علت استفاده از توابع پیوسته چند جمله ای با درجات پایین در توابع شکل، در مدل سازی ناپیوستگی‌ها و انتشار امواج ضعیف می‌باشد. هر چند سادگی تقسیم بندی ناحیه حل مسئله قدرت بالایی به این روش می‌دهد اما هیچ گاه نتایج رضایت بخشی در پدیده ضربه قوچ برای استفاده در کاربردهای مهندسی حاصل نشده است[۱۸].

روش‌های تفاضل محدود: انواع مختلف روش‌های تفاضل محدود جهت حل معادلات جریان غیرماندگار به کاربرده شده‌اند. یکی از تحقیقات انجام شده مطالعه وایلی و استریتر است[۱۹]، که به بررسی ضربه قوچ در سیستم شبکه با استفاده از تفاضل مرکزی صریح پرداخته‌اند. همچنین استفاده از بازه‌های بزرگتر زمانی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در فرم تفاضل محدود ضمنی نیز مدل‌های مختلفی انجام شده که از آن جمله می‌توان به کار چادری[۲۰] و همکاران اشاره نمود که با استفاده از روش مک کورمک از عبارت‌های مرتبه دوم تفاضل محدود برای گسسته سازی عبارت‌های مکانی و زمانی بهره جسته‌اند. یکی از خصوصیات ذاتی استفاده از روش‌های تفاضل محدود خصوصا در حل مسائلی از این دست مباحث مربوط به نوسانات عددی است، که در اکثر قریب به اتفاق روش‌های حل جریان غیرماندگار دیده می‌شود.

روش حجم محدود: بر خلاف دیگر روش‌ها با توجه به این که در حل معادلات جریان غیرماندگار معمولا معادلات به شکل تک بعدی و یا شبه دو بعدی استفاده می‌شود بررسی‌های اندکی با استفاده از روش احجام محدود صورت گرفته است. در این میان می‌توان به مطالعات هوانگ و همکاران[۲۱] و گینو[۲۲] اشاره نمود که در دو مطالعه جداگانه در فاصله ی نزدیک به هم، با استفاده از حل کننده ریمان با استفاده از روش گدونو مسائل ضربه قوچ را حل نمودند.

روش‌های حل دو بعدی: با استفاده از روش‌های حل معادلات جریان غیرماندگار به صورت دو بعدی می‌توان به اطلاعات ارزشمندی در مورد تغییرات مشخصات جریان دست یافت که توسط معادلات تک بعدی قابل استحصال نیستند[۲۳]. از جمله بررسی دقیق پروفیل سرعت و تغییرات آن، محاسبه آشفتگی جریان در جریان‌های آشفته، بدست آوردن افت انرژی و در نتیجه بدست آوردن عبارت‌های اصطکاک که در روش‌های یک بعدی معمولا به صورت دقیق محاسبه نمی شوند. همچنین نتایج بدست آمده از روش را می‌توان به عنوان مرجعی برای راستی آزمایی روش‌های یک بعدی استفاده نمود. البته این روش‌ها به علت پیچیدگی و معمولا حجم عملیات محاسباتی بالا در کاربردهای مهندسی جایگاهی نیافته‌اند اما در پژوهش‌های علمی بسیار ارزشمند و قابل استناد هستند.

واردی و هوانگ [۲۴] سیستم معادلات دو بعدی جریان غیرماندگار را که یک دستگاه معادله دیفرانسیل جزیی سهموی هذلولوی است را به کمک روش‌های عددی حل نمودند. آن‌ها مطابق با فیزیک هر معادله روش مورد نظر را انتخاب کرده‌اند، بدین صورت که بخش هذلولی معادله را توسط خطوط مشخصه و بخش سهموی معادله را توسط روش تفاضل محدود حل کرده‌اند. یکی دیگر از مزایای روش مورد استفاده آن‌ها این است که می‌توان از ویژگی‌های مثبت هر کدام از روش‌های عددی به کار گرفته شده، در روش مذکور استفاده شود. به عنوان مثال مشابه شروطی که برای شرط مرزی خطوط مشخصه یک بعدی وجود دارد، در این روش نیز می‌توان از آن‌ها استفاده نمود. همچنین دیگر امکاناتی مانند تنظیم سرعت موج و درون یابی هایی که پیش‌تر استفاده می‌شد، قابلیت استفاده خواهند داشت. یکی از معایب روش آن‌ها ایجاد دستگاه معادلات خطی است که می‌بایست به تعداد بسیار زیاد در بازه زمانی جریان گذرا حل گردد که مسلما نیاز به انجام عملیات محاسباتی زمانبر دارد.

پزینگا [۲۵]روشی را که مبتنی بر استفاده از تفاضل محدود بوده است معرفی نمود. در روش معرفی شده برای محاسبه فشار فرم تفاضل محدود ضمنی در معادله پیوستگی به کار رفته است. همچنین

فرم تفاضل محدود صریح برای بدست آوردن توزیع پروفیل سرعت با استفاده از معادله ممنتوم به کار گرفته شده است. این روش به علت ایجاد دستگاه معادلات سه قطری برای حل معادله ممنتوم از سرعت بالایی برخوردار است، اما برای حذف نوسانات عددی می‌بایست از گسسته سازی‌های کوچک استفاده گردد.

۲-۲- کلیاتی درباره سیالات غیرنیوتنی

سیالات را می‌توان در یک دیدگاه کلی از دو نظر تقسیم بندی نمود. دیدگاه اول پاسخ سیال در برابر فشارهای (تنش‌های نرمال) وارد به سیال و دیگری نحوه تاثیر پذیری سیال در برابر تنش‌های برشی اعمال شده به سیال می‌باشد. دیدگاه اول منجر به این تقسیم بندی خواهد شد که آیا المان‌های سیال در برابر فشار تغییر حجم می‌دهند یا خیر، که در نتیجه تعاریف تراکم پذیری و تراکم ناپذیر شکل می‌گیرند. دیدگاه دوم که سبب تقسیم بندی دیگری می‌شود، رفتار سیال در مقابل تنش‌های برشی است. چنانچه رفتار سیال به گونه ای باشد که رابطه تنش‌های برشی وارد شده به سیال با تغییرات نرخ برش، خطی باشد آن سیال به عنوان سیال نیوتنی شناخته می‌شود؛ در غیر این صورت چنانچه رابطه غیر خطی باشد یا اثرات کشسانی در سیال آشکار شود و یا ویژگی‌های سیال با زمان تغییر کند آن سیال به عنوان سیال غیر نیوتنی شناخته خواهد شد[۲۶-۲۸].

محدوده سیالات غیر نیوتنی بسیار گسترده است. در محدوده سیالات غیر نیوتنی موجود در طبیعت می‌توان به موارد بسیاری اشاره نمود از جمله شیره درختان و گیاهان، بسیاری از مواد خوراکی مانند عسل، بسیاری از مواد موجود در بدن مانند مخاط‌ها و خون که به دلیل اهمیت ویژه آن‌ها به خصوص رفتار متفاوت خون در شرایط مختلف دست مایه بسیاری از تحقیقات و مطالعات شده است، به گونه ای که علاوه بر اینکه مقالات بسیاری در این زمینه منتشر شده کتب بسیاری نیز در ارتباط با

دینامیک خون، بیومکانیک و موارد مشابه نگاشته شده است[۲۹-۳۱] که یکی از پارامترهای اصلی مورد بحثشان غیر نیوتنی بودن سیالات و مدل سازی آن می‌باشد. در مسائل موجود صنعتی نیز می‌توان به مباحث پلیمرها، رنگ‌ها و جوهرها، صنایع دارویی، صنایع غذایی، صنایع آرایشی و بهداشتی و صنایع نظامی اشاره نمود که تحلیل و طراحی بهینه هر یک، مستلزم شناخت کامل‌تر و جامع‌تر پدیده‌های فیزیکی مرتبط با آن می‌باشد. در این بین پیچیدگی رفتار سیالات غیر نیوتنی و در نتیجه پیچیدگی معادلات ساختاری نسبت به سیال نیوتنی، بررسی و تحقیقات بسیار بیشتری را طلب می‌کند.

سیالات غیر نیوتنی را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم دسته بندی نمود، که توضیحات کامل آن در فصل آتی آورده شده است. با توجه به این که تحقیق حاضر مرتبط با جریان غیرماندگار در لوله‌ها است که به عنوان چکش آبی (سیال) نیز شناخته می‌شود، لذا بیشتر بررسی‌ها به جریان درون لوله متمرکز شده است.

یکی از آزمایشاتی که درباره‌ی جریان سیال غیرنیوتنی در لوله انجام شده مربوط به پینهو و وایتلاو [۳۲] می‌باشد. آن‌ها در این مطالعه به اندازه گیری سرعت محوری متوسط و تنش‌های نرمال برای جریان کاملا توسعه یافته در یک لوله پرداختند. سیال به کار رفته ترکیب یک پلیمر (سدیم کربوکسی متیل سلولز) در محلول رقیق با چهار غلظت متفاوت است. محدوده عدد رینولدز در نظر گرفته شده بین ۲۴۰ تا ۱۱۱.۰۰۰ می‌باشد. نتایج آن‌ها نشان دهنده ی آن است که در اثر خاصیت نازک شدگی برش سیال، محدوده ی ناحیه ی انتقال جریان از جریان لایه ای به جریان آشفته مقداری به سمت اعداد رینولدز بالاتر متمایل گشته، که علت آن را استهلاک نوسانات جریان آشفته خصوصاً در مولفه‌های شعاعی و مماسی تنش نرمال بیان داشته‌اند. همچنین به همین علت کاهش اثر درگ نیز مشاهده شده است و استفاده از مجانب حداکثر کاهش درگ را برای این محلول‌ها بررسی و مورد

تایید قرار دادند. البته این تحقیق منحصر به نتایج آزمایشگاهی بوده و هیچ گونه مدل ریاضی و یا روش عددی مورد استفاده و بررسی قرار نگرفته است.

کروز و پینهو [۳۳] (۲۰۰۷) در مقاله ای با عنوان "جریانات کاملا توسعه یافته لوله ای و صفحه ای برای سیالات ویسکوالاستیک چند حالته" به بررسی تحلیلی و عددی معادله ممنتوم در جریان لایه ای پرداختند. سیال بررسی شده شامل یک سیال نیوتنی به عنوان حلال و مدل‌های مختلف پلیمر، سهم غیرنیوتنی را ایفا می‌کنند، مدل‌های غیرنیوتنی در برگیرنده مدل‌های فن تین تنر، فنه پی و گزیکس هستند. برای حل معادلات از دو روش جداگانه استفاده شده است. در روش اول که می‌توان از هر مدلی استفاده نمود به صورت نیمه تحلیلی بوده با جواب‌های دقیق، اما در روش دوم که فقط برای مدل فن تین تنر با ضرایب تنش خطی و مدل فنه پی به کار می‌رود و از بسط سری‌های منقطع استفاده شده جواب‌ها کاملا تحلیلی می‌باشند، اما به دلیل استفاده از مجموعه ناکامل سری‌ها جواب‌ها به صورت تخمینی بدست می‌آیند. در این مقاله نشان داده شده است که در جریان‌های با عدد دبرا[1] ی بالا اهمیت تنش‌های مرتبه بالا قابل توجه می‌باشند. که در این شرایط جواب‌های حل تحلیل تخمینی با نتایج حل نیمه تحلیلی دقیق اختلاف داشته‌اند و در ادامه برای استفاده از حل‌های تخمینی معیاری بیان شده است. در انتهای برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده توسط نویسندگان در سایت‌های اینترنتی آنان در دسترس می‌باشد.

مطالعه ای توسط اولیویرا و همکاران [۳۴] در خصوص انتقال فشار درون لوله ی حاوی سیال بینگهام انجام شد. در این مطالعه یک مدل ریاضی برای شبیه سازی انتقال فشار ارائه گردید. فیزیک مسئله مورد بررسی شامل یک لوله که یک انتهای آن بسته و سمت دیگر تحت تاثیر افزایش فشار قرار داشته

---

[1] *Deborah number*

و سیال موجود در سیستم سیال بینگهام باشد، بوده است. حرکت سیال در لوله را یک بعدی و هم دما فرض کرده و شرایط جریان ورقه ای و تراکم پذیری اندک را بررسی کرده‌اند. در این تحقیق دو معادله پیوستگی و ممنتوم با روش خطوط مشخصه حل شده‌اند. نتایج آن‌ها حاکی از آن است که سیالات بینگهام در مقایسه با سیال نیوتنی به دلیل وجود تنش جاری شدن، توانایی انتقال فشار را ندارند. به عبارت دیگر به محض آن که گرادیان فشار از مقدار تنش جاری شدن کمتر گردد، سیال از حرکت باز خواهد ایستاد. همچنین آن‌ها با استفاده از تحلیل حساسیتی که انجام دادند، بیان نمودند که گرادیان فشار نهایی در امتداد لوله نه تنها به عدد بینگهام یا تنش جاری شدن بستگی دارد، بلکه به نسبت ظاهری لوله[1]، عدد رینولدز و عدد ماخ وابسته می‌باشد. علاوه بر آن برای حالت هایی با استهلاک بالا، گرادیان نهایی فشار همیشه منفی و برابر قرینه عدد بینگهام خواهد بود. اما در حالت هایی با استهلاک کم این مسئله متفاوت خواهد بود به این صورت که معمولا در یک سمت راستای محوری لوله مثبت و در سوی دیگر منفی می‌باشد.

لوپز کارآنسا و همکاران [۳۵] در مطالعه ای عددی و فارغ از راستی آزمایی نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی، به بررسی جریان سیالات با نازک شدگی برش در لوله پرداختند. مدل مورد استفاده آن‌ها برای رفتار سیال، مدل کاروا[2] است. محققین با تجزیه میدان جریان به جریان پایه و مقادیر آشفتگی، تحلیل مسئله را انجام داده و معادلات اغتشاش را با روش شبه طیفی پتروف گالرکین[3] حل نموده‌اند. برای حل گام‌های زمانی از روش آدامز باشفورث مرتبه چهارم[4] استفاده شده است. در

[1] *Pipe aspect ratio (D/L)*

[2] *Carreua model*

[3] *Pseudo spectral Petro Galerkin method*

[4] *Fourth-order Adams- Bashforth scheme*

محدوده ی پارامترهای مورد بررسی نشان دادند که جریان سیال با نازک شدگی برش دارای پایداری خطی می‌باشد. از نتایج عددی بدست آمده استنباط کردند که پروفیل لزجت جریان اصلاحات قابل توجه ای را نیاز دارد که ساختار جریان را تحت تاثیر قرار می‌دهد. همچنین برای یک عدد رینولدز مشخص اثر نازک شدگی برش سبب کاهش جذب انرژی در اغتشاشات می‌شود، که علت آن را کاهش تبادل انرژی بین جریان پایه و نوسانات ذکر نموده‌اند. در نهایت اثرات افزایش نازک شدگی برش سیال را سبب کاهش استهلاک لزجت دانسته‌اند.

واردی و براون [۳۶] مطالعه ای در زمینه جریان غیرماندگار لایه ای در لوله، با لزجت متغیر انجام دادند. در این تحقیق آن‌ها یک حل تحلیلی عمومی برای جریان لایه ای با تقارن محوری در یک لوله ارائه کردند، که در این مسئله تغییرات لزجت و گرادیان فشار به صورت وابسته زمانی از ابتدا به صورت توابعی مشخص وابسته به زمان (ثابت عددی، افزایش خطی و تابع تناوبی سینوسی) در نظر گرفته شدند. فرض اساسی آن‌ها در اعمال این تغییرات پیوستگی بوده، اما لزوما نرخ تغییرات آن توابع پیوسته نبوده است.

آن‌ها حل عمومی را با استفاده از تبدیل هنکل محدود[1] بدست آورده‌اند. استفاده از این روش این امکان را فراهم کرد که به توانند لزجت وابسته زمانی را به صورت صریح در معادلات لحاظ نمایند، اما در مقابل سبب می‌شود این مزیت در بعد مکانی سلب گردد. در واقع تفاوت اصلی آن با تبدیل لاپلاس در همین وجه است که در تبدیل لاپلاس از جهت مکانی امکان لحاظ کردن توابع به صریح وجود دارد اما از جهت زمانی محدود خواهد شد. مطالعه انجام شده درک بهتری نسبت به پدیده جریان غیرماندگار لوله همراه با تغییرات لزجت ارائه می‌کند، اما کاربرد آن به صورت عام و استفاده از توابع

[1] *Finite Hankel transform*

غیر تحلیلی مشکل بوده و نیاز به استفاده از روش‌های عددی پیچیده‌تری برای اعمال توابع به صورت منحنی‌های هموار تکه ای می‌باشد که عملا کاربرد آن را محدود می‌نماید[۳۷].

اردوغان[۳۸] در مطالعه ای به بررسی حرکت سیالات مرتبه دوم که از حالت سکون آغاز می‌گردد پرداخته است. فیزیک مسئله محدود به حرکت سیال بین سطوح موازی بوده و حرکت ایجاد شده توسط صفحات جداره به صورت ناگهانی بوده است. در این تحقیق مسائل جریان کوئت، پوزایله بررسی شده‌اند. تمامی روند حل مسئله به صورت تحلیلی بوده و در انتها نویسندگان نتایج خود را با نتایج معادلات ناویر استوکس مقایسه کرده‌اند. از مهمترین نتایج می‌توان به تفاوت در شرایط مرزی در زمان صفر و همچنین در خلال جریان برای سیال مرتبه دوم اشاره نمود، که برای تصحیح آن مدل هایی را برای سیال مرتبه دو پیشنهاد نموده‌اند.

یکی از مهم‌ترین مطالعات انجام شده مرتبط با موضوع این رساله که در خلال انجام این رساله به چاپ رسیده توسط وهبا، صورت گرفته است[۳۹]. این مقاله که در مجله معتبر مکانیک سیال غیرنیوتنی چاپ شده است، با این نکته جالب آغاز گشته است: "هدف این مطالعه ساخت پلی بر شکاف بین تئوری چکش آبی و مکانیک سیالات غیرنیوتنی است!". تحقیقات نویسنده مقاله در حوزه جریان غیرماندگار سیال نیوتنی و تمرکز وی بر روش‌های عددی است. در این مقاله وی اثرات ناشی از بستن سریع شیر را بر جریان حاوی سیال قانون توانی در یک لوله با سطح مقطع دایره ای، مورد بررسی قرار داده است. او از روش عددی تفاضل محدود شبه دو بعدی برای تحلیل نتایج استفاده نموده است، بدین ترتیب که برای عبارت‌های مکانی از تفاضل مرکزی مرتبه دوم و برای انتگرال گیری زمانی از رانج کوتای مرتبه چهارم استفاده شده ، لازم به ذکر است روش عددی فوق یکی از روش‌های به کار رفته در این رساله نیز می‌باشد. او در نتایج خود آورده است که جریان غیرماندگار لایه ای، به شدت تحت تاثیر اثرات غیرنیوتنی سیال شامل رفتار نازک شدگی برش و ضخیم شدن برش، قرار می‌گیرد.

همچنین اشاره کرده است که افزایش ضخیم شدن برش سیال سبب میرایی شدیدی در جریان گذرا می‌شود. در اینجا این نکته قابل ذکر است که در زمان چاپ این مقاله نتایج مشابه ای علاوه بر روش فوق با استفاده از روش خطوط مشخصه در راستای اهداف رساله بدست آمده بود.

۲-۳- تحلیل تداخلی سیال - سازه[1]

در حین ایجاد پدیده ضربه قوچ، نیروهای دینامیکی قابل توجهی به سازه لوله وارد می‌شود. چنانچه این نیروها باعث حرکت شبکه لوله‌ها شوند پدیده ای به نام تداخل سیال- سازه اتفاق خواهد افتاد. بنابراین بررسی رفتار لوله و یا سیال به تنهایی غیرممکن خواهد بود و به ناچار باید این دو به صورت همزمان مورد بررسی قرار داده شوند. به عبارت دیگر باید مکانیزم‌های رفتارهای تداخلی را مورد مطالعه قرار داد[۴۰].

آنالیز کوپله از دو دیدگاه قابل بررسی است. دیدگاه اول بررسی تعداد معادلات دیفرانسیلی است که برای مدلسازی کوپله مورد استفاده قرار می‌گیرند. بدیهی است که این بررسی حالت‌های مختلفی که برای شبکه‌های توزیع دو بعدی یا شبکه‌های سه بعدی مورد استفاده قرار می‌دهد را از دیدگاه معادلات دیفرانسیلی نظیر هر حالت دربرمی‌گیرد. در دیدگاه دیگر به بررسی انواع زمینه‌هایی که در یک تحلیل کوپله برای شبکه‌های توزیع، از نظر رفتار سیال و سازه به آنها پرداخته می‌شود، اشاره می‌گردد.

---

[1] *Fluid Structure Interaction (FSI)*

۲-۳-۱- طبقه بندی انواع مدل سازی‌های کوپله

تایسلینگ [۴۱] روش‌های کوپله حل مسایل FSI لوله‌ها را با توجه به معادلات دیفرانسیلی که برای هر روش استفاده می‌شود طبقه‌بندی کرد. این طبقه‌بندی به صورت زیر است:

۱- مدل دو معادله دیفرانسیل، در این مدل فقط دو معادله دیفرانسیل هیدرولیک (پیوستگی و ممنتوم) حل می‌شوند و سپس از فشارها و سرعت‌های به دست آمده از این حل، برای تحلیل معادلات سازه‌ای استفاده می‌شود. در این روش که در اصل یک روش نیمه کوپله می‌باشد مقادیر به دست آمده از حل معادلات هیدرولیکی برای معادلات سازه‌ای مانند یک بارگذاری خارجی تلقی می‌شوند. توضیحات کامتری از این روش در فصل سوم آورده شده است این روش تحلیل به نام روش حل ضربه قوچ کلاسیک نیز معروف می‌باشد.

۲- مدل چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول، این چهار معادله عبارتند از دو معادله پیوستگی و ممنتوم که معادلات هیدرولیکی می‌باشند و معادله ارتعاش محوری سازه که چون یک معادله مرتبه دوم است، خود به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌شود. این مدل برای لوله‌های مستقیم با حرکت محوری استفاده می‌شود. تنش محوری و سرعت محوری دیواره لوله علاوه بر فشار و سرعت، متغیرهای دیگری هستند که در این چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول وجود دارند[۴۲]. مدل‌های دیگری با ترکیب معادلات بیشتر وجود دارند، که خارج از بحث رساله می‌باشند، که از ذکر آن پرهیز گردیده است. در صورت تمایل می‌توان به مراجع رجوع کرد.

۲-۳-۲- انواع مکانیزم‌های کوپله

سه مکانیزم عمده در بررسی‌های انجام شده بر روی پدیده FSI لوله‌ها تاکنون شناخته شده است. ۱- مکانیزم کوپله پواسن[1]، ۲- مکانیزم کوپله اصطکاک[2] ، ۳- مکانیزم کوپله تقاطع[3] (اتصال).

مکانیزم کوپله اصطکاک ناشی از اصطکاک سیال با جدار داخلی لوله می‌باشد که عملکرد آن به گونه ای است که باعث کاهش فشارها و تنش‌ها در لوله می‌گردد. به همین دلیل اکثر محققین، این اثر را که برای طراحی در جهت اطمینان می‌باشد، در نظر نمی گیرند. تایسلینگ و برگانت نشان دادند که برای بررسی آن باید از یک مدل اصطکاک غیر ماندگار استفاده شود که در اینجا مورد نظر ما نیست.

مکانیزم کوپله پواسن ناشی از وجود نسبت پواسن برای مصالح لوله می‌باشد، که باعث تبدیل تنش‌های شعاعی به تنش‌های محوری می‌گردد. بررسی آن با استفاده از جمله ای که وابسته به نسبت پواسن مصالح است و در معادلات هیدرولیکی و سازه ایی وجود دارد، انجام می‌شود. این اثر می‌تواند باعث تغییرات عمده ای در نمودارهای فشار سیال و تنش و سازه گردد.

مکانیزم کوپله اتصال زمانی به وجود می‌آید که بعضی اتصالات در سازه شبکه لوله کاملاً به زمین مهار نشده باشند. مشاهده می‌شود که در بعضی حالات این اثر کوپله بسیار جدی‌تر از اثر کوپله پواسن بوده و می‌تواند باعث تشدید تنش‌ها و تخریب سازه گردد.

---

1 - Poisson coupling

2 - Friction coupling

3 - Junction coupling

۲-۳-۳- اثر تداخلی پواسن

بالا رفتن فشار در یک نقطه از لوله باعث ایجاد تنش‌های شعاعی در مقطع لوله می‌شود. این تنش‌ها به نسبت پواسن در امتداد محور لوله نیز انتشار می‌یابند و باعث می‌شوند تا در سیستم لوله تمایلاتی برای ایجاد تغییر مکان محوری ایجاد شود. بدیهی است مقدار این اثر کوپله بستگی زیادی به نسبت پواسن مصالحی دارد که لوله از آن ساخته شده است و اگر در روابط، این نسبت صفر گذاشته شود، مقدار این اثر کوپله نیز صفر منظور خواهد شد.

در کوپله پواسن، فقط معادله ارتعاش محوری با معادلات هیدرولیکی کوپله می‌شود بنابراین اگر بخواهیم برای یک شبکه لوله فقط کوپله پواسن را در نظر بگیریم (تمام تقاطع‌ها و شیرها و اتصالات کاملاً گیردار باشند) کافی است با انجام یک آنالیز کوپله مقادیر همگرا شده سرعت و فشار و جابجایی‌های محوری محاسبه شوند. سپس می‌توان از مقادیر به دست آمده، هر یک از معادلات دیفرانسیلی ارتعاش خمشی یا پیچشی را به صورت مستقل حل کرد. همان طور که گفته شد بدیهی است که این تحلیل فقط زمانی معتبر است که کاملاً امکان جابجایی از تمام تقاطع‌ها، زانویی ها، شیرها و اتصالات و سایر نقاطی که در آنها تغییر منتوم اتفاق می‌افتد، گرفته شده باشد. در حقیقت در این حالت می‌توان برای حل معادلات سازه‌ای، هر لوله از شبکه را (منظور از هر لوله در شبکه، لوله‌ای است که بین نقاط تثبیت شده واقع شده است) به صورت کاملاً مستقل از بقیه لوله‌ها تحلیل کرد. البته برای حل معادلات هیدرولیکی همچنان از روابط شبکه‌های لوله استفاده می‌شود (نه یک لوله). به عبارت دیگر شبکه‌ای که دارای اتصالات کاملاً صلب می‌باشد (هدف فقط محاسبه کوپله پواسن است) نیازی نیست که به صورت یک سیستم قاب که اعضایش حاوی سیال می‌باشند تحلیل شود بلکه کافی است تحلیل هیدرولیکی برای شبکه لوله‌ها انجام شود، اما سازه به صورت تیرهایی مستقل

از هم به طور جداگانه مورد آنالیز قرار گیرد. بدیهی است که این کار سرعت تحلیل سازه شبکه را چندین برابر خواهد کرد.

۲-۳-۴- اثر تداخلی تقاطع (اتصال)

اگر نقاطی از سازه که در آنها تغییر مومنتم اتفاق می‌افتد مانند نقاط تغییر قطر (ونتوری‌ها)، اریفیس ها، تقاطع‌ها، زانویی‌ها، شیرها و سایر وسایل نصب شده بر روی شبکه، کاملاً به زمین تثبیت نشده باشند؛ نوسانات فشار و سرعت ناشی از یک تحریک مکانیکی در سیستم می‌تواند باعث ایجاد یک اثر تداخلی دیگر به نام اثر کوپله تقاطع (اتصال) گردد.

این اثر تداخلی را می‌توان از دو دیدگاه هیدرولیکی و سازه‌ای مورد بررسی قرار داد. از دیدگاه هیدرولیکی به این نکته توجه می‌کنیم که زمانی که این اتصالات در اثر نوسانات فشار و سرعت ارتعاش می‌کند، رابطه هیدرولیکی که غالباً برای به دست آوردن شرط مرزی برای حل روابط هیدرولیکی استخراج می‌شود، به علت جابجایی‌ها و سرعت‌ها و شتاب‌های سازه‌ای که در این نقاط اتفاق می‌افتد، الزاماً باید به این متغیرهای سازه ای وابسته باشد. به عنوان مثال برای به دست آوردن شرط مرزی تقاطع برای حل معادلات هیدرولیکی با روش خطوط مشخصه، می‌دانیم که برای شاخه‌های ورودی به تقاطع از رابطه C^+ و برای شاخه‌های خروجی از تقاطع از رابطه C^- استفاده می‌شود و از یک رابطه پیوستگی نیز برای دبی‌های غیرماندگار ورودی‌ها و خروجی‌ها از تقاطع استفاده می‌شود. نکته اینجاست که در این رابطه پیوستگی درحالت کوپله تقاطع، پارامترهای سازه‌ای (که در اینجا سرعت‌های طولی گره‌های لوله می‌باشند) وارد کار می‌شوند.

از دیدگاه سازه‌ای نیز گفته می‌شود که حاصلضرب فشار سیال در سطح مقطع جریان، در مقاطع ورودی و خروجی حجم کنترل نظیر اتصالات، می‌تواند به صورت یک بارگذاری متمرکز بر سازه در

نظر گرفته شود. که این نیروهای متمرکز در فشارهای بالایی که غالباً در آغاز یک جریان غیرماندگار به وجود می‌آید مقادیر قابل توجهی خواهند داشت. با این پیش زمینه تئوری آنالیز کوپله اتصال مورد بررسی قرار گرفته می‌شود و مشاهده می‌شود که در بعضی شبکه‌ها این رفتار تداخلی سیال - سازه، تغییرات زیادی در رفتار ارتعاشی سازه و فشارهای سیال ایجاد می‌کند.

تداخل سیال و سازه در سیستم‌های خط لوله در سالهای اخیر بخصوص از نیمه دوم قرن بیستم توسط بسیاری از محققین مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی این مطالعات یک سیر تحول و پیشرفت از امواج محوری و حرکت یک بعدی لوله به معادلات چند بعدی موج و روش اجزا محدود را نشان می‌دهد. تأثیر جابجایی‌های طولی و محیطی لوله در کاهش سرعت موج فشاری در بسیاری از منابع از جمله در یادداشتهایی از استریتر و وایلی[۱] [۱]، توضیح داده شده است. این تعدیل به صورت سنتی در تحلیل مسأله ی ضربه قوچ و جریان‌های نوسانگر در خطوط لوله مورد استفاده قرار گرفته است. در این تحلیل‌ها حرکت لوله در نظر گرفته نشده است[۴۳].

اثرات سختی تکیه گاه در فشارهای سیال و تنش‌های حاصله در سیستم لوله توسط هیسبروک و تایسلینگ[۴۴] بررسی شده است. در اینجا نشان داده شده است که برای سیستم‌های با سختی تکیه گاهی کمتر، استفاده از معادلات کلاسیک ضربه قوچ و آنالیز غیر کوپله منجر به جواب‌های غیرقابل قبول خواهد شد که این امر به علت زیادتر شدن اثرات تداخلی بین سیال و سازه می‌باشد. معیار استفاده شده در این مقاله سختی محوری یک متر لوله یا به عبارت دیگر حاصلضرب سطح مقطع لوله در مدول الاستیسیته آن است. سیستم لوله مدل شده در این تحقیق بزرگترین سیستمی است که معمولاً برای بررسی اثرات استفاده می‌شود که از ۷ لوله و ۶ زانویی ۹۰ درجه تشکیل شده است. نتایج

---

1 - Streeter & Wylie

حاصله از حل با انواع سختی‌های تکیه گاهی نشان می‌دهد که اگر سختی تکیه گاهی کمتر از سختی یک متر لوله باشد استفاده از مدل آنالیز تداخلی ضروری بوده و با انعطاف پذیرتر شدن سیستم میزان تنش‌ها در سیستم لوله افزوده شده ولی نیروهای وارده بر تکیه گاه‌ها کاهش خواهد یافت. همچنین در این مقاله مباحث مهمی در زمینه رابطه سختی تکیه گاهی با فرکانس اصلی امواج فشاری، زمان آنالیز و واکنش‌های تکیه گاهی ارائه شده است.

تایسلینگ و واردی [۴۵] مطالعه جامعی را در زمینه ارائه مقیاس‌های زمانی موثر در جریان‌های غیرماندگار در شبکه‌های لوله تحت فشار انجام داده‌اند. در این تحقیقات سعی شده تا معیارهای زمانی مشخصی جهت تعیین نوع جریان اعم از پایدار، شبه پایدار[۱]، ستون صلب[۲] و ضربه قوچ با اثرات تداخلی در حالت‌های یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی را بررسی کنند. این تحقیق حاوی اطلاعات مفیدی در زمینه فرکانس اصلی ضربه قوچ، فرکانس اصلی امواج تنش و اهمیت نوع تکیه گاه‌ها در رفتار دینامیکی سیستم‌های لوله می‌باشد.

مقاله مهم دیگری که در زمینه آنالیز فرکانسی تداخل سیال- سازه موجود است که به وسیله لی و همکاران[۴۶] ارائه شده است. این مقاله که همزمان با کار فوق صورت گرفته تنها در روش حل معادلات مجزا شده از هم با مطالعه تایسلینگ تفاوت دارد. به این ترتیب که در اینجا به جای استفاده از روش خطوط مشخصه از روشی بر پایه حل دالامبر در معادلات موج استفاده شده است.

---

[1] - *quasi-steady*

[2] - *Rigid column*

یانگ و همکاران [۴۷] نیز در تحقیق مشابهی با استفاده از روش ماتریس انتقال[1] حل تحلیلی برای معادلات تداخلی سیال- سازه در لوله ارائه دادند. در این تحقیق برای یک مثال لوله به طول ۲۰ متر نشان داده شده است که اثر تداخلی اتصال نسبت به اثر تداخلی پواسن بسیار مهم‌تر است.

در سالهای اخیر محققین مباحث چکش آبی همانند برگانت و همکاران، بیشتر توجه خود را به بررسی اثرات تک تک پارامترهای موثر در امواج فشاری ضربه قوچ معطوف داشته‌اند [۴۸, ۴۹]. این موارد عبارتند از: اثر رفتار ویسکوالاستیک دیواره لوله، نشت و سه اثر معروف پیشین یعنی اصطکاک غیرماندگار، کاویتاسیون و تداخل سیال- سازه. در این مقاله که در دو بخش مدلسازی ریاضی و انواع نمونه‌های بررسی شده، ارایه گشته است هر یک از موارد فوق به طور مجزا بررسی شده‌اند.

[1] - *Transform Matrix Method*

فصل سوم

معادلات حاکم و مدل‌های ریاضی

۳-۱- مقدمه

در تمامی مطالعات پیشین سیال استفاده شده جهت بدست آوردن معادلات حاکم بر جریان غیرماندگار ناشی از بستن شیر که چکش آبی نامیده می‌شود، آب (سیالی با خصوصیات کاملا نیوتنی) بوده است. بنابراین برای استحصال روابط حاکم بر جریان غیرماندگار به گونه ای که به توان با آن رفتار یک سیال غیرنیوتنی را مدل سازی و شبیه سازی نمود، لازم است یک بار دیگر معادلات حاکم از ابتدا بازنویسی شوند. همچنین برای اعمال اثرات سیال غیرنیوتنی و مرتبط ساختن مقادیر مختص به سیال به متغیرهای دیگر مانند نرخ برش نمی توان از معادلات و مدل‌های یک بعدی استفاده نمود، لذا می‌بایست که معادلات به شکل کامل‌تری بسط داده شوند.

برای بدست آوردن معادلات و روابط ریاضی حاکم بر مسئله جریان غیرماندگار ره یافت‌های مختلفی وجود دارد. که مهمترین آن‌ها استفاده از روش حجم کنترل و نوشتن معادلات پیوستگی و ممنتوم برای حجم کنترل مزبور می‌باشد. روش دیگر استفاده از معادلات بنیادین مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد، که در این روش با استفاده از این دسته معادلات و فرض هایی که بر فیزیک مسئله جریان غیرماندگار حاکم می‌باشد، معادلات نهایی استخراج می‌گردند. روش دیگر به کاربردن مدل‌های تجربی است، که این روش با توجه به متغیرهای بسیار مسئله محدودیت‌های فراوان داشته و در مطالعات سال‌های ابتدایی و روابط اولیه به کار گرفته شده است.

در این تحقیق از آن جا که تمرکز بر روی ویژگی‌های سیال و بررسی اثرات ناشی از تغییرات خصوصیات سیال در جریان غیرماندگار درون یک سیستم لوله بوده است، و همچنین شبیه سازی مدل‌های مختلف سیال مد نظر بوده است، بنابراین استفاده از معادلات بنیادین مکانیک محیط‌های پیوسته جهت رسیدن به فرم نهایی مناسب‌تر دیده شد، یکی از مزایای عمده استفاده از این روش آن

است که لحاظ کردن ویژگی‌ها و مدل‌های مختلف سیال با دقت بیشتری همراه خواهد بود، همچنین رهگیری اثرات عبارات تغییر یافته و اعمال تغییرات با دقت بیشتری همراه می‌باشد.

معادلات پایه و اساسی که در بدست آوردن روابط نهایی به کار برده شده است، استفاده از همان معادلات پایستار پیوستگی و ممنتوم می‌باشد. علاوه بر آن از روابط دیگری همچون معادله ی حالت استفاده خواهد شد که هر کدام در جای خود تعریف می‌شوند. با توجه به این که مطالعات این تحقیق مربوط به جریان غیرماندگار در سیستم لوله‌ها می‌باشد، لذا برای نوشتن روابط از سیستم مختصات استوانه ای استفاده شده است. در این بخش ابتدا معادلات پایه پیوستگی و ممنتوم در دستگاه مختصات استوانه ای ارائه خواهند شد، سپس با بیان فرضیات مسئله و تبدیلات و جایگزینی‌های لازم به تشریح روند استحصال معادلات پرداخته می‌شود. قابل ذکر است در این مرحله فرض تراکم پذیری برای سیال برقرار خواهد بود.

۳-۲- معادله پیوستگی در دستگاه مختصات استوانه ای

اصل بقای جرم که معادله ی پیوستگی نیز نامیده می‌شود، از مباحث ابتدایی مکانیک محیط‌های پیوسته بوده که بیان می‌دارد که اگر حجم کوچکی از ماده را در امتداد حرکتش پی بگیریم، چگالی ρ و $\forall$ حجم آن ممکن است تغییر کند اما حاصل ضرب آن‌ها مقداری ثابت خواهد بود. که به صورت رابطه زیر بیان می‌شود

$$\frac{D}{Dt}(\rho d\forall)=0 \tag{۳-۱}$$

رابطه فوق به صورت شکل رابطه (۳-۲) نیز قابل بیان می‌باشد

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{۳-۲}$$

در روابط فوق v_i مولفه‌های سرعت در راستای محورهای مختصات و x_i محورهای مختصات می‌باشند. tمتغیر زمان است. روابط پیوستگی قبل را در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر خواهد بود

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \tag{۳-۳}$$

در این رابطه r, θ, z مولفه‌های محورهای مختصات در دستگاه استوانه ای هستند.

به دلیل این که موضوع این تحقیق بررسی جریان سیال در لوله می‌باشد و فرض تقارن محوری در طول بر قرار خواهد بود لذا می‌توان از مقادیر زاویه و تغییرات زوایه ای صرف نظر نمود. با حذف عبارت‌های مربوط به سرعت زاویه ای رابطه به شکل زیر ساده خواهد شد

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \tag{۳-۴}$$

چنانچه به خواهیم اثرات اندرکنش سیال سازه را در نظر بگیریم می‌بایست مولفه‌های سرعت شعاعی با دقت بیشتری بررسی شوند، اما در صورتی که از این اثرات صرف نظر کنیم می‌توان سرعت شعاعی را برابر صفر در نظر گرفته و عبارت‌های مرتبط را از این معادله حذف کنیم، رابطه ساده سازی شده حاصل به فرم زیر می‌باشد

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \tag{۳-۵}$$

نکات قابل توجه در روابط قبل آن است که سرعت در راستای محوری ($v_z(z,r)$) همچنان تابعی از مکان

محوری لوله (z) و شعاع (r) می‌باشد. به عبارت دیگر مقدار سرعت در راستای لوله و شعاع لوله متغیر می‌باشد، که یکی از بارزترین تفاوت‌ها با حل یک بعدی مسئله ضربه قوچ است، به طوری که در تحلیل یک بعدی، در یک مقطع، از سرعت متوسط استفاده می‌شود و از تغییرات سرعت در سطح مقطع چشم پوشی می‌شود.

از آن جا که محاسبات در شبکه ی لوله‌ها غالباً بر حسب مقادیر فشار یا هد لوله انجام می‌گیرد، لذا در مرحله بعدی می‌بایست مقادیر چگالی و تغییرات آن، با متغیر فشار جایگزین شود. جهت برقراری رابطه بین متغیر چگالی سیال و فشار سیال از معادله ی حالت استفاده می‌شود. معادله ی حالت را برای یک مایع می‌توان به شکل زیر بیان نمود[۵۰]

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho}{K} \qquad (۶-۳)$$

که ρ چگالی سیال، p فشار سیال و K مدل بالک سیال می‌باشد، که تابعی از دما و فشار است. چنانچه شرایط هم دمایی برقرار باشد، چگالی و مدل بالک در سمت راست معادله را می‌توان با یک مقدار ثابت تخمین زد. در نتیجه بین فشار و چگالی رابطه ی خطی برقرار خواهد شد. البته این فرض زمانی صادق خواهد بود که مقدار مدل بالک بسیار بزرگ‌تر از فشار سیال باشد ($p \ll K$) که در زمینه‌های مورد بحث این تحقیق این فرض صادق است. همچنین طبق معادله ی نیوتن-لاپلاس که به صورت زیر می‌باشد سمت راست معادله با سرعت موج مرتبط است[۵۰].

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad or \quad \frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} \qquad (۷-۳)$$

که c سرعت صوت در سیال بی کرانه است. با جایگزین کردن مشتقات فشار به جای مشتقات چگالی در معادله پیوستگی، رابطه زیر بدست می‌آید

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\rho}{K}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\rho}{K}(v_z)\frac{\partial p}{\partial z}=0 \qquad (۳-۸)$$

و در نهایت با استفاده از رابطه فشار و هد ($p=\rho gH$) و به کاربردن سرعت موج به ازا چگالی و مدل بالک که با استفاده از معادله (۳-۷) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\partial\rho=\frac{1}{c^2}\partial p \qquad (۳-۹)$$

و انجام عملیات جبری رابطه زیر حاصل خواهد شد

$$\frac{c^2}{g}\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial t}+v_z\frac{\partial H}{\partial z}=0 \qquad (۳-۱۰)$$

همچنین در این رابطه به علت کوچکی سرعت سیال در برابر سرعت موج، با دقت بسیار مناسبی می‌توان از عبارت‌های همرفتی[1] صرفنظر کرد.

رابطه سرعت موج که در معادله پیوستگی استفاده می‌شود، به صورت کامل‌تر که در برگیرنده اثرات تراکم پذیری سیال و انعطاف پذیری جداره لوله است به فرم زیر بدست می‌آید

$$\frac{1}{c^2}=\frac{d\rho}{dP}+\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dP} \qquad (۳-۱۱)$$

عبارت اول در سمت راست رابطه نشان دهنده تاثیر پذیری سرعت موج از تراکم پذیری سیال و عبارت دوم اثر نرمی جداره لوله می‌باشد. با حذف هر کدام از این دو عبارت می‌توان به ترتیب سرعت موج در سیال تراکم ناپذیر و سرعت موج در جداره لوله صلب را محاسبه نمود.

---

[1] *Convective term*

با استفاده از فرضیات تئوری الاستیسیته، شامل فرضیات $DdP = 2ed\sigma_\theta$ و $dA = \frac{\pi d\sigma_\theta}{E}\frac{D^2}{2}$ و همچنین در نظر گرفتن جابجایی تکیه گاه‌ها سرانجام فرم نهایی سرعت موج به شکل زیر می‌باشد

$$c^2 = \frac{K/\rho}{1 + c\frac{KD}{eE}} \tag{۱۲-۳}$$

برای سیالات چند فازی و چند مولفه ای می‌توان با جایگزین کردن مدول بالک موثر و همچنین چگالی موثر سیال در رابطه قبل سرعت موج را بدست آورد[۱۶]. برای محاسبه مدول بالک موثر و چگالی موثر سیال از میانگین وزنی هر کدام از مولفه‌ها استفاده می‌شود، که نسبت حجمی هر کدام ضریب وزنی آن‌ها می‌باشد.

۳-۳- معادله ممنتوم در دستگاه مختصات استوانه ای

در این بخش معادلات دیفرانسیل حرکت برای یک ذره بیان خواهد شد. فرض اساسی جهت بدست آوردن معادلات استفاده از قانون دوم نیوتن می‌باشد. این معادله به شکل زیر خواهد بود [۲۸]

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i + \rho B_i\mathbf{e}_i = \rho a_i\mathbf{e}_i \tag{۱۳-۳}$$

که T مولفه‌های تنش، B_i نیروهای حجمی وارد بر المان و a_i شتاب المان در راستای محورهای مختصات می‌باشد ($\mathbf{a} = D\mathbf{v}/Dt$). این معادله در فرم نمادین به شکل است

$$\text{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{B} = \rho\mathbf{a} \tag{۱۴-۳}$$

در ادامه معادلات حرکت در دستگاه مختصات استوانه ای در راستاهای محورهای مختصات r, θ, z

آورده شده است. معادله حرکت در راستای شعاعی به شکل زیر می‌باشد

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}+\rho B_r=\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-v_\theta\right)+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \quad (۱۵\text{-}۳)$$

معادله حرکت در راستای زاویه ای در دستگاه مختصات استوانه ای مطابق زیر بدست می‌آید

$$\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{r\theta}+T_{\theta r}}{r}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}+\rho B_\theta=\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \quad (۱۶\text{-}۳)$$

و معادله حرکت در راستای محوری در دستگاه مختصات استوانه ای به فرم زیرمحاسبه می‌گردد

$$\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{zr}}{r}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\rho B_z=\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \quad (۱۷\text{-}۳)$$

در مسیر بدست آوردن روابط نهایی می‌بایست مقادیر تانسور تنش‌ها توسط مقادیر سرعت جایگزین شوند. برای محاسبه مقادیر این تانسورها باید رابطه ی بین تنش و نرخ برش سیال مشخص گردد، که در نتیجه آن مقادیر سرعت و متغیرهای وابسته به آن جایگزین مقادیر تنش گردند. این رابطه توسط معادلات ساختاری برقرار خواهد شد. تا این مرحله از استحصال معادلات، تفاوتی بین انواع سیالات در معادلات ایجاد نشده است، اما در صورت استفاده از معادلات ساختاری سیال این تفاوت آشکار خواهد شد. در صورت استفاده از رابطه ساختاری سیال نیوتنی روابط جریان غیرماندگار سیال نیوتنی یا همان معادلات ضربه قوچ بدست خواهند آمد. اکنون به بررسی تک تک معادلات ممنتوم پرداخته می‌شود.

۳-۳-۱- معادله ممنتوم در راستای شعاعی

با صرف نظر کردن از عبارت هایی که شامل مولفه سرعت زاویه ای هستند و یا مشتق متغیری نسبت

به راستای زاویه ای گرفته شده است به دلیل وجود فرضیه تقارن محوری می‌توان این عبارت‌ها را حذف نمود [۱۸, ۵۰].

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}=\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \tag{۳-۱۸}$$

در نهایت با حذف عبارت‌های همرفتی به دلایلی که پیشتر ذکر شد و مشتقات صفر رابطه زیر بدست می‌آید

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{۳-۱۹}$$

این معادله در هر صورت برقرار می‌باشد و از مجموعه معادلات حذف می‌شود. نتیجه ای که از این معادله حاصل می‌شود آن است که فشار در یک مقطع از لوله در سطح مقطع لوله ثابت می‌باشد.

۳-۳-۲- معادله ممنتوم در راستای زاویه ای

معادله ممنتوم در راستای زاویه ای به علت تقارن محوری و همچنین صفر بودن سرعت زاویه ای همیشه برقرار بوده و اطلاعاتی از آن حاصل نمی شود.

۳-۳-۳- معادله ممنتوم در راستای محوری

ابتدا با حذف عبارت‌های مشتق گرفته شده نسبت به راستای زاویه ای شروع می‌کنیم، که عبارت حاصل به صورت زیر خواهد شد

$$\left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\frac{T_{zr}}{r}\right)+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\rho B_z=\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{۳-۲۰}$$

طرفین معادله قبل را به چگالی سیال تقسیم می‌کنیم. سپس دو عبارت اول معادله قبل را ترکیب می‌کنیم. و به دلیل این که تغییرات تنش نسبت به محور راستای لوله در خلاف جهت فشار می‌باشد یک منفی به عبارت تغییرات تنش نسبت به محور z اضافه می‌شود.

$$\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}=\frac{\partial\left(-\rho g H\right)}{\partial z}=-\rho g\frac{\partial H}{\partial z} \tag{۳-۲۱}$$

با انجام این عملیات رابطه فوق به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial r T_{zr}}{\partial r}-g\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{۳-۲۲}$$

در نهایت با صرفنظر از مولفه سرعت شعاعی و باز نویسی رابطه قبل به صورت مشابه روش‌های کلاسیک، رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-g\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r} \tag{۳-۲۳}$$

۳-۴- روابط اصطکاک غیرماندگار

در این تحقیق جهت مقایسه نتایج از مدل‌های یک بعدی جریان غیرماندگار نیز استفاده شده است. به دلیل آن که عبارت‌های اصطکاک از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند[۱۰] لذا می‌بایست این عبارات با بیشترین دقت ممکن مدل سازی گردند. در مدل‌های معمول ضربه قوچ ضریب اصطکاک (f)، ضریب دارسی وایسباخ، را با فرض جریان ماندگار و بر اساس شرایط اولیه جریان، شامل عدد رینولدز جریان و زبری نسبی لوله محاسبه می‌گردد که یک ضریب ثابت می‌باشد. در این قسمت با اصلاح این ضریب و تبدیل آن به صورت یک تابع غیرماندگار، از مدل عددی با دقت مناسب استفاده شده است. جهت

اصلاح ضریب اصطکاک ابتدا این متغیر به دو قسمت مجزا تقسیم می‌شود. قسمت اول عبارت مربوط به ضریب اصطکاک حالت ماندگار و دیگری بخش غیرماندگار ضریب اصطکاک است، که در نهایت ضریب اصطکاک غیرماندگار به صورت مجموع دو عبارت، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$f = f_0 + f_u \tag{۳-۲۴}$$

که f_0 ضریب اصطکاک حالت ماندگار است، که همانند گذشته محاسبه می‌شود و f_u ضریب اصطکاک حالت غیرماندگار است، که مقدار آن با توجه به تاریخچه جریان محاسبه می‌شود. قسمت غیر ماندگار ضریب اصطکاک به سابقه شتاب در هر مقطع محاسباتی وابسته است. زیلک برای جریان‌های خطی گذرا مدلی اساساً پیچیده (استفاده از انتگرال کانولوشن) را برای ضریب اصطکاک غیر ماندگار به صورت تحلیلی گسترش داد. که جزء غیر ماندگار آن به وسیله یک تابع وزنی مطابق فرمول زیر به تغییرات دبی در طی زمان مرتبط می‌گردد [۱۳]

$$f_u = \frac{32\nu A}{DQ|Q|}\int_0^t \frac{\partial Q}{\partial t^*} W_0\left(t - t^*\right) dt^* \tag{۳-۲۵}$$

که در آن ν لزجت سینماتیک، W_0 تابع وزنی به شرایط اولیه جریان شامل عدد رینولدز جریان و زبری نسبی جداره لوله وابسته است. t^* متغیر انتگرال گیری است. محاسبه رابطه فوق بسیار وقت گیر و پر هزینه خواهد بود، به این دلیل که می‌بایست در هر گام زمانی بر روی تمامی دبی‌های گذشته در تمامی نقاط عملیات جبری جداگانه ای صورت بگیرد. برای بر طرف نمودن این مشکل واردی و براون[۱۵, ۵۱, ۵۲] برای محاسبه ضریب اصطکاک غیر ماندگار تابع وزنی، به شکل زیر ارائه کردند

$$W(\tau) = \frac{A^* e^{-B^*\tau}}{\sqrt{\tau}} \tag{۳-۲۶}$$

که τ متغیر زمان بدون بعد $\left(\tau = 4\nu t / D^2\right)$ است. A^* و B^* ضرایبی هستند که با توجه به شرایط جریان ومشخصات لوله تعیین می‌گردند. واردی و بروان این ضرایب را طی مراحل مختلف ارائه و تکمیل نمودند که در ذیل به آن‌ها اشاره شده است. برای جریان‌های آرام و خطی $A^* = 1/2\sqrt{\pi}$ و $B^* = 210.08$ هستند. برای جریان‌های آشفته این ضرایب به عدد رینولدز جریان و در نتیجه به سرعت متوسط جریان وابسته می‌باشند، که رابطه B^* به شکل زیر اصلاح می‌شود

$$B^* = 0.135\,\mathrm{Re}^{\kappa} \qquad and \qquad \kappa = \log\left(14.3\,\mathrm{Re}^{-0.05}\right) \tag{۳-۲۷}$$

همچنین این ضرایب برای جریان آشفته در لوله‌های صاف به صورت زیرهستند[۵۱]

$$A^* = 0.5\sqrt{\frac{\nu_w}{\pi \nu_{lam}}}\,,\ B^* = \frac{\mathrm{Re}^{\kappa}}{12.86} \qquad and \qquad \kappa = \log\left(15.29\,\mathrm{Re}^{-0.0567}\right) \tag{۳-۲۸}$$

که ν_{lam} لزجت سینماتیکی جریان آرام و ν_w لزجت سینماتیکی در جداره لوله است، که این ضرایب در محدوده $2000 < \mathrm{Re} < 10^8$ از دقت مناسبی برخوردار هستند. سرانجام روابط زیر برای جریان آشفته با جداره لوله ی کاملاً زبر ارائه شده است

$$A^* = 0.0103\sqrt{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^{0.39} \qquad and \qquad B^* = 0.352\,\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^{0.41} \tag{۳-۲۹}$$

که ε/D زبری نسبی جداره لوله بوده و روابط فوق در بازه $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ معتبر می‌باشند.

۳-۴-۱- تخمین توابع وزنی

راهکارهای جدیدی که برای ساده نمودن عملیات فوق به کار گرفته می‌شود، استفاده از تابع وزنی تخمینی است که از مجموع چند تابع نمایی محدود (N_w) تشکیل می‌شود. توابع وزنی از سرعت بالا و دقت بسیار خوبی برخوردار هستند [۱۵]. تابع وزنی تخمینی مورد نظر به صورت زیر می‌باشد.

$$W_{app}(\tau)=\sum_{k=1}^{N_w} m_k e^{-n_k \tau} \tag{۳-۳۰}$$

که در آن N_w تعداد جملات نمایی تابع وزنی که با توجه به گام زمانی بدون بعد انتخاب می‌شود. m_k, n_k ضرایبی هستند که با منطبق کردن این توابع با توابع پیچیده گذشته، توسط ویتکوسکی بدست آمده‌اند. اکنون با استفاده از تابع وزنی فوق می‌توان ضریب اصطکاک غیر ماندگار را به صورت زیر محاسبه و آن را به صورت یک معادله بازگشتی تبدیل نمود

$$f_u=\frac{32\nu A}{DQ|Q|}\sum_{k=1}^{N_w} y_k(t) \tag{۳-۳۱}$$

که مولفه تابع وزنی $y_k(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$y_k(t)=\int_0^t \frac{\partial Q}{\partial t^*} m_k e^{-n_k K\left(t-t^*\right)} dt^* \tag{۳-۳۲}$$

که ضریب $K\left(=4\nu/D^2\right)$ جهت بی بعد کردن زمان به کار رفته است. با نوشتن رابطه فوق برای زمان $(t+2\Delta t)$ خواهیم داشت

$$y_k(t+2\Delta t)=\int_0^{t+2\Delta t} \frac{\partial Q}{\partial t^*} m_k e^{-n_k K\left(t+2\Delta t-t^*\right)} dt^* \tag{۳-۳۳}$$

با حل عددی و ساده سازی انتگرال می‌توان به یک عبارت بازگشتی برای $y_k(t)$ و در نتیجه f_u دست یافت. که این عبارت در ادامه آورده شده است.

$$y_k(t+2\Delta t)=e^{-n_k K\Delta t}\left(e^{-n_k K\Delta t}y_k(t)+m_k\left(Q(t+2\Delta t)-Q(t)\right)\right) \tag{۳۴-۳}$$

رابطه بدست آمده پیچیدگی‌های روابط قبل را نداشته و فقط نیاز به انجام عملیات بر روی دبی در گام زمانی فعلی و قبلی را دارد. ضرایب m_k, n_k برای جریان‌های آشفته توسط ویتکوسکی محاسبه شده‌اند، که جهت استفاده از این ضرایب از تبدیلات $n_k = B^* + n_k^*$ و $m_k = A^* m_k^*$ و با هدف بی بعد کردن این متغیرها استفاده شده است. همچنین تعداد جملات تابع وزنی با استفاده از گام زمانی بی بعد تعیین می‌شود، بدین ترتیب که با محاسبه $\Delta\tau = 4\nu t / D^2$ و مقایسه آن با τ_{mk} ارائه شده تعداد جملات مورد نیاز انتخاب می‌شوند.

جدول ۳-۱ ضرایب تابع نمایی در تابع وزنی جریان آرام

k	m_k	n_k	τ_{mk}
1	1.02700	26.5976	1.00×10^{-1}
2	1.31342	78.6005	5.70×10^{-2}
3	2.14832	202.234	2.00×10^{-2}
4	3.70620	540.226	7.20×10^{-3}
5	6.37762	1501.07	2.47×10^{-3}
6	10.9363	4267.16	8.43×10^{-4}
7	18.7309	12286.9	2.87×10^{-4}
8	32.0736	35639.2	9.52×10^{-5}
9	55.1523	103956	2.82×10^{-5}
10	99.4544	309336	7.05×10^{-6}

۳-۵- سیالات غیرنیوتنی

۳-۵-۱- رفتار شناسی و دسته بندی سیال غیرنیوتنی

سیالات غیرنیوتنی را می‌توان به دسته ای از سیالات اتلاق نمود که در دسته بندی سیالات نیوتنی قرار نگیرند. به عبارت دیگر سیالاتی که رابطه بین تنش برشی وارد بر سیال و نرخ برش خطی با عرض از مبدا صفر نباشد، سیال غیرنیوتنی گفته می‌شود. به عبارت دیگر لزجت ظاهری، نسبت تنش برشی به نرخ برش، در دما و فشار ثابت، عدد ثابتی نبوده و به شرایط جریان از جمله هندسه جریان و نرخ برش و حتی ممکن است به تاریخچه سینماتیک المان‌های مورد بررسی وابسته باشد.

به طور کلی سیالات غیرنیوتنی را می‌توان به سه گروه کلی تقسیم بندی نمود:

گروه اول: دسته سیالاتی هستندکه نرخ برش در هر نقطه از سیال توسط مقدار تنش برشی در آن نقطه از سیال، در همان لحظه، تعیین می‌شود. این دسته از سیالات غیرنیوتنی دارای نام‌های متفاوتی از جمله سیالات مستقل از زمان[۱]، سیالات غیرالاستیک، ویسکوز خالص و یا به طور عام سیالات نیوتنی تعمیم[۲] یافته بیان می‌شوند[۲۶, ۲۷].

گروه دوم: سیالاتی هستند با رفتار پیچیده‌تر نسبت به دسته اول که وابستگی نرخ برش و تنش برشی علاوه بر حالت اول به مدت زمان تحت تنش برشی قرار گرفتن و تاریخچه سینماتیک جریان وابسته می‌باشد. این گروه به عنوان سیالات وابسته زمانی[۳] معروف می‌باشند.

---

[1] *Time independent fluids*

[2] *Generalized Newtonian fluids*

[3] *Time dependent fluid*

گروه سوم: این گروه از خود رفتاری نشان می‌دهند که هم رفتار ویسکوز سیال ایده ال قابل مشاهده است و هم می‌توان رفتار ارتجاعی جامد را مشاهده نمود، در حقیقت این دسته از سیالات بعد از اعمال تغییر شکل و سپس رها سازی، مقداری حالت بازگشت به شرایط اولیه (حالت ارتجاعی) را از خود نشان می‌دهند، به همین سبب به سیالات ویسکوالاستیک[1] معروف هستند.

البته دسته بندی که برای سیالات غیرنیوتنی صورت گرفته است به صورت کاملا قراردادی است و در عمل سیالات واقعی رفتاری که از خود نشان می‌دهند می‌تواند ترکیبی از حالت‌های فوق باشد. البته مجموعه ای از سیالات هستند که خصوصیات آن‌ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی و یا جریان الکتریکی قرار می‌گیرد که می‌توان آن‌ها را به عنوان دسته ای جداگانه معرفی نمود. در مورد این سیالات ذکر این نکته جالب است که از این مجموعه به عنوان میراگر در تامین پاسخ مناسب‌تر ساختمان‌ها در برابر زلزله و همچنین در بهبود عملکرد کمک فنر خودروها استفاده می‌شود. در هر صورت برای تعیین مشخصات غیرنیوتنی یک سیال از روابط و محاسبات مربوط به هر کدام از گروه‌ها می‌توان استفاده نمود.

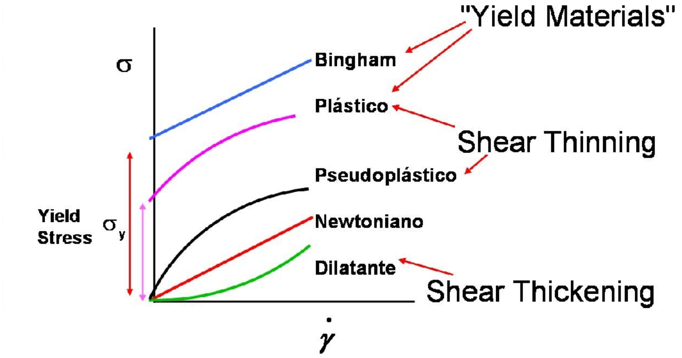
۳-۵-۱-۱ سیالات مستقل از زمان

در جریانات برشی ساده، رفتار این دسته از سیالات را می‌توان با رابطه ی ساختاری $\tau_{yx} = f(\dot{\gamma}_{yx})$ توصیف کرد. این رابطه زمانی به کار می‌رود که مقدار نرخ برش در هر نقطه از جریان برشی سیال توسط مقدار تنش برشی در آن نقطه (و یا به صورت برعکس، تنش برشی تابعی از نرخ برش) تعیین گردد. این گروه از سیالات خود به سه زیر گروه اصلی قابل تقسیم بندی هستند. در ادامه اسامی زیر گروه‌های سیالات مستقل از زمان آورده شده است:

---

[1] *Viscoelastic fluids*

گروه الف) سیالات با رفتار نازک شدگی برش یا شبه پلاستیک[۱]. گروه ب) سیالات ویسکوپلاستیک[۲]. گروه ج) سیالات با رفتار افزایش برش یا دایلاتنت[۳]. در این قسمت شرح مختصری از هر کدام از گروه‌های فوق آورده شده است. این دسته بندی در شکل ۳-۱ نمایش داده شده است.



شکل ۳-۱ دسته بندی سیالات نیوتنی تعمیم یافته

گروه الف) سیالات با نازک شدگی برش یا شبه پلاستیک

بیشترین فراوانی که در گروه سیالات مستقل از زمان مشاهده می‌شود مربوط به سیالات شبه پلاستیک است. مشخصه اصلی این گروه آن است که ویسکوزیته ظاهری آن‌ها با افزایش نرخ برش، کاهش می‌یابد.

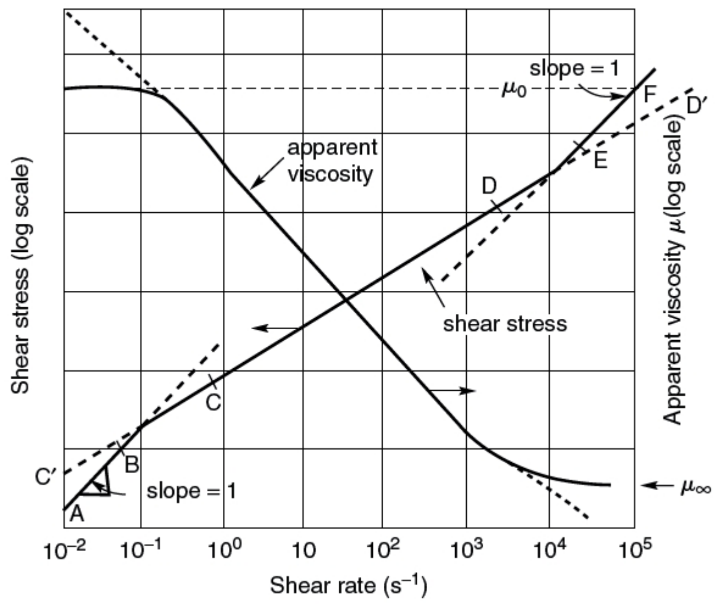
اکثر محلول‌های پلیمری و مذاب در نرخ برش‌های کم و همچنین نرخ برش‌های زیاد از خود رفتاری نیوتنی نشان می‌دهند، به عبارت دیگر در نمودار تنش برشی در برابر نرخ برش به ازای مقدار مختلف نرخ برش مقدار افزایش تنش برشی ثابت خواهد بود (شکل ۳-۲).

---

[1] *Shear thinning or pseudo plastic fluids*

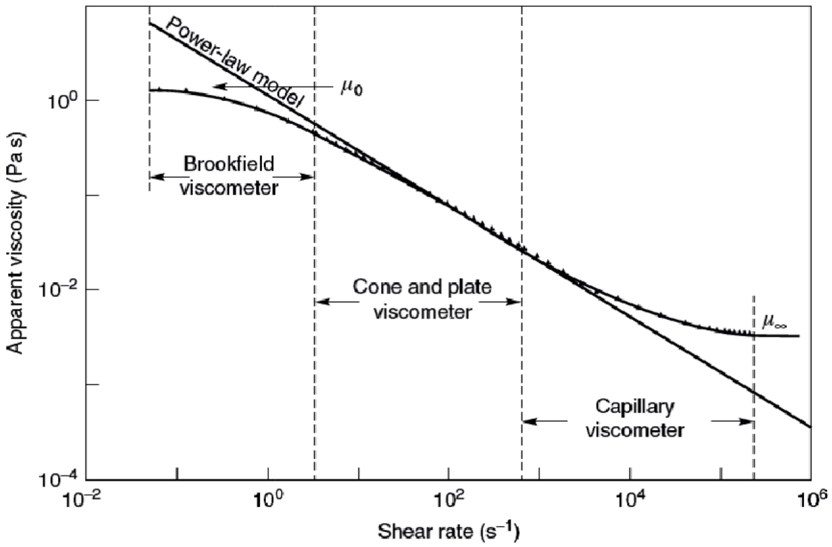
[2] *Viscoplastic fluids*

[3] *Shear thickening or dilatant fluids*



شکل ۳-۲ نمودار شماتیک رفتار سیال با نازک شدگی برش

نتایج مقادیر لزجت ظاهری در نرخ‌های برش بسیار کم و نرخ‌های برش بسیار زیاد، به ترتیب لزجت برش صفر (μ_0) و لزجت برشی بی نهایت (μ_∞) نامیده می‌شود. بنابراین در سیالات شبه پلاستیک، ویسکوزیته ظاهری با افزایش نرخ برش از مقدار μ_0 به مقدار μ_∞ کاهش می‌یابد. در شکل ۳-۳ لزجت ظاهری در برابر نرخ برش برای محلول رقیق پلی اکلیریمید در دمای ۲۹۳ درجه کلوین نشان داده شده است، همان طور که در نمودار مشخص است لزجت ظاهری محلول از مقدار ۱۴۰۰ میلی پاسکال ثانیه به مقدار ۴/۲ کاهش می‌یابد. با وجود این محدوده تغییرات بسیار سخت و دشوار می‌باشد که به توان فقط از یک مقدار میانگین برای مدل سازی لزجت سیال استفاده نمود، با این وجود مقدار لزجت سیال بین دو مقدار بیشینه و کمینه محدود می‌باشد، که عوامل متعددی از جمله توزیع وزن ملکولی سیال، نوع پلیمر، ماهیت حلال و بسیاری دیگر از پارامترها تاثیر گذار می‌باشند. به طور کلی محدوده ی نرخ برش که در آن لزجت ظاهری مقداری ثابت دارد، با افزایش وزن ملکولی کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۳ نمایش مقادیر مختلف لزجت ظاهری برای محلول پلیمری پلی اکلیریمید

گروه ب) سیالات ویسکوپلاستیک

مشخصه اصلی این دسته از سیالات دارا بودن تنش جاری شدن غیر صفر می‌باشد، بدین معنی که قبل از جریان یافتن سیال، تنش وارد شده بر آن می‌بایست از مقدار مشخصی که وابسته به ویژگی‌های سیال می‌باشد(تنش جاری شدن)، بیشتر گردد. به عبارت دیگر تا زمانی که تنش اعمال شده کمتر از تنش جاری شدن سیال باشد، رفتار سیال مشابه جامد الاستیک (حرکت صلب گونه) خواهد بود. زمانی که مقدار تنش وارد شده بر سیال از تنش جاری شدن فراتر رود، منحنی جریان (نرخ برش، تنش برشی) می‌تواند حالت خطی و یا غیر خطی داشته باشد، اما در هر صورت این منحنی از مبدا مختصات (نرخ برش صفر، تنش برشی صفر) گذر نخواهد کرد.

گروه ج) سیالات با رفتار افزایش برش یا دایلاتنت

این گروه همانند سیالات شبه پلاستیک از خود تنش جاری شدن نشان نمی دهند اما با افزایش نرخ برش لزجت ظاهری آن‌ها نیز افزایش می‌یابد. مکانیسم این سیالات بدین گونه است که در نرخ

برش‌های کم، سیال به صورت پراکنده بین تمامی ذرات کوچک جامد محلول در سیال، وجود دارد. اما در نرخ برش‌های بالاتر پراکندگی یکنواخت سیال از بین می‌رود و در بخش هایی از سیال ذرات جامد با یکدیگر تماس بیشتری پیدا می‌کنند، در نتیجه این تماس اصطکاک بین ذرات بیشتر شده و به سبب آن در برابر جابجایی و حرکت از خود مقاومت بسیار بالاتری نشان می‌دهند. همان طور که اشاره شد این ویژگی بیشتر در محلول هایی که حاوی ذرات جامد هستند مشاهده می‌شود. البته گستره این گروه نسبت به دیگر سیالات اندک می‌باشد.

۳-۵-۱-۲سیالات وابسته زمانی

زمانی که ساختار ملکولی مواد با زمان تغییر کند، به عبارت دیگر پیوند اجزا تشکیل دهنده ساختار سیال دچار تحول گردد، به تبع آن خصوصیات ظاهری سیال از جمله لزجت آن نیز تحت تاثیر قرار می‌گیرد. بر این اساس این گروه به دو زیر گروه تیکسوتروپی[1] و رئوپکسی[2] تقسیم می‌شوند. در مورد اول لزجت سیال با گذر زمان کاهش می‌یابد که می‌تواند ناشی از شکسته شدن ساختارهای ملکولی آن باشد. در مورد سیالات رئوپکسی با گذر زمان لزجت سیال افزایش می‌یابد که ناشی از پیوندها و ساختار تشیکل شده جدید می‌باشد. ذکر این نکته در مورد این دسته ضروری است که با گذشت زمان لزجت ظاهری این سیالات به مقدار ثابتی میل خواهد کرد.

۳-۵-۱-۳سیالات ویسکوالاستیک

در تئوری الاستیسیته کلاسیک تنش برشی وارد بر یک جسم با کرنش ایجاد شده متناسب است. رابطه‌ای که برای محاسبه‌ی آن به کار می‌رود قانون هوک می‌باشد که ضریب تناسب آن به نام مدول

---

[1] *Thixotropy*

[2] *Rheopexy*

یانگ شناخته می‌شود ($\tau_{yx} = -Gdx / dy = G\gamma_{xy}$)، که dx جابجایی برشی بین دو نقطه به فاصله dy می‌باشد. زمانی که یک المان جامد ایده‌آل تغییر شکل یابد پس از حذف تنش‌ها به حالت اولیه‌ی خود بر می‌گردد. در سوی دیگر در یک سیال نیوتنی تنش برشی متناسب با نرخ برش است که حاکی از رفتار ویسکوز می‌باشد. در این بین بسیاری از مواد هر دو رفتار الاستیک و ویسکوز را از خود نشان می‌دهند که به این مجموعه مواد ویسکوالاستیک می‌گویند. در حقیقت تغییر شکل کاملا الاستیک و جریان ویسکوز ایده آل حالت خاصی از مواد ویسکوالاستیک هستند.

رفتار سیالات ویسکوالاستیک ناشی از ساختار ملکولی این دسته از سیالات می‌باشد، که از خود رفتار کشسان هم نشان می‌دهند. این رفتار کشسان معمولا ناشی از زنجیره طویل ملکول هاست که در اثر کنش‌ها بر یکدیگر بروز می‌کند. به همین دلیل رفتار ویسکوالاستیک در سیالی دیده می‌شود که دارای وزن ملکولی بالایی باشد. سیالات ویسکوالاستیک ویژگی هایی را از خود بروز می‌دهند که در دیگر سیالات مشاهده نمی شوند. از جمله مهمترین آن‌ها اختلاف تنش نرمال است. در سیالات غیرالاستیک تمامی فشارهای نرمال وارد بر یک المان برابر می‌باشد اما این تنش‌ها در سیالات ویسکوالاستیک مقادیر متفاوتی خواهند داشت. این اختلاف تنش‌ها می‌تواند دلیل بسیاری از حالت‌های جریان سیال ویسکوالاستیک باشد که در سیالات نیوتنی دیده نمی شود مانند اثر وایزنبرگ که علت اصلی ایجاد آن اختلاف تنش نرمال است.

۳-۵-۲- روابط حاکم بر رفتار سیالات غیر نیوتنی

در این بخش ابتدا به بررسی معادلات حاکم بر سیالات غیر خطی لزج غیر الاستیک پرداخته می‌شود. بر این اساس کلی‌ترین فرضی که برای معادله ی ساختاری سیال غیرالاستیک می‌توان استفاده نمود

وابستگی تانسور تنش به چگالی جرمی سیال و گرادیان سرعت می‌باشد که به صورت زیر قابل بیان است

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\rho, \mathbf{v}) \quad (۳۵-۳)$$

در این رابطه $\mathbf{T}$ تانسور تنش، $\mathbf{v}$ گرادیان سرعت و ρ چگالی سیال می‌باشند. فرضیه اساسی در این رابطه آن است که تانسور تنش در هر لحظه فقط وابسته به گرادیان سرعت در آن لحظه می‌باشد و به تغییر شکل‌های سیال در لحظه‌های قبل از آن هیچ گونه وابستگی نخواهد داشت. با استفاده از ناوردای تانسور تنش[۱] با شرایط حرکت برهم نهی شده ی جسم صلب[۲] و استفاده از قضایای مربوط به تانسورهای ایزوتروپیک متقارن که ملزومات ناورداها را تامین کند، رابطه قبل به صورت زیر خواهد بود

$$\mathbf{T} = \phi_0\mathbf{I} + \phi_1\mathbf{D} + \phi_2\mathbf{D}^2 \quad (۳۶-۳)$$

که در این ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 ضرایب معادله می‌باشند که به چگالی سیال و ناواردهای اصلی[۳] $\mathbf{D}$ وابسته هستند. با پذیرش این رابطه و استفاده از فرض تراکم ناپذیری سیالات برای حالتی که تنش‌های انحرافی تابعی از گرادیان سرعت باشند می‌توان با اعمال ملزومات ناوردا رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{I} + \phi_1\mathbf{D} + \phi_2\mathbf{D}^2 \quad (۳۷-۳)$$

[1] *Invariance of stress tensor*

[2] *Superposed rigid body motion*

[3] *Principle invariant*

که α ضریب لاگرانژ است که از محدودیت تراکم ناپذیر بدست می‌آید و ضرایب ϕ_1 و ϕ_2 فقط به ناوردای دوم و سوم تانسور نرخ تغییر شکل (**D**) بستگی دارند. به این دسته از سیالات اصطلاحاً سیالات رانیر ریولین[1] گفته می‌شود. به عنوان مثال سیالات ناویر استوکس زیر مجموعه ای از این دسته هستند که ضریب ϕ_2 برابر با صفر و ضریب ϕ_1 عددی است ثابت. همچنین ذکر این نکته ضروری است که وابستگی به ناوردای سوم ($III_{\mathbf{D}}$) بسیار جزیی بوده و در اکثر مواقع قابل صرف نظر کردن می‌باشد. به همین دلیل به یک دسته ی خاص از سیالات راینر-ریولین توجه بیشتری شده است که با عنوان سیالات نیوتنی تعمیم یافته شناخته می‌شوند. در حقیقت این مجموعه سیالات راینر-ریولینی هستند که ضریب ϕ_2 آن‌ها صفر است و ضریب ϕ_1 تنها تابعی از ناوردای دوم تانسور نرخ تغییر شکل ($II_{\mathbf{D}}$) می‌باشد. در ادامه ی این بخش درباره ی محدودیت‌های ضرایب ϕ_1, ϕ_2 در دسته راینر-ریولین بحث خواهد شد، سپس روی مجموعه سیالات غیر نیوتنی تعمیم یافته که مجموعه ی عظیمی از سیالات طبیعی و مصنوعی را در بر خواهد گرفت متمرکز خواهیم شد.

۳-۵-۲-۱ محدودیت‌های ضرایب راینر-ریولین

با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک می‌بایست توان تنش‌ها عددی غیر منفی باشد به عبارت دیگر

$$\mathbf{T}:\mathbf{D}\geq 0 \qquad (۳-۳۸)$$

با استفاده از این قید می‌توان به صورت زیر محدودیت‌های برای ضرایب ϕ_1, ϕ_2 تعیین نمود

---

[1] *Reiner-Rivlin fluids*

$$\begin{aligned}\mathbf{T}:\mathbf{D} \equiv \mathrm{tr}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}) &= \mathrm{tr}\left(\alpha\mathbf{D} + \phi_1\mathbf{D}^2 + \phi_2\mathbf{D}^3\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\alpha\mathbf{D} + \phi_1\mathbf{D}^2 + \phi_2\left(-II_{\mathbf{D}}\mathbf{D} + III_{\mathbf{D}}\mathbf{I}\right)\right) \\ &= \phi_1\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{D}^2\right) + 3\phi_2\det\mathbf{D} \geq 0\end{aligned} \tag{۳-۳۹}$$

در محاسبه روابط فوق از قضیه کیلی همیلتون و شرط تراکم ناپذیری استفاده شده است. عبارت اول در سمت راست معادله فوق همواره مثبت است در حالی که عبارت دوم می‌تواند مقادیر مثبت، منفی و صفر داشته باشد. با این توصیف حالت‌های زیر قابل بررسی هستند

حالت ۱: $\phi_2 = 0$ و ϕ_1 متغیر

در این حالت که ضریب دوم صفر می‌باشد، طبق رابطه (۳-۳۹) ضریب ϕ_1 حتما می‌بایست بزرگتر مساوی صفر باشد ($\phi_1 \geq 0$).

حالت ۲: ϕ_2 و ϕ_1 ثابت

در این حالت ضرایب فوق مستقل از تانسور نرخ تغییر شکل هستند. به همین دلیل هر نتیجه ای که برای یک انتخاب منطقی این تانسور حاصل شود برای همه حالت‌های این تانسور برقرار خواهد بود. بر این اساس با فرض زیر شرایط این ضرایب را بررسی می‌کنیم

$$\mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{۳-۴۰}$$

برای $\mathbf{D}$ انتخاب شده $\mathrm{tr}\left(\mathbf{D}^2\right) = \dot{\gamma}^2/2$ و $\det\mathbf{D} = 0$ می‌باشند. در نتیجه با استفاده از رابطه ی (۳-۹) شرط زیر بدست می‌آید

$$\frac{\dot{\gamma}^2}{2}\phi_1 \geq 0 \tag{۳-۴۱}$$

در نتیجه برای این حالت ضریب ϕ_1 می‌بایست بزرگتر یا مساوی صفر باشد. زمانی که ϕ_1 عددی ثابت باشد این نتیجه برای هر $\mathbf{D}$ انتخابی برقرار خواهد بود. با انتخاب موارد دیگر به این نتیجه کلی خواهیم رسید که زمانی که ϕ_1 عددی ثابت باشد، ضریب ϕ_2 باید برابر صفر باشد، که معادل تراکم ناپذیری سیال خواهد بود.

به طور خلاصه بر اساس الزامات تغییرناپذیری، ملاحظات ترمودینامیک و بررسی رفتار سیالات واقعی در کلی‌ترین حالت مستدل‌ترین معادله ساختاری $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{D})$ به صورت زیر می‌باشد

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{I} + \hat{\phi}_1(II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}})\mathbf{D} \quad ,\phi_1 \geq 0 \tag{۳-۴۲}$$

با قرار دادن فشار مکانیکی، که در مباحث مرتبط با مکانیک سیالات اثبات می‌شود برابر است با $p = -\mathrm{tr}(\mathbf{T})/3$، در رابطه (۳-۴۲) مقدار α برابر p- بدست می‌آید.

علاوه بر این در جریان برشی ساده و دیگر جریان‌های ویسکومتری مقدار $III_{\mathbf{D}}$ برابر صفر می‌باشد، در نتیجه تابع وابستگی ضریب ϕ_1 به این متغیر را نمی توان با استفاده از بسیار از رئومترها بدست آورد. بعد از اعمال شرایط فوق در معادله ی (۳-۴۲) معادله ساختاری سیال غیرنیوتنی تعمیم یافته طبق فرم زیر بدست می‌آید

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \hat{\phi}_1(II_{\mathbf{D}})\mathbf{D} \quad ,\phi_1 \geq 0 \tag{۳-۴۳}$$

چنانچه رابطه فوق را بر حسب عبارت‌های توابع ویسکومتری[1] بازنویسی گردد رابطه زیر حاصل خواهد شد

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\hat{\eta}\left(II_{\mathbf{D}}\right)\mathbf{D} \quad ,\eta \geq 0 \tag{۴۴-۳}$$

تانسور نرخ تغییر شکل (**D**) در روابط بالا در مختصات استوانه ای به صورت زیر می‌باشد

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \\ sym & & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{۴۵-۳}$$

برای جریان‌های برشی ساده که در این تحقیق مورد بررسی قرا می‌گیرند، جریان محوری درون لوله، تانسور نرخ تغییر شکل به صورت زیر می‌باشد

$$V = V(z) \Rightarrow \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}^2 = \frac{\dot{\gamma}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$II_{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}\left(\left(tr\mathbf{D}\right)^2 - tr\mathbf{D}^2\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\dot{\gamma}^2}{2}\right) = -\frac{\dot{\gamma}^2}{4} \tag{۴۶-۳}$$

در جریان‌های برشی $\dot{\gamma}\left(=\left|\partial v_z / \partial r\right|\right)$ همان نرخ برش است.

در ادامه به چند مورد از مهم‌ترین مدل‌های سیال غیر نیوتنی تعمیم یافته اشاره خواهد شد و به صورت مختصر مزایا و معایب آن‌ها بیان می‌شود.

---

[1] *Viscometric functions*

۳-۵-۲-۲ مدل قانون توانی[1]

یکی از ساده‌ترین مدل ها، سیال نیوتنی تعمیم یافته است. این مدل به دلیل آن که می‌توان توسط آن جواب تحلیلی و دقیق برخی از مسائل را بدست آورد یکی از مدل‌های محبوب به شمار می‌رود. این رابطه که دارای دو پارامتر ثابت است به صورت زیر بیان می‌شود

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \qquad (۳-۴۷)$$

در این رابطه n اندیس قانون توانی[2] است که بی بعد می‌باشد و m اندیس سازگاری[3] است که دارای بعد پاسکال ثانیه به توان n است ($Pa.s^n$). در این مدل چنانچه مقدار n برابر با یک فرض شود مدل سیال نیوتنی خواهد بود و در نتیجه ضریب سازگاری (m) همان لزجت سیال نیوتنی (μ) است. یکی از مزایای مهم این مدل رابطه مستقیم نرخ برش با لزجت می‌باشد که استفاده از آن را در روش‌های تحلیلی ساده و قابل انجام می‌نماید و همچنین در روش‌های عددی برنامه نویسی نیز سهولت بیشتری را ایجاد می‌نماید. یکی از معایب این روش، نتایج غیر واقعی مدل در کرانه‌های نرخ برش می‌باشد. به عبارت دیگر مدل بیان شده در مقادیر بسیار کوچک و مقادیر بسیار بزرگ نرخ برش مقادیر غیر واقعی که با فیزیک مسئله همخوانی ندارد ایجاد می‌کند.

چنانچه در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود به ازای $n<1$ در مقادیر بسیار کوچک نرخ برش مدل برای لزجت سیال مقادیر بسیار بزرگ را ایجاد می‌کند و در مقادیر بزرگ نرخ برش لزجت بسیار کوچک خواهد شد، که این نتایج معمولاً با نتایج آزمایشگاهی مدل‌ها تجربی همخوانی ندارند. و اگر $n>1$

---

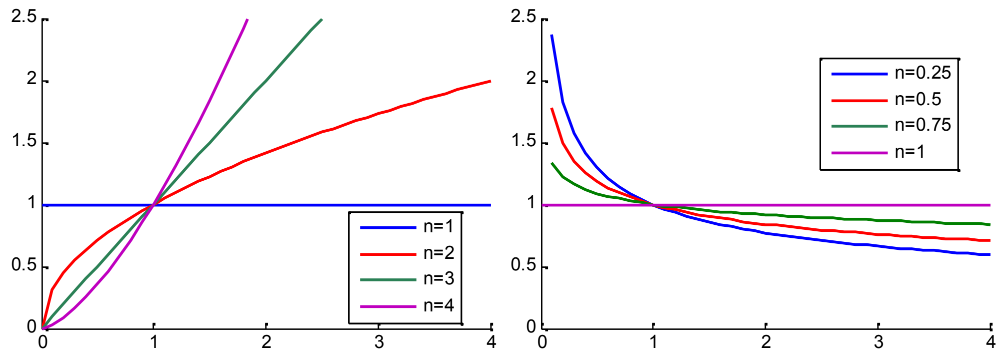
[1] *Power law or Ostwald model*

[2] *Power law index*

[3] *Consistency index*

باشد، به ازا نرخ برش‌های کم لزجت سیال به سمت صفر میل خواهد کرد، در حالی که اگر نرخ برش افزایش یابد با افزایش بی اندازه مقدار لزجت رو به رو خواهیم بود.

چنانچه اندیس توان در مدل قانون توانی بزرگتر از یک باشد این مدل رفتار سیالات دایلاتنت را شبیه سازی می‌کند و اگر این ضریب کوچک‌تر از یک باشد جهت مدل سازی سیالات شبه پلاستیک به کار می‌رود. این تعاریف در شکل ۳-۴ به خوبی قابل مشاهده می‌باشد.



شکل ۳-۴ تغییرات لزجت سیال با نرخ برش در مدل قانون توانی

۳-۵-۲-۳ مدل لزجت کراس[1]

معادله لزجت کراس مدلی است چهار پارامتری که در بین محقیق از مقبولیت بالایی برخوردار می‌باشد. این مدل در کرانه‌های بالا و پایین نرخ برش مقادیری محدود شده و غیر صفر ارائه می‌دهد که از مزایای برجسته این مدل می‌باشد. در حقیقت لزجت سیال بین دو مرز مشخص شده توسط پارامترهای مدل محدود می‌گردد. رابطه این معادله به شکل زیر می‌باشد

$$\frac{\eta-\eta_\infty}{\eta_0-\eta_\infty}=\frac{1}{1+k\dot{\gamma}^n} \qquad (۴۸-۳)$$

[1] *Cross viscosity model*

در این رابطه η_∞ و η_0 مقادیر محدود کننده لزجت ظاهری در نرخ برش‌های بالا و پایین می‌باشند. متغیرهای n و k پارامترهای همسان ساز هستند. اگر متغیر k به سمت صفر میل کند، این مدل معادل مدل سیال نیوتنی با $\mu = \eta_0$ خواهد بود.

همچنین اگر $\eta >> \eta_\infty$ و $\eta << \eta_0$ باشد مدل نتایجی مشابه مدل پاور لاو خواهد داد. در استفاده از مدل کراس به ازا $n = 2/3$ نتایج خروجی مدل توانایی پوشش بسیاری از سیالات موجود را دارد، البته محققی دیگر آن را متغیری تنظیم شونده می‌دادند که با بررسی‌های بیشتر عملکرد بهتری خواهد داشت.

۳-۶- معادلات اندرکنش سیال سازه

برای بدست آوردن معادلات اندرکنش سیال سازه برای یک سیستم لوله، مجموعه معادلات بقا در حالت دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه ای *r-z* نوشته می‌شود. این معادلات شامل یک معادله پیوستگی و دو معادله ممنتوم در جهت‌های محوری و شعاعی با متغیرهای سرعت محوری V_z، سرعت شعاعی V_r، فشار سیال P و دانسیته سیال ρ_f می‌باشند. به علاوه، یک معادله حالت، فشار و دانسیته سیال را به هم مربوط می‌کند.

۳-۶-۱- معادلات پیوستگی و ممنتوم اندرکنش سیال سازه

جهت رسیدن به یک فرمول بندی سازگار با معادلات کلاسیک چکش آبی، معادله ی پیوستگی مذکور در $2\pi r$ضرب شده و سپس از 0 تا شعاع لوله R انتگرالگیری می‌شوند و سپس نتیجه بر πR^2تقسیم می‌شود. با این کار تمام جملات موجود در معادله پیوستگی از حالت دو بعدی برحسب *t,z,r* به یک

بعدی برحسب t,z تبدیل می‌شود. معادله ممنتوم به علت اثر تداخلی سیال سازه هیچ گونه تغییری نخواهد کرد. در این صورت جمله ای به صورت زیر (عبارت آخر) که نشان دهنده سرعت شعاعی ارتعاش جداره لوله می‌باشد افزوده خواهد شد. با این کار، معادله پیوستگی زیر به منظور در نظر گرفتن رفتار تداخلی سیال سازه به همراه معادلات ارتعاش سازه لوله که در قسمت‌های آتی ارائه می‌گردد، حل می‌شود.

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{2}{R}\dot{u}_r\big|_{r=R}=0, \quad \dot{u}_r\big|_{r=R}=V_r\big|_{r=R} \tag{۳-۴۹}$$

و معادله ی ممنتوم در جهت محوری به صورت

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-g\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r} \tag{۳-۵۰}$$

خواهد بود. قابل ذکر است که این رابطه برای مدل تداخلی سیال - سازه به همین صورت بوده و ناشی از این اثرات تغییری نخواهد کرد. که در آن سرعت V و فشار P به صورت زیر می‌باشند

$$V=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r v_z dr \tag{۳-۵۱}$$

$$P=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r p dr \tag{۳-۵۲}$$

که در آن v_z و p به ترتیب توابع توزیع سرعت و فشار در مقطع جریان می‌باشند. در این روابط z امتداد محور لوله، t زمان، g شتاب گرانش زمین، R شعاع داخلی لوله و ρ_f دانسیته سیال است.

کرنش محیطی در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت $\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r}$ تعریف می‌شود که با توجه به محدود بودن امتداد شعاعی r به دیواره داخلی تا دیواره بیرونی لوله، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \;\rightarrow\; u_r = r\varepsilon_\phi, \quad R \le r \le R+e \;\rightarrow\; r \approx R \;\rightarrow\; u_r = R\varepsilon_\phi \tag{۵۳-۳}$$

در این صورت آخرین عبارت در معادله پیوستگی (۳-۴۹)، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{2}{R}\dot{u}_r\Big|_{r=R} = \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial t}\left(R\varepsilon_\phi\right)\Big|_{r=R} = 2\frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} \tag{۵۴-۳}$$

بنابراین معادله پیوستگی (۳-۴۹) با فرض $e << R$ به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K}\frac{\partial P}{\partial t} + 2\frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} = 0 \tag{۵۵-۳}$$

با توجه به رابطه ی سه بعدی تنش - کرنش در مواد الاستیک در جهت ϕ و فرضیات لوله‌های جدار نازک به صورت $\sigma_\phi = DP/2e$ و با فرض ثابت بودن نسبت پواسون و کوچک بودن σ_r در مقایسه با σ_ϕ می توان نوشت

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K}\frac{\partial P}{\partial t} + 2\frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} = 0, \qquad \varepsilon_\phi = \frac{\sigma_\phi}{E} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_z$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{E}\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial t} - \frac{2\upsilon}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = 0 \tag{۵۶-۳}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{D}{Ee}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2\upsilon}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = 0$$

در استخراج روابط فوق، تغییرات ε_z و σ_z در جهت r ناچیز در نظر گرفته می‌شود. جهت تعیین آخرین عبارت در روابط فوق، از معادله پواسون ($\varepsilon_z = \sigma_z / E - \upsilon\sigma_\phi / E$) نسبت به زمان مشتق گیری

می‌نماییم. سپس با توجه به فرضیات لوله جدار نازک وتئوری کرنش‌های کوچک[1] $\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \frac{\upsilon D}{2eE}\frac{\partial P}{\partial t} \qquad (۵۷\text{-}۳)$$

بنابراین معادله پیوستگی به صورت زیر در خواهد آمد

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K}\frac{\partial P}{\partial t} - 2\upsilon\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \left(1-\upsilon^2\right)\frac{D}{eE}\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \qquad (۵۸\text{-}۳)$$

از جایگزینی $P=\rho_f gH$، رابطه ی زیر برای معادله دیفرانسیل پیوستگی در لوله‌ها با در نظر گرفتن اندرکنش سیال سازه، به دست خواهد آمد

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{c_f^2}\frac{\partial H}{\partial t} - 2\upsilon\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \qquad (۵۹\text{-}۳)$$

در این رابطه $\dot{u}_z$ سرعت محوری لوله، ، υ نسبت پواسون، ρ_f دانسیته سیال e ضخامت دیواره لوله و c_f نیز سرعت موج فشاری است که با رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$c_f := \left(\rho_f\left(\frac{1}{K} + \left(1-\upsilon^2\right)\frac{D}{eE}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (۶۰\text{-}۳)$$

که در آن E مدول الاستیک یانگ و K مدول بالک سیال می‌باشد.

---

[1] infinitesimal strain theory

مدل‌های قبلی جریان در لوله تاکنون تنها دو معادله ی پیوستگی و ممنتوم سیال را در نظر می‌گیرند و اثرات تداخلی تا کنون در مدلسازی جریان غیرماندگار در سیستم‌های لوله با سیال غیر نیوتنی درنظر گرفته نشده است. به عبارت دیگر در این مدل ها، در معادله پیوستگی $\dot{u}_z = 0$ فرض می‌گردد. این فرض تنها در صورتی معتبر خواهد بود که تمام نقاط شبکه لوله کاملاً بدون حرکت نگه داشته شود. قابل ذکر است که حتی ارتعاشات بسیار جزیی سازه ای، تغییرات قابل توجه ای در فشارهای ایجاد شده در سیال خواهد داشت.

۳-۶-۲- معادلات ارتعاش محوری سازه

به علت وجود جمله کوپله پواسون در معادله پیوستگی و نیاز به محاسبه جابجایی محوری نقاط مختلف لوله، معادلات مربوط به ارتعاش محوری نیز باید استخراج گردند. ارتعاش محوری نیز به نوبه خود، تحت تاثیر اثرات دیواره لوله خواهد بود. جهت مدلسازی ارتعاش محوری، نقطه آغازین، نوشتن معادلات حرکت در جهات محوری z و شعاعی r در حالت دو بعدی در یک دستگاه مختصات استوانه ای است. این دو معادله به عنوان روابط تعادل ممنتوم در جهت‌های محوری و شعاعی نیز خوانده می‌شوند. از اثرات سختی خمشی[1]، اینرسی دورانی[2] و تغییر شکل برشی عرضی[3] صرف نظر می‌گردد. این فرضیات به عنوان فرضیات امواج با طول موج‌های بلند[4] خوانده می‌شوند. در این فرمولاسیون، متغیرها عبارتند از $\dot{u}_z$، $\dot{u}_r$، σ_z، σ_r، σ_ϕ و $\tau_{rz}=\tau_{zr}$ که همگی توابعی از z و r و t می‌باشند. جرم

---

[1] *Bending stiffness*

[2] *Rotary inertia*

[3] *Transverse shear deformation*

[4] *Long wavelength approximation*

حجمی مصالح لوله ρ_t ثابت می‌باشد و اثرات ترم‌های همرفتی[1] همانند این ترم‌ها در معادلات پیوستگی و ممنتوم سیال ناچیز فرض می‌شود (فرضیات اکوستیک). نیروی بدنی محوری[2] به صورت $F_z=\rho_t g\sin\theta$ و نیروی بدنی شعاعی ناچیز در نظر گرفته می‌شود $(F_r=0)$. در این صورت روابط تعادل ممنتوم در جهت محوری مطابق زیر است

$$\rho_t\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\tau_{zr}\right)}{\partial r}+\rho_t g\sin\theta \qquad (۳-۶۱)$$

و در جهت شعاعی به صورت زیر می‌باشد

$$\rho_t\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\sigma_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}-\frac{\partial \sigma_\phi}{r} \qquad (۳-۶۲)$$

جهت حصول یک فرمول بندی یک بعدی (فقط بر حسب t و z) برای معادلات ارتعاش محوری، معادلات فوق در $2\pi r$ ضرب می‌شوند و سپس نسبت به r از R الی $R+e$ انتگرال گیری شده (R شعاع داخلی لوله و e ضخامت دیواره لوله است.) و بر $2\pi\left(R+e/2\right)e$ تقسیم می‌شوند. همچنین نیروی برشی که نسبت به امتداد محوری متقارن می‌باشد، $\int_R^{R+e}2\pi r\tau_{rz}dr$ ، (جمله موجود در سمت راست فرم انتگرال گیری شده معادله (۳-۶۳) با توجه به فرضیات تقریب با طول موج بلند حذف می‌گردد. پس از این عملیات با توجه به شکل ۳-۵، معادله حرکت در جهت محوری به صورت خواهند بود

$$\rho_t\frac{\partial \bar{\dot{u}}_z}{\partial t}=\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}+\frac{R+e}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\tau_{zr}\Big|_{r=R+e}-\frac{R}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\tau_{zr}\Big|_{r=R}+\rho_t g\sin\theta \qquad (۳-۶۳)$$

---

[1] Convective terms

[2] Axial body force

و معادله حرکت در جهت شعاعی به شکل زیر بدست می‌آید

$$\rho_t \frac{\partial \bar{\dot{u}}_r}{\partial t} = \frac{R+e}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\sigma_r\Big|_{r=R+e} - \frac{R}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\sigma_r\Big|_{r=R} - \frac{1}{R+\frac{e}{2}}\bar{\sigma}_\phi \qquad (۳-۶۴)$$

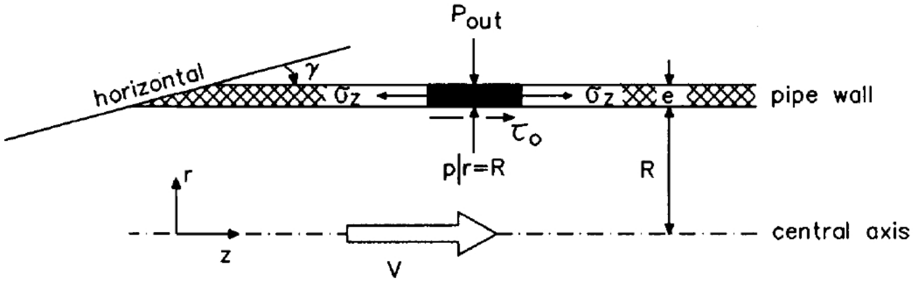
که در آنها $\bar{\sigma}_\phi, \bar{\sigma}_z, \bar{\dot{u}}_r, \bar{\dot{u}}_z$ مقادیر متوسط گیری شده از متغیرهای $\sigma_\phi, \sigma_z, \dot{u}_r, \dot{u}_z$ می باشند

$$\bar{\dot{u}}_z = \frac{1}{2\pi\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_z dr \qquad (۳-۶۵)$$

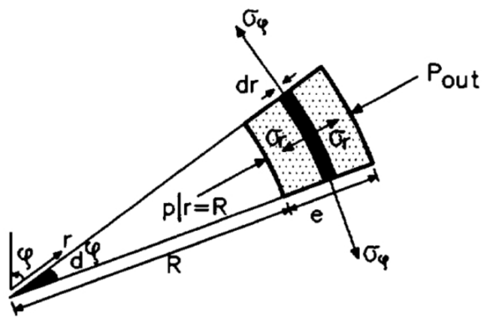
$$\bar{\dot{u}}_r = \frac{1}{2\pi\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_r dr \qquad (۳-۶۶)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2\pi\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_z dr \qquad (۳-۶۷)$$

$$\bar{\sigma}_\phi = \frac{1}{e}\int_R^{R+e} \sigma_\phi dr \qquad (۳-۶۸)$$



شکل ۳-۵ طرح نشان دهنده متغیرهای تعریف شده در توصیف تنش بر دیواره لوله، نمای جانبی (صفحه z-r)



شکل ۳-۶ طرح نشان دهنده متغیرهای تعریف شده در توصیف تنش بر دیواره لوله، نمای مقطع لوله (صفحه $r-\phi$)

معادلات حرکت ارایه شده تا اینجا، سرعت‌های محوری $\dot{u}_z$ را به تنش‌های محوری σ_z و سرعت‌های شعاعی $\dot{u}_r$ را به تنش‌های محیطی[1] σ_ϕ مرتبط می‌نمایند. این روابط حتی در شرایطی که سیستم لوله تحت تأثیر تغییر شکل‌های عرضی بزرگ قرار گیرد نیز صادق می‌باشند.

روابط تنش - جابجایی معادلات را کامل کرده و مدل ریاضی جهت پیاده سازی مدل‌های عددی را قابل حل می‌نماید. دسته دیگر روابط مورد نیاز، روابط کرنش- جابجایی می‌باشند که با فرض کرنش‌های کوچک[2] به صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (۳-۶۹)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \qquad (۳-۷۰)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad (۳-۷۱)$$

[1] *hoop stress*

[2] *infinitesimal strains*

چنانچه مدل‌های جامع تری که قابلیت مدل سازی تغییر شکل‌های بزرگ را داشته باشند مورد نظر باشد می‌توان به جای روابط فوق از روابط مربوط به کرنش‌های گرین استفاده کرد.

چنانچه از رابطه تنش کرنش نسبت به زمان مشتق گیری شود و فرضیات مربوط به لوله‌های جدار نازک و ثابت بودن نسبت پواسون اعمال گردند خواهیم داشت

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{1}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} - \upsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{PD}{Ee}\right) \qquad (۷۲-۳)$$

اکنون با استفاده از تعریف کرنش‌های کوچک برای ε_z، رابطه ی زیر که در حقیقت تنها از نوشتن رابطه ی تنش-کرنش در جهت محوری و تعریف کرنش‌های کوچک به دست آمده است، حاصل می‌گردد.

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{\rho_t c_t^2}\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + g\frac{D}{2}\frac{\upsilon \rho_f}{Ee}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad c_t^2 = \frac{E}{\rho_t}, \qquad (۷۳-۳)$$

که در آن c_t، سرعت موج برشی و ρ_t جرم حجمی مواد لوله می‌باشند.

معادله دیگر معادله بقای ممنتوم[1] می‌باشد که از رابطه (۳-۶۳) با توجه به رابطه زیر که نظر به رفتار سیال و سازه در مرز تماس آن‌ها در دیواره لوله حاصل گردیده است، بدست می‌آید.

$$\tau_{zr}\big|_{r=R} = -\tau_0, \qquad \tau_{zr}\big|_{r=R+e} = 0 \qquad (۷۴-۳)$$

این معادله به صورت زیر می‌باشد و برای مواد الاستیک و حتی در حالت وجود تغییر شکل‌های بزرگ در سیستم لوله فرم یکسانی خواهد داشت (معادله بقای ممنتوم).

---

[1] *Conservation of momentum*

$$\frac{\partial \bar{\dot{u}}_z}{\partial t}-\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}=\frac{R}{\rho_t\left(R+\frac{e}{2}\right)e}\tau_0+g\sin\theta \qquad (۷۵-۳)$$

که در آن θ، زاویه بین محور لوله و یک صفحه افقی می‌باشد. اکنون با استفاده از فرضیات لوله‌های جدار نازک ($e << R$) خواهیم داشت.

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t}-\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=\frac{4A_f\tau_0}{\rho_t A_t D}+g\sin\theta \qquad (۷۶-۳)$$

که در آن A_t و A_f به ترتیب سطح مقطع لوله و سطح مقطع جریان می‌باشند.

دو معادله (۳-۷۳) و (۳-۷۶) همراه با دو معادله پیوستگی و ممنتوم سیال جهت حل مساله تداخل سیال - سازه به عنوان مثال در یک سیستم مخزن - لوله - شیر به کار گرفته می‌شوند. این دو معادله را می‌توان با هم ترکیب کرد و یک معادله دیفرانسیلی درجه دوم نسبت به زمان و مکان جهت مدلسازی ارتعاش محوری لوله استخراج نمود.که در بخش بعد ارائه می‌گردد.

۳-۶-۳- صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در ارتعاش محوری

با توجه به رابطه تنش کرنش، چنانچه از آن نسبت به z مشتق گیری شود و از تئوری کرنش‌های کوچک $\left(\varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{z}\right)$ و نسبت پواسون ثابت استفاده شود، می‌توان نوشت

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\frac{1}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}-\frac{\upsilon}{E}\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial z} \qquad (۷۷-۳)$$

قابل ذکر است که در استخراج رابطه فوق قانون انتگرال لایب نیتز[1] در مشتق گیری از یک انتگرال استفاده شده است که با استفاده از آن می‌توان مشتق نسبت به z از یک انتگرال را به صورت انتگرال مشتق تابع درون انتگرال، نسبت به z نوشت. در مساله حاضر امر مذکور تنها در صورتی معتبر خواهد بود که توابع σ_z , σ_ϕو مشتقاتشان نسبت به z پیوسته باشند. چنانچه در رابطه ی فوق برای $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ از معادله (۳-۷۶) عبارت مناسبی جایگزین نماییم خواهیم داشت.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{E}\left(\rho_t \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} - \frac{4A_f \tau_0}{DA_t} - \rho_t g \sin\theta\right) - \frac{\upsilon}{E}\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial z}, \qquad (۳-۷۸)$$

از آن جا که عبارت در برابر دیگر عبارت‌ها بسیار کوچک می‌باشد می‌توان از آن صرف نظر نمود. که رابطه به صورت زیر منجر خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{\rho_t}{E}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} - \frac{\rho_t g \sin\theta}{E} - \rho_f g \frac{\upsilon D}{2eE}\frac{\partial H}{\partial z} \qquad (۳-۷۹)$$

اکنون چنانچه رابطه حاصله در $c_t^2 = \frac{E}{\rho_t}$ ضرب شود، معادله ارتعاش محوری به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - g\frac{\rho_f}{\rho_t}\frac{D\upsilon}{2e}\frac{\partial H}{\partial z} - g\sin\theta = 0, \qquad c_t^2 = \frac{E}{\rho_t} \qquad (۳-۸۰)$$

[1] *Leibnitz integral rule*

۳-۶-۴- شرایط مرزی

همواره بخش اصلی و تکمیلی هر مدل ریاضی، شرایط مرزی می‌باشند که به صورت معادلاتی بر حسب مجهولات که فقط در مرزها صادق هستند، می‌باشند. جهت مدلسازی اثر تداخلی اتصال، شرایط مرزی باید به نحو مناسبی تعریف شوند. معمولاً متناسب با روش عددی به کار گرفته شده جهت حل معادلات حاکم، شرایط مرزی نیز بایستی به نحوه مناسبی در فرایند حل عددی اعمال شوند و این کار همواره به عنوان بخش اصلی هر روش حل به شمار می‌رود.

اثر تداخلی اتصال، فقط زمانی که بعضی نقاط از سازه که در آنها تغییر ممنتوم اتفاق می‌افتد، کاملاً به زمین مهار نشده باشند بوجود می‌آید. برای مدلسازی اثر تداخلی اتصال، در شرایط مرزی هیدرولیکی پارامترهایی وابسته به سازه و در شرایط مرزی سازه ای مقادیری وابسته به هیدرولیک جریان وارد می‌گردد. بنابراین هیچگونه تغییری در صورت معادلات دیفرانسیلی سیال و سازه ایجاد نمی شوند و تنها عامل ارتباط دهنده این دو (سیال و سازه) به هم، شرایط مرزی می‌باشد. به این ترتیب برای تحلیل کوپله اتصال باید شرایط مرزی را به گونه ای دیگر، برای معادلات هیدرولیکی و سازه ای آماده سازی نمود. هر یک از شرایط مرزی مورد استفاده جهت حل معادلات حاکم، هنگامی که گره نظیرشان از نظر سازه ای کاملاً ثابت نشده باشد تغییراتی در روابط آن‌ها خواهند داشت؛ در این جا این موضوع را برای در نظر گرفتن این تغییرات، بررسی خواهیم کرد.

شرایط مرزی برای شیر، زانویی، تقاطع، انتهای بسته[1]، پمپ و سایر تجهیزات هیدرولیکی نصب شده در یک سیستم هیدرولیکی متفاوت است و باید رابطه حاکم برای هر کدام به صورت جداگانه استخراج

[1] *Closed end*

شود. که در توسط تایسلینگ به طور مفصل انجام شده است. در اینجا به صورت مختصر به تشریح این روابط برای شیر خواهیم پرداخت.

روابط مرزی برای یک شیر با بستن تدریجی که امکان ارتعاش دارد به صورت زیر می‌باشند

$$\frac{V_P - \dot{u}_{zP}}{V_0} = \tau\sqrt{\frac{H_P}{H_0}} \tag{۳-۸۱}$$

$$\sigma_{zP} A_t = \rho_f g A_f H \tag{۳-۸۲}$$

که در آن اندیس P نشان دهنده مجهولات در محل شیر، اندیس 0 نشان دهنده شرایط جریان پایدار و پارامتر τ درصد بازشدگی شیر می‌باشد.

در صورتی که فقط مدل سازی اثر تداخلی پواسون مورد نظر باشد گره‌های مرز به صورت کاملا تثبیت شده در نظر گرفته می‌شوند تا اثر تداخلی اتصال ایجاد نگردد. بنابراین در این حالت وجود جابجایی صفر برای گره شیر مورد انتظار است که با اعمال $\dot{u}_{zP} = 0$ در رابطه (۳-۸۱) شرط مرزی مورد نظر حاصل می‌شود.

قابل ذکر است که با توجه به بی حرکت بودن گره شیر در حالت اثر تداخلی پواسون، تمام نیروی هیدرولیکی اثر کننده در این نقطه که با رابطه (۳-۸۲) داده می‌شود به تکیه گاه منتقل می‌شود. در حالی که در حالت اثر تداخلی اتصال، این نیروی هیدرولیکی، خود باعث ایجاد یک موج تنشی در سازه می‌گردد که با امواج سازه ای تولید شده به علت اثر تداخلی پواسون جمع می‌گردد.

فصل چهارم

روش‌های عددی

۴-۱- مقدمه

معادلات بدست آمده در فصول قبل برای جریان غیرماندگار (شبه دو بعدی) را به سختی و برای موارد بسیار محدودی می‌توان به صورت تحلیلی بدست آورد. به همین علت از تکنیک‌های عددی برای تخمین جواب‌های مسئله استفاده می‌شود. روش خطوط مشخصه به علت دارا بودن دقت بالا، سادگی حل، سهولت برنامه نویسی و بازده بالای روش عددی، یکی از گسترده‌ترین و محبوب‌ترین روش‌های حل این معادلات می‌باشد. از دیگر روش‌های حل عددی می‌توان روش‌های تفاضل محدود، روش حجم محدود، روش اجزا محدود را نام برد که پیشتر در مورد آن‌ها مطالبی ذکر گردید. در این رساله از دو روش تفاضل محدود و خطوط مشخصه که در ادامه به تفصیل در مورد آن‌ها بحث گردیده، برای حل معادلات بدست آمده استفاده شده است.

۴-۲- روش تفاضل محدود

اولین روشی که برای حل معادلات حاصل در فصل گذشته مورد استفاده قرار گرفته روش تفاضل محدود به صورت صریح می‌باشد. کلیات استفاده از این روش بدین شکل است که جهت گسسته سازی ترم‌های مکانی (مشتق‌های مکانی) از فرم تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم بهره جسته شده است و برای گسسته سازی عبارت‌های شامل تفاضل زمان و یا به عبارت دیگر برای انتگرال گیری زمانی از روش رانج کوتای مرتبه چهارم[1] استفاده می‌گردد. همچنین برای حذف نوسانات عددی الگوریتم‌های مستهلک کننده مجموع تغییرات به کار رفته است[۵۳].

---

[1] *fourth-order Runge–Kutta scheme*

به دلیل آن که هدف بررسی سیال غیرنیوتنی در جریان‌های غیرماندگار است، لذا برای تحلیل این جریان و سیال مورد نظر اطلاعات دقیق‌تری از مولفه‌های جریان از جمله سرعت جریان در هر نقطه از سطح مقطع، محاسبه نرخ کرنش و متغیرهای دیگر نیاز می‌باشد. به همین جهت استفاده از مدل‌های تک بعدی امکان پذیر نبوده و می‌بایست جریان غیرماندگار لوله به صورت دو بعدی شبیه سازی گردد تا به توان از آن برای محاسبه دقیق متغیرهای جریان و در نتیجه استفاده از آن‌ها برای دست یافتن به مشخصات سیال در هر لحظه و مکان بهره جست.

همان گونه که قبلاً بیان شد، از آن جا که مسئله مورد بررسی در این رساله محدود به مجاری بسته لوله شکل می‌باشد، لذا از مختصات استوانه ای جهت استحصال معادلات استفاده شده است. معادلاتی که برای حل جریان غیرماندگار به کار برده می‌شوند شامل معادله پیوستگی و سه معادله ممنتوم هستند. معادله پیوستگی به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial H}{\partial t}+v_z\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (۱-۴)$$

قابل ذکر است که در رابطه فوق متغیر سرعت، V، سرعت سیال در راستای محوری لوله می‌باشد که تابعی از زمان و مکان محور لوله است، که با میانگین گیری از توزیع سرعت در راستای شعاعی لوله در هر مقطع به صورت جداگانه محاسبه می‌شود. در حقیقت این متغیر، سرعت میانگین سیال در سطح مقطع لوله در یک زمان و در یک مکان از محور لوله خواهد بود.

از مجموع سه معادله ممنتوم، معادله ممنتوم در راستای زاویه ای به دلیل داشتن تقارن محوری لوله به صورت خودکار از مجموع معادلات حل شونده، حذف خواهد شد.

معادله ممنتوم در راستای شعاعی به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{\partial H}{\partial r}=0 \tag{۲-۴}$$

در حقیقت مقدار فشار و یا هد لوله فقط تابعی از مختصات محوری لوله و زمان می‌باشد. و نسبت به سطح مقطع لوله عددی است ثابت.

و در نهایت معادله سوم، معادله اصلی ممنتوم، معادله در راستای محور لوله است، که به فرم زیر نشان داده می‌شود

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-g\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau_{rz}}{\partial r} \tag{۳-۴}$$

در رابطه فوق هد لوله، H ، تابع مکان راستای لوله و زمان است، اما سرعت محوری مولفه ای است که علاوه بر مکان راستای لوله و زمان، تابع شعاع لوله نیز می‌باشد، بدین معنی که در راستای شعاع لوله متغیر خواهد بود. r متغیر مستقل شعاع لوله است. در معادله فوق تنش برشی سیال که همانند سرعت تابع شعاع لوله نیز می‌باشد با τ_{rz} نشان داده شده است، این مولفه تنش برشی روی صفحه استوانه ای لوله در راستای محور لوله خواهد بود.

در روش تفاضل محدود استفاده شده، متغیر فشار در سطح مقطع ثابت می‌باشد، اما سرعت محوری لوله در مقطع لوله متغیر است به عبارت دیگر سرعت از مرکز لوله به سمت جداره لوله دارای مقادیر مختلف خواهد بود. ذکر این نکته ضرروی است که مولفه‌های دیگر سرعت یعنی مولفه سرعت شعاعی و مولفه سرعت زاویه ای در همه ی زمان‌ها و همه ی مکان‌ها برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند، که البته این فرض با فیزیک مسئله جریان‌های غیرماندگار در لوله‌ها به علت وجود تقارن محوری قابل قبول می‌باشد. به همین علت است که غالباً حل این گونه مسائل تحت عنوان حل شبه دو بعدی شناخته می‌شوند.

روش حل بدین گونه است که ابتدا با حل معادله ممنتوم به ازای مقادیر مختلف شعاع از جداره لوله تا مرکز لوله مولفه‌های سرعت به نحوی که در ادامه بیان خواهد شد، محاسبه می‌شوند. سپس در یک مقطع مشخص از لوله که تمامی مولفه‌های سرعت آن تعیین گردیده‌اند، با انتگرال گیری عددی در مختصات استوانه ای روی سطح مقطع دایره ای لوله، می‌توان سرعت متوسط در آن مقطع را محاسبه نمود. در ادامه با استفاده از سرعت متوسط محاسبه شده و استفاده از معادله پیوستگی، حل مسئله دنبال خواهد شد.

با توجه به توضیحات فوق، معادلات قبل بر اساس سرعت متوسط سطح مقطع و همچنین برای سهولت بیشتر به شکل زیر باز نویسی شده‌اند

$$\frac{\partial H}{\partial t}+V\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial V}{\partial z}=0 \tag{۴-۴}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial z}+g\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r} \tag{۴-۵}$$

و همچنین در فرم ماتریسی روابط به صورت آن چه در ادامه آورده شده نشان داده خواهند شد

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial H}{\partial t}\\ \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}V & c^2/g\\ g & v_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial H}{\partial z}\\ \\ \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \\ \frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r}\end{bmatrix} \tag{۴-۶}$$

با تعریف متغیرهای W، B و C به صورت زیر

$$w=\begin{bmatrix} H \\ v_z \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} V & c^2/g \\ g & v_z \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{۷-۴}$$

دستگاه معادلات جریان غیرماندگار شبه دو بعدی به فرم مختصر زیر قابل بیان خواهد بود

$$\frac{\partial W}{\partial t}+B\frac{\partial W}{\partial z}=C \tag{۸-۴}$$

چنانچه پیش‌تر نیز بیان شد برای حل معادلات فوق با استفاده از روش تفاضل محدود، برای عبارت‌های مکانی از فرم تفاضل مرکزی مرتبه دوم و برای ترم‌های زمانی از رانج کوتای مرتبه چهار استفاده شده است. در ادامه نحوی استفاده از این روش‌ها در حل معادلات را توضیح خواهیم داد.

۴-۲-۱- توضیح روش رانج کوتا و روابط استخراج شده

روش رانج کوتا یکی از روش‌های معروف حل معادلات دیفرانسیل به صورت عددی است، که از مجموعه روش‌های تکراری محسوب می‌گردد و به صورت صریح و ضمنی قابل استفاده می‌باشد. این روش معمولا در حل مسائلی که نیاز به گسسته سازی زمانی دارند به کاربرده می‌شود. این الگورتیم در حدود سال ۱۹۰۰ میلادی توسط ریاضیدانان آلمانی به نام‌های کارل دیوید رانج و مارتین ویلیام کوتا پیشنهاد گردید[۵۴].

همان طور که بیان شد مدل‌های مختلفی از روش رانج کوتا موجود است. روشی که در این جا از آن کمک گرفته شده است معروف به روش رانج کوتای مرتبه چهارم می‌باشد. این روش به صورت صریح عمل کرده و همان گونه که از نام آن پیداست، دقت خطای آن از مرتبه چهارم است.

چنانچه تابع $y'=f(t,y)$ مفروض باشد، با معلوم بودن $y(t_n)=y_n$ مقدار y در گام زمانی بعدی $(y(t_n+dt))$

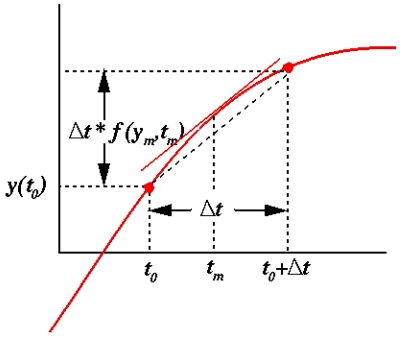
به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{6}\left(\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + 2\Delta y_3 + \Delta y_4\right) \qquad (۹-۴)$$

که مقدار Δy_1 تا Δy_4 مقدار افزایش تابع به گام زمانی بعدی به ازائ شیب مختلف می‌باشد. این مقادیر افزایش، با استفاده از مشتق تابع موجود به ترتیب در گام اول با مقادیر تابع در همان مکان و سپس در میانه گام با مقادیر به روز شده ی محاسبه شده و در نهایت با مقادیر به روز شده در انتهای گام حاصل می‌شوند. که روابط آن به فرم زیر است.

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= \Delta t\ f(t_n, y_n) \\
\Delta y_2 &= \Delta t\ f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta y_1}{2}) \\
\Delta y_3 &= \Delta t\ f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta y_2}{2}) \\
\Delta y_4 &= \Delta t\ f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta y_3)
\end{aligned} \qquad (۱۰-۴)$$

در شکل ۴-۱ حرکت از گام اولیه به گام ثانویه نشان داده شده است.



شکل ۴-۱ استفاده از شیب نقطه میانی در روش رانج کوتا

۴-۲-۲- عبارت‌های کاهنده مجموع تغییرات

حل معادلات هذلولی به وسیله فرم تفاضل محدود سبب ایجاد نوسانات غیر واقعی عددی در نتایج خواهد شد. یکی از روش‌های حذف این نوسانات عددی به کاربردن روش‌های کاهش مجموع تغییرات[۱] (*TVD*) می‌باشد. در ادامه توضیحات مختصری در ارتباط با این روش آورده شده است[۵۵] [۵۶].

مجموع تغییرات: برای یک تابع مشخص $q^n = \{q_i^n\}$ با ثوابت q_i^n، که در آن اندیس i از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت تغییر می‌کند، مجموع تغییر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$TV(q) = \int \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| dx \tag{۴-۱۱}$$

و صورت گسسته آن مطابق رابطه زیر می‌باشد

$$TV(q^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left|q_{i+1}^n - q_i^n\right| \tag{۴-۱۲}$$

روش *TVD*: چنانچه شرط زیر در مورد مجموع تغییرات برقرار باشد، به این روش *TVD* گفته می‌شود

$$TV(q^{n+1}) \le TV(q^n) \tag{۴-۱۳}$$

در این روش برای حفظ شرط فوق، عبارت مستهلک کننده مرتبه دومی به معادلات پایه افزوده می‌شود. عملکرد این عبارات به گونه ای است که در نواحی که گرادیان تغییرات زیاد باشد عبارت مستهلک کننده افزوده شده، سبب حذف نوسانات اضافی می‌شود، و در نواحی که گرادیان تغییرات اندک باشد به صورتی که در تشکیل ضرایب و تعیین مقادیر آورده شده است، عملکرد این عبارات

---

[1] *Total Variation Diminishing*

بدون تاثیر خواهند بود.

پس از افزودن عبارات مستهلک کننده $A_v(W)$ به معادلات پایه، صورت نهایی معادلات به صورت زیر خواهد شد

$$\frac{\partial W}{\partial t}+B\frac{\partial W}{\partial z}=C+A_v(W) \tag{۱۴-۴}$$

نحوی محاسبه عبارت‌های مستهلک کننده برگرفته از مطالعات جامسون و همکاران[۵۳, ۵۴, ۵۷] است. عبارات مستهلک کننده با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند

$$A_v(W)=\varepsilon_{i+1/2}\frac{W_{i+1}-W_i}{\Delta t}-\varepsilon_{i-1/2}\frac{W_i-W_{i-1}}{\Delta t} \tag{۱۵-۴}$$

چنانچه مشاهده می‌شود به هر میزان که مقدار ε زیاد گردد، مقدار عبارت کاهنده نیز بیشتر خواهد شد. البته مجموع این دو متغیر می‌بایست بین صفر و یک باشد. در این رابطه ضرایب ε به شکل زیر محاسبه خواهند شد

$$\varepsilon_{i+1/2}=\frac{1}{2}\max(\alpha_{i+2},\alpha_{i+1},\alpha_i,\alpha_{i-1}) \tag{۱۶-۴}$$

$$\varepsilon_{i-1/2}=\frac{1}{2}\max(\alpha_{i+1},\alpha_i,\alpha_{i-1},\alpha_{i-2}) \tag{۱۷-۴}$$

در این رابطه اندیس i مشخص کننده متغیرهای مکانی است. متغیر α در روابط فوق همانند یک سویچ عمل می‌کند، که این سویچ توانایی تشخیص نواحی با گرادیان بالا را دارا می‌باشد. برای استفاده از این سویچ و به عبارت دیگر محاسبه مقدار α در بررسی‌های مختلف که بیشتر پایه ریاضیاتی دارند، روابط گوناگونی ارائه گردیده است. در این رساله، از این بین رابطه ی زیر که توسط سوانسون پیشنهاد

گردیده، به کار گرفته شده است.

$$\alpha_i = \frac{\left|W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}\right|}{(1-\omega)\Psi_{TVD} + \omega\Psi} \tag{۱۸-۴}$$

$$\Psi = \left|W_{i+1} + 2W_i + W_{i-1}\right| \tag{۱۹-۴}$$

$$\Psi_{TVD} = \left|W_{i+1} - W_i\right| + \left|W_i - W_{i-1}\right| \tag{۲۰-۴}$$

که ω می‌بایست بین صفر و یک انتخاب گردد. در صورتی که $\omega << 1$ باشد، شرایط روش کاهنده تغییرات کل برقرار خواهد بود. برای تاثیر بیشتر این عملکرد مقدار ω برابر با صفر در نظر گرفته شده است. با این شرط، رابطه مقدار α را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود

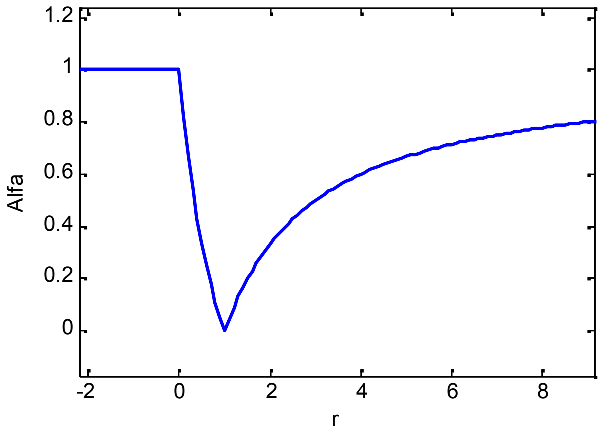
$$r = \frac{W_i - W_{i-1}}{W_{i+1} - W_i} \tag{۲۱-۴}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{\left|1-r\right|}{1+1} & r > 0 \\ 1 & r < 0 \end{cases} \tag{۲۲-۴}$$

چنانچه از این توابع مشخص است، زمانی که مقدار r منفی گردد، به معنی این است که مکان محاسباتی فعلی در یک بیشینه یا کمینه نسبی قرار دارد، مقدار α به بیشترین مقدار خود یعنی یک خواهد رسید، که در نتیجه آن همان طور که پیشتر بیان شد مقدار عبارت کاهنده نیز به بیشترین مقدار خود می‌رسد. به عبارت دیگر این عملگر وظیفه خود را در تعیین نواحی گرادیان بالا به خوبی عمل نموده است. اما در نواحی که تغییرات یک متغیر اندک باشد، نسبت تغییرات دو بازه متوالی یا همان مقدار r به سمت یک میل خواهد کرد. نزدیک شدن مقدار r به عدد یک چنانچه از رابطه

(۴-۲۴) مشخص است، مقدار α به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه با صفر شدن مقدار α عبارت کاهنده به کمترین مقدار خود می‌رسد. اگر مقدار r صفر باشد مقدار α نیز صفر می‌شود و در نتیجه مقدار عبارت کاهنده نیز صفر خواهد شد. این مطلب مطابق است با آن چه که در مورد عملکرد سویچ و روش کاهنده تغییرات کل بیان شد. در حقیقت در نواحی که مقدار گرادیان اندک باشد سویچ به طور خودکار مقدار عبارت کاهنده را صفر خواهد نمود.

برای مشاهده بهتر رابطه بین متغیر r و α، رابطه این دو متغیر در شکل ۴-۲ نشان داده شده است.



شکل ۴-۲ عملکرد تابع سویچ به ازای مقادر مختلف r

۴-۲-۳- فرم گسسته معادله پیوستگی در روش رانج کوتا

با استفاده از روش انتگرال گیری عددی رانج کوتا و استفاده از فرم تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی صورت گسسته معادله پیوستگی به صورت زیر بدست خواهد آمد.

در این جا ذکر این نکته ضرروی است که برای استفاده از معادله پیوستگی در هر مرحله از مولفه‌های سرعت محوری بر روی سطح مقطع لوله در محل مورد نظر انتگرال گیری عددی به عمل می‌آید و با

محاسبه مقدار میانگین آن، سرعت میانگین در سطح مقطع محاسبه شده و از آن در معادله پیوستگی استفاده می‌شود.

(۲۳-۴)

$$\Delta H_{1,i} = -dt\left(V_{i,tn}\frac{H_{i+1}-H_{i-1}}{2\Delta x}+\frac{c^2}{g}\frac{V_{i+1}-V_{i-1}}{2\Delta x}+Av_{H1}\right)$$

$$\Delta H_{2,i} = -dt\left(V_{i,tn+\frac{dt}{2}}\frac{\left(H_{i+1}+\frac{\Delta H_{1,i+1}}{2}\right)-\left(H_{i-1}+\frac{\Delta H_{1,i-1}}{2}\right)}{2\Delta x}+\frac{c^2}{g}\frac{\left(V_{i+1}+\frac{\Delta V_{1,i+1}}{2}\right)-\left(V_{i-1}+\frac{\Delta V_{1,i-1}}{2}\right)}{2\Delta x}+Av_{H2}\right)$$

$$\Delta H_{3,i} = -dt\left(V_{i,tn+\frac{dt}{2}}\frac{\left(H_{i+1}+\frac{\Delta H_{2,i+1}}{2}\right)-\left(H_{i-1}+\frac{\Delta H_{2,i-1}}{2}\right)}{2\Delta x}+\frac{c^2}{g}\frac{\left(V_{i+1}+\frac{\Delta V_{2,i+1}}{2}\right)-\left(V_{i-1}+\frac{\Delta V_{2,i-1}}{2}\right)}{2\Delta x}+Av_{H3}\right)$$

$$\Delta H_{4,i} = -dt\left(V_{i,tn+dt}\frac{\left(H_{i+1}+\Delta H_{3,i+1}\right)-\left(H_{i-1}+\Delta H_{3,i-1}\right)}{2\Delta x}+\frac{c^2}{g}\frac{\left(V_{i+1}+\Delta V_{3,i+1}\right)-\left(V_{i-1}+\Delta V_{3,i-1}\right)}{2\Delta x}+Av_{H4}\right)$$

۴-۲-۴- نحوی محاسبه عبارت‌های کاهنده در معادله پیوستگی

مقادیر عبارت‌های کاهنده (Av_{Hk}) طبق آن چه پیشتر بیان شد، محاسبه خواهند شد. در ادامه روابط ارائه شده در بخش برای معادله پیوستگی بسط داده شده‌اند و فرم تفاضل محدود آن‌ها به صورت رابطه (۴-۲۴) بدست می‌آیند

در طی مراحل بدست آوردن عبارت‌های کاهنده روش تغییرات کل می‌بایست ضرایب r_i و α_i محاسبه گردند. این ضرایب نیز به ترتیب روابطی که در ادامه آورده شده‌اند محاسبه می‌شوند

(۲۴-۴)

$$A_{vH1}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(H_{i+1}-H_i\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(H_i-H_{i-1}\right)\right]$$

$$A_{vH2}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(\left(H_{i+1}+\frac{\Delta H_{1,i+1}}{2}\right)-\left(H_i+\frac{\Delta H_{1,i}}{2}\right)\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(\left(H_i+\frac{\Delta H_{1,i}}{2}\right)-\left(H_{i-1}+\frac{\Delta H_{1,i-1}}{2}\right)\right)\right]$$

$$A_{vH3}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(\left(H_{i+1}+\frac{\Delta H_{2,i+1}}{2}\right)-\left(H_i+\frac{\Delta H_{2,i}}{2}\right)\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(\left(H_i+\frac{\Delta H_{2,i}}{2}\right)-\left(H_{i-1}+\frac{\Delta H_{2,i-1}}{2}\right)\right)\right]$$

$$A_{vH4}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(\left(H_{i+1}+\Delta H_{3,i+1}\right)-\left(H_i+\Delta H_{3,i}\right)\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(\left(H_i+\Delta H_{3,i}\right)-\left(H_{i-1}+\Delta H_{3,i-1}\right)\right)\right]$$

$$r_i=\frac{H_i-H_{i-1}}{H_{i+1}-H_i} \qquad (۲۵-۴)$$

$$\alpha_i=\begin{cases}\dfrac{\left|1-r_i\right|}{1+1} & r_i>0\\ 1 & r_i<0\end{cases} \qquad (۲۶-۴)$$

پس محاسبه α_{i-1} تا α_{i+2} نصف بیشینه مقدار آن به عنوان مقدار $\varepsilon_{i+1/2}$ در نظر گرفته می‌شود. و همچنین مقدار $\varepsilon_{i-1/2}$ برابر نصف بیشینه مقدار α_{i-2} تا α_{i+1} می‌باشد.

و در نهایت با محاسبه مقادیر تغییرات هد از گام زمانی t تا $t+\Delta t$ می‌توان مقدار هد را در گام زمانی $t+\Delta t$ با استفاده از میانگین گیری زیر بدست آورد

$$H_{i,t+\Delta t}=H_{i,t}+\frac{1}{6}\left(\Delta H_{1,i}+2\Delta H_{2,i}+2\Delta H_{3,i}+\Delta H_{4,i}\right) \qquad (۲۷-۴)$$

۴-۲-۵- حل معادله ممنتوم به روش رانج کوتا

همان طور که در توضیحات این روش انتگرال گیری آورده شد، در هر گام زمانی در چهار مرحله مقادیر افزایش متغیرهای معادله دیفرانسیل محاسبه شده و در انتهای هر گام زمانی با استفاده از میانگین گیری ذکر شده، مقدار متغیرها در انتهای گام زمانی بدست می‌آیند. از آن جا که در مسئله جریان‌های غیرماندگار در سیستم لوله‌ها دو معادله پیوستگی و ممنتوم وجود دارد لذا روش حل بدین صورت است که در هر مرحله از چهار مرحله یک گام زمانی، ابتدا معادله پیوستگی محاسبه می‌شود و سپس در همان مرحله معادله ممنتوم حل خواهد شد.

تفاوت اساسی که در حل این دو معادله وجود دارد میان متغیرهای مجهول هر کدام از این دو معادله می‌باشد. زمانی که معادله پیوستگی حل می‌شود، متغیر مجهول H است. از آن جا که این متغیر در کل سطح مقطع یکسان و ثابت می‌باشد در نتیجه با حل یک بار معادله پیوستگی مقدار مجهول هد تعیین می‌شود. اما به دلیل این که متغییر مجهول سرعت، V، در معادله ممنتوم در امتداد شعاعی متغیر است، لذا این متغییر در این راستا مقادیر مختلفی به خود اختصاص خواهد داد، که در نتیجه آن پروفیل سرعت در سطح مقطع در آن مکان را تشکیل خواهند داد. به همین دلیل برای محاسبه هر کدام از مولفه سرعت در راستای شعاعی، معادله ممنتوم می‌بایست یک بار حل گردد. که تعداد این معادلات و حل‌ها وابسته به تعداد شبکه بندی و یا همان تعداد گره‌های انتخابی در راستای شعاعی می‌باشد.

در ادامه حل معادله ممنتوم، در این قسمت صورت معادله گسسته شده و همچنین عبارت‌های کاهنده این معادله آورده شده است.

(۲۸-۴)

$$\Delta u_{1,i,j}=dt\left(-g\frac{H_{i+1}-H_{i-1}}{2\Delta x}+\frac{1}{\rho r_j}\frac{(r_j+\Delta r)(\tau_{rz,j+1})-(r_j-\Delta r)(\tau_{rz,j-1})}{2\Delta r}+Av_{u1}\right)$$

$$\Delta u_{2,i,j}=dt\left(-g\frac{\left(H_{i+1}+\frac{\Delta H_{1,i+1}}{2}\right)-\left(H_{i-1}+\frac{\Delta H_{1,i-1}}{2}\right)}{2\Delta x}+\frac{1}{\rho r_j}\frac{(r_j+\Delta r)(\tau_{rz,j+1})-(r_j-\Delta r)(\tau_{rz,j-1})}{2\Delta r}+Av_{u2}\right)$$

$$\Delta u_{3,i,j}=dt\left(-g\frac{\left(H_{i+1}+\frac{\Delta H_{2,i+1}}{2}\right)-\left(H_{i-1}+\frac{\Delta H_{2,i-1}}{2}\right)}{2\Delta x}+\frac{1}{\rho r_j}\frac{(r_j+\Delta r)(\tau_{rz,j+1})-(r_j-\Delta r)(\tau_{rz,j-1})}{2\Delta r}+Av_{u3}\right)$$

$$\Delta u_{4,i,j}=dt\left(-g\frac{(H_{i+1}+\Delta H_{3,i+1})-(H_{i-1}+\Delta H_{3,i-1})}{2\Delta x}+\frac{1}{\rho r_j}\frac{(r_j+\Delta r)(\tau_{rz,j+1})-(r_j-\Delta r)(\tau_{rz,j-1})}{2\Delta r}+Av_{u4}\right)$$

محاسبه $\tau_{rz,j}$ در روابط بالا، می‌بایست مطابق روش رانج کوتا صورت گیرد، که در ادامه نحوی محاسبه آن به صورت فرم گسسته در چهار گام بالا به ترتیب گام‌ها آورده شده است

$$step1:\ \ \tau_{rz,j}=\eta_j\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta r} \tag{۲۹-۴}$$

$$step2:\ \ \tau_{rz,j}=\eta_j\frac{\left(u_{j+1}+\frac{\Delta u_{1,i,j+1}}{2}\right)-\left(u_{j-1}+\frac{\Delta u_{1,i,j-1}}{2}\right)}{2\Delta r}$$

$$step3:\ \ \tau_{rz,j}=\eta_j\frac{\left(u_{j+1}+\frac{\Delta u_{2,i,j+1}}{2}\right)-\left(u_{j-1}+\frac{\Delta u_{2,i,j-1}}{2}\right)}{2\Delta r}$$

$$step4:\ \ \tau_{rz,j}=\eta_j\frac{(u_{j+1}+\Delta u_{3,i,j+1})-(u_{j-1}+\Delta u_{3,i,j-1})}{2\Delta r}$$

همچنین فرمول بندی عبارت‌های کاهنده به صورت زیر خواهد بود

$$A_{vu1}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(u_{i+1,j}-u_{i,j}\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(u_{i,j}-u_{i-1,j}\right)\right] \tag{۳۰-۴}$$

$$A_{vu2}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(\left(u_{i+1}+\frac{\Delta u_{1,i+1}}{2}\right)-\left(u_{i}+\frac{\Delta u_{1,i}}{2}\right)\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(\left(u_{i}+\frac{\Delta u_{1,i}}{2}\right)-\left(u_{i-1}+\frac{\Delta u_{1,i-1}}{2}\right)\right)\right]$$

$$A_{vu3}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(\left(u_{i+1}+\frac{\Delta u_{2,i+1}}{2}\right)-\left(u_{i}+\frac{\Delta u_{2,i}}{2}\right)\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(\left(u_{i}+\frac{\Delta u_{2,i}}{2}\right)-\left(u_{i-1}+\frac{\Delta u_{2,i-1}}{2}\right)\right)\right]$$

$$A_{vu4}=\frac{1}{\Delta t}\left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\left(\left(u_{i+1}+\Delta u_{3,i+1}\right)-\left(u_{i}+\Delta u_{3,i}\right)\right)-\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}\left(\left(u_{i}+\Delta u_{3,i}\right)-\left(u_{i-1}+\Delta u_{3,i-1}\right)\right)\right]$$

پس از محاسبه $\Delta u_{1,i,j}$ تا $\Delta u_{4,i,j}$ می‌توان مقدار $u_{i,j}$ را در گام زمانی بعدی طبق رابطه زیر بدست آورد

$$u_{i,j,t+\Delta t}=u_{i,j,t}+\frac{1}{6}\left(\Delta u_{1,i,j}+2\Delta u_{2,i,j}+2\Delta u_{3,i,j}+\Delta u_{4,i,j}\right) \tag{۳۱-۴}$$

با انجام روابط و روش‌های فوق مولفه‌های سرعت در یک مقطع به ازاء شبکه تشکیل شده در راستای شعاعی و در نتیجه پروفیل سرعت در مقطع بدست می‌آید. پس از استخراج پروفیل سرعت می‌بایست سرعت میانگین که در مراحل بعدی مورد استفاده واقع می‌شود محاسبه گردد. سرعت میانگین از رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$V=\frac{\int_0^R 2\pi r v_z\,dr}{\pi R^2} \tag{۳۲-۴}$$

جهت برآورد انتگرال فوق می‌توان از روش‌های عددی مختلف مرسوم استفاده نمود. در این جا از روش

انتگرال گیری یک سوم سیمسون[1] که از دقت بالایی برخودار است بهره جسته ایم. فرم گسسته رابطه فوق بر اساس قاعده انتگرال گیری سیمسون به صورت زیر می‌باشد

$$V = \frac{2\pi}{\pi R^2}\frac{\Delta r}{3}\left(u_1 r_1 + 4u_2 r_2 + 2u_3 r_3 + 4u_4 r_4 + \ldots + 2u_{n-2} r_{n-2} + 4u_{n-1} r_{n-1} + u_n r_n\right) \qquad (۳۳-۴)$$

در استفاده از روش بالا به این نکته باید دقت کرد که تعداد نقاط انتخاب شده یا همان تعداد گره‌ها در راستای شعاعی بایستی عددی فرد باشد.

۴-۲-۶- شرایط مرزی

شرایط مرزی: شرایط مرزی نیز در انتهای هر مرحله از چهار مرحله انتگرال گیری رانج کوتا به روشی به سبک نقاط میانی اعمال می‌گردند.

برای اعمال شرط مرزی مخزن با برابر قرار دادن فشار گره مخزن با فشار مخزن می‌توان با استفاده از تک معادله ممنتوم سرعت در سطح مقطع گره مخزن را محاسبه نمود. همچنین برای محاسبه شرط مرزی شیر پس از بستن شیر با صفر قرار دادن سرعت در گره مذکور، با استفاده از معادله پیوستگی مقدار فشار در گره شیر قابل محاسبه می‌باشد.

با انجام تحلیل‌ها و روش‌های فوق روی کل نقاط داخلی شبکه در راستای محوری و شعاعی به ترتیبی که بیان شد و اعمال شرایط مرزی، انجام محاسبات در یک گام زمانی به اتمام خواهد رسید، و این فرآیند تا گام زمانی انتهایی تکرار می‌شود.

---

[1] *Simpson's 1/3 Rule*

۴-۳- روش خطوط مشخصه

روش دیگری که برای حل معادلات ضربه قرچ و جریان غیرماندگار با اعمال اثر غیرنیوتنی سیال در سیستم لوله به کار گرفته شده است استفاده از روش خطوط مشخصه می‌باشد. این روش نسبت روش انتگرال گیری رانج کوتا دارای مزایا و معایبی است. از جمله مزیت‌های مهم روش خطوط مشخصه می‌توان به دقت بالا همزمان با سرعت بالای حل اشاره نمود، اما امکان ایجاد تغییرات و دست ورزی در معادلات مشکل‌تر می‌باشد.

برای حل معادلات جریان غیرماندگار با در نظر سیال غیرنیوتنی، همان طور که پیشتر هم اشاره شد، ضروری است که اطلاعات دقیق‌تری در مورد مشخصات جریان از جمله مولفه‌های سرعت و تغییرات آن در سطح مقطع داشته باشیم، لذا نمی توان از معادلات جریان یک بعدی استفاده کرد. به همین دلیل معادلات جریان غیرماندگار به صورت دو بعدی حل خواهند شد.

از آن جا که معادلات حاصل شده در فصل قبل ترکیبی از یک معادله هذلولی و یک معادله سهموی می‌باشد، برای حل معادلات همزمان از روش خطوط مشخصه و تفاضل محدود بهره برده می‌شود، بدین صورت که می‌بایست بخش هذلولوی معادله توسط خطوط مشخصه و بخش سهموی آن توسط روش تفاضل محدود محاسبه گردد[۵۸].

برای اولین بار واردی و هانگ جریان غیرماندگار با سیال نیوتنی را با این روش حل نمودند. این روش دارای مزایای قابل توجه ای بود، از جمله حل قسمت هذلولوی برای بخش موج مسئله توسط خطوط مشخصه و حل قسمت سهموی برای بخش انتشار مسئله توسط روش تفاضل محدود مرکزی با فیزیک حاکم بر مسئله همخوانی دارد. همچنین استفاده از روش خطوط مشخصه این امکان را می‌دهد تا از مزایا و توانایی‌های روش یک بعدی آن استفاده شود. به عنوان مثال امکان استفاده از مدل سازی‌های

شرایط مرزی یک بعدی و تنظیم سرعت موج و تکنیک‌های درون یابی آن در روش یک بعدی در مسائل گسسته سازی در این جا فراهم می‌شود[۵۸-۶۰].

یکی از معایب اساسی این روش زمان محاسبات بالای آن در مقایسه با روش‌های یک بعدی می‌باشد. در واقع در این روش زمان مورد نیاز پرادزش متناسب با توان سوم تعداد گره‌های محاسباتی در راستای شعاعی می‌باشد. که ژائو و قداوی روشی ارائه کردند که در این روش سرعت حل مسئله متناسب با توان‌های پایین‌تر است.

روشی که برای حل معادلات به صورت شبه دو بعدی استفاده شده است، در حقیقت توسعه و گسترش روش فوق برای سیالات غیرنیوتنی خواهد بود. که در ادامه به نحوه ی استخراج و شرح کامل پرداخته می‌شود.

۴-۳-۱- استخراج معادلات مشخصه در سیستم مختصات دو بعدی

شروع حل به روش خطوط مشخصه از معادلات پیوستگی و ممنتوم که در فصل قبل بدست آورده شده‌اند، آغاز می‌گردد. این معادلات به صورت مختصر شده جهت یادآوری آورده شده‌اند

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (۴-۳۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r} \qquad (۴-۳۵)$$

در این معادلات (۴-۳۴) و (۴-۳۵) جهت سهولت استفاده در روش خطوط مشخصه از عبارت‌های همرفتی $u\frac{\partial H}{\partial x}$ و $u\frac{\partial u}{\partial x}$ به ترتیب در معادله پیوستگی و ممنتوم صرف نظر شده است.

اولین قدم در روش خطوط مشخصه، بدست آوردن صورت معادلات مشخصه است که با فرض نسبت بین گام زمانی و گسسته سازی در راستای محوری برابر سرعت موج به شکل زیر انجام خواهد شد

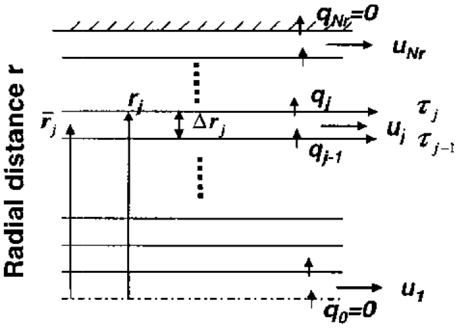
$$\frac{dx}{dt} = \pm c \,. \tag{۳۶-۴}$$

اکنون با استفاده از این فرض می‌توان معادلات مشخصه را در امتداد خطوط مشخصه محاسبه کرد

$$\frac{dH}{dt} \pm \frac{c}{g}\frac{du}{dt} = \pm \frac{c}{g}\frac{1}{r\rho}\frac{\partial r\tau}{\partial r} \,. \tag{۳۷-۴}$$

معادلات فوق را می‌توان با افزودن فرم تفاضل مرکزی به سمت راست معادلات در راستای شعاعی لوله حل نمود. تقسیم بندی شبکه عددی برای انجام محاسبات عددی در شکل ۴-۳ نشان داده شده است. تقسیم بندی در راستای شعاعی لوله به تعداد N_r می‌باشد، که هر کدام از آن‌ها می‌تواند مقدار متفاوتی داشته باشد. ضخامت هر لایه با Δr_m نشان داده می‌شود. در واقع لوله به N_r استوانه تقسیم بندی می‌شود که شعاع داخلی هر استوانه r_{m-1} و شعاع خارجی آن r_m و ضخامت هر استوانه $\Delta r_m = r_m - r_{m-1}$ می‌باشد. طول لوله برابر L است که به تعداد N_x قسمت مساوی تقسیم می‌شود و طول هر ناحیه برابر $\Delta x = L / N_x$ می‌باشد. همچنین گام‌های زمانی با استفاده از سرعت موج و طول ناحیه محاسباتی $\Delta t = \Delta x / c$ بدست می‌آید.

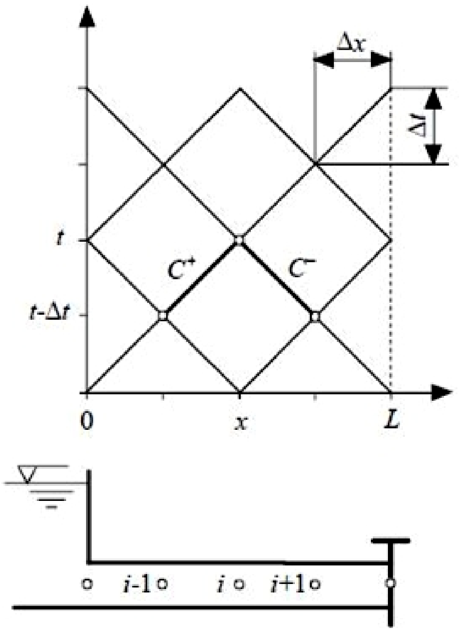
پس از بدست آوردن معادلات مشخصه می‌بایست فرم گسسته ی آن‌ها را نیز بدست آورد. بدین منظور نحوه ی استخراج فرم گسسته ی معادله ی مشخصه در ادامه آورده شده است.



شکل ۴-۳ شبکه در راستای شعاعی

در ابتدا با استفاده از شبکه ی خطوط مشخصه ی نشان داده شده در شکل ۴-۴ ، معادله ی مشخصه مثبت در امتداد نقاط A و P محاسبه می‌شود. با انتگرال گیری از رابطه ی مشخصه بین این نقاط، معادله ی حاصل به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{H_P - H_A}{\Delta t} + \frac{c}{g}\frac{u_P - u_A}{\Delta t} = \frac{c}{g}\frac{1}{\bar{r}_j \rho}\frac{r_j \tau_j - r_{j-1}\tau_{j-1}}{\Delta r} \qquad (۳۸-۴)$$



شکل ۴-۴ شبکه خطوط مشخصه

جهت سهولت محاسبات آتی پس از باز نویسی رابطه ی (۴-۳۸) شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$H_P - H_A + \frac{c}{g}\left(u_P - u_A\right) = \frac{c\Delta t}{g}\frac{1}{\bar{r}_j \Delta r}\frac{1}{\rho}\left(r_j \tau_j - r_{j-1}\tau_{j-1}\right) \qquad (۴\text{-}۳۹)$$

نکته ی قابل توجه آن که قسمت سمت چپ که مربوط به معادله ی موج است، بین نقاط گرهی شبکه ی خطوط مشخصه، بسط داده شده است و قسمت سمت راست بین تقسیم بندی‌های شعاعی به فرم تفاضل محدود بسط داده شده است.

در رابطه ی فوق مقادیر سرعت و فشار در گام‌های زمانی مشخص قرار دارند، اما برای محاسبه ی ترم تنش برشی که در سمت راست است و می‌بایست به فرم تفاضل محدود محاسبه گردد، به صورت یک میانگین وزنی بین دو گام زمانی بدست می‌آید، این رابطه ی وزنی که با ضریب ε مرتبط خواهد بود به صورت زیر است

$$\overset{*}{u}_j = \varepsilon u_{Pj} + \left(1-\varepsilon\right)u_{Aj} \qquad (۴\text{-}۴۰)$$

در این رابطه ε می‌تواند ضریبی بین صفر و یک به خود بگیرد. چنانچه ε برابر با یک باشد از مقدار سرعت در گام زمانی مجهول و اگر ε برابر با صفر باشد از سرعت در گام زمانی قبلی استفاده خواهد شد.

با این احتساب عبارت تنش برشی در مرز j به صورت زیر بدست می‌آید

$$\tau_j = \mu_j \frac{\overset{*}{u}_{j+1} - \overset{*}{u}_j}{\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j} \qquad (۴\text{-}۴۱)$$

از آن جا که تفاضل بین سرعت‌ها بین مراکز دو استوانه j و $j+1$ نوشته شده است به همین دلیل

فاصله بین دو مرکز که در مخرج کسر فوق قرار دارد برابر مقدار $\bar{r}_{j+1}-\bar{r}_j$ خواهد بود.

با محاسبه τ_{j+1} به همین روش و جایگذاری تنش‌های برشی در عبارت (۴-۴۱) نتیجه به صورت زیر خواهد بود

$$H_P - H_A + \frac{c}{g}\left(u_P - u_A\right) = \frac{c\Delta t}{g}\frac{1}{\bar{\bar{r}}_j \Delta r}\frac{1}{\rho}\left(r_j \mu_j \frac{\overset{*}{u}_{j+1} - \overset{*}{u}_j}{\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j} - r_{j-1}\mu_{j-1}\frac{\overset{*}{u}_j - \overset{*}{u}_{j-1}}{\bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}} \right) \qquad (۴\text{-}۴۲)$$

برای سهولت ادامه ی محاسبات از متغیرهای زیر استفاده می‌شود

$$C_{u1} = \frac{c\Delta t}{g}\frac{1}{\bar{\bar{r}}_j \Delta r}\frac{1}{\rho}\frac{r_{j-1}}{\bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}}\mu_{j-1} \qquad (۴\text{-}۴۳)$$

$$C_{u3} = \frac{c\Delta t}{g}\frac{1}{\bar{\bar{r}}_j \Delta r}\frac{1}{\rho}\frac{r_j}{\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j}\mu_j \qquad (۴\text{-}۴۴)$$

با این فرض معادله ی (۴-۴۲) به شکل ساده شده ی زیر تبدیل خواهد شد

$$H_P - H_A + \frac{c}{g}\left(u_P - u_A\right) = C_{u3}\left(\overset{*}{u}_{j+1} - \overset{*}{u}_j\right) - C_{u1}\left(\overset{*}{u}_j - \overset{*}{u}_{j-1}\right) \qquad (۴\text{-}۴۵)$$

و همچنین با جدا سازی سرعت‌ها بر حسب گره‌های شعاعی رابطه ی زیر محاسبه می‌گردد

$$H_P - H_A + \frac{c}{g}\left(u_P - u_A\right) = C_{u1}\overset{*}{u}_{j-1} - \left(C_{u1} + C_{u3}\right)\overset{*}{u}_j + C_{u3}\overset{*}{u}_{j+1} \qquad (۴\text{-}۴۶)$$

اکنون با جایگذاری $\overset{*}{u}$ها از رابطه ی (۴-۴۰)، معادله ی زیر حاصل می‌شود

$$H_P - H_A + \frac{c}{g}\left(u_P - u_A\right) = C_{u1}\left(\varepsilon u_{Pj-1} + (1-\varepsilon)u_{Aj-1}\right) - \left(C_{u1} + C_{u3}\right)\left(\varepsilon u_{Pj} + (1-\varepsilon)u_{Aj}\right) + C_{u3}\left(\varepsilon u_{Pj+1} + (1-\varepsilon)u_{Aj+1}\right) \tag{۴۷-۴}$$

در این مرحله متغیرهای معلوم در سمت راست و مجهولات در سمت چپ رابطه قرار داده می‌شود

$$H_P - C_{u1}\varepsilon u_{Pj-1} + \left(\frac{c}{g} + \left(C_{u1} + C_{u3}\right)\varepsilon\right)u_{Pj} - C_{u3}\varepsilon u_{Pj+1} = H_A + C_{u1}(1-\varepsilon)u_{Aj-1} - \left(\left(C_{u1} + C_{u3}\right)(1-\varepsilon) - \frac{c}{g}\right)u_{Aj} + C_{u3}(1-\varepsilon)u_{Aj+1} \tag{۴۸-۴}$$

چنانچه از اندیس گذاری بالا نویس n و $n+1$ جهت اندیس‌های زمانی و از اندیس زیر نویس i و $i-1$ برای نمایش مکان نقاط A و P استفاده شود، همچنین با معرفی ضریب جدید $C_{u2} = C_{u1} + C_{u3}$، رابطه ی قبل به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$H_i^{n+1} - \varepsilon C_{u1}u_{i,j-1}^{n+1} + \left(\frac{c}{g} + \varepsilon C_{u2}\right)u_{i,j}^{n+1} - \varepsilon C_{u3}u_{i,j+1}^{n+1} = H_{i-1}^{n} + (1-\varepsilon)C_{u1}u_{i-1,j-1}^{n} - \left((1-\varepsilon)C_{u2} - \frac{c}{g}\right)u_{i-1,j}^{n} + (1-\varepsilon)C_{u3}u_{i-1,j+1}^{n} \tag{۴۹-۴}$$

این رابطه در واقع معادله مشخصه مثبت می‌باشد که برای استوانه jام در راستای شعاعی لوله و گره iام در راستای محوری لوله نوشته شده است. در این رابطه تمامی مجهولات، شامل سرعت در گره‌های $j-1$، j و $j+1$ ($u_{i,j-1}^{n+1}, u_{i,j}^{n+1}, u_{i,j+1}^{n+1}$) که تمامی آن‌ها در مقطع i ام لوله هستند، و همچنین فشار در مقطع i ام لوله(H_i^{n+1})، در سمت چپ معادله قرار گرفته‌اند. متغیرهای قرار گرفته شده در سمت راست رابطه همگی یا ضرایب ثابت بوده و یا از اطلاعات بدست آمده از گام زمانی قبلی محاسبه خواهند شد.

مشابه روشی که برای بدست آوردن معادله مشخصه مثبت به کار گرفته شد، می‌تواند برای بدست آوردن معادله مشخصه منفی نیز به کار رود. در ادامه رابطه مشخصه منفی بین نقاط B و P آورده شده است.

$$H_i^{n+1} + \varepsilon C_{u1} u_{i,j-1}^{n+1} - \left(\frac{c}{g} + \varepsilon C_{u2}\right) u_{i,j}^{n+1} + \varepsilon C_{u3} u_{i,j+1}^{n+1} =$$
$$H_{i+1}^n - (1-\varepsilon) C_{u1} u_{i+1,j-1}^n + \left((1-\varepsilon) C_{u2} - \frac{c}{g}\right) u_{i+1,j}^n - (1-\varepsilon) C_{u3} u_{i+1,j+1}^n \quad (۵۰-۴)$$

اکنون با وجود معادلات مشخصه مثبت ی و منفی می‌توان سرعت در سطح مقطع لوله و فشار در گره‌ها را با استفاده از این معادلات محاسبه نمود.

جهت سادگی محاسبات و انجام سریع‌تر برنامه ی کامپیوتری برای بدست آوردن بردار مجهول سرعت، ابتدا برای هر استوانه ی محاسباتی معادله ی مشخصه ی منفی را از معادله ی مشخصه ی مثبت کم کرده سپس مجموعه معادلات را به صورت ماتریسی نشان داده خواهند شد. رابطه ی حاصل از تفریق دو معادله قبل به صورت زیر می‌باشد

$$2\left(-\varepsilon C_{u1} u_{i,j-1}^{n+1} + \left(\frac{c}{g} + \varepsilon C_{u2}\right) u_{i,j}^{n+1} - \varepsilon C_{u3} u_{i,j+1}^{n+1}\right) =$$
$$H_{i-1}^n - H_{i+1}^n + (1-\varepsilon) C_{u1}\left(u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n\right) - \quad (۵۱-۴)$$
$$\left((1-\varepsilon) C_{u2} - \frac{c}{g}\right)\left(u_{i-1,j}^n - u_{i+1,j}^n\right) + (1-\varepsilon) C_{u3}\left(u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j+1}^n\right)$$

این معادله برای تمامی استوانه‌های محاسباتی برقرار می‌باشد. می‌توان مجموعه ی این معادلات را به صورت ماتریسی زیر نشان داد

$$\mathbf{Bu} = \mathbf{b}_u \qquad (۵۲\text{-}۴)$$

در این رابطه ماتریس **B**، ماتریس ضرایب معادله است. **u** ضرایب مجهول سرعت در سطح مقطع لوله می‌باشند و $\mathbf{b}_u$ ضرایب ثابت معادله هستند که از گام زمانی قبلی محاسبه می‌شوند.

ماتریس ضرایب **B** برابر است با

(۵۳-۴)

$$\begin{bmatrix} \frac{c}{g}+\varepsilon C_{u2,1} & -\varepsilon C_{u3,1} & & & & & \\ -\varepsilon C_{u1,2} & \frac{c}{g}+\varepsilon C_{u2,2} & -\varepsilon C_{u1,2} & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ \cdots & -\varepsilon C_{u1,j} & \frac{c}{g}+\varepsilon C_{u2,j} & -\varepsilon C_{u1,j} & \cdots & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & & -\varepsilon C_{u1,Nr} & \frac{c}{g}+\varepsilon C_{u2,Nr} & -\varepsilon C_{u1,Nr} \end{bmatrix}$$

همچنین بردار مجهولات سرعت در یک مقطع (**u**) به صورت زیر است

$$\mathbf{u} = \left\{ u_{i,1}^{n+1} \;, \ldots , u_{i,j}^{n+1} \;, \ldots , u_{i,Nr}^{n+1} \right\}^T \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

در هر گام زمانی برای هر یک از گره‌های داخلی با تشکیل معادله $\mathbf{Bu}=\mathbf{b_u}$ و سپس حل این دستگاه معادلات خطی $Nr \times Nr$ با یکی از روش‌های عددی و یا به دلیل سه قطری بودن، با استفاده از معکوس ماتریس، مقادیر مجهول بردار سرعت و یا همان پروفیل سرعت در مقطع بدست می‌آید.

پس از بدست آوردن پروفیل سرعت و سرعت میانگین در سطح مقطع می‌بایست مقدار فشار در گره در گام زمانی مجهول، $n+1$، محاسبه گردد. بدین منظور مجددا از معادلات مشخصه استفاده می‌شود.

در این مرحله با جمع نمودن معادلات مشخصه ی مثبت و منفی مقادیر سرعت مجهول از معادله ی حاصل حذف خواهند شد، و در سمت چپ معادله تنها مجهول باقی مانده مقدار فشار می‌باشد.

$$2H_i^{n+1} = H_{i-1}^n + H_{i-1}^n + \\ (1-\varepsilon)C_{u1}\left(u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n\right) - \left((1-\varepsilon)C_{u2} - \frac{c}{g}\right)\left(u_{i-1,j}^n - u_{i+1,j}^n\right) + (1-\varepsilon)C_{u3}\left(u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j+1}^n\right) \quad (۵۵\text{-}۴)$$

۴-۳-۲- شرایط مرزی روش خطوط مشخصه

شرایط مرزی روش خطوط مشخصه دو بعدی با تغییرات بسیار اندکی مشابه شرایط مرزی خطوط مشخصه یک بعدی می‌باشد. به عنوان مثال برای شرط مرزی شیر در روش یک بعدی سرعت میانگین مقطع برابر صفر قرار داده می‌شود در حالی که در حالت دو بعدی تمامی مولفه‌های سرعت در سطح مقطع محل شیر برابر با صفر قرار خواهد گرفت.

۴-۴- روش حل معادلات سازه و اندرکنش سیال سازه

روش تفاضل محدود و روش خطوط مشخصه (MOC) جهت حل معادلات هیدرولیک جریان و روش اجرای محدود (FEM) جهت حل معادلات ارتعاشی لوله به کار گرفته می‌شوند.

جهت تعیین ترم $\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}$ در معادله ارتعاشی محوری لوله، بایستی حل شود. اما جهت حل این معادله، مقدار $\frac{\partial H}{\partial z}$ باید محاسبه گردد که این نیز مستلزم حل معادلات هیدرولیک می‌باشد. بنابراین یک فرایند تکراری در هر گام زمانی بین زیر برنامه‌های هیدرولیکی و سازه‌ای نیاز خواهد بود تا بتوان مجهولات مربوط به سازه و هیدرولیک را در هر گام زمانی تعیین نمود.

فصل پنجم

بررسی، مقایسه و تحلیل نتایج

۵-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی و تحلیل نتایج بدست آمده از معادلات و روش‌های بیان شده در فصول قبل پرداخته می‌شود. تمامی روش‌های ذکر شده به صورت الگوریتم‌های برنامه نویسی تهیه شده است، سپس در نرم افزار برنامه نویسی متلب[1] کد نویسی و اجرا شده‌اند.

برای بررسی و صحت سنجی نتایج عددی تا آن جا که امکان استفاده از نتایج آزمایشگاهی وجود داشته، این امر صورت گرفته است. همچنین در برخی موارد از نتایج عددی که توسط دیگر محققین برجسته در مجلات معتبر علمی چاپ شده است، جهت بررسی و راست آزمایی زیر مجموعه‌های الگوریتم‌ها و نتایج خروجی برنامه‌ها بهره جسته ایم.

۵-۲- بررسی صحت مدل‌های عددی

در ابتدا از نتایج آزمایشگاهی که برای جریان لایه ای گذرا انجام شده است، جهت بررسی نتایج عددی استفاده شده است. این آزمایش که توسط هلمبو و رئلو انجام شده [۶۱]، در برگیرنده یک سیستم شیر - لوله - مخزن می‌باشد. سیال استفاده شده در این آزمایش از جنس روغن است، که یک سیال نیوتنی می‌باشد. در جدول ۵-۱ مشخصات آزمایش مذکور آورده شده است.

لازم به ذکر است سرعت اولیه سیال در آزمایش انجام شده برابر با ۰/۰۱۳ متر بر ثانیه بوده است، و سرعت موج اندازه گیری شده و عدد رینولدز جریان به ترتیب برابر با ۱۳۲۴ متر بر ثانیه و ۸۲ بدست آمده است.

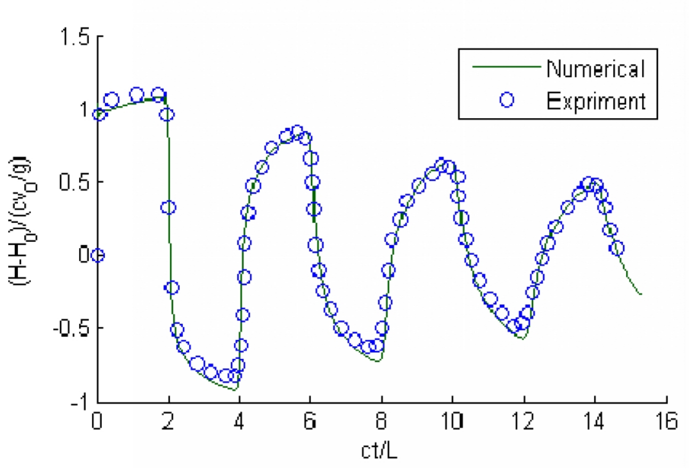
---

[1] *MATLAB*

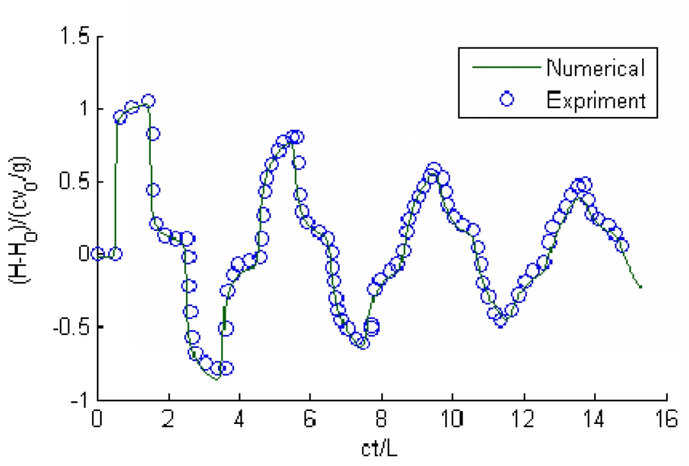
جدول ۵-۱ مشخصات مدل آزمایشگاهی هلمبو و رئلو

مشخصات لوله	مقادیر
طول لوله (L)	$36.09\ (m)$
قطر داخلی لوله (D)	$25\ (mm)$
چگالی سیال (ρ)	$878.4\ \left(kg/m^3\right)$
لزجت دینامیکی سیال (μ)	$0.03483(Pa.s)$

روش آزمایش بدین گونه است که بستن سریع شیر سبب قطع جریان سیال در محل شیر شده و در ادامه سبب ایجاد نوسان در مقادیر فشار و سرعت سیال در طول لوله می‌گردد. نتایج آزمایشگاهی در بر گیرنده مقادیر فشار در زمان‌های مختلف پس از بستن شیر در دو نقطه از لوله (محل شیر و نقطه میانی لوله) می‌باشد. در دو نمودار بعد نتایج آزمایشگاهی و نتایج عددی برای فشار سیال درون لوله در نقطه انتهایی (شیر) و نقطه میانی لوله با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در نمونه مذکور در روش عددی تفاضل محدود جهت شبکه بندی عددی، تعداد نقاط محاسباتی در راستای طولی لوله برابر با ۲۰۰ نقطه و در راستای شعاعی لوله برابر با ۵۱ عدد در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که در بخش‌های آتی در مورد تعداد نقاط محاسباتی و نحوه شبکه بندی بحث شده است.



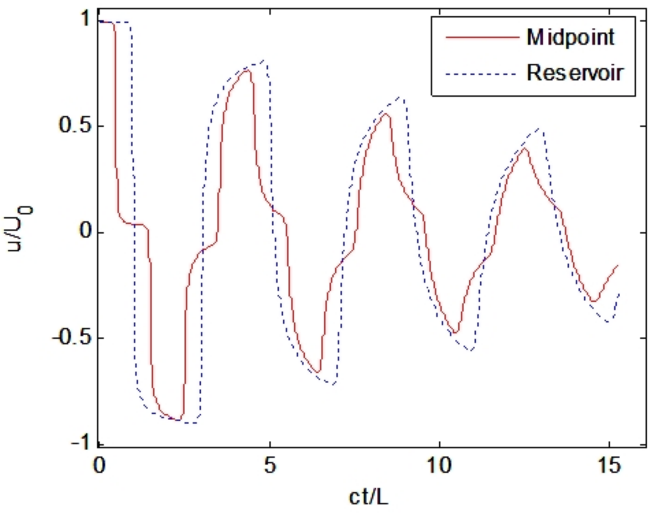
شکل ۵-۱ تاریخچه فشار در محل شیر به روش رانج کوتا و نتایج آزمایشگاهی هلمبو



شکل ۵-۲ تاریخچه فشار در نقطه میانی به روش رانج کوتا و نتایج آزمایشگاهی هلمبو

در شکل ۵-۱ و شکل ۵-۲ محور افقی، محور زمان بوده که به صورت بی بعد شده (با استفاده از سرعت موج و طول لوله) نمایش داده شده است و محور عمودی مقادیر فشار هستند، که به نسبت فشار جاکفسکی بی بعد شده‌اند. همان طور که در نمودارهای بالا مشاهده می‌شود نتایج عددی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشند، که نشان دهنده صحت و درستی روش عددی تفاضل محدود رانج کوتا می‌باشد.

در نمودار شکل ۵-۳ تغییرات سرعت متوسط جریان سیال در دو نقطه از لوله مشاهده می‌شود. نقطه اول نقطه میانی لوله و دوم تغییرات سرعت در مقطع مخزن می‌باشد. قابل ذکر است که سرعت در محل شیر پس از بستن شیر صفر خواهد بود. البته سرعت نمایش داده شده سرعت میانگین در سطح مقطع می‌باشد ، که همان طور که در فصول قبل به آن اشاره شد با استفاده از انتگرال گیری عددی در مختصات استوانه ای از مولفه‌های سرعت محوری بدست آمده است.



شکل ۵-۳ تاریخچه سرعت میانگین در دو نقطه از لوله توسط روش عددی رانج کوتا

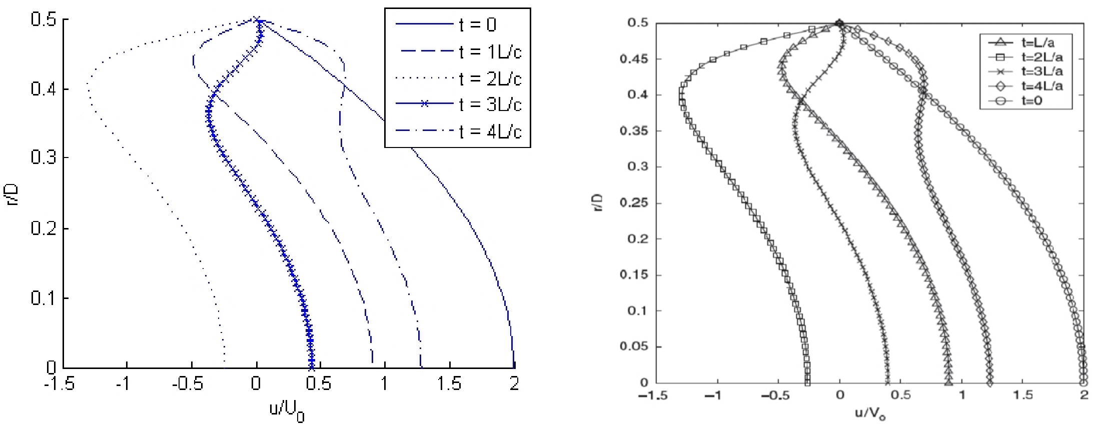
همان طور که در این نمودار مشاهده می‌شود، تغییرات سرعت متوسط دارای روندی منطقی و مطابق با انتظار جریان غیرماندگار می‌باشد.

برای بررسی دقیق‌تر تغییرات پارامترهای جریان در حین وقوع جریان گذرا، در این قسمت تغییرات سرعت را در مقطع لوله بررسی می‌کنیم. بر خلاف آن چه که در فرضیات جریان یک بعدی وجود دارد که سرعت در تمامی سطح مقطع یکسان و برابر سرعت متوسط در نظر گرفته می‌شود در این جا با فرض جریان شبه دو بعدی و محاسبه مولفه‌های سرعت محوری در راستای شعاعی لوله، می‌توان

اطلاعات دقیقی از تغییرات سرعت در سطح مقطع لوله در زمان‌های مختلف بدست آورد. بدین منظور یکی از روش‌های کارا و مفید ترسیم پرفیل سرعت در سطح مقطع لوله در زمان‌های مختلف دوره تناوب انتشار موج می‌باشد.

به دلیل این که از فرض جریان متقارن در لوله استفاده شده است، لذا در تمامی نمودارهای ترسیم شده برای نشان دادن پروفیل سرعت، محور افقی برای نشان دادن مولفه سرعت محوری لوله در نظر گرفته شده است و دامنه نمایش مقادیر سرعت از مرکز لوله تا جداره لوله می‌باشد که در محور عمودی به صورت بی بعد شده توسط شعاع لوله از صفر تا یک نشان داده شده است. همچنین جهت سهولت در مقایسه بین حالت‌های مختلف مقدار سرعت بی بعد شده است. بدین منظور از سرعت اولیه جریان یا همان سرعت حالت ماندگار استفاده شده و با استفاده از نسبت سرعت در هر لحظه نسبت به سرعت اولیه نمودارها ترسیم گشته‌اند.

با توجه به توضیحات فوق در نمودار شکل ۵-۴ پروفیل سرعت در مقطع لوله نشان داده شده است. این پروفیل برای نقطه میانی لوله در زمان‌های مختلف که ضریبی از L/c می‌باشند، ترسیم شده‌اند.



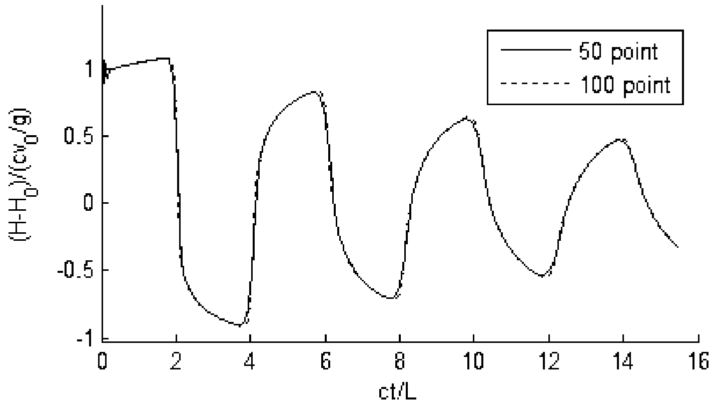
شکل ۵-۴ پروفیل سرعت در عرض مقطع در نقطه میانی لوله با استفاده از روش رانج کوتا

۵-۲-۱- بررسی اثر شبکه بندی نقاط محاسباتی در روش رانج کوتا

اعداد انتخابی جهت تعداد نقاط شبکه محاسباتی تفاضل محدود ابتدا بر اساس اطلاعاتی از مطالعات انجام شده برداشت شده است و سپس تلاش شده با بررسی اثر تعداد نقاط با استفاده از تغییر تعداد نقاط و بررسی نتایج به یک شبکه بندی بهینه دست یابیم، بدین نحو که با تعداد نقاط پایین آنالیزها تکرار شده است و سپس تعداد نقاط تا حدی افزایش یافته که این افزایش تاثیری پذیری خود در نتایج خروجی را از دست بدهند (برابری سه رقم معنادار متغیرها).

همچنین بررسی دیگری که انجام شده است مربوط به اثر عبارت‌های مستهلک کننده می‌باشد که در نمونه‌های مختلف با حذف این عبارت‌ها تاثیر آن‌ها به وضوح قابل مشاهده می‌باشد.

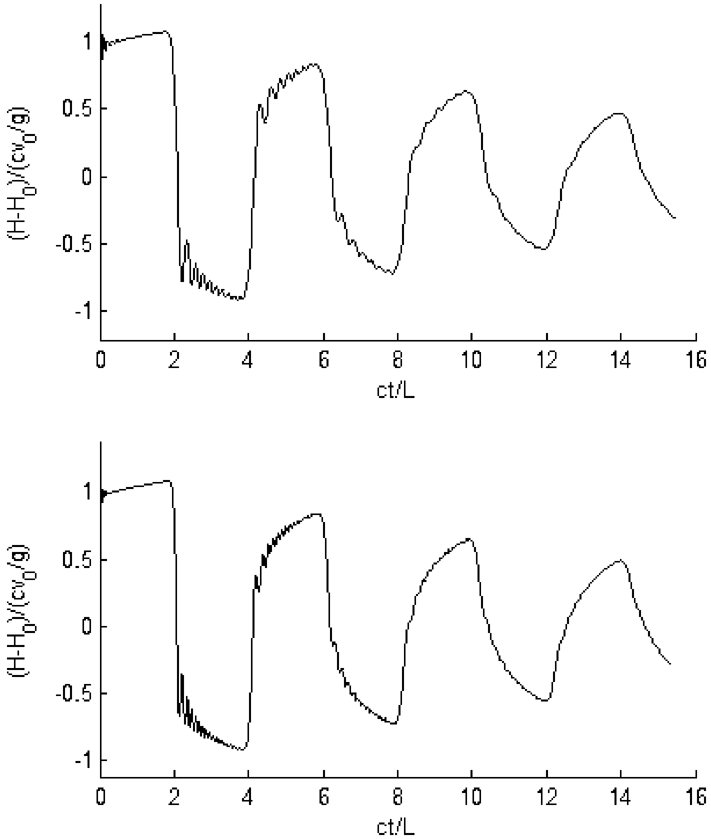
در بررسی اول تاثیر تعداد نقاط محاسباتی در راستای محوری لوله بررسی شده است در مدل‌های مقایسه شده تعداد نقاط محاسباتی در راستای شعاعی برابر ۵۱ اتخاذ شده و در راستای محوری مقایسه ای بین ۵۰ و ۱۰۰ نقطه انجام شده است.



شکل ۵-۵ اثر تعداد نقاط محاسباتی در راستای محوری لوله به ازا ۵۰ و ۱۰۰ نقطه

همان طور که در شکل به خوبی دیده می‌شود به جز در محل نقاط بیشنه فشار که تفاوت اندکی دیده می‌شود در نقاط دیگر همخوانی مناسبی وجود دارد.

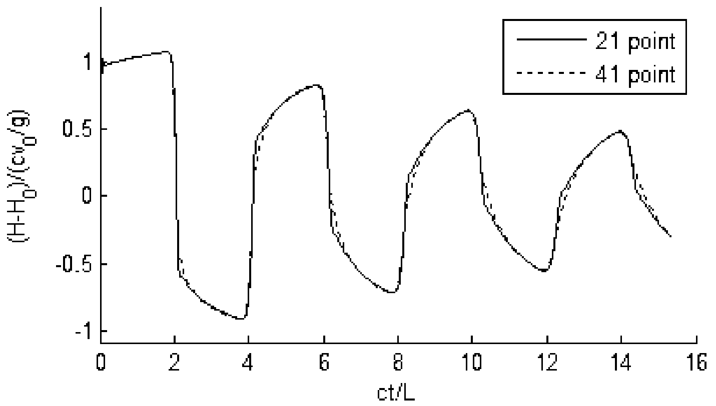
در بررسی بعدی با فرض همان تعداد ۵۱ نقاط محاسباتی اثر عبارت‌های مستهلک کننده انجام می‌شود. بدین ترتیب که با حذف عبارت‌های مستهلک کننده عددی در الگوریتم‌های حل نتایج خروجی به ازا تعداد نقاط محاسباتی ۵۰ و ۱۰۰ در راستای محوری لوله در شکل آورده شده‌اند.



شکل ۵-۶ اثر حذف عبارت‌های مستهلک کننده عددی به ازا تعداد نقاط محاسباتی ۵۰ (بالا) و ۱۰۰ (پایین)

همان گونه که در این نمودارها مشخص است با کاهش تعداد نقاط محاسباتی که به علت فواصل زیاد گسسته سازی در راستای طولی، میزان کاهش فشار در محل شیر به خوبی دیده نمی شود بنابراین سبب می‌گردد عبارت هایی که سبب ایجاد افت می‌شوند دقت محاسباتی پایینی داشته باشند. در مرحله ی بعد اثر تعداد گره‌ها در راستای شعاعی دیده شده است.

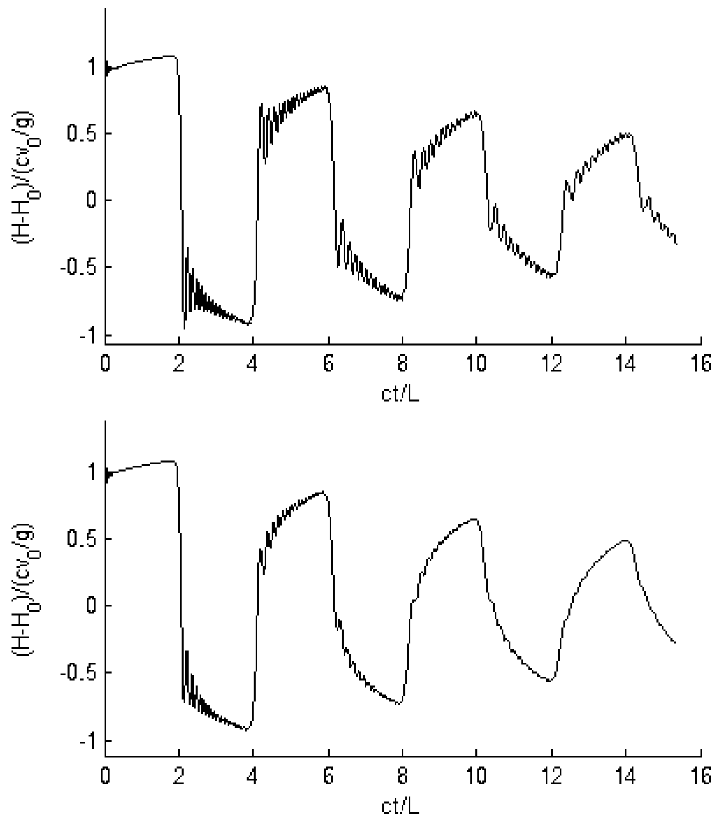
برای مقایسه ی تعداد نقاط محاسباتی در راستای شعاعی ۲۱ و ۴۱ نقطه در نظر گرفته شده است. تعداد نقاط در راستای محوری در هر دو مورد برابر ۱۰۰ اتخاذ گردیده است. با این اطلاعات نمودار حاصل از این مقایسه در شکل آورده شده است.



شکل ۵-۷ مقایسه اثر تعداد نقاط انتخابی در راستای شعاعی لوله

همان طور که انتظار می‌رود و در نمودار مشخص است با انتخاب تعداد نقاط بیشتری در راستای شعاعی افت انرژی بیشتری در نمودار فشار در محل شیر دیده می‌شود. این افت بیشتر ناشی از محاسبه دقیق‌تر پروفیل‌های سرعت در مقاطع مختلف می‌باشد که سبب توزیع تنش واقعی‌تر خواهد شد. در حقیقت با افزایش تعداد نقاط محاسباتی در راستای شعاعی از حذف ناخواسته افت انرژی جلوگیری خواهد شد. البته این افزایش نقاط تا حدی تاثیر گذار است که به جواب واقعی مسئله همگرا گردد و پس از همگرایی تاثیر در نتایج ایجاد نخواهند کرد.

در مقایسه انتهایی در این بخش اثرات همزمان تعداد نقاط در راستای شعاعی و حذف عبارت‌های مستهلک کننده عددی مقایسه می‌شوند، تعداد نقاط در راستای محوری ۱۰۰ و تعداد نقاط در راستای شعاعی برابر با ۲۱ و ۴۱ عدد، انتخاب شده‌اند. این مقایسه در شکل ۵-۸ نشان داده شده است.



شکل ۵-۸ اثر حذف عبارت‌های مستهلک کننده عددی به ازا تعداد نقاط محاسباتی ۵۰ (بالا) و ۱۰۰ (پایین)

مجموع بررسی‌ها و مقایسه‌های انجام شده در این قسمت نشان می‌دهد که برای آزمایشاتی با ابعادی در این حدود انتخاب ۲۰۰ نقطه محاسباتی در راستای محوری و ۵۱ نقطه محاسباتی در راستای شعاعی نتایجی با دقت مناسب خواهد داد.

۵-۲-۲- بررسی نتایج آزمایشگاهی و عددی افت فشار در بازه طولانی مدت

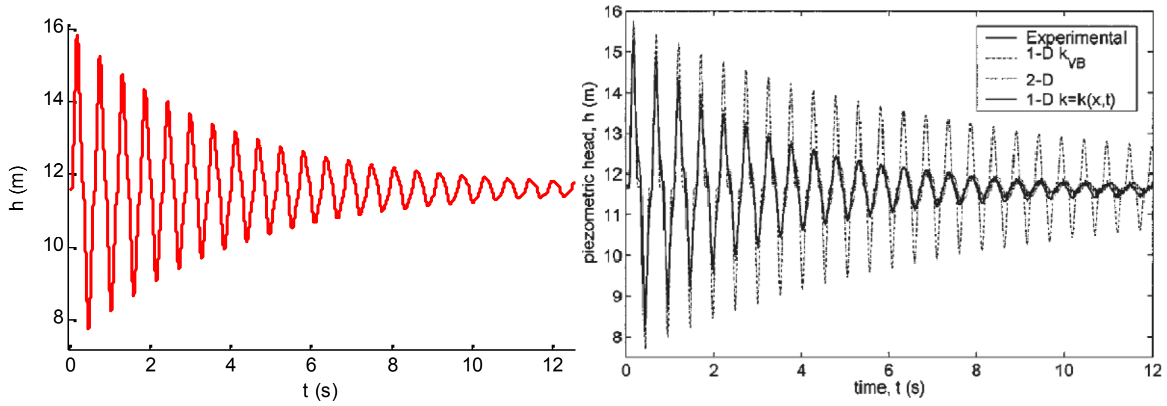
آزمایش دیگری که برای راست آزمایی روش‌ها و الگوریتم‌های حل مورد استفاده قرار گرفته است مربوط به آزمایش برونون و همکاران[۶۲] می‌باشد. بخش مربوط به جریان لایه ای این آزمایش متشکل از یک سیستم شیر، لوله و مخزن می‌باشد. که از سیستم ایرچمبر برای ایجاد فشار ثابت در مخزن استفاده شده است. همچنین جریان غیرماندگار توسط بستن سریع یک شیر توپی که متصل به

یک مخزن با سطح آزاد می‌باشد، ایجاد شده است. جنس لوله مسی بوده و سیال به کار گرفته شده آب می‌باشد. در جدول ۵-۲ مشخصات مدل آزمایشگاهی به کار گرفته شده آمده است.

جدول ۵-۲ مشخصات مدل آزمایشگاهی برونون و همکاران

مشخصات لوله	مقادیر
طول لوله (L)	$141.07\ (m)$
قطر داخلی لوله (D)	$20\ (mm)$
زمان بستن شیر (t)	$0.11\ (s)$
دمای آب (T)	$17\ (^{\circ}C)$

همچنین عدد رینولدز بدست آمده برابر ۸۱۵ و سرعت موج اندازه گیری شده برابر با ۱۱۲۰ متر بر ثانیه بوده است. در شکل ۵-۹ نتایج بدست آمده از روش‌ها و برنامه‌های حاضر با نتایج مدل آزمایشگاهی فوق مقایسه شده است.

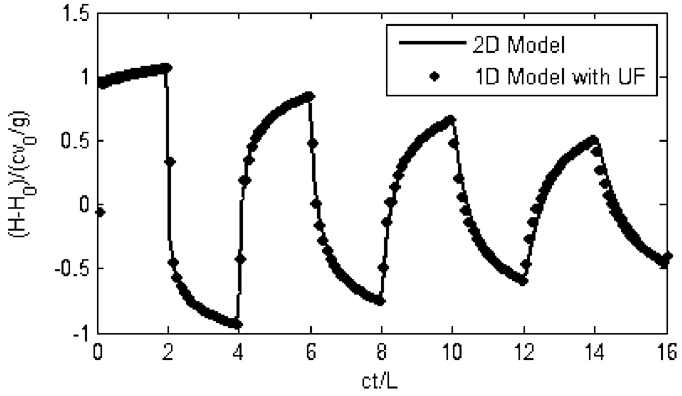


شکل ۵-۹ مقایسه نتایج برونون و همکاران(راست) با نتایج مدل عددی رانج کوتا مطالعه حاضر(چپ)

همان گونه که در مقایسه دو نمودار دیده می‌شود هم خوانی مناسبی بین نتایج آزمایشگاهی و عددی دیده می‌شود.

۵-۲-۳- مقایسه نتایج روش عددی تفاضل محدود دو بعدی با نتایج عددی یک بعدی

جهت اطمینان بیشتر از نتایج مدل سازی عددی، مدل آزمایشگاهی اول با روابط خطوط مشخصه یک بعدی به همراه اصطکاک غیرماندگار مدل سازی شده است. مدل اصطکاک غیرماندگار مدل زیلک می‌باشد که از فرم بهبود یافته و سریع ده ثابته ویتکوسکی و همکاران استفاده شده است. نتایج مقایسه انجام شده در شکل ۵-۱۰ مشاهده می‌شود



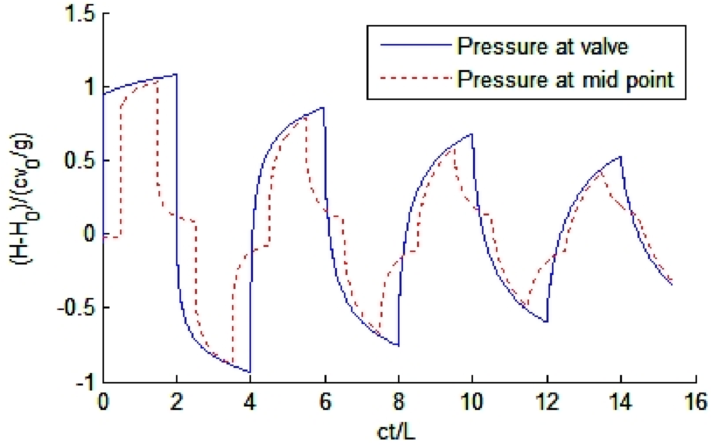
شکل ۵-۱۰ مقایسه عددی نتایج تفاضل محدود دو بعدی با یک بعدی همراه مدل اصطکاک غیرماندگار

۵-۲-۴- نتایج روش خطوط مشخصه

در این بخش به بررسی نتایج خروجی با استفاده از مدل عددی دو بعدی خطوط مشخصه پرداخته شده است. در ابتدای این بخش نیز مدل آزمایشگاهی هلمبو را با استفاده از این روش عددی مدل سازی کرده و با نتایج بدست آمده در مراحل قبل مقایسه خواهیم کرد.

در اولین گام نتایج خروجی این روش را برای مقادیر فشار در محل گره شیر و نقطه میانی را برای مثال اول بدست آورده شده است. برای حل این مثال تعداد گره‌ها در راستای طولی برابر ۵۰ و تعداد گره‌ها در راستای شعاعی برابر ۴۰ فرض شده‌اند. نتایج مذکور در شکل ۵-۱۱ نشان داده شده‌اند.

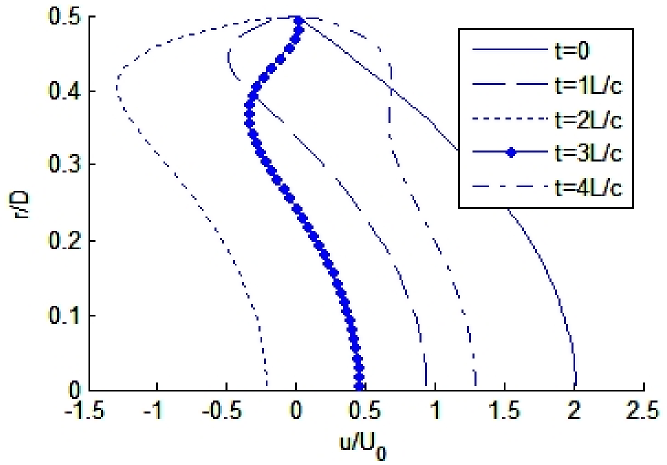
همان گونه که در این نمودار به وضوح دیده می‌شود نتایج مطابق انتظار هموار و افت‌ها به خوبی محاسبه شده‌اند که در قسمت‌های بعد صحت آن‌ها بررسی شده است.



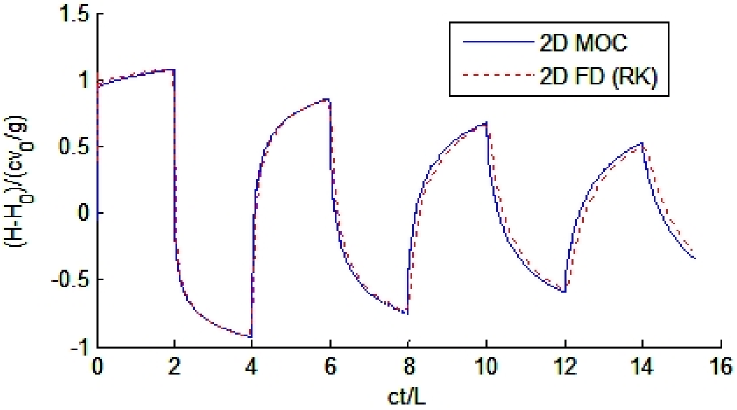
شکل ۵-۱۱ تاریخچه فشار در محل شیر و نقطه میانی با استفاده از روش خطوط مشخصه دو بعدی

در این روش بر خلاف روش تفاضل محدود نوسانات عددی ایجاد نخواهند شد. و همچنین با تعداد گره‌های کمتر و حل تکرارهای کمتر سبب می‌شود که سرعت اجرای الگوریتم حل سریع‌تر از روش تفاضل محدود باشد. در ادامه راست آزمایی این روش مقادیر پروفیل سرعت در محل نقطه میانی در زمان‌های تناوب در شکل ۵-۱۲ آورده شده است.

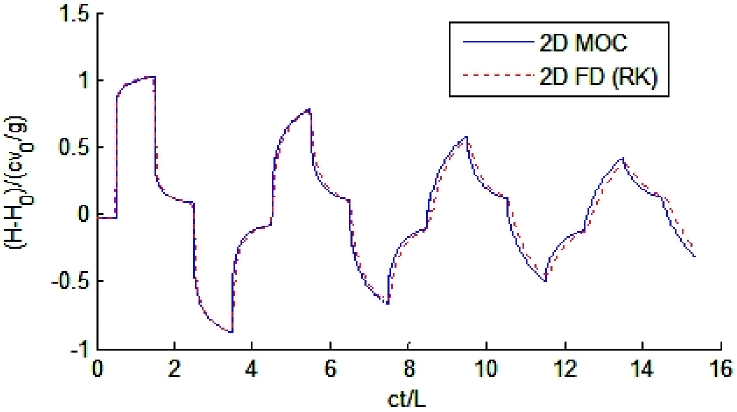
همان طور که در شکل ۵-۱۲ دیده می‌شود پروفیل‌های سرعت در سطح مقطع مطابقت کاملی با نتایج بدست آمده در بخش گذشته دارند. در انتهای این بخش برای اطمینان کامل از صحت روابط و الگوریتم‌های هر دو روش نتایج مقادیر فشار در محل شیر و نقطه میانی دو روش تفاضل محدود و روش خطوط مشخصه در نمودارهای جداگانه (شکل ۵-۱۳ و شکل ۵-۱۴) با یکدیگر مقایسه شده‌اند.



شکل ۵-۱۲ پروفیل سرعت در مقطع میانی در زمان‌های تناوب با استفاده از روش خطوط مشخصه دو بعدی



شکل ۵-۱۳ تاریخچه فشار در محل شیر با استفاده از روش‌های خطوط مشخصه دو بعدی و تفاضل محدود دو بعدی



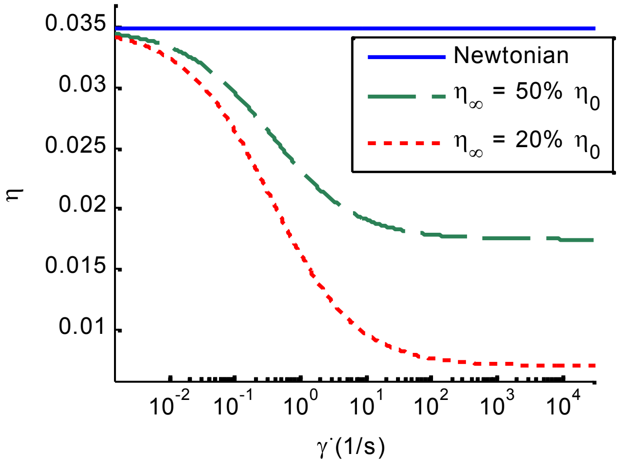
شکل ۵-۱۴ تاریخچه فشار در محل نقطه میانی با استفاده از روش‌های خطوط مشخصه دو بعدی و تفاضل محدود دو بعدی

۵-۳- بررسی اثرات اعمال سیال غیرنیوتنی

در این بخش با ارائه چند مثال عددی به بررسی اثرات وجود یک سیال غیرنیوتنی یا به عبارت دیگر اثرات ناشی از تغییرات لزجت سیال، پرداخته می‌شود. این اثرات که ناشی از وابستگی غیر خطی لزجت سیال با گرادیان سرعت (نرخ برش) می‌باشد، در تغییرات فشار، پروفیل سرعت جریان و تنش برشی جداره، قابل مشاهده می‌باشد که در ادامه مطلب به بررسی و تحلیل آن پرداخته خواهد شد.

در این نمونه فرض شده است در سیستم یک سیال شبه پلاستیک وجود داشته باشد، که بیشترین فراوانی را در دسته بندی سیالات غیرنیوتنی دارا می‌باشند. برای مقایسه بهتر و تطبیق آن با نتایج قبل رفتار غیرنیوتنی به گونه‌ای انتخاب شده که بتوان آن را با مثال پیشین مقایسه نمود.

بدین منظور ویژگی‌های زیر را برای سیال غیرنیوتنی در روش عددی در نظر می‌گیریم. سیال از نوع شبه پلاستیک با لزجت اولیه معادل لزجت سیال موجود در مثال قبل بوده و لزجت نهایی آن معادل ۲۰ و ۵۰ درصد مقدار لزجت اولیه در نظر گرفته می‌شود. جهت شبیه سازی سیال غیر نیوتنی از معادله ساختاری کراس بهره گرفته شده است. این مدل یک مدل چهار ثابته بوده که دو پارامتر آن پیشتر مشخص گردید و پارامتر n را برابر مقدار معمول آن (۲/۳) و مقدار k نیز ۲ در نظر گرفته شده است. با توجه به پارمترهای فرض شده، در نمودار شکل ۵-۱۵ مقادیر لزجت بر حسب گرادیان‌های مختلف سرعت نشان داده است.



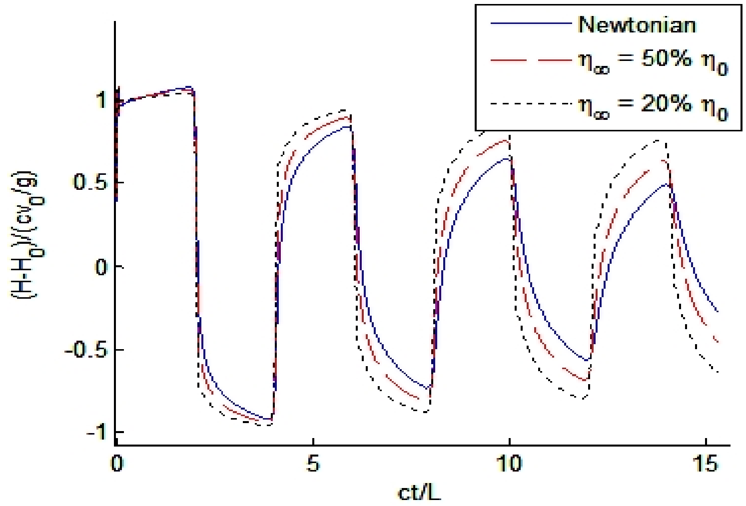
شکل ۵-۱۵ نمودار تغییرات لزجت بر حسب نرخ برش

۵-۳-۱- نتایج مدل تفاضل محدود دو بعدی رانج کوتا

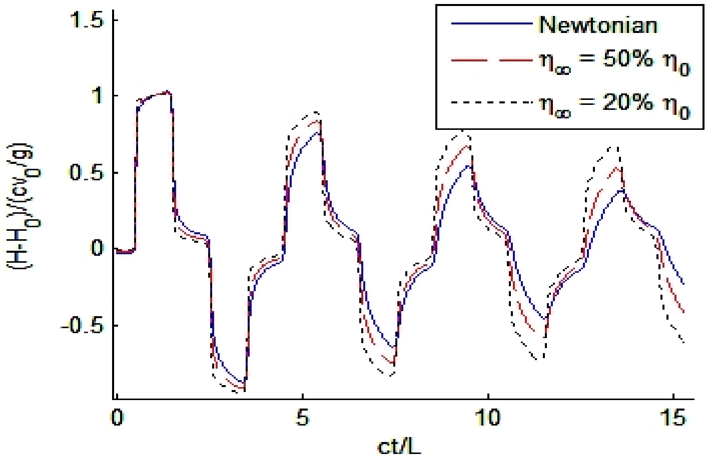
در این مدل سازی برای یکسان بودن مقدار اولیه فشار جاکفسکی ($\Delta H = cV_0 / g$) سرعت حالت ماندگار جریان یکسان فرض شده است. برای این منظور مقادیر افت در واحد طول در سه حالت فوق به ترتیب برابر با ۲/۶۹۳ ، ۱/۴۱۰ و ۰/۶۴۰۶ سانتی متر خواهد بود. همچنین فرض شده در سرعت موج تغییری ایجاد نمی‌شود. با شرایط مذکور با استفاده از روش عددی برای فشار در نقطه انتهایی (محل شیر) و نقطه میانی لوله نتایج زیر بدست آمده‌اند. که این نتایج در شکل ۵-۱۶ و شکل ۵-۱۷نشان داده شده‌اند.

همان طور که در نمودارهای شکل ۵-۱۶ و شکل ۵-۱۷ مشاهده می‌شود در دوره‌های متناوب جریان غیرماندگار، مطابق انتظار مقادیر حداکثر فشار با کاهش لزجت سیال، کاسته می‌گردد. به عبارت دیگر با کاهش لزجت سیال مقادیر افت در طول مسیر لوله کم خواهد شد که این موضوع در نمودارهای فوق به وضوح دیده می‌شود. چنانچه در دوره اول تناوب مشاهده می‌شود با کاهش لزجت سیال میزان

افزایش فشار (اثر لاین پکینگ[1]) در طی آن دوره کاهش می‌یابد که این امر ناشی از کاهش لزجت متوسط و در نتیجه کاهش افت در طول لوله می‌باشد که در نهایت سبب کاهش نرخ افزایش فشار خواهد شد.



شکل ۵-۱۶ تاریخچه فشار در محل شیر با در نظر گرفتن مدل سیال غیر نیوتنی کراس با استفاده از روش رانج کوتا

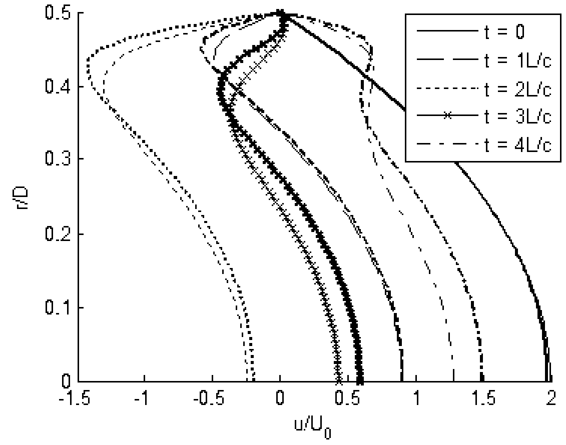


شکل ۵-۱۷ تاریخچه فشار در محل نقطه میانی با در نظر گرفتن مدل سیال غیر نیوتنی کراس با استفاده از روش رانج کوتا

---

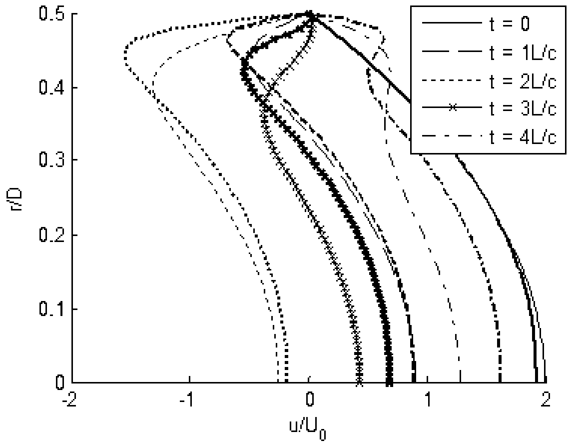
[1] *Line packing effects*

در ادامه تحلیل اثرات سیال غیرنیوتنی بر جریان غیرماندگار به بررسی اثرات تغییر لزجت در پروفیل سرعت پرداخته می‌شود. در نمودارهای شکل ۵-۱۸ و شکل ۵-۱۹ پروفیل سرعت در مقطع میانی بین سیال نیوتنی و دو حالت سیال غیرنیوتنی مقایسه شده است.



شکل ۵-۱۸ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 50\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش رانج کوتا

(خطوط ضخیم سیال غیر نیوتنی و خطوط باریک سیال نیوتنی)

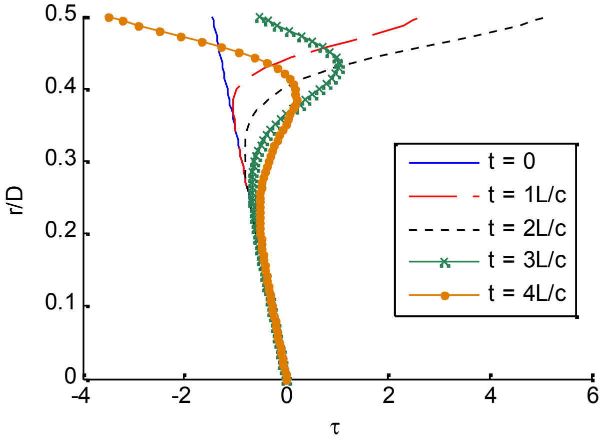


شکل ۵-۱۹ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 20\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش رانج کوتا

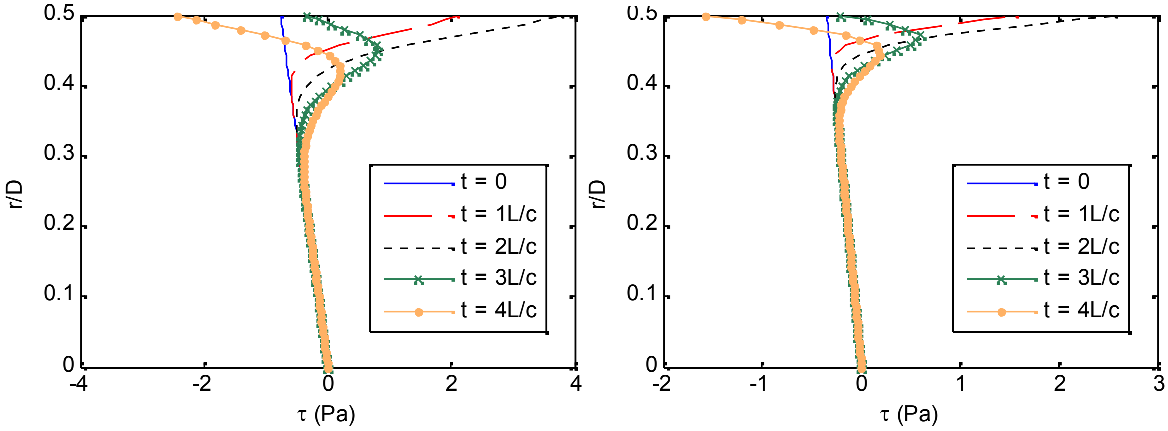
(خطوط ضخیم سیال غیر نیوتنی و خطوط باریک سیال نیوتنی)

با توجه به دو نمودار قبلی (شکل ۵-۱۸ وشکل ۵-۱۹) که توزیع سرعت را مقطع لوله در نقطه میانی نمایش می‌دهند، مشاهده می‌شود که با اعمال رابطه غیرنیوتنی به سیال جریان غیرماندگار پروفیل سرعت نیز دچار تغییر شده است، به گونه‌ای که با کاهش لزجت سیال تغییرات توزیع پروفیل سرعت شدیدتر شده و یا به عبارت دیگر دامنه تغییرات سرعت در یک مقطع بیشتر گردیده است. افزایش گرادیان سرعت در مجاورت جداره لوله سبب کاهش مقدار لزجت شده که خود سبب تغییر مقادیر سرعت و تنش برشی در نزدیکی جداره خواهد شد. همچنین کاهش لزجت سبب شده که بیشینه سرعت نسبی در مقطع به جداره لوله نزدیک‌تر شود. نیمه میانی لوله حرکتی جامد گونه دارد، که تحت اثر تنش برشی جداره و میزان لزجت سیال می‌باشد، بدین صورت که با افزایش لزجت سیال میزان نفوذ اثر تنش برشی جداره در مقطع لوله بیشتر می‌گردد، که این موضوع در نمودارهای بعدی نیز قابل مشاهده خواهد بود. در ادامه به بررسی توزیع لزجت و تنش برشی در مقطع لوله پرداخته شده است.

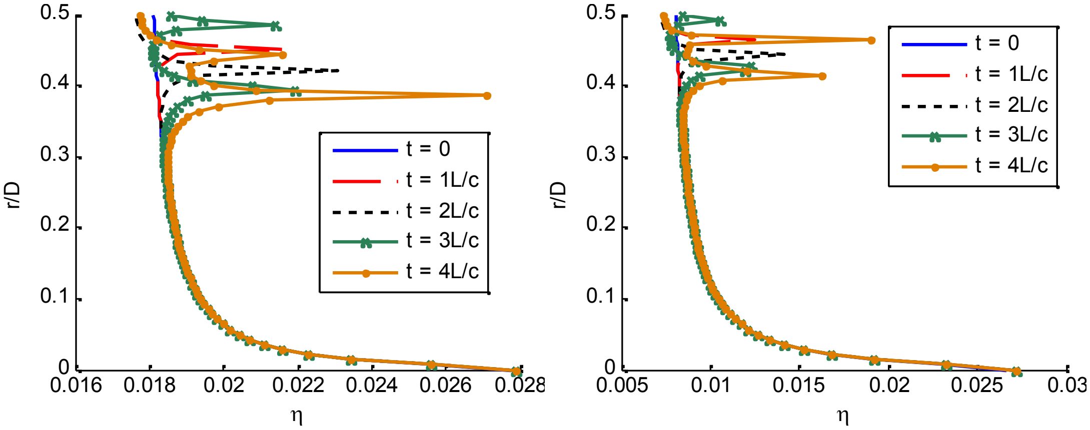
چنانچه در پروفیل‌های تنش برشی و لزجت مشاهده می‌شود (شکل ۵-۲۰ تا شکل ۵-۲۲) مقادیر آن‌ها در محدوده نیمه میانی لوله تقریبا بدون تغییر می‌ماند، در حقیقت نمودار تنش برشی، لزجت و پروفیل سرعت همگی حاکی از حرکت جامد گونه (بدون حرکت نسبی) نیمه مرکزی لوله دارد، که این مسئله با افزایش خاصیت غیر نیوتنی سیال در نمودار تنش برشی متناظر بیشتر نمایان می‌گردد.



شکل ۵-۲۰ توزیع تنش برشی در میانه لوله در سطع مقطع برای سیال نیوتنی



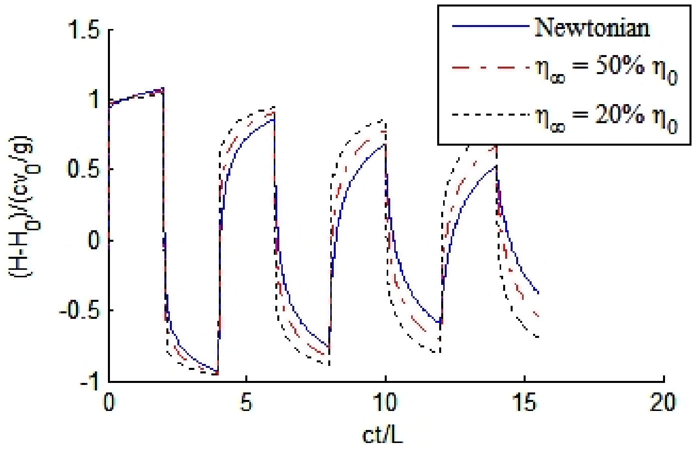
شکل ۵-۲۱ توزیع تنش برشی در مقطع لوله در محل نقطه میانی لوله در مدل کراس (راست $\eta_\infty = 20\%\eta_0$ ، شکل چپ $\eta_\infty = 50\%\eta_0$)



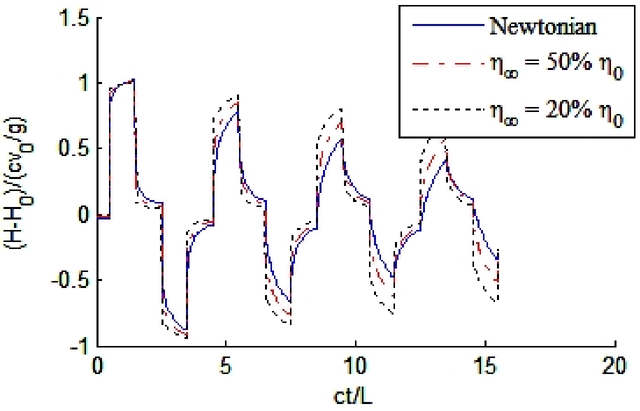
شکل ۵-۲۲ توزیع لزجت سیال در مقطع لوله در محل نقطه میانی لوله در مدل کراس (راست $\eta_\infty = 20\%\eta_0$ ، شکل چپ $\eta_\infty = 50\%\eta_0$)

۵-۳-۲- نتایج مدل عددی خطوط مشخصه

در این بخش نتایج روش خطوط مشخصه دو بعدی برای سیال غیرنیوتنی مدل کراس بررسی شده است. برای مقایسه مناسب‌تر بین روش‌های مختلف مشخصات سیال غیرنیوتنی مشابه آن چه پیشتر آمده است در نظر گرفته می‌شود. با این توضیحات نتایج مقادیر فشار برای گره شیر و نقطه میانی به ترتیب در و آورده شده است.

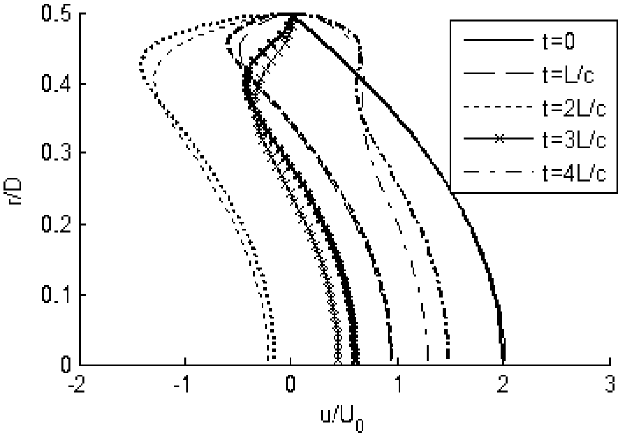


شکل ۵-۲۳ تاریخچه فشار در محل شیر با در نظر گرفتن مدل سیال غیر نیوتنی کراس با استفاده از روش MOC

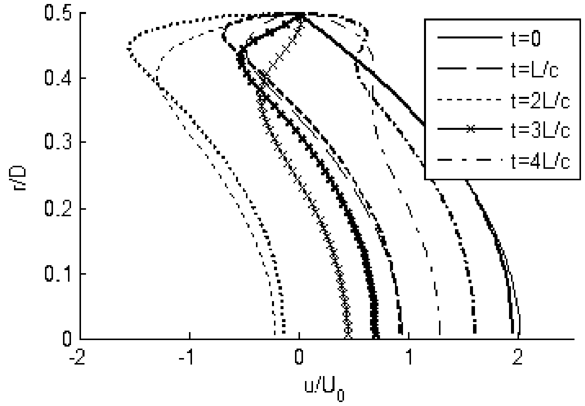


شکل ۵-۲۴ تاریخچه فشار در محل نقطه میانی با در نظر گرفتن مدل سیال غیر نیوتنی کراس با استفاده از روش MOC

همانطور که در نمودارهای تاریخچه فشار مشاهده می‌شود، نتایج منطقی بوده و با روش تفاضل محدود مطابقت مناسبی دارند. در ادامه پروفیل‌های سرعت برای نقطه میانی آورده شده است.



شکل ۵-۲۵ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 50\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش MOC (خطوط ضخیم سیال غیر نیوتنی و خطوط باریک سیال نیوتنی)

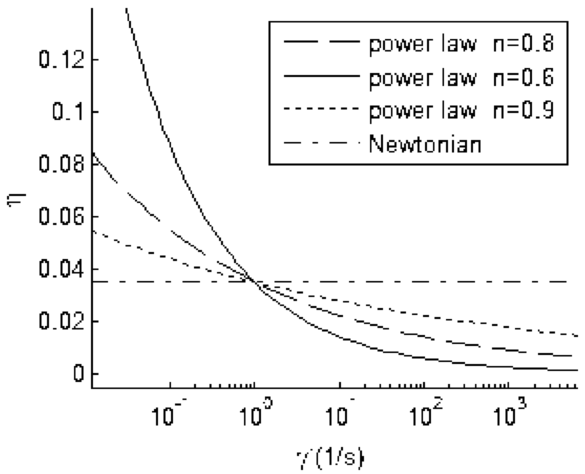


شکل ۵-۲۶ پروفیل سرعت در نقطه میانی به ازا $\eta_\infty = 20\%\eta_0$ در زمان‌های مختلف با روش MOC (خطوط ضخیم سیال غیر نیوتنی و خطوط باریک سیال نیوتنی)

۵-۳-۳- مدل پاور لاو

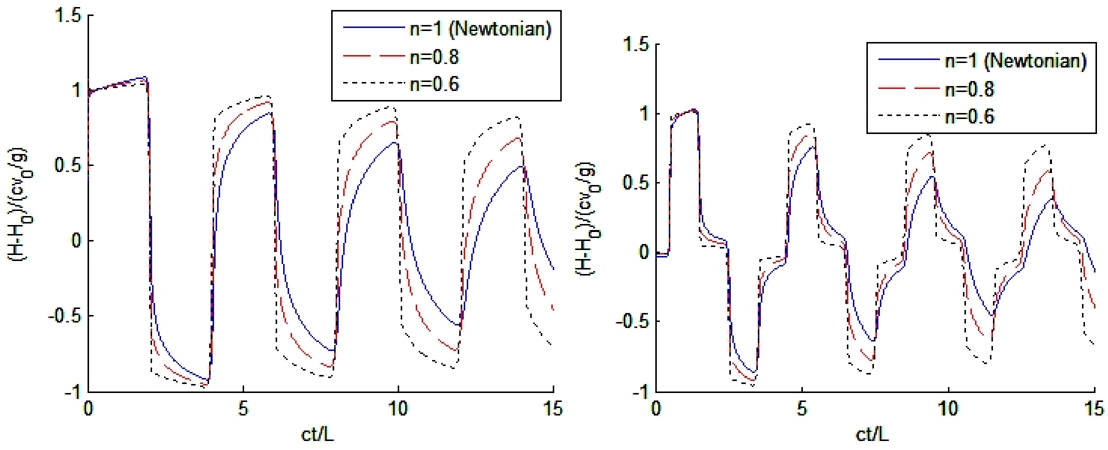
در این بخش با ارائه ی مثال دیگری به بررسی اثرات وجود یک سیال غیرنیوتنی دیگر با مدل قانون توانی پرداخته می‌شود. برای مقایسه ی بهتر و تطبیق آن با نتایج قبل رفتار غیرنیوتنی به گونه‌ای انتخاب شده که بتوان آن را با مثال پیشین مقایسه نمود.

بدین منظور ویژگی‌های زیر را برای سیال غیرنیوتنی در روش عددی در نظر می‌گیریم. سیال از دسته شبه پلاستیک‌ها می‌باشد، و برای مدل سازی ریاضی از مدل قانون توانی استفاده شده است. برای مقایسه با نتایج قبل، ضریب سازگاری مدل (m)، برابر مقدار لزجت سیال مدل آزمایشگاهی قبل در نظر گرفته شده است، در نتیجه زمانی که شاخص رفتار سیال (n) برابر یک باشد، نتایج قبل حاصل خواهند شد. اکنون با تغییر پارامتر شاخص رفتار سیال که بیان کننده رفتار غیرنیوتنی سیال می‌باشد، اثرات تغییرات لزجت با گرادیان سرعت محاسبه و بررسی می‌شوند. برای این منظور مقدار شاخص رفتار سیال در ابتدا به میزان ۸۰ در صد و سپس به مقدار ۶۰ درصد کاهش داده می‌شود. با توجه به پارامترهای فرض شده، در نمودار شکل ۵-۲۷ مقادیر لزجت بر حسب گرادیان‌های مختلف سرعت نشان داده است.



شکل ۵-۲۷ تغییرات لزجت سیال بر حسب نرخ برش

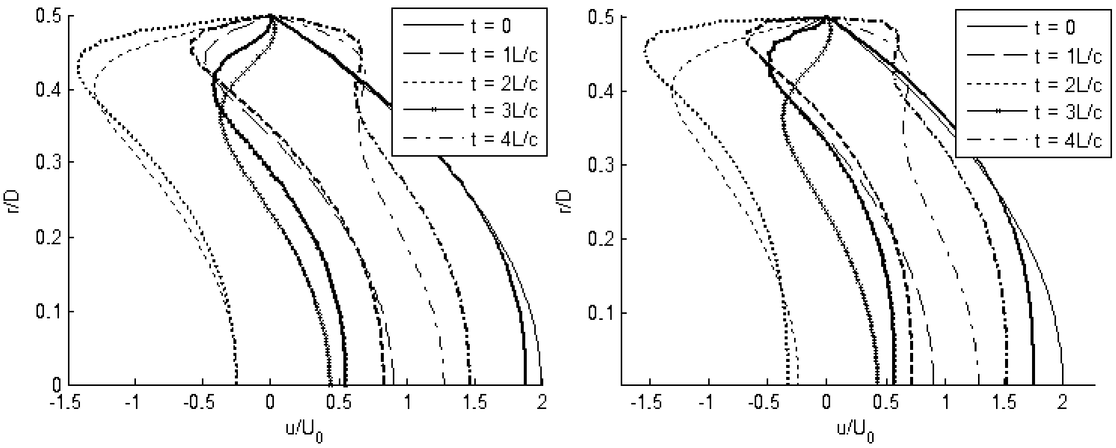
در این مدل سازی برای یکسان بودن مقدار اولیه فشار جاکفسکی، سرعت حالت ماندگار جریان یکسان فرض شده است. برای این منظور مقادیر افت در واحد طول در سه حالت فوق به ترتیب برابر با ۲/۶۹۳ ، ۱/۳۴۳ و ۰/۶۶۵۸ سانتی متر خواهد بود. همچنین فرض شده سرعت موج در طول لوله ثابت باقی می‌ماند. با شرایط مذکور و با استفاده از روش عددی مقادیر فشار درمحل شیر و نقطه میانی لوله در شکل ۵-۲۸ نشان داده شده‌اند



شکل ۵-۲۸ تاریخچه زمانی مقادیر فشار با در نظر گرفتن مدل سیال غیر نیوتنی کراس در محل شیر (چپ) و گره میانی (راست)

همان طور که در نمودارهای شکل ۵-۲۸ مشاهده می‌شود در دوره‌های متناوب جریان غیرماندگار، مطابق انتظار مقادیر حداکثر فشار با کاهش لزجت سیال، افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر با کاهش لزجت سیال مقادیر افت در طول مسیر لوله کم خواهد شد که این موضوع در نمودارهای فوق به وضوح دیده می‌شود. چنانچه در دوره اول تناوب مشاهده می‌شود با کاهش لزجت سیال میزان افزایش فشار (اثر لاین پکینگ) در طی آن دوره کاهش می‌یابد که این امر ناشی از کاهش لزجت موثر و در نتیجه کاهش افت در طول لوله می‌باشد که در نهایت سبب کاهش، نرخ افزایش فشار خواهد شد. در ادامه تحلیل اثرات سیال غیرنیوتنی بر جریان غیرماندگار به بررسی اثرات تغییر لزجت در پروفیل

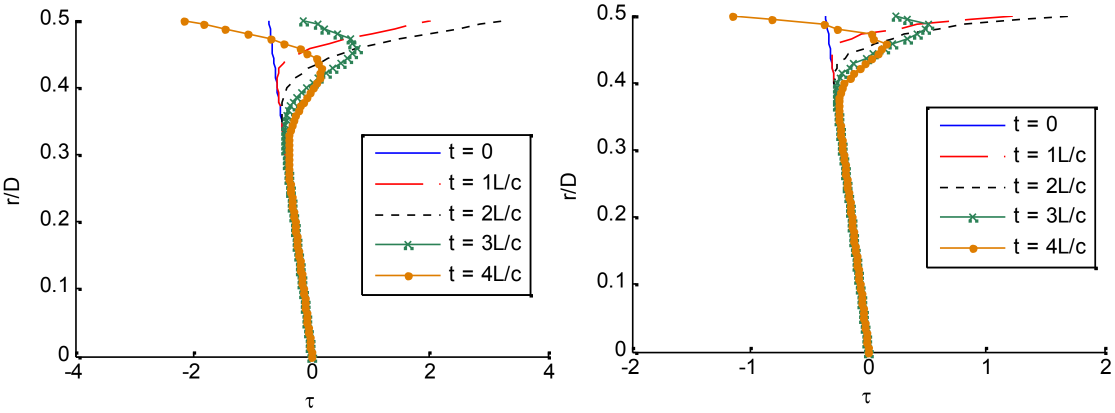
سرعت پرداخته می‌شود. در نمودارهای شکل ۵-۲۹ پروفیل سرعت در مقطع میانی بین سیال نیوتنی و دو حالت سیال غیرنیوتنی مقایسه شده است.



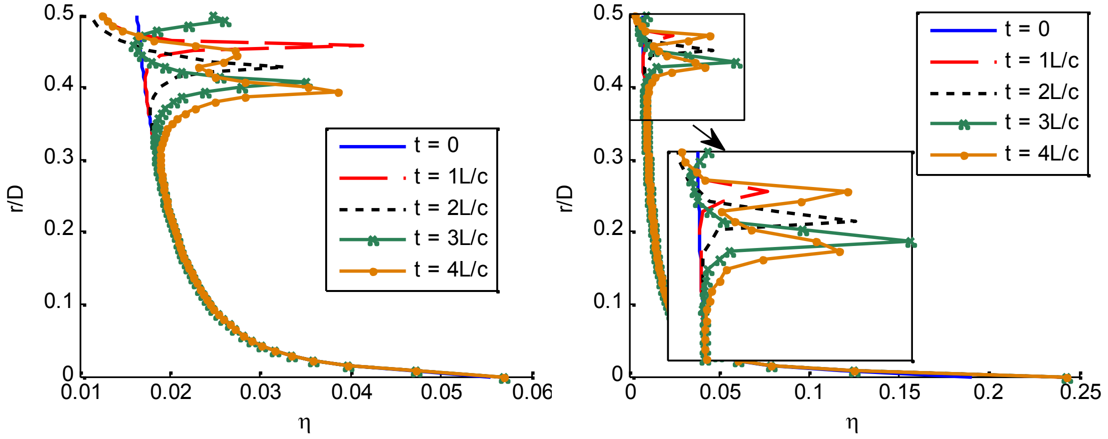
شکل ۵-۲۹ پروفیل سرعت در نقطه میانی در زمان‌های مختلف با روش رانج کوتا (راست *n=0.6*، چپ *n=0.8*)

(خطوط ضخیم سیال غیر نیوتنی و خطوط باریک سیال نیوتنی)

با توجه نمودارهای شکل ۵-۲۹ مشاهده می‌شود که با اعمال رابطه غیرنیوتنی به سیال جریان غیرماندگار پروفیل سرعت نیز دچار تغییر شده است، به گونه‌ای که با کاهش لزجت سیال تغییرات توزیع پروفیل سرعت شدیدتر شده و یا به عبارت دیگر دامنه تغییرات سرعت در یک مقطع بیشتر گردیده است. افزایش گرادیان سرعت در مجاورت جداره لوله سبب کاهش مقدار لزجت شده که خود سبب تغییر مقادیر سرعت و تنش برشی در نزدیکی جداره خواهد شد. همچنین کاهش لزجت سبب شده که بیشینه سرعت نسبی در مقطع به جداره لوله نزدیک‌تر شود. نیمه میانی لوله حرکتی جامد گونه دارد، که تحت اثر تنش برشی جداره و میزان لزجت سیال می‌باشد، بدین صورت که با افزایش لزجت سیال میزان نفوذ اثر تنش برشی جداره در مقطع لوله بیشتر می‌گردد. همچنین در نمودارهای و مقادیر تنش برشی و لزجت نشان داده شده‌اند.



شکل ۵-۳۰ توزیع تنش برشی در مقطع میان لوله در مدل پاورلاو (راست $n=0.6$، چپ $n=0.8$)

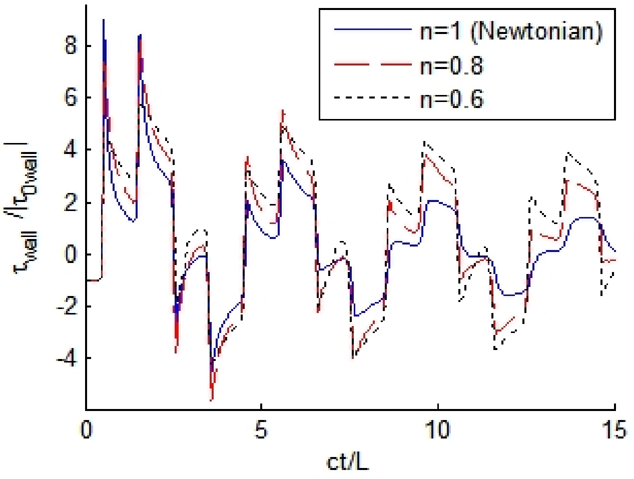


شکل ۵-۳۱ توزیع لزجت سیال در مقطع میان لوله در مدل پاورلاو (راست $n=0.6$، چپ $n=0.8$)

۵-۳-۴- تاریخچه تنش برشی

در انتها تغییرات تنش برشی در جداره ی لوله بررسی شده است، بدین منظور در گره میانی لوله تاریخچه‌ی زمانی تنش برشی در جداره ی لوله محاسبه گردیده است. چنانچه در شکل ۵-۳۲ نشان داده شده است، محور عمودی نسبت تنش برشی جداره به تنش برشی دیواره ی لوله در حالت ماندگار می‌باشد. همان طور که انتظار می‌رود با گذر زمان پس از بستن شیر و کاهش دامنه ی

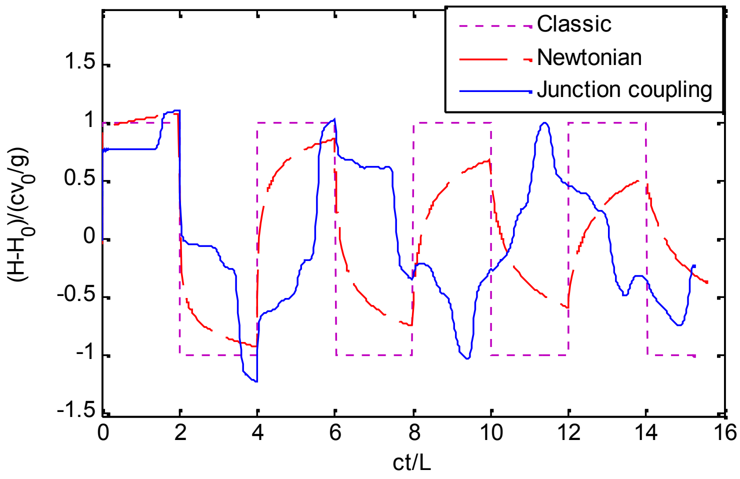
تغییرات سرعت و مقدار سرعت میانگین، میزان تنش برشی در جداره ی لوله نیز کاهش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش اثر سیال غیرنیوتنی (کاهش لزجت موثر سیال) و در نتیجه کاهش میزان افت در لوله مقدار تنش برشی جداره با شیب ملایم‌تری کاهش پیدا می‌کند. نکته ی قابل توجه دیگر آن که، با افزایش اثر غیرنیوتنی، در هر دوره که موج فشار به نقطه ی مورد نظر می‌رسد به علت نفوذ کمتر اثرات دیوار به هسته ی مرکزی، شیب تنش برشی به صورت یکنواخت‌تری کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۵-۳۲ تاریخچه زمانی مقادیر تنش برشی دیواره در گره میانی

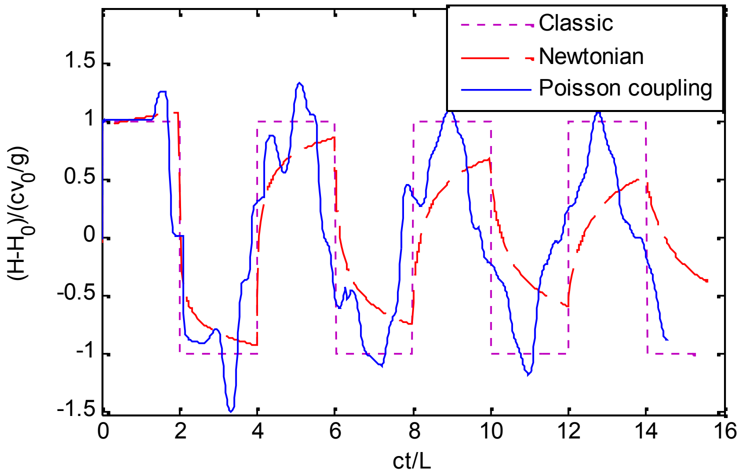
۵-۴- مدل اندرکنش سیال سازه

در آخرین قسمت بررسی نتایج مدل‌های عددی، به بررسی مدل سازی اثرات اندرکنش سیال می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا با منظور کردن اثرات اندرکنش در سیال نیوتنی اقدام می‌کنیم. بدین صورت که ابتدا مقادیر فشار در گره شیر برای نشان دادن فقط اثرات اتصال کوپله ترسیم شده است. که همراه با آن نمودار ضربه قوچ کلاسیک بدون در نظر گرفتن اثرات افت و همچین با در نظر گرفتن اثرات برشی سیال ترسیم گردیده است. این نمودار در شکل ۵-۳۳ نمایش داده شده است.

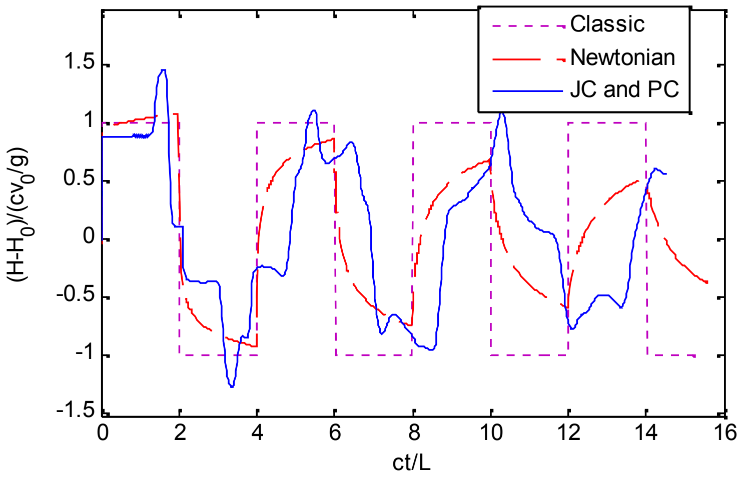


شکل ۵-۳۳ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله اتصال برای سیال نیوتنی

در این قسمت مشابه حالت قبلی با این تفاوت که فقط اثرات کوپله پواسون در آن لحاظ شده است، نمودار تغییرات فشار در شکل ۵-۳۴ ترسیم شده‌اند. همچنین در نتایج اثرات همزمان کوپله پواسون و کوپله اتصال آورده شده است.



شکل ۵-۳۴ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله پواسون برای سیال نیوتنی

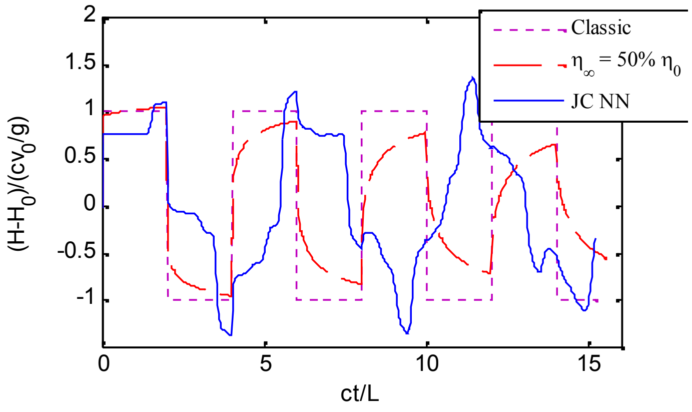


شکل ۵-۳۵ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر همزمان کوپله اتصال و پواسون برای سیال نیوتنی

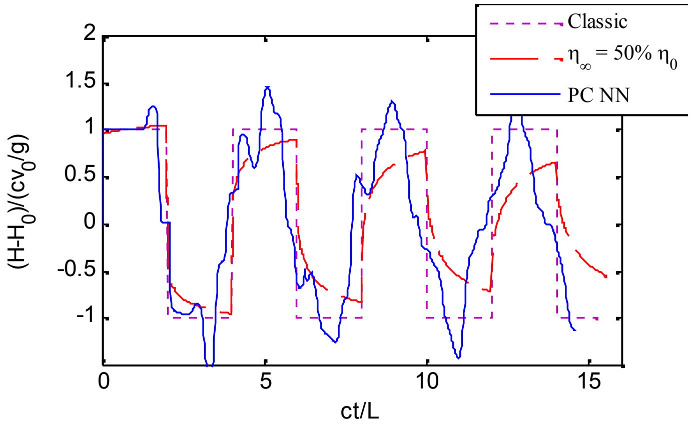
در انتهای این بخش نتایج مربوط به مدل سازی اثرات تداخلی سیال سازه به همراه اثرات سیال غیرنیوتنی آورده شده است. بدین منظور مشابه حالت سیال نیوتنی نتایج برای سه حالت کوپله اتصال و کوپله پواسون و اثر همزمان هر دو ارائه شده است. لازم به ذکر است که برای بررسی اثرات سیال غیرنیوتنی از مدل کراس که در بخش‌های قبلی به کار رفته است، استفاده کرده ایم. در این مدل لزجت نهایی سیال برابر ۵۰ درصد لزجت اولیه فرض شده است.

در اثر کوپله اتصال به تنهایی نمایش داده شده است. در این شکل علاوه بر آن نمودار ضربه قوچ کلاسیک و جریان غیرماندگار سیال غیرنیوتنی نیز نمایش داده شده است. همچنین در شکل ۵-۳۷ و شکل ۵-۳۸ تاریخچه فشار برای کوپله پواسون و اثر همزمان کوپله اتصال و پواسون آورده شده است.

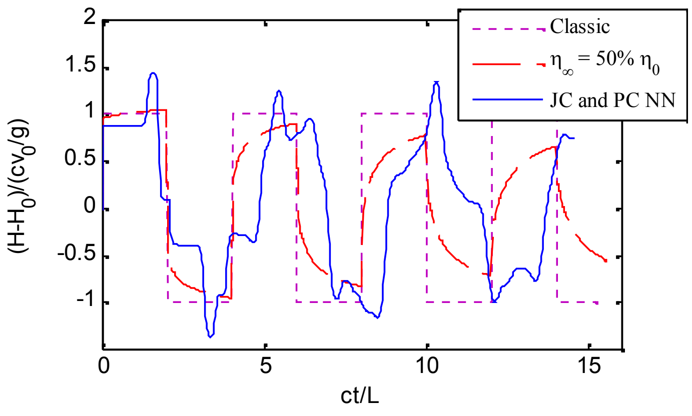
چنانچه نمودارهای فشار اندرکنش سیال سازه نشان می‌دهد افزایش فشار ایجاد شده مربوط به اثرات اندر کنش سیال سازه در لوله‌ها از فشار جوکوفسکی فراتر می‌رود، که این امر ضرورت انجام آنالیزهای تداخلی را برای سیستمهای با اهمیت بالا، جهت تعیین حداکثر تنش وارده بر لوله، نشان می‌دهد.



شکل ۵-۳۶ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله اتصال برای سیال غیرنیوتنی



شکل ۵-۳۷ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر کوپله پواسون برای سیال غیرنیوتنی



شکل ۵-۳۸ اثراندرکنش سیال سازه با اعمال اثر همزمان کوپله اتصال و پواسون برای سیال نیوتنی

فصل ششم

خلاصه، نتیجه گیری و پیشنهادات

۶-۱- خلاصه

در این تحقیق به بررسی جریان‌های غیرماندگار با فرض وجود سیال غیرنیوتنی و در نظر گرفتن اثرات اندر کنش سیال سازه پرداخته شد. به دلیل فرض اساسی "سیال غیرنیوتنی" هیچکدام از معادلات کلاسیک جریان غیرماندگار گذشته قابل استفاده نبوده‌اند، به همین سبب در گام نخست، معادلات اساسی حاکم در جریان غیرماندگار، با در نظر گرفتن رفتار سیال غیرنیوتنی استخراج گردید. تفاوت اساسی که در استخراج معادلات با روش‌های گذشته وجود دارد عدم جایگزینی رابطه تنش برشی سیال نیوتنی با نرخ برش است، که در معادلات کلاسیک این رابطه خطی سبب تسهیل حل معادلات می‌شود. از این رو در بازنویسی معادلات حاکم عبارت‌های تنش برشی سیال با روابط ساختاری سیال غیرنیوتنی جایگزین شده‌اند. به دلیل این که روابط ساختاری سیال غیرنیوتنی و خصوصیات سیال علاوه بر آن که وابسته به ویژگی‌های ذاتی سیال می‌باشند، به شرایط جریان هم وابسته هستند، در نتیجه برای محاسبه رابطه ساختاری سیال، خصوصیات جریان نیز به طور جزیی و دقیق‌تر محاسبه گردید تا اطلاعات کامل‌تری همچون دست یابی به پروفیل سرعت داشته باشیم. به همین دلیل همچون روابط کلاسیک استفاده از روش‌های یک بعدی امکان پذیر نبوده است، که این امر سبب پیچیدگی معادلات حاکم بر مسئله و حل آن‌ها شد.

در انتهای این قسمت از مطالعه، به معادلات دو بعدی حاکم بر جریان‌های غیرماندگار حاوی سیال غیرنیوتنی دست یافتیم. این معادلات برخلاف معادلات کلاسیک گذشته از توانایی مدل سازی جریان دو بعدی حاوی سیال غیرنیوتنی برخوردار هستند. در ادامه معادلات سازه ای حاکم بر جداره لوله جهت اعمال اثرات اندرکنش سیال سازه بررسی گردید. از آن جا که معادلات سازه مستقل از رفتار غیرنیوتنی سیال می‌باشد، لذا از معادلات موجود در این بخش استفاده گردید. البته تغییرات اندکی جهت هماهنگی با مدل سازی دو بعدی صورت گرفت. که این تغییرات در استفاده از روش‌های عددی

قرار داشتند.

پس از بدست آوردن معادلات حاکم بر مسئله می‌بایست با استفاده از روش‌های عددی به حل این مجموعه معادلات اقدام نماییم. که در این راستا جهت اطمینان از روش‌ها و الگوریتم‌های حل معادلات جریان غیرماندگار از دو روش عددی استفاده گردید.

روش اول استفاده از روش تفاضل محدود می‌باشد. در این روش برای محاسبه عبارت هایی که دارای مشتق زمانی هستند و یا به عبارت دیگر جهت انتگرال گیری زمانی از روش انتگرال گیری رانج کوتای مرتبه چهارم که از دقت بالایی برخوردار است استفاده شد. همچنین برای گسسته سازی عبارت‌های مکانی از فرم تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده گردید. در این شیوه همچون برخی از روش‌های تفاضل محدود معادلات هذلولی، نوسانات غیر واقعی عددی ایجاد می‌گردد. جهت از بین بردن این نوسانات عددی عبارت‌های مستهلک کننده مرتبه دوم به معادلات پایه اضافه گردید.

در روش دوم از روش با دقت بالا و سریع خطوط مشخصه استفاده شد. معادلات بدست آمده پیوستگی و ممنتوم دو بعدی غیرنیوتنی، ابتدا توسط عملیات جبری به معادلات مشخصه تبدیل شدند. در این تبدیل فرض خطوط مشخصه که تناسب بین گام‌های زمانی و گام‌های مکانی و سرعت موج می‌باشد، استفاده گردیده است. همچنین لازم به ذکر است که در این روش، بخش‌های سهموی معادله که شامل عبارت‌های مکانی هستند توسط فرم تفاضل محدود مرتبه دوم گسسته سازی شده‌اند. علاوه بر سرعت بیشتر این روش نسبت به روش رانج کوتا با تعداد گره‌های کمتر دقت بیشتری حاصل می‌شود، اما به دلیل شرایط خاص خطوط مشخصه امکان دست ورزی در روابط مشکل‌تر می‌باشد.

همچنین معادلات سازه جداره لوله با استفاده از روش کارآمد اجزا محدود برای محاسبه تنش‌ها و

تغییر شکل‌های جداره لوله به کار گرفته شده است. معادلات سازه با معادلات هیدرولیکی جریان به صورت کوپله تحلیل شده‌اند. بدین معنی که در یک گام زمانی حل معادلات سازه و هیدرولیک به صورت جداگانه تا رسیدن به دقت مورد نظر تکرار شده‌اند.

در گام بعدی روش‌ها و الگوریتم‌های به کار گرفته شده توسط نتایج آزمایشگاهی موجود بررسی گردید. از آن جا که مدل‌های بدست آمده محدود به جریان‌های لایه هستند و مدل‌های آزمایشگاهی محدودی برای جریان غیرماندگار لایه موجود بوده است، به همین دلیل سعی شد تا با بررسی بیشتر نتایج عددی، این کمبود جبران گردد.

۶-۲- نتیجه گیری

پس از اطمینان از روش‌های عددی رانج کوتا و خطوط مشخصه از مدل‌های غیرنیوتنی کراس و پاور لاو استفاده شد و حالت‌های مختلف سیال غیرنیوتنی مدل سازی گردید و نتایج آن با یکدیگر مقایسه شده است. از مهمترین نتایج حاصل می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

- افزایش اثر غیرنیوتنی سیال شبه پلاستیک و در نتیجه کاهش نسبی مقدار لزجت، سبب کاهش میزان افت در لوله شده و در پی آن میزان فشار ایجاد شده در محل شیر افزایش پیدا کرده است. همچنین به کاهش مقدار لزجت ظاهری در جداره لوله سبب کاهش افت دیواره شده که به سبب آن اثر لاین پکینگ کمتر شده است.
- در پی تغییرات رفتار سیال مشاهده می‌شود که با افزایش اثرات غیرنیوتنی دامنه تغییرات به سمت جداره لوله متمایل شده است، و به دنبال آن بیشینه نسبی سرعت در مقطع لوله نیز به جداره نزدیک‌تر می‌شود، همچنین تغییرات شدیدتری در پروفیل سرعت مشاهده

می‌گردد. در میانه لوله نیز حرکتی کلی (شبه صلب) و با تغییرات نسبی ناچیز مشاهده می‌گردد، که در نمودارهای لزجت سیال، تنش برشی و پروفیل سرعت مقطع به خوبی قابل مشاهده است. تغییرات ایجاد شده در مجاورت جداره لوله را نیز می‌توان ناشی از اعمال شرط عدم لغزش در مرز سیال با جداره لوله دانست که اثرات آن از جداره لوله به سمت مرکز لوله پراکنده می‌گردد.

- نمودار تاریخچه تنش برشی دیوار نشان دهنده آن است که با افزایش اثر غیرنیوتنی، از شدت کاهش تنش برشی جداره لوله کاسته می‌شود (به دلیل کاهش افت). همچنین به علت نفوذ کمتر اثر جداره به مرکز لوله در هر دوره تغییرات یکنواخت‌تری مشاهده می‌شود، به عبارت دیگر به علت کاهش لزجت موثر سیال اثر کمتری بر تنش جداره توسط تغییرات سرعت اعمال می‌شود.

- با افزایش اثر غیرنیوتنی سیال، که در این جا منظور افزایش اثر نازک شدگی برش می‌باشد، تغییرات لزجت و تنش برشی به سمت جداره لوله میل کند، که به معنای ایجاد تغییرات در سطح مقطع کمتری می‌باشد. این تغییرات کمتر باعث ایجاد افت انرژی کمتر و افت فشار کمتر در جریان لوله خواهد شد، که مطابقت کاملی با نمودارهای فشار نشان می‌دهد.

- افزایش فشار ایجاد شده مربوط به اثرات اندر کنش سیال سازه در لوله‌ها از فشار جوکوفسکی فراتر می‌رود، که این امر ضرورت انجام آنالیزهای تداخلی را برای سیستمهای با اهمیت بالا، جهت تعیین حداکثر تنش وارده بر لوله، نشان می‌دهد.

- همانگونه که انتظار می‌رود اگر اتصالات مانند شیر و تقاطع آزاد باشند باعث می‌شود فشارهای ماکزیمم قدری کاهش پیدا کنند. که علت آن حرکت سازه اتصال مورد نظر و صفر

نشدن آنی سرعت مطلق سیال (در بستن‌های آنی) می‌باشد. اما در مقابل این کاهش فشارها، جابجایی‌های قابل ملاحظه ای در سازه اتصال ایجاد می‌کند.

۶-۳- پیشنهادات

بدیهی است که مباحث مربوط به تحقیق جریان‌های غیرماندگار با در نظر گرفتن اثرات سیالات غیرنیوتنی دارای زمینه‌های زیادی برای تکمیل کردن و بهبود روش‌ها است، و این رساله، تنها گام کوچکی در آغاز این زمینه به شمار می‌رود. برخی از این زمینه‌های تحقیق و بررسی را به طور خلاصه، در قالب موارد زیر ذکر خواهیم کرد.

- تمامی معادلاتی که در این رساله مطرح شد، پیرامون جریان‌های غیرماندگار لایه ای بوده است. لذا با محدودیتی که این فرض ایجاب می‌کند ضروری است که برای کاربردهای بیشتر و تکمیل مطالعات مدل‌های جریان آشفته به معادلات پایه اضافه گردد. تا با استفاده از آن به توان محدوده ی کاربرد سیالات غیرنیوتنی در جریان غیرماندگار افزایش یابد. از سوی دیگر با این شیوه می‌توان از اطلاعات بیشتری برای نتایج آزمایشگاهی و صحت سنجی روش‌ها و مدل‌های عددی استفاده کرد.
- برای راست آزمایی مدل‌های مختلف سیالات غیر نیوتنی در جریان‌های غیرماندگار لایه ای پیشنهاد می‌شود که مجموعه آزمایشی کامل با استفاده از سیالات غیرنیوتنی متفاوت با مشخصات گوناگون، تحت شرایط مختلفی انجام گیرد. همچنین برداشت پروفیل‌های سرعت جهت بررسی مولفه‌های سرعت و لزجت سیال کمک شایانی خواهد کرد.
- تکمیل بررسی اثرات اصطکاک سیالات غیرنیوتنی به خصوص در جریان‌های غیرماندگار و

همچنین جریان‌های آشفته می‌تواند در مدل سازی و پیش بینی نتایج عددی موثر باشد. در همین راستا با بررسی مدل‌های دو بعدی و مدل‌های تک بعدی امکان ارائه مدل‌های اصطکاک غیرماندگار برای سیالات غیرنیوتنی وجود خواهد داشت.

- از آن جا که بسیاری از کاربردهای طبیعی و صنعتی جریان‌های غیرماندگار در لوله هایی با جداره‌های غیر الاستیک می‌باشد، مانند حرکت خون در رگ‌های خونی، پیشنهاد می‌شود که اثر غیرالاستیک جداره لوله در مدل‌های جریان غیرماندگار و همچنین مدل‌های اندرکنش سیال سازه دیده شود.

- انتشار سرعت موج فشاری در لوله تابعی از خصوصیات سیال می‌باشد، که در این رساله مقداری ثابت در نظر گرفته شد. با توجه به اینکه میزان سرعت موج از اهمیت ویژه ای در مقادیر مشخصات جریان در جریان گذرا دارد، لذا ضروری به نظر می‌رسد که بررسی‌ها و مطالعات تکمیلی برای سرعت موج در انواع سیالات غیرنیوتنی انجام پذیرد.

- برای بسط مدل سازی‌های مختلف لازم است تمامی اجزای آن به درستی مدل شوند. از این جمله اعمال شرایط مرزی است. لذا توصیه می‌گردد برای استفاده بهینه تر، شرایط مرزی مختلفی مانند، مدل سازی پمپ، اتصالات، اثرات تغییر قطر بررسی و ایجاد گردد.

مراجع فارسی

۱- کرامت، ع.، (۱۳۸۹)، رساله دکتری، "بررسی اندرکنش سیال- سازه در شبکه‌های لوله ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن جدایی ستون مایع" دانشکده عمران، دانشگاه شاهرود

۲- مجد، ع. (۱۳۸۸)، پایان نامه کارشناسی ارشد، "بررسی پدیده جدایی ستون در جریان‌های غیرماندگار" دانشکده عمران، دانشگاه شاهرود

مراجع لاتین

[1] Wylie, E.B., V.L.A. Streeter, and L. Suo, *Fluid Transients in Systems*, 1993: Prentice Hall PTR.

[2] J., M., *Water hammer in conduits: study of means used for diminishing the effects.* Bulletin de la Societe Vaudoise, 1878.

[3] Joukowsky, N.E. *Water hammer (Translation from Russian by Miss O. Simin)*. in *American water works Association*. 1904.

[4] Bergant, A., A.R. Simpson, and A.S. Tijsseling, *Water hammer with column separation: A historical review.* Journal of fluids and structures, 2006. 22(2): p. 135-171.

[5] Keramat, A., A.G. Kolahi, and A. Ahmadi, *Waterhammer modelling of viscoelastic pipes with a time-dependent Poisson's ratio.* Journal of Fluids and Structures, 2013. 43(0): p. 164-178.

[6] Keramat, A. and A.S. Tijsseling. *Waterhammer with column separation, fluid-structure interaction and unsteady friction in a viscoelastic pipe*. in *11th International Conference on Pressure Surges*. 2012. Lisbon, Portugal, 24-26 October.

[7] Keramat, A., et al., *Fluid-structure interaction with pipe-wall viscoelasticity during water hammer.* Journal of Fluids and Structures, 2012. 28: p. 434–455.

[8] Ahmadi, A. and A. Keramat, *Investigation of fluid–structure interaction with various types of junction coupling.* Journal of Fluids and Structures, 2010. 26(7–8): p. 1123-1141.

[9] Meniconi, S., et al., *Energy dissipation and pressure decay during transients in viscoelastic pipes with an in-line valve.* Journal of Fluids and Structures, 2014. 45(0): p. 235-249.

[10] Meniconi, S., et al., *Further Developments in Rapidly Decelerating Turbulent Pipe Flow Modeling.* Journal of Hydraulic Engineering, 2014. 140(7): p. 04014028.

[11] Meniconi, S., et al., *Energy dissipation and pressure decay during transients in viscoelastic pipes with an in-line valve.* Journal of Fluids and Structures, 2014. 45: p. 235-249.

[12] Kim, S., *Holistic Unsteady-Friction Model for Laminar Transient Flow in Pipeline Systems.* Journal of Hydraulic Engineering, 2011. 137(12): p. 1649-1658.

[13] Zielke, W., *Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow.* J. Basic Eng., 1968. 90(1): p. 109-115.

[14] Brunone, B., et al., *Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow.* Journal of Water Resources Planning and Management, 2000. 126(4): p. 236-244.

[15] Vítkovský, J., et al. *Efficient and accurate calculation of Zielke and Vardy-Brown unsteady friction in pipe transients*. in *Proceedings of the 9th International Conference on Pressure Surges*. 2004.

[16] Wylie, E.B., V.L. Streeter, and L. Suo, *Fluid transients in systems*, 1993: Prentice Hall.

[17] Lister, M., *The Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations by the Method of Characteristics.* Numerical Methods for Digital Computers, Wiley New York, 1960: p. 165–179.

[18] Ghidaoui, M.S., et al., *A Review of Water Hammer Theory and Practice.* Appl. Mech. Rev., 2005. 58(1): p. 49-76.

[19] Wylie, E.B. and V.L. Streeter, *Network System Transient Calculations by Implicit Method*, in *45th Annual Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME*1970: Houston, Texas. p. paper No. 2963.

[20] Chaudhry, M.H. and M.Y. Hussaini, *Second-Order Accurate Explicitly Finite-Difference Schemes for Water Hammer Analysis.* ASME J. Fluids Eng. , 1985. 107: p. 523–529.

[21] Hwang, Y.-H. and N.-M. Chung, *A fast Godunov method for the water-hammer problem.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2002. 40(6): p. 799-819.

[22] Guinot, V., *Riemann solvers for water hammer simulations by Godunov method.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. 49(7): p. 851-870.

[23] Ghidaoui, M., S. Mansour, and M. Zhao, *Applicability of Quasisteady and Axisymmetric Turbulence Models in Water Hammer.* Journal of Hydraulic Engineering, 2002. 128(10): p. 917-924.

[24] Vardy, A.E. and K. Hwang, *A characteristics model of transient friction in pipes.* J. Hydraul. Res., 1991. 29(5): p. 669-684.

[25] Pezzinga, G., *Quasi-2D Model for Unsteady Flow in Pipe Networks.* Journal of Hydraulic Engineering, 1999. 125(7): p. 676-685.

[26] Bird, R.B., R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*. 2 ed, Vol. 1. 1987.

[27] Chhabra, R.P. and J.F. Richardson, *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*. 2nd ed, 2011: Elsevier Science.

[28] Lai, W.M., et al., *Introduction to continuum mechanics*. 4th ed, 2010, Amsterdam ; Boston: Butterworth-Heinemann/Elsevier.

[29] Barbieri, R. and Z. Chen, *Engineering Approaches to Study Cardiovascular Physiology: Modeling, Estimation, and Signal Processing*, 2013: Frontiers Media SA.

[30] Randles, A.E., *Modeling Cardiovascular Hemodynamics Using the Lattice Boltzmann Method on Massively Parallel Supercomputers*, 2013.

[31] Tu, J., K. Inthavong, and K.K.L. Wong, *Computational Hemodynamics – Theory, Modelling and Applications*, 2015: Springer Netherlands.

[32] Pinho, F.T. and J.H. Whitelaw, *Flow of non-newtonian fluids in a pipe.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1990. 34(2): p. 129-144.

[33] Cruz, D.O.A. and F.T. Pinho, *Fully-developed pipe and planar flows of multimode viscoelastic fluids.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2007. 141(2–3): p. 85-98.

[34] Oliveira, G.M., C.O.R. Negrão, and A.T. Franco, *Pressure transmission in Bingham fluids compressed within a closed pipe.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2012. 169–170(0): p. 121-125.

[35] López-Carranza, S.N., M. Jenny, and C. Nouar, *Pipe flow of shear-thinning fluids.* Comptes Rendus Mécanique, 2012. 340(8): p. 602-618.

[36] Vardy, A.E. and J.M.B. Brown, *Laminar pipe flow with time-dependent viscosity.* J HYDROINFORM, 2011. 13(4): p. 729–740.

[37] Duarte, A., A. Miranda, and P. Oliveira, *Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: The start-up and pulsating test case problems.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2008. 154(2): p. 153-169.

[38] Erdoan, M. and C.E. Eminmrak, *On the Steady Flow of a Second-Grade Fluid between Two Coaxial Porous Cylinders.* Mathematical Problems in Engineering, 2007. 2007.

[39] Wahba, E.M., *Non-Newtonian fluid hammer in elastic circular pipes: Shear-thinning and shear-thickening effects.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2013. 198(0): p. 24-30.

[40] Zhang, L., A.S. Tijsseling, and A.E. Vardy, *FSI analysis of liquid-filled pipes.* Journal of Sound and Vibration, 1999. 224(1): p. 69-99.

[41] Tijsseling, A., *Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review.* Journal of Fluids and Structures, 1996. 10(2): p. 109-146.

[42] Tijsseling, A. and A. Vardy, *On the suppression of coupled liquid/pipe vibrations*, in *Hydraulic Machinery and Cavitation*1996, Springer. p. 945-954.

[43] Deacon, N., et al., *Nonlinear flexural waves in fluid–filled elastic channels.* Journal of Fluids and Structures, 2015. 52: p. 16-36.

[44] Heinsbroek, A.G.T.J. and A.S. Tijsseling. *The influence of support rigidity on waterhammer pressures and pipe stresses*. in *Proc. of the Second Int. Conf. on Water Pipeline Systems BHR Group*. 1994. Edinburgh, UK,.

[45] Tijsseling, A.S. and A.E. Vardy, *Time scales and FSI in oscillatory liquid-filled pipe flow.* BHR Group, Proc. of the 10th Int. Conf. on Pressure Surges (Editor S. Hunt), Edinburgh, United Kingdom, 2008: p. 553-568.

[46] Li, Q., K. Yang, and L. Zhang, *Analytical Solution for Fluid-Structure Interaction in Liquid-Filled Pipes Subjected to Impact-Induced Water Hammer.* Journal of Engineering Mechanics, 2003. 129(12): p. 1408-1417.

[47] Yang, K., Q.S. Li, and L. Zhang, *Longitudinal vibration analysis of multi-span liquid-filled pipelines with rigid constraints.* Journal of Sound and Vibration, 2004. 273(1–2): p. 125-147.

[48] Bergant, A., et al., *Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing—Part 1: Mathematical tools.* Journal of Hydraulic Research, 2008. 46(3): p. 373-381.

[49] Bergant, A., et al., *Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing—Part 2: Case studies.* Journal of Hydraulic Research, 2008. 46(3): p. 382-391.

[50] Tijsseling, A.S., *Fluid – structure interaction in case of waterhammer with cavitation* in *Civil Engineering Department*1993, Delft University of Technology: Netherlands.

[51] Vardy, A. and J. Brown, *Transient turbulent friction in smooth pipe flows.* Journal of Sound and Vibration, 2003. 259(5): p. 1011-1036.

[52] Vardy, A. and J. Brown, *Transient turbulent friction in fully rough pipe flows.* Journal of Sound and Vibration, 2004. 270(1): p. 233-257.

[53] Wahba, E.M., *Runge–Kutta time-stepping schemes with TVD central differencing for the water hammer equations.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2006. 52(5): p. 571-590.

[54] Wahba, E., *Modelling the attenuation of laminar fluid transients in piping systems.* Applied Mathematical Modelling, 2008. 32(12): p. 2863-2871.

[55] Shi, F., et al., *A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modeling of breaking waves and coastal inundation.* Ocean Modelling, 2012. 43: p. 36-51.

[56] Toro, E., *Computational Methods for Hyperbolic Equations*, in *Jets From Young Stars III*2008, Springer. p. 3-69.

[57] Jameson, A., W. Schmidt, and E. Turkel, *Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-stepping Schemes*, 1981.

[58] Zhao, M. and M.S. Ghidaoui, *Efficient quasi-two-dimensional model for water hammer problems.* Journal of Hydraulic Engineering, 2003. 129(12): p. 1007-1013.

[59] Riasi, A., A. Nourbakhsh, and M. Raisee, *Unsteady Velocity Profiles in Laminar and Turbulent Water Hammer Flows.* J. Fluids Eng, 2009. 131(12): p. 121202-121202.

[60] Riasi, A., A. Nourbakhsh, and M. Raisee, *Energy dissipation in unsteady turbulent pipe flows caused by water hammer.* Computers & Fluids, 2013. 73(0): p. 124-133.

[61] Holmboe, E.L. and W.T. Rouleau, *The Effect of Viscous Shear on Transients in Liquid Lines.* J BASIC ENG., 1967. 89(1): p. 174-180.

[62] Brunone, B., M. Ferrante, and M. Cacciamani, *Decay of Pressure and Energy Dissipation in Laminar Transient Flow.* J. Fluids Eng, 2005. 126(6): p. 7.

Abstract

A sudden change in the flow rate brings about significant pressure oscillations in the piping system known as water hammer (fluid hammer). Unsteady flow of a non-Newtonian fluid due to the instantaneous valve closure is studied. Power law and Cross models are used to simulate non-Newtonian effects .

Firstly, the appropriate governing equations are derived with respect to non-Newtonian fluid constitutive equations and then, they are solved by two numerical approaches. A fourth-order Runge–Kutta scheme is used for the time integration and the central difference scheme is employed for the spatial derivatives discretization. Method of characteristics is another numerical method that employed for solving two dimensional equations. At the end of this section pipe wall structural equations added to basic equations to consider fluid structure interaction effects .

To verify the proposed mathematical models and numerical solutions, comparisons with corresponding experimental results from literature are made. The results reveal a remarkable deviation in pressure history and velocity profile with respect to the water hammer in Newtonian fluids. The significance of the non-Newtonian fluid behavior is manifested in terms of drag reduction and line packing effect observed in the pressure history results. Fluid structure interaction results show significant changes in pressure time history and other flow specifications. So modeling fluid structure interaction is inevitable.
Keywords: Transient pipe flow, Generalized Non-Newtonian fluid, Fluid structure interaction

University of Shahrood
Faculty of Civil engineering

Modeling of unsteady flow with non Newtonian fluid with fluid-structure interaction in pipe system

Ali Majd

Supervisor:
Dr Ahmad Ahmadi

September 2015