بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی عمران
گروه سازه

رساله دکتری

بهینه‌سازی شکل و توپولوژی سازه‌های مسطح و پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک

حسین قاسم نژاد مقری

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:

دکتر مهدی توکلی

شهریور ۱۳۹۴

تقدیم به

پدرم

به استواری کوه

و

مادرم

به زلالی چشمه

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم در آغاز این رساله از زحمات استاد فرزانه‌ام، جناب آقای دکتر بهروز حسنی صمیمانه تشکر نمایم. از آغاز دوره کارشناسی ارشد تا به امروز که از رساله دکتری خود دفاع می کنم، علاوه بر بهره‌مندی از راهنمایی‌های علمی، همواره تحت تاثیر اخلاق، نگرش و شیوه تفکر ایشان بوده‌ام. قطعا پایان دوران تحصیلم به معنی پایان آموختنم از ایشان نخواهد بود.

همچنین از آقای دکتر مهدی توکلی که در انجام این رساله و قبل از آن، در دوره کارشناسی ارشد، از راهنمایی‌ها و کمک‌های بی دریغشان استفاده نمودم، کمال تشکر را دارم. گمان می کنم بدون کمک ایشان، انجام این رساله بسیار مشکل‌ترمی‌نمود.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات ریاست محترم دانشکده عمران دانشگاه شاهرود، آقای دکتر احمدی و اساتید گرامی دانشکده، آقایان دکتر نادری، دکتر کیهانی، دکتر علایی و دکتر کلات جاری که در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری از محضرشان بهره‌مند بوده‌ام، کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از جناب آقای دکتر ابوالبشری از دانشگاه فردوسی مشهد به خاطر قبول زحمت داوری رساله صمیمانه تشکر می‌نمایم.

و اما پدر عزیز و مادر مهربانم، نمی‌دانم چطور و با چه کلماتی باید از زحمات بی دریغتان تشکر نمایم. دستانتان را می‌بوسم و امیدوار به دعای خیرتان هستم.

تعهد نامه

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین رساله نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد.

شهریور ۱۳۹۴

چکیده

به طور خلاصه می‌توان گفت این رساله به بررسی تحلیل و طراحی بهینه سازه‌ها و تجمیع آنها پرداخته است. از این منظر دستاوردهای این رساله را می‌توان به دو بخش تقسیم نمود. بخش اول توسعه تحلیل ایزوژئومتریک برای تحلیل الاستیک سازه‌های پوسته‌ای است. در بخش دوم با استفاده از ویژگی‌های این روش، بهینه‌سازی سازه‌ای شامل شکل و توپولوژی مورد توجه بوده است.

در بخش تحلیل سازه، پس از معرفی ویژگی‌های هندسی توابع نربز، تحلیل ایزوژئومتریک مرور شده و سپس فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک سازه‌های پوسته‌ای ارائه می‌شود. بر این اساس از مفهوم دستگاه محورهای مختصات خمیده که در تحلیل اجزای محدود پوسته‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، بهره برداری شده و با توسعه آن، فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک به دست آمده است. رویکرد تحلیل پوسته بر مبنای تئوری میندلین رایزنر توسعه یافته است. به این ترتیب هر نقطه کنترلی دارای پنج درجه آزادی شامل سه درجه آزادی تغییرمکانی و دو درجه آزادی چرخشی می‌باشد. برای نشان دادن درستی روش تحلیل، مسائل مختلفی حل شده است. این مسائل شامل پوسته‌های مسطح، پوسته با شکل آزاد و مسائل موسوم به پوسته‌های بغرنج می‌باشد. نتایج نشان دهنده کارایی روش جهت تحلیل الاستیک خطی سازه‌های پوسته‌ای است.

در بخش بهینه‌سازی، مباحث طرح بهینه شکل و توپولوژی سازه مد نظر بوده است. در بهینه‌سازی توپولوژی از ایده مصالح جامد ایزوتروپیک با جریمه (SIMP) استفاده شده است. یک تابع چگالی در دامنه طراحی با استفاده از توابع نربز تعریف شده است. مقادیر این تابع در نقاط کنترلی به عنوان متغیرهای طراحی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این مسئله برای مثال‌هایی از مسائل مسطح و پوسته‌ای بررسی شده است. در بحث بهینه‌سازی شکل از موقعیت نقاط کنترلی به عنوان متغیرهای طراحی استفاده شده است. شبکه نقاط کنترلی، با استفاده از ویژگی بهبود شبکه به یک شبکه ریزتر تبدیل شده و از آن برای تحلیل سازه استفاده شده است. به این ترتیب در بهینه‌سازی شکل دو مدل متفاوت برای تحلیل و بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است. این امر، امکان رسیدن به نتایج دقیق تحلیل

را با تعداد کم پارامترهای هندسی فراهم می‌آورد. در نهایت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی برای سازه‌های پوسته‌ای ارائه شده است. این ایده ابتدا برای روش مبتنی بر تحلیل اجزای محدود مورد استفاده قرار گرفته است. در نهایت برای مدل ایزوژئومتریک و توزیع مصالح با تابع چگالی پیوسته به کار رفته است. بدین ترتیب همه مدلسازی‌های تحلیل، طراحی شکل و طراحی توپولوژی با استفاده از توابع نربز انجام شده است. نشان داده شد که روش تجمیع یافته نتایج بهتری نسبت به بهینه‌سازی جداگانه شکل و توپولوژی دارد.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک، بهینه‌سازی شکل، توپولوژی، سازه‌های پوسته‌ای

لیست مقالات مستخرج از رساله

مقالات ژورنالی:

- Hassani, B., Tavakkoli, S. M., & Ghasemnejad, H. (2013). Simultaneous shape and topology optimization of shell structures. Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(1), 221-233.
- Tavakkoli, S. M., Hassani, B., & Ghasemnejad, H. (2013). Isogeometric topology optimization of structures by using MMA. Int. J. Optim. Civil Eng, 3(2), 313-326.

مقالات کنفرانسی:

- بهروز حسنی، سید مهدی توکلی، حسین قاسم نژاد مقری. (۱۳۹۲) بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح در تحلیل ایزوژئومتریک، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران
- بهروز حسنی، سید مهدی توکلی، حسین قاسم نژاد مقری. (۱۳۹۳) تحلیل سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک، هشتمین کنگره ملی مهندسی عمران

فهرست مطالب

عنوان — **صفحه**

فصل اول: مقدمه

۱-۱-مقدمه ۲

۱-۲-روش ایزوژئومتریک ۳

۱-۳-تحلیل پوسته‌ها ۵

۱-۴-بهینه‌سازی سازه‌ای ۷

۱-۵-فرضیات و اهداف کلی ۹

۱-۶-برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده در این رساله ۱۰

۱-۷-ساختار کلی رساله ۱۱

فصل دوم: مبانی هندسی

۲-۱-مقدمه ۱۴

۲-۲-انواع فرم‌های هندسی ۱۴

۲-۲-۱-فرم صریح ۱۴

۲-۲-۲-فرم ضمنی ۱۵

۲-۲-۳-فرم پارامتری ۱۶

۲-۳-سطوح و منحنی‌های نربز ۱۶

۲-۳-۱-منحنی بزیر ۱۶

۲-۳-۲-بی-اسپلاین‌ها ۱۸

۲-۳-۲-۱-بردار گره ۱۹

۲-۳-۲-۲-توابع پایه بی-اسپلاین ۲۰

۲-۳-۲-۳-منحنی بی-اسپلاین ۲۳

۲-۳-۲-۴-سطوح بی-اسپلاین ۲۵

۲-۳-۲-۵-احجام بی-اسپلاین ۲۶

۲-۳-۳-نربز ۲۶

۲-۳-۴-بهبود شبکه ۲۹

فصل سوم: روش تحلیل ایزوژئومتریک

۳-۱-مقدمه ۳۲

۳-۲-روش‌های عددی در مکانیک محاسباتی ۳۲

۳-۳-طراحی هندسه به کمک کامپیوتر ۳۳

۳-۴-اصول روش تحلیل ایزوژئومتریک ۳۴

۳-۵-فرمول‌بندی ایزوژئومتریک مسائل تنش م ۳۸

۳-۵-۱- فرمول‌بندی ایزوژئومتریک ۳۸
۳-۵-۲- محاسبه ماتریس سختی ۴۲
۳-۵-۳- مرور چند مثال ۴۵
فصل چهارم: تحلیل پوسته‌ها

۴-۱- مقدمه ۵۰
۴-۲- مکانیک پوسته‌ها و تئوری میندلین رایزنر ۵۱
۴-۳- تحلیل ایزوژئومتریک پوسته‌های دارای انحنا ۵۶
۴-۳-۱- تعریف هندسه ۵۷
۴-۳-۲- تعریف تغییر مکان ۵۸
۴-۳-۳- بردارهای یکه متعامد ۶۲
۴-۳-۴- رابطه تنش-کرنش در دستگاه مختصات محلی ۶۴
۴-۳-۵- تبدیل مختصات و محاسبه ماتریس سختی ۶۶
۴-۴- حل مثال‌های عددی ۶۸
۴-۴-۱- مسائل صفحه خمشی مسطح ۶۹
۴-۴-۲- مسائل بغرنج پوسته ۷۲
۴-۴-۳- پوسته با شکل آزاد ۷۹
فصل پنجم: بهینه‌سازی سازه‌ای
۵-۱- مقدمه ۸۴
۵-۲- بهینه‌سازی شکل ۸۵
۵-۲-۱- تاریخچه بهینه‌سازی شکل ۸۶
۵-۲-۲- بهینه‌سازی شکل ایزوژئومتریک ۸۸
۵-۲-۳- تحلیل حساسیت ۹۳
۵-۲-۴- مثال‌های عددی ۹۴
۵-۳- بهینه‌سازی توپولوژی ۱۰۰
۵-۳-۱- تابع چگالی مصالح مصنوعی و مدل گسسته توزیع مصالح ۱۰۱
۵-۳-۲- مدل مواد مصنوعی پیوسته ۱۰۳
۵-۳-۳- مثال‌های عددی ۱۰۵
۵-۳-۳-۱- مسائل مسطح ۱۰۶
۵-۳-۳-۲- مسائل پوسته ۱۱۰
۵-۴- بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سازه پوسته‌ای ۱۱۷
۵-۴-۱- روش مبتنی بر اجزای محدود و مدل مصالح مصنوعی گسسته ۱۱۸
۵-۴-۲- بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سازه‌های پوسته‌ای در تحلیل ایزوژئومتریک و مدل چگالی

پیوسته ۱۲۱
۵-۴-۲-۱- مثال‌های عددی ۱۲۲
فصل ششم: نتایج و پیشنهادات
۶-۱- مقدمه ۱۲۸
۶-۲- نتایج ۱۲۹
۶-۳- پیشنهادات ۱۳۱
منابع ۱۳۳

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۳-۱ تفاوت‌های روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک ۳۷
جدول ۳-۲ اشتراکات روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک ۳۷
جدول ۴-۱ مختصات و وزنهای نقاط کنترلی مورد استفاده برای پوسته با شکل آزاد ۸۱

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۲-۱ منحنی درجه سه بزیر ۱۷
شکل ۲-۲ منحنی‌های تقریب زده شده: الف)بزیر p=6 و ب)بی-اسپلاین p=3 .... ۱۹
شکل۲-۳ توابع پایه بی-اسپلاین با بردار گره {R={0,1,2,3,4,5 الف)درجه ۰ ب)درجه ۱ و ج) درجه ۲ .... ۲۰
شکل ۲-۴ توابع پایه مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره {R={0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1 .... ۲۰
شکل ۲-۵ مشتقات اول مربوط به توابع پایه شکل ۲-۴ .... ۲۱
شکل ۲-۶ توابع پایه مکعبی که گره ۰٫۵ سه بار تکرار شده است ۲۲
شکل ۲۰-۷ منحنی مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره {R-{0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,1,1,1,1 .... ۲۴
شکل ۲-۸ کنترل محلی در منحنی بی-اسپلاین الف)منحنی اولیه ب) تغییر محل آخرین نقطه کنترلی ۲۴
شکل ۲۰-۹ سطح بی-اسپلاین الف) شبکه نقاط کنترلی ب) سطح حاصل ۲۶
شکل ۲-۱۰ منحنی نربز با وزن زیاد چهارمین نقطه کنترلی w4=10 .... ۲۸
شکل۲-۱۱ تولید دایره دقیق با استفاده از نربز ۲۸
شکل۳-۱ نمایش ارتباط فضای فیزیکی و فضای پارامتریک برای یک زیر دامنه ۳۶
شکل ۳-۲ فضاهای فیزیک، پارامتری و انتگرال گیری ۴۳
شکل ۳-۳ تیر طره‌ای الف) هندسه، شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری، ب) شبکه نقاط کنترلی، ج) درجه و بردارهای گرهی، ح) نتایج ایزوژئومتریک و تحلیلی، د) کانتور تغییر مکان قائم، ز) کانتور تنش نرمال در جهت x ۴۷
شکل ۳۰-۴ صفحه نامحدود با حفره میانی: الف) شکل و بارگذاری، ب)یک چهارم مدلسازی شده، ج) نقاط کنترلی برای حالت یک وصله، ح) تغییرمکان دقیق جهت x، خ) تغییرمکان ایزوژئومتریک جهت x ، د) استفاده از دو وصله، ذ) نقاط کنترلی در حالت دو وصله، ر) تنش تحلیلی برای دو وصله، ز)تنش ایزوژئومتریک برای دو وصله ۴۶
شکل ۴-۱ نمودار جسم آزاد پوسته ۵۲
شکل ۴-۲ تعریف هندسه پوسته الف) نقاط کنترلی و سطح میانی پوسته، ب) اضافه شدن ضخامت ۵۸
شکل ۴-۳ موقعیت نقاط کنترلی c_i، نقاط مهار a_i، و بردارهای عمود بر منحنی $\mathbf{v}_i$، برای درجات آزادی الف) $p=2$، ب) $p=3$، ج) $p=4$، د) $p=5$ ، m تعداد نقاط کنترلی و n تعداد گره می‌باشند ۶۱
شکل ۴-۴ بردارهای یکه و متعامد در نقطه مهار (i') متناظر با نقطه کنترلی(i) ۶۲
شکل ۴-۵ دستگاه‌های مختصات محلی و کلی ۶۵
شکل ۴-۶ الف) صفحه مستطیلی با تکیه‌گاه ساده و بار متمرکز. ب) یک چهارم سازه جهت مدلسازی و تحلیل .....
شکل ۴-۷ همگرایی خیز بیشینه صفحه مستطیل شکل ۷۰
شکل۴-۸ الف) صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار با تکیه‌گاه ساده در لبه خارجی و بار گسترده یکنواخت در لبه داخلی ب) یک چهارم سازه جهت مدلسازی و تحلیل ۷۰

شکل ۴-۹ نمودار همگرایی خیز بیشینه صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار ۷۱
شکل ۴-۱۰ کانتور تغییر شکل قائم صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار ۷۱
شکل ۴-۱۱ الف) سازه استوانه‌ای تحت فشار با دیافراگرم صلب ب) مدل تحلیلی به همراه شرایط مرزی و بارگذاری ۷۳
شکل ۴-۱۲ مقدار بهینه α برای تابع نربز از درجه ۳ و ۴ .... ۷۴
شکل ۴-۱۳ مقادیر بهینه α و β برای تابع نربز درجه ۵ .... ۷۴
شکل ۴-۱۴ کانتور تغییرمکان شعاعی استوانه تحت فشار ۷۵
شکل ۴-۱۵ نمودار همگرایی خیز شعاعی بیشینه استوانه تحت فشار ۷۵
شکل ۴-۱۶ مسئله نیم کره تحت فشار الف) هندسه و بارگذاری مسئله ب) مدل تحلیلی به همراه بارگذاری و شرایط مرزی ۷۶
شکل ۴-۱۷ کانتور تغییرمکان شعاعی نیم کره تحت فشار ۷۷
شکل ۴-۱۸ نمودار همگرایی خیز شعاعی بیشینه نیم کره تحت فشار ۷۷
شکل ۴-۱۹ سازه اسکوردلیس-لو الف) هندسه و بارگذاری ب) مدل تحلیلی و شرایط مرزی ۷۸
شکل ۴-۲۰ کانتور تغییر مکان قائم بام اسکوردلیس-لو ۷۹
شکل ۴-۲۱ نمودار همگرایی خیز بیشینه نرمال بام اسکوردلیس-لو ۷۹
شکل ۴-۲۲ پوسته با شکل آزاد و نقاط کنترلی، نماهای الف) سه بعدی ب) در جهت محور y ج) محور x د) محور z ۸۰
شکل ۴-۲۳ کانتور تغییر مکان قائم پوسته با شکل آزاد ۸۱
شکل ۴-۲۴ نمودار همگرایی خیز قائم بیشینه پوسته با شکل آزاد ۸۱
شکل ۵-۱ الف-طرح اولیه ب-طرح نهایی ۸۷
شکل ۵-۲ فرایند بهینه‌سازی شکل در روش اجزای محدود ۸۸
شکل ۵-۳ پوسته گنبدی شکل الف) مدل هندسی ب) مدل طراحی ج) مدل تحلیلی ۹۰
شکل ۵-۴ الگوریتم بهینه‌سازی شکل ۹۲
شکل ۵-۵ سازه مثال یک الف) شکل اولیه به همراه بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی ب) نقاط کنترلی مدل طراحی و متغیرهای طراحی ۹۵
شکل ۵-۶ مدل اولیه مثال یک الف) مدل طراحی ب) مدل تحلیلی ۹۵
شکل ۵-۷ شکل بهینه مثال یک الف) کانتور ارتفاع در شکل سه بعدی یک چهارم سازه ب) شکل سه بعدی کل سازه ۹۶
شکل ۵-۸ نمودار تغییرات انرژی کرنشی در حین بهینه‌سازی مثال یک ۹۶
شکل ۵-۹ شکل اولیه، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی مثال دو ۹۷
شکل ۵-۱۰ شکل بهینه مثال دو الف) کانتور ارتفاع در شکل سه بعدی مدل یک چهارم ب) شکل سه بعدی کل سازه ۹۷

شکل ۵-۱۱ نمودار تغییرات انرژی کرنشی در حین بهینه‌سازی مثال دو ۹۸
شکل ۵-۱۲ نتایج بهینه‌سازی مثال اول الف) ایزوژئومتریک ب) اجزای محدود ۹۹
شکل ۵-۱۳ نتایج بهینه‌سازی مثال دوم الف) ایزوژئومتریک ب) اجزای محدود ۹۹
شکل ۵-۱۴ تیر کنسول کوتاه (الف) تعریف مسئله (ب) شبکه نقاط کنترلی با ۱۸۷ نقطه (پ) و (ت) توپولوژی بهینه با ۱۸۷ (ج) و (ح) ۴۰۰ (د) و (ذ) ۶۹۳ و (ر) و (ز) ۱۶۱۷ نقطه کنترلی به ترتیب از MMA و OC ۱۰۷
شکل ۵-۱۵ نمودار تغییرات انرژی کرنشی برای تیر کنسول کوتاه (الف) ۱۸۷ (ب) ۴۰۰ (ج)۶۹۳ (د) ۱۶۱۷ نقطه کنترلی- آبی: MMA ، قرمز: OC ۱۰۸
شکل ۵-۱۶ SIMP با اجزای محدود (الف) ۳۸۴ و (ب) ۱۰۰۰ المان هشت گرهی، (پ) المان چهار گرهی، (ت و ج و ح) به ترتیب انجام تکنیک حذف نویز ۱۰۹
شکل ۵-۱۷ (الف) هندسه اولیه، نتایج (ب) و (ت) MMA و (پ) و (ج) OC به ترتیب ۴۰۰ و ۱۶۱۷ نقطه کنترلی (ح)نتیجه SIMP ۱۱۰
شکل ۵-۱۸ (الف) هندسه اولیه، نتایج با (ب وپ) ۲۰٪ (ت و ج) ۳۰٪ و (ح و خ) ۵۰٪ مصالح، به ترتیب MMA و OC ۱۱۱
شکل ۵-۱۹ نتایج مثال یک با شبکه ۷ در ۷: الف) $\mu = 3$ ب) $\mu = 5$ ج) $\mu = 7$ د) $\mu = 9$ ۱۱۲
شکل ۵-۲۰ نمودار تغییرات انرژی کرنشی مثال اول با شبکه‌بندی ۷ در ۷ .... ۱۱۳
شکل ۵-۲۱ حل مثال یک با شبکه‌بندی ۱۶ در ۱۶: الف) $\mu = 3$ ب) $\mu = 5$ ۱۱۴
شکل ۵-۲۲ نتایج حل مثال یک: الف) شبکه‌بندی ۲۶ در ۲۶ ب) شبکه‌بندی ۳۶ در ۳۶ .... ۱۱۴
شکل ۵-۲۳ شکل کامل توپولوژی بهینه سازه مثال یک ۱۱۵
شکل ۵-۲۴ توپولوژی بهینه مثال دو برای شبکه‌های نقاط کنترلی با الف) ۷ ب) ۱۶ ج) ۲۶ و د) ۳۶ نقطه کنترلی در هر جهت ۱۱۶
شکل ۵-۲۵ نمودار تغییرات انرژی کرنشی و توپولوژی شکل کامل سازه مثال دو برای شبکه کنترلی ۳۶ در ۳۶ ....
شکل ۵-۲۶ فلوچارت بهینه‌سازی همزمان بر مبنای اجزای محدود ۱۱۶
شکل ۵-۲۷ شکل اولیه سازه‌های مثال‌های بهینه‌سازی همزمان ۱۲۰
شکل ۵-۲۸ نتایج بهینه‌سازی همزمان به ترتیب برای سازه‌های شکل (۵-۲۷ الف) و (۵-۲۷ ب) ۱۲۱
شکل ۵-۲۹ فلوچارت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی در ایزوژئومتریک ۱۲۲
شکل ۵-۳۰ نتایج بهینه‌سازی همزمان در روش مبتنی بر ایزوژئومتریک: الف) سازه شکل (۵-۲۸ الف) ب) سازه شکل (۵-۲۸ ب) ۱۲۴
شکل ۵-۳۱ نتایج حل و مقدار انرژی کرنشی نهایی مثال اول الف) بهینه سازه مرحله ای، ب) بهینه‌سازی همزمان ۱۲۵
شکل ۵-۳۲ تغییرات انرژی کرنشی بهینه‌سازی همزمان و مرحله ای مثال اول ۱۲۵
شکل ۵-۳۳ نتایج حل و مقدار انرژی کرنشی نهایی مثال دوم الف) بهینه سازه مرحله ای، ب) بهینه‌سازی همزمان ۱۲۶

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

روش‌های عددی یکی از روش‌های حل معادلات حاکم بر پدیده‌های فیزیکی هستند. این روش‌ها در مسائل بسیاری مانند مکانیک جامدات، مکانیک سیالات، الکتریسیته، انتقال حرارت و غیره مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود[۱] (FEM) به عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی مطرح است. این روش در سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و همزمان با رشد فناوری کامپیوتر، نرم افزارهایی مثل انسیس، نسترن، آسکا، پلکسیس، آباکوس و غیره توسعه یافتند که امروزه کاربرد فراوانی در صنعت دارند.

با وجود گستردگی استفاده از اجزای محدود، این روش ضعف‌هایی نیز دارد. شاید یکی از بزرگترین ضعف‌ها، مشکل تعریف مرزهای هندسی باشد. با توجه به تقریب هندسه در این روش، رسیدن به هندسه واقعی کاملا وابسته به نحوه شبکه‌بندی است و این امر در مسائل پیچیده کار مشکلی است. همچنین بهبود حل، جهت حصول تقریب بهتر هندسه و یا متغیرهای مجهول، منجر به ایجاد تغییرات در شبکه‌بندی می‌شود و در نهایت سبب افزایش تعداد معادلات و بالا رفتن زمان حل می‌گردد. اهمیت این موضوع با در نظر گرفتن فرایند تکراری تحلیل-طراحی در مسائل طراحی و بهینه‌سازی مهندسی بیشتر نمود پیدا می‌کند. تحقیقات نشان می‌دهد که تولید شبکه در صنایع خودرو سازی، هوافضا و کشتی سازی بیش از هشتاد درصد زمان تحلیل را به خود اختصاص می‌دهد(Hughes et al., 2005).

[1] Finite Elements Method

۱-۲- روش ایزوژئومتریک

تقریبا یک دهه پس از شکل گیری روش اجزای محدود و بین سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ پیشرفت‌های چشمگیری در علم مدلسازی هندسی با کامپیوتر[۱] (CAD) انجام شد. امروزه مدلسازی هندسه دارای صنعت بسیار بزرگتری نسبت به تحلیل است. با توجه به اینکه تحلیل بر بنای هندسه استوار است، استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل در جهت رفع نقاط ضعف آن نماید. به این منظور پروفسور هیوز[۲] که یکی از دانشمندان برجسته در روش اجزای محدود است، به کمک همکارانشان روش تحلیل ایزوژئومتریک[۳] (IGA) را پیشنهاد نمودند. نام این روش برگرفته از مفهوم ایزوپارامتریک در روش اجزای محدود است. با توجه به دقت بالا در مدلسازی هندسه و همچنین استفاده از شرایط یکسان در مدلسازی هندسه و تقریب تابع مجهول، نام "تحلیل ایزوژئومتریک" برای آن انتخاب شده است (Hughes et al., 2005).

روش IGA بر مبنای استفاده از تکنیک‌های تولید هندسه مانند تکنیک نربز[۴] (NURBS) بنا شده است. این تکنیک به عنوان راهکاری استاندارد در روش‌های CAD مورد استفاده قرار می‌گیرد که در بخش‌های آتی به تفصیل در مورد آن بحث خواهد شد. در این روش هندسه مساله تقریبا به صورت دقیق مدل می‌شود. در مورد شکل‌های هندسی مشخص مانند دایره، سهمی، هذلولی، کره و غیره می‌توان مدلسازی دقیق را با کمک NURBS انجام داد. همچنین مدلسازی هندسی در مورد اشکالی که قبل از انجام تحلیل با کمک NURBS به صورت دقیق مدلسازی شوند و از همان مشخصات برای تحلیل استفاده شود نیز دقیق است. در غیر این صورت، مدلسازی هندسی تقریبی است. البته این تقریب با دقت بالاتری نسبت به روش اجزای محدود خواهد بود. به طور خلاصه مزایای روش IGA را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

[1] Computer Aided Design (CAD)
[2] Hughes
[3] Isogeometric Analysis (IGA)
[4] Non Uniform Rational B-Splines (NURBS)

۱- امکان مدلسازی به مراتب دقیق تر هندسه نسبت به روش اجزای محدود و انعطاف پذیری قابل ملاحظه در تولید و کنترل مرزهای مدل‌های پیچیده.

۲- عدم وابستگی کیفیت هندسه تولید شده به ریز یا درشت بودن شبکه نقاط کنترلی.

۳- دقت قابل ملاحظه در اقناع شرایط مرزی. به عنوان مثال در روش‌های عددی معمول برای اقناع شرایط مرزی باید از تعداد معینی گره در مرزها استفاده شود.

۴- داشتن مبانی ریاضی مشترک با اجزای محدود و دارا بودن اغلب مزایای آن.

۵- عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل مسئله تغییر می‌کند (مثل بهینه‌سازی شکل سازه).

۶- کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات حاکم.

۷- انعطاف پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و بالا بردن دقت حل.

۸- امکان توسعه آن برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر.

در حال حاضر پس از حدود یک دهه از معرفی IGA، این روش کاربردهای زیادی در حل بسیاری از مسائل مهندسی در شاخه های مختلف داشته است. از این میان می‌توان مسائل اندرکنش سیال-سازه (Bazilevs et al., 2009; Bazilevs et al., 2012; Heinrich et al., 2012)، انتشار حرارت (Anders et al., 2012)، تحلیل پوسته‌ها (Benson et al., 2010; Benson et al., 2011; Kiendl et al., 2009; Kiendl et al., 2010; Dornisch et al., 2013; Hosseini et al., 2013; Nguyen et al., 2011; Uhm et al., 2009)، تغییر شکل‌های بزرگ (Benson et al., 2011; Dimitri et al., 2014)، ارتعاش سازه‌ها (Cottrell et al., 2006; Shojaee et al; 2012; Wang et al., 2013)، اندازه‌گیری میدان کرنش (Elguedj et al., 2011)، تحلیل ترک (Cuomo et al., 2014)، مسائل الکترومغناطیس (Vázquez et al., 2010)، آیرودینامیک (Hsu et al., 2011)، انتگرال گیری عددی (Hughes et al., 2010; Adam et al., 2014)، تحلیل برخورد (Lu., 2011; Dimitri et al., 2014)، جریان ناویر-استوکس (Nielsen et al., 2011)، تحلیل جریان خون (Zhang et al., 2007) و غیره را نام برد.

۱-۳- تحلیل پوسته‌ها

پوسته یک سازه جدار نازک با انحنای اختیاری در فضای سه بعدی است. هم صفحه خمشی و هم غشا را می‌توان یک حالت خاص از پوسته در نظر گرفت. صفحه خمشی یک پوسته مسطح است در حالی که غشا یک پوسته است که تنها می‌تواند بارهای مماسی را تحمل کند. ممکن است عجیب به نظر برسد اما توصیف یک مدل پیوسته کاملا سه بعدی با شرایط تنش و کرنش پیچیده تر معمولا ساده‌تر از پوسته است. این امر به این خاطر است که در جسم جامد سه بعدی می‌توان روابط مکانیک جامدات را فارغ از شکل جسم به کار برد، در حالی که برای پوسته باید هندسه و انحنا با ریاضیات بیان شوند. تئوری‌های مربوط به پوسته پیشینه زیادی دارند که پیشرفت‌های زیادی تا به امروز داشته است (Yang et al., 2000; Bischoff et al., 2004). نیاز به تئوری‌های پوسته به خاطر گستردگی حضور سازه‌های پوسته‌ای در طبیعت و فناوری است. پوسته تحمل بار را از طریق شکل هندسی اش انجام می‌دهد و این امر باعث صرفه جویی زیادی در وزن و مصالح می‌شود. در واقع به خاطر انحنای پوسته است که بارهای عرضی به صورت کشش و فشار تحمل می‌شوند و لنگرهای خمشی به حداقل می‌رسند. این رفتار باعث می‌شود استفاده موثری از مصالح صورت پذیرد. امروزه سازه‌های پوسته‌ای در همه جا استفاده می‌شوند. در صنایع هوافضا و خودروسازی حداقل کردن وزن آنها اهمیت زیادی دارد. در مهندسی عمران و معماری از پوسته‌ها جهت پوشش دهانه‌های بزرگ مشخصا سقف‌ها و گنبدها و نیز به دلایل زیبایی شناختی استفاده می‌شود.

اولین تئوری پوسته به کیرشهف[1] بر می‌گردد، کسی که در ۱۸۵۰ اولین تئوری مربوط به صفحات خمشی را ارائه داد (Kirchhoff., 1850). لاو[2] یک تئوری را برای پوسته‌ها گسترش داد (Love., 1888) که بر مبنای فرضیات کیرشهف استوار است و از این رو به تئوری کیرشهف-لاو[3] مشهور است.

[1] Kirchhoff
[2] Love
[3] Kirchhoff-Love theory

تئوری مهم دیگر، تئوری رایزنر-میندلین[1] است که برخلاف تئوری کیرشهف-لاو تغییر شکل‌های برشی را نیز در نظر می‌گیرد (Reissner., 1945). این تغییر شکل‌ها برای پوسته‌های نازک، ناچیز هستند؛ اما می‌توانند برای پوسته‌های ضخیم پر اهمیت باشند. مرز بین پوسته‌های نازک و ضخیم را می‌توان توسط لاغری پوسته تعریف نمود که به صورت نسبت شعاع انحنا به ضخامت تعریف می‌شود. یک پوسته ضخیم با نسبت لاغری $R/t < 20$ تعریف می‌شود. اگرچه اکثر پوسته‌هایی که کاربردهای عملی دارند را می‌توان جز پوسته‌های نازک دسته بندی نمود، اما تئوری رایزنر میندلین نقش غالب را در تحلیل پوسته‌ها به روش اجزای محدود بازی می‌کند. در اجزای محدود چند جمله‌ای‌های خطی به خاطر سادگی و قابلیت‌های بالای المان‌هایشان بیشترین کاربرد را به عنوان توابع پایه دارند. مشکل این است که با چنین المان‌هایی معمولا پیوستگی بالاتر از C^0 بین المان‌ها تامین نمی‌شود. حتی در صورت استفاده از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالاتر باز هم تضمینی برای وجود پیوستگی C^1 برای المان‌های با شکل دلخواه وجود ندارد. این محدودیت مانعی برای استفاده مستقیم تئوری کیرشهف-لاو در روش اجزای محدود است. به عبارت دیگر استفاده از این تئوری مستلزم داشتن مشتقات مرتبه دوم و بنابراین داشتن پیوستگی حداقل C^1 است. تئوری رایزنر-میندلین که چرخش و تغییر مکان را به عنوان دو متغیر مستقل از هم در نظر می‌گیرد تنها نیازمند پیوستگی C^0 است. بنابراین اکثر رابطه‌سازی‌های المان‌های پوسته مستقل از ضخیم یا نازک بودن بر مبنای این تئوری بنا شده‌اند. مشکلی که در استفاده از این تئوری به خصوص برای پوسته‌های نازک وجود دارد، پدیده قفل شدگی[2] است که بیشتر مربوط به استفاده از توابع شکل مرتبه پایین می‌شود. پدیده قفل شدگی یک مشکل نوعی شناخته شده برای المان‌های پوسته است و تاکنون محققین زیادی در مورد آن تحقیق کرده‌اند (Gellert., 1988; Kabir., 1992; Bletzinger et al., 2000; Cesar de sa., 2002; Braess., 1998; Carrera et al., 2008; Yunhua., 1998; Babuska et al.,1992; Arnold et al., 1997; Stolarski et al., 1982; Caseiro et al., 2013; Zhuang et al., 2013).

[1] Reissner-Mindlin theory
[2] locking phenomena

۱-۴- بهینه‌سازی سازه‌ای

در مهندسی سازه پس از مرحله تحلیل و استخراج مقادیر مجهول تغییرمکانها و تنش‌ها، از این نتایج برای طراحی مهندسی استفاده می‌شود. در واقع هدف از طراحی یافتن بهترین سازه از لحاظ عملکرد و اقتصاد است. در ادبیات موضوع به این مرحله بهینه‌سازی سازه گفته می‌شود. طراحی سازه‌ای در یک دسته بندی کلی به سه مرحله تقسیم می‌شود. مرحله اول تعیین فرم و سیستم سازه‌ای است. مرحله دوم به تعیین شکل سازه و مشخصات هندسی مرزهای آن اختصاص دارد. در مرحله سوم، جزئیات سازه طرح می‌شود. این تقسیم بندی سبب پیدایش سه دسته روش بهینه‌سازی سازه شده است که به ترتیب بهینه‌سازی توپولوژی، شکل و ابعاد سازه نام دارند. در بهینه‌سازی توپولوژی هدف یافتن تعداد حفره‌ها، شکل و محل قرارگیری آنها در فضای طراحی است. این مرحله معمولا با بهینه‌سازی شکل ادامه می‌یابد که در آن مرزهای هندسی سازه تغییر می‌کند. در مرحله آخر و در بهینه‌سازی ابعادی، با ثابت نگه داشتن شکل و توپولوژی، ابعاد مقاطع اعضا بهینه می‌شوند.

بهینه‌سازی توپولوژی پس از معرفی تئوری همگن‌سازی[1] توسط بندسو[2] و کیکوچی[3] (Bendsoe et al., 1998) مورد توجه محققین قرار گرفت. در تئوری همگن‌سازی و تئوری ساده‌تر مدل مواد مصنوعی که بعد از آن توسط رزوانی[4] (Rozvany., 1989; Rozvani et al., 1991) معرفی شد، مسئله بهینه‌سازی به یک مسئله ساده‌تر بهینه‌سازی ابعادی تبدیل می‌شود (Hassani et al., 1999; Bendsoe et al., 2003). برای حل مسئله به دست آمده روش‌های مختلفی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در تحقیقات اولیه روش‌های معیار بهینگی (Rozvany., 1989) مورد استفاده قرار گرفتند. بعد از آن با پیشرفت‌های ایجاد شده در روش‌های عددی، روش‌های متعددی در این زمینه مورد استفاده قرار گرفتند. از این میان می‌توان به روش مجانب‌های پویا (MMA)[5] (Svanberg., 1987)،

---

1 Homogenization Theory
2 Bendsoe
3 Kikuchi
4 Rozvany
5 Method of Moving Asymptotes (MMA)

روش کانلین(CONLIN)[1] (Fleury., 1989)، روش‌های تکامل تدریجی[2] (Xie et al., 1993; Xie et al 1997)، بهینه‌سازی بر اساس سطح عملکرد[3] (Liang et al., 2002; liang., 2005)، استفاده از تئوری مجموع سطوح تراز[4] (Sethian et al., 2000; Wang et al., 2003; Allaire et al., 2004)، استفاده از توابع ضمنی در بهینه‌سازی توپولوژی (Belytschko et al., 2003)، الگوریتم ژنتیک[5] (Kane et al., 1996) و روش کلونی مورچگان[6] (Kaveh et al., 2008) را نام برد.

اولین تحقیقات در زمینه بهینه‌سازی شکل سازه توسط زینکویچ[7] در سال‌های ۱۹۷۰ (Zienkiewicz et al, 1970) و ۱۹۷۳ (Zienkiewicz et al., 1973) و ۱۹۷۵ (Francavilla et al, 1975) انجام شد. بعد از آن تحقیقات فراوانی در این زمینه انجام شد که از آن جمله می‌توان کارهای هافکا[8] در سالهای ۱۹۸۶ و ۱۹۹۲(Haftka et al., 1986; Haftka., 1992) را نام برد. همچنین در بهینه‌سازی شکل سه بعدی توسط امام در سال ۱۹۸۲ (Imam., 1982)، یائو در ۱۹۸۹ (Yao et al., 1989)، بوتکین در ۱۹۹۲ (Botkin., 1992)، یونسی و همکاران در ۱۹۹۶(Younsi et al., 1996)، لیندبای در ۱۹۹۷(Lindby et al., 1997)، شی در ۱۹۹۹ (Shi et al., 1999)، آنیچیاریکو در ۲۰۰۱ (Annicchiarico et al., 2001) و کرورا در ۲۰۰۵ (Cervera et al., 2001) پیشرفت‌های قابل توجهی یافت. همچنین در سال‌های اخیر روش‌های بهینه‌سازی شکل برمبنای ایزوژئومتریک توسعه یافته‌اند که از این میان می‌توان به (Wall et al., 2008; Cho et al., 2009; Hassani et al., 2011; Li et al 2011: Manh et al., 2011; Kiendl et al., 2014) اشاره نمود.

1 CONvex LINearization (CONLIN)
2 Evolutionary Structural Optimization (ESO)
3 performane based optimization
4 level set method
5 genetic algorithm
6 Ant Colony Optimization (ACO)
7 Zienkiewics
8 Haftka

۱-۵- فرضیات و اهداف کلی

هدف این رساله را به دو دسته کلی می‌توان تقسیم نمود. در مرتبه اول تحلیل ایزوژئومتریک سازه و به طور خاص سازه پوسته‌ای مدنظر بوده است. در مرحله بعد، بهینه‌سازی سازه‌ها در روش ایزوژئومتریک هم برای مسائل مسطح و هم مسائل پوسته‌ای انجام شده است. در هر یک از بخش‌ها، رابطه‌سازی، تهیه برنامه کامپیوتری، حل مثال‌ها و بررسی و تجزیه و تحلیل آنها انجام شده است.

با توجه به اهمیت سازهای پوسته‌ای در صنعت و گستردگی استفاده از آنها، در این رساله به موضوع تحلیل ایزوژئومتریک پوسته‌ها پرداخته شده است. کاربرد فراوان سازه‌های پوسته‌ای در صنعت و همچنین نیاز به ارائه روش‌های مفید و با کارایی بیشتر برای تحلیل این سازه‌ها و نیز ظهور و گسترش روش تحلیل ایزوژئومتریک که با همسان سازی پارامترهای هندسی و تحلیلی دریچه های جدیدی را در حوزه تحلیل سازه گشوده است، همه و همه باعث ایجاد انگیزه جهت توجه به این موضوع بوده است. در بخش تحلیل، مصالح ایزوتروپیک خطی فرض شده و انجام تحلیل به صورت استاتیکی خطی و با استفاده از مبانی تئوری رایزنر- میندلین انجام شده است.

در گام دوم بهینه‌سازی سازه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. این کار با استفاده از یک الگوریتم تکراری انجام می‌شود که در هر گام پس از انجام تحلیل، توابع هدف و قید را تشکیل داده و مسئله بهینه‌سازی را حل می‌کند و از پاسخ به دست آمده برای تحلیل بعدی استفاده می‌کند. این روند تا حصول همگرایی در طرح ادامه می‌یابد. با توجه به استفاده از روش ایزوژئومتریک در تحلیل و یکسان بودن پارامترهای تحلیلی و هندسی، برای انجام بهینه‌سازی نیز از همین پارامترها استفاده می‌شود. این موضوع اهمیت ویژه ای در مسائل بهینه‌سازی دارد و در مقایسه با روش‌های مبتنی بر اجزای محدود، نیاز به ارتباط بین پارامترهای هندسی و تحلیلی و نیز تولید مجدد شبکه تحلیلی در هر مرحله بهینه‌سازی را مرتفع می‌سازد.

برای انجام بهینه‌سازی از روش مجانب‌های پویا (Svanberg., 1987) استفاده شده است. این روش بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی بوده و نیازمند مقادیر مشتقات توابع هدف و قید برای حل مسئله است. به

این منظور در هر گام بهینه‌سازی یک تحلیل حساسیت انجام می‌شود. در این رساله مشخصا بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های مسطح و پوسته‌ای، بهینه‌سازی شکل سازه‌های پوسته‌ای و در نهایت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سازه‌های پوسته‌ای مورد توجه قرار گرفته‌اند.

۱-۶- برنامه های کامپیوتری نوشته شده در این رساله

با توجه به اهداف بیان شده در این رساله و نظر به ماهیت عددی موضوع، برنامه های کامپیوتری به شرح زیر تهیه شده است:

برنامه ISOTOP : برای انجام بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌های مسطح در روش ایزوژئومتریک.

برنامه ISOSHELL : برای انجام تحلیل استاتیکی خطی سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک.

برنامه ISOSHAPE : جهت انجام بهینه‌سازی شکل سازه پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک.

برنامه ISOSHELLTOP : جهت انجام بهینه‌سازی توپولوژی سازه پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک.

برنامه SHELLOPT: برای انجام بهینه‌سازی ترکیبی شکل و توپولوژی پوسته‌ها با استفاده از روش اجزای محدود.

برنامه ISOSHELOPT: جهت انجام بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سازه پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک.

این برنامه‌ها به زبان فرترن نوشته شده‌اند. در همه آنها برای حل دستگاه معادلات خطی از روش اسکایلاین[1] و برای حل مسئله بهینه‌سازی از روش مجانب‌های پویا (MMA) استفاده شده است. همچنین اطلاعات مورد نیاز پارامترهای هندسی در برخی مسائل پوسته در این رساله به کمک نرم

[1] Skyline Solver

افزار Rhino به دست آمده است. خروجی های گرافیکی ارائه شده در این رساله با استفاده از نرم افزارهای Techplot 360 ، Microsoft Visual Basic و Microfoft Excel تهیه شده‌اند.

۱-۷- ساختار کلی رساله

این رساله شامل شش فصل است. فصل اول به مقدمه و کلیات اختصاص یافته است. در فصل دوم مبانی هندسی بیان می‌شود که شامل معرفی اسپلاین‌ها و نربزها به همراه ویژگی‌هایشان است که در واقع مبنای روش ایزوژئومتریک محسوب می‌شوند. در فصل سوم روش تحلیل ایزوژئومتریک معرفی شده و فرمول‌بندی مسائل دو بعدی ارائه می‌شود. فصل چهارم به تحلیل سازه‌های پوسته‌ای اختصاص یافته است. در این فصل ابتدا مبانی تئوری میندلین رایزنر به عنوان پایه تحلیل پوسته مورد استفاده در این رساله بیان می‌شود و سپس فرمول‌بندی ایزوژئومتریک پوسته‌های دارای انحنا ارائه خواهد شد. در انتهای این فصل مثال‌های عددی برای نشان دادن کارایی روش مذکور مورد بررسی قرار خواهند گرفت. فصل پنجم به بهینه‌سازی سازه‌ای اختصاص یافته است. در این فصل مباحثی مثل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های مسطح و پوسته‌ای، بهینه‌سازی شکل پوسته‌ها و در نهایت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی ارائه خواهند شد. در نهایت در فصل ششم جمع بندی رساله به همراه نتایج و پیشنهادات بیان می‌شود.

فصل دوم

مبانی هندسی

۲-۱- مقدمه

از آنجا که روش ایزوژئومتریک تا حد زیادی بر مبنای هندسه و ویژگی‌های هندسی استوار است، در این فصل به مبانی هندسی مورد نیاز پرداخته شده است. مشخصا هدف این فصل تعریف و بیان ویژگی‌های نربز به عنوان ابزاری برای تولید شکل‌های هندسی بوده است. جهت شرح نربز، در ابتدا، سایر ابزارها مثل منحنی‌های بزیر و بی-اسپلاین‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به طور خلاصه در این فصل مفاهیم مورد نیاز مانند بیان پارامتریک منحنی‌ها و سطوح، توابع پایه، نقاط کنترلی، بردار گره، پیوستگی و سایر خواص و ویژگی‌های مربوطه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲-۲- انواع فرم های هندسی

راه‌های مختلفی برای نمایش ریاضی منحنی‌ها و سطوح وجود دارد. سه روش مبنایی برای این کار عبارت‌اند از: نمایش صریح، ضمنی و پارامتری. روش‌های مختلفی برای محاسبه مشتقات، پیوستگی و خواص هندسی در هر یک از این روش‌ها وجود دارد که هر یک فواید و اشکالات خاص خود را دارند. در ادامه هر یک از این روش‌ها برای نمایش منحنی به اختصار بیان می‌شوند. این نتایج برای سطوح نیز معتبر هستند.

۲-۲-۱- فرم صریح

فرم صریح یک منحنی ساده‌ترین و در عین حال محدودترین نحوه نمایش منحنی است. در این حالت یک مختصه به صورت تابعی از مختصه دیگر بیان می‌شود که معمولا به صورت $y = f(x)$

نشان داده می‌شود. به عنوان مثال یک سهمی درجه دو به صورت $y = x^2 - 2$ بیان می‌شود. مزیت این روش در آسان بودن یافتن مشتقات است که در نتیجه آن ویژگی‌های هندسی مانند شیب، انحنا و غیره به سادگی مشخص می‌شوند. به علاوه به سادگی می‌توان دریافت که آیا نقطه خاصی روی منحنی واقع شده است یا نه. محل برخورد دو منحنی نیز به آسانی در این نحوه نمایش به دست می‌آید. اشکال مهم این روش در این است که هر مقدار x می‌تواند تنها یک مقدار برای y داشته باشد که موجب می‌شود تنوع منحنی‌های قابل نمایش کاهش یابد. به علاوه این نحوه نمایش وابسته به محورهای مختصات است و با تغییر این محور ها رابطه منحنی تغییر می‌کند. به این خاطر فرم صریح به ندرت در CAD مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۲-۲- فرم ضمنی

یک منحنی در شکل ضمنی، مجموعه پاسخ یک معادله به شکل $f(x, y) = 0$ است. با این فرم نمایش امکان اینکه بیش از یک نقطه، مقدار یکسان x را دارا باشند، فراهم می‌شود و در نتیجه اشکال مهم هندسی مثل دایره را می‌توان با این روش بیان نمود. به عنوان مثال معادله $x^2 + y^2 = 1$ فرم ضمنی یک دایره به شعاع واحد را نشان می‌دهد. بدیهی است که هر منحنی صریحی را می‌توان به شکل ضمنی بیان نمود در حالی که عکس آن همیشه برقرار نیست. همانند فرم صریح، امکان تعیین اینکه نقطه‌ای روی منحنی قرار دارد یا خیر، به سادگی فراهم است. با این حال پیدا کردن محل برخورد دو منحنی در این حالت مشکل تر است. با وجود اینکه تنوع منحنی‌های قابل نمایش در این روش بیشتر است، اما باز هم این روش محدودیت‌هایی دارد. با این حال نمایش ضمنی در طراحی هندسه با کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۳-۲- فرم پارامتری

مناسب ترین شکل نمایش هندسه های با شکل آزاد، نمایش پارامتری است. در این حالت مختصات x و y توابع صریحی از یک پارامتر مستقل هستند (دو پارامتر مستقل برای سطوح). این شکل بیان هندسی بسیار انعطاف پذیر بوده و امکان نمایش شکل‌های بسیاری را فراهم می‌کند. با این روش می‌توان منحنی‌های فضایی را نیز بیان نمود در حالی که در دو روش قبلی، منحنی‌ها روی یک صفحه بیان می‌شوند. این پارامتر مستقل معمولا با t و در یک بازه $a \le t \le b$ نشان داده می‌شود. معمولا (نه لزوما) این بازه به صورت $[0,1]$ نرمال می‌شود. یکی از مزایای این روش این است که برای هر منحنی یک نقطه شروع و یک نقطه پایان وجود دارد. به عنوان یک اشکال، امکان تعیین قرار گرفتن نقطه روی منحنی و نیز محل برخورد دو منحنی در این فرم نمایش وجود ندارد.

همه روش‌هایی که در بخش‌های بعدی برای مدلسازی منحنی‌ها و سطوح با شکل آزاد بیان می‌شوند، بر مبنای نمایش پارامتری هستند.

۲-۳- سطوح و منحنی‌های نربز

برای درک بهتر نربز باید ابتدا منحنی‌های بزیر را مورد بررسی قرار داد. در واقع بی-اسپلاین‌ها از تکامل منحنی‌های بزیر به وجود آمدند و بعد از آن نربز از بی-اسپلاین سرچشمه گرفت. بنابراین در این بخش ابتدا مرور مختصری بر منحنی‌های بزیر به عنوان منشا بی-اسپلاین‌ها انجام می‌گیرد. بعد از آن با توجه به اینکه تعاریف و ویژگی‌های بی-اسپلاین‌ها برای نربز هم کاربرد دارد، به بررسی کامل بی-اسپلاین‌ها پرداخته خواهد شد. در نهایت نربز به عنوان یک تعمیم بی-اسپلاین‌ها معرفی خواهد شد.

۲-۳-۱- منحنی بزیر

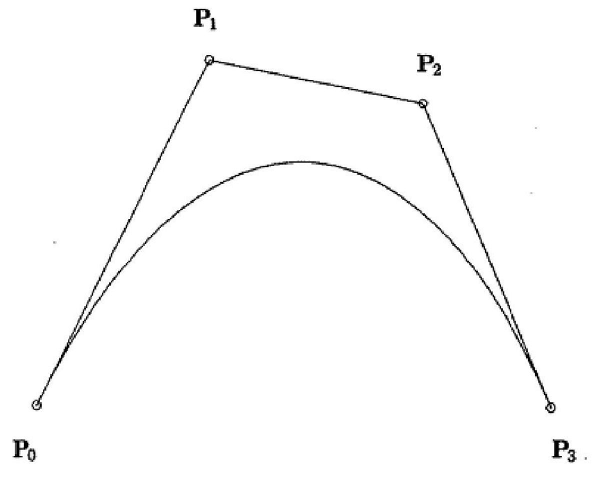
یک منحنی بزیر، یک منحنی تقریب زننده است. به این معنی که یک منحنی را از میان یک مجموعه نقاط تقریب می‌زند. توجه شود که این مجموعه نقاط درون‌یابی نمی‌شوند (یعنی منحنی از آنها عبور

نمی‌کند). به این نقاط در ادبیات موضوع نقاط کنترلی گفته می‌شود. به این طریق یک منحنی هموار و غیر نوسانی به دست می‌آید که همواره داخل چند ضلعی کنترلی قرار می‌گیرد. چند ضلعی کنترلی یک ارتباط خطی از نقاط کنترلی است. این موضوع در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. این شکل یک منحنی بزیر درجه ۳ را نشان می‌دهد. چنانچه مشاهده می‌شود، تنها اولین و آخرین نقاط کنترلی درون‌یابی می‌شوند که این موضوع یک امتیاز برای طراحی منحنی به حساب می‌آید. یک منحنی بزیر از ترکیب خطی توابع پایه و نقاط کنترلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C}(r)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,p}\left(r\right)\mathbf{P}_i \qquad 0\le r\le 1 \tag{۲-۱}$$

که n تعداد نقاط کنترلی و $B_{i,p}$ چند جمله‌ای‌های برنشتاین از درجه P هستند. درجه چند جمله‌ای و تعداد نقاط کنترلی از طریق رابطه $p=n-1$ به هم مرتبط هستند. چند جمله‌ای‌های برنشتاین با رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$B_{i,p}\left(r\right)=\frac{n!}{i!\left(n-i\right)!}\left(1-r\right)^{n-i} \tag{۲-۲}$$



شکل ۲-۱ منحنی درجه سه بزیر

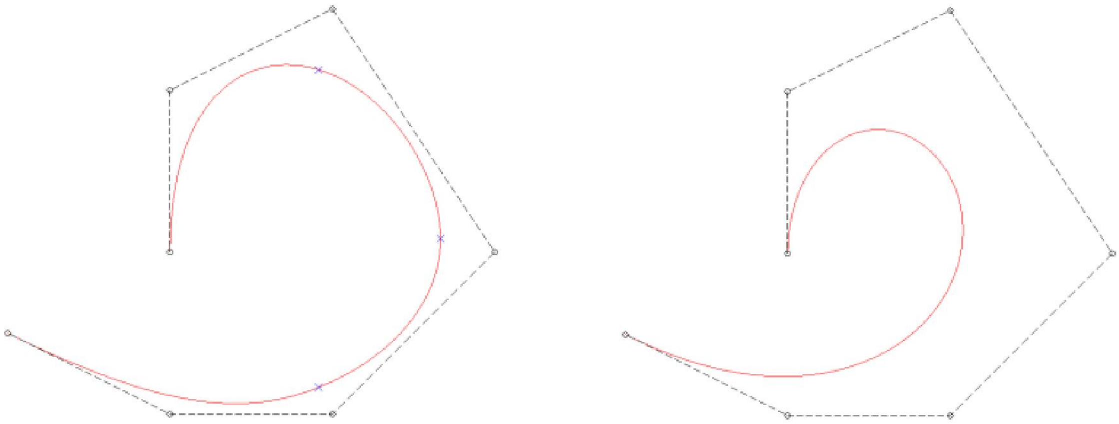
اشکال منحنی‌های بزیر در این است که با افزایش تعداد نقاط کنترلی، درجه چند جمله‌ای باید افزایش یابد. با این حال تقریب نقاط کنترلی با این افزایش درجه ضعیف‌تر می‌شود و علاوه بر این

الگوریتم ناپایدار می‌شود (Kiendl., 2011). ضعف دیگر این منحنی‌ها این است که تغییر در موقعیت یک نقطه کنترلی بر تمام منحنی تاثیر می‌گذارد و هیچ تغییر محلی را نمی‌توان بر منحنی اعمال نمود. اشکال دیگر این است که نمی‌توان نقاط با پیوستگی کمتر، مثل یک شکستگی[1]، را در منحنی ایجاد نمود. این ضعف ها با بی- اسپلاین‌ها مرتفع می‌شوند.

۲-۳-۲- بی- اسپلاین‌ها

منحنی‌های بی-اسپلاین نیز همانند منحنی‌های بزیر از ترکیب خطی نقاط کنترلی و توابع پایه، که همان بی-اسپلاین‌ها هستند، بر روی یک فضای پارامتری تعریف می‌شوند. در اینجا فضای پارامتری به بازه‌هایی تقسیم می‌شود و بی-اسپلاین‌ها به صورت قطعه‌ای با شرایط پیوستگی مشخص در این بازه‌ها تعریف می‌شوند. از آنجا که تعداد بازه‌ها اختیاری است، درجه چند جمله‌ای می‌تواند مستقل از تعداد نقاط کنترلی انتخاب شود. بنابراین یک مجموعه وسیع از نقاط را می‌توان با درجه چند جمله‌ای کم تقریب زد. این موضوع در شکل ۲-۲ نشان داده شده است (Kiendl., 2011). در این شکل هفت نقطه کنترلی یک بار توسط منحنی بزیر (شکل ۲-۲- الف) با درجه $p=6$ و یک بار توسط منحنی بی- اسپلاین (شکل ۲-۲- ب) با درجه $p=3$ تقریب زده شده‌اند. منحنی بی-اسپلاین به خاطر کمتر بودن درجه چند جمله‌ای از چهار قطعه تشکیل شده است. محدوده این قطعات که اصطلاحا گره[2] نامیده می‌شود، به وسیله علامت ضربدر روی منحنی نشان داده شده‌اند. چنانچه مشاهده می‌شود، منحنی بی-اسپلاین به خاطر کمتر بودن درجه چند جمله‌ای فاصله کمتری از چند ضلعی کنترلی دارد. توابع پایه بی-اسپلاین طوری تعریف می‌شوند که تنها در تعداد محدودی از بازه‌ها غیر صفر هستند. این بدان معنی است که امکان تاثیر محلی نقاط کنترلی روی منحنی‌ها فراهم است. به علاوه امکان کاهش پیوستگی توابع پایه بین بازه‌ها و در نتیجه اینجا شکستگی وجود دارد.

[1] kink
[2] knot



(ب) (الف)

شکل ۲-۲ منحنی‌های تقریب زده شده: الف)بزیر p=6 و ب)بی-اسپلاین p=3

۲-۳-۲-۱- بردار گره

فضای پارامتری توسط بردار گره $R=\{r_0,\ldots,r_m\}$ تعریف می‌شود که یک مجموعه از اعداد حقیقی غیر نزولی r_i است که فضای پارامتری را به بخش‌هایی تقسیم می‌کند. اگر طول همه بخش‌ها برابر باشد، بردار گره، یکنواخت نامیده می‌شود. تابع پایه بی-اسپلاین بین دو گره مجزا که اصطلاحا دهانه گرهی نامیده می‌شود، دارای پیوستگی C^{∞} است. در روی گره‌ها اما این پیوستگی C^{p-1} است. مقدار گره می‌تواند بیش از یک بار وجود داشته باشد که در این صورت یک گره تکراری نامیده می‌شود. یک گره با k مرتبه تکرار پیوستگی C^{p-k} دارد که به این معنی است که با افزایش تکرار گره، پیوستگی آن کاهش می‌یابد.

اگر اولین و آخرین گره‌ها، $p+1$ مرتبه تکرار شوند، در این صورت بردار گره یک بردار گره باز نامیده می‌شود. در بی-اسپلاین با بردار گره باز، اولین و آخرین نقاط کنترلی درون‌یابی می‌شوند. همچنین در این نقاط، منحنی مماس بر چند ضلعی کنترلی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه در طراحی منحنی، مختصات نقاط ابتدا و انتهای آن معمولا باید مشخص باشد، استفاده از بردارهای گرهی باز در CAD و نیز در تحلیل ایزوژئومتریک یک استاندارد تلقی می‌شود.

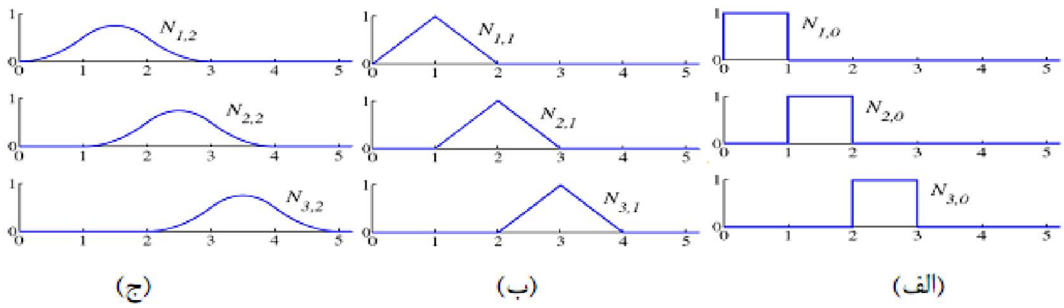
۲-۳-۲-۲- توابع پایه بی-اسپلاین

تابع پایه بی-اسپلاین i ام از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود:

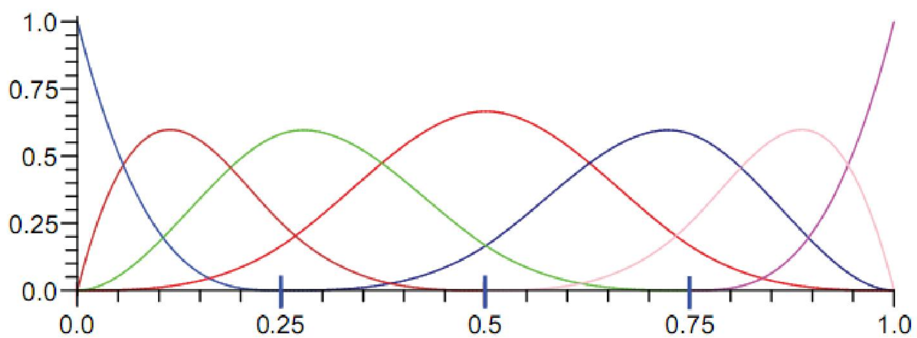
$$N_{i,0}\left(r\right)=\begin{cases}1 & if\ \ r_i \le r < r_{i+1} \\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{۳-۲}$$

$$N_{i,p}\left(r\right)=\frac{r-r_i}{r_{i+p}-r_i}N_{i,p-1}\left(r\right)+\frac{r_{i+p+1}-r}{r_{i+p+1}-r_{i+1}}N_{i+1,p-1}(r)$$

به عنوان مثال با استفاده از بردار گرهی $R=\{0,1,2,3,4,5\}$ ، توابع پایه بی-اسپلاین با درجات آزادی $p=0,1,2$ در شکل ۲-۳ نشان داده شده است. اما چنانچه ذکر شد، معمولا بردار گرهی باز در CAD و IGA مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل ۲-۴ توابع پایه بی-اسپلاین مکعبی را که در بردار گرهی باز $R=\{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$ تشکیل شده‌اند، نشان می‌دهد. توابع نشان داده شده در این شکل همان توابعی هستند که در تولید منحنی شکل ۲-۲- ب مورد استفاده قرار گرفته‌اند.



شکل۲-۳ توابع پایه بی- اسپلاین با بردار گره R={0,1,2,3,4,5} الف)درجه ۰ ب)درجه ۱ و ج)درجه ۲



شکل ۲-۴ توابع پایه مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره R={0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1}

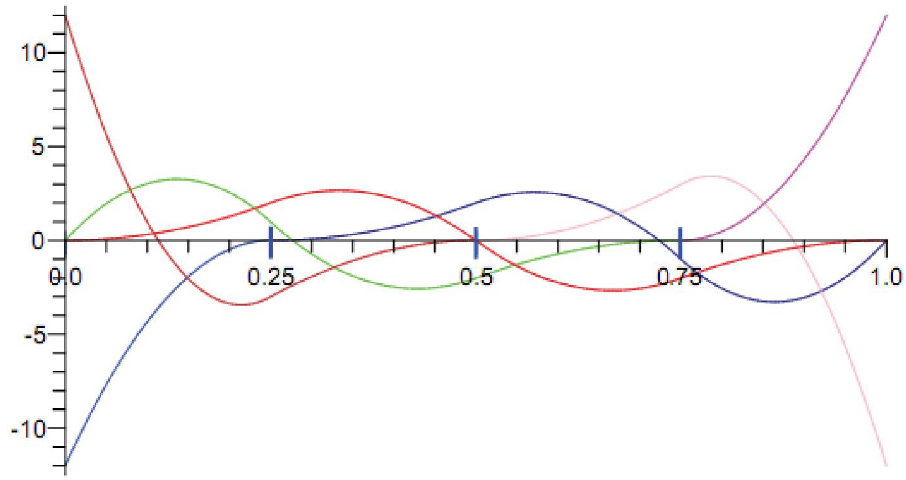
با توجه به تعریف این توابع برخی از ویژگی‌های مهم توابع بی-اسپلاین را می‌توان به صورت زیر برشمرد:

- یک تابع پایه $N_{i,p}(r)$ تنها در بازه $\left[r_i, r_{i+p+1}\right)$ غیر صفر است. به این ویژگی اصطلاحا کنترل محلی[1] اطلاق می‌شود.
- جمع مقادیر این توابع در $0 \le r \le 1$ برابر واحد است ($\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(r) = 1$).
- مقدار تابع در $0 \le r \le 1$ همواره مثبت است ($N_{i,p}(r) \ge 0$).
- این توابع مستقل خطی هستند، یعنی: $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i N_{i,p}(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$
- در صورتی که بعد بردار گرهی باز برابر $m+1$ و تعداد توابع پایه برابر $n+1$ باشد، آنگاه رابطه $n = m - p - 1$ برقرار است.

مشتق اول یک تابع پایه بی-اسپلاین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N'_{i,p}(r) = \frac{p}{r_{i+p} - r_i} N_{i,p-1}(r) - \frac{p}{r_{i+p+1} - r_{i+1}} N_{i+1,p-1}(r) \tag{۴-۲}$$

شکل ۲-۵ مشتقات اول مربوط به توابع پایه شکل ۲-۴ را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۵ مشتقات اول مربوط به توابع پایه شکل ۲-۴

[1] Local support

بردار گرهی باز تاثیرات زیر را در توابع پایه و مشتقات آن دارد:

- در $r=0$ مقدار تمامی توابع پایه به جز اولین تابع، برابر صفر است.

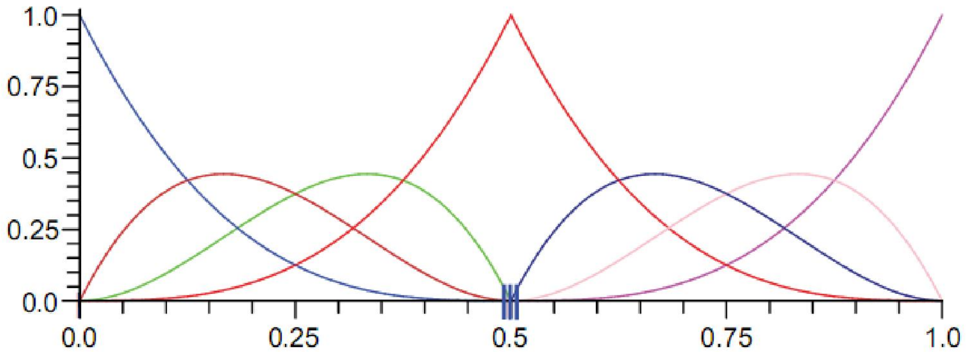
$$N_{0,p}\left(0\right)=0 \qquad (۵\text{-}۲)$$
$$N_{i,p}\left(0\right)=0 \quad i\neq 1$$

- در مورد مشتقات، تنها دو مشتق اول غیر صفر هستند و $N_{1,p}{}'\left(0\right)=-N_{2,p}{}'\left(0\right)$ که:

$$N'_{0,p}\left(0\right)=-\frac{p}{r_{p+2}} \qquad (۶\text{-}۲)$$
$$N'_{1,p}\left(0\right)=\frac{p}{r_{p+2}}$$
$$N'_{i,p}\left(0\right)=0 \quad i>2$$

همین ویژگی‌ها برای نقطه انتهایی فضای پارامتری $(r=1)$ نیز وجود دارد که در شکل‌های ۲-۴ و ۲-۵ قابل مشاهده است.

چنانچه پیشتر ذکر شد در صورتی که یک گره تکراری در بردار گره وجود داشته باشد، پیوستگی توابع پایه به C^{p-k} کاهش می‌یابد که k تعداد تکرار گره است. در صورتی که $k=p$ باشد، توابع پایه پیوستگی C^{0} را در این نقطه خواهند داشت. در چنین حالتی تمامی توابع مقدارشان در این گره برابر صفر می‌شود به جز یکی از آنها که مقدار یک را می‌گیرد. شکل ۲-۶ توابع پایه مکعبی را برای بردار گره با یک گره داخلی که به اندازه $k=p=3$ تکرار شده است نشان می‌دهد.



شکل ۲-۶ توابع پایه مکعبی که گره ۰٫۵ سه بار تکرار شده است

۲-۳-۲-۳- منحنی بی-اسپلاین

مشابه منحنی‌های بزیر، یک منحنی بی-اسپلاین از درجه p را می‌توان از ترکیب خطی نقاط کنترلی و توابع پایه متناسب تولید نمود:

$$\mathbf{C}(r)=\sum_{i=o}^{n}N_{i,p}(r)\mathbf{P}_i \qquad (۷-۲)$$

مشتق اول منحنی از ترکیب خطی نقاط کنترلی و مشتقات توابع پایه به دست می‌آید:

$$\mathbf{C}'(r)=\sum_{i=o}^{n}N'_{i,p}(r)\mathbf{P}_i \qquad (۸-۲)$$

در شکل ۲-۲-ب یک منحنی بی-اسپلاین با بردار گره باز نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود اولین و آخرین نقاط کنترلی درون‌یابی شده‌اند و منحنی در این نقاط مماس بر چند ضلعی کنترلی قرار گرفته است. این موضوع در واقع اثر بردار گرهی باز را نشان می‌دهد. برای فهم بهتر این مطلب روابط ۲-۵ و ۲-۶ را در روابط ۲-۷ و ۲-۸ قرار می‌دهیم:

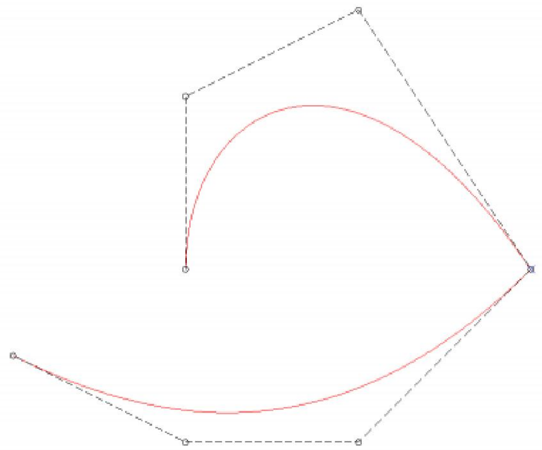
$$\mathbf{C}(0)=\sum_{i=o}^{n}N_{i,p}(0)\mathbf{P}_i=\mathbf{P}_0 \qquad (۹-۲)$$

$$\mathbf{C}'(0)=\sum_{i=o}^{n}N'_{i,p}(0)\mathbf{P}_i=\frac{p}{r_{p+1}}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0) \qquad (۱۰-۲)$$

رابطه (۲-۹) نشان می‌دهد که برای یک بردار گره باز، اولین نقطه کنترلی در $r=0$ درونیابی می‌شود. همچنین رابطه (۲-۱۰) نشان دهنده این است که منحنی در $r=0$ مماس بر پاره خط $\overline{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1}$ است. همین ویژگی برای انتهای دیگر در $r=1$ و دو نقطه کنترلی انتهایی برقرار هستند. درک این ویژگی‌ها برای تعریف شرایط پیوستگی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین بسیار اهمیت دارند. این مبحث در بخش‌های بعدی بررسی خواهد شد.

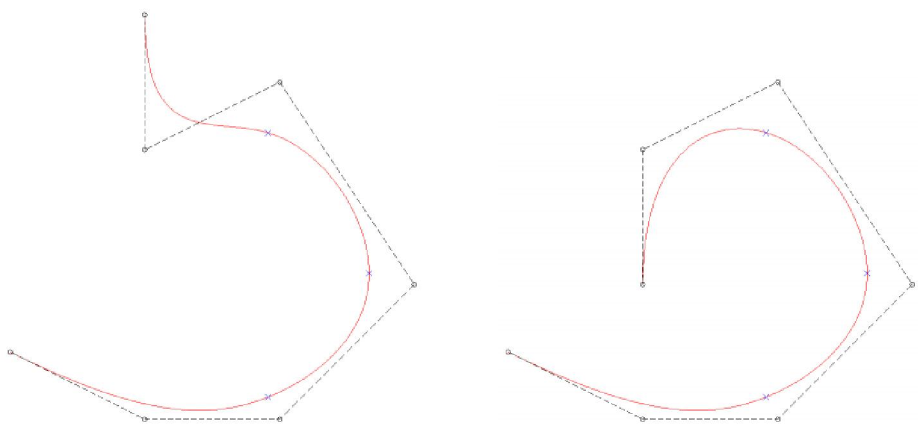
اگر یک گره داخلی به اندازه $k=p$ بار تکرار شود، پیوستگی منحنی در این گره به C^0 کاهش می‌یابد و یک شکستگی در منحنی ایجاد می‌کند. چنانچه در شکل ۲-۶ ملاحظه می‌شود، مقدار یکی از توابع پایه برابر ۱ می‌شود که به معنی درونیابی شدن آن نقطه کنترلی توسط منحنی است. شکل

۲-۷ یک منحنی مکعبی بی-اسپلاین با گره تکراری به اندازه $k = p$ بار را نشان می‌دهد. برای این شکل توابع پایه شکل ۲-۴ برای نقاط کنترلی شکل ۲-۲ به کار گرفته شده‌اند.



شکل ۲-۷ منحنی مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره R-{0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,1,1,1,1}

ویژگی کنترل محلی در شکل ۲-۸ تشریح شده است. منحنی بی-اسپلاین با تغییر مختصات y آخرین نقطه کنترلی اصلاح شده است. چنانچه در شکل ملاحظه می‌شود، تابع پایه متناظر با این نقطه تنها بر آخرین دهانه کنترلی تاثیر می گذارد. بنابراین تغییر این نقطه کنترلی تنها بر آخرین بخش منحنی موثر است که در شکل ۲-۸- ب نشان داده شده است. در صورتی که محل یکی از نقاط کنترلی داخلی تغییر کند، تاثیر آن بر چند بخش، تا حداکثر $p+1$ بخش خواهد بود.



(الف) (ب)

شکل ۲-۸ کنترل محلی در منحنی بی-اسپلاین الف)منحنی اولیه ب) تغییر محل آخرین نقطه کنترلی

مهم ترین ویژگی‌های منحنی‌های بی-اسپلاین را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

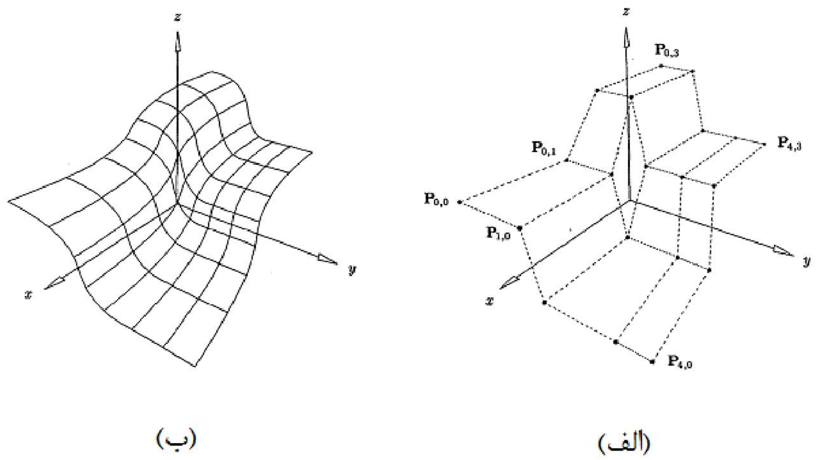
- منحنی داخل بدنه محدب چند ضلعی کنترلی قرار می‌گیرد.
- در حالت کلی نقاط کنترلی درونیابی نمی‌شوند.
- نقاط کنترلی حداکثر بر $p+1$ بخش تاثیر دارند.
- در حالت بردار گرهی باز، نقاط ابتدا و انتها درونیابی شده و منحنی در این نقاط بر چند ضلعی کنترلی مماس خواهد بود.
- منحنی در بین دو گره پیوستگی C^{∞} و در صورت k مرتبه تکرار گره پیوستگی C^{p-k} دارد.
- یک منحنی بزیر در واقع یک منحنی بی-اسپلاین است که در تنها یک دهانه گرهی تشکیل شده است.

۲-۳-۲-۴- سطوح بی-اسپلاین

یک سطح بی-اسپلاین از ضرب تانسوری توابع پایه در دو بعد پارامتری r و s حاصل می‌شود. این سطح به وسیله یک شبکه $n\times m$ از نقاط کنترلی، دو بردار گرهی R و S ، دو درجه چند جمله‌ای p_1 و p_2 (که می‌توانند مساوی نباشند) و توابع پایه متناظر $N_{i,p_1}(r)$ و $N_{j,p_2}(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{S}(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p_1}(r)N_{j,p_2}(s)\mathbf{P}_{i,j} \qquad (۱۱-۲)$$

سطوح بی- اسپلاین نیز مشابه منحنی‌ها، دارای پیوستگی C^{p_1-1} در جهت r و C^{p_2-1} در جهت s هستند و تکرار گره‌ها به تعداد k در هر یک از جهت ها، باعث کاهش پیوستگی به C^{p_1-k} یا C^{p_2-k} خواهد شد. شکل ۲-۹ شبکه نقاط کنترلی و سطح بی-اسپلاین حاصل از آن را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۹ سطح بی-اسپلاین الف) شبکه نقاط کنترلی ب) سطح حاصل

۲-۳-۲-۵- احجام بی-اسپلاین

مشابه سطح نربز، می‌توان با افزودن یک بعد دیگر مثل t و ضرب تانسوری توابع پایه مربوطه حجم بی-اسپلاین را تولید نمود:

$$\mathbf{B}(r,s,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}N_{i,p_1}(r)N_{j,p_2}(s)N_{k,p_3}\mathbf{P}_{i,j,k} \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

مشابه حالت سطوح و منحنی‌ها، همان ویژگی‌ها برای احجام نیز برقرار هستند.

۲-۳-۳- نربز

نربز مخفف عبارت بی-اسپلاین‌های غیر یکنواخت کسری به زبان انگلیسی است. عبارت غیر یکنواخت مربوط به بردار گره است که در حالت کلی می‌تواند یکنواخت نباشد. عبارت کسری به توابع پایه بر می‌گردد. برخلاف بی-اسپلاین‌ها که توابع قطعه‌ای چند جمله‌ای هستند، نربزها چند جمله‌ای‌های کسری قطعه‌ای می‌باشند. در تعریف منحنی‌های نربز، برای هر نقطه کنترلی یک مقدار وزن w در نظر گرفته می‌شود که مقدار آن بر نحوه تاثیر آن نقطه کنترلی بر شکل منحنی موثر است. یک منحنی درجه p نربز را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbf{C}(r)=\sum_{i=0}^{n}\frac{N_{i,p}(r)w_i}{\sum_{j=0}^{n}N_{j,p}(r)w_j}\mathbf{P}_i \qquad (۱۳-۲)$$

با تعریف تابع پایه نربز به شکل زیر:

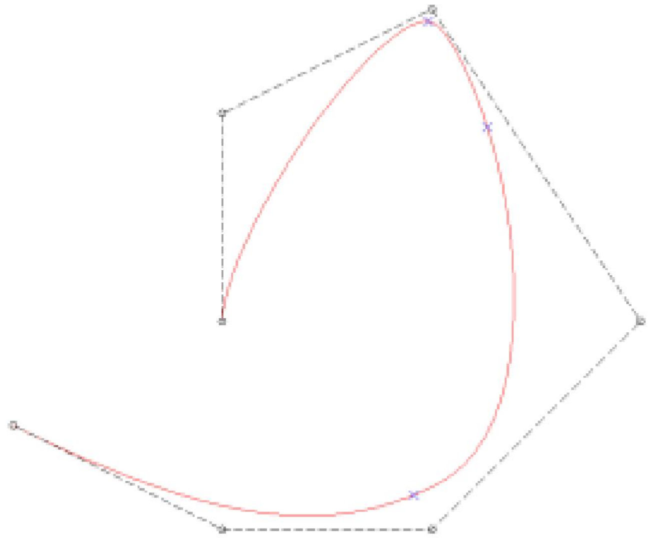
$$R_{i,p}(r)=\frac{N_{i,p}(r)w_i}{\sum_{j=0}^{n}N_{j,p}(r)w_j} \qquad (۱۴-۲)$$

می‌توان تعریف منحنی نربز را به شکل ساده‌تر و مشابه بخش‌های قبل از ضرب نقاط کنترلی در توابع پایه مربوطه به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\mathbf{C}(r)=\sum_{i=0}^{n}R_{i,p}(r)\mathbf{P}_i \qquad (۱۵-۲)$$

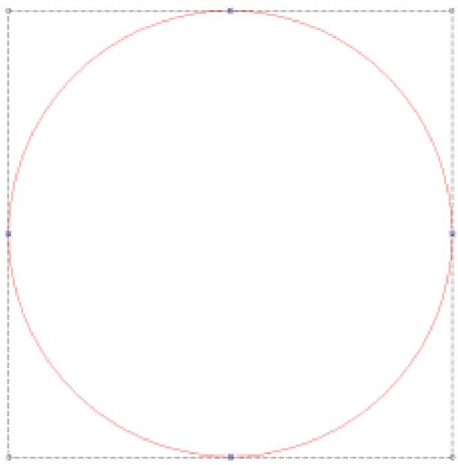
چنانچه همه مقادیر وزن‌ها با هم برابر باشند، تابع پایه نربز رابطه ۲-۱۴ به تابع پایه بی-اسپلاین عادی تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر تابع پایه بی-اسپلاین حالت خاصی از تابع نربز هست که وزن‌ها در آن برابر هم هستند و همه ویژگی‌های بی-اسپلاین که در بخش ۲-۳-۲-۲ به آنها اشاره شد، برای نربز نیز صدق می‌کنند.

در شکل ۲-۱۰ تاثیر مقدار وزن در شکل منحنی نربز نشان داده شده است. در این شکل منحنی نربز با استفاده از نقاط کنترلی شکل ۲-۲ و اعمال وزن $w_4=10$ رسم شده است. مشاهده می‌شود که در اثر این افزایش وزن، منحنی به سمت نقطه کنترلی مربوطه کشیده شده است.



شکل ۲-۱۰ منحنی نربز با وزن زیاد چهارمین نقطه کنترلی w4=10

مزیت مهم توابع پایه کسری، قابلیت آنها در رسم دقیق مقاطع مخروطی، مانند دایره و بیضی است. شکل ۲-۱۱ یک دایره دقیق را که با استفاده از نربز رسم شده است نشان می‌دهد. بنابراین نربزها قادر به تولید شکل‌های آزاد هموار به همراه شکل‌های خطی، شکل‌های با لبه تیز و شکستگی و همچنین شکل‌های رایج هندسی مثل دایره و استوانه و کره و غیره هستند. به این خاطر نربز به عنوان ابزار های استاندارد در CAD پذیرفته شده‌اند.



شکل۲-۱۱ تولید دایره دقیق با استفاده از نربز

مشابه سطوح بی-اسپلاین، یک سطح نربز را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbf{S}(r,s)=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}R_{i,j}^{p_1,p_2}(r,s)\mathbf{P}_{i,j} \qquad (۲-۱۶)$$

که تابع پایه آن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R_{i,j}^{p_1,p_2}(r,s)=\frac{N_{i,p_1}(r)N_{j,p_2}(s)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}N_{k,p_1}(r)N_{l,p_2}(s)w_{k,l}} \qquad (۲-۱۷)$$

و همچنین یک حجم نربز به شکل زیر:

$$\mathbf{S}(r,s,t)=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\sum_{k=0}^{n_3}R_{i,j,k}^{p_1,p_2,p_3}(r,s,t)\mathbf{P}_{i,j,k} \qquad (۲-۱۸)$$

با تابع پایه

$$R_{i,j,k}^{p_1,p_2,p_3}(r,s,t)=\frac{N_{i,p_1}(r)N_{j,p_2}(s)N_{k,p_3}(t)w_{i,j,k}}{\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}\sum_{m=0}^{n_3}N_{k,p_1}(r)N_{l,p_2}(s)N_{m,p_3}(t)w_{k,l,m}} \qquad (۲-۱۹)$$

تعریف می‌شود.

توجه شود که توابع پایه دو و سه بعدی نربز (روابط ۲-۱۷ و ۲-۱۹) از ضرب تانسوری توابع پایه یک بعدی نربز (رابطه ۲-۱۴) به دست نمی‌آیند بلکه از ضرب تانسوری نسبت‌های وزنی توابع پابه اسپلاین حاصل می‌شوند.

۲-۳-۴- بهبود شبکه

دو روش برای بهبود شبکه‌بندی یک منحنی یا سطح نربز وجود دارد: افزایش گره و بالا بردن درجه. هر دو روش با افزایش نقاط کنترلی باعث ارتقای فضای طراحی می‌شوند. در روش افزایش گره، دهانه‌های گرهی به دهانه‌های کوچکتر تقسیم می‌شوند و گره‌های جدیدی به بردار گره اضافه می‌شوند. در نتیجه در این نقطه پیوستگی به اندازه یکی کاهش می‌یابد. به ازای هر یک گره جدید، یک نقطه کنترلی نیز اضافه می‌شود. در روش بالا بردن درجه، تعداد دهانه‌های گرهی ثابت باقی

می‌ماند، اما درجه چند جمله‌ای توابع پایه افزایش می‌یابد. با افزایش درجه، گره‌های موجود باید تکرار شوند که در نتیجه پیوستگی در این نقاط بدون تغییر باقی می‌ماند. در سطوح، این بهبود شبکه می‌تواند مستقلا برای هر یک از جهت های پارامتری r و s به کار رود. ویژگی مهم هر دو روش این است که هیچ یک از آنها هندسه و یا پارامتربندی را تغییر نمی‌دهند. الگوریتم‌های استانداردی برای بهبود گره و افزایش مرتبه وجود دارد (Piegl et al., 1997). در ادامه و در فصل‌های مربوطه این بحث مفصل‌تر بررسی خواهد شد.

فصل سوم

روش تحلیل ایزوژئومتریک

۳-۱- مقدمه

در این فصل روش تحلیل ایزوژئومتریک که حوزه اصلی پژوهش این رساله است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور در ابتدا پس از مرور روش‌های عددی در مکانیک محاسباتی و روش‌های طراحی هندسی کامپیوتری، اصول و کلیات روش ایزوژئومتریک به همراه مقایسه با روش اجزای محدود بیان می‌شود. سپس فرمول‌بندی مسائل تنش مسطح به همراه چند مثال نمونه ارائه خواهد شد. با توجه به مفصل بودن بحث تحلیل پوسته‌ها، این مبحث در فصل بعدی به طور مجزا بررسی خواهد شد.

۳-۲- روش‌های عددی در مکانیک محاسباتی

در حل مسائل مکانیک، برای اطلاع از رفتار مکانیک مسئله مورد بررسی مثل تغییر مکان، تنش و غیره، معادلات دیفرانسیلی وجود دارند که باید حل شوند. حوزه ای از مکانیک که در آن از روش‌های عددی برای حل این معادلات استفاده می‌شود، تحت عنوان مکانیک محاسباتی مشهور است. امروزه روش اجزای محدوددر حوزه‌های مختلف علوم به عنوان شناخته شده ترین و پرکاربردترین روش عددی برای حل این معادلات مطرح می‌باشد.

روش اجزای محدود اولین بار توسط کلاف در سال ۱۹۶۰ به این اسم نامگذاری شد (Cottrell et al., 2009). در اواخر این دهه نیز مهندسان برای حل مسائلی مانند تحلیل تنش، جریان سیال، انتقال حرارت و غیره از این روش استفاده می‌کردند. رشد سریع این روش سبب ایجاد اثرات بسیار شگرفی

در رشد علوم و تکنولوژی در نیم قرن گذشته شده است. مزایایی از جمله پایداری عددی، قابلیت اعمال بارگذاریها و تغییر مکانهای متنوع و نهایتا پیشینه‌ای قوی در خصوص تحقیقات انجام شده سبب رشد و گسترش سریع این روش بوده‌اند. از طرف دیگر معایبی که بیشتر به علت شرایط فرمول‌بندی این روش حاصل می‌شوند وجود دارد که از آن جمله می‌توان به عدم دستیابی به حل دقیق، خطاهای ناشی از مدلسازی هندسه، استفاده از گره‌ها برای تبدیل محیط پیوسته (نامحدود) به محیط ناپیوسته (محدود)، مشکلات ناشی از تولید شبکه و بهبود آن، نیاز به قضاوت صحیح مهندسی در برخورد با جواب‌های حاصل و اشتباهات ناشی از کاربران را نام برد. امروزه به علت رفع اغلب ابهامات و مشکلات موجود در این روش، رشد این روش دیگر سرعت گذشته را نداشته و فقط در برخی مسائل و جزییات خاص، تحقیقات برای ارتقای آن ادامه دارد.

۳-۳- طراحی هندسه به کمک کامپیوتر

طراحی هندسه به کمک کامپیوتر که به CAD مشهور است، حوزه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در آن به هندسه اشیا از دیدگاه محاسباتی نگریسته می‌شود. این حوزه به بررسی روش‌ها و الگوریتم‌های موجود برای توصیف ریاضی اشکال هندسی می‌پردازد. در واقع توسعه چشمگیر و سریع علوم کامپیوتری در بخش‌های نرم افزاری و سخت افزاری سبب ایجاد شرایط مناسب برای رشد سریع تکنیک‌های طراحی هندسه به کمک کامپیوتر شده است. امروزه نرم افزارهای بسیاری بر مبنای روش‌های گرافیکی تهیه شده است که می‌توان به انواع محصولات شرک امریکایی AutoDesk مانند 3Dmax، Maya، AotuCad و بسیاری دیگر از نرم افزار ها اشاره کرد.

بدون شک پیشرفت CAD مدیون دو داشمند فرانسوی در زمینه مهندسی اتومبیل به نام های بزیر از کارخانه رنو و دوکاستو از کارخانه سیتروئن است. بزیر در سال‌های ۱۹۶۶ تا ۱۹۷۲ از مبانی چند جمله‌ای‌های برنشتین برای ساخت منحنی‌ها و سطوح استفاده نمود (Bezier., 1970). دوکاستلو نیز چنین ایده‌ای در سال ۱۹۵۹ داشت که در جایی به چاپ نرسید. شونبرگ در سال ۱۹۴۶ اولین بار از

اسپلاین‌ها جهت تقریب‌سازی استفاده نمود (Schoenberg., 1946). در دهه ۷۰ میلادی بی-اسپلاین‌های کسری که امروزه تحت عنوان نربز شناخته می‌شوند معرفی شدند (De Boor., 1972, 1978). در طی سالیان پس از آن پیشرفت‌های قابل توجهی در زمینه اسپلاین‌ها انجام شد که در صنایعی چون صنعت انیمیشن تحولات عظیمی ایجاد نمود. اخیرا نیز با بسط تکنولوژی نربز، تی اسپلاین‌ها به وسیله سدربرگ و همکاران(Sederberg et al., 2003, 2004) معرفی شدند. مبانی تئوری مربوط به مسائل مدلسازی هندسی پیشتر در فصل دوم به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت.

۳-۴- اصول روش تحلیل ایزوژئومتریک

به طور کلی از تاریخچه روش‌های اجزای محدود و تکنولوژی طراحی به کمک کامپیوتر چنین بر می‌آید که CAD حدود یک دهه پس از FEM شروع به کامل کرده است. از این رو در روش اجزای محدود از پیشرفت‌های بدست آمده در CAD استفاده لازم به عمل نیامده است (Cottrell et al., 2009).

شاید بتوان متمایزترین ایده در ایزوژئومتریک را استفاده از بی-اسپلاین‌ها در تقریب هندسه و تابع مجهول نامید. ایده استفاده از توابع پایه اسپلاین در تحلیل مسائل مهندسی توسط سابین (Sabin., 1997) در سال ۱۹۹۷ با عنوان المان‌های محدود اسپلاینی و همچنین هولیگ و کاگان (Kagan et al., 1998, Hollig., 2003) با عنوان حل مسائل حساب تغییرات با استفاده از اسپلاین‌ها در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۳ معرفی و تا حدودی نیز توسعه یافته است. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز توسط هیوز (Hughes et al., 2005) تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت.

ایده بنیادی که در پس روش ایزوژئومتریک موجود است این است که از همان توابع پایه‌ای که برای مدلسازی دقیق هندسه جسم استفاده می‌شود برای تقریب تابع مجهول نیز استفاده می‌شود. این موضوع در روش اجزای محدود نیز کاملا مرسوم و شناخته شده است و از آن با نام مفهوم ایزوپارامتریک نام برده می‌شود. توابع مورد استفاده در روش اجزای محدود، توابع چند جمله‌ای

هستند. اصلی ترین دلیل برای اعتماد به چند جمله‌ای‌ها در اجزای محدود، سادگی آنها می‌باشد. سهولت برنامه نویسی، آسانی درک مفاهیم حاکم بر آنها، آسانی اثبات تئوری‌های حاکم بر آنها و خواص شناخته شده آنها برای استفاده در تقریب زدن از جمله این موارد است. البته موارد ذکر شده به این مفهوم نیستند که دستیابی به تئوری‌های فوق برای سایر توابع پایه ناممکن است. بر عکس می‌توان از مفهوم ایزوپارامتریک برای استفاده از توابع پایه نا متعارف[1] استفاده نمود. جواب‌های دقیقی برای توابع پایه غیر چند جمله‌ای موجود است که می‌توان به مرجع (Bazilevs et al., 2006) مراجعه نمود.

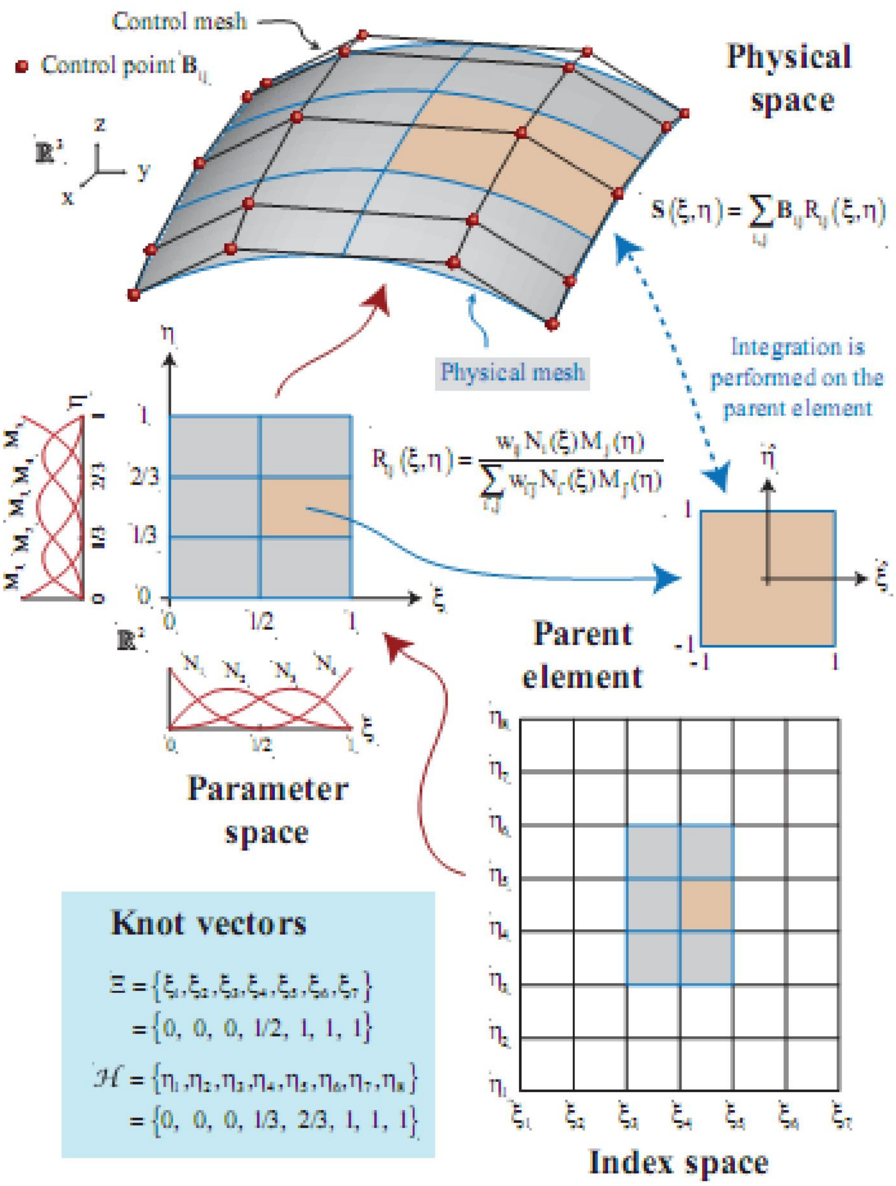
روش ایزوژئومتریک مشابه همه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل نیاز به تقریب توابع مجهول و گسسته سازی دامنه دارد. به این منظور توابع پایه بی-اسپلاین و یا نربز در این روش به کار گرفته می‌شوند. به این ترتیب امکان مدلسازی هندسه با دقت بالا ایجاد می‌شود. نقاط کنترلی که برای تعریف بی-اسپلاین‌ها و یا نربز استفاده می‌شوند نقش نقاط شبکه و یا گره‌های گسسته سازی در روش‌های تفاضل محدود و اجزای محدود را بازی می‌کنند.

در روش اجزای محدود دامنه به اجزای کوچکتری به نام المان تقسیم بندی می‌شود. به مجموعه این المان‌ها که کل هندسه دامنه را تعریف می‌کنند شبکه اجزای محدود اطلاق می‌شود. هر المان به دو فرم فیزیکی[2] و پایه‌ای[3] نمایش داده می‌شود. به این معنی که روابط توابع پایه، که در روش اجزای محدود به توابع شکل و یا درونیابی معروف هستند، در فرم پایه‌ای استخراج می‌گردند و سپس با استفاده از یک نگاشت به فرم فیزیکی تبدیل می‌شوند.

در روش ایزوژئومتریک نقاط کنترلی لزوما بر هندسه و فیزیک حل منطبق نیستند و بنابراین دو مفهوم شبکه نقاط کنترلی و فیزیکی در این روش مطرح است (شکل ۳-۱). نقاط کنترلی، شبکه نقاط کنترلی را ایجاد می‌کنند که این شبکه در مسائل دو بعدی شامل اعضای چهار ضلعی و در مسائل سه

[1] Exotic bases
[2] Physical element
[3] Base element

بعدی شامل اعضای شش وجهی است. نقاط کنترلی توسط این شبکه درونیابی می‌شوند. در این روش همچنین درجات آزادی که در نقاط کنترلی تعریف می‌شوند را متغیرهای کنترلی می‌نامند.



شکل۳-۱ نمایش ارتباط فضای فیزیکی و فضای پارامتریک برای یک زیر دامنه (cottrell et al., 2009)

شبکه فیزیکی که برای مثال در شکل ۳-۱ نشان داده شده است، تقسیم بندی هندسه واقعی مسئله است. این شبکه دارای دو فرم کلی است. اول زیر دامنه‌ها[1] و دوم اجزای گرهی[2]. زیر دامنه‌ها که می‌توان آنها را

[1] Patches
[2] Knot elements

المان‌های بزرگ[1] نیز نامید، همانند روش اجزای محدود به یکدیگر متصل می‌شوند و در نهایت نیز ماتریس‌های ضرایب آنها با هم به صورت معمول اسمبل می‌شوند. هر زیر دامنه به اجزای گرهی و یا فضای گرهی تقسیم می‌شود که به آنها المان‌های کوچک[2] گفته می‌شود. چنانچه در فصل دو تشریح شد، در گره‌ها که در فضای فیزیکی مرزهای المان‌های کوچک هستند، توابع پایه دارای پیوستگی C^{p-m} خواهند بود که p درجه تابع پایه و m تعداد تکرار نقاط گرهی در بردار گره هستند. در ادبیات این روش زمانی که از عبارت "المان" بدون پسوند استفاده می‌شود به معنی المان گرهی است. لازم به ذکر است که بسیاری از مسائل آکادمیک را می‌توان بدون در نظر گرفتن زیر دامنه‌ها حل نمود.

جدول ۳-۱تفاوت‌های روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک

روش ایزوژئومتریک	**روش اجزای محدود**
دقت بالا در مدلسازی هندسه	هندسه تقریبی
نقاط کنترلی	نقاط گرهی
متغیرهای کنترلی	متغیرهای گرهی
توابع پایه نربز	توابع پایه بر اساس چند جمله‌ای‌ها
پیوستگی کنترل شده	پیوستگی C^0 بین المانی

جدول ۳-۲ اشتراکات روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک

روش‌های تحلیل ایزوژئومتریک و اجزای محدود
مفهوم ایزوپارامتریک
روش‌های حل معادلات دیفرانسیل
نحوه نوشتن کدهای کامپیوتری
اقناع شدن تست‌های استاندارد[3]
خاصیت تاثیر گذاری در ناحیه محدود شده
برابر واحد بودن جمع توابع شکل در یک نقطه

[1] Macro elements
[2] Micro elements
[3] Patch tests

با توجه به نکات یاد شده می‌توان تفاوت‌های روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک را به صورت جدول ۳-۱ بیان نمود. همچنین مشابهت‌های این روش با اجزای محدود در جدول ۳-۲ نشان داده شده است.

۳-۵- فرمول‌بندی ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح

در این بخش برای درک بهتر روش ایزوژئومتریک و با توجه به استفاده از تحلیل مسائل تنش مسطح در بخش بهینه‌سازی در فصل‌های بعدی، فرمول‌بندی این مسائل ارائه خواهند شد. همچنین نحوه مشتق گیری و نیز محاسبه انتگرال‌های حاصله تشریح خواهند شد. در پایان با حل چند مثال عددی، دقت روش در مقایسه با پاسخ تئوری و حل اجزای محدود مورد بحث قرار می‌گیرد.

۳-۵-۱- فرمول‌بندی ایزوژئومتریک

چنانچه در بخش‌های قبلی بیان شد، در روش ایزوژئومتریک مقدار تابع مجهول (در اینجا تغییر مکان)، در نقاط کنترلی نربز محاسبه شده و سپس به وسیله توابع پایه‌ای نربز در بقیه نقاط تقریب زده می‌شود. در مسائل مسطح می‌توان این نقاط را طوری در نظر گرفت که مولفه‌های اول و دوم مختصات آنها بیانگر هندسه و مولفه سوم نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. در این صورت می‌توان رویه‌ای در نظر گفت که تصویر آن روی صفحه xy نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (مولفه z) نسبت به صفحه xy نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. بنابراین هر یک از دو مولفه هندسی در صفحه را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$x(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(r,s)P_{x\ i,j}$$
$$y(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(r,s)P_{y\ i,j} \qquad (۳-۱)$$

همچنین تغییر مکان در هر نقطه از وصله را می‌توان به وسیله بردار ستونی $\hat{\mathbf{u}}$ به صورت زیر تقریب زد:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_i \sum_j R_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} \tag{۲-۳}$$

توجه شود که $\mathbf{u}$ در حالت دو بعدی به شکل زیر است:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \tag{۳-۳}$$

در رابطه (۳-۲) $\mathbf{P}_{i,j}$ بیان گر بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز هستند که خود دارای دو مولفه، یکی برای تغییر مکان در جهت u و دیگری تغییر مکان جهت v هستند.

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{Bmatrix} P_{u\ i,j} \\ P_{v\ i,j} \end{Bmatrix} \tag{۴-۳}$$

$R_{i,j}$ در روابط بالا توابع پایه نربز هستند که در فصل دو معرفی شدند. ملاحظه می‌شود که از این توابع در فرمول‌بندی ایزوژئومتریک به عنوان توابع شکل اجزای محدود استفاده می‌شود. چنانچه پیشتر ذکر شد آنها در دستگاه مختصات نرمال $0 \le r,s \le 1$ محاسبه می‌شوند. حال چنانچه برای هر وصله یک دستگاه مختصات نرمال محلی در نظر گرفته شود، می‌توان محاسبات را به طور ساده‌تری در این دستگاه انجام داد.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(r,s) \\ v(r,s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(r,s) \mathbf{P}_{u\ i,j} \\ \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(r,s) \mathbf{P}_{v\ i,j} \end{Bmatrix} \tag{۵-۳}$$

با توجه به ویژگی کنترلی محلی، اگر r و s به ترتیب در دهانه‌های گرهی i ام در جهت r، و j ام در جهت s باشند ($r \in [r_i, r_{i+1})$ و $s \in [s_i, s_{i+1})$) و درجه توابع پایه‌ای در جهت r برابر p و در جهت s برابر q باشد، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود دارد. بنابراین معادله (۳-۵) را می‌توان به شکل زیر کاهش داد:

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix} u(r,s) \\ v(r,s) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}\mathbf{P}_{u\,k,l} \\ \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}\mathbf{P}_{v\,k,l} \end{Bmatrix} \qquad (۳-۶)$$

این رابطه را می‌توان به صورت ماتریسی به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\bar{\mathbf{u}}=\bar{\mathbf{R}}.\bar{\mathbf{P}} \qquad (۳-۷)$$

که در آن $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان‌های نقاط کنترلی به شکل زیر است:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j}=\begin{bmatrix} u_{i,j} & v_{i,j} \end{bmatrix}^T \qquad (۳-۸)$$

و $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه نربز به شکل زیر است:

$$\bar{R}=\begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(r,s) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(r,s) & 0 & \dots & R_{i,j}(r,s) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(r,s) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(r,s) & \dots & 0 & R_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} \qquad (۳-۹)$$

همچنین $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی زیر می‌باشد:

$$\bar{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix} P_{u\ i-p,j-q} & P_{v\ i-p,j-q} & \dots & P_{u\ i-p,j} & P_{v\ i-p,j} & \dots & P_{u\ i,j} & P_{v\ i,j} \end{bmatrix}^T \qquad (۳-۱۰)$$

با معلوم بودن تغییر مکان‌ها در نقاط دلخواه هر وصله، می‌توان کرنش‌ها را به دست آورد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{L}\mathbf{u} \qquad (۳-۱۱)$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار تغییر مکان، $\boldsymbol{\varepsilon}$ بردار کرنش و $\mathbf{L}$ عملگر دیفرانسیلی است که برای مسائل دو بعدی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۲)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۷) در (۳-۱۱) می‌توان کرنش را به صورت زیر تقریب زد:

$$\varepsilon=\mathbf{B}\bar{\mathbf{P}} \qquad (۳-۱۳)$$

که در آن $\mathbf{B}=\mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}$ می‌باشد. رابطه تنش-کرنش برای مصالح خطی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0\right)+\boldsymbol{\sigma}_0 \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

که $\mathbf{D}$ماتریس کشسانی، $\boldsymbol{\varepsilon}_0$کرنش اولیه، $\boldsymbol{\sigma}_0$تنش اولیه و $\boldsymbol{\sigma}$بردار تنش هستند. ماتریس $\mathbf{D}$ و بردار$\boldsymbol{\sigma}$ به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{D}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

$$\sigma=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

یکی از روش‌هایی که در اجزای محدود برای تشکیل ماتریس سختی مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش کار مجازی است. به این ترتیب که یک تغییر مکان مجازی گرهی به سیستم در حال تعادل اعمال شده و کارهای داخلی و خارجی انجام شده توسط نیروهای مختلف در اثر این تغییر مکان مساوی هم قرار داده می‌شوند (Zienkkiewics et al., 2005). از همین روش می‌توان برای محاسبه ماتریس ضرایب در ایزوژئومتریک استفاده نمود. اگر در یک وصله مانند Ω که دارای مرزهای Γ است، نیروهای پیکره[۱] $\mathbf{b}$ و نیروهای سطحی[۲] $\mathbf{t}$ وجود داشته باشند، می‌توان رابطه کار مجازی را به شکل زیر نوشت:

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega-\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}\,d\Gamma=0 \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

در این رابطه $\delta\mathbf{u}$ تغییر مکان مجازی گرهی و $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ میدان کرنش مجازی هستند که می‌توان آنها را با استفاده از معادلات (۳-۷) و (۳-۱۳) به صورت زیر نوشت:

$$\delta\mathbf{u}^T=\bar{\mathbf{R}}\delta\bar{\mathbf{P}} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\delta\bar{\mathbf{P}} \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

[1] Body force
[2] Traction force

با جایگذاری این روابط در معادله (۳-۱۷) داریم و کمی ساده سازی داریم:

$$\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{P}}d\Omega-\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}d\Omega-\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{0}}d\Omega-\int_{\Omega}\overline{\mathbf{R}}^{T}\mathbf{b}d\Omega-\int_{\Gamma}\overline{\mathbf{R}}^{T}\mathbf{t}d\Gamma=0 \quad (۳-۲۰)$$

در نهایت این رابطه را می‌توان به شکل مشهور زیر بازنویسی نمود:

$$\mathbf{KU}=\mathbf{F} \quad (۳-۲۱)$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس ضرایب، $\mathbf{U}$بردار تغییر مکان‌ها و $\mathbf{F}$ نیروهای خارجی در اثر بارها، تنش‌ها و کرنش‌های پسماند وارد بر وصله هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K}=\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega \quad (۳-۲۲)$$

$$\mathbf{F}=\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\,\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}d\,\Omega+\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{0}}d\,\Omega+\int_{\Omega}\overline{\mathbf{R}}^{T}\,\mathbf{b}d\,\Omega+\int_{\Gamma}\overline{\mathbf{R}}^{T}\,\mathbf{t}d\,\Gamma \quad (۳-۲۳)$$

همانند روش اجزای محدود، می‌توان دستگاه معادلات (۳-۲۱) را با اعمال شرایط مرزی حل نمود و تغییر مکان‌ها را به دست آورد.

۳-۵-۲- محاسبه ماتریس سختی

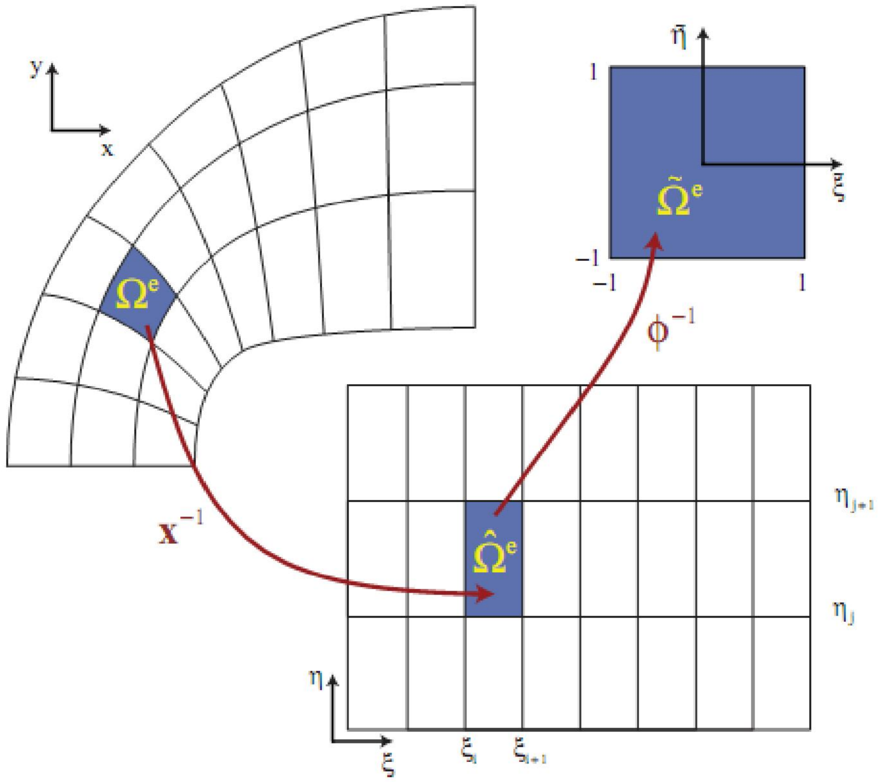
در بخش قبل ماتریس سختی به شکل رابطه (۳-۲۲) به دست آمد. با توجه به اینکه توابع شکل مورد استفاده در این فرمول‌بندی بر حسب پارامترهای نرمال نربز هستند، این انتگرال نیز بر حسب این پارامترها خواهد بود:

$$\mathbf{K}=\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}(r,s)\,\mathbf{D}\mathbf{B}(r,s)\,d\Omega \quad (۳-۲۴)$$

این انتگرال نشان دهنده ماتریس سختی یک وصله است که تشابه زیادی با انتگرال سختی در اجزای محدود دارد. اما باید توجه داشت که این دو دارای تعاریف متفاوتی با هم هستند. با توجه به روابط ارائه شده برای ماتریس سختی می‌توان ابعاد این ماتریس را حدس زد. اگر تعداد نقاط کنترلی را با N_P نشان دهیم و تعداد درجات آزادی آنها را برابر دو فرض کنیم، ابعاد ماتریس سختی $2N_p\times 2N_P$خواهد بود که یک ماتریس مربعی است.

جهت خودکار سازی محاسبه انتگرال‌های ماتریس سختی از انتگرال گیری عددی استفاده می‌شود. در این رساله از میان روش‌های مختلف انتگرال گیری عددی، روش گوس[1] مورد استفاده قرار می‌گیرد. جهت آشنایی بیشتر با این روش می‌توان به کتاب های اجزای محدود مراجعه نمود.

در روش مورد استفاده در این رساله، انتگرال گیری عددی روی یک المان گرهی انجام می‌شود. محیط هر وصله توسط دهانه‌های گرهی به المان‌های گرهی تقسیم می‌شود و با انتگرال گیری گوس روی هر یک از این المان‌ها در نهایت حاصل انتگرال روی سطح وصله به دست می‌آید. این موضوع در شکل (۳-۲) نشان داده شده است. چنانچه در این شکل ملاحظه می‌شود، یک المان فیزیکی ابتدا با یک نگاشت به فضای پارامتری نربز، که از این پس به اختصار فضای پارامتری نامیده می‌شود، منتقل می‌گردد. سپس با یک نگاشت دیگر به فضای انتگرال گیری، که در ادبیات موضوع به المان منشا[2] مشهور است، منتقل می‌شود. در ادامه این روند به طور مفصل تشریح خواهد شد.



شکل ۳-۲ فضاهای فیزیک، پارامتری و انتگرال گیری (cottrell et al., 2009)

[1] Gaussian Quadrature
[2] Parent element

عبارت $\mathbf{B}(r,s)$ در رابطه (۳-۲۴) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\bar{\mathbf{R}} \tag{۳-۲۵}$$

ملاحظه می‌شود که برای حل انتگرال ماتریس سختی باید مشتقات $\mathbf{R}$ نسبت به x و y در دستگاه مختصات کلی محاسبه شوند. برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری، ژاکوبین زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix} \tag{۳-۲۶}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\end{Bmatrix}=\mathbf{J}_1^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\end{Bmatrix} \tag{۳-۲۷}$$

که $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}$ و $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}$ مشتقات جزئی توابع پایه نربز هستند. همچنین با توجه به اینکه همه پارامترهای انتگرال ماتریس سختی بر حسب مختصات فضای پارامتری نربز است، ساده‌ترین راه برای انتگرال گیری استفاده از همین فضای پارامتری است. این عمل باعث ایجاد $\det \mathbf{J}_1$ در انتگرال گیری ماتریس سختی می‌شود. بنابراین رابطه (۳-۲۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\mathbf{K}_{patch}=\int\int_{\Omega\, patch}\mathbf{B}^T(r,s)\mathbf{D}\mathbf{B}(r,s)\det \mathbf{J}_1 drds \tag{۳-۲۸}$$

با توجه به اینکه نقاط انتگرال گیری و وزن‌های مربوط به آنها در روش انتگرال گیری گوس در فضای نرمال $[-1,1]$ تعریف می‌شود، باید توسط یک نگاشت، محدوده یک المان گرهی در فضای پارامتری با فضای نرمال انتگرال گیری مرتبط شود. این نگاشت به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$r = \frac{1}{2}\left[\left(r_{i+1} - r_i\right)\xi + \left(r_{i+1} + r_i\right)\right]$$
$$s = \frac{1}{2}\left[\left(s_{i+1} - s_i\right)\eta + \left(s_{i+1} + s_i\right)\right] \qquad (۲۹-۳)$$

در روابط فوق ξ و η مولفه‌های مختصات نقاط در فضای انتگرال گیری گوس و r و s مولفه‌های نربز یا همان فضای پارامتری هستند. این نگاشت باعث ایجاد ژاکوبین به شکل زیر در انتگرال گیری می‌شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial s}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad , \quad drds = \det \mathbf{J}_2 d\xi d\eta \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(r_{i+1} - r_i\right) \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0$$
$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(s_{i+1} - s_i\right) \qquad (۳۱-۳)$$

در نتیجه می‌توان رابطه (۳-۲۸) ماتریس سختی را به صورت زیر بازنویسی نمود:

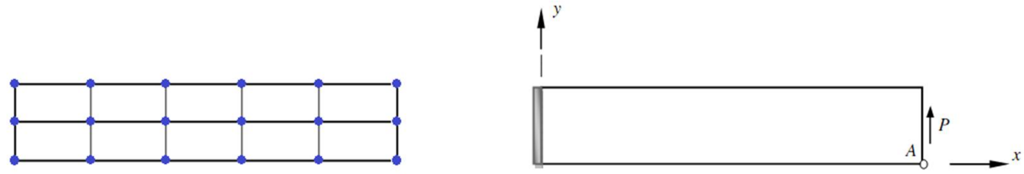
$$\mathbf{K}_{patch} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T\left(\xi,\eta\right)\mathbf{D}\mathbf{B}\left(\xi,\eta\right)\det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 d\xi d\eta \qquad (۳۲-۳)$$

که n تعداد المان‌های گرهی در هر وصله است. با رابطه (۳-۳۲) و استفاده از انتگرال گیری گوس می‌توان ماتریس ضرایب را برای یک وصله محاسبه نمود.

۳-۵-۳- مرور چند مثال

با توجه به اینکه فرمول‌بندی و حل مسائل مسطح تاکنون توسط محققان زیادی انجام شده است، در این رساله فقط این فرمول‌بندی مرور شده است و نوشتن برنامه کامپیوتری برای حل این مسائل مورد نظر نبوده است. با این حال از یک زیربرنامه تحلیل در فصل‌های مربوط به بهینه‌سازی مسائل مسطح

استفاده خواهد شد. در این بخش مبحث مربوط به مسائل دو بعدی را با مرور چند مثال به پایان خواهیم برد. این مثال‌ها مربوط به تیر طره‌ای و صفحه نامحدود با حفره میانی است که به ترتیب در شکل‌های ۳-۳ و ۳-۴ نشان داده شده است. برای مرور دقیق تر مثال‌ها و بحث در مورد نتایج می‌توان به مرجع (توکلی، ۱۳۸۸) مراجعه نمود.



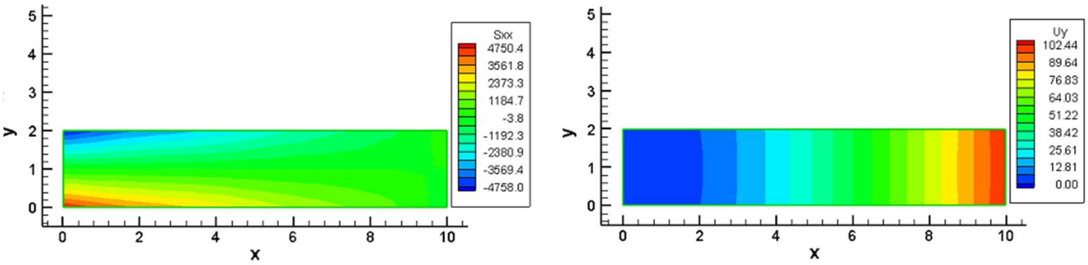
(الف) (ب)

Direction	Order	Knot vector
r	$p_1 = 4$	$\mathbf{r} = \{0,0,0,0,0,0.5,1,1,1,1,1\}$
s	$p_2 = 2$	$\mathbf{s} = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$

(ج)

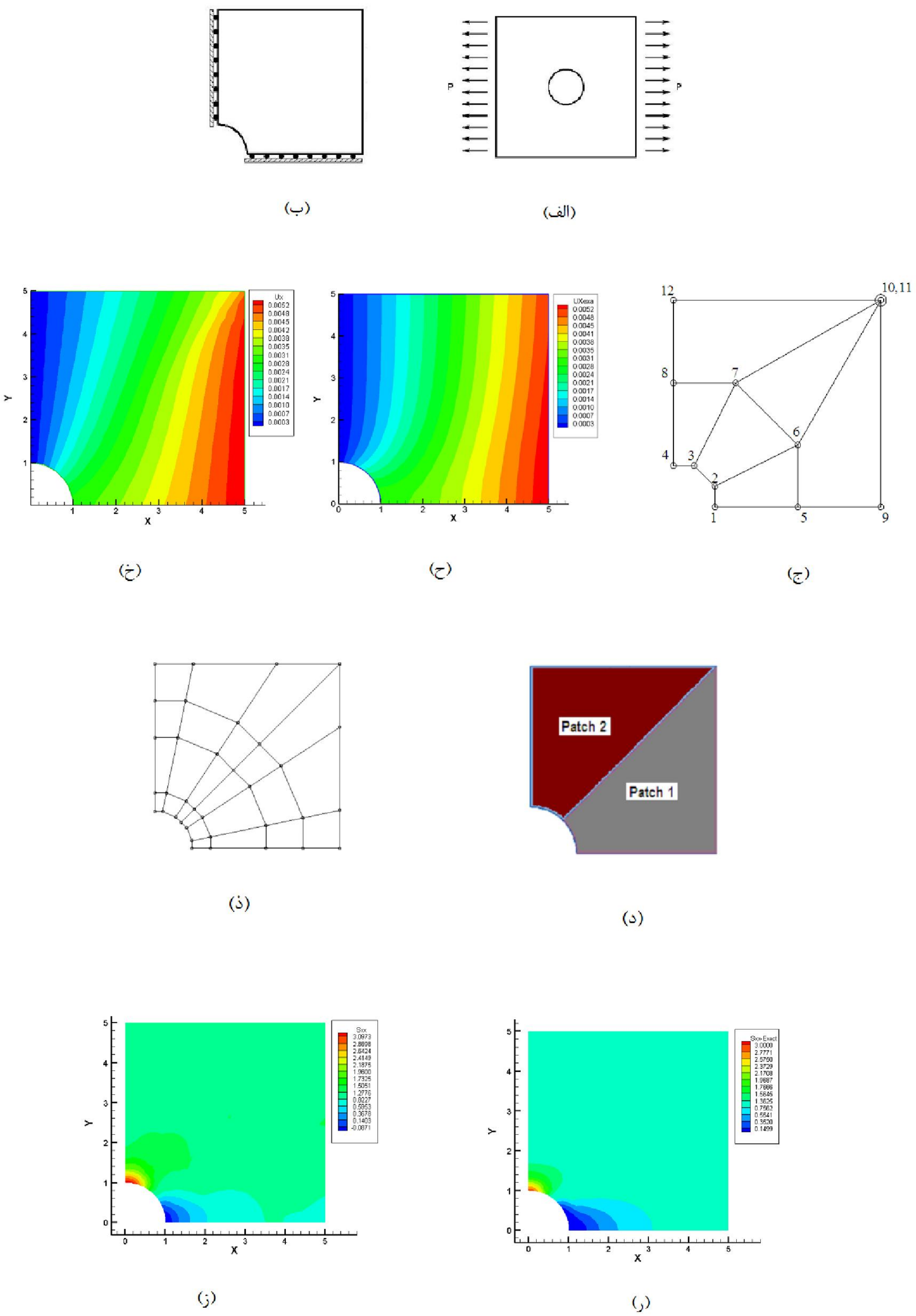
Displacement in A	
Analytic	102.60
IGA	102.45

(ح)



(ر) (ز)

شکل ۳-۳ تیر طره‌ای الف) هندسه، شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری، ب) شبکه نقاط کنترلی، ج) درجه و بردارهای گرهی، ح) نتایج ایزوژئومتریک و تحلیلی، د) کانتور تغییر مکان قائم، ز) کانتور تنش نرمال در جهت x



شکل ۳-۴ صفحه نامحدود با حفره میانی: الف) شکل و بارگذاری، ب)یک چهارم مدلسازی شده، ج) نقاط کنترلی برای حالت یک وصله، ح) تغییرمکان دقیق جهت x، خ) تغییرمکان ایزوژئومتریک جهت x ، د) استفاده از دو وصله، ذ) نقاط کنترلی در حالت دو وصله، ر) تنش تحلیلی برای دو وصله، ز)تنش ایزوژئومتریک برای دو وصله

فصل چهارم

تحلیل پوسته‌ها

۴-۱- مقدمه

بخش عمده‌ای از رساله حاضر به تحلیل و بهینه‌سازی سازه‌های پوسته‌ای می‌پردازد. در این فصل به مبحث مربوط به تحلیل پوسته‌ها و به طور خاص استفاده از روش ایزوژئومتریک در تحلیل آنها پرداخته خواهد شد. چنانچه پیشتر بیان شد، دو تئوری مهم و پر کاربرد در تحلیل ورق‌های خمشی و پوسته‌ها مطرح هستند: تئوری کیرشهف لاو برای پوسته‌های نازک و تئوری میندلین رایزنر برای پوسته‌های ضخیم. به طور خلاصه می‌توان گفت که تئوری میندلین رایزنر اثر تغییر شکل‌های برشی را در پوسته‌ها در نظر می‌گیرد. این اثر برای پوسته‌های نازک ناچیز است. به همین خاطر برای ورق‌های نازک استفاده از تئوری کیرشهف لاو مناسب است. با این حال در توسعه تحلیل صفحات خمشی و پوسته‌ها با استفاده از روش اجزای محدود، تئوری میندلین رایزنر، چه برای پوسته‌های نازک و چه پوسته‌های ضخیم بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. این موضوع به این خاطر است که در این تئوری چرخش و تغییر مکان به عنوان دو متغیر مستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند و استفاده از المان‌های با پیوستگی C^0 برای آنها کافی می‌باشد. در حالی که تئوری کیرشهف نیازمند المان‌های با پیوستگی C^1 است.

در این رساله مدلسازی و رابطه‌سازی تحلیل پوسته، بر مبنای تئوری میندلین-رایزنر انجام شده است. در بخش‌های آتی این فصل ابتدا مکانیک پوسته‌ها با در نظر گیری تئوری میندلین رایزنر تشریح شده و میدان تغییرمکان، کرنش، تنش و معادلات حاکم بیان می‌شوند. سپس رابطه‌سازی پوسته دارای

انحنا با استفاده از تئوری میندلین رایزنر برای تحلیل ایزوژئومتریک انجام خواهد شد. در پایان این فصل مثال‌هایی از مسائل مختلف پوسته حل شده و نتایج بررسی می‌شوند.

۴-۲- مکانیک پوسته‌ها و تئوری میندلین رایزنر

در این بخش مبانی تئوری میندلین رایزنر و روابط حاکم بر پوسته با در نظر گرفتن این مبانی بیان می‌شود. توجه شود که در اینجا به منظور سادگی از اثر انحنا در پوسته صرف نظر می‌شود. به عبارت دیگر مطالب این بخش برای یک پوسته مسطح بیان می‌شوند. در بخش بعدی اثر انحنا لحاظ می‌شود، به این صورت که برای هر نقطه پوسته یک دستگاه مختصات محلی تعریف می‌شود که فرضیات مکانیکی مبتنی بر تئوری میندلین رایزنر در این دستگاه معنی پیدا می‌کند. در نهایت با داشتن زوایای محورهای دستگاه مذکور با محورهای دستگاه کلی و با اعمال قواعد مربوط به چرخش محورهای مختصات، نتایج به دستگاه مختصات کلی انتقال می‌یابد. به بیان دیگر در این بخش فرض بر این است که دستگاه‌های مختصات محلی و کلی بر هم منطبق هستند.

مهم ترین فرضیات تئوری میندلین رایزنر به صورت زیر بیان می‌شوند:

۱- تغییر مکان‌ها در مقایسه با ضخامت پوسته ناچیز هستند.

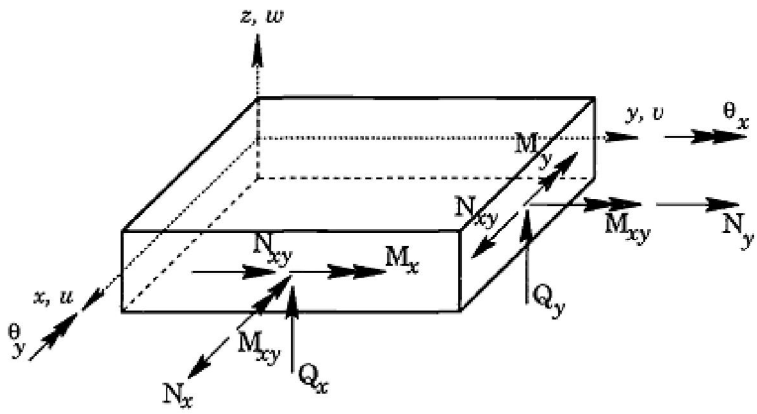
۲- تنش‌های عمود بر صفحه میانی ناچیز هستند.

۳- صفحه عمود بر صفحه میانی، بعد از خمش نیز صفحه باقی می‌ماند اما لزوما بر صفحه میانی عمود نیست.

در واقع فرض سوم، تفاوت اصلی این تئوری با تئوری کلاسیک کیرشهف لاو است. این فرض این امکان را فراهم می‌سازد که چرخش‌ها به صورت مستقل از تغییرمکان‌ها در نظر گرفته شوند. بنابراین میدان تغییرمکان برای پوسته مسطح را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u^0(x,y) + z\,\theta_x(x,y) \\
v(x,y,z) &= v^0(x,y) + z\,\theta_y(x,y) \\
w(x,y,z) &= w^0(x,y)
\end{aligned}
\tag{۱-۴}
$$

در روابط (۴-۱) x,y نشان دهنده محورهای مختصات داخل صفحه میانی پوسته مسطح و z بیانگر محور عمود بر سطح میانی پوسته است. پارامترهای v,u و w بیانگر مولفه‌های تغییرمکان به ترتیب در جهت های y,x و z هستند. در حالی که v^0,u^0 و w^0 تغییرمکان‌های متناظر مربوط به صفحه میانی هستند. متغیرهای θ_x و θ_y به ترتیب نشان دهنده مولفه‌های چرخش ناشی از خمش در صفحات xz و yz هستند. شکل (۴-۱) این چرخش‌ها را به همراه نیروهای داخلی موثر بر نمودار جسم آزاد یک المان نوعی پوسته مسطح میندلین رایزنر تحت بارگذاری کلی نشان می‌دهد.



شکل۴-۱: نمودار جسم آزاد پوسته

از صفر قرار دادن تنش قائم بر سطح میانی پوسته ($\sigma_z = 0$) در معادلات تنش کرنش حالت سه بعدی برای مواد ایزوتروپیک می‌توان روابط تنش کرنش حاکم بر پوسته را در یک نقطه نوعی با مختصات (x,y,z) به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\upsilon^2} & \frac{\upsilon E}{1-\upsilon^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\upsilon E}{1-\upsilon^2} & \frac{E}{1-\upsilon^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\upsilon)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{kE}{2(1+\upsilon)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{kE}{2(1+\upsilon)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \tag{۴-۲}$$

ضریب k یک مقدار ثابت است که به خاطر اثر تغییر شکل برشی لحاظ می‌شود و مقدار آن در منابع مختلف بین $k = 2/3$ تا $k = 5/6$ در نظر گرفته می‌شود. می‌توان رابطه (۴-۲) را برای رفتار های درون صفحه و عرضی تفکیک نمود:

(۴-۳)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\upsilon)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

و یا

(۴-۴)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

برای تنش و کرنش‌های صفحه‌ای و نیز

(۴-۵)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{kE}{2(1+\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

و یا

(۴-۶)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{s}} = \mathbf{C}_{\mathbf{s}}\boldsymbol{\gamma}$$

برای تنش کرنش‌های عرضی. با استفاده از رابطه (۴-۱) می‌توان کرنش‌ها را به صورت زیر نوشت:

(۴-۷)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z\,\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z\,\chi_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v^0}{\partial y} + z\,\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z\,\chi_y$$

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) = \varepsilon_{xy}^0 + z\,\chi_{xy}$$

می‌توان روابط (۴-۷) را به شکل برداری به صورت زیر باز نویسی نمود:

(۴-۸)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + z\boldsymbol{\chi}$$

که $\boldsymbol{\varepsilon_0} = \left[\frac{\partial u^0}{\partial x}, \frac{\partial v^0}{\partial y}, (\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}) \right]^T$ کرنش‌های صفحه میانی ناشی از نیروهای غشایی و $\boldsymbol{\chi} = \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, (\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) \right]^T$ کرنش‌های خمشی ناشی از تغییر شکل خمشی هستند. با استفاده از اصل جمع آثار قوا در رابطه (۴-۶) می‌توان اثرات غشایی و خمشی را از هم تفکیک نمود. در این صورت برای بخش غشایی رابطه

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{۴-۹}$$

و برای بخش خمشی رابطه

$$\boldsymbol{\sigma} = z\mathbf{C}\boldsymbol{\chi} \tag{۴-۱۰}$$

را می‌توان نوشت.

به صورت مشابه کرنش‌های عرضی برشی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w^0}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \end{aligned} \tag{۴-۱۱}$$

لنگرهای خمشی به همراه نیروهای غشایی و برشی در شکل (۴-۱) نشان داده شده‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{M} = \left(M_x, M_y, M_{xy}\right)^T = \int_{-t/2}^{t/2} z \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\right)^T dz \tag{۴-۱۲}$$

$$\mathbf{N} = \left(N_x, N_y, N_{xy}\right)^T = \int_{-t/2}^{t/2} \left(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_{xy}^0\right)^T dz \tag{۴-۱۳}$$

$$\mathbf{Q} = \left(Q_x, Q_y\right)^T = k \int_{-t/2}^{t/2} \left(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\right)^T dz \tag{۴-۱۴}$$

با جایگذاری تنش‌های ناشی از خمش از رابطه (۴-۱۰) در رابطه (۴-۱۲) می‌توان لنگرهای خمشی را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\mathbf{M} = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \mathbf{C}\boldsymbol{\chi} dz \tag{۴-۱۵}$$

و یا

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۱۶-۴}$$

و یا

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_f \ \boldsymbol{\chi} \tag{۱۷-۴}$$

که $\mathbf{D}_f$ ماتریس سختی خمشی است که به شکل زیر است:

$$\mathbf{D}_f = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \, \mathbf{C} \, dz \tag{۱۸-۴}$$

به طور مشابه نیروهای غشایی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{۱۹-۴}$$

که $\mathbf{D}_m$ماتریس سختی غشایی است. به علاوه اگر به جای تنش‌های غشایی از رابطه (۴-۱۰) در (۴-۱۳) قرار دهیم، با مقایسه با رابطه (۴-۱۹) نتیجه می‌شود که:

$$\mathbf{D}_m = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{C} \, dz \tag{۲۰-۴}$$

با عملیات مشابه برای نیروهای برشی عرضی خواهیم داشت:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma} \tag{۲۱-۴}$$

که $\mathbf{D}_s$ ماتریس سختی برشی است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D}_s = k \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{C}_s \ dz \tag{۲۲-۴}$$

توجه شود که $\boldsymbol{\gamma} = \left[\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz} \right]^T$.

معادلات مربوط به یک پوسته‌ایزوتروپیک با ضخامت t ، مدول ارتجاعی E و ضریب پواسون ν به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{D}_f = \frac{Et^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{۲۳-۴}$$

$$\mathbf{D}_m = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{۲۴-۴}$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{kEt}{2\left(1+\nu\right)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲۵-۴}$$

در نهایت به شکل خلاصه می‌توان روابط مربوط به پوسته مسطح را به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\chi} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \tag{۲۶-۴}$$

در این بخش معادلات حاکم بر یک پوسته مسطح با در نظر گیری تئوری میندلین رایزنر مورد بررسی قرار گرفت. در بخش بعدی با استفاده از این ایده روابط تحلیل با استفاده از توابع پایه نربز در حالت کلی و برای پوسته‌های دارای انحنا گسترش داده خواهد شد.

۴-۳- تحلیل ایزوژئومتریک پوسته‌های دارای انحنا

در این بخش مدلسازی هندسی و تحلیل پوسته دارای انحنا با استفاده از توابع پایه نربز تشریح می‌شود. ایده اصلی این کار از تئوری المان‌های خمیده مورد استفاده در روش اجزای محدود حاصل شده است (Zienkiewicz et al., 2005). اصول تحلیل بر مبنای روش ایزوژئومتریک که در فصل سوم بیان شد، استوار است. با توجه به استفاده از تئوری میندلین رایزنر در هر نقطه پنج درجه آزادی وجود دارد که شامل سه درجه تغییرمکانی و دو درجه چرخشی است. فرمول‌بندی طوری انجام می‌شود که در هر المان گرهی، تقریب در دو جهت مماس بر صفحه میانی با استفاده از توابع پایه نربز و در جهت عمود بر صفحه میانی به صورت خطی انجام می‌شود. در تمام مباحث این بخش دو دستگاه مختصات

کلی و محلی وجود دارد که دستگاه محلی برای هر نقطه موجود در پوسته به صورت مجزا تعریف می‌شود.

۴-۳-۱- تعریف هندسه

تعریف سطح نربز در فصل دوم با رابطه (۲-۱۶) انجام شد. جهت سادگی این رابطه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} R_i\left(r,s\right) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \tag{۴-۲۷}$$

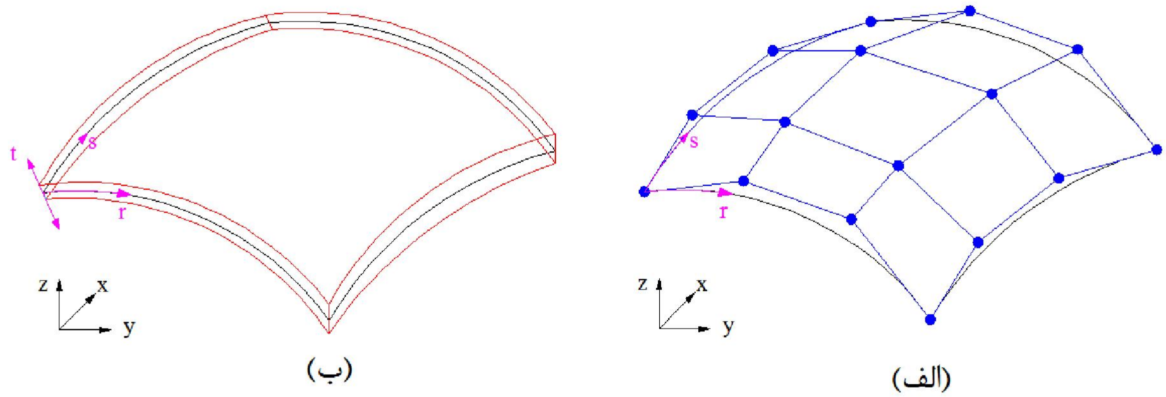
در رابطه (۴-۲۷) n+1 تعداد کل نقاط کنترلی و x_i, y_i, z_i مولفه‌های مختصات هر یک از این نقاط هستند. با استفاده از این رابطه می‌توان سطح میانی پوسته را تعریف نمود. برای تعریف ضخامت پوسته می‌توان یک محور مختصات $-1 \le t \le 1$ در جهت عمود بر پوسته در نظر گرفت و با اعمال یک تقریب خطی بعد ضخامت را تعریف نمود:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} R_i\left(r,s\right) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=0}^{n} R_i\left(r,s\right) t \frac{T_i}{2} \mathbf{v}_{3i} \tag{۴-۲۸}$$

در رابطه (۴-۲۸) $\mathbf{v}_{3i}$ بردار یکه‌ای است که در نقطه‌ای روی سطح میانی منتاظر با i امین نقطه کنترلی در جهت عمود بر پوسته تعریف می‌شود و T_i ضخامت پوسته در آن نقطه است. توجه شود که r,s همان پارامترهای گرهی معرفی شده برای تعریف توابع پایه بی-اسپلاین هستند که $0 \le r,s \le 1$ و t پارامتری است که برای تعریف بعد ضحامت اضافه شده است. این موضوع در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. شکل (۴-۲-الف) تعریف سطح میانی پوسته و شکل (۴-۲-ب) اضافه شدن بعد ضخامت را به آن نشان می‌دهد.

۴-۳-۲- تعریف تغییر مکان

چنانچه در بخش ۴-۲ بیان شد، در تئوری میندلین رایزنر چرخش به صورت پارامتری مستقل در نظر گرفته می‌شود. از این رو تعریف تغییرمکان برای پوسته‌های دارای انحنا با استفـاده از سه متغیر



شکل ۴-۲ تعریف هندسه پوسته الف) نقاط کنترلی و سطح میانی پوسته، ب) اضافه شدن ضخامت

جابجایی و دو متغیر چرخشی حول دو محور متعامد که بر بردار $\mathbf{v}_{3i}$ عمود هستند انجام می‌شود. اگر این دو بردار را با $\mathbf{v}_{1i}$ و $\mathbf{v}_{2i}$ و چرخش‌های متناظر با هر یک را به ترتیب با β_i و α_i بیان نماییم (شکل ۴-۳)، می‌توان تغییر مکان در پوسته دارای انحنا را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} R_i\left(r,s\right) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=0}^{n} R_i\left(r,s\right) t \frac{T_i}{2} \left[\mathbf{v}_{1i} \quad -\mathbf{v}_{2i} \right] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad (۴\text{-}۲۹)$$

از این رابطه فرم معمول اجزای محدود به صورت زیر برآورده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{Na}; \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad (۴\text{-}۳۰)$$

در این روابط u, v و w مولفه‌های تغییرمکان در جهت سه محور مختصات کلی x, y و z هستند.

با دقت در رابطه (۴-۲۹) و با توجه به این نکته که نقاط کنترلی روی سطح پوسته قرار نگرفته‌اند، نتیجه می‌شود که این رابطه نمی‌تواند درست باشد. به عبارت دیگر بردارهای متعامد را نمی‌توان در روی نقاط کنترلی تعریف نمود. مشاهده می‌شود که جمله اول سمت راست معادله مذکور تغییر مکان سطح میانی پوسته را تعریف می‌کند. در فرمول‌بندی معمول اجزای محدود، درجات آزادی تغییر مکانی به گره‌ها اختصاص می‌یابند در حالی که در ایزوژئومتریک این درجات آزادی به نقاط کنترلی اختصاص یافته‌اند. در نتیجه جمله اول این رابطه صحیح است. اما جمله دوم مربوط به درجات آزادی چرخشی است. این درجات آزادی نیز در اجزای محدود متداول، به گره‌ها اختصاص می‌یابند. اما در فرمول‌بندی حاضر که مبتنی بر توابع نربز و نقاط کنترلی است، نمی‌توان بردارهای متعامد را مستقیما روی نقاط کنترلی تعریف نمود و در نتیجه امکان اختصاص درجات آزادی چرخشی به نقاط کنترلی وجود ندارد.

جهت حل این مشکل یک الگوی نگاشت می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به این منظور هر نقطه کنترلی با یک نقطه در فضای فیزیکی و روی سطح میانی پوسته نگاشته می‌شود و درجات آزادی چرخشی روی این نقطه تعریف می‌شوند. یکی از ساده‌ترین نگاشت ها این است که هر نقطه با نقطه‌ای از سطح میانی که کمترین فاصله را با آن نقطه دارد نگاشته شود. اشکال این روش هزینه محاسباتی زیاد آن است. برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای باید یک روش تکراری مانند جستجوی نیوتن به کار گرفته شود. این هزینه با ریزتر شدن شبکه به سرعت افزایش می‌یابد. راه دیگر پیدا کردن نقطه‌ای روی سطح است که در آن نقطه تابع شکل مربوط به هر نقطه کنترلی بیشترین مقدار را دارد. این روش نیز مستلزم استفاده از روش نیوتن است و در نتیجه حجم محاسباتی بالایی را می طلبد. در این رساله از روش‌های مذکور به خاطر هزینه بالای محاسباتی صرف نظر شده است. در عوض از یک الگوی ساده‌تر که در برخی منابع اشاره شده (Uhm et al., 2009; Bazilevs et al., 2010) استفاده شده است. نگاشت مورد استفاده به این صورت است که برای هرنقطه کنترلی یک نقطه در فضای گرهی متناظر می‌شود. البته توجه شود که این نقاط در یک تناظر یک به یک قرار ندارند. چنانچه

پیشتر ذکر شد، در حالتی که از بردارهای گرهی باز استفاده شود رابطه n=m-p-1 بین تعداد نقاط کنترلی (n+1)، تعداد نقاط گرهی (m+1) و درجه تابع پایه (p) برقرار است. با این حال به صورت قرار دادی می‌توان نقطه متناظر هر نقطه کنترلی را روی فضای گرهی تعریف نمود. این نقطه در ادبیات مربوطه مهار[1] نامیده می‌شود. برای هر تابع پایه $N_{i,p}$، نقطه مهار که با a_i نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_i = \begin{cases} r_{i+(p+1)/2} & if \;\; p \;\; is \;\; odd \\ \frac{1}{2}\left(r_{i+(p/2)} + r_{i+(p/2)+1}\right) & if \;\; p \;\; is \;\; even \end{cases} \qquad (۳۱\text{-}۴)$$

چنانچه ملاحظه می‌شود، این تعریف طوری انجام شده که برای توابع از درجه فرد نقاط مهار همان گره‌ها و برای درجات زوج این نقاط وسط دهانه‌های گرهی هستند.

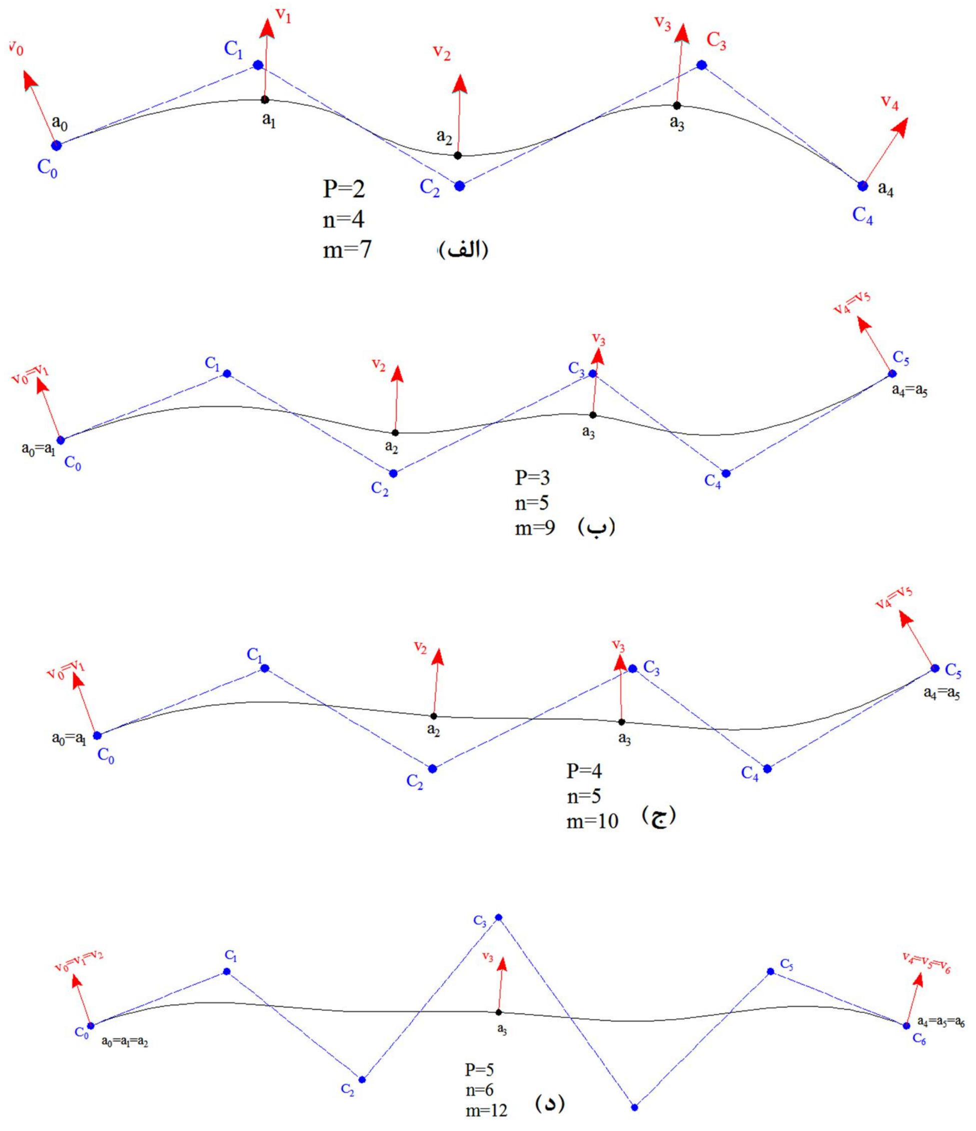
با توجه به استفاده از بردار گرهی باز در فرمول‌بندی ایزوژئومتریک ارائه شده در این رساله، نقاط مهار به دست آمده از رابطه (۴-۳۱) در برخی موارد در مرزها (یعنی r=0 وr=1)، تکراری خواهند بود. با دقت در رابطه (۴-۳۱) می‌توان دریافت که برای توابع نربز با درجه فرد تعداد $(p-1)/2$ و برای درجات زوج $(p-2)/2$ از نقاط مهار تکراری هستند. این موضوع در شکل (۴-۴) برای درجات توابع ۲، ۳، ۴ و ۵ که در مثال‌های این رساله استفاده می‌شوند، نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که برای توابع نربز از درجه ۲ هیچ نقطه مهار تکراری به وجود نمی‌آید. اما برای درجات ۳ و ۴ یک نقطه تکراری و برای درجه ۵ دو نقطه تکراری در هریک از مرزها ایجاد می‌شود.

تعبیر فیزیکی این مسئله این است که تعدادی از نقاط کنترلی که در مرزهای یک وصله قرار دارند دارای بردارهای یکه یکسانی خواهند بود. این موضوع باعث ایجاد عدم دقت در مرزها می‌شود. برای رفع این مشکل می‌توان از بهبود محل این نقاط در مرزها استفاده نمود. در حالتی که یک نقطه تکراری روی هر یک از مرزها اتفاق بیافتد (درجات ۳ و ۴) رابطه (۴-۳۲) می‌تواند جهت بهبود محل نقطه مهار مورد استفاده قرار گیرد.

[1] anchor

$$r_1^{'} = r_0 + \alpha\left(r_1 - r_0\right) \quad ; \quad r_{n-1}^{'} = r_n\left(r_n - r_{n-1}\right) \qquad 0 \le \alpha \le 1 \tag{۳۲-۴}$$

در این رابطه $r_1^{'}$ و $r_{n-1}^{'}$ مقادیر اصلاح شده نقطه مهار تکراری در فضای گرهی هستند. رابطه سمت چپ برای اصلاح نقطه مهار ابتدای مرز و رابطه سمت راست برای انتهای مرز است. ملاحظه می‌شود موقعیت جدید نقطه مهار با $\alpha = 0$ روی نقطه مرز و با $\alpha = 1$ روی نقطه مهار ماقبل مرز قرار می‌گیرد.

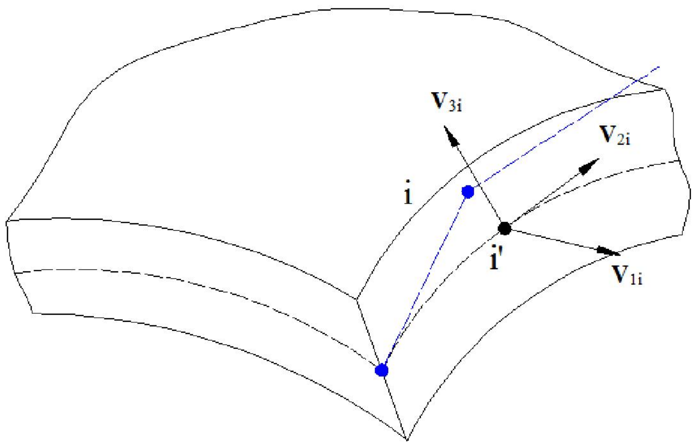


شکل ۴-۳ موقعیت نقاط کنترلی c_i، نقاط مهار a_i، و بردارهای عمود بر منحنی $\mathbf{v}_i$، برای درجات آزادی الف) $p = 2$، ب) $p = 3$، ج) $p = 4$، د) $p = 5$ ، m تعداد نقاط کنترلی و n تعداد گره می‌باشند.

بهترین مقدار α را می‌توان از مقایسه با مقدار واقعی بردار عمود بر سطح تعیین نمود. همچنین برای حالتی که دو نقطه تکراری در هر یک از مرزها به وجود می‌آید (درجه ۵)، علاوه بر رابطه (۴-۳۲) رابطه (۴-۳۳) نیز باید جهت بهبود نقاط تکراری بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

$$r_2^{'} = r_1 + \beta\left(r_2 - r_1^{'}\right) \quad ; \quad r_{n-2}^{'} = r_{n-1}^{'} - \beta\left(r_{n-1}^{'} - r_{n-2}\right) \qquad 0 \le \beta \le 1 \tag{۴-۳۳}$$

که مقدار β نیز همانند α می‌تواند به دست آید. توجه شود که برای پوسته‌ها این نقاط با توجه به اطلاعات بردارهای گرهی در دو جهت r و s به دست می‌آیند. با توجه به مطالب مذکور می‌توان به ازای هر نقطه کنترلی، نقطه‌ای در روی سطح میانی تعریف نمود که بردارهای نرمال در آن تعریف شوند. این موضوع در شکل (۴-۴) نشان داده شده است.



شکل ۴-۴ بردارهای یکه و متعامد در نقطه مهار (i') متناظر با نقطه کنترلی (i)

۴-۳-۳- بردارهای یکه متعامد

در بخش قبل ملاحظه شد که برای تعریف هندسه و تغییر مکان، لازم است بردارهایی متعامد و یکه در نقاط متناظر با هر یک از نقاط کنترلی تعیین شوند. از میان آنها بردار $\mathbf{v}_{3i}$ که عمود بر سطح پوسته است، منحصر به فرد بوده و راستای دو بردار دیگر اختیاری است. بردار $\mathbf{V}_{3i}$در هر نقطه از سطح میانی پوسته با استفاده از دو بردار متعامد $\mathbf{X}_{,r}$و $\mathbf{X}_{,s}$به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{V}_{3i} = \mathbf{X}_{,r} \times \mathbf{X}_{,s} = \begin{bmatrix} x_{,r} \\ y_{,r} \\ z_{,r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{,s} \\ y_{,s} \\ z_{,s} \end{bmatrix} \qquad (۳۴-۴)$$

توجه شود که به خاطر وجود ضخامت پوسته، در حالت کلی این بردار به صورت تقریبی عمود بر پوسته است و هرچه ضخامت پوسته کمتر باشد، دقت آن افزایش خواهد یافت.

راه‌های مختلفی برای به دست آوردن دو بردار دیگر وجود دارد. در این رساله از روش پیشنهادی زینکوویچ استفاده شده است (Zienkiewicz et al., 2005). اما در حالت کلی می‌توان از سایر روش‌ها نیز استفاده نمود (Benson et al., 2010; Kiendl et al., 2009). در روش مذکور راستای دو بردار متعامد با توجه به مولفه‌های مختصات بردار $\mathbf{V}_{3i}$ تعیین می‌شود. یک نقطه در فضای دکارتی با بردار موقعیت به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathbf{X} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k} \qquad (۳۵-۴)$$

که $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ سه بردار متعامد یکه در جهت محورهای مختصات کلی هستند. برای یافتن اولین بردار نرمال باید کوچکترین مولفه بردار $\mathbf{V}_{3i}$ پیدا شود و یک ضرب برداری بین بردار یکه مربوط به آن مولفه و بردار $\mathbf{V}_{3i}$ انجام گیرد. به عنوان مثال اگر مولفه x بردار $\mathbf{V}_{3i}$ ، کوچکترین مولفه آن باشد، آنگاه بردار $\mathbf{V}_{1i}$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{V}_{1i} = \mathbf{i} \times \mathbf{V}_{3i} \qquad (۳۶-۴)$$

بردار متعامد دوم در نهایت می‌تواند به صورت زیر حاصل شود:

$$\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}_{3i} \times \mathbf{V}_{1i} \qquad (۳۷-۴)$$

در نهایت با تقسیم این بردارها بر مقدار بزرگی هر یک می‌توان آنها را نرمال نمود. به عنوان مثال برای اولین بردار می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v}_{1i} = \frac{\mathbf{V}_{1i}}{\left|\mathbf{V}_{1i}\right|} \qquad (۳۸-۴)$$

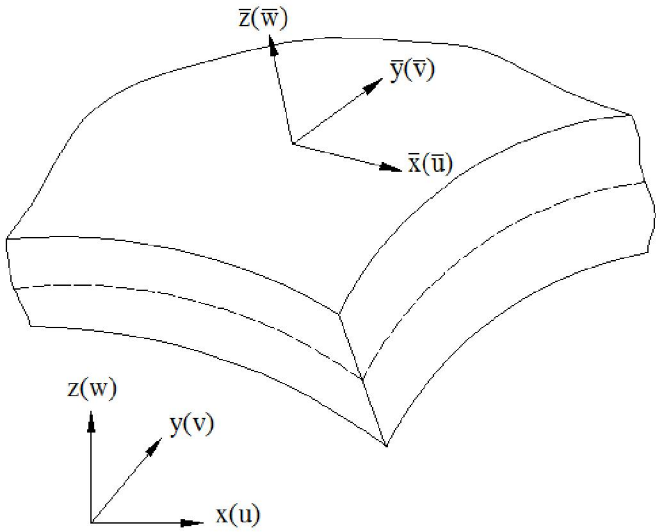
که

$$\left|\mathbf{V}_{1i}\right| = \sqrt{\mathbf{V}_{1i}{}^{T}\mathbf{V}_{1i}} \qquad (۳۹-۴)$$

بردارهای سه گانه $\mathbf{v}_{1i}, \mathbf{v}_{2i}, \mathbf{v}_{3i}$ بردارهای متعامد یکه‌ای هستند که در واقع راستای محورهای مختصات محلی را در هر نقطه از سطح میانی پوسته معین می‌کنند. با معلوم بودن هر یک از این بردارها در نقاط مهار، کار تقریب هندسه و تغییر مکان با روابط (۴-۲۸) و (۴-۲۹) می‌تواند انجام شود.

۴-۳-۴- رابطه تنش-کرنش در دستگاه مختصات محلی

برای تکمیل فرمول‌بندی ایزوژئومتریک پوسته‌های دارای انحنا لازم است مولفه‌های تنش و کرنش مربوطه و نحوه ارتباط بین آنها مشخص شود. برای بیان این مولفه‌ها در هر نقطه دلخواه از پوسته، باید یک دستگاه مختصات محلی در آن نقطه تعریف نمود. دستگاهی که یک محور آن عمود بر سطح میانی و دو محور دیگر در دو راستای متعامد دلخواه مماس بر صفحه میانی قرار می‌گیرند. در این صورت می‌توان در هر نقطه پوسته، روابط مربوط به پوسته مسطح را که در بخش (۴-۲) ذکر شد، به صورت محلی بیان نمود. محور عمود بر سطح با $\bar{z}$ و دو محور دیگر با $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نشان داده می‌شوند. شکل (۴-۵) موقعیت دستگاه مختصات محلی و کلی را نشان می‌دهد. برای تعیین این محورها می‌توان از همان بردارهای متعامد که در بخش قبلی معرفی شدند استفاده نمود. به عبارت دیگر بردارهای متعامد سه گانه‌ای که در نقاط مهار تعریف می‌شوند را می‌توان برای هر نقطه دلخواه پوسته به دست آورد. در این صورت این بردارها بدون اندیس i نمایش داده می‌شوند و می‌توان از راستاهای آنها برای تعیین محورهای محلی استفاده نمود. اگر از تقریبی که در عمود بودن بردار $\mathbf{v}_3$ بر پوسته وجود دارد صرف نظر شود، می‌توان راستای $\bar{z}$ را در راستای این بردار در نظر گرفت. دو بردار دیگر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می‌توانند به ترتیب راستاهای محلی $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را تعیین نمایند.



شکل ۴-۵ دستگاه‌های مختصات محلی و کلی

اگر ماتریس کرنش در مختصات محلی را با $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ نشان دهیم، مولفه‌های کرنش در این دستگاه بر حسب تغییر مکان‌های محلی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\bar{x}}\\ \varepsilon_{\bar{y}}\\ \varepsilon_{\overline{xy}}\\ \varepsilon_{\overline{xz}}\\ \varepsilon_{\overline{yz}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{u}_{,\bar{x}}\\ \bar{v}_{,\bar{y}}\\ \bar{u}_{,\bar{y}}+\bar{v}_{,\bar{x}}\\ \bar{u}_{,\bar{z}}+\bar{w}_{,\bar{x}}\\ \bar{v}_{,\bar{z}}+\bar{w}_{,\bar{y}}\end{Bmatrix} \tag{۴-۴۰}$$

در نهایت در صورتی که ماتریس تنش را در مختصات محلی با $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ و ماتریس خواص مصالح در این دستگاه را با $\overline{\mathbf{D}}$ نمایش دهیم، می‌توان رابطه تنش کرنش پوسته دارای انحنا را برای مختصات محلی مطابق رابطه (۴-۲) بازنویسی نمود:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\overline{\mathbf{D}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{۴-۴۱}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\bar{x}}\\ \sigma_{\bar{y}}\\ \sigma_{\overline{xy}}\\ \sigma_{\overline{xz}}\\ \sigma_{\overline{yz}}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0 & 0 & 0\\ \upsilon & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-\upsilon)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k(1-\upsilon)/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k(1-\upsilon)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\bar{x}}\\ \varepsilon_{\bar{y}}\\ \varepsilon_{\overline{xy}}\\ \varepsilon_{\overline{xz}}\\ \varepsilon_{\overline{yz}}\end{Bmatrix}$$

۴-۳-۵- تبدیل مختصات و محاسبه ماتریس سختی

ماتریس سختی و سایر ماتریس‌های یک وصله در روش ایزوژئومتریک شامل محاسبه انتگرال به شکل کلی زیر است:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} dxdydz \qquad (۴۲-۴)$$

که $\mathbf{H}$ تابعی کلی است که به عنوان مثال برای ماتریس سختی به شکل زیر است:

$$\mathbf{H} = \overline{\mathbf{B}}^T \, \overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{B}} \qquad (۴۳-۴)$$

که مطابق ادبیات معمول روش اجزای محدود:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{B}}\,\mathbf{a} \qquad (۴۴-۴)$$

توجه شود که $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ از رابطه (۴-۴۰) بر حسب مشتقات تغییر مکان‌های محلی نسبت به محورهای محلی $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ تعریف می‌شود. بنابراین در این مرحله دو دسته تبدیل باید انجام گیرد تا بتوان انتگرال مورد نظر را محاسبه نمود.

در مرحله اول باید مشتقات نسبت به محورهای کلی x, y, z محاسبه شوند. با توجه به اینکه تغییرمکان‌های کلی u, v, w توسط رابطه (۴-۲۹) برحسب متغیرهای فضای نربز بیان می‌شوند، می‌توان مشتقات این تغییرمکان‌ها را نسبت به متغیرهای کلی به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J_1}^{-1} \begin{bmatrix} u_{,r} & v_{,r} & w_{,r} \\ u_{,s} & v_{,s} & w_{,s} \\ u_{,t} & v_{,t} & w_{,t} \end{bmatrix} \qquad (۴۵-۴)$$

که ماتریس ژاکوبین $\mathbf{J_1}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J_1} = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix} \qquad (۴۶-۴)$$

مقادیر این ماتریس و ماتریس سمت راست رابطه (۴-۴۵) را می‌توان به ترتیب از روابط (۴-۲۸) و (۴-۲۹) به دست آورد.

تبدیل دوم شامل تبدیل مشتقات تغییر مکان‌ها از مختصات کلی x, y, z به مختصات محلی $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ است. با این تبدیل می‌توان مقادیر کرنش‌های محلی و در نتیجه ماتریس $\overline{\mathbf{B}}$را به دست آورد. چنانچه در بخش ۴-۳-۴ ذکر شد با استفاده از بردارهای سه گانه متعامد $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ می‌توان راستای محورهای محلی را مشخص نمود. در نتیجه با استفاده از مقادیر این بردارهای نرمال، ماتریس تبدیل $\boldsymbol{\theta}$ که شامل کسینوس‌های هادی محورهای مختصات کلی و محلی است به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \tag{۴-۴۷}$$

حال می‌توان مشتقات تغییر مکان را از دستگاه کلی به دستگاه محلی تبدیل نمود:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{,\bar{x}} & \bar{v}_{,\bar{x}} & \bar{w}_{,\bar{x}} \\ \bar{u}_{,\bar{y}} & \bar{v}_{,\bar{y}} & \bar{w}_{,\bar{y}} \\ \bar{u}_{,\bar{z}} & \bar{v}_{,\bar{z}} & \bar{w}_{,\bar{z}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}^T \begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \tag{۴-۴۸}$$

با داشتن این مقادیر می‌توان مقادیر کرنش‌های محلی $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ و در نتیجه مقادیر ماتریس $\overline{\mathbf{B}}$ را به دست آورد.

محاسبه انتگرال با استفاده از روش گوس و مطابق با آنچه در فصل سوم بیان شد انجام می‌گیرد. با توجه به محاسبه انتگرال‌ها در فضای نرمال گوس باید تغییر متغیر به صورت زیر انجام گیرد:

$$dx\,dy\,dz = \det J_1 dr\,ds\,dt = \det J_1 \det J_2 d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{۴-۴۹}$$

ملاحظه می‌شود که در تبدیل اول انتگرال از فضای فیزیکی به فضای پارامتری (نربز) منتقل شد و سپس در تبدیل دوم به فضای نرمال انتگرال گیری گوس انتقال یافت.

ξ, η, ζ فضای انتگرال گیری گوس هستند که در بازه $[-1,1]$تعریف می‌شوند. همانند آنچه در فصل سه بیان شد ارتباط بین محدوده یک المان گرهی در فضای پارامتری با فضای نرمال با نگاشتی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$r=\frac{1}{2}\left[\left(r_{i+1}-r_i\right)\xi+\left(r_{i+1}+r_i\right)\right]$$
$$s=\frac{1}{2}\left[\left(s_{i+1}-s_i\right)\eta+\left(s_{i+1}+s_i\right)\right]$$
$$t=\zeta \tag{۵۰-۴}$$

از روابط (۴-۵۰) ملاحظه می‌شود که محورهای ξ,η در جهت مماس بر سطح پوسته و محور ζ در جهت عمود بر پوسته و در راستای محور مربوط به فضای پارامتری t انتخاب شده‌اند. ماتریس $\mathbf{J}_2$ نیز دومین ماتریس ژاکوبین است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J}_2=\begin{bmatrix} \partial r/\partial\xi & \partial s/\partial\xi & \partial t/\partial\xi \\ \partial r/\partial\eta & \partial s/\partial\eta & \partial t/\partial\eta \\ \partial r/\partial\zeta & \partial s/\partial\zeta & \partial t/\partial\zeta \end{bmatrix} \tag{۵۱-۴}$$

که مقادیر آن به سادگی با مشتق گیری از روابط (۴-۵۰) به دست می‌آیند. در نهایت ماتریس سختی یک وصله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{K}_{patch}=\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\overline{\mathbf{B}}^{T}\,\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{B}}\det\mathbf{J}_1\det\mathbf{J}_2 d\xi d\eta d\zeta \tag{۵۲-۴}$$

که در آن n تعداد المان‌های گرهی یک وصله است. محاسبه این انتگرال را می‌توان با استفاده از روش گوس به سادگی انجام داد. واضح است که سایر ماتریس‌های مورد نیاز برای محاسبه بارهای معادل نیز می‌تواند با همین روند به دست آید.

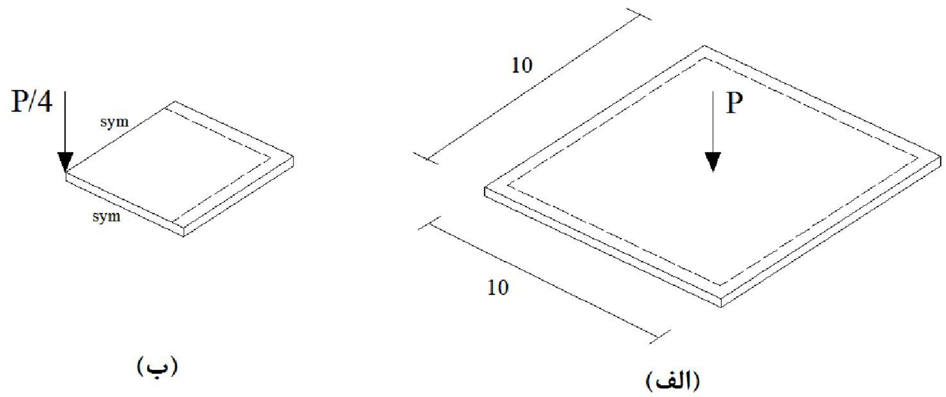
۴-۴- حل مثال‌های عددی

در این بخش مثال‌هایی از مسائل تحلیل پوسته‌ها حل شده و نتایج را مورد بررسی قرار خواهیم داد. این مثال‌ها شامل حل مسائل صفحه خمشی مسطح، مسائل بغرنج پوسته و پوسته با شکل آزاد است که در ادامه خواهند آمد.

۴-۴-۱- مسائل صفحه خمشی مسطح

در این بخش دو مسئله صفحه خمشی مستطیل شکل و دایره‌ای را بررسی می‌کنیم. این مسائل با روش تحلیل ایزوژئومتریک پوسته حل شده و با نتایج حاصل از حل تحلیلی مقایسه خواهند شد. توجه شود که در اینجا با توجه به مسطح بودن هندسه، بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ همواره در صفحه سازه و بردار $\mathbf{v}_3$ عمود بر این صفحه قرار می‌گیرند. در ادامه نتایج تحلیل این مسائل مشاهده می‌شوند.

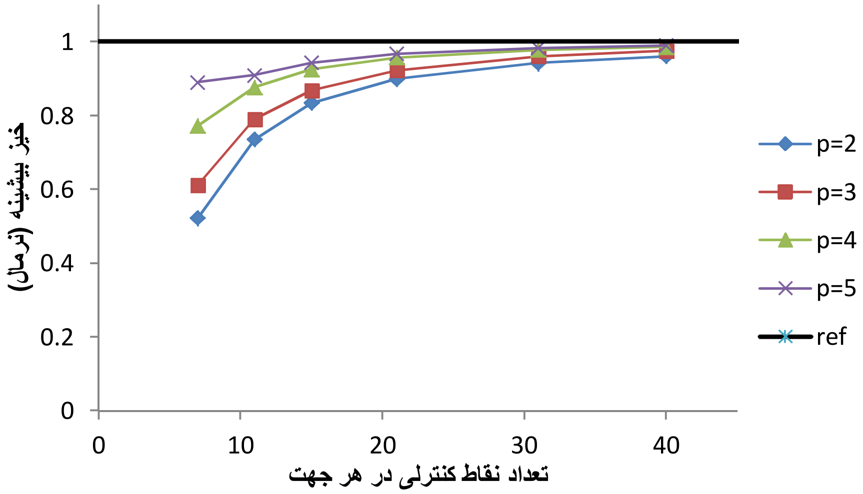
صفحه مستطیل شکل: در این مثال یک صفحه مستطیل شکل با تکیه‌گاه‌های ساده در مرزها تحت بار متمرکز در وسط مورد بررسی قرار گرفته است. ابعاد صفحه و بارگذاری آن در شکل (۴-۶ الف) نشان داده شده است. مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون صفحه به ترتیب $E = 6\times10^7$ و $\upsilon = 0.3$ در نظر گرفته شده‌اند. ضخامت صفحه $t = 0.05$ و مقدار بار برابر $p = 1$ لحاظ شده است.



شکل ۴-۶ الف) صفحه مستطیلی با تکیه‌گاه ساده و بار متمرکز. ب) یک چهارم سازه جهت مدلسازی و تحلیل.

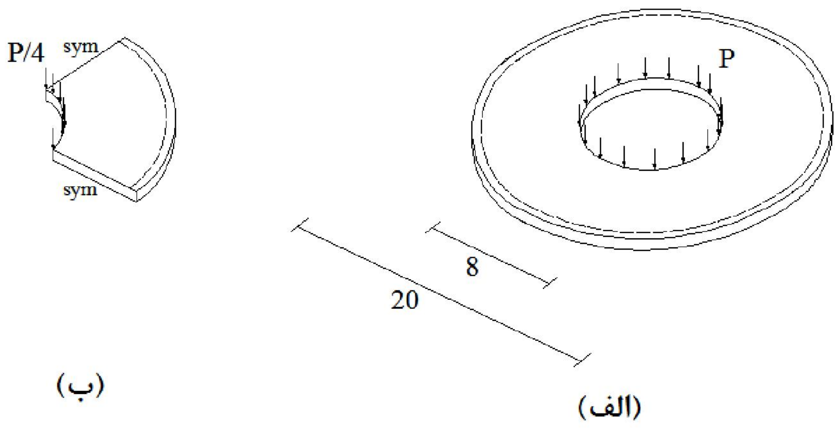
خیز بیشینه صفحه با استفاده از حل تحلیلی برابر ۰,۰۰۶۷۵۲ می‌باشد. برای حل ایزوژئومتریک این مثال با توجه به تقارن مسئله، یک چهارم صفحه مطابق شکل (۴-۶- ب) مدلسازی شده است. شبکه‌های نقاط کنترلی مختلف شامل ۷×۷، ۱۱×۱۱، ۱۵×۱۵، ۲۱×۲۱، ۳۱×۳۱ و۴۰×۴۰ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نتایج تحلیل در نمودار شکل (۴-۷) نشان داده شده است. چنانچه از نمودار مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد نقاط کنترلی پاسخ تحلیل به سمت مقدار تحلیلی همگرا می‌شود.

صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار: این صفحه با قطر خارجی ۲۰ و قطر داخلی ۸ تحت بار گسترده خطی در لبه داخلی و تکیه‌گاه مفصلی در لبه خارجی، مطابق شکل (۴-۸) قرار گرفته است. مقادیر مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضخامت همانند مثال قبلی است. مقدار کل بار برابر $p = 0.5$



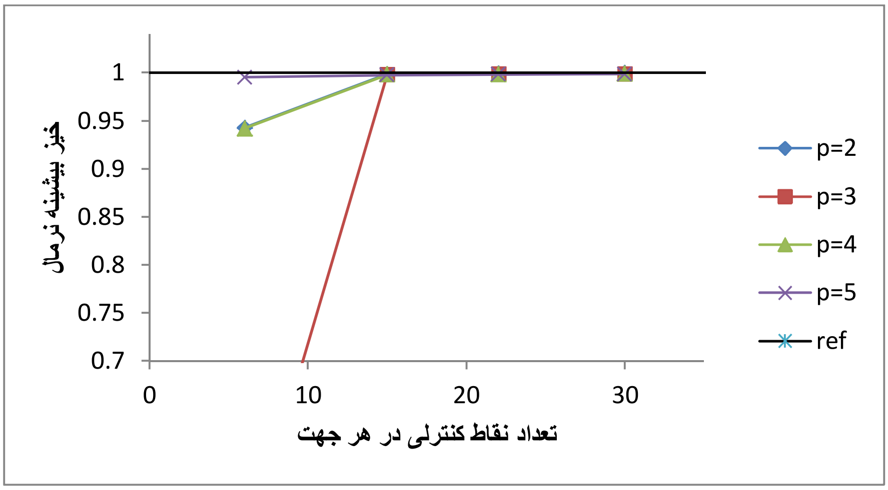
شکل ۴-۷ همگرایی خیز بیشینه صفحه مستطیل شکل

می‌باشد. با توجه به تقارن موجود در هندسه و بارگذاری می‌توان مسئله را متقارن محوری در نظر گرفت. اما از آنجا که در این رساله فرمول‌بندی خاص مسائل متقارن محوری مد نظر نبوده است در اینجا نیز از تقارن یک چهارم برای انجام تحلیل استفاده می‌شود (شکل ۴-۸ ب).

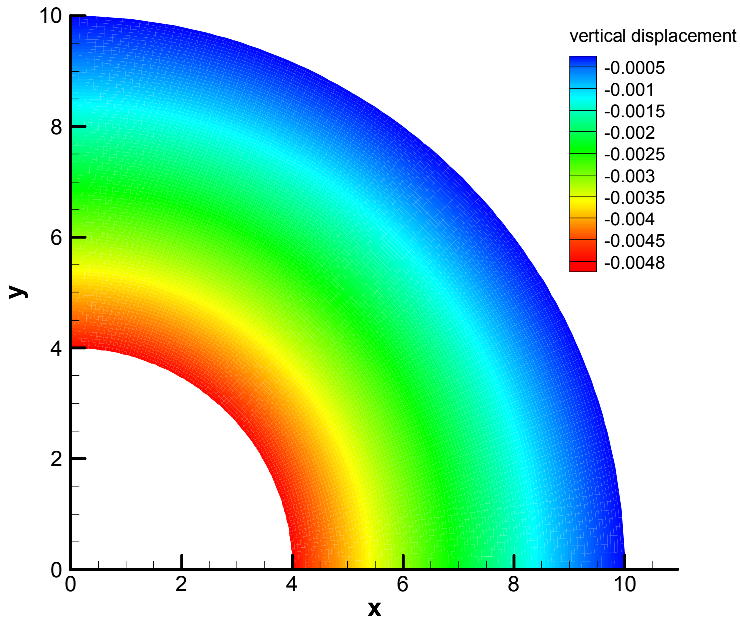


شکل۴-۸ الف) صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار با تکیه‌گاه ساده در لبه خارجی و بار گسترده یکنواخت در لبه داخلی
ب) یک چهارم سازه جهت مدلسازی و تحلیل

خیز بیشینه صفحه در لبه داخلی با استفاده از حل تحلیلی برابر ۰,۰۰۴۸۰۹ به دست آمده است. شکل‌های (۴-۹) و (۴-۱۰) به ترتیب نمودارهای همگرایی و کانتور تغییر شکل قائم حاصل از حل ایزوژئومتریک را برای این مسئله نشان می‌دهند. همگرایی پاسخ با بهبود شبکه نقاط کنترلی در شکل (۴-۹) مشهود است. همچنین از کانتور شکل (۴-۱۰) می‌توان تقارن محوری پاسخ را نیز ملاحظه نمود.



شکل ۴-۹ نمودار همگرایی خیز بیشینه صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار



شکل ۴-۱۰ کانتور تغییر شکل قائم صفحه دایره‌ای شکل سوراخ دار

۴-۴-۲- مسائل بغرنج پوسته[1]

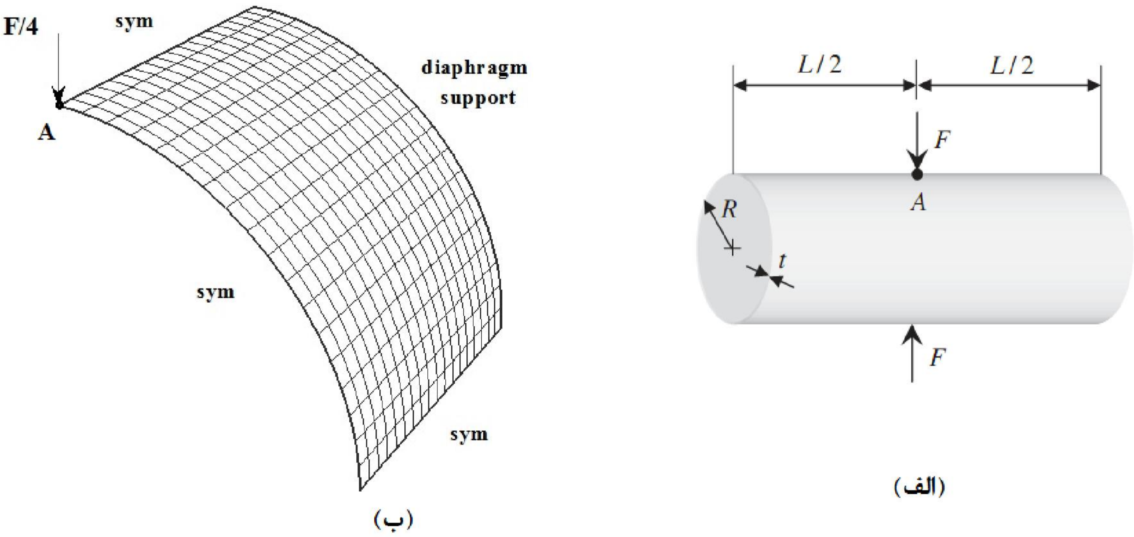
جهت نشان دادن کارایی روش تحلیل مطرح شده در این رساله برای تحلیل پوسته، مسائل موسوم به مسائل بغرنج پوسته مورد بررسی قرار می‌گیرند. این مسائل که توسط بلیشکو و همکاران (Belytschko et al., 1985) ارائه گردیدند، مبنای مناسبی برای سنجش درستی روش‌های تحلیل خطی ارتجاعی پوسته هستند. در سال‌های اخیر این مسائل توسط محققانی که در مورد تحلیل پوسته‌ها کار کرده‌اند، مانند هیوز و همکاران (Hughes et al., 2005)، بنسون و همکاران (Benson et al., 2010)، چو و همکاران (Cho et al., 2003)، دورنیش و همکاران (Dornisch et al., 2013)، حسینی و همکاران (Hosseini et al., 2013)، کیندل و همکاران (Kiendl et al., 2010)، گوین و همکاران (Nguyen et al., 2011) و اوهم و همکاران (Uhm et al., 2009)، حل شده‌اند.

مسائل بغرنج پوسته شامل سه مسئله استوانه تحت فشار با دیافراگم صلب، نیم کره تحت فشار و بام اسکوردلیس- لو[2] هستند که در ادامه ذکر شده‌اند. در هر یک از مثال‌ها، تحلیل ایزوژئومتریک با شبکه‌بندی‌های مختلف انجام شده و نتایج با حل تحلیلی مقایسه خواهند شد.

استوانه تحت فشار با دیافراگم صلب: این مسئله یکی از بحرانی ترین آزمون‌های روش‌های عددی چه برای حالت خمش و چه حالت غشایی می‌باشد. سازه مذکور چنانچه در شکل (۴- ۱۱- الف) مشاهده می‌شود تحت دو بار متمرکز هم راستا و خلاف جهت در راستای قطر خود قرار گرفته است. مرزهای استوانه تحت تکیه‌گاه دیافراگم صلب قرار دارد که به غیر از تغییرمکان در جهت محور استوانه و چرخش حول محور مماس بر مرز، سایر درجات آزادی آن مقید است. مشخصات مکانیکی مسئله حاضر به صورت مدول الاستیسیته برابر $E = 3.0\times10^{6}$ و ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$ می‌باشد. شعاع و طول استوانه به ترتیب $R = 300$ و $L = 600$ و ضخامت آن برابر $t = 3$ می‌باشد. به خاطر تقارن

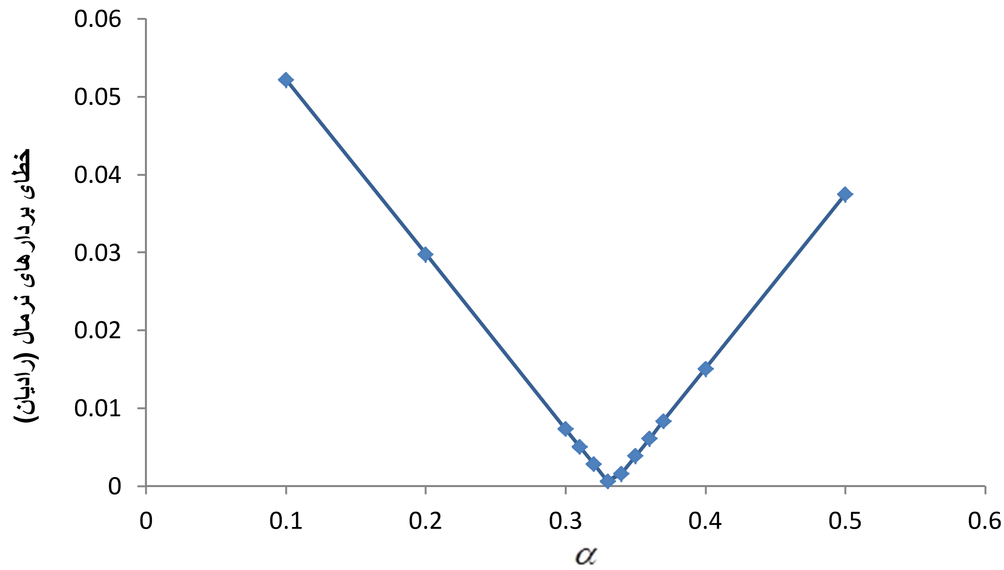
[1] shell obstacle course
[2] Scordelis-Lo roof

مضاعف موجود در مسئله، تنها یک هشتم استوانه مدلسازی می‌شود. شکل (۴-۱۱ ب) مدل تحلیلی این مسئله را همراه با شرایط مرزی و بارگذاری آن نشان می‌دهد.

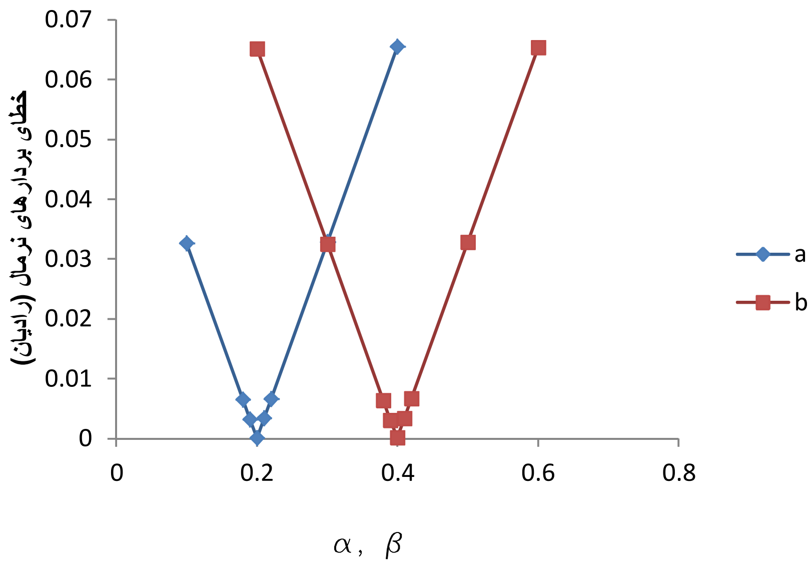


شکل ۴-۱۱ الف) سازه استوانه‌ای تحت فشار با دیافراگم صلب ب) مدل تحلیلی به همراه شرایط مرزی و بارگذاری

این مسئله با درجات تابع نربز ۲، ۳، ۴ و ۵ حل شده است. چنانچه در بخش (۴-۳-۲) ذکر شد، برای درجات آزادی ۳ و بالاتر جهت بهبود نتایج در مرزها موقعیت نقاط مهار باید اصلاح شوند. این کار با استفاده از روابط (۴-۳۲) و (۴-۳۳) انجام می‌شود. در این روابط ضرایب α و β را می‌توان از مقایسه بین بردار عمود بر سطح دقیق و برداری که در نقطه مهار ایجاد می‌شود به دست آورد. این کار برای درجات نربز ۳ و ۴ که یک نقطه در هر مرز باید اصلاح شود در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است. این نمودار مقدار اختلاف بردارهای عمود بر سطح دقیق و نقطه مهار را برای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد. چنانچه ملاحظه می‌شود، کمترین اختلاف به ازای $\alpha = 0.333$ روی می‌دهد که برابر 6×10^{-4} رادیان است. اصلاح نقاط مهار تابع نربز درجه ۵ نیز در شکل (۴-۱۳) نشان داده شده است. با توجه به این شکل مقادیر بهینه $\alpha = 0.2$ و $\beta = 0.4$ برای تابع درجه ۵ به دست می‌آیند.



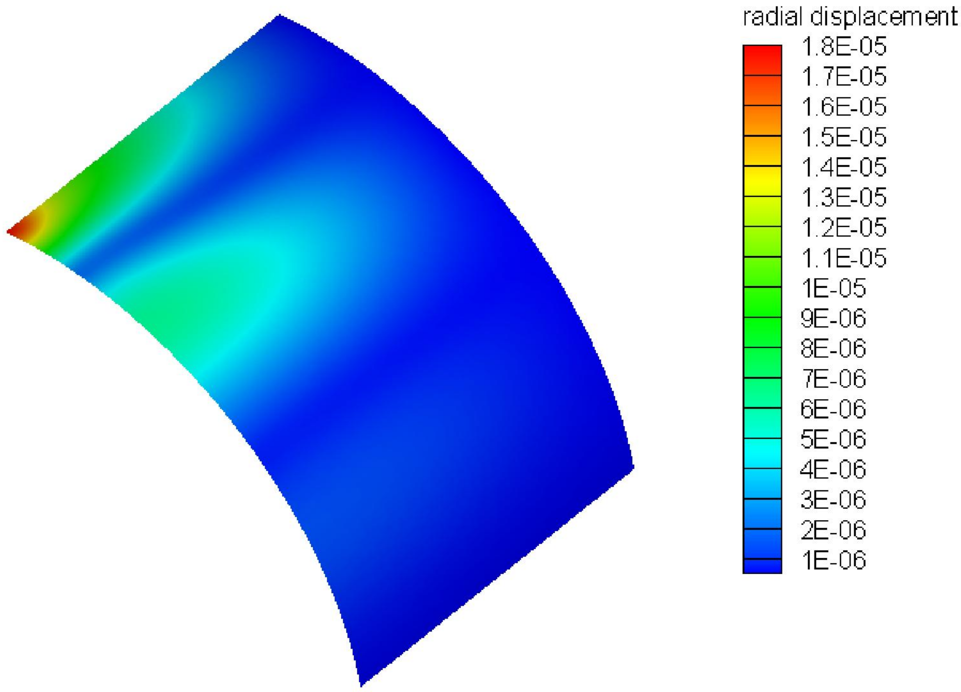
شکل ۴-۱۲ مقدار بهینه α برای تابع نربز از درجه ۳ و ۴



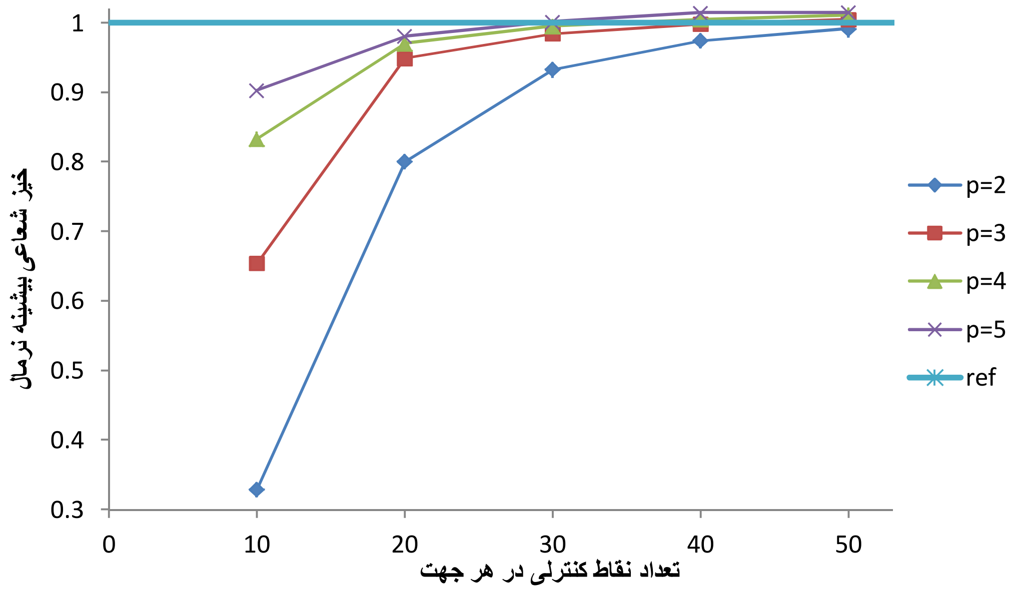
شکل ۴-۱۳ مقادیر بهینه α و β برای تابع نربز درجه ۵

از حل تحلیلی این مسئله مقدار تغییرمکان شعاعی نقطه A یعنی نقطه زیر بار متمرکز (شکل ۴-۱۱) برابر 1.82×10^{-5} به دست می‌آید. برای حل ایزوژئومتریک این مسئله شبکه‌های نقاط کنترلی با ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ نقطه در هر طرف در نظر گرفته شده است. برای هر یک از شبکه‌ها، با توجه به درجه تابع نربز مورد استفاده، اصلاح نقاط مهار مرزی با مقادیر α و β مطابق آنچه پیشتر ذکر شد انجام شده است. نتایج تحلیل در شکل‌های (۴-۱۴) و (۴-۱۵) نشان داده شده است. شکل (۴-۱۴)

کانتور تغییر شکل شعاعی و شکل (۴-۱۵) نمودار همگرایی پاسخ را برای مسئله مذکور نشان می‌دهند.

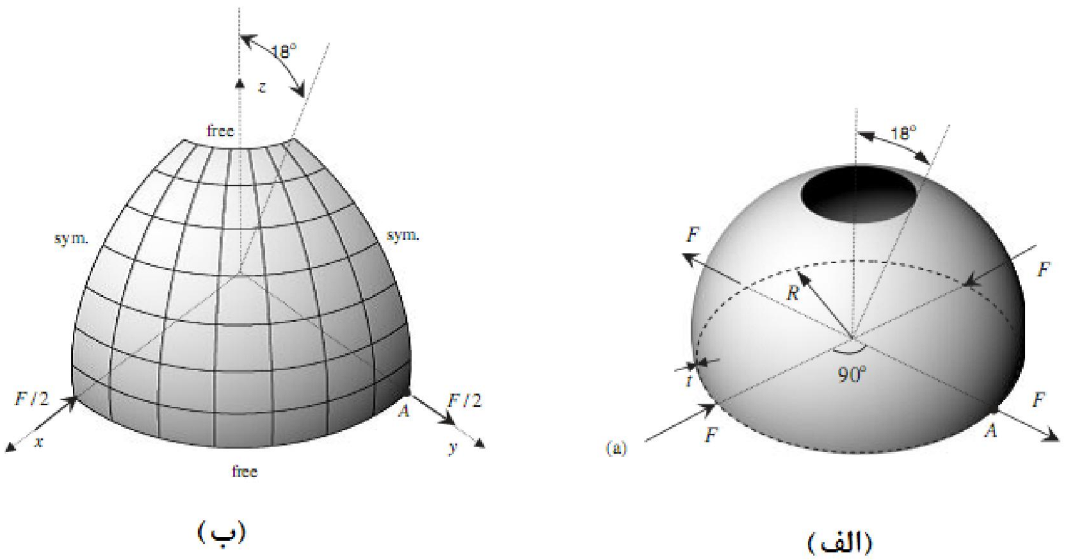


شکل ۴-۱۴ کانتور تغییرمکان شعاعی استوانه تحت فشار

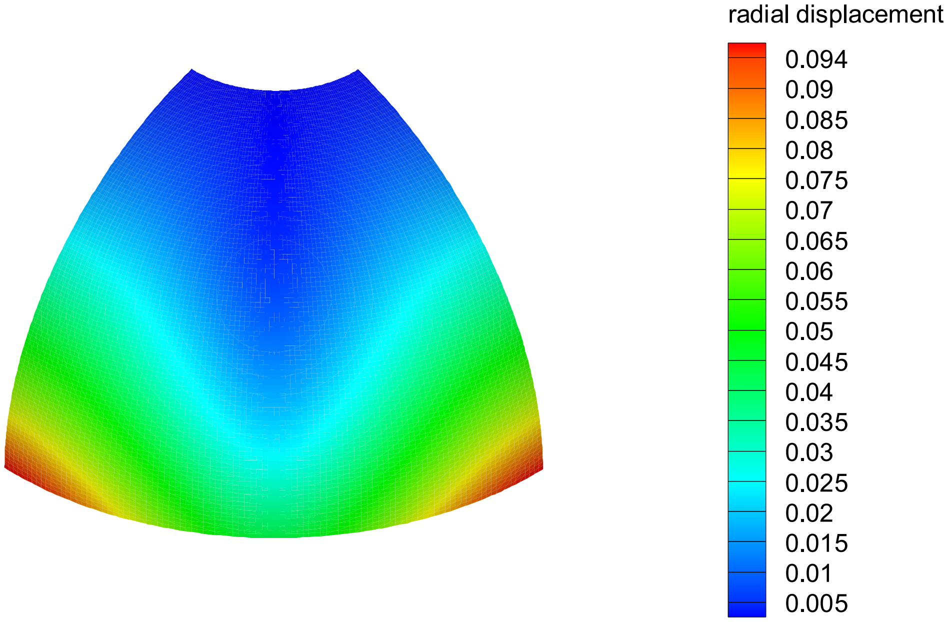


شکل ۴-۱۵ نمودار همگرایی خیز شعاعی بیشینه استوانه تحت فشار

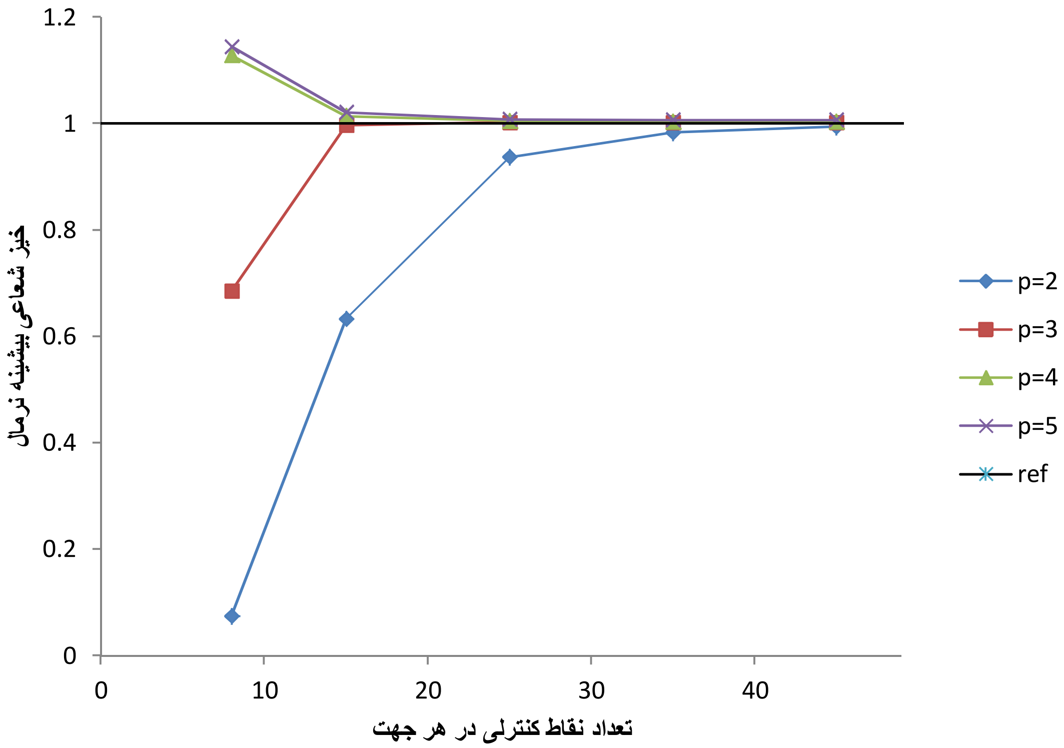
نیم کره تحت فشار: در این مثال یک سازه نیم کره شکل تحت فشار مطابق شکل (۴- ۱۶ الف) با استفاده از روش ایزوژئومتریک تحلیل می‌شود. سازه توسط دو نیروی شعاعی خلاف جهت هم با بزرگی $F=2$ بارگذاری شده است. لبه تحتانی نیم کره آزاد است. مقادیر مدول الاستیسیته $E=6.825\times10^{7}$ و ضریب پواسون $\upsilon=0.3$ در نظر گرفته شده‌اند. شعاع نیم کره برابر $R=10$ و ضخامت آن $t=0.04$ است. این مسئله می‌تواند یک معیار مناسبی باشد برای بررسی توانایی فرمول‌بندی پوسته در ارائه مودهای تغییر شکلی با عدم تغییر حجم. چون تقریبا هیچ کرنش غشایی در آن ایجاد نمی‌شود. با توجه به تقارن مسئله، یک چهارم آن مدل می‌شود که در شکل (۴-۱۶ ب) نشان داده شده است. در این مثال و سایر مسائل این رساله، برای اصلاح بردارهای یکه متعامد در مرزهای سازه، از مقادیر α و β به دست آمده مطابق نمودارهای شکل‌های (۴-۱۲) و (۴-۱۳) استفاده می‌شود. حل تحلیلی برای تغییر مکان شعاعی نقطه زیر بار متمرکز مقدار خیز ۰,۰۹۴ را می‌دهد. کانتور تغییرمکان شعاعی حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و نمودار همگرایی خیز شعاعی نقطه زیر بار، به ترتیب در شکل‌های (۴-۱۷) و (۴-۱۸) نشان داده شده‌اند که نشان دهنده کارایی روش برای تحلیل این سازه هستند.



شکل ۴-۱۶ مسئله نیم کره تحت فشار الف) هندسه و بارگذاری مسئله ب) مدل تحلیلی به همراه بارگذاری و شرایط مرزی



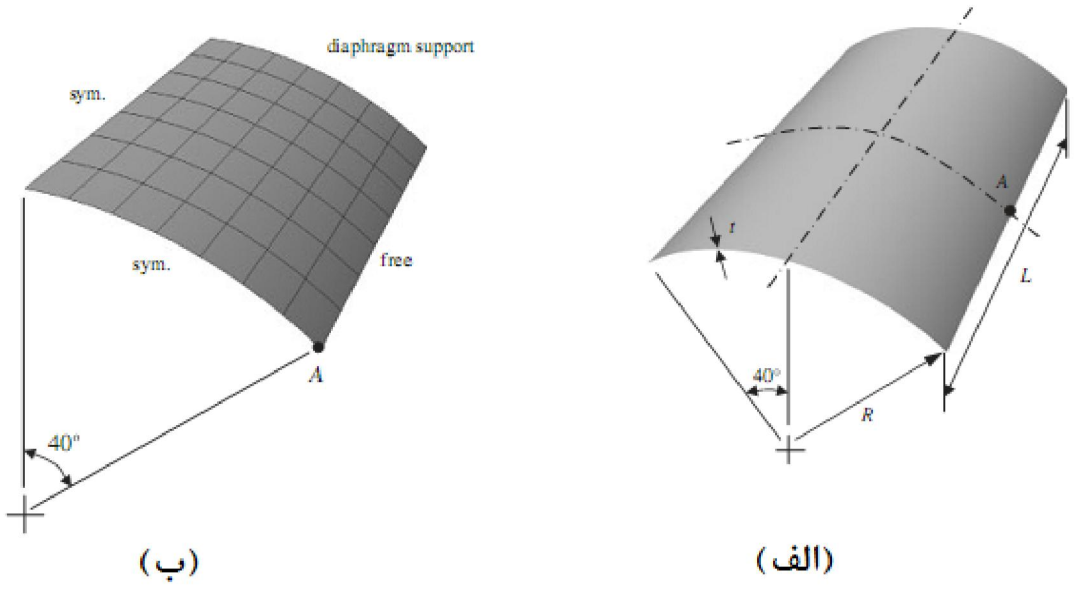
شکل ۴-۱۷ کانتور تغییرمکان شعاعی نیم کره تحت فشار



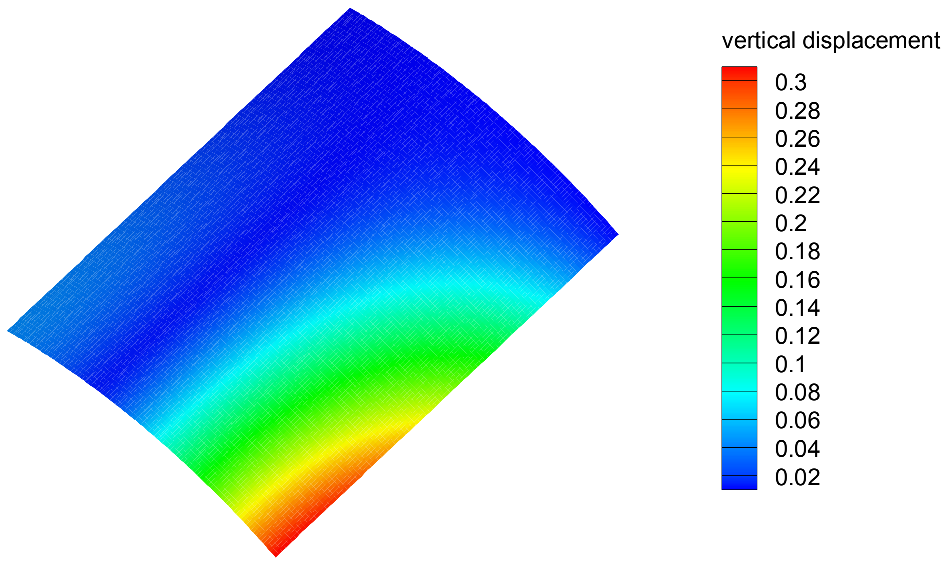
شکل ۴-۱۸ نمودار همگرایی خیز شعاعی بیشینه نیم کره تحت فشار

بام اسکوردلیس-لو: در اینجا روش ایزوژئومتریک ارائه شده در این رساله برای تحلیل سازه بام اسکوردلیس-لو تحت اثر وزن خودش به کار می‌رود. دراین مسئله نیروهای غشایی غالب هستند و

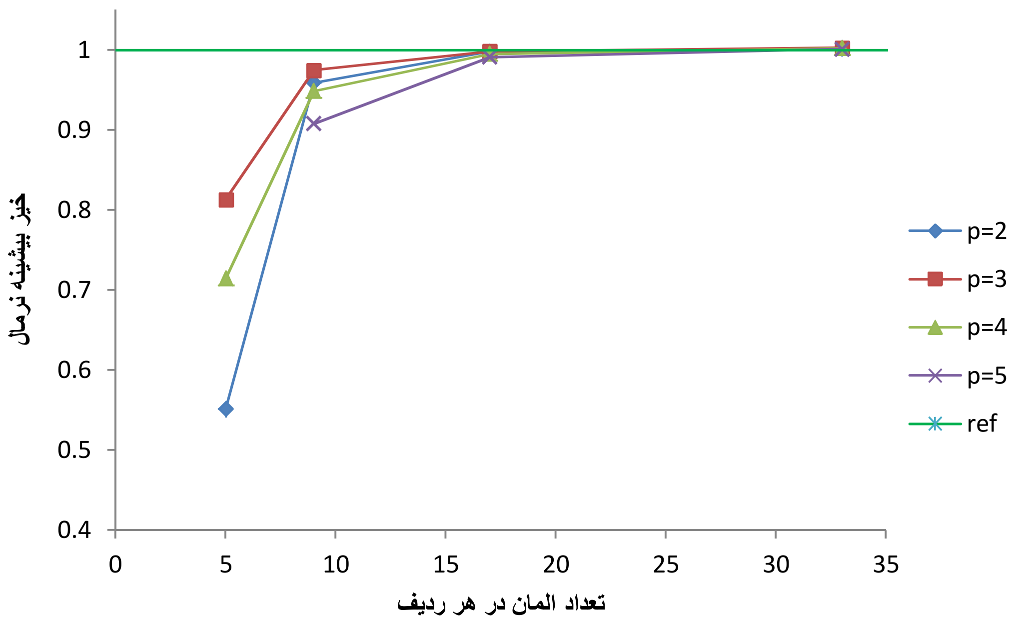
می‌تواند معیار استانداردی برای مسائل پوسته باشد. شکل (۴-۱۹ الف) این سازه را با پارامترهای هندسی تعریف شده اش نشان می‌دهد. دو مرز خمیده سازه تحت تکیه‌گاه دیافراگم صلب قرار دارند که اجازه حرکت در راستای محور سازه و چرخش حول محور مماس بر مرز را به آن می‌دهد. مدول الاستیسیته $E = 4.32\times10^{8}$ و ضریب پواسون $\upsilon = 0.0$ به عنوان مشخصات مکانیکی مصالح سازه در نظر گرفته شده‌اند. شعاع انحنا سازه برابر $R = 25$، طول آن $L = 50$ و ضخامت آن $t = 0.25$ می‌باشند. با توجه به تقارن، تنها یک چهارم سازه با شرایط مرزی مناسب مطابق شکل (۴-۱۹ ب) جهت مدلسازی تحلیل به کار می‌رود. شکل (۴-۲۰) کانتور تغییر مکان قائم به دست آمده از حل ایزوژئومتریک این مسئله را نشان می‌دهد. همگرایی این تغییرمکان در نقطه میانی لبه آزاد (نقطه A) در شکل (۴-۲۱) نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۹ سازه اسکوردلیس-لو الف) هندسه و بارگذاری ب) مدل تحلیلی و شرایط مرزی



شکل ۴-۲۰ کانتور تغییر مکان قائم بام اسکوردلیس-لو

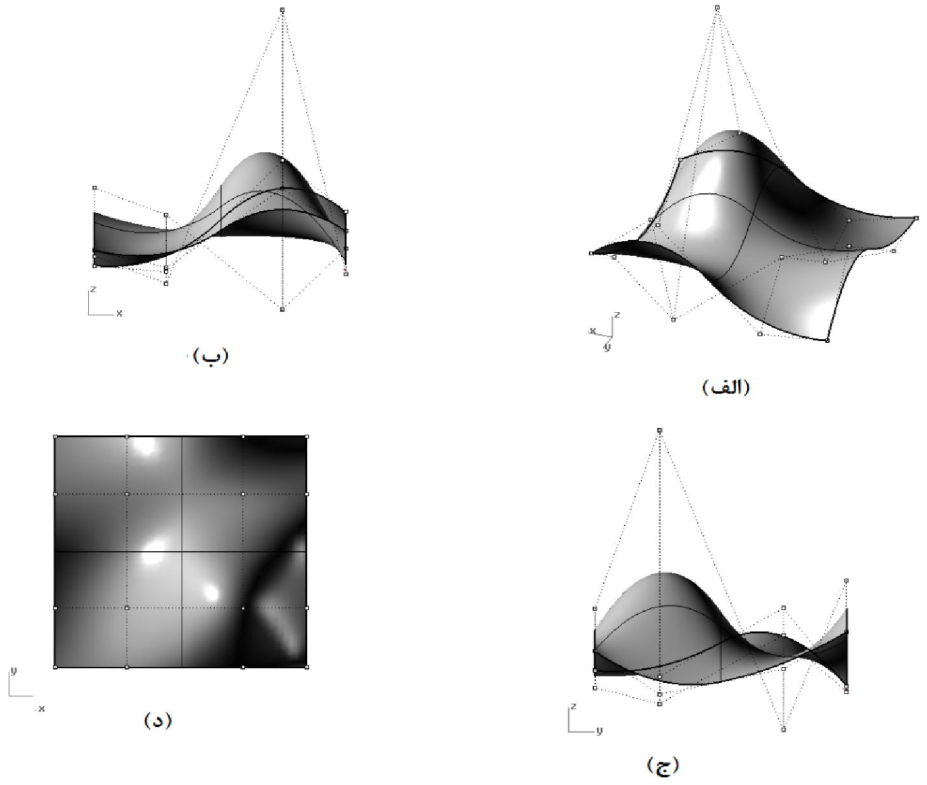


شکل ۴-۲۱ نمودار همگرایی خیز بیشینه نرمال بام اسکوردلیس-لو

۴-۴-۳- پوسته با شکل آزاد

در نهایت به عنوان آخرین مثال جهت بررسی کارایی روش ارائه شده برای تحلیل، یک سازه پوسته‌ای با شکل آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل اولیه این سازه به همراه نقاط کنترلی در شکل (۴-۲۲)

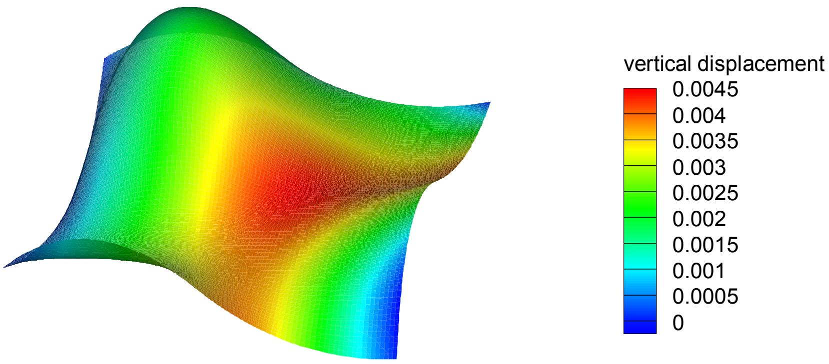
نشان داده شده است. همچنین مختصات نقاط کنترلی مورد استفاده به همراه مقادیر وزن‌ها، در جدول (۴-۱) مشاهده می‌شود. سازه مذکور در چهار نقطه گوشه خود توسط تکیه‌گاه‌های ساده مقید شده و تحت اثر بار گسترده یکنواخت ۱۰۰ بر واحد سطح در جهت محور z قرار دارد. مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب $E=4\times10^{8}$ و $\upsilon=0.3$ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین ضخامت پوسته در همه نقاط برابر $t=0.25$ در نظر گرفته شده است. از شبکه‌هایی با ۸، ۱۵، ۲۲ و ۳۰ نقطه کنترلی در هر جهت برای تحلیل ایزوژئومتریک استفاده شده است. مانند مثال‌های قبلی درجات تابع نربز برابر ۲، ۳، ۴ و ۵ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. خیز قائم بیشینه حاصل از حل ایزوژئومتریک برابر ۰,۰۰۴۶۹ همگرا شده است. کانتور تغیر شکل قائم در شکل (۴-۲۳) نشان داده شده است. همچنین نمودار همگرایی خیز قائم بیشینه در شکل (۴-۲۴) آورده شده است. برای این مسئله که با شکل دلخواه تعریف شده است مرجعی جهت مقایسه وجود ندارد. با این حال همگرایی پاسخ و شکل کانتور به دست آمده نشان از کارایی روش در حل مسئله پوسته با شکل آزاد دارد.



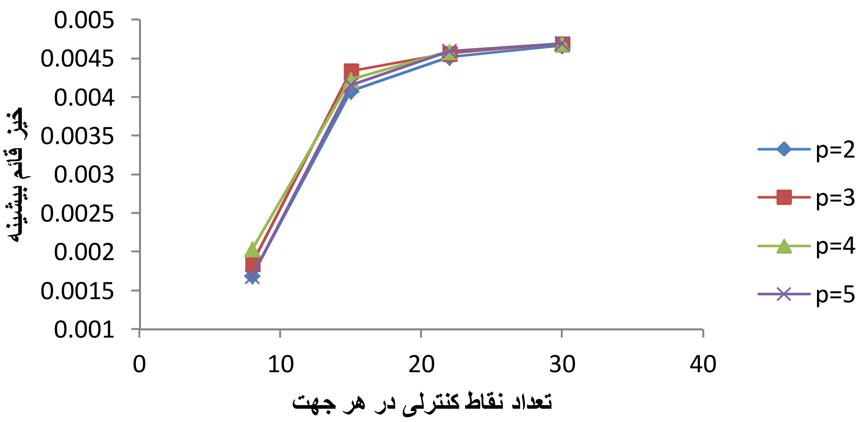
شکل ۴-۲۲ پوسته با شکل آزاد و نقاط کنترلی، نماهای الف) سه بعدی ب) در جهت محور y ج) محور x د) محور z

جدول (۴-۱) مختصات و وزنهای نقاط کنترلی مورد استفاده برای پوسته با شکل آزاد

نقطه	x	y	z	weight
1	-6.000	-6.000	1.000	1.000
2	-6.000	-2.924	0.698	1.000
3	-6.000	2.987	4.244	1.000
4	-6.000	6.000	0.200	1.000
5	-2.563	-6.000	0.112	1.000
6	-2.563	-2.924	-0.723	1.000
7	-2.563	2.987	2.855	1.000
8	-2.563	6.000	-0.125	1.000
9	2.980	-6.000	4.212	1.000
10	2.980	-2.924	13.519	1.000
11	2.980	2.987	-2.088	1.000
12	2.980	6.000	5.659	1.000
13	6.000	-6.000	2.000	1.000
14	6.000	-2.924	-0.247	1.000
15	6.000	2.987	1.084	1.000
16	6.000	6.000	3.000	1.000



شکل ۴-۲۳ کانتور تغییر مکان قائم پوسته با شکل آزاد



شکل ۴-۲۴ نمودار همگرایی خیز قائم بیشینه پوسته با شکل آزاد

فصل پنجم

بهینه سازی سازه ای

۵-۱- مقدمه

مبحث بهینه‌سازی از سال‌های گذشته مورد توجه بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی قرار گرفته است. علت کلی توجه به این موضوع را می‌توان محدود بودن منابع و ایده بهترین شکل استفاده از منابع برای رسیدن به هدف نامید. با توسعه مهندسی و مباحث طراحی در حوزه‌های مختلف مهندسی، این اندیشه که چطور می‌توان به بهترین طرح ممکن دست یافت پدید آمد. در واقع مهندس طراح به دنبال همین موضوع است. اما بهینه‌سازی به شکل آکادمیک، به ساز و کاری گفته می‌شود که در یک روند سیستماتیک بین تحلیل و طراحی به طرحی همگرا شود که آن طرح دقیقا بهترین طرح از میان همه گزینه‌های ممکن باشد.

در مهندسی سازه نیز مبحث بهینه‌سازی بسیار مورد توجه بوده است. مهمترین شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای را می‌توان به شکل زیر نام برد: بهینه‌سازی توپولوژی، بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی ابعاد. در بهینه‌سازی توپولوژی، هدف به دست آوردن بهترین نحوه ارتباط اعضای سازه است. در حالی که در بهینه‌سازی شکل، با ثابت نگه داشتن توپولوژی، بهترین شکل سازه به دست می‌آید. در بهینه‌سازی ابعاد نیز همانطور از نامش پیداست، ابعاد اعضای مختلف سازه بهینه‌سازی می‌شوند. در سال‌های اخیر ترکیب بهینه‌سازی شکل و توپولوژی مورد توجه محققین قرار گرفته است. در این رساله نیز یکی از کارهایی که برای نخستین بار صورت پذیرفته، بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی برای سازه‌های پوسته‌ای است که در جای خودش به آن بیشتر خواهیم پرداخت.

ظهور روش ایزوژئومتریک به عنوان یک روش قدرتمند و جدی در تحلیل مسائل سازه، دریچه‌های جدیدی را در بحث بهینه‌سازی سازه‌ای گشود. با معرفی این روش و توسعه آن در واقع خلا میان مدل‌های طراحی و تحلیلی از میان برداشته شد. این موضوع به خصوص در بهینه‌سازی شکل سازه بسیار ملموس بوده است. همچنین در این رساله در بحث بهینه‌سازی توپولوژی، با به کارگیری تکنیک‌هایی که پیشتر در مدل‌های اجزای محدود به کار می‌رفت و تطبیق آنها با روش ایزوژئومتریک نتایج قابل توجهی به دست آمده است.

در این فصل مباحث بهینه‌سازی توپولوژی و شکل برای سازه‌های دو بعدی و پوسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند که در بخش‌های آتی این فصل به آنها پرداخته خواهد شد. همچنین روش بهینه‌سازی مورد استفاده در حل مسائل بهینه‌سازی این رساله و بحث تحلیل حساسیت در جای خودش تشریح خواهد شد. در تمام مسائل این فصل حداکثر سازی سختی به عنوان معیار بهینه‌سازی در نظر گرفته خواهد شد. همچنین مقدار مصالح به کار رفته به عنوان قید مسئله در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، در مسائل این فصل به دنبال طرح بهترین سازه با مقدار مشخص مصالح هستیم طوری که سخت‌ترین سازه ممکن باشد. نحوه فرمول‌بندی و متغیرهای طراحی هریک در جای خود تشریح خواهند شد.

۵-۲- بهینه‌سازی شکل

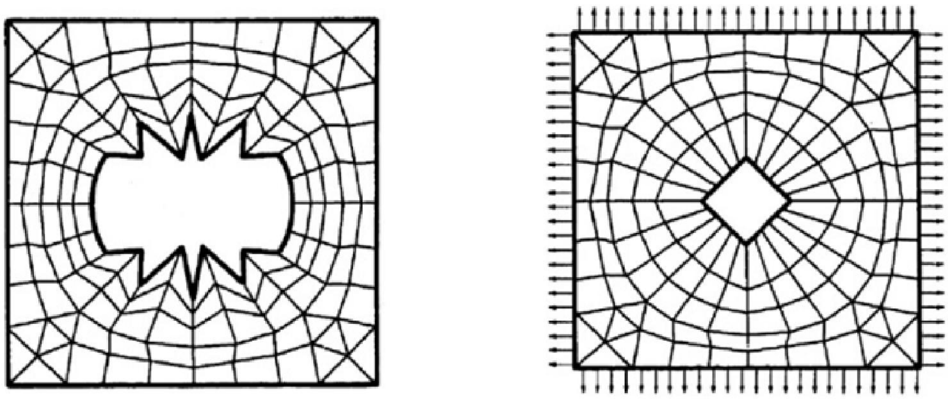
در این بخش بهینه‌سازی ایزوژئومتریک شکل سازه‌های پوسته‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف از بهینه‌سازی شکل سازه، یافتن هندسه مرزهای سازه است به گونه ای که رفتار خاصی از سازه در بهترین وضعیت باشد. معمولا این مسائل دارای قیدهای رفتاری و هندسی نیز می‌باشند که از آن جمله می‌توان به محدودیت تنش‌ها، تغییرمکان‌ها و محدودیت‌های هندسی اشاره نمود. همچنین وزن، انرژی کرنشی ذخیره شده و مقادیر فرکانس های طبیعی سازه از جمله توابع هدف مسائل بهینه‌سازی شکل می‌باشند. در این بخش پس از مروری بر تاریخچه بهینه‌سازی شکل، مسئله بهینه‌سازی

ایزوژئومتریک شکل تشریح خواهد شد. سپس روش بهینه‌سازی مورد استفاده به همراه تحلیل حساسیت برای مسائل این بخش مرور خواهند شد. در نهایت چند مثال از پوسته‌های با شکل آزاد بررسی می‌شوند.

۵-۲-۱- تاریخچه بهینه‌سازی شکل

اولین تحقیقات در زمینه بهینه‌سازی شکل توسط زینکوویچ (Zienkiewicz et al., 1973; Francavilla et al., 1975) انجام شد. با توجه به کاربرد فراوان بهینه‌سازی شکل سه بعدی در صنعت، تحقیقات زیادی در دهه هفتاد میلادی انجام شد که از آن جمله می‌توان به (Imam., 1982; Yao et al.,1989; Botkin., 1992) اشاره نمود. برای مرور کلی مقالات بهینه‌سازی شکل می‌توان به مرجع (Haftka et al., 1986) رساله مراجعه نمود.

در اولین تحقیقات انجام شده در این زمینه مختصات گره‌های اجزای محدود که بر روی مرزهای سازه قرار داشتند به عنوان متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی در نظر گرفته شدند. اما طولی نکشید که مشکلات این کار آشکار شد. به عنوان مثال در شکل (۵-۱) مشکلات این روش در بهینه کردن وزن یک صفحه با حفره میانی نشان داده شده است. در این مسئله محدودیت تنش‌ها به عنوان قید در نظر گرفته شده بود. جواب مسئله به صورت شکل (۵-۱ ب) به دست آمده که غیرواقعی است. این مشکل به دلیل جابجایی مستقل گره‌ها در مرز سازه به وجود می‌آید که در نهایت سبب ایجاد مرزهای زیگزاگی می‌شود. به علاوه استفاده از گره‌های مرزی به عنوان متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی را به شدت به نحوه شبکه‌بندی وابسته می‌سازد و در نهایت منجر به افزایش تعداد متغیرهای طراحی می‌شود.

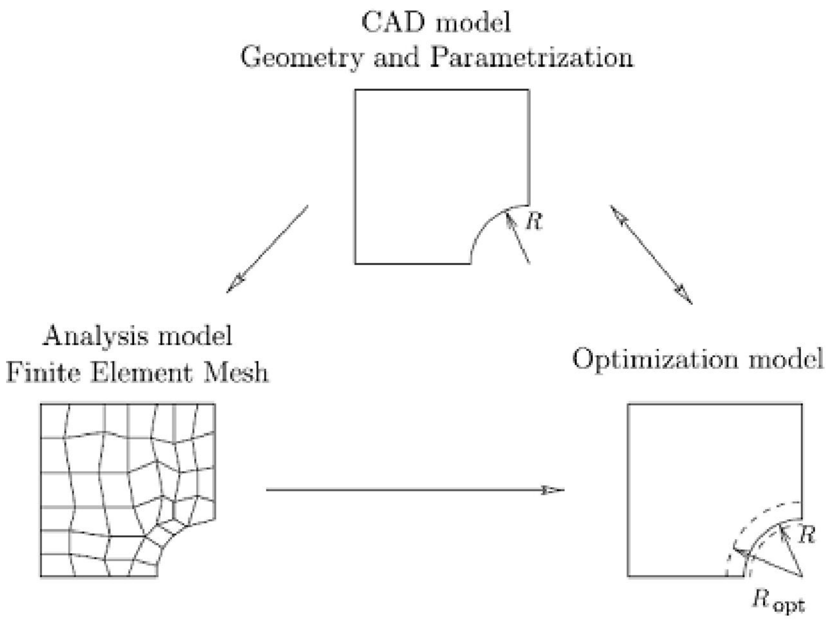


(ب) (الف)

شکل (۵-۱) الف-طرح اولیه ب-طرح نهایی

برای حل این مشکل محققین به استفاده از پیشرفت‌های علم هندسه متوسل شدند. طوری که با در نظر گرفتن مدل هندسی مسئله، در هر مرحله از بهینه‌سازی آن را تغییر داده و سپس مدل اجزای محدود را از نو بسازند. در این روش برای تعیین مدل هندسی مرزها از بی-اسپلاین‌ها و یا نربزها استفاده می‌شود. در نظر گرفتن نقاط کنترلی به عنوان متغیرهای طراحی مسئله، طراح را قادر می‌سازد که به راحتی مرزهای سازه را در مراحل بهینه‌سازی تغییر دهد. در گام بعدی با استفاده از الگوریتم‌های خاص در ساخت شبکه‌بندی اجزای محدود، شبکه مورد نظر تولید و مسئله تحلیل می‌شود. اشکال این روش تفاوت در نوع مدل‌های طراحی و تحلیلی است. همچنین هزینه تولید شبکه‌بندی اجزای محدود به خصوص در مسائل عملی و در مقیاس بزرگ بسیار زیاد است. در شکل (۵-۲) فرایند بهینه‌سازی شکل با این روش نشان داده شده است.

در سال‌های اخیر با توسعه روش ایزوژئومتریک و به کارگیری آن در روش‌های بهینه‌سازی شکل رهیافت هموارتری به دست آمده است. در بخش بعدی این موضوع مفصل بیان خواهد شد.



شکل (۵-۲) فرایند بهینه‌سازی شکل در روش اجزای محدود

۵-۲-۲- بهینه‌سازی شکل ایزوژئومتریک

چنانچه پیشتر ذکر شد با توسعه روش تحلیل ایزوژئومتریک و کاربرد آن در مسائل بهینه‌سازی شکل، مشکل خلا موجود بین مدل کامپیوتری برای بهینه‌سازی و مدل اجزای محدود برای تحلیل سازه حل شد. در واقع با استفاده از روش ایزوژئومتریک در بهینه‌سازی شکل، مدل هندسی ساخته شده که متشکل از شبکه نقاط کنترلی است، هم برای انجام تحلیل و هم برای پارامترسازی بهینه‌سازی شکل به کار می‌رود. به عبارت دیگر مختصات نقاط کنترلی که در نربز برای تولید هندسه و در تحلیل ایزوژئومتریک برای تقریب تغییر مکان مورد استفاده قرار می‌گرفت، در بهینه‌سازی شکل کاربرد سومی هم پیدا می‌کند که همان متغیر طراحی مسئله بهینه‌سازی است. به این ترتیب در هر گام بهینه‌سازی موقعیت این نقاط می‌تواند به عنوان متغیر طراحی مسئله بهینه‌سازی شکل استفاده شود. توجه شود که با این کار دیگر نیاز به ساخت مدل اجزای محدود برای تحلیل و صرف هزینه های بالا برای تولید شبکه اجزای محدود مرتفع

می‌شود. مقالاتی که در این حوزه کار کرده‌اند می‌توان به (Nagy et al., 2010; Seo et al., 2010; Wall et al., 2008; Li et al 2011 ;Cho et al., 2008; Hassani et al., 2011) اشاره نمود.

در این رساله بهینه‌سازی شکل برای سازه‌های پوسته‌ای مدل نظر بوده است. اصول روش به کار رفته مطابق با مطلب پاراگراف قبلی است. یعنی استفاده از موقعیت نقاط کنترلی به عنوان متغیر طراحی. با این حال مشکلی که در این زمینه علل الخصوص برای سازه‌های پوسته‌ای مطرح است عدم یکسان بودن نقاط کنترلی مورد نیاز برای هندسه، تحلیل و طراحی است. برای انجام بهینه‌سازی هر چقدر تعداد نقاط کنترلی بیشتری مورد استفاده قرار گیرد، قابلیت تغییر شکل و رسیدن به سازه بهینه بالاتر می‌رود. در عین حال، استفاده از تعداد نقاط کنترلی بیش از حد، باعث رسیدن به طرحی می‌شود که ناهمواری‌های زیادی دارد. از طرفی تعداد محدود نقاط کنترلی ممکن است باعث عدم دقت در نتایج تحلیل شود و این موضوع روی روند طراحی بهینه تاثیر گذار باشد. در نتیجه بهتر است که مدل‌های مورد استفاده برای تحلیل و بهینه‌سازی متفاوت باشند.

برای حل این مشکل می‌توان از ویژگی بهبود شبکه در توابع نربز استفاده نمود. در فصل دو ذکر شد که منحنی‌ها و سطوح نربز این ویژگی را دارند که بتوان نقاط کنترلی جدید را به آنها افزود بدون اینکه در هندسه آنها تغییری ایجاد شود که به این کار در ادبیات موضوع بهبود شبکه گفته می‌شود. روش مورد استفاده برای بهبود شبکه در این رساله، روش افزودن گره است. در این روش با افزودن مقادیر جدید گره، دهانه‌های گرهی به دهانه‌های کوچکتری تقسیم می‌شوند. توابع پایه بهبود یافته از رابطه (۲-۳) و با استفاده از بردارهای گرهی بهبود یافته به دست می‌آیند. نقاط کنترلی بهبود یافته با ترکیب خطی نقاط کنترلی اولیه حاصل می‌شوند. با در نظر گرفتن تابع بی-اسپلاین یک بعدی در صورتی که گره اضافه شده را $\bar{r}$ در نظر بگیریم طوری که $\bar{r} \in [r_k, r_{k+1}]$ باشد، نقاط کنترلی بهبود یافته $\mathbf{P}_\mathbf{j}\,(j = 1,\ldots,n+1)$ در اثر افزایش این گره با استفاده از نقاط کنترلی اولیه $\mathbf{Q}_\mathbf{i}\,(i = 1,\ldots,n)$ با رابطه (۵-۱) به دست می‌آید.

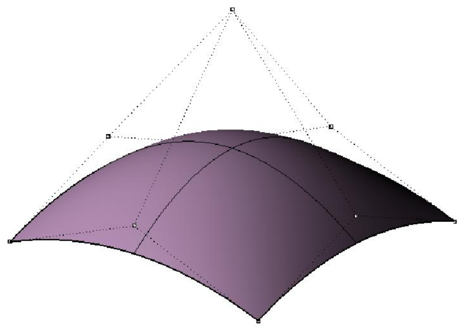
$$\mathbf{Q}_i = \alpha_i \mathbf{P}_i + (1-\alpha_i)\mathbf{P}_{i-1} \tag{۵-۱}$$

که

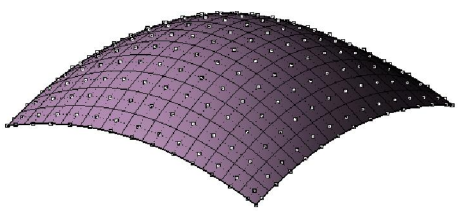
$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \le k-p \\ \dfrac{\bar{r} - r_i}{r_{p+1} - r_i} & k-p < i \le k \\ 0 & k < i \end{cases} \tag{۵-۲}$$

به این ترتیب این امکان فراهم می‌شود که از یک شبکه نقاط کنترلی درشت بتوان شبکه ریزتری به دست آورد بدون اینکه هندسه تغییر نماید.

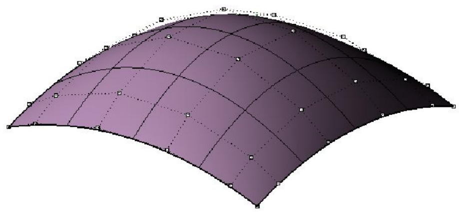
با انجام بهبود شبکه می‌توان از دو مدل متفاوت جهت انجام تحلیل و بهینه‌سازی استفاده نمود. این مدل‌ها از این پس به ترتیب مدل تحلیلی و مدل طراحی نامیده خواهند شد. این موضوع در شکل (۵-۳) نشان داده شده است. شکل (۵-۳ الف) حداقل نقاط کنترلی مورد نیاز برای تولید هندسه یک پوسته گنبدی شکل را نشان می‌دهد که در اینجا آنرا مدل هندسی می نامیم. شکل‌های (۵-۳ ب) و (۵-۳ ج) به ترتیب مدل‌های طراحی و تحلیلی برای بهینه‌سازی نشان داده شده‌اند.



(الف)



(ج)



(ب)

شکل (۵-۳) پوسته گنبدی شکل الف) مدل هندسی ب) مدل طراحی ج) مدل تحلیلی

مسئله بهینه‌سازی که در این رساله در نظر گرفته شده است، مسئله حداکثرسازی سختی با استفاده از مقدار مشخصی از مصالح است. این معیار با حداقل سازی کار خارجی و یا حداقل سازی انرژی کرنشی سازه انجام می‌شود. انرژی کرنشی سازه در فرمول‌بندی اجزای محدود و ایزوژئومتریک به شکل زیر بیان می‌شود:

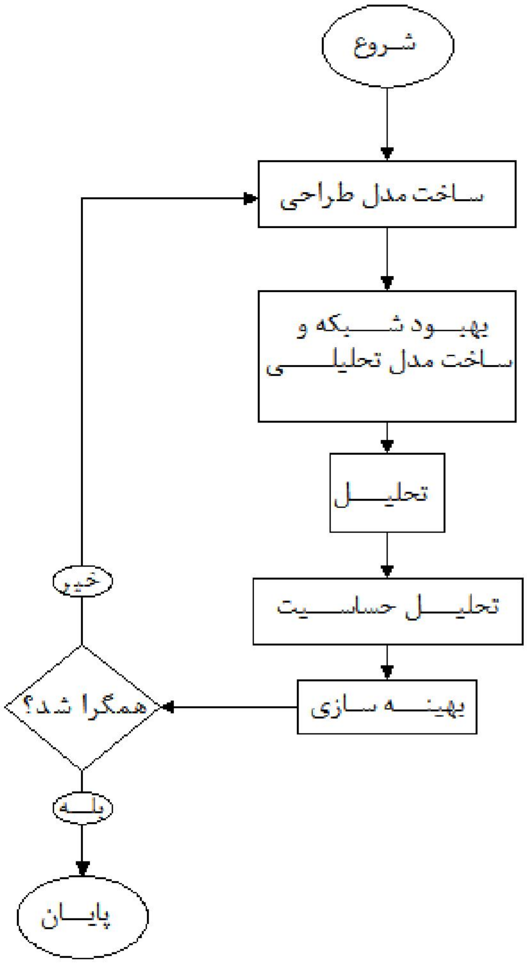
$$c = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} \tag{۵-۳}$$

در رابطه (۵-۳) c بیانگر انرژی کرنشی سازه است. همچنین $\mathbf{U}$ و $\mathbf{F}$ به ترتیب بردارهای تغییرمکان و بار نقاط کنترلی و $\mathbf{K}$ ماتریس سختی کل سازه هستند. بنابراین مسئله بهینه‌سازی مورد بحث در اینجا را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} &\min\ c\left(x_i\right) \\ &s.t\ V\left(x_i\right) < V^{\max} \\ &x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max} \qquad i=1,\dots,n \end{aligned} \tag{۵-۴}$$

که در این رابطه V مقدار مصالح مورد استفاده و $V^{\max}$ بیشترین مقدار مصالح قابل استفاده است. مشاهده می‌شود که توابع قید و هدف بر حسب متغیرهای طراحی x_i بیان شده‌اند. چنانچه پیشتر ذکر شد متغیرهای طراحی در اینجا مختصات نقاط کنترلی نربز هستند که در محدوده $x_i^{\max}$ و $x_i^{\min}$ قرار دارند. همچنین n تعداد این متغیرها است.

با توجه به مطالب بیان شده در این بخش می‌توان الگوریتم بهینه‌سازی شکل مورد استفاده در این رساله را مطابق فلوچارت شکل (۵-۴) بیان نمود. چنانچه در این شکل مشاهده می‌شود، در هر گام بهینه‌سازی پس از ساخت مدل طراحی، با انجام بهبود شبکه، مدل تحلیلی ساخته می‌شود و تحلیل با استفاده از این مدل انجام می‌گیرد. در نهایت پس از انجام تحلیل حساسیت، بهینه‌سازی شکل انجام می‌شود که در واقع بهبود مدل طراحی است. این کار تا همگرا شدن طرح ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۵-۴) الگوریتم بهینه‌سازی شکل

برای انجام بهینه‌سازی از روش مجانب‌های پویا (MMA) استفاده می‌شود. این روش یک روش بهینه‌سازی بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی است که با استفاده از اطلاعات مشتقات توابع هدف و قید، زیرمسئله‌ای محدب و تفکیک پذیر تولید می‌کند و سپس زیر مسئله را حل می‌کند. جواب به دست آمده به عنوان نقطه شروع در گام بعدی بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد و این کار تا حصول همگرایی ادامه پیدا می‌کند. برای اطلاعات بیشتر در مورد نحوه کار این روش می‌توان به مرجع (Svanberg., 1987) این رساله رجوع نمود. برای پیدا کردن مشتقات توابع هدف و قید در مسئله بهینه‌سازی نیاز به انجام تحلیل حساسیت است که در بخش بعدی به آن پرداخته می‌شود.

۵-۲-۳- تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت به معنی بررسی میزان وابستگی طرح نسبت به هر پارامتر تاثیر گذار در آن است. در مسائل بهینه‌سازی این اصلاح به معنی سنجش میزان تغییرات تابع هدف نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی است که در واقع به معنی پیدا کردن مشتق تابع هدف نسبت به آن متغیر می‌باشد. در حالت کلی سه دسته روش برای انجام تحلیل حساسیت وجود دارد: روش‌های تحلیلی، عددی و نیمه تحلیلی. در روش‌های تحلیلی مقادیر مشتقات با توابع صریح برحسب متغیرهای طراحی مسئله به دست می‌آیند. در روش‌های عددی مشتقات توابع هدف و قید را با استفاده از روش‌های مختلف عددی مانند تفاضلات محدود به دست می آورند. در روش‌های نیمه تحلیلی بخشی از عملیات یافتن مشتقات به صورت تحلیلی و بخشی با روش‌های عددی انجام می‌شود. برای مرور روش‌های تحلیل حساسیت می‌توان به مراجع (Newman et al., 1999; Van Keulen et al., 2005) مراجعه نمود.

با در نظر گیری معادله (۵-۳) و با توجه به تقارن موجود در ماتریس سختی کل، می‌توان مشتق تابع انرژی کرنشی نسبت به هر متغیر طراحی را با رابطه (۵-۵) به دست آورد:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}, \quad i = 1,\dots,n \tag{۵-۵}$$

همچنین با در نظر گرفتن معادله تعادل به صورت رابطه (۵-۶):

$$\mathbf{UK} = \mathbf{F} \tag{۵-۶}$$

و مشتق گیری از این رابطه با فرض مستقل بودن بارها از متغیرهای طراحی، رابطه (۵-۷) به دست می‌آید:

$$\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{U} \tag{۵-۷}$$

با قرار دادن رابطه (۵-۷) در رابطه (۵-۵)، مشتق انرژی کرنشی به شکل رابطه (۵-۸) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{U}, \quad i = 1,\dots,n \tag{۵-۸}$$

رابطه (۵-۸) نشان می‌دهد که مشتق انرژی کرنشی نسبت به یک متغیر طراحی بستگی به مشتق ماتریس سختی دارد. توجه شود که این رابطه فارغ از نوع متغیرهای طراحی به دست آمده است. در این رساله برای به دست آوردن این مشتق در مسئله بهینه‌سازی شکل از روش نیمه تحلیلی استفاده می‌شود. به این منظور تغییر کوچکی در مقدار هر یک از متغیرهای طراحی که در اینجا مختصات نقاط کنترلی هستند، اعمال می‌شود و ماتریس سختی جدید به دست می‌آید. مقدار مشتق ماتریس سختی نسبت به این متغیر طراحی با استفاده از روش تفاضلات محدود با رابطه (۵-۹) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\mathbf{K}(x_i + \Delta x_i) - \mathbf{K}(x_i)}{\Delta x_i} \qquad (۹-۵)$$

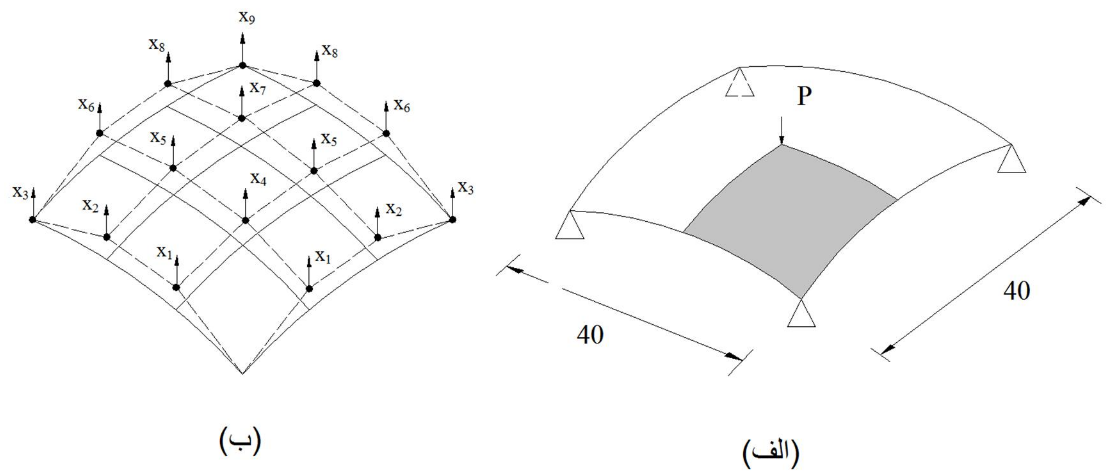
به این ترتیب مقادیر مشتقات انرژی کرنشی نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی به دست می‌آید.

۵-۲-۴- مثال‌های عددی

در این بخش جهت نشان دادن کارایی روش ارائه شده، چند مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مثال‌ها شامل پوسته‌های آزاد هستند که شکل بهینه آنها تحت بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی مشخص به دست می‌آید.

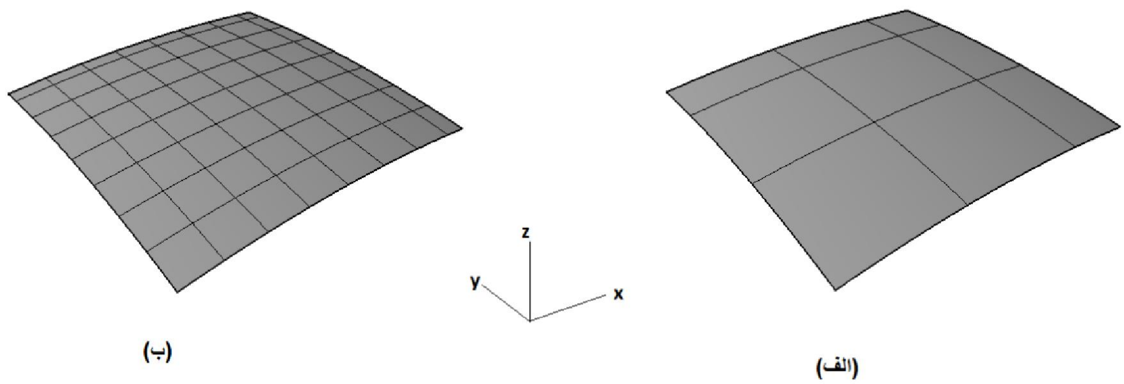
مثال یک: در این مثال سازه پوسته‌ای با شکل آزاد که در شکل (۵-۵) نشان داده شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این سازه در گوشه های خود توسط تکیه‌گاه‌های ساده مهار شده و تحت اثر بار متمرکز $p = 1$ در مرکز قرار دارد. ضخامت پوسته برابر $t = 0.25$ است و مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب $E = 2 \times 10^6$ و $\upsilon = 0.3$ در نظر گرفته شده‌اند. به خاطر تقارن موجود، یک چهارم سازه جهت انجام تحلیل و بهینه‌سازی مدلسازی می‌شود. در شکل (۵-۵ ب) نقاط کنترلی مدل طراحی برای مدلسازی یک چهارم سازه نشان داده شده است. مختصات قائم این نقاط که در شکل (۵-۵ ب) با x_i نشان داده شده‌اند، به عنوان متغیر طراحی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. حدود پایین و

بالای تغییرات متغیرهای این مسئله به ترتیب $x^{min} = 0$ و $x^{max} = 6$ در نظر گرفته شده است. همچنین مقدار بیشینه حجم مصالح مورد استفاده $V^{max} = 410$ می‌باشد.



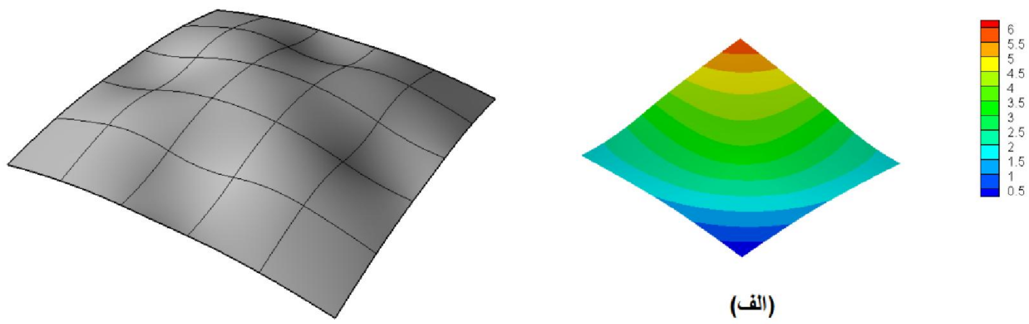
شکل (۵-۵) سازه مثال یک الف) شکل اولیه به همراه بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی ب) نقاط کنترلی مدل طراحی و متغیرهای طراحی

جهت انجام تحلیل سازه، با بهبود شبکه و اضافه کردن ۵ گره جدید در هر جهت، یک شبکه ۹ در ۹ از نقاط کنترلی حاصل می‌شود که از آن به عنوان مدل تحلیلی استفاده می‌شود. این مدل‌ها در شکل (۵-۶) نشان داده شده‌اند.



شکل (۵-۶) مدل اولیه مثال یک الف) مدل طراحی ب) مدل تحلیلی

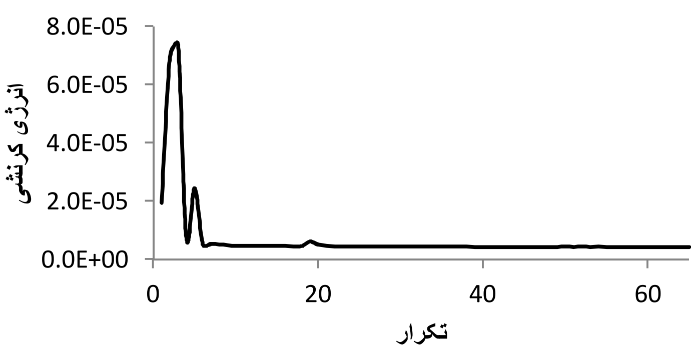
شکل بهینه به دست آمده از حل این مثال در شکل (۵-۷) نشان داده شده است. شکل (۵-۷ الف) نشان دهنده کانتور ارتفاع نقاط مختلف در مدل یک چهارم سازه است. به منظور درک بهتر از شکل به دست آمده، سازه کامل در شکل (۵-۷ ب) رسم شده است. از شکل (۵-۷) مشاهده می‌شود که شکل بهینه سازه طوری به دست آمده که نقطه زیر بار متمرکز به سمت بالا حرکت کرده است و به صورت برآمدگی تا نقاط تکیه‌گاهی انتقال یافته است. به نظر می‌رسد از نقطه نظر مهندسی شکل به دست آمده مناسب است. چون سازه طوری شکل یافته است که تا حد ممکن نیروها را به صورت غشایی به تکیه‌گاه‌ها منتقل کند و از بروز رفتار خمشی تا حد ممکن بکاهد. در شکل (۵-۸) نمودار تغییرات انرژی کرنشی در تکرارهای مختلف رسم شده است. این نمودار نشان دهنده کاهش انرژی کرنشی و همگرایی آن می‌باشد. همچنین پایداری پاسخ در پایان عملیات بهینه‌سازی از نمودار مشهود است.



(الف)

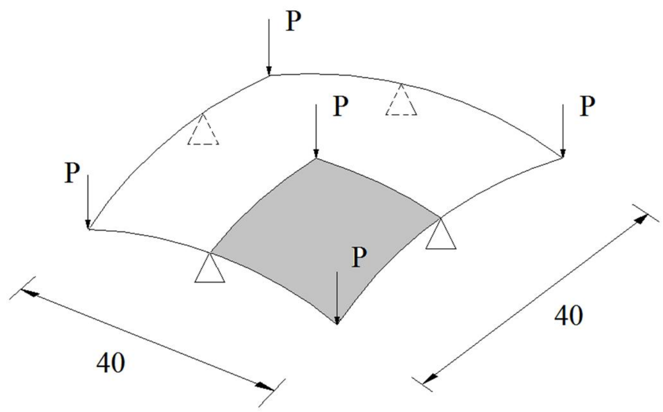
(ب)

شکل (۵-۷) شکل بهینه مثال یک الف) کانتور ارتفاع در شکل سه بعدی یک چهارم سازه ب) شکل سه بعدی کل سازه

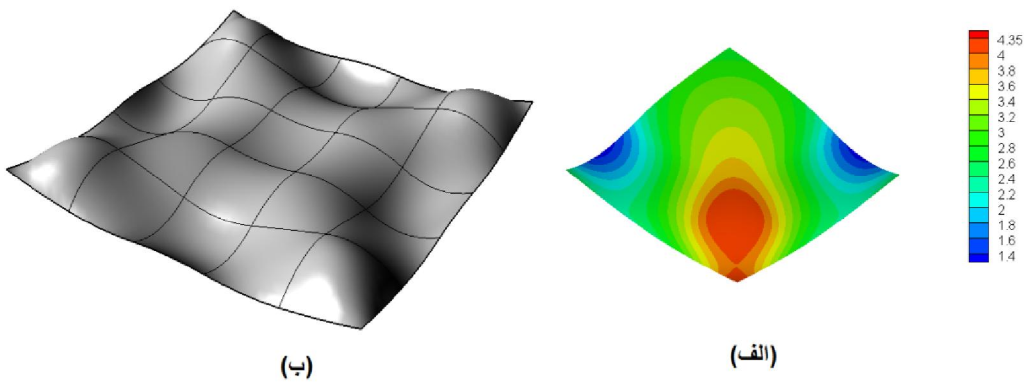


شکل (۵-۸) نمودار تغییرات انرژی کرنشی در حین بهینه‌سازی مثال یک

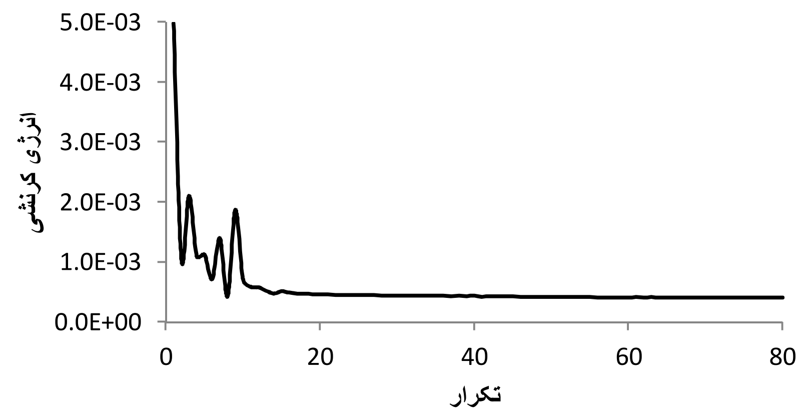
مثال دو: در این مثال سازه مسئله قبلی را با شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری متفاوت در نظر می‌گیریم. این سازه در شکل (۵-۹) نشان داده شده است. چهار تکیه‌گاه ساده در وسط هر یک از مرزهای سازه قرار گرفته‌اند. بارهای متمرکز بر گوشه ها و مرکز سازه اعمال می‌شوند. نقاط کنترلی و حدود تغییر آنها، ضخامت و مشخصات مکانیکی سازه همانند مسئله قبلی است. نتایج بهینه‌سازی شکل این سازه در شکل‌های (۵-۱۰) و (۵-۱۱) نشان داده شده‌اند. شکل بهینه و کانتور ارتفاع مدل یک چهارم به همراه شکل کل سازه به ترتیب در شکل (۵-۱۰ الف) و (۵-۱۰ب) نمایش داده شده‌اند. به نظر می‌رسد در اینجا نقاط کنترلی گوشه ها به سمت بالا حرکت کرده‌اند. البته قضاوت مهندسی در این مسئله به سادگی شکل مثال یک نیست. در شکل (۵-۱۱) نمودار همگرایی انرژی کرنشی برای این مثال مشاهده می‌شود.



شکل (۵-۹) شکل اولیه، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی مثال دو



شکل (۵-۱۰) شکل بهینه مثال دو الف) کانتور ارتفاع در شکل سه بعدی مدل یک چهارم ب) شکل سه بعدی کل سازه

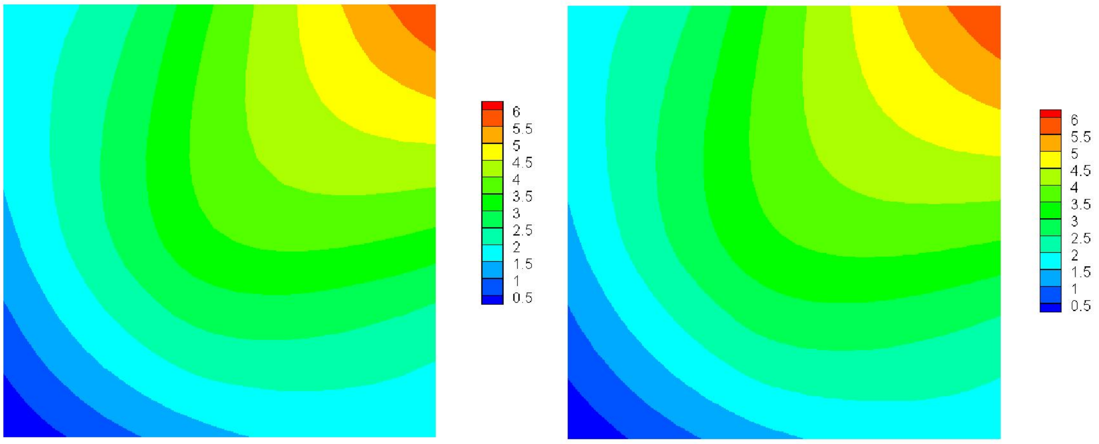


شکل (۵-۱۱) نمودار تغییرات انرژی کرنشی در حین بهینه‌سازی مثال دو

با توجه به اینکه برای مثال‌های حل شده مرجع خاصی جهت سنجش درستی پاسخ وجود ندارد، در اینجا اقدام به حل اجزای محدود این مثال‌ها می نماییم. در این روش سطح پوسته با استفاده از تکنیک نربز تولید می‌شود و از نتیجه خروجی آن برای ساخت شبکه اجزای محدود استفاده می‌شود. به منظور مقایسه نتایج، در مدلسازی هندسه از نقاط کنترلی یکسان در هر دو روش استفاده می‌شود. یعنی همان مدل یک چهارم نشان داده شده در شکل (۵-۵ ب) در اینجا نیز به عنوان مدل طراحی به کار می‌رود. مقدار مصالح به کار رفته، ابعاد، ضخامت و خصوصیات مکانیکی در هر دو روش مشابه هستند. جهت تحلیل اجزای محدود از یک شبکه ۲۰ در ۲۰ از المان‌های پوسته چهار گرهی ویلسون (Wilson., 1998) استفاده می‌شود.

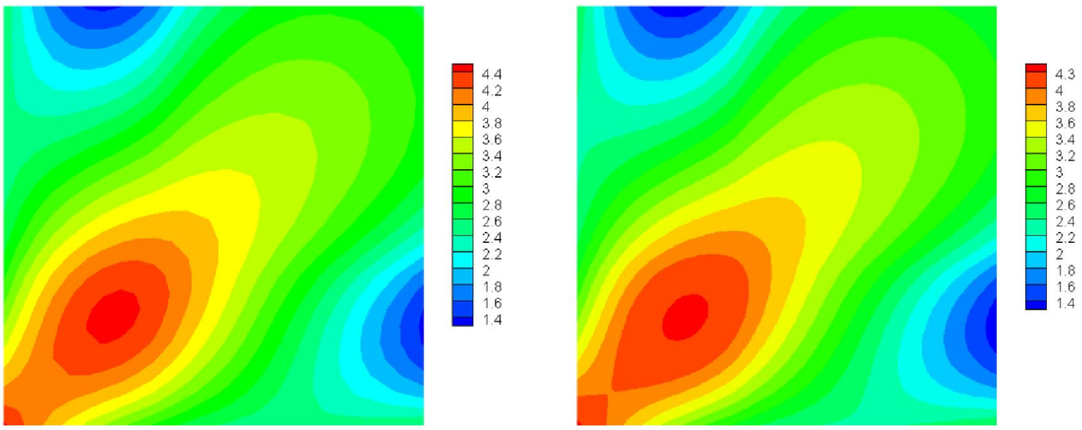
نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود مثال‌های یک و دو به ترتیب در شکل‌های (۵-۱۲) و (۵-۱۳) نشان داده شده‌اند. در هر یک از این شکل‌ها کانتور ارتفاع نمای دو بعدی از بالای مدل یک چهارم رسم شده است که بخش الف مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک و بخش ب نتیجه حاصل از بهینه‌سازی شکل با تحلیل اجزای محدود است. مشاهده می‌شود که نتایج مشابهی از هر دو روش به دست آمده است. در مثال اول این نتایج دقیقا یکسان هستند (شکل ۵-۱۲). در مثال دوم نیز علی رغم اختلاف ناچیز در شکل‌های به دست آمده، نتایج مشابهی را در هر دو روش در بر داشته است. با

مشاهده این نتایج می‌توان نتیجه گیری نمود که روش بهینه‌سازی شکل مورد استفاده در این رساله به درستی عمل می‌کند.



(ب) (الف)

شکل (۵-۱۲) نتایج بهینه‌سازی مثال اول الف) ایزوژئومتریک ب) اجزای محدود



(ب) (الف)

شکل (۵-۱۳) نتایج بهینه‌سازی مثال دوم الف) ایزوژئومتریک ب) اجزای محدود

۵-۳- بهینه‌سازی توپولوژی

روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای در سال‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی داشته‌اند. این نوع از بهینه‌سازی در واقع برای تعیین تعداد و محل سوراخ‌ها در شکل بندی سازه به کار می‌رود و معمولا با بهینه‌سازی شکل جهت هموارسازی مرزها توام می‌شود. اگر چه پیدایش بهینه‌سازی توپولوژی به حداقل سازی وزن توسط مایکل (Michell., 1904) برمی‌گردد، اما بعد از معرفی روش همگن‌سازی توسط بندسو و کیکوچی (Bendsoe et al., 1998) بود که این نوع از بهینه‌سازی بیش از پیش مورد توجه قرار گرفتد.

برای حل مسائل بهینه‌سازی می‌توان از هر یک از روش‌های غیر خطی برنامه‌ریزی ریاضی استفاده نمود. علاوه بر داشتن کارایی لازم برای حل، با توجه به تعداد زیاد متغیرهای طراحی، کاربرد اکثر این روش‌ها در مسائل طراحی توپولوژی پر هزینه و زمان بر است. روش‌های معیار بهینگی[1] (OC) که روش‌های غیرمستقیم بهینه‌سازی هستند، جزء کاراترین روش‌ها جهت حل این مسائل می‌باشند (Rozvani., 1989) و در سال‌های گذشته بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از روش‌های دیگری مانند روش‌های تقریبی (Schmit et al., 1974) و روش کانلین (Fleury., 1989) نیز در حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی استفاده شده است. اما یکی از روش‌های بهینه‌سازی که بیشترین کاربرد را در این زمینه در سال‌های گذشته داشته است روش مجانب‌های پویا (MMA) (Svanberg., 1987) است. این روش نشان داده که برای حل مسائل توپولوژی با متغیرهای طراحی زیاد می‌تواند بسیار کارا باشد (Bendsoe et al. 2003). در این رساله، در بخش بهینه‌سازی توپولوژی همانند بهینه‌سازی شکل از روش مجانب‌های پویا استفاده می‌شود. همچنین در بخش مثال‌ها مقایسه ای بین نتایج حاصل از این روش و روش معیار بهینگی انجام خواهد شد. دسته روش‌های دیگری مانند الگوریتم ژنتیک (Kane., 1996) و لانه مورچگان (Kaveh et al., 2008) را نیز می‌توان نام برد که در حل مسائل توپولوژی به کار رفته‌اند. همچنین روش‌هایی که کمتر مبتنی بر ریاضی بوده‌اند را نیز می‌توان بیان نمود. از این

[1] OC: Optimality Criteria

دست می‌توان به روش تکاملی بهینه‌سازی سازه‌ای (Xie et al., 1993) اشاره نمود. مروری بر روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی توسط روزوانی (Rozvani., 2009) عرضه شده است.

اکثر روش‌هایی که به آنها اشاره شد، روش‌های مبتنی بر المان هستند که در آنها مقدار تابع چگالی در هر المان محدود ثابت است. روش‌های مبتنی بر گره اخیرا توسط بلیشکو و همکاران (Belytschko et al., 2003) معرفی شده و همراه با روش‌های بدون مش (Zhou et al., 2008) در بهینه‌سازی توپولوژی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این روش‌ها چگالی‌های مواد در نقاط گرهی گسسته سازی تعیین می‌شوند. روش ارائه شده در این رساله جزء روش‌های مبتنی بر گره می‌باشد با این تفاوت که از نقاط کنترلی تحلیل ایزوژئومتریک به جای نقاط گرهی اجزای محدود استفاده می‌کند. در بخش‌های آتی این روش تشریح می‌شود.

۵-۳-۱- تابع چگالی مصالح مصنوعی و مدل گسسته توزیع مصالح

یکی از روش‌های متداول در به دست آوردن چیدمان بهینه سازه، استفاده از مواد مرکب است. مواد مرکب، موادی هستند که شامل تعداد نامحدودی از سوراخ‌های کوچک هستند که به صورت پریودیک در آنها پخش شده‌اند. در واقع با این کار، بهینه‌سازی توپولوژی به بهینه‌سازی ابعاد تبدیل می‌شود و پیچیدگی های آن تا حدود زیادی برطرف می‌شود. در مواد مرکب از تئوری همگن‌سازی برای محاسبه خواص مصالح مکانیکی مواد استفاده می‌شود. خواننده علاقه مند می‌تواند برای مطالعه بیشتر به مرجع (Hassani et al., 1999) مراجعه نماید.

راه دیگری که برای مدل کردن مواد در بهینه‌سازی توپولوژیک وجود دارد، استفاده از تابع چگالی مصنوعی است که در این رساله از آن استفاده شده است. در این روش بودن یا نبودن مواد با استفاده از تابع چگالی مصنوعی مشخص می‌گردد. به این نوع مواد در ادبیات موضوع، مواد مصنوعی گفته می‌شود. با استفاده از این مواد می‌توان خواص مکانیکی مصالح را بدون استفاده از معادلات

همگن‌سازی به دست آورد. البته این روش دقت کمتری نسبت به نتایج معادلات همگن‌سازی دارد و با شرط ایزوتروپیک بودن مصالح قابل استفاده است.

در مواد مصنوعی، چگالی مواد به صورت یک تابع پیوسته در فضای طراحی تصور می‌شود. اگر این تابع را با Φ در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را در هر نقطه x به صورت زیر تعریف نماییم:

$$\Phi(x)=\begin{cases}1 & material\\ 0 & no\ material\end{cases} \tag{۱۰-۵}$$

در نتیجه با فرض ایزوتروپی می‌توان چگالی هر نقطه $\rho(x)$ و ماتریس الاستیسیته $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\rho(x)&=\Phi(x)\rho^0\\ \mathbf{D}(x)&=\Phi(x)\mathbf{D}^\mathbf{0}\end{aligned} \tag{۱۱-۵}$$

که در این رابطه ρ^0 و $\mathbf{D}^\mathbf{0}$ به ترتیب چگالی و ماتریس الاستیسیته قسمت جامد همگن می‌باشند. در روش حل بر مبنای اجزای محدود، به منظور سهولت حل، مسئله با گسسته‌سازی در نظر گرفته می‌شود. در این روش به جای در نظر گرفتن تابع پیوسته $\Phi(x)$ برای چگالی، مقدار گسسته Φ^e برای هر المان محدود به کار می‌رود. به عبارت دیگر فرض می‌شود مقدار چگالی در یک المان محدود ثابت است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\rho^e&=\Phi^e\rho^0\\ \mathbf{D}^e&=\Phi^e\mathbf{D}^\mathbf{0}\end{aligned} \tag{۱۲-۵}$$

که در این رابطه $0\le\Phi^e\le1$ می‌باشد. اگرچه این رابطه سبب ساده شدن الگوریتم بهینه‌سازی می‌شود، اما در این حالت جواب بهینه سازه دارای سطوح خلل و فرج دار یا به اصطلاح نواحی خاکستری است. از نقطه نظر مهندسی، حلی که منجر به وجود فقط قسمت جامد یا فقط حفره شود، عملی‌تر است. بنابراین بهتر است که نواحی خلل و فرج دار با استفاده از جریمه ای که به Φ^e تعلق می‌گیرد، حذف شوند. این ایده به وسیله رزوانی (Rozvani., 1989) مطرح گردید. بنابراین بخش دوم رابطه (۵-۱۲) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\mathbf{D}^e = (\Phi^e)^{\mu}\mathbf{D}^0 \qquad (۱۳-۵)$$

که μ ضریب جریمه و بزرگتر از ۱ (معمولا بین ۳ تا ۹) است.

به مدل مواد فوق، مدل SIMP[1] نیز گفته می‌شود. در بهینه‌سازی با این روش، مقدار چگالی در هر المان محدود ثابت در نظر گرفته شده و مقادیر آنها به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. در پایان بهینه‌سازی، المان‌های محدودی که مقدار چگالی آنها به ۱ و یا نزدیک ۱ رسید، نشان دهنده محدوده مصالح هستند و برعکس، المان‌هایی که چگالی نزدیک به صفر دارند، نواحی بدون نیاز به وجود مصالح را نشان می‌دهند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه مرجع (Bendsoe et al., 2003) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۵-۳-۲- مدل مواد مصنوعی پیوسته

در بخش قبلی بعد از معرفی مدل مواد مصنوعی، کاربرد آن در بهینه‌سازی توپولوژی سازه با استفاده از اجزای محدود بررسی شد. اما زمانی که از روش ایزوژئومتریک به جای اجزای محدود در بهینه‌سازی استفاده می‌کنیم، چگالی را دیگر نمی‌توان در هر المان ثابت در نظر گرفت. چون در این حالت المان محدود به معنی متداول آن وجود ندارد. در این رساله برای این کار، تابع چگالی مصالح که مقداری بین صفر و یک دارد، به صورت تابع پیوسته در سراسر دامنه در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به استفاده از روش ایزوژئومتریک، از توابع نربز برای تقریب این تابع استفاده شده است. این کار این امکان را فراهم می‌کند که بتوان در هر نقطه از فضای طراحی با استفاده از مقدار چگالی مصالح آن نقطه، تحلیل سازه را انجام داد. همچنین با توجه به اینکه مقدار این تابع در یک المان ثابت نیست، می‌توان انتظار داشت که پاسخ وابسته به نحوه شبکه‌بندی نباشد و یا حداقل وابستگی کمتری داشته باشد. در مثال‌های این بخش این موضوع بررسی خواهد شد.

---

[1] SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

همانند حالت گفته شده در بخش قبلی، در اینجا نیز می‌توان مسئله بهینه‌سازی را به صورت مسئله نحوه توزیع مصالح در دامنه طراحی به گونه‌ای که تابع هدف بهینه شود، تفسیر نمود. این نحوه توزیع را همانند بخش قبل با تابع چگالی مصالح $\Phi\left(x\right)$ و به صورت رابطه (۵-۱۰) در نظر می‌گیریم. حال می‌توان این تابع را با استفاده از توابع پایه نربز همانند رابطه (۳-۱) به صورت زیر تعریف نمود:

$$\Phi\left(r,s\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}\left(r,s\right)\Phi_{i,j} \tag{۵-۱۴}$$

$\Phi_{i,j}$مقدار تابع چگالی در هر یک از نقاط کنترلی است. مشاهده می‌شود که با این روش در واقع تابع چگالی نیز همانند هندسه و تغییر مکان با استفاده از توابع نربز ساخته می‌شود. به عبارت دیگر، همان نقاط کنترلی و بردارهای گرهی و توابع نربز که در تولید هندسه و تحلیل سازه از آنها استفاده شده است، در تقریب چگالی و در نهایت در بهینه‌سازی توپولوژیک به کار گرفته می‌شوند. حال می‌توان با در نظر گرفتن مقادیر تابع چگالی در نقاط کنترلی $\Phi_{i,j}$ به عنوان متغیر طراحی، مسئله بهینه‌سازی توپولوژی را تشکیل داد. به عبارت دیگر مسئله تبدیل می‌شود به یافتن مقادیر چگالی در هر یک از نقاط کنترلی به شرطی که تابع هدف بهینه شود.

در اینجا نیز بنا بر مفهوم SIMP، توان μ برای جریمه تابع چگالی استفاده می‌شود تا نقاط خاکستری در طرح نهایی کمتر شوند. در نتیجه رابطه زیر برای چگالی $\rho\left(x\right)$ و ماتریس الاستیسته مصالح $\mathbf{D}\left(x\right)$ برقرار است:

$$\begin{aligned}\rho\left(x\right)&=\Phi\left(x\right)\rho^{0}\\ \mathbf{D}\left(x\right)&=\Phi\left(x\right)^{\mu}\mathbf{D}^{\mathbf{0}}\end{aligned} \tag{۵-۱۵}$$

که ρ^{0} و $\mathbf{D}^{\mathbf{0}}$ به ترتیب چگالی و ماتریس الاستیسیته ماده جامد هستند. در این حالت ماتریس سختی یک المان گرهی به شکل کلی زیر خواهد بود:

$$\mathbf{K}=\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\Phi^{\mu}\mathbf{D}^{\mathbf{0}}\mathbf{B}d\Omega \tag{۵-۱۶}$$

مسئله بهینه‌سازی توپولوژی در اینجا نیز بر مبنای معیار حداقل سازی انرژی کرنشی با در نظر گرفتن مقدار مشخصی از مصالح تشکیل می‌شود. این مسئله را در اینجا همانند رابطه (۵-۴) بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\min\ c\left(\Phi_i\right)\\&s.t\ V\left(\Phi_i\right)<V^{\max}\\&0\le\Phi_i\le 1\qquad i=1,\ldots,n\end{aligned}\tag{۵-۱۷}$$

چنانچه مشاهده می‌شود تفاوت این مسئله با مسئله (۵-۴) در نوع متغیر طراحی آن است. در اینجا به جای مختصات نقاط کنترلی، از مقدار چگالی آنها به عنوان متغیر طراحی استفاده شده است.

برای حل این مسئله، همانند مسئله شکل از روش MMA استفاده می‌شود. چنانچه در مقدمه این بخش ذکر شد این روش برای مسائل توپولوژی بهینه بسیار مناسب است. برای انجام تحلیل حساسیت در اینجا نیز رابطه (۵-۸) برقرار است. توجه شود که این رابطه به نوع متغیرهای طراحی بستگی ندارد و در حالت کلی به دست آمده است. با توجه به این موضوع، کافی است مشتق ماتریس سختی هر المان نسبت به چگالی هر نقطه کنترلی به دست آید. در اینجا با توجه به صریح بودن رابطه ماتریس سختی و متغیر طراحی، می‌توان مشتقات را به صورت تحلیلی به دست آورد. با استفاده از روابط (۵-۱۶) و (۵-۱۴) و با یک مشتق گیری ساده می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\Phi_{i,j}}=\int_\Omega\mathbf{B}^T\mu R_{i,j}\Phi^{\mu-1}\mathbf{D}^0\mathbf{B}d\Omega\tag{۵-۱۸}$$

با توجه به روابط (۵-۱۸) و (۵-۸) می‌توان مشتق انرژی کرنشی را نسبت به چگالی هر یک از نقاط کنترلی به دست آورد.

۵-۳-۳- مثال‌های عددی

در این بخش مثال‌های عددی بهینه‌یابی توپولوژیک سازه را با استفاده از مدل توزیع پیوسته مصالح ارائه خواهیم داد. روش مذکور ابتدا برای سازه‌های دو بعدی بررسی می‌شود و پس از مقایسه با نتایج

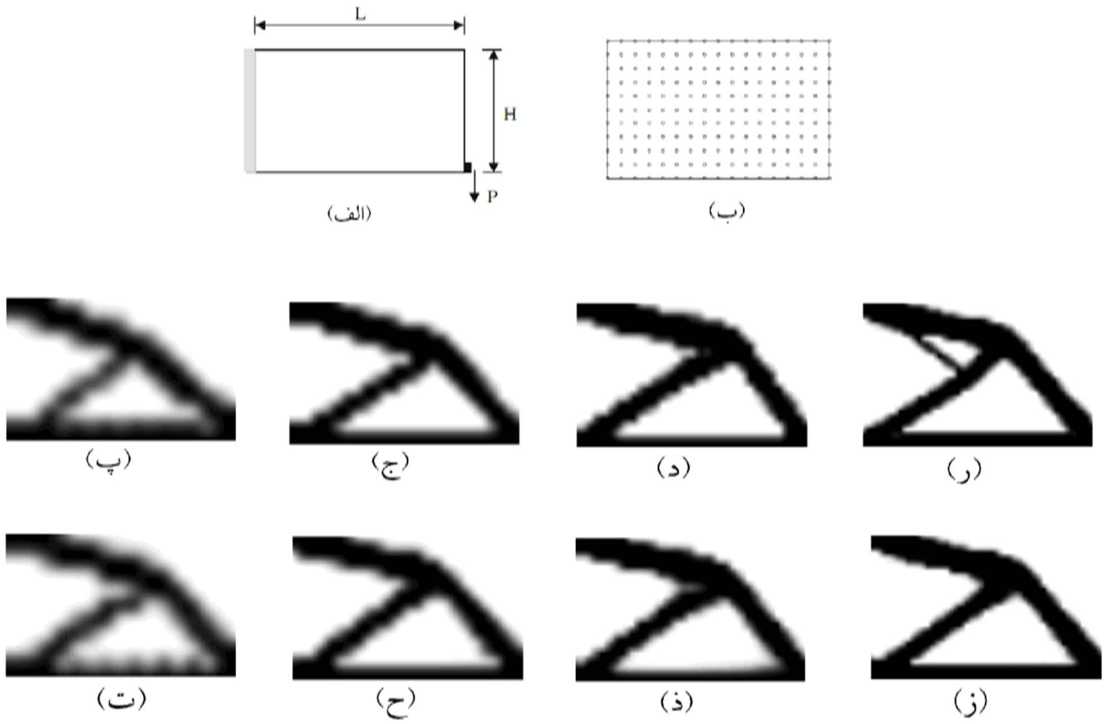
حاصل از مراجع مختلف صحت سنجی می‌شوند. سپس مثال‌های سازه‌های پوسته‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۵-۳-۳-۱- مسائل مسطح

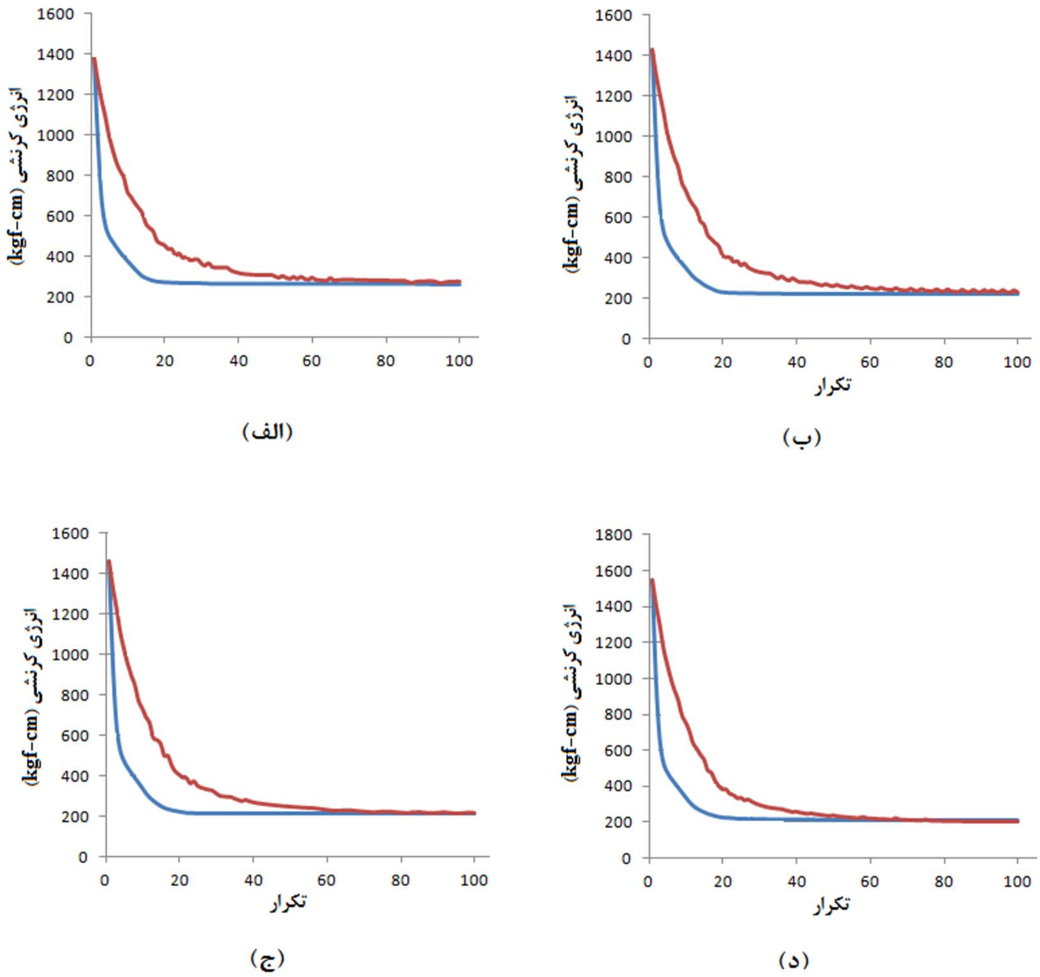
در این بخش چند مثال مبنا از مسائل مشهور توپولوژی بهینه مورد بررسی قرار می‌گیرند. این مثال‌ها با روش ایزوژئومتریک حل شده و سپس با نتایج مراجع مقایسه خواهند شد. روش حل مسائل چنانچه پیشتر اشاره شد استفاده از الگوریتم مجانب‌های پویا است. اما در اینجا به منظور انجام مقایسه، مثال‌ها با روش معیار بهینگی نیز حل خواهند شد. در تمامی مثال‌ها مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر $1500 kgf / cm^2$ و 0.3 می‌باشند. مقدار ضریب جریمه $\mu = 3$ و درجه توابع پایه برابر $p_1 = p_2 = 2$ در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای طولی برابر $L = 8cm$ و $H = 5cm$ مقدار بار نقطه‌ای برابر $P = 100 kgf$ می‌باشند.

مثال یک: در این مثال تاثیر نقاط کنترلی متفاوت در هر دو روش معیار بهینگی و مجانب‌های پویا مورد بررسی قرار گرفته است. یک تیر کنسول تحت یک بار متمرکز در گوشه انتهایی در نظر گرفته شده است (شکل ۵-۱۴ الف). در تمام شبکه‌بندی‌ها، بردارهای گرهی باز با فواصل مساوی در هر دو جهت مورد استفاده قرار می‌گیرند. مقدار مصالح مورد استفاده در سازه برابر ۴۰ درصد سازه در حالت کامل لحاظ می‌شود. شبکه‌بندی‌های مورد استفاده در این مثال به ترتیب شامل ۱۸۷، ۴۰۰ نقطه کنترلی، ۴۰ وصله با ۱۰۹۳ نقطه و در نهایت ۹۶ وصله با ۱۶۱۷ نقطه کنترلی می‌باشد. نتایج به ترتیب برای MMA در شکل‌های (۵-۱۴پ) تا (۵-۱۴ ر) و برای OC در (۵-۱۴ ت) تا (۵-۱۴ ز) نشان داده شده‌اند. چنانچه مشاهده می‌شود، در تمام موارد بالا نتایج به دست آمده از MMA بسیار مشابه نتایج حاصل از OC است. همچنین با افزایش تعداد نقاط کنترلی چه در حالت یک وصله و چه تعداد بیشتر وصله‌ها، ترکیب‌های به دست آمده دارای نقاط خاکستری کمتری هستند. به علاوه مشاهده می‌شود که در بیشتر نتایج به دست آمده با گسسته سازی‌های متفاوت یکی است. تنها در شکل (۵-۱۴ ر)

است که نتیجه به دست آمده از روش MMA تفاوت کمی با بقیه شکل‌ها دارد. این موضوع، یعنی وابسته بودن نتیجه بهینه‌سازی به نحوه شبکه بندی یکی از مباحث مهم و مورد توجه در بحث بهینه‌سازی توپولوژی به روش توزیع مصالح است. شکل (۵-۱۵) تاریخچه تکرار انرژی کرنشی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد. چنانچه مشاهده می‌شود در تمام موارد روند همگرایی تابع هدف، یعنی انرژی کرنشی در روش مبتنی بر MMA بهتر بوده است. به علاوه با افزایش تعداد نقاط کنترلی، مقادیر بهتری برای این تابع حاصل شده است.



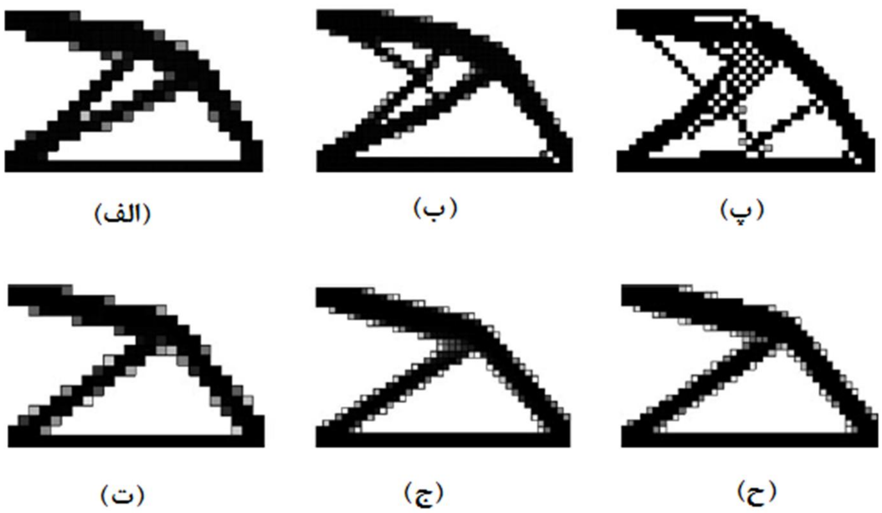
شکل (۵-۱۴) تیر کنسول کوتاه (الف) تعریف مسئله (ب) شبکه نقاط کنترلی با ۱۸۷ نقطه (پ) و (ت) توپولوژی بهینه با ۱۸۷ (ج) و (ح) ۴۰۰ (د) و (ذ) ۶۹۳ و (ر) و (ز) ۱۶۱۷ نقطه کنترلی به ترتیب از MMA و OC



شکل (۵-۱۵) نمودار تغییرات انرژی کرنشی برای تیر کنسول کوتاه (الف) ۱۸۷ (ب) ۴۰۰ (ج)۶۹۳ (د) ۱۶۱۷ نقطه کنترلی- آبی: MMA ، قرمز: OC

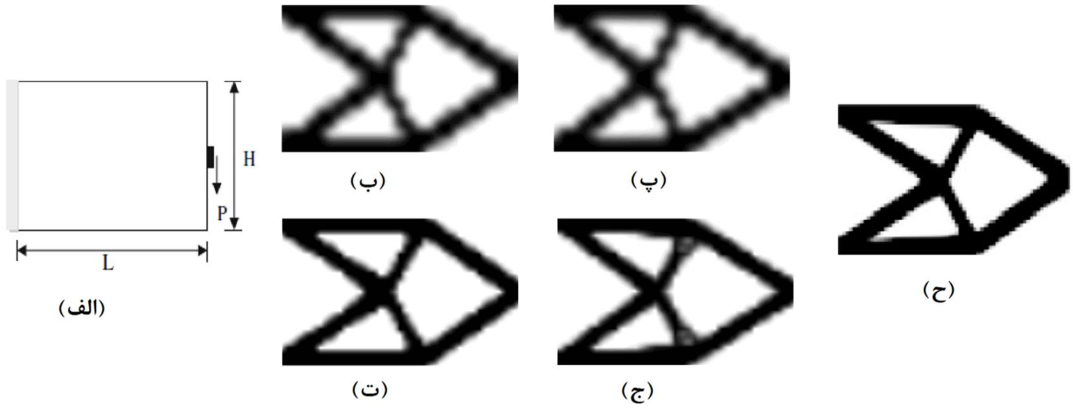
جهت مقایسه روش‌ها، این مسئله در اینجا دوباره با استفاده از روش SIMP مبتنی بر اجزای محدود حل می‌شود. بدین منظور از مش‌هایی با ۳۸۴ و ۱۰۰۰ المان استفاده شده است که نتایج آنها به ترتیب در شکل‌های (۵-۱۶ الف) و (۵-۱۶ ب) نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که نتایج متفاوت است. به علاوه حل این مسئله با استفاده از المان چهار گرهی نیز منجر به ناپایداری ایجاد نقاط شطرنجی می‌شود که در شکل (۵-۱۶ ج) مشاهده می‌شود. چنانچه پیشتر ذکر گردید این موضوعات به عنوان یکی از مشکلات ناپایداری شناخته شده در این روش مطرح می‌باشد. خوانندگان برای مطالعه بیشتر در این مورد می‌توانند به مرجع (Hassani et al., 1999) این رساله مراجعه نمایند. در میان روش‌های مختلفی که برای مرتفع ساختن این ناپایداری‌ها وجود دارد، استفاده از تکنیک حذف

نویز که توسط بندسو و زیگموند (Bendsoe et al., 2003) پیشنهاد شد، منجر به پاسخ هایی می‌شود که برای هر یک از مش‌های نام برده شده به ترتیب در شکل‌های (۵-۱۶ ت) تا (۵-۱۶ ح) نشان داده شده است. توجه شود که توپولوژی حاصله برای همه شبکه بندی‌های مختلف یکسان بوده و در واقع مطابق با نتایج به دست آمده از ایزوژئومتریک (شکل ۵-۱۴) می‌باشد.



شکل (۵-۱۶) SIMP با اجزای محدود (الف) ۳۸۴ و (ب) ۱۰۰۰ المان هشت گرهی، (پ) المان چهار گرهی، (ت و ج و ح) به ترتیب انجام تکنیک حذف نویز

مثال دو: در این مثال توانایی این روش در یافتن توپولوژی بهینه و تاثیر تعداد نقاط کنترلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور دو مش کنترلی جداگانه با ۴۰۰ و ۱۶۱۷ نقطه کنترلی برای گسسته سازی دامنه و تابع چگالی مصالح به کار رفته‌اند. هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی در شکل (۵-۱۷ الف) نشان داده شده‌اند. درجه توابع پایه نربز برابر ۲ لحاظ می‌شود. نتایج حاصله از روش MMA در شکل‌های (۵-۱۷ ب ، ت) نشان داده شده‌اند. شکل (۵-۱۷پ ، ج) نتایج OC را نشان می‌دهند. مشاهد می‌شود که نتایج یکسان است. علاوه بر این، بار دیگر مشاهده می‌شود که تعداد مش به کار رفته نتایج را تغییر نداده است. طراحی بهینه حاصل توسط زیگموند از مرجع (Bendsoe et al., 2003) به روش SIMP در شکل(۵-۱۷ ح) نشان داده شده است.

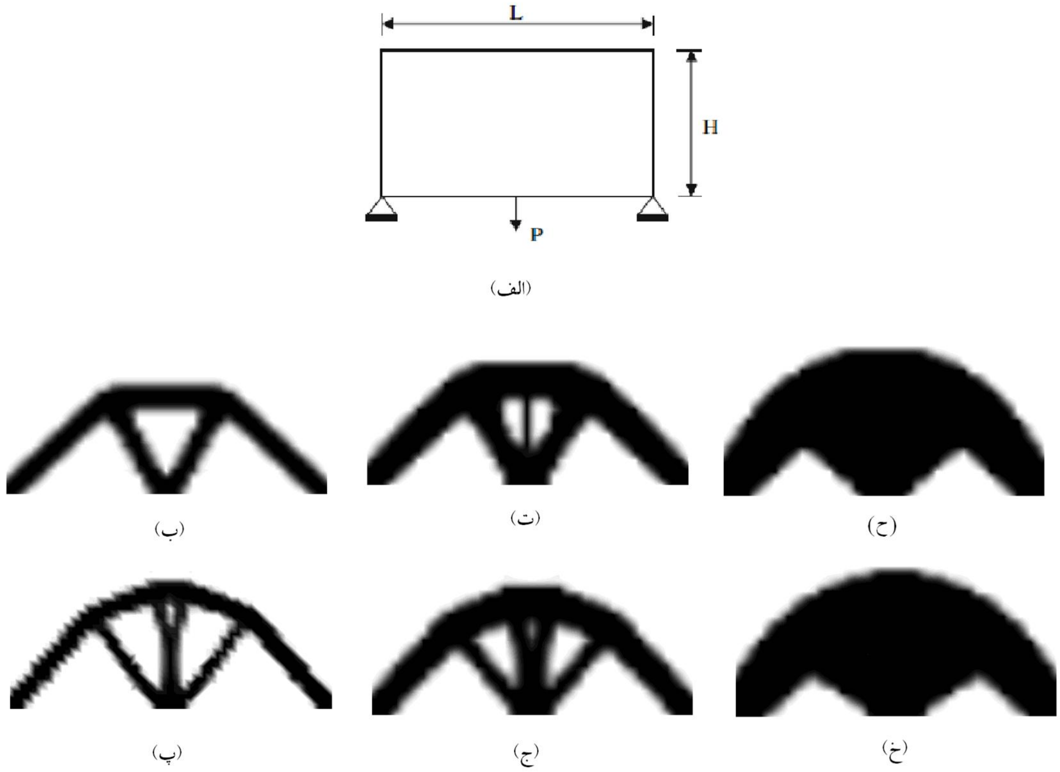


شکل (۵-۱۷) (الف) هندسه اولیه، نتایج (ب) و (ت) MMA و (پ) و (ج) OC به ترتیب ۴۰۰ و ۱۶۱۷ نقطه کنترلی (ح)نتیجه SIMP (Bendsoe et al., 2003)

مثال سه: حد مصالح مورد استفاده در طراحی بر طرح به دست آمده موثر است. در این مثال این موضوع را با استفاده از یک تیر کوتاه با سه کسر حجمی مختلف ۲۰٪، ۳۰٪ و ۵۰٪ بررسی خواهیم نمود. دامنه طراحی به همراه شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری در شکل (۵- ۱۸الف) نشان داده شده است. برای این تیر ۹۶ وصله با ۱۶۱۷ نقطه کنترلی جهت گسسته سازی به کار رفته است و درجه تابع پایه نربز نیز برابر ۲ منظور شده است. نتایج این مثال نیز در شکل ۶ نشان داده شده‌اند. شکل‌های (۵-۱۸ ب و ت وح) نتایج مربوط به MMA و شکل‌های (۵-۱۸ پ و ج و خ) نتایج روش OC را نشان می‌دهند. تفاوت بین روش‌های مورد استفاده در این روش بهتر مشهود است. این تفاوت علاوه بر مرزها در توپولوژی های به دست آمده نیز نمایان است. با اضافه شدن مقدار مصالح قابل استفاده، این اختلاف کمتر می‌شود.

۵-۳-۳-۲- مسائل پوسته

در مثال‌های قبلی کارایی روش استفاده از تابع چگالی پیوسته و تقریب آن با توابع نربز با بررسی مسائل مسطح و مقایسه آن با نتایج اجزای محدود نشان داده شد. در این بخش مثال‌هایی از پیدا کردن توپولوژی بهینه سازه‌های پوسته‌ای را بررسی می‌کنیم.

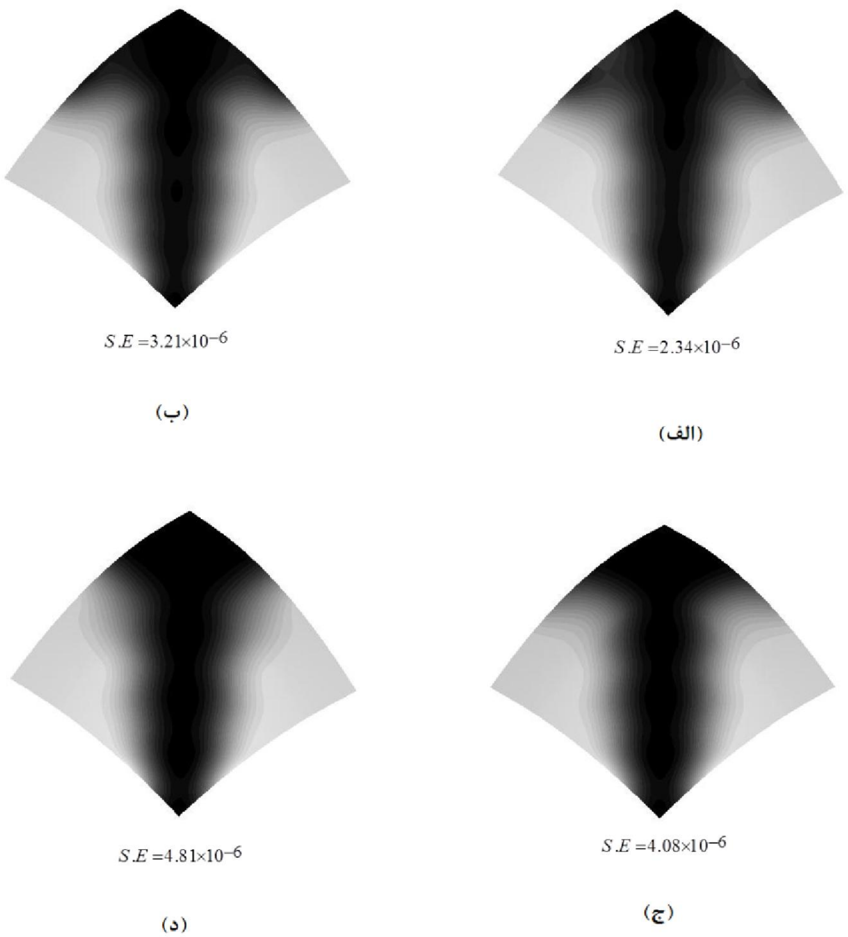


شکل (۵-۱۸) (الف) هندسه اولیه، نتایج با (ب وپ) ۲۰٪ (ت و ج) ۳۰٪ و (ح و خ) ۵۰٪ مصالح، به ترتیب MMA و OC

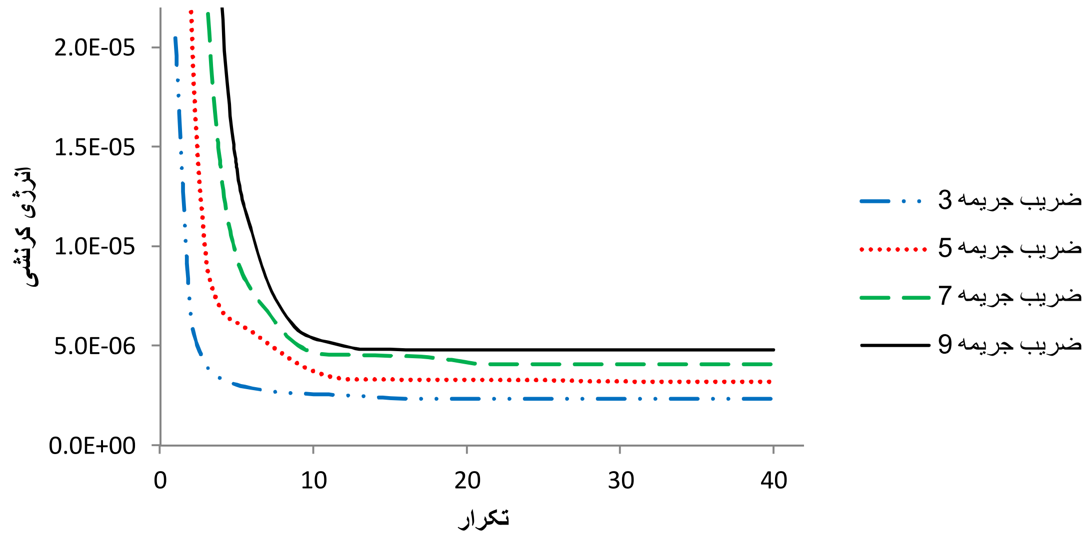
مثال یک: به عنوان اولین مثال، سازه مثال یک بخش بهینه‌سازی شکل (شکل ۵-۵ الف) را در نظر می‌گیریم. در بخش بهینه‌سازی شکل، شکل بهینه سازه تحت بارگذاری نشان داده شده به دست آمد. در اینجا بهترین چیدمان سازه با ثابت نگه داشتن شکل آن به دست می‌آید. ابعاد و مشخصات مکانیکی همانند مسئله شکل هستند. ضخامت در اینجا برابر $t = 0.5$ در نظر گرفته شده است. مقدار مصالح قابل استفاده برابر ۵۰ درصد کل سازه اعمال می‌شود. در اینجا هم با توجه به تقارن، یک چهارم سازه مدلسازی می‌شود.

برای حل مسئله ابتدا از یک شبکه درشت ۷ در ۷ از نقاط کنترلی شروع می‌کنیم. همچنین مسئله را با ضرایب مختلف جریمه حل می‌کنیم تا تاثیر آن مشاهده شود. نتایج حل در شکل (۵-۱۹) نشان داده شده است. در این شکل نقاط سیاه نشان دهنده چگالی یک و وجود مصالح است در حالی که محدوده سفید ناحیه چگالی صفر یا به عبارت دیگر بدون مصالح را نشان می‌دهد. چنانچه مشاهده

می‌شود، نتایج به دست آمده با ضرایب جریمه مختلف تفاوت اندکی با هم دارند. همانطور که اشاره شد این ضریب نقش جریمه تابع چگالی را برای حذف مقادیر بینابین صفر و یک بر عهده دارد و موجب حذف نقاط خاکستری خواهد شد. در این مثال با توجه به درشت بودن شبکه‌بندی، نقاط خاکستری زیادی در مرزها به وجود آمده است. با مشاهده شکل (۵-۱۹) ملاحظه می‌گردد که با افزایش مقدار ضریب جریمه، شکل تا حدودی واضح‌تر می‌شود، اما مقدار انرژی کرنشی نهایی بزرگتری به دست می‌آید. به عبارت دیگر نتایج مربوط به ضریب جریمه کوچکتر و یا بدون این ضریب، سازه سخت‌تری است، اما ممکن است از نظر مهندسی مناسب نباشد. شکل (۵-۲۰) نمودار تغییرات انرژی کرنشی در حین گام های بهینه‌سازی را نشان می‌دهد. در این شکل نیز تفاوت مقادیر انرژی با ضرایب جریمه مختلف مشاهده می‌شود.



شکل (۵-۱۹) نتایج مثال یک با شبکه ۷ در ۷: الف) $\mu = 3$ ب) $\mu = 5$ ج) $\mu = 7$ د) $\mu = 9$



شکل (۵-۲۰) نمودار تغییرات انرژی کرنشی مثال اول با شبکه‌بندی ۷ در ۷

حال مسئله را برای شبکه‌بندی ریزتر ۱۶ در ۱۶ نقطه کنترلی حل می‌کنیم. حاصل برای ضرایب جریمه ۳ و ۵ به ترتیب در شکل (۵-۲۱ الف) و (۵-۲۱ ب) نشان داده شده است. چنانچه در شکل (۵-۲۱ الف) مشاهده می‌شود، سازه به دست آمده با ضریب جریمه ۳ دارای اعضای زیادی است و نقاط خاکستری بیشتری دارد. در حالی که سازه شکل (۵-۲۱ ب) یک دارای یک عضو است که از مرکز به نقطه تکیه‌گاه می‌رسد. توجه داشته باشید که طراح می‌تواند انتخاب نماید که کدام گزینه مطلوب تر است؛ سازه سخت‌تر با پیچیدگی بیشتر و یا سازه‌ای کمی نرم تر ولی ساده‌تر. ما در اینجا گزینه دوم را انتخاب می‌کنیم و مسئله را با ضریب جریمه ۵ حل می نماییم. در نهایت با دو شبکه‌بندی ۲۶ در ۲۶ و ۳۶ در ۳۶ مسئله را حل می‌کنیم که در شکل (۵-۲۲) نشان داده شده است. با مشاهده این شکل دو نکته قابل توجه به نظر می‌رسد. اول اینکه با ریزتر شدن شبکه‌بندی نقاط خاکستری مرزی کمتر می‌شوند. نکته دوم حفره کوچک در شکل به دست آمده از شبکه‌بندی ۳۶ در ۳۶ است. هر چند این حفره از نقاط خاکستری تشکیل شده اما نشان می‌دهد با تغییر شبکه‌بندی نتیجه، هر چند جزئی، می‌تواند متفاوت باشد. موضوع وابستگی پاسخ به شبکه‌بندی در بهینه‌سازی توپولوژی همواره وجود داشته است. در مثال بعدی این موضوع را بیشتر بررسی می‌کنیم. شکل کامل

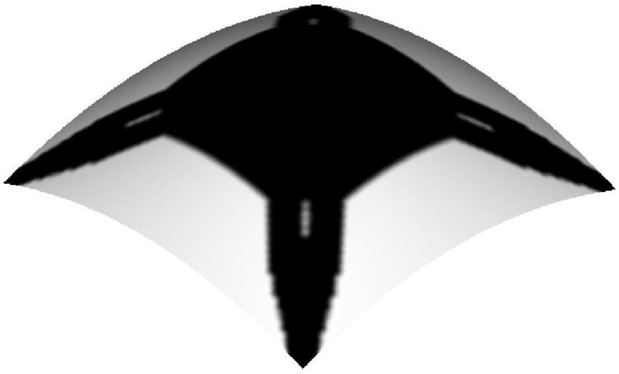
سازه به دست آمده از حل شبکه ۳۶ در ۳۶ در شکل (۵-۲۳) نشان داده شده است. مشاهده شکل کامل نشان می‌دهد که اعضای سازه در نواحی مورد نیاز برای انتقال بار به تکیه‌گاه تشکیل شده‌اند.

(ب) (الف)

شکل (۵-۲۱) حل مثال یک با شبکه‌بندی ۱۶ در ۱۶: الف) $\mu = 3$ ب) $\mu = 5$

(ب) (الف)

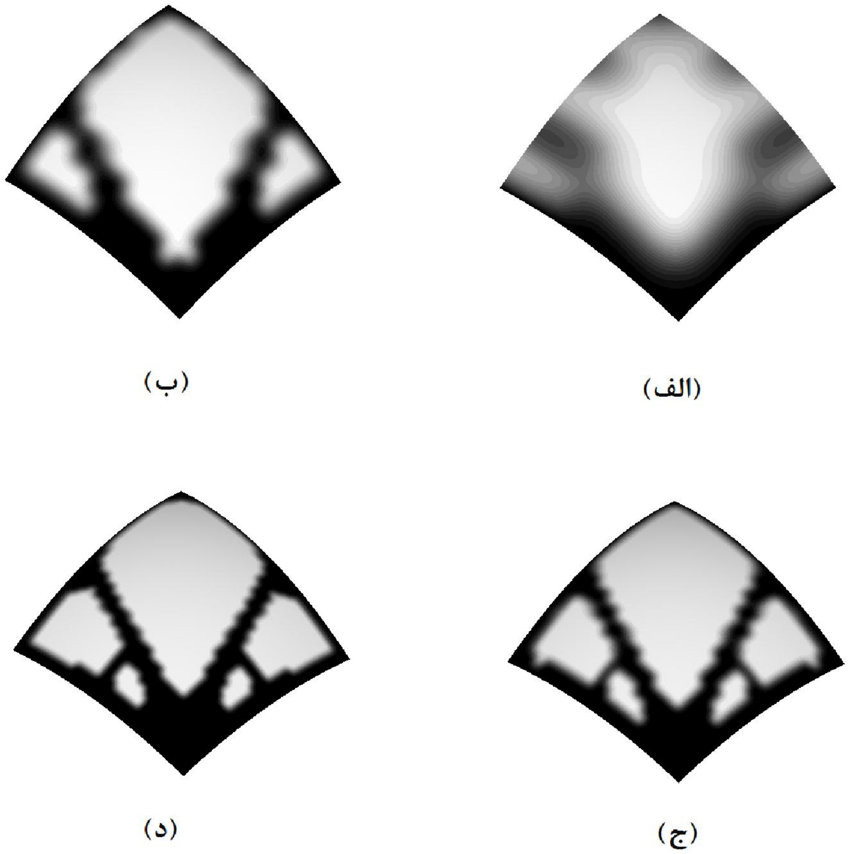
شکل (۵-۲۲) نتایج حل مثال یک: الف) شبکه‌بندی ۲۶ در ۲۶ ب) شبکه‌بندی ۳۶ در ۳۶



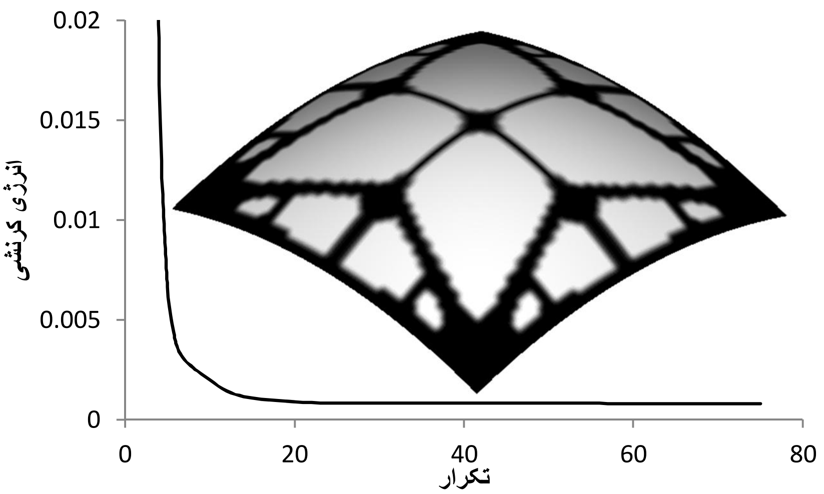
شکل (۵-۲۳) شکل کامل توپولوژی بهینه سازه مثال یک

مثال دو: در این مثال همانند بخش بهینه‌سازی شکل، مثال قبلی را با بارگذاری و شرایط مرزی متفاوت مثل شکل (۵-۹) در نظر می‌گیریم. این بار بهترین توپولوژی سازه را با مقدار مصالح برابر ۴۰ درصد کل سازه به دست می‌آوریم. مانند مثال قبلی ضریب جریمه $\mu = 5$ را برای این مسئله به کار می بریم. شکل (۵-۲۴) الف تا ج، نتایج را به ترتیب برای شبکه‌های کنترلی ۷ در ۷، ۱۶ در ۱۶، ۲۶ در ۲۶ و ۳۶ در ۳۶ نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود در شکل (۵-۲۴ الف) شبکه ۷ در ۷ منجر به پاسخ واضحی نشده است و نقاط خاکستری زیادی در دامنه به وجود آمده است. شکل (۵-۲۴ ب) برای شبکه با ۱۶ نقطه کنترلی در هر جهت به دست آمده که بر خلاف ۷ در ۷ توپولوژی واضحی از آن حاصل شده است. مشاهده می‌شود که شکل‌های (۵-۲۴ ج) و (۵-۲۴ د) که به ترتیب نتایج شبکه‌های ۲۶ در ۲۶ و ۳۶ در ۳۶ هستند، متفاوت با شکل (۵-۲۴ ب) به دست آمده‌اند. در این مثال با ریزتر شدن شبکه، توپولوژی بهینه تغییر محسوسی دارد. اما با توجه به اینکه شکل‌های (۵-۲۴ ج) و (۵-۲۴ د) توپولوژی یکسانی دارند، به نظر می‌رسد پاسخ همگرا شده است و این نتیجه را می‌توان گرفت که نتایج شبکه‌های ۷ در ۷ و ۱۶ در ۱۶ به خاطر کم بودن تعداد نقاط کنترلی قابل قبول نیستند. در هر صورت مسئله وابستگی به شبکه‌بندی بحث مفصلی را می طلبد که می‌تواند به عنوان پیشنهادی برای

مطالعات آتی مورد استفاده قرار گیرد. شکل (۵-۲۵) نمودار تغییرات انرژی کرنشی را به همراه توپولوژی نهایی شکل کامل سازه برای شبکه‌بندی ۳۶ نقطه کنترلی در هر جهت نشان می‌دهد.



شکل (۵-۲۴) توپولوژی بهینه مثال دو برای شبکه‌های نقاط کنترلی با الف) ۷ ب) ۱۶ ج) ۲۶ و د) ۳۶ نقطه کنترلی در هر جهت



شکل (۵-۲۵) نمودار تغییرات انرژی کرنشی و توپولوژی شکل کامل سازه مثال دو برای شبکه کنترلی ۳۶ در ۳۶

۵-۴- بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سازه پوسته‌ای

در بخش‌های قبلی مباحثی در بهینه‌سازی شکل و توپولوژی مطرح شد. چنانچه پیشتر ذکر شد در بهینه‌سازی سازه‌ای رسم بر این است که ابتدا توپولوژی یا همان چیدمان سازه تعیین می‌شود و سپس شکل بهینه آن از طریق تغییرات مرزی به دست می‌آید. در مورد سازه‌های پوسته‌ای این موضوع شاید کمی پیچیده تر باشد. در این سازه‌ها چنانچه مشاهده شد دو مبحث تعیین شکل صفحه میانی و نحوه توزیع مصالح روی این شکل مطرح است. اما نمی‌توان گفت که توزیع بهینه مصالح روی یک شکل که از قبل تعیین شده، همواره بهترین طرح خواهد بود. چون سطح میانی بهینه پوسته که در مرحله بهینه‌سازی شکل تعیین شد، با فرض توزیع یکنواخت مصالح در همه محدوده طراحی به دست آمده است.

در این رساله که تمرکز عمده آن بر روی تحلیل و بهینه‌سازی سازه‌های پوسته‌ای است، بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی پوسته معرفی می‌شود. این کار از دو جهت قابل تامل و قابل انجام است. علت اول استفاده از روش بهینه‌سازی مجانب‌های پویا است. چنانچه پیشتر نیز ذکر شد، این روش قابلیت حل مسائل بهینه‌سازی با تعداد زیاد متغیرهای طراحی را دارد. بنابراین در مقایسه با روش‌هایی مثل معیار بهینگی و یا روش‌های ریاضی دیگر مانند خطی سازی متوالی و ... دارای قابلیت های بالاتر و نیز انعطاف پذیری بیشتری است. علت دوم استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک است. با توجه به مطالب عنوان شده در این رساله و مشخصات این روش که مهمترین آن استفاده از پارامترهای یکسان در مدلسازی، تحلیل و طراحی بهینه شکل و توپولوژی است، ملاحظه می‌گردد که مسیر هموارى جهت یکسان سازی و انجام همزمان طراحی شکل و توپولوژی بهینه فراهم می‌باشد. در این بخش بهینه‌سازی همزمان برای روش‌های مبتنی بر اجزای محدود و ایزوژئومتریک ارائه خواهند شد.

۵-۴-۱- روش مبتنی بر اجزای محدود و مدل مصالح مصنوعی گسسته

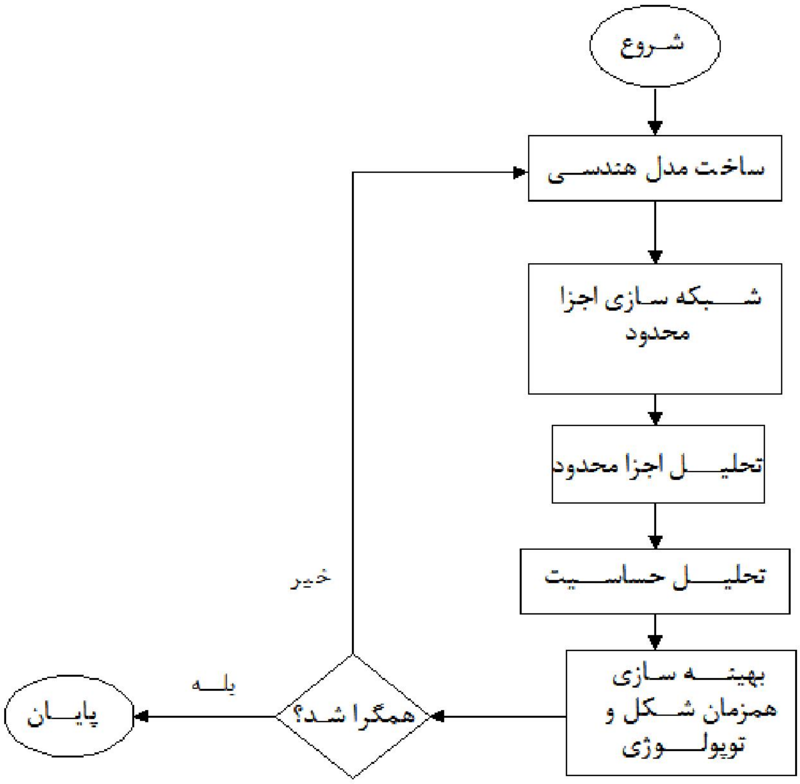
در ابتدا بهینه‌سازی همزمان بر مبنای حل اجزای محدود ارائه می‌شود. در این بخش از روش اجزای محدود برای تحلیل سازه استفاده می‌شود و فرمول‌بندی پارامترهای توپولوژی بر مبنای تابع چگالی مصالح مصنوعی گسسته مطابق بخش (۵-۳-۱) انجام می‌شود. ایده انجام بهینه‌سازی ترکیبی ابتدا توسط آنسولا و همکاران (Ansola et al., 2002) مطرح شد. وی این کار را به صورت یک روند دو مرحله‌ای مطرح نمود که در مرحله اول بهینه‌سازی شکل صفحه میانی پوسته و در مرحله بعد توپولوژی بهینه به دست می‌آید و تا رسیدن به همگرایی این کار ادامه پیدا می‌کند. برای بهینه‌سازی مرحله اول از روش خطی سازی متوالی استفاده نمود و برای مرحله دوم معیار بهینگی را به کار برد.

در این رساله، بهینه‌سازی نه به صورت ترکیبی بلکه به شکل همزمان انجام می‌شود. به عبارت دیگر یک مسئله بهینه‌سازی شامل متغیرهای شکل و توپولوژی وجود دارد. این مسئله را می‌توان به شکل رابطه (۵-۱۹) بیان نمود:

$$
\begin{aligned}
&\min\ c\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \\
&s.t\ V\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) < V^{\max} \\
&x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max} \qquad i=1,\ldots,n \\
&0 \le y_j \le 1 \qquad\qquad j=1,\ldots,m
\end{aligned}
\tag{۱۹-۵}
$$

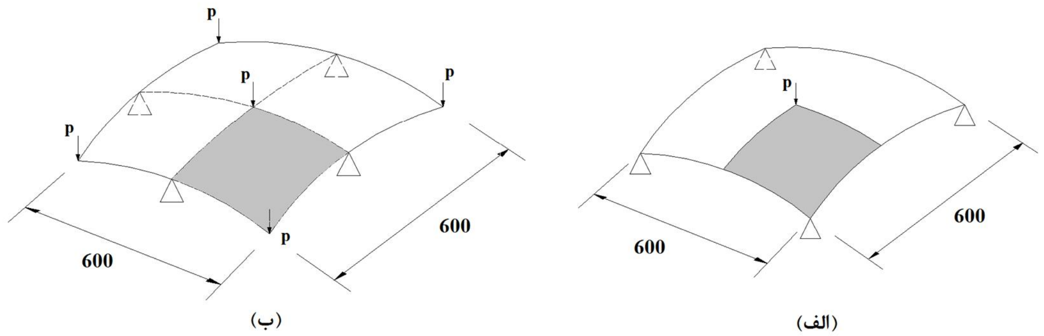
که در این رابطه x_i متغیرهای طراحی شکل و n تعداد آنهاست که با حدود بالا و پایین $x_i^{\max}$ و $x_i^{\min}$ محدود شده‌اند. همچنین y_i چگالی مصالح هر المان است که بین ۰ و ۱ محدود است و به عنوان متغیر طراحی مربوط به توپولوژی مورد استفاده قرار می‌گیرد. m تعداد اجزای محدود مورد استفاده است. شکل (۵-۲۶) فلوچارت این مسئله را نشان می‌دهد. توجه شود که در اینجا از توابع نربز تنها جهت مدلسازی هندسی استفاده می‌شود و بعد از تولید هندسه، شبکه‌بندی انجام شده و سپس تحلیل اجزای محدود صورت می پذیرد. بنابراین در این روش در هر گام بهینه‌سازی یک بار تولید شبکه اجزای محدود انجام می‌شود. هرچند المان‌های اجزای محدود مثال‌های این بخش به سادگی تولید می‌شوند؛ اما توجه شود که در حالت کلی این روش هزینه زیادی صرف تولید این شبکه می

نماید. همچنین چگالی مواد در هر المان محدود مطابق آنچه در بخش (۵-۳-۱) بیان شد ثابت بوده و به عنوان متغیر طراحی توپولوژی به کار می‌رود. در ادامه مثال‌هایی مرور خواهند شد.



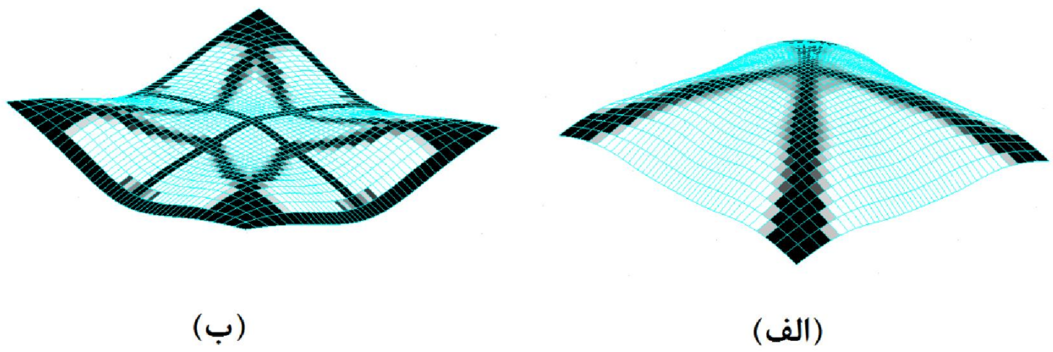
شکل (۵-۲۶) فلوچارت بهینه‌سازی همزمان بر مبنای اجزای محدود

مثال‌ها: در اینجا نیز مثال‌هایی مشابه بخش‌های (۵-۲-۴) و (۵-۳-۳-۲) را در نظر می‌گیریم. شکل اولیه این سازه‌ها به همراه بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی‌شان در شکل (۵-۲۷) نشان داده شده‌اند. باز هم با توجه به تقارن موجود، یک چهارم سازه را می‌توان برای مدلسازی به کار برد. از یک شبکه نقاط کنترلی مشابه شکل (۵-۵ ب) برای مدلسازی هندسی استفاده شده است. همچنین شبکه ۲۰ در ۲۰ از المان پوسته ویلسون برای تحلیل اجزای محدود به کار می‌رود. ضخامت پوسته برابر ۱، مدول الاستیسیته $E = 2\times10^{9}$ و ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین در هر دو مثال ضریب جریمه $\mu = 5$ برای مدل مصالح SIMP به کار رفته است. مقدار مصالح قابل استفاده در هر دو مثال برابر ۵۰٪ کل دامنه طراحی در نظر گرفته شده است.



شکل (۵-۲۷) شکل اولیه سازه‌های مثال‌های بهینه‌سازی همزمان

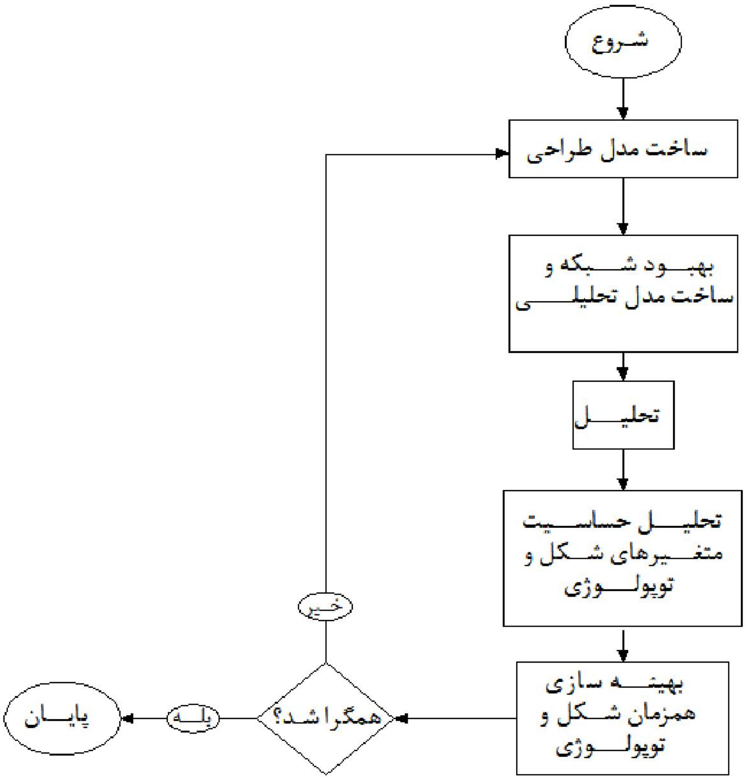
شکل (۵-۲۸ الف و ب) نتایج به دست آمده از بهینه‌سازی همزمان را به ترتیب برای سازه‌های شکل‌های (۵-۲۷ الف) و (۵-۲۷ ب) نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، در این روش مقدار چگالی در هر المان ثابت نگه داشته شده است و به همین خاطر شکل‌ها به صورت پیکسل بندی شده به دست آمده‌اند. هر یک از پیکسل ها نشان دهنده یک المان محدود هستند که المان‌های سیاه رنگ نشان دهنده حضور مصالح و المان‌های سفید نمایانگر نقاط خالی هستند که مصالح در آنها مورد نیاز نبوده است. در اینجا نیز ضریب جریمه μ مانع از تشکیل المان‌های خاکستری رنگ شده است. نتایج به دست آمده از حل این مثال‌ها نشان می‌دهد که می‌توان متغیرهای مربوط به شکل و توپولوژی را در یک مسئله بهینه‌سازی به طور همزمان بهینه نمود. بحث و تفسیر بیشتر در مورد نتایج این بخش در مرجع (Hassani et al., 2013) این رساله موجود است.



شکل (۵-۲۸) نتایج بهینه‌سازی همزمان به ترتیب برای سازه‌های شکل (۵-۲۷ الف) و (۵-۲۷ ب)

۵-۴-۲- بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سازه‌های پوسته‌ای در تحلیل ایزوژئومتریک و مدل چگالی پیوسته

در نهایت در این رساله در جهت تکمیل مباحث مربوط به بهینه‌سازی که تا اینجا اشاره شدند، به بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی پوسته‌ها در تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته می‌شود. ویژگی این روش این است که تمام نکات مثبت مطرح شده مربوط به بهینه‌سازی با روش ایزوژئومتریک را همزمان دارا می‌باشد. در این روش نیز دو دسته متغیر طراحی مربوط به شکل و توپولوژی وجود دارد. بنابراین رابطه مسئله بهینه‌سازی (۵-۱۹) در اینجا نیز برقرار است. متغیرهای مربوط به شکل موقعیت نقاط کنترلی هستند و از مقادیر چگالی نقاط کنترلی به عنوان متغیرهای توپولوژی استفاده می‌شود. باز هم بحث بهبود شبکه وجود دارد. همانند مبحث بهینه‌سازی شکل بخش (۵-۲-۲)، برای بهینه‌سازی شکل از یک شبکه طراحی درشت تر استفاده می‌شود. بعد از بهبود شبکه طراحی، یک شبکه ریزتر برای تحلیل به دست می‌آید. در اینجا از این شبکه تحلیل برای پارامتربندی متغیرهای توپولوژی نیز استفاده می‌شود. به عبارت دیگر چگالی نقاط کنترلی مدل تحلیلی به عنوان متغیر طراحی به کار می‌رود. در بحث تحلیل حساسیت با توجه به دو نوع متغیر طراحی، برای هر کدام، از تحلیل حساسیت خود که در این رساله قبلا اشاره شد استفاده خواهد شد. یعنی تحلیل حساسیت نیمه تحلیلی مطابق رابطه (۵-۹) برای متغیرهای شکل و تحلیل حساسیت تحلیلی برای متغیرهای توپولوژی مطابق رابطه (۵-۱۸) انجام می‌شود. روند حل مسئله در روش مذکور در فلوچارت شکل (۵-۲۹) نشان داده شده است.



شکل (۵-۲۹) فلوچارت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی در ایزوژئومتریک

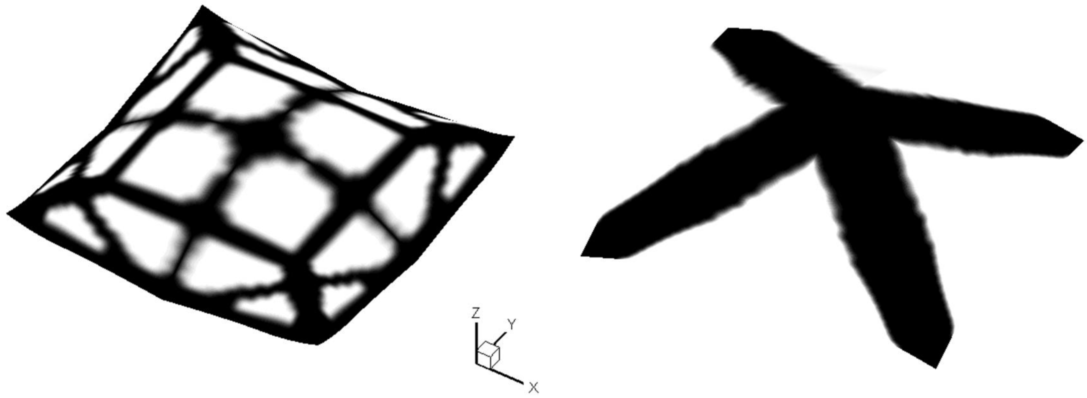
۵-۴-۲-۱- مثال‌های عددی

مثال‌های پوسته با شکل آزاد که تا کنون در بخش‌های مختلف این فصل به کار برده‌ایم را برای بهینه‌سازی همزمان در ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار می‌دهیم. باز هم دو حالت از بارگذاری و شرایط مرزی مطابق شکل (۵-۲۷) در نظر می‌گیریم. تمام مشخصات مکانیکی و هندسی که در مثال‌های بخش‌های (۵-۲-۴) و (۵-۳-۳-۲) بیان شدند در اینجا نیز برقرار هستند. ضخامت سازه را برابر $t = 0.5$ در نظر می‌گیریم. همچنین مطابق بخش (۵-۲-۴) از یک شبکه چهار در چهار از نقاط کنترلی برای مدلسازی سطح میانی پوسته استفاده می‌کنیم که در واقع همان مدل طراحی شکل است (شکل ۵-۵ ب). حدود حرکت عمودی نقاط کنترلی در اینجا بین ۰ و ۱۳ انتخاب می‌شود. برای مدل تحلیلی با بهبود شبکه از شبکه نقاط کنترلی ۲۶ در ۲۶ استفاده می‌شود. با توجه به نتایج بخش

(۵-۲-۴) این شبکه برای تقریب چگالی مصالح کافی است. در اینجا هم از یک چهارم سازه جهت مدلسازی استفاده می‌شود.

شکل (۵-۳۰) نتایج بهینه‌سازی همزمان را برای این مثال‌ها نشان می‌دهد. شکل‌ها به صورت سازه کامل رسم شده‌اند. شکل (۵-۳۰ الف) مربوط به حالت اول بارگذاری و شکل (۵-۳۰ ب) طرح نهایی سازه حالت دوم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که هر دو عمل پیدا کردن شکل بهینه سطح میانی و توزیع بهینه مصالح در دامنه طرح در این مثال‌ها به صورت همزمان انجام شده است. برای سازه با یک بار میانی، مانند همه نتایجی که تا به حال به دست آمده بود، شکل حاصل شبیه به یک خرپای هرمی شکل به دست آمده که بار را مستقیما به چهار تکیه‌گاه منتقل می‌کند. نقطه میانی زیر بار تا بیشترین حد خود به سمت بالا حرکت کرده است تا انتقال نیرو تا حد ممکن به صورت غشایی انجام شود. مشابه این نتیجه در روش مبتنی بر اجزای محدود بخش (۵-۴-۱) (شکل۵-۲۸ الف) نیز به دست آمده است.

نتیجه به دست آمده از مسئله دوم (شکل ۵-۳۰ ب) نیز قابل توجه است. با دقت در این شکل مشاهده می‌شود که چیدمان اعضای به دست آمده مشابه نتیجه حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی این سازه است که در بخش (۵-۲-۴) انجام شده بود (شکل۵-۲۵). از طرفی مقایسه این شکل با نتیجه حاصل از روش همزمان در اجزای محدود (شکل۵-۲۸ ب) نشان می‌دهد که شکل صفحه میانی مشابه در هر دو روش مبتنی بر اجزای محدود و ایزوژئومتریک مشابه هم به دست آمده اند. اما توپولوژی به دست آمده تفاوت دارد. در توپولوژی به دست آمده در روش ایزوژئومتریک دو عضو کوچک در هر یک از گوشه‌ها اضافه شده است. با توجه به اینکه ابعاد و ویژگی‌های مکانیکی و همچنین حدود حرکت نقاط کنترلی در دو حالت متفاوت است، این تفاوت اندک قابل اغماض به نظر می‌رسد.

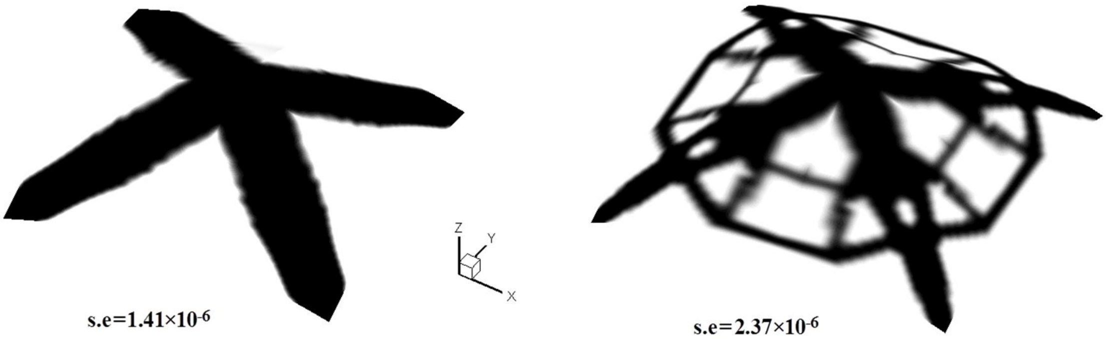


(ب) (الف)

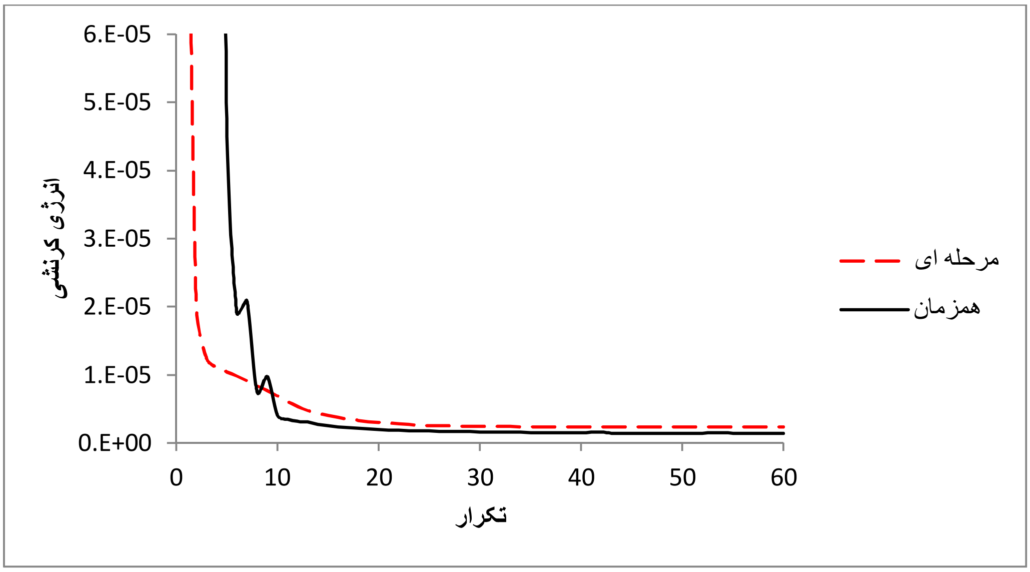
شکل (۵-۳۰) نتایج بهینه‌سازی همزمان در روش مبتنی بر ایزوژئومتریک: الف) سازه شکل (۵-۲۸ الف) ب) سازه شکل (۵-۲۸ ب)

در نهایت به منظور مقایسه روش‌ها، مثال‌های حل شده را طور دیگری بررسی می‌کنیم. به این ترتیب به جای حل همزمان مسائل شکل و توپولوژی، ابتدا شکل بهینه سطح میانی را به دست می‌آوریم و سپس کار توزیع مصالح را انجام می‌دهیم. سایر پارامترهای مسائل بدون تغییر باقی می‌ماند. نتیجه این کار برای مسئله اول در شکل (۵-۳۱ الف) نشان داده شده است. شکل (۵-۳۱ ب) نیز حاصل بهینه‌سازی همزمان را دوباره نشان داده است. در هر یک از شکل‌ها انرژی کرنشی نهایی مشخص شده است. ملاحظه می‌شود که نتیجه به دست آمده از حل جداگانه شکل و توپولوژی کاملا متفاوت با حل همزمان است. این طرح نسبت به نتیجه طرح حل همزمان دارای اعضای بیشتری است و از نقطه نظر مهندسی چندان مناسب نیست. از طرفی با توجه به شکل (۵-۳۱) مشاهده می‌شود که انرژی کرنشی به دست آمده از حل همزمان مقدار کمتری نسبت به حل مرحله ای دارد. این امر نشان می‌دهد نتیجه حل همزمان سازه سخت‌تری نسبت به حل مرحله‌ای است. در واقع در حل همزمان، چون سطح میانی و توزیع مصالح یکجا بهینه‌سازی می‌شوند، در قالب یک مسئله حل شده و نتیجه بهینه واقعی حاصل می‌شود در حالی که در حل مرحله ای توزیع بهینه مصالح روی سطح بهینه ای که از

قبل به دست آمده انجام شده است که نمی‌تواند لزوما بهترین طرح باشد. نمودار تغییرات انرژی کرنشی برای دو حالت این مثال در شکل (۵-۳۲) نشان داده شده است.

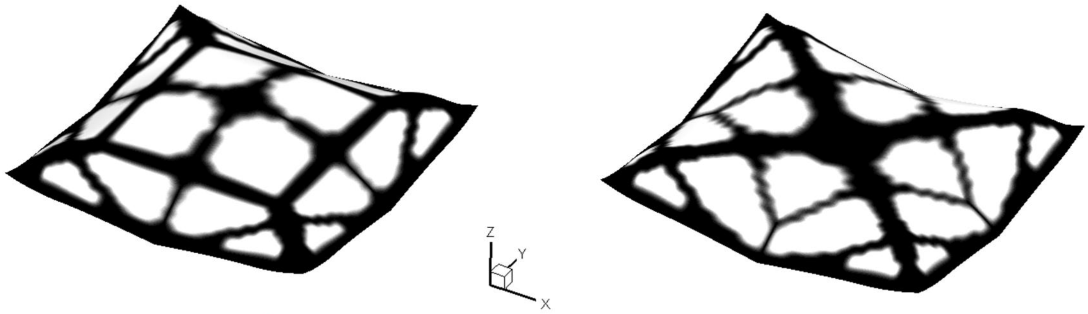


شکل (۵-۳۱) نتایج حل و مقدار انرژی کرنشی نهایی مثال اول الف) بهینه سازه مرحله ای، ب) بهینه‌سازی همزمان



شکل (۵-۳۲) تغییرات انرژی کرنشی بهینه‌سازی همزمان و مرحله ای مثال اول

همین کار برای مثال دوم نیز انجام شده است. نتیجه بهینه‌سازی مرحله‌ای و همزمان به ترتیب در شکل‌های (۵-۳۳ الف) و (۵-۳۳ ب) نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که باز هم نتایج متفاوت و مقدار انرژی نهایی حاصل از بهینه‌سازی همزمان کمتر است.



s.e=1.16×10-4   s.e=1.43×10-4

(ب)   (الف)

شکل (۵-۳۳) نتایج حل و مقدار انرژی کرنشی نهایی مثال دوم الف) بهینه سازه مرحله ای، ب) بهینه‌سازی همزمان

در مجموع مثال‌های حل شده در این بخش نشان می‌دهد با استفاده از روش ایزوژئومتریک برای تحلیل سازه و به کمک روش مجانب‌های پویا برای انجام بهینه‌سازی می‌توان به جای دو مسئله جداگانه شکل و توپولوژی، یک مسئله واحد شامل هر دو متغیرهای طراحی را حل نمود. همچنین مقایسه نتایج این مسئله با بهینه‌سازی جداگانه نشان از بهتر بودن پاسخ روش همزمان یا تجمیعی دارد.

فصل ششم

نتایج و پیشنهادات

۶-۱- مقدمه

بحث سازه‌های پوسته‌ای یک از مباحث جالب در مهندسی سازه است و به دلیل کاربرد و اهمیت زیاد آن در صنعت مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. البته به دلیل پیچیدگی های هندسی نسبت به سایر سازه‌ها، مدلسازی، تحلیل و طراحی پوسته‌ها نیاز به توجه خاصی دارد. در این رساله با توجه به اهمیت این سازه‌ها، به این موضوع پرداخته شده است؛ طوری که اکثر مطالب آن حول مبحث تحلیل و بهینه‌سازی پوسته‌ها گرد آوری شده است.

روش ایزوژئومتریک، بعد از گذشت یک دهه از معرفی آن، به عنوان یک روش قدرتمند در حل بسیاری از مسائل مهندسی از جمله مسائل سازه مطرح است. بسیاری از ویژگی‌های تحلیل ایزوژئومتریک مانند روش اجزای محدود است. همچنین این روش مزیت‌های زیادی نسبت به اجزای محدود کلاسیک دارد. در طول یک دهه گذشته این روش در حوزه‌های مختلف تحلیل مورد توجه محققین بوده است. در این رساله سعی شده است از این روش برای انجام تحلیل سازه‌های پوسته‌ای در مرحله اول و سپس طراحی بهینه آنها استفاده شود.

می‌توان گفت هدف نهایی در این رساله رسیدن به یک رهیافت یکسان جهت تحلیل و طراحی سازه بوده است. موضوعی که با توسعه روش ایزوژئومتریک مطرح شده است و روز به روز ابعاد بیشتری از آن پدیدار می‌گردد. فراموش نکنیم که توابع نربز که پایه و اساس تحلیل ایزوژئومتریک هستند، پیش از آنکه در تحلیل مورد استفاده قرار گیرند، از چندین دهه قبل به عنوان ابزارهای مدلسازی هندسه کامپیوتری به کار گرفته می شوند. طبیعی است که با به کار گیری آنها در تحلیل، مسیر هموار جهت یکسان سازی پارامترهای تحلیل و طراحی به وجود می‌آید. این موضوع به دلیل برطرف ساختن

نیاز تولید شبکه برای پیوند مدل‌های هندسی و تحلیلی باعث کاهش چشمگیر هزینه‌های محاسباتی، به خصوص در سازه‌های پیچیده بوده است. در این رساله سعی شده است در همین جهت گام هایی برداشته شود. در پایان این رساله ابزاری تهیه شده است که همزمان با استفاده از پارامترهای مشترک، کار تحلیل و طراحی همزمان شکل و توپولوژی پوسته‌ها را انجام می‌دهد. در ذیل نتایج حاصل از رساله به همراه پیشنهادات برای کارهای آینده بیان خواهد شد.

۶-۲- نتایج

خلاصه نتایج به دست آمده از این رساله به شرح ذیل می‌باشد:

- تحلیل ایزوژئومتریک به عنوان روشی توانا که علاوه بر داشتن شباهت زیاد با اجزای محدود، مزایای دیگر از نظر هندسی، پیوستگی، شبکه بندی و ... نسبت به آن دارد، شناخته شده است. با توجه به قابلیت‌های این روش می‌توان با ادغام پارامترهای طراحی و تحلیل، این دو فرایند را تجیمع نمود. در این رساله سعی شد برای سازه‌های پوسته‌ای این کار انجام شود.
- از آنجا که توابع نربز به عنوان توابع شکل در روش ایزوژئومتریک به کار می‌روند و با توجه به اینکه این توابع در ابتدا برای تولید هندسه ابداع شده بودند، می‌توان انتظار داشت که مدلسازی هندسی در این روش در مقایسه با اجزای محدود معمول، هموارتر باشد. این موضوع برای سازه‌های پوسته‌ای که هندسه پیچیده‌ای دارند بیشتر نمود پیدا می کند. در این رساله نشان داده شد که مدلسازی، تحلیل و طراحی پوسته‌های با شکل آزاد با این روش می‌تواند انجام گیرد.
- برای تحلیل پوسته از مبانی تئوری میندلین رایزنر استفاده شد. در این تئوری با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی، مقادیر تغییر مکان و چرخش به عنوان دو پارامتر مستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به اینکه این روش نیاز به پیوستگی C^1 در توابع شکل ندارد، به عنوان یک پارادایم در روش های عددی تحلیل پوسته ها و صفحات خمشی مطرح بوده است. البته در سال های اخیر با توجه به قابلیت‌های توابع نربز و تامین پیوستگی بالاتر نسبت به توابع شکل اجزای محدود، از تئوری کیرشهف نیز در این مسائل استفاده شده است.

- به طور خلاصه می‌توان گفت در روش تحلیل ارائه شده در این رساله از دستگاه محورهای مختصات محلی استفاده شد که برای هر نقطه دلخواه به طور مجزا، روی سطح میانی پوسته تعریف می‌شوند. به کمک این دستگاه، تغییر مکان های چرخشی را می‌توان تعریف نمود. روش پیدا کردن این دستگاه به طور مفصل در متن رساله تشریح شده است. با اعمال روابط معمول تبدلات دستگاه‌های مختصات، ارتباط بین دستگاه های مختصات محلی و کلی بر قرار می شود.
- در مقایسه با روش اجزای محدود، با توجه به اینکه نقاط کنترلی روی محیط فیزیکی مسئله (در اینجا سطح میانی پوسته) واقع نیستند؛ برای تعریف چرخش ها، با استفاده از یک نگاشت یک به یک، نقطه متناظر با هر نقطه کنترلی در روی سطح فیزیکی به دست می‌آید که دستگاه مختصات محلی در آن نقطه تعریف می‌شود. طبیعی است که این کار خطایی را به همراه دارد. اما با ریزتر شدن شبکه نقاط کنترلی، این خطا کاهش می‌یابد طوری که برای شبکه‌های به اندازه کافی ریز، کاملا پوشش داده می‌شود.
- کلیات روش تحلیل همانند روش اجزای محدود است. با استفاده از روش کار مجازی رابطه کلی برای ماتریس سختی به دست آمده و پس از ترکیب ماتریس‌های هر المان گرهی، ماتریس سختی کل و دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود. برنامه کامپیوتری نوشته شده در این رساله برای حل مسائل مختلف پوسته به کار گرفته شد و نتایج نشان از درستی و کارایی آن دارد.
- در مبحث بهینه سازی توپولوژی، با استفاده از ایده مواد مصنوعی ایزوتروپیک SIMP و استفاده از ویژگی‌های توابع نربز، یک تابع چگالی در محیط دامنه مسئله تقریب زده شد. بدین ترتیب می‌توان از مقادیر این تابع در نقاط کنترلی برای توزیع مصالح در دامنه مسئله استفاده نمود. در نتیجه زمانی که از این مقادیر به عنوان متغیر طراحی استفاده شود، می‌توان یک مسئله بهینه سازی تشکیل داد که توزیع بهینه مصالح را انجام می‌دهد. درستی نتایج این کار در مثال‌های این رساله برای مسائل مختلف دو بعدی و پوسته‌ای نشان داده شد.
- در بحث بهینه سازی شکل، از موقعیت نقاط کنترلی به عنوان متغیر طراحی استفاده شده است. به منظور رسیدن به دقت بیشتر در تحلیل، شبکه نقاط کنترلی مورد استفاده در تولید

هندسه و طراحی شکل، بهبود داده شد و شبکه ریزتری برای مدل تحلیل حاصل شد. به این ترتیب امکان استفاده از تعداد محدودی از متغیرهای طراحی توام با دقت بالا در تحلیل فراهم شده است. مثال‌های بهینه سازی شکل نیز نشان از کارایی روش در به دست آوردن شکل بهینه سازه پوسته‌ای دارد.

- در این رساله مسئله بهینه سازی با معیار سخت ترین سازه یا حداقل سازی کار خارجی در نظر گرفته شد. این معیار با حداقل سازی انرژی کرنشی الاستیک سازه معادل است. در این رساله از روش مجانب‌های پویا (MMA) برای حل این مسئله استفاده شد. برای استفاده از این روش، تحلیل حساسیت به معنی پیدا کردن مقادیر مشتقات توابع هدف و قید در هر گام بهینه سازی مورد نیاز است. این کار در بخش بهینه سازی شکل از روش نیمه تحلیلی و در بخش بهینه سازی توپولوژی به صورت تحلیلی انجام شده است.
- در هر دو مسئله شکل و توپولوژی از پارامترهای مشابهی استفاده می‌شود. همچنین روش بهینه سازی MMA برای هر دو مسئله به کار گرفته می‌شود. بنابراین می‌توان به جای دو مسئله متفاوت بهینه سازی، همه پارامترها را در قالب یک مسئله بیان نمود. این کار در این رساله انجام شده است. ابتدا این مسئله برای روش مبتنی بر اجزای محدود مورد بررسی قرار گرفت. سپس در روش ایزوژئومتریک نیز از این ایده استفاده شد. نتایج مسائل حل شده نشان از کارایی آن دارد. همچنین از مقایسه نتایج این روش که در این رساله تجمیعی نامیده شد، با روش بهینه سازی مجزای شکل و توپولوژی، مشاهده گردید که سازه حاصل از روش تجمیعی، سازه سخت تری به دست آمده است.

۶-۳- پیشنهادات

با وجود گذشت ده سال از معرفی روش ایزوژئومتریک و تحقیقات زیادی که در این مبحث در حوزه‌های مختلف انجام شده است، نمی‌توان گفت همه یا حتی بیشتر ابعاد این موضوع تا کنون روشن شده است. با انجام این رساله که گامی کوچک در مسیر توسعه این روش در تحلیل و طراحی پوسته‌ها

بوده است، ایده‌های دیگری به ذهن نگارنده خطور کرده که در این بخش به آنها اشاره می‌شود. پاره‌ای از مباحث پیشنهادی برای علاقه مندان به این موضوع به شرح ذیل بیان می‌گردد:

- با توجه به استفاده از روش MMA که قابلیت های بالایی در حل مسائل بهینه سازی دارد، می‌توان مباحث متنوع بهینه سازی را حل نمود. به عنوان مثال مسئله حداقل سازی وزن سازه با کنترل مقدار تنش، مسئله بهینه سازی با اعمال قیدهای کمانش و حتی مسائل ترکیبی شامل دو معیار سختی حداکثر توام با وزن حداقل می‌تواند به عنوان موضوات تحقیق مد نظر قرار گیرد.
- در این رساله تحلیل الاستیک خطی پوسته انجام شده است. می‌توان با توسعه آن به تحلیل غیر خطی مسائل عملی‌تر را بررسی نمود.
- مسئله وابستگی پاسخ به نحوه شبکه بندی در مسئله بهینه سازی توپولوژی با استفاده از تابع چگالی پیوسته می‌تواند بیشتر بررسی شود. این موضوع قبلا برای تابع گسسته در اجزای محدود توسط محققان زیادی مورد بررسی قرار گرفت.
- موضوع تحلیل ایزوژئومتریک دینامیکی سازه پوسته‌ای می‌تواند جالب باشد.
- در این رساله از روش نیمه تحلیلی برای تحلیل حساسیت متغیرهای بهینه‌سازی شکل استفاده شد. یافتن مقادیر مشتقات از روش های تحلیلی می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.
- روش MMA تاکنون برای مسائل مختلف بهینه سازی سازه‌ای به کار گرفته شده است. همچنین توسط مبدع روش اصلاحاتی برای حصول پاسخ بهتر در مسائل مختلف انجام شده است. یکی از موضوعات قابل تامل در مباحث مطرح شده در این رساله می‌تواند تغییر الگوی به روز رسانی مجانب‌ها، در این روش باشد. این موضوع می‌تواند نتایج جالبی را در روند رسیدن به همگرایی در حل مسئله بهینه سازی همراه داشته باشد.

منابع

توکلی م.، (۱۳۸۸)، پایان نامه دکتری، "آنالیز و بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها در محیط های پیوسته با استفاده از توابع پایه نربز"، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت.

Adam, C., Bouabdallah, S., Zarroug, M., & Maitournam, H. (2014). Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.

Allaire, G., Jouve, F., & Toader, A. M. (2004). Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. Journal of computational physics,194(1), 363-393.

Anders, D., Weinberg, K., & Reichardt, R. (2012). Isogeometric analysis of thermal diffusion in binary blends. Computational Materials Science, 52(1), 182-188.

Annicchiarico, W., & Cerrolaza, M. (2001). Structural shape optimization 3D finite-element models based on genetic algorithms and geometric modeling.Finite Elements in Analysis and Design, 37(5), 403-415.

Ansola, R., Canales, J., Tárrago, J. A., & Rasmussen, J. (2002). An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures. Computers & structures, 80(5), 449-458.

Arnold, D., & Brezzi, F. (1997). Locking-free finite element methods for shells. Mathematics of Computation of the American Mathematical Society, 66(217), 1-14.

Babuška, I., & Suri, M. (1992). Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. Numerische Mathematik, 62(1), 439-463.

Bazilevs, Y., Beirao da Veiga, L., Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., & Sangalli, G. (2006). Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 16(07), 1031-1090.

Bazilevs, Y., Calo, V. M., Cottrell, J. A., Evans, J. A., Hughes, T. J. R., Lipton, S., ... & Sederberg, T. W. (2010). Isogeometric analysis using T-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(5), 229-263.

Bazilevs, Y., Hsu, M. C., & Scott, M. A. (2012). Isogeometric fluid–structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 249, 28-41.

Bazilevs, Y., Gohean, J. R., Hughes, T. J. R., Moser, R. D., & Zhang, Y. (2009). Patient-specific isogeometric fluid–structure interaction analysis of thoracic aortic blood flow due to implantation of the Jarvik 2000 left ventricular assist device. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,198(45), 3534-3550.

Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W. K., Carpenter, N., & Ong, J. S. (1985). Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements.Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 51(1), 221-258.

Belytschko, T., Xiao, S. P., & Parimi, C. (2003). Topology optimization with implicit functions and regularization. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57(8), 1177-1196.

Bendsoe, M. P., & Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer methods in applied mechanics and engineering, 71(2), 197-224.

Bendsoe, M. P., & Sigmund, O. (2003). Topology optimization: theory, methods and applications. Springer.

Benson, D. J., Bazilevs, Y., Hsu, M. C., & Hughes, T. J. R. (2010). Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(5), 276-289.

Benson, D. J., Bazilevs, Y., Hsu, M. C., & Hughes, T. J. R. (2011). A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200(13), 1367-1378.

Bézier, P. (1970). Numerical control.

Bischoff, M., Bletzinger, K. U., Wall, W. A., & Ramm, E. (2004). Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures. Encyclopedia of computational mechanics.

Bletzinger, K. U., Bischoff, M., & Ramm, E. (2000). A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. Computers & Structures, 75(3), 321-334.

Botkin, M. E. (1992). Three-dimensional shape optimization using fully automatic mesh generation. AIAA journal, 30(7), 1932-1934.

Braess, D. (1998). Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 165(1), 155-174.

Carrera, E., & Brischetto, S. (2008). Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed theories for layered shells. Composite Structures, 85(1), 83-90.

Caseiro, J. F., Alves de Sousa, R. J., & Valente, R. A. F. (2013). A systematic development of EAS three-dimensional finite elements for the alleviation of locking phenomena. Finite Elements in Analysis and Design, 73, 30-41.

Cervera, E., & Trevelyan, J. (2005). Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms. Computers & Structures, 83(23), 1902-1916.

Cesar de sa, J. M. A., Natal Jorge, R. M., Fontes Valente, R. A. and Almeida Areias, P. M. (2002). Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation. International journal for numerical methods in engineering, 53(7), 1721-1750.

Cho, S., & Ha, S. H. (2009). Isogeometric shape design optimization: exact geometry and enhanced sensitivity. Structural and Multidisciplinary Optimization, 38(1), 53-70.

Cho, M., & Roh, H. Y. (2003). Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear co-ordinates. International Journal for numerical methods in engineering, 56(1), 81-115.

Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y. (2009). Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons.

Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y., & Hughes, T. J. R. (2006). Isogeometric analysis of structural vibrations. Computer methods in applied mechanics and engineering, 195(41), 5257-5296.

Cuomo, M., Contrafatto, L., & Greco, L. (2014). A variational model based on isogeometric interpolation for the analysis of cracked bodies. International Journal of Engineering Science, 80, 173-188.

De Boor, C. (1972). On calculating with b-splines. Journal of Approximation Theory, 6(1), 50-62.

De Boor, C. (1978). A practical guide to splines.

Dimitri, R., De Lorenzis, L., Scott, M. A., Wriggers, P., Taylor, R. L., & Zavarise, G. (2014). Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines.Computer methods in applied mechanics and engineering, 269, 394-414.

Dornisch, W., Klinkel, S., & Simeon, B. (2013). Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 253, 491-504.

Elguedj, T., Réthoré, J., & Buteri, A. (2011). Isogeometric analysis for strain field measurements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,200(1), 40-56.

Fleury, C. (1989). CONLIN: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. Structural Optimization, 1(2), 81-89.

Francavilla, A., Ramakrishnan, C. V., & Zienkiewicz, O. C. (1975). Optimization of shape to minimize stress concentration. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 10(2), 63-70.

Gellert, M. (1988). A new method for derivation of locking-free plate bending finite elements via mixed/hybrid formulation. International journal for numerical methods in engineering, 26(5), 1185-1200

Haftka, R. T. (1992). Elements of structural optimization (Vol. 11). Springer.

Haftka, R. T., & Grandhi, R. V. (1986). Structural shape optimization—a survey.Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57(1), 91-106.

Hassani, B., & Hinton, E. Homogenization and structural topology optimization: theory, practice, and software. 1999.

Hassani, B., Tavakkoli, S. M., & Ghasemnejad, H. (2013). Simultaneous shape and topology optimization of shell structures. Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(1), 221-233.

Hassani, B., Tavakkoli, S. M., & Moghadam, N. Z. (2011). Application of isogeometric analysis in structural shape optimization. Scientia Iranica, 18(4), 846-852.

Heinrich, C., Simeon, B., & Boschert, S. (2012). A finite volume method on NURBS geometries and its application in isogeometric fluid–structure interaction. Mathematics and Computers in Simulation, 82(9), 1645-1666.

Höllig, K. (2003). Finite element methods with B-splines (Vol. 26). Siam.

Hosseini, S., Remmers, J. J., Verhoosel, C. V., & Borst, R. (2013). An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 95(3), 238-256.

Hsu, M. C., Akkerman, I., & Bazilevs, Y. (2011). High-performance computing of wind turbine aerodynamics using isogeometric analysis. Computers & Fluids,49(1), 93-100.

Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y. (2005) "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, pp 4135.

Hughes, T. J., Reali, A., & Sangalli, G. (2010). Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. Computer methods in applied mechanics and engineering, 199(5), 301-313.

Imam, M. H. (1982). Three-dimensional shape optimization. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18(5), 661-673.

Kabir, H. R. H. (1995). A shear-locking free robust isoparametric three-node triangular finite element for moderately-thick and thin arbitrarily laminated plates. Computers & structures, 57(4), 589-597.

Kagan, P., Fischer, A., & Bar-Yoseph, P. Z. (1998). New B-Spline Finite Element approach for geometrical design and mechanical analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41(3), 435-458.

Kane, C., & Schoenauer, M. (1996). Topological optimum design using genetic algorithms. Control and Cybernetics, 25, 1059-1088.

Kaveh, A., Hassani, B., Shojaee, S., & Tavakkoli, S. M. (2008). Structural topology optimization using ant colony methodology. Engineering Structures,30(9), 2559-2565.

Kiendl, J. M. (2011). Isogeometric analysis and shape optimal design of shell structures. Shaker.

Kiendl, J., Bazilevs, Y., Hsu, M. C., Wüchner, R., & Bletzinger, K. U. (2010). The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(37), 2403-2416.

Kiendl, J., Bletzinger, K. U., Linhard, J., & Wüchner, R. (2009). Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(49), 3902-3914.

Kiendl, J., Schmidt, R., Wüchner, R., & Bletzinger, K. U. (2014). Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 274, 148-167.

Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 40, 51-88.

Li, K., & Qian, X. (2011). Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. Computer-Aided Design, 43(11), 1427-1437

Liang, Q. Q., & Steven, G. P. (2002). A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints. Computer methods in applied mechanics and engineering, 191(13), 1471-1489.

Liang, Q. Q. (2005). Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications. CRC Press.

Lindby, T., & Santos, J. L. T. (1997). 2-D and 3-D shape optimization using mesh velocities to integrate analytical sensitivities with associative CAD.Structural optimization, 13(4), 213-222.

Love, A. E. H. (1888). The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, 491-546.

Lu, J. (2011). Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,200(5), 726-741.

Manh, N. D., Evgrafov, A., Gersborg, A. R., & Gravesen, J. (2011). Isogeometric shape optimization of vibrating membranes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200(13), 1343-1353.

Michell, A. G. M, (1904). The limits of economy of materilin fram structures. Philos Mag, 8, 305-316.

Nagy, A. P., Abdalla, M. M., & Gürdal, Z. (2010). Isogeometric sizing and shape optimisation of beam structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(17), 1216-1230.

Newman III, J. C., Taylor III, A. C., Barnwell, R. W., Newman, P. A., & Hou, G. J. W. (1999). Overview of sensitivity analysis and shape optimization for complex aerodynamic configurations. Journal of Aircraft, 36(1), 87-96.

Nielsen, P. N., Gersborg, A. R., Gravesen, J., & Pedersen, N. L. (2011). Discretizations in isogeometric analysis of Navier–Stokes flow. Computer methods in applied mechanics and engineering, 200(45), 3242-3253.

Nguyen-Thanh, N., Kiendl, J., Nguyen-Xuan, H., Wüchner, R., Bletzinger, K. U., Bazilevs, Y., & Rabczuk, T. (2011). Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,200(47), 3410-3424.

Pieg, L., & Tiller, W. (1997). The NURBS book.

Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of applied Mechanics, 12, 69-77.

Rozvany, G. I. N. (1989). Structural design via optimality criteria. Springer.

Rozvany, G. I. N., & Zhou, M. (1991). The COC algorithm, part I: cross-section optimization or sizing. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89(1), 281-308.

Rozvany, G. I. (2009). A critical review of established methods of structural topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization, 37(3), 217-237.

Sabin, M. A. (1997). Spline finite elements (Doctoral dissertation, Ph. D. thesis, Leeds University, UK).

Sethian, J. A., & Wiegmann, A. (2000). Structural boundary design via level set and immersed interface methods. Journal of computational physics, 163(2), 489-528.

Schmit, L, A., & Farsi, B. (1974). Some approximation conceptsfor structural synthesis. AIAA J, 12(5), 692-699.

Schoenberg, I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quart. Appl. Math, 4(2), 45-99.

Sederberg, T. W., Cardon, D. L., Finnigan, G. T., North, N. S., Zheng, J., & Lyche, T. (2004, August). T-spline simplification and local refinement. In ACM Transactions on Graphics (TOG) (Vol. 23, No. 3, pp. 276-283). ACM.

Sederberg, T. W., Zheng, J., Bakenov, A., & Nasri, A. (2003, July). T-splines and T-NURCCs. In ACM transactions on graphics (TOG) (Vol. 22, No. 3, pp. 477-484). ACM.

Seo, Y. D., Kim, H. J., & Youn, S. K. (2010). Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis. International Journal of Solids and Structures, 47(11), 1618-1640.

Shi, X., & Mukherjee, S. (1999). Shape optimization in three-dimensional linear elasticity by the boundary contour method. Engineering analysis with boundary elements, 23(8), 627-637.

Shojaee, S., Izadpanah, E., Valizadeh, N., & Kiendl, J. (2012). Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach. Finite Elements in Analysis and Design, 61, 23-34.

Stolarski, H., & Belytschko, T. (1982). Membrane locking and reduced integration for curved elements. Journal of Applied Mechanics, 49(1), 172-176.

Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. International journal for numerical methods in engineering, 24(2), 359-373.

Uhm, T. K., & Youn, S. K. (2009). T-spline finite element method for the analysis of shell structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering,80(4), 507-536.

Van Keulen, F., Haftka, R. T., & Kim, N. H. (2005). Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: Linear systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(30), 3213-3243.

Vázquez, R., & Buffa, A. (2010). Isogeometric analysis for electromagnetic problems. Magnetics, IEEE Transactions on, 46(8), 3305-3308

Wall, W. A., Frenzel, M. A., & Cyron, C. (2008). Isogeometric structural shape optimization. Computer methods in applied mechanics and engineering,197(33), 2976-2988.

Wang, D., Liu, W., & Zhang, H. (2013). Novel higher order mass matrices for isogeometric structural vibration analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 260, 92-108.

Wang, M. Y., Wang, X., & Guo, D. (2003). A level set method for structural topology optimization. Computer methods in applied mechanics and engineering, 192(1), 227-246.

Wilson, E. L. (1998). Three dimensional static and dynamic analysis of structures: a physical approach with emphasis on earthquake engineering. Computers and Structures Inc.

Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. Computers & structures, 49(5), 885-896.

Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1997). Basic evolutionary structural optimization (pp. 12-29). Springer London.

Yang, H. T. Y., Saigal, S. Masud, A. and Kapania, R. K. (2000) "A survey of recent shell finite elements" International Journal for Numerical Methods in Enginering, 47, pp 101.

Yao, T. M., & Choi, K. K. (1989). 3-D shape optimal design and automatic finite element regridding. International Journal for Numerical Methods in Engineering,28(2), 369-384.

Younsi, R., Knopf-Lenoir, C., & Selman, A. (1996). Multi-mesh and adaptivity in 3D shape optimization. Computers & structures, 61(6), 1125-1133.

Yunhua, L. (1998). Explanation and elimination of shear locking and membrane locking with field consistence approach. Computer methods in applied mechanics and engineering, 162(1), 249-269.

Zhang, Y., Bazilevs, Y., Goswami, S., Bajaj, C. L., & Hughes, T. J. (2007). Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. Computer methods in applied mechanics and engineering, 196(29), 2943-2959.

Zhou, J. X., & Zou, W. (2008). Meshless approximation combined with implicit topology description for optimization of continua. Structural and Multidisciplinary Optimization, 36(4), 347-353.

Zhuang, X. Y., Huang, R. Q., Zhu, H. H., Askes, H., & Mathisen, K. (2013). A new and simple locking-free triangular thick plate element using independent shear degrees of freedom. Finite Elements in Analysis and Design, 75, 1-7.

Zienkiewicz, O. C., & Campbell, J. S. (1973). Shape optimization and sequential linear programming. Optimum structural design, 109-126

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2005). The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-heinemann.

Abstract

Investigating of structural analysis and optimal design as well as their integration, is the aim of this research. For this purpose, in the first parts of the thesis, the isogeometric approach is developed for the linear elastic analysis of shell structures. In the following parts, structural shape and topology optimization is investigated.

In the analysis parts, introduction of the NURBS function as well as the isogeometric analysis is followed by the formulation of shell structures. The idea of curvilinear coordinate system is utilized for shell isogeometric analysis. The approach is based on the Mindlin-Reissner theorem. Three displacement and two rotational degree of freedoms is assigned to each control point. Different examples containing free form shell and shell obstacles, are presented to demonstrate the performance of the method.

The idea of SIMP is used for topology optimization. The NURBS functions are used to approximate a density function over the design domain. The control values of this function are used as design variables in optimization problem. Some examples of plane and shell structures, demonstrates the well perforemance of the method. The coordinates of control points are considered as design variables in shape optimization problem. By refining the design control mesh, a finer mesh is generated for the analysis procedure. It means that two different models are used for design and analysis.

In the final part, the simultaneous shape and topology optimization of the shell structures is presented. This approach is first considered for a discrete finite element model. Finally this integrated method is used for isogeometric based approach. It means that all the analysis, shape and topology parameters are formulated by using NURBS functions. It is demonstrated that the integrated approach leads to better results than the seperated shape and topology optimization.

Key words: Isogeometric analysis, shape optimization, topology, shell structures

University of Shahrood

Faculty of Civil Engineering

Shape and topology optimization of plane and shell structures by using an Isogeometric approach

Hossein Ghasemnejad Moghri

Supervisor:
Prof. Behrooz Hassani

Advisor:
Dr. Mehdi Tavakkoli

September 2015