

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی عمران
گروه مهندسی آب و محیط زیست

عنوان پایان نامه ارشد

بررسی عددی پدیده ضربه قوچ در شبکه لوله‌ها با استفاده از الگوریتم شمیپاین

دانشجو: فائزه خلیقی

استاد یا اساتید راهنما:

احمد احمدی

علیرضا کرامت

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ۱۳۹۴

شماره: ۴۴
تاریخ: ۱۱۳ ۸۴، ۴، ۲۴
ویرایش:

بسمه تعالی



دانشگاه شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (6)

فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای
.....فائزه. خلیقی..... رشته مهندسی عمران..... گرایشسازه‌های هیدرولیکی..... تحت
عنوان بررسی عددی پدیده ضربه قوچ در شبکه لوله‌ها با استفاده از الگوریتم شمپاین.....
که در تاریخ 94/4/22..... با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است :

قبول (با درجه : عالی - امتیاز ۱۹.۵) دفاع مجدد مردود

- 1- عالی (19 - 20)
2- بسیار خوب (18/99 - 18)
3- خوب (16 - 17/99)
4- قابل قبول (14 - 15/99)
5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	a عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر احمد احمدی	1- اساتید راهنما
	استادیار	دکتر علیرضا کرامت	
			2- استاد مشاور
	استادیار	دکتر مهدی گلی	3- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	دکتر رامین امینی	4- استاد ممتحن
	استادیار	دکتر مهدی عجمی	5- استاد ممتحن

رئیس دانشکده : امانی

تقدیم به پدر و مادرم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند را که لطف و بخشایش او نصیب این بنده حقیر گشت و یاری نمود تا بتوانم این مجموعه را به تحریر در آورم.

نخست بر خود لازم می‌دانم تا از اساتید راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر احمد احمدی و جناب آقای دکتر علیرضا کرامت، به دلیل زحمات و حمایت‌های پیوسته، آموزش‌ها و رهنمودهای ارزشمند، تشویق‌ها و دلگرمی‌هایشان در تمام مدت انجام این پژوهش تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از زحمات و الطاف پدر و مادر مهربان و سایر اعضای خانواده که همواره حامی و مشوق بنده در دوران تحصیل بوده‌اند، تشکر نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **فائزه خلیقی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران - گرایش سازه‌های هیدرولیکی دانشکده مهندسی عمران دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه **بررسی عددی پدیده ضربه قوچ در شبکه لوله‌ها با استفاده از الگوریتم شمیپاین** تحت راهنمایی دکتر احمد احمدی و دکتر علیرضا کرامت متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام >> دانشگاه شاهرود<< و یا >>shahrood university<< به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو



مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در حین پدیده ضربه قوچ، نیروهای دینامیکی قابل توجهی به سازه لوله وارد می‌شود، چنانچه این نیروها باعث حرکت و تغییر شکل شبکه لوله‌ها شوند، پدیده‌ای به نام تداخل سیال-سازه (FSI) اتفاق خواهد افتاد. مباحث تداخلی سیال-سازه، مانند کوپله پواسن و اتصال و اثرات آن‌ها بر نتایج پدیده ضربه قوچ، به ویژه در سیستم‌های لوله با درجه اهمیت بالا، همواره مورد توجه بوده است زیرا این اثرات به صورت ایجاد نوسان و افزایش در هدهای فشار و همچنین جابه‌جایی‌های دیواره لوله مشاهده می‌شود. معادلات حاکم بر این پدیده از نوع هذلولوی می‌باشند و به دو دسته معادلات هیدرولیکی و سازه‌ای تقسیم می‌شوند.

روش‌های عددی متنوعی نظیر روش‌های تفاضل محدود، حجم محدود، المان محدود و یا ترکیبی از این روش‌ها برای حل معادلات FSI به کار گرفته شده است. از جمله روش‌های موفق در این حوزه، روش‌های خطوط مشخصه و گودونو می‌باشد. در روش خطوط مشخصه گام‌های زمانی و مکانی باید نسبت به هم تناسب خاصی داشته باشند و به همین علت بازه‌های زمانی باید وابسته به ابعاد مسئله انتخاب انتخاب شوند. در روش گودونو نیز مدت زمان حل مسائل به دلیل استفاده از مسئله ریمان طولانی است. از این رو به دنبال روشی می‌باشیم که مشابه روش‌های خطوط مشخصه و گودونو دقیق باشد و از سویی معایب این روش‌ها را نداشته باشد.

در این پایان نامه، روش‌های لاکس-فردریش، لاکس-وندروف، لاکس-وندروف با فیلتر غیرخطی، روش نسیاهو-تادمور و مک کورمک که به عنوان روش‌هایی موثر در حل معادلات هذلولوی شناخته می‌شود به کار گرفته شد و دو مسئله در این زمینه حل شد و به منظور بررسی صحت روش‌های معرفی شده، نتایج حاصل از این روش‌ها با نتایج روش خطوط مشخصه (MOC) و گودونو مقایسه شد. در مسئله اندرکنش سیال-سازه، نتایج حاصل از روش‌های لاکس-فردریش و نسیاهو-تادمور تطابق مناسبی با نتایج حاصل از روش‌های MOC و گودونو داشت.

در مسئله ضربه قوچ در حالت بسته شدن تدریجی شیر، همه روش‌های معرفی شده در این پایان نامه، با دقت مناسبی ناپیوستگی‌های موجود در هد فشاری سیال را مدل نمودند ولی در حالت بسته شدن آنی، روش‌های لاکس-وندروف، لاکس-وندروف با فیلتر غیرخطی و مک کورمک در مدلسازی این ناپیوستگی‌ها ناموفق بوده و نوسانات بسیاری در محل این ناپیوستگی‌ها مشاهده می‌شود.

کلمات کلیدی: ضربه قوچ، اندرکنش سیال-سازه، لاکس-فردریش، لاکس-وندروف، نسیاهو-تادمور،

مک کورمک

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

مقالات ارائه شده:

احمدی، احمد، کرامت، علیرضا، خلیقی، فائزه، "بررسی ضربه قوچ در شبکه لوله‌ها با استفاده از

روش‌های صریح

تفاضل محدود". دومین کنفرانس ملی مهندسی عمران، ۱۰ اردیبهشت ۹۴، ملایر (ارائه شده است)

Khalighi, F., Keramat, A., Ahmadi, A., "Explicit central finite difference methods for fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems", E-proceedings of the 36th IAHR 28 June–3 July, 2015, The Hague, The Netherlands. (Accepted)

Ahmadi, A., Keramat, A., Khalighi, F., "Water hammer stimulation by explicit central finite difference methods using staggered grid", (ارسال شده به نشریه تحقیقات منابع آب)

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: مقدمه.....	۱
۱-۱- جریان غیرماندگار.....	۲
۲-۱- پدیده ضربه قوچ (چکش آبی).....	۴
۳-۱- پدیده اندرکنش سیال-سازه.....	۵
۱-۳-۱- طبقه بندی انواع مدل‌سازی‌های کوپله.....	۷
۱-۳-۱-۱- انواع معادلات مدل‌سازی کوپله.....	۷
۱-۳-۱-۲- انواع مکانیسم‌های اثر کوپله.....	۸
۱-۳-۱-۳-۱- اثر تداخلی پواسن.....	۹
۱-۳-۱-۳-۱- اثر تداخلی اصطکاک.....	۱۰
۱-۳-۱-۳-۱- اثر تداخلی تقاطع (اتصال).....	۱۰
۴-۱- فرضیات پایان نامه.....	۱۱
۵-۱- اهداف اصلی تحقیق حاضر.....	۱۲
۶-۱- فصل بندی پایان نامه.....	۱۳
فصل دوم: تاریخچه و مطالعات پیشین.....	۱۵
۱-۲- جریان گذرا و ضربه قوچ.....	۱۶
۲-۲- پدیده اندرکنش سیال-سازه.....	۱۹
۳-۲- روش‌های تفاضل محدود.....	۲۴
۱-۳-۲- روش لاکس-فردریش (LXF).....	۲۵
۲-۳-۲- روش لاکس-وندروف (LXW).....	۲۶
۳-۳-۲- روش مک کورمک (MC).....	۲۷
۴-۳-۲- روش نسیاهو-تادومور (NT).....	۲۸
فصل سوم: روش حل عددی.....	۳۱
۱-۳- گسسته سازی دامنه در راستای بعد مکانی و زمانی.....	۳۳

- ۳۴ ۱-۱-۳- انتخاب اندازه گام زمانی و محدودیت پایداری
- ۳۶ ۲-۳- روش لاکس-فردریش (LXF)
- ۳۷ ۱-۲-۳- فرمول بندی روش لاکس-فردریش
- ۳۹ ۳-۳- روش لاکس-وندروف (LXW)
- ۴۰ ۱-۳-۳- فرمول بندی روش لاکس-وندروف
- ۴۲ ۲-۳-۳- فرمول بندی روش لاکس-وندروف با فیلتر غیرخطی (SLXW)
- ۴۳ ۴-۳- روش مک کورمک (MC)
- ۴۳ ۱-۴-۳- فرمول بندی روش مک کورمک
- ۴۴ ۵-۳- روش نسیاهو-تادمور (NT)
- ۴۴ ۱-۵-۳- فرمول بندی روش نسیاهو-تادمور
- ۴۹ ۶-۳- شرایط مرزی
- ۵۰ ۱-۶-۳- گسسته سازی معادلات حاکم به صورت پیش رو/پس رو و پس رو/پیش رو
- ۵۰ ۲-۶-۳- شرایط مرزی مور
- ۵۱ ۳-۶-۳- اختصاصی روش NT
- ۵۴ ۷-۳- نمونه معادلات حل شده با روش های حل شده
- ۵۴ ۱-۷-۳- ترافیک
- ۵۶ ۲-۷-۳- انتقال حرارت
- ۵۸ ۳-۷-۳- معادلات لرزش لوله
- ۶۱ فصل چهارم: مدل ریاضی، صحت سنجی و ارائه نتایج
- ۶۲ ۱-۴- معادلات حاکم
- ۶۲ ۱-۱-۴- معادلات مومنتم و پیوستگی
- ۶۵ ۲-۱-۴- معادله ارتعاش محوری سازه لوله
- ۶۸ ۲-۴- شرایط اولیه
- ۶۹ ۳-۴- شرایط مرزی
- ۷۱ ۴-۴- گام های تشکیل دهنده الگوریتم حل
- ۷۲ ۵-۴- بررسی و حل مسائل عددی
- ۷۳ ۱-۵-۴- مسئله ضربه قوچ

۷۸مسئله اندرکنش سیال-سازه.....۴-۵-۲
۸۲جزئیات کد نویسی.....۴-۶
۸۳فصل پنجم: خلاصه، نتیجه گیری و پیشنهادات.....
۸۴۱-۵-خلاصه.....
۸۴۲-۵-نتیجه گیری.....
۸۶۳-۵-پیشنهادات برای ادامه کار.....
۸۹مراجع.....
۹۰مراجع فارسی.....
۹۱مراجع انگلیسی.....

شکل (۱-۱) سیستم مخزن-لوله-شیر.....	۵
شکل (۲-۱) مفهوم پدیده اندرکنش سیال-سازه.....	۶
شکل (۳-۱) عوامل ایجادکننده پدیده اندرکنش سیال-سازه.....	۶
شکل (۱-۳) طرح کلی حل عددی به روش تفاضل محدود.....	۳۲
شکل (۲-۳) نمای شماتیک مش جابه‌جا شده.....	۳۴
شکل (۳-۳) طرح کلی انتخاب گام زمانی بر اساس کورانت پایدار و ناپایدار (خطوط نقطه چین نشان دهنده محدوده دامنه عددی در xz^{n+1} و ناحیه سایه دار نشان دهنده دامنه فیزیکی. پایداری زمانی بدست می‌آید که ناحیه اول بزرگتر از ناحیه دوم باشد).	۳۶
شکل (۴-۳) طرح شماتیک روش لاکس-فردریش اصلی.....	۳۸
شکل (۵-۳) طرح شماتیک روش دو گام زمانی لاکس-فردریش.....	۳۹
شکل (۶-۳) طرح کلی روش لاکس-وندروف.....	۴۱
شکل (۷-۳) طرح کلی روش دوگام زمانی لاکس-وندروف.....	۴۲
شکل (۸-۳) حل عددی معادله ترافیک گاستافسون با روش‌های عددی الف) LXF ب) LXW ج) SLXW.....	۵۵
شکل (۹-۳) نمودار $u_1(1,t)$ در در معادله انتقال حرارت زمان های $t=0.1: 0.1:0.5$ با استفاده از روش SLXW.....	۵۸
شکل (۱۰-۳) الف) نمودار شرایط اولیه مسئله سود، نتایج حل مسئله سود به روش لاکس-فردریش در زمان‌های ب) $t=0.04$ ج) $t=0.08$ د) $t=0.12$ ه) $t=0.18$	۶۰
شکل (۱-۴) طرح نشاندهنده متغیرهای تعریف شده در توصیف تنش بر دیواره لوله، الف) نمای مقطع لوله (صفحه $r - \Phi$ ، ب) نمای جانبی لوله (صفحه $z - r$).....	۶۶
شکل (۲-۴) تابع بسته شدن تدریجی شیر $\tau(t)$ برای $T_c = 0.03$ s.....	۷۱
شکل (۳-۴) مقایسه نتایج روش الف) LXF ب) NT ج) LXW د) SLXW ه) MC با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله ضربه قوچ در حالت بسته شدن آنی شیر.....	۷۴
شکل (۴-۴) مقایسه نتایج روش الف) LXF ب) NT ج) LXW د) SLXW ه) MC با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله ضربه قوچ در حالت بسته شدن تدریجی شیر.....	۷۵
شکل (۵-۴) مقایسه نتایج روش الف) LXF ب) NT با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله	

اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی اتصال در حالت بسته شدن آنی شیر.....^{۷۹}
شکل (۶-۴) مقایسه نتایج روش الف(LXF ب)NT با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله
اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی پیوسته در حالت بسته شدن آنی شیر.....^{۷۹}
شکل (۷-۴) مقایسه خطای ماکزیمم نسبی روش‌های LXF و NT در مقایسه با روش‌های MOC و
گودونو در پدیده اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی اتصال به ازای کورانت الف) $c=0.9$
ب) $c=1$^{۸۱}

جدول (۱-۱) مقادیر ضریب پواسن برای مصالح مورد استفاده در ساخت لوله‌ها.....	۹
جدول (۱-۴) مشخصات مسئله ضربه قوچ.....	۷۳
جدول (۲-۴) میزان خطای نسبی روش‌های LXF، NT، LXW، SLXW و MC در مقایسه با روش MOC و گودونو.....	۷۶
جدول (۳-۴) مدت زمان اجرای برنامه ضربه قوچ در دو حالت بسته شدن آنی و تدریجی شیر.....	۷۷
جدول (۴-۴) مشخصات مسئله اندرکنش سیال-سازه.....	۷۸
جدول (۵-۴) خطای ماکزیمم نسبی روش LXF و NT نسبت به روش MOC و گودونو در پدیده اندرکنش سیال-سازه و در حالت‌های تداخلی اتصال و پواسن.....	۸۰
جدول (۷-۴) مدت زمان اجرای برنامه اندرکنش سیال-سازه در دو حالت تداخلی اتصال و پواسن.....	۸۱

فهرست علائم

u	متغیر اصلی
n	نشانگر بعد زمان
i	نشانگر بعد مکان
Δx	گام مکانی مش
Δt	گام زمانی مش
λ	سرعت موج
Cr	عدد کورانت
H	ارتفاع پیزومتری
v	سرعت سیال
f	ضریب اصطکاک دارسی-ویسباخ
D	قطر داخلی لوله
v	ضریب پواسن
ρ_t	چگالی مخصوص مصالح لوله
ρ_f	چگالی سیال
e	ضخامت دیواره لوله
E	مدول یانگ
\dot{u}_z	سرعت محوری لوله
σ_z	تنش محوری لوله
A_t	سطح مقطع لوله
A_f	سطح مقطع سیال
$S(u)$	ترم منبع
$F(u)$	تابع فلاکس
A	ماتریس ضرایب
c_f	سرعت موج فشاری
c_t	سرعت موج برشی
k	مدول بالک
v_z	سرعت محوری
v_r	سرعت شعاعی
P	فشار سیال
ε_z	کرنش محوری
ε_r	کرنش شعاعی

ε_{ϕ}	کرنش محیطی
σ_z	تنش محوری
σ_r	تنش شعاعی
σ_{ϕ}	تنش محیطی
τ_0	تنش برشی
v_{rel}	سرعت نسبی سیال درون لوله نسبت به دیوار داخلی لوله
σ_0	تنش استاتیکی
$\sigma_{dynamic}$	تنش دینامیکی
ε_{total}	کل کرنش حاصله در سازه

فصل اول



ضربه قوچ یا چکش آبی^۱ در خطوط لوله بر اثر عواملی چون بسته شدن شیرها، توقف ناگهانی پمپ، تحریکات لرزه‌ای، پارگی لوله و ... ایجاد می‌شود. چنانچه در اثر موج‌های فشاری سریع و گذرای این پدیده، شبکه لوله حرکت کند و یا دچار تغییر شکل شود، اندرکنش بین سازه و سیال به وجود خواهد آمد که به صورت متقابل و دائمی بر روی یکدیگر اثر خواهند گذاشت که این پدیده را اندرکنش سیال-سازه^۲ می‌نامند. ضربه قوچ و اندرکنش حاصل از آن می‌تواند باعث بروز مشکلات عمده‌ای در سیستم لوله مانند پارگی در لوله، جدا شدن لوله از اتصالات جانبی و همچنین ایجاد تنش‌های زیادی در تکیه‌گاه‌ها و ... شود.

به منظور کنترل و کاهش اثرات ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه و تعدیل فشارهای ایجاد شده، روش‌هایی نظیر چرخ لنگر پمپ^۳، لوله‌های انعطاف پذیر^۴، نصب محفظه هوا^۵ و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال این سوال مطرح می‌شود که چه زمانی از این روش‌های پر هزینه باید استفاده نمود؟ یا ابعاد و اندازه دستگاه‌ها و لوازم مورد استفاده در این روش‌ها چقدر باید باشد؟ پاسخ به این سوالات و سوالات مشابه مستلزم بررسی و تجزیه و تحلیل پدیده ضربه قوچ و پیش بینی حداکثر فشار حاصل از این پدیده می‌باشد.

۱-۱- جریان غیرماندگار

براساس تغییر در مشخصات جریان سیال بر حسب زمان، جریان به دو نوع دائمی^۶ (ماندگار) و غیردائمی^۷ (غیر ماندگار) تقسیم می‌شود. جریان غیرماندگار، جریانی است که خصوصیات (فشار، دبی،

1 Water hammer

2 Fluid-Structure Interaction (FSI)

3 Pump flywheels

4 Flexible hoses

5 Air chambers

6 Steady

7 Unsteady

(...) آن در یک مقطع معین با زمان تغییر کند در غیر این صورت، جریان ماندگار است.

از نظر فیزیکی، هر جریان غیر دائمی عبارت است از حرکت یک موج که با تغییر مکان خود و بر حسب شرایط، خصوصیات جریان را از مقطعی به مقطع دیگر و از زمانی به زمان دیگر، تغییر می‌دهد [حسینی و ابریشمی ۱۳۸۸].

تغییرات عمق و دبی در جریان‌های غیرماندگار می‌تواند در اثر عوامل طبیعی، موارد برنامه ریزی شده و یا حوادث اتفاقی باشد و از امواج نوسانی و جزر و مدهای اقیانوس‌ها تا سیلاب حاصل از شکست سدها را شامل شود.

امروزه با پیشرفت علوم و فنون و ساخت تجهیزات صنعتی بزرگتر و دستگاه‌هایی با سرعت بیشتر، مسائل مربوط به جریان غیرماندگار، اهمیت روزافزونی یافته است. به عنوان نمونه در پدیده‌هایی چون ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه که نمونه‌هایی از جریان غیرماندگار می‌باشند، علاوه بر فشارهای بالا و خطرناک، به دلیل به وجود آمدن خلاء در جریان سیال، با ارتعاش و خستگی (سازه سیستم) روبه‌رو می‌شویم. در چنین شرایطی بررسی این نوسانات شدید و مخرب در سازه‌های هیدرولیکی از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشد [نجاران طوسی ۱۳۹۰].

حل معادلات جریان‌های غیرماندگار نسبت به معادلات جریان ماندگار پیچیده‌تر و مشکل‌تر می‌باشد. علت این امر وابستگی معادلات جریان غیرماندگار نسبت به زمان می‌باشد. لذا در حل مسائل مربوط به جریان گذرا، امکان حذف عامل زمان وجود ندارد و معادلات از نوع دیفرانسیل جزئی خواهند بود. جز تعداد محدودی از معادلات، معادلات جریان گذرا به سادگی قابل حل نمی‌باشند و راه تحلیلی مشخصی نیز برای آن‌ها وجود ندارد [حسینی و ابریشمی ۱۳۸۸].

گاه برای حل معادلات جریان غیرماندگار از روش‌های تقریبی و بادر نظر گرفتن فرضیاتی نسبت به وضعیت جریان استفاده می‌گردد که بدیهی است که هرچه فرضیات انجام شده جهت ساده کردن معادلات و حل تحلیلی آن‌ها به واقعیت نزدیک‌تر باشد، جواب‌ها خطای کمتری خواهند داشت.

روش دیگر استفاده از روش‌های ترسیمی می‌باشد که امروزه به علت پر زحمت بودن و وقت گیر

بودن، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. به منظور آشنایی بیشتر با روش حل ترسیمی به مقالات آلیوی [Allevi 1904 and 1932]، برگرون [Bergeron 1935 and 1936] و لاپتن [Lupton 1953] رجوع شود.

در این میان، روش‌های عددی به دلیل در دسترس بودن و هزینه کم و به خصوص با پیشرفت فناوری‌های رایانه‌ای، بیش از سایر روش‌ها مورد توجه بوده است. در روش‌های عددی امکان در نظر گرفتن عوامل و شرایط بیشتر و از طرفی دسترسی به نتایج و جواب‌های نسبتاً دقیق به صورت همزمان، سبب شده است که روش‌های دیگر تدریجاً به فراموشی سپرده شود. لذا اکثر مسائل مربوط به جریان غیرماندگار از طریق حل عددی معادلات حاکم مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد.

۱-۲- پدیده ضربه قوچ (چکش آبی)

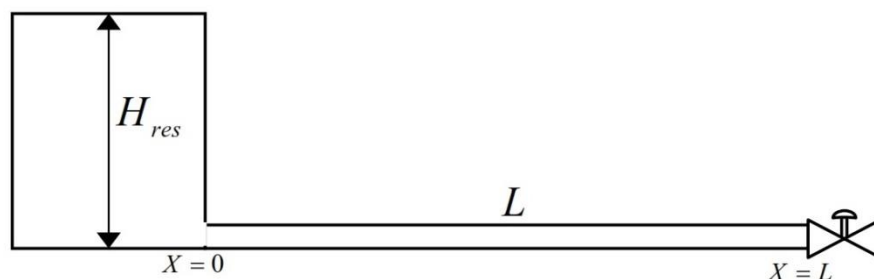
زمانی که جریان از یک حالت ماندگار به حالت ماندگار دیگر تغییر شرایط دهد، جریان غیرماندگار مابین را جریان میرا (گذرا^۱) می‌نامند. بر این اساس، ضربه قوچ یا چکش آبی نوعی جریان میراست که در اثر تغییر ناگهانی سرعت در خطوط لوله مانند باز و بسته شدن ناگهانی شیر، توقف ناگهانی پمپ یا توربین و ... رخ می‌دهد.

به منظور درک بهتر پدیده ضربه قوچ، سیستم مخزن-لوله-شیر (شکل ۱-۱) را در نظر بگیرید که شیر در پایین دست خط لوله در زمان $t=t_0$ کاملاً باز و آب با سرعت v_0 در حال حرکت باشد. در این لحظه شیر به سرعت بسته می‌شود و در نتیجه بسته شدن شیر، سرعت جریان عبوری از شیر به تدریج کاهش یافته و در نهایت صفر می‌شود. بر اساس رابطه برنولی با تبدیل انرژی جنبشی به انرژی فشاری، فشار در پشت شیر به صورت تدریجی افزایش می‌یابد. این افزایش فشار باعث می‌شود که یک موج فشاری با سرعت c به سمت بالادست شروع به حرکت کند و نتیجه این موج فشاری کاهش سرعت

1 Transient flow

جریان می‌باشد.

موج فشاری در محل مخزن منعکس خواهد شد و مابین شیر و مخزن به حرکت رفت و برگشتی خود ادامه خواهد داد ولی به علت تلفات ناشی از اصطکاک، با هر تکرار مقداری از فشار کاسته می‌شود و سرانجام در زمان $t = t_L$ فشار در تمامی خط لوله مساوی با ارتفاع نظیر فشار مخزن خواهد شد و جریان کاملاً متوقف می‌شود. بنابراین زمانی که $t < t_0$ و $t > t_L$ باشد، مشخصات جریان نسبت زمان ثابت بوده و جریان ماندگار خواهد بود ولی زمانی که $t_0 < t < t_L$ باشد، جریان میرای موردنظر که همان پدیده ضربه قوچ است، مابین دو جریان ماندگار شکل می‌گیرد.



شکل (۱-۱) سیستم مخزن-لوله-شیر

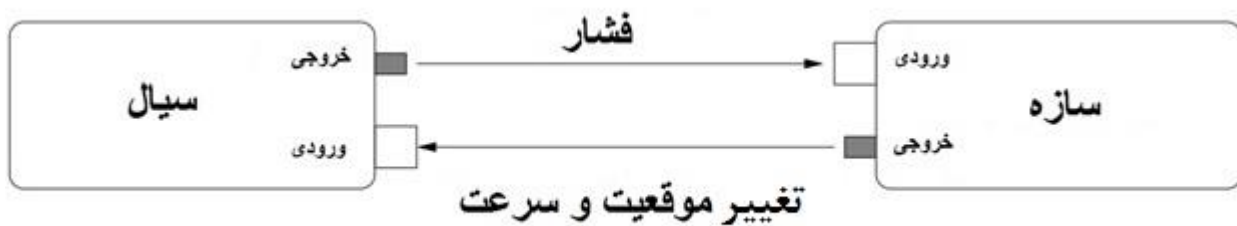
۱-۳- پدیده اندرکنش سیال-سازه

در اثر جریان گذرای مانند ضربه قوچ، در سیال درون لوله، نیروهای دینامیکی قابل ملاحظه‌ای به سازه لوله وارد می‌شود. چنانچه این نیروها موجب تغییر شکل، حرکت و ارتعاش شبکه لوله در جهت طولی^۱ و جانبی^۲ شوند، با عکس العمل متقابل، نیروهای سازه‌ای بر پارامترهای هیدرولیکی اثر گذاشته و موجب افزایش و ارتعاش در هدهای فشار می‌شوند، این پدیده را اندرکنش سیال-سازه می‌نامند (شکل ۱-۲). این پدیده در واقع تغییرات انرژی بین سیال در حال حرکت و سازه شکل‌پذیر را توصیف می‌کند. وسعت و میزان این تبادل انرژی، شدیداً به سازه و مقاومت آن در مقابل شکل‌پذیری

1 Longitudinal displacements

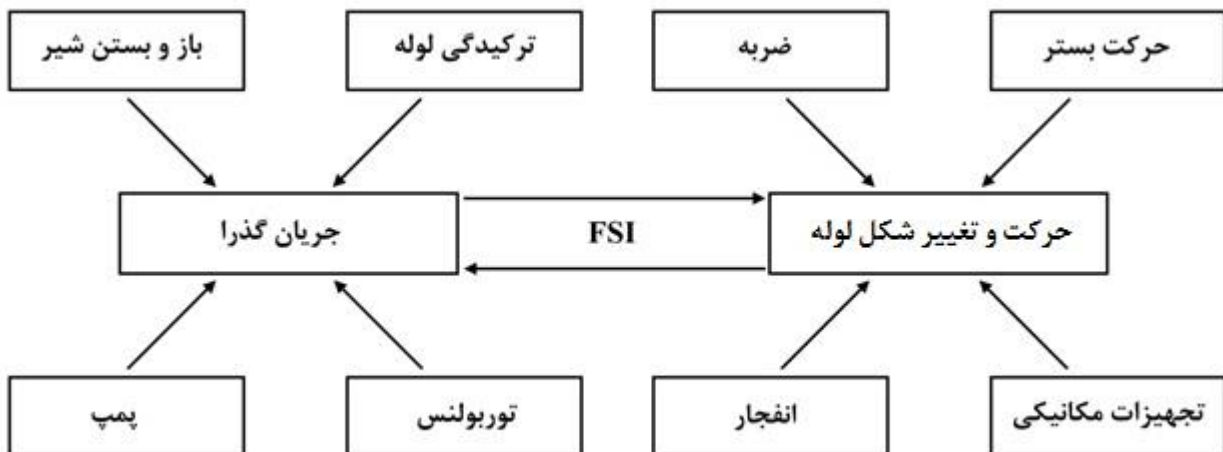
2 Laterall displacements

(سختی) و خواص سیال بستگی دارد.



شکل (۲-۱) مفهوم پدیده اندرکنش سیال-سازه [Lefrancois and Boufflet 2010]

برخی عوامل که سبب ایجاد پدیده اندرکنش سیال-سازه می‌شود در شکل (۳-۱) به صورت کلی نشان داده شده است.



شکل (۳-۱) عوامل ایجادکننده پدیده اندرکنش سیال-سازه [Wiggert 1986]

اندرکنش سیال-سازه در زمینه علوم پزشکی و ساخت ریه‌ها و دریچه‌های قلب مصنوعی، در تحلیل خطوط انتقال نفت و گاز، توربین‌ها و موتورهای جت، مخازن متحرک، در طراحی بال و بدنه هواپیما و همچنین در طراحی سازه‌های زمینی و عمرانی مانند پل‌ها (شکست پل Tacoma Narrows در

سال ۱۹۴۰) و برج‌ها مطرح می‌باشد [Lefrancois & Boufflet 2010].

همان گونه که از نام این پدیده بر می‌آید، بررسی رفتار لوله و یا سیال به تنهایی از دقت کمی برخوردار است لذا بایستی به صورت همزمان بررسی شوند. به عبارت دیگر باید مکانیسم‌های رفتارهای

تداخلی را مورد مطالعه قرار داد.

یکی از مواردی که علاوه بر جداره لوله بر اندرکنش سیال - سازه تاثیر می گذارد، تکیه گاه های سیستم لوله می باشند. تخمین زدن نیروهای وارده بر تکیه گاه ها در اثر ضربه قوچ و بررسی پاسخ متقابل آنها بر سیستم، یکی از مسائل مهم در طراحی خطوط لوله و تکیه گاه ها می باشد.

۱-۳-۱- طبقه بندی انواع مدل سازی های کوپله

تداخل سیال-سازه در شبکه لوله ها نخستین بار توسط اسکالاک^۱ در سال ۱۹۵۶ با ارائه معادلات تداخلی حاکم بر ضربه قوچ مطرح گردید [Tijsseling 1996]. پس از آن این موضوع به صورت پیوسته مورد بررسی قرار گرفت و روش های مختلفی اعم از کوپله، نیمه کوپله و الگوریتم های مختلفی جهت مدل سازی آن ارائه گردید.

آنالیز کوپله را می توان بر اساس دو دیدگاه زیر مورد بررسی قرار داد:

۱. تعداد معادلات مورد استفاده جهت مدل سازی کوپله
۲. مکانیسم اثرات رفتار سیال و سازه در تحلیل کوپله

۱-۳-۱-۱- انواع معادلات مدل سازی کوپله

تایسلینگ^۲ روش های کوپله حل مسائل اندرکنش سیال - سازه را با توجه به تعداد معادلات دیفرانسیل مورد استفاده برای هر روش به صورت زیر تقسیم نمود [Tijsseling 1996]:

۱- مدل دو معادله دیفرانسیل: در این مدل فقط از دو معادله هیدرولیکی (پیوستگی و مومنتم) استفاده می شود. فشارها و سرعت های بدست آمده به مثابه بارگذاری خارجی برای معادلات سازه ای است و برای تحلیل این معادلات مورد استفاده قرار می گیرد. این روش نیمه کوپله به روش حل ضربه قوچ کلاسیک شهرت دارد [کرامت ۱۳۸۹].

۲- مدل چهار معادله دیفرانسیل: این روش شامل چهار معادله می باشد که این معادلات عبارت

1 Skalak

2 Tijsseling

اند از: دو معادله هیدرولیکی (پیوستگی و مومنتم) و معادله مرتبه دوم ارتعاش محوری که خود تبدیل به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌شود. این مدل در لوله‌های مستقیم و با حرکت محوری مورد استفاده قرار می‌گیرد. مجهولات این چهار معادله، فشار، سرعت، تنش محوری و سرعت محوری دیواره لوله می‌باشد [کرامت ۱۳۸۹]. (در این تحقیق برای تحلیل یک سیستم ساده لوله-مخزن-شیر در حالت مستقیم، از این مدل استفاده شده است.)

۳- مدل شش معادله دیفرانسیل: در این روش تنش هوپ و سرعت شعاعی دیواره لوله به مجهولات ذکر شده در مدل قبل افزوده می‌شود. این مدل زمانی که نیروهای اینرسی شعاعی را مورد استفاده قرار می‌دهیم، به کار می‌آید [کرامت ۱۳۸۹].

۴- مدل چهارده معادله دیفرانسیل: معادلات به کار رفته در این روش عبارت اند از: دو معادله هیدرولیکی، معادله مرتبه دوم ارتعاش محوری که به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌شود و دو معادله ارتعاش خمشی در دو صفحه XY و XZ که این معادلات مرتبه چهار تبدیل به هشت معادله مرتبه اول می‌شوند. این روش قابلیت مدلسازی ارتعاش محوری لوله و سیال را در صفحه ارتعاش و خارج از صفحه ارتعاش و نیز ارتعاش پیچشی در حالت سه بعدی را برای سیستم ممکن می‌سازد [کرامت ۱۳۸۹].

۱-۳-۱-۲-انواع مکانیسم‌های اثر کوپله

امواج تنشی که در امتداد خط لوله حرکت می‌کنند و روی یکدیگر به صورت متقابل تاثیر می‌گذارند، عبارت اند از امواج تنشی، پیچشی، محوری، خمشی، چرخشی، شعاعی سازه و امواج تنش های فشاری در سیال. براساس نحوه تداخل بین این امواج تاکنون سه مکانیسم شناخته شده است که عبارت اند از [نجان طوسی ۱۳۹۰]:

۱- مکانیسم کوپله پواسن^۱ ۲- مکانیسم کوپله اصطکاک^۲ ۳- مکانیسم کوپله تقاطع (اتصال)^۱

1 Poisson coupling

2 Friction coupling

۱-۳-۱-۲-۱ اثر تداخلی پواسن

اثر تداخلی پواسن ناشی از وجود نسبت پواسن مصالح لوله می‌باشد. بالارفتن فشار در یک نقطه از شبکه لوله‌ها می‌تواند باعث ایجاد تنش‌های شعاعی در مقطع لوله شود. این تنش‌ها و تغییر شکل‌های شعاعی با توجه به نسبت پواسن به تنش‌ها و تغییر شکل‌های محوری تبدیل می‌شوند. پرواضح است که مقدار اثر این کوپله بستگی زیادی به نسبت پواسن مصالح به کار رفته در لوله دارد که در جدول (۱-۱) ضریب پواسن برخی مصالح مورد استفاده در ساخت لوله آورده شده است.

جدول (۱-۱) مقادیر ضریب پواسن برای مصالح مورد استفاده در ساخت لوله‌ها [کلانتری، ۱۳۹۰]

جنس لوله	ضریب پواسن (v)
آزبست سیمان	0.30
بتن	0.15
پلی اتیلن	0.46
برنج	0.34
چدن	0.28
فایبر گلاس	0.25
فولاد	0.30
مس	0.36
PVC	0.45

در صورتی که این نسبت صفر در نظر گرفته شود، این اثر تداخلی در نظر گرفته نمی‌شود. با نگاه به ساختار مساله اندرکنش سیال-سازه واضح است که اثر کوپله پواسن توسط ضریب پواسن در معادلات ظاهر می‌شود و سبب کوپله شدن معادلات سیال و سازه می‌گردد. این کوپله در مقایسه با

کوپله اتصال، سبب بروز تغییرات اندکی در نمودارهای تنش سازه و فشار سیال می‌شود.

۱-۳-۱-۲-۲- اثر تداخلی اصطکاک

مکانیزم کوپله اصطکاک، ناشی از اصطکاک سیال با جداره‌ی داخلی لوله می‌باشد. اثر کوپله اتصال هم مشابه کوپله پواسن در شکل معادلات ظاهر می‌شود. اثر این کوپله در مقایسه با کوپله پواسن و اتصال بسیار بسیار جزئی و قابل چشم پوشی است [Gale & Tiselj 2008]. عملکرد این اثر به نحوی است که موجب کاهش فشارها و تنش‌ها در لوله می‌گردد از این رو اکثر محققان، این اثر را در جهت اطمینان در نظر نمی‌گیرند. در این پایان نامه نیز این اثر تداخلی بررسی نمی‌شود.

۱-۳-۱-۲-۳- اثر تداخلی تقاطع (اتصال)

هنگامی که اتصال سیستم لوله به زمین در محل‌هایی که سیال تغییر مومنتوم می‌دهد، مانند محل شیرها، تقاطع‌ها، زانویی‌ها، اریفیس‌ها، محل‌هایی که لوله تغییر قطر می‌دهد (ونتوری‌ها) و ... کاملاً صلب نباشد و امکان جابه‌جایی و حرکت آن‌ها وجود داشته باشد، در اثر نوسانات فشار و سرعت ناشی از یک تحریک مکانیکی در سیستم، اثر تداخلی تقاطع (اتصال) ایجاد می‌شود.

اثر تخریبی این کوپله بسیار جدی‌تر از اثر دو کوپله پواسن و اصطکاک بوده و می‌تواند باعث تشدید تنش‌ها و تخریب سازه گردد.

این اثر تداخلی را می‌توان از دو دیدگاه هیدرولیکی و سازه‌ای بررسی نمود. از دیدگاه هیدرولیکی، زمانی که این اتصالات در اثر نوسانات فشار و سرعت ارتعاش می‌کنند، رابطه هیدرولیکی که غالباً برای بدست آوردن شرایط مرزی برای حل روابط هیدرولیکی استخراج می‌شود به علت جابه‌جایی‌ها و سرعت‌ها و شتاب‌های سازه‌ای که در این نقاط اتفاق می‌افتد، بایستی به این متغیرهای سازه‌ای وابسته شوند لذا از یک رابطه پیوستگی برای دبی‌های غیرماندگار ورودی‌ها و خروجی‌ها از تقاطع استفاده می‌شود. در این رابطه پیوستگی در حالت کوپله اتصال، پارامترهای سازه‌ای (در اینجا سرعت‌های طولی گره‌های لوله) وارد کار می‌شوند [کرامت ۱۳۸۹].

از دیدگاه سازه‌ای نیز حاصل ضرب فشار سیال در سطح مقطع جریان، در مقاطع ورودی و خروجی حجم کنترل نظیر اتصالات، می‌تواند به صورت یک بارگذاری متمرکز بر سازه در نظر گرفته شود. این نیروهای متمرکز در فشارهای بالایی که غالباً در آغاز یک جریان غیرماندگار به وجود می‌آید، مقادیر قابل توجهی خواهند داشت [کرامت ۱۳۸۹].

بدین ترتیب مقادیر مرزی مورد استفاده در معادلات هیدرولیکی، در واقع پارامترهای سازه‌ای هستند و بالعکس شرایط مرزی مورد استفاده برای معادلات سازه‌ای، پارامترهای هیدرولیکی می‌باشند.

۱-۴- فرضیات پایان نامه

تنها یک محور مختصات که در امتداد محور لوله می‌باشد، در توصیف روابط دیفرانسیلی حاکم در تحقیق مورد نظر مورد استفاده قرار می‌گیرد، لذا مدل مورد استفاده یک بعدی می‌باشد. از اثرات خمشی، اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی عرضی صرف نظر می‌شود. این فرضیات با عنوان امواج با طول موج‌های بلند^۱ شناخته می‌شود.

مدل ارائه شده در تحقیق برای لوله‌هایی با مقطع گرد که در فضای آزاد در معرض فشار هوای جو هستند، معتبر می‌باشد. لوله‌ها و شیرها در جهت محوری کاملاً آزاد فرض شده به گونه‌ای که اثر تداخلی پواسن و اتصال بتوانند رخ دهد. دمای محیط ثابت فرض می‌شود.

در استخراج معادلات حاکم، لوله به صورت جدار نازک فرض می‌شود که از مواد الاستیک تهیه شده است و از اثرات اصطکاک صرف نظر شد. سیال درون لوله نیز تراکم ناپذیر، نیوتنی و الاستیک خطی است. کرنش‌های ایجاد شده در اندرکنش سیال-سازه کوچک بوده و با استفاده از تئوری کرنش‌های بسیار کوچک^۲ محاسبه می‌شوند.

1 Long wavelength approximation

2 Infinitesimal strain theory

۱-۵-اهداف اصلی تحقیق حاضر

در پایان نامه حاضر، پدیده اندرکنش سیال-سازه ناشی از ضربه قوچ، با در نظر گرفتن یک سیستم لوله ساخته شده از مواد الاستیک، با استفاده از روش‌های عددی مطرح شده در الگوریتم شمپاین و روش مک کورمک^۱ (MC) مورد تحلیل قرار می‌گیرد. روش‌های عددی مطرح شده در الگوریتم شمپاین^۲ شامل روش‌های دو گام زمانی براساس روش لاکس-فردریش^۳ (LXF)، دو گام زمانی بر اساس روش لاکس-وندروف^۴ (LXW)، روش LXW با فیلتر غیرخطی^۵ (SLXW) و روشی بر اساس نسیاهو تادمور^۶ (NT) می‌باشد.

مکانیسم کوپله پواسن و اتصال به صورت عددی مدلسازی شده و نتایج ارائه شده است. هدف از این تحلیل در درجه نخست بررسی میزان توانمندی روش‌های عددی یاد شده در زمینه تحلیل مدل‌ها و مسائل خطی بوده و همچنین مقایسه نتایج حاصل از روش‌های عددی مذکور با نتایج بدست آمده از روش‌های خطوط مشخصه^۷ و گودونو^۸ و بررسی این مساله که آیا این روش‌های عددی را می‌توان به عنوان گزینه ای مناسب و قابل رقابت با روش مشخصه و گودونو در مسائل خطی دانست یا خیر. زیرا از یک سو روش خطوط مشخصه در انتخاب اندازه گام مکانی به ازای گام زمانی مشخص دارای محدودیت است و از سوی دیگر مدت زمان حل مسئله به روش گودونو به دلیل حل مسئله ریمان^۹ طولانی است.

1 MacCormac

2 Shampine

3 Two-step variant of the Lax-Friedrichs

4 A two-step variant of the Lax-Wendroff

5 A two-step variant of the Lax-Wendroff with a nonlinear filter

6 A variant of the Nessyahu-Tadmor

7 Method of characteristics (MOC)

8 Godunov

9 Riemann problem

بدین منظور ابتدا با ذکر یک مثال عددی به تحلیل و حل معادلات ضربه قوچ در حالت ساده و اندرکنش سیال-سازه در دو حالت اثر مکانیسم کوپله پیواسن و اتصال، با روش‌های عددی یادشده پرداخته و نتایج حاصله را با نتایج مشابهی که توسط روش مشخصه و گودونو بدست آمده است، مقایسه می‌شود.

۱-۶- فصل بندی پایان نامه

پس از تشریح یک مقدمه کلی درباره جریان غیرماندگار، پدیده ضربه قوچ و علل به وجود آمدن آن، پدیده اندرکنش سیال-سازه و انواع مکانیسم‌های کوپله، فرضیات صورت گرفته در پایان نامه و خلاصه‌ای از اهداف اصلی تحقیق حاضر در این فصل بیان شد. در چهار فصل باقی مانده به مباحث زیر پرداخته می‌شود.

در فصل دو سعی شده است پیشینه مختصری از آخرین کارهایی که محققان در زمینه پدیده ضربه قوچ در ارتباط با اندرکنش سیال-سازه انجام داده اند، بررسی شده و جایگاه تحقیق حاضر بین آن‌ها مشخص شود.

در فصل سوم به بیان کلی و جزئی کلیه گام‌ها و مراحل تشکیل دهنده روش‌های عددی LXF، LXF، SLXW، MC و NT پرداخته شده است. مطالب این فصل در حکم یک راهنمای کلی در مورد کاربرد روش‌های عددی مذکور می‌باشد.

در فصل چهارم پس از بیان اجمالی معادلات حاکم بر مسئله مورد بحث، با اعمال روش‌های عددی که در فصل سوم تشریح شده است، به حل مساله موردنظر پرداخته و نحوه پیاده سازی شرایط مرزی حاکم بر مسئله توضیح داده خواهد شد. در انتهای این فصل، نتایج حاصله از روش‌های عددی مذکور را با نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه و روش گودونو مقایسه می‌شود.

در فصل پنجم، نتیجه گیری، ذکر پیشنهادات و خلاصه‌ای از مطالب مطرح خواهد شد.

فصل دوم

تاریخچه و مطالعات پیشین

در این بخش نخست به مطالعه و بررسی پیشینه جریان گذرا، ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه می‌پردازیم و مختصری از آخرین کارهایی که محققان در این زمینه انجام داده‌اند، بررسی شده تا جایگاه تحقیق حاضر بین آن‌ها مشخص شود.

در قسمت بعدی این بخش پیشینه روش‌های عددی به کار رفته در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد و به معرفی تعدادی از مطالعات که با استفاده از روش‌ها عددی مطرح شده در این تحقیق، معادلات مشابه را حل نموده‌اند، پرداخته شد و میزان تطابق نتایج روش‌های عددی با نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت.

۲-۱- جریان گذرا و ضربه قوچ

نیوتن^۱ و لاگرانژ^۲ در قرن ۱۷، مطالعه روی هیدرولیک جریان‌های میرا را با تحقیق درباره نحوه انتشار امواج صوتی در هوا و انتشار امواج در آب‌های کم عمق، آغاز کردند [Chaudhry 1987]. بعدها در سال ۱۸۶۶، وبر^۳ به مطالعه جریان سیال غیر قابل تراکم در لوله‌های کشسان پرداخت و آزمایش‌هایی را جهت تعیین سرعت امواج فشاری انجام داد. همچنین او معادلات پیوستگی و اندازه حرکت که اساس مطالعات جریان‌های غیرماندگار هستند را ارائه نمود.

در نیمه دوم قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، تحقیقات فراوانی در مورد پدیده ضربه قوچ صورت گرفت و نتایج آن به چاپ رسید. اکثر این تحقیقات در اروپا انجام شد و مفاهیم اولیه آن‌ها را در کارهای منآب را و سایرین می‌توان یافت [Ménabréa 1858].

ماری در اواخر قرن ۱۹، آزمایشات متعددی جهت تعیین سرعت موج فشاری انجام داد و دریافت که سرعت موج مستقل از دامنه‌ی امواج فشاری است و متناسب با ضریب الاستیسیته جدار لوله است

1 Newton

2 Lagrange

3 Weber

[Marey 1875].

کورت برگ^۱ در سال ۱۸۷۸، سرعت موج را با توجه به کشسان بودن جداره‌ی لوله و کشسانی سیال ارائه داد. در سال ۱۸۸۳، گرومیکا^۲ برای اولین بار افت‌های اصطکاکی را به هنگام تحلیل ضربه قوچ مد نظر قرار داد. بدین منظور، او از فرض رابطه مستقیم افت‌های اصطکاکی با سرعت استفاده نمود [کرامت ۱۳۸۹].

ژوکوفسکی^۳ در سال ۱۸۹۷، بر اساس مطالعات نظری و آزمایشگاهی که انجام داد، گزارشی درمورد تئوری کلاسیک ضربه قوچ منتشر نمود. او رابطه‌ای جهت سرعت انتشار موج فشاری بدست آورد که در آن کشسان بودن سیال و جدار لوله در نظر گرفته شده بود. همچنین او با استفاده از معادلات پیوستگی و اندازه حرکت، رابطه‌ای بین کاهش سرعت و افزایش فشار ناشی از آن را بدست آورد. وی همچنین تحقیقاتی درباره اثرات سرعت بسته شدن یک شیر انجام داد و دریافت که افزایش فشار در لوله به زمان بسته شدن شیر ارتباط دارد. آلیوی^۴ در سال ۱۹۰۲، تئوری عمومی ضربه قوچ خود را منتشر کرد. معادله اندازه حرکت آلیوی نسبت به معادله حرکت کوت برگ از دقت بیشتری برخوردار بود. مطالعات ژوکوفسکی در سال ۱۹۰۴ توسط سیمن^۵، ترجمه شد، اما نتایج تحقیقات آلیوی تا سال ۱۹۲۵ که ترجمه آن توسط هامس^۶ ارائه شد، مجهول باقی ماند. گیبسون^۷ براساس تئوری ژوکوفسکی رساله‌ای ارائه نمود که برای اولین بار در تحلیل جریان، افت‌های اصطکاکی بصورت غیرخطی در نظر گرفته شده بودند [نجانان طوسی ۱۳۹۰].

1 Korteweg

2 Gromeka

3 Joukowsky

4 Allievi

5 Simen

6 Hums

7 Gibson

وود^۱ روشی ترسیمی-تحلیلی جهت تحلیل جریان ضربه قوچ ارائه داد. برگرون^۲ به منظور تعیین شرایط در مقاطع میانی خط لوله، روش ترسیمی را بسط و گسترش داد. وی اولین کسی بود که در تحلیل ترسیمی خود تلفات اصطکاکی را در نظر گرفت. لووی^۳ نیز روش ترسیمی مشابه وود را در سال ۱۹۲۸ ارائه نمود و مساله تشدید حاصل از عملکرد تناوبی شیرها و همچنین کاهش فشار ناشی از باز شدن آهسته شیرها را مورد بررسی قرار داد. وی به منظور در نظر گرفتن تلفات اصطکاکی در تحلیل، جملات اصطکاک را در معادلات دیفرانسیل جزئی در نظر گرفت [زنگانه ۱۳۹۲].

در سال ۱۹۳۳ کنفرانس مشترکی توسط انجمن مهندسين راه و ساختمان آمریکا^۴ و انجمن مهندسين مکانیک آمریکا^۵ برگزار شد که در آن رساله‌های متعددی در مورد تحلیل ضربه قوچ در خطوط لوله‌ی انتقال ارائه گردید.

از سال ۱۹۴۰ تا سال ۱۹۶۰، مطالعات بر روی پدیده ضربه قوچ و جریان میرا به صورت مقالات و کتب متعدد ارائه شد. در سال ۱۹۶۶ رويس^۶، برای اولین بار روش بسته شدن بهینه شیر^۷ را با مطالعه بر روی مراحل بسته شدن شیرهای توربین هیدرولیکی ارائه نمود. فرانک و کیبلکا^۸ و استریتر^۹ از این روش در تحلیل کامپیوتری سیستم‌های لوله کشی پیچیده بهره گرفتند [نجانان طوسی ۱۳۹۰].

گری^{۱۰} در سال ۱۹۵۳، به منظور بررسی افت انرژی در پدیده ضربه قوچ، از روش مشخصه در تحلیل

1 Wood

2 Bergeron

3 Lowy

4 ASCE

5 ASME

6 Ruus

7 Optimum Valve Closure

8 Franc & Cableca

9 Streeter

10 Garey

کامپیوتری استفاده نمود. در سال ۱۹۶۳، لای^۱ و استریتر در مقاله‌ای مشترک، روش مشخصه را در تحلیل جریان میرا، با کمک کامپیوتر تعمیم دادند [کرامت ۱۳۸۹].

بعدها استریتر مقالات متعددی درباره روش مشخصه ارائه نمود. همچنین کتابی را با عنوان جریان‌های میرای هیدرولیکی با همکاری وایلی^۲ در سال ۱۹۷۸ منتشر کرد [Wylie & Streeter 1993].

۲-۲- پدیده اندرکنش سیال-سازه

پدیده اندرکنش سیال-سازه در سیستم‌های خط لوله در سالیان اخیر به خصوص از اواخر قرن بیستم مورد مطالعه بسیاری از محققین قرار گرفت. بررسی این مطالعات یک سیر تحول و پیشرفت از امواج محوری و حرکت یک بعدی لوله به معادلات چند بعدی موج و روش‌های پیشرفته عددی را نشان می‌دهد.

اسکالاک^۳ در سال ۱۹۵۶ به پدیده اندرکنش سیال-سازه پرداخت و معادلات تداخلی حاکم بر ضربه قوچ را مطرح نمود [کرامت ۱۳۸۹].

در سال‌های بعد محققان برای بررسی و مطالعه این پدیده از روش‌های گوناگون مدلسازی عددی استفاده نمودند. از مهم‌ترین مطالعات صورت گرفته، می‌توان به حل معادلات سازه‌ای با روش اجزای محدود و معادلات هیدرولیک با روش خطوط مشخصه و همچنین حل تحلیلی مساله اندرکنش سیال-سازه برای یک لوله اشاره نمود.

وایلی و استریتر، در کتاب جریان‌های میرای به تاثیر جابجایی‌های طولی و محیطی لوله در کاهش سرعت موج فشاری پرداختند [Wylie & Streeter 1993]. این کاهش در تحلیل مسائل جریان گذرا در خط لوله به صورت سنتی و بدون در نظر گرفتن علت آن، یعنی حرکت لوله در نظر گرفته شد.

1 Lai

2 Wylie

3 Skalak

اسکالاک، تورلی^۱ و ویلیامز^۲، معادلات امواج طولی را برای سیال و لوله بصورت کوپله در نظر گرفتند، تا بارهای ناشی از جریان میرای ایجاد شده در لوله‌های مستقیم را تعیین و بتوانند امواج کششی ایجاد شده در بدنه‌ی لوله را محاسبه کنند. بر این اساس اسکالاک، با در نظر گرفتن حرکت لوله تنها در جهت محوری و کاملاً در حد الاستیک مطالعه‌ای را انجام داد [کرامت ۱۳۸۹].

ریگتز^۳ در سال ۱۹۶۰، دسوزا و اولدنبورگر^۴ در سال ۱۹۶۴ و جونز و وود^۵ در سال ۱۹۷۲، اثرات ارتعاشات و حرکات محوری ناشی از یک جریان میرا در یک لوله تنها را بر ایجاد موج فشار، مورد مطالعه قرار دادند. وود در سال‌های ۱۹۶۸ و ۱۹۶۹ جریان غیرماندگار سیال را با یک مدل یک درجه آزادی جرم - فنر، بصورت کوپله در نظر گرفت و توانست مهمترین تداخل سیال و سازه‌ی لوله را اثبات کند. این تحلیل همچنین برای ارتعاش سیستم‌های لوله یک درجه آزادی صحیح است. همچنین وی به این نتیجه رسید، زمانی که بخش‌های ضروری سیستم به طور کامل مهار نشده باشند، می‌تواند تفاوت‌های شدیدی (تغییرات دامنه و فرکانس) در نتایج، نسبت به تحلیل کلاسیک به وجود آورد. بلید و همکاران^۶ بر روی حرکت ارتعاشی نقطه میانی یک خط لوله با یک زانو تحقیق کردند. این سیستم دارای یک درجه آزادی در جهت طولی بود. نتایج تحلیل کوپله سیال-سازه‌ای که آن‌ها ارائه دادند با نتایج آزمایشگاهی مطابقت داشت [نجانان طوسی ۱۳۹۰].

همچنین از اقدامات انجام شده در این موضوع بایستی به تحلیل لرزه‌ای غیر کوپله سیال اشاره نمود که توسط زیلک و هک^۷ و همچنین استریتر و وایلی و چاودری^۸ توسعه داده شده و در آن با فرض

1 Thorely

2 Williams

3 Regetz

4 D'souza & Oldenburger

5 Jones & Wood

6 Blade et al.

7 Zielke & Hack

8 Chaudhry

صلب بودن لوله، سیال به کمک روش خطوط مشخصه تحلیل می‌گردد. سپس بارهای هیدرولیکی روی قسمت‌های مختلف سازه‌ای تعیین شده و برای انجام تحلیل سازه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند [کرامت ۱۳۸۹].

ویلکینسون^۱ در سال ۱۹۷۸، روشی برای تخمین پاسخ لرزه‌ای سیستم عمومی لوله ارائه کرد که در آن از یک ماتریس انتقال استفاده شده است. روابطی که وی مورد استفاده قرار داد که شامل پنج خانواده کوپله (یکی در سیال و چهار رابطه در سازه لوله) بودند [کرامت ۱۳۸۹].

آلیس^۲ در سال ۱۹۸۰، با بررسی و تحلیل رفتار غیرماندگار سیال در یک شبکه لوله ایستگاه پمپاژ، یک روش خطوط مشخصه را برای حرکت سیال و لوله به صورت کوپله ارائه داد [زنگانه ۱۳۹۲]. ویگرت و هتفیلد و استاکنبروک در سال ۱۹۸۷، یک روش مشخصه برای سیال و سازه به صورت همزمان ارائه کردند [Wiggert & Hatfield & Stuckenbruck 1987].

بلچیکو، کارابین و لین فرآیندی دو گامی جهت تشابه امواج و تاثیر سازه‌ای آن در سیستم لوله پیشنهاد نمودند. آنان برای دوری جستن از حل کوپله که دارای پیچیدگی‌های فراوان بود، از روش ساده‌ای بهره جستند که می‌توانست با دقت کافی تراکم پذیر بودن سیال-سازه را در نظر بگیرد. در این روش با فرض صلب بودن لوله، از انجام تحلیل هیدرودینامیکی توزیع فشار در خط لوله به دست آمده و سپس از این فشار، بارهای سازه‌ای جهت انجام تحلیل اجزای محدود، بدست می‌آمدند [Belytchko & Karabin & Lin 1986].

لوویج و تیسلینگ تداخل سیال و لوله را با بکار بردن تئوری ضربه‌ی قوچ برای سیال و تئوری خمش تیموشنکو برای المان لوله مدل کردند و معادلات هیدرولیکی با MOC و معادلات لرزه‌ای سازه با FEM تحلیل شدند [Lavooij & Tijsseling 1990].

پس از سال ۱۹۹۰، حل معادلات پدیده اندرکنش سیال-سازه از دو منظر مورد توجه قرار گرفت که

1 Wilkinson

2 Ellis

هریک دارای معایب و مزایایی هستند. حل در بازه زمان از آنجایی که این قابلیت را فراهم می‌نماید که به وسیله آن می‌توان انواع مختلف سیستم‌های لوله (شاخه ای، حلقوی با انواع شرایط مرزی) را تحلیل کرد، اهمیت دارد. ویگرت و تایلینگ^۱ در سال ۲۰۰۱ عنوان کردند که حل عددی معادلات در این روش، نیازمند استفاده از میانمایی جهت انتقال داده‌های هیدرولیکی به معادلات سازه و بالعکس می‌باشد که این امر خود باعث کند شدن این مدل‌ها می‌شود. حل در حوزه فرکانس برای شرایط سیستم لوله و شرایط مرزی بسیار ساده امکان پذیر است [کرامت ۱۳۸۹].

هیبرمن عنوان کرد که در این روش معادلات حاکم با روش جداسازی متغیرها و سپس استفاده از سری‌های فوریه جهت تعیین تابع مناسب که بتواند شرایط مرزی را ارضا کند امکان پذیر است. [Haberman 2004].

هایسبروک و تایلینگ در مقاله‌ی سال ۱۹۹۴ خود، اثرات سختی تکیه‌گاه الاستیک بر فشارهای سیال و تنش‌های حاصله در سیستم لوله را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که دلیل افزایش اثرات تداخلی بین سیال و سازه در سیستم‌هایی با سختی کمتر تکیه‌گاهی، استفاده از معادلات کلاسیک ضربه قوچ و آنالیز غیر کوپله منجر به جواب‌های غیرقابل قبول خواهد شد. بررسی نتایج استفاده از انواع سختی‌های تکیه‌گاهی نشان داد که اگر سختی تکیه‌گاه کمتر از سختی یک متر لوله باشد بایستی از مدل آنالیز تداخلی استفاده شود و با انعطاف پذیرتر شدن سیستم، میزان تنش‌ها در سیستم لوله افزوده شده ولی نیروهای وارده بر تکیه‌گاه‌ها کاهش خواهد یافت. همچنین در این مقاله مباحث مهمی در زمینه رابطه سختی تکیه‌گاهی با فرکانس اصلی امواج فشاری، زمان آنالیز و واکنش‌های تکیه‌گاهی ارائه شده است [Heinsbroek & Tijsseling 1994].

مقاله هینسبروک در سال ۱۹۹۷، یکی از مقالات اساسی در زمینه آنالیز زمانی اثرات تداخلی سیال-سازه در شبکه‌های لوله می‌باشد. در این مقاله روش خطوط مشخصه جهت حل معادلات هیدرولیک و روش اجزای محدود برای حل معادلات سازه بکارگرفته شده است و مقایسه‌ای بین استفاده از این

1 Tijsseling

روش و روش تمام خطوط مشخصه نیز صورت گرفته است [Heinsbroek 1997]. برگانت و تیسلینگ سال ۲۰۰۱، در مقاله‌ای با استفاده از روش مشخصه (MOC) برای حل معادلات هیدرولیکی و سازه‌ای، تداخل سیال و سازه را بصورت کوپله در نظر گرفتند و پارامترهای مؤثر در میرایی موج ضربه قوچ را مورد بررسی قراردادند. در این مقاله اثرات اصطکاک غیر ماندگار، کایتاسیون و تداخل سیال و سازه‌ی لوله، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و تأثیر هر کدام بر کل سیستم با حل چند مثال نشان داده شده است. این روش به دلیل اینکه در پاره‌ای از مسائل نیاز به درون یابی عددی دارد، دارای خطا است [Bergant & Tijsseling 2001].

لسای و واردی با تأکید بر این که در نظر نگرفتن اثرات تداخلی، اثرات مخربی را به دنبال خواهد داشت، استانداردهای معتبر را مورد نقد قرار داده و ضرورت بازنگری آن‌ها را برای بیان لزوم آنالیزهای تداخلی مورد بحث قرار دادند [Leslie & Vardy 2001].

راکید و ماتوس در مقاله‌ی خود تداخل سیال-سازه را در سیستم‌های لوله‌ی غیر الاستیک مدلسازی کردند. در این مقاله یک روش عمومی و سیستماتیک برای در نظر گرفتن انواع مختلف رفتارهای مصالح لوله در تحلیل سیال-سازه ارائه شده است [Rachid & Mattos 2003].

سال ۲۰۰۳، تیسلینگ در مقاله‌ای دیگر با ارائه حل دقیق برای سیستم چهار معادله‌ای ارتعاش محوری لوله-سیال، روشی جهت دقت بخشیدن به حل فوق‌الذکر ارائه کرده است [Tijsseling 2003]. همزمان با کار تیسلینگ، مقاله مهم دیگری نیز توسط لی و همکاران^۱ ارائه شد که تنها در روش حل معادلات تفکیک یافته با مقاله تیسلینگ تفاوت دارد.

یانگ و همکاران نیز در تحقیق مشابهی با استفاده از روش ماتریس انتقال^۲ حل تحلیلی برای معادلات تداخلی سیال-سازه در لوله ارائه دادند. در این تحقیق برای یک لوله به طول ۲۰ متر نشان داده شده است که اثر تداخلی اتصال نسبت به اثر تداخلی پواسن بسیار مهم‌تر است [Yang & Li & Zhang

1 Li et al.

2 Transform Matrix Method

[2004].

تایسلینگ و واردی در سال ۲۰۰۸، مطالعه جامعی را انجام دادند که در آن اطلاعات مفیدی در زمینه فرکانس اصلی ضربه قوچ، فرکانس اصلی امواج تنش و اهمیت نوع تکیه‌گاه‌ها در رفتار دینامیکی سیستم‌های لوله می‌باشد [Tijsseling & Vardy 2008].

احمدی و کرامت با ارائه مقاله‌ای در سال ۲۰۱۰، به بررسی اثرات انواع مختلف کوپله اتصال در پدیده ضربه قوچ پرداختند. آن‌ها در این مقاله، روابط شرایط مرزی مورد نیاز جهت مدلسازی کوپله اتصال در حالات مختلف، مانند پمپ‌ها، شاخه‌ها و شیرهایی که امکان جابه‌جایی داشتند را برای حل معادلات هیدرولیکی و سازه‌ای با استفاده از روش MOC-FEM، ارائه نمودند. نتایج این تحقیق به درک بهتر مهندسی در رابطه با اثرات کوپله اتصال کمک شایانی می‌نماید [Ahmadi & Keramat 2010].

در سال‌های اخیر توجه بیشتر محققین در زمینه ضربه قوچ به بررسی جداگانه و یا توأم هریک از پارامترهای موثر در امواج فشاری چکش آبی مانند اصطکاک غیر ماندگار، کاویتاسیون، اندرکنش سیال-سازه، نشت و اثر رفتار ویسکوالاستیک در سیستم لوله، معطوف شده است. با وجود همه این تحقیقات، پدیده تداخل سیال-سازه، هنوز نیز دارای نقاط مبهم زیادی است و از نظر فیزیکی در سیستم لوله کاملاً شناخته شده نمی‌باشد و تا به امروز هیچ روش قطعی جهت بررسی این پدیده ارائه نشده است و لذا نیازمند بررسی و مطالعات بیشتر می‌باشد.

۲-۳- روش‌های تفاضل محدود

تقریب مشتق‌ها با استفاده از تفاضل محدود یکی از ساده‌ترین و آسان‌ترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. تفاضل محدود یک بعدی در مکان با نام اویلر^۱ ۱۷۶۸ و گسترش دامنه به دو بعد با نام رانگه^۲ ۱۹۰۸ شناخته می‌شود. عصر روش‌های تفاضل محدود در کارهای عددی پیش از دهه

1 L. Euler

2 C. Runge

۱۹۵۰ آغاز شد و توسعه این روش‌ها با کمک مدلسازی کامپیوتری برای مسائل علمی و تکنولوژی پیچیده آغاز گردید. نتایج تئوری بدست آمده در پنج دهه اخیر دقت، پایداری و همگرایی روش‌های تفاضل محدود را برای معادلات مشتق جزئی تایید می‌کند.

۲-۳-۱- روش لاکس-فردریش (LXF)

این روش به احترام پیتر لاکس و کورت فردریش^۱ نامگذاری شده است. ایکس‌آکسی و همکاران میزان همگرایی^۲ گام مستهلک کننده^۳ روش لاکس-فردریش را در دینامیک گازهای همگن مورد بررسی قرار دادند [Xiayi 1989]

تویتو، همگرایی و پایداری روش لاکس-فردریش را برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی^۴ مورد بررسی قرار داد [Tveito 1990].

بوکادیدا و لروکس نوع جدیدی از روش لاکس-فردریش را ارائه نمودند که با اصلاح فلاکس‌ها^۵، میزان هدردهی^۶ را بدون جایگزین کردن تغییرات کل^۷ کاهش می‌دهد. نتایج حاصل از این روش مشابه روش گودونو با فلاکس‌های صحیح می‌باشد [Boukadida & LeRoux 1994].

تانگ به بررسی صحت روش صریح و ضمنی^۸ لاکس-فردریش برای معادلات تراکم پذیر اوپلر^۹ پرداخت. وی دریافت که روش مرتبه اول لاکس-فردریش تحت هرگونه شرایط مرزی دارای چگالی و

1 Peter Lax & Kurt O. Friedrichs

2 Convergence

3 The fractional step

4 Parabolic

5 Fluxes

6 Diffusion

7 Total-variation

8 Explicit

9 Compressible Euler equations

انرژی درونی غیر صفر است، چنانچه عدد کوران^۱ یک باشد [Tang 2000].
 براب به تحقیق درباره ساختار عامل لاکس-فردریش پرداخت و استفاده صحیح از آن را مطرح نمود.
 شمایین در سال ۲۰۰۵ ثابت نمود که روش لاکس-فردریش پراکنده کننده^۲ نیست ولی نوعی از روش
 دو گام زمانی لاکس-فردریش پراکنده کننده می باشد [Breub 2004].
 ایسکا، شاشکو و وندروف روش دو بعدی لاکس-فردریش را روی فرم لاگرانژی^۳ معادلات اویلر روی
 مش مثلثی را گسترش دادند [Liska & Shashkov & Wendroff 2011].

۲-۳-۲- روش لاکس-وندروف (LXW)

این روش در سال ۱۹۶۰ توسط پیتر لاکس و بورتون وندروف^۴ معرفی شد. ال فایومی و ال سبایی^۵ با
 استفاده از آنالیز پایداری غیرخطی هیرت^۶ نشان داد که مقدار خطاهای پراکنده سازی در ناحیه
 شوک^۷ معادله برگرز لزج ناشی از روش لاکس-وندروف کاهش می یابد [El-Fayoumi & El-Sebaili
 1981]. وارن^۸ با کمک روش لاکس-وندروف موج بازتابی^۹ از انتهای نازل لوله را مدلسازی
 نمود [Warren 1985].

پولونی، وینترتون و نیکولس در سال ۱۹۸۷، مقایسه ای بین مدلسازی جریان غیرهمونتروپیک^{۱۰} توسط
 روش خطوط مشخصه و روش دوگام زمانی لاکس-وندروف انجام داد و نتایج نشان داد که نتایج روش

1 Courant

2 Dissipative

3 Lagrangian form

4 Peter Lax & Burton Wendroff

5 El-Fayoumi & El-Sebaili

6 Non-linear Hirt stability analysis

7 Shock region

8 Warren

9 Reflected wave

10 Non-homentropics

دوگام زمانی لاکس-وندروف سریع تر از روش خطوط مشخصه است و اعمال این روش عددی در مسائل مهندسی آسان تر است [Poloni, Winterbone & Nichols 1987].

تامبا و نامبرو روش عددی جدیدی را با ترکیب دو روش عددی لاکس-وندروف و تیلور-گالرکین^۱ ارائه نمودند [Tamma & Numburu 1988].

بخباخی در سال ۲۰۰۹ با استفاده از الگوریتم ترکیبی روش لاکس-وندروف و کراک نیکلسون^۲ توانست مدل‌های تعادل رایج^۳ را برای گازهای غیر حلال کریستالی^۴ حل کند و نتایج حاصل منطبق بر نتایج آزمایشگاهی بود [Bakbakhi 2009].

موآرسکی و سزیدلوسکی با استفاده از این روش عددی به مدلسازی جریان گذرا تدریجی و سریع در کانال‌های باز جریان پرداختند [Murawska & Szydowski 2013].

۲-۳-۳- روش مک کورمک (MC)

این روش اختلاف محدود در سال ۱۹۶۹ توسط رابرت مک کورمک^۵ معرفی شد. فنما و چادری^۶ در سال ۱۹۸۶، گارسیا و کاهوویتا^۷ در سال ۱۹۸۶، گارسیا-ناوارو و ساویرون^۸ در سال ۱۹۹۲، آگوایره-په ات^۹ و همکاران در سال ۱۹۹۵ و علی‌مالکی^{۱۰} در سال ۲۰۱۳ با استفاده از روش مک کورمک به حل عددی معادلات سنت-ونان^{۱۱} پرداختند [Kaya & Arisory 2010]. بینگ و لیو روش مک کورمک را

1 Taylor-Galerkin

2 Crank-Nicholson

3 Population balance models

4 Gas antisolvent crystallization

5 Robert W. MacCormack

6 Fennema & Chaudhry

7 Garcia & Kahawita

8 Garcia-Navarro & Saviron

9 Aguirre-Pe et & el.

10 Alimaleki

11 St Venant equations

برای حل معادلات با مرتبه بالاتر گسترش دادند و در تحقیق خود به حل معادلات Korteweg-de Vries با مشتق مرتبه ۳، سیستم دستگاه معادلات غیرخطی حاکم بر جریان یک بعدی گذرا پلازما در دستگاه استوانه‌ای و معادلات باد خورشیدی^۱ با روش یاد شده پرداختند [Ying & Liu 1987]. برنارد روش مک کورمک را برای جریان‌های غیرقابل تراکم روی شبکه سلول‌ها گسترش داد [Bernard 1992].

ژانگ و وانگ^۲ روشی پیش بینی کننده-تصحیح کننده ای را برای حل معادله برگرز^۳ ارائه نمود که مشتق اول زمانی این روش با استفاده از روش مک کورمک محاسبه می‌شد. نتایج عددی با حل دقیق تطابق مناسبی داشتند [Zhang & Wang 2012].

موارسکی و سزیدلوسکی در سال ۲۰۱۳ با استفاده از این روش عددی به مدلسازی جریان گذرا تدریجی و سریع در کانال‌های باز جریان پرداختند [Murawska & Szydowski 2013]. اوپانگ و همکاران، با استفاده از روش مک کورمک-تی وی دی^۴ به حل معادله دو بعدی جریان جرم در ناحیه کوهی^۵ با دامنه محاسباتی متغیر پرداخت [Ouyang & et al. 2013].

۲-۳-۴- روش نسیاهو-تامور (NT)

روش مرکزی با دقت مرتبه دو^۶ بر اساس روش لاکس-فردریش در سال ۱۹۹۰ توسط نسیاهو و تادمور معرفی شد و نسیاهو-تامور نامیده شد [Nessyahu & Tadmor 1990]. آرمین جون و اس تی سایر، نوعی نسیاهو-تامور یک بعدی را معرفی نمودند که گام زمانی میانی^۷ را حذف می‌کند. این نوع از

1 Solar wind

2 Zhang & Wang

3 Burgers' equation

4 MacCormack-TVD

5 Mountainous terrain

6 Nessyahu & Tadmor

7 Intermediate time step

نسیاهو-تادمور اگرچه دقت و مدت زمان اجرای کامپیوتر را در حالت یک بعدی بهبود نمی‌بخشد ولی در حالت دو بعدی و سه بعدی از مدت زمان اجرا می‌کاهد [Arminjon & St-Cyr 2003].

نیدو و بابلو در سال ۲۰۰۵، نوعی از روش نسیاهو-تادمور را معرفی نمودند که معادلات هذلولوی یک بعدی را با ترم منبع^۱ روی مش غیرشطرنجی^۲ انتگرال گیری می نمود و این روش را در حل معادلات جریان پلازما مورد استفاده قرار دادند. آن‌ها دریافتند که این روش نوسانات کاذبی^۳ را به علت شرط مرزی بازتابی^۴ ایجاد می‌کنند [Naidoo & Baboolal 2005].

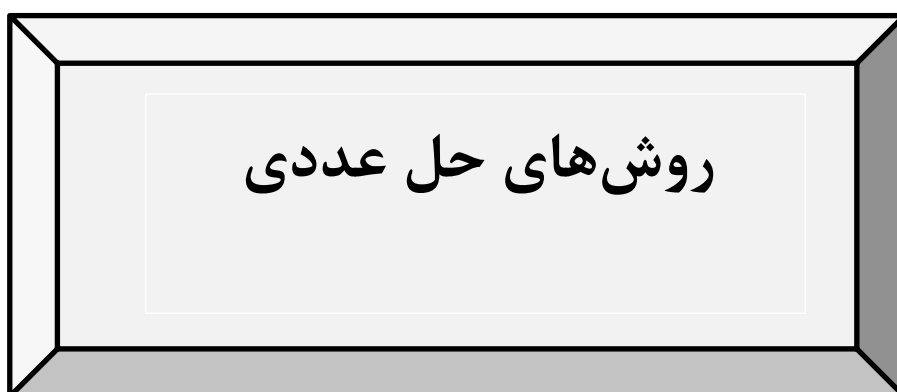
1 Source term

2 Non-staggered grids

3 Spurious oscillations

4 Boundary reflections

فصل سوم



اختلاف محدود یکی از روش‌های حل عددی معادله خطی یک بعدی و هذلولوی^۱ زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \quad (1-3)$$

که A ماتریس ضرایب می‌باشد و مقداری ثابت دارد.

در همه روش‌های عددی، معادله دیفرانسیل جزئی^۲ پیوسته با یک معادله تقریبی گسسته جایگزین می‌شود. منظور از گسسته این است که حل عددی تنها در نقاط محدودی از دامنه فیزیکی^۳ مشخص می‌باشد (تعداد این نقاط توسط فرد استفاده کننده مشخص می‌شود و با افزایش تعداد نقاط جزئیات^۴ و دقت^۵ حل عددی افزایش پیدا می‌کند.) و با توجه به روش اختلاف محدود انتخاب شده و با استفاده از معادلات جبری، مقادیر تابع را در نقاطی که مقدار آن نامشخص است، محاسبه می‌شود. شکل (۱-۳) طرح کلی حل عددی به روش تفاضل محدود را نشان می‌دهد [Recktenwald 2011].



شکل (۱-۳) طرح کلی حل عددی به روش تفاضل محدود

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان توسط معادلات هذلولوی به خصوص قوانین بقای هذلولوی^۶ توصیف نمود و تلاش برای حل تقریبی این معادلات سبب معرفی روش‌های عددی جدیدتر و دقیق‌تری شده است.

معادلات هذلولوی را در حالت کلی می‌توان به سه شکل زیر تقسیم بندی نمود:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) \quad -1$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(x, t, \mathbf{u})_x + \mathbf{s}(x, t, \mathbf{u}) \quad -2$$

1 Hyperbolic

2 Partial differential equation (PDE)

3 Physical domain

4 Resolution

5 Accuracy

6 Hyperbolic conservation laws

$$u_t = f(u)_x \quad (۳)$$

در این تحقیق از روش‌های دو گام زمانی استفاده شده است که سبب افزایش همگرایی و حل دقیق تر معادلات می‌شود. روش‌های چندگام زمانی که از معادلات تفاضل محدود با مراحل زمانی مختلف استفاده می‌کند [Hoffmann & Chiang 1989].

۳-۱- گسسته سازی دامنه در راستای بعد مکانی و زمانی

روش تفاضل محدود، دامنه یا قلمرو فیزیکی حل را با یک مش یا شبکه جایگزین می‌کند که این شبکه به وسیله تعداد معینی سلول گسسته سازی شده است. در روش تفاضل محدود به دنبال مقادیر تقریبی حل در گره‌های مش می‌باشیم.

در مسائل یک بعدی گسسته سازی در راستای بعد مکانی در محدوده $[0, L]$ توسط M تعداد سلول یا خانه صورت می‌گیرد که به صورت زیر تعریف می‌شوند (L نقطه مرز انتهایی شبکه می‌باشد):

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_M = L \quad (۲-۳)$$

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (۳-۳)$$

$$\Delta x = \frac{L}{M-1} \quad (۴-۳)$$

در روش‌های چندگامی لاکس-فردریش، لاکس وندروف، مک کورمک و نسیاهو-تادمور، از شبکه جابه‌جا شده استفاده می‌کنیم. نقاط شبکه جابه‌جا شده را می‌توان به شکل‌های زیر تعریف نمود:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) \quad (۵-۳)$$

یا

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{1}{2}\Delta x \quad i = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (۶-۳)$$

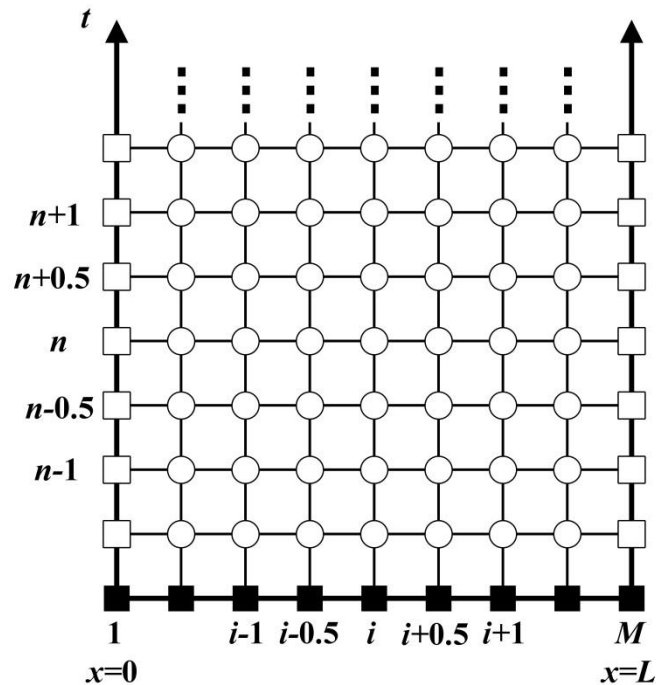
لازم به یادآوری می‌باشد که در روش‌های چندگامی، اولین گام در نقطه میانی $i + \frac{1}{2}$ اعمال می‌شود. گسسته سازی در راستای بعد زمانی نیز در محدوده $[0, t_{Max}]$ ، توسط گام‌های زمانی تا رسیدن به گام نهایی صورت می‌پذیرد:

$$t^0 = 0, t^{n+1} = t^n + \Delta t \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (۷-۳)$$

روش‌های چندگامی از معادلات تفاضل محدود با مراحل زمانی مختلف استفاده می‌کند. روش‌های به کاررفته در این تحقیق دو گام زمانی می‌باشد یعنی هرگام زمانی به دو نیم گام زمانی تقسیم می‌شود:

$$t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t \quad (۸-۳)$$

در کلیه روش‌های به کاربرده شده در این مطالعه، اندازه گام‌های زمانی و مکانی می‌تواند متغیر باشد. دامنه حل در شکل (۲-۳) ترسیم شده است.



شکل (۲-۳) نمای شماتیک مش جابه‌جا شده

۳-۱-۱- انتخاب اندازه گام زمانی و محدودیت پایداری

به منظور پایداری حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی (معمولا معادلات هذلولوی) از شرط پایداری عدد کورانت^۱ استفاده می‌شود. این عدد همچنین به نام شرط کورانت-فردریش-لوی^۲ یا شرط CFL نیز شناخته می‌شود. تاریخچه شرط پایداری به سال ۱۹۲۸ و مقاله نوشته شده توسط سه دانشمند

1 Courant number

2 Courant-Friedrichs-Lewy

یادشده باز می‌گردد که نقش اساسی این عدد را در فرآیند گسسته سازی اثبات نمودند. در مسائل یک بعدی این عدد از رابطه حاصل می‌شود:

$$Cr = \frac{\Delta t \lambda^n}{\Delta x} \leq Cr_{Max} \quad (9-3)$$

Δx = اندازه گام مکانی

Δt = اندازه گام زمانی

λ^n = سرعت موج در گام زمانی n

انتخاب اندازه گام زمانی Δt ، در روش‌های عددی به کار رفته در این تحقیق همانند سایر روش‌ها، وابسته به محدوده عدد کورانت می‌باشد. تحلیل پایداری ون-نیومن¹ نشان می‌دهد که به ازای عدد کورانت در بازه $0 \leq Cr_{Max} \leq 1$ جواب پایدار است (شرط CFL). به کمک این معیار، گام زمانی را محاسبه می‌کنیم. معمولاً به ازای کورانت 0.9-1 دقیق ترین جواب‌ها حاصل می‌شود.

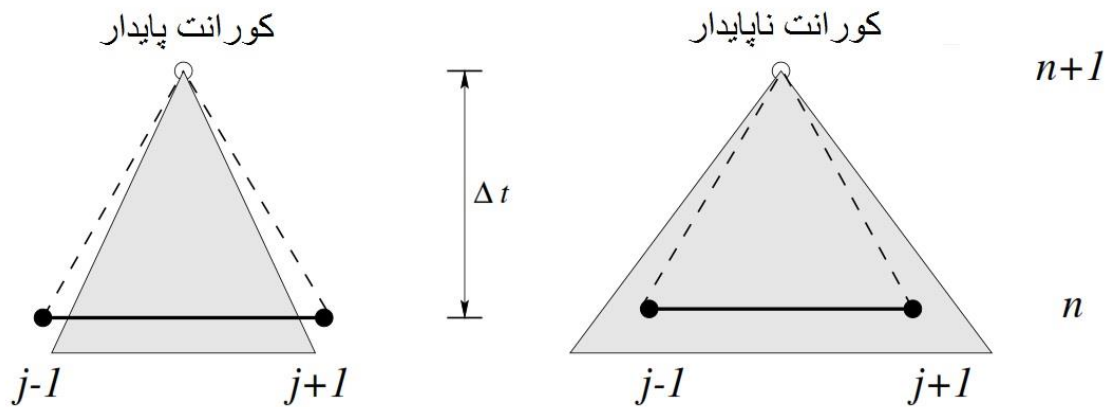
$$\Delta t = \frac{Cr_{Max} \Delta x}{\lambda_{Max}} \quad (10-3)$$

پس با دانستن حداکثر سرعت موج (λ_{Max}) و انتخاب گام مکانی (Δx) به منظور رسیدن به دقتی مشخص، می‌توان اندازه گام زمانی را محاسبه نمود. رابطه (10-3) امکان تفسیرهای مفیدی در رابطه شرط CFL فراهم می‌کند.

از نقطه نظر فیزیکی عدد کورانت را می‌توان به صورت نسبت دو سرعت موج معادله دیفرانسیل حاکم (λ^n) به سرعت مش یا شبکه های حل ($\frac{\Delta x}{\Delta t}$) توصیف نمود و شرط پایداری این قطعیت را ایجاد می‌کند که همواره سرعت موج کمتر از سرعت شبکه حل می‌باشد.

از نقطه نظر ریاضی، شرط پایداری این قطعیت را ایجاد می‌کند که دامنه عددی بزرگتر از دامنه فیزیکی است (شکل 3-3).

1 Von-Neumann stability analysis



شکل (۳-۳) طرح کلی انتخاب گام زمانی بر اساس کورانت پایدار و ناپایدار (خطوط نقطه چین نشان دهنده محدوده دامنه عددی در x_j^{n+1} و ناحیه سایه دار نشان دهنده دامنه فیزیکی. پایداری زمانی بدست می‌آید که ناحیه اول بزرگتر از ناحیه دوم باشد.) [Rezzolla 2011].

۳-۲- روش لاکس-فردریش (LXF)

نام گذاری این روش بر اساس نام دو دانشمند برجسته، پیتر لاکس^۱ و کورت فردریش^۲ صورت گرفته است و برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای براساس اختلاف محدود بنا شده است و فقط برای معادلات مرتبه اول قابل استفاده می‌باشد. لذا استفاده از این روش محدود می‌باشد ولی قابلیت حل هر سه نوع معادلات دیفرانسیل هذلولوی را که در قسمت پیش معرفی شدند را داراست. این روش به عنوان راه حلی برای ناپایداری روش تقریب پیشرو زمان و تقریب مرکزی مکان (FTCS)^۳ مطرح شد. روش لاکس-فردریش سنگ بنای اصلی بیشتر روش‌های مرکزی می‌باشد. این روش بقای^۴ و یکنواخت^۵ می‌باشد پس در دسته روش‌های تغییرات کل از بین رونده^۶ (تی وی دی) قرار می‌گیرد. روش LXF مشابه روش گودونو از تقریب ثابت تکه ای^۷ برای حل استفاده می‌کند ولی بر خلاف گودونو

1 Peter Lax

2 Kurt o. Friedrichs

3 Forward in time, centered in space

4 Conservative

5 Mmonotone

6 Total variation diminishing (TVD)

7 Piecewise constant approximation

برای محاسبه مقدار تابع در گام زمانی بعدی نیازی به استفاده از مسئله ریمان^۱ ندارد و فقط فلاکس^۲ را تقریب می‌زند [Chikitkin & Rogov 2015].

شرط پایداری این روش به صورت $1 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ بیان می‌شود که a سرعت موج است.

در روش دو گام زمانی لاکس-فردریش، گام زمانی اول روی مش شطرنجی است و با برداشتن گام زمانی دوم، مقدار تابع در گام زمانی بعد روی مش اصلی حاصل می‌شود.

۳-۲-۱- فرمول بندی روش لاکس-فردریش

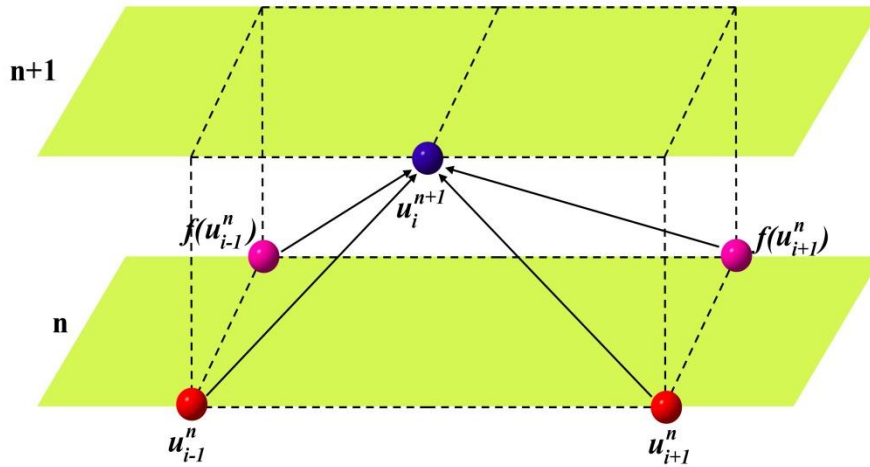
در ابتدا معادله (۳-۱) را به شیوه لاکس-فردریش اصلی گسسته سازی می‌کنیم. این روش از تفاضل محدود مرکزی در بعد مکان استفاده می‌کند و معادله تفاضل محدود آن چنین است:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} = \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \quad (۳-۱۱)$$

طرح شماتیک این روش در شکل (۳-۴) رسم شده است.

1 Riemann problem

2 Flux



شکل (۳-۴) طرح شماتیک روش لاکس-فردریش اصلی

حال با توجه به معادله (۳-۱۱) قصد داریم معادله (۳-۱) را به دو مرحله زمانی تقسیم کنیم.

گام زمانی اول:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{2\frac{\Delta x}{2}} \quad (۳-۱۲)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{\Delta x} \right) \quad (۳-۱۳)$$

توجه شود که معادله (۳-۱۳) مقادیر تابع u در گره‌های مکانی $i = 1, 2, \dots, M - 1$ و زمان $n + \frac{1}{2}$ را

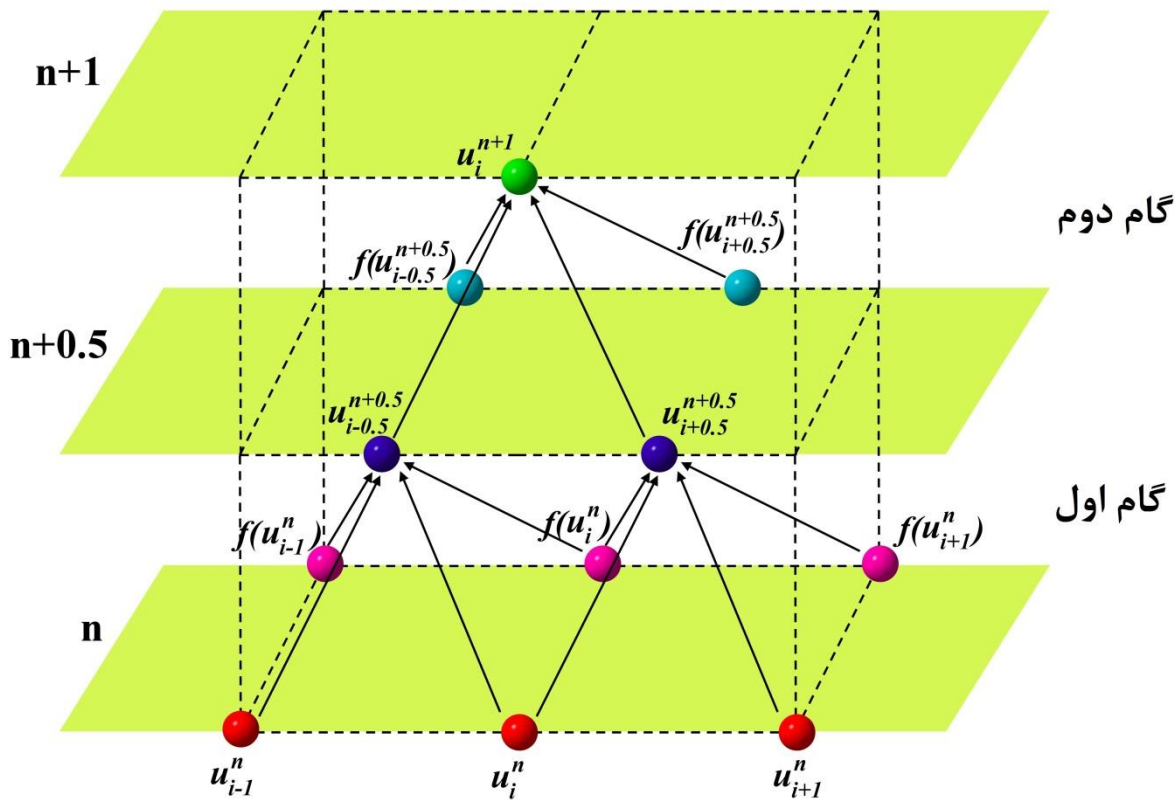
روی مش شطرنجی نتیجه می‌دهد.

گام زمانی دوم:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})}{2\frac{\Delta x}{2}} \quad (۱۴-۳)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta x} \right) \quad (۱۵-۳)$$

در گام زمانی دوم و با کمک معادله (۱۵-۳) مقادیر تابع u در گره‌های مکانی $i = 2, 3, \dots, M - 1$ و زمان $n + 1$ را روی مش اصلی محاسبه می‌شود. طرح شماتیک روش دو گام زمانی LXF در شکل (۵-۳) رسم شده است.



شکل (۵-۳) طرح شماتیک روش دو گام زمانی لاکس-فردریش

۳-۳ روش لاکس-وندروف (LXW)

نام گذاری این روش بر اساس نام دو دانشمند برجسته، پیتر لاکس و بورتون وندروف^۱ صورت گرفته

1 Burton Wendroff

است و برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای براساس اختلاف محدود بنا شده است. این روش قابلیت حل هر سه نوع معادلات دیفرانسیل هذلولوی را که در قسمت پیش معرفی شدند را داراست. شرط پایداری این روش به صورت $1 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ بیان می‌شود که a سرعت موج است و دقت این روش در دو بعد زمان و مکان از مرتبه دو می‌باشد.

۳-۳-۱- فرمول بندی روش دوگام زمانی لاکس-وندروف

این روش صریح از راه‌های مختلفی قابل اثبات می‌باشد که بسط سری تیلور نمونه‌ای از این راه‌هاست [Hoffman & Chiang 1993]:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + o(\Delta t)^3 \quad (۱۶-۳)$$

و یا برحسب اندیس‌ها:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + o(\Delta t)^3 \quad (۱۷-۳)$$

حال چنانچه از معادله (۱-۳) نسبت به زمان مشتق گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۱۸-۳)$$

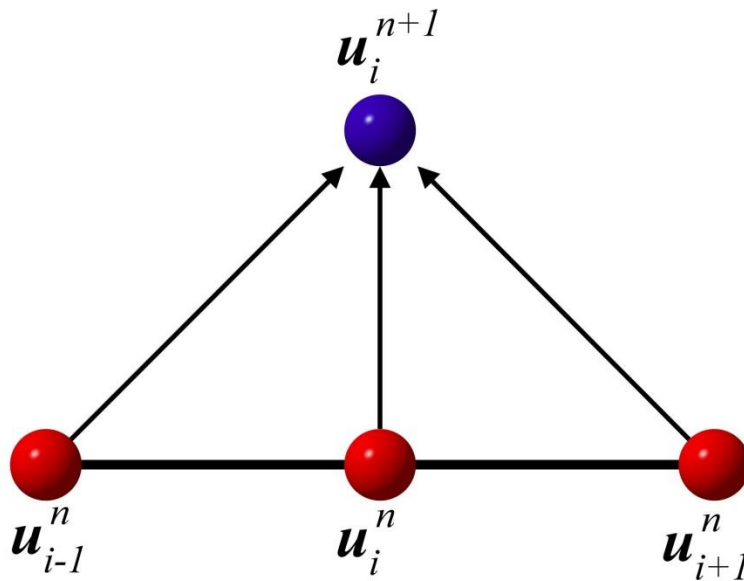
با جایگزین کردن معادلات (۱-۳) و (۱۸-۳) در معادله (۱۷-۳) خواهیم داشت:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + A \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} (A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \quad (۱۹-۳)$$

اگر از تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای مشتق‌های مکانی استفاده شود، معادله (۱۹-۳) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + A \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \Delta t + \frac{1}{2} A^2 (\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (۲۰-۳)$$

طرح شماتیک روش لاکس-وندروف در شکل (۶-۳) رسم شده است.



شکل (۳-۶) طرح کلی روش لاکس-وندروف در مسائل خطی

حال روش لاکس-وندروف را به دو گام زمانی تقسیم می‌کنیم:

گام زمانی اول:

گام زمانی اول این روش مشابه با گام زمانی اول روش لاکس-فردریش (رابطه (۳-۱۳)) که در بخش قبل بحث شد، می‌باشد.

گام زمانی دوم:

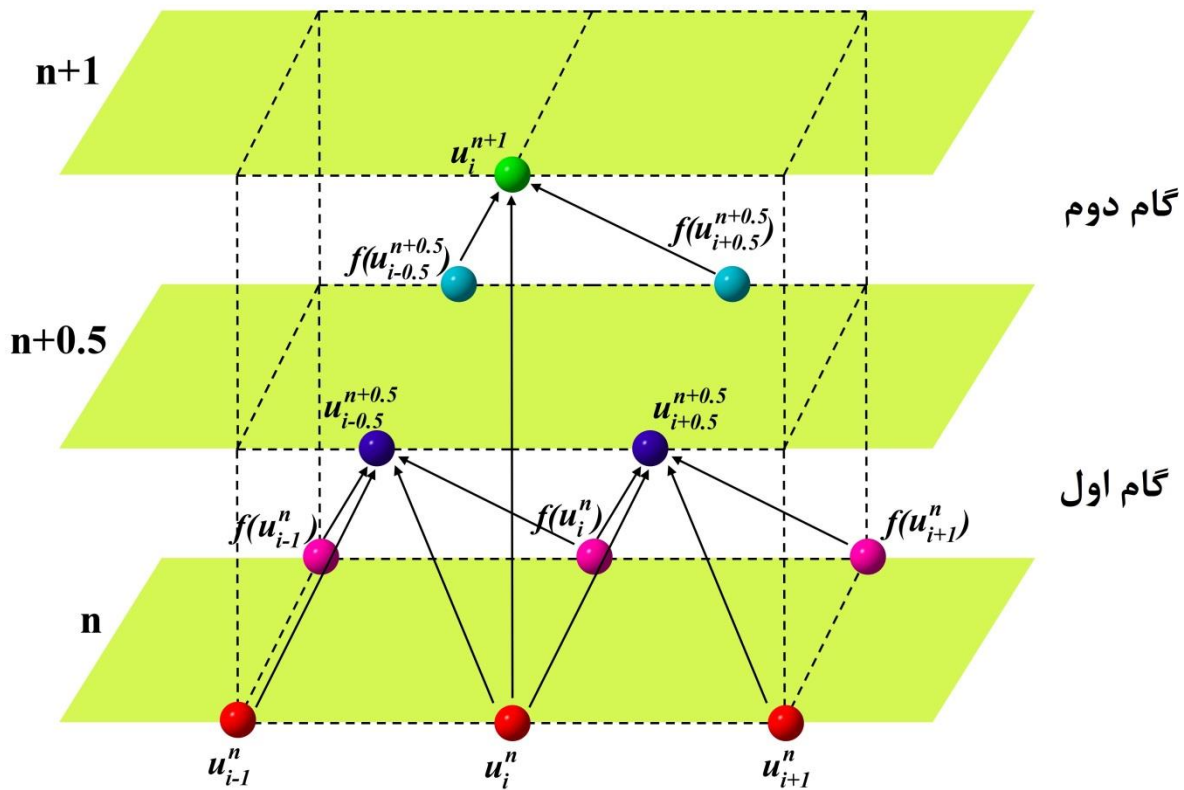
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})}{2\frac{\Delta x}{2}} \quad (۳-۲۱)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta x} \right) \quad (۳-۲۲)$$

قابل ذکر است که چنانچه معادله (۳-۱۳) در معادله (۳-۲۲) جایگزین شود، معادله لاکس-وندروف

اصلی، یعنی (۳-۲۰) به دست می‌آید.

طرح کلی روش دوگام زمانی لاکس-وندروف در شکل (۳-۷) رسم شده است.



شکل (۷-۳) طرح کلی روش دوگام زمانی لاکس-وندروف

۳-۳-۲- روش لاکس-وندروف با فیلتر غیرخطی (SLXF)

لاکس-وندروف یک روش متفرق کننده (پخش کننده) می‌باشد. به منظور کاهش تغییرات کلی حل عددی، تحت عنوان فیلتر غیرخطی اعمال شد و بدین صورت روش لاکس-وندروف نرم را روش لاکس-وندروف با فیلتر غیرخطی یا SLXW نام گرفت. انگکوئیست و همکاران تعدادی فیلتر غیرخطی پیشنهاد دادند که بدین منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد [Engquist & Lotstedt & Sjogreen 1989]. فیلتر غیرخطی که در الگوریتم این تحقیق مورد استفاده قرار گرفت، به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$Dp = u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}, Dm = u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \quad (۲۳-۳)$$

چنانچه $Dm \times Dp < 0$ باشد، فیلتر غیرخطی به نتایج حاصل از روش لاکس-وندروف به صورت زیر اعمال می‌شود در غیر این صورت نتایج تغییر نخواهند کرد.

(۲۴-۳)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^{n+1} + \text{corr}(Dp, Dm), \mathbf{u}_{j+1}^{n+1} = \mathbf{u}_{j+1}^{n+1} - \text{corr}(Dp, Dm) & \text{if } |Dp| > |Dm| \\ \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^{n+1} + \text{corr}(Dp, Dm), \mathbf{u}_{j-1}^{n+1} = \mathbf{u}_{j-1}^{n+1} - \text{corr}(Dp, Dm) & \text{if } |Dp| \leq |Dm| \end{cases}$$

(۲۵-۳)

$$\text{corr}(Dp, Dm) = \begin{cases} \text{sign}(Dp) \times \min(|Dm|, \frac{|Dp|}{2}), & \text{if } |Dp| > |Dm| \\ \text{sign}(Dp) \times \min(|Dp|, \frac{|Dm|}{2}), & \text{if } |Dp| \leq |Dm| \end{cases}$$

MC-۴-۳

روش مک کورمک به صورت گسترده در گسسته سازی معادلات هذلولوی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش بر اساس روش لاکس-وندروف می‌باشد که ضرورت محاسبه مقادیر نامعلوم را در نقاط $i + \frac{1}{2}$ و $i - \frac{1}{2}$ را حذف کرده است. به خاطر همین ویژگی، روش یاد شده در حل معادلات هذلولوی غیرخطی عملکرد مناسبی دارد [Anderson 1995]. در مسائل خطی، این روش معادل روش لاکس-وندروف است. دقت این روش صریح مرکزی از مرتبه دو در مکان و زمان می‌باشد و شرط پایداری آن به صورت $1 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ بیان می‌شود که a سرعت موج است.

۳-۴-۱- فرمول بندی روش مک کورمک

در این بخش قصد داریم معادله (۳-۱) را با کمک این روش پیش بینی و تصحیح کننده^۱ گسسته سازی نماییم [Hoffman & Chiang 1993]:

گام پیش بینی:

در این روش چند مرحله‌ای، در معادله‌ی اول از تفاضل پیشرو استفاده می‌شود و معادله تفاضل محدود آن چنین است:

1 Predictor-corrector

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{\Delta x} \quad (26-3)$$

$$u_i^* = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) \quad (27-3)$$

در این معادله علامت ستاره نشان دهنده‌ی مقدار موقت متغیر وابسته در مرحله زمانی جلوتر است.
گام تصحیح:

در معادله‌ی دوم از تفاضل پسرو استفاده می‌شود:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{f(u_i^*) - f(u_{i-1}^*)}{\Delta x} \quad (28-3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_i^*) - f(u_{i-1}^*)) \quad (29-3)$$

مقدار $u_i^{n+\frac{1}{2}}$ با مقدار متوسط زیر جایگزین می‌شود:

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_i^n + u_i^*) \quad (30-3)$$

۳-۵- روش نسیاهو-تادمور (NT)

این روش بر مبنای روش لاکس-فردریش می‌باشد و مشابه روش‌های پیشتر گفته شده و شرط پایداری آن به صورت $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ بیان می‌شود که a سرعت موج است. اساس این روش بر مبنای مش شطرنجی، بازسازی^۱ (از نوع MUSCL) تابع درونیابی تکه‌ای خطی^۲ در مکان، استفاده از محدود کننده غیرخطی نوسانات^۳ و قانون نقطه وسط^۴ برای محاسبه انتگرال نسبت به زمان می‌باشد [Chikitkin, Rogov & Utyuzhnikov 2015].

۳-۵-۱- فرمول بندی روش نسیاهو-تادمور

در این قسمت علاوه بر توضیح گسسته سازی معادله (۳-۱) به اثبات روش نسیاهو-تادمور می‌پردازیم.

1 Reconstruction of MUSCL-type

2 Piecewise linear interpolants

3 Oscillation-suppressing nonlinear limiters

4 Midpoint quadrature rule

روش NT مقدار $\mathbf{u}(x, t)$ را روی مش یکنواخت $x_i = i\Delta x$ تخمین می‌زند. محدوده $|x - x_i| \ll \frac{\Delta x}{2}$

را سلول I_i می‌نامیم و تابع توصیفی آن $X_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_i \\ 0, & x \notin I_i \end{cases} \quad (31-3)$$

حل تقریبی در زمان $t_n = n\Delta t$ و در همه مکان‌ها با استفاده از تابع ثابت تکه‌ای زیر تخمین زده می‌شود:

$$\mathbf{u}(x, t^n) = \sum \mathbf{u}_i^n X_i(x) \quad (32-3)$$

\mathbf{u}_i^n مقدار متوسط تقریبی حل در سلول می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} \mathbf{u}(x, t^n) dx \quad (33-3)$$

همچنین می‌توان آن را مقدار تقریبی $\mathbf{u}(x_i, t^n)$ دانست. مقدار تقریبی حل در در زمان t^{n+1} روی

مش شطرنجی که به صورت $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \Delta x/2$ (برای همه i ها) تعریف می‌شود را محاسبه کنیم.

سلول $I_{i+\frac{1}{2}}$ به صورت مشابه تعریف می‌شود.

گام زمانی t^{n+1} با بهبود بخشیدن تابع ثابت تکه‌ای (رابطه ۳-۳۲) آغاز می‌شود که این فرآیند

بازسازی نامیده می‌شود. استفاده از مقادیر سلول‌های مجاور برای حل، منجر به تابع تکه‌ای خطی

می‌شود:

$$\mathbf{u}(x, t^n) = \sum [\mathbf{u}_i^n + \frac{\dot{\mathbf{u}}_i}{\Delta x} (x - x_i)] X_i(x) \quad (34-3)$$

شیب خط $\dot{\mathbf{u}}_i$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\dot{\mathbf{u}}_i}{\Delta x} = MM\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta x}\right) \quad (35-3)$$

MM تابع محدود کننده می‌باشد که برای دو مقدار عددی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MM(a, b) = \frac{1}{2}(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|) \quad (36-3)$$

همانگونه که از رابطه (۳۵-۳) واضح است، دو مقدار شیب می‌توان تعریف نمود که با کمک تابع محدودکننده مقداری که میزان نوسانات حل را کاهش می‌دهد، انتخاب می‌کنیم.

حال حل تابع معادله (۱-۳) را برابر با $u(x, t^n)$ معادله (۳۴-۳) در نظر می‌گیریم. از رابطه (۱-۳) داریم:

$$\frac{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)}{dt} = \frac{f(u(x_{i+1}, t)) - f(u(x_i, t))}{dx} \quad (37-3)$$

حال طرفین معادله (۳۷-۳) را در $\frac{1}{\Delta x}$ ضرب می‌کنیم و روی مستطیل $I_{i+\frac{1}{2}} \times [t^n, t^{n+1}]$ انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^n) dx + \quad (38-3)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_i, t)) dt \right]$$

که $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ خواهد بود. برای محاسبه سمت راست معادله (۳۸-۳) از قانون نقطه وسط استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_i, t)) dt = \quad (39-3)$$

$$f(u(x_{i+1}, t^{n+\frac{1}{2}})) - f(u(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}))$$

حال دانستن مقادیر $u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}$ و $u_i^{n+\frac{1}{2}}$ الزامی است، از سری تیلور داریم:

$$u(x_{i+1}, t^{n+\frac{1}{2}}) = u(x_{i+1}, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_{i+1}, t^n) + \dots \quad (40-3)$$

$$= u(x_{i+1}, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(u(x_{i+1}, t^n)) + \dots$$

$$= u_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(u_{i+1}^n) + \dots$$

با استفاده از $F_i = f(u_i^n)$ مقدار مشتق جزئی مدرج شده به وسیله Δt را محاسبه می‌کنیم:

$$F'_{i+1} = MM(F_{i+2} - F_{i+1}, F_{i+1} - F_i) \quad (41-3)$$

با کمک روابط (40-3) و (41-3) خواهیم داشت:

$$u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+1}^n + \frac{\lambda}{2} F'_{i+1} \quad (42-3)$$

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^n + \frac{\lambda}{2} F'_i \quad (43-3)$$

نسیاهو و تادمور مشتق جزئی رابطه (40-3) را در قالب عبارت ژاکوبین¹ f نیز بیان کردند:

$$u(x_{i+1}, t^{n+\frac{1}{2}}) = u_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_{i+1}, t^n)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, t^n) + \dots \quad (44-3)$$

که منجر به تقریب زیر می‌شود:

$$u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+1}^n + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1}^n) u'_{i+1} \quad (45-3)$$

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^n + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial u}(u_i^n) u'_i \quad (46-3)$$

نسیاهو و تادمور نتایج تحلیلی مشابهی را از تقریب‌های روابط (42-3)، (43-3)، (45-3) و (46-3)

بدست آوردند. در تحقیق حاضر از تقریب روابط (42-3) و (43-3) استفاده شده است.

به منظور محاسبه مقدار انتگرال قسمت دوم سمت راست رابطه (38-3)، بایستی آن را به دو انتگرال

تبدیل کرد:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^n) dx = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} u(x, t^n) dx \right] \quad (47-3)$$

با توجه به رابطه (34-3) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} u(x, t^n) dx \right] = \quad (48-3)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[u_i^n + \frac{u'_i}{\Delta x} (x - x_i) \right] dx + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} \left[u_{i+1}^n + \frac{u'_{i+1}}{\Delta x} (x - x_{i+1}) \right] dx \right]$$

با انتگرال گیری دقیق از رابطه (48-3) خواهیم داشت:

1 Jacobian

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{u}(x, t^n) dx = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i+1}^n) + \frac{1}{8}(\mathbf{u}'_i - \mathbf{u}'_{i+1}) \quad (49-3)$$

مقادیر \mathbf{u}'_i و \mathbf{u}'_{i+1} بر اساس روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{u}'_i = MM(\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}^n) \quad (50-3)$$

$$\mathbf{u}'_{i+1} = MM(\mathbf{u}_{i+2}^n - \mathbf{u}_{i+1}^n, \mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n) \quad (51-3)$$

بنابراین معادله (3-38) تبدیل می‌شود به:

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i+1}^n) + \frac{1}{8}(\mathbf{u}'_i - \mathbf{u}'_{i+1}) + \lambda [f(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{2}})] \quad (52-3)$$

و بدین ترتیب یک تقریب ثابت تکه‌ای در زمان t^{n+1} روی سلول‌های $I_{i+\frac{1}{2}}$ حاصل می‌شود. هنگامی که به ازای همه مقادیر i مقدار رابطه (3-52) بدست آمد، گام زمانی بعدی را به صورت مشابه روی مش شطرنجی محاسبه می‌شود.

برای محاسبه تقریب ثابت تکه‌ای در زمان t^{n+2} روی سلول‌های I_{i+1} خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_i^{n+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) + \frac{1}{8}(\mathbf{u}'_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}'_{i+\frac{1}{2}}) + \lambda [f(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}}) - f(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}})] \quad (53-3)$$

که $\mathbf{u}'_{i-\frac{1}{2}}$ و $\mathbf{u}'_{i+\frac{1}{2}}$ برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{u}'_{i-\frac{1}{2}} = MM(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{u}_{i-\frac{3}{2}}^{n+1}) \quad (54-3)$$

$$\mathbf{u}'_{i+\frac{1}{2}} = MM(\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \quad (55-3)$$

و با در نظر گرفتن $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} = f(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}})$ و $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = f(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}})$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{F}'_{i-\frac{1}{2}} \quad (56-3)$$

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{F}'_{i+\frac{1}{2}} \quad (57-3)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای گام زمانی Δt و با داشتن مقادیر \mathbf{u} در زمان n ، مقادیر \mathbf{u} روی مش اصلی در زمان $n+2$ محاسبه می‌شود. لذا به منظور محاسبه \mathbf{u} در گام زمانی $n+1$ ، با فرض

$$\lambda_{half} = \frac{0.5\Delta t}{\Delta x}$$

خواهیم داشت:

گام زمانی اول:

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i+1}^n) + \frac{1}{8}(\mathbf{u}_i' - \mathbf{u}_{i+1}') + \lambda_{half} [f(\mathbf{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{4}}) - f(\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{4}})] \quad (58-3)$$

که \mathbf{u}_i' و \mathbf{u}_{i+1}' به ترتیب از رابطه (50-3) و (51-3) محاسبه خواهد شد.

و با در نظر گرفتن $\mathbf{F}_i = f(\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{4}})$ و $\mathbf{F}_{i+1} = f(\mathbf{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{4}})$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{4}} = \mathbf{u}_i^n + \frac{\lambda_{half}}{2} \mathbf{F}_i \quad (59-3)$$

$$\mathbf{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{4}} = \mathbf{u}_{i+1}^n + \frac{\lambda_{half}}{2} \mathbf{F}_{i+1} \quad (60-3)$$

گام زمانی دوم:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{8} (\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}' - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}') + \lambda_{half} [f(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}}) - f(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}})] \quad (61-3)$$

که $\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}'$ و $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}'$ به ترتیب برابر خواهند بود با:

$$\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}' = MM(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (62-3)$$

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}' = MM(\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (63-3)$$

و با در نظر گرفتن $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} = f(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}})$ و $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = f(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}})$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}} = \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_{half}}{2} \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} \quad (64-3)$$

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_{half}}{2} \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} \quad (65-3)$$

۳-۶-شرایط مرزی

همواره شرایط مرزی حاکم بر سیستم به عنوان بخش تکمیلی برای مدل ریاضی و روش‌های عددی، مورد نیاز می‌باشد. به دلیل وجود مش شطرنجی، در نیم گام زمانی اول هیچ یک از روش‌ها نیاز به شرایط مرزی ندارند. در نیم گام دوم زمانی، شرایط مرزی می‌تواند با کمک شرایط مرزی مور^۱ یا

1 Mur boundary condition

گسسته سازی معادلات حاکم به صورت پیش رو / پیش رو در مرز چپ و پیش رو / پس رو در مرز راست اعمال شود. یک روش اختصاصی اعمال شرایط مرزی نیز برای روش نسیاهو-تادمور توسط شمپاین [Shampine 2005] ارائه شده است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

۳-۶-۱- گسسته سازی معادلات حاکم به صورت پیش رو/پیش رو و

پیش رو/پس رو

به منظور اعمال شرایط مرزی در مرز سمت چپ ($x = 0$)، معادله (۱-۳) را به صورت پیش رو در زمان و مکان گسسته سازی می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} = \frac{f(u_2^n) - f(u_1^n)}{\Delta x} \quad (۶۶-۳)$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_2^n) - f(u_1^n)) \quad (۶۷-۳)$$

در شرایط مرزی سمت راست ($x = L$)، معادله (۱-۳) را به صورت پیش رو در زمان و پس رو در مکان گسسته سازی می‌کنیم:

$$\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\Delta t} = \frac{f(u_M^n) - f(u_{M-1}^n)}{\Delta x} \quad (۶۸-۳)$$

$$u_M^{n+1} = u_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_M^n) - f(u_{M-1}^n)) \quad (۶۹-۳)$$

۳-۶-۲- شرایط مرزی مور

با استفاده از گسسته سازی معادله (۱-۳) در نقطه $(x_{\frac{3}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ ، شرایط مرزی مور برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} + \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(u_2^{n+1}) - f(u_1^{n+1})}{\Delta x} + \frac{f(u_2^n) - f(u_1^n)}{\Delta x} \right) \quad (۷۰-۳)$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n - u_2^{n+1} + u_2^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_2^{n+1}) - f(u_1^{n+1}) + f(u_2^n) - f(u_1^n)) \quad (۷۱-۳)$$

در شرایط مرزی سمت راست ($x = L$)، معادله (۱-۳) را در نقطه $(x_{M-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ گسسته سازی

می‌کنیم، شرایط مرزی مور برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\Delta t} + \frac{u_{M-1}^{n+1} - u_{M-1}^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(u_M^{n+1}) - f(u_{M-1}^{n+1})}{\Delta x} + \frac{f(u_M^n) - f(u_{M-1}^n)}{\Delta x} \right) \quad (۷۲-۳)$$

$$(۷۳-۳)$$

$$u_M^{n+1} = u_M^n - u_{M-1}^{n+1} + u_{M-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_M^{n+1}) - f(u_{M-1}^{n+1}) + f(u_M^n) - f(u_{M-1}^n))$$

۳-۶-۳- اختصاصی روش NT

یکی از روش‌های رایج برای اعمال شرایط مرزی، بدست آوردن مقادیر تابع روی مرز با استفاده از برونیابی^۱ خطی مقادیر تابع روی دامنه می‌باشد. با توجه به آنکه روش نسیاهو-تادمور دارای دو گام زمانی است، شرایط مرزی اعمالی در دو مرحله بررسی می‌شود:

مرحله اول

فرض شود که حل تقریبی ثابت تکه‌ای $u(x_i, t^n)$ روی سلول‌های I_i برای $i = 1, \dots, M$ موجود است. اندازه سلول‌های مرزی $I_1 = [x_1, x_{\frac{3}{2}}]$ و $I_M = [x_{M-\frac{1}{2}}, x_M]$ نصف سلول‌های داخلی است. در فرآیند بازسازی می‌توان شیب u'_i برای سلول‌های داخلی از راه عادی محاسبه نمود ولی برای سلول مرزی I_1 زمانی که از رابطه (۳۵-۳) استفاده می‌شود، متغیر u_0^n ظاهر می‌شود. از انجایی که بازسازی روی سلول نیاز به شیب ثابت دارد، با برونیابی از سلول‌های داخلی، $u'_1 = u'_2$ خواهد بود و به صورت مشابه برای سلول I_M ، $u'_M = u'_{M-1}$ در نظر گرفته می‌شود.

مرحله دوم

فرض شود که حل تقریبی ثابت تکه‌ای $u(x, t^{n+1})$ روی سلول‌های $I_{i+\frac{1}{2}}$ برای $i = 2, \dots, M-1$ موجود است. به منظور بازسازی در سلول‌های مرزی مشابه قسمت اول با کمک برونیابی $u'_{\frac{3}{2}} = u'_{\frac{5}{2}}$ و $u'_{M-\frac{1}{2}} = u'_{M-\frac{3}{2}}$ در نظر گرفته می‌شود. حال به منظور محاسبه مقدار متوسط تابع در سلول‌های مرزی مشابه قسمت (۳-۵-۱) عمل می‌شود.

طرفین معادله (۳۷-۳) را در $\frac{1}{\Delta x}$ ضرب شده و روی مستطیل $[t^{n+1}, t^{n+2}] \times [x_1, x_{\frac{3}{2}}]$ انتگرال

1 Extrapolation

می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_{3/2}} \mathbf{u}(x, t^{n+2}) dx &= \frac{2}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_{3/2}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx \\ &+ 2\lambda \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{3/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (74-3)$$

با توجه به رابطه (۳۴-۳) خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}(x, t^{n+1}) = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+1} + \frac{\mathbf{u}_3}{\Delta x} (x - x_{\frac{3}{2}}) \quad (75-3)$$

لذا مقدار انتگرال دوم از سمت راست معادله (۷۴-۳) برابر خواهد بود با:

$$\frac{2}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_{\frac{3}{2}}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+1} - \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\frac{3}{2}} \quad (76-3)$$

مقدار انتگرال اول از سمت راست معادله (۶۲-۳) برابر است با:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{3/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1, t)) dt = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}}\right) - \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_1^{n+\frac{3}{2}}\right) \quad (77-3)$$

از رابطه (۴۳-۳) داریم:

$$\mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+1} + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{F}}_{\frac{3}{2}} \quad (78-3)$$

$$\mathbf{u}_1^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_1^{n+1} + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{F}}_1 \quad (79-3)$$

با برونمایی از دامنه داخلی، $\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{\mathbf{F}}_{\frac{3}{2}}$ خواهد بود.

از رابطه (۳۴-۳) داریم:

$$\mathbf{u}_1^{n+1} = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\frac{3}{2}} \quad (80-3)$$

با ترکیب دو رابطه (۷۹-۳) و (۸۰-۳) خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_1^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\frac{3}{2}} + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{F}}_1 \quad (81-3)$$

بنابراین مقدار انتگرال (۷۷-۳) برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{u}_1^{n+2} = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+1} - \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\frac{3}{2}} + 2\lambda \left[\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}}\right) - \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_1^{n+\frac{3}{2}}\right) \right] \quad (82-3)$$

به صورت خلاصه برای اعمال شرایط مرزی سمت چپ، نخست با برونمایی از محدوده داخلی

با کمک این مقادیر و رابطه (۸۰-۳) مقدار u_1^{n+1} و با استفاده از

رابطه (۸۱-۳) مقدار $u_1^{n+\frac{3}{2}}$ محاسبه شد و در نهایت با استفاده از رابطه (۸۲-۳) مقدار u_1^{n+2} (شرط

مرزی سمت چپ) حاصل شد.

برای اعمال شرط مرزی سمت راست نیز به صورت مشابه با استفاده از برونمایی از دامنه داخلی مقادیر

فرض می‌شود. با کمک این مقادیر روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$u_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} = u_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\lambda}{2} \hat{F}_{M-\frac{1}{2}} \quad (۸۳-۳)$$

$$u_M^{n+1} = u_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2} \dot{u}_{M-\frac{1}{2}} \quad (۸۴-۳)$$

$$u_M^{n+\frac{3}{2}} = u_M^{n+1} + \frac{\lambda}{2} \hat{F}_M \quad (۸۵-۳)$$

$$u_M^{n+\frac{3}{2}} = u_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2} \dot{u}_{M-\frac{1}{2}} + \frac{\lambda}{2} \hat{F}_M \quad (۸۶-۳)$$

و در انتها خواهیم داشت:

$$u_M^{n+2} = u_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{4} u'_{M-\frac{1}{2}} + 2\lambda [f(u_M^{n+\frac{3}{2}}) - f(u_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}})] \quad (۸۷-۳)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای گام زمانی Δt و با داشتن مقادیر مرزی u در زمان n ، مقادیر

مرزی u روی مش اصلی در زمان $n+2$ محاسبه می‌شود. لذا به منظور محاسبه مقادیر مرزی u در گام

زمانی $n+1$ ، با فرض $\lambda_{half} = \frac{0.5\Delta t}{\Delta x}$ خواهیم داشت:

مشابه حالت قبل، اعمال شرایط مرزی در دو مرحله در نظر گرفته می‌شود که مرحله اول مشابه مرحله

اول حالت قبل است و برای مرحله دوم مرز سمت چپ خواهیم داشت:

$$u_1^{n+1} = u_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \dot{u}_{\frac{3}{2}} + 2\lambda_{half} [f(u_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{4}}) - f(u_1^{n+\frac{3}{4}})] \quad (۸۸-۳)$$

که با توجه به روابط (۷۸-۳) و (۸۱-۳) خواهیم داشت:

$$u_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{4}} = u_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_{half}}{2} \hat{F}_{\frac{3}{2}} \quad (۸۹-۳)$$

$$\mathbf{u}_1^{n+\frac{3}{4}} = \mathbf{u}_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{\frac{3}{2}} + \frac{\lambda_{half}}{2}\hat{\mathbf{F}}_1 \quad (90-3)$$

و برای مرحله دوم مرز سمت راست داریم:

$$\mathbf{u}_M^{n+1} = \mathbf{u}_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\mathbf{u}'_{M-\frac{1}{2}} + 2\lambda_{half}[f(\mathbf{u}_M^{n+\frac{3}{4}}) - f(\mathbf{u}_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}})] \quad (91-3)$$

که با توجه به روابط (۸۳-۳) و (۸۶-۳) خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{4}} = \mathbf{u}_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_{half}}{2}\hat{\mathbf{F}}_{M-\frac{1}{2}} \quad (92-3)$$

$$\mathbf{u}_M^{n+\frac{3}{4}} = \mathbf{u}_{M-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathbf{u}'_{M-\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_{half}}{2}\hat{\mathbf{F}}_M \quad (93-3)$$

۳-۷- نمونه معادلات حل شده با روش‌های یاد شده

۳-۷-۱- ترافیک

مطالعات بسیاری درباره مدلسازی جریان ترافیک صورت گرفته است. گاستافسون پس از مطرح کردن تعدادی از مدل‌ها و بحث بر روی آن‌ها، مسئله‌ای عددی را مطرح نمود [Gustafson 1987]. معادله مسئله مطرح شده به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0 \quad (94-3)$$

$$c(\rho) = 78.184 - 17.2\log(\rho) \quad (95-3)$$

ρ = چگالی وسایل نقلیه (تعداد وسایل نقلیه در هر کیلومتر)

c = سرعت حرکت وسایل نقلیه

شرایط اولیه مسئله به صورت زیر تعریف شده است:

$$\rho(x, 0) = 200 + 100e^{-0.5e\left(\frac{x-0.5}{0.04}\right)^2} \quad (96-3)$$

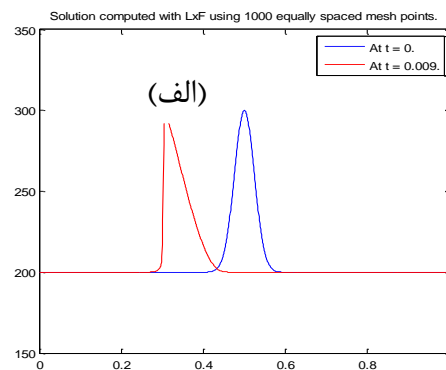
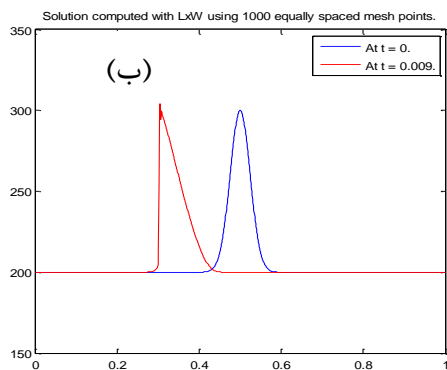
معادله (۹۴-۳) از نوع معادلات هذلولوی نوع یک بوده و شرایط اولیه تعریف شده دارای نقطه پیک نوک تیز می‌باشد. گاستافسون گزارش داد که روشی جهشی^۱ و دو کد برنامه نویسی که براساس روش

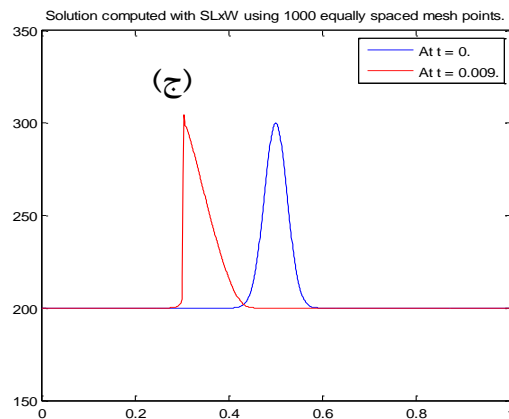
^۱ Leapfrog method

لاکس-وندروف به منظور حل این معادله نوشته شده بود، شکست خورد و تحذب نمودار ترافیک به قدر کافی رو به عقب حرکت نکرد. وی نشان داد که معادله غیربقایی است ولی روش لاکس-وندروف همانند معادلات بقایی این معادله را حل می‌کند. این بار معادله را با روش خطوط مشخصه حل کرد و به نتایج مناسبی دست یافت ولی درباره شرایط مرزی و جزئیات مش توضیحی نداد.

به منظور حل این معادله در بازه مکانی $[0,1]$ و بازه زمانی $[0,0.009]$ شرایط مرزی همگن نیومن در $x(1)$ تعریف شد و هیچ گونه شرایط مرزی در $x(0)$ تعریف نشد. بازه مکانی تعریف شده به قدر کافی بزرگ بود تا تحذب نمودار در زمان $t=0.009$ به مرز سمت چپ نرسد [Shampine 2005].

مدت زمان متوسط مورد نیاز برای حل معادله ترافیک برای روش LXF، 0.44 ثانیه برای روش LXW، 0.4 ثانیه و برای روش SLXW، 0.49 ثانیه طول کشید. نمودار حل معادله ترافیک در شکل (۳-۷) رسم شده است.





شکل (۳-۸) حل عددی معادله ترافیک گاستافسون با روش‌های عددی الف) LXF ب) LXW ج) SLXW

۳-۷-۲- انتقال حرارت^۱

زمانی که بین دو نقطه گرادیان دمایی (اختلاف دما) وجود داشته باشد، بین آنها انتقال حرارت از دمای بالا به دمای پایین صورت می‌گیرد. معادله انتقال حرارت عبارات است از:

$$u_{1,t} + \nu u_{1,x} = c_1(u_2 - u_1) \quad (۳-۹۷)$$

$$u_{2,t} = c_2(u_1 - u_2) \quad (۳-۹۸)$$

c_1 ، c_2 و ν کمیت‌هایی با مقادیر ثابت می‌باشند و همواره $\nu > 0$ است و در بازه $[0,1]$ تعریف می‌شود و معادله از نوع دوم معادلات هذلولوی می‌باشد. شرایط مرزی و شرایط اولیه آن به صورت زیر تعریف شده است:

شرایط اولیه

$$u_1(x, 0) = 0, u_2(x, 0) = 0 \quad (۳-۹۹)$$

شرایط مرزی حالت اول

$$u_1(0, t) = 1 - e^{-c_2 t} \quad (۳-۱۰۰)$$

شرایط مرزی حالت دوم

¹ Heat transfer

$$u_1(0, t) = -e^{-c_2 t} \quad (101-3)$$

شرایط مرزی حالت سوم

$$u_1(0, t) = 1 \quad (102-3)$$

شرایط مرزی حالت چهارم

$$u_1(0, t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad (103-3)$$

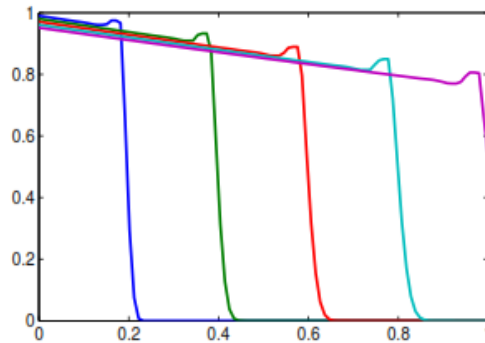
اسچیسر معادله انتقال حرارت را برای چهار شرط مرزی مختلف با کمک روش خطوط^۱ که روشی نیمه تحلیلی می‌باشد، حل نمود [Schiesser 1994]. در این روش پس از گسسته سازی دامنه، تمامی مشتقات مکانی توسط یکی دیگر از مشتقات مکانی تقریب زده می‌شود اما مشتق زمانی دست نخورده باقی می‌ماند. با این کار معادله دیفرانسیل به معادله دیفرانسیل معمولی^۲ (ODE) تبدیل می‌شود که توسط روش‌های خاص حل معادلات دیفرانسیل معمولی قابل حل است. وی معادلات را در بازه مکانی $[0, 1]$ حل و نمودار نتایج را در زمان‌های $t=0:1:10$ رسم نمود و نتایج را با جواب‌های تحلیلی $u_1(1, t)$ مقایسه کرد. ناسازگاری بین مقادیر اولیه و شرایط مرزی در برخی حالات، موجب ایجاد ناپیوستگی در u_1 می‌شود که این ناپیوستگی در سمت راست نمودار منتشر می‌شود. اسچیسر از ۲۱ مش مکانی با فواصل برابر استفاده کرد.

شمپاین معادلات انتقال حرارت با سه روش LXF، LXW و SLXW و در چهار حالت شرایط مرزی مختلف یاد شده حل نمود [Shampine 2005]. از آنجایی که تعداد مش‌های مکانی در نظر گرفته شده اسچیسر برای دستیابی به نمودار مناسب کافی نبود، بازه مکانی $[0, 1]$ را به صد قسمت تقسیم کرد و نمودار نتایج در زمان‌های $t=0.1:0.1:0.5$ و $t=1:1:10$ رسم نمود و نتایج در $x=1$ در زمان‌های $t=1:1:10$ با نتایج تحلیلی مقایسه کرد و درصد خطا محاسبه شد. در روش LXF، خطای ماکزیمم بین 4×10^{-4} تا 3×10^{-3} و در روش‌های LXW و SLXW بین 4×10^{-4} تا 8×10^{-4} تغییر می‌کند. شکل

1 Method of lines

2 Ordinary differential equation

زیر نمودار $u_1(1,t)$ حاصل از شرایط مرزی حالت ۲ می‌باشد که در زمان‌های $t=0.1:0.1:0.5$ با روش SLXW رسم شده است.



شکل (۹-۳) نمودار $u_1(1,t)$ در معادله انتقال حرارت زمان‌های $t=0.1:0.1:0.5$ با استفاده از روش SLXW

۳-۷-۳- معادلات لرزش لوله

حل مسائل لرزش لوله، با کمک حل‌کننده‌های ریمانی^۱ به صورت گسترده به منظور بررسی صحت و درستی حل‌گرهای معادلات دیفرانسیل جزئی به کار می‌رود. در برنامه نوشته شده، معادلات دینامیک گازها با دوسری شرایط اولیه که توسط سود^۲ و لاکس^۳ تعریف شده‌اند، حل می‌شود. این معادلات هذلولوی غیرخطی عبارت اند از:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} m \\ \rho u^2 \\ u(E+p) \end{bmatrix} = 0, \quad p = (\gamma - 1) \cdot \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad m = \rho u \quad (۱۰۴-۳)$$

ρ = چگالی سیال، P = فشار سیال، E = انرژی واحد حجم، u = سرعت سیال و γ = وزن مخصوص سیال می‌باشد.

چنانچه $v(x,t) = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}$ ، شرایط اولیه مسئله لرزش لوله سود و لاکس به ترتیب عبارت است از:

1 Riemann

2 Sod

3 Lax

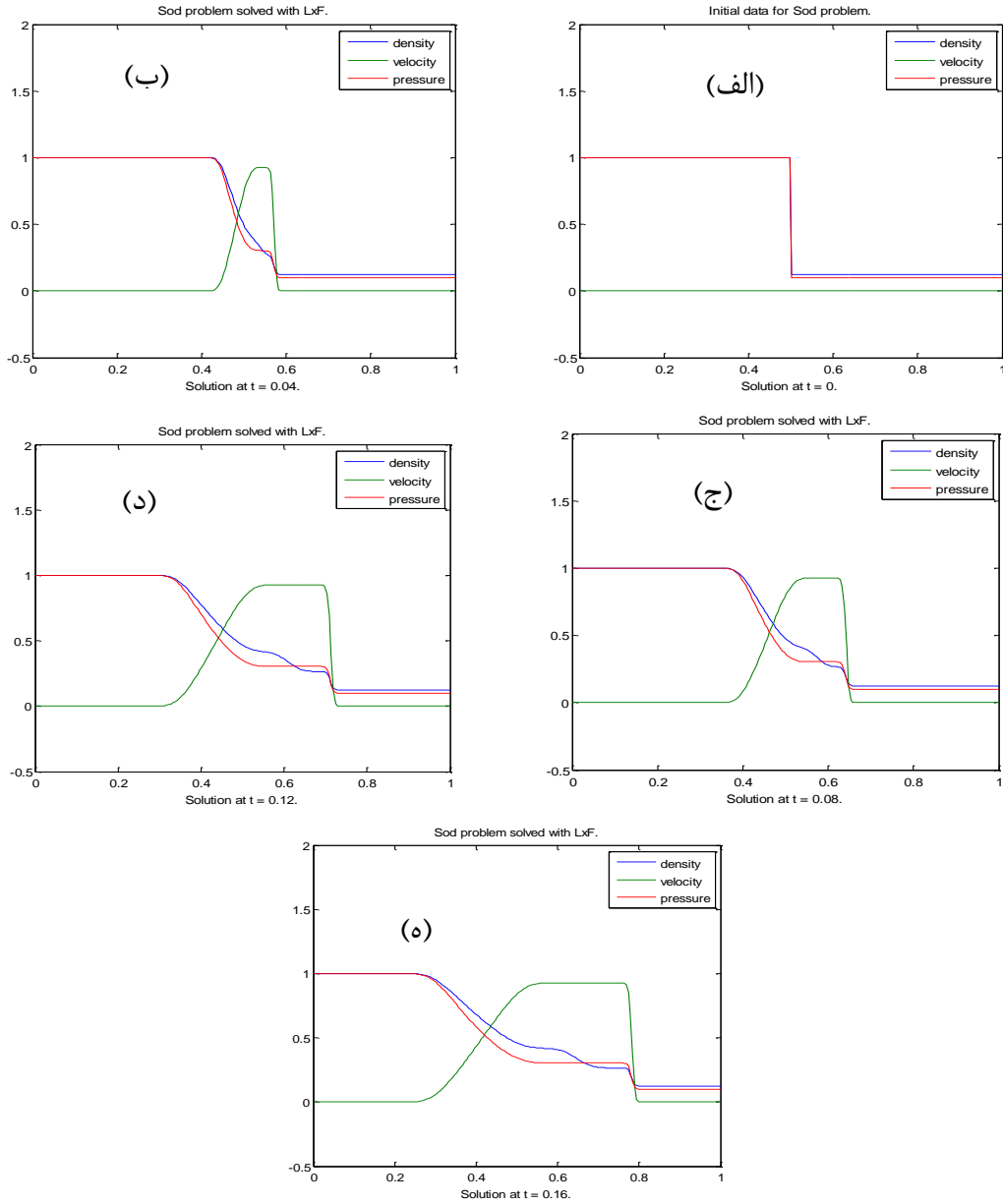
$$v(x, 0) = \begin{cases} v_l, & x < 0.5, \\ v_r, & x \geq 0.5, \end{cases} \quad \begin{matrix} v_l = (1, 0, 2.5)^t \\ v_r = (0.125, 0, 0.25)^t \end{matrix} \quad (105-3)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_l, & x < 0.5, \\ v_r, & x > 0.5, \end{cases} \quad \begin{matrix} v_l = (0.445, 0.311, 8.928)^t \\ v_r = (0.5, 0, 1.4275)^t \end{matrix} \quad (106-3)$$

مساله در هر دو حالت شرایط اولیه مورد بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی در مرزهای سمت راست و سمت چپ هموزن نیومن^۱ می‌باشد.

نسیاهو و تادمور این مسئله را با شرایط اولیه سود و لاکس به ترتیب تحت عنوان RIM1 و RIM2 حل نمودند. مسئله در این برنامه‌ها با گام زمانی ثابت حل شد ولی در برنامه نوشته شده توسط شمپاین، تابعی تعریف شد تا گام زمانی مناسب را محاسبه کند و دویست مش مکانی با فواصل برابر در نظر گرفته شد. برنامه نوشته شده، مساله را با چهار روش تعریف شده در الگوریتم حل نموده و نمودارهای چگالی، سرعت و فشار را در زمان‌های $t=0:0.04:0.16$ رسم می‌کند. نسیاهو و تادمور عدد پایداری را در برنامه خود 0.95 فرض نمودند که شمپاین آن را 0.9 فرض نمود. شرایط اولیه و نتایج حاصل از حل مسئله سود به روش LXF در شکل (۱۰-۳) رسم شده است.

¹ Homogeneous Neumann



شکل (۳-۱) الف) نمودار شرایط اولیه مسئله سود، نتایج حل مسئله سود به روش لاکس-فردریش در

زمان‌های (ب) $t=0.04$ (ج) $t=0.08$ (د) $t=0.12$ (ه) $t=0.16$

فصل چهارم

مدل ریاضی، صحت سنجی
و ارائه نتایج

۴-۱- معادلات حاکم

۴-۱-۱- معادله مومنتم^۱ و پیوستگی^۲ [کرامت ۱۳۸۹]

معادلات حاکم بر رفتار سیال (پیوستگی و مومنتم)، با نوشتن معادلات ناویر-استوکس^۳ در یک سیستم لوله در حالت دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه ای r - z بدست می‌آیند. این معادلات شامل یک معادله پیوستگی و دو معادله مومنتم در جهت‌های محوری^۴ و شعاعی^۵ با متغیرهای سرعت محوری v_z ، سرعت شعاعی v_r ، فشار سیال P و دانسیته سیال ρ_f می‌باشند. به علاوه، یک معادله حالت، فشار و دانسیته سیال را به هم مربوط می‌کند.

جهت رسیدن به یک فرمول‌بندی یک بعدی سازگار با معادلات کلاسیک چکش آبی، معادلات ناویر-استوکس مذکور در $2\pi r$ ضرب شده و سپس از 0 تا شعاع لوله R انتگرال‌گیری می‌شوند و سپس نتیجه بر πr^2 تقسیم می‌شود. با این کار تمام جملات موجود در معادلات ناویر-استوکس از حالت دو بعدی برحسب t, z, r به حالت یک بعدی برحسب t, z تبدیل می‌شوند [Tijsseling, 2007]. با این کار، معادله پیوستگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{R} \dot{u}_r|_{r=R} = 0, \quad \dot{u}_r|_{r=R} = v_r|_{r=R} \quad (1-4)$$

و معادله مومنتم در جهت محوری برابر خواهد بود با:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \sin \theta \quad (2-4)$$

که در آن سرعت v و فشار P به صورت زیر می‌باشند:

1 Momentum equation

2 Continuity equation

3 Navier-stokes equations

4 Axial

5 Radial

$$v = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v_z dr \quad (3-4)$$

$$P = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r p dr \quad (4-4)$$

که در آن v_z و P به ترتیب توابع توزیع سرعت و فشار در مقطع جریان و R شعاع داخلی لوله می‌باشند. کرنش محیطی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت $\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r}$ تعریف می‌شود که با توجه به محدود بودن امتداد شعاعی r به دیواره داخلی تا دیواره بیرونی لوله، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \rightarrow u_r = r\varepsilon_\phi, \quad R \leq r \leq R + e \rightarrow r \approx R \rightarrow u_r = R\varepsilon_\phi \quad (5-4)$$

در این صورت آخرین جمله در معادله پیوستگی (4-1)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{2}{R} \dot{u}_r|_{r=R} = \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial t} (R\varepsilon_\phi)|_{r=R} = 2 \frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} \quad (6-4)$$

لذا معادله پیوستگی (4-1) با فرض $e \ll R$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + 2 \frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} = 0 \quad (7-4)$$

با توجه به رابطه سه بعدی تنش-کرنش در مواد الاستیک در جهت ϕ و فرضیات لوله‌های جدار نازک

$$\text{به صورت } \sigma_\phi = \frac{D\bar{P}}{2e} (P - P_0) \text{ فشار دینامیکی سیال می‌باشد که در آن } P \text{ فشار کل سیال و } P_0$$

فشار جریان ماندگار می‌باشد.) و با فرض ثابت بودن نسبت پواسن و کوچک بودن σ_r در مقایسه با σ_ϕ

می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + 2 \frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon_\phi = \frac{\sigma_\phi}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \quad (8-4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{E} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial t} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = 0 \quad (9-4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{D}{eE} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = 0 \quad (10-4)$$

در استخراج روابط فوق، تغییرات ε_z و σ_z در جهت r ناچیز در نظر گرفته می‌شود.

از روابط سه بعدی تنش-کرنش در مواد الاستیک در جهت z داریم:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu \sigma_\phi}{E} \quad (11-4)$$

جهت تعیین آخرین ترم در روابط (4-8)، از معادله (4-9) نسبت به زمان مشتق گیری می‌نماییم.

سپس با توجه به فرضیات لوله جدار نازک و تئوری کرنش‌های کوچک^۱ ($\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \frac{vD}{2eE} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (12-4)$$

بنابراین معادله پیوستگی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{eE} (1 - \nu^2) \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (13-4)$$

با جای گذاری $P = \rho_f g H$ و $c_f = \left(\rho_f \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{eE} (1 - \nu^2) \right) \right)^{-0.5}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (14-4)$$

در این رابطه \dot{u}_z سرعت محوری لوله، D قطر داخلی لوله، ν نسبت پواسن، ρ_f دانسیته سیال، e ضخامت دیواره لوله، c_f سرعت موج فشاری، E مدول الاستیسیته یانگ، k مدول بالک سیال و g شتاب گرانشی است.

در معادله مومنتم سیال (۲-۴)، چنانچه برای تنش برشی از مدل اصطکاک شبه ماندگار^۲ (تنش برشی

τ_0 برابر مقدار معادل آن در حالت جریان پایدار فرض می‌گردد) استفاده شود، خواهیم داشت:

$$\tau_0 = \rho_f f \frac{v_{rel} |v_{rel}|}{g} \quad (15-4)$$

که در آن v_{rel} سرعت نسبی سیال درون لوله نسبت به دیوار داخلی لوله می‌باشد که برابر با $v - \dot{u}_z$ است. که در این v سرعت مطلق سیال، \dot{u}_z سرعت مطلق دیواره لوله و f ضریب افت دارسی و ایسباخ می‌باشد. چنانچه P در رابطه مومنتم با $P = \gamma H - z$ ، که در آن H هد فشار سیال و γ وزن حجمی سیال و z رقوم نقطه مورد بررسی است، جایگزین گردد رابطه مومنتم (۲-۴) با فرض $\theta = 0$ ، به صورت زیر خواهد بود:

1 Infinitesimal strain theory

2 Quasi-steady friction model

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{fv|v|}{2D} \quad (16-4)$$

۴-۱-۲- معادله ارتعاش محوری سازه لوله

به علت وجود جمله کوپله پواسن در معادله پیوستگی و نیاز به محاسبه جابجایی محوری نقاط مختلف لوله، معادلات مربوط به ارتعاش محوری نیز باید استخراج گردند. جهت مدلسازی ارتعاش محوری، نقطه آغازین، نوشتن معادلات حرکت در جهت محوری z و شعاعی r در حالت دو بعدی در یک دستگاه مختصات استوانه‌ای است. این دو معادله به عنوان روابط تعادل مومنتم در جهت‌های محوری و شعاعی نیز خوانده می‌شوند. از اثرات سختی خمشی^۱، اینرسی دورانی^۲ و تغییر شکل برشی عرضی صرف نظر می‌گردد. این فرضیات به عنوان فرضیات امواج با طول موج‌های بلند خوانده می‌شود. در این فرمولاسیون، متغیرها عبارت اند از u_r ، u_z ، σ_r ، σ_ϕ و $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ که همگی توابعی از r ، z و t می‌باشند. جرم حجمی مصالح لوله ρ_t ثابت می‌باشد و اثرات ترم‌های همرفتی^۳ همانند این ترم‌ها در معادلات پیوستگی و مومنتم سیال ناچیز فرض می‌شود (فرضیات اکوستیک). نیروی بدنی محوری به صورت $F_z = \rho_t g \sin \theta$ و نیروی بدنی شعاعی ناچیز در نظر گرفته می‌شود ($F_r=0$). در این صورت روابط تعادل مومنتم در جهت محوری و شعاعی به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$\rho_t \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{zr})}{\partial r} + \rho_t g \sin \theta \quad (17-4)$$

$$\rho_t \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_\phi}{r} \quad (18-4)$$

جهت حصول یک فرمولاسیون یک بعدی (فقط بر حسب t و z) برای معادلات ارتعاش محوری، معادلات فوق در $2\pi r$ ضرب می‌شوند و سپس نسبت به r از R الی $R+e$ انتگرال‌گیری شده (R شعاع داخلی لوله و e ضخامت دیواره لوله است.) و بر $2\pi \left(R + \frac{e}{2} \right) e$ تقسیم می‌شوند. همچنین نیروی

1 Bending stiffness

2 Rotary inertia

3 Convective terms

برشی که نسبت به امتداد محوری متقارن می‌باشد، $\int_R^{R+e} 2\pi r \tau_{rz} dr$ ، (جمله موجود در سمت راست انتگرال گیری شده معادله (۴-۱۵)) با توجه به فرضیات تقریب با طول موج بلند حذف می‌گردد. پس از این عملیات با توجه به شکل (۴-۱)، معادله حرکت در جهت محوری به صورت

$$\rho_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{R+e}{(R+\frac{e}{2})e} \tau_{zr}|_{r=R+e} - \frac{R}{(R+\frac{e}{2})e} \tau_{zr}|_{r=R} + \rho_t g \sin \theta \quad (۴-۱۹)$$

و معادله حرکت در جهت شعاعی به شکل

$$\rho_t \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = \frac{R+e}{(R+\frac{e}{2})e} \sigma_r|_{r=R+e} - \frac{R}{(R+\frac{e}{2})e} \sigma_r|_{r=R} - \frac{1}{R+\frac{e}{2}} \bar{\sigma}_\phi \quad (۴-۲۰)$$

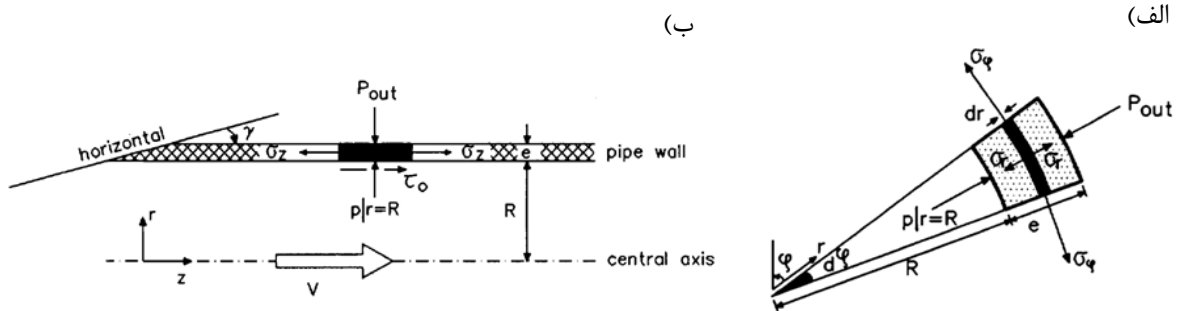
خواهد بود که در آن ها \bar{u}_z ، \bar{u}_r ، $\bar{\sigma}_z$ و $\bar{\sigma}_\phi$ مقادیر متوسط گیری شده از متغیرهای \dot{u}_z ، \dot{u}_r ، σ_z و σ_ϕ می‌باشند:

$$\bar{u}_z = \frac{1}{2\pi(R+\frac{e}{2})e} \int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_z dr \quad (۴-۲۱)$$

$$\bar{u}_r = \frac{1}{2\pi(R+\frac{e}{2})e} \int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_r dr \quad (۴-۲۲)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2\pi(R+\frac{e}{2})e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_z dr \quad (۴-۲۳)$$

$$\bar{\sigma}_\phi = \frac{1}{e} \int_R^{R+e} \sigma_\phi dr \quad (۴-۲۴)$$



شکل (۴-۱) طرح نشان‌دهنده متغیرهای تعریف شده در توصیف تنش بر دیواره لوله، (الف) نمای مقطع لوله

(صفحه $r - \phi$ ، ب) نمای جانبی لوله (صفحه $z - r$) [Tijsseling, 1993]

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (25-4)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \quad (26-4)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (27-4)$$

چنانچه مدل‌های جامع‌تری که قابلیت مدلسازی تغییرشکل‌های بزرگ را داشته باشند، مورد نظر باشد، می‌توان از روابط مربوط به کرنش‌های گرین به جای این روابط استفاده نمود.

چنانچه از رابطه (۹-۴) نسبت به زمان مشتق‌گیری شود و فرضیات مربوط به لوله‌های جدار نازک و ثابت بودن نسبت پواسن اعمال گردند، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{E \partial t} - \frac{\nu D}{2Ee} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (28-4)$$

اکنون با استفاده از تئوری کرنش‌های کوچک برای ε_z و با جای گذاری $P = \rho_f g H$ و $c_t = \frac{E}{\rho_t}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{\rho_t c_t^2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + g \frac{D \nu \rho_f}{2 E e} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (29-4)$$

که در آن c_t سرعت موج برشی، ρ_t جرم حجمی مواد لوله می‌باشد.

معادله دیگر معادله پایستاری مومنتم^۱ می‌باشد که از رابطه (۴-۱۷)، با توجه به روابط زیر که نظر به رفتار سیال و سازه در مرز تماس آن‌ها در دیواره لوله حاصل گردیده است، بدست می‌آید:

$$\tau_{zr}|_{r=R} = -\tau_0, \quad \tau_{zr}|_{r=R+e} = 0 \quad (30-4)$$

این معادله به صورت زیر می‌باشد و برای مواد الاستیک، ویسکوالاستیک و حتی در حالت وجود تغییر شکل‌های بزرگ در سیستم لوله فرم یکسانی خواهد داشت (معادله پایستاری مومنتم).

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = \frac{R}{\rho_t (R + \frac{e}{2})} \tau_0 + g \sin \theta \quad (31-4)$$

که در آن θ ، زاویه بین محور لوله و یک صفحه افقی می‌باشد. اکنون چنانچه در این رابطه همانند رابطه (۴-۱۴) از مدل اصطکاک شبه ماندگار استفاده و فرضیات لوله‌های جدار نازک $e \ll R$ اعمال

¹ Conservation of momentum

شوند، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\rho_f A_f f |v|}{\rho_t A_t 2D} + g \sin \theta \quad (۳۲-۴)$$

که در آن A_f و A_t به ترتیب سطح مقطع لوله و سطح مقطع جریان می‌باشند.

۴-۲- شرایط اولیه

به منظور دستیابی به مدل ریاضی دقیق، علاوه بر معادلات حاکم باید وضعیت سیستم را پیش از آغاز جریان غیر ماندگار دانست. لذا باید مقادیر مجهولات (سرعت و فشار سیال در معادلات هیدرولیک و سرعت و تنش در معادلات ارتعاش سازه) را لحظه‌ای پیش از باز کردن شیر که هنوز سیستم در حالت تعادل است، دانست. مقادیر این مجهولات در آستانه غیرماندگاری سیستم را به عنوان شرایط اولیه در نظر می‌گیرند.

معادلات حاکم در حالت پایدار از معادلات حاکم در شرایط ناپایدار که در قسمت‌های قبل بدست آمده‌اند، با حذف جملات غیرماندگار بدست می‌آیند.

در تحلیل دینامیکی یک مساله سازه‌ای به دو روش می‌توان اثرات شرایط اولیه را وارد نمود. به عنوان روش اول می‌توان کل نیرو اعم از استاتیکی و دینامیکی را در هر لحظه بر سازه وارد کرد. در این صورت در لحظه صفر که نیروی استاتیکی بر سیستم وارد می‌شود، باید جابه‌جایی معادل این نیرو را در لحظه $t=0$ ، به عنوان شرط اولیه در نظر گرفت (در حل با روش نیومارک استفاده می‌شود). تحلیل تنش - کرنش نظیر این روش به شکل زیر قابل بیان است:

$$\varepsilon_{total} = \frac{1}{E} (\sigma_0 + \sigma_{dynamic}) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_{dynamic}}{E} \quad (۳۳-۴)$$

که σ_0 و $\sigma_{dynamic}$ به ترتیب تنش استاتیکی و تنش دینامیکی و ε_{total} کل کرنش حاصله در سازه است. در روش دیگر می‌توان ابتدا تغییر شکل سازه را به علت بار استاتیکی وارده بر آن محاسبه نمود و سپس در فرآیند حل دینامیکی، تنها نیروی دینامیکی را بر سازه وارد نمود لذا شرط اولیه در تحلیل دینامیکی، جابجایی برابر صفر خواهد بود. در این حالت جابجایی کل در هر نقطه سازه در هر لحظه

برابر با جمع جابجایی دینامیکی و استاتیکی می‌باشد. برای یک سیستم الاستیک این روش حل به صورت زیر قابل بیان است:

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_0 + \varepsilon_{dynamic} = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_{dynamic}}{E} \quad (34-4)$$

البته هر دو روش مذکور در نهایت منجر به نتایج یکسانی خواهند شد [کرامت، ۱۳۸۹]. لذا با توجه به الگوریتم حل عددی یکی از دو روش می‌تواند انتخاب شود.

۴-۳- شرایط مرزی

بخش مهم و تکمیلی هر مدل ریاضی، شرایط مرزی می‌باشد که به صورت معادلاتی بر حسب مجهول‌ها که فقط در مرز صادق هستند، می‌باشد.

اثر تداخلی اتصال، فقط زمانی که بعضی نقاط از سازه که در آن‌ها تغییر مومنت اتفاق می‌افتد، کاملاً به زمین مهارنشده باشند به وجود می‌آید. برای مدلسازی اثر تداخلی اتصال، در شرایط مرزی هیدرولیکی پارامترهای وابسته به سازه وارد می‌گردد و در شرایط مرزی سازه‌ای مقادیری وابسته به هیدرولیک جریان. بنابراین هیچ تغییری در صورت معادلات دیفرانسیلی سیال و سازه ایجاد نمی‌شود و تنها عامل ارتباط دهنده‌ی این دو (سیال، سازه) به هم شرایط مرزی می‌باشد.

از دیدگاه سازه‌ای گفته می‌شود که حاصلضرب فشار سیال در سطح مقطع جریان، در مقاطع ورودی و خروجی حجم کنترل نظیر اتصالات، می‌تواند به صورت یک بارگذاری متمرکز بر سازه در نظر گرفته شود. این نیروهای متمرکز در فشارهای بالایی که غالباً در آغاز یک جریان غیرماندگار به وجود می‌آید، مقادیر قابل توجهی دارند.

$$\sigma_M^{n+1} A_t = \rho_f g A_f (H_M^{n+1} - H_0) \quad (35-4)$$

σ_M^{n+1} تنش محوری گره شیر، H_M^{n+1} هد فشاری در گره شیر، H_0 هد فشاری در حالت جریان پایدار، A_t سطح مقطع لوله و A_f سطح مقطع سیال می‌باشد.

به هنگام بسته شدن ناگهانی شیر، شیر ثابت نبوده و سرعت شیر برابر با سرعت محوری لوله خواهد

بود.

$$v_M^{n+1} = \dot{u}_{zM}^{n+1} \quad (۳۶-۴)$$

که در این رابطه u_{zM}^{n+1} جابجایی محوری گره شیر می‌باشد و بنابراین \dot{u}_{zM}^{n+1} سرعت محوری این گره خواهد بود.

روابط مرزی برای یک شیر با بستن تدریجی که امکان ارتعاش دارد بر اساس درصد بازشدگی، به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{v_M^{n+1} - \dot{u}_{zM}^{n+1}}{v_0} = \tau \frac{\sqrt{H_M^{n+1}}}{\sqrt{H_0}} \quad (۳۷-۴)$$

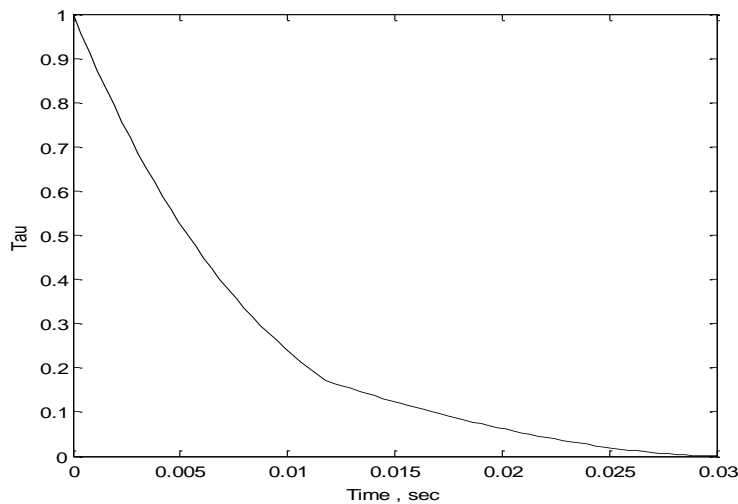
متغیرهای تعریف شده مشابه روابط قبل می‌باشد. v_0 سرعت در حالت جریان پایدار و τ درصد بازشدگی می‌باشد که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\tau = \frac{c_d A_v}{(c_d A_v)_0} \quad (۳۸-۴)$$

c_d ضریب دبی و A_v مساحت باز دریچه می‌باشد و زیرنویس 0 نشان دهنده مشخصات در حالت جریان ماندگار می‌باشد. حجم جریان عبوری از دریچه بستگی به نوع دریچه دارد که این مشخصات وابسته به کارخانه سازنده می‌باشد. به منظور شبیه سازی دریچه، بایستی رابطه‌ای برای میزان بازشدگی دریچه در مدت زمان بسته شدن تدریجی یافت. تابع مخصوص $\tau(t)$ که در این تحقیق استفاده شده است، عبارت است از:

$$\tau(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T_c}\right)^{3.53} & \text{for } 0 \leq t \leq 0.4T_c \\ 0.394 \left(1 - \frac{t}{T_c}\right)^{1.70} & \text{for } 0.4T_c \leq t \leq T_c \\ 0 & \text{for } t \geq T_c \end{cases} \quad (۳۹-۴)$$

T_c مدت زمان بسته شدن کامل دریچه (شیر) است. شکل (۲-۴) تابع $\tau(t)$ را برای $T_c = 0.3s$ رسم شده است.



شکل (۲-۴) تابع بسته شدن تدریجی شیر $\tau(t)$ برای $T_c = 0.03 \text{ s}$

این تابع بر اساس اندازه گیری ضریب دبی درپچه‌های توپی تعریف شده است [Tijsseling 2007]. بدیهی است که برای محاسبه u_{zM}^n و σ_M^n باید یک تحلیل سازه‌ای روی شبکه لوله انجام گیرد، از طرفی بارگذاری مورد نیاز برای این تحلیل سازه‌ای، وابسته به نتایج هیدرولیکی (فشار در گره شیر) می‌باشد. در کویله پواسن، تمام تقاطع‌ها و شیرها و اتصالات کاملاً گیردار است و بدیهی است جابجایی صف برای گره شیر مورد انتظار است.

$$\dot{u}_{zM}^{n+1} = 0 \quad (۴۰-۴)$$

در هنگام بسته شدن آنی و تدریجی شیر به ترتیب با شرط مرزی (۴۱-۴) و (۴۲-۴) روبه رو خواهیم بود:

$$v_M^{n+1} = 0 \quad (۴۱-۴)$$

$$\frac{v_M^{n+1}}{v_0} = \tau \sqrt{\frac{H_M^{n+1}}{H_0}} \quad (۴۲-۴)$$

۴-۴- گام‌های تشکیل دهنده الگوریتم حل

با توجه به گستره بالای استفاده از روش‌های تفاضل محدود مرکزی در حوزه‌های مختلف، به جهت سهولت در مدلسازی و بیان یک راهنمای کلی حل به صورت اجمالی بیان می‌شود. برنامه تهیه شده

جهت حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بقایبی هذلولوی در نرم افزار متلب کد نویسی شده است و به شرح زیر می‌باشد:

۱- دریافت داده‌های ورودی نظیر شرایط اولیه، تعداد گام‌های مکانی، مشخصات سازه‌ای

سیستم، مشخصات هیدرولیکی سیستم و ...

۲- گسسته سازی مکان در محدوده شبکه، محاسبه اندازه گام زمانی و تشکیل شبکه

شطرنجی.

۳- تعریف ماتریس u و $f(u)$

۴- با توجه به روش انتخاب شده از ۵ روش معرفی شده در این تحقیق، مقادیر u در نیم گام

زمانی اول روی مش شطرنجی محاسبه می‌شود.

۵- مقادیر u در نیم گام زمانی دوم روی مش اصلی محاسبه می‌شود.

۶- اعمال شرایط مرزی

۷- رسم نمودار ماتریس u در مدت زمان موردنظر

۴-۵- بررسی و حل مسائل عددی

در این قسمت به بررسی درستی مدل‌های ریاضی، روشهای حل عددی و نحوه پیاده سازی پرداخته می‌شود. بدین منظور نتایج حاصل از روش‌های عددی مطرح شده در این تحقیق با نتایج بدست آمده از روش‌های عددی خطوط مشخصه و گودونو مقایسه می‌شود. در این قسمت به حل چهار مساله با روش‌های عددی LXF ، LXW ، $SLXW$ ، NT و MC پرداخته می‌شود. ابتدا پدیده ضربه قوچ را به صورت ساده در نظر گرفته می‌شود و در دو حالت بستن آنی و تدریجی شیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس معادله ارتعاش محوری سازه را در دو حالت بارگذاری تحت نیروی محرک ثابت و تحت نیروی سینوسی حل می‌شود و در انتها پدیده اندرکنش سیال-سازه در دو حالت اثر تداخلی اتصال و پواسن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴-۵-۱- مسئله مدل ضربه قوچ

پدیده ضربه قوچ را در یک سیستم مخزن-لوله-شیر (مطابق شکل ۱-۱) مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشخصات و مقادیر عددی پارامترهای مسئله حل شده مطابق با جدول (۴-۱) می‌باشد.

جدول (۴-۱) مشخصات مسئله ضربه قوچ

مقدار	متغیر
۵۰ (m)	طول لوله (L)
۰,۲ (m)	قطر لوله (D)
۱۱۹۵,۲ (m/s)	سرعت موج فشاری (c_f)
۱۰ (m)	هد فشاری مخزن (H_0)
۰,۴ (m/s)	سرعت جریان پایدار (v_0)
۰,۰۲۹ (s)	مدت زمان بسته شدن شیر (T_c)
.	ضریب اصطکاک (f)

معادلات ضربه قوچ شامل دو معادله پیوستگی و مومنتم می‌باشد (به ترتیب معادلات ۴-۱۴ و ۴-۱۶).

جهت حل عددی، این معادلات را به فرم معادله (۳-۱) تبدیل می‌کنیم و مقدار u و $f(u)$ برابر خواهد

بود با:

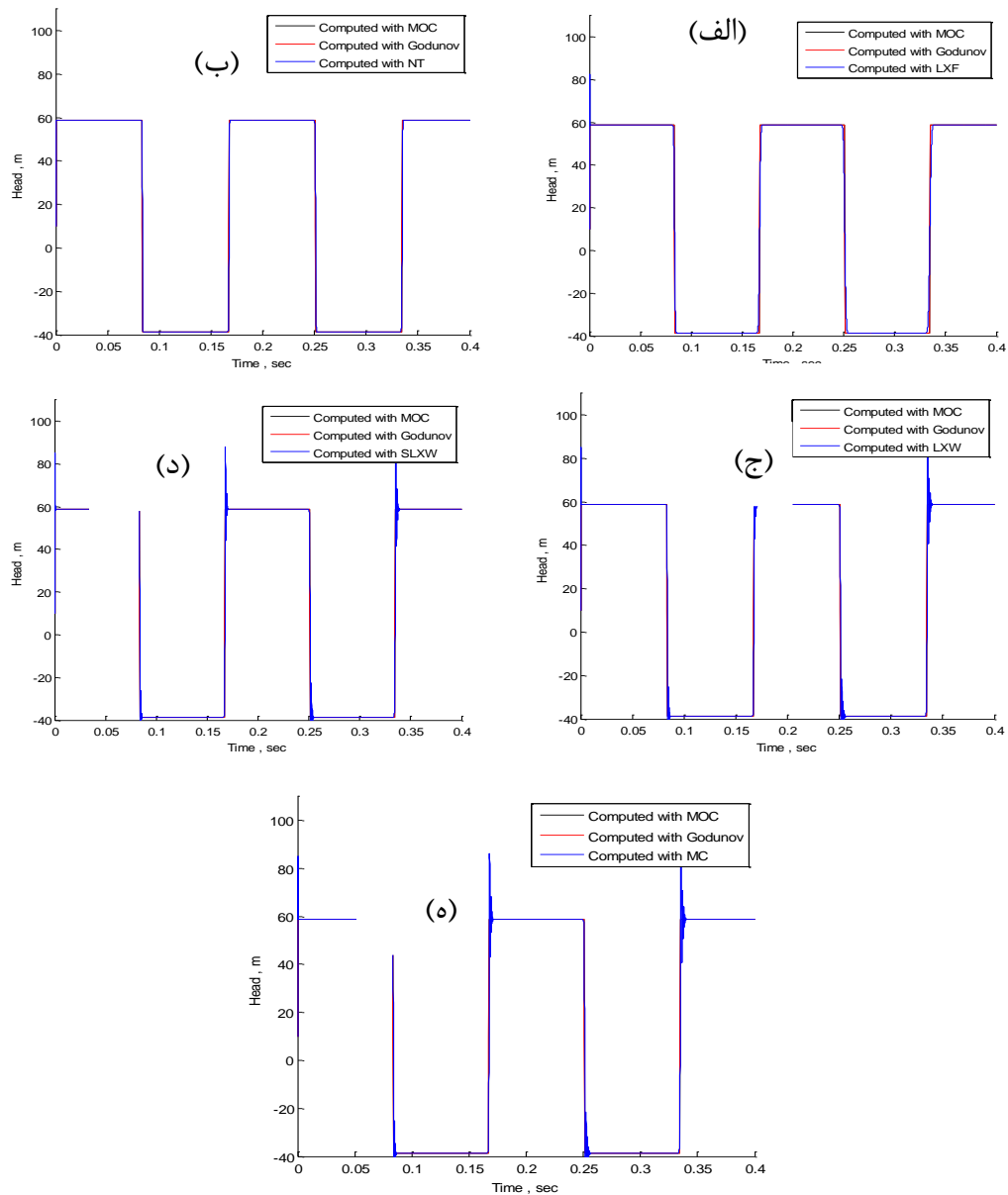
$$u = \begin{pmatrix} H \\ v \end{pmatrix}, f(u) = \begin{pmatrix} -\frac{c_f^2 v}{g} \\ -gH \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_f^2}{g} \\ -g & 0 \end{pmatrix} \quad (۴-۴)$$

شرایط مرزی در این مسئله در همه روش‌ها به جز NT با گسسته سازی معادلات حاکم به صورت

پیش‌رو/پیش‌رو در محل مخزن ($x=0$) و پیش‌رو/پس‌رو در محل شیر ($x=L$) اعمال شد (بخش ۳-۶-

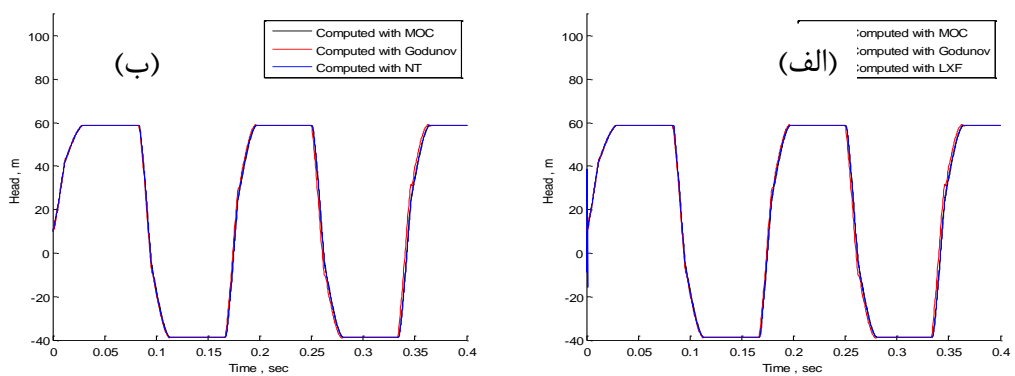
۱) و در روش NT از شرایط مرزی اختصاصی این روش استفاده شد (بخش ۳-۶-۳). بسته شدن شیر

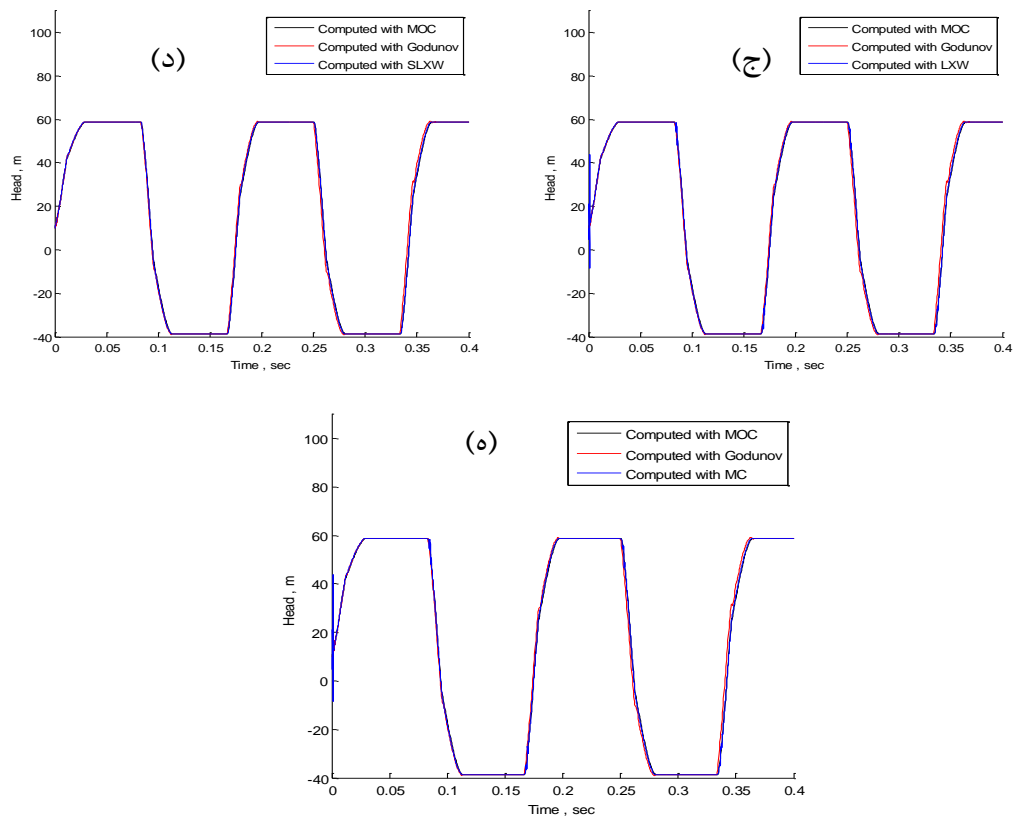
یک بار به صورت آنی و بار دیگر به صورت تدریجی در نظر گرفته شد.



شکل (۳-۴) مقایسه نتایج روش الف (LXF) ب (NT) ج (LXW) د (SLXW) ه (MC) با روش خطوط مشخصه و

گودونو در مسئله ضربه قوچ در حالت بسته شدن آبی شیر





شکل (۴-۴) مقایسه نتایج روش الف (LXF ب) NT (ج) LXW (د) SLXW (ه) MC با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله ضربه قوچ در حالت بسته شدن تدریجی شیر

نمودار پدیده ضربه قوچ در اثر بسته شدن آنی شیر در شکل (۳-۴) نشان داده شده است. محور افقی زمان و محور عمودی مقدار هد فشاری را نمایش می‌دهد. نمودار مشکی نشان دهنده نتایج روش MOC و نمودار قرمز نشان دهنده نتایج روش گودونو می‌باشد. خطوط آبی، نمودار نتایج روش‌های عددی معرفی شده در این تحقیق می‌باشد که به ترتیب نمودار آبی الف نتایج روش LXF، ب نتایج روش NT، ج نتایج روش LXW، د نتایج روش SLXW و ه نتایج روش MC می‌باشد. همانگونه که از نمودارها پیدا می‌باشد نتایج روش LXF و NT بر نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه و گودونو منطبق است ولی در روش‌های LXW، SLXW و MC نتایج در محل ناپیوستگی‌ها^۱ دچار نوسانات^۲ فراوان می‌شود و فیلتر غیر خطی روش SLXW تا حدی از شدت این نوسانات می‌کاهد ولی نوسانات

1 Discontinuities

2 Fluctuations

در محل ناپیوستگی‌ها باقی می‌ماند.

شکل (۴-۴) متغیرهای رسم شده مشابه شکل (۳-۴) می‌باشد با این تفاوت که در این شکل نتایج عددی پدیده ضربه قوچ در حالت بسته شدن تدریجی شیر رسم شده است. مشابه حالت بسته شدن آنی، نتایج حاصل از روش عددی LXF و NT بر نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه و گودونو منطبق است و برخلاف حالت آنی، در محل ناپیوستگی‌های نمودار نتایج LXW، SLXW و MC در حالت بسته شدن تدریجی در محل ناپیوستگی‌ها، نوسانی وجود ندارد. قابل ذکر است که بسته شدن تدریجی شیر منطبق بر واقعیت می‌باشد و بسته شدن آنی در چیه در واقعیت امکان پذیر نیست. مقدار خطای ماکزیمم نسبی روش‌های معرفی شده در این تحقیق نسبت به روش MOC و گودونو در پدیده ضربه قوچ و در حالت‌های بسته شدن آنی و تدریجی شیر در جدول (۲-۴) مقایسه شده است.

جدول (۲-۴) میزان خطای نسبی روش‌های LXF، NT، LXW، SLXW و MC در مقایسه با روش MOC و گودونو

ماکزیمم خطای نسبی		نام روش‌ها
بسته شدن تدریجی شیر	بسته شدن آنی شیر	
0.1154	0.0023	نسبت به روش MOC
0.1043	0.0425	
0.1087	0.00005	نسبت به روش گودونو
0.1139	0.00002	
0.1195	0.1749	نسبت به روش MOC
0.2199	0.1750	
0.1154	0.1330	نسبت به روش گودونو
0.2199	0.1331	
0.1195	0.1749	نسبت به روش MOC
0.2199	0.1750	

با توجه به جدول در حالت بسته شدن آنی، میزان خطای مدلسازی روش‌های NT و LXF نسبت به روش‌های MOC و گودونو ناچیز می‌باشد و روش NT نسبت به روش LXF در این مسئله دقیق‌تر عمل می‌کند. میزان خطای ماکزیمم نسبی روش LXW و MC کاملاً یکسان می‌باشد. همانگونه که انتظار می‌رفت، فیلتر غیر خطی روش SLXW از میزان خطای روش LXW می‌کاهد و نسبت به روش لاکس-وندروف دقیق‌تر عمل می‌کند. در حالت بسته شدن تدریجی نیز به صورت مشابه میزان خطای روش‌های NT و LXF در مقایسه با روش‌های دیگر کمتر بود و به نظر می‌رسد که نتایج روش NT در مقایسه با LXF، اختلاف کمتری با نتایج MOC دارد و نتایج روش LXF در مقایسه با NT، اختلاف کمتری با نتایج گودونو دارد. میزان خطای روش‌های LXW، SLXW و MC نسبت به روش MOC کاهش یافته اند ولی در مقایسه با روش گودونو، میزان خطا افزایش یافته است که علت را می‌توان در در نظر نگرفتن میزان خطای بسیار زیاد این روش‌ها در محل ناپیوستگی‌ها در حالت بسته شدن آنی دانست. بدین ترتیب می‌توان گفت میزان خطاها در حالت تدریجی نسبت به حالت آنی در روش‌های LXW، SLXW و MC با کاهش روبه رو بوده اند.

مقایسه مدت زمان اجرای برنامه حل عددی ضربه قوچ در دو حالت بسته شدن آنی و تدریجی شیر با روش‌های عددی به کاررفته در این تحقیق و روش‌های MOC و گودونو در جدول (۳-۴) آمده است.

جدول (۳-۴) مدت زمان اجرای برنامه ضربه قوچ در دو حالت بسته شدن آنی و تدریجی شیر

Godunov	MOC	MC	SLXW	LXW	NT	LXF	نحوه بسته شدن	مدت زمان اجرا (s)
0.64	0.02	0.5	1.2	0.53	2	0.49	آنی	
0.82	0.03	0.6	1.3	0.7	3.1	0.65	تدریجی	

سرعت حل معادلات ضربه قوچ، به روش لاکس-فردریش، لاکس-وندروف و مک مورمک از سرعت روش گودونو بیشتر می‌باشد.

۴-۵-۲- مسئله اندرکنش سیال-سازه

پدیده اندرکنش سیال-سازه در یک سیستم مخزن-لوله-شیر (مطابق شکل ۱-۱) مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشخصات و مقادیر عددی پارامترهای مسئله حل شده مطابق با جدول (۴-۴) می‌باشد.

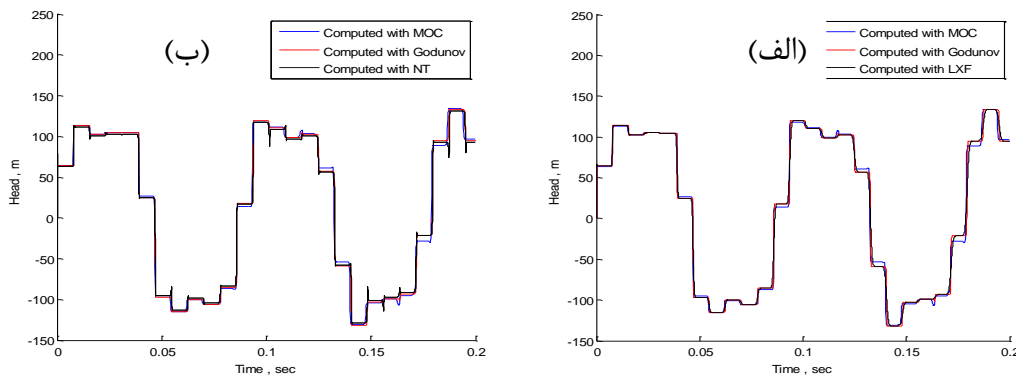
جدول (۴-۴) مشخصات مسئله اندرکنش سیال-سازه

مقدار	متغیر
۲۰ (m)	طول لوله (L)
۰,۷۹۷ (m)	قطر لوله (D)
۰,۰۰۸ (m)	ضخامت لوله (e)
۷۹۰۰ (kg/m ³)	دانسیتة لوله (ρ_t)
۲۱۰ (Gpa)	مدول الاستیسیتة (E)
۰,۳	ضریب پواسن (ν)
۱۰۲۴,۷ (m/s)	سرعت موج فشاری (c_f)
۵۲۸۰,۵ (m/s)	سرعت موج برشی (c_t)
۱ (m)	هد فشاری مخزن (H_0)
۰ (m/s)	سرعت جریان پایدار (v_0)
۰	ضریب اصطکاک (f)

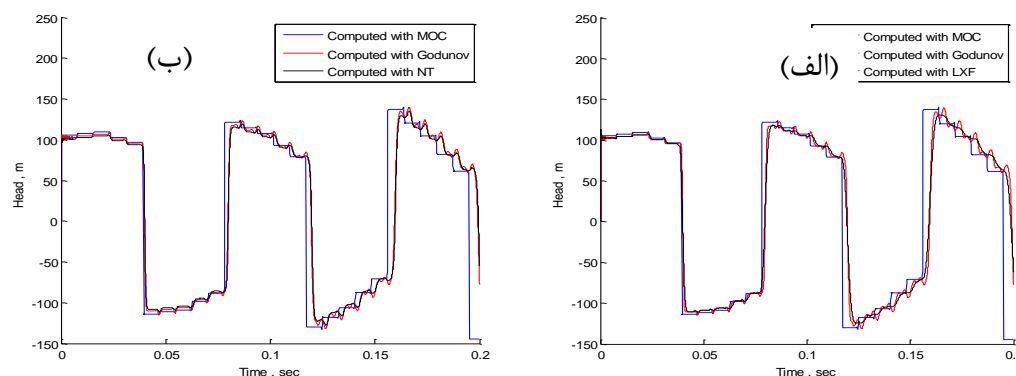
معادلات اندرکنش سیال-سازه شامل معادله پیوستگی، مومنتم و دو معادله ارتعاش محوری سازه می‌باشد (به ترتیب معادلات ۴-۱۴، ۴-۱۶، ۴-۲۹ و ۴-۳۲). جهت حل عددی، این معادلات را به فرم معادله زیر تبدیل می‌کنیم و مقدار u و $f(u)$ برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ v \\ \dot{u}_z \\ \sigma_z - g \frac{D\nu\rho_f H}{2e} \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{c_f^2}{g}v + 2\vartheta\frac{c_f^2}{g}\dot{u}_z \\ -gH \\ \frac{1}{\rho_t}\sigma_z \\ E\dot{u}_z \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_f^2}{g} & 2\vartheta\frac{c_f^2}{g} & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_t}g\frac{D\nu\rho_f}{e} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_t} \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-44)$$

شرایط مرزی در این مسئله در همه روش‌ها به جز NT شرایط مرزی مور می‌باشد (بخش ۳-۶-۲) و در روش NT از شرایط مرزی اختصاصی این روش استفاده شد (بخش ۳-۶-۳). بسته شدن شیر به صورت آنی در نظر گرفته شد و نتایج حاصل از روش‌های عددی ذکر شده در این تحقیق در شکل شماره (۳-۴) در حالت کوپله اتصال و در شکل (۴-۵) در حالت کوپله پواسن رسم شده است. لازم به یادآوری می‌باشد که در حالت کوپله اتصال مقدار ضریب پواسن صفر می‌باشد.



شکل (۴-۵) مقایسه نتایج روش الف (LXF) ب) NT با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی اتصال در حالت بسته شدن آنی شیر در گره شیر



شکل (۴-۶) مقایسه نتایج روش الف (LXF) ب) NT با روش خطوط مشخصه و گودونو در مسئله اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی پواسن در حالت بسته شدن آنی شیر در گره شیر

در شکل‌های (۴-۵) و (۴-۶) نمودار افقی، محور زمان و نمودار قائم، مقادیر هد فشاری سیال را در

گره شیر می‌باشد. نمودار آبی نتایج عددی حاصل از روش خطوط مشخصه، نمودار قرمز نتایج حاصل از روش گودونو و نمودار مشکی در شکل الف، نتایج روش LXF و در شکل ب نتایج روش نسیاهو-تادمور می‌باشد.

در حالت تداخلی اتصال، نتایج حاصل از روش LXF و NT بر نتایج حاصل از MOC و گودونو منطبق می‌باشد. در حالت کوپله پواسن، نتایج لاکس-فردریش بر نتایج MOC و گودونو منطبق می‌باشد ولی در روش NT، نتایج حاصله بر نتایج گودونو منطبق می‌باشد ولی در مقایسه با روش خطوط مشخصه پس از تناوب اول کم کم نمودار NT از نمودار MOC فاصله می‌گیرد و هرچه تعداد این تناوب‌ها بیشتر می‌شود، این فواصل افزایش می‌یابد.

مقدار خطای ماکزیمم نسبی روش LXF و NT نسبت به روش MOC و گودونو در پدیده اندرکنش سیال-سازه و در حالت‌های تداخلی اتصال و پواسن در جدول (۴-۲) مقایسه شده است.

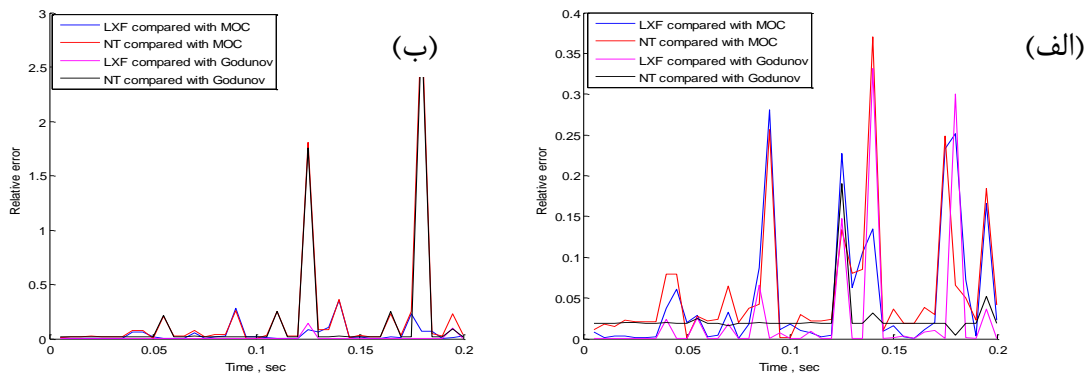
جدول (۴-۵) خطای ماکزیمم نسبی روش LXF و NT نسبت به روش MOC و گودونو در پدیده اندرکنش سیال-سازه و در حالت‌های تداخلی اتصال و پواسن

ماکزیمم خطای نسبی			
کوپله پواسن	کوپله اتصال		نام روش
0.8391	0.2812	در مقایسه با روش MOC	LXF
0.3475	0.3313	در مقایسه با روش گودونو	
0.9521	0.3706	در مقایسه با روش MOC	NT
0.8017	0.1906	در مقایسه با روش گودونو	

با توجه به (۴-۵)، مدلسازی کوپله اتصال در هر دو روش LXF و NT با دقت بسیار زیادی صورت می‌گیرد. در حالت کوپله پواسن، میزان خطای افزایش می‌یابد و LXF نسبت به NT دقیق تر عمل

می‌کند و میزان خطای نتایج هر دو روش LXF و NT نسبت به نتایج روش گودونو کمتر از نتایج روش خطوط مشخصه می‌باشد.

در شکل (۷-۴) مقایسه‌ای بین خطای نسبی ماکزیمم نتایج روش‌های LXF و NT نسبت به روش‌های MOC و گودونو پدیده اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی اتصال و در کورانت‌های $c=0.9$ و $c=1$ پدیده اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی اتصال صورت گرفته است.



شکل (۷-۴) مقایسه خطای ماکزیمم نسبی روش‌های LXF و NT در مقایسه با روش‌های MOC و گودونو در پدیده اندرکنش سیال-سازه در حالت تداخلی اتصال به ازای کورانت الف) $c=0.9$ ب) $c=1$

با توجه به شکل (۷-۴)، میزان خطای نتایج روش‌های LXF و NT نسبت به نتایج روش MOC و گودونو در کورانت 0.9 کمتر از کورانت 1 می‌باشد و حتی به ازای کورانت 1، روش‌های لاکس-فردریش و نسیاهو-تادمور توانایی مدلسازی کوپله پواسن را ندارند و نتایج واگرا می‌شود.

مقایسه مدت زمان اجرای برنامه حل عددی پدیده اندرکنش سیال-سازه در دو حالت تداخلی اتصال و پواسن با روش‌های عددی LXF، NT، MOC و گودونو در جدول (۷-۴) آمده است.

جدول (۶-۴) مدت زمان اجرای برنامه اندرکنش سیال-سازه در دو حالت تداخلی اتصال و پواسن

گودونو	MOC	NT	LXF	حالت تداخلی	
15	3.5	8.5	2.5	کوپله اتصال	مدت زمان
46	2	19	10.5	کوپله پواسن	اجرای برنامه (s)

مدت زمان اجرای برنامه اندرکنش سیال-سازه در دو حالت تداخلی اتصال و پواسن با روش LXF و

NT در مقایسه با روش گودونو می‌باشد.

۴-۶- جزئیات کدنویسی

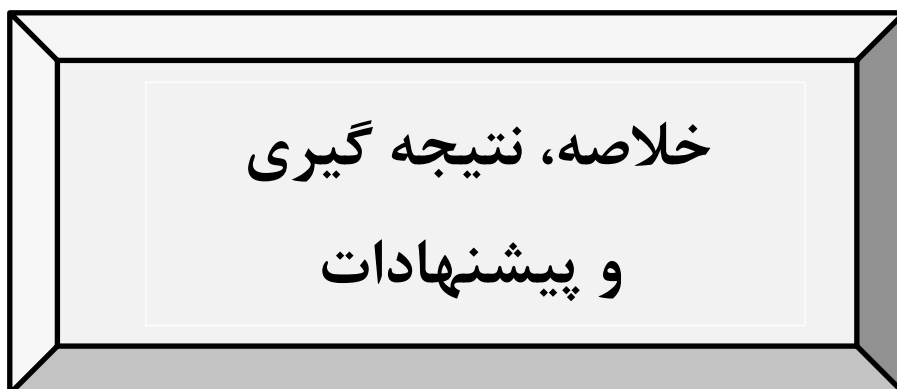
در تحقیق حاضر جهت حل عددی مسائل، کدنویسی روش‌ها در محیط نرم افزار Matlab صورت گرفته است. برای هر یک از مثال‌های این پایان نامه، کدی مجزا نوشته شده است.

از نظر ابعاد مش، هرچه تعداد مش‌های انتخابی بیشتر باشد، جواب‌ها دقیق‌تر و مدت زمان لازم برای همگرایی بیشتر می‌شود ولی بعد از تعداد مشخصی مش، با افزایش تعداد نقاط مکانی، میزان دقت تاثیر محسوسی ندارد و فقط مدت زمان اجرای برنامه افزایش می‌یابد. لذا به منظور مقایسه مدت زمان اجرا و دقت روش‌ها مشی که به ازای افزایش تعداد نقاط مکانی از آن به بعد تغییر محسوسی در دقت نتایج رخ نمی‌دهد، انتخاب شده است.

در مثال‌های پدیده اندرکنش سیال-سازه نتایج بدست آمده مربوط به حالتی است که مش سیال و سازه از هم جدا شده‌اند و ابعاد مش هر کدام بر اساس محدوده عدد کورانت هریک انتخاب شده است. اثر افزایش مدت زمان اجرا به ازای افزایش تعداد نقاط مکانی در حالت کوپله پواسن و کوپله اتصال بیشتر است چرا که برای سازه و سیال از دو مش جداگانه استفاده می‌شود.

توصیه می‌شود که اندازه مش بزرگتر مضرب صحیحی از اندازه مش کوچکتر باشد تا مرزهای سلولی یکدیگر را قزع نکرده و بر هم منطبق باشند تا از درونیایی که سبب افزایش خطا می‌شود، استفاده نشود.

فصل پنجم



۵-۱- خلاصه

در تحقیق حاضر، ابتدا به تشریح روش پیش بینی کننده-تصحیح کننده مک کورمک و روش‌های عددی به کاررفته در الگوریتم شمپاین که شامل روشی عددی بر اساس روش دو گام زمانی لاکس-فردریش، روشی عددی بر اساس روش دو گام زمانی لاکس-وندروف، روشی عددی بر اساس روش دو گام زمانی لاکس-وندروف با فیلتر غیرخطی و روشی عددی بر اساس روش نسیاهو-تادمور پرداختیم. سپس نتایج حاصل از این روش‌ها را با نتایج روش‌های عددی خطوط مشخصه و گودونو در پدیده ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه در دو حالت تداخلی اتصال و پواسن مقایسه نمودیم تا در صورت تطابق مناسب، روش‌های معرفی شده جایگزین روش عددی خطوط مشخصه و گودونو شود. همانطور که پیش‌تر گفته شد و بررسی شد، مدت زمان اجرای برنامه به روش گودونو به علت استفاده از مسئله ریمان طولانی است و از سوی دیگر روش‌های عددی مطرح شده در این تحقیق، مستقل از اندازه گام زمانی و مکانی هستند و به ازای یک گام زمانی مشخص می‌توان گام‌های مکانی مختلفی را انتخاب نمود و این امر سبب افزایش دقت این روش‌ها نسبت به روش خطوط مشخصه می‌شود.

۵-۲- نتیجه گیری

-مقایسه نتایج حاصله در پدیده ضربه قوچ نشان از آن دارد روش LXF و NT در مدلسازی آبی موفق عمل می‌کنند ولی روش‌های LXF، SLXW و MC در محل ناپیوستگی‌ها دچار نوسانات فراوان می‌شود.

-در حالت بسته شدن تدریجی شیر در ضربه قوچ، نوسانات به وجود آمده در محل ناپیوستگی‌ها به صورت مناسبی مدل شده و هر پنج روش معرفی شده در این تحقیق (LXF، NT، LXF، SLXW و MC) تطابق مناسبی با نتایج روش‌های MOC و گودونو دارند.

-در پدیده اندرکنش سیال سازه، روش LXF به صورت مناسبی نتایج را مدل می‌کند و خطای نتایج این روش نسبت به نتایج روش‌های MOC و گودونو کم است. نتایج روش NT در کوپله اتصال

منطبق بر نتایج روش خطوط مشخصه و گودونو می‌باشد. در کوپله پواسن نتایج این روش منطبق بر نتایج روش گودونو می‌باشد ولی در مقایسه با روش MOC، پس از تناوب اول فاصله‌ای میان نمودار نتایج این روش با نتایج خطوط مشخصه ایجاد می‌شود که با گذشت زمان فاصله دو نمودار افزایش می‌یابد.

- روش‌های LXW، SLXW و MC پدیده اندرکنش سیال سازه را در حالت تداخلی اتصال با خطای زیادی نسبت به روش خطوط مشخصه و گودونو مدل می‌کنند و در حالت تداخلی پواسن، نتایج واگرا می‌شود. پیشبینی می‌شود علت این امر آن است که روش لاکس-وندروف و به تبع آن روش‌های مشابه با این روش یعنی روش LXW و MC مناسب برای مدل‌سازی کانال‌های باز می‌باشد و توانایی مدل‌سازی در مجاری تحت فشار را ندارد.

- روش‌های عددی مطرح شده در این تحقیق در بررسی مثال ضربه قوچ، شامل یک مش محاسباتی بود ولی در مثال اندرکنش سیال-سازه به علت رو به رو بودن با دو سرعت متفاوت موج، یعنی امواج فشاری و امواج سازه، ناچار به تفکیک مش‌ها برای سیال و سازه شدیم و این نتیجه را به دنبال داشت که چنانچه در مسئله‌ای با امواج مختلف رو به رو بودیم که هریک متعلق به دسته خاصی از معادلات بودند، باید به تاثیر پذیری این امواج از عدد کورانت توجه نمود.

- روش‌های عددی معرفی شده در این تحقیق مشابه روش گودونو و بر خلاف روش MOC در کورانت ۰،۹، دقیق ترین نتایج را ارائه می‌دهند و حتی در حالت کوپله پواسن، چنانچه کورانت یک در نظر گرفته شود، روش NT و LXF قابلیت مدل‌سازی خود را از دست می‌دهند.

- روش LXW، SLXW، MC و LXF در مقایسه با روش گودونو سریع‌تر عمل می‌کنند که علت این امر را می‌توان عدم حل مساله ریمان در این روش‌ها دانست.

- با توجه به مسائل و نتیجه‌گیری‌های صورت گرفته روش LXF جایگزین مناسبی برای روش خطوط مشخصه و روش گودونو می‌باشد چرا که از یک سو محدودیت‌های روش MOC را ندارد و از سوی دیگر نسبت به روش گودونو سریع‌تر عمل می‌کند و خطای نتایج این روش در مقایسه با روش MOC و

گودونو بسیار کم می‌باشد.

- توجه به شرط پایداری در روش‌های صریح از اهمیت خاصی برخوردار است و بایستی همواره رعایت شود. روش‌های عددی به کار رفته در مثال‌ها از نوع صریح بودند و انتخاب اندازه گام مکانی و زمانی همواره به گونه‌ای بوده است که شرط پایداری رعایت شود. هرگاه مقدار عدد کورانت از محدوده معینی پایین‌تر رود، روش‌های عددی معرفی شده قابلیت خود را در جواب دهی دقیق از دست می‌دهند.

۵-۳- پیشنهادات برای ادامه کار

- در حل معادلات تفاضل محدود، دو نوع خطا وجود دارد. این خطاها عبارتند از خطای گرد کردن که خاصیت کامپیوتر است و خطای گسسته کردن ناشی از روش عددی به کار رفته است. اگر خطا در معادله تفاضل محدود کنترل نشود، رشد خطا باعث ناپایداری حل می‌شود. درک خطاها و کنترل آن‌ها از طریق تحلیل پایداری در داشتن حلی مطلوب برای یک معادله تفاضل محدود بسیار موثر می‌باشد. از این رو پیشنهاد می‌شود که در ادامه این پایان نامه به بررسی و تحلیل پایداری روش‌های LXF، NT، LXW، SLXW و MC برای حل معادلات پدیده ضربه قوچ پرداخته شود.

- در تحقیق حاضر با در نظر نگرفتن اصطکاک، معادلات خطی پدیده ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه مورد تحلیل قرار گرفت و معمولاً در راستای افزایش حاشیه اطمینان از این ترم صرف نظر می‌شود. در صورتی که در واقعیت می‌توان مقدار این ترم را کاهش داد ولی قابل حذف نمی‌باشد. با در نظر گرفتن ترم اصطکاک معادلات پدیده ضربه قوچ تبدیل به معادلاتی غیرخطی می‌شوند و بایستی ترم منبع را در گسسته سازی در نظر گرفت. از سوی دیگر اعمال اثر کوپله اصطکاک از طریق ضریب اصطکاک می‌باشد. از این رو ضروری است که توانایی مدلسازی پدیده ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه را با وارد کردن ترم اصطکاک و در نظر گرفتن اثرات کوپله اصطکاک بررسی نمود. پیشنهاد می‌شود که حالت همزمانی تمامی اثرات تداخلی در پدیده اندرکنش سیال سازه با استفاده از

روش‌های عددی مطرح شده در این تحقیق مورد بررسی قرار گیرد.

- اخیراً استفاده از مواد ویسکوالاستیک در بخش‌های مهندسی به دلیل خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آن‌ها افزایش یافته است. رفتار این مواد در استهلاک انرژی و میرایی نیروهای زیاد و جدی باعث ایجاد علاقه مهندسان جهت بررسی و کاربرد این مواد شده است. در تحقیق حاضر، پدیده‌های مربوط به ضربه قوچ در لوله‌های الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. چنانچه جنس لوله و یا تکیه گاه‌ها از جنس ویسکوالاستیک باشد بخش بزرگی از نیروها در پدیده ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه مستهلک می‌شود و هدهای فشاری کاهش می‌یابد.

پیشنهاد می‌شود، اثرات لوله و تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در تغییرات هدهای فشاری حاصل از پدیده ضربه قوچ و اندرکنش سیال-سازه با استفاده از روش‌های معرفی شده در این پایان نامه مورد بررسی قرار گیرد.



مراجع فارسی

- [۱] حسینی م، ابریشمی ج، (۱۳۸۶)، "هیدرولیک کانال‌های باز". چاپ هفدهم، انتشارات آستان قدس رضوی، مشهد.
- [۲] زنگانه ر، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد: "تاثیر تکیه گاه ویسکوالاستیک بر اندرکنش سیال=سازه در پدیده ضربه قوچ"، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۳] کرامت ع، (۱۳۸۹)، رساله دکتری: "بررسی اندرکنش سیال-سازه در سیستمهای لوله ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن جدایی ستون مایع". دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۴] کرامت ع، (۱۳۸۴)، پایان نامه ارشد: "تحلیل دینامیکی شبکه‌های لوله تحت فشار با روش اجزای محدود". دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز.
- [۵] کلانتری ب، (۱۳۹۰)، پایان نامه ارشد: "تحلیل پدیده ضربه قوچ با در نظر گرفتن اندرکنش سیال و سازه (FSI) به روش المان محدود". دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران.
- [۶] نجاران طوسی ع، (۱۳۹۰)، پایان نامه ارشد: "بررسی اندرکنش سیال و سازه با روش عددی گودونو". دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود.

- [1] Ahmadi, A., Keramat, A., (2010), “**Investigation of fluid–structure interaction with various types of junction coupling**”. Journal of Fluids and Structures, 26: 1123–1141.
- [2] Allevi, L., (1932), “**Colpo d’ariete e la regolazione delle turbine**”. Electrotecnica, 19: 146–164.
- [3] Allevi, L., (1904), “**Theorie general du mouvement varie de l’eau dans less tuyaux de conduit**”. Revue deMecanique, Paris, France, 14: 230–259.
- [4] Almaliki, A., (2013), “**Numerical solution of the shallow water equation by using spreadsheet**”. International Journal of Civil Engineering (IJCE), 2: 1–10.
- [5] Anderson, J.D., JR. (1994), “**Computational fluid dynamics: The basics with applications**”. MCGraw Hill
- [6] Arminjon, P., St-Cyr, A., (2003), “**New space staggered and time 2nd order finite volume methods**”. Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, 46: 135–155.
- [7] Bakhbakhi, Y., (2009), “**A discretized population balance for particle formation from gaz antisolvent process: The combined Lax-Wendroff and Crank-Nicholson method**”. Computers and Chemical Engineering, 33: 1132–1140.
- [8] Belytchko, T., Karabin, M., Lin, J.I., (1986), “**Fluid-Structure Interaction in Waterhammer Response of Flexible Piping**”, PVP, ASME, 108: 249-255
- [9] Bergant, A., Tijsseling, A.S. (2001) “**Parameters Affecting Water Hammer Wave Attenuation, Shape Timing**”, Proceedings of the 9th Int. Meeting of the IAHR Work Group on the Behaviour of Hydraulic Machinery under Steady Oscillatory Conditions, June 26.-28, Trondheim, Norway
- [10] Bergeron, L., (1936), “**Estude des coups de beler dans les conduits, nouvel exose’ de la method graphique**”. La Technique Moderne, 28: 33–75.
- [11] Bergeron, L., (1935), “**Estude ds variations de regime dans conduits d’eau: Solution graphique general e**”. Revue General de l’Hydraulique, 1: 12–69.
- [12] Boukadida, T., LeRoux, A.Y., (1994), “**A new version of the two-dimensional Lax-Friedrichs scheme**”. Math.Comp, 63: 541–553.
- [13] Breub, M., (2004), “**The correct use of the Lax-Friedrichs method**”. ESAIM, 38: 519–540.
- [14] Chaudhry, M.H., (1987), “**Applied Hydraulic Transients**”. second edition, Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- [15] Chikitkin, A.V., Rogov, B.V., Utyuzhnikov, S.V., (2015), “**High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations**”. Applied Numerical Mathematics, 93: 150-163.
- [16] EL-Fayoumi, M.K.K, EL-Sebaai, W.A., (1981), “**On the phoenical Lax-Wendroff method**”. Computer Physics Communications, 23: 27–30.
- [17] Engquist, B., Lotstedt, P., Sjogreen, B., (1989), “**Nonlinear filters for efficient shock computation**”, Math Comp, 52: 509-537
- [18] Gale, J., Tiselj, I., (1996), “**Godunov’s Method for Simulations of Fluid Structure Interaction in Piping Systems**”. Journal of Pressure Vessel Technology, 130: (3).
- [19] Gustafson, K.E., (1987), “**Partial differential equations and Hillbert space methods**”. 2nd ed., Wiley, New York
- [20] Haberman, H., (2004) “**Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems**”, 4th Edition, Prentice Hall.
- [21] Heinsbroek, A.G.T.J. (1997) “**Fluid–structure interaction in non-rigid pipeline systems**”, Nuclear Engineering and Design, 172: 123-135

- [22] Heinsbroek, A.G.T.J., Tijsseling, A.S. (1994) “**The influence of support rigidity on waterhammer pressures and pipe stresses**”, Proc. of the Second Int. Conf. on Water Pipeline Systems, BHR Group, Edinburgh, UK, 17-30
- [23] Hoffmann, K.A., Chiang, S.T., (1989), “**Computational Fluid Dynamics for Engineers**”. Engineering Education Systems, Austin, Texas, USA.
- [24] Kaya, B., Arisory, Y., (2010), “**Differential quadrature method for linear long wave propagation in open channels**”. Wave propagation in materials for modern applications, Petrin, A. (Ed.), 60: 253–62.
- [25] Lavooij, C.S., Tijsseling, A.S. (1990) “**Fluid Structure Interaction in Compliant Piping Systems**”, Proceedings of 6th Int. Conference on Pressure Surges, BHRA, pp. 85-100
- [26] Lefrancois, E., Boufflet, J., Wendroff, B., (2010), “**An introduction to fluid-structure interaction: application to the piston problem**”. Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal SIAM, 52: 747–767.
- [27] Leslie, D.J., Vardy, A.E., (2001), “**Practical Guidelines for fluid-structure Interaction in Pipelines: A Review**” 10th international meeting of the Work Group on the behaviour of Hydraulic machinery under steady oscillatory conditions, Trondheim, Norway, 26-28
- [28] Liska, R., Shashkov, M., Wendroff, B., (2011), “**The early influence of Peter Lax on computational hydrodynamics and an application of Lax-Friedrichs and Lax-Wendroff on triangular grids in Lagrangian coordinates**”. Acta Mathematica scientia, 31B (6): 2195–2202.
- [29] Lupton, H.R., Boufflet, J., (1953), “**Graphical analysis of pressure surges in pumping systems**”. Journal of the Institution of Water Engineers, 7: 87–125.
- [30] Marey, M., (1875), “**Mouvement des Ondes Liquides Pour servir a la theorie du pouls**”. Travaux du laboratoire de M.Marey.
- [31] Ménabréa, L.F., (1858), “**Note sur les effets du choc de l’eau dans les conduites**”, (Note on the effects of water shock in conduits.) Comptes Rendus Hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences, Paris, 47: 221-224 (in French). (English translation by A. Anderson (1976).)
- [32] Murawska, J., Szydowski, M., (2013), “**Lax-Wendroff and McCormack schemes for numerical simulations of unsteady gradually and rapidly varied open channel flow**”. Hydro-Engineering and Environmental Mechanics, 60: 51–62.
- [33] Naidoo, R., Baboolal, S., (2005), “**Numerical integration of the plasma fluid equations with a modification of the second-order Nessyahu–Tadmor central scheme and soliton modeling**”. Mathematics and Computers in Simulation, 69: 457–466.
- [34] Nessyahu, H., Tadmor, E., (1990), “**Non-oscillatory central differencing for conservation laws**”. Journal of Computational Physics, 87: 408–463.
- [35] Ouyang, C., He, S., Xu, Q., Luo, Y., Zhang, W., (2013), “**A MacCormack-TVD finite difference method to simulate the mass flow in mountainous terrain with variable computational domain**”. Applied Mathematics and Computation, 52: 1–10.
- [36] Poloni, M., Winterbone, D.e., Nichols, J.R., (1987), “**Comparison of unsteady flow calculations in pipe by the method of characteristics and the two-step differential Lax-Wendroff method**”. International Journal of Mechanical Sciences, 29: 367–378.
- [37] Rachid, F.B.De.F, Mattos, H.S.C, (2002), “**Modelling of the fluid- structure Interaction in Inelastic Piping Systems**” Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, 24: 62-69.
- [38] Recktenwald, G.W., (2011), “**Finite difference approximations to the heat equation**”.
- [39] Schiesser, W.E., (1994), “**Computational Mathematics in Engineering and Applied Science**”. CRC Press, Boca Raton, FL
- [40] Shampine, L.F., (2005), “**Solving hyperbolic PDEs in MATLAB**”. Applied Numerical Analysis & Computational Mathematics, 2: 346-358.

- [41] Shampine, L.F. (2004), “**Two-step Lax-Friedrichs method**”. Applied Mathematics Letters, 18: 1134–1136.
- [42] Skalak, R., (1956), “**An extension of the theory of water hammer**”. Trans. ASME, 78: 105–116.
- [43] Tamma, K, Namburu, R., (1988), “**A new finite element based Lax-Wendroff/Taylor-Galerkin methodology for computational dynamics**”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71: 137–150.
- [44] Tang, H., XU, K., (2000), “**Positivity-preserving an analysis of explicit and implicit Lax-Friedrichs schemes for Compressible Euler equations**”. Journal of Scientific Computing, 15: 19–28.
- [45] Tijsseling, A.S., Vardy A.E., (2008), “**Time scales and FSI in oscillatory liquid-filled pipe flow**”. BHR Group, Proc. of the 10th Int. Conf. on Pressure Surges (Editor S Hunt), Edinburgh, United Kingdom, May 2008, 553-568
- [46] Tijsseling, A.S., (2007), “**Water hammer with fluid-structure interaction in thick-walled pipes**”. Journal of Computers & Structures, 85: 844-851.
- [47] Tijsseling, A.S., (2003), “**Exact Solution of Linear Hyperbolic Four-Equation System in Axial Liquid-Pipe Vibration**”. Journal of Fluids & Structures, 18: 179-196.
- [48] Tijsseling, A.S., (1996), “**Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review**”. Journal of Fluids and Structures, 10: 109–146.
- [49] Tijsseling, A.S. (1993), “**Fluid-structure interaction in case of water hammer with cavitation**”, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- [50] Tveito, A., (1990), “**Convergence and stability of Lax-Friedrichs scheme for a nonlinear parabolic polymer flooding problem**”. Advances in Applied Mathematics, 11: 220–246.
- [51] Warren, M.D, (1985), “**Calculation of the reflected wave from a pipe with nozzle end by the Lax-Wendroff method**”. International Journal of Heat and Fluid Flow, 6: 205–211.
- [52] Wiggert, D.C, Tijsseling, A.S., (2001), “**Fluid transients and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping**”, ASME Applied Mechanics Reviews, 54, 455-481.
- [53] Wiggert, D.C., Hatfield, F.J., Stuckenbrock, S., (1987), “**Analysis of Liquid and Structural Transients in Piping by Method of Characteristics**”, Journal of Fluid Engineering, Trans. ASME, 109: 161-165.
- [54] Wiggert, D.C., (1986), “**Coupled transient flow and structural motion in liquid-filled piping systems: a survey**”. In Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Chicago, U.S.A, July.
- [55] Wylie, E.B., Streeter, V.L., Lisheng, S., (1993), “**Fluid Transients in Systems**”. Prentice Hall.
- [56] Xiayi, D., Gui-Qiang, C., Peizhu, L., (1989), “**Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics**”. Communications in Mathematical Physics, 121: 63–83.
- [57] Yang, K., Li, Q.S., Zhang, L., (2004), “**Longitudinal Vibration Analysis of Multi-Span Liquid-Filled Pipelines with Rigid Constraints**”, Journal of Sound and Vibration, 273: 125-147
- [58] Ying, S., Liu, V.C., (1978), “**An extension of MacCormack's method for flows with higher-order equations and in different configurations**”. Computers and Fluids, 6: 173–184.
- [59] Zhang, P.G., Wang, J.P., (2012), “**A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation**”. Applied Mathematics and Computation, 219: 892–898.

Abstract

Fluid-structure interaction (FSI) occurs when the dynamic water hammer forces; cause vibrations in the pipe wall. FSI in pipe systems being Poisson and junction coupling occurring due to water hammer has been the center of attention in recent years. It causes fluctuations in pressure heads and vibrations in the pipe wall. The governing equations of this phenomenon include a system of first order hyperbolic partial differential equations (PDEs) in terms of hydraulic and structural quantities.

In present, various numerical models, which include the finite difference methods (FDM), finite volume methods (FVM), the finite-element methods (FEM) or a combination of these methods has been used to solve the equations FSI. Historically, some methods such as Method of Characteristics (MOC) and Godunov's scheme have been successfully used for solving these equations but these methods suffer from restrictions. In MOC, steps need to certain fit together in time and space, and that is why the intervals should be selected depending on the magnitude of the problem. In Godunov scheme, Riemann problems are solved and hence field-by-field decompositions are used so run times are too much.

In this study, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, Lax-Wendroff with nonlinear filter, Nessyahu-Tadmor and MacCormack methods were implemented as a good and efficient methods for considering hyperbolic system of differential equations so we solved two problems in this field and the computational results are compared with those of the Method of Characteristics (MOC), and also with the results of Godunov's scheme to verify the proposed numerical solution. The results reveal that the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes have good agreement with results of MOC and Godunov in FSI. In water hammer, all of proposed methods can predict discontinuous in fluid pressure with an acceptable order of accuracy in gradually closure but in suddenly closure, Lax-Wendroff, Lax-Wendroff with nonlinear filter and MacCormac methods fail to predict

discontinuous in fluid pressure and simulate with a lot of fluctuations in heads in discontinuities.

Keyword: Water hammer, Fluid-structure interaction, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, Nessyahu-Tadmor, MacCormack



Shahrood University

Faculty of Civil Engineering Department

**Numerical Investigation of Water Hammer Phenomena Using
Shampine Algorithm in Pipe Systems**

Faeze Khalighi

Supervisors:

Dr. Ahmad Ahmadi

Dr. Alireza Keramat

July 2015