

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده عمران و معماری

گروه مهندسی عمران - گرایش سازه های هیدرولیکی

## بررسی پدیده اندرکنش سیال - سازه با روش عددی گودونو

دانشجو: علیرضا نجاران طوسی

استاد راهنما:

دکتر احمد احمدی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

## تقدیم به:

پدر و مادر بی همتایم

که مهر و عطوفتشان، همواره بزرگترین حامی و مشوق من در زندگی بوده است.

خواهر مهربانم

که با کمکهایش مرا پشتیبانی نمود.

و

همسر عزیزم

که با صبر و حوصله در طول این مسیر، همراه مهربان هر روز و شب من بود.

## تشکر و قدردانی:

اکنون که به یاری خداوند موفق به اتمام این پایان نامه شدم، وظیفه خود میدانم تا از تمامی کسانی که به هر نحوی در طی مراحل انجام این تحقیق مساعدت نموده اند قدردانی و تشکر کنم.

نخست، مراتب قدردانی خود را از جناب آقای دکتر احمد احمدی که زحمت راهنمایی و مساعدت مرا در این تحقیق بر عهده داشتند اعلام نموده و از رهنمودهای ارزنده ایشان در طول این مسیر که همواره روشنگر نکات مبهم این پژوهش برای من بوده است، کمال تشکر را دارم. بعلاوه از جناب آقای دکتر رامین امینی که با اختصاص وقت برای اینجانب، مرا در مسیر این تحقیق راهنمایی نمودند بسیار سپاسگزارم.

همچنین بر خود لازم می دانم از زحمات و کمکهای بی دریغ دکتر علیرضا کرامت و همکاری صمیمانه ایشان که زحمت مشاوره این پایان نامه را بعهده داشتند، و همواره در کنارم بوده اند قدردانی و تشکر نمایم.

در انتها از دوستان عزیزی که به هر نحو مرا در طول این مسیر یاری نمودند؛ مهندس امیرحسین دیهیم، فرزند دانشگر و بویژه محمد سالخورده حقیقی ممنون و سپاسگزارم و از زحمات و الطاف فراوان پدر و مادر مهربان و سایر اعضای خانواده ام که در دوران تحصیل اینجانب زحمات و سختیهای بسیاری را متحمل شده اند کمال تشکر و سپاسگزاری خود را اعلام می دارم.

## چکیده:

از مهمترین مباحث مطرح در تحلیل شبکه های توزیع سیال شبیه سازی اثر تداخلی سیال سازه، میباشد که در شرایط بروز جریان غیر ماندگار در سیال ایجاد میگردد. این پدیده عبارت از انتقال نیروها و اندازه حرکت ما بین سازه لوله و سیال درون آن است که توسط تغییرات شدید دبی جریان و فشار سیال و یا توسط عوامل مکانیکی در سیستم لوله، ایجاد میگردد. با توجه به هذلولوی بودن معادلات حاکم بر این پدیده، در گذشته جهت تحلیل و شبیه سازی این اثر تداخلی، از روش خطوط مشخصه استفاده می نمودند. لکن به دلیل برخی موارد همچون روبرویی با سیستم معادلات غیر خطی و یا ترم های پیچیده در معادلات و غیره، استفاده از روش مشخصه علیرغم دقت و کارآیی بالا، همراه با محدودیت و در پاره ای موارد مستلزم مدلسازی های عددی بیشتری است که این امر را پیچیده میسازد. این مطلب بعلاوه لزوم مقایسه و بررسی دقیقتر میزان توانمندی این روش با سایر روشهای عددی، باعث توجه و رویکرد محققین و پژوهشگران به سمت استفاده از روشهای عددی دیگر جهت حل سیستم معادلات هذلولوی و من جمله پدیده اندرکنش سیال سازه شده است. در این پایان نامه روش عددی گودونو مورد توجه قرار گرفته است که یک روش مطرح جهت بررسی سیستم معادلات هذلولوی میباشد و فلسفه و جزئیات این روش عددی، تشریح شده است. همچنین هدف اصلی این رساله، شبیه سازی پدیده تداخل سیال\_سازه در شبکه های توزیع سیال با روش عددی احجام محدود گودونو میباشد. بدین منظور از یکی از مسائل مرجع آزمایشگاهی موجود در این زمینه بهره گرفته شده و نتایج حاصل از حل این مساله با روش عددی گودونو با نتایج قبلی به دست آمده از روش خطوط مشخصه مقایسه شده اند. با توجه به تطابق نتایج، توانمندی روش عددی گودونو در زمینه تحلیل سیستم معادلات هذلولوی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: روش گودونو، اندرکنش سیال سازه، ضربه قوچ

## فهرست مطالب

- ۱ فصل اول مقدمه..... ۱
- ۱- ۱ طرح موضوع..... ۲
- ۱- ۲ هدف از تحقیق حاضر..... ۶
- ۱- ۳ فصل بندی پایان نامه..... ۷
- ۸ فصل دوم پیشینه و کلیات..... ۸
- ۱- ۲ جریان غیر ماندگار..... ۹
- ۱- ۲ پدیده ضربه قوچ..... ۱۱
- ۱- ۲- ۱ تعریف ضربه قوچ..... ۱۱
- ۱- ۲- ۲ تاریخچه ضربه قوچ..... ۱۲
- ۱- ۲- ۳ پدیده اندرکنش سیال - سازه..... ۱۴
- ۱- ۲- ۳- ۱ تعریف پدیده FSI..... ۱۴
- ۱- ۲- ۳- ۲ روشهای کوپله حل مسائل FSI..... ۱۶
- ۱- ۲- ۳- ۳ مکانیزم های کوپله..... ۱۷

- ۲-۳-۴ تاریخچه پدیده اندرکنش سیال و سازه.....۱۹
- ۲-۴ روشهای عددی؛ روش عددی گودونو.....۲۴
- ۲-۴-۱ مقدمه.....۲۴
- ۲-۴-۲ سابقه مطالعاتی روشهای عددی.....۲۵
- ۲-۴-۳ روش احجام محدود گودونو.....۲۸
- فصل سوم شرح روش عددی گودونو.....۳۳**
- ۳-۱ مقدمه.....۳۴
- ۳-۲ روشهای احجام محدود.....۳۴
- ۳-۳ روش عددی گودونو.....۳۹
- ۳-۳-۱ گسسته سازی.....۴۱
- ۳-۳-۲ نحوه محاسبه فلاکسهای عددی.....۴۲
- ۳-۳-۳ انتخاب اندازه گام زمانی و محدودیت پایداری.....۴۳
- ۳-۳-۴ نحوه در نظر گرفتن ترم منبع در روش عددی گودونو.....۴۵
- ۳-۴ نحوه بدست آمدن فرمولاسیون بقایی گودونو گودونو.....۴۶
- ۳-۵ فرم تفاضل محدود روش عددی گودونو.....۵۰
- ۳-۶ گامهای متشکل الگوریتم گودونو.....۵۲

فصل چهارم حل مسائل عددی و مقایسه نتایج..... ۵۴

۴-۱ طرح مساله ..... ۵۵

۴-۲ شرح مساله و معرفی معادلات حاکم..... ۵۵

۴-۲-۱ بیان معادلات حاکم..... ۵۵

۴-۲-۲ بیان شرایط مرزی..... ۶۰

۴-۳ بررسی و حل مثالهای عددی..... ۶۱

۴-۳-۱ مساله مدل ضربه قوچ..... ۶۱

۴-۳-۲ مساله مرجع اول آزمایشگاه delft در حالت اثر کوپله اتصال..... ۶۹

۴-۳-۳ مساله مرجع اول آزمایشگاه delft در حالت اثر کوپله پواسن..... ۷۷

۴-۴ تفسیر نمودارها و نتیجه گیری..... ۷۹

۴-۵ جزئیات کدنویسی..... ۸۱

فصل پنجم خلاصه، نتیجه گیری و پیشنهادات..... ۸۵

۵-۱ خلاصه..... ۸۵

۵-۲ نتیجه گیری..... ۸۵



۵-۳ پیشنهادات..... ۸۶

پیوست الف مسائل ریمان..... ۸۹

الف - ۱ تعریف مساله ریمان..... ۹۰

الف - ۲ بررسی الگوریتم حل مسائل ریمان..... ۹۱

الف - ۳ بررسی حل مساله ریمان برای یک سیستم معادلات..... ۹۵

الف-۳-۱ استفاده از بسط مقادیر ثابت  $U_L$  و  $U_R$ ..... ۹۶

الف-۳-۲- استفاده از روابط پرش و ثوابت عمومی ریمان..... ۱۰۰

الف - ۴ بررسی حل مساله ریمان برای یک معادله اسکالر..... ۱۰۴

مراجع..... ۱۰۸

## فهرست اشکال

- شکل ۳-۱- توزیع متغیر درون سلولها..... ۴۰
- شکل ۳-۲- گسسته سازی در روش احجام محدود..... ۴۱
- شکل ۳-۳- تفسیر شماتیک شرط پایداری برای موج  $p$  ام..... ۴۴
- شکل ۳-۴- مسائل ریمانی به ازای سرعت موج مثبت برای یک معادله اسکالر..... ۴۸
- شکل ۳-۵- نمایش گامهای گوناگون الگوریتم روش عددی احجام محدود گودونو..... ۵۳
- شکل ۴-۱- ساختار مساله ریمانی در نقطه  $x_0$ ..... ۶۳
- شکل ۴-۲- نمای شماتیک سلول اول محاسباتی..... ۶۶
- شکل ۴-۳- نمودار محاسبه دبی شیر در مثال عددی ضربه قوچ با روش گودونو و روش MOC..... ۶۸
- شکل ۴-۴- ساختار مساله ریمان برای مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله اتصال..... ۷۲
- شکل ۴-۵- نمای شماتیک سلول آخر محاسباتی..... ۷۵
- شکل ۴-۶- نمودار محاسبه هد فشاری در گره شیر در مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله اتصال با روش عددی گودونو و روش MOC..... ۷۷
- شکل ۴-۷- نمودار محاسبه فشار در گره شیر در مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله پواسن با روش عددی گودونو با روش MOC..... ۷۹

- شکل الف- ۱- ساختار حل مساله ریمان برای یک سیستم خطی  $m \times m$  معادلات هذلولوی با ضرایب ثابت.....۹۳
- شکل الف- ۲- ساختار انواع امواج شکل گرفته در معادلات هذلولوی.....۱۰۱
- شکل الف- ۳- حجم کنترل شامل موج تکانه ..... ۱۰۲
- شکل الف- ۴- تعریف مساله ریمان برای معادله اسکالر.....۱۰۵
- شکل الف- ۵- نمای شماتیک حل مساله ریمان برای یک معادله اسکالر هذلولوی.....۱۰۷

## فهرست جداول

جدول ۴-۱- مشخصات مثال عددی ضربه قوچ ..... ۶۲

جدول ۴-۲- مشخصات مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله اتصال ..... ۷۰

## فهرست علائم

RP	مساله ریمان
U	متغیر اصلی
W	متغیر مشخصه
n	نشانگر بعد زمان
i	نشانگر بعد مکانی
$\Delta x$	بعد مکانی مش
$\Delta t$	بعد زمانی مش
$\lambda$	سرعت موج
Cr	عدد کورانت
K	بردار ویژه
H	ارتفاع پیزومتری
V	سرعت سیال
f	ضریب اصطکاک
D	قطر داخلی لوله
$\nu$	ضریب پواسن
$\rho_t$	جرم مخصوص مصالح لوله

$\rho_f$	دانسیتة سیال
$e$	ضخامت دیواره لوله
$E$	مدول یانگ
$Q$	دبی سیال
$\dot{u}_z$	سرعت محوری لوله
$\sigma_z$	تنش محوری لوله
$A_f$	سطح مقطع سیال
$S(U)$	ترم منبع
$F(U)$	تابع فلاکس عددی
$A(U)$	ماتریس ضرایب
$c_f$	سرعت موج فشاری
$c_t$	سرعت موج برشی

فصل اول

مقدمه

## ۱-۱- طرح موضوع

در بخش هایی از حوزه های علوم فیزیکی و شاخه های مهندسی، شاهد مسائل انتشار امواج هستیم. میتوان از این دسته، به مثالهایی چون جریان ترافیک، دینامیک گازها، جریانات گذرای سیال در شبکه توزیع شهری، مسائل چند فازی، حرکت آبهای سطحی و حمل مواد معلق در سیالات اشاره نمود. از جمله این مسائل، پدیده اندرکنش سیال - سازه<sup>۱</sup> میباشد که به علت اثرات مخربی که میتواند در سیستم های توزیع سیال ایجاد کند، بررسی دقیق و. همه جانبه آن از اهمیت بالایی برخوردار است.

این پدیده که دامنه وسیعی از علوم مختلف را از مهندسی عمران گرفته تا صنایع تولید انرژی، صنایع شیمیایی و نفت، هوانوردی و حتی علمی مانند زیست شناسی (حرکت خون در بدن انسان)، شامل میشود، در سیستم های توزیع سیال میتوان به عنوان بیان کننده تبادل انرژی میان سیال متحرک و سازه غیر قابل تغییر شکل تفسیر کرد که میزان این تبادل انرژی تا حد زیادی به مقاومت سازه در برابر عدم تغییر شکل بستگی دارد ( سختی<sup>۲</sup>).

اما از نظر فیزیکی، تشکیل این پدیده در اثر ایجاد جریان گذرایی همچون ضربه قوچ در سیال درون سیستم است که این مساله، نیروهای قابل ملاحظه ای به سیستم سازه ای شبکه، وارد و این نیروها

---

1- Fluid-Structure interaction (FSI)

2- Stiffness



باعث حرکت و ارتعاش این سیستم میشوند. لکن در مرحله بعد این نیروهای سازه ای هستند که با تاثیر گذاری متقابل بر امواج فشاری سیال مجدداً بر پارامترهای هیدرولیکی سیال تاثیر می گذارند. در نتیجه این فعل و انفعالات، اثرات تخریبی و ویران کننده زیادی به سیستم سازه ای وارد میگردد که بی توجهی به آنها، عواقب بسیاری را به همراه می آورد. بهمین دلیل اثرات پدیده FSI در حین شرایط وقوع جریان گذرا در سیستمهای توزیع سیال، همواره مورد توجه دقیق محققین و پژوهشگران بوده است و چنانکه در فصل دوم بیان خواهد شد، تاریخچه مطالعاتی این پدیده دامنه وسیعی از تحقیقات و مطالعات را به خصوص در طی پنجاه سال اخیر، در بر می گیرد.

از اینرو با توجه به مدل ریاضیاتی پدیده FSI و معادلات حاکم بر مساله اندرکنش سیال-سازه که از نوع معادلات دیفرانسیل پاره ای<sup>۱</sup> هذلولوی<sup>۲</sup> میباشدند، بحث ما در این پایان نامه معطوف به روشهای حل معادلات هذلولوی می باشد. از جمله روشهای رایج و متداول جهت حل سیستم معادلات هذلولوی، روش خطوط مشخصه<sup>۳</sup> است. با وجودیکه این روش در بسیاری از مسائل هذلولوی کاربرد دارد و به عنوان ابزاری مناسب جهت بررسی این معادلات شناخته شده است، لکن در برخی موارد با محدودیتهایی همراه است. از جمله این محدودیتهای میتوان به استفاده از این روش در مسائل سه بعدی و یا مسائلی اشاره نمود که در آنها با جملات غیر خطی سر و کار داریم.

در واقع این روش بصورت خاص برای تحلیل و آنالیز مدلهای ریاضیاتی خطی با ماتریس ضرایب ثابت<sup>۴</sup> جوابهای با دقت مناسبی را به دست میدهند. در این مدلها سرعت امواج موجود در مساله مقادیر ثابتی هستند و وابسته به متغیر نمی باشند.

---

1- *Partial Differential Equations (PDEs)*

2- *Hyperbolic Systems of PDEs.*

3- *Method Of Characteristics (MOC)*

4- *Constant Coefficient Linear Models*

از سوی دیگر غالباً سیستمها و مدل‌های ریاضی مسائل انتشار امواج به صورت غیر خطی میباشند و یا با مواردی روبرو میشویم، که سرعت امواج موجود در حل مقادیر ثابتی نمیباشند. از این دسته امواج میتوان موج شوک<sup>۱</sup> را مثال زد. در تمامی این موارد روش مشخصه کارآیی خود را به عنوان یک ابزار قوی از دست میدهد؛ و استفاده از آن با پیچیدگی و اتلاف وقت بسیار همراه میشود.

میتوان برای نمونه به بحث انتقال گرما اشاره نمود؛ در سیستمهای گرمایشی که از مایع تحت فشار پرحرارت و داغی جهت انتقال گرما بین منبع گرما و تولید کننده هوای گرم، استفاده میشود، مدل‌های غیر خطی و پیچیده تری برای توضیح جریان گذرا، مطرح میگردند و اصولاً با وارد کردن ترمهای انتقال گرما به مساله، با مدلی غیرخطی روبرو هستیم که نمیتوان به سادگی آن را با روش MOC حل نمود [۱۶]. همچنین میتوان از مواردی نام برد که به عنوان جزئیات مساله در برخی موارد حضور دارند و باعث میشوند تا ماتریس ضرایب مدل ریاضی مساله به صورت غیر ثابت و متغیر در آید. به طور کلی مواردی همچون وجود تغییرات هندسی در سیستم سازه ای یا تغییر خواص مصالح لوله در برخی از قسمتهای مسیر آن، و یا افزودن ترمهایی که شبیه سازی پدیده FSI را در هر سیستم لوله با شکل و هندسه دلخواه مقدور میسازد، همگی نیاز به مدلسازی های عددی بیشتر را به صورت یک امر ضروری در می آورند که استفاده از روش MOC در این موارد را بسیار پیچیده و گاه غیر ممکن میسازد [۲۰]. دلیل عمده این امر میتواند بروز ناپیوستگیهایی در حل مسائل و مدل‌های غیر خطی باشد که این ناپیوستگیها به صورت امواجی با سرعت های متغیر (موج شوک) در حل ظاهر میشوند و در این موارد دیگر با امواج با سرعت ثابت سرو کار نداریم و در نتیجه نمیتوان از فرضیاتی همچون ثابت بودن متغیر مشخصه در امتداد خطوط مشخصه استفاده کرد.

همچنین نتایج مطالعات دانشمندان در سالهای اخیر نشان داده، استفاده از روشهای غیر بقایی یا

---

1- Shock Wave

تفاضل محدود نیز در مواردی همچون مثالهای فوق میتواند باعث بروز خطاهایی هم در دامنه امواج و هم در سرعت آنها شود [۴۸]. هرچند نمیتوان منکر این واقعیت شد که استفاده از روشهای عددی تفاضل محدود<sup>۱</sup> بخصوص در مواردی همچون مدل‌های سه بعدی و یا حتی دو بعدی و یا مش بندیهای منظم، بر استفاده از روشهای عددی احجام محدود<sup>۲</sup> برتری دارد و با سادگی و سرعت بیشتری به جوابهای صحیح همگرا میشوند.

با این توضیحات، استفاده از روش بقایی یا احجام محدود صریح و بالادست گودونو<sup>۳</sup> به عنوان یک جایگزین جدی برای روشهای غیر بقایی و روش مشخصه مطرح میگردد. علاوه بر مزیتی که این روش همچون سایر روشهای احجام محدود در قابلیت استفاده در قلمروهای پیچیده و مش‌های نامنظم دارد، به صورت خاص میتوان از این روش جهت تحلیل و حل کلیه مسائل هذلولوی اعم از خطی و غیر خطی و مدل‌های ریاضی با و بدون ضرایب ثابت استفاده نمود و از این نظر بر روش مشخصه رجحان می یابد.

در حقیقت این روش عددی که توسط گودونو، برای غلبه بر کمبودها و محدودیتهای روش مشخصه، ابداع شد، حل مساله را از همان ابتدا به صورت ناپیوسته در نظر میگیرد. برای این منظور در این روش، از طریق تعریف مسائل مقدار اولیه ای به نام مساله ریمان در محل مرزهای دو طرف سلولهای محاسباتی، از همان ابتدا ناپیوستگی در محل مرزهای بین سلولهای مش در نظر گرفته شده و در گامهای بعدی از طریق موازنه های صورت گرفته در مرزها، کار پیش میرود. براین اساس، حتی حل‌های پیوسته و هموار که ناشی از مدل‌های خطی و با ضرایب ثابت می باشند، در روش عددی گودونو، به

---

1- *Finite Difference Method*

2- *Finite Volume Method*

3 - *Explicit Upwind Godunov Method*

صورت حالت خاصی از یک حل ناپیوسته در نظر گرفته میشوند.

## ۱-۲- هدف از تحقیق حاضر

با توجه به اینکه مزیت عمده روش عددی گودونو نسبت به روش مشخصه، امکان تحلیل مدل‌های غیرخطی میباشد، لکن در این تحقیق، پدیده اندرکنش سیال-سازه از طریق در نظر گرفتن یک سیستم مخزن-لوله-شیر که لوله مستقیم میباشد، به صورت یک مساله خطی با روش گودونو مورد تحلیل قرار میگیرد. هدف از این تحلیل، در درجه نخست بررسی میزان توانمندی روش عددی فوق الذکر در زمینه تحلیل مدل‌ها و مسائل خطی بوده است که نقطه قوت روش مشخصه میباشد.

همچنین مقایسه روش عددی گودونو با روش خطوط مشخصه و بررسی این مطلب که آیا میتوان از روش گودونو به عنوان یک گزینه مناسب و قابل رقابت با روش مشخصه در مدل‌های خطی نیز سود برد یا خیر، از اهداف اصلی این تحقیق به شمار میرود.

برای این منظور، ابتدا با ذکر یک مثال عددی به تحلیل و حل معادلات ضربه قوچ در حالت ساده با روش گودونو پرداخته شده و پس از آن مساله مرجع اول آزمایشگاه Delft<sup>1</sup> که به عنوان یک مساله مرجع بارها در مقالات متعدد علمی مورد بحث و تحلیل قرار گرفته است، در دو حالت اثر مکانیزم کوپله پواسن و اتصال با روش عددی گودونو حل شده است و نتایج حاصل از آن با نتایج مشابهی که توسط روش مشخصه بدست آمده و بر حل تحلیلی این مساله مطابقت بسیار خوبی دارد، مقایسه شده است.

به طور کلی، تمام آنچه در مورد روش پرکاربرد گودونو به عنوان یک روش احجام محدود باید بدانیم،

---

1- Delft Hydraulic Benchmark Problem A

در این پایان نامه ارائه شده و در انتها از بخشهایی از آن متناسب با مساله مذکور، استفاده شده است.

### ۱-۳- فصل بندی پایان نامه

پس از معرفی مختصر روش گودونو و اهداف تحقیق حاضر در این فصل، در فصل دوم به بیان مفاهیم اولیه و کلی در مورد جریانهای غیر ماندگار، پدیده چکش آبی، پدیده اندرکنش سیال-سازه، به همراه پیشینه مختصری از مهمترین مطالعات صورت گرفته پیرامون این موضوعات پرداخته شده است و در ادامه مروری بر مهمترین مطالعات در موضوع کارآیی روشهای عددی و تاریخچه حل برخی از مسائل انتشار امواج با استفاده از روشهای عددی و به خصوص روش عددی گودونو، عمده مطالب این فصل را تشکیل میدهند.

در فصل سوم، به بیان کلی و جزئی کلیه مراحل و گامهای متشکله روش عددی گودونو پرداخته شده است. مطالب این فصل در حکم یک راهنمای کلی در مورد کاربرد روش عددی گودونو میباشد.

در فصل چهارم پس از بیان اجمالی معادلات حاکم بر مساله مورد بحث، با اعمال الگوریتم روش عددی گودونو که در فصل سوم تشریح شده است، به حل مساله مورد نظر پرداخته شده و پس از شرح نکات مبهم در فرآیند حل مساله، نتایج حاصله با نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه مقایسه شده اند.

در انتها موضوع فصل پنجم، نتیجه گیری، ذکر پیشنهادات و خلاصه ای از مطالب میباشد.

**فصل دوم**

**پیشینه و کلیات**

## ۲-۱- جریان غیر ماندگار

براساس تغییر در مشخصات جریان بر حسب زمان، انواع جریان به دو نوع دائمی (ماندگار) و غیر دائمی (غیر ماندگار)، طبقه بندی میشوند. هرگاه در یک مقطع ثابت از جریان، مشخصات جریان (دبی، فشار و ...) با زمان تغییر یابد، جریان غیر دائمی میباشد و چنانچه در یک مقطع ثابت از جریان، مشخصات جریان با زمان تغییر نداشته باشد، جریان دائمی است [۵۶].

از نظر فیزیکی، هر جریان غیر دائمی، عبارت است از حرکت یک موج که با تغییر مکان خود و بر حسب شرایط، خصوصیات جریان را از مقطعی به مقطع دیگر و از زمانی به زمان دیگر، تغییر میدهد. تغییرات صورت گرفته در جریانات غیرماندگار، میتواند در اثر عوامل گوناگونی همچون عوامل طبیعی، موارد برنامه ریزی شده یا حوادث اتفاقی باشد و این جریانات محدوده وسیعی را از امواج نوسانی (مانند پدیده چکش آبی) گرفته تا سیلاب حاصل از اقیانوس ها، در بر میگیرد.

امروزه با پیشرفت علوم و فنون و ساخت تجهیزات صنعتی بزرگتر و دستگاههای دارای سرعت زیادتر، مسائل مربوط به جریان غیر ماندگار، اهمیت روزافزونی یافته است. بعنوان نمونه در پدیده هایی همچون پدیده ضربه قوچ و اندرکنش آب و سازه که با جریانات گذرای هیدرولیکی روبرو هستیم، نه تنها با فشارهای بالا و خطرناک مواجه بوده، بلکه ارتعاش شدید و خستگی (سازه سیستم)، به دلیل ایجاد خلاء در جریان سیال و قطع مدارات کنترل معمولی را نیز به دنبال دارد. در چنین شرایطی بررسی این ارتعاشات شدید که مخرب می باشند، در سازه سیستم هیدرولیکی، از اهمیت بالایی

برخوردار است.

از سوی دیگر تحلیل جریانهای غیر ماندگار بسیار پیچیده تر از جریانهای ماندگار است؛ چرا که با توجه به عدم استقلال زمانی جریانات غیردائمی، نمیتوان عامل زمان را در حل مسائل مربوطه این جریانها حذف نمود. بنابراین در تحلیل این جریانها، متغیر مستقل زمان مطرح میشود و معادلات بجای اینکه از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی باشند، از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی خواهند بود که این معادلات به سادگی قابل حل نمی باشند و راه حل تحلیلی مشخصی نیز برای آنها وجود ندارد [۵۶].

برای حل مسائل جریانات غیر ماندگار، استفاده از روشهای تحلیلی تنها در صورتی ممکن است که حالات بسیار خاص و محدودی از امواج که بتوان معادلات مذکور را با فرضیاتی ساده نمود، وجود داشته باشد [۵۶].

گزینه دیگر استفاده از روشهای ترسیمی میباشد که به جهت احتیاج به زمان نسبتاً طولانی، اخیراً کمتر مورد توجه قرار میگیرد.

گزینه دیگر استفاده از روشهای عددی است که با توجه به گسترش و توسعه کامپیوترهای دیجیتالی و امکان استفاده از سرعت بالای آنها در حل معادلات پیچیده با روشهای عددی، کم کم جای سایر روشها را گرفته و بخصوص امکان در نظر گرفتن عوامل و شرایط بیشتر و از طرفی همزمان با آن، دسترسی به نتایج و جوابهای نسبتاً دقیق، باعث شده تا روشهای دیگر تدریجاً به دست فراموشی سپرده شوند.

به همین علت غالب مسائل جریانهای غیر ماندگار را بایستی از طریق حل عددی معادلات حاکم، تحلیل نمود.



## ۲-۲- پدیده ضربه قوچ

### ۲-۲-۱- تعریف ضربه قوچ

هرگاه جریان از یک حالت ماندگار به حالت ماندگار دیگری تغییر شرایط دهد، جریان غیر ماندگار مابین را جریان میرا یا گذرا<sup>۲</sup> می نامند. براین اساس، ضربه قوچ (چکش آبی)<sup>۳</sup> نوعی جریان گذرا است که در خطوط لوله، ایجاد میگردد. عموماً هرگاه سیالی درون مسیری بسته، در حال جریان باشد و کند شدن یا تسریع سرعت جریان بوجود آید، پدیده ضربه قوچ مشاهده میگردد. دلیل عمده بروز این پدیده، اثرات بسته شدن شیرها و یا توقف ناگهانی پمپ است. چرا که در اثر این عوامل، تغییرات شکل گرفته در سطح خروجی جریان باعث تغییر سرعت و به تبع آن پدیده ضربه قوچ میشود.

برای نمونه، زمانی را در نظر میگیریم که شیری را در مسیر خط لوله و جریان به سرعت بندیم. در اثر این عمل، جریان عبوری از شیر کاسته میشود و این امر، افزایش هد در سمت ورودی شیر را به دنبال داشته و ضربه ای ناشی از فشار زیاد ایجاد میکند که به سمت مخزن حرکت میکند و در بالادست جریان، با سرعت موج صوتی  $a$ ، تقویت میگردد. نتیجه این ضربه فشاری، کاهش سرعت جریان است.

در سمت دیگر شیر، فشار کاهش یافته و موج فشارکاسته شده با سرعت موج  $a$ ، به طرف پایین دست جریان حرکت مینماید که این مساله نیز کاهش سرعت را به همراه دارد. موج فشاری در قسمت بالادست شیر، در حد فاصل شیر و مخزن به حرکت رفت و برگشتی خود ادامه میدهد تا سرانجام در اثر تلفات ناشی از اصطکاک، مستهلک میگردد و فشار در تمامی خط لوله، از مخزن تا شیر، برابر با ارتفاع نظیر

---

2- *Transient state flow*

3- *Water Hammer*

فشار مخزن و جریان به طور کامل متوقف میشود. در اینحالت مجدداً جریان وضعیت ماندگار پیدا میکند. بدین ترتیب، جریان میرای مورد نظر که همان پدیده ضربه قوچ است، مابین این دو جریان ماندگار شکل میگیرد.

## ۲-۲-۲- تاریخچه ضربه قوچ

هرچند سابقه مطالعات مربوط به جریانهای گذرا، به قرن هفدهم باز میگردد، لکن تحقیق پیرامون پدیده چکش آبی، بیشتر به حدود دو قرن پس از آن، مربوط میشود [۵۸].

نیوتن<sup>۱</sup> و لاگرانژ<sup>۲</sup>، نخستین کسانی بودند که در زمینه هیدرولیک جریانهای میرا و غیر ماندگار به مطالعه پرداختند. نقطه آغازین این مطالعات، تحقیق در مورد نحوه انتشار امواج صوتی در هوا و انتشار امواج در آبهای کم عمق بود [۵۸].

در نیمه دوم قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، تحقیقات فراوانی در مورد پدیده ضربه قوچ صورت گرفته و نتایج آن به چاپ رسید. غالب این تحقیقات در اروپا انجام شده و مفاهیم اولیه آنها را در کارهای مناب<sup>۳</sup> را<sup>۴</sup> و سایرین میتوان یافت [۳۳].

ماری<sup>۴</sup> [۳۲] در اواخر قرن نوزدهم، آزمایشات متعددی جهت تعیین سرعت موج فشاری انجام داد و دریافت که اولاً سرعت موج مستقل از دامنه امواج فشاری است و ثانیاً سرعت موج با ضریب الاستیسیته جدار لوله متناسب است.

---

1 - Newton

2- Lagrange

3- Menabrea

4- Marey

گرومیکا<sup>۱</sup> [۱۸] نیز برای اولین بار، افتهای اصطکاکی را به هنگام تحلیل ضربه قوچ مد نظر قرار داد. برای این منظور او از فرض رابطه مستقیم بین سرعت و افتهای اصطکاکی استفاده نمود.

در سال ۱۸۹۷، ژوکوفسکی<sup>۲</sup> [۲۳] براساس مطالعات نظری و آزمایشگاهی که انجام داد، گزارشی در مورد تئوری ضربه قوچ کلاسیک بیان نمود. وی همچنین تحقیقاتی در مورد اثرات سرعت بسته شدن یک شیر انجام داد و دریافت که افزایش فشار در لوله به زمان بسته شدن شیر ارتباط دارد. همچنین آلیوی<sup>۳</sup> [۱] در سال ۱۹۰۲ تئوری عمومی ضربه قوچ خود را منتشر نمود.

گرچه مطالب ژوکوفسکی در سال ۱۹۰۴ توسط سیمن، ترجمه شد، اما نتیجه تحقیقات الیو تا سال ۱۹۲۵ که ترجمه آن توسط هالمس ارائه شد، مجهول باقی ماند [۵۸]. در سال ۱۹۳۳، کنفرانس مشترکی توسط انجمن مهندسی راه و ساختمان آمریکا<sup>۴</sup> و انجمن مهندسی مکانیک آمریکا<sup>۵</sup> برگزار شد که در آن مقالات متعددی در مورد تحلیل ضربه قوچ در خطوط لوله انتقال ارائه گردید [۳]. در فاصله سالهای ۱۹۴۰ تا ۱۹۶۰ کتب و مقالات متعددی در زمینه پدیده چکش آبی منتشر گردید. در این میان از مهمترین نتایج این پژوهش ها، بایستی به روشی اشاره نمود نمود که رویس<sup>۶</sup> [۳۶]، برای تعیین مراحل بسته شدن شیر ارائه نمود.

---

1- Gromeka

2- Joukowski

3- Allievi

4-ASCE

5- ASME

6- Ruus

وی نام این رویکرد را، روش بسته شدن بهینه شیر<sup>۱</sup> نامید. کیبلکا و فرانک<sup>۲</sup> [۵] و استریتر<sup>۳</sup> [۳۸] از این روش در تحلیل کامپیوتری سیستم های لوله کشی پیچیده بهره گرفتند.

لای<sup>۴</sup> و استریتر [۴۰]، در مقاله ای مشترک برای نخستین بار روش مشخصه را در تحلیل جریانهای میرا، با کمک کامپیوتر تعمیم دادند. بعدها استریتر مقالات متعددی در مورد روش مشخصه ارائه نمود و کتابی [۳۹] را در مورد جریانهای گذرای هیدرولیکی منتشر کرد.

## ۳-۲- پدیده اندرکنش سیال - سازه

### ۳-۲-۱- تعریف پدیده FSI

در شبکه های توزیع سیال، عموماً جریان غیر ماندگار در اثر عواملی همچون باز و بسته شدن شیرها در خطوط لوله، شروع بکار یا توقف پمپها در سیستمهای پمپاژ، شروع بکار توربین هیدرولیکی که بار بر روی آن زیاد یا کم میشود، و ارتعاش پره های پروانه پمپ ایجاد میشود.

در تمامی این موارد پس از تغییرات صورت گرفته در سرعت جریان، نوساناتی در فشار سیال درون لوله اتفاق می افتد. در اثر این نوسانات فشاری در یک سیستم خط لوله (مانند آنچه در پدیده ضربه قوچ رخ میدهد)، نیروهای دینامیکی قابل توجهی در سازه لوله ایجاد و در نتیجه جابجایی های دینامیکی در آن اتفاق می افتد.

---

1- *Optimum Valve Closure*

2- *Franc & Cableca*

3- *Streeter*

4- *Lai*

این جابجایی‌ها در جهات طولی<sup>۱</sup> و جانبی<sup>۲</sup> می‌باشند. و باعث ایجاد نیروهای قابل ملاحظه‌ای در تکیه‌گاهها میشوند و بعلاوه میتوانند بر روی امواج فشاری درون مجرا تاثیرگذار باشند. بدین ترتیب پدیده اندرکنش یا تداخل سیال-سازه<sup>۳</sup> (FSI)، اتفاق خواهد افتاد و سیال و سازه روی هم تاثیر می‌گذارند. از اینجا لزوم همزمانی بررسی رفتار سیال و سازه آشکار میگردد. چراکه به تنهایی نمیتوان هر یک از این دو را مورد بررسی قرار داد و برای تحلیل سیستم سیال-سازه باید معادلات حاکم بر حرکت سیال و حرکت دینامیکی سازه، بصورت همزمان یا کوپله بیان شده و با روش مناسبی حل گردد. از مهمترین مسائل در طراحی خطوط لوله، تخمین زدن نیروهای ایجاد شده در تکیه‌گاهها و در اثر ضربه قوچ میباشد. این مطلب خصوصاً جهت طراحی تکیه‌گاهها اهمیت زیادی دارد. همچنین تعیین نیروهای محوری و برشی، در مقاطع مختلف خط لوله، جهت طراحی و تعیین ضخامت جداره مهم است.

با تحلیل همزمان سیال و سازه، میتوان تخمین مناسبی برای نیروهای تکیه‌گاهی به دست آورد و یا تقویت مناسب را در محل‌هایی از سازه لوله که در برابر جابجایی‌های طولی ضعیفتر است، تجویز نمود.

---

1-Longitudinal displacements

2- Laterall displacements

3-Fluid Structure Interaction

## ۲-۳-۲- روشهای کوپله حل مسائل FSI

در طی سالیان گذشته، جهت بررسی و تحلیل پدیده اندرکنش سیال و سازه، از روشهای مختلفی اعم از کوپله و نیمه کوپله، استفاده شده و هرکدام همراه با الگوریتم های مخصوصی جهت مدلسازی عددی بوده اند.

اگر از دیدگاه بررسی تعداد معادلات دیفرانسیلی مورد استفاده برای مدلسازی کوپله، آنالیز کوپله ها را مورد توجه قرار دهیم، تعداد و نوع معادلات دیفرانسیلی که برای هر شبکه توزیع در حالت های دوبعدی یا سه بعدی لازم می باشند را به چهار بخش متفاوت میتوان تفکیک نمود.

تایسلینگ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۹۶ این طبقه بندی را بر اساس معادلات دیفرانسیلی که برای هر روش مورد استفاده قرار می گیرند، بصورت زیر انجام داد [۴۴].

(۱) مدل دو معادله دیفرانسیل: این مدل تنها در برگیرنده دو معادله دیفرانسیل هیدرولیک، یعنی معادلات پیوستگی و مومنتم میباشد. با حل این معادلات، از مقادیر سرعتها و فشارهای به دست آمده به عنوان یک بار خارجی برای تحلیل معادلات سازه ای استفاده میشود. این روش در اصل یک روش نیمه کوپله و به نام روش حل ضربه قوچ کلاسیک معروف است [۵۷].

(۲) مدل چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول: این معادلات عبارتند از دو معادله پیوستگی و مومنتم یا همان معادلات هیدرولیکی و معادله ارتعاش محوری سازه که یک معادله مرتبه دوم بوده و بنابراین به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل میشود. این مدل را برای لوله های مستقیم با حرکت محوری مورد استفاده قرار می دهند. مجهولات این مدل، علاوه بر فشار و

سرعت سیال، شامل تنش محوری و سرعت محوری دیواره لوله نیز می باشند. (در این پایان نامه، با توجه به اعمال روش عددی گودونو برای تحلیل یک سیستم ساده لوله مخزن شیر، در حالت مستقیم، از این مدل استفاده شده است.)

۳) مدل شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول: استفاده از این مدل تنها زمانی لازم است که نیروهای اینرسی شعاعی نیز بخواهند مورد استفاده قرار گیرند. علاوه بر مجهولات قبلی تنش هوپ و سرعت شعاعی دیواره لوله در این حالت به مجهولات اضافه میگردند.

۴) مدل چهارده معادله دیفرانسیل مرتبه اول: این معادلات عبارتند از دو معادله هیدرولیکی، یک معادله ارتعاش محوری و یک معادله ارتعاش پیچشی سازه که هر یک از این معادلات به علت دارا بودن مرتبه دوم، به دو معادله مرتبه اول تبدیل میشود، دو معادله ارتعاش خمشی در دو صفحه  $XY$  و  $XZ$ ، که به علت دارا بودن مرتبه چهارم، هر کدام به چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل میشوند. از توانایی های این مدل بایستی به امکان مدلسازی ارتعاش محوری لوله و سیال در صفحه ارتعاشی و خارج از آن صفحه و ارتعاش پیچشی در حالت سه بعدی برای سیستم های لوله اشاره نمود.

## ۲-۳-۳- مکانیزم های کوپله

امواج تنشی که در امتداد خط لوله حرکت می کنند و روی یکدیگر به صورت متقابل تاثیر می گذارند، عبارتند از امواج تنش پیچشی، محوری، خمشی، چرخشی، شعاعی سازه و امواج تنشهای فشاری در سیال. براساس نحوه تداخل بین این امواج، در بررسی های انجام گرفته بر روی پدیده فوق الذکر، تا به امروز سه مکانیزم کوپله مورد بحث قرار گرفته است که عبارتند از:

۱- مکانیزم کوپله پواسن<sup>۱</sup>: این مکانیزم ناشی از کوپل شدن امواج فشاری سیال با امواج تنش

های شعاعی و محوری در سازه میباید. این مکانیزم در اثر وجود نسبت پواسن مصالح لوله، موجب تبدیل شدن تنش های شعاعی به تنش های محوری میشود. این کوپله، باعث بروز تغییرات اندکی در نمودارهای فشار سیال و تنش سازه می گردد.

۲- مکانیزم کوپله اصطکاک<sup>۲</sup>: این اثر کوپله در مقایسه با اثرات کوپله پواسن و اتصال بسیار جزئی و قابل چشم پوشی است [۱۶]. همانطور که از نام این مکانیزم پیداست، ناشی از اصطکاک سیال با جدار داخلی لوله میباید و عملکرد آن باعث کاهش فشارها و تنشها در لوله میگردد. از اینروست که در جهت اطمینان، عموماً محققین این اثر را در نظر نمی گیرند. در این پایان نامه، بررسی این مکانیزم کوپله در دستور کار قرار ندارد.

۳- مکانیزم کوپله اتصال<sup>۳</sup>: در اثر این مکانیزم، امواج گوناگون به نحو مناسبی با یکدیگر در محل تغییرات هندسی سیستم از قبیل زانویی ها، تغییرات مقطع عرضی، شیرها، اتصالات، انتها و ابتدای لوله ها و ... کوپله میشوند. این اثر، هنگامی ایجاد میشود که برخی از اتصالات در سازه شبکه لوله به صورت غیر صلب باشد یا به عبارت دیگر کاملاً به زمین مهار نشده باشد. عمده ترین تغییرات در تشدید تنشها و تضعیف سازه در اثر این مکانیزم ایجاد میشود و اثرات تخریبی آن بسیار جدی تر از دو مکانیزم کوپله قبلی می باشد.

با این توضیحات، با نگاهی به ساختار مساله، پر واضح است که اثر کوپله پواسن توسط ضریب پواسن در معادلات مساله و به عبارتی در شکل معادلات ظاهر میشود و باعث کوپله شدن معادلات سازه و سیال میگردد و چنانچه مقدار این ضریب را برابر صفر در نظر بگیریم، مکانیزم کوپله پواسن از مساله حذف میشود. این در حالی است که کوپله اتصال ناشی از لرزش برخی اتصالات در هنگام وقوع جریان

---

1- *Posson coupling*

2- *Friction coupling*

3- *Junction coupling*



غیر ماندگار در شبکه است که این اتصالات به صورت کامل به زمین مهار نشده باشند و این اثر ارتباطی به مقادیر و پارامترهای صورت معادلات مساله ندارد.

مطابق تعاریف فوق، اثر کوپله اتصال در شرایط مرزی مورد استفاده برای سیال و سازه ظاهر میشود و بدین ترتیب مقادیر مرزی مورد استفاده برای معادلات هیدرولیکی، در واقع پارامترهای سازه ای هستند و بالعکس شرایط مرزی مورد استفاده برای معادلات سازه ای، پارامترهای هیدرولیکی میباشند.

با این مقدمات، در فصول آتی به بررسی اثرات این دو کوپله به صورت مجزا، برای سیستم معادلات حاکم بر پدیده اندرکنش سیال و سازه می پردازیم.

## ۲-۳-۴- تاریخچه پدیده اندرکنش سیال و سازه

نخستین بار در سال ۱۹۵۶ توسط اسکالاک<sup>۱</sup> [۳۷]، به موضوع تداخل سیال- سازه، پرداخته شد. برای این منظور، اسکالاک از معادلات تداخلی حاکم بر ضربه قوچ استفاده نمود.

در سالهای پس از آن این پدیده، بارها و بارها مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت و محققین برای بررسی های خود، از روشهای گوناگونی جهت مدلسازی عددی بهره بردند. از مهمترین مطالعات انجام گرفته، میتوان به حل معادلات سازه ای با روش اجزای محدود و معادلات هیدرولیک با روش خطوط مشخصه، و همچنین حل تحلیلی مساله اندرکنش سیال- سازه برای یک لوله [۵۷] اشاره نمود.

خصوصاً اندرکنش سیال- سازه، در سیستم های خط لوله در سالهای بعد از نیمه دوم قرن بیستم مورد

---

1- Skalak

مطالعه دقیق بسیاری از محققین قرار گرفته است [۵۷]. این در حالی است که با پیشرفت های صورت گرفته به تدریج، سیر مطالعات از امواج محوری و حرکت یک بعدی لوله، به سمت تحقیق بر روی معادلات چند بعدی موج و روش اجزای محدود کشیده شد [۵۷].

استریتر و وایلی<sup>۱</sup> [۳۹]، در مقالات خود، به توضیح تاثیر جابجایی های طولی و محیطی لوله در کاهش سرعت موج فشاری در سیال پرداختند. همچنین اسکالاک [۳۷] و تورلی<sup>۲</sup> [۴۲]، و ویلیامز<sup>۳</sup> [۵۲] معادلات امواج طولی را برای سیال و سازه به صورت کوپله در نظر گرفتند تا امواج کششی ایجاد شده در بدنه را محاسبه کنند.

بر این اساس، اسکالاک، با در نظر گرفتن حرکت لوله در راستای محوری و کاملاً الاستیک مطالعه ای را انجام داد (در این پایان نامه براساس فرضیات اسکالاک، یعنی الاستیک بودن و حرکت در راستای محوری به مطالعه مدل چهار معادله ای پرداخته شده است).

همچنین، از اقدامات انجام گرفته در این موضوع بایستی به تحلیل لرزه ای غیر کوپله سیال اشاره نمود که توسط زیلک و هک<sup>۴</sup> [۵۴] و همچنین استریتر و وایلی [۳۹] و چاودری<sup>۵</sup> [۶]، توسعه داده شده و در آن با فرض صلب بودن لوله، سیال بوسیله روش خطوط مشخصه تحلیل میگردد. سپس بارهای هیدرولیکی روی قسمتهای مختلف سازه ای تعیین شده و برای انجام تحلیل سازه ای مورد استفاده قرار می گیرند.

---

1- Streeter & Wylie

2- Thorely

3- Williams

4- Zielke & Hack

5- Chaudhry

الیس<sup>۱</sup> [۱۳] با بررسی و تحلیل رفتار غیر ماندگار سیال در یک شبکه لوله ایستگاه پمپاژ، یک روش خطوط مشخصه را برای حرکت سیال و لوله به صورت کوپله ارائه داد. همچنین ویگرت و هتفیلد و استاکنبروک<sup>۲</sup> [۵۱]، یک روش مشخصه برای سیال و سازه به صورت همزمان ارائه کردند.

بلیچکو، کارابین و لین<sup>۳</sup> [۳] پروسه ای دوگامی جهت تشابه امواج و تاثیر سازه ای آن در سیستم لوله پیشنهاد نمودند. آنان برای دوری جستن از حل کوپله که دارای پیچیدگی های فراوانی بود، از روش ساده ای بهره جستند که می توانست با دقت کافی تراکم پذیر بودن سیال- سازه را در نظر بگیرد. در این روش با فرض صلب بودن لوله، از انجام تحلیل هیدرودینامیکی توزیع فشار در خط لوله به دست آمده و سپس از این فشار، بارهای سازه ای جهت انجام تحلیل اجزا محدود، به دست می آمدند. لویج و تایلینگ<sup>۴</sup> [۲۴] نیز تداخل سیال- سازه را با استفاده از تئوری موسوم به تئوری ضربه قوچ برای سیال و تئوری خمش تیموشنکو برای المان لوله مدلسازی نمودند و نتیجه کار آنان، پروسه ای متشکل از روش مشخصه (MOC) و اجزای محدود (FEM) بود.

در سالیان اخیر پس از ۱۹۹۰ از دو منظر، حل معادلات پدیده تداخل سیال- سازه مورد توجه قرار گرفت که هر یک دارای معایب و مزایایی بودند.

براین اساس چنانچه از حل در بازه زمانی که منظور آن حل عددی معادلات می باشد استفاده گردد، اهمیت آن در تحلیل انواع لوله ها اعم از شاخه ای یا حلقوی و ... و با انواع شرایط مرزی است؛ درحالیکه این روش داری ضعف هایی نیز میباشد.

---

1- Ellis

2- Wiggert & Hatfield & Stuckenbruck

3- Wiggert & Hatfield & Stuckenbruck

4- Lavooij & Tijsseling

اما استفاده از حل فرکانسی، به معنای جداسازی متغیرهای معادلات حاکم و استفاده از سریهای فوریه جهت تعیین تابعی مناسب برای بیان شرایط مرزی میباشد و استفاده از آن تنها برای یک لوله مستقیم و در حالت شرایط مرزی بسیار ساده مقدور است [۵۷].

لسلای و واردی<sup>۱</sup> [۲۶] با تاکید بر اینکه در نظر نگرفتن اثرات تداخلی اثرات مخربی به دنبال خواهد داشت، استانداردهای معتبر را مورد نقد قرار داده و ضرورت بازنگری آنها را برای بیان لزوم آنالیزهای تداخلی مورد بحث قرار دادند.

راکید و ماتوس<sup>۲</sup> [۳۵] در مقاله خود تداخل سیال-سازه را در سیستم های لوله غیر الاستیک مدل سازی نمودند

از مهمترین مقالات در سالهای اخیر، محصول مطالعات تاپسلینگ میباشد که در این مقاله به حل تحلیلی چهار معادله دیفرانسیلی حاکم بر پدیده تداخل سیال-سازه در یک سیستم مخزن لوله شیر و در یک لوله مستقیم پرداخت [۴۳]. این معادلات عبارت از دو معادله هیدرولیکی و یک معادله ارتعاش محوری درجه دوم می باشند که معادله ارتعاش محوری چنانکه پیش از این هم اشاره شد، خود به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل میشود.

در این مقاله با ارائه روشی جهت مستقل ساختن معادلات دیفرانسیل فوق از یکدیگر در یک سیستم مجازی، در ادامه به حل این معادلات با روش خطوط مشخصه پرداخته شده است. همچنین هر دو اثر تداخلی اتصال و پواسن مورد تحلیل قرار گرفته و بر لزوم انتخاب المانهای کوچک جهت کاهش خطاهای روشهای عددی تاکید فراوانی شده است که همین امر زمان محاسبات را بسیار بالا میبرد.

---

1-Leslie & Vardy

2- RACHID & Mattos

از نکات مثبت این کار بایستی به ارائه مسائل مرجع ششگانه<sup>۳</sup> و حل آنها با روش پیشنهادی و مقایسه نتایج حل با نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه میباشد. تحلیل انجام گرفته در این مقاله از نوع فرکانسی بوده است. همزمان با کار تاپسلینگ، مقاله مهم دیگری نیز توسط لی و همکاران<sup>۴</sup> [۳۰] ارائه شد که تنها در روش حل معادلات تفکیک یافته با مقاله تاپسلینگ تفاوت دارد.

یانگ [۵۳] و همکارانش<sup>۵</sup> نیز در یک تحقیق مشابه با یک روش ماتریسی حلی تحلیلی برای یک دستگاه متشکل از چهار معادله دیفرانسیل توصیف کننده پدیده تداخلی سیال-سازه (که در مقاله تاپسلینگ نیز بدان پرداخته شد)، ارائه کردند. نتایج حل آنان با نتایج حاصل از روش خطوط مشخصه و نتایج آزمایشگاهی تطابق خوبی دارد. آنان در این مقاله به عنوان مثال یک لوله ۲۰ متری را در نظر گرفته و نشان دادند اثر تداخلی اتصال نسبت به پیواسن دارای اثرات بسیار شدیدتر و مهمتری میباشد.

با پیشینه مطالعاتی نسبتاً گسترده ای که در سالیان گذشته بر روی پدیده تداخل سیال-سازه صورت پذیرفته است، امروزه محققین غالباً توجه خود را به بررسی و حل معادلات حاکم بر این پدیده با استفاده از روشهای عددی دیگر و نیز بحث بر روی اثرات تک تک عوامل و پارامترهای موثر در امواج موجود در مساله معطوف داشته اند. با این وجود توسعه تداخل سیال-سازه (FSI)، هنوز دارای نقاط مبهم زیادی است و از نظر فیزیکی در سیستم لوله کاملاً شناخته شده نیست و تا به امروز هیچ روش قطعی جهت بررسی این پدیده ارائه نگردیده است و از نظر مطالعاتی نیازمند بررسی و تحقیقهای بیشتر میباشد.

---

3- *Delft Hydraulics Benchmark Problems A to E*

4- *Li*

5- *Yang, Ke et al.*

## ۲-۴- روشهای عددی؛ روش عددی گودونو

### ۲-۴-۱- مقدمه

استفاده از روشهای عددی در موضوعات گوناگون علمی، از دیرباز مطرح بوده است. اما پیشرفتهای به دست آمده در امر ساخت و بهبود کامپیوترها که موجب افزایش کارایی و حافظه آنها گردیده، امکان حل معادلات مکانیک سیالات با استفاده از روشهای عددی مختلف را بیش از پیش مطرح ساخته است.

این پیشرفتهای سبب معرفی روشهای عددی جدیدتری شده اند که تقریباً به صورت روزانه پیشنهاد میشوند. همچنین انعطاف پذیری این روشها جهت در نظر گرفتن ابعاد گوناگون مسائل مورد بحث و امکان بررسی همه جانبه و دقیق شرایط و جزئیات یک معادله حاکم سیالاتی، موجب شده تا اهداف پیش بینی شده در حل یک مساله سیالاتی توسط این روشها به خوبی برآورده گردد. با مقایسه جوابهای حاصله از روشهای عددی گوناگون، خواه از نوع تفاضل محدود و خواه از نوع روشهای احجام محدود، با نتایج آزمایشگاهی، میتوان صحت و سقم و معایب و مزایای انواع این روشها را مورد بررسی و نقد دقیق قرار داد و نسبت به کارایی یا عدم کارایی یک روش عددی جهت مقاصد عملی نظر داد.

در این راستا، استفاده از روشهای عددی در حل مسائل انتشار امواج نیز در حوزه های مختلف فیزیکی امروزه، بیش از پیش مرسوم شده است.

با توجه به اینکه معادلات حاکم در پدیده تداخل سیال-سازه، از نوع معادلات دیفرانسیل پاره ای هذلولوی میباشند، بررسی تاریخچه بخشی از روشهای عددی که جهت مدلسازی این دسته از معادلات کاربرد دارند، خالی از فایده نیست.

## ۲-۴-۲- سابقه مطالعاتی روشهای عددی

برای نخستین بار تایلر و پتلین<sup>۱</sup> [۴۶] در مطالعات خود ثابت کردند، استفاده از برخی از روشهای عددی مرتبه اول دقت همانند روش لاکس- فردریش<sup>۲</sup> یا روشهای بالادست ( اشاره به جهتی که موج در آن منتشر میشود)، همچون روش تفاضل بالادست مرتبه اول<sup>۳</sup>، حل‌های نه چندان همواری در حوالی موجها به دست میدهند که شامل مقادیر بعضاً نادرستی در این نواحی میباشد.

این امر خصوصاً زمانی از شدت بیشتری برخوردار است که ابعاد مش مساله بزرگتر باشد.

از سوی دیگر، لی و کو<sup>۴</sup> [۲۹] در یادداشتهای خود، بر این امر تاکید می‌ورزد که وجود نوسانات به عنوان یک شاخص و نشانه در تمامی روشهای تفاضل محدود مرتبه دوم دقت و بالاتر وجود دارد.

هافمن<sup>۵</sup> [۲۱] در یادداشتهای خود به این نکته اشاره میکند که برخی روشهای مرتبه اول دقت مانند روش تفاضل محدود بالادست، حتی با وجود گرادینهای بزرگ، جوابهای بی‌نوسانی ایجاد میکنند.

---

1 - Tiselj & Petelin

2- Lax-Friedrichs

3- The First Upwind Differencing Method

4- Le Veque

5- Hoffmann

همچنین طبق نوشته های او، دقت روشهای عددی عاری از نوسان یا یکنواخت<sup>۱</sup>، از مرتبه اول میباشند و این روشها تلف کننده میباشند و ناپیوستگیها در چند گره مش پخش می گردند؛ هرچند کوچک کردن شبکه از پخش شدن بیشتر ناپیوستگیها میکاهد بر این اساس میتوان دو ویژگی مهم این روشها را بصورت زیر بیان نمود:

- با پیشروی در حل در طول زمان، هیچگونه جوابهای افراطی موضعی ایجاد نمیشود.
- مینیمم موضعی کاهنده نیست و ماکزیمم موضعی نیز افزاینده نیست.

از سوی دیگر، تایلر و پتلین روشی صریح و از مرتبه اول دقت را در دوگام متوالی، جهت سیستم معادلات هذلولوی خطی و غیر خطی مطرح نمودند که به نام روش CIR یا روش مشخصه گودونو ( به علت شباهتی که با روش احجام محدود گودونو دارد)، نامیده میشود. این روش در واقع مشابه همان روش احجام محدود گودونو میباشد که در فرم تفاضل محدود خود نوشته شده است. گیل و تایلر<sup>۲</sup> [۱۶] نیز در مقاله خود با استفاده از روش CIR به بررسی و حل معادلات حاکم بر پدیده اندرکنش آب و سازه در حالت مدل ۸ معادله دیفرانسیلی پرداختند. آنها در این مقاله مثال اثر ضربه میله ای<sup>۳</sup> را برای یک سیستم لوله که دارای یک انحنا یا زانویی نیز بود، مورد بررسی قرار دادند و نتایج کار خود را با بررسیهای تایلرینگ در همین زمینه مقایسه نمودند.

لی و کو [۲۸،۲۹] به روشهای تفاضل محدود با مرتبه بالاتر دقت پرداخت و در مقالات خود، بر استفاده از این روشها جهت حل مسائل دقیق در نزدیکی موجهای تنشی و ناپیوستگی های موجود در حل تاکید کرد.

---

1- Monotone Schemes

2- Gale & Tiselj

3- Rod Impact Experiment



تایسل و هوروت<sup>۱</sup> [۴۵] نیز در مطالعات خود، با استفاده از تعدادی از روشهای تفاضل محدود صریح، به حل مدل شش معادله ای خود برای یک مساله جریان دوفازی پرداخته و از این طریق، کارآیی روشهای تفاضل محدود صریح را مورد بحث قرار دادند.

همچنین از سایر مطالعات صورت گرفته مهم در زمینه کارآیی روشهای تفاضل محدود برای مدلسازی معادلات دیفرانسیل هذلولوی، میتوان به مطالعات لیوکو [۲۷]، جین و لورمور<sup>۲</sup> [۲۲] و چلبی<sup>۳</sup> [۷،۸] اشاره نمود.

اما از آنجا که میتوان قوانین بقای حرکت سیال را در قالب شکل ریاضی انتگرالی نیز بیان نمود، بخشی از مطالعات در زمینه مدلسازی معادلات سیالاتی، معطوف به روشهای احجام محدود شده است و روند مطالعات در مورد روشهای عددی، همواره محدود به روشهای تفاضل محدود نبوده، بلکه روشهای عددی احجام محدود نیز به موازات روشهای تفاضل محدود در مرور زمان مورد بحث و بررسی قرار گرفته اند.

در این رابطه تشریحی از اصول اولیه روشهای عددی احجام محدود را میتوان در تالیفات افرادی همچون هافمن [۲۱] و تورو<sup>۴</sup> [۴۹] به وضوح یافت.

چنانکه پیش از این نیز اشاره شد، استفاده از روشهای احجام محدود که براساس فرم انتگرالی معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مساله به دست آمده اند، نسبت به روشهای تفاضل محدود دارای محاسن و معایبی میباشد که از جمله محاسن این روشها میتوان به مش های نامنظم اشاره کرد که با توجه به

---

1- Tiselj & Horvat

2- Jin & Levermore

3- Chalabi

4- E.F.Toro

عدم کارآیی روشهای تفاضل محدود، روشهای احجام محدود بازدهی مناسبی دارند و این از نقاط قوت این روشها محسوب میشود.

در مورد این روشها، به طور خاص میتوان به منابع مطالعاتی مفیدی همچون تحقیقات تورو [۱۱]، گاسنر<sup>۱</sup> [۱۷] و لی و کو [۲۹] اشاره نمود.

## ۲-۴-۳- روش احجام محدود گودونو

یکی از روشهای شناخته شده و مطرح در حوزه روشهای احجام محدود روش عددی گودونو میباشد که نام آن برگرفته از نام گودونو، محقق است که در سال ۱۹۵۹ آن را ابداع نمود. این روش بقایبی ( احجام محدود ) جهت حل سیستم هایی که معادلات حاکم آنان از نوع هذلولوی میباشد کاربرد دارد. انگیزه گودونو از ابداع این روش، وجود برخی محدودیت های روش مشخصه بود که در قسمت مقدمه به آنها اشاره شد. اما با وجودیکه روش عددی گودونو در اواخر دهه ۱۹۵۰ پا به عرصه وجود نهاد، لکن در آن زمان حتی نتوانست به شهرت و رواج برخی روشهای عددی برسد که در سالهای بعد توسعه داده شده و از روش گودونو کارآیی و توانمندی کمتری داشتند. دو دلیل عمده این مساله را باید در درجه نخست، در ماهیت صریح بودن این روش جستجو نمود، چرا که این مساله باعث اعمال نوعی محدودیت در گام زمانی محاسباتی به منظور برقراری شرط پایداری در مساله میشد. این در حالی است که در دهه های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ میلادی، غالباً فرمولبندیهای ضمنی<sup>۲</sup> ترجیح داده میشدند. زیرا این روشها اجازه انتخاب گام زمانی بزرگتری را میدادند، بی آنکه باعث بروز ناپایداری در مساله شوند.

---

1- Gassner

2- Implicit Methods

ثانیاً در این روش، گودونو، برای محاسبه فلاکس ها و تبادل بین آنها در مرزهای سلولهای محاسباتی، از پروسه ای تحت عنوان مسائل ریمان سود برد. این در حالی است که حل مسائل ریمانی به عنوان یکی از عمده ترین بخشهای روش عددی گودونو تا مدتها به عنوان فرآیندی هزینه بر و اتلاف کننده از نظر زمانی، تلقی میشد و سرانجام با ظهور روشهای حل تقریبی مسائل ریمان<sup>۱</sup> در دهه ۱۹۸۰، یک ابزار قوی و کارآمد برای حل مسائل ریمان ایجاد شد [۲۰]. در کنار این روشهای تقریبی، با افزایش سرعت و دقت کامپیوترها، امکان حل دقیق مسائل ریمانی نیز با سرعت بیشتری نسبت به قبل فراهم شد و همه این عوامل مجدداً باعث جلب توجهات به روش عددی گودونو گردید. در سه دهه اخیر، با پیشرفت ساختار روش عددی گودونو و ابداع فرمهای گوناگونی از این روش جهت بررسی حالات مختلف مورد مواجهه از قبیل مسائل غیر خطی و خطی، روشهای گوناگون حل مسائل ریمان و ... انواع مختلفی از روشهای صریح شکل گرفتند که پایه و اساس همگی آنان ساختاری بود که گودونو در سال ۱۹۵۹ ابداع نمود.

تمامی این فرمهای گوناگون تحت عنوان روشهای نوع گودونو<sup>۲</sup> نامیده میشوند. امروزه به وفور در علوم و مسائل مختلف بویژه در حوزه انتشار امواج از این روشها به تناسب نیازها و الزامات مساله استفاده میشود. به این ترتیب امروزه روش عددی گودونو به موازات سایر روشهای عددی، در رقابتی تنگاتنگ برای مدلسازی مسائل مختلف حضور دارد.

هرچند از آن زمان تا کنون استفاده از روش عددی گودونو در حوزه های مختلف سیالاتی و فیزیکی و ... جهت مدلسازی معادلات دیفرانسیل هذلولوی، بارها و بارها تکرار شده است و قابلیت این روش در موارد گوناگون مورد بحث و بررسی قرار گرفته است [۲۰].

---

1- *Approximate Riemann Solvers*

2- *Godunov-type Schemes*

نتایج عمده ای از این تحقیقات را میتوان در منابع معتبری همچون مطالعات لی و کو [۲۹] و تورو [۴۸] میتوان مطالعه نمود. همچنین ذکر برخی از مسائلی که در مدلسازی آنان از این روش استفاده شده است به صورت زیر است:

این فلت<sup>۱</sup> [۱۲] از این روش برای مدلسازی معادلات حاکم بر پدیده دینامیک گازها استفاده نمود.

بن آرتزی و فالکوویتز<sup>۲</sup> [۴] استفاده از این روش را در حوزه دینامیک سیالات آزمود و نتایج آن را منتشر کرد.

تیتارو و تورو<sup>۳</sup> [۴۷] در تحقیقات خود، روشهای مرتبه بالاتر گودونو را مورد بررسی و بحث قرار دادند. در این زمینه مینیاتی و کوللا<sup>۴</sup> [۳۴] در مقاله ای، استفاده از روشهای مرتبه بالاتر گودونو را از نظر دقت، روی معادلات دیفرانسیل پاره ای شامل ترمهای منبع<sup>۵</sup> آزمایش کردند.

سیتنیک و لبدو<sup>۶</sup> [۲۵] روش گودونو را جهت مدلسازی معادلات حاکم بر مساله جریانهای گازی تراکم پذیر با سرعتهای نامحدود، استفاده کردند.

بل، داوسون و شابین<sup>۷</sup> [۲] به اعمال روش عددی گودونو به قوانین بقای هذلولوی اسکالر در حالت چند بعدی پرداختند.

---

1- Einfeldt

2- Ben-Artzi & Falcovitz

3- Titarev & Toro

4- Miniati & Colella

5- Source Terms

6- Lebedev & Sitnik

7- Bell & Dawson & Shubin

کانگ<sup>۸</sup> [۹] از این روش عددی برای مدلسازی معادلات حاکم بر پدیده جریان در مجاری روباز استفاده نمود.

داویس<sup>۹</sup> [۱۰] در تالیفات خود، به ساده سازی روش احجام محدود گودونو مرتبه دوم دقت، پرداخت. فوجی هارا و برس ویک<sup>۱۰</sup> [۱۵] از این روش جهت حل معادلات حاکم بر مساله آبهای سطحی استفاده نمودند. گوینوت<sup>۱۱</sup> [۱۹] برای شبیه سازی عددی جریانهای دوفازی از این روش استفاده کرد. تاباک<sup>۱۲</sup> [۴۱]، به بررسی اثر شبکه ها و مشهای با فیزیکهای متفاوت بر روی دقت روش عددی گودونو مرتبه دوم دقت پرداخت.

لین و بالمان<sup>۱۳</sup> [۳۱] نیز انتشار امواج را در جامدات با کمک این روش احجام محدود مدلسازی کردند. همچنین فلین<sup>۱۴</sup> [۱۴] از این روش برای محاسبه عددی امواج غیر الاستیک و غیرخطی در خاک، بهره برد.

به طور خلاصه باید گفت تاکنون پیشرفتهای صورت گرفته در روشهای گودونو، غالباً توسط ریاضیدانان و یا مهندسانی صورت گرفته است که دارای سابقه قوی و توانمندی در علوم ریاضیات کاربردی می باشند.

این در حالی است که این افراد تلاش های خود را بیشتر به اعمال روش گودونو به حوزه دینامیک

---

8- Cunge

9- Davis

10- Fujihara & Borthwick

11- Guinot

12- Tabak

13- Lin & Ballmann

14- Fellin

گازها اختصاص داده اند و این امر به دلیل اهمیت و بالا بودن تقاضا و نیاز عمومی برای اداره و کنترل جریان هایی بوده که حل های ناپیوسته ای دارند. به همین دلیل علی رغم فراوانی منابع موجود در زمینه این روش عددی، غالب این منابع برای مهندسی سایر زمینه ها از جمله مهندسی عمران قابل درک نیست.

در این پایان نامه تلاش شده تا یک راهنمای اصولی و مطابق با منابع رایج روش عددی گودونو، به درستی تهیه شود، به این امید که مطالب مندرج در این فصول در آینده نیز برای افرادی که قصد استفاده از این روش را برای مدلسازی مسائل مختلف دارند، مفید فایده واقع شود.

در انتهای این قسمت میتوان از مهمترین منابع مطالعاتی در زمینه اصول و مبانی روش عددی احجام محدود گودونو به منابع معتبری همچون تالیفات تورو [۴۸،۵۰] و گوینوت [۲۰] اشاره نمود. برخی از این تالیفات به عنوان منابع درسی معتبر در دانشگاهها مورد استفاده قرار میگیرد.

## فصل سوم

# شرح روش عددی گودونو

### ۳-۱- مقدمه

هدف از این فصل، توضیح سرفصل های عمده روش عددی گودونو، میباشد تا بتوان به وسیله آن به حل سیستم های قوانین بقای هذلولوی یک بعدی (با یا بدون ترم منبع  $S$ ) پرداخت.

همچنانکه ذکر شد، روش خطوط مشخصه، به دلایلی که در فصل قبلی بیان نمودیم، دلیل مناسبی را برای جستجوی یک روش عددی مناسب تر، در اختیار محققان مربوطه قرار داد و گودونو، نیز در این میان به دنبال یک جایگزین مناسب از نوع بقایی برای روش عددی MOC رفت تا به حل سیستم قوانین بقا، پردازد. بویژه این روش، مستلزم و دربرگیرنده حل مسائل ریمان (RP) در مرزهای بین سلولی در مش محاسباتی بود تا بتوان از این رویه، به منظور تعیین فلاکس ها و در نهایت جرم، مومنتم، و انرژی حمل شده به بیرون و تعادل میان آنها استفاده نمود.

در بخش های بعدی، تلاش میگردد تا با بیان اصول کلی الگوریتم متشکل این روش عددی، در قالب گامهای پلکانی، یک سرفصل کاربردی و قابل اعمال به سیستم های قوانین بقا، آنگونه که امروزه، جهت حل معادلات، رایج میباشند، ارائه گردد.

### ۳-۲- روشهای احجام محدود

روشهای احجام محدود، یکی دیگر از ابزارهای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای میباشد. (علاوه بر روش های تفاضل محدود و اجزای محدود). در اینجا، استفاده از این ابزار به جهت آنالیز معادلات دیفرانسیل پاره ای هذلولوی، مختصراً مورد بحث قرار می گیرد.



برخلاف روشهای تفاضل محدود، که در آنجا به جستجوی مقادیر تقریبی حل در گره های مش بر می آئیم، روشهای احجام محدود، در پی تقریب زدن میانگین های انتگرالی حل بر روی احجام کنترل (سلولهای محاسباتی) میباشند.

هرگاه چهارچوب کلی یک سیستم معادلات دیفرانسیلی پاره ای هذلولوی غیر خطی در حالت یک بعدی به همراه شرایط مرزی و اولیه لازم برای حل به صورت زیر، در نظر گرفته شود:  $(\mathbf{S}(\mathbf{U}))$  ترم منبع میباشد)

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), & x \in (0, b), \quad t > 0 \\ \text{IC: } \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x), & x \in (0, b) \\ \text{BCs: } \mathbf{U}(0, t) = \mathbf{U}_0(t), \mathbf{U}(b, t) = \mathbf{U}_b(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

زیرنویسها در رابطه بالا مربوط به زمان و بالانویسها مربوط به مکان میباشند. اکنون جزئیات روش احجام محدود برای سیستم فوق به صورت زیر بیان میشود:

روش احجام محدود دامنه یا قلمرو فیزیکی حل را با یک مش یا شبکه جایگزین میکند که این شبکه بوسیله تعداد معینی سلول یا حجم محدود گسسته سازی شده است. در ادامه بایستی میانگین انتگرالی حل در هریک از این احجام یا سلولها، تقریب زده شود.

گسسته سازی در راستای بعد مکانی در محدوده  $[0, b]$ ، توسط  $m$  تعداد سلول یا خانه صورت میگیرد که به صورت زیر تعریف میشوند ( $b$  نقطه مرزی انتهایی شبکه میباشد):

$$I_i \equiv [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad i = 1, \dots, M \quad (2-3)$$

گسسته سازی در راستای بعد زمانی نیز در محدوده  $[0, \infty)$ ، توسط درجه بندی های زمانی تا رسیدن به گام زمانی نهایی صورت می پذیرد:

(۳) -۳)

مرزهای هر سلول  $x_{i-0.5}$  و  $x_{i+0.5}$  در تعاریف فوق،  $t_0 = 0$  ،  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$  ،  $n = 0, \dots$  میباشند. همچنین عرض یا پهنای هر سلول با  $\Delta x$  نشان داده میشود:

(۴) -۳)

$\Delta x_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$  مرکز هر سلول با  $x_i$  نشان داده میشود و از نظر موقعیت قرارگیری، نقطه میانی هر سلول میباشد.

(۵) -۳)

$x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1/2} + x_{i+1/2})$  همچنین بعد دیگر هر سلول یا گام زمانی با  $\Delta t_n$  نشان داده میشود.

(۶) -۳)

اگرچه اندازه گام زمانی و گام مکانی میتواند در هر گام، متغیر باشد، در مساله مورد بحث به علت منظم بودن مش، از بیان زیرنویس های  $i$  و  $n$  صرفنظر نموده و این گامها را به صورت اختصاری  $\Delta x$  و  $\Delta t$  نمایش میدهیم.

با تعاریف دامنه زمانی، مکانی و گسسته سازی های مربوط به مش مساله، اکنون حجم کنترل زمانی-

مکانی  $V$  به صورت  $V \equiv [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$  تعریف میشود.

اکنون چنانچه از معادله دیفرانسیلی (۳-۱) درون حجم کنترل  $V$  نسبت به زمان و مکان، انتگرالگیری شود، منجر به فرمولاسیون دقیق زیر خواهد شد:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}] + \Delta t \cdot S_i \quad (۷-۳)$$

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_n) dx \quad (۳-۸)$$

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(U(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (۳-۹)$$

$$S_i = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S(U_i(x, t)) dx dt \quad (۳-۱۰)$$

در فرمولاسیون فوق،  $F_{i+1/2}$  نمایانگر میانگین انتگرال زمانی (انتگرال نسبت به زمان) ترم فلاکس در مرز سلول میباشد. همچنین  $S_i$  نشاندهنده میانگین انتگرال حجمی ترم منبع در محدوده حجم کنترل و  $U_i^n$  میانگین انتگرال مکانی متغیر مساله در سلول  $i$  ام، و در گام زمانی  $t = t_n$  میباشد (شرایط اولیه مساله).

همچنین  $U(x_i, t)$  و  $U(x_{i+0.5}, t)$  عبارت از حل معادله دیفرانسیل (۳-۱) به ترتیب، در محل مرز بین سلولی و درون یک سلول محاسباتی میباشد.

ذکر این نکته ضروری است که به جهت استفاده از مختصات موضعی، جهت انجام محاسبات در هر گام، گام زمانی  $t_n$  همواره به منزله پله زمانی  $t=0$  و گام  $t_{n+1}$  به مثابه پله زمانی  $t=\Delta t_n=\Delta t$  در نظر گرفته میشوند. مشابه همین حالت را نیز در مورد مختصات در بعد مکانی داریم.. در مختصات مکانی، موقعیت مرزهای سلولی  $x=x_{i+0.5}$  برابر با مبداء مختصات موضعی  $x=0$  انتخاب میشوند.

با این تعاریف و طبق رابطه (۳-۷) یک روش عددی احجام محدود، برخلاف روشهای تفاضل محدود، یک تقریب تفاضلی از معادله دیفرانسیلی حاکم و مشتقات آن را به دست نمیدهد؛ بلکه رابطه ای دقیق است. روشهای احجام محدود عددی گوناگون، بر پایه این رابطه به دست می آیند و با استفاده از آنها، به جای تقریبات تفاضلی، مقادیر حل را به صورت میانگین های سلولی یا مقادیر حجمی  $U_i^n$  میتوان به دست آورد.

تنها مرحله باقی مانده برای تکمیل این فرمولاسیون معرفی تقریبات مناسبی جهت محاسبه فلاکس عددی  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  و ترم منبع عددی  $\mathbf{S}_i$  میباشد. برای این منظور، روابط و تکنیکهای متعددی وجود دارد که هریک به نوعی به تعیین و تقریب این ترمها میپردازند. بدیهی است، استفاده از هریک از این روابط و تکنیکها، منجر به شکل گیری یک روش عددی احجام محدود منحصر به فرد میشود.

اکنون چنانچه از ترم منبع معادله دیفرانسیل (۳-۱) چشم پوشیده و به عبارتی حالت همگن این معادله را در نظر بگیریم، میتوان ساختار کلی یک روش عددی بقایی را به جهت حل این معادله مطابق زیر بیان و تعریف نمود:

$$(۳-۱۱)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-1/2} - F_{i+1/2}]$$

فلاکس عددی نیز، به صورت یک تابع مطابق زیر تعریف میشود:

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}(U_{i-1}^n, \dots, U_i^n, U_{i+1}^n, \dots, U_{i+r}^n) \quad (۳-۱۲)$$

در این رابطه  $l$  و  $r$ ، دو مقدار صحیح غیر منفی میباشدند.

ذکر این نکته فراموش نمیگردد که فرمولاسیون (۳-۱۱)، در حقیقت یک روش عددی صریح است؛ چرا که در یک روش عددی ضمنی، تابع فلاکس، علاوه بر مقادیر گام زمانی  $n$  ام تابع مقادیری از گام زمانی  $n+1$  ام نیز میباشد. در پایان باید گفت، میتوان برخی روشهای تفاضل محدود را نیز مجدداً در قالب یک روش بقایی یا احجام محدود، بیان نمود. به عنوان مثال میتوان به روشهایی همچون لاکس، یا لاکس و ندرف<sup>۱</sup>، اشاره نمود. تفاوت این روشها در چهارچوب روش احجام محدود، در نحوه محاسبه ترم فلاکس عددی است؛ همچنانکه پیش از این اشاره شد.

### ۳-۳- روش عددی گودونو

این روش توسط گودونو، در سال ۱۹۵۹ با اعمال به سیستمهای خطی و سپس غیرخطی قوانین بقایی به عنوان یک روش بقایی (روش احجام محدود)، مطرح شد و در سالهای بعد، اعتبار زیادی در حوزه این روشها پیدا کرد.

چنانکه در فصل دوم بیان کردیم، فلسفه روشهای نوع گودونو، متشکل است از در نظر گرفتن متغیرهای اساساً ناپیوسته و حل قوانین بقا روی احجام یا سلولهای محاسباتی.

در حقیقت این روش، یک جریان یا پروفایل حل پیوسته را بصورت حالت خاصی از یک جریان ناپیوسته، در نظر میگیرد. مزیت عمده این رویکرد این است که، در روش عددی گودونو، پروفایلهای پیوسته و ناپیوسته، دقیقاً در یک روش و به صورت یکسان، مورد بحث قرار میگیرند، بدون نیاز به ملاحظات خاص انواع موجهای مختلف اعم از شوکها و ناپیوستگی های تماسی<sup>۱</sup> و...

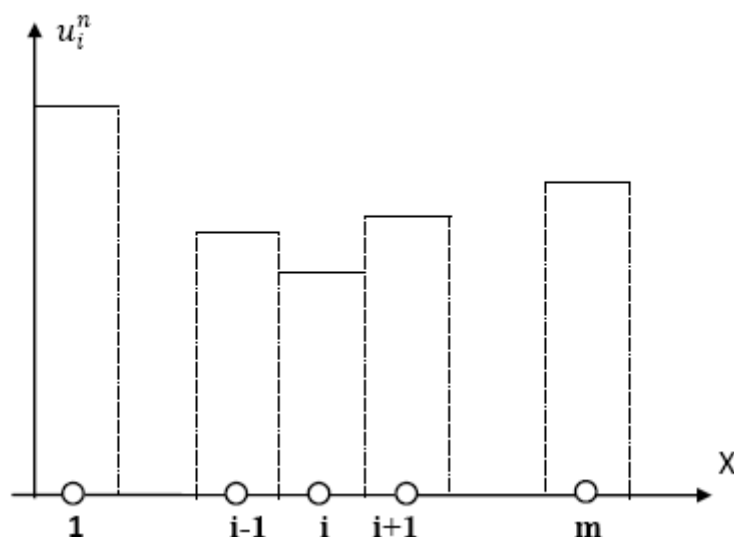
بر این اساس روش عددی گودونو، آنگاه که در فرم یک روش بقایی نوشته میشود، بعنوان یک روش احجام محدود پیشرفته بالادست صریح، طی یک پروسه دومرحله ای میتواند به حل سیستمهای خطی و غیرخطی هذلولوی، پردازد.

بدین منظور، چنانچه مش بندی دامنه مساله توسط سلولهای مجزا به صورت شکل ۳-۱ در نظر گرفته شود و با فرض رابطه (۳-۸) برای توزیع ثابت متغیر، درون هر سلول، میتوان مقدار متغیر را در گام زمانی  $n$ ، بصورت مجموعه ای از مقادیر ثابت  $(u_i^n, u_{i+1}^n, \dots)$  در نظر گرفت که توسط ناپیوستگی های موجود در مرزهای بین سلولی  $x_{i+1/2}$  از یکدیگر تفکیک شده اند.

---

1- Contact discontinuity

این ناپیوستگیها تفسیری از موجهای موجود در مساله میباشند که در محل مرزها، اثرات آنها توسط مسائل ریمان اعمال میگردند.



۳-۱ توزیع متغیر درون سلولها

بر این اساس چنانچه مجدداً معادله حاکم هذلولوی (۳-۱) را در حالت همگن در نظر بگیریم، فرم کلی روش عددی گودونو در قالب یک روش بقایای (احجام محدود) به صورت رابطه (۳-۱۱) بیان میشود که توابع فلاکس عددی در این رابطه، به صورت زیر تعریف میشوند:

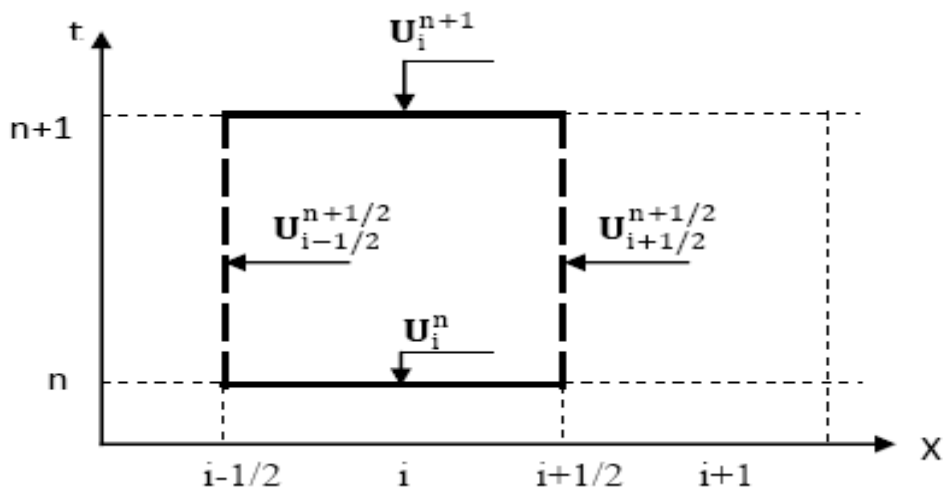
(۳-۱۳)

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(t) = \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}) \quad \text{for } t \in [t^n, t^{n+1}]$$

براساس توضیحات بخش قبلی و مطابق رابطه (۳-۹) میباشد. اکنون به جهت سهولت در درک گامهای کلی روش عددی گودونو، به ترتیب به توضیح مهمترین سرفصلهای این روش اعم از نحوه محاسبه فلاکسهای عددی، نحوه مش بندی، شرط لازم جهت پایداری، و ... میپردازیم.

### ۳-۳-۱- گسسته سازی

همچنانکه در توضیح اصول کلی روشهای احجام محدود بیان شد، نحوه مش بندی در روشهای بقایایی (احجام محدود)، برخلاف روش های تفاضل محدود به صورت تقسیم شبکه حل به یکسری سلولها یا احجام محدود درون حجم کنترل میباشد. مزیت عمده این کار امکان استفاده از سلولهای با عرض متفاوت در یک شبکه حل و یا همان مش بندی نامنظم میباشد. جزئیات و نمادهای مورد استفاده در مش بندی شبکه حل در بخش ۳-۲- بیان شده است و در این قسمت از پرداختن به آن پرهیز میشود. شکل ۳-۲، یک سلول محاسباتی را به همراه جزئیات آن به صورت شماتیک نشان میدهد.



۳-۲ گسسته سازی در روش احجام محدود (نمایی از یک سلول

محاسباتی و مرزهای اطراف آن)

### ۳-۳-۲- نحوه محاسبه فلاکس های عددی

در روش عددی گودونو بایستی به محاسبه فلاکسهای عددی که پیش از این معرفی شدند، در محل مرزهای میان سلولی اقدام گردد. برای این منظور، از تعریف و سپس حل مساله ریمان در محل مرزهای سلولها، استفاده میشود. مساله ریمان یک مساله مقدار اولیه میباشد که هدف آن یافتن متغیر در گام زمانی بعدی، با توجه به مقادیر معلوم گام زمانی فعلی میباشد. مزیت این مساله، امکان در نظر گرفتن شکاف یا ناپیوستگی موجود میان امواج حاضر در مساله اصلی و تاثیر شکاف این امواج در حل نهایی میباشد.

به عبارت دیگر، با تعریف مساله ریمان در محل هر کدام از مرزهای سلولها، شکاف و ناپیوستگی هایی که امواج در مساله ایجاد مینمایند، به صورت مستقیم از همان ابتدا در مساله دخالت داده میشوند و تاثیر مستقیم آنان را در مقادیر متغیر در گامهای بعدی، در نظر میگیریم.

بدین ترتیب، در هر گام زمانی  $n$  در محل هر مرز  $x_{i+1/2}$  یک مساله ریمان مطابق با مختصات موضعی ( با در نظر گرفتن مبداء مختصات در روی مرز) تعریف نموده و با نماد اختصاری  $RP(U_i^n, U_i^{n+1})$  نشان داده میشود. این یک مساله مقدار اولیه است که مقادیر اولیه یا معلوم آن،  $U_i^n, U_i^{n+1}$  میباشد. حاصل حل این مساله ریمان به دست آمدن مقدار متغیر  $U_{i+1/2}^{n+1/2}$  میباشد که این مقدار را میتوان در رابطه (۳-۱۳) قرار داده و شار عددی را محاسبه نمود. تعریف مساله ریمان و حل آن و محاسبه فلاکس عددی، فرآیندی میباشد که از ابتدای مساله تا گام زمانی نهایی و رسیدن به جوابهای اصلی، در هر گام یا پله زمانی تکرار میشود.

جزئیات و نحوه حل مسائل ریمانی به صورت مفصل در پیوست انتهایی پایان نامه، ذکر شده است.



### ۳-۳-۳- انتخاب اندازه گام زمانی و محدودیت پایداری

انتخاب سایز گام زمانی  $\Delta t$ ، در روش بقایای گودونو، مانند سایر روشهای عددی صریح، وابسته به محدوده عدد کورانت است که از آن بعنوان شرط پایداری یاد میشود. این عدد همچنین به نام ضریب پایداری  $C_{eff}$ ، توسط انجمن دینامیک سیالات محاسباتی نامگذاری شده است. این نامگذاری براساس نام ۳ محقق برجسته ای است که نقش اساسی این عدد را در فرآیند گسسته سازی اثبات نمودند.<sup>۱</sup>

بر این اساس چنانچه سیستم معادله هذلولوی مطابق فرمولبندی (۳-۱) را در نظر بگیریم و سرعت موج ماکزیمم این سیستم را در سرتاسر شبکه حل در گام زمانی  $\Delta t$  با کمیتی همچون  $\lambda_{max}^n$  نشان دهیم، میتوان عدد کورانت ماکزیمم را در گام  $\Delta t$  بصورت زیر بیان نمود:

$$(۳-۱۴)$$

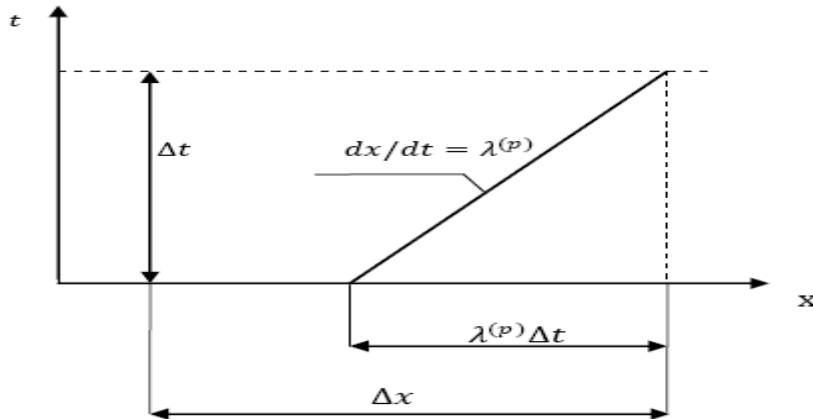
برای تحلیل پایداری روش عددی گودونو در رابطه (۳-۱۱)، با استفاده از روش ون-نیومن، به محدوده زیر برای عدد کورانت ماکزیمم میرسیم که اندازه گام زمانی  $\Delta t$  بایستی بر اساس این معیار تعیین گردد:

$$0 < Cr_{max} \leq 1 \quad (۳-۱۵)$$

معیار فوق، شرط لازم برای پایداری روش عددی گودونو میباشد. معمولاً به ازای  $Cr \approx 0.9-1$  دقیقترین جوابها به دست می آیند.

از نظر مفهومی نیز مطابق رابطه (۳-۱۴)، عدد کورانت را میتوان بصورت نسبت دو سرعت به یکدیگر تفسیر نمود که عبارت از سرعت مشخصه های معادله دیفرانسیل حاکم ( $\lambda$ ) و سرعت مش یا شبکه حل

$(\Delta x / \Delta t)$  میباشند. همچنین براساس شکل ۳-۳، محاسبه این عدد برای هر سلول، از دید فیزیکی سهم و بخشی از آن سلول را نشان میدهد که در عرض آن، یک موج مفروض با سرعت  $\lambda$  در یک گام زمانی انتشار می یابد.



۳-۳ تفسیر شماتیک شرط پایداری برای موج  $p$  ام

بدین ترتیب برای هر سلول شبکه حل، در هر گام زمانی میتوان اعداد کورانتی به تعداد مشخصه های مساله تعریف نمود. بدیهی است تمامی این اعداد بایستی از عدد کورانت ماکزیمم کوچکتر باشند. به عنوان مثال برای سلول  $i$  در گام زمانی  $\Delta t$ ، به ازای  $p$  امین موج مساله، که با سرعت  $\lambda^{(p)}$  منتشر میشود، عدد کورانت به صورت زیر تعریف میشود:

$$Cr_i^{(p)} = \frac{\lambda^{(p)} \Delta t}{\Delta x_i} \quad (۱۶-۳)$$

$$\max_{i,p} [Cr_i^{(p)}] \leq Cr_{\max} \quad (۱۷-۳)$$

### ۳-۳-۴- نحوه در نظر گرفتن ترم منبع در روش عددی گودونو

چنانچه، سیستم معادلات هذلولوی حاکم مساله، به فرم (۳-۱) باشد، چنانکه پیش از این ذکر شد،  $S(U)$  را ترم منبع معادله حاکم مینامند. ترم های منبع روی مقادیر نهایی جواب مساله تاثیر اندکی میگذارند و به نوعی بسته به مقادیری که در این ترمها موجود است، میتوانند باعث کاهش یا تعدیل مقادیر نهایی یا افزایش آنها گردند. روشهای مختلفی جهت بررسی و اعمال آثار این ترمها در جواب نهایی مساله وجود دارد. در روش گودونو، جهت بررسی سیستم معادلات دارای ترم منبع، از یک روش رایج و مرسوم استفاده میشود که تحت عنوان گامهای دو تکه، یا شکاف زمانی نامگذاری شده است و براساس نام محقق که این روش را ابداع نمود، به عنوان شکاف استرنج<sup>۱</sup> نیز شناخته میشود.

در این تکنیک، در هر گام زمانی، ابتدا با در نظر نگرفتن ترمهای منبع، بخش همگن معادله حاکم تحت بررسی قرار میگیرد و جوابهای بخش همگن مساله از رابطه (۳-۱۱) به دست می آیند. در ادامه براساس جوابهای به دست آمده از بخش همگن، اثرات ترم منبع مورد مطالعه قرار میگیرد و در واقع به حل باقیمانده معادله در همان گام زمانی به صورت رابطه زیر پرداخته میشود:

(۳-۱۸)

$U_i = \frac{\partial U}{\partial t} = S$  برای حل معادله فوق، جوابهای حاصل از فرمولاسیون (۳-۱۱) که به ازای بخش

همگن مساله به دست آمده، به عنوان مقادیر اولیه ای در نظر گرفته میشوند تا با جاگذاری آنها در معادله فوق، جوابهای نهایی در گام زمانی مذکور به دست آید. بنابراین اگر، مقادیر حاصل از بررسی

---

۱- Strang Splitting

بخش همگن معادله را به صورت  $U_i^{n+1,x}$  در نظر بگیریم، مقادیر نهایی  $U_i^{n+1}$  بصورت زیر به دست می آیند:

$$(۱۹) \quad (۳-)$$

در رابطه فوق منظور از  $S(U_i^{n+1,x})$ ، محاسبه ترم منبع به ازای مقادیر  $U_i^{n+1,x}$  میباشد. زیرا ترم منبع نیز همانند فلاکس عددی، میتواند تابعی از متغیر مساله باشد.

در اکثر مقالات و تحقیقات انجام گرفته، تکنیک شکاف استرنج را با استفاده از عملگرهای تعریف شده ای به صورت خلاصه زیر نشان میدهند:

$$(۲۰-۳)$$

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1,x} &= L_{\Delta t} U_i^n \\ U_i^{n+1} &= S_{\Delta t} U_i^{n+1,x} \end{aligned} \right\} \text{ در این فرم اختصاری، عملگر } L_{\Delta t} \text{ همان رابطه (۳-۱۱) میباشد که طی یک گام}$$

زمانی  $\Delta t$  با استفاده از مقادیر اولیه  $U_i^n$ ، ما را به مقادیر  $U_i^{n+1,x}$  میرساند. در ادامه عملگر  $S_{\Delta t}$ ، منطبق بر رابطه (۳-۱۹) است که با استفاده از مقادیر  $U_i^{n+1,x}$ ، مقادیر نهایی مساله را در گام زمانی  $\Delta t$ ، به دست میدهد. این روش دو مرحله ای در تمامی گامهای زمانی تا انتهای مساله ادامه می یابد.

$$U^{n+1} = S_{\Delta t} L_{\Delta t} U^n \quad (۲۱-۳)$$

### ۳-۴- نحوه به دست آمدن فرمولاسیون بقایی گودونو

در بخشهای قبلی این فصل، پس از معرفی کلیات و صورت کلی فرمولاسیون احجام محدود برای سیستم معادلات هذلولوی مطابق (۳-۱)، به بیان جزئیات روش عددی گودونو پرداخته شد. در ادامه قصد داریم تا به اعمال فرمولاسیون عددی (۳-۱۱) به یک معادله هذلولوی اسکالر پرداخته و از این

طریق، به فرآیندی اشاره کنیم که گودونو برای بدست آوردن رابطه (۳-۱۱) طی نمود. بدیهی است کاربرد فرمولاسیون (۳-۱۱) به یک معادله اسکالر، موجب درک بهتر جزئیات و گامهای روش احجام محدود گودونو میشود. از سوی دیگر در این قسمت با فرم دیگر موسوم به روش عددی گودونو آشنا خواهیم شد که این فرم، نیز توسط وی ابداع شده است ولیکن کاربرد عملی ندارد و فقط از نظر درک مفاهیم کلی دارای اهمیت است. در انتهای این قسمت، به صورت خلاصه گامهای تشکیل دهنده الگوریتم روش عددی گودونو را به صورت طبقه بندی شده ذکر خواهیم کرد.

اگر حالت اسکالر سیستم معادلات هذلولوی (۳-۱) که بجای  $m$  معادله شامل تنها یک معادله ساده میباشد، در حالت همگن در نظر گرفته شود، این معادله به صورت زیر نوشته میشود:

$$(۳-۲۲)$$

$u_t + f(u)_x = 0$  ,  $f(u) = au$  گودونو جهت به دست آوردن مقادیر متغیر مساله در گام زمانی  $n+1$  یعنی  $u_i^{n+1}$  از تعریف دو مساله ریمان  $RP(u_i^n, u_{i+1}^n)$  و  $RP(u_{i-1}^n, u_i^n)$  برای این معادله استفاده کرد. وی پس از حل این دو مساله ریمان، انتگرال هر کدام از این حل ها را در نیمی از محدوده سلول  $i$  گرفته و در انتها میانگین این مقادیر انتگرالی را به مقدار جواب نهایی مساله یا  $u_i^{n+1}$  نسبت داد. به عبارت دیگر کاری که گودونو انجام داد، یک میانگین گیری انتگرالی از حل ترکیبی دو مساله ریمان در محدوده سلول  $i$  بود.

در اینجا برای درک بهتر مطلب فوق، با فرض سرعت موج مثبت ( $a > 0$ ) مراحل فوق را بررسی میکنیم. حل دو مساله ریمان گفته شده در بالا به صورت زیر میباشد:

$$\text{حل مساله ریمان } RP(u_{i-1}^n, u_i^n):$$

$$u_{i-1/2}(x/t) = \begin{cases} u_{i-1}^n & \text{if } x/t \leq a \\ u_i^n & \text{if } x/t > a \end{cases} \quad (23-3)$$

حل مساله ریمان  $RP(u_i^n, u_{i+1}^n)$ :

$$u_{i+1/2}(x/t) = \begin{cases} u_i^n & \text{if } x/t \leq a \\ u_{i+1}^n & \text{if } x/t > a \end{cases} \quad (24-3)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_0^{0.5\Delta x} u_{i-1/2}(x/t) dx + \int_{-0.5\Delta x}^0 u_{i+1/2}(x/t) dx \right] \quad (25-3)$$

یادآوری میشود، یا توجه به اینکه حل مسائل ریمان به صورت جداگانه در انتهای فصول در قالب یک

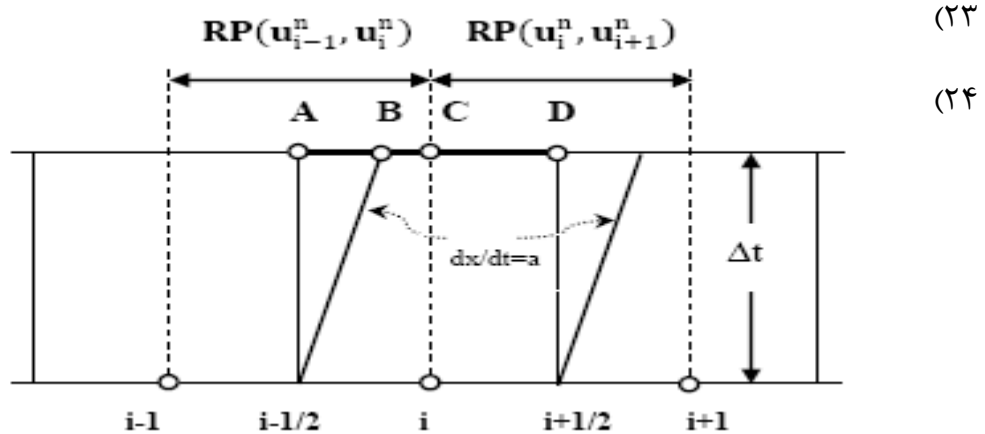
پیوست مجزا به تفصیل بیان شده است در این قسمت از توضیح نحوه به دست آمدن حل های (۳-)

و (۳-)

پرهیز

میگردد.

تصویر



شماره تعریف مسائل ریمانی بالا به ازای سرعت موج مثبت ( $a > 0$ ) برای معادله مدل اسکالر (۳-)

(۲۲) در شکل ۳-۴، ترسیم شده است.

۳-۴ مسائل ریمانی در حالت سرعت موج مثبت برای معادله اسکالر (۳-۲۲)

تصویر بالا مربوط به یک گام زمانی است و در هر گام این فرآیند برای تمام مرزهای سلولهای تکرار میشود. چنانکه قبلاً اشاره شد، در تصویر ۳-۴ نیز مشاهده میشود که با توجه به انتخاب سیستم مختصات موضعی برای مسائل ریمانی، مرزهای بین سلولی همواره مبدا مختصات موضعی قرار گرفته و براین اساس محدوده انتگرالگیری هر کدام از مسائل ریمانی به صورت رابطه (۳-۲۵) انتخاب میشود.

گودونو برای پایداری روش خود، همچنین شرط پایداری ناشی از عدد کورانت را نیز مطابق آنچه پیش از این بحث کردیم، به کار بست.

فرمولاسیون (۳-۲۵) به عنوان فرم نخست روش بقایای گودونو نامگذاری شده است، لیکن به علت شامل بودن ترمهای انتگرالی قابلیت استفاده در مقاصد عملی را دارا نمیباشد. بنابراین فرم دوم روش بقایای گودونو که همان رابطه (۳-۱۱) میباشد، به گونه ای مناسبتر و کاربردی تر پدید آمد. برای رسیدن به این فرم، گودونو سه گام زیر را طی کرد:

۱- ابتدا  $\tilde{u}(x, \Delta t)$  بعنوان ترکیب حل مسائل ریمان  $RP(u_i^n, u_{i+1}^n)$  و  $RP(u_{i-1}^n, u_i^n)$  در نظر

گرفته شده، و مطابق این تعریف فرمولاسیون (۳-۲۵) به صورت زیر بازنویسی میشود:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, \Delta t) dx \quad (۳-۲۶)$$

۲- با توجه به اینکه  $\tilde{u}(x, \Delta t)$  حل دقیقی برای معادله دیفرانسیلی (۳-۲۲) میباشد، میتوان

آن را در فرم انتگرالی این معادله در محدوده حجم کنترل  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [0, \Delta t]$  قرار

داد:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, \Delta t) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, 0) dx + \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (۳-۲۷)$$

۳- در انتها با توجه به تعریف متغیر به صورت میانگین ثابت از مقادیر سلولی، مطابق رابطه

(۳-۸) و جاگذاری این رابطه در فرم انتگرالی (۳-۲۷)، و تقسیم کردن طرفین بر  $\Delta x$

فرم دوم روش عددی گودونو به دست می آید که در حالت اسکالر به صورت زیر است:

(۳-۲۸)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i-1/2} - f_{i+1/2}]$$

فیزیکی مساله  $(f(u))$  میباشد که در فرم انتگرالی (۳-۲۷) این انتگرالها دیده میشوند.

بدین ترتیب، فرمولاسیون بقایی گودونو برای یک معادله اسکالر هذلولوی (۳-۲۲) به صورت رابطه (۳-۲۸)

نوشته میشود.

با توجه به همگن بودن معادله مدل، در اینجا با ترم منبع روبرو نبودیم و طبیعتاً در موارد وجود ترم

منبع در معادله اسکالر فوق، اثرات این ترم در گامی جداگانه مطابق با توضیحات بخش ۳-۳-۴- لحاظ

میشوند.

در حالتی که با یک سیستم معادلات هذلولوی، همچون رابطه (۳-۱) روبرو باشیم، نیز روابط فوق به

صورت مشابه کاربرد داشته و از طریق فرم انتگرالی فوق به رابطه (۳-۱۱) میرسیم. به عبارت بهتر،



تنها تغییری که در روابط انتگرالی فوق رخ میدهد، استفاده از کمیتهای برداری به جای اسکالر میباشد.

### ۳-۵- فرم تفاضل محدود روش عددی گودونو

مزیتها و نواقص استفاده از روشهای تفاضل محدود و روشهای احجام محدود را در مقایسه با یکدیگر در فصل دوم بیان نمودیم. چنانکه در آن فصل اشاره کردیم، برخی از روشهای تفاضل محدود، با اندکی تغییرات دارای این قابلیت میباشند که در قالب یک روش احجام محدود ارائه گردند و صورتی متناظر با فرم تفاضل محدود خود، را در میان روشهای احجام محدود پیدا کنند.

روش عددی گودونو نیز در همین قالب جای میگیرد؛ این روش متناظر با روش تفاضل محدود بالادست مرتبه اول<sup>۱</sup> میباشد. در این روش تفاضل محدود، برای تقریب زدن مشتقات مکانی با توجه به علامت مثبت یا منفی سرعت موج، به ترتیب از تقریب تفاضل پسرو و پیشروی مکانی استفاده میکنند.

برای اثبات این مطلب، یعنی انطباق فرم احجام محدود روش گودونو بر فرم تفاضل محدود بالادست مرتبه اول، از اعمال رابطه (۳-۲۸) برای حل معادله مدل (۳-۲۲)، استفاده میکنیم. مطابق این رابطه، به ازای سرعت موج مثبت ( $a > 0$ )، پس از حل مسائل ریمانی و به دست آوردن فلاکسهای عددی، فرمول بقایی گودونو مقدار متغیر را در گام زمانی  $n+1$  به صورت زیر به دست میدهد:

(۲۹)

(۳-)

$$\begin{aligned} f_{i-1/2} &= au_{i-1}^n & f_{i+1/2} &= au_i^n \\ \text{رابطه بدست آمده عیناً مشابه رابطه تفاضل محدود بالادست مرتبه اول} & & u_i^{n+1} &= u_i^n + c[u_{i-1}^n - u_i^n] \end{aligned}$$

است که به ازای سرعت موج مثبت به دست می آید.

### ۳-۶- گامهای متشکل الگوریتم گودونو

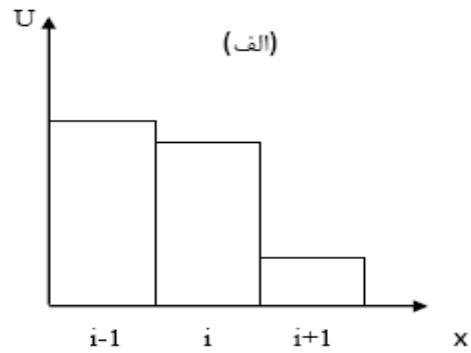
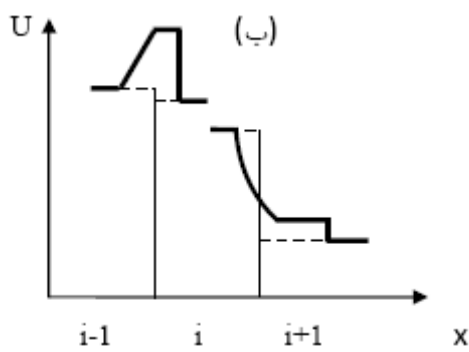
با توجه به گستره بالای استفاده از روش عددی گودونو، در حوزه های مختلف، به جهت سهولت در مدل سازی و بیان یک راهنمای کلی از سرفصلهای روش گودونو، به نحوی که قابل کاربرد در مسائل گوناگون باشد، در انتهای مطالب این فصل، الگوریتم روش عددی گودونو، به صورت اجمالی بیان میشود:

به عنوان یک معیار کلی، حل سیستم قوانین یا معادلات دیفرانسیل پاره ای بقای هدلولوی<sup>۱</sup>، توسط روش عددی گودونو، دارای پنج گام اصلی به شرح زیر میباشد:

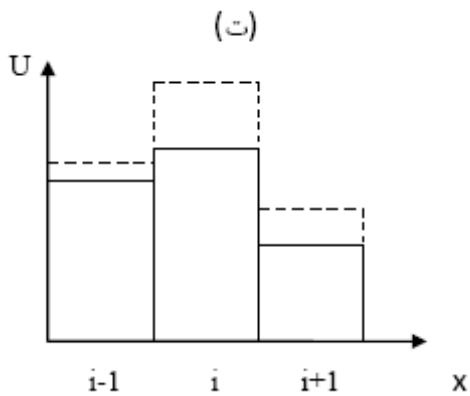
- ۱- گسسته سازی مکان و زمان در قالب سلولهای محاسباتی یا احجام محدود، در محدوده حجم کنترل که همان دامنه یا شبکه تعریف شده برای مساله میباشد. بدیهی است هدف یافتن حل  $U$  یا همان متغیر اصلی جریان، روی هر سلول محاسباتی در انتهای زمان مورد نظر است.
- ۲- تعریف مساله ریمان در مرزهای میان سلولی. به جهت این کار از تعریف مقدار میانگین متغیر اصلی مساله روی یک سلول و سلولهای مجاور آن استفاده میشود. (رابطه (۳-۸)).
- ۳- حل مسائل ریمانی و محاسبه فلاکس های مربوطه؛ مقدار فلاکس یا شار  $F$  در مرز میان سلولی ( بین دو سلول محاسباتی) محاسبه میگردد. (پیوست انتهایی پایان نامه).

۴- محاسبه مقدار متغیر اصلی  $U$  در گام زمانی مجهول از طریق برقراری موازنه میان فلاکس هایی که در گام سوم در مرزهای چپ و راست هر سلول، محاسبه شدند و با کمک مقادیر متغیر در گام زمانی قبلی که معلوم میباشند. (۳-۱۱).

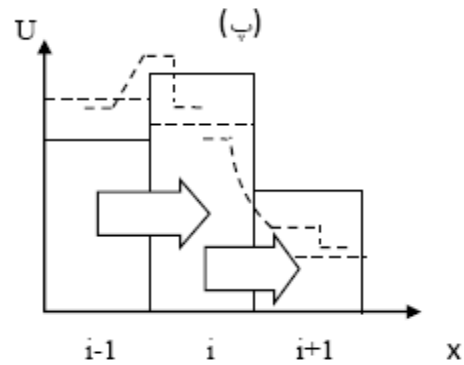
۵- ترکیب اثرات ترم های منبع  $S$ ، در صورت وجود در صورت مساله و به دست آوردن مقادیر



نهایی متغیر (رابطه ۳-۱۹).



این  
مراحل  
به  
صورت  
شماتی  
ک در



تصویر ۳-۵ نمایان میباشند.

۳-۵ الگوریتم گودونو: (الف) گسسته سازی قلمرو مساله (ب)

ریمان در محل مرزها (پ) موازنه بین فلاکسها و استفاده از فرمو

(ت) در نظر گرفتن اثرات ترم منبع و اصلاح مقادیر جو

فصل چهارم

حل مسائل عددی و مقایسه

نتایج

## ۴-۱- طرح مساله

در این فصل، به حل دو مساله طرح شده با روش عددی گودونو پرداخته میشود. ابتدا پدیده ضربه قوچ را به صورت ساده در نظر گرفته و معادلات آن را که شامل دو معادله پیوستگی و مومنتم میباشند، برحسب متغیرهای دبی و هد فشاری یا ارتفاع پیرومتری، مورد توجه قرار داده و سپس با روش عددی گودونو حل می کنیم.

در قسمت دوم، پدیده اندرکنش سیال- سازه موضوع بحث میباشد و چنانکه در فصل اول اشاره شد، مساله مرجع اول آزمایشگاه delft مد نظر قرار گرفته و نسبت به حل این مساله با روش عددی گودونو اقدام میشود.

## ۴-۲- شرح مساله و معرفی معادلات حاکم

### ۴-۲-۱- بیان معادلات حاکم

ابتدا به معرفی معادلات حاکم بر پدیده ضربه قوچ برحسب متغیرهای دبی و هد فشاری می پردازیم. با توجه به اینکه نحوه به دست آوردن این معادلات در منابع دیگر از جمله تالیفات استریتر [۱] و حتی پایان نامه های آقایان کرامت [۴] و مجد [۳] به وضوح بیان و تکرار شده است در این قسمت فقط به ذکر معادلات پرداخته و از بیان اثبات آن اجتناب میشود.

معادلات ضربه قوچ شامل دو معادله پیوستگی و مومنتم میباشند که به کمک اصل انتگرال گیری از حجم کنترل برای یک جریان یک بعدی حاصل میشوند. این حجم کنترل، میتواند جزئی از سیال در

فاصله کوچک  $\delta z$  بین دو صفحه موازی باشد که جریان از بین آندو میگذرد، و بصورت عمود بر محور لوله در نظر گرفته میشود.

شکل کلی این معادلات پس از انتگرالگیری و جایگزینی عبارات انتگرالی با جملات ساده شده، به صورت زیر در می آید:

(۱-۴)

$$(۲-۴) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \sin \theta + \frac{fV|V|}{4R} = 0$$

علت اینکه مقدار  $V$  معمولاً در مقایسه با سرعت موج یا  $a$  عددی کوچک میباشد، هر جا در این معادلات جملات دیفرانسیل مکانی باشد، از جملات دارای ضریب  $V$  در مقایسه با جملات دارای ضریب  $a$  صرفنظر میشود. این به آن معنا است که چون تغییرات مکانی متغیرهای مساله نسبت به تغییرات زمانی آنها ناچیز هستند، از تغییرات مکانی یک متغیر در برابر تغییرات زمانی آن صرفنظر میشود. از طرف دیگر برای رسیدن به فرم تقریبی معادلات ضربه قوچ در حالت کلاسیک میتوان عبارت  $g \cdot \sin \theta$  را از معادله (۲-۴) حذف نمود، اما بدیهی است که هد یا فشار هر گره مستقل از رقم گره نمیباشد و همواره به آن بستگی دارد (به عبارت دیگر به  $\theta$  وابسته است).

آخرین نکته این است که معادلات (۱-۴) و (۲-۴) بر حسب متغیرهای فشار و سرعت نوشته شده اند. عموماً در محاسبات از ارتفاع پیزومتری استفاده میشود؛ به همین دلیل برای تبدیل متغیر فشار به ارتفاع پیزومتری (هد) با توجه به دانستن اینکه:

$$P = \rho g(H - Z) \quad (۳-۴)$$

(۴-۴)

$$\frac{dP}{dt} = \rho g \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right), \quad \frac{dP}{dx} = \rho g \left( \frac{dH}{dx} - \frac{dZ}{dx} \right)$$

تغییرات چگالی در مقایسه با تغییرات ارتفاع پیزومتری و تراز لوله صرف نظر شده است.

اکنون چنانچه رابطه (۴-۴) را در معادلات (۴-۱) و (۴-۲) قرار دهیم، و از سوی دیگر متغیر دبی را با متغیر سرعت جریان جایگزین کنیم، معادلات ضربه قوچ کلاسیک را بر حسب متغیرهای دبی و ارتفاع پیزومتری به صورت زیر میتوان به دست آورد:

معادله پیوستگی:

(۴-۵)

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA_f} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

معادله اندازه حرکت:

(۴-۶)

$$\frac{1}{A_f} \frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{4R} = 0$$

مقدار عبارت  $\frac{fV|V|}{4R}$  برابر با صفر است. در معادلات بالا، پارامترهای  $A_f$  و  $a$  به ترتیب، نمایانگر سطح

مقطع جریان و سرعت موج میباشد که سرعت موج با رابطه زیر به دست می آید:

(۴-۷)

$$a^2 = \frac{K/\rho}{1 + \frac{KD}{E \times e}}$$



$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (۸-۴)$$

$$(۹-۴)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_f = 0, (\text{if no friction}) \end{bmatrix}$$

پس از معرفی معادلات حاکم بر پدیده

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{gA_f} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{gA_f} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ضربه قوچ، نوبت به معرفی معادلات حاکم بر مساله اندرکنش سیال - سازه مورد بحث میرسد.

با توجه به اینکه مدلی که در این پایان نامه بررسی میشود، یک مدل چهار معادله دیفرانسیلی می باشد، مطابق با مساله مرجع اول آزمایشگاه delft این مدل شامل چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که از نحوه اثبات آنها در این قسمت صرفنظر شده و برای توضیحات در این مورد مراجعه به منابعی همچون پایان نامه دکترکرامت [۶] و مقاله تایلینگ [۴۳] مفید است. براساس این منابع، معادلات حاکم بر این مساله، شامل دو معادله پیوستگی و مومنتم سیال و یک معادله درجه دوم ارتعاش محوری سازه است که خود به دو معادله مرتبه اول تبدیل میشود. معادلات پیوستگی و مومنتم سیال همانند معادلاتی هستند که در قسمت قبل برای ضربه قوچ بیان گردید. با این تفاوت که معادله پیوستگی، شامل یک عبارت اضافه میباشد که سیال را با سازه لوله کوپله میکند و این جمله، کوپله پواسن  $(-2v \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z})^2$  نامیده میشود.

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} - 2v \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (۱۰-۴)$$

## 2- Poisson coupling term

$$(۱۱) \quad (۴-)$$

براین اساس، معادله (۴-۱۰) معادله پیوستگی و معادله (۴-۱۱) معادله مومنتم  $\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial z} = 0$  حاکم بر مساله میباشد. خاطر نشان میسازد، به علت صرفنظر از اثرات اصطکاکی در این مساله، معادله مومنتم فاقد ترم اصطکاک میباشد.

معادلات تفکیک شده مرتبه اول ارتعاش محوری در حالت تقریبی (با صرفنظر کردن از جمله اصطکاکی) به صورت زیر هستند [۴۳] و [۶]:

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (۴-۱۲)$$

$$\rho_t g \frac{vR}{Ee} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t c_t^2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (۴-۱۳)$$

علاوه بر سرعت و هد فشاری که مجهولات هیدرولیکی مساله را تشکیل میدهند، مدل بررسی شده در این پایان نامه در بحث FSI، شامل دو مجهول سازه ای یعنی سرعت محوری  $\dot{u}_z$  و تنش محوری لوله  $\sigma_z$ ، نیز میباشد. همچنین سایر کمیات و پارامترهای موجود در این معادلات عبارتند از: جرم مخصوص مصالح لوله ( $\rho_t$ )، ضریب پواسن ( $\nu$ )، قطر داخلی لوله ( $D$ )، دانسیته سیال ( $\rho_f$ )، ضخامت دیواره لوله ( $e$ )، سرعت موج فشاری ( $c_f$ ) و سرعت موج برشی ( $c_t$ )، که دو پارامتر آخر توسط روابط زیر محاسبه میشوند:

$$c_t^2 = \frac{E}{\rho_t} \quad (۴-۱۴)$$

$$(۱۵) \quad (۴-)$$

به صورت رابطه (۴-۸) و با استفاده از ماتریسهای زیر بیان میشود:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} V \\ H \\ \dot{u}_z \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{c_f^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_f g \frac{vR}{Ee} & 0 & \frac{-1}{\rho_t c_t^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۱۶)$$

#### ۴-۲-۲- بیان شرایط مرزی

در مورد مساله نخست که مربوط به بررسی و حل معادلات ضربه قوچ است، بیان شرایط مرزی به صورت زیر میباشد:

در سمت چپ لوله، مخزن قرار دارد و هد مخزن برابر با  $H_0$  میباشد. در سمت راست لوله، شیر قرار دارد و با توجه به بسته شدن ناگهانی آن در زمان ایجاد ضربه قوچ، و با صرفنظر از تغییرات تدریجی بسته شدن شیر، سرعت و بالتبع آن مقدار دبی در مرز راست برابر با صفر در نظر گرفته میشود.

برای مساله دوم در مورد پدیده اندرکنش سیال-سازه، در محل شیر از روابط زیر جهت بیان شرایط مرزی استفاده میشود [۴۴].

$$V_M = \dot{u}_{zM} \quad (۴-۱۷)$$

$$\sigma_{zM} A_t = \rho_f g A_f H_M \quad (۴-۱۸)$$

خاطر نشان میسازد، رابطه (۴-۱۷) با صرفنظر از اثر بازشدگی شیر بیان شده که از فرضیات مساله بوده است. همچنین در روابط بالا اندیس  $m$  نشاندهنده مجهولات مساله در محل شیر یا مرز سمت راست است.

همچنین در محل مخزن یا مرز سمت چپ نیز هد برابر با مقدار  $H_0$  اختیار میشود و مقدار سرعت محوری لوله نیز برابر با صفر میباشد ( $\dot{u}_z = 0$ ).

### ۴-۳- بررسی و حل مثالهای عددی

#### ۴-۳-۱- مساله مدل ضربه قوچ

مشخصات و مقادیر عددی پارامترهای مثال حل شده در این قسمت مطابق جدول ۴-۱ میباشد. مقادیر هد و سرعت جریان پایدار مربوط به شرایط اولیه مساله میباشد.

همچنین با توجه به صرفنظر از اثرات اصطکاک در این مثال، معادلات در حالت همگن مورد بررسی قرار گرفته اند و با ترم منبع روبرو نیستیم.

جهت حل معادلات (۴-۵) و (۴-۶) با روش عددی گودونو، بهتر است تا فرم برداری (۴-۸) را به صورت زیر بنویسیم تا ماتریس ضرایب سیستم معادلات ( $A$ )، را بتوان استخراج نمود.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (۴-۱۹)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{(A_f \cdot g)} \\ A_f \cdot g & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۲۰)$$

جدول ۴-۱ مشخصات مثال عددی ضربه قوچ

مقادیر	مشخصات مساله
10 (m)	هد مخزن ( $H_0$ )
0.4 (m/s)	سرعت جریان پایدار ( $V_0$ )
1195.2 (m/s)	سرعت موج (a)
210 (Gpa)	مدول یانگ (E)
200 (mm)	قطر داخلی لوله (D)

فرم برداری معادلات ضربه قوچ به صورت رابطه (۴-۱۹)، نمایش یک سیستم معادلات  $2 \times 2$  هذلولوی در حالت همگن میباشد و برای حل آن از الگوریتم گودونو مندرج در بند ۳-۶ فصل سوم، استفاده میشود.

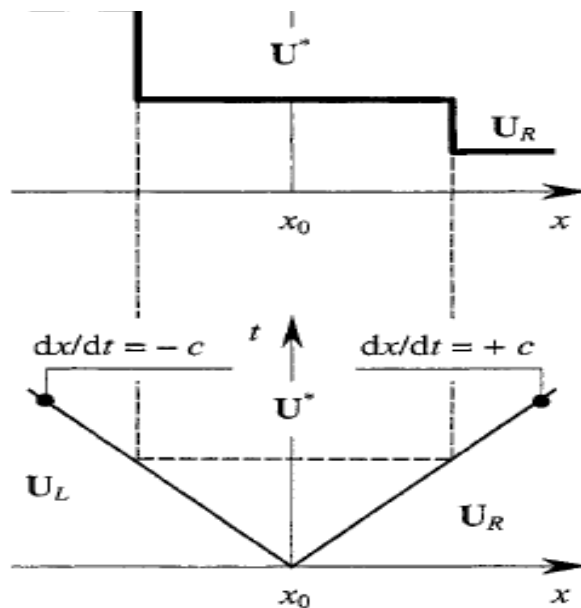
اولین گام، انتخاب مش مساله با توجه به اعمال شرط پایداری است. ذکر این نکته ضروری است که براساس مطالعات صورت گرفته و با نظر به صریح بودن روش عددی گودونو، معمولاً به ازای عدد کورانت برابر با  $0.9$  جوابهای پایداری حاصل میشود [۱۶]. بر اساس این محدودیت (رابطه (۳-۱۴))، ابعاد مش در راستای بعد مکانی و زمانی انتخاب میشوند. در این رابطه  $\lambda_{max}^n$  همان مقدار سرعت موج میباشد که در جدول مشاهده میشود.

گام بعدی مربوط به تعریف و حل مساله ریمان است. با توجه به توضیحات مندرج در بند الف-۳-۲،

در پیوست انتهایی، از آنجا که ماتریس ضرایب مساله حاوی مقادیر ثابتی میباشد، امواج موجود در حل مساله نیز از نوع ناپیوستگی تماسی<sup>۱</sup> میباشد. دلیل این امر، ثابت بودن مقادیر ویژه ماتریس ضرایب است که سرعت امواج موجود در مساله هستند و نوع این امواج را تعیین میکنند. پس از بدست آوردن مقادیر ویژه و بردار ویژه های این ماتریس، نوبت تعریف و حل مسائل ریمان فرا میرسد. چنانکه پیش از این اشاره شد، این مساله شرایط اولیه مساله را با توجه به ناپیوستگی حاصله از امواج موجود در مساله در هر گام زمانی در نظر میگیرد. ساختار ریمانی برای مساله مورد نظر به شرح زیر است:

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x \leq x_0 - at \\ \mathbf{U}^* & x_0 - at < x \leq x_0 + at \\ \mathbf{U}_R & x > x_0 + at \end{cases} \quad (۲۱-۴)$$

۱-۴ ساختار مساله ریمانی در نقطه  $x_0$



به معنای یافتن ناحیه میانی دو با توجه به نوع موج ناپیوستگی تماسی رابطه ثابتهای (الف-۲۵)، به شرح

حل مساله ریمان مقایر متغیر در موج (\*), میباشد و که از نوع است، میتوان از عمومی ریمان زیر استفاده نمود.

$$\frac{dU_1}{k_1^{(p)}} = \dots = \frac{dU_m}{k_m^{(p)}} = Cst \quad \text{across} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda^{(p)} \quad (\text{الف} - ۲۵)$$

پس از محاسبه بردارهای ویژه، و قرار دادن آنها در رابطه (الف - ۲۵)، برای هر یک از دو موج مساله این رابطه نوشته و ساده میشود:

(۲۲) -۴)

(۲۳) 
$$-۴) \mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} -a / (A_f \cdot g) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} a / (A_f \cdot g) \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس از ساده سازی، روابط بالا، داریم:

$$\begin{cases} \frac{dH}{-a / (A_f \cdot g)} = \frac{dQ}{1} & \text{across} \quad \frac{dx}{dt} = -a \\ \frac{dH}{a / (A_f \cdot g)} = \frac{dQ}{1} & \text{across} \quad \frac{dx}{dt} = a \end{cases}$$

(۲۴) -۴)

در حقیقت مفهوم تساویهای رابطه (۴-۲۳)،

$$\begin{cases} d(H + (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q) = 0 & \text{across} \quad \frac{dx}{dt} = -a \\ d(H - (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q) = 0 & \text{across} \quad \frac{dx}{dt} = a \end{cases}$$

ثبات کمیت  $(H + (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q)$  در عرض موج سمت چپ و ثبات کمیت  $(H - (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q)$  در عرض موج سمت راست میباشد.

براساس تساویهای فوق، دو رابطه جبری را برای متغیرهای ناحیه میانی (\*) میتوان نوشت:

(۲۵) -۴)

باجل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق، مقادیر

$$\begin{cases} H_* + (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q_* = H_L + (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q_L \\ H_* - (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q_* = H_R - (a / (A_f \cdot g)) \cdot Q_R \end{cases}$$

دبی و ارتفاع پیزومتریک در ناحیه میانی یا همان حل مساله ریمان، حاصل میشود:

(۲۶ -۴)

در

$$\begin{cases} H_* = 0.5(H_L + H_R + (Q_L - Q_R) / (a / (A_f \cdot g))) \\ Q_* = 0.5((H_L - H_R) \cdot (a / (A_f \cdot g)) + (Q_L + Q_R)) \end{cases}$$

حقیقت مربوط به ناحیه بروز ناپیوستگی (ناحیه\*) ناشی از امواج، میباشد و مطابق فلسفه روش



گودونو این مقادیر اختصاص به مرزهای سلولهای مش دارند؛ چرا که در تعریف مساله ریمان، نقطه  $x_0$ ، نظیر مرز سلول میباشد و ایندو بر هم منطبق در نظر گرفته میشوند.

با استخراج تابع فلاکس عددی از فرم نمایش برداری معادلات حاکم بر مساله یعنی رابطه (۴-۱۹) مقادیر متغیرهای بدست آمده از رابطه (۴-۲۶) را در این تابع قرار داده و مقدار فلاکس عددی در مرز هر سلول بدست می آید.

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A} * \mathbf{U} \quad , \quad \mathbf{F}_{i+1/2}(t) = \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}) \quad (۴-۲۷)$$

$$\mathbf{H}_* = \mathbf{H}_{i+0.5}^{n+0.5} \quad , \quad \mathbf{Q}_* = \mathbf{Q}_{i+0.5}^{n+0.5} \rightarrow \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_*) \quad (۴-۲۸)$$

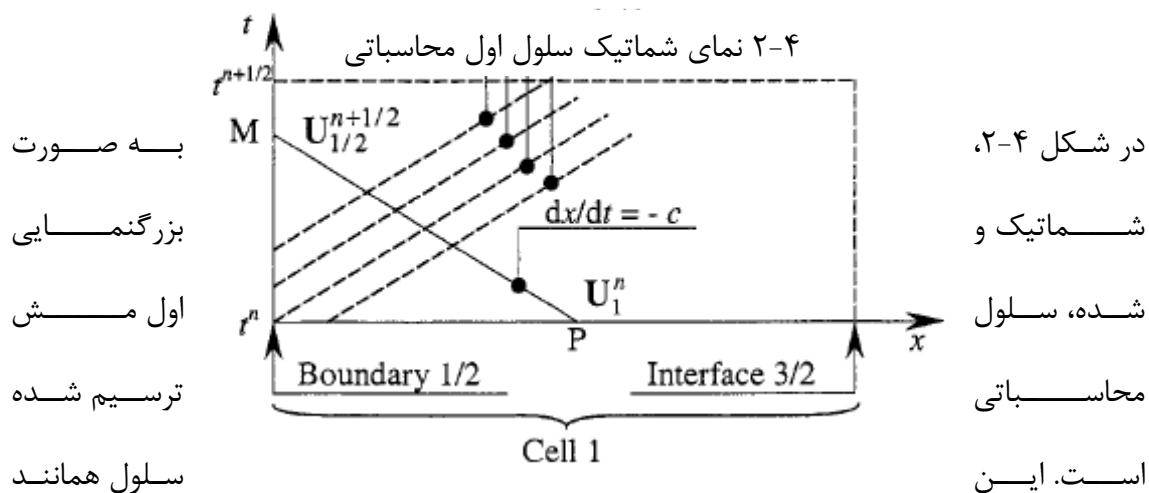
برای هرکدام از مرزهای سلولی درون شبکه مساله ریمانی به شکل فوق تعریف و حل میگردد و سپس مقدار فلاکس عددی در آن مرز محاسبه میشود. پس از محاسبه فلاکسهای عددی در تمامی مرزها، با برقراری رابطه بقای گودونو، مطابق فرمولاسیون (۳-۱۱)، در تمامی نقاط درون شبکه مش، مساله حل شده و یک گام زمانی به پیش میرود.

در انتها ذکر این نکته خالی از فایده نیست که هنگام جاگذاری عبارات رابطه (۴-۲۶) در رابطه (۴-۲۸) جهت تعیین فلاکس عددی، مقادیر متغیرهای دارای پسوند  $L$  و  $R$ ، به ترتیب با مقادیر نظیر در سلولهای  $i$  و  $i+1$  جایگزین میشوند. این مقادیر سلولی نیز از محاسبات گام زمانی قبلی معلوم میباشند.

تنها مساله مبهم باقیمانده، محاسبه فلاکس عددی در دو مرز اول و آخر میباشد. با توجه به اینکه محاسبات فوق مربوط به تمام مرزهای سلولی درون مش بود، محاسبات مشابه در مرزهای سلولی اول و آخر، با اندکی تغییر و استفاده از تعریف شرایط مرزی مساله صورت می پذیرد. این مرزها شامل مرز

چپ اولین سلول مش و مرز راست آخرین سلول مش میباشند.

در این قسمت نحوه محاسبه مقدار فلاکس عددی در مرز سمت چپ اولین سلول محاسباتی شرح داده میشود.



سایر سلولها، دو مرز چپ و راست دارد. فلاکس عددی در مرز راست، که یک مرز داخلی محسوب میشود، از طریق محاسباتی که در صفحات قبل ذکر شد، با تعریف و حل مساله ریمان، محاسبه شده و در رابطه فرمولاسیون بقایی گودونو مورد استفاده قرار میگیرد. برای محاسبه فلاکس عددی در مرز سمت چپ این سلول، با توجه به معلوم بودن هد مخزن از شرایط مرزی، باید مقدار دبی مخزن را محاسبه نمود.

چنانکه در تصویر فوق قابل مشاهده است، استفاده از رابطه ثابتهای عمومی ریمان در عرض موج

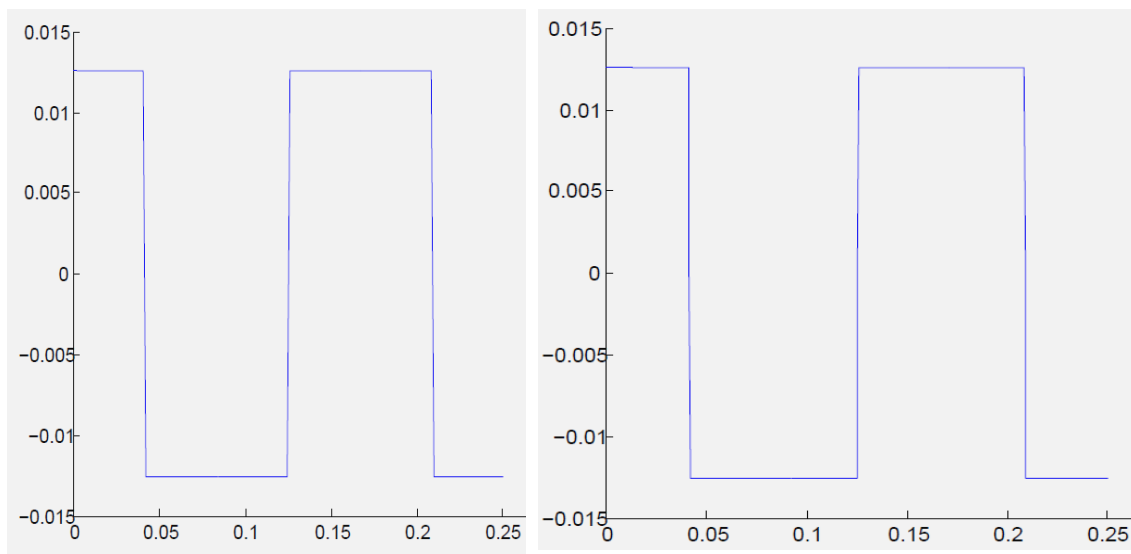
راست  $(dx/dt=a)$ ، میتواند مقدار متغیر مجهول مرزی را (دبی مخزن) معلوم سازد. بر این اساس با در نظر گرفتن دو نقطه فرضی همچون  $P$  و  $M$  در دو سوی موج فوق، و ثابت بودن کمیت  $(H-(a/(A_f \times g)).Q)$  در عرض موج راست (رابطه (۴-۲۹))، رابطه ثابت عمومی ریمان در عرض این موج به شکل زیر بیان میشود:

$$H_M - (a / (A_f \times g)).Q_M = H_P - (a / (A_f \times g)).Q_P \quad (۴ - ۲۹)$$

در رابطه فوق، مقادیر دارای اندیس  $P$ ، چنانکه در تصویر نیز رویت میشود، مربوط به مقادیر متغیرهای سلول اول میباشند که از گام زمانی قبلی معلومند. همچنین مقدار هد مخزن یا  $H_M$  نیز از شرایط مرزی مساله معلوم است ( $H_M = H_0$ ) و مقدار دبی مخزن محاسبه می گردد.  $(Q_M)$ .

مقادیر متغیر دارای اندیس  $M$  در رابطه (۴-۲۹)، مشابه مقادیر دارای اندیس \* در حل مسائل ریمانی میباشند که جهت محاسبه فلاکس عددی در مرز سمت چپ سلول اول جاگذاری میشوند. محاسبه فلاکس عددی در مرز راست آخرین سلول مش محاسباتی نیز به صورت مشابه، انجام می پذیرد. برای این امر به مقادیر متغیرهای دبی و ارتفاع پیزومتریک در این مرز، نیاز داریم. با توجه به معلوم بودن دبی از شرایط مرزی مساله، و با استفاده از ثابت بودن کمیت  $(H+(a/(A_f \times g)).Q)$  در عرض موج چپ  $(dx/dt=-a)$ ، رابطه ای مشابه با رابطه (۴-۲۹)، در مورد ثابت کمیت  $(H+(a/(A_f \times g)).Q)$  در عرض این موج نوشته و مقدار متغیر مجهول مرزی یعنی هد فشاری، محاسبه میشود.

در انتها خاطرنشان میسازد، محاسبات فوق مربوط به یک گام زمانی است و در هر گام زمانی باید نسبت به تعریف و حل مسائل ریمانی و محاسبات مرزی برای مرزهای سلولی و محاسبه فلاکس های عددی اقدام شود تا مقدار متغیر در هر گام از طریق فرمولاسیون گودونو محاسبه شده و این مقادیر به عنوان مقادیر اولیه در محاسبات گام زمانی بعدی بکار گرفته شوند. برای سهولت در درک روابط ریمانی، از ذکر بالانویسهای مربوط به زمان، در روابط فوق صرفنظر شده است. این رویه در مراحل حلی که از این پس خواهد آمد نیز تکرار شده است. نتایج حل این مثال عددی، مطابق شکل زیر میباشد. این تصویر، نمودار دبی به دست آمده در محل شیر، میباشد که با نتایجی که عیناً از روش مشخصه بدست آمده اند مقایسه شده است. (نتایج سمت راست مربوط به روش گودونو است).



۴-۳- نمودار های مربوط به محاسبه دبی شیر در مثال عددی ضربه قوچ: راست)

توسط روش عددی گودونو (چپ) توسط روش خطوط مشخصه (MOC)

#### ۴-۳-۲- مساله مرجع اول آزمایشگاه delft در حالت اثر کوپله اتصال

در این قسمت به بررسی مثال شرح داده شده در قسمتهای قبلی برای پدیده FSI میپردازیم. ابتدا این مثال را در حالت اثر مکانیزم کوپله اتصال به تنهایی و با حذف اثر پواسن، حل میکنیم و در قسمت بعدی همین عمل را برای کوپله پواسن انجام خواهیم داد. برای حذف اثر کوپله پواسن از مقدار عددی صفر برای نسبت پواسن استفاده میکنیم. بدیهی است در این حالت، تمام ترمهای شامل این عبارت از معادلات حذف شده و با نگاهی به شرایط مرزی در می یابیم، که تنها عاملی که موجب کوپله شدن معادلات سیال و سازه میگردند، نه در خود معادلات بلکه در تعریف شرایط مرزی مستتر است.

در واقع با لحاظ کردن اثر کوپله اتصال و طبق شرط مرزی (۴-۱۸)، تمام نیروی هیدرولیکی اثر کننده در محل شیر، باعث بروز یک موج تنشی در سازه میگردد و اثرات تنشی سازه را تشدید میکند.

مشخصات و مقادیر عددی پارامترهای این مثال مطابق جدول ۴-۲ می باشد.

با نوشتن فرم برداری سیستم معادلات حاکم بر این مثال (رابطه (۴-۱۸))، به صورت فرم (۴-۱۹)، ماتریس ضرایب این مثال را به صورت زیر میتوان نشان داد. یادآوری میگردد، این ماتریس ضرایب با جاگذاری  $v = 0$  در ماتریسهای  $M$  و  $N$  در رابطه (۴-۱۶) بدست آمده است.

$$A = M^{-1}N \quad (۴-۳۰)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 & 0 \\ \frac{c_f^2}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_t} \\ 0 & 0 & -\rho_t c_t^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۳۱)$$

جدول ۴-۲ مشخصات مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله اتصال

مشخصات مساله	مقادیر
هد مخزن ( $H_0$ )	0 (m)
سرعت جریان پایدار ( $V_0$ )	۱ (m/s)
سرعت موج (a)	1۰۲۴.۷ (m/s)
مدول یانگ (E)	210 (Gpa)
قطر داخلی لوله (D)	۷۹۷ (mm)
ضخامت دیواره لوله (e)	۸ (mm)
جرم مخصوص لوله ( $\rho_l$ )	۷۹۰۰ (kg/m <sup>3</sup> )
نسبت پواسن ( $\nu$ )	۰

اولین قدم برای حل مثال عددی فوق، انتخاب صحیح ابعاد مش مساله است. با توجه به اینکه در این مثال، معادلات سازه و سیال با هم حل میشوند، جهت رسیدن به جوابهای با دقت کافی بایستی هم عدد کورانته سازه و هم عدد کورانته سیال، در حالت ماکزیمم، حداقل در حدود ۰/۹ - ۱ قرار داشته باشند. بدین منظور در هنگام کد نویسی، در نظرگرفتن دو مش جداگانه برای معادلات سیال و سازه، در برخی موارد به بهبود دقت جوابهای به دست آمده کمک شایانی میکند. بدیهی است ابعاد مش مربوط به معادلات هیدرولیکی، از طریق جاگذاری سرعت امواج فشاری سیال در رابطه عدد کورانته (۳-۱۴) و ابعاد مش برای معادلات سازه ای، با جاگذاری سرعت امواج سازه ای در این رابطه،

تعیین میشوند.

سرعت امواج ، چنانکه پیش از این اشاره شد، همان مقادیر ویژه ماتریس ضرایب مساله میباشند. بنابراین قدم بعدی محاسبه مقادیر ویژه و بردار ویژه های ماتریس ضرایب مساله است.

$$\lambda = \begin{bmatrix} -5155.8 \\ -1024.7 \\ +1024.7 \\ +5155.8 \end{bmatrix} \quad (۳۲-۴)$$

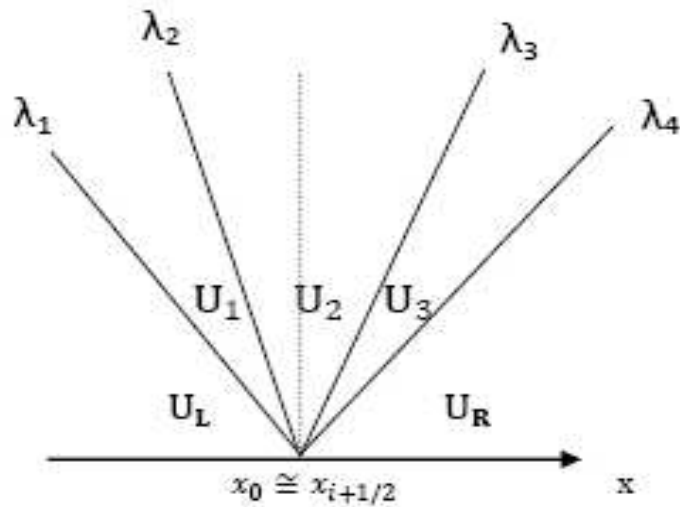
(۳۳) -۴)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha = 0.0096 \\ \beta = 2.45e-08 \end{cases}$$

هریک از ستونهای ماتریس  $\mathbf{K}$ ، یکی از

بردارویژه های ماتریس ضرایب  $\mathbf{A}$  میباشد که نظیر مقدار ویژه خود شماره گذاری و مرتب شده است. بعنوان نمونه، ستون اول ماتریس  $\mathbf{K}$  بردار ویژه نظیر اولین مقدار ویژه میباشد. (درایه اول ماتریس  $\lambda$ ).

با توجه به ثابت بودن مقادیر ویژه ماتریس ضرایب  $\mathbf{K}$  همانند مثال قبلی نتیجه میگیریم، امواج موجود در حل مساله از نوع ناپیوستگی تماسی میباشد. بنابراین برای تعریف و سپس حل مساله ریمان در مرزهای بین سلولهای محاسباتی، از رابطه ثوابت عمومی ریمان استفاده می کنیم. در تصویر ۴-۴، امواج موجود در حل مساله به تصویر کشیده شده اند. در ادامه رابطه ثابتهای عمومی ریمانی برای هر یک از این امواج با توجه به بردارویژه های نظیر آن موج، نوشته میشود.



۴-۴- ساختار مساله ریمان برای مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله اتصال

(۳۴)

-۴)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{0} = \frac{dH}{0} = \frac{d\dot{u}_z}{\beta} = \frac{d\sigma_z}{1} \quad \text{across } \lambda_1 = -5155.8 \\ \frac{dV}{-\alpha} = \frac{dH}{1} = \frac{d\dot{u}_z}{0} = \frac{d\sigma_z}{0} \quad \text{across } \lambda_2 = -1024.7 \\ \frac{dV}{\alpha} = \frac{dH}{1} = \frac{d\dot{u}_z}{0} = \frac{d\sigma_z}{0} \quad \text{across } \lambda_3 = 1024.7 \\ \frac{dV}{0} = \frac{dH}{0} = \frac{d\dot{u}_z}{-\beta} = \frac{d\sigma_z}{1} \quad \text{across } \lambda_4 = 5155.8 \end{array} \right.$$

ساده سازی هریک از روابط بالا، منجر به

شکل گیری سه تساوی به ازای هریک از امواج میشود که به صورت خلاصه این تساویها را برای موج اول، به عنوان نمونه در اینجا می آوریم:

$$\text{across } \lambda_1 = -5155.8 \rightarrow \begin{cases} dV = 0 \\ dH = 0 \\ d\dot{u}_z - \beta.d\sigma_z = 0 \end{cases} \quad (۳۵ - ۴)$$

$$\text{across } \lambda_1 = -5155.8 \rightarrow \begin{cases} V_L = V_1 \\ H_L = H_1 \\ \dot{u}_{zL} - \beta.d\sigma_{zL} = \dot{u}_{z1} - \beta.d\sigma_{z1} \end{cases} \quad (۳۶ - ۴)$$



نباید اشتباه گردد که اندیسهای  $L$  و  $1$  و ... که بصورت زیرنویس برای متغیرهای مساله استفاده میشوند، نواحی بین امواج را نشان میدهند که در شکل ۴-۴ شماره گذاری شده اند، در حالیکه شماره های مربوط به زیرنویسهای مقادیر ویژه یا بردارهای ویژه، مربوط به شماره امواج میباشند. بدین ترتیب  $V_1$  به مفهوم سرعت در ناحیه اول و  $\lambda_1$  به معنای سرعت موج شماره یک میباشد.

از نوشتن تساویهای بالا برای تمامی امواج، جمعاً ۱۲ معادله به دست می آید که حاوی مجهولات مساله ریمان میباشند. این مجهولات شامل متغیرهای چهارگانه مساله اصلی، یعنی هد فشاری، سرعت سیال، سرعت محوری و تنش محوری لوله در نواحی سه گانه بین امواج میباشند که جمعاً ۱۲ مجهول را تشکیل میدهند.  $(\sigma_{z3}, \sigma_{z2}, \sigma_{z1}, \dot{u}_{z3}, \dot{u}_{z2}, \dot{u}_{z1}, H_3, H_2, H_1, V_3, V_2, V_1)$  با حل این معادلات، با هر روش دلخواه، در انتها مقادیر این مجهولات را بر حسب پارامترهای معلوم مساله به دست می آوریم. در اینجا حل مساله ریمان به پایان میرسد.

مطلب مهمی که در اینجا به صورت سوال مطرح میشود، دانستن این موضوع است که کدامیک از این مجهولات بایستی در محاسبه فلاکس عددی مورد استفاده قرار گیرند. در پاسخ به این سوال باید گفت، مطابق فلسفه روش عددی گودونو، بایستی از بین نواحی سه گانه فوق، ناحیه ای را که ناپیوستگی و انفصال در آن رخ میدهد بیابیم و این ناحیه ای است که با طی آن، جهت امواج برعکس شود. در این مثال عددی، سرعت امواج در طی ناحیه دوم ( $U_2$ ) کاملاً برعکس شده و انفصال در این ناحیه رخ داده است. زیرا با نگاهی به امواج دو سوی این ناحیه یعنی موج دوم و سوم، واضح است که موج دوم دارای سرعت منفی و موج سوم دارای سرعت مثبت است و این تغییر جهت در عرض این ناحیه اتفاق افتاده است. بدین ترتیب در این مساله مقادیر متغیرهای چهارگانه بدست آمده در ناحیه دوم  $(\sigma_{z2}, \dot{u}_{z2}, H_2, V_2)$  جهت محاسبه فلاکس های عددی مساله در هر مرز درون مش محاسباتی،

مورد استفاده قرار میگیرد. یافتن ناحیه فوق الذکر در هر مساله شرایط مخصوص به خود را دارد و باید در هر مساله مورد توجه و شناسایی قرار گیرد.

در انتها با توجه به ماتریس ضرایب و رابطه (۴-۲۷) پس از محاسبه تابع فلاکس عددی، در هر مرز بین سلولی، مقدار این تابع با جاگذاری متغیرهای ناحیه دوم که از حل مساله ریمان به دست می آیند محاسبه میشود. مقادیر ناحیه دوم، در این مثال جایگزین مقادیر دارای زیرنویس  $i+1/2$  در رابطه فلاکسهای عددی میگردند. تابع فلاکس عددی در این مثال به صورت زیر است:

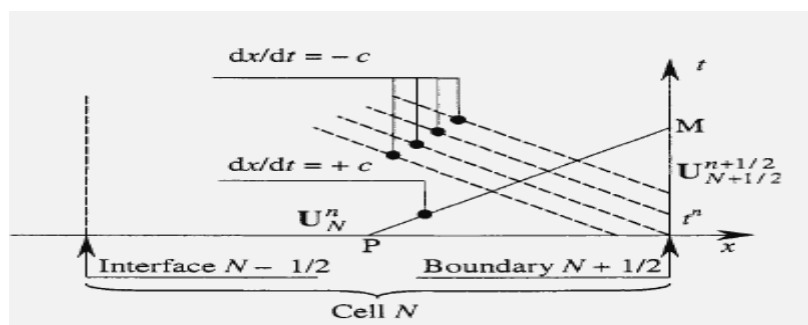
(۴-۳۷)

$$F(U) = A * U, \quad F(U_{i+1/2}^{n+1/2}) = \begin{bmatrix} g \cdot H_{i+1/2}^{n+1/2} \\ \frac{c_f^2}{g} \cdot V_{i+1/2}^{n+1/2} \\ -\frac{\sigma_{zi+1/2}^{n+1/2}}{\rho_t} \\ -\rho_t c_t^2 \dot{u}_{zi+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix}$$

میکنیم، بحث پیرامون نحوه محاسبه فلاکسهای عددی در مرزهای سلولی اول و آخر میباشد. این مطلب را پیش از این و در هنگام بیان توضیحات مثال ضربه قوچ برای مرز سلولی اول بیان نمودیم. در این قسمت نیز به صورت مشابه با آنجا مقادیر متغیرهای چهارگانه در مرزهای اول و آخر مش، با کمک شرایط مرزی مساله حساب میشود. برای این منظور به بزرگنمایی سلول آخر مش محاسباتی در قسمت سمت راست مش میپردازیم. براساس شرایط مرزی داده شده در روابط (۴-۱۷) و (۴-۱۸) و تصویر زیر، مقدار متغیرهای چهارگانه مساله در نقطه فرضی  $M$ ، جهت محاسبه فلاکسهای عددی مورد نیاز میباشد. یادآوری میگردد، این متغیرها به مثابه همان متغیرهایی هستند که در مرزهای سلولی درون مش، از طریق حل مساله ریمان در ناحیه دوم، بدست آمدند.

با بررسی روابط و ثوابت عمومی ریمان که در رابطه (۴-۳۴) در عرض هریک از چهار موج مساله

نوشته شده اند، در می یابیم، همچنان که در بخش پیوست انتهایی پایان نامه، ذکر شده است، در عرض هر موج مساله تعداد  $m-1$  ثابت عمومی ریمان داریم که  $m$  تعداد مجهولات اصلی مساله است و در اینجا برابر با ۴ میباشد. بنابراین در عرض هر موج مساله میتوان ۳ ثابت عمومی ریمان معرفی کرد. استفاده درست از این ثوابت عمومی ریمان به همراه شرایط مرزی مساله، مجموعه معادلاتی را شکل میدهند که از حل آنان مجهولات در مرز آخر به دست می آید.



۴-۵ نمای شماتیک سلول آخر محاسباتی

در این مثال برای به دست آوردن چهار مجهول مساله در محل مرز سلولی آخر، نیاز به چهار معادله داریم. دو رابطه از بیان شرایط مرزی در محل شیر تامین میشوند. دو رابطه دیگر نیز براساس عبارات ثوابت عمومی ریمان در عرض امواج اول و دوم نوشته میشوند. در تصویر فوق، استفاده از تساوی اول رابطه (۴-۳۴) که مربوط به ثابت بودن کمیت  $(\dot{u}_z - \beta \cdot \sigma_z)$  در عرض موج اول است، مشهود میباشد. در شکل بالا موج دوم، ترسیم نشده و به نوعی از تصویر حذف شده است. دلیل این امر ثابت بودن کمیت های  $\dot{u}_z$  و  $\sigma_z$  در عرض این موج میباشد. این مطلب نشان میدهد، این دو مجهول، تنها در عرض امواج اول و چهارم تغییر می یابند و با توجه به محل مرز، در اینجا موج اول نشان داده شده است. به شیوه مشابهی میتوان تصویر بالا را برای موج دوم رسم کرد و در عرض آن از ثابت بودن کمیت  $V + \alpha \cdot H$  استفاده نمود. در اینجا نیز باید گفت، مجهولات  $H$  و  $V$  در عرض امواج اول و چهارم ثابت هستند و بدین ترتیب تنها در عرض امواج دوم و چهارم تغییر مییابند.

دو رابطه ثابت عمومی ریمان فوق، را به صورت زیر، بین نقاط فرضی P و M می نویسیم.

(۴-۳۸)

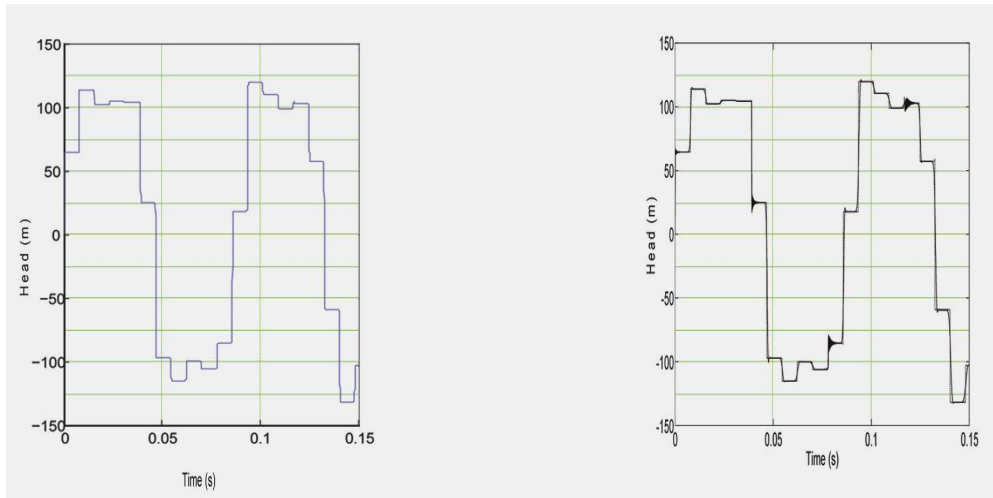
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{across } \lambda_1 = -5155.8 \rightarrow d\dot{u}_z - \beta.d\sigma_z = 0 \rightarrow \dot{u}_{zM} - \beta.\sigma_{zM} = \dot{u}_{zP} - \beta.\sigma_{zP} \\ \text{across } \lambda_2 = -1024.7 \rightarrow dV + \alpha.dH = 0 \rightarrow V_M + \alpha.H_M = V_P + \alpha.H_P \end{array} \right.$$

دو شرط مرزی مطابق (۴-۱۷) و (۴-۱۸) مقادیر متغیرهای اصلی مساله برای نقطه M بدست می آیند و این مقادیر در رابطه (۴-۲۷) برای محاسبه فلاکسهای عددی مورد استفاده قرار میگیرند. در این روابط مقادیر دارای اندیس P مربوط به مقادیر متغیرهای مساله هستند که از محاسبات گام قبلی یا شرایط اولیه مساله معلوم هستند.

در مرز اول یا سمت چپ نیز کار به شکل ساده تری صورت میپذیرد. چرا که مقدار مجهولات هد فشاری و سرعت محوری لوله معلوم میباشند. بنابراین برای محاسبه کمیت سرعت سیال از ثابت بودن  $V - \alpha.H$  در عرض موج سوم و برای محاسبه کمیت تنش محوری لوله از ثابت بودن  $\dot{u}_z + \beta.\sigma_z$  در عرض موج چهارم استفاده می کنیم.

اهم مطالبی که در محاسبه و حل معادلات حاکم بر این مساله با روش عددی گودونو با آن روبرو هستیم، در بالا توضیح داده شد. عملیات مربوط به کد نویسی با توجه به توضیحات فوق، به سادگی مقدر میباشند.

در انتها نتایج به دست آمده برای این مثال، را با ارائه نمودار مربوط به هد فشاری در محل شیر، ترسیم میکنیم. نتایج با آنچه که به صورت مشابه با روش MOC حل شده است، مقایسه شده اند.



### ۳-۳-۴- مساله مرجع اول آزمایشگاه delft در حالت اثر کوپله پواسن

در این قسمت به توضیحاتی پیرامون مثال شرح داده شده در قسمت ۱-۳-۱- برای پدیده FSI در حالت ۴-۶- نتایج مربوط به محاسبه هد فشاری در گره شیر در مثال عددی پدیده FSI ملی، اهم مواردی در حالت کوپله اتصال: چپ) با روش عددی گودونو راست) با روش MOC

۱- اعمال اثر کوپله پواسن، با نسبت دادن یک مقدار عددی به ضریب پواسن، صورت میپذیرد. در

این مثال این ضریب را برابر با  $\nu = 0.3$  اختیار میکنیم. سایر مقادیر عددی برای حل این

مثال مطابق جدول ۴-۲- میباشد.

۲- از آنجا که بررسی اثرات کوپله پواسن به تنهایی مورد نظر ما میباشد، در مثال مربوطه نسبت

به حذف اثر کوپله اتصال بایستی، اقدام شود. برای این منظور بایستی گره های مرز را به

صورت کاملاً صلب و ثابت در نظر بگیریم. پس در این حالت باید جابجایی گره شیر برابر با

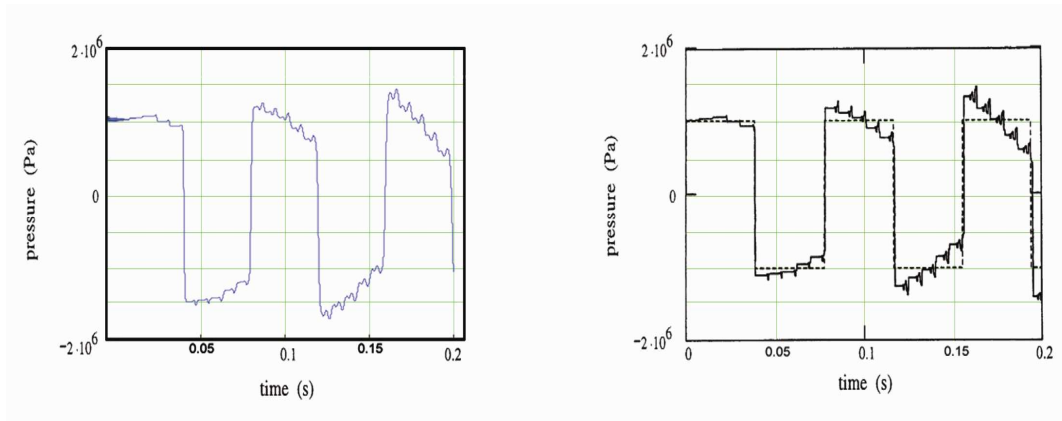
صفر باشد، این بدان معناست که برای حذف اثر تداخلی اتصال، با اعمال  $\dot{u}_{z_M} = 0$  در رابطه (۴-۱۷)، این امر صورت گرفته و شرط مرزی در محل شیر در این مثال بدین شکل تغییر می کند.

۳- همچون توضیحاتی که در قسمت مثال ۴-۳-۲ برای حل مساله ذکر نمودیم، در این مثال نیز توجه به مسائلی همچون رابطه ابعاد انتخابی برای مش مساله و شرط پایداری، نحوه حل مسائل ریمان و در نظر گرفتن شرایط مرزی برای محاسبات مربوط به مرزهای میان سلولی و نهایتاً فلاکسهای عددی ضروری است و تمامی این مراحل مشابه حالت قبل، پیگیری میشود.

۴- معادلات حاکم بر حل این مثال، با توجه به مقدار داشتن ضریب پواسن، عبارت از معادلات (۴-۱۰)، (۴-۱۱)، (۴-۱۲) و (۴-۱۳) میباشد. همانند بخش قبلی، پس از بدست آوردن ماتریس ضرایب برای فرم برداری این معادلات از طریق رابطه (۴-۳۰)، به تعریف و حل مسائل ریمانی در مرزهای درونی مش و سپس مرزهای اول و آخر مش از طریق شرایط مرزی، میپردازیم. نهایتاً با محاسبه فلاکسهای عددی و جاگذاری آنها در فرمولاسیون بقای گودونو، جوابهای مساله که عبارت از مقدار متغیرها در هر گام زمانی است، به دست می آید.

۵- در انتها ذکر این نکته لازم است که با مقدار دادن به ضریب پواسن، جملاتی در معادلات حاکم ظاهر میگردند که معادلات هیدرولیکی و سازه ای از طریق این جملات با هم مربوط و کوپله میشوند. به عبارت دیگر اثرات تداخلی پواسن، از طریق کوپله شدن معادلات سازه و سیال، با یکسری جملات شامل ضریب پواسن، خود را نشان میدهد.

نتایج حل این مثال با روش عددی گودونو، مطابق نمودارهای زیر میباشد. این نمودارها مربوط به مقدار فشار در محل گره شیر میباشد.



۴-۷- نمودار محاسبه فشار در گره شیر در مثال عددی پدیده FSI در حالت کوپله پواسن:

چپ) با روش عددی گودونو راست) با روش MOC

## ۴-۴- تفسیر نمودارها و نتیجه گیری

در انتهای مطالب این فصل، ذکر چند نکته در مورد نتایج به دست آمده از مثالهای عددی حل شده حائز اهمیت است:

۱- در مثالهای پدیده اندرکنش سیال-سازه که در دو حالت جداگانه، مطابق با مساله مرجع انتخابی حل شد، نتایج بدست آمده مربوط به حالتی است که مش سازه و سیال از هم جدا شده اند و ابعاد مش هرکدام براساس محدوده عدد کورانت هر یک، انتخاب شده است. بدیهی است ابعاد مش را باید به گونه ای برای سیال و سازه برگزید تا در مناطقی همچون مرزهای سلولی و مرزهای شبکه حل در مش بزرگتر، هر دو مش بر هم منطبق باشند. به عبارتی در انتخاب ابعاد مش باید مرزهای بین سلولی در مش بزرگتر، منطبق بر مرزهای بین سلولی در مش کوچکتر باشند، نه اینکه این نقاط بر نواحی درون سلولی در مش کوچکتر قرار گیرند. برای این منظور بهتر است تا تفکیک مشها به گونه ای انجام شود که هر سلول مش بزرگتر

به صورت تعداد بخش پذیری سلول مش کوچکتر تقسیم گردد.

۲- نتایج فوق، مربوط به مثالهایی هستند که همگی خطی بودند. دقت روش عددی گودونو در حل این مسائل خطی و انطباق جوابها بر جوابهای حاصل از روش مشخصه، به خوبی نشاندهنده این مطلب است که روش عددی گودونو، با توانایی بالایی توانسته جوابهای درست و دقیقی از مساله را به دست بدهد.

۳- ما در این پایان نامه، مسائل یک بعدی را جهت نمونه با روش عددی احجام محدود گودونو، حل کردیم. در مثالهایی که اینک بررسی کردیم، کارآیی این روش جهت بررسی مسائلی از این دست را در حالت یک بعدی، اثبات کردیم. اما چنانچه قرار باشد مسائل و مثالهایی چند بعدی را با این روش بررسی کنیم، محاسبه فلاکسها و حل مسائل ریمان به شکل یک فرآیند فوق العاده زمانبر و پیچیده خود را نشان میدهد و دیگر این روش قابل رقابت با روش مشخصه نمی باشد. راه حل دیگر استفاده از فرم تفاضل محدود این روش است که البته بایستی چگونگی جوابهای بدست آمده از آن را با فرمولاسیون احجام محدود مقایسه نمود.

۴- در انتها به عنوان یک نتیجه میتوان بیان داشت که جوابهای حاصل از بررسی نمونه های یک بعدی و خطی از معادلات هذلولوی در قالب مسائل پدیده اندرکنش سیال-سازه و ضربه قوچ، با روش عددی گودونو کاملاً منطقی میباشد. بنابراین میتوان نتیجه گرفت، اگرچه طبق مطالعات قبلی روش عددی گودونو برای مواردی از جمله غیرخطی بودن معادلات هذلولوی، عدم کاربرد روش خطوط مشخصه را جبران میکند و کاملاً از این روش جلوتر است، در مواردی که نقطه اصلی قوت روش MOC محسوب میشود نیز، نتایج خوبی را بدست میدهد و به خوبی میتواند با این روش نام آشنا رقابت کند.



## ۴-۵- جزئیات کد نویسی

در این بخش ذکر نکاتی در مورد کد نوشته شده برای حل مثالهای عددی فوق الزامی میباشد. در این تحقیق، برای کدنویسی جهت حل مسائل عددی از محیط نرم افزار matlab کمک گرفته شده است. به عبارت دیگر کلیه کدهای نوشته شده به زبان matlab میباشد. مجموعاً برای کلیه مثالهای این پایان نامه حدود چند صد خط کد نویسی در محیط نرم افزار فوق انجام شده است.

برای هر یک از مثالهای فوق یک کد مجزا نوشته شده است و پس از اطمینان از درستی هر کد در رسیدن به جوابهای دقیق و صحیح، به ازای مقادیر مختلف ابعاد مش هر کد را چندین مرتبه اجرا نموده تا مقایسه های لازم در نحوه جوابدهی کد نوشته شده صورت گیرد.

از نظر ابعاد مش، ذکر این نکته لازم است که طبیعتاً با ریزتر شدن مش انتخابی، و بویژه در مورد دو مثال پدیده اندرکنش سیال و سازه در حالات کوپله پواسن و اتصال، کدهای مربوطه دیرتر به جوابهای نهایی همگرا میشوند. در این دو مورد، این مطلب اثر بیشتری دارد چرا که با دو مش یا شبکه جداگانه برای سیال و سازه روبرو هستیم.

برای نوشتن کدهای لازم برای این تحقیق، مراتب و توابع خاصی رعایت شده است. بدین منظور در هر کد با نظر به لوازم و ضوابط روش عددی گودونو از الگوریتم موردنیاز استفاده شده است که گامهای متشکله این الگوریتم به تفکیک در ادامه می آید:

- ۱- تعریف نمودن مقادیر ثابت عددی مساله و توابع و عبارات لازم برای بدست آوردن برخی از کمیت های مساله. در این قسمت باید کلیه مقادیر ثابت عددی معرفی شده و با بیان پارامترهای موردنیاز برای گامهای بعدی، امکان فراخوانی این مقادیر در ادامه فراهم شود.
- ۲- تعریف ابعاد مش مساله در دو بعد مکان و زمان که در واقع طول و عرض هر سلول محاسباتی

میباشند. برای تعریف نمودن این مقادیر بایستی به وابستگی بین آنها از طریق شرط پایداری توجه نمود و با توجه به این شرط ابعاد را مشخص کرد. در مراتب بعدی که با تغییر ابعاد مش مساله مجدداً کد را اجرا میکنیم، نیز باید از این مطلب غافل نشد که تغییر یکی از دو بعد مکان و یا زمان بدون تغییر دیگری، گاه موجب برهم خوردن محدوده پایداری و تجاوز نمودن عدد کورانت مساله از عدد یک میشود یا آن را به شدت کاهش میدهد که این امر خود اساساً باعث بروز جوابهای غلط میشود.

۳- تعریف نمودن توابع مساله و متغیرهای موردنیاز. در این قسمت بایستی کلیه توابع لازم مساله که در مراحل بعدی مقادیر جوابها و پارامترها در آنها جاگذاری میشوند معرفی شده و روابط لازم جهت چگونگی تعیین این مقادیر صورت پذیرد.

۴- تعریف و حل مسائل ریمان در محل مرزهای بین سلولی و محاسبه فلاکسهای بین سلولی با توجه به حل مسائل ریمان. برای این منظور از طریق تعریف دو حلقه زمانی و مکانی بصورت تودرتو نسبت به حل مسائل ریمانی و سپس محاسبه فلاکسها در هر گام زمانی اقدام میشود. بدین ترتیب در هر گام زمانی با بیان روابط لازم برای این محاسبات ابتدا برای تمام مرزهای درونی مش مقادیر محاسبه شده و سپس مساله یک گام به جلوتر میرود. حلقه زمانی از زمان صفر تا زمان مورد نظر مساله هر بار به اندازه بعد زمانی مش و حلقه مکانی نیز از مرز اول درون سلولی تا مرز آخر درون سلولی پیش میرود.

۵- استفاده از رابطه اصلی روش عددی گودونو و یافتن مقادیر متغیرها در سلولهای درونی مش. این فرآیند نیز همانند گام قبلی با استفاده از دو حلقه تو درتوی زمانی و مکانی طی میشود و میتوان برای افزایش سرعت مساله محاسبات این گام را درون حلقه های گام قبلی تعریف و بیان نمود.

۶- بیان شرایط مرزی و استفاده مجدد از گامهای ۴ و ۵ برای بدست آوردن مقادیر متغیر مساله

در محل دو سلول محاسباتی اول و آخر برای این منظور کلیه محاسبات دو گام قبلی با نظر به شرایط مرزی ترکیب شده و برای بدست آوردن متغیرهای دو سلول اول و آخر مساله مورد استفاده قرار میگیرند.

۷- دستور نمایش و چاپ نتایج نهایی مساله. این دستور مطابق معمول پس از اتمام فرآیند محاسبات و معلوم شدن مقادیر متغیرها در انتهای کد صادر می گردد.

بدین ترتیب و مطابق الگوریتم کلی بیان شده در بالا، برای هر یک از سه مساله حل شده یک کد مجزا نوشته شده و جوابهای بدست آمده با با جوابهای حاصل از روش مشخصه مطابق نمودارهای این فصل مقایسه شده اند.

فصل پنجم

خلاصه، نتیجه گیری،

مشاهدات

## ۵-۱- خلاصه

در این پایان نامه، همانگونه که آورده شد، ابتدا با بیان اصول و جزئیات یکی از روشهای عددی احجام محدود بنام روش عددی گودونو، این روش به عنوان یک جایگزین جهت روش خطوط مشخصه یا MOC معرفی شد که در مواردی همچون بررسی مسائل غیر خطی و یا ورود برخی ترمهای پیچیده به معادلات میتواند با این روش رقابت کند. این مطلب براساس نتایج تحقیقات پژوهشگرانی بود که برخی از تحقیقات آنها در قسمت پیشینه ذکر شدند. سپس با بیان معادلات حاکم بر پدیده ضربه قوچ و پدیده اندرکنش سیال-سازه تصمیم گرفته شد تا با این روش عددی به حل موارد خطی و یک بعدی از معادلات هذلولوی با ارائه مثالهایی از این دو پدیده پردازیم. یعنی برای اولین بار روش عددی گودونو جهت حل مساله اندرکنش سیال-سازه مورد توجه قرار گرفت که غالباً پیش از این با روش MOC حل میشد. در انتها نیز نتایج بدست آمده از حل سه مثال عددی از این پدیده با روش گودونو، با نتایج مشابه به دست آمده با روش MOC مقایسه شدند.

## ۵-۲- نتیجه گیری

- مقایسه نتایج بدست آمده از روش عددی گودونو و MOC به خوبی نشان از این مطلب دارد که روش گودونو در حوزه مسائل خطی و یک بعدی که از نقاط قوت روش مشخصه میباشد، بویژه در بررسی پدیده اندرکنش سیال-سازه، میتواند با روش مشخصه رقابت کند.
- مطابق فلسفه روش عددی گودونو، در این پایان نامه نشان دادیم، چگونه با در نظر گرفتن اثر امواج موجود درمساله، در تعاریف و مراحل حل از ابتدا، میتوان از بروز خطاهای بعدی در

- جوابهای مساله که در اثر ناپیوستگیهای ناشی از این امواج رخ میدهند، جلوگیری نمود.
- روش عددی گودونو در بررسی مثال تهیه شده از ضربه قوچ، شامل یک مش محاسباتی بود ولی در مثال حل شده از پدیده FSI به علت روبرو بودن با دو ساختار متفاوت از امواج با سرعتهای گوناگون، یعنی امواج فشاری سیال و سازه، ناچار به تفکیک مشها برای سازه و سیال شدیم و این نتیجه مهم را باید همواره به یاد داشت که چنانچه در یک مساله با امواج گوناگونی مواجه باشیم که هرکدام مربوط به دسته خاصی از معادلات باشند، بایستی به تاثیر پذیری عددی کورانت از این امواج دقت کرد. چرا که اعداد کورانت مختلفی در این موارد برحسب مقادیر گوناگون سرعت امواج بروز میکنند و تمامی این اعداد بایستی برای دقت روش، به عدد ۱ میل کنند. برای این منظور ناچار به استفاده از مشهای متفاوتی میباشیم.
  - توجه به شرط پایداری در روش های صریح، مطلب مهمی است که در بررسی های صورت گرفته با این روشها بایستی همواره مد نظر قرار گیرد. در این مثال ما با یک روش صریح روبرو بودیم و انتخاب ابعاد مساله و تناسب بین این مقادیر همواره با نظر به شرط پایداری صورت گرفته است و هرگاه مقادیر عدد کورانت از محدوده معینی پایین تر رفته است، روش عددی گودونو قابلیت خود را در جوابدهی دقیق کاملاً از دست داده است.

### ۵-۳- پیشنهادات

- تحلیل مسائل و نمونه های غیرخطی از سیستم معادلات دیفرانسیل هذلولوی با روش عددی گودونو: مطابق مطالب بیان شده در فصل دوم از مزیت های عمده روش عددی گودونو قابلیت اعمال این روش به سیستم های غیر خطی میباشد. بررسی این توانمندی خود میتواند موضوع تحقیق جداگانه ای قرار گیرد.
- تحلیل معادلات هذلولوی در حالت چند بعدی با روش عددی گودونو: که این مساله میتواند

- قابلیت روش عددی گودونو را در بررسی این معادلات محک بزند.
- بررسی و حل معادلات هذلولوی با سایر روشهای تفاضل محدود و مقایسه بازدهی و توانمندی این روشها با روش احجام محدود گودونو: چنانکه بیان نمودیم، هدف از بررسی روشهای عددی گوناگون جهت تحلیلی معادلات هذلولوی حاکم بر مسائل مختلف فیزیکی، یافتن بهترین روشها از نظر سرعت و دقت جوابهای به دست آمده میباشد. از آنجا که برخی از روشهای تفاضل محدود با اندکی تغییرات در قالب روشهای احجام محدود قابل بازنویسی میباشد، استفاده همزمان از این روشها و روش عددی گودونو جهت حل مسائل مختلف فیزیکی و مقایسه بین نتایج حاصل از هریک از این روشها میتواند دید کلی نسبت به مزایا و معایب هریک از آنها در برابر یکدیگر به ما بدهد. این مقایسه مسلماً در طبقه بندی روشهای احجام محدود از نظر قدرت و کارایی، نقش عمده ای دارد.
  - بررسی و تحلیل معادلات حاکم بر پدیده FSI با سایر روشهای تفاضل محدود و مقایسه جوابهای بدست آمده با روش احجام محدود گودونو و روش مشخصه؛ این مساله میتواند با توجه به جوابهای قابل قبول بدست آمده از روش گودونو در این پایان نامه، از مهمترین اهداف در زمینه مدلسازی اثرات تداخلی سیال سازه باشد.
  - تحلیل مدل تهیه شده از وارد کردن ترم اصطکاک و در نظر گرفتن اثرات کوپله اصطکاک و حالت همزمانی تمام مکانیزم های تداخلی در پدیده اندرکنش سیال-سازه با روش عددی گودونو؛ چرا که در این پایان نامه از اثرات اصطکاک کلاً چشم پوشی نمودیم. این امر به این دلیل بود که مساله مرجع انتخابی جهت حل فاقد این ترم ها بود. همچنین بررسی اثرات همزمانی هر سه حالت کوپله با روش عددی گودونو، از دیگر حالتیایی به شمار میرود که میتواند جهت مقایسه بین روش عددی گودونو و روش خطوط مشخصه انجام گیرد.
  - بررسی توانمندی روش عددی گودونو در موارد وجود ترمهای منبع در معادلات هذلولوی: این

مطلب با توجه به توضیحات ارائه شده در این پایان نامه در مورد ترمهای منبع، میتواند پس از موارد فوق، کامل کننده بحث کارآیی روش عددی گودونو جهت اعمال به معادلات هذلولوی به حساب آید.

- بررسی و تحلیل مسائل موجود در پدیده اندرکنش سیال-سازه با روش عددی گودونو در فرم های بالاتر از نظر مرتبه دقت روش عددی: روش عددی گودونو همانند سایر روشهای عددی میتواند در فرمهای بالاتر از نظر مرتبه دقت روش عددی، ارتقا یابد. بررسی ورژنهای بالاتر این روش عددی و اعمال آن به مسائل و مثالهای عددی میتواند موضوع بحث جداگانه ای قرار گیرد.

- افزودن شرایط مرزی گوناگون و هندسه های پیچیده سازه خط لوله و یا افزودن ترمهای انتقال گرما به مسائل و معادلات موجود پدیده اندرکنش سیال-سازه و حل آن با روش عددی گودونو؛ به خصوص با توجه به محدودیت روش خطوط مشخصه در بررسی مدلهای شامل ترمهای پیچیده و استفاده دشوار از این روش، بررسی و حل مثالهای شامل موارد فوق با روش عددی گودونو میتواند میزان کارآیی این روش را بیش از پیش روشن سازد.



پیوست الف

مسائل ریمان

## الف-۱- تعریف مساله ریمان

میتوان مساله ریمان را از نظر مفهوم، نوعی مساله مقدار اولیه دانست که در تشکیل آن از فرض گسترش نامحدود بعد مکان (در مش بندی مساله)، در دو جهت مثبت و منفی، استفاده میشود.

مساله ریمان، یک عنصر کلیدی روش عددی گودونو است، به نحوی که مستقیماً در فرایند حل مورد استفاده قرار میگیرد. نقش مسائل ریمان در محاسبه فلاکسهای عددی، در فصل سوم توضیح داده شد. براین اساس از منظر روش احجام محدود گودونو، حل کردن مسائل ریمانی (حل کننده های ریمانی) به عنوان یک پروسه مهم، جهت محاسبه فلاکس ها در مرزهای موجود در بین سلولهای مش، دارای اهمیت ویژه ای می باشند.

پروسه های مختلفی تحت عنوان حل کننده های ریمانی، وجود دارند که هدف از آنها حل مسائل ریمان میباشد. این پروسه ها، متشکل از گامهایی میباشد که پژوهشگر و محقق بایستی برای حل یک مساله ریمان، طی نماید تا به جواب مساله ریمان که عبارت از مقدار متغیر براساس مقادیر اولیه مفروض در صورت مساله است، نایل شود.

هدف این فصل، بررسی اجمالی رایج ترین حل کننده های ریمانی میباشد. برای حل مسائل ریمان، میتوان از روشهای تقریبی یا دقیق استفاده نمود. مسلماً روشهای تقریبی علیرغم سرعت بالایی که دارند، حل های با دقت کمتری را به دست میدهند؛ لیکن سرعت بالای این روشها، از مشخصه های مهم در افزایش کارایی روش عددی گودونو میباشد. با این وجود، هرگاه امواج موجود در مساله دارای سرعت ثابت باشند و یا در مواردی که تعداد معادلات حاکم مساله، در حد مناسبی باشد، جهت حل مسائل ریمانی از روشهای دقیق استفاده میگردد که این روشها، میتوانند با سرعت مناسب و دقت

بالایی جواب مساله را به دست دهند. در باقی موارد استفاده از روشهای دقیق مقرون به صرفه نمیشود و علاوه بر پیچیدگی در حل مساله ریمان، بازدهی روش عددی را نیز کاهش می دهد؛ بنابراین از روشهای حل تقریبی مسائل ریمان استفاده میشود.

در این پروژه، با توجه به سرعت ثابت امواج موجود در مثالهای حل شده در فصول قبلی و عدم استفاده از روشهای حل تقریبی در فرآیند حل مساله FSI موضوع این رساله، تنها به شرح روشهای حل دقیق مسائل ریمان پرداخته و از بیان توضیحات مربوط به روشهای حل تقریبی مسائل ریمان، پرهیز میشود و تنها به ذکر منابع مطالعاتی در موضوع این روشها، بسنده میشود.

## الف-۲- بررسی الگوریتم حل مسائل ریمان (Exact Riemann Solvers)

تعریف شرایط اولیه به صورت یک مساله ریمان، امکان در نظر گرفتن شکافی که در مراحل بعدی حل توسط امواج شکل میگیرد و باعث بروز ناپیوستگی در جهات گوناگون در حل میگردد، را برای ما در هر دو جهت ( مثبت و منفی)، از همان گام ابتدایی زمانی، فراهم میسازد.

با در نظر گرفتن سیستم معادله هذلولوی  $m \times m$  به فرم زیر:

(الف-۱)

$$\text{PDEs: } \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0$$

$$\text{ماتریس ضرایب نیز به صورت زیر} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m \end{bmatrix}$$

بیان میگردد:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

مساله ریمان برای این معادله عبارت از مساله مقدار اولیه ای به فرم زیر است:

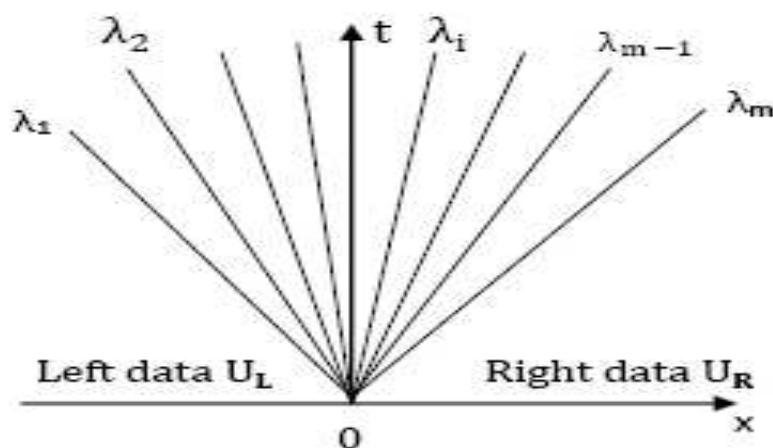
$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) \begin{cases} \mathbf{U}_L & x \leq x_0 \\ \mathbf{U}_R & x > x_0 \end{cases} \quad (\text{الف-۳})$$

از نظر فیزیکی در مساله، در اثر اختلاف مقادیر  $\mathbf{U}_L$  و  $\mathbf{U}_R$ ، حالت عدم تعادلی شکل میگیرد که خود باعث ایجاد نوعی شکاف و بازشدگی نیمرخ اولیه، در گامهای زمانی بعدی میشود. در اثر این بازشدگی، یک موج که میتواند از نوع شوک یا تکانه، ترقیق<sup>۲</sup> و یا ناپیوستگی تماسی باشد، در بعد مکانی مساله شکل میگیرد. مساله ریمان (الف-۳)، متشکل از  $m$  موج می باشد (این امواج می توانند از نوع ترقیق (Rarefaction Wave)، شوک، یا ناپیوستگی تماسی باشند) که تعداد  $m+1$  ناحیه مقدار ثابت در بین امواج ایجاد میکنند. (مقدار متغیر در این نواحی ثابت میباشد). اولین ناحیه مقدار ثابت سمت چپ مربوط به مقادیر متغیر  $\mathbf{U}_L$  است و اولین ناحیه مقدار ثابت سمت راست مربوط به مقدار  $\mathbf{U}_R$  است که مساله ریمان نیز بر اساس این ۲ مقدار تعریف شده است. هدف یافتن مقادیر حل در سایر نواحی میباشد. (بجز ناحیه سمت چپ اولین موج و ناحیه سمت راست آخرین موج، مقدار متغیر در سایر نواحی بین موجها مجهول است). بدین منظور از تکنیکهای متعددی استفاده میشود.

شکل الف-۱ ساختار مساله ریمان را برای یک سیستم معادله  $m \times m$  به خوبی نشان میدهد.

---

## 2- Rarefaction wave



الف-۱- ساختار حل مساله ريمان برای یک سیستم خطی  $m \times m$  معادلات هذلولوی با ضرایب ثابت

یکی از روشهای حل مسائل ريمانی استفاده از روابطی به شرح زیر است. استفاده از این روابط به جهت حل دقیق مساله ريمان، بسیار رایج میباشد.

بر این اساس، اگر موج از نوع ترقیق یا ناپیوستگی تماسی باشد می توان جهت برقراری ارتباط بین مقادیر متغیر دو سوی آن از رابطه ثابت های عمومی ريمان استفاده کرد.

چنانچه موج از نوع شوک باشد، نیز استفاده از روابط هاگونیت - رانکاین (روابط پرش) جهت ارتباط دادن میان مقادیر متغیر در دو سوی موج مفید فایده است.

به طور کلی مجموعه روابط پرش به همراه روابط ثوابت عمومی ريمان، جهت حل کامل مساله ريمان برای یک سیستم معادلات  $m \times m$  کفایت می کنند.

البته غیر از روابط فوق، که مجموعه معادلات لازم جهت به دست آوردن متغیرهای جریان را برای ما فراهم می آورند، روشهای حل دیگری نیز جهت حل دقیق مساله ريمان موجود است که در ادامه به یکی از انواع آنها اشاره خواهد شد.

اما با فرض استفاده از روابط پرش و یا ثوابت عمومی ريمان، هنوز فرآیند حل پیچیده است؛ چراکه اولاً

در آغاز فرایند حل، ماهیت امواج شکل گرفته در حل مساله (امواج ترقیق، ناپیوستگی تماسی یا شوک ( برای ما مجهول میباشد و ثابتهای روابط پرش و ثوابت عمومی ریمان معمولاً منجر به یک سری معادلات غیر خطی می گردند، ویافتن مجهولات از این معادلات امری زمان بر است.

با این وجود پروسه کلی یک فرآیند حل کننده دقیق ریمانی (Exact Riemann Solvers) با فرض استفاده از روابط پرش و ثوابت عمومی ریمان، به صورت گامهای زیر طبقه بندی می شود:

۱- ایجاد یک فرض اولیه در مورد ماهیت موج های برخاسته از مساله ریمان (به عنوان مثال: موج اول از نوع ترقیق، دوم از نوع شوک، و سومین موج از نوع ترقیق باشد و.....) ترکیب این امواج گوناگون، الگوی موج نامیده می شود.

۲- براساس فرضیه شکل گرفته در بالا، سیستم معادلاتی که بایستی حل شود را در عرض امواج تشکیل داده میشود. ( توسط روابط پرشی یا ثوابت عمومی ریمان که بسته به نوع موج انتخاب می گردند).

۳- بصورت یک فرآیند و پروسه تکرارشونده سیستم معادلات فوق حل میگردند. (همانند روش نیوتن-رافسون). با حل این معادلات، مجهولات مساله که عبارت از مقدار متغیر در نواحی بین امواج می باشند، به دست می آیند.

۴- با داشتن مقادیر متغیر اصلی در نواحی بین امواج، به بررسی صحت و سقم فرضیه صورت گرفته در گام اول پرداخته، در صورت نادرست بودن فرضیه اولیه مبنی بر حدس نوع موج، مجدداً نوع امواج را براساس حل بدست آمده در گام سوم حدس زده و مراحل ۱ تا ۳ براساس فرضیات جدید، تکرار میشوند.

۵- فرایند تکرار شونده گامهای ۲ تا ۴ تا آنجا، تکرار میگردند که حل به دست آمده در گام ۳ با حدس صورت گرفته در زمینه نوع موج در گام اول، مطابقت نماید.

الگوریتم فوق دارای ۲ حلقه تکرار شونده تودرتو است. حلقه درونی اختصاص به حل سیستم غیر خطی معادلات دارد؛ در حالی که حلقه بیرونی مختص بازبینی صحت و سقم فرضیه صورت گرفته در الگوی امواج و چک کردن صحت و سقم این حدسیات می باشد و به صورت سعی و خطا عمل میکند. بدین ترتیب تنها در مواردی که تعداد امواج موجود در مساله ریمان اندک باشند و معادله مدل مساله، از پیچیدگیهای کمی برخوردار باشد و شرایط معادلات حاکم بر مساله، شرایط ساده ای باشد (همچون زمانی که سرعت امواج ثابت باشد) حل دقیق مساله ریمان به شیوه فوق در اولویت می باشد.

### الف-۳- بررسی حل مساله ریمان برای یک سیستم معادلات

مساله ریمان تعریف شده (الف-۳)، که برای سیستم معادلاتی به فرم (الف-۱)، بیان شده است، در حقیقت تعمیمی از مساله ریمان در حالت اسکالر میباشد که پس از این به آن اشاره خواهد شد.

چنانچه گفته شد، مطابق شکل الف-۱، مساله ریمان تعریف شده برای یک سیستم معادلات، متشکل از  $m$  موج است که همگی از مبداء سرچشمه گرفته اند. در روش عددی گودونو نقطه مبداء، منطبق بر مرزهای بین سلولی یا همان نقاط  $i+0.5$  است و به عبارت دیگر مطابق با سیستم مختصات موضعی، هرکدام از مرزها برابر با مبدا مختصات فرض شده و مساله ریمان در آنجا تعریف و حل میشود. هر یک از این امواج دارای سرعت برابر با  $\lambda_i$  است.

از دید فیزیکی هر موج  $i$ ، حامل مقداری از ناپیوستگی یا شکاف است که باعث جهش در مقدار متغیر اصلی  $U$  میشود و این جهش با سرعت موج انتشار می یابد. با توجه به معلوم بودن مقادیر سمت چپ اولین موج ( $U_L$ ) و سمت راست آخرین موج ( $U_R$ )، با حل مساله ریمان (الف-۳)، میتوان مقادیر متغیر را در فواصل بین امواج اول تا آخر به دست آورد.

در این قسمت به دو روش حل دقیق مساله ریمان برای سیستم معادلات (الف-۱)، اشاره میشود؛ هرچند روش دوم از نظر کاربردی نسبت به روش اول و سایر روشهای حل دقیق مسائل ریمان، برتری دارد و در الگوریتم ذکر شده در قسمت الف-۱- نیز به آن، اشاره نمودیم، لیکن سایر روشهای حل دقیق نیز در صورت اعمال به مساله ریمان، جوابهای مشابهی را به دست میدهند.

### الف-۳-۱ استفاده از بسط مقادیر ثابت $U_R$ و $U_L$

چنانچه به جای تعریف مساله ریمان، شرایط اولیه برای سیستم معادلاتی به فرم (الف-۱)، به صورت زیر، در نظر گرفته شود:

$$U^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}) \quad (\text{الف-۴})$$

برای حل مساله براساس این شرایط اولیه، از متغیرهای مشخصه استفاده میشود ( $W$ ):

$$U = KW \quad , \quad W = K^{-1}U \quad (\text{الف-۵})$$

در این رابطه،  $K$  ماتریس متشکل از بردار ویژه های ماتریس ضرایب  $A$  است و متغیر مشخصه را می توان از طریق تبدیل (الف-۵)، تعریف نمود.

\_\_\_\_\_ (الف-۶)

$U_t = KW_t$  ،  $U_x = KW_x$  براین اساس، صورت موسوم به فرم مشخصه سیستم معادلات هذلولوی (الف-۱)، به دست می آید.

\_\_\_\_\_ (الف-۷)



$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_t + \mathbf{AK} \cdot \mathbf{W}_x = 0 \rightarrow \mathbf{W}_t + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{W}_x = 0$$

مزیت استفاده از فرم مشخصه سیستم معادلات

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = [\mathbf{K}^{(1)}, \dots, \mathbf{K}^{(m)}]$$

(الف-۱)، نقشی است که این فرم در جداسازی معادلات از یکدیگر دارد؛ با تبدیل متغیر اصلی به متغیر مشخصه و نوشتن فرم مشخصه، معادلات از یکدیگر جداسازی و تفکیک شده و میتوان به راحتی به حل سیستم معادلات هذلولوی پرداخت.

براین اساس،  $i$  امین معادله پاره ای دیفرانسیل سیستم برحسب متغیر مشخصه به صورت زیر است:

(الف-۸)

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

مساله، میتوان رابطه زیر را بیان نمود:

(الف-۹)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m$$

بر حسب متغیر مشخصه است:

$$\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{U}^{(0)} \quad (\text{الف-۱۰})$$

(الف-۱۱)

$\mathbf{W}^{(0)} = (w_1^{(0)}, \dots, w_m^{(0)})$  با نوشتن سیستم معادلات (الف-۱) در قالب فرم مشخصه (الف-۷) و بیان

شرایط اولیه مساله در این قالب جدید، با تفکیک معادلات، مستقیماً میتوان مساله را به ازای متغیر مشخصه حل نمود.

(الف - ۱۲)

حل مساله به ازای متغیر اصلی  $U$  به دست می آید.

$$U = KW$$

$$u_1 = w_1 k_1^{(1)} + w_2 k_1^{(2)} + \dots + w_m k_1^{(m)} \quad (\text{الف} - ۱۳)$$

$$u_i = w_1 k_i^{(1)} + w_2 k_i^{(2)} + \dots + w_m k_i^{(m)}$$

$$u_m = w_1 k_m^{(1)} + w_2 k_m^{(2)} + \dots + w_m k_m^{(m)}$$

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m w_i(x, t) K^{(i)} \quad (\text{الف} - ۱۴)$$

تفسیر حل فوق این مطلب است که برای هر نقطه مفروض در صفحه مختصات  $(t-x)$ ، مقدار  $u(x, t)$  در این نقطه، تنها به  $m$  مقدار اولیه ای بستگی دارد که در حقیقت این نقاط، محل تقاطع خطوط مشخصه با محور  $x$  ها هستند و میتوان رابطه (الف - ۱۵) را در مورد آنها نوشت.

$$x_0^{(i)} = (x - \lambda_i t) \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{الف} - ۱۵)$$

با توجه به تعریف سیستم معادلات هذلولوی یادآوری می گردد که می توان مقادیر ویژه و متمایز  $\lambda$  را به صورت زیر طبقه بندی نمود:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \quad (\text{الف} - ۱۶)$$

این مقادیر، درحقیقت مقادیر ویژه ماتریس ضرایب  $A$  می باشند و مفهوم فیزیکی آنان سرعت امواج موجود در مساله است. همچنین در سیستم معادلات هذلولوی، مقادیر بردار ویژه های  $K^{(i)}$  نیز به صورت مستقل خطی می باشند.

باین مقدمه مجدداً به مساله ریمان باز میگردیم. اکنون چنانچه شرایط اولیه لازم برای حل سیستم معادلات (الف - ۱) را به جای (الف - ۴)، به صورت مساله ریمان (الف - ۳)، تعریف نماییم، براساس

جواب به دست آمده برای متغیر اصلی در رابطه (الف-۱۴)، میتوان  $U_L$  و  $U_R$  را نیز برحسب بردارهای ویژه، بسط داد.

$$U_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{K}^{(i)} \quad , \quad U_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{K}^{(i)} \quad (\text{الف-۱۷})$$

در روابط فوق  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  ضرایب ثابت هستند. بسط مقادیر ثابت  $U_L$  و  $U_R$  به شکل فوق در واقع، حالات خاصی از رابطه (الف-۱۴)، میباشد.

همانند حالت قبلی، با استفاده از تبدیل متغیر اصلی مساله به متغیر مشخصه و نوشتن فرم مشخصه معادله، در این قسمت نیز میتوان مساله ریمان را شکافته و تعداد  $m$  مساله ریمان اسکالر برای معادلات تفکیک شده تعریف نمود.

$$w_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha_i & x \leq x_0 \\ \beta_i & x > x_0 \end{cases} \quad (\text{الف-۱۸})$$

با تعریف مساله ریمان برای متغیر مشخصه، شرایط اولیه لازم برای حل سیستم معادله (الف-۷)، تامین شده و مشابه حالت قبلی، برحسب متغیر مشخصه، مساله حل میشود.

$$w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i & x - \lambda_i t \leq 0 \\ \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (\text{الف-۱۹})$$

از سوی دیگر به ازای هر نقطه مفروض در صفحه مختصات  $(t-x)$ ، میتوان مقدار ویژه ای همچون  $\lambda_1$  را یافت به نحوی که رابطه  $\lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_{I+1}$ ، برای آن نقطه برقرار باشد. بدین شکل میتوان عبارت زیر را بیان نمود:

$$\forall i \rightarrow x - \lambda_i t > 0, \quad i \leq I \quad (\text{الف-۲۰})$$

براساس رابطه فوق،  $I$ ، عددی صحیح و ماکزیمم مقدار  $n$  است؛ هرگاه رابطه فوق برای  $n$  برقرار باشد. بنابراین می توان حل نهایی مساله ریمان را برای سیستم معادلات هذلولوی مورد بحث بر حسب متغیر های اصلی مساله به صورت زیر بیان کرد:

(الف-۲۱)

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=1}^I \beta_i K^{(i)}$$

امواج موجود در مساله، در مقدار متغیر لحاظ شده و کمیت  $I=I(x, t)$ ، به خوبی این شکاف را در محاسبه مقدار متغیر نشان میدهد.

### الف-۳-۲- استفاده از روابط پرش و ثوابت عمومی ریمان

می توان بسته به نوع و ماهیت هر یک از امواج موجود در مساله ریمان، توسط یکی از روابط پرش یا ثوابت عمومی ریمان، مجهولات دو طرف آن موج را به هم وصل نمود. توسط این روابط، در واقع مجهولات یا متغیرهای مساله در عرض هر موج به هم مربوط میشوند.

اصولاً شیب هر یک از خطوط مشخصه، لزوماً در هر دو طرف آن خط، باهم برابر نیست. و به طور کلی ۳ وضعیت ممکن است برای موج  $p$  رخ دهد:

$$(1) \quad \lambda^{(p)}(U_L) < \lambda^{(p)}(U_R) \quad ; \quad \text{این وضعیت مربوط به زمانی است که مشخصه ها از محل شروع}$$

شکاف اولیه، به تدریج در طی گام های زمانی بعدی واگرا شوند. در این حالت، موج از نوع

ترقیق می باشد. ( Rarefaction Wave )

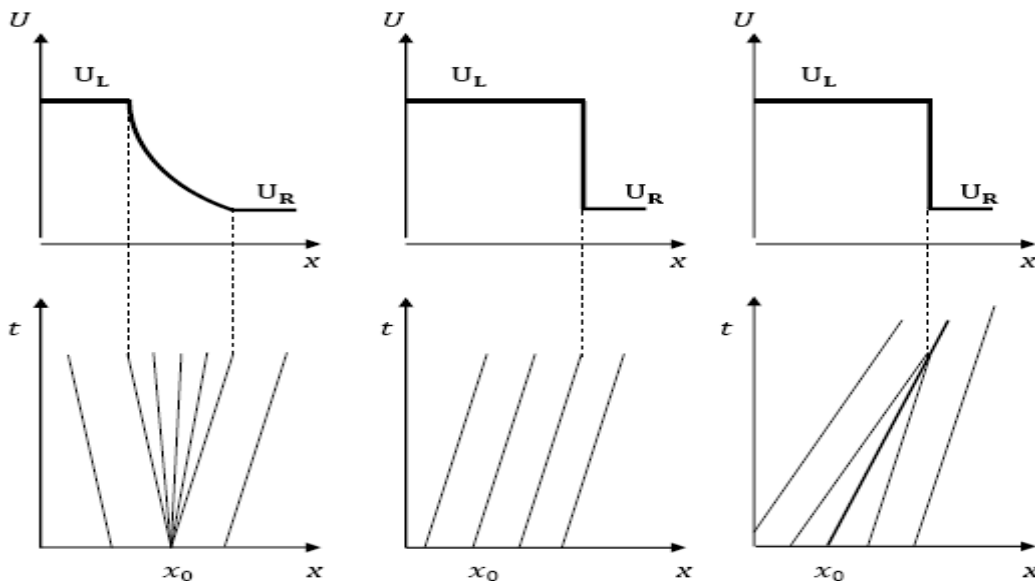
$$(2) \quad \lambda^{(p)}(U_R) = \lambda^{(p)}(U_L) \quad ; \quad \text{در این حالت مشخصه ها موازی بوده و موج ما از نوع ناپیوستگی}$$

تماسی است. (Contact Discontinuity)

۳)  $\lambda^{(p)}(U_L) < \lambda^{(p)}(U_R)$ ؛ در این مورد نیز با توجه به همگرا شدن خطوط مشخصه در گام های

زمانی بعدی، با موج تکانه روبرو هستیم. ( Shock Wave )

فراموش نمیگردد که ذکر نمادهای  $U_L$  و  $U_R$  در روابط فوق، به مفهوم مقدار متغیر اصلی مساله در



سمت چپ و راست موج مورد نظر (موج  $p$  ام)، است و با آن چه که در گذشته در تعریف مسائل ریمانی بیان کردیم، تفاوت دارد. پس از تعیین نوع موج مورد نظر، از رابطه متناسب با آن موج برای ارتباط دادن مجهولات دو طرف موج، استفاده میشود.

در تصویر فوق، به ترتیب امواج ترقیق، ناپیوستگی تماسی، شوک از چپ به راست قابل مشاهده هستند.

۱- اگر موج مورد نظر از نوع تکانه باشد، در این صورت از رابطه مرسوم به پرش یا هوگونیت -

رانکاین استفاده می کنیم. ( Jump Relationship Or Rankine-Hugoniot )

بر این اساس، با مراجعه به منابع معتبر متعددی، این رابطه را میتوان استفاده نمود. برای اثبات این

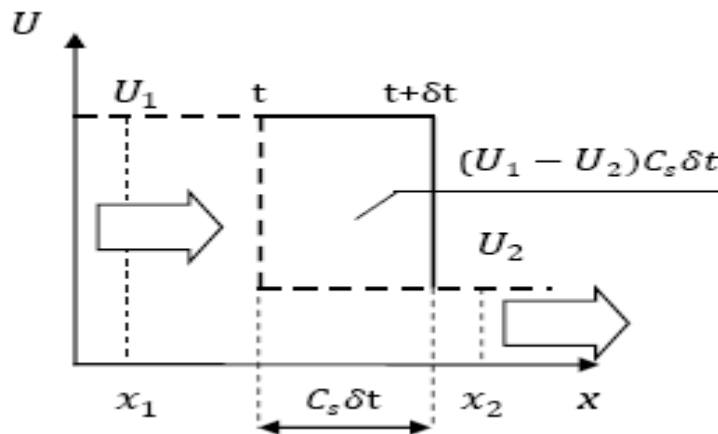
مختصر، می

شکل الف-۳ با

کنترل  $\Omega$  به

شامل موج

رابطه پرش را



رابطه به صورت

توان مطابق

تعریف حجم

گونه ای که

تکانه باشد،

به دست آورد.

### الف-۳- حجم کنترل شامل موج تکانه

در شکل فوق، مرزهای چپ و راست حجم کنترل  $\Omega$  با  $x_1$  و  $x_2$  نشان داده شده، و مقادیر  $U$ ، در این

مرزها به ترتیب  $U_1$  و  $U_2$  نمایش داده میشوند. همچنین  $C_s$ ، مفهوم سرعت شوک (سرعت موج) را

میرساند. همچنین مقدار  $U$  در فاصله بین موج تکانه و هر مرز، به صورت ثابت فرض میشود. با این

تفاسیر، در حد فاصل یک گام زمانی بینهایت کوچک همچون  $\delta t$ ، مقدار  $U$  موجود در حجم کنترل، به

اندازه مقدار  $\delta U$  تغییر می یابد که این تغییر برابر است با :

(الف-۲۲)

$\delta U = (U_1 - U_2)C_s \delta t$  این افزایش ناشی از موازنه و تعادل میان فلاکس های ورودی و خروجی از مرزهای حجم کنترل است:

(الف - ۲۳)

$\delta U = [F(U_1) - F(U_2)]\delta t$  با جاگذاری

۲ رابطه در یکدیگر، به رابطه موسوم به رابطه پرش میرسیم:

(الف - ۲۴)

$F(U_1) - F(U_2) = (U_1 - U_2)C_s$  رابطه فوق

همچنین قابل تعمیم به حالتی است که مقدار  $U$  در دو طرف شوک ثابت نمی باشد و برای این منظور از بسط سری تیلور و میل دادن سائز حجم کنترل به صفر، استفاده می کنیم [۲۰].

بنابراین رابطه پرش برای امواج شوک، معتبر بوده و توسط آن می توان مقادیر متغیر اصلی در دو طرف این امواج را به یکدیگر مربوط نمود. در حقیقت طبق تعریف زمانی می توان از رابطه پرش بهره جست که مقدار سرعت پشت موج (انتهای موج)، بزرگتر یا برابر با مقدار سرعت پیشانی موج باشد.

۲- اگر موج مورد نظر از نوع ترقیق باشد، استفاده از رابطه دیگری در دستور کار قرار می گیرد

که رابطه ثوابت عمومی ریمان نام دارد.

با در نظر گرفتن سیستم معادلات هذلولوی  $m \times m$  به فرم (الف-۱)، همچنانکه بیان شد، حل این

سیستم معادلات، متشکل از  $m$  موج می باشد که هر کدام در امتداد خط مشخصه ای به سرعت  $\lambda^{(P)}$

منتشر می شوند. ( $P=1, \dots, m$ )

طبق محاسبات و اثبات های مندرج در منابع دیگر [۲۰] ثوابت عمومی ریمان، روابط دیفرانسیلی معتبری هستند که برای قوانین بقایی، در عرض هر موج ترقیق، و نه در امتداد آنها، نوشته شده و قابل استفاده می باشند. اکنون برای سیستم معادلات فوق الذکر، چنانچه موج  $p$  ام از نوع ترقیق باشد، در عرض این موج، با استفاده از رابطه ثوابت عمومی ریمان، به رابطه زیر میرسیم.

(الف - ۲۵)

$$\text{تا } \frac{dU_1}{k_1^{(p)}} = \dots = \frac{dU_m}{k_m^{(p)}} = \text{Cst} \quad \text{across} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda^{(p)}$$

$m$  مربوط به مولفه های بردار ویژه  $K^{(p)}$  و بردار متغیر اصلی  $U$  میباشند. بدین ترتیب، رابطه فوق، مقادیر متغیر را در دو سوی موج ترقیق، به هم مرتبط میکند.

۳- چنانچه موج مورد نظر از نوع ناپیوستگی تماسی باشد، میتوان از هر کدام از روابط پرش یا ثوابت عمومی ریمان، جهت ارتباط میان متغیر های دو طرف موج، بهره برد؛ چرا که این امواج دارای سرعت ثابت میباشند و کلیه مطالب بیان شده در مورد امواج ترقیق یا تکانه، در مورد این امواج نیز صدق میکند.

در این پروژه، جهت حل مسائل ریمان از رابطه ثوابت عمومی ریمان، استفاده شده است؛ چرا که با امواجی روبرو بودیم که از نوع ناپیوستگی تماسی و دارای سرعت ثابتی بوده اند.

در پایان به این جمع بندی می رسیم که پس از تعیین هویت  $m$  موج موجود در مساله ریمان، می توان برای هر موج، رابطه متناسب با آن موج را نوشته و بدین ترتیب با تشکیل یک دستگاه  $m$  معادله  $m$  مجهولی، تمامی مجهولات مساله را در هر یک از فواصل بین خطوط مشخصه یا امواج متشکل حل، به دست آورد.



## الف-۴- بررسی و حل مساله ریمان برای یک معادله اسکالر ساده

در این قسمت، با در نظر گرفتن معادله اسکالر ساده (۳-۲۲)، که در فصل سوم کلیات روش گودونو را روی آن اعمال نمودیم، به تعریف و حل مساله ریمان برای این معادله می پردازیم.

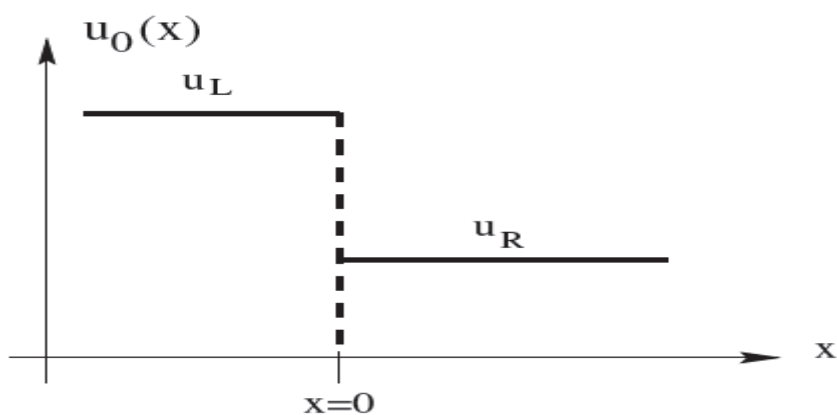
همچنانکه در فصل سوم نیز توضیح داده شد، معادله مدل فوق ساده ترین معادله دیفرانسیل پاره ای هذلولوی میباشد که میتوان برای بررسی و آزمایش روشهای گوناگون عددی و اهداف مطالعاتی، مورد توجه قرار داد. بدین ترتیب مساله ریمان زیر نیز ساده ترین مساله ریمانی است که قابل بررسی میباشد.

با در نظر گرفتن معادله (۳-۲۲)، مساله ریمان را میتوان برای آن به صورت زیر تعریف نمود:

$$u(x, 0) = u^{(0)}(x) \begin{cases} u_L & x \leq x_0 \\ u_R & x > x_0 \end{cases} \quad (\text{الف} - ۲۶)$$

تصویر شماتیک مساله ریمان، در شکل الف-۴، قابل مشاهده است. مقدار متغیر  $u$  تابعی از  $t$ ، میباشد و به صورت زیر بیان میشود:

$$u = u(x(t), t) \quad (\text{الف} - ۲۷)$$



الف-۴- تعریف مساله ریمان برای معادله اسکالر (۳-۲۲)

همچنین، به علت ثابت بودن سرعت موج ( $a = \lambda$ )، تنها موج موجود در مساله از نوع ناپیوستگی تماسی است. خط مشخصه در صفحه  $x-t$ ، به صورت  $x = x(t)$  بیان میشود. شیب این خط در صفحه  $x-t$ ، برابر با  $1/a$  میباشد.

(الف - ۲۸)

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ معادله خط}$$

مشخصه ای که از نقطه  $(x_0, 0)$  میگذرد، براساس شیب خط (با فرض مقدار مثبت  $a$ ) به صورت زیر نوشته میشود:

(الف - ۲۹)

$$x = x_0 + a.t \text{ برای حل}$$

مساله ریمان، با نگاهی به صورت معادله مدل (۳-۲۲)؛ مشخص است که با توجه به سرعت مشخصه (a) و رابطه (الف - ۲۸)، در واقع صورت معادله (۳-۲۲)، نرخ تغییرات متغیر (u)، در امتداد خط مشخصه میباشد و با توجه به اینکه این رابطه مساوی با صفر است، این نتیجه را میتوان گرفت که

متغیر در امتداد خط مشخصه  $x = x(t)$ ، ثابت است. براساس این ثبات، میتوان نتیجه گرفت که چنانچه شرایط اولیه مساله در زمان  $t = 0$  بصورت رابطه (الف-۳۰)، در نظر گرفته شود، در امتداد خط مشخصه گذرنده از نقطه  $x_0$  (نقطه ای که شرایط اولیه مطابق (الف-۳۰) در آن تعریف شده است)، مقدار حل مساله را میتوان به صورت رابطه (الف-۳۱) بیان نمود.

$$u(x, 0) = u^{(0)}(x) \quad (\text{الف-۳۰})$$

$$(\text{الف-۳۱})$$

$$u(x, t) = u^{(0)}(x_0) = u^{(0)}(x - at) \quad \text{در رابطه فوق،}$$

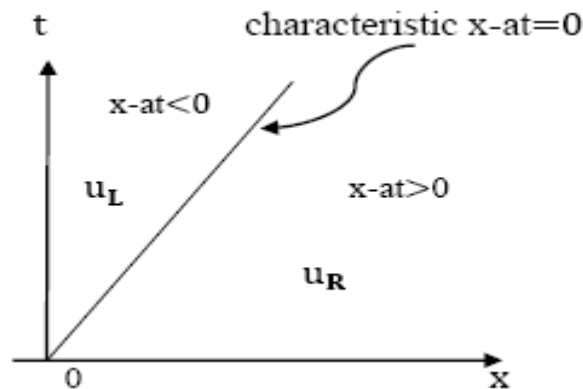
تساوی دوم، براساس رابطه (الف-۲۹) بیان شده است. در واقع رابطه بالا، ثابت میکند، مقدار  $u$  فقط به صورت تابعی از  $(x-x_0)/t$  میباشد.

حال اگر شرایط اولیه مساله را در نقطه ای همچون  $x_0$ ، مطابق مساله ریمان (الف-۲۶) در نظر گیریم (بجای رابطه کلی (الف-۳۰))، مشابه رابطه (الف-۳۱)، حل مساله به صورت زیر بدست می آید:

$$u(x, t) = u^{(0)}(x - at) = \begin{cases} u_L & x - at \leq 0 \\ u_R & x - at > 0 \end{cases} \quad (\text{الف-۳۲})$$

رابطه بالا براساس روابط (الف-۳۱) و (الف-۲۹)، به دست آمده است و تفاوت ظاهری که در این رابطه دیده میشود ناشی از این مطلب است که در تعریف مساله ریمان در روش گودونو، نقطه  $x_0$ ، منطبق بر مبداء مختصات موضعی است و در نتیجه، رابطه (الف-۳۲)، در واقع به ازای  $x_0 = 0$  به دست آمده است.

به شیوه مشابه، برای هر نقطه  $x_0$ ، واقع روی محور  $x$  ها، میتوان به صورت بالا مساله ریمان را تعریف و حل نمود. در شکل الف-۵، حل مساله ریمان فوق به صورت شماتیک به تصویر کشیده شده است.



الف-۵- نمای شماتیک حل مساله ریمان برای یک معادله اسکالر هذلولوی

در انتهای این پیوست، ذکر نکته ای ضروری میباشد و آن دلیل استفاده از علامت  $\leq$ ، به جای  $<$  در تعریف مساله ریمان است.

در برخی منابع و مقالات، به جای استفاده از علامت  $\leq$  در تعریف مساله ریمان، در روابطی نظیر رابطه (الف-۳)، از علامت  $<$  استفاده میشود. این در حالی است که استفاده از علامت  $\leq$  تعریف مقطع اولیه  $u(x,0)$  را در تمامی نقاط مش (شامل نقطه  $x=x_0$ ) و درحقیقت بیان کامل شرایط اولیه را تضمین میکند. در نقطه مقابل، استفاده از علامت  $<$  در تعریف مساله ریمان، به طور ضمنی، نقطه  $x_0$  را از تعریف شرایط اولیه خارج میکند و این امر میتواند منجر به بروز پیچیدگی ها و مشکلات اضافی خاصی شود که تحت شرایط بخصوصی، رخ میدهند. این در حالی است که محاسبه مقدار متغیر  $U$  در گامهای زمانی بعدی، در نقطه  $x=x_0$  یکی از مهمترین ملزومات روش عددی گودونو میباشد. بنابراین، تعریف مساله ریمان به صورت فوق، ترجیح داده میشود؛ چرا که در جهت اطمینان، تعریف شرایط اولیه مساله در تمامی نقاط شبکه یا مش محاسباتی صورت گرفته است.

## مراجع:

1. Allievi, L. (1903), "Theoria generale del moto perturbato dell, acqu anei tubi in pression," ann. Soc. Ing. Arch. Italiana. ( French translation by Allievi, (1904)).
2. Bell, J.B., Dawson, C.N., Shubin, G.R., (1988), "An unsplit, higher-order Godunov method for scalar conservation laws in multiple dimensions", Journal of Comput. Phys., Vol. 74, pp. 1-24.
3. Belytchko, T., Karabin, M., Lin, J.I., (1986), "Fluid-Structure Interaction in Waterhammer Response of Flexible Piping", PVP, ASME, Vol. 108, pp. 249-255.
4. Ben-Artzi, M., Falcovitz, J., (1984), "A second-order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics", Journal of Comput. Phys., Vol. 55, pp. 1-32.
5. Cabelka, J., Franc, I., (1959), "Closure characteristics of a Valve with Respect to water hammer," Proc., Eighth congress, International Assoc. for Hydraulic research, Montreal, Canada. pp. 6-A-1 to 6-A-23.
6. Chadhry, M.H., (1979), Applied Hydraulic Transients. VanNostrand Reinhold Co., New York, USA.
7. Chalabi, A., (1999), "Convergence of Relaxation Schemes for Hyperbolic Conservation Laws With Stiff Source Terms," Math. Comput., Vol. 68, No.227, pp. 955– 970.
8. Chalabi, A., Qiu, Y., (2000), "Relaxation Schemes for Hyperbolic Conservation Laws With Stiff Source Terms: Application to Reacting Euler Equations," Journal of Sci. Comput., Vol. 15, No.4, pp. 395–416.
9. Cunge, J.A., (1988), "Note on the possible application of Godunov-type algorithms to open-channel flow and advection problems", University of Iowa (unpublished report).
10. Davis, S.F., (1988), "Simplified Second-Order Godunov-Type Methods" SIAM Journal of Sci. Stat. Comput., Vol. 9, pp. 445–473.
11. Dumbser, M., Eaux, C., Toro, E.F., (2007), "Explicit finite volume schemes of arbitrary high order of accuracy for hyperbolic systems with stiff source terms", Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge, UK, Preprint Series, NI07007-NPA 67.
12. Einfeldt, B., (1988), "On Godunov-type methods for gas dynamics", SIAMJNA, Vol. 25(2), pp. 294–318.
13. Ellis, J., (1980), "A Study of Pipe-Liquid Interaction Following Pump Trip and Check-Valve Closure in Pumping Station", Proceedings of the Third International Conference on Pressure Surges, Vol. 1, BHRA Fluid Engineering Canterbury, England, pp. 203-220.

14. Fellin, W., (2002), "Numerical Computation of Nonlinear Inelastic Waves in Soil", *Journal of Pure appl. Geophys.*, Vol. 159, pp. 1737-1748.
15. Fujihara, M., Borthwick, A.G.L., (2000), "Godunov-type solution of curvilinear shallow-water equations", *Journal of Hydr. Engrg. ASCE*, Vol. 126, No.11, pp. 827-836.
16. Gale, J., Tiselj, I., (2008), " Godunov's Method for Simulations of Fluid-Structure Interaction in Piping Systems", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Trans. ASME, Vol. 130, No. 031304.
17. Gassner, G., L'orcher, F., Munz, C.D., (2007), "A contribution to the construction of diffusion fluxes for finite volume schemes and discontinuous Galerkin schemes", *Journal of Comput.Phys.*, Vol. 224, No.2, pp. 1049–1063.
18. Gromeka, I. S., (1883), " Concerning the propagation Velocity of Water hammer waves in Elastic Pipes," *Scientific Soc. Of Univ. of Kazan, Kazan, U.S.S.R.*
19. Guinot, V., (2001), "Numerical simulation of two-phase flow in pipes using Godunov method", *Int. J. Num. Meth. Engrg*, Vol. 50, pp. 1169-1189.
20. Guinot, V., (2003), "*Godunov-Type Schemes. An Introduction for Engineers*", Elsevier.
21. Hoffmann, K.A., (1989), "*Computational Fluid Dynamics for Engineers*", Engineering Education Systems, Austin, Texas, USA.
22. Jin, S., Levermore, D., 1996, "Numerical Schemes for Hyperbolic Conservation Laws With Stiff Relaxation Terms," *Journal of Comput. Phys.*, Vol. 126, No.1, pp. 449–467.
23. Joukowski, N.E., (1900), *Mem. Imperial Academy Soc. Of St. Petersburg*, Vol. 9, no.5. (in Russian, translated by O. Simin, (1904), *Water works Assoc.*, Vol. 24, pp.341- 424).
24. Lavooij, C.S., Tijsseling, A.S., (1990), " Fluid Structure Interaction in Compliant Piping Systems", *Proceedings of 6th Int. Conference. on Pressure Surges*, BHRA, pp. 85-100.
25. Lebedev, M.G., Sitnik, V.V., (2006), "Computing Compressible Gas Flows with Infinite Velocity and Pressure Gradients" *Journal of Comput.*, Vol. 17, No.2, pp. 1-13.
26. Leslie, D.J., Vardy, A.E., (2001), "Practical Guidelines for fluid-structure Interaction in Pipelines: A Review" 10th international meeting of the Work Group on the behaviour of Hydraulic machinery under steady oscillatory conditions, Trondheim, Norway, pp. 26-28.
27. Le Veque, R. J., and Yee, H. C., (1990), "A Study of Numerical Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Source Terms", *Journal of Comput. Phys.*, Vol. 86, No.1, pp. 187–210.
28. Le Veque, R.J., (1992), "*Numerical Methods for Conservation Laws*", 2nd ed., Birkhauser, Basel.

29. Le Veque, R.J., (2002), "Finite Volume Method for Hyperbolic Problem", Cambridge University Press, Cambridge.
30. Li, Q.S., Yang, K, Zhang, L., (2003), "Analytical Solution for Fluid-Structure Interaction in Liquid-Filled Pipes Subjected to Impact-Induced water hammer", ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 129, pp. 1408-1417.
31. Lin, X., Ballmann, J., (1993), "A Riemann Solver and a Second-Order Godunov Method for Elastic-Plastic Wave Propagation in Solids", Int. Journal of Impact Engng., Vol. 13, No.3, pp. 463-478.
32. Marey, M., (1875), "Mouvement des Ondes Liquides Pour servir a la theorie du pouls," Travaux du laboratoire de M.Marey.
33. Ménébréa, L.-F., (1858), "Note sur les effets du choc de l'eau dans les conduites", (Note on the effects of water shock in conduits.) Comptes Rendus Hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 47, 221-224 (in French). (English translation by A. Anderson (1976).)
34. Miniati, F., Colella, (2007), "A Higher Order Modified Godunov's Method for PDE's With Stiff Sources", Journal of Comput. Phys., pp. 1-18.
35. Rachid, F.B.De.F, Mattos, H.S.C, (2002), "Modelling of the fluid-structure Interaction in Inelastic Piping Systems" Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 24, No.1, pp. 62-69.
36. Ruus, E., (1966), "Optimum Rate of closure of Hydraulic Turbine Gates" presented at Amer. Soc. Mech. Engrs. Engineering Inst. Of Canada conference, Denver, Colorado.
37. Skalak, R., (1956), "An Extension of the theory of Water Hammer", Trans. ASME, Vol. 78, No.1, pp. 105-116.
38. Streeter, V.L., (1963), "Valve stroking to control water hammer" Jour., Hyd. Div., Amer. Soc. Civil Engrs., Vol. 89, pp. 39-66.
39. Streeter, V. L., Wylie, E.B., (1993) "*Fluid Transients in Systems*", Prentice Hall.
40. Streeter, V.L., Lai, C., (1963), "Waterhammer Analysis Including Fluid Friction", Trans Amer. Soc. Civ. Engrs, Vol. 128, pp. 1491-1524.
41. Tabak, E.G., (1996), "A second-order Godunov method on arbitrary grids", Journal of Comput. Phys., Vol. 124, pp. 383-395.
42. Thoreley, A.R.D., (1969), "Pressure Transients in Hydraulic Pipelines", ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 91, pp. 453-461.
43. Tijsseling, A.S., (2003), "Exact Solution of Linear Hyperbolic Four-Equation System in Axial Liquid-Pipe Vibration", Journal of Fluids and Structures, Vol. 18, Issue 2, pp. 179-196.
44. Tijsseling, A.S., (1996), "Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems : a review", Journal of Fluids and Structures, Vol 10, pp. 109-146.
45. Tiselj, I., Horvat, A., (2002), "Accuracy of the Operator Splitting Technique for Two-Phase Flow With Stiff Source Terms", Proceedings of ASME FEDSM02.

46. Tiselj, I., Petelin, S., (1997), "Modelling of Two-Phase Flow With Second-Order Accurate Scheme," *Journal of Comput. Phys.*, Vol. 136, pp. 503–521.
47. Titarev, V.A., Toro, E.F., (2002), "ADER: Arbitrary high. Order Godunov approach", *Journal of Comput. Phys.*, Vol. 17 (1–4), pp. 609–618.
48. Toro, E.F., (2009), "*Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*", (Third ed.). Springer-Verlag.
49. Toro, E.F., (2008), "Computational Methods for Hyperbolic Equations", *Lect. Notes Phys.* 754, pp. 3-69.
50. Toro, E.F., Millington, R.C., Nejad, L.A.M., (2001), "Towards very high-order godunov schemes. In: *Godunov Methods: Theory and Applications*", Edited Review, Toro, E.F. (Editor). Kluwer Academic/Plenum Publishers, pp. 905–938.
51. Wiggert, D.C., Hatfield, F.J., Stuckenbrock, S., (1987), "Analysis of Liquid and Structural Transients in Piping by Method of Characteristics", *Journal of Fluid Engineering*, *Trans. ASME*, Vol. 109, No.2, pp. 161-165.
52. Williams, D.J., (1977), "Waterhammer in Non-Rigid Pipes: Precursor Waves and Mechanical Damping," *Journal of Mechanical Engineering Science*, *Institute of Mechanical Engineers*, Vol. 19, No.6, pp. 237-242.
53. Yang, K., Li, Q.S., Zhang, L., (2004), "Longitudinal Vibration Analysis of Multi-Span Liquid-Filled Pipelines with Rigid Constraints", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, pp. 125-147.
54. Zielke, W., Hack, H.P., (1972), "Resonance Frequencies and Associated Mode Shapes of Pressurized Piping Systems", *Proceeding of the first International Conference on Pressure Surges*, BHRA Fluid Engrs, Bedford, UK, pp. G1-1-13.

۵۵- استریتر وال، وایلی ب، [ترجمه] ملک زاده غ، کاشانی حصار م، معتمدی غ، (۱۳۷۵)، " مکانیک سیالات " چاپ اول، انتشارات فرید، مشهد.

۵۶- حسینی م، ابریشمی ج، (۱۳۸۶) " هیدرولیک کانالهای باز " چاپ هفدهم، انتشارات آستان قدس رضوی، مشهد.

۵۷- کرامت ع، (۱۳۸۴)، پایان نامه کارشناسی ارشد: " تحلیل دینامیکی شبکه های لوله توزیع سیال با روش اجزای محدود"، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز.

۵۸- مجد ع، (۱۳۸۸)، پایان نامه کارشناسی ارشد: " بررسی پدیده جدایی ستون مایع در جریان های غیر ماندگار"، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود.



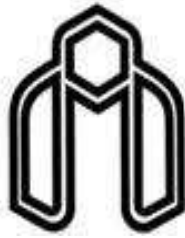
## **Abstract**

One of the most important issues in analyzing pipeline networks is simulating fluid structure interaction (FSI) caused by the unsteady flow in networks. This phenomenon involves transmission of energy and momentum between the pipeline's structure and the fluid and is normally produced by intensive change of flow rate and fluid pressure or mechanical factors in pipeline systems.

As the governing equations are hyperbolic in this phenomenon, for analyzing and simulating this interactional feature, the method of characteristics (MOC) was used. But due to some reasons like encountering with nonlinear equation systems or existence of complex terms in equations, using MOC method despite of its high efficiency and precision and sometimes need for additional numerical modeling which makes it more complicated, it has some limitations. It is therefore, necessary to consider and compare the ability of this method with other numerical methods more accurately creating more attention of researchers toward using other numerical methods for solving hyperbolic systems of differential equations similar to those of fluid structure interaction.

In this study, Godunov method was implemented as a good and efficient method for considering hyperbolic system of differential equations so we solved one of the famous laboratories reference problems in this field and compared obtained results with Godunov method applied for previous results of MOC. The compatibility of these results, showed the ability of Godunov method in the field of analyzing hyperbolic system of differential equations.

**Key words:** water hammer, Godunov method, fluid structure interaction



Shahrood University of Technology

Department of Civil Engineering

**Investigation of fluid structure interaction using  
numerical Godunov method**

**Alireza Nadjaran Toosi**

Supervisor:

**Dr. Ahmad Ahmadi**

April 2011