

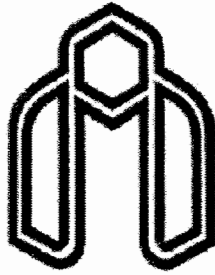
به فاع واولار نيكي وهسي

به فاع واولار نيكي وهسي

به فاع واولار نيكي وهسي

به فاع واولار نيكي وهسي

به فاع واولار نيكي وهسي



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران

## پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته و گرایش

مهندسی عمران - سازه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

عنوان :

# آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری با استفاده از روش تغییرات مرزی

استاد راهنما : دکتر بهروز حسنی

دانشجو : محمد حسین حربی منفرد

## سپاس

خداوند بزرگ را برای همه چیز سپاس گزار و بنده ام.

بر خود می دانم از زحمات بی دریغ جناب آقای دکتر بهروز حسنی نهایت قدردانی را داشته باشم که بدون راهنمایی هایشان ، انجام این تحقیق ناممکن می نمود. سربلندی و موفقیت ایشان آرزوی قلبی من است.

از تمامی اساتید دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود کمال تشکر و قدردانی رادارم. همچنین از دوست گرامی و عزیزم جناب آقای ناصر ظریف به خاطر همکاری های بی وصفش در انجام این تحقیق تشکر می کنم. از دوستان عزیزم مهندس مرتضی فلاح و مهندس احسان کبیری به خاطر همراهیشان بسیار متشکرم و پیروزی روز افزون همه عزیزان را از درگاه خداوند خواستارم.

محمد حسین منفرد

تابستان ۸۶

## پیش گفتار

طراحی ، ساخت و بهره برداری از یک سازه ، آمیزشی از هنر و علوم فنی است که به نوع نگاه طراح و درک او و تواناییش در پیاده کردن معادلات و به کار گیری آن ها بستگی دارد. در این میان طرح ساخت سازه باید بهینه باشد و در این زمینه معیارهایی وجود دارند که عبارتند از : ایمنی ، زمان ، هزینه ، وزن ، زیبایی و ... . یک طرح بهینه از نظر مهندس عمران طرحی است که در آن بیشترین ایمنی ، کمترین زمان و هزینه ، وزن کمتر و زیبایی بیشتر رعایت شده باشد.

امروزه بهینه سازی در زمینه های مختلف علوم ، مهندسی و کار نفوذ کرده است و این در حالی است که مهندسان سازه همواره در راستای بهینه سازی سازه ها تلاش کرده اند. بهینه سازی سازه ها از جهات گوناگونی مد نظر است اما در یک دسته بندی کلی شامل بهینه سازی توپولوژیک ، بهینه سازی شکل و بهینه سازی ابعاد می شود.

این تحقیق تلاشی برای بهتر و به صورت علمی درک کردن موضوع بهینه سازی شکل سازه ها است. برای این منظور سازه های متقارن محوری مورد مطالعه قرار گرفته اند. با استفاده از روش اجزای محدود و به کارگیری روش تغییرات مرزی ، آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری انجام شده است و در پایان مثال هایی جهت مقایسه نتایج به دست آمده با سایر تحقیقات انجام شده ارائه شده است. ضمن این که الگوریتم های مختلف برای بهینه سازی شکل سازه ها بررسی شده و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شده است و در نهایت بهترین الگوریتم برای بهینه سازی شکل انتخاب شده است. برای انجام فرایند تحلیل و بهینه سازی یک برنامه کامپیوتری تهیه و نوشته شده است که می تواند مورد استفاده محققان دیگر در این زمینه قرار گیرد.

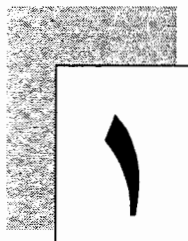
## فهرست

۱	فصل یکم : کلیات
۲	۱-۱ سازه های متقارن محوری
۵	۲-۱ تحلیل و مدل سازی
۸	۳-۱ تعریف شکل و مرزهای سازه
۸	۴-۱ مش بندی
۹	۵-۱ بهینه سازی
۱۱	۱-۵-۱ مشخصه های مسائل بهینه سازی
۱۱	۱-۱-۵-۱ اهداف
۱۲	۲-۱-۵-۱ قیود
۱۲	۳-۱-۵-۱ متغیرهای طراحی
۱۳	۲-۵-۱ بهینه سازی سازه ها
۱۵	۳-۵-۱ آنالیز حساسیت
۱۵	۶-۱ روند حل مسائل
۱۸	مراجع فصل یکم
۱۹	فصل دوم : آنالیز سازه ای به روش اجزای محدود
۲۰	۱-۲ تئوری الاستیسیته برای مسائل صفحه ای
۲۴	۲-۲ عنصر متقارن محوری
۲۷	۳-۲ بارگذاری غیر متقارن
۲۷	۴-۲ حل مسائل تنش و کرنش مسطح با روابط متقارن محوری
۲۹	مراجع فصل دوم
۳۰	فصل سوم : تولید شکل و مرزهای سازه
۳۱	۱-۳ تولید شکل

۳۱	..... ۲-۳ اسپلاین ها در بهینه سازی شکل سازه ها
۳۲	..... ۳-۳ منحنی های دو بعدی
۳۳	..... ۴-۳ منحنی های درون یابی
۳۴	..... ۵-۳ اسپلاین های مکعبی
۳۶	..... ۶-۳ منحنی های پارامتری
۳۷	..... ۷-۳ اسپلاین های پارامتری درجه سه
۳۹	..... ۱-۷-۳ اسپلاین های درجه سه فرگوسن
۳۹	..... ۲-۷-۳ اسپلاین های درجه سه بزیر
۴۰	..... ۳-۷-۳ اسپلاین های درجه سه <i>B-spline</i>
۴۰	..... ۸-۳ مقایسه اسپلاین های پارامتری برای استفاده در بهینه سازی شکل
۴۱	..... ۹-۳ <i>B-splines</i>
۴۲	..... ۱۰-۳ استفاده از نقاط کلیدی اسپلاین ها در تعریف شکل
۴۴	..... ۱۱-۳ شیب های ابتدایی و انتهایی برای اسپلاین ها
۴۵	..... ۱۲-۳ روش تولید مرزها
۴۹	..... مراجع فصل سوم
۵۰	..... فصل چهارم : تولید مش
۵۱	..... ۱-۴ تولید مش
۵۳	..... ۲-۴ روش AFT برای تولید مش
۵۴	..... ۳-۴ کنترل فرایند تولید مش
۵۶	..... ۴-۴ مفهوم مش زمینه
۶۰	..... ۵-۴ الگوریتم روش AFT
۷۱	..... ۶-۴ تطبیق و نحوه اثر پارامترها در تشکیل المان ها
۷۳	..... مراجع فصل چهارم

۷۴	..... فصل پنجم : بهینه سازی شکل
۷۵	..... ۱-۵ ساماندهی و فرمولاسیون مسائل بهینه سازی
۷۶	..... ۱-۱-۵ اهداف
۷۷	..... ۲-۱-۵ قیود
۷۹	..... ۳-۱-۵ متغیرهای طراحی
۷۹	..... ۲-۵ بهینه سازی شکل سازه
۸۱	..... ۳-۵ الگوریتم بهینه سازی
۸۴	..... ۴-۵ روش SQP
۸۸	..... مراجع فصل پنجم
۸۹	..... فصل ششم : مثال ها ، نتایج و پیشنهادها
۹۰	..... ۱-۶ صفحه ضخیم دوار با بار خطی دایره ای و حفره ای در مرکز
۹۲	..... ۲-۶ مخزن بزرگ آب
۹۶	..... ۳-۶ مقایسه الگوریتم های مختلف در بهینه سازی شکل مخزن بزرگ آب
۱۰۰	..... ۴-۶ نتایج و پیش نهاد ها
۱۰۱	..... ۱-۴-۶ تولید شکل
۱۰۱	..... ۲-۴-۶ تولید مش
۱۰۲	..... ۳-۴-۶ حل اجزای محدود
۱۰۲	..... ۴-۴-۶ بهینه سازی
۱۰۴	..... مراجع فصل پنجم

# کلیات

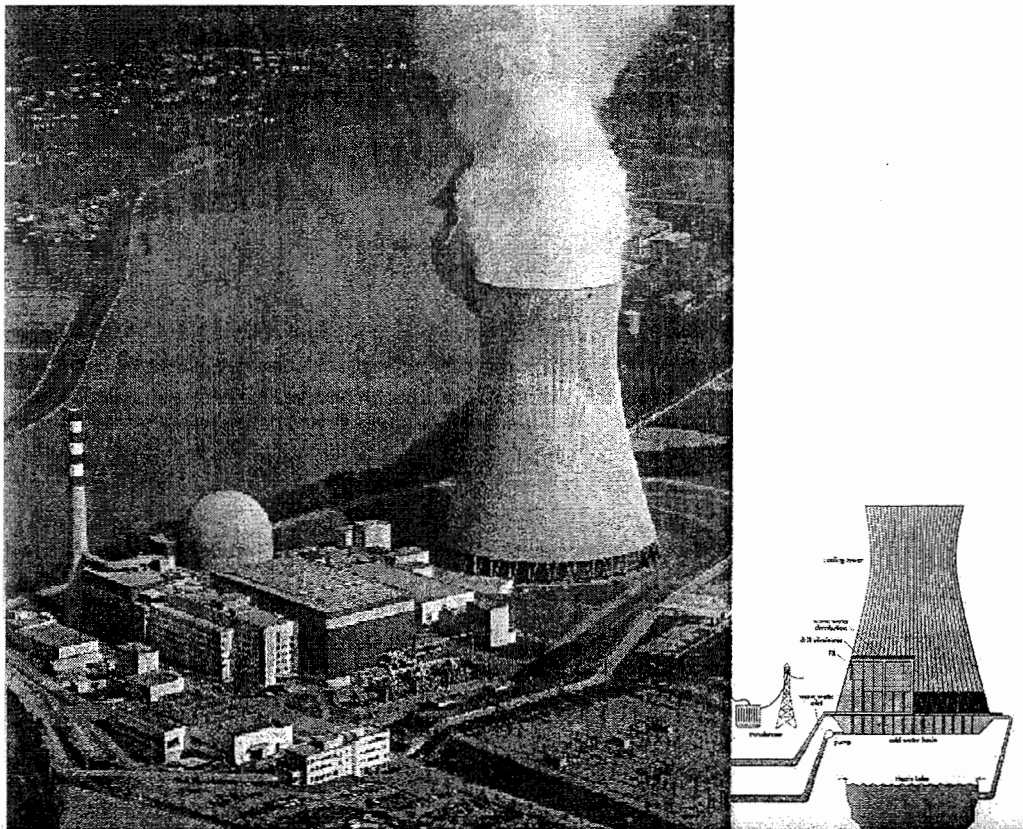


در این فصل مقدماتی در مورد این تحقیق شامل انواع سازه های مورد مطالعه ، نحوه مدل سازی ، مش بندی ، آنالیزها و بهینه سازی ارائه می شود.



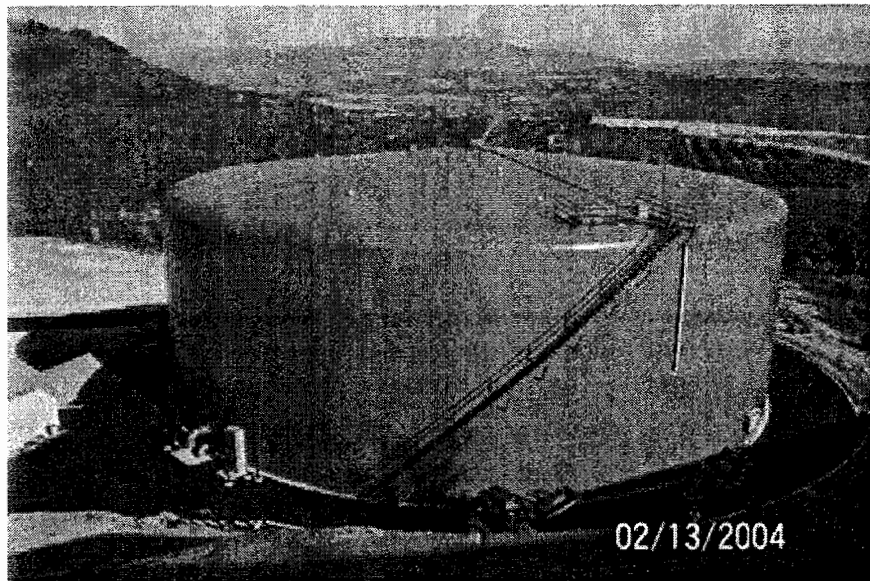
### ۱-۱ سازه های متقارن محوری<sup>۱</sup>

بسیاری از سازه های موجود در صنعت دارای تقارن محوری هستند ، از این میان می توان مخازن بزرگ استوانه ای یا مخروطی ، برج های خنک کننده نیروگاه ها ، سیلوها ، گندها ، توربین ها و سازه های کوچک صنعتی را نام برد. بعضی از این سازه ها را می توان در شکل های ۱-۱ تا ۷-۱ مشاهده کرد. این پایان نامه در ارتباط با تحلیل نیروها ، آنالیز تنش ها و سپس بهینه سازی شکل این نوع سازه ها می باشد.

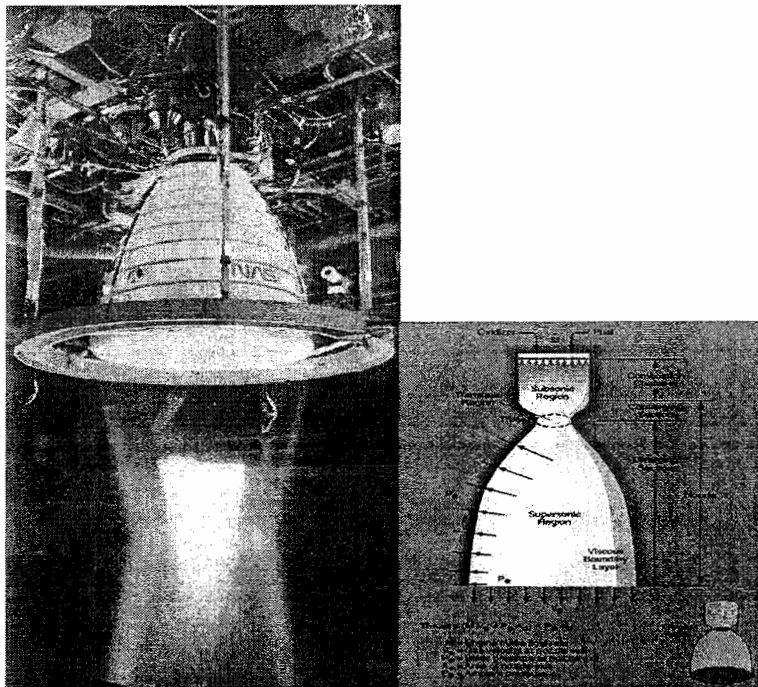


شکل ۱-۱ برج خنک کننده نیروگاه اتمی (یک سازه متقارن محوری).

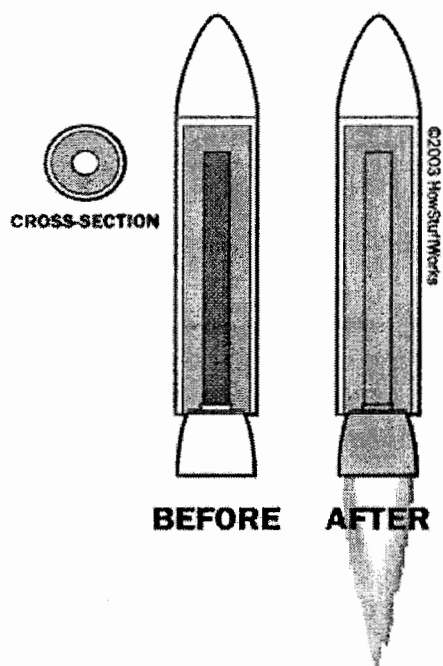
<sup>۱</sup> Axisymmetric Structures



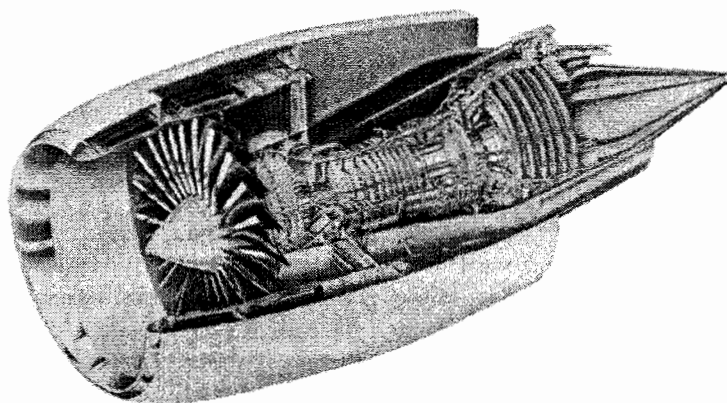
شکل ۲-۱ یک مخزن بزرگ (نمونه ای از یک سازه متقارن محوری).



شکل ۳-۱ نازل جت شاتل.



شکل ۴-۱ راکت.



شکل ۵-۱ موتور جت هواپیما، تشکیل شده از چندین سازه متقارن محوری.

های فیزیکی بسیار موفق او منجر به حالت های قابل ساخت شد. با افزایش قدرت محاسبات کامپیوتری طی دهه هفتاد میلادی و برای جواب گویی به انجام پروژه های بزرگ ، روش های تحلیلی قوت گرفت و جایگزین مدل های فیزیکی و آزمایشگاهی شد. البته روش های تحلیلی برای بسیاری از سیستم های واقعی بسیار مشکل است. بنابراین به کارگیری روش های عددی و جداسازی ضروری به نظر می رسد.

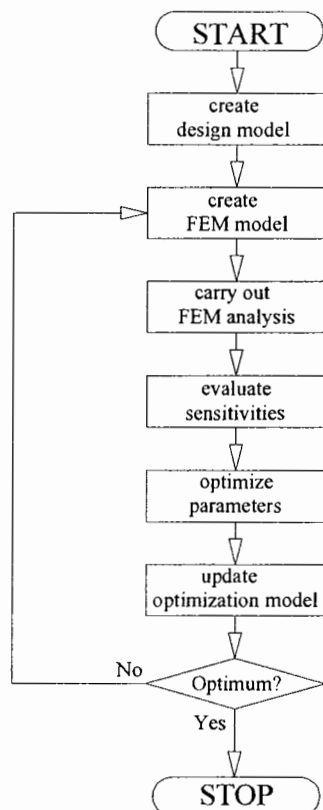
اگر چه که روش های تحلیلی و آزمایشگاهی در بسیاری از موارد غیر ممکن است ، اما این روش ها اهمیت خود را از دست نمی دهد . در هر حال بسیاری از سخت ترین مسایل در زندگی واقعی فقط با راه حل های کامپیوتری قابل حل هستند و انعطاف پذیری و قدرت این روش ها بی همتا باقی می ماند . به وسیله روش های شناخته شده کامپیوتری ، می توان روش های آزمایشگاهی را مدل سازی کرد و گسترش داد . سپس می توان روش های کامپیوتری وابسته و مرتبط با آن را برای به دست آوردن شکل سازه ها ، به وسیله سعی و خطا ، به دست آورد . البته در تحقیقات وزمینه های عملی فشار فزاینده ای برای بهبود و دقت تحلیل عددی برای حل مسایل وجود دارد . بدین منظور مدل های عددی بزرگتر و پیچیده تری مورد نیاز است که شامل استفاده از متغیر های بیشتر و اثرات بیشتر غیر خطی و روابط تشکیل دهنده واقعی بیشتر می شود .

در بین انواع روش های عددی ، روش اجزای محدود به طور محکمی به عنوان یک وسیله مهندسی برای آنالیز الاستیک خطی سازه ها به ثبت رسیده است . مزیت برجسته روش اجزای محدود در توانایی آن بر آنالیز شکل سازه های پیچیده با ابعاد متغیر و شرایط مرزی سخت و بارگذاری دلخواه است. از نقطه نظر مهندسی استفاده از روش اجزای محدود برای آنالیز سازه ای به صورت جدی زمان مورد نیاز برای آنالیز را کاهش و به همین ترتیب پیچیدگی سازه هایی که می توانند آنالیز شوند را افزایش داده است . در این تحقیق با استفاده از روش اجزای محدود<sup>1</sup> (*FEM*) به آنالیز و در نهایت بهینه سازی سازه های مورد نظر پرداخته ایم.

بهینه سازی سازه ای با استفاده از تکنیک *FEM* نیازمند استفاده مداوم از آنالیزهای سازه ای و حساسیت با بهینه ساز عددی است . موفقیت پروسه بهینه سازی سازه ای بستگی به انتخاب های شایسته

<sup>1</sup>Finite Element Method

و دقیق از مدل  $FEM$  و آنالیز حساسیت و روش حل مسئله برنامه نویسی ریاضی غیرخطی دارد. این رویه در شکل ۱-۳ نشان داده شده است.



Algorithm for structural shape optimization

شکل ۱-۸ الگوریتم بهینه سازی شکل سازه ها

در روش اجزای محدود عناصر متقارن محوری برای مدل نمودن اجزای سازه ای که حول یک محور دارای تقارن دورانی هستند مورد استفاده قرار می گیرند. اگر این سازه ها تحت اثر بارهای با تقارن محوری نیز باشند، در این صورت تحلیل دو بعدی یک رادیان واحد از سازه، توزیع کامل تنش و کرنش در کل سازه را نشان می دهد [۲]. بدین ترتیب این قبیل از مسائل متقارن محوری را می توان قسمتی از مسائل صفحه ای مکانیک جامدات در نظر گرفت.

### ۳-۱ تعریف شکل و مرزهای سازه

اشکال سازه هایی که با آن ها برخورد می شود ، خیلی دلخواه است و همچنین پیچیده ، طوری که وسایل کامپیوتری برای آنالیز و طراحی آن ها باید از قدرت زیاد و روش های روان برای تعریف هندسی برخوردار باشد . در این تحقیق نمایش پارامتری منحنی ها برای نشان دادن هندسه سازه به کار گرفته شده اند . همچنین این فرم نمایش نسبت به نمایش غیر پارامتریک مزیت های صریحی در بهینه سازی شکل خواهد داشت :

۱- توابع پارامتریک آزادی بیشتری برای کنترل شکل ها و انحنا ها تامین می کند.

۲- نمایش پارامتریک به سیستم ویژه مختصاتی وابسته نیست.

۳- توابع پارامتریک ، یک فرمت ریاضی ساده و تک و همچنین متداول را برای همه منحنی ها و رویه ها ارائه می کند که به صورت جدی و قوی تعداد و پیچیدگی زیر برنامه های مورد نیاز در اجراهای کامپیوتری را کاهش می دهد .

تکنیک های استفاده از کامپیوتر برای تعریف هندسه سازه ( *CAGD* ) گزینه اصلی برای توصیف و تعریف شکل و مرزها در دامنه وسیعی از سازه ها است .

برای این کار از اسپلاین های مکعبی *B-Spline* برای تعریف مرزها استفاده کرده ایم که توضیحات مفصل در این مورد در فصل مربوطه آورده شده است.

### ۴-۱ مش بندی

مش بندی عملی اساسی در همه روش های اجزای محدود بر اساس مدل سازی عددی است . به خاطر افزایش در استفاده از روش اجزای محدود توام با رشد تکنولوژی کامپیوتری ، بسیاری از کارهای تحقیقاتی بر اتوماتیک کردن تمام رویه آنالیز اجزای محدود تاکید کرده اند که شامل ساختن مدل جداسازی شده است . زمانی که روش دستی برای مش بندی منجر به بروز مشکلاتی است و خسته کننده می شود ، وقتی که پیچیدگی مش بندی افزایش پیدا می کند ، اوتوماسیون ضروری خواهد بود . بنابر این

مش بندی اوتوماتیک یک جزء جدانشدنی برای آنالیز اجزای محدود مدرن خواهد بود. برای جداسازی و مش بندی سازه های مورد نظر در این تحقیق ، نیاز به یک مش دو بعدی داریم زیرا همان طور که قبلا ذکر شد مسائل متقارن محوری مورد نظر در این تحقیق از مسائل صفحه ای به شمار می آیند. مش های سازه ای در صفحه پارامتریک به وجود آمده اند . نکاتی که در این شبکه مش بندی مد نظر هستند عبارتند از : ۱- مش بندی بر اساس بلوک های ایزوپارامتریک که در تابع های شکل ایزوپارامتریک استفاده می شوند . ۲- مش بندی با استفاده از روش های جبری ( درون یابی های خطی و غیره ) . ۳- مش بندی بر اساس حل معادلات دیفرانسیل پاره ای.

نوع المانی که می تواند انتخاب شود به صورت عظیمی می تواند بر کیفیت حل تقریبی به دست آمده تاثیر گذار باشد. در این جا از المان های ایزوپارامتریک مثلثی برای حل مسائل استفاده کرده ایم. تولید المان های مثلثی با استفاده از یک روش تولید مش ساختار نیافته به نام جبهه پیش رونده<sup>1</sup> (AFT) انجام شده است.

### ۱-۵ بهینه سازی

در گذشته معمولا برای حصول اطمینان از عملکرد سیستم ها ، آن ها را بیش از حد مورد نیاز محکم می ساختند این در حالی است که امروزه با توجه به رشد سریع کامپیوتر و به دنبال آن افزایش استفاده از روش های عددی در حل مسائل مختلف ، طراحی ها به گونه ای انجام می گیرد که هزینه انجام فعالیت های مختلف به نحو چشم گیری کاهش یافته و حالت بهینه پیدا کرده است ؛ به همین علت در سال های اخیر شاهد انقلابی در روش های ریاضی برای تجزیه و تحلیل مدل ها و در نهایت طراحی های بهینه هستیم که این امر در واقع همان بهینه سازی است . بهینه سازی در حقیقت شاخه ای از علم بهینه یابی در علوم مهندسی است و بهینه یابی ، علم یا قسمتی از ریاضیات است که در مورد یک تابع ریاضی به منظور رسیدن به یک اکسترمومی ( ماکزیموم یا مینیموم ) از تابع مورد نظر به کار می رود ، پس می توان گفت بهینه یابی ابزاری برای بهینه سازی در علوم مهندسی است . دانشمندانی چون

<sup>1</sup> Advancing Front Mesh Generation Technique

پونتریآگین<sup>۱</sup>، دانتزیگ<sup>۲</sup> و بلمان<sup>۳</sup> از افراد مشهوری هستند که تئوری های مختلفی را در این زمینه نظیر برنامه ریزی پویا، برنامه ریزی خطی و غیر خطی و ... معرفی نموده اند. اگر چه در گذشته مباحث تئوریک عرصه فعالیت دانشمندان بهینه سازی بوده است اما امروزه توجه محققین بیشتر معطوف به کاربردها در گرایش های مختلف مهندسی است [۳].

جالب توجه این که برای فهم تکنیک های بهینه سازی نیاز مند به پیش نیاز قوی از تئوری های ریاضی نیستیم و اطلاعات اولیه از ریاضیات همراه با فهم عمیق از تکنیک های حساب تا حدود زیادی برای درک و حل مسائل بهینه سازی کافی است. برای رسیدن به این هدف مهمترین موضوع فهم دقیق از مسئله بهینه سازی و ارائه تقریب استاندارد از مسئله مورد نظر است. بدیهی است پس از ارائه تقریب روشنی از صورت مسئله، ارائه روش های حل نیز مهم است. بهینه سازی هیچ سیستمی، فرایندی یا پروژه ای نمی تواند بدون داشتن اطلاعات دقیق از آن انجام شود. داشتن اطلاعات دقیق از سیستم منجر به ارائه مدل دقیق از سیستم می شود و در نهایت آن مدل دقیق می تواند منجر به ارائه بهترین جواب ها برای حل شود.

به طور کلی هر مسئله بهینه سازی در طراحی، بهره برداری، تجزیه و تحلیل کارخانه ای و فرایندهای تولیدی صنعتی و هر مسئله مرتبط با برنامه ریزی تولید، در نهایت می تواند به یک مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه یا کمینه یک تابع چند متغیره تبدیل شود. البته نحوه تعریف مسئله و فرمول بندی آن خود بخشی از مسئله بهینه سازی به حساب می آید. همان طور که می دانیم در زندگی واقعی معمولا با صنایع یا کاربردهایی سروکار داریم که اغلب سعی داریم هزینه های تولید و بهره برداری را کاهش دهیم که این موضوع قسمتی از اهداف علم بهینه سازی است. به همین دلیل می توان گفت بهینه سازی موضوع زندگی روزمره ماست. البته باید توجه نماییم که در مدل سازی مسائل واقعی زندگی در بسیاری از موارد ابتدا ساده سازی می کنیم و سپس مسئله را حل می کنیم لذا جواب های بهینه ای که

---

<sup>1</sup> Pontryagin

<sup>2</sup> Dantzig

<sup>3</sup> Bellman



به دست می آید چون مبتنی بر مدل ساده شده سیستم است ، احتمالا منجر به بهترین جواب ها نمی شود اما در هر صورت از جواب های عادی بهتر است .

### ۱-۵-۱ مشخصه های مسائل بهینه سازی

بدون توجه به نوع کاربرد مسئله بهینه سازی خواهیم دید که تمامی این مسائل دارای ویژگی های مشترکی هستند که در این جا به آن ها اشاره می کنیم .

#### ۱-۵-۱-۱ اهداف

هر مسئله بهینه سازی به دنبال تجزیه ، تحلیل و بهبود وضعیت یک هدف در سیستم است . برای بدست آوردن جواب بهینه برای یک سیستم واضح است که اساسا سیستم باید دارای حداقل یک جواب باشد تا بتوان از روی مجموعه جواب ها یکی را به عنوان بهترین انتخاب نمود . برای یک سیستمی که تمامی قسمت های آن از ابتدا به صورت ثابت تعریف شده اند ، برای ورودی های مختلف جواب های مشخصی به دست می آید که در آن صورت تنظیم سیستم برای دریافت جواب های بهینه بی معنی خواهد بود . به همین خاطر در هر سیستم بهینه سازی حداقل یک کمیت باید قابل تغییر دادن باشد تا بر اساس آن بتوانیم مجموعه جواب هایی را داشته باشیم و در مجموعه جواب های خروجی به دنبال جواب بیشینه یا کمینه که همان جواب بهینه است بگردیم . تابع هدف یا اهداف در سیستم های مختلف بسیار متنوع است اما در سیستم های صنعتی تابع هدف یا یک تابع اقتصادی ( نظیر حداقل هزینه تولید ، حداکثر سود و ... ) و یا یک تابع تکنیکی ( نظیر حداقل سازی ارتعاشات در سازه ، جرم کمینه و یا حداکثر قابلیت اطمینان سازه و ... ) است . لازم به ذکر است که گاهی اوقات توابع هدف به جای کمی به صورت کیفی ارایه می شود . اما برای حل مسئله به هر حال هر هدف کیفی نیز باید با فرمولاسیون مناسب به یک هدف کمی تبدیل شود تا با استفاده از تکنیک های ریاضی بتوانیم آن را تجزیه و تحلیل کنیم و با اتخاذ الگوریتم مناسب آن را پیدا کنیم .

۱-۵-۱-۲ قیود

قیود مسائل بهینه سازی معمولا تحت تاثیر پدیده ای فیزیکی یا درخواست های مصرف کنندگان بر مسئله بهینه سازی تحمیل می شود. این قیود گاهی باعث می شود که بتوانیم از شرایط بهینه بهتری که در مجموعه جواب ها وجود دارد بهره مند شویم. مثلا در مسئله طراحی سازه برای کاهش خطر تخریب در مقابل زمین لرزه ممکن است حداقل بار استاتیکی یا دینامیکی وارد بر سازه قیودی را برای حداقل ظرفیت مقاطع ایجاد نماید و ... . بهتر است از ابتدا قیود را در مسئله دخیل نماییم تا جواب در مجموعه قابل قبول با توجه به قیود به دست آید. قیود معمولا بر دو نوع داخلی و خارجی هستند. گاهی اوقات شرایط داخلی سیستم ایجاب می کند که حالت های سیستم در حدودی مشخص محدود شوند. و بالعکس در بعضی از شرایط محدودیت های خارجی برخی از جواب ها را رد می کند.

۱-۵-۱-۳ متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی در بهینه سازی بردارها یا کمیت های عددی هستند که با تغییر در مقدار یا جهت آن ها به تابع هدف بهینه دست پیدا می کنیم. چون هدف ما بهینه سازی شکل سازه است در این جا متغیرهای طراحی موقعیت مکانی نقاط تعریف کننده شکل است. یکی از عوامل مهمی که باعث افزوده شدن زمان محاسبات و دشواری حل مسائل بهینه سازی می شود، تعداد متغیرهای طراحی است، اگر بتوانیم تعداد متغیرهای طراحی را کاهش دهیم، با سرعت و احتمال بیشتری به سمت جواب بهینه همگرا خواهیم شد. آن چه که تا کنون ارائه گردید مقدمه ای بر علم و تکنیک های بهینه سازی بود که به صورت خلاصه به فرم زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize(orMaximize)} : F(x) \\
 & g_j(x) \leq 0 \quad j = 1,2,3,\dots,m \\
 & h_k(x) = 0 \quad k = 1,2,3,\dots,l \\
 & x'_i \leq x_i \leq x''_i \quad i = 1,2,3,\dots,n
 \end{aligned}
 \tag{1-1}$$

در فرمول بندی استاندارد فوق ،  $x$  بردار متغیرهای طراحی ،  $F(x)$  تابع هدف که باید بیشینه یا کمینه شود ،  $g(x)$  قیود نامساوی و  $h(x)$  قیود مساوی مسئله بهینه سازی هستند. اندیس های  $l$  و  $u$  نیز به ترتیب حدود پایین و بالای متغیرهای طراحی را مشخص می کنند.  $m$  و  $l$  به ترتیب تعداد قیود نامساوی و مساوی بوده و  $n$  بیانگر تعداد متغیرهای طراحی است [۴].

### ۱-۵-۲ بهینه سازی سازه ها

بهینه سازی در مهندسی سازه ، مربوط به طراحی سازه هایی با کیفیت و عملکرد مورد نظر و در عین حال از جهات خاصی بهینه است . در گذشته بسیاری از فرایندهای طراحی به جای عملکرد دقیق به تئوری بهینه سازی ، از درون یافت و تجربه طراح سرچشمه می گرفت ؛ مثلا طراح برای ایمنی بیشتر در سازه مقاطع را بیش از حد قوی می گرفت . این حقیقت اخیرا طراحی های بهینه را در علوم به سمت کاهش هزینه ها عوض کرده است . همه این ها منجر به گسترش روش های عددی مثل روش اجزای محدود  $FEM$  ، روش اجزای مرزی  $BEM$  و تکنیک های جدید بهینه سازی شده است. در این رهگذر ، تکنیک بهینه سازی در مسیرهای متعددی گسترش یافته است ، مثل تعیین مشخصات سطح مقطع یک سازه ، یا در نظریه تغییرات در هندسه سازه ، موقعیت گره ها و هندسه اعضا . مسائل دیگر شامل بهینه سازی شرایط تکیه گاهی هم می شود و همچنین بهینه سازی شکل ، جرم ، ویا بهینه سازی دامنه نوسانات طبیعی سازه .

مسائل بهینه سازی سازه ها با روش های متعددی قابل حل است . معمولا به یک روش عددی برای حل نیاز است . روش های حل عبارتند از : تحلیلی ، نیمه تحلیلی ، عددی . در بسیاری از کارهای انجام شده از روش اجزای محدود استفاده شده است .

در طراحی های سازه ای سه دسته بندی بر اساس نوع متغیر طراحی برای بهینه سازی وجود دارد :

۱- بهینه سازی اندازه : می توان از متغیرهای اندازه جهت تعریف توزیع ضخامت اجزای سازه ای

استفاده کرد. در بهینه سازی اندازه ، مثلا ضخامت بهینه سازه به دست می آید .

۲- بهینه سازی شکل : می توان از متغیرهای شکل ، جهت تعریف هندسه سازه استفاده کرد. با تغییر متغیرهای شکل تا حدودی شکل سازه ای دچار تغییر می شود. در بهینه سازی شکل ، مرزهای داخلی و خارجی هندسه سازه قابل جابجایی است .

۳- بهینه سازی توپولوژی : متغیرهای توپولوژی الگوی اتصال المان ها ، نواحی و اجزا و یا تعداد و ترتیب فاصله ای المان ها ، گره ها و تکیه گاه ها را تعریف می کند. در بهینه سازی توپولوژی ، المان ها در حین فرایند طراحی اضافه و یا حذف شده و مدل آنالیز و مجموعه متغیرهای طراحی تغییر می کنند.

به صورت ایده آل ترکیب انواع بهینه سازی منجر به بهترین طراحی ممکن می شود . در بهینه سازی سازه ها ، ابتدا بهینه سازی توپولوژی سپس بهینه سازی شکل و بعد از آن بهینه سازی ابعاد و اندازه ها انجام می شود. با استفاده از بهینه سازی توپولوژی به یک طرح بندی مناسب برای سازه دست پیدا می کنیم و بعد از آن با بهینه سازی شکل به بهترین شکل از نظر هندسی برای سازه می رسیم و در نهایت به وسیله بهینه سازی اندازه بهترین اندازه ها و ابعاد را برای سازه مورد نظر پیدا می کنیم. در این تحقیق ، هدف بهینه سازی شکل سازه ها است و در حین انجام بهینه سازی شکل ، توپولوژی یعنی طرح بندی اولیه سازه بدون تغییر باقی می ماند.

مسائل معمولی موجود در مهندسی ، چندین راه برای حل دارند . هدف عمومی در بهینه سازی ، به دست آوردن جدولی از مقادیر برای متغیرهای طراحی است که بر قیود مختلف تاثیر می گذارد . این مقادیر جواب های بهینه دلخواه را برای تابع هدف انتخاب شده تولید خواهد کرد.

### ۱-۵-۳ آنالیز حساسیت

آنالیز حساسیت طراحی *DSA* ( *Design sensitivity analysis* ) با توسعه روش ها برای محاسبه گرادیان های متغیر های طراحی ، در ارتباط است . مقادیر مشتق نشان می دهد که آیا تابع جواب نسبت به پارامترهای ویژه طراحی خیلی حساس است یا نه . این مقادیر طراح را با اطلاعاتی در مورد متغیرهای طراحی که در ارتباط با بعضی از اندازه های اجزا که بحرانی هستند روبرو می کند ، *DSA* خیلی از مهندسان سازه را به سمت انجام چگونگی افزایش قدرت طراحی ، راهنمایی کرده است [۱].

آنالیز حساسیت ، غالباً در بهینه سازی اوتوماتیک سازه ای برای رسیدن به حل بهینه ، استفاده شده است . در مسائل سازه ای ، هر جا که یک متغیر طراحی آشفته شود ، تغییری در خط مشیی که متغیر طراحی روی آن عمل می کند وجود خواهد داشت . اثر این اختلال با استفاده از آنالیز حساسیت معین می شود .

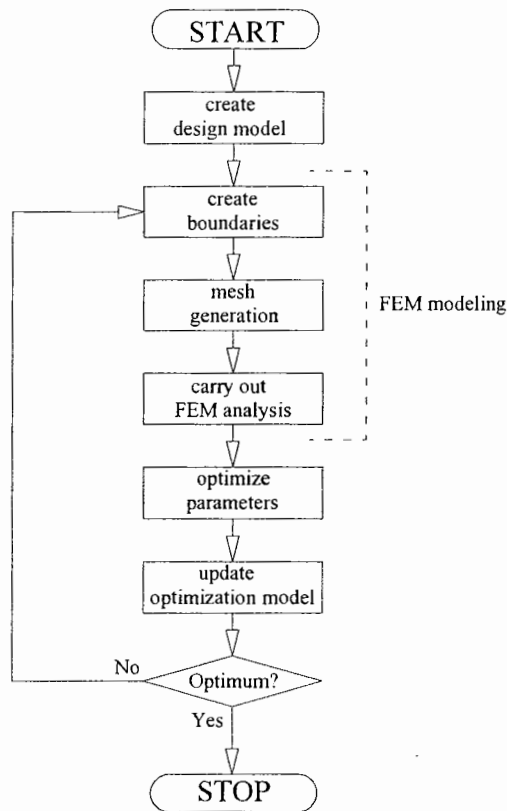
ارزیابی حساسیت های پاسخ های سازه ای به تغییرات در متغیر های طراحی ، مرحله ای قاطع در طراحی بهینه سازه ها است . و به یک تناسب قابل ملاحظه بین زمان کامپیوتری برای پروسه بهینه سازی نیاز دارد . بنابراین داشتن یک تکنیک موثر برای محاسبه این مشتقات مهم است . علاوه بر این ، مشخص است که بهینه سازی مناسب شکل به یک آنالیز حساسیت خوب نیاز دارد . آنالیز حساسیت صحیح با رابطه درست بین آشفته گی شکل و متغیرهای مربوط به تابع هدف و قیود ، فراهم می شود .

آنالیز حساسیت می تواند بر اساس معادلات *FEM* عددی یا تحلیلی باشد . این روش ها به صورت عمومی تحت عناوین حساب تغییرات و روش های مستقیم ، دسته بندی می شوند. در این تحقیق آنالیز حساسیت برای متغیرهای طراحی ، طی فرایند بهینه سازی انجام نشده است.

### ۱-۶ روند حل مسائل

مراحل انجام کار برای سازه های مورد مطالعه در این تحقیق را می توان در فلوجارت شکل ۱-۴

خلاصه نمود.



Algorithm for structural shape optimization

شکل ۹-۱ الگوریتم بهینه سازی شکل سازه ها در این تحقیق.

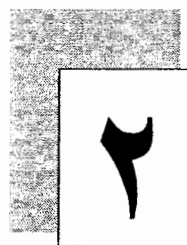
روند انجام کار به این صورت است که ابتدا مدل اجزای محدود برای مسئله مورد نظر شکل می گیرد؛ به این صورت که مرز های سازه (یک مقطع صفحه ای از سازه متقارن محوری) با استفاده از اسپلاین ها مشخص می شود ، سپس این ناحیه با یک روش ساختار نیافته مش بندی می شود. پس از مرحله مش بندی بارها و تکیه گاه ها به برنامه اصلی معرفی می شود و در این مرحله سازه تحت نیروهای وارده تحلیل می شود. بعد از تحلیل سازه و به دست آمدن تنش ها و تغییر مکان ها ، بهینه سازی شکل با توجه به تابع هدف و متغیرهای طراحی شروع می شود. اگر سازه در این مرحله بهینه باشد ، برنامه در همین جا متوقف می شود ولی اگر بهینه نباشد ، متغیر های طراحی تغییر کرده و با توجه به این تغییرات ، شکل جدید تولید می شود و دوباره تحلیل شده و اگر لازم باشد بهینه می شود. این روند تا زمانی که

شکل به بهینه ترین حالت ممکن برسد ادامه پیدا می کند. برای این منظور یک برنامه کامپیوتری نوشته شده است که شامل زیربرنامه های تعریف شکل ، مش بندی ، حل اجزای محدود و بهینه سازی است.

مراجع فصل یکم

- 1- S.M.B.Afonso. "*Shape optimization of shells under static and free vibration conditions*" . PhD thesis. Department of civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK. 1995.
- 2- "*Optimization: Theory and Practice*". Gordon. S.G. Beveridge and Robert S. Schechter. McGraw-Hill, New York, 1970.
- 3- "*Finite Element Procedures*". Klaus-Jurgen Bathe. PRENTICE-Hall. 1996.
- 4- M.Ozaka. "*Analysis and optimal design of structures with adaptivity*". Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK, 1993.





# آنالیز سازه ای به روش

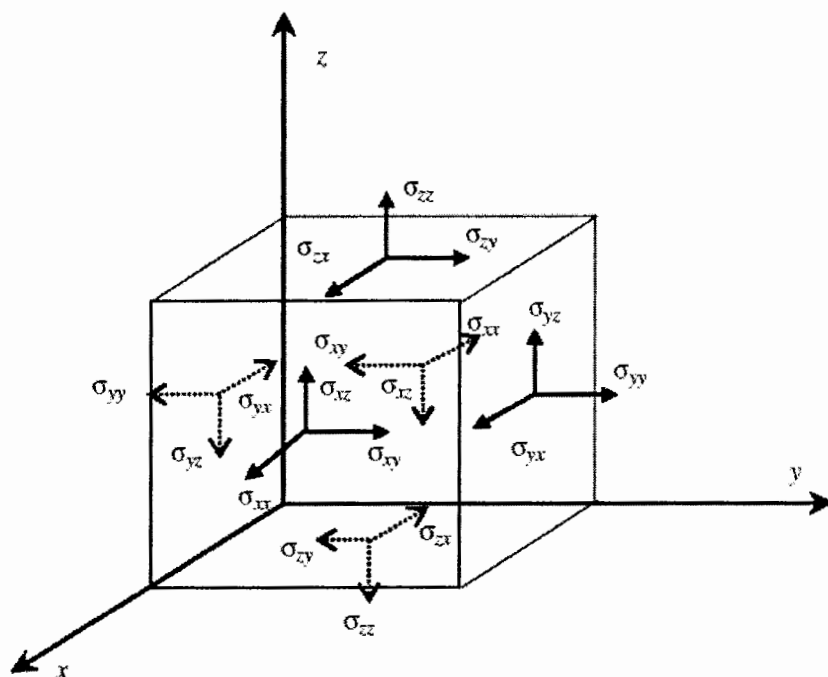
## اجزای محدود

در این فصل ابتدا مقدماتی از تئوری الاستیسیته و سپس مبانی اجزای محدود و نحوه آنالیزها مورد

بررسی قرار می گیرد.

## ۱-۲ تئوری الاستیسیته برای مسائل صفحه ای

با فرضیات ساده کننده ای که با عمل نیز مطابقت دارد ، مسائل سه بعدی تئوری ارتجاعی به مسائل با بعد کمتر تبدیل می شود [۳].



شکل ۱-۲ تنش مستقل تنش در یک جسم جامد [۶].

با توجه به شکل (۱-۲) اگر داشته باشیم  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$  مسئله می تواند در حالت تنش مسطح حل شود. این حالت از تانسور تنش در مسائل صفحه ای تئوری ارتجاعی زمانی به وجود می آید که یک صفحه بسیار نازک (در مقایسه با ابعاد صفحه) در معرض تغییر شکل هایی قرار گیرد که همگی وابسته به مختصات داخل صفحه بوده و صفحه مسطح پس از تغییر شکل نیز مسطح باقی بماند ، همچنین هیچ نوع بارگذاری عمود بر صفحه وجود نداشته باشد؛ در این صورت مولفه های تانسور تنش به صورت زیر است (برای مصالح ایزوتروپیک) [۳]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \quad (1-2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2-2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3-2)$$

و برای کرنش های عمود بر صفحه داریم:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4-2)$$

اگر در مسائل تئوری ارتجاعی  $u(x, y) = 0$  (تغییر مکان های وابسته به  $x, y$  و در جهت  $z$ ) برقرار باشد، آن گاه مسئله به صورت کرنش مسطح مطرح می شود. در این حالت تمام سطوح عمود بر محور  $z$  پس از تغییر شکل نیز عمود بر آن باقی می ماند. در این صورت داریم:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (5-2)$$

این حالت از مسائل صفحه ای در صورتی در یک محیط منشوری اتفاق می افتند که بعد عمود بر صفحه  $xy$  در مقایسه با ابعاد این صفحه خیلی بزرگ باشد. مثالی از این نوع مسئله را می توان در سد ها در محل های دور از تکیه گاه ها، یا تغییر شکل ناشی از فشار عرضی در لوله های طویل و دور از دو سر آن جستجو کرد. با استفاده از روابط تنش-کرنش در مصالح ایزوتروپیک برای تنش در حالت کرنش مسطح داریم [۳]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \quad (6-2)$$

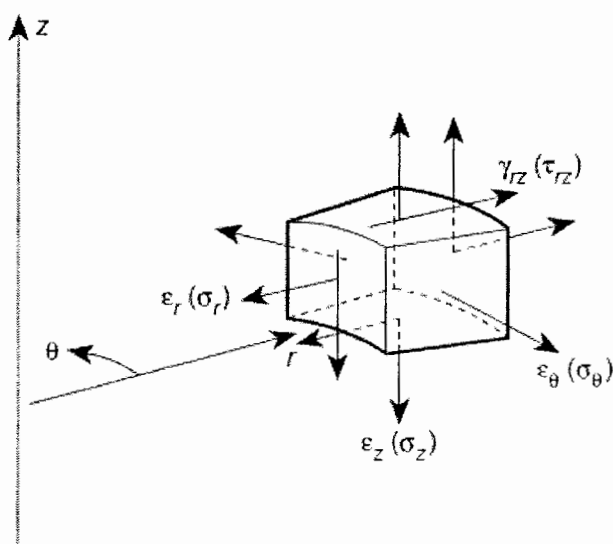
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \quad (7-2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (8-2)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] \quad (9-2)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (10-2)$$

اگر سیستم مختصات دکارتی  $(x, y, z)$  را به سیستم مختصات استوانه ای  $(r, \theta, z)$  تبدیل کنیم، با فرض عدم وابستگی تغییر شکل ها به  $\theta$ ، نوع دیگری از مسائل دو بعدی به نام مسائل متقارن محوری به دست می آیند. در این حالت اگر بارگذاری نیز در حالت متقارن محوری باشد،  $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0$  خواهد بود همچنین هر تغییر مکان شعاعی به طور خود به خود باعث به وجود آمدن کرنش های محیطی می شود و تنش ها در این جهت (محیطی) غیر صفر خواهند بود (شکل ۲-۲).



شکل ۲-۲ تنش ها و کرنش ها در حالت متقارن محوری

بنابراین یک مولفه به ماتریس های تنش و کرنش اضافه می شود [۱]. بدین ترتیب تانسور کرنش شامل چهار مولفه  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{rz}, \varepsilon_{\theta\theta}$  است. روابط تنش-کرنش با استفاده از ضرایب هوک و پواسون برای مصالح ایزوتروپیک به صورت زیر است:

$$\sigma_{rr} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right] \quad (11-2)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right] \quad (12-2)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz} \quad (13-2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) \quad (14-2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0 \quad (15-2)$$

بدین ترتیب ماتریس های روابط تنش و کرنش برای سه حالت مسائل صفحه ای به شکل زیر

استخراج می شود:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (16-2)$$

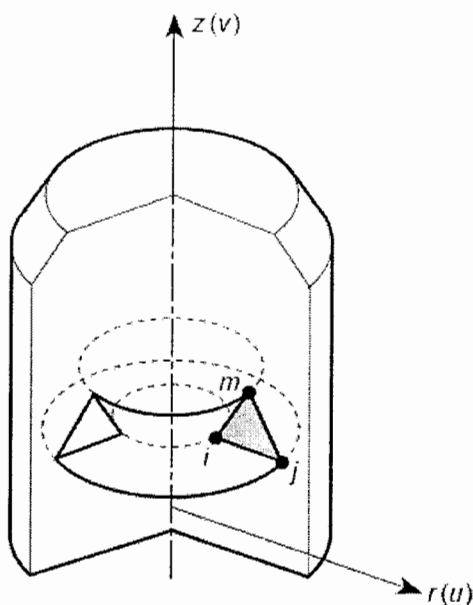
$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ Plane Stress} \quad (17-2)$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \text{ Plane Strain} \quad (18-2)$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Axisymmetric} \quad (19-2)$$

## ۲-۲ عنصر متقارن محوری در روش اجزای محدود

در سازه های متقارن محوری مد نظر در این تحقیق ، هندسه ، خواص ماده ، شرایط مرزی و بارگذاری ها از مختصات  $\theta$  مستقل هستند ، پس راه حل مسئله هم از پارامتر  $\theta$  مستقل خواهد بود ، در نتیجه مسئله سه بعدی در مختصات استوانه ای  $(r, \theta, z)$  به مسئله دو بعدی در صفحه  $rz$  کاهش پیدا می کند [۴]. در این صورت تحلیل دو بعدی یک رادیان واحد از سازه ، توزیع کامل تنش و کرنش را در کل سازه نشان می دهد [۲]. حل این مسائل بسیار شبیه مسائل تنش و کرنش مسطح است [۱]؛ به علت تقارن محوری می توان برای حل یک صفحه از مقطع سازه را در صفحه  $rz$  در نظر گرفت (شکل ۲-۳). بدین ترتیب هر نقطه روی این مقطع دارای دو مختصات شعاعی و ارتفاعی است که به ترتیب با  $r$  و  $z$  نشان داده می شود و همچنین دارای دو مولفه جابجایی در جهت شعاعی  $u$  و در جهت ارتفاعی  $v$  خواهد بود.



شکل ۲-۳ عنصر متقارن محوری.

همان طور که قبلا ذکر شد ماتریس های تنش و کرنش در مسائل متقارن محوری دارای چهار مؤلفه هستند:

$$\sigma = D\varepsilon, \quad \sigma = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{rz} \quad \sigma_{\theta\theta}]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_{rr} \quad \gamma_{zz} \quad \varepsilon_{rz} \quad \varepsilon_{\theta\theta}]^T \quad (20-2)$$

ماتریس رابطه تنش و کرنش  $D$  که به آن ماتریس مصالح یا ماتریس الاستیسیته نیز می گویند از رابطه (۲-۱۹) برای مصالح ایزوتروپیک پیروی می کند.

در روش اجزای محدود برای تشکیل ماتریس سختی هر المان به دو ماتریس  $D$  و  $B$  احتیاج داریم که به ترتیب نشان دهنده ماتریس الاستیسیته و ماتریس رابطه کرنش و تغییر مکان هستند:

$$K^e = \int B^T D B r^e dr dz d\theta \quad (21-2)$$

در رابطه ۲-۲۱،  $d\theta$  برابر یک است (برای در نظر گیری یک رادیان واحد از سازه).

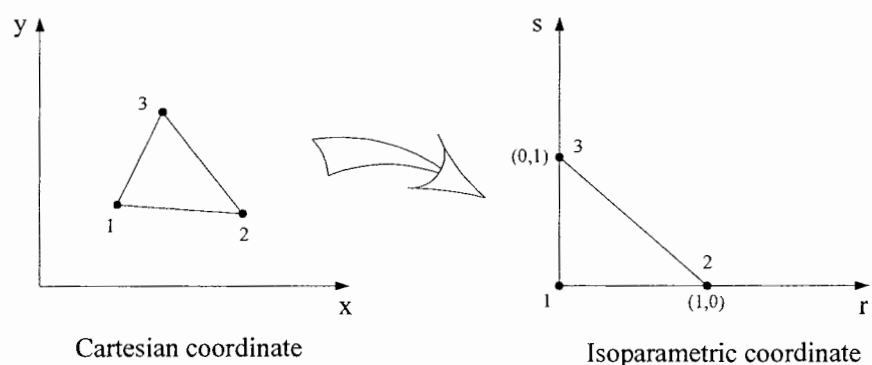
در این تحقیق از المان های سه گره ای ایزوپارامتریک برای حل اجزای محدود استفاده کرده ایم.

بنابراین ماتریس  $B$  در حالت متقارن محوری از رابطه زیر پیروی می کند:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} \\ \frac{h_1}{r} & 0 & \frac{h_2}{r} & 0 & \frac{h_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (22-2)$$

در روابط ۲-۲۱ و ۲-۲۲ پارامتر  $r$  نشان دهنده شعاع المان است که از مرکز المان سنجیده می شود. در

رابطه ۲-۲۲ توابع  $h_1$  تا  $h_3$  نشان دهنده توابع شکل برای المان ایزوپارامتریک سه گره ای هستند:



شکل ۲-۴ المان ایزوپارامتریک.

برای به دست آوردن ماتریس های کرنش - تغییر مکان داریم:

$$h_1 = 1 - r - s \quad h_2 = r \quad h_3 = s \quad (23-2)$$

$$X = \sum h_i x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (24-2)$$

$$Y = \sum h_i y_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (25-2)$$

و در این حالت تعیین ماتریس های المان شامل یک تبدیل ژاکوبی نیز هست:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} = J \frac{\partial h_i}{\partial r} \quad (27-2)$$

بدین ترتیب ماتریس سختی یک المان تشکیل می شود و پس از سر هم بندی ماتریس های سختی

المان ها ، ماتریس سختی کلی سازه به دست می آید.



### ۲-۳ بارگذاری غیر متقارن

روشی که در این فصل ارائه شد برای بارگذاری غیر متقارن نیز می تواند گسترش داده شود. به هر حال اگر یک سازه با تقارن محوری دارای بارگذاری غیر متقارن باشد، در این صورت یا باید یک تحلیل سه بعدی کامل را انتخاب کرد یا از تجزیه فوریه برای بارها، برای جمع آثار جواب های هارمونیک استفاده کرد. جزئیات این روش ها در مراجع دو و پنج قابل دسترسی است.

### ۲-۴ حل مسائل تنش و کرنش مسطح با روابط متقارن محوری

با انجام تمهیداتی می توان مسائل تنش و کرنش مسطح را با استفاده از روابط متقارن محوری حل کرد؛ مزیت این کار در این است که با استفاده از یک برنامه واحد می توان هر سه حالت مسائل صفحه ای را حل نمود. اگر معادله کرنش - تغییر مکان (رابطه ۲-۲۸) را که برای حالت متقارن محوری است، در نظر بگیریم، با میل دادن شعاع به سمت بی نهایت، مقدار کرنش محیطی  $\epsilon_{\theta\theta}$  برابر صفر خواهد شد و شرایط کرنش مسطح به دست می آید [۱]. بدین ترتیب که همه درایه های سطر آخر ماتریس  $B$  در رابطه ۲-۲۲ برابر صفر می شود.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix} = B_{4 \times 6} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (28-2)$$

در رابطه ۲-۲۸ ماتریس  $B$  از رابطه ۲-۲۲ تبعیت می کند.  $u_1$  تا  $u_3$  و  $v_1$  تا  $v_3$  نشان دهنده تغییر مکان گره های المان در جهات  $x$  و  $y$  هستند. بنابراین اگر در ماتریس های  $B$  و  $D$  نشان داده شده در روابط ۲-۲۲ و ۲-۱۹، از درایه های مربوط به  $\epsilon_{\theta}$  (خط آخر ماتریس ها) صرف نظر کنیم،

مسئله کرنش مسطح را خواهیم داشت و می توانیم محورهای  $r$  و  $z$  در مختصات استوانه ای را با  $x$  و  $y$  در مختصات کارتزین جایگزین کنیم. علاوه بر این در انتگرال گیری حجمی نیز باید مقدار  $rd\theta$  را با عدد یک یعنی ضخامت واحد برای سازه جایگزین کنیم. به طور مشابه می توانیم شرایط تنش مسطح را نیز از فرمول بندی متقارن محوری به دست آوریم. برای این منظور ماتریس های  $D$  و  $B$  به ترتیبی که گفته شد باید اصلاح شوند و در انتگرال گیری ها ضخامت واحد برای سازه در نظر گرفته شود [۱].

## مراجع فصل دوم

- 1- *"The Finite Element Method Fifth edition Volume 1: The Basis"*. O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor. Butterworth-Heinemann,2000.
- ۲- "روش عناصر محدود (جلد اول)" کلاوس یورگن باته ترجمه دکتر کریم عابدی. انتشارات دانشگاه صنعتی سهند، ۱۳۷۹.
- ۳- "تئوری ارتجاعی" محمد رحیمیان و مرتضی اسکندری قادی. انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۹.
- 4- *"An Introduction to The Finite Element Method Second edition"*. J.N.Reddy. McGRAW-HILL,1993.
- 5- *"The Finite Element Method Fifth edition Volume 1: Solide Mechanics"*. O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor. Butterworth-Heinemann,2000.
- 6- *"The Finite Element Method A practical course"*. G.R.Liu and S.S.Quek. Butterworth-Heinemann,2003.



## تولید شکل و مرزهای

## سازه

در این فصل نحوه تولید شکل و مرزهای سازه توضیح داده می شود. تولید شکل و مرزها با استفاده از اسپلاین های پارامتری درجه سه صورت گرفته است. در این قسمت انواع اسپلاین ها برای تولید شکل مورد بررسی قرار می گیرد و دلایل انتخاب  $B-spline$  برای تولید شکل و مرزهای سازه توضیح داده شده است.

### ۳-۱ تولید شکل

در مهندسی سازه یکی از هدف های اصلی دست یابی به روشی جهت تولید شکل برای هندسه مسائل مورد نظر است. در این رهگذر روش به کار رفته باید علاوه بر سادگی ، روشی منعطف باشد. اگر هدف حل مسئله بهینه سازی شکل باشد ، روش به کار رفته باید به گونه ای باشد که بتوان با تغییر پارامترهای مربوطه ، به راحتی شکل و هندسه مسئله را تغییر داد.

با توجه به انواع منحنی های موجود برای تولید شکل و روش های مختلف که در این زمینه وجود دارند ، اسپلاین ها به عنوان گزینه ای مناسب برای تولید اشکال هندسی مورد توجه قرار می گیرند. در بهینه سازی شکل سازه ها ، هدف اصلی ، دست کاری اشکال هندسی است تا به شکل مورد نظر برسیم و اسپلاین ها برای این امر بسیار مناسب تشخیص داده شده اند. در این فصل در مورد منحنی های دو بعدی بحث می کنیم که مورد کاربرد آن ها به وفور در مسائل تنش مسطح ، کرنش مسطح و مسائل متقارن محوری یافت می شود.

### ۳-۲ اسپلاین ها در بهینه سازی شکل سازه ها

در بهینه سازی شکل سازه ها ، مهم ترین بخش کار چگونگی تولید شکل های هندسی و توانایی کنترل تغییرات در این شکل ها است. در این راستا اسپلاین ها بسیار کارآمد هستند و علت آن به دو دلیل است : ۱- تولید شکل ها و منحنی ها در مسائل دو بعدی و سطوح و رویه ها در مسائل سه بعدی ، با استفاده از اسپلاین ها بسیار ساده است. ۲- می توان مسئله را پارامتری کرد که خود باعث منعطف شدن ایجاد تغییرات و دست کاری شکل های هندسی سازه مورد نظر در مسئله بهینه سازی می شود [۳]. اولین کارها در مورد بهینه سازی شکل توسط زینکوویچ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۷۳ میلادی انجام شد [۲]. او مختصات نقاط اجزای محدود واقع بر روی مرزهای سازه را به عنوان متغیرهای طراحی مسئله در نظر گرفت. این کار خود مستلزم در نظر گرفتن تعداد زیادی متغیر های طراحی بود که از اشکالات مهم این روش به شمار می آمد. همچنین بعد از چند بار تکرار و ایجاد تغییرات در متغیر های طراحی ، برای رسیدن به جواب بهینه ،

---

<sup>۱</sup> Zienkiewicz

مرزهای شکل مورد نظر نرمی و یکنواختی خود را از دست داده و اغلب شکل هایی نه چندان جالب پدیدار می شود [۳].

در سال ۱۹۸۰ میلادی، باویکاتی<sup>۱</sup> از چند جمله ای های جبری برای بیان نمودن شکل هندسی سازه ها استفاده کرد [۳]. در این حالت ضرایب چند جمله ای به عنوان متغیرهای طراحی مسئله در نظر گرفته می شد. به کار بردن چند جمله ای ها به وضوح باعث کاهش قابل توجه متغیرهای طراحی در مسئله بهینه سازی می شود، اما ممکن است استفاده از چند جمله ای های با درجات بالاتر، سبب ایجاد ناپایداری عددی و نوسان در شکل سازه شود [۳].

پس از چندی استفاده از اسپلاین ها برای مدل سازی شکل به کار رفت. برای مدل سازی شکل بیشتر از اسپلاین های درجه سه استفاده می شود، زیرا دارای کمترین درجه با پیوستگی  $C(2)$  هستند که اغلب نیاز طراح را در مدل سازی و حل مسئله برطرف می کند. باید خاطر نشان کرد که استفاده از اسپلاین ها از لحاظ عددی کاری ساده است.

### ۳-۳ منحنی های دو بعدی

فرض بر این است که تعدادی نقطه داریم که می خواهیم یک منحنی خوب از آن عبور دهیم. منحنی خوب یعنی منحنی که دارای شرایط زیر باشد: ۱- از همه رئوس بگذرد. ۲- پیوسته باشد (گسسته نباشد). ۳- شکستگی نداشته باشد (مشتق پذیر باشد). ۴- کنترل پذیر باشد (یعنی شکلی که انتظار داریم با تغییر یک یا چند نقطه به دست آید و با تغییر یک یا چند نقطه تغییرات فاحش نداشته باشد) [۱].

برای این منظور سه مدل منحنی بررسی می شود:

۱- منحنی های درون یابی (روش های ساده درون یابی مثل لاگرانژ و نیوتن)

۲- اسپلاین مکعبی

۳- اسپلاین های پارامتری درجه سه.

<sup>1</sup>Bhavicatti

### ۳-۴ منحنی های درون یابی

با خاصیت  $y = f(x)$  با خاصیت  $y_i = f(x_i)$  for  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  را چند جمله ای با درجه حداکثر  $n$  درون یاب می گوئیم. ثابت می شود که اگر  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  بر قرار باشد، چند جمله ای درون یاب به طور یگانه وجود دارد. در این جا به روش نیوتن برای محاسبه چندجمله ای درون یاب اشاره می کنیم:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (1-3)$$

هدف محاسبه ضرایب  $a_0$  تا  $a_n$  است:

$$P_n(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 = y_0$$

$$P_n(x_1) = y_1 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_n(x_2) = y_2 \Rightarrow a_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (2-3)$$

و به همین ترتیب بقیه ضرایب بدست می آید.

اما منحنی های درون یابی به سه دلیل زیر نامناسب تشخیص داده می شوند [۱]:

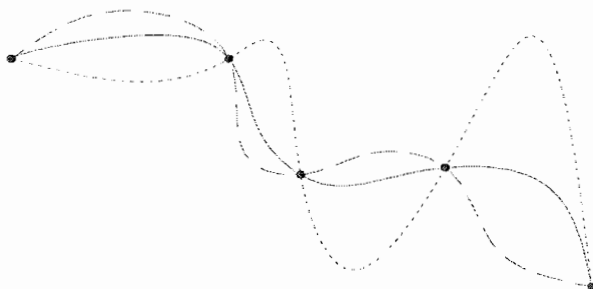
۱- با زیاد شدن نقاط، چند جمله ای عبوری از آن ها نمی تواند اطلاعات مقبولی ارائه کند و منحنی های عجیب و غریبی رسم می شود.

۲- این منحنی ها نمی توانند به صورت پارامتری بررسی شوند تا به راحتی از یک مینیموم یا یک ماکزیموم برای پارامتر منحنی رسم شود.

۳- با تغییر تعدادی (یک یا بیشتر) از نقاط، تقریباً کل منحنی پایداری خود را از دست می دهد.

شکل زیر بیان گر این موضوع است که با داشتن پنج نقطه، سه تا از منحنی های مربوطه به دست

آمده اند.



شکل ۳-۱ منحنی های درون یابی برای پنج نقطه.

اگر نقاط به صورتی داده شوند که منحنی گذرنده از آن ها تابع نباشد (به ازای یک  $X$  بیش از یک  $Y$  وجود داشته باشد) ، در این حالت راه حل این است که از منحنی های پارامتری استفاده کنیم. چند جمله ای های نیوتن ، لژاندر ، لاگرانژ و ... در کار ریاضی خوب عمل می کنند ، ولی عیب اصلی لِرزان بودن آن هاست ، زیرا با تغییر اندک نقاط ، منحنی تغییرات فاحش خواهد داشت. این در حالی است که مثلا توابع برنشتاین<sup>۱</sup> که در منحنی های بزیر<sup>۲</sup> استفاده می شوند خیلی صاف حرکت می کنند [۱].

### ۳-۵ اسپلاین های مکعبی

$f(x)$  را اسپلاین و  $S_j(x)$  را قطعات اسپلاین می نامیم ، به طوری که :

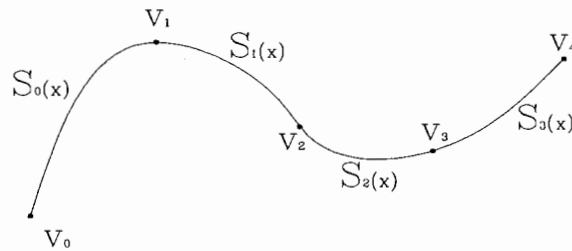
$$f(x) = S_j(x), x \in [x_j, x_{j+1}]$$

به طور کلی فرض بر این است که این قطعات به خوبی (پیوسته و مشتق پذیر) کنار هم قرار گرفته اند [۱].

<sup>۱</sup> Bernstein

<sup>۲</sup> Bezier





شکل ۳-۲ اسپلاین ، قطعات و نقاط آن.

اسپلاین مدل های مختلفی دارد.

الف- اسپلاین خطی : هر قطعه این نوع اسپلاین یک خط است. اسپلاین خطی فقط خاصیت پیوستگی دارد و مشتق پذیر نیست ، چون با مشتق گیری پیوستگی خود را از دست می دهد.

$$S_j(x) = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) + y_j, f(x) \in C(0)[x_0, x_n] \quad (3-3)$$

این نماد نمایان گر مجموعه تمام توابع از  $[a, b]$  به  $R$  است که  $n$  بار مشتق پذیر بوده و با مشتق  $n$  ام پیوستگی را نیز حفظ می کنند. برای اسپلاین خطی  $n=0$  است و چون مشتق پذیر نیست و مشتق صفرام آن پیوسته است ، پس پیوستگی  $C(0)$  دارد.

ب- اسپلاین مکعبی : در میان اسپلاین ها اسپلاین مکعبی مهم است ، چرا که با کمترین درجه دارای پیوستگی  $C(2)$  است ؛ یعنی تا دو بار مشتق پذیر و مشتق دوم آن پیوسته است.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4-3)$$

در این جا هدف محاسبه  $a_j, b_j, c_j, d_j$  است.

در مدل های مختلف اسپلاین ، اسپلاین مکعبی از کمترین انحنا برخوردار است. در بحث تعریف شکل به دنبال یک منحنی هستیم که جمع انحنای آن مینیموم یا کمینه باشد ، زیرا هرچه انحنا کم تر باشد ، شکل ما بهینه تر است [۱].

به هر حال اشکال این نوع منحنی ها نیز ، عدم پارامتری بودن آن ها است.

### ۳-۶ منحنی های پارامتری

منظور از بهینه سازی شکل در این تحقیق ، بهینه سازی با استفاده از مدل اجزای محدود است. روش اجزای محدود یک روش عددی به شمار می آید و استفاده از کامپیوتر در این زمینه الزامی است. در کامپیوتر نمایشی مناسب است که پارامتری باشد ، و نمایش نموداری یا تابعی چندان مناسبیت ندارد. نمایش پارامتری را می توان با یک مثال ساده ، مثلا دایره ای به شعاع  $R$  بررسی کرد :

$$\text{پارامتری: } \begin{cases} x = R \cosh h \\ y = R \sin h \end{cases} \quad 0 \leq h \leq 2\pi$$

تابعی :  $x^2 + y^2 = R^2$

به طور کلی می توان  $f(x, y)$  را به صورت پارامتری زیر تعریف کرد :

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(h) = \sum_{i=0}^n a_i h^i \\ y(h) = \sum_{i=0}^n b_i h^i \end{cases} \quad (5-3)$$

و بدون در نظر گیری بعد نقاط می توان یک چندجمله ای از درجه  $n$  را به صورت زیر تعریف کرد :

$$f(h) = a_n h^n + \dots + a_2 h^2 + a_1 h + a_0 \quad (6-3)$$

و برای مثال داریم :

$$\begin{aligned} f(h) &= a_1 h + a_0 && \text{linear} \\ f(h) &= a_2 h^2 + a_1 h + a_0 && \text{quadratic} \\ f(h) &= a_3 h^3 + a_2 h^2 + a_1 h + a_0 && \text{cubic} \end{aligned}$$

و برای معادلات پارامتری  $y = f(x)$  از درجه سه و فرم ماتریسی آن داریم :

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(h) = a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3 \\ y(h) = a_2 + b_2 h + c_2 h^2 + d_2 h^3 \end{cases} \quad (7-3)$$

$$[x(h) \quad y(h)] = [1 \quad h \quad h^2 \quad h^3] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \quad (8-3)$$

بدون در نظر گرفتن بعد نقاط داریم :

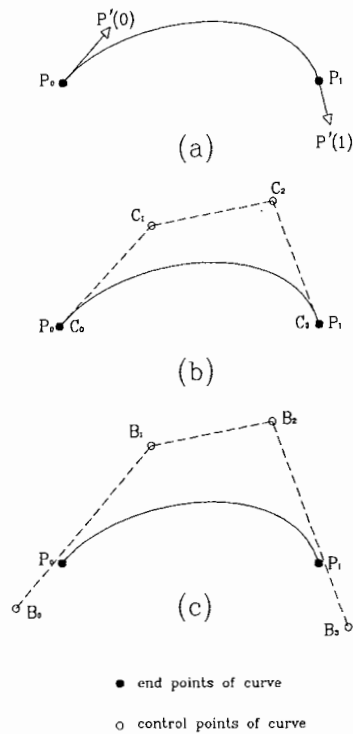
$$P(h) = \sum_{k=0}^3 c_k h^k \Rightarrow \begin{cases} P(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 \\ P'(h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 \end{cases} \quad (9-3)$$

$$P(h) = \begin{bmatrix} 1 & h & h^2 & h^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad P'(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (10-3)$$

فرم ماتریسی بالا برای نمایش پارامتریک در کامپیوتر بسیار مناسب هستند.

### ۳-۷ اسپلاین های پارامتری درجه سه

منحنی های پارامتری درجه سه فرگوسن ، بزیر و *B-spline* را می توان برای تعریف پارامتری شکل یک قطعه مورد استفاده قرار داد. اختلاف اصلی که بین این روش ها وجود دارد این است که مثلا در منحنی های فرگوسن ، از مختصات تعدادی نقاط و شیب موجود در آن برای بیان شکل استفاده می شود ولی در منحنی های بزیر و *B-spline* از نقاط کنترل کننده چند ضلعی مربوط به اسپلاین برای مدل سازی استفاده می شود. بایستی به این نکته توجه کرد که هر سه نوع منحنی نام برده ، هنگامی که از کلیه نقاط ورودی می گذرند ، منحنی های مشابهی را تولید می کنند [۲].



شکل ۳-۳ (a) روش فرگوسن، (b) روش بزیبر، (c) روش *B-spline*

هنگامی که هدف درون یابی میان تعدادی از نقاط باشد، منحنی های فرگوسن<sup>۱</sup> مفید واقع می شوند؛ و منحنی های بزیبر و *B-spline* زمانی کارآیی دارند که هدف دست کاری و ایجاد تغییرات در داده ها باشد.

این روش ها را می توان به راحتی به فرم ماتریسی نوشت و از آن جهت تولید برنامه های

کامپیوتری استفاده نمود. هر سه روش نام برده در فوق را می توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$P(h) = H.R.M \quad (11-3)$$

که در آن خواهیم داشت:

<sup>۱</sup> Ferguson

$$H = [h^3 \ h^2 \ h \ 1], \quad 0 \leq h \leq 1 \quad (12-3)$$

$R, M$  نیز به نوع اسپلاین مورد نظر بستگی دارند [۲].

### ۳-۷-۱ اسپلاین های درجه سه فرگوسن

در مورد این اسپلاین ها باید خاطر نشان کرد که از درون یابی هرمیتی<sup>۱</sup> استفاده شده است و داریم :

$$R_{fer} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{fer} = \begin{bmatrix} p(0)^T \\ p(1)^T \\ p'(0)^T \\ p'(1)^T \end{bmatrix}, \quad 0 \leq h \leq 1 \quad (13-3)$$

که در این روابط بردارهای موقعیت و  $p(1), p(0)$  و  $p'(1), p'(0)$  نشان دهنده شیب منحنی در  $h=1, h=0$  یعنی نقاط ابتدا و انتهای اسپلاین هستند.

### ۳-۷-۲ اسپلاین های درجه سه بزیر

برای رسم این اسپلاین ها از درون یابی به کمک توابع برنشتاین استفاده شده است و داریم :

$$R_{bez} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{bez} = \begin{bmatrix} c_0^T \\ c_1^T \\ c_2^T \\ c_3^T \end{bmatrix}, \quad 0 \leq h \leq 1 \quad (14-3)$$

و در این روابط بردارهای موقعیت در رئوس کنترلی  $c_3, c_2, c_1, c_0$  هستند. این رئوس کنترلی بیان گر چندضلعی مشخصه منحنی هستند. در منحنی های اسپلاین درجه سه بزیر ، نقاط  $C_3, C_0$  بر روی نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی منطبق هستند [۲].

<sup>1</sup> Hermit Interpolation

### ۳-۷-۳ اسپلاین های درجه سه *B-spline*

برای این نوع از اسپلاین ها از درون یابی به کمک توابع شوئنبرگ<sup>۱</sup> استفاده شده است. و به طور مشابه در مورد این دسته از اسپلاین ها داریم :

$$R_b = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_b = \begin{bmatrix} b_0^T \\ b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix}, 0 \leq h \leq 1 \quad (15-3)$$

که در این روابط  $b_3, b_2, b_1, b_0$  بردارهای موقعیت در رئوس کنترلی  $B_3, B_2, B_1, B_0$  هستند. این رئوس کنترلی بیان گر چند ضلعی مشخصه منحنی هستند. برای منحنی های اسپلاین درجه سه *B-spline* بر خلاف منحنی های اسپلاین درجه سه بزیر ، نقاط  $B_3, B_0$  بر روی نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی منطبق نیستند.

### ۳-۸ مقایسه اسپلاین های پارامتری برای استفاده در بهینه سازی شکل

همان طور که قبلا گفته شد منحنی های فرگوسن زمانی مفید هستند که هدف درون یابی میان تعدادی از نقاط باشد. و در مسائل بهینه سازی شکل ، متغیر بهینه سازی ، مختصات نقاط است. پس با دست کاری و ایجاد تغییرات در مختصات نقاط مواجه هستیم. بدین ترتیب به راحتی می توان منحنی های فرگوسن را در برابر بزیر و *B-spline* ، نامناسب دانست. در نتیجه ، مقایسه اصلی بین دو گزینه برتر یعنی منحنی های نوع بزیر و *B-spline* است. تفاوت منحنی های بزیر و *B-spline* در این است که در بزیر از توابع درون یاب برنشتاین استفاده شده است ولی در *B-spline* از توابع درون یاب شوئنبرگ [۱].

اما منحنی های بزیر نیز در امر بهینه سازی شکل معایبی دارند که به آن ها اشاره می کنیم.

۱- برای تولید یک شکل پیچیده ، باید رئوس کنترلی را زیاد کرد که این خود موجب افزایش درجه چند جمله ای است و رفتار تابع به ازای نقاط زیاد خیلی مناسب نیست.

<sup>۱</sup> Schoenberg

۲- با جابجا کردن یک نقطه برای تصحیح یک قسمت از منحنی ، کل منحنی تغییر شکل می دهد. برای رفع این مشکلات ، منحنی های  $B-spline$  مطرح شدند.

### $B-splines$ ۹-۳

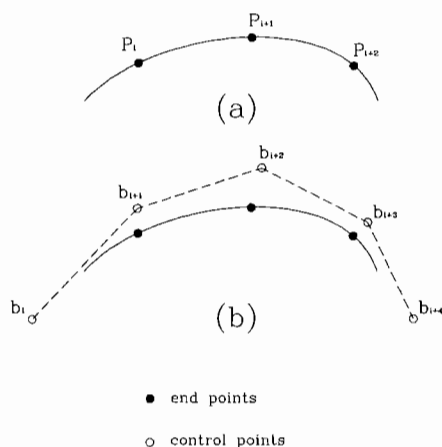
در منحنی های بزیر از توابع برنشتاین به عنوان تابع پایه برای تعریف اسپلاین استفاده شد ، ولی برای رفع عیوب حاکم بر منحنی های بزیر ، سعی در رفع آن از طریق حاکم کردن قوانین و محدودیت هایی در استفاده از پارامتر  $h$  ، شد. این کار با تعریف توابع پایه شوئنبرگ برای  $B-spline$  انجام گرفت. در منحنی های بزیر روند کار به این صورت است که برای هر مقدار از پارامتر  $h$  ، در طول مسیر منحنی ، تمامی توابع برنشتاین محاسبه می شوند و همین موضوع باعث می شود که کنترل پذیری موضعی کامل نداشته باشیم. برای فرار از این عیب ، در منحنی های  $B-spline$  ، مجموعه کاری برای پارامتر  $h$  ، طوری تعریف شده است که می تواند بر اساس توابع پایه  $B-spline$  ، نقش خوبی در کنترل پذیری موضعی و بقیه نتایج داشته باشد. کلیه نقاط واقع بر روی منحنی درجه سه  $B-spline$  در میان پوسته محدب شکل ، بیان کننده چندضلعی مشخصه اسپلاین ، واقع می شوند. از دیگر خواص منحنی های  $B-spline$  می توان به این نکته اشاره کرد که منحنی بزیر یک دامنه بین صفر و یک را تبدیل به یک منحنی می کند ، در حالی که  $B-spline$  یک پارامتر را بین  $h_{k-1}$  تا  $h_{m+1}$  در نظر می گیرد و منحنی را خم و راست می کند. خاصیت کنترل پذیری موضعی به این صورت است که با زیاد شدن تعداد نقاط  $m$  ، می توان تعداد محاسبات محدود و کم اشتباه داشت ، چون مقدار  $k$  تغییری نمی کند.  $k$  برابر با مرتبه منحنی  $B-spline$  است. مثلا بر اساس توابع پایه مرتبه چهارم ، از آن جا که این توابع از درجه سه هستند ، دارای پیوستگی  $C(2)$  می باشند ، یعنی مشتق مرتبه دوم دارند و مشتق مرتبه دوم ، پیوستگی را نیز حفظ می کند. و به دلیل خاصیت کنترل پذیری موضعی است که در بزیر با تغییر یک نقطه کل منحنی عوض می شود ولی در  $B-spline$  این طور نیست.

با توجه به خواص منحنی های  $B-spline$  می توان آن ها را بهترین نوع برای مسائل بهینه سازی

شکل دانست.

### ۳-۱۰ استفاده از نقاط کلیدی اسپلاین ها در تعریف شکل

در این روش مختصات نقاط کلیدی واقع بر روی اسپلاین به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می شوند. یعنی مرزهای سازه با اسپلاین های درجه سه که از این نقاط کلیدی عبور می کند مدل می شوند. این روش در سال های اخیر مورد بحث و تحقیق در عرصه بهینه سازی شکل بوده است [۲].



شکل ۳-۴ روش های انتخاب متغیر طراحی (a) نقاط کلیدی (b) نقاط کنترلی.

شکل ۳-۴a نشان دهنده یک منحنی *B-spline* است که از میان مختصات نقاط کلیدی  $P_i$  می

گذرد و داریم :

$$P_i = [p_{xi}, p_{yi}]^T \quad (16-3)$$

همان گونه که در شکل ۳-۴b مشخص است ، نقاط کنترلی که معرف جندضلعی تعریف کننده اسپلاین هستند با  $b_i$  نشان داده شده اند. اما در روش اخیر مختصات نقاط  $P_i$  به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می شوند. بردار متغیرهای تعریف شکل به صورت زیر است:

$$S = [p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2}, \dots, p_{xn}, p_{yn}]^T \quad (17-3)$$

که در آن مختصات نقاط کلیدی  $P_i$  در دستگاه مختصات کارترین تعریف شده است. انتخاب نقاط کلیدی به عنوان متغیرهای طراحی دارای امتیازات زیر است [۳] :



۱- کاهش چشمگیر در تعداد متغیرهای طراحی

۲- برای شکل های پیچیده به راحتی می توان موقعیت متغیرهای طراحی را تعریف کرد

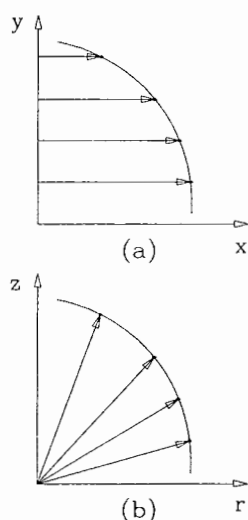
۳- امکان تعریف جهت حرکت برای متغیرهای طراحی

۴- امکان ایجاد ارتباط بین متغیرهای طراحی.

متغیرهای طراحی شکل را می توان در دستگاه مختصات کارتزین و یا قطبی تعریف کرد که شکل

۵-۳ بیان گر این موضوع است. ایجاد ارتباط بین متغیرهای طراحی برای کمتر کردن تعداد متغیرهای

طراحی است ، مثلا زمانی که یک شکل متقارن داریم می توان تعداد متغیرهای طراحی را کاهش داد.



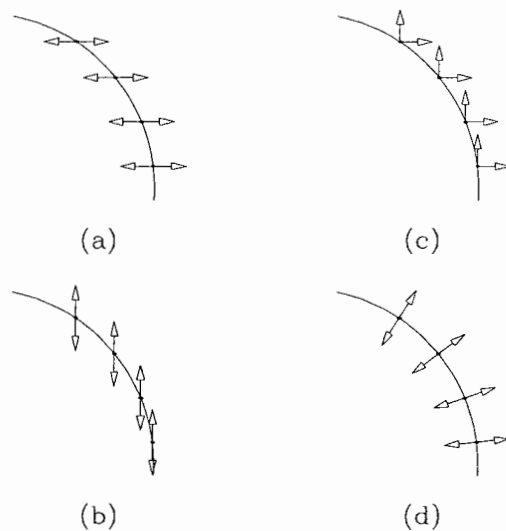
شکل ۵-۳ شکل های معمول برای متغیرهای طراحی (a) کارتزین (b) قطبی.

یکی دیگر از امتیازاتی که استفاده از نقاط کلیدی در تعریف اسپلاین ها دارد این است که می توان

جهت حرکت متغیر طراحی را مشخص کرد. این موضوع باعث حصول جواب های بهتری می شود. شکل

۶-۳ انواع جهات حرکتی که می توان برای متغیرهای طراحی در نظر گرفت را نشان می دهد. برای

استفاده از این امکان باید قبلا این جهات را برای متغیرهای طراحی تعریف و لحاظ کنیم.



شکل ۳-۶ جهات حرکات ممکن برای متغیرهای طراحی  
(a) افقی (b) قائم (c) افقی و قائم (d) عمود بر منحنی.

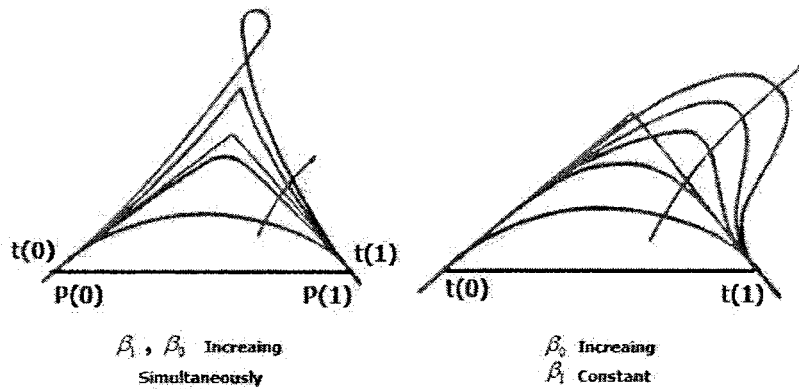
قابل توجه است که می توان با تعریف جهات حرکت مختلف ، شکل های بهینه متنوعی را به دست آورد.

### ۳-۱۱ شیب های ابتدایی و انتهایی برای اسپلین ها

گاهی اوقات شیب های ابتدا و انتهای اسپلین ها از قبل با توجه به شکل سازه مشخص است. در این صورت بزرگی شیب در نقاط انتهایی منحنی را می توان به طور تقریبی با استفاده از روابط تجربی محاسبه نمود. با توجه به این نکته که بردار شیب های  $P(0)$  و  $P(1)$  نسبتی از بردارهای واحد شیب ، یعنی  $A(0)$  و  $A(1)$  در نقاط  $A(0)$  و  $A(1)$  هستند ، داریم [۳]:

$$P(0) = \beta_0 A(0) \quad , \quad P(1) = \beta_1 A(1) \quad (18-3)$$

افزایش همزمان  $\beta_0$  و  $\beta_1$  ، سبب ایجاد بیشترین پری در منحنی می شود ، در حالی که اگر فقط مثلا  $\beta_0$  افزایش یابد ، باعث می شود منحنی در طول بیشتری در راستای  $A(0)$  قرار بگیرد (شکل ۳-۶).



شکل ۳-۶ تاثیر پارامتر  $\beta$  بر مقادیر شیب های انتهایی.

برای مقادیر بزرگ  $\beta_0$  و  $\beta_1$  در منحنی ، حلقه و تاب خوردگی پدیدار می شود. برای منحنی های درجه سه ، یک قانون مورد اعتماد این است که اطمینان داشته باشیم بزرگی  $\beta_0$  و  $\beta_1$  از سه برابر اندازه طول ضلع  $P(0)-P(1)$  یعنی  $|P(1) - P(0)|$  بیشتر نیست [۲].

### ۳-۱۲ روش تولید مرزها

بدین ترتیب اطلاعات لازم برای مدل سازی شکل یک سازه و کنترل آن به وسیله پارامترهای اسپلاین در دست است.

برای این منظور از دو فایل ورودی متنی که یکی مربوط به مختصات نقاط کلیدی و دیگری مربوط به مشخصات قطعات اسپلاین ها است استفاده می کنیم (شکل های ۳-۷ و ۳-۸).

NUMKEY	NUMINDEP	NUMDEP	NSEG
12	3	5	7
1	0.000000	0.0	0.000000
2	44.400002	0.0	0.000000
3	46.400002	0.0	3.960000
4	50.000000	0.0	5.600000
5	53.959999	0.0	3.960000
6	55.599998	0.0	0.000000
7	68.000000	1.0	0.000000
8	62.728218	2.0	12.727627
9	50.000000	0.0	18.000000
10	37.000000	2.0	12.000000
11	20.000000	0.0	8.000000
12	0.000000	0.0	8.000000

شکل ۳-۷ فایل ورودی برای معرفی نقاط کلیدی اسپلین ها.

همان طور که در شکل ۳-۷ پیدا است مختصات ۱۲ نقطه کلیدی تشکیل دهنده مرزهای سازه به وسیله یک فایل ورودی متنی به همراه مشخصات دیگری به برنامه داده می شود. به غیر از مختصات نقاط کنترلی، پارامترهای دیگری نیز به وسیله این فایل به برنامه وارد می شود؛ در خط یکم این فایل عبارت *NUMKEY* نشان دهنده تعداد نقاط کلیدی تشکیل دهنده اسپلین ها است که مقدار آن در خط بعد و زیر آن نوشته شده است. به همین ترتیب *NUMINDEP* بیانگر تعداد متغیرهای طراحی مستقل و *NUMDEP* نشان دهنده تعداد متغیرهای طراحی غیر مستقل است. هر متغیر طراحی غیر مستقل را می توان با تعریف رابطه ریاضی آن با یکی یا چند تا از متغیرهای طراحی مستقل به برنامه معرفی کرد. در این فایل ورودی اگر مختصات نقطه ای به عنوان متغیر طراحی مستقل مد نظر باشد در جلوی مختصه مربوطه (*X* یا *Y*) عدد یک و اگر متغیر طراحی وابسته باشد عدد دو درج می شود و اگر اصلاً متغیر طراحی نباشد یعنی مختصات آن در حین حل مسئله و تا پایان فرایند بهینه سازی ثابت بماند، عدد صفر قرار می گیرد. عبارت *NSEG* نیز نشان دهنده تعداد اسپلین هایی است که مرز را تشکیل می دهند. بدین ترتیب شکل مورد نظر از هشت قطعه اسپلین تشکیل شده است. مشخصات این اسپلین ها به وسیله فایل ورودی بعدی که در شکل ۳-۸ قابل ملاحظه است به برنامه معرفی می شود.

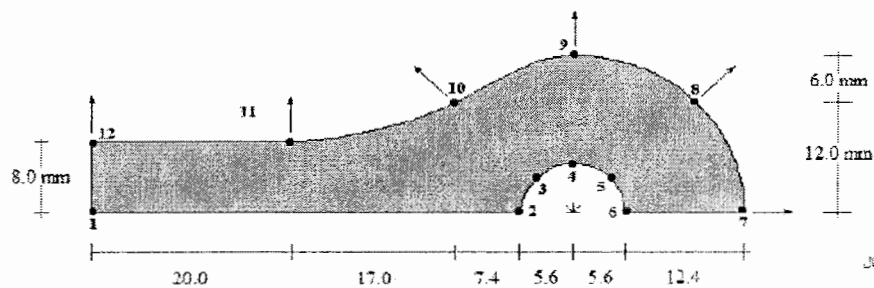
Segment	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	Point 5	Point 6
SEG#1	2	10	0			
	1	2				
SEG#2	5	3	1			
	0	1	0	-1		
	3	3				
	2	3	4	5	6	
SEG#3	2	5	0			
	6	7				
SEG#4	3	6	1			
	0	1	-1	0		
	05	05				
	7	8	9			
SEG#5	3	6	1			
	-1	0	-1	0		
	10	10				
	9	10	11			
SEG#6	2	8	0			
	11	12				
SEG#7	2	3	0			
	12	1				

شکل ۳-۸ فایل ورودی متنی برای تعیین مشخصات قطعات اسپلین ها.

برای تعریف مشخصات هر قطعه اسپلین به حداقل دو خط اطلاعات ورودی نیاز است. در اولین خط و ابتدای آن تعداد نقاط کلیدی تشکیل دهنده اسپلین مشخص می شود. عدد بعدی در همین خط نشان دهنده تعداد زیر قطعات تشکیل دهنده این اسپلین است. عدد سوم در همین خط نشان دهنده خطی بودن یا منحنی بودن اسپلین است؛ اگر این عدد برابر صفر باشد یعنی اسپلین خطی است، اگر برابر دو باشد یعنی اسپلین منحنی است و شیب دو سر آن آزاد است، اما اگر این عدد برابر یک باشد یعنی اسپلین منحنی است و شیب دو سر آن معلوم است که در این صورت به دو خط اطلاعات اضافی نیازمندیم، به این شکل که در خط دوم به وسیله چهار عدد شیب های ابتدا و انتهای اسپلین را به برنامه معرفی می کنیم؛ دو عدد اولی نشان دهنده مولفه های بردار شیب ابتدا و دو عدد بعدی بیانگر مولفه های بردار شیب انتهای اسپلین هستند، در این صورت در خط بعد مقادیر پارامتر  $\beta$  را به برنامه معرفی می

کنیم. در هر صورت در آخرین خط معرفی پارامترهای اسپلاین ، شماره نقاط کلیدی تشکیل دهنده آن را وارد می کنیم.

اگر فایل های ورودی برنامه به صورت شکل های ۷-۳ و ۸-۳ باشند در این صورت شکل ۹-۳ توسط برنامه تولید می شود.



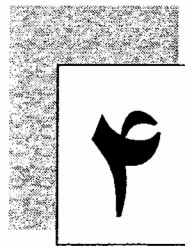
شکل ۹-۳ تولید شده با استفاده از دو فایل متنی ورودی (جهت حرکت آن دسته از نقاط کلیدی که به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده اند روی شکل مشخص است).

زیر برنامه استفاده شده برای تولید شکل ها در این تحقیق توسط آقای ناصر ظریف در سال ۱۳۸۳ نوشته شده است. این زیر برنامه شامل تعدادی فایل های خروجی نیز هست که این فایل ها ، فایل های ورودی زیربرنامه مش بندی خواهند بود.

## مراجع فصل سوم

- ۱- سلیمانی تبار، محمد. "گرافیک کامپیوتر". جزوه تدریس. دانشگاه علم و فرهنگ. ۱۳۸۵.
- 2- M.Ozaka."Analysis and optimal design of structures with adaptivity". Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering University of Wales, Swansea, UK, 1993.
- ۳- ظریف، ناصر. "بهینه سازی شکل سازه ها با استفاده از روش تغییرات مرزی". پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود. ۱۳۸۳.
- 4- "The NURBS book". Piegl,L and Tiller.W, Springer.1995.
- 5- W.Annicchiario and M.Cerrolaza."Finite elements, genetic algorithms and B-splines:a combined technique for shape optimization".Finite Elements in Analysis and Design 33 (1999) 125-141.

## تولید مش



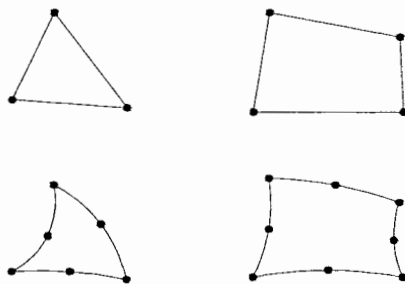
در این فصل نحوه مش بندی در حالت دو بعدی برای سازه مورد نظر بررسی می شود ، بدین منظور از تکنیک مش بندی به روش جبهه پیش رونده استفاده شده است.



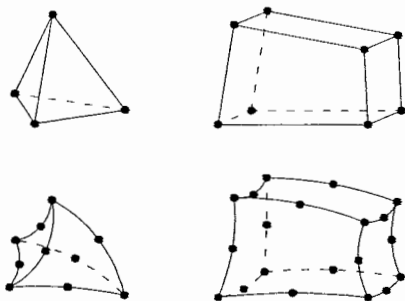
#### ۱-۴ تولید مش

همان طور که قبلا اشاره شد ، این تحقیق بر اساس روش اجزای محدود استوار است. بدین ترتیب پس از تعیین و معرفی مرز ها نوبت به مش بندی ناحیه مورد نظر از سازه مورد مطالعه می رسد. مش بندی و تولید المان ها یکی از مراحل مهم در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره ای با روش اجزای محدود در مسائل مکانیک جامدات است.

تولید مش ، تقسیم بندی ناحیه مورد نظر به قطعات کوچکتر و از نظر هندسی ساده تر است. این المان ها می توانند در مسائل دو بعدی به صورت مثلث یا چهار ضلعی و در مسائل سه بعدی به صورت چهار وجهی و شش وجهی باشند. (شکل ۱-۴)



2D elements



3D elements

شکل ۱-۴ المان های دو بعدی و سه بعدی.

در سال های گذشته محققان و دانشمندان ، تحقیقات بسیاری در این زمینه انجام داده اند و روش هایی را ارائه کرده اند که بعضی از آن ها مورد استفاده بیشتری قرار گرفته است. به هر حال یک روش قوی در این زمینه روشی است که به وسیله آن بتوان با صرف هزینه کمتر به یک شبکه مش مناسب از نظر چگالی (تراکم المان ها) و کیفیت دست یافت.

بدون در نظر گرفتن نوع و شکل المان ها ، روش های تولید مش به سه گروه تقسیم بندی می

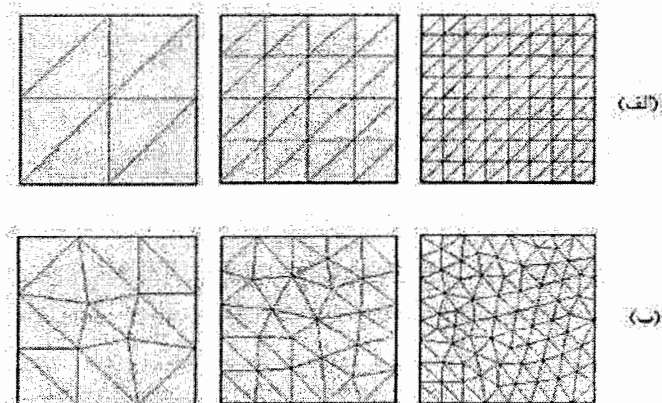
شوند:

- روش های ساختار یافته *Structured Mesh Generation*

- روش های ساختار نیافته *Unstructured Mesh Generation*

- روش های ترکیبی *Hybrid Mesh Generation*

روش های تولید مش ساختار یافته ، روش هایی هستند که در آن ها برای هر گره و المان موجود در داخل دامنه ، تعداد گره ها و المان های موجود در همسایگی آن ها ثابت است ، ولی در مورد مش های ساختار نیافته ، این تعداد ثابت نیست و می تواند متغیر باشد. در روش های ساختار یافته تولید مش ، ابتدا گره ها و سپس المان ها تولید می شوند و این در حالی است که در روش های ساختار نیافته تولید المان ها و گره ها به صورت همزمان صورت می گیرد. از امتیازات روش های ساختار نیافته می توان به سادگی الگوریتم آن ها اشاره کرد ، اما از عیوب مهم این روش ها این است که نمی توان از آن ها به راحتی برای تولید مش در شکل های پیچیده استفاده کرد [۳].



شکل ۲-۴ (الف) مش ساختار یافته (ب) مش ساختار نیافته.

روش های تولید مش ساختار نیافته ، روش های قدرتمندی برای مش بندی اشکال پیچیده هستند. روش های ترکیبی نیز ، تلفیقی از روش های تولید مش ساختار نیافته و ساختار یافته هستند. برای حل مسائل با استفاده از روش اجزای محدود ، به یک تولید کننده مش قوی نیاز است ؛ در این تحقیق ، برای مش بندی ناحیه مد نظر از سازه ی مورد مطالعه ، از یک روش تولید مش ساختار نیافته به نام « روش جبهه پیش رونده » (*Advancing Front Technique*) که به اختصار آن را *AFT* می نامند استفاده شده است. این روش برای مدل سازی شکل های پیچیده بسیار مناسب است و می توان گفت اطلاعات و پارامترهای مورد نیاز برای تولید مش در این روش بسیار کم است. این پارامترها تعیین کننده چگالی مش در نواحی مختلف دامنه مورد نظر و همچنین اندازه ، جهت و کشیدگی المان ها هستند. از دیگر روش های تولید مش ساختار نیافته می توان به روش های *Circle Packing* و *Delaunay Triangulation* برای تولید المان های مثلثی و همچنین روش *Paving Algorithm* برای تولید مش های ساختار نیافته چهار گرهی اشاره کرد.

#### ۴-۲ روش AFT برای تولید مش

این روش اولین بار توسط آقای جورج<sup>۱</sup> به سال ۱۹۷۱ ارائه شد. فرم کلاسیک این روش برای حالت های دو بعدی در سال ۱۹۸۵ توسط لو<sup>۲</sup> و در سال ۱۹۸۷ توسط پرایر<sup>۳</sup> و همکارانش مطرح شد. پس از آن تحقیقات افرادی چون لونر و پاریخ<sup>۴</sup> ، گلگلاب<sup>۵</sup> ، ماوریپلیس<sup>۶</sup> ، شوستکو و لونر<sup>۷</sup> باعث پیشرفت فراوان این روش شد. امروزه این روش ، روشی بسیار قوی و کامل برای تولید مش های باکیفیت بالا در شکل های دلخواه است. تحقیقات بلاکر و استفا نسون<sup>۸</sup> در سال ۱۹۹۱ و بلاکر و

<sup>1</sup> A.George

<sup>2</sup> Lo

<sup>3</sup> Peraire

<sup>4</sup> Lohner and Parikh

<sup>5</sup> Golgolab

<sup>6</sup> Mavriplis

<sup>7</sup> Shostko and Lohner

<sup>8</sup> Blacker and Stephenson

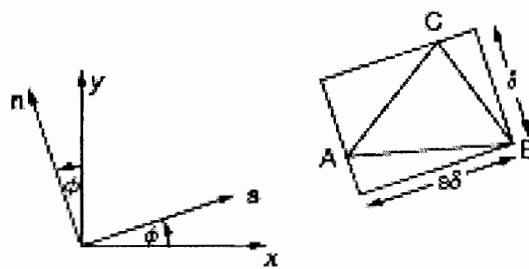
میرز<sup>۱</sup> در سال ۱۹۹۳، تولید مش هایی با المان های چهارضلعی و شش ضلعی را در فضای دو بعدی و سه بعدی نشان می دهد. این روش یکپارچگی مرزی را حفظ می کند و دارای این قابلیت است که مثلث های با کیفیت بالا در مرزها تولید کند. در این روش منحنی های مرزی داخلی و خارجی دامنه محاسبات که عموماً به وسیله اسپلاین های تکه تکه مکعبی که بر مبنای مجموعه نقاطی که توسط کاربر معرفی شده است، تعریف شده اند، با تقسیم شدن به قطعات خطوط مستقیم که مرتبط با توزیع نقاط دامنه مرزی هستند، گسسته سازی می شوند. بدین ترتیب یکپارچگی مرز حفظ می شود. این مجموعه از قطعات مستقیم خطی، جبهه اولیه را تشکیل می دهند. سپس این جبهه اولیه به سمت داخل دامنه با یک فرایند گام به گام نقل مکان می کند. بدین ترتیب نقاط جدید و اضلاع جدید تولید می شوند و اضلاع قدیمی حذف می شوند و المان های مثلثی تشکیل می شوند. اضلاع یک مثلث جدید متشکل از دو نقطه از یک ضلع جبهه اولیه و یک نقطه دیگر بر روی مرز جبهه اولیه یا نقاط تازه تولید شده در داخل جبهه اولیه است. این فرایند تا زمانی که هیچ ضلعی بر روی جبهه اولیه باقی نمانده باشد ادامه پیدا می کند. این امر بدین معناست که جبهه اولیه از بین رفته و یک دامنه مثلثی شده را پشت سر می گذارد. قابل توجه است که انتخاب اولیه نقاط بر روی منحنی های مرزی به اندازه المان ها مرتبط است زیرا اضلاع در جبهه اولیه، همان اضلاع در مش بندی نهایی هستند [۱].

#### ۳-۴ کنترل فرایند تولید مش

هر روشی که برای تولید مش استفاده می شود باید از یک سیستم کنترل کننده مش در ارتباط با اندازه و شکل المان ها برخوردار باشد. اصلی ترین کار برای کنترل اندازه المان ها در روش AFT (در حالت دو بعدی) تعریف مشخصات دقیق المان ها برای هر المان مورد نظر در دامنه محاسباتی با استفاده از مش زمینه است. کنترل روی مشخصه های هر المان، با یک درون یابی از پارامترهای مشخص شده روی مش زمینه به دست می آید. اندازه، شکل و جهت المان های مثلثی، با سه پارامتر مستقل توصیف می شود: (شکل ۳-۴)

<sup>۱</sup> Blacker and Meyers

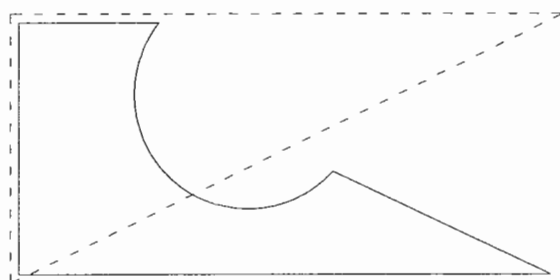
- پارامتر اندازه  $\delta$
- پارامتر کشیدگی  $S$
- جهت قرار گیری المان که با زاویه  $\phi$  در شکل نشان داده شده است و با دوبردار مستقل و عمود بر هم  $s, n$  مشخص می شود [۱].



شکل ۳-۴ پارامترهای المان.

برای مشخص نمودن یک المان ، کاربر می تواند چهار پارامتر را معرفی کند:  $\delta, S, n_x, n_y$ . در این جا  $n_x, n_y$  مولفه های بردار  $n$  با در نظر گرفتن مختصات کلی  $Oxy$  هستند. برای کنترل شبکه ، مقادیر مورد نیاز این پارامترها در هر یک از گره های مش زمینه مشخص شده اند و برای هر نقطه داخل ناحیه مورد نظر ، این پارامترها از طریق درون یابی مشخص می شوند.

مشخصات مش زمینه معمولا توسط کاربر و به صورت دستی تعریف می شود . این مش زمینه می تواند نسبتا بزرگ باشد حتی برای اشکال پیچیده. مش زمینه لازم نیست که دقیقا بر روی مرزهای ناحیه مورد نظر برای مش بندی منطبق باشد و فقط کافی است که این ناحیه را پوشش دهد (شکل ۴-۴).



— Boundaries of structure  
 - - - Background Mesh

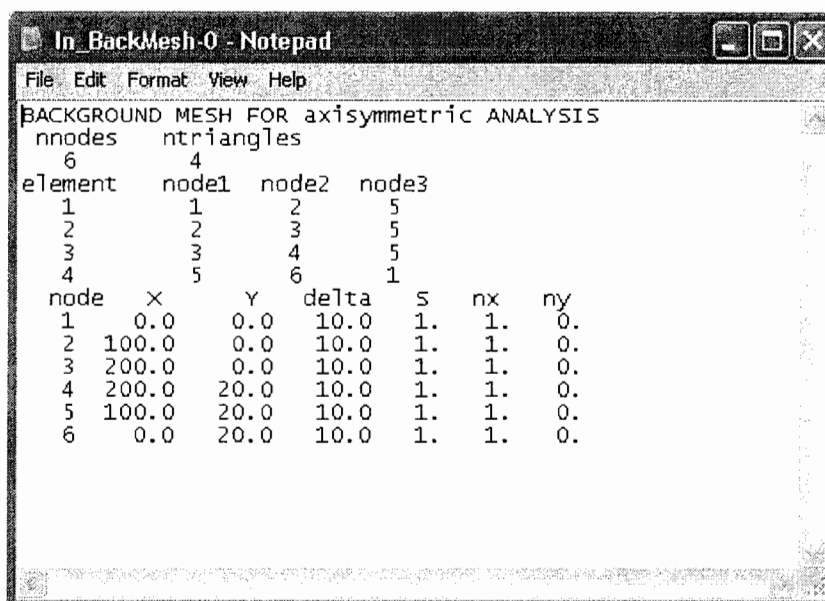
شکل ۴-۴ مش زمینه برای ناحیه مورد نظر حل مسئله.

گاهی اوقات اگر مش زمینه وجود نداشته باشد ، یک مش زمینه به صورت پیش فرض در نظر گرفته می شود که شامل دو المان مثلثی یکسان است با چگالی مش یکسان. این تراکم یا چگالی مش که ارتباط مستقیم با پارامتر  $\delta$  دارد می تواند با مقدار پنج درصد اندازه قطر مش زمینه برای این پارامتر مشخص شود. زمانی که روش های تطبیقی مد نظر باشد ، شبکه مش بندی اولیه می تواند به عنوان مش زمینه برای مرحله بعدی استفاده شود، که در این صورت مشخصات المان ها با دقت بیشتری برای مرحله بعد بدست می آیند.

#### ۴-۴ مفهوم مش زمینه

در روش *AFT* برای هر نقطه ای که قرار است یکی از نقاط نهایی دامنه مش بندی شده باشد ، همانطور که قبلا ذکر شد ، چهار پارامتر مستقل وجود دارد. این چهار پارامتر در حقیقت مربوط به یک المان هستند ولی برای تشکیل این المان که به صورت مثلثی است ابتدا باید مشخصات سه گره این مثلث موجود باشد یعنی به عبارت دیگر پارامترهای آن ها مشخص شده باشد. در روش *AFT* مشخصات دو راس از این سه راس همیشه از قبل معلوم است و مشخصات راس سوم از روی درون یابی از مش زمینه به

دست می آید. برای هر نقطه منتخب که جزئی از مجموعه نقاط مش نهایی خواهد بود این درون یابی باید انجام شود. پارامترهای مش زمینه درگره های مربوط به آن از قبل توسط کاربر مشخص شده است. در زیر برنامه استفاده شده در این پروژه برای مش بندی مشخصات مش زمینه به وسیله یک فایل متنی توسط کاربر به برنامه وارد می شود. این زیر برنامه توسط آقای ژو<sup>۱</sup> نوشته شده است که قابلیت تولید المان های مثلثی از روش *AFT* را داراست. شایان ذکر است که برای شروع به کار این برنامه وجود مشخصات مش زمینه امری ضروری است. شکل فایل متنی ورودی به صورت زیر است:



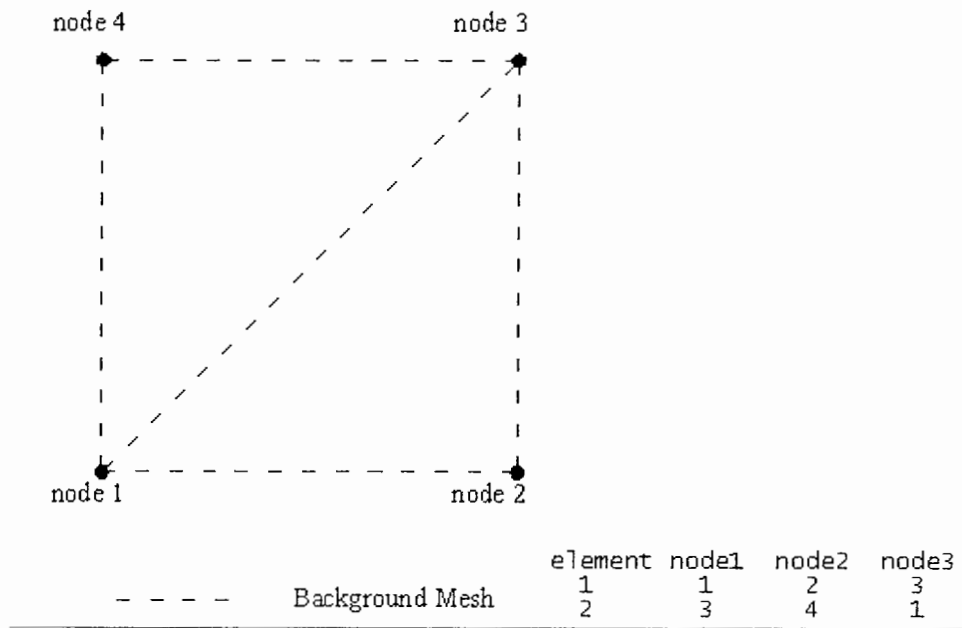
```

In_BackMesh-0 - Notepad
File Edit Format View Help
BACKGROUND MESH FOR axisymmetric ANALYSIS
nnodes      ntriangles
6           4
element     node1      node2      node3
1           1         2         5
2           2         3         5
3           3         4         5
4           5         6         1
node        x         y         delta    s         nx        ny
1           0.0      0.0      10.0     1.        1.        0.
2           100.0     0.0      10.0     1.        1.        0.
3           200.0     0.0      10.0     1.        1.        0.
4           200.0     20.0     10.0     1.        1.        0.
5           100.0     20.0     10.0     1.        1.        0.
6           0.0       20.0     10.0     1.        1.        0.
    
```

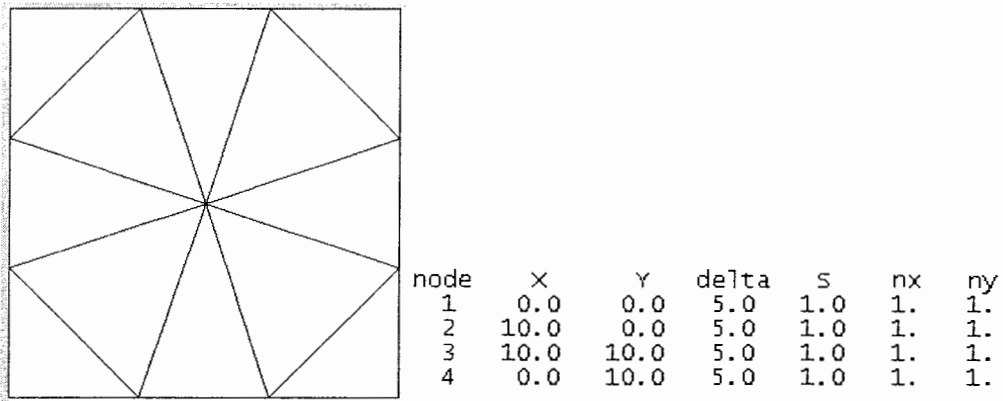
شکل ۴-۵ فایل متنی ورودی برای مش زمینه.

در ادامه برای بیشتر درک کردن مفهوم مش زمینه و تاثیر پارامترهای آن بر مش بندی نهایی به شکل‌های ۴-۶ تا ۴-۱۲ توجه کنید.

<sup>1</sup> J.Z.Zhu



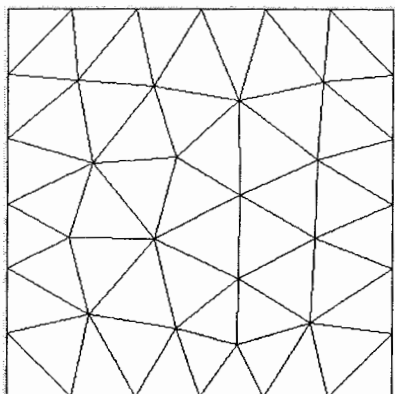
شکل ۴-۶ مشخصات هندسی مش زمینه.



شکل ۴-۷ مشخصات نقاط مش زمینه و مش بندی نهایی.

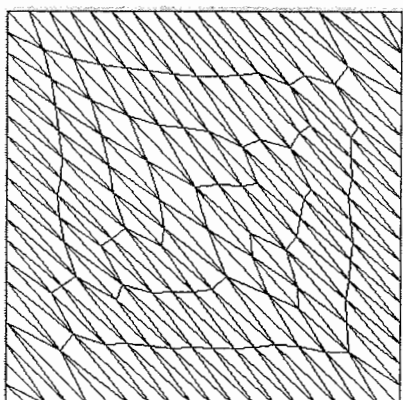


آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری



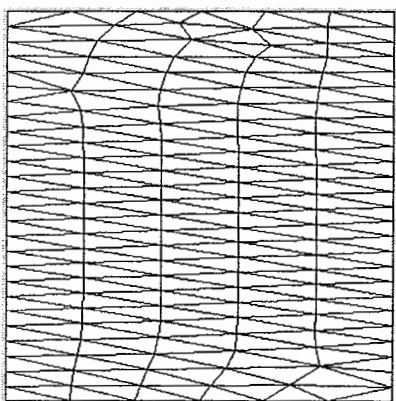
node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	1.0	1.	1.
2	10.0	0.0	2.0	1.0	1.	1.
3	10.0	10.0	2.0	1.0	1.	1.
4	0.0	10.0	2.0	1.0	1.	1.

شکل ۴-۸ تاثیر پارامتر  $\delta$  بر مش بندی نهایی.



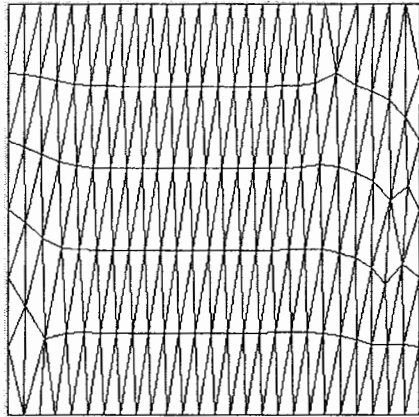
node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	0.2	1.	1.
2	10.0	0.0	2.0	0.2	1.	1.
3	10.0	10.0	2.0	0.2	1.	1.
4	0.0	10.0	2.0	0.2	1.	1.

شکل ۴-۹ تاثیر پارامتر  $s$  بر مش بندی نهایی.



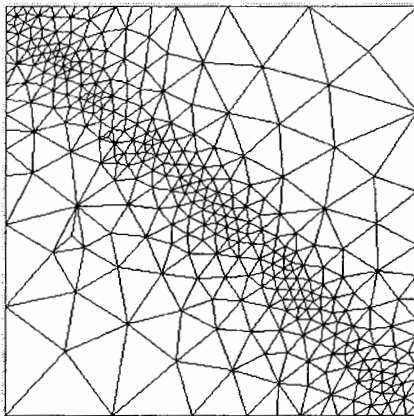
node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	0.2	0.	1.
2	10.0	0.0	2.0	0.2	0.	1.
3	10.0	10.0	2.0	0.2	0.	1.
4	0.0	10.0	2.0	0.2	0.	1.

شکل ۴-۱۰ تاثیر پارامتر  $n_x$  بر مش بندی نهایی.



node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	0.2	1.	0.
2	10.0	0.0	2.0	0.2	1.	0.
3	10.0	10.0	2.0	0.2	1.	0.
4	0.0	10.0	2.0	0.2	1.	0.

شکل ۴-۱۱ تاثیر پارامتر  $n_r$  بر مش بندی نهایی.



node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	4.0	1.0	1.	1.
2	10.0	0.0	0.2	1.0	1.	1.
3	10.0	10.0	4.0	1.0	1.	1.
4	0.0	10.0	0.2	1.0	1.	1.

شکل ۴-۱۲ پارامترهای مش زمینه و تاثیر آن بر مش بندی نهایی.

#### ۴-۵ الگوریتم روش AFT

اساس روش AFT بر مبنای تولید همزمان گره ها و المان ها است. اعتبار مثلث های به وجود آمده همزمان با تولید آن ها توسط برنامه کنترل می شود. یک مثلث معتبر باید در داخل جبهه در حال مش بندی و دارای مشخصات درون یابی شده از مش زمینه باشد. در این جا الگوریتم روش AFT به صورت گام به گام ارائه می شود:

۱- ابتدا جبهه اولیه برای تولید شبکه مش بندی تشکیل می شود. این جبهه یک چند ضلعی شامل یک سری پاره خط ها و نقاط است که مرز اولیه ناحیه مورد نظر برای مش بندی را تشکیل می دهد. به این جبهه ، جبهه فعال می گوئیم و نقاط روی آن را نقاط فعال می نامیم. سپس با استفاده از درون یابی از روی مش زمینه پارامترهای نقاط فعال روی جبهه فعال به دست می آید. این پارامترها همان طور که قبلا ذکر شد برای به دست آوردن نقطه ای که قرار است با دو نقطه مجاور ، یک المان را تشکیل دهند ، استفاده می شوند.

۲- انتخاب کوچکترین ضلع روی جبهه فعال که طول آن برابر  $l$  است. مقدار  $\delta$  در این مرحله با درون یابی از روی دو نقطه تشکیل دهنده این پاره خط (کوچکترین ضلع جبهه فعال) به دست می آید. (پس از تشکیل مثلث جدید ، این ضلع دیگر ضلع فعال نامیده نمی شود و از لیست اضلاع فعال خارج می شود)

۳- محاسبه محل قرار گیری نقطه مطلوب ( $K_{ideal}$ ) بر روی عمود منصف ضلع مورد نظر (کوچکترین ضلع جبهه فعال) به طوری که یک مثلث متساوی الاضلاع با راس  $K_{ideal}$  ایجاد شود. در اینجا با تعریف جهت حرکت بر روی مرزها از به وجود آمدن این مثلث در بیرون از جبهه فعال خودداری می کنیم. جهت حرکت روی مرزهای خارجی ، پادساعتگرد و روی مرزهای داخلی ، ساعتگرد است.

۴- ساختن یک دایره با مرکز  $K_{ideal}$  و شعاع  $r$  که  $r$  به صورت زیر است:

$$r = 0.8\delta' \quad (1-4)$$

و مقادیر  $\delta'$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\delta' = \begin{cases} 0.55l & \text{if } \delta < 0.55l \\ \delta & \text{if } 0.55l \leq \delta \leq 2l \\ 2l & \text{if } \delta > 2l \end{cases} \quad (2-4)$$

این طریقه مقادیر  $r$  به  $r$  از به وجود آمدن مثلث های نا هم شکل جلوگیری می کند و قابلیت

تطبیق هندسی را تضمین می نماید.

۵- پیدا کردن نقاط فعالی که در این دایره قرار دارند؛ در این مرحله لیستی از این نقاط فعال به ترتیب فاصله آن ها از نقطه  $K_{ideal}$  تهیه می شود. از این لیست نزدیک ترین نقطه به نقطه  $K_{ideal}$ ، بهترین نقطه برای تشکیل مثلث است.

۶- اگر هیچ نقطه فعالی در این دایره وجود نداشت، نقطه  $K_{ideal}$  به عنوان نقطه مورد نظر برای تشکیل مثلث انتخاب می شود، در صورتی که شرایط زیر را داشته باشد:

- این نقطه ( $K_{ideal}$ ) نباید در داخل مثلث های موجود (از قبل تولید شده) قرار داشته باشد.

- هیچ یک از دو ضلع المان و در این جا مثلث جدید، نباید با اضلاع مثلث های تولید شده موجود تداخل داشته باشند.

۷- اگر مرحله ۶ با موفقیت روبرو نشد، دومین ضلع کوچک از جبهه فعال انتخاب می شود و به مرحله ۳ می رود.

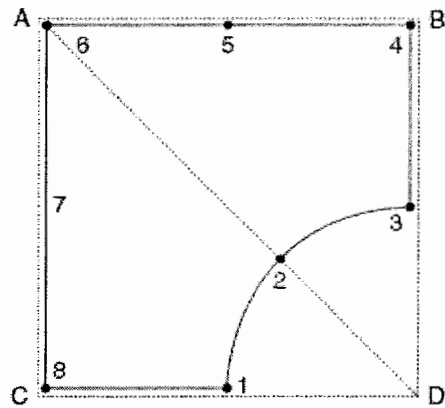
۸- اگر مرحله ۵ یا ۶ با موفقیت روبرو شد، مثلث جدید تولید می شود و جبهه فعال جدید شکل می گیرد که شامل اضلاع فعال و نقاط فعال جدید است. پس از تشکیل جبهه فعال جدید روند کار از مرحله ۲ دوباره آغاز می شود.

۹- این فرایند تا جایی که هیچ ضلع فعالی روی جبهه وجود نداشته باشد ادامه پیدا می کند. در این حالت می توان گفت که کل دامنه مورد نظر مثلثی شده یا مش بندی شده است.

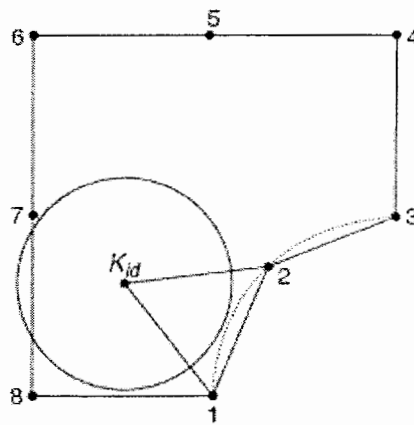
به عنوان یک مثال ساده به شکل ۴-۱۳ توجه کنید. این شکل در فضای دو بعدی است و مربعی را نشان می دهد که یک ربع دایره از گوشه آن کم شده است. مش زمینه از دو مثلث  $ACD, ABD$  تشکیل شده است. مقادیر پارامترهای مش زمینه در هر چهار نقطه  $A, B, C, D$  به صورت زیر است:

$$\delta = 1 \quad S = 1 \quad n_x = 1 \quad n_y = 0$$

در ادامه مراحل تولید مش را به صورت مرحله به مرحله توضیح داده ایم.



شکل ۴-۱۳ یک صفحه مربعی که یک چهارم دایره از گوشه آن کم شده است و مش زمینه برای آن.

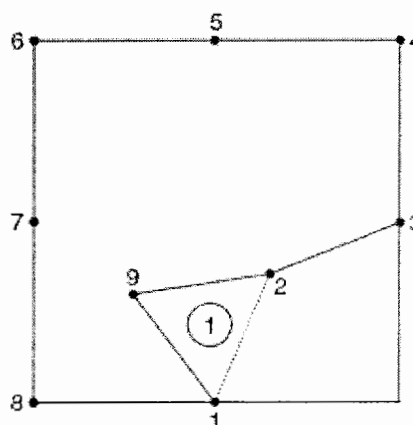


شکل ۴-۱۴ تعیین محل نقطه  $K_{ideal}$  برای تولید اولین المان.

نقاط ۱ تا ۸ انتخاب شده اند و جبهه اولیه تشکیل شده است (شکل ۴-۱۴). همان طور که ملاحظه می شود دو ضلع ۱-۲ و ۲-۳ از همه کوچکترند و ضلع ۱-۲ انتخاب می شود و همان طور که در شکل پیداست نقطه  $K_{ideal}$  به وجود آمده است. سپس دایره ای به شعاع  $\delta'$  تولید شده است. این دایره هیچ نقطه فعالی را شامل نمی شود و طبق بند ۶ الگوریتم  $AFT$  نقطه  $K_{ideal}$  شرایط تشکیل مثلث را دارا است؛ پس نقطه  $K_{ideal}$  پذیرفته می شود و مثلث جدید شکل می گیرد. این مثلث اولین المان تولید شده

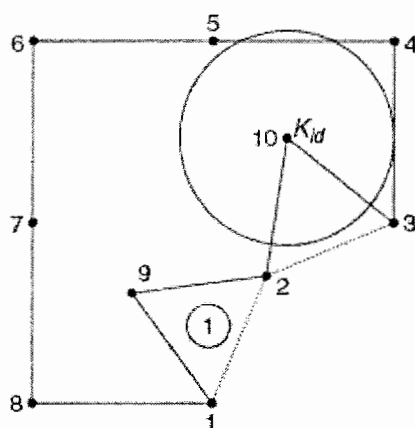
خواهد بود. در این مرحله جبهه جدید به وجود می آید و ضلع ۱-۲ به عنوان ضلع غیر فعال شناخته می شود.

- active nodes: 1, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- active sides: 1-9, 9-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
- passive nodes: none
- passive faces; 1-2
- npoint (total number of points): 9
- nelem (total number of elements created): 1
- nptr (number of points remaining, i.e. active nodes): 9



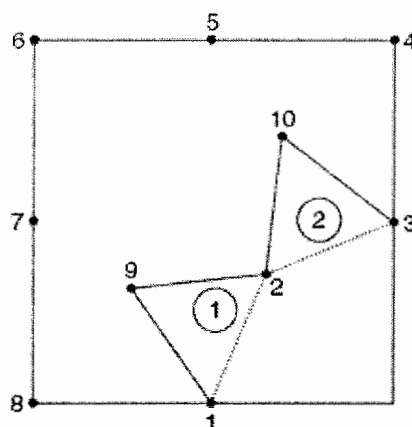
شکل ۴-۱۵ تولید اولین المان.

در مرحله بعدی ضلع ۲-۳ به عنوان کوچکترین ضلع فعال انتخاب می شود (شکل ۴-۱۶). (البته اضلاع ۲-۹ و ۱-۹ هم اندازه ضلع ۲-۳ هستند و در مراحل بعدی مد نظر قرار می گیرند. شایان ذکر است که ترتیب انتخاب کوچکترین ضلع از بین اضلاع هم اندازه، تأثیری بر شکل نهایی مش تولید شده ندارد.) تمام عملیاتی که در مرحله قبل برای تشکیل المان ۱ انجام شد این بار بر روی ضلع ۲-۳ برای تشکیل المان جدید تکرار می شود و باز هم نقطه  $K_{ideal}$  به عنوان نقطه مورد نظر برای تشکیل المان مثلثی انتخاب می شود و دومین المان نیز بدین ترتیب تولید می شود (شکل ۴-۱۷).

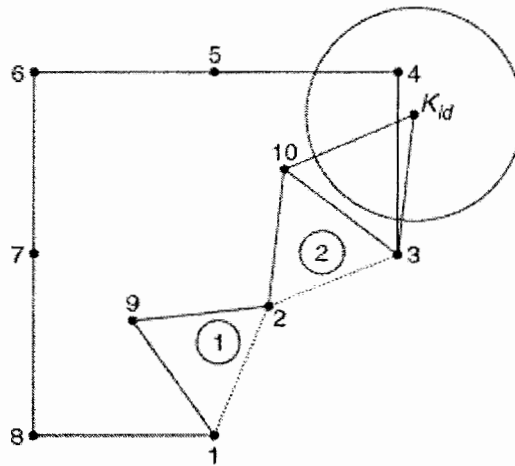


شکل ۴-۱۶ تعیین محل نقطه  $K_{ideal}$  برای تولید دومین المان.

- active nodes: 1, 9, 2, 10, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- active sides: 1-9, 9-2, 2-10, 10-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
- passive nodes: none
- passive sides 1-2, 2-3
- npoint: 10
- nelem: 2
- nptr: 10



شکل ۴-۱۷ تولید دومین المان.

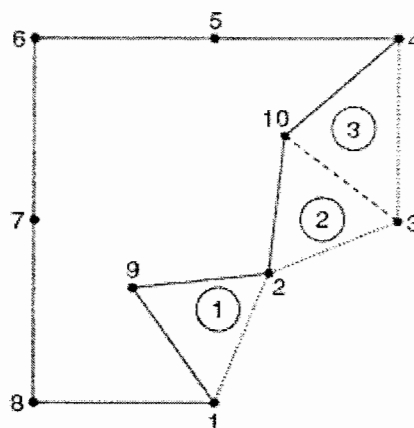


شکل ۴-۱۸ تعیین محل نقطه  $K_{ideal}$  برای تولید سومین المان.

در مرحله بعد ضلع ۳-۱۰ انتخاب می شود (شکل ۴-۱۸)، همان طور که در شکل قابل ملاحظه است نزدیک ترین نقطه فعال به نقطه  $K_{ideal}$  که در دایره قرار دارد نقطه شماره ۴ است که به عنوان راس مثلث جدید یعنی سومین المان انتخاب می شود (شکل ۴-۱۹). ضمن این که نقطه  $K_{ideal}$  شرایط تشکیل مثلث و المان جدید را نداشت چون خارج از محدوده جبهه فعال بود؛ یعنی اگر گره شماره ۴ در داخل دایره قرار نداشت، باید شرایط نقطه  $K_{ideal}$  را برای تولید مثلث بررسی می کردیم و همان طور که ملاحظه می شود این نقطه ( $K_{ideal}$ ) شرایط تشکیل یک المان معتبر را ندارد.

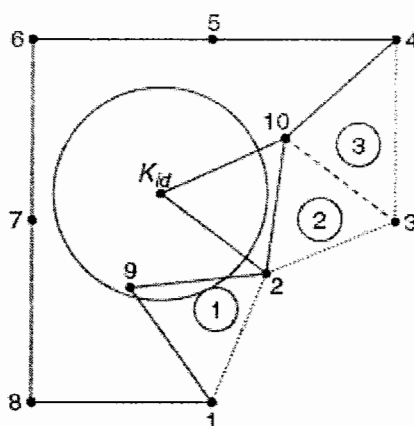
- active nodes: 1, 9, 2, 10, 4, 5, 6, 7, 8
- active sides: 1-9, 9-2, 2-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
- passive nodes: 3
- passive sides: 1-2, 2-3, 3-4
- npoint: 10
- nelem: 3
- nptr: 9





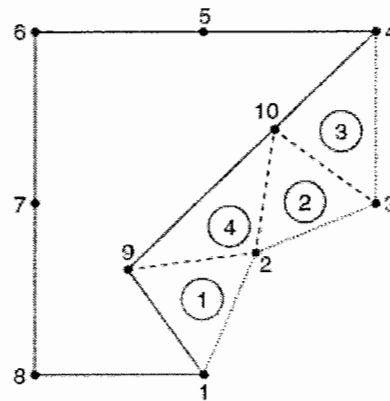
شکل ۴-۱۹ تولید سومین المان.

در مرحله بعد ضلع ۱۰-۲ به عنوان کوچکترین ضلع فعال انتخاب می شود و دایره به مرکز  $K_{ideal}$  شامل نقطه ۹ می باشد (شکل ۴-۲۰). بدین ترتیب نقطه فعال شماره ۹ به عنوان راس مثلث جدید انتخاب می شود و المان چهارم همان طور که در شکل ۴-۲۱ پیداست، تولید می شود.



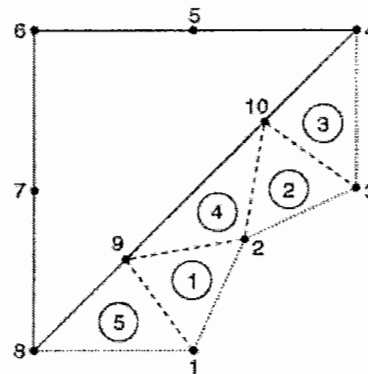
شکل ۴-۲۰ تعیین محل نقطه  $K_{ideal}$  برای تولید چهارمین المان.

- active nodes: 1, 9, 10, 4, 5, 6, 7, 8
- active sides: 1-9, 9-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
- passive nodes: 2, 3
- passive sides: 1-2, 2-3, 3-4
- npoint: 10
- nelem: 4
- nptr: 8

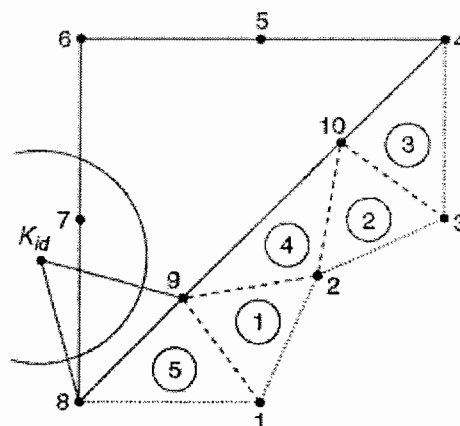


شکل ۴-۲۱ تولید چهارمین المان.

- active nodes: 9, 10, 4, 5, 6, 7, 8
- active sides: 9-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9
- passive nodes: 1, 2, 3
- passive sides: 8-1, 1-2, 2-3, 3-4
- npoints: 10
- nelem: 5
- nptr: 7

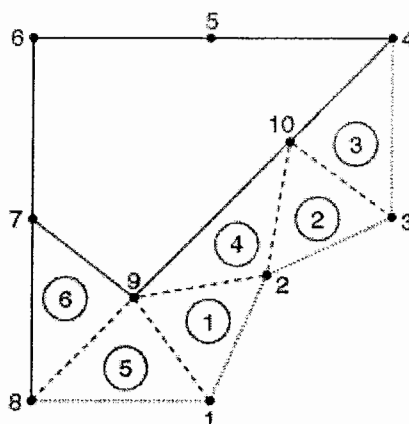


شکل ۴-۲۲ تولید پنجمین المان.



شکل ۲۳-۴ تعیین محل نقطه  $K_{ideal}$  برای تولید ششمین المان.

- active nodes: 9, 10, 4, 5, 6, 7
- active sides: 9-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-9
- passive nodes: 8, 1, 2, 3
- passive sides: 7-8, 8-1, 1-2, 2-3, 3-4
- npoint: 10
- nelem: 6
- nptr: 6

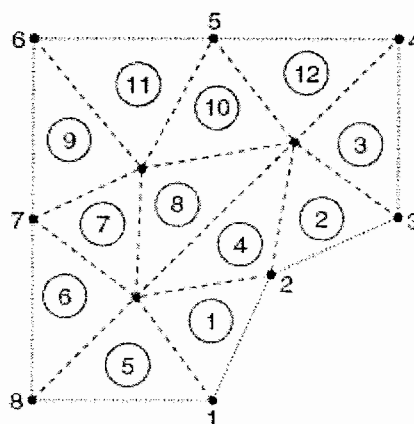


شکل ۲۴-۴ تولید ششمین المان.

باقی المان ها نیز به ترتیبی که قبلا گفته شد تولید می شوند و مش بندی نهایی به صورت شکل

۲۵-۴ به دست می آید:

- active nodes: none
- active sides: none
- passive nodes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- passive sides: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
- npoint: 11
- nelem: 12
- nptr: none



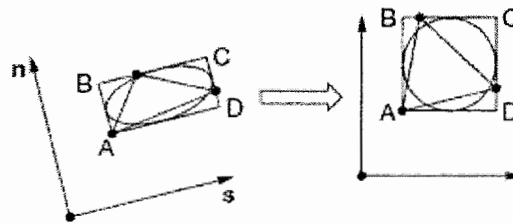
شکل ۴-۲۵ مش بندی نهایی.

در این شکل همان طور که پیداست هیچ گره فعال و هیچ ضلع فعالی وجود ندارد و این یعنی پایان

فرایند تولید مش به روش *AFT*.

#### ۴-۶ تطبیق و نحوه اثر پارامترها در تشکیل المان ها

اگر پارامتر  $S$  در یک نقطه مورد نظر از دامنه محاسباتی برابر واحد باشد ، مش بندی اطراف این نقطه باید شامل مثلث های تقریباً متساوی الاضلاع باشد. می توان مثلث های کشیده شده با پارامترهای  $S$  متغیر و در جهت های مختلف را به وسیله نگاشت ریاضی به دست آورد؛ که در این صورت تولید المان ها در فضای پارامتری صورت می گیرد.  $AFT$  از این روش برای تولید المان ها استفاده می کند که در آن مثلث های کشیده شده موجود در فضای فیزیکی به وسیله مثلث های تقریباً متساوی الاضلاع در فضای پارامتری ، تولید می شوند (شکل ۴-۲۶).



شکل ۴-۲۶ انتقال از فضای فیزیکی به فضای پارامتری.

انتقال از فضای فیزیکی یا فضای واقعی مسئله به فضای پارامتری ، شامل چرخش و کشیدن یا فشردن المان ها است. در این انتقال یک نقطه با بردار مشخصه  $\bar{X}$  در فضای فیزیکی ، با بردار  $\bar{\bar{X}}$  در فضای پارامتری مشخص می شود. برای این انتقال رابطه زیر به کار گرفته می شود:

$$\bar{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S} s_x & \frac{1}{S} s_y \\ n_x & n_y \end{pmatrix} \bar{X} \quad (3-4)$$

پارامتر کشیدگی المان  $S$  و بردارهای  $s, n$  در شکل ۴-۳ قابل مشاهده هستند. مولفه های بردارهای

$s, n$  به صورت زیر هستند :

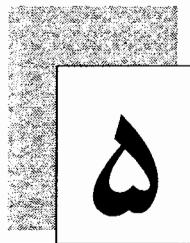
$$(s_x, s_y) = (\cos \phi, \sin \phi) \quad (4-4)$$

$$(n_x, n_y) = (-\cos \phi, \sin \phi) \quad (5-4)$$

بدین ترتیب فرایند تولید مثلث در فضای پارامتری انجام می شود و سپس با یک انتقال معکوس از فضای پارامتری به فضای فیزیکی ، مثلث مورد نظر با کشیدگی و جهت دلخواه در فضای فیزیکی به دست می آید.

## مراجع فصل چهارم

- 1- "Basic Structured Grid Generation with an introduction to unstructured grid generation". M.Farrashkhalvat and J.P.Miles .Butterworth-Heinemann.2003.
  - 2- "Mesh Generation application to finite elements" .Pascal Jean Frey and Paul-Louis George .HERMES Science.2000.
- ۱۰- ظریف، ناصر. "بهینه سازی شکل سازه ها با استفاده از روش تغییرات مرزی". پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود. ۱۳۸۳.



## بهینه سازی شکل

در این فصل بهینه سازی شکل سازه که یکی از اهداف اصلی این پایان نامه است ، مورد بررسی قرار می گیرد. بهینه سازی شکل با استفاده از روش  $SQP$  انجام شده است. در این فصل مفاهیم روش های بهینه سازی برای شکل سازه ها در حد نیاز توضیح داده شده است.



## ۵-۱ ساماندهی و فرمولاسیون مسائل بهینه سازی

مسائل بهینه سازی تا حد زیادی به هم شباهت دارند و همین شباهت باعث می شود که بتوانیم الگوریتم های مناسبی را برای حل کلیه مسائل بهینه سازی در گرایش های مختلف مهندسی ارائه نماییم. برای حل مسئله بهینه سازی به دست آوردن مجموعه معادلات حاکم بر سیستم ، به دست آوردن مجموعه جواب ها ، تعیین تابع هدف مناسب و پیدا کردن روش بهینه سازی برای به دست آوردن جواب بهینه ضروری است. باید توجه نمود که تعیین مدل مناسب از سیستم در حل مسئله بهینه سازی بسیار کمک می کند و در صورت ارائه مدل غیر دقیق از سیستم جواب های بهینه به دست آمده ممکن است در عمل پاسخ های مناسبی که هنگام محاسبات به صورت تئوریک به دست آمده است را نتیجه ندهد.

در روش عمومی حل مسائل بهینه سازی ، مراحل زیر قابل انجام است [۲] :

- ۱- تعیین تابع هدف مناسب .
- ۲- تعیین قیود مسئله که به صورت فیزیکی شرایط موجود در مسئله را تحمیل می نماید .
- ۳- تعیین ریز سیستم یا زیر سیستم های موجود در مسئله .
- ۴- تعیین ساختار هر یک از سیستم ها و ارتباط آن ها با یکدیگر برای حل مسئله .
- ۵- ساخت مدلی از سیستم که در واقع بیان گر معادلات حاکم بر مسئله و شرایط و قیود آن است .
- ۶- تعیین قیود داخلی که ممکن است در اثر زیر سیستم ها و ارتباطات آن ها به وجود آمده باشد .
- ۷- حل معادلات حاکم بر مسئله .
- ۸- تجزیه و تحلیل مسئله و کاهش سطح مسائل عمومی که دخیل شده اند با به کار گرفتن تجربیات و اطلاعات عملی دیگر .
- ۹- تعیین جواب های مفید با توجه به شرایطی که برای بهینه بودن تعریف کرده ایم .
- ۱۰- تکرار مراحل فوق تا جایی که بهترین جواب ممکن را به دست آوریم .

همه مسائل بهینه سازی شامل سه قسمت عمده یعنی اهداف ، قیود مسئله و متغیرهای طراحی هستند.

### ۵-۱-۱ اهداف

در مسائل بهینه سازی وجود حداقل یک پاسخ مفروض است و این در حالی است که در عمل تعداد جواب های بیشتری نیز می تواند وجود داشته باشد. منظور از ارائه تابع هدف این است که معیاری ارائه شود که بر مبنای آن معیار یکی از جواب های موجود به عنوان جواب مورد نظر از مجموعه جواب ها برگزیده شود. بدین ترتیب تعیین تابع هدف مناسب در بدست آوردن جواب بهینه تاثیر مستقیم و به سزایی دارد. البته گاهی اوقات همزمان دو یا یک مجموعه از توابع هدف باید مد نظر قرار گرفته شود که این موضوع به پیچیدگی حل مسئله خواهد افزود. در مسائل بهینه سازی سازه ها توابع هدف انواع مختلفی دارند [۱] ؛

الف- تابع وزن: یکی از توابع هدف معمول و پرکاربرد در بهینه سازی سازه ها تابع هدف وزن است که ارتباط مستقیم با حجم مصالح مصرفی دارد. تابع هدف وزن را می توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$W = \int_{\Omega} \rho \Omega d\Omega \quad (1-5)$$

در رابطه فوق  $W$  تابع وزن از متغیرهای طراحی در محدوده  $\Omega$  و  $\rho$  جرم مخصوص سازه است. می توان مشتق تابع هدف را نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه کرد و برای بهینه سازی به کار برد.

ب- تابع حجم: تابع حجم نیز همانند تابع وزن یکی از پرکاربرد ترین توابع هدف در بهینه سازی سازه ای به شمار می آید:

$$V = \int_{\Omega} \Omega d\Omega \quad (2-5)$$

در این رابطه  $V$  تابع حجم از متغیرهای طراحی است.

پ- تابع انرژی کرنشی: انرژی کرنشی سازه را می توان با رابطه زیر شناخت:

$$E_s = \int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \quad (3-5)$$

اکسترموم انرژی کرنشی سازه می تواند به عنوان تابع هدف انتخاب شود.

ت- تابع تنش تسطیح<sup>۱</sup> [۱]: این تابع تنش با رابطه زیر قابل بیان است:

$$S = \int_A (\sigma - \sigma_{avr})^2 dA \quad (4-5)$$

در این رابطه  $\sigma$  مقدار تنش معادل و  $\sigma_{avr}$  مقدار تنش میانگین در سطح  $A$  است.

توابع هدف دیگری نیز نظیر تنش اصلی حداکثر، تنش حداکثر، تابع تمرکز تنش، فرکانس غالب

سازه و بار کماتش سازه وجود دارند. در این تحقیق فقط تابع هدف حجم مد نظر قرار گرفته است. برای

این منظور هدف از حل همه مثال ها مینیموم کردن حجم سازه مورد نظر است.

### ۵-۱-۲ قیود

در بسیاری از سیستم های فیزیکی نمی توان فرض نمود که جواب های به دست آمده محدودیتی در اجرا ندارد بلکه اغلب جواب های بهینه در عالم فیزیک و زندگی واقعی قابل تحقق نیست، هرچند محاسبات تئوریک نشان می دهد که جواب ها بهینه هستند. ناگزیر بهتر است از ابتدا قیود را در مسئله دخیل نماییم تا جواب در مجموعه قابل قبول با توجه به قیود به دست آید. قیود معمولاً بر دو نوع داخلی و خارجی هستند. گاهی اوقات شرایط داخلی سیستم ایجاب می کند که حالت های سیستم در حدودی مشخص محدود شوند. و بالعکس در بعضی از شرایط محدودیت های خارجی برخی از جواب ها را رد می کند. در ادامه بعضی از انواع توابع قید توضیح داده شده اند:

<sup>۱</sup> Stress levelling

الف- توابع قید تنش: این تابع قید یکی از توابعی است که در بیشتر مسائل بهینه سازی به کار می

رود:

$$g^{\sigma} = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{all}} \geq 0 \quad (5-5)$$

اگر قيود تنش به صورت رابطه ۵-۵ معرفی شوند ، مقدار  $\sigma$  هیچ وقت از  $\sigma_{all}$  تجاوز نمی کند.  $\sigma$  می تواند هر نوع تنشی از قبیل تنش اصلی ماکزیموم یا تنش حداکثر در کل سازه باشد.

ب- تابع قید تغییر مکان: این تابع قید می تواند برای تغییر مکان هر نقطه ای از سازه مورد استفاده واقع شود ؛ بدین ترتیب تغییر مکان ماکزیموم هر نقطه دلخواه از سازه ( $d$ ) را با تغییر مکان مجاز ( $d_{all}$ ) کنترل می کنیم:

$$g^d = 1 - \frac{d}{d_{all}} \geq 0 \quad (6-5)$$

پ- قيود تغییر مکانی برای متغیرهای طراحی: با تعریف این قید برای متغیرهای طراحی (در اینجا این متغیرها مختصات نقاط کلیدی هستند) ، مقدار حداکثر و حد اقل حرکت متغیرهای طراحی را مشخص می کنیم:

$$x_i' \leq x_i \leq x_i'' \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7-5)$$

در رابطه ۷-۵  $x_i$  متغیر طراحی و  $x_i'$  ،  $x_i''$  به ترتیب حد بالا و و حد پایین این متغیر طراحی هستند.

توابع قید دیگری نیز در مسائل بهینه سازی مطرح هستند ، مثل تابع قید حجم ، تابع قید فرکانس طبیعی سازه ، توابع قید کنترل کننده سطح و ... که با توجه به نیاز طراح ، از هر یک از آن ها در حل مسائل استفاده می شود. در این تحقیق از دو تابع قید تنش و قيود تغییر مکانی برای متغیرهای طراحی استفاده کرده ایم.

### ۳-۱-۵ متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی در بهینه سازی بردارها یا کمیت های عددی هستند که با تغییر در مقدار یا جهت آن ها به تابع هدف بهینه دست پیدا می کنیم. چون هدف ما بهینه سازی شکل سازه است در این جا متغیرهای طراحی موقعیت مکانی نقاط تعریف کننده شکل است. یکی از عوامل مهمی که باعث افزوده شدن زمان محاسبات و دشواری حل مسائل بهینه سازی می شود، تعداد متغیرهای طراحی است، اگر بتوانیم تعداد متغیرهای طراحی را کاهش دهیم، با سرعت و احتمال بیشتری به سمت جواب بهینه همگرا خواهیم شد.

### ۲-۵ بهینه سازی شکل سازه

روش *SSO* (بهینه سازی شکل سازه ای، *Structural Shape Optimisation*) وسیله عمومی تری برای طراحی شکل سازه ها فراهم می کند (به وسیله تغییرات شکل و یا پارامترهایی که ضخامت سازه را تعریف می کند). طراحی اولیه به وسیله تعیین جدول قیود و اهداف انجام می شود. بسیاری از اهداف مختلف و قیود در این مرحله می توانند تعیین شوند.

در چنین روشی، تنها نیاز اولیه، نیاز به تولید شکل و لایه های مختلف مسئله بهینه سازی و تعیین اهداف و قیود است. اهداف و قیود به عنوان توابع پارامترهای طراحی معین می شوند.

دو دهه اخیر دوره ای از گسترش سریع در زمینه بهینه سازی شکل بوده است، که منجر به فوق العاده بودن این موضوع به عنوان یک نظام کامل شده است. امروزه *SSO* یکی از تکنولوژی های مدرن و قدرتمند کامپیوتری است که در مهندسی به کار می رود و شامل روش های کاربرد کامپیوتر و روش *FEM* (*Finite Element Method*) و الگوریتم های برنامه نویسی ریاضی است. در راستای پیشرفت های به دست آمده در این زمینه، انواع آیین نامه های تجاری و دانشگاهی به وجود آمده است. بزرگی و

پیچیدگی مسائلی که می تواند با وسایل بهینه سازی موجود حل شود نیز متناظرا گسترش یافته است . به خاطر انعطاف پذیری این روش ، پتانسیل استفاده از  $SSO$  در زمینه های متعدد تکنولوژی و هوافضا و مکانیک و مهندسی سازه روز به روز بیشتر و بیشتر می شود.

انتظار می رود با توجه به حتمی بودن پیشرفت الگوریتم ها و مفاهیم با هم و افزایش قدرت کامپیوترها در آینده ، بهینه سازی سازه ای تبدیل به وسیله طراحی در کارهای مهندسی روزمره شود. به صورت ریاضی یک مسئله بهینه سازی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize(orMaximize):} F(x) \\ & g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \\ & h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, l \\ & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (8-5)$$

در فرمول بندی استاندارد فوق ،  $x$  بردار متغیرهای طراحی ،  $F(x)$  تابع هدف که باید بیشینه یا کمینه شود ،  $g(x)$  قیود نامساوی و  $h(x)$  قیود مساوی مسئله بهینه سازی هستند. اندیس های  $l$  و  $u$  نیز به ترتیب حدود پایین و بالای متغیرهای طراحی را مشخص می کنند.  $m$  و  $l$  به ترتیب تعداد قیود نامساوی و مساوی بوده و  $n$  بیانگر تعداد متغیرهای طراحی است [۱].

تعریف مسئله اثر بزرگی بر حل مسئله  $SSO$  دارد . در این مفهوم ، انتخاب دقیق متغیرهای طراحی ، اهداف و قیود یک کار کلیدی است .

### ۳-۵ الگوریتم بهینه سازی

با استفاده از اطلاعاتی که از حساسیت های تحلیلی و طراحی نتیجه می شود ، برای تولید شکل های با مقادیر تابع هدف ارتقا یافته ، از روش های برنامه نویسی ریاضی استفاده می شود . در برنامه نویسی ریاضی هر درون یابی از دو مرحله اساسی تشکیل شده است [۲] :

۱- محاسبه مقادیر توابع هدف و قیود و گرادیان های آن ها با توجه به همه متغیر های طراحی برای یک روش حل عملی .

۲- محاسبه تغییرات بهینه محلی برای متغیر های طراحی .

مراحل ۱ و ۲ تا زمانی که مینیموم محلی برای تابع هدف پیدا شوند تکرار می شوند .

روند بهینه سازی معمولا با متغیر پیش نهادی طراحی  $x_i^0$  شروع می شود ، که به صورت ورودی به

برنامه معرفی شده است. سپس طراحی به وسیله تغییر در متغیر طراحی  $x_i$  به هنگام می شود:

$$x_i^q = x_i^{q-1} + \alpha r^q \quad (9-5)$$

در این رابطه ،  $q$  شماره تکرارها و  $r$  نشان دهنده بردار جهت یابی ها است. جهت  $r$  ، عموما

جهتی امکان پذیر به سمت کمینه یا بیشینه کردن تابع هدف  $F(x)$  است. کمیت  $\alpha$  ، پارامتر جابجایی

برای جهت  $r$  است [۱].

روش های حل بستگی به خصوصیات توابع هدف و توابع قید دارد. یک دسته بندی ساده به صورت

زیر است:

الف- برنامه ریزی خطی<sup>۱</sup>: زمانی که هم توابع هدف و هم توابع قید به صورت خطی نسبت به متغیر

طراحی  $x$  باشند یا این که به صورت خطی در نظر گرفته شده باشند.

<sup>1</sup> Linear programming

ب- برنامه ریزی درجه دو<sup>۱</sup>: زمانی که توابع هدف درجه دو هستند یا درجه دو فرض می شوند و توابع قید خطی هستند یا به صورت خطی در نظر گرفته شده باشند.

پ- برنامه ریزی غیر خطی<sup>۲</sup>: زمانی که هم توابع هدف و هم توابع قید غیر خطی باشند.

دو روش اول برای دسته خاصی از مسائل بهینه سازی، مورد استفاده قرار می گیرد. روش های برنامه ریزی غیر خطی متشکل است از دسته ای از الگوریتم ها که برای حل مسائل عمومی بهینه سازی مطرح شده اند. پیچیده ترین فرم مسائل بهینه سازی آنهایی هستند که شامل توابع هدف و توابع قید غیر خطی هستند. مسئله *SSO*، یک مسئله بهینه سازی چند متغیره دارای قید است که با استفاده از الگوریتم برنامه ریزی غیر خطی به بهترین وجه قابل حل است. بر اساس این که مسئله بهینه سازی به چه صورت حل می شود، روش برنامه ریزی غیر خطی به دو گروه تقسیم می شود:

۱- روش های غیر مستقیم<sup>۳</sup>: این روش ها شامل تکنیک هایی برای حل مسئله بهینه سازی اصلی با

استفاده از تبدیل به یک مسئله معادل است. مثال هایی از این روش ها به قرار زیر است:

۱،۱ روش پینالتی یا روش های نرده ای<sup>۴</sup>: در این روش ها مسئله اصلی به مسئله ای تبدیل می شود

که در آن یک تابع پینالتی مقید نشده یا یک تابع افزوده<sup>۵</sup> به صورت بازگشتی کمینه می شود [۱]. می توان نشان داد که حل متوالی کمینه سازی به حل مسئله اصلی بهینه سازی می انجامد.

۲،۱ روش های دو گانه<sup>۶</sup>: این روش ها مسئله بهینه سازی را با فرموله کردن مسئله دو گانه ای که

مجهولات آن، ضرایب لاگرانژ هستند، حل می کند. از موارد شناخته شده این روش می توان به الگوریتم

*MMA*<sup>۱</sup> اشاره کرد. برای اطلاعات بیشتر در این مورد می توان به مرجع هشت مراجعه کرد.

<sup>۱</sup> Quadratic programming

<sup>۲</sup> Nonlinear functions

<sup>۳</sup> Indirect methods

<sup>۴</sup> Penalty or Barrier methods

<sup>۵</sup> Augmented

<sup>۶</sup> Dual methods



۲- روش های مستقیم<sup>۲</sup>: این روش ها مسئله بهینه سازی را به جای تبدیل به یک مسئله معادل ، مستقیماً حل می کنند. مثال هایی از این روش عبارتند از:

۱،۲ روش های گرادیان<sup>۳</sup>: در این روش ها ، ارضای قیود با جستجوی یک خط تامین می شود. این روش ها در یک فضای امکان پذیر از مسئله کار می کنند. یکی از الگوریتم های شناخته شده از این دسته الگوریتم *CONMIN*<sup>۴</sup> است. این الگوریتم توسط *واندرپلات*<sup>۵</sup> و همکارانش تهیه شده است. جزئیات بیشتر را می توان در مرجع نهم جستجو کرد.

۲،۲ روش های ترتیبی و بازگشتی<sup>۶</sup>: در این روش ها مسئله بهینه سازی غیر خطی به وسیله زیر مسئله های خطی یا درجه دو ، در یک نقطه تقریب زده می شوند که آن ها به صورت ترتیبی حل می شوند. از الگوریتم های شناخته شده این گروه می توان *SQP*<sup>۷</sup> را نام برد. همچنین فرم خاصی از روش های ترتیبی ، روش *SLP*<sup>۸</sup> است که در آن زیر مسئله ها به صورت خطی هستند [۱۰].

تقسیم بندی ارائه شده ، سیمای کوچکی از روش های بهینه سازی موجود را ارائه می دهد. الگوریتم های مختلفی ممکن است برای حل مسائل بهینه سازی به کار گرفته شوند ؛ متداول ترین این الگوریتم ها عبارتند از *MMA, SQP* و *SLP* [۴، ۵و۶]. هر کدام از این روش ها مزیت ها و معایب مربوط به خود را دارد. به هر حال یک استراتژی خوب ، این است که از پتانسیل های این روش ها استفاده کرده و در قالب یک روش بهینه سازی ترکیبی ، آن را به کار بریم [۱۱]. در این تحقیق از روش *SQP* برای حل مسائل بهینه سازی استفاده شده است.

<sup>1</sup> Method of Moving Asymptotes

<sup>2</sup> Direct methods

<sup>3</sup> Gradient methods

<sup>4</sup> Constraint minimization

<sup>5</sup> Vanderplaats

<sup>6</sup> Sequential, recursive or successive methods

<sup>7</sup> Sequential Quadratic Programming

<sup>8</sup> Sequential Linear Programming

### ۴-۵ روش SQP

در این قسمت خلاصه ای از الگوریتم SQP ارائه می شود. با در نظر گیری بسط درجه دو سری تیلور برای تابع  $F(x)$  حول نقطه  $x^0$  داریم:

$$F(x) = F(x^0) + \nabla F(x^0)^T \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T H(x^0) \delta x \quad (10-5)$$

که در آن  $\delta x = x - x^0$  و  $\nabla F(x^0)$  بردار گرادیان تابع  $F$  در نقطه  $x^0$  است.  $\nabla F_i$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (11-5)$$

همچنین ماتریس هشن<sup>۱</sup>،  $H(x^0)$  با رابطه ۵-۱۲ تعریف می شود:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \quad (12-5)$$

این چنین فرض می شود که بردار گرادیان و ماتریس هشن، در رابطه ۵-۱۰ معمولا تقریب خوبی برای تابع  $F(x)$  دارند، مخصوصا زمانی که  $x^0$  نزدیک به نقطه بهینه باشد.

همانطور که قبلا ذکر شد مسائل برنامه ریزی درجه دو، مسائلی هستند که در آن ها تابع هدف به صورت یک تابع درجه دو و قیود توابع خطی فرض می شوند. در الگوریتم SQP یک روال ترتیبی برای برای حل زیر مسئله های درجه دو وجود دارد. توابع هدف این زیر مسئله ها همان ضرایب قسمت خطی گرادیان تابع هدف مسئله بهینه سازی اصلی است در حالی که برای قسمت درجه دو از تقریب زنی هشن برای ضرایب لاگرانژ تابع هدف مسئله اصلی استفاده می شود. قیود زیر مسئله ها تقریبی خطی از قیود مسئله اصلی است. می توان نشان داد که بردار  $r$  به دست آمده از حل زیر مسئله ها، که در  $x$  تعریف می شود، برداری است که جهت آن به صورت تقریبی به سمت نقطه کمینه یا بیشینه محلی برای تابع

<sup>۱</sup> Hessian

هدف، می باشد؛ مخصوصاً زمانی که  $x^0$  نزدیک به نقطه اکسترموم باشد. با مشخص شدن جهت ۲، یک مسئله جهت یابی یک بعدی برای به هنگام کردن متغیرها حل می شود. از یک تابع پنالتی خارجی برای نگه داشتن جهت ۲ در محدوده مجاز استفاده می شود [۱]. توضیحات مفصل در این مورد را می توان در مراجع چهار و ۱۲ یافت، اما به طور خلاصه، مراحل اصلی کار به صورت زیر است:

۱- تعیین یک جواب اولیه برای  $x_i^0$ .

۲- یک تقریب اولیه برای ماتریس هشن از قسمت درجه دو تابع هدف.

۳- حل یک زیر مسئله جهت یابی برای ۲ با حل زیر مسئله های درجه دو.

۴- انجام یک جستجوی یک بعدی برای کمینه کردن تابع پنالتی خارجی.

۵- به هنگام کردن جواب ها با استفاده از ۵-۹.

۶- کنترل همگرایی؛ اگر جواب کمینه محلی پیدا شد، متوقف می شود و اگر نه به مرحله دو می

رود.

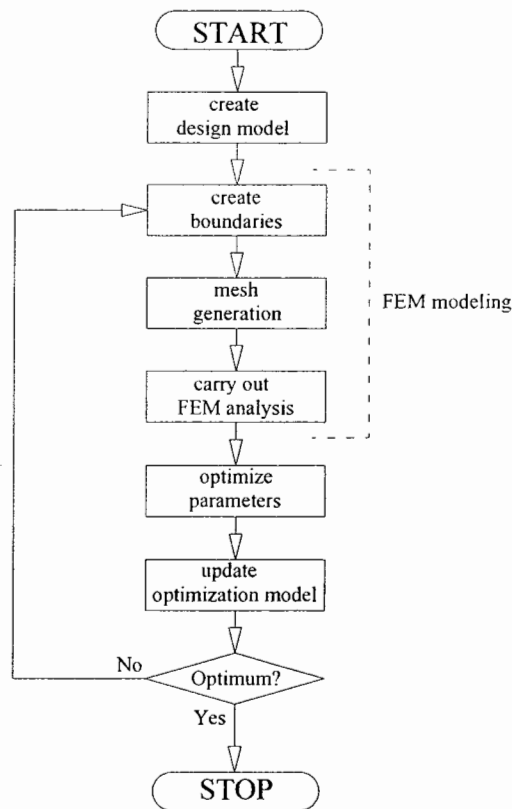
الگوریتم بهینه سازی استفاده شده در این تحقیق برای بهینه سازی از برنامه های آماده DOT<sup>۱</sup>

که توسط پروفیسور وندریلات و همکارانش تهیه شده، استفاده شده است [۷]. این برنامه ها در بسیاری از تحقیقات دانشگاهی و پروژه های صنعتی و تجاری مورد استفاده قرار می گیرد. بدین ترتیب برای حل مسائل بهینه سازی امکان استفاده از روش های مختلف بهینه سازی فراهم شده است.

بعد از تهیه زیر برنامه های مورد نظر و برنامه اصلی که مرتبط کننده آن ها با یکدیگر است، به حل مسائل پرداخته ایم. روند انجام کار به این صورت است که ابتدا مدل اجزای محدود برای مسئله مورد نظر شکل می گیرد؛ به این صورت که مرز های سازه (یک مقطع صفحه ای از سازه متقارن محوری) با استفاده از اسپلاین ها مشخص می شود، سپس این ناحیه با یک روش ساختار نیافته مش بندی می شود. پس از

<sup>۱</sup> Design Optimization Tools

مرحله مش بندی بارها و تکیه گاه ها به برنامه اصلی معرفی می شود و در این مرحله سازه تحت نیروهای وارده تحلیل می شود. بعد از تحلیل سازه و به دست آمدن تنش ها و تغییر مکان ها ، بهینه سازی شکل با توجه به تابع هدف و متغیرهای طراحی شروع می شود. اگر سازه در این مرحله بهینه باشد ، برنامه در همین جا متوقف می شود ولی اگر بهینه نباشد ، متغیر های طراحی تغییر کرده و با توجه به این تغییرات ، شکل جدید تولید می شود و دوباره تحلیل شده و اگر لازم باشد بهینه می شود. این روند تا زمانی که شکل به بهینه ترین حالت ممکن برسد ادامه پیدا می کند.



Algorithm for structural shape optimization

شکل ۵-۱ الگوریتم بهینه سازی شکل سازه ها در این تحقیق.

## آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری

---

در فصل بعد مثال های حل شده مورد بررسی قرار خواهند گرفت و توضیحات بیشتری در مورد روند بهینه سازی و تحلیل سازه ها در صورت لزوم ارائه می گردد. به منظور حل مثال ها برنامه ای با نام *Axisymmetric* تهیه شده است. این برنامه قادر به آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری است.

## مراجع فصل پنجم

- 1- M.Ozaka."Analysis and optimal design of structures with adaptivity". Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK, 1993.
- 2- S.M.B.Afonso."Shape optimization of shells under static and free vibration conditions". Ph.D thesis. Department of civil Engineering,University of Wales,Swansea,UK.1995.
- ۳- ظریف،ناصر. "بهینه سازی شکل سازه ها با استفاده از روش تغییرات مرزی". پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود.۱۳۸۳.
- 4- "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design". G.N.Vanderplaats. McGraw-Hill, New York,1984.
- 5- "Elements of Structural Optimization". R.T.Haftka. Kluwer Academic Publisher, Netherlands,1990.
- 6- "Structural Optimization Fundamentals and Application". U.Kirsch. Springer-Verlag,1993.
- 7- G.N.Vanderplaats. "DOT User's manual". VMA Engineering. Colorado Springs. USA,1994.
- 8- K.Svanberg. "The Method of Moving Asymptotes-A new method for structural optimization". Int.J.Number.Meth.Engng.,23,359-373,1987.
- 9- G.N.Vanderplaats and F.Moses. "Structural Optimization by methods of Feasible Directions". Computer and Structures.,3,739-755,1973.
- 10- "Linear Programming".G.Hadely. Addison Wesley,1962.
- 11- K.U.Bletzinger , S.Kimmich and E.Ramm. "Efficient modeling in shape optimal design". Computing Systems in Engineering,2,483-495,1991.
- 12- M.J.D.Powell. "Algorithms for Nonlinear Constraints that use Lagrangian Functions". Math.Progr.,14,224-248,1978.



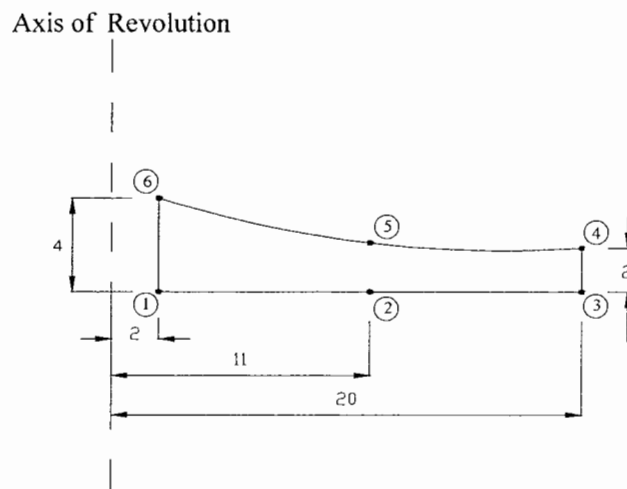
## مثال ها ، نتایج و

## پیشنهادها

در این فصل مثال های حل شده به همراه نتایج به دست آمده در مورد آن ها و در آخر پیشنهاد هایی برای بهبود تحقیقات آینده مطرح شده است.

### ۱-۶ صفحه ضخیم دوار با بار خطی دایره ای و حفره ای در مرکز

این مثال از مرجع شماره یک مطرح می شود. هدف از طرح این مثال کنترل صحت حل اجزای محدود برنامه *Axisymmetric* است و بهینه سازی شکل برای این مثال صورت نگرفته است. در شکل ۶-۱ نقاط کلیدی برای تولید اسپلاین ها به منظور تعیین مرزهای سازه مشخص است.



شکل ۱-۶ نقاط و اسپلاین ها برای تولید شکل صفحه ضخیم با سوراخی به شعاع ۲ سانتیمتر در مرکز ( همه ابعاد به سانتیمتر است).

شماره نقاط کلیدی که تعداد آن ها شش عدد است در شکل مشخص شده است. این شکل شامل چهار قطعه اسپلاین است ، به صورت زیر:

*Spline 1:1,2,3*

*Spline 2:3,4*

*Spline 3:4,5,6*

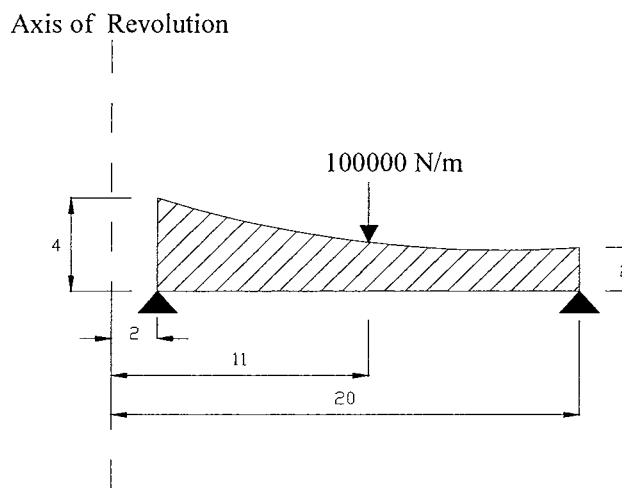
*Spline 4:6,1*

شرایط بارگذاری و تکیه گاه های سازه در شکل ۶-۲ مشخص شده است. مش بندی سازه را می توان در شکل ۶-۳ مشاهده کرد. این مش شامل ۱۱۸ گره و ۱۸۷ المان است. مشخصات مصالح عبارت

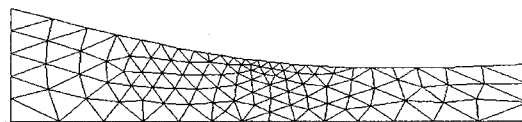


## آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری

است از : مدول الاستیسیته  $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$ . آنالیز استاتیکی خطی برای این سازه انجام شده است.



شکل ۲-۶ بارگذاری و تکیه گاه های سازه صفحه ضخیم. (همه ابعاد به سانتیمتر است).



شکل ۳-۶ مش بندی سازه صفحه ضخیم.

پس از آنالیز سازه ابتدا تغییر مکان ها کنترل می شود. ماکزیموم تغییر مکان ها در حل برنامه *Axisymmetric* در زیر نقطه بارگذاری برابر 0.0030845 سانتیمتر به دست آمد. این مقدار را آقای روس<sup>۱</sup> برابر 0.003014 سانتیمتر به دست آورده است [۱]. ماکزیموم تنش های شعاعی در حل آقای روس برابر  $3.484 \times 10^7$  نیوتن بر متر مربع است و این مقدار در حل برنامه *Axisymmetric* برابر  $2.960 \times 10^7$  نیوتن بر متر مربع به دست آمده است. به علت بیشتر بودن المان ها در حل برنامه

<sup>۱</sup> Ross

*Axisymmetric* نسبت به حل آقای روس و همچنین عدم تطبیق نقاط حل برنامه با حل مسئله در مرجع مذکور نمی توان تنش ها را به طور دقیق مقایسه کرد و این اختلاف در مقدار تنش ها به این علت است. به هر حال مقدار تغییر مکان نقاط و مقایسه آن ها نشان گر صحت تحلیل ها است.

## ۶-۲ مخزن بزرگ آب

دومین مثال شامل بهینه سازی شکل سازه نیز هست. یک مخزن بزرگ با شکل متقارن محوری تحت بارگذاری هیدرواستاتیکی قرار گرفته است (شکل ۶-۴). آنالیز استاتیکی خطی و سپس بهینه سازی شکل این برای این سازه انجام شده است.

این مسئله اولین بار در سال ۱۹۹۰ میلادی توسط بوگدا<sup>۱</sup> و سپس در سال ۱۹۹۳ میلادی توسط مصطفی اوزاکا<sup>۲</sup> مورد بررسی قرار گرفت. این مثال از مرجع شماره دو مطرح می شود. بارگذاری ها و شرایط تکیه گاهی طبق مندرجات مرجع دو انجام شده است. این مخزن تحت فشار هیدرواستاتیکی آب در دیواره داخلی قرار دارد. فشار هیدرو استاتیک آب در بالاترین نقطه برابر صفر و در پایین مخزن برابر  $\rho gh$  است؛ اما در هنگام انتگرال گیری این مقدار باید برای یک رادیان واحد از سازه در نظر گرفته شود. طبق فرمول ۶-۱ در حل اجزای محدود برای سازه های متقارن محوری تحت بارهای متقارن محوری، انتگرال گیری حجمی روی یک رادیان واحد از سازه یا کل دایره انجام می شود، که در هر دو صورت جواب ها هیچ تفاوتی نخواهد داشت. برای بارهای سطحی داریم:

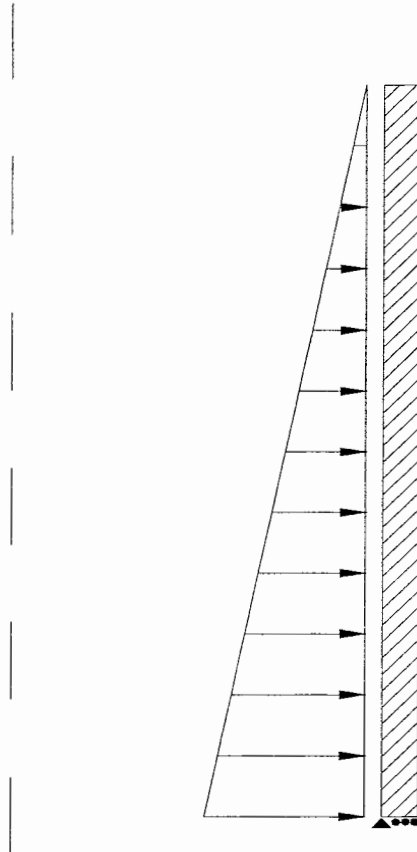
$$R_s = \int_s H_s^T f_s ds \quad (1-6)$$

در این رابطه  $H_s$  ماتریس درون یابی و  $f_s$  ماتریس نیروهای سطحی است. اما  $ds$  نشان گر جزء سطح است که برابر  $rd\theta$  در نظر گرفته می شود.  $d\theta$  می تواند برابر  $2\pi$  یا یک رادیان واحد باشد.

<sup>1</sup> Bugeda

<sup>2</sup> Mustafa Ozakca

Axis of Revolution



Loading and Constraints

شکل ۴-۶ بارگذاری و شرایط تکیه گاهی مخزن بزرگ.

مشخصات مصالح طبق جدول ۱-۶ است.

جدول ۱-۶ مشخصات مصالح برای مخزن بزرگ.

$E = 3 \times 10^6 T / m^2$	مدول الاستیسیته
$\nu = 0.2$	ضریب پواسون
$\rho = 2.3 T / m^3$	چگالی مصالح
$\sigma_{all}^p = 2750 T / m^2$	ماکزیموم تنش مجاز فشاری
$\sigma_{all}' = 50 T / m^2$	ماکزیموم تنش مجاز کششی

مرز سازه با استفاده از شش نقطه کلیدی مشتمل بر چهار قطعه اسپلاین مدل شده است. متغیر های طراحی ، جهت حرکت شعاعی نقاط کلیدی به شماره های دو ، سه و چهار هستند (شکل ۵-۶). مشخصات اسپلاین های تشکیل دهنده مرز به صورت زیر است:

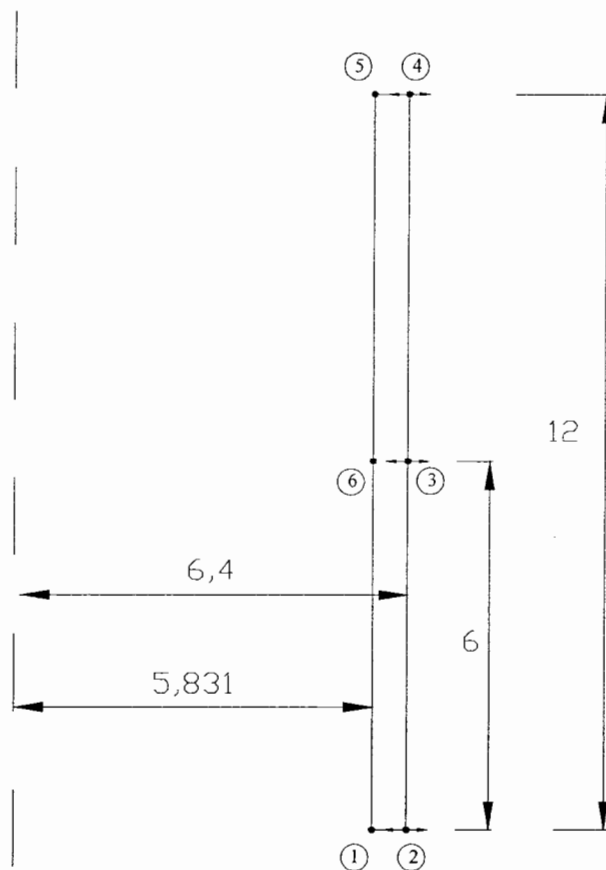
*Spline 1*: 1,2

*Spline 2*: 2,3,4,

*Spline 3*: 4,5

*Spline 4*: 5,6,1

### Axis of Revolution



### Position of Control Points

شکل ۵-۶ محل اولیه نقاط کلیدی و جهت حرکت متغیر های طراحی.

در این مسئله ، تابع هدف حجم مصالح سازه است. بدین ترتیب کمینه کردن سطح مقطع دیواره سازه مد نظر است. در حل این مسئله بهینه سازی ، قیود تنش ها ، مقادیر ماکزیموم تنش های فشاری و کششی است که در جدول ۶-۱ آمده است و قیود تغییر مکانی ، مقادیر ماکزیموم و مینیموم جهت حرکت شعاعی برای نقاط کلیدی دو ، سه و چهار است (جدول ۶-۲).

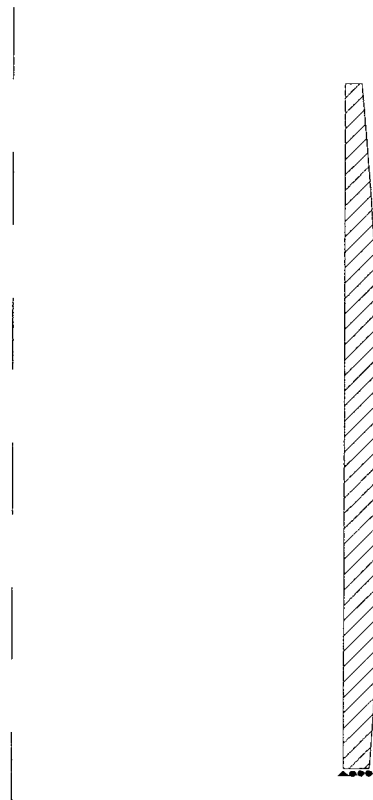
جدول ۶-۲ قیود حرکتی و مقادیر بهینه متغیرهای طراحی.

مقدار بهینه پس از حل	مقدار ماکزیموم مجاز	مقدار مینیموم مجاز	متغیر طراحی
6.2852	6.45	6.1	P2
6.4499	6.45	6.1	P3
6.1174	6.45	6.1	P4

پس از انجام فرایند تحلیل و بهینه سازی با توجه به مقادیر به دست آمده از حل مسئله بهینه سازی و مقادیر اولیه شاهد هشت درصد کاهش در سطح مقطع دیواره سازه هستیم. این مقدار از عدد ۶/۸۲۸ متر مربع در حالت اولیه به مقدار ۶/۲۹۹ در حالت بهینه کاهش یافته است. شایان ذکر است که این عدد در مرجع دو برابر ۶/۴۰۴ توسط آقای *اوزاکا* به دست آمده است. این اختلاف جزئی ناشی از دقت بیشتر محاسبات *اوزاکا* است ، چرا که این شخص از روش تطبیقی<sup>۱</sup> در محاسبات خود استفاده کرده بود. شکل بهینه سازه به صورت شکل ۶-۶ است. و مقادیر بهینه متغیرهای طراحی در جدول ۶-۲ آمده است. بهینه سازی شکل این سازه با استفاده از روش *SQP* انجام گرفت. در بخش بعدی به مقایسه روش های مختلف بهینه سازی پرداخته ایم.

<sup>۱</sup> Adaptive

Axis of Revolution



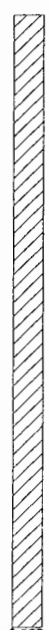



Optimized Shape

شکل ۶-۶ شکل بهینه شده دیواره مخزن بزرگ آب.

### ۳-۶ مقایسه الگوریتم های مختلف در بهینه سازی شکل مخزن بزرگ آب

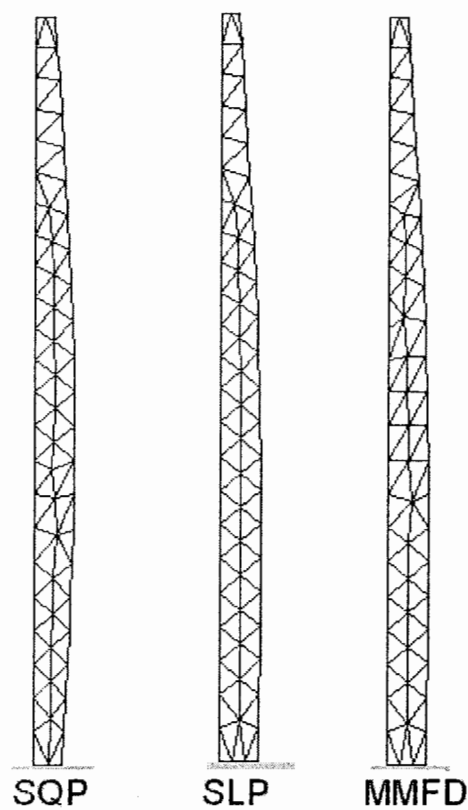
در این قسمت سه الگوریتم رایج در مسائل بهینه سازی ( $SQP, SLP, MMFD$ ) با هم مقایسه می شوند. در قسمت قبل و در حل مثال مخزن بزرگ آب از روش  $SQP$  استفاده کردیم، در این جا نتایج دو روش دیگر نیز آورده شده است (جدول ۳-۶). این مثال در شرایط کاملا یکسان برای دو روش دیگر حل شده است و تنها تفاوت آن ها در نوع الگوریتم بهینه سازی است.

جدول ۳-۶ نتایج روش های مختلف بهینه سازی.

Initial	Optimized		
			
	SQP	SLP	MMFD
S=6.828	S=6.299	S=6.633	S=6.632
Number of Iterations	61	201	30

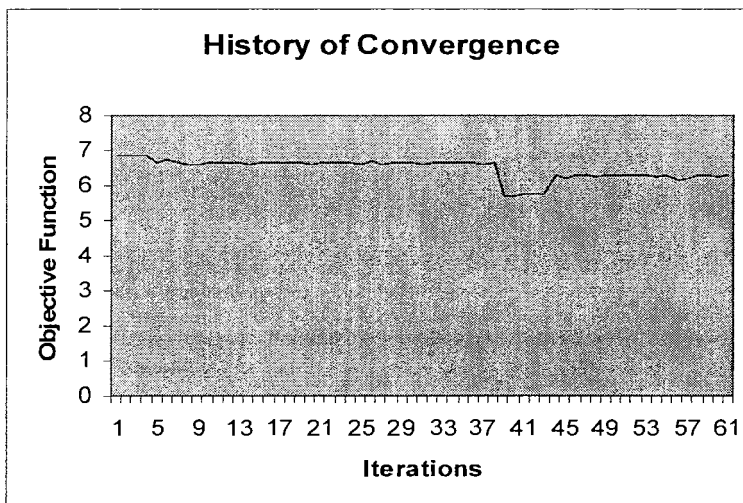
همان طور که از جدول ۳-۶ پیداست نتایج روش *SQP* از دو روش دیگر بهینه تر است و اختلاف مقدار تابع هدف نسبت به دو روش دیگر کاملاً مشهود است. از طرف دیگر تعداد تکرارهای فراخوانی تابع هدف برای بهینه سازی، در محدوده قابل قبولی قرار دارد. در روش *MMFD* تعداد تکرارها کمتر از دو روش دیگر است اما جواب به دست آمده، بهینه ترین جواب نیست در حالی که روش *SQP* با تعداد درون یابی های قابل قبول بهینه ترین جواب را ارائه می کند. این موضوع مورد تأیید محققان دیگر نیز هست. آقای ناصر ظریف در سال ۱۳۸۳ خورشیدی نشان داد که در مسئله بهینه سازی شکل مسائل تنش و

کرنش مسطح ، جواب های روش  $SQP$  از  $SLP$  بهینه تر است [۳] و در این تحقیق نیز ثابت شد که جواب های روش  $SQP$  از  $SLP$  و  $MMFD$  بهینه تر است. از نظر دقت محاسبات باید یادآور شد که همه شرایط برای هر سه روش یکسان است از قبیل شرایط تکیه گاهی ، بارگذاری ها و مشخصات مش زمینه.

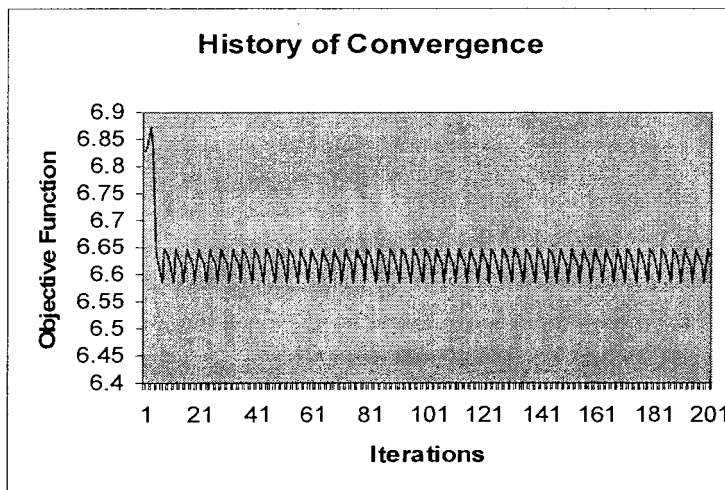


شکل ۶-۷ مش بندی برای سه روش بهینه سازی در مثال مخزن بزرگ آب.

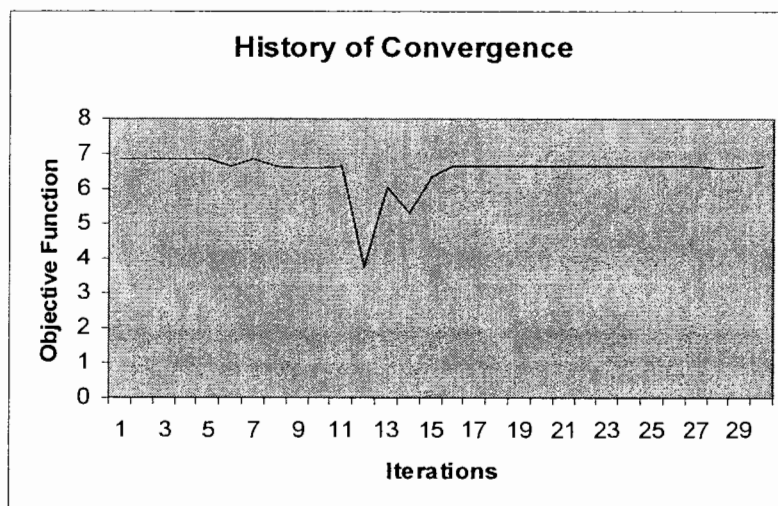




شکل ۸-۶ همگرایی به سمت جواب بهینه برای روش SQP



شکل ۹-۶ همگرایی به سمت جواب بهینه برای روش SLP



شکل ۶-۱۰ همگرایی به سمت جواب بهینه برای روش MMFD

#### ۶-۴ نتایج و پیش نهادها

در این بخش خلاصه ای از روند انجام کار و نتایج به دست آمده از تحقیق ، با توجه به مثال های حل شده ، شرح داده می شود. هدف از انجام این تحقیق بررسی روشی برای مدل سازی ، آنالیز و بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری بوده است. در این راستا برنامه ای با نام *Axisymmetric* تولید شده است. این برنامه قادر به آنالیز و طراحی بهینه سازه های متقارن محوری است.

برنامه *Axisymmetric* تشکیل شده از چهار زیربرنامه<sup>۱</sup> اصلی است: ۱- زیربرنامه تولید شکل با استفاده از *B-spline* ها. ۲- زیربرنامه تولید مش از روش *AFT*. ۳- زیربرنامه حل اجزای محدود. ۴- زیربرنامه بهینه سازی. این زیربرنامه ها ، هرکدام شامل زیربرنامه هایی هستند که در مجموع بالغ بر هجده هزار خط برنامه کامپیوتری به زبان برنامه نویسی فرترن<sup>۲</sup> را تشکیل می دهند. همچنین شامل فایل های ورودی و خروجی متنی است که در فصول مربوطه توضیح داده شد.

بدین ترتیب مسئله بهینه سازی شکل از چهار قسمت عمده تشکیل شده است که در ادامه هر کدام به اختصار مورد بحث قرار گرفته است.

<sup>۱</sup> Subroutine  
<sup>۲</sup> FORTRAN

#### ۶-۴-۱ تولید شکل

در مسائل بهینه سازی شکل به علت ایجاد تغییرات در مرزها و شکل سازه ، بایستی از روشی قدرتمند جهت تولید شکل استفاده کرد که قابلیت تغییر در مرزهای شکل ، بدون از دست رفتن پیوستگی را داشته باشد. در برنامه *Axisymmetric* از منحنی های *B-spline* برای تولید شکل و مرزهای سازه استفاده شده است. این منحنی ها از قابلیت های بالایی برای تولید مرزها برخوردار هستند و با توجه به پارامتری بودن این نوع اسپلاین ها ، به راحتی می توان آن ها را در برنامه های کامپیوتری استفاده کرد. بدین ترتیب می توان این نوع اسپلاین ها را برای تولید شکل ها به کار برد. یکی از بارزترین مزایای استفاده از اسپلاین ها ، توانایی فوق العاده آن ها در هنگام ایجاد تغییرات در شکل سازه است ، که این امر با تغییر پارامترهای مربوط به سازه قابل حصول است. بدین ترتیب *B-spline* ها به عنوان ابزار بسیار مناسبی برای معرفی شکل و مرزهای سازه پیشنهاد می شوند. در تحقیقات آتی می توان پارامترهای دیگری از اسپلاین ، نظیر شیب های انتهایی آن را به عنوان متغیر طراحی در مسئله بهینه سازی شکل در نظر گرفت. همچنین می توان نتایج به دست آمده از تولید شکل های دو بعدی با استفاده از اسپلاین ها را برای تولید شکل سازه های سه بعدی و رویه ها به کار برد.

#### ۶-۴-۲ تولید مش

در شکل های پیچیده نیاز به یک روش قوی و کارآمد تولید مش برای حل اجزای محدود است. در این میان روش های ساختار نیافته از قدرت بیشتری برخوردار هستند. در این تحقیق از روش *AFT* استفاده شده است و به عنوان یک روش مطلوب برای مش بندی سازه های با شکل های پیچیده پیشنهاد می شود. این روش قابلیت تولید هم زمان گره ها و المان ها را دارا است ؛ همچنین می توان با تعریف یک مش زمینه مناسب ، به چگالی مش مطلوب در نواحی مورد نظر دست یافت. در این تحقیق از المان های مثلثی سه گره ای استفاده شده است. در این مورد برای تحقیقات بیشتر می توان از المان های چهار ضلعی استفاده کرد و در نهایت با مقایسه جواب ها به یک دید کلی نسبت به انتخاب نوع المان ها در

آنالیز و بهینه سازی دست یافت. همچنین می توان از روش های دیگری برای تولید مش استفاده کرد و با مقایسه قدرت و سرعت این روش ها ، بهترین روش را برای تولید مش انتخاب کرد.

#### ۳-۴-۶ حل اجزای محدود

برای حل اجزای محدود از زیربرنامه ای که توانایی حل مسائل متقارن محوری را داشته باشد تهیه شده است. این برنامه برای حل مسائلی با المان های مثلثی سه گره ای نوشته شده است که با تعمیم آن برای المان های مثلثی با گره های بیشتر و همچنین المان های چهارضلعی می توان به جواب های دقیق تری دست یافت. در این برنامه از حل گر فرونتال<sup>۱</sup> برای حل دستگاه معادلات استفاده شده است. می توان با استفاده از حل گر های قوی تر به سرعت و دقت بیشتری در محاسبات دست یافت. با توجه به این که مسائل متقارن محوری جزء مسائل صفحه ای مکانیک جامدات محسوب می شوند و از جهات زیادی مشابه مسائل تنش مسطح و کرنش مسطح هستند ، می توان با ایجاد تغییراتی در برنامه ، برنامه واحدی ساخت که قابلیت حل هر سه نوع مسئله را داشته باشد. این موضوع می تواند در ادامه تحقیقات انجام شده مد نظر قرار گیرد. همچنین با گسترش این برنامه برای آنالیزهای دینامیکی و غیر خطی برنامه کامل تری به دست خواهد آمد و این مطلب نیز برای تحقیقات آینده در این مورد پیشنهاد می شود.

#### ۴-۴-۶ بهینه سازی

امروزه الگوریتم های متعددی برای حل مسائل بهینه سازی به وجود آمده است. در تحقیق حاضر از الگوریتم ها و زیربرنامه های *DOT* برای بهینه سازی استفاده شده است. بدین ترتیب برنامه *Axisymmetric* توانایی حل مسائل مقید بهینه سازی با استفاده از روش های *MMFD, SQP* و *SLP* را داراست. در این تحقیق با توجه به مثال های حل شده نشان داده شد که جواب های روش *SQP* از دو روش دیگر بهینه تر است و این الگوریتم با سرعت و دقت بیشتری به سمت جواب بهینه همگرا می شود. بدین ترتیب استفاده از روش *SQP* برای بهینه سازی شکل سازه ها پیشنهاد می شود.

<sup>۱</sup> Frontal

روش های دیگری نیز برای حل مسائل بهینه سازی وجود دارد ؛ یکی از بهترین روش ها استفاده از الگوریتم ژنتیک<sup>۱</sup> است. برای تحقیقات بیشتر در این زمینه پیشنهاد می شود الگوریتم ژنتیک در بهینه سازی شکل سازه ها به کار رود و نتایج آن با دیگر روش ها مقایسه شود. بدین ترتیب می توان به بهترین روش برای حل مسائل بهینه سازی شکل دست یافت.

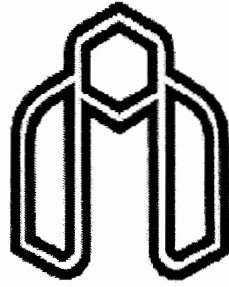
---

<sup>۱</sup> Genetic Algorithm

## مراجع فصل پنجم

- 1- "FINITE ELEMENT PROGRAMS FOR AXISYMMETRIC PROBLEMS IN ENGINEERING". C.T.F.ROSS. ELLIS HORWOOD LIMITED, London,1984.
- 2- M.Ozaka."Analysis and optimal design of structures with adaptivity". Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK, 1993.
- ۳- ظریف،ناصر. "بهینه سازی شکل سازه ها با استفاده از روش تغییرات مرزی". پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود.۱۳۸۳.





Shahrood University of Technology  
Department of Civil Engineering

# **Analysis and Shape Optimization of Axisymmetric Structures, Using The Boundary Variation Method**

M.Sc Thesis  
In Structural Engineering

By:  
**Mohammad Hossein Harbi Monfared**

Supervisor:  
**Prof. Behrooz Hassani**

Thesis submitted to the Shahrood University of Technology  
in candidature for the degree of Master of Science

*September 2007*



# Shape Optimization of Axisymmetric Structures using The Boundary Variation Method

M.H.H.Monfared<sup>1</sup>

Department of civil engineering, Shahrood University of Technology,  
Shahrood, Iran.

## Abstract

Structural engineering has always involved endeavours towards optimization. The task of form finding of lightweight and efficient structures has always been present in engineering and design activity.

In current study a fully integrated, interactive program is presented which incorporates shape definition, automatic mesh generation, finite element analysis as well as shape optimization.

An algorithm for shape optimization with finite element method is developed for the optimal design of axisymmetric structures. The algorithm is based on use of boundary parameterization with cubic B-splines for describing shape changes. The problem definition and formulations are presented to demonstrate the advantages of this method in boundary determination of structures. The algorithm is based on making use of the advancing front mesh generation. The method lies under the unstructured methods which refers to a strategy that consists of creating the mesh sequentially, element by element. Three-noded triangular elements are employed in the finite element analysis and the SQP method for shape optimization is used.

A few shape optimization examples of axisymmetric structures and solids of revolution are presented to illustrate the robustness of the method.

---

<sup>1</sup> Graduate student, mhhmonfared@yahoo.com.