

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد
گرایش سازه

عنوان:

بهینه‌سازی شکل سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی
و محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد پوسته‌ها

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

تهیه و تدوین:

میثم رضایی

تابستان ۱۳۸۶

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي
خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ
وَالَّذِي يُضَوِّبُ الْمَوْتِ
وَالَّذِي يُضَوِّبُ الْمَوْتِ
وَالَّذِي يُضَوِّبُ الْمَوْتِ

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر عزیزم

که از هیچ کوششی در راه پیشرفت من دریغ نکردند

تشکر و قدردانی:

در ابتدای این رساله لازم می‌دانم که از زحمات بی‌شائبه جناب آقای دکتر حسنی تشکر کنم. صبر، حوصله، علاقه به انجام کار، تسلط بی‌نظیر بر مطالب، برخورد بسیار عالی و پیگیری ایشان همواره مرا تحت تاثیر قرار داده و نمی‌دانم چگونه باید از این همه لطف و بلندمرتبگی تشکر کرد و فقط همین را می‌توان گفت که بدون رهنمودهای ایشان حل مشکلات فراوان این رساله ممکن نبود.

از جناب آقای مهندس سید مهدی توکلی و همیاری‌های فراموش‌نشده‌ی ایشان در پیشبرد پایان‌نامه کمال سپاس و قدردانی را دارم و در تمام مراحل زندگی برای ایشان آرزوی شادکامی می‌کنم. همچنین از آقای مهندس ناصر ظریف به خاطر راهنمایی‌های سودمندشان بسیار ممنون هستم.

از سایر دوستانی که مرا در پیشبرد پایان‌نامه همراهی کردند از جمله مهندس اعظم الیاسی، مهندس عرفان آرام نژاد، مهندس ندا میرسعیدی، مهندس عبدالله شجری، مهندس محسن امدادی و مهندس مهدی زرین‌مهر کمال تشکر را دارم و برای ایشان در ادامه زندگی آرزوی سربلندی و بهروزی دارم.

در پایان هم از تمامی کسانی که نام آنها از قلم افتاده‌است، تشکر می‌کنم.

میثم رضایی
تابستان ۱۳۸۶

چکیده

علمی همانند اجزای محدود و بهینه سازی امروزه توجه بسیاری از ریاضیدانان، محققین، مهندسين و غيره را به سمت خود جلب کرده است. به همین منظور در این پایان نامه به بررسی چگونگی بهینه-سازی شکل سازه ها با استفاده از روش تغییرات مرزی پرداخته ایم.

در تحلیل اجزای محدود استفاده شده در این رساله از المان ویلسون که یک المان خطی با موده‌های تغییرشکلی ناسازگار است، برای تحلیل پوسته‌ها استفاده شده است. این المان به دلیل چهارگرهی بودن دارای توابع شکل خطی است و واضح است که استفاده از توابع شکل خطی موجب آسانی و کاهش قابل توجه در محاسبات مربوط به المان می‌شود. در حین استفاده از توابع شکل خطی برای بهبود رفتار خمشی المان از درجات آزادی چرخشی (drilling) در گره‌های المان استفاده شده است که موجب رسیدن به نتایج بسیار مطلوب برای رفتار خمشی پوسته‌ها می‌شود. شبکه اجزای محدود استفاده شده در این رساله یک شبکه سازمان یافته (structured) می‌باشد که توانایی مدل کردن پوسته‌هایی با تصویر مستطیل و دایره با هر معادله سطحی را دارا می‌باشد. اما در فرآیند بهینه‌سازی، ابتدا از مولفه مختصاتی Z در هر گره از شبکه اجزای محدود به عنوان متغیر طراحی استفاده شد که به دلایل بسیار از جمله عدم پیوستگی شیب‌ها و تعداد زیاد متغیرهای طراحی در شبکه اجزای محدود در حین بهینه-سازی به نتایج غیر کاربردی منتهی شد. سپس از ضرائب معادلات تشکیل دهنده سطح پوسته به عنوان متغیر طراحی استفاده شد که با بکارگیری این روش به دلیلی تعداد متغیرهای طراحی بسیار کمتر نسبت به حالت قبل و برقراری پیوستگی شیب‌ها در شبکه اجزای محدود نتایج قابل قبولی بدست آمد. در این رساله از دو روش SLP و SQP برای کاهش حجم سازه به ازای افزایش تغییرشکل حداکثر استفاده شده است. در پایان نیز فرکنس‌های طبیعی برای ارتعاش پوسته محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: اجزای محدود، بهینه‌سازی شکل، المان ویلسون، برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، فرکانس

طبیعی

فهرست مطالب

فصل اول: کلیاتی در مورد اجزای محدود پوسته‌ها

۱	۱-۱-مقدمه
۳	۲-۱-سختی المان صفحه‌ای
۵	۳-۱-انتقال به مختصات کلی
۷	۴-۱-کسینوس‌های هادی محلی برای المان مستطیلی
۹	۵-۱-سختی دورانی پیچشی

فصل دوم: تغییرشکل‌های ناسازگار

۱۱	۱-۲-مقدمه
۱۳	۲-۲-تغییرشکل‌های ناسازگار
۱۴	۳-۲-توابع شکل ناسازگار که آزمونهای قطعه
۱۶	۴-۲-شرایط همگرایی
۱۷	۵-۲-آزمونهای قطعه A و B:
۱۹	۶-۲-آزمون قطعه C و آزمون المان تک
۲۱	۷-۲-المان ناسازگار تنش مسطح ویلسون:
۲۱	۸-۲-المان غشایی با درجه آزادی چرخشی
۲۳	۹-۲-المان گسسته خمشی صفحه کیرشلف
۲۶	۱۰-۲-محاسبه تنشهای المان

فصل سوم: بررسی بیشتر المان ویلسون

۲۸	۱-۳-مقدمه
۲۹	۲-۳-المان خمشی کیرشلف
۳۰	۲-۳-۱المان چهارضلعی (مستطیلی)
۳۴	۲-۳-۲-معادلات کرنش-تغییر مکان
۳۴	۳-۳-۲-سختی المان چهارضلعی
۳۵	۴-۳-۲-کاهش مرتبه استاتیکی
۳۶	۵-۳-۲-المانهای دیگر خمشی
۳۸	۳-۳-۳-المان غشایی با دورانهای نرمال
۳۹	۱-۳-۳-فرضیات اساسی
۴۰	۲-۳-۳-تخمین تغییر مکان
۴۱	۳-۳-۳-اعمال دوران گرهی
۴۲	۴-۳-۳-معادلات کرنش-تغییر مکان
۴۲	۵-۳-۳-رابطه تنش-کرنش
۴۲	۶-۳-۳-تبدیل دورانهای نسبی به مطلق
۴۴	۴-۳-۴-المانهای پوسته

۹۵	۵-۷-۲-قیدها
۹۶	۵-۷-۳-تابع هدف
۹۶	۵-۷-۴-فرمول بندی ریاضی
۹۸	۵-۸-روش جهت‌های شدنی اصلاح شده (MMFD)
۹۹	۵-۹-روش برنامه ریزی خطی متوالی (SLP)
۱۰۲	۵-۱۰-برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP)

فصل ششم: بهینه‌سازی شکل سازه‌های پوسته‌ای

۱۰۵	۶-۱-مقدمه
۱۰۵	۶-۲-الگوریتم بهینه سازی شکل
۱۰۶	۶-۳-تولید مدل بهینه سازی شکل
۱۰۷	۶-۴-تولید مدل اجزای محدود
۱۰۸	۶-۵-آنالیز اجزای محدود
۱۰۸	۶-۶-فرآیند بهینه سازی:
۱۰۸	۶-۷-بهنگام کردن مدل بهینه سازی
۱۰۹	۶-۸-تعریف مساله بهینه سازی شکل
۱۰۹	۶-۹-توابع هدف
۱۱۰	۶-۹-۱-تابع وزن و حجم کل
۱۱۱	۶-۹-۲-تابع انرژی کرنشی
۱۱۱	۶-۹-۳-تابع تنش یکنواخت
۱۱۲	۶-۹-۴-تابع تنش حداکثر
۱۱۲	۶-۱۰-توابع قید
۱۱۴	۶-۱۰-۱-قید حجم و وزن
۱۱۵	۶-۱۰-۲-قید تغییر مکان
۱۱۶	۶-۱۰-۳-قید تنشها
۱۱۶	۶-۱۱-متغیرهای طراحی
۱۱۷	۶-۱۲-مثالهای عددی
۱۱۷	۶-۱۲-۱-پوسته استوانه‌ای
۱۲۱	۶-۱۲-۲-پوسته کروی
۱۲۳	۶-۱۳-بحث در نتایج
۱۲۹	۶-۱۴-بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای با استفاده از روش ضرائب معادلات

فصل هفتم: فرکانس طبیعی سازه‌های پوسته‌ای

۱۳۴	۷-۱-مقدمه
۱۳۵	۷-۲-معادله حرکت دینامیکی
۱۳۹	۷-۳-ماتریس جرم سازگار و متراکم در دستگاه کلی
۱۴۰	۷-۴-ماتریس جرم سازگار در دستگاه
۱۴۱	۷-۵-تحلیل ارتعاش آزاد

۱۴۲

۶-۷-مثالهای عددی

فصل هشتم: نتیجه‌گیری و چشم‌انداز آینده

۱۴۵

۱-۸-مقدمه

۱۴۵

۲-۸-نتیجه‌گیری

۱۴۷

۳-۸-چشم‌انداز آینده

۱۴۹

فهرست منابع

الف

پیوست الف

ب

پیوست ب

فهرست شکل‌ها

۳	شکل ۱-۱: المان تحت اثر نیروهای خمشی و درون صفحه‌ای [۱]
۶	شکل ۱-۲: مختصات کلی و محلی
۸	شکل ۱-۳: پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از المانهای مستطیلی در مختصات کلی و محلی [۱]
۱۲	شکل ۱-۲: المان خطی تحت اثر خمش خالص
۱۸	شکل ۲-۲: آزمونهای A و B [۳]
۲۰	شکل ۲-۳: (الف). آزمون قطعه C (ب) آزمون المان تک [۳]
۲۲	شکل ۲-۴: المان مسطح چهارضلعی پوسته [۶]
۳۰	شکل ۱-۳: المان خمشی چهارضلعی [۲]
۳۲	شکل ۲-۳: لبه المان [۲]
۳۳	شکل ۳-۳: تغییر مکانهای مثبت در المان خمشی صفحه‌ای [۲]
۳۳	شکل ۳-۴: برشهای گرمی [۲]
۳۷	شکل ۳-۵: یک تیر طره که بوسیله یک المان صفحه مدل شده است [۲]
۴۰	شکل ۳-۶: المان غشایی چهارضلعی با دورانه‌های نرمال [۲]
۴۱	شکل ۳-۷: لبه یک المان چهارضلعی [۲]
۴۴	شکل ۳-۸: مود تغییر شکلی انزوی صفر [۲]
۴۵	شکل ۳-۹: شکل گیری المان مسطح پوسته [۲]
۴۶	شکل ۳-۱۰: استفاده از المانهای مسطح برای مدلسازی پوسته‌های دلخواه [۲]
۴۸	شکل ۳-۱۱: صفحه به ابعاد یک متر در یک متر
۵۱	شکل ۳-۱۲: پوسته استوانه‌ای
۵۳	شکل ۳-۱۳: پوسته کروی
۵۷	شکل ۴-۱: (الف) مش سازمان نیافته (ب) مش سازمان نیافته
۵۸	شکل ۴-۲: مش سازمان نیافته برای یک دامنه پیچیده با تعداد ۵۵۲۳ گره
۵۹	شکل ۴-۳: تصویر مش مستطیلی ایجاد شده توسط rec_mes
۶۰	شکل ۴-۴: تصویر مش دایروی ایجاد شده توسط cir_mesh
۶۱	شکل ۴-۵: شماره گذاری المان چهارضلعی
۶۳	شکل ۴-۶: پوسته استوانه‌ای
۶۴	شکل ۴-۷: پوسته‌ای با معادله درجه سوم در جهت y و معادله سینوسی در جهت x
۶۵	شکل ۴-۸: پوسته‌ای با معادله سینوسی در جهت y و معادله کسینوسی در جهت x
۶۶	شکل ۴-۹: پوسته‌ای با معادله کسینوسی در جهت y و معادله نمایی در جهت x
۶۷	شکل ۴-۱۰: پوسته کروی
۶۸	شکل ۴-۱۱: پوسته‌ای با معادله سینوسی در هر دو جهت x و y
۶۹	شکل ۴-۱۲: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله سینوسی در هر دو جهت x و y
۷۰	شکل ۴-۱۳: پوسته‌ای با معادله سینوسی در جهت x و معادله کسینوسی در جهت y
۷۱	شکل ۴-۱۴: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله سینوسی در جهت x و معادله کسینوسی در جهت y
۷۲	شکل ۴-۱۵: پوسته‌ای با معادله لگاریتمی
۷۲	شکل ۴-۱۶: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله لگاریتمی

- شکل ۴-۱۷: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله نمایی
- شکل ۵-۱: حالات مختلف برای تابع هدف؛ قیود و نقاط اکسترمم [۱۰]
- شکل ۵-۲: استفاده از قیود خطی در مسائل غیرخطی [۱۰]
- شکل ۵-۳: استفاده از حد حرکت برای رسیدن به جواب بهینه [۱۰]
- شکل ۶-۱: الگوریتم بهینه‌سازی شکل سازه‌ها
- شکل ۶-۲: شکل اولیه پوسته استوانه‌ای
- شکل ۶-۳: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SQP در حالتی مولفه Z، متغیر طراحی باشد...
- شکل ۶-۴: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SQP در حالتی مولفه Z، متغیر طراحی باشد...
- شکل ۶-۵: شکل اولیه پوسته کروی
- شکل ۶-۶: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SQP در حالتی مولفه Z، متغیر طراحی باشد
- شکل ۶-۷: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SLP در حالتی مولفه Z، متغیر طراحی باشد
- شکل ۶-۸: بهینه‌سازی یک صفحه سوراخدار با استفاده از تکنیک حرکت گرهها [۱۵]
- شکل ۶-۹: شکل اولیه پوسته و بارگذاری آن [۱۶]
- شکل ۶-۱۰: شکل نهایی پوسته پس از بهینه‌سازی [۱۶]
- شکل ۶-۱۱: پوسته هرمی و بارگذاری آن [۱۶]
- شکل ۶-۱۲: شکل نهایی پوسته هرمی پس از بهینه‌سازی [۱۶]
- شکل ۶-۱۳: تصویر پوسته استوانه‌ای
- شکل ۶-۱۴: پوسته استوانه‌ای پس از بهینه‌سازی بوسیله روش ضرائب معادلات و روش SQP
- شکل ۶-۱۵: پوسته استوانه‌ای پس از بهینه‌سازی بوسیله روش ضرائب معادلات و روش SLP
- شکل ۶-۱۶: تغییرات تابع هدف در روش SQP
- شکل ۶-۱۷: تغییرات تابع هدف در روش SLP
- شکل ۶-۱۸: شکل بهینه پوسته استوانه‌ای با یک بار قائم در یکی از رئوس خود با استفاده از روش ضرائب معادلات و SQP
- شکل ۶-۱۹: شکل بهینه پوسته استوانه‌ای با یک بار قائم در یکی از رئوس خود با استفاده از روش ضرائب معادلات و SLP
- شکل ۷-۱: نمودار فرکانس-ضخامت برای صفحه مربعی
- شکل ۷-۲: نمودار فرکانس-ضخامت برای پوسته استوانه‌ای
- شکل ۷-۳: نمودار فرکانس-ضخامت برای پوسته کروی

فهرست جدول‌ها

- جدول ۳-۱: تغییر مکان انتها و لنگر عکس العمل ابتدا برای المانهای مختلف ۳۸
- جدول ۳-۲: تغییر مکان حداکثر صفحه برای ضخامت‌های مختلف ۴۹
- جدول ۳-۳: تغییر مکان حداکثر پوسته استوانه‌ای برای ضخامت‌های مختلف ۵۲
- جدول ۳-۴: تغییر مکان حداکثر پوسته کروی برای ضخامت‌های مختلف ۵۴
- جدول ۵-۱: مقایسه ابعادی روشهای بهینه‌سازی ۹۲
- جدول ۵-۲: بررسی نقاط قوت و ضعف روشهای بهینه‌سازی ۹۲

فهرست علائم اختصاری

CONLIN	:	CONvex LINearization
DKE	:	Discrete Kirchhoff Element
DSE	:	Discrete Shear Element
LP	:	Linear Programming
MMA	:	Method of Moving of Asymptotes
MMFD	:	Method of Modified Feasible Directions
NAND	:	Nested ANalysis and Design
NLP	:	Non-Linear Programming
NURBS	:	Non-Uniform Rational Beizier Spline
SAND	:	Simultaneous ANalysis and Design
SLP	:	Sequential Linear Programming
SQP	:	Sequential Quadratic Programming

فصل اول

کلیاتی در مورد اجزای محدود پوسته‌ها

۱-۱- مقدمه

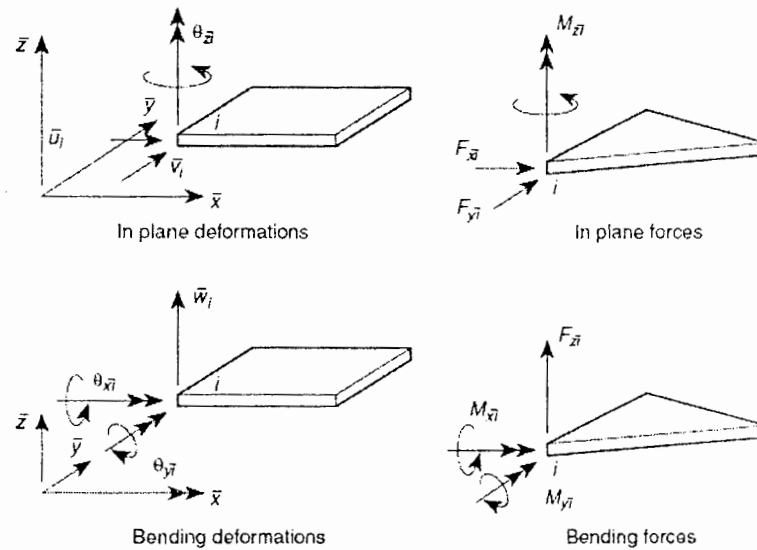
از حدود ۴۰ سال پیش، روش اجزای محدود برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای استفاده شده است و تلاش اصلی در این مباحث جستجو برای پیدا کردن المانهایی است که برای سازه‌های پوسته‌ای مناسب و کاربردی باشند.

یک پوسته در واقع صفحه‌ای است که دارای سطح میانی^۱ ای است که خود دارای انحناست. فرضیات مشابهی که برای توزیع قائم کرنش‌ها و تنش‌ها در صفحات نازک استفاده می‌شوند، در پوسته‌ها هم صادق است. اگرچه نحوه‌ای که پوسته‌ها بارهای خارجی را تحمل می‌کنند، با صفحات کاملاً متفاوت است. تنش‌های وارده بر سطح میانی پوسته دارای دو مولفه مماسی و عمودی است که سهم عمده‌ای در تحمل بار دارد و این موضوع موجب این شده‌است که پوسته به عنوان سازه‌ای اقتصادی در تحمل بارها مطرح شود و مورد استقبال قرار گیرد [۱].

بدست آوردن معادلات حاکم برای مسائل پوسته‌های با انحنای سطحی^۲، مشکلات زیادی را در بر دارد که این مساله خود موجب پیدایش روشهای جایگزینی برای تحلیل پوسته‌ها شده‌است. خصیصه اصلی این روشها، تقریب‌های بکارگرفته شده در فرمول‌بندی آنهاست.

^۱ Middle surface

^۲ Curved surface



شکل ۱-۱: المان تحت اثر نیروهای خمشی و درون صفحه‌ای [۱]

با در نظر گرفتن اثر دورن صفحه‌ای^۱ یا همان تنش مسطح^۲، می‌توان کرنشها را بر حسب جملاتی از تغییرشکل‌های \bar{u} و \bar{v} در هر کدام از گره‌ها نوشت. حداقل‌سازی انرژی پتانسیل موجب رسیدن به روابط زیر برای ماتریس سختی، نیروهای گرهی و تغییرمکانها می‌شود:

$$(\bar{\mathbf{f}}^e)^p = (\bar{\mathbf{K}}^e)^p \bar{\mathbf{a}}^p \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{a}}_i^p = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_i^p = \begin{Bmatrix} F_{\bar{x}i} \\ F_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

اگر اثر خمشی در نظر گرفته شود، می‌توان کرنشها را بر حسب تغییرشکل گرهی \bar{z} و در دوران $\theta_{\bar{x}}$ و $\theta_{\bar{y}}$ نوشت:

$$(\bar{\mathbf{f}}^e)^b = (\bar{\mathbf{K}}^e)^b \bar{\mathbf{a}}^b \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{a}}_i^b = \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \theta_{\bar{x}i} \\ \theta_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_i^b = \begin{Bmatrix} F_{\bar{z}i} \\ M_{\bar{x}i} \\ M_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

^۱ In-plane action^۲ Plane stress

اگر اثر خمشی در نظر گرفته شود، می‌توان کرنشها را بر حسب تغییرشکل گرهی \bar{z} و در دوران $\theta_{\bar{x}}$ و $\theta_{\bar{y}}$ نوشت:

$$(\bar{\mathbf{f}}^e)^b = (\bar{\mathbf{K}}^e)^b \bar{\mathbf{a}}^b \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{a}}^b = \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \theta_{\bar{x}i} \\ \theta_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_i^b = \begin{Bmatrix} F_{\bar{z}i} \\ M_{\bar{x}i} \\ M_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

قبل از ترکیب این سختی‌ها باید به برخی نکات توجه کرد. ابتدا اینکه تغییرشکل‌های ناشی از نیروهای صفحه‌ای، تاثیری در تغییرشکل‌های خمشی ندارد و بالعکس. دوم اینکه دوران $\theta_{\bar{z}}$ ، در هیچ‌یک از مودها، به عنوان پارامتری در تعیین تغییرشکل‌ها نقش ندارد.

با تعریف مجدد تغییر مکان‌های گرهی ترکیب شده:

$$\bar{\mathbf{a}}_i = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \theta_{\bar{x}i} \quad \theta_{\bar{y}i} \quad \theta_{\bar{z}i}] \quad (3-1)$$

و برای نیروهای گرهی:

$$\bar{\mathbf{f}}_i = [F_{\bar{x}i} \quad F_{\bar{y}i} \quad F_{\bar{z}i} \quad M_{\bar{x}i} \quad M_{\bar{y}i} \quad M_{\bar{z}i}] \quad (4-1)$$

و می‌توان نوشت که:

$$\bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{f}}^e \quad (5-1)$$

پس ماتریس سختی از زیر ماتریس‌های^۱ زیر تشکیل می‌شود:

^۱ Sub-matrix

$$\bar{\mathbf{k}}_{rs} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{rs}^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{k}}_{rs}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

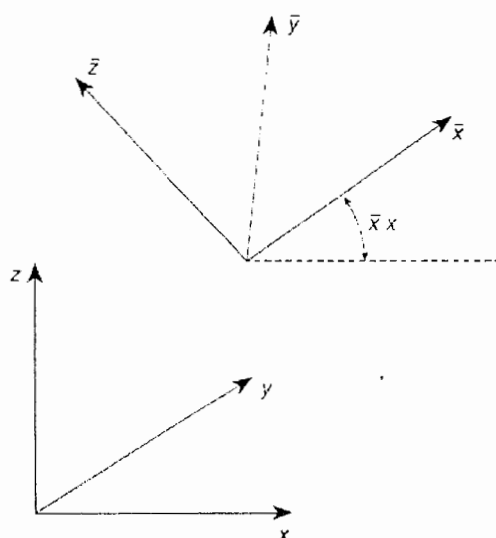
۱-۳- انتقال به مختصات کلی^۱ و اسمبل کردن المانها^۲:

ماتریس سختی که در بخش قبل شرح داده شد، در مختصات محلی یا همان سطح مرجع^۳ محاسبه شد و در پی آن مولفه‌های نیرویی و خمشی نیز در همین مختصات بدست آمده‌است. تبدیل مختصات به یک دستگاه مختصات کلی، نیازمند اسمبل کردن المانها و بازنویسی معادلات تعادل است.

^۱ Global coordinate

^۲ Assembly of elements

^۳ Reference plane



شکل ۱-۲: مختصات کلی و محلی

دو دستگاه مختصات در شکل نشان داده شده‌است. نیروها و تغییرشکل‌های گرهی با استفاده از ماتریس T از سیستم کلی به سیستم محلی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{T}\mathbf{a}_i \quad \bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{T}\mathbf{f}_i \quad (7-1)$$

که در آن :

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} \quad (8-1)$$

یک ماتریس ۳ در ۳ است که شامل کسینوس‌های هادی بین محورهای دو سیستم مختصاتی است، که:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{\bar{x}x} & \Lambda_{\bar{x}y} & \Lambda_{\bar{x}z} \\ \Lambda_{\bar{y}x} & \Lambda_{\bar{y}y} & \Lambda_{\bar{y}z} \\ \Lambda_{\bar{z}x} & \Lambda_{\bar{z}y} & \Lambda_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad (9-1)$$

که $\cos(\bar{x}, x)$ ، کسینوس زاویه بین محور x و \bar{x} است.

برای تبدیل مختصات از محلی به کلی:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{a}}_i \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}}_i \quad (10-1)$$

که با استفاده از این رابطه برای محاسبه سختی می‌توان نوشت:

$$\mathbf{K}_{PS}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}_{PS}^e \mathbf{T} \quad (11-1)$$

که $\bar{\mathbf{k}}_{PS}^e$ با استفاده از روابطی که قبلاً ارائه شد محاسبه می‌شود.

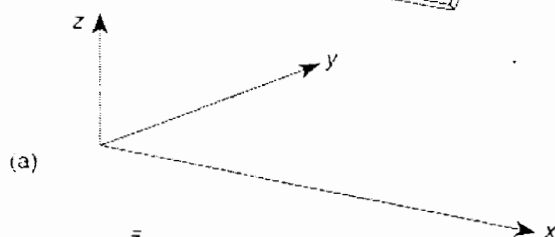
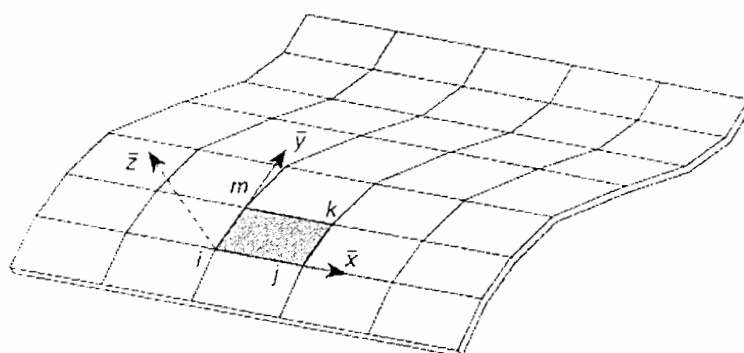
رابطه بین دستگاه مختصات کلی و محلی به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{Bmatrix} \quad (12-1)$$

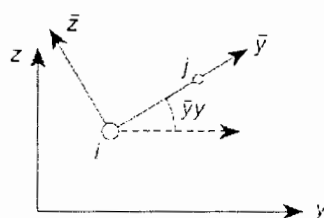
که x_0 و y_0 و z_0 فاصله بین مبدا مختصات در دستگاه کلی و مبدا مختصات در دستگاه محلی است. در محاسبه مولفه‌های سختی صفحه‌ای و خمشی، محل قرارگیری مبدا مختصات اهمیتی ندارد.

۴-۱- کسینوسهای هادی محلی برای المان مستطیلی:

چنین المان‌هایی معمولاً برای مدل کردن سطوح استوانه‌ای و ... استفاده می‌شود. برای این حالات بهتر است که یکی از لبه‌های المان را در نظر بگیریم. برای یک المان ijkm که در شکل نشان داده شده است، می‌توان به سادگی کسینوس‌های هادی را محاسبه کرد:



(a)

(b) Vertical section ij

شکل ۱-۳: پوسته استوانه‌ای شکل شده از المانهای مستطیلی در مختصات کلی و محلی [۱]

$$\Lambda_{\bar{x}\bar{x}} = 1 \quad \Lambda_{\bar{x}\bar{y}} = \Lambda_{\bar{x}\bar{z}} = 0 \quad (13-1)$$

کسینوس‌های هادی نسبت به محور \bar{y} ، با در نظر گرفتن مختصات نقاط گرهی متغیر به صورت زیر تعیین می‌شوند [۲]:

$$\Lambda_{\bar{x}\bar{x}} = 0 \quad (14-1)$$

$$\Lambda_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{y_m - y_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (15-1)$$

$$\Lambda_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{z_m - z_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (16-1)$$

این فرمول‌ها بسادگی با در نظر گرفتن روابط هندسی که از گذراندن مقطع عرضی عمودی در راستای خط im در راستای Z بوجود می‌آید، نوشته می‌شود:

$$\Lambda_{\bar{z}x} = 0 \quad (17-1)$$

$$\Lambda_{\bar{z}y} = \frac{z_m - z_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (18-1)$$

$$\Lambda_{\bar{z}z} = \frac{y_m - y_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (19-1)$$

۱-۵- سختی دورانی پیچشی^۱:

اگر در فرمول‌بندی‌ای که در بخش قبل شرح داده شد، θ_{zi} نیز وارد شود، مساله پیچیده‌تر می‌شود. این پیچیدگی در اثر اختصاص یک سختی با اندازه صفر در جهت θ_{zi} و این حقیقت است که در معادلات کلاسیک پوسته، معادلاتی با پارامترهای دورانی نیستند.

اگر مجموعه‌ای از معادلات تعادل اسمبل شده در یک نقطه را در نظر گرفته شود، شش معادله تعادل وجود خواهد داشت که آخرین معادله عبارتست از:

^۱ Drilling rotational stiffness

$$\theta_{\bar{x}} = 0$$

(۲۰-۱)

توضیحات بیشتر در مورد این درجه آزادی در بخش المانهای ناسازگار آمده است.

فصل دوم

تغییر شکل‌های ناسازگار

۲-۱- مقدمه

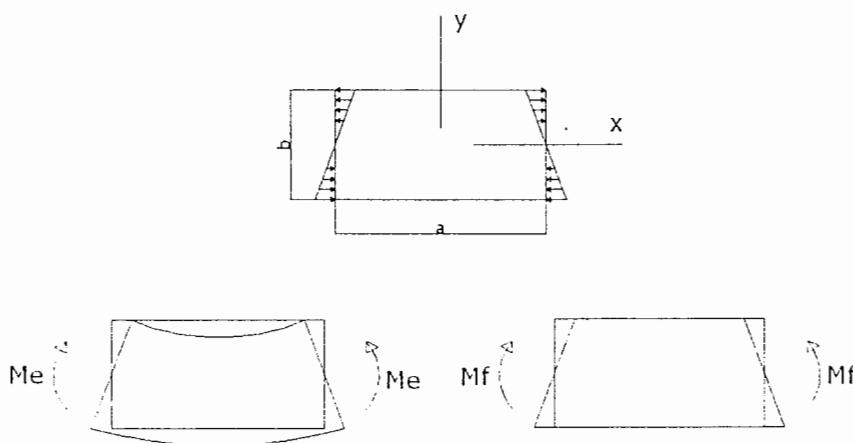
برای حل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل به روش گسسته سازی می‌توان از دو فرمول‌بندی تقلیل ناپذیر^۱ یا مختلط^۲ استفاده کرد. در حالت کلی وقتی در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با متغیرهای وابسته، متغیرها را طوری بر حسب یکدیگر بنویسیم که یک دستگاه معادلات با متغیرهای غیروابسته بوجود آید، به آن فرمول‌بندی تقلیل ناپذیر می‌گویند، در غیر اینصورت به حل یک دستگاه معادلات با متغیرهای وابسته به روش گسسته‌سازی، فرمول‌بندی مختلط می‌گویند [۳]. در مسائل الاستیسیته در صورتی که کرنشها و تنشها بر حسب تغییر مکان نوشته شوند، فرمول‌بندی حاصل همان فرمول‌بندی تقلیل ناپذیر است، ولی اگر در این مسائل دو میدان کرنش-تغییر مکان و یا سه میدان تنش-کرنش-تغییر مکان وجود داشته باشد و به صورت مجزا تقریب زده - شود، فرمول‌بندی مختلط نتیجه می‌شود. در این پایان‌نامه تنها از فرمول‌بندی تقلیل ناپذیر استفاده می‌شود.

روش اجزای محدود یکی از روشهای حل عددی مسائل مختلف می‌باشد که در طی فرایند حل و محاسبه متغیرها از روشهای عددی مختلف بهره می‌گیرد. واضح است که اگر از روشهای عددی با حجم محاسبات بالا استفاده شود، این روش موجب صرف هزینه و زمان زیادی می‌گردد. بنابراین کاستن حجم محاسبات و در عین حل افزایش دقت جواب می‌تواند یکی از اهداف در حل مساله باشد. یکی از روشهای موثر در برآورده کردن این مهم، تجدیدنظر در نوع المانهای مورد استفاده است، یعنی باید سعی کرد از المانهای با مرتبه پایین (خطی) جوابهایی با دقت بالا بدست آورد. البته ناتوانی المانهای با مرتبه پایین، در محاسبه برخی از کرنشهای ناشی از خمش است. شکل (۲-۱) نشان دهنده یک المان تحت تنش خمشی است که تغییر شکل واقعی آن نشان داده شده است. در

^۱ Irreducible formulation

^۲ Mixed formulation

ناتوانی المان‌های با مرتبه پایین، در محاسبه برخی از کرنشهای ناشی از خمش است. شکل (۱-۲) نشان دهنده یک المان تحت تنش خمشی است که تغییرشکل واقعی آن نشان داده شده است. در حالی که تغییرشکل این المان به توجه به خطی بودن، در لبه‌های بالایی و پایینی خطی باقی می‌ماند. این خصیصه منفی در المانهای خطی موجب ایجاد برش اضافی و سخت شدن رفتار المان خطی می‌شود^۱ [۴].



شکل ۱-۲: المان خطی تحت اثر خمش خالص

کوک در سال ۱۹۸۹ نسبت لنگر خمشی مقاوم به لنگر خمشی واقعی را به صورت زیر ارائه کرد:

$$\frac{M_f}{M_e} = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) \quad (1-2)$$

که ν نسبت پواسون و a و b ابعاد المان است. از این رابطه چنین برمی‌آید که کرنش برشی با افزایش نسبت ابعاد المان^۲، a/b ، افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر با افزایش نسبت ابعاد المان، دقت المان کاهش می‌یابد.

^۱ Cook ۱۹۷۵

^۲ Aspect ratio

۲-۲- تغییر شکل‌های ناسازگار^۱

روش‌های مختلفی برای بهبود رفتار المان‌های مرتبه پایین توسط فیلیپ^۲ و هرمن^۳ و کوک^۴ و زینکوویچ^۵ ارائه شده است. این روشها شامل تقسیم المان به چند بخش مثلثی است که با یک گره فرضی به هم متصل می‌شوند. گره فرضی داخلی قبل از اسمبل کردن المانها، در المان نهفته می‌شود^۶.

ویلسون در سال ۱۹۷۳ روش دیگری برای بهبود المان‌های چهارضلعی خطی پیشنهاد کرد. روش ویلسون شامل استفاده از مودهای تغییر مکانی ناسازگار^۷ است. مودهای تغییر مکانی ناسازگار در ابتدا برای جلوگیری از پدیده قفل‌شدگی^۸ قبل از سالهای ۱۹۷۰ به المان ایزوپارامتریک اضافه شد [۵]. از آنجاییکه مقادیر حداکثر^۹ با استفاده از حداقل‌سازی انرژی پتانسیل محاسبه می‌شود، بنابراین افزودن این مودها موجب بهبود تعادل میکروسکوپی^{۱۰} در المانها می‌شود [۶].

با اضافه شدن این مودهای تغییر مکانی ناسازگار، مدل کردن رفتار خمشی المان آسان‌تر می‌شود و از سخت‌شدگی المان کاسته می‌شود. ولی مودهای تغییر مکانی ناسازگار موجب بوجود آمدن ناپیوستگی بین المانها می‌شوند. به عبارت دیگر در این حالت شرط سازگاری بین المانها اقلان نمی‌شود. البته باید توجه داشت که وجود ناپیوستگی بین المانها سبب ایجاد کرنش‌های نامتناهی می‌شود که سعی می‌شود این اثرات با انتخاب مناسب توابع شکل به صورت خودکار حذف شوند. بدین معنی که توابع شکل به گونه‌ای انتخاب شود که سبب ایجاد یک پیوستگی ضعیف بین المانها شوند تا بدین وسیله پایداری حل تامین گردد [۷].

¹ Nonconforming displacemants

² ۱۹۶۶

³ ۱۹۷۳

⁴ ۱۹۷۵

⁵ ۱۹۸۹

⁶ condensation

⁷ Incompatible modes

⁸ locking

⁹ Amplitude

¹⁰ Microscopic equilibrium

۲-۳- توابع شکل ناسازگار که آزمونهای قطعه^۱ را ارضا کند

در حل مسائل صفحات و پوسته‌ها که در آنها نیاز به پیوستگی از درجه C^1 است، استفاده از چنین توابع شکلی نه تنها به این خاطر که جوابهای مطلوبی حاصل می‌کنند، مورد استفاده وسیع قرار گرفته‌اند، بلکه به دلیل مشکلات ناشی از استفاده از توابعی است که هر دو شرط پیوستگی و پیوستگی شیب را دارا باشند [۳]. پس باید توابع شکل ناسازگار را طوری محاسبه شود که خودبه-خود شرایط مورد نیاز برای آزمون قطعه و در پی آن همگرایی برآورده شود.

فرض شود که معادله زیر برای جواب اجزای محدود موجود است:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = -T\nabla^2 \mathbf{u} + k\mathbf{u} - q = 0 \quad \text{در دامنه } \Omega \quad (2-2)$$

با شرایط مرزی

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{در } \Gamma_u \quad (3-2)$$

و

$$T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{در } \Gamma_t \quad (4-2)$$

مجهول \mathbf{u} با استفاده از بسط سلسله مراتبی^۲ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^c + \mathbf{u}^n \quad (5-2)$$

$$u^c = \mathbf{N}^c \mathbf{a}^c \quad u^n = \mathbf{N}^n \mathbf{a}^n \quad (6-2)$$

که در آن \mathbf{N}^c و \mathbf{N}^n بترتیب توابع شکل سازگار و ناسازگار هستند. با اضافه کردن موده‌های تغییرمکانی بصورت فوق پیوستگی تغییرمکان در المان برقرار نمی‌باشد ($\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ on Γ_u) که در اینصورت دقت حل و پایداری حل تامین نمی‌شود.

¹ Patch tests

² Hierarchical

زمانی که بخشی از المان دارای تغییرات خطی u باشد، بطوریکه رابطه (۲-۲) ارضا شود، تقریب u^c قادر به بدست آوردن این جواب و برآورده کردن شرایط آزمون قطعه خواهد بود [۳].

بنابراین می‌توان استنباط کرد که در آزمون قطعه u^n صفر خواهد بود. بنابراین در اینجا نیاز است که یک آزمون المان منفرد^۱ که در آن نیروی سطحی ثابت \bar{t} ، (منطبق بر $u^c = u$) اعمال شود [۳].

حال معادله گالرکین^۲ معادل با مود تغییر مکان ناسازگار می‌شود:

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n k \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \equiv \int_{\Gamma_e} N_i^n k \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma_e} N_i^n \bar{t} d\Gamma \quad (۷-۲)$$

و این معادله دقیقاً با ثابت در نظر گرفتن \bar{t} و k و $\frac{\partial u}{\partial n}$ ارضا خواهد شد. در معادله بالا Γ_e کل مرز المان می‌باشد و Ω_x و Ω_y و Ω_z بردارهای عمود بر مرز هستند [۳]. شرط بالا با برقراردن معادله زیر به آسانی بدست می‌آید:

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (۸-۲)$$

برای برقراردن معادله بالا می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n \mathbf{n}_x d\Gamma = 0 \quad (۹-۲)$$

و

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n \mathbf{n}_y d\Gamma = 0 \quad (۱۰-۲)$$

و بنابراین برای هر المان، اعمال قید زیر

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (۱۱-۲)$$

^۱ Single element test

^۲ Galerkin equation

که توسط ویلسون^۱ پیشنهاد شده، بیانگر اینست که بارهای مرزی برای تغییر شکل های ناسازگار باید صفر شوند و یا از آنها صرف نظر شود. از طرفی دیگر، سهم گرهی نیروهای جسمی^۲ همانند q ، باید با استفاده از هردو بخش تغییر شکل های سازگار و ناسازگار محاسبه شود. این شرایط برای اقلان شرایط سازگاری المان بر آن وارد شده است. با ارضای شرایط فوق، تابع تقریب u^n به گونه ای تغییر می کند که سبب ایجاد یک ناپیوستگی ضعیف بین المانها می شود. ضعیف بودن ناپیوستگی در مرز المانها، پایداری حل به صورت ناسازگار را تامین می کند [۷]. اما این ناپیوستگی ضعیف برای اقلان همگرایی در مساله کافی نیست و بنابراین لازم است که معیار همگرایی نیز در المان بررسی شود.

۲-۴- شرایط همگرایی^۳

جواب اجزای محدود یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر می شود:

$$A(u) \equiv L(u) + g = 0 \quad (۱۲-۲)$$

که در دامنه Ω با شرط زیر

$$B(u) = 0 \quad (۱۳-۲)$$

برروی مرز Γ برقرار است.

تقریب اجزای محدود آن بصورت زیر می شود:

$$u \approx \hat{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (۱۴-۲)$$

که \mathbf{N} توابع شکل تعریف شده در المان و Ω_e و \mathbf{a} پارامترهای مجهول هستند.

با اعمال روش های استاندارد اجزای محدود، مساله به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می شود:

¹ Wilson

² Body forces

³ Convergence requirements

$$ka = f \quad (2-15)$$

که با حل این دستگاه، تقریبی برای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی بدست می‌آید. با توجه به مفهوم همگرایی در این مبحث، زمانی که بعد المان h به سمت صفر میل کند، جواب تقریبی u به سمت جواب دقیق u میل می‌کند [۳].

برای اطمینان از همگرایی جواب، لازم است شرایط پیوستگی^۱ و پایداری^۲ برآورده شود. شرط پیوستگی تضمین کننده این است که اگر ابعاد المان به صفر نزدیک شود، تقریب بدست آمده برای معادله، نشان دهنده شکل دقیق معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی آن باشد [۳].

شرط پایداری در واقع تضمین کننده این است که جواب دستگاه معادلات گسسته، منحصر بفرد باشد و از بوجد آمدن هرگونه جواب اشتباهی که ممکن است جواب نهایی را برای هر المان با هر اندازه، نادرست سازد، جلوگیری می‌کند [۳]. برای مساله خطی که در آن معادلات جبری را بصورت زیر حل می‌کنیم:

$$a = k^{-1}f \quad (2-16)$$

این رابطه بدین معنی است که ماتریس K باید برای آرایش‌های المانها، یک ماتریس غیرتکین^۳ باشد.

۲-۵- آزمونهای قطعه A و B:

آزمون قطعه در اصل روشی برای کنترل شرایط پیوستگی است. شرایط پایداری بصورت جداگانه با بررسی غیرتکین بودن ماتریس‌ها کنترل می‌شوند.

در ابتدا باید شرط پیوستگی مدنظر قرار گیرد که خود نیازمند این است که حدی همانند میل کردن ابعاد المان به سمت صفر، در یک تقریب اجزای محدود، دقیقاً معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی را مدل کند. اگر بخش کوچکی از دامنه را در نظر گرفته شود، می‌توان تابع مجهول u و تمام

¹ Consistency

² Stability

³ Non-singular

مشتقات اول آن را با استفاده از سری تیلور در یک تقریب ضعیف^۱ بسط داد. می‌توان نتیجه گرفت که برای همگرایی یک تابع و مشتقات اول آن در مسائل معمولی با مرتبه دوم و در حالت دوبعدی، باید رابطه زیر حول نقطه i که فرضاً می‌تواند محور مختصات باشد، برقرار باشد [۳]:

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i y + o(h^p)$$

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i y + o(h^p) \quad (17-2)$$

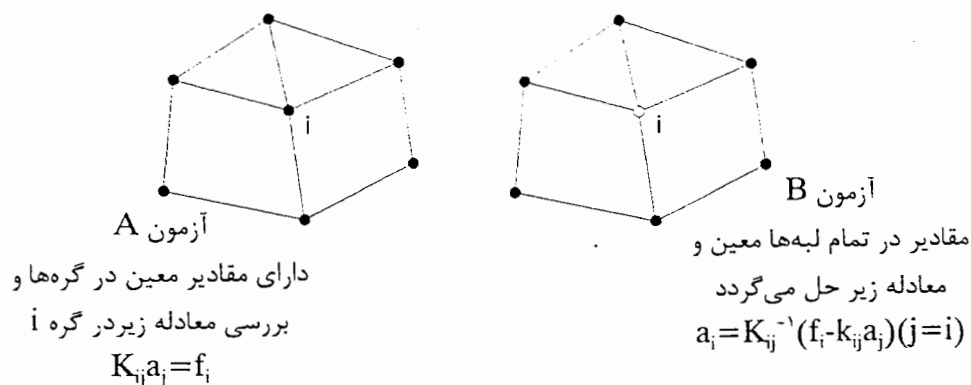
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i + o(h^{p-1})$$

که $p \geq 2$ باید باشد. در این رابطه:

$$|u - \hat{u}| = o(h^p) \quad (18-2)$$

که $p > 0$ است و h بعد المان است. بنابراین تقریب اجزای حدود، روشی دقیق برای تبدیل مساله به یک حالت خطی u است و با توجه به این که h به سمت صفر میل می‌کند، شرایط مشابه می‌تواند برای مسائل با مراتب بالاتر نوشته شود.

در این حالت ابتدا یک جواب خطی دلخواه را برای معادله دیفرانسیل محاسبه می‌شود و سپس مجموعه پارامترهای نظیر \mathbf{a} در تمام گره‌های قطعه بدست می‌آید.



شکل ۲-۲: آزمونهای A و B [۳]

در آزمون A بسادگی مقدار دقیق پارامترهای \mathbf{a} در معادله $\mathbf{A}\mathbf{a}$ وارد می‌شود و بررسی می‌شود که:

¹ Weak approximation

$$\mathbf{k}_{ij} a_j - f = 0 \quad (19-2)$$

در آزمون B تنها آن مقادیر \mathbf{a} که منطبق بر مرزهای قطعه هستند، وارد می‌شوند و a_i بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_i = \mathbf{k}_{ij}^{-1} (f_i - \mathbf{k} a_j) \quad i \neq j \quad (20-2)$$

و در نهایت با مقدار دقیق مقایسه می‌شود.

هر دوی این آزمون‌ها، تنها برآورده شدن معادله دیفرانسیل را بررسی می‌کنند. در اصل این آزمون‌ها تنها برای قطعات بسیار کوچک المان است، ولی برای معادلات دیفرانسیل با ضرائب ثابت و تبدیلاتی که دارای ژاکوبین ثابت هستند، اندازه قطعه چندان مهم نیست و آزمون می‌تواند بر روی قطعه با ابعاد دلخواه انجام شود [۳].

در عوض اگر ضرائب معادله ثابت نباشند، استقلال از اندازه^۱ مشابهی وجود خواهد داشت بشرطی که یک مجموعه ثابت از چنین ضرائبی در فرمول بندی آزمون استفاده شود.

در واقع آزمون‌هایی که شرح داده شد، شرایط لازم برای همگرایی فرمول بندی هستند، ولی شرایط کافی برای آن نیستند.

۲-۶- آزمون قطعه C و آزمون المان تک^۲

همانطور که در بخش قبل گفته شد، آزمون‌های A و B تنها شرط‌های لازم برای همگرایی فرمول بندی بودند. در این آزمون‌ها تقریب بارهای مرزی برای حالاتی که شرایط طبیعی^۳ مشخص هستند (همانند نیروهای خارجی ارتجاعی)، در نظر گرفته نشده است. آزمونی که بتواند این شرایط

^۱ Independence of dimension

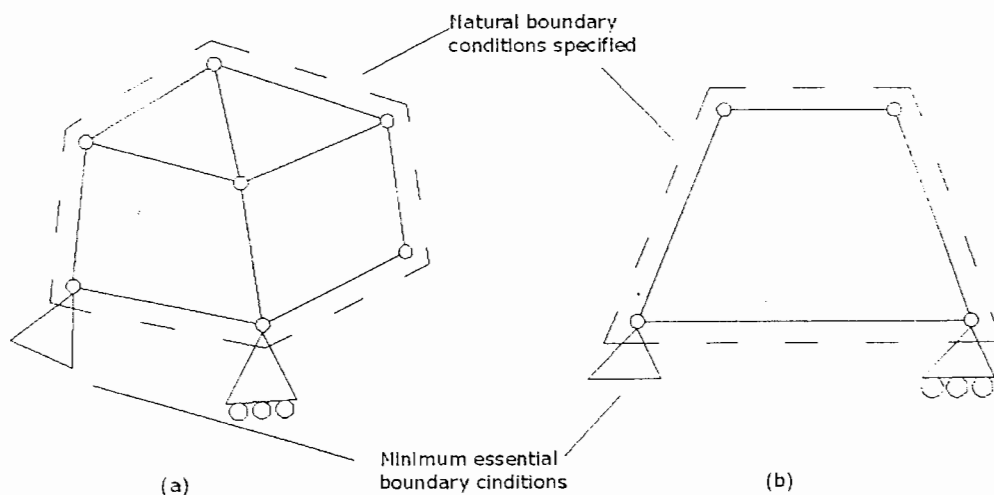
^۲ Single element test

^۳ Natural

را بررسی کند، براحتی می‌تواند ساخته شود. این آزمون در شکل (۲-۳) به عنوان آزمون C نشان داده شده است. در این آزمون قطعه‌ای از المان تحت شرایط ازپیش تعیین شده (یا نیروهای سطحی محیطی) قرار گرفته است. بنابراین می‌توان رابطه زیر را برای قطعه نوشت:

$$ka = f \quad (2-21)$$

با ثابت نگه داشتن تنها کمترین تعداد از پارامترهای a که در تعیین تعبیر فیزیکی جواب نیاز است (همانند حذف حرکات صلب جسمی^۱ در حالت الاستیک)، یک جواب برای مقادیر باقیمانده a بدست می‌آید و با مقادیر فرضی دقیق اصلی مقایسه می‌شود [۳].



شکل ۲-۳: (الف). آزمون قطعه C (ب) آزمون المان تک [۳]

حال باید هر گونه تکینگی^۲ ای از ماتریس K مورد توجه قرار گیرد و همانطور که بردار f شامل تمام جملات نیروهای مرزی و شرایط لازم است، این فرمول بندی باید کاملاً تحت آزمون قرار بگیرد. آزمون شرح داده شده شرط لازم و کافی برای همگرایی است [۳].

یکی از المان‌هایی که توابع شکل آن و سایر شرایط مربوط به آن، آزمونهای شرح داده شده را پشت سر می‌گذارد، المان تنش مسطح ویلسون است [۳].

^۱ Rigid body motion

^۲ Singularity

۲-۷- المان ناسازگار تنش مسطح ویلسون:

درون‌یابی برای اجزای محدود معمولی^۱ تنها براساس یک مجموعه متغیر در جملاتی از مقادیر گره‌ی‌شان بنا شده است. این موضوع برای حالت درون‌یابی غیرمعمولی^۲ بر اساس مقادیر گره‌ی از دسته‌های دیگری است [۶].

المان ناسازگار ویلسون از برهم نهی دو المان خمشی گسسته صفحه کیرشهف^۳ و المان غشایی^۴ به همراه با درجات آزادی چرخشی^۵ است.

این المان دارای ۶ درجه آزادی در هر گره است که قابلیت مدل‌سازی تقاطع سطوح پیچیده پوسته‌ای و سازگاری با سایر المانها را با استفاده از درجه آزادی چرخشی بوجود می‌آورد [۶]. با توجه به مطالب بالا ماتریس سختی این المان ۲۴ در ۲۴ می‌باشد.

۲-۸- المان غشایی با درجه آزادی چرخشی

ابتدا المان چهار گره‌ی مستطیلی شکل (۲-۴) را در نظر می‌گیریم. سطح مبنای^۶ با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^4 N_I^c(r, s) \mathbf{X}_I \quad (22-2)$$

که \mathbf{X} نشان دهنده مختصات و $N_I^c(r, s)$ توابع شکل ایزوپارامتریک هستند.

$$N_I^c(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r_I r) (1 + s_I s) \quad (23-2)$$

مختصات محلی (r, s) در بازه $\{-1, 1\}$ تعریف می‌شود. توابع درون‌یابی تغییر مکانهای \mathbf{u}^h در صفحه

المان هشت گره‌ی بدست می‌آید:

¹ Conventional

² Non-conventional

³ Discrete Kirchhoff plate bending element

⁴ Membrane element

⁵ Drilling degree of freedom

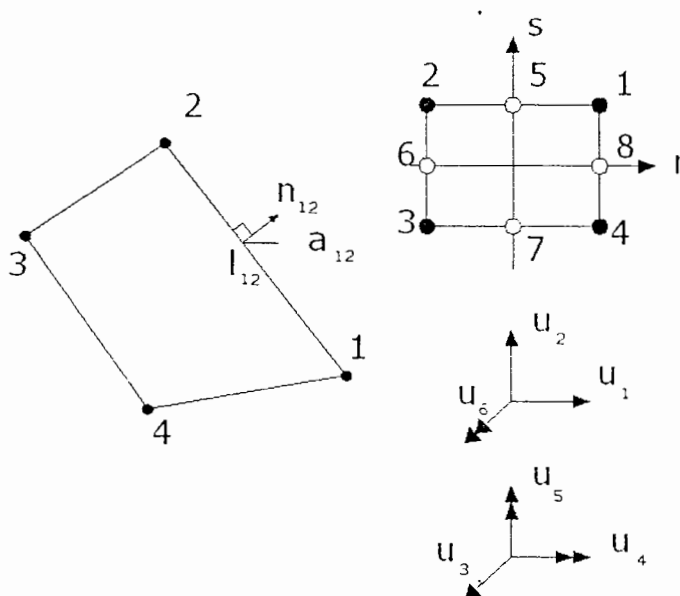
⁶ Reference surface

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_e \sum_{I=1}^4 N_I^e(r,s) \mathbf{u}_I + \sum_e \sum_{I=5}^8 N_I^e(r,s) \Delta \mathbf{u}_I \quad (2-24)$$

که $\Delta \mathbf{u}_I$ تغییرمکان سلسله‌مراتبی نسبت به مقادیر درونیابی چهار گرهی است:

$$N_I^e(r,s) = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s_1s) \quad I = 5,7 \quad (2-25)$$

$$N_I^e(r,s) = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r_1r) \quad I = 6,8 \quad (2-26)$$



شکل ۲-۴: المان مسطح چهارضلعی پوسته [۶]

توابع شکل سرندپیتی^۱ برای نقاط میانی یک المان هشت گرهی می‌باشند. مولفه‌های تغییرمکانهای سلسله‌مراتبی در هر لبه المان مجموعه‌ای از مقادیر تغییرمکانهای متناظر در گره‌های گوشه‌ای است که به صورت خطی روی لبه المان تغییر می‌کند. مولفه‌های تغییرمکانهای سلسله‌مراتبی عمود بر لبه‌های المان با تبدیل‌شان به دوران‌های چرخشی گرهی گوشه‌ای Ψ ، از محاسبات حذف می‌شوند [۶]. المان غشایی بوجودآمده دارای دوازده درجه آزادی است که شامل دو مولفه تغییرمکان گرهی و دوران چرخشی در هر گره است. رابطه غیرمعمولی^۲ درونیابی برای تغییرشکل‌های داخل صفحه^۳ بصورت زیر می‌شود:

¹ Serendipity

² Non-conventional

³ In-plane displacements

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_e \sum_{l=1}^4 N_l^e(r, s) \mathbf{u}_l + \sum_e \sum_{l=5}^8 N_l^e(r, s) \frac{l_{jk}}{8} (\psi_k - \psi_j) \mathbf{n}_{jk} \quad (27-2)$$

که l_{jk} و \mathbf{n}_{jk} ، طول و بردار نرمال رو به بیرون در آن لبه‌ای از المان هستند که بوسیله گره‌های J و K شناخته میشوند، یعنی:

$$\mathbf{n}_{jk} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{jk} \\ \sin \alpha_{jk} \end{pmatrix} \quad l_{jk} = \left((x_{k1} - x_{j1})^2 + (x_{k2} - x_{j2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (28-2)$$

که برای شبیه‌سازی در برنامه فرترن¹ داریم:

$$J = I - 4; \quad K = \text{mod}(I, 4) + 1; \quad I = 5, 6, 7, 8 \quad (29-2)$$

چنین روابطی را می‌توان مستقیماً برای المان ناسازگار مثلثی نیز بدست آورد.

۲-۹- المان گسسته خمشی صفحه کیرشیف

المان صفحه گسسته خمشی کیرشیف از همان خانواده المانهای هشت گرهی بوجود می‌آید. ابتدا یک درون‌یابی درجه دوم برای دورانهای مستقل β_{x1} و β_{x2} فرض می‌شود که این دوران‌ها، موقعیت تغییرمکان یافته نرمال هادی سطح میانی را مشخص می‌کنند [۶]. دوران‌های β بوسیله روابط زیر به بردار θ مربوط می‌شود:

$$\beta_{x1} = -w_{,x2} = \theta_{x2}; \quad \beta_{x2} = -w_{,x1} = \theta_{x1}; \quad w = u_3; \quad \theta_{x1} \equiv u_4; \quad \theta_{x2} \equiv u_5 \quad (30-2)$$

رابطه غیرمعمولی برای تغییرشکلها بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{pmatrix} = \theta^h = \sum_e \sum_{l=1}^4 N_l^e(r, s) \theta_l + \sum_e \sum_{l=5}^8 N_l^e(r, s) \frac{3}{4} \left(\mathbf{T}_{jk} (\theta_j + \theta_k) + \frac{2}{l_{jk}} (w_k - w_j) \mathbf{n}_{jk} \right) \quad (31-2)$$

که θ_l و w_l بترتیب مقادیر گرهی دوران‌های صفحه‌ای و تغییرشکل‌های برون صفحه‌ای هستند.

¹ fortran

$$\mathbf{T}_{jk} = \begin{bmatrix} -\cos^2 \alpha_{jk} & \sin \alpha_{jk} \cos \alpha_{jk} \\ \sin \alpha_{jk} \cos \alpha_{jk} & -\sin^2 \alpha_{jk} \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

ساختار اصلی درون یابی های غیرخطی برای هر دو حالت شرح داده شده، بسیار ساده است. یعنی از توابع شکل ساده ای استفاده شده است.

زمانی که از المان مستطیلی استفاده می شود، از یک انتگرال گیری عددی هشت نقطه ای برای حالت المان صفحه ای و غشایی استفاده می شود. چهار نقطه از این هشت نقطه انتگرال گیری در $r = \pm\alpha$ و $s = \pm\alpha$ واقع شده است و چهار نقطه دیگر در $(r = \pm\beta, s = 0)$ و $(r = 0, s = \pm\beta)$ قرار دارند که w_β و w_α بیانگر وزن های متناظر با این نقاط هستند (به پیوست ب مراجعه شود):

$$w_\alpha + w_\beta = 1; \quad \alpha = 1/(9w_\alpha)^{1/4}; \quad \beta = \left((2/3 - 2w_\alpha \alpha^2) / w_\beta \right)^{1/2} \quad (2-23)$$

با توجه به مطالبی که تا کنون در مورد المان ناسازگار ویلسون گفته شد، می توان تغییر مکانها را برای المان چهارگرهی ایزوپارامتریک با چهار مود تغییر مکانی ناسازگار به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u}^e(r, s) = \sum_{l=1}^4 N_l(r, s) \mathbf{u}_l + (i - r^2) \mathbf{a}_1 + (1 - s^2) \mathbf{a}_2 \quad (2-24)$$

که \mathbf{a}_1 ، پارامترهای درونیابی مودهای ناسازگار هستند.

کرنش های المان را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{l=1}^4 \mathbf{B}_l \mathbf{u}_l + \sum_{j=1}^2 \mathbf{G}_j \mathbf{a}_j \quad (2-25)$$

که ماتریس های تغییر شکل - کرنش \mathbf{B} و \mathbf{G} ، با محاسبه مشتقات روابط درونیابی رابطه (2-24) و

$\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \rangle$ بدست می آید. انرژی کرنشی المان بصورت زیر بدست می-

آید:

¹ Out-of-plane

$$w = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (36-2)$$

که با استفاده از رابطه (2-35):

$$w = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} u dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{G} a dV \quad (37-2)$$

اگر شرایط حالت تنش ثابت¹ را اعمال شود، انرژی کرنشی ناشی از موده‌های ناسازگار صفر می‌شود:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \int_V \mathbf{G} dV \mathbf{a} = 0 \quad (38-2)$$

از آنجا که حالت تنش ثابت غیر صفر در المان بررسی می‌شود، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\int_V \mathbf{G} dV = 0 \quad (39-2)$$

این معادله می‌تواند با اضافه شدن یک ماتریس تصحیح ثابت \mathbf{G}_c به ماتریس \mathbf{G} بصورت

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \mathbf{G}_c \quad \text{بر آورده شود، بطوریکه:}$$

$$\int_V \tilde{\mathbf{G}} dV = \int_V (\mathbf{G} + \mathbf{G}_c) dV = 0 \quad (40-2)$$

با توجه به اینکه \mathbf{G}_c ثابت است:

$$\mathbf{G}_c = -\frac{1}{V} \int_V \mathbf{G} dV \quad (41-2)$$

ماتریس تصحیح \mathbf{G}_c قبل از اینکه سختی محاسبه شود، بصورت عددی محاسبه می‌شود. از آنجائیکه

ماتریس تصحیح در هر نقطه انتگرال‌گیری اعمال می‌شود، رابطه انتگرال‌گیری مشابهی همانند آنچه

برای محاسبه سختی المان استفاده شد، باید مدنظر قرار گیرد [6].

با حداقل کردن انرژی پتانسیل یک المان می‌توان رابطه زیر را نوشت:

¹ Constant stress

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{F} \quad (42-2)$$

در این رابطه \mathbf{K} و \mathbf{f} ، مقادیر سختی و بارها برای المان سازگار دوخطی چهارگره‌ی¹ است و ماتریسهای \mathbf{E} و \mathbf{E}^T در واقع سختی‌های مرکب² بین تغییرشکل‌های سازگار و ناسازگار هستند و \mathbf{H} متناظر با تغییرشکل‌های ناسازگار است [3]. در رابطه قبل:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (43-2)$$

$$\mathbf{E} = \int_V \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (44-2)$$

$$\mathbf{H} = \int_V \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV \quad (45-2)$$

که در آن \mathbf{C} ماتریس ۶ در ۶ غیرایزوتروپیک³ برای تنش و کرنش است. با استفاده از رابطه (42-2) و همچنین استفاده از کاهش اندازه استاتیک⁴ یک ماتریس سختی ۲۴ در ۲۴ برای المان به صورت زیر:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{E} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{E}^T \quad (46-2)$$

۱۰-۲- محاسبه تنش‌های المان

معادلات تعادل اصلی یک مساله اجزای محدود همانند آنچه که با استفاده از اعمال اصل انرژی پتانسیل حداقل بدست آمد، می‌تواند به صورت مجموع سهم المان‌ها به شکل زیر نوشته شود [5]:

$$\mathbf{R} = \sum_{\text{elements}} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u} - \sum_{\text{elements}} \mathbf{F} \quad (47-2)$$

¹ Four-node conforming bilinear element

² Coupling stiffnesses

³ Anisotropic

⁴ Static condensation

که $\tilde{\mathbf{K}}$ ماتریس سختی المان، \mathbf{u} تغییر مکانهای گرهی المان و \mathbf{F} نیروهای کلی هستند که بر گره-های المان وارد می‌شوند. برآیند تنش‌های نقطه‌ای گرهی خارجی^۱ یا همان \mathbf{R} ، شامل بارهای گرهی متمرکز مشخص، نیروهای جسمی^۲ که در حجم المان محاسبه می‌شوند، بارهای گرهی محاسبه شده از تنش‌های سطحی و بارهای حرارتی می‌شود [۵]. پس از اینکه تغییر مکانهای گرهی \mathbf{u} محاسبه شد، نیروهای گرهی \mathbf{F} به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}$$

(۴۸-۲)

¹ External nodal points stress resultant

² Body forces

فصل سوم

بررسی بیشتر المان ویلسون

۳-۱- مقدمه

همانطور که در فصل‌های ۱ و ۲ توضیح داده شد که المان ویلسون، یک المان با مودهای تغییرمکانی ناسازگار است که از برهم‌نهی المان خمشی صفحه کیرشهف المان غشایی^۱ تشکیل می‌شود. ویژگیهای اصلی این المان عبارتند از:

۱. استفاده از چهار گره برای محاسبات تغییر شکل‌های پوسته
 ۲. استفاده از درجه آزادی چرخشی برای مدل کردن تغییر مکان‌های واقعی خمشی در المان
 ۳. حجم کم محاسبات با توجه به خطی بودن و چهارگرهی بودن
 ۴. استفاده از نقاط و وزن‌های منحصربفرد برای انتگرال گیری عددی
 ۵. داشتن دقت بسیار مناسب با توجه به خطی بودن المان
- مباحثی همانند روابط کلی حاکم بر اجزای محدود پوسته‌ها، تغییر شکل‌های ناسازگار، توابع شکل سازگار و ناسازگار، آزمون‌های قطعه و سختی‌های اصلاح شده برای المان ویلسون در فصل‌های قبل شرح داده است. در این بخش مباحث مربوط به تغییر شکل‌ها و روابط تنش - کرنش برای المان ویلسون در دو حالت المان خمشی و غشایی بصورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت اثر ترکیب دو المان برای المان پوسته ویلسون بررسی می‌شود.

^۱ Membrane element

۳-۲- المان خمشی کیرشهف :

در این المان تقریب‌های زیر برای کاهش درجه معادلات تئوری الاستیسته سه بعدی حاکم بر صفحات نازک و تیرها استفاده می‌شود [۲]:

۱. فرض می‌شود که عمود بر سطح مرجع صفحه، پیش از بارگذاری، مستقیم باقی می‌ماند. این موضوع موجب این می‌شود که کرنش‌های صفحه‌ای تابعی خطی در جهت ضخامت باشد. این فرض نیازمند اینست که دوران خط عمود برابر با دوران سطح مرجع است. بنابراین امکان تغییرشکل‌های قائم برشی وجود دارد.

۲. تنش‌های قائم در جهت ضخامت در مقایسه با تنش‌های خمشی بسیار کوچک است که در هر دو حالت تیر و صفحه، صفر در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که این فرض اجازه استفاده از نسبت پواسون^۱ را برای کرنش‌ها می‌دهد.

۳. اگر کرنش‌های قائم برشی، صفر در نظر گرفته شوند، یک قید تغییرمکانی اضافی بصورت زیر اضافه می‌شود:

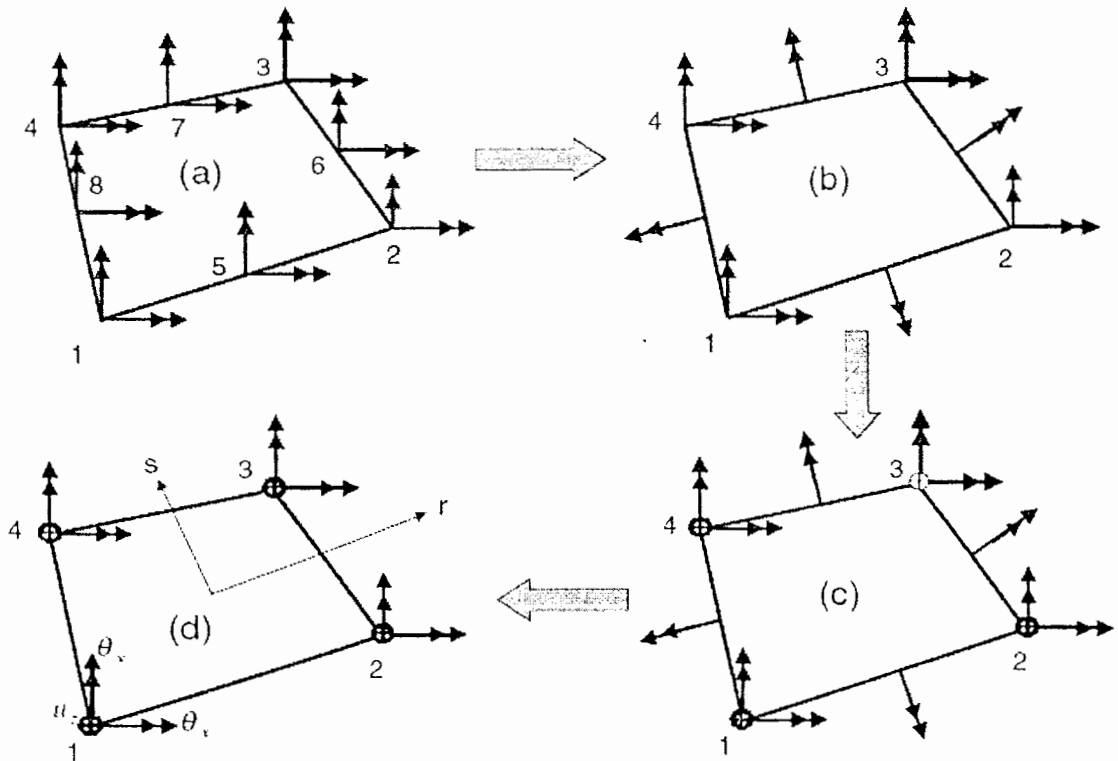
✓ خط عمود بر سطح مرجع پس از بارگذاری، عمود باقی می‌ماند. این فرضیه اولین بار توسط کیرشهف ارائه شد و بنام او نیز ثبت شده است [۲].

تئوری کلاسیک صفحات نازک بر پایه همین سه فرض است و معادله دیفرانسیل درجه چهارم حاکم هم بر اساس بسط رابطه‌ای بر حسب تغییرشکل قائم حل می‌شود. این تئوری تنها برای صفحات با ضخامت ثابت استفاده می‌شود.

^۱ Poisson's ratio

۳-۲-۱- المان چهارضلعی (مستطیلی):

یک چهارضلعی با هندسه دلخواه در مختصات کلی X-Y در شکل (۱-۳) نشان داده شده است.



شکل ۱-۳: المان خمشی چهارضلعی [۲]

توجه شود که همانند شکل (۳-۱-۳) دارای ۱۶ درجه آزادی در چهارنقطه گرهی و نقاط میانی هر لبه است. دوران-های میان لبه‌ای^۱ به دو مولفه مماسی و عمود بر لبه تجزیه می‌شوند. از آنجا که دوران‌های مماسی را صفر در نظر می‌گیریم، تعداد درجات آزادی به ۱۲ تقلیل می‌یابد (شکل (۳-۱-۳)). معادله حاکم بر لبه‌های المان بر اساس یک تابع درجه سه از u_2 و چهار تغییرشکل گرهی در گوشه‌های المان تعریف می‌شود (شکل (۳-۱-۳)).

^۱ Mid-side

در نهایت دوران‌های میان لبه‌ای با کاهش مرتبه استاتیکی^۱ حذف می‌شوند. همانند شکل (۳-۱-d) تبدیل به یک المان با ۱۲ درجه آزادی می‌شود.

فرض اساسی در تغییر شکل اینست که دوران خطوط عمود بر سطح مرجع صفحه با استفاده از روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s)\theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s)\Delta\theta_{xi} \quad (۱-۳)$$

$$\theta_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s)\theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s)\Delta\theta_{yi}$$

که توابع شکل N_i ، همان توابع شکلی هستند که قبلاً توضیح داده شد.

رابطه تغییر شکل در نقاط میانی، یک تابع دوخطی^۲ است که به تابع سلسله مراتبی^۳ موسوم است. لبه ij از یک المان صفحه‌ای در شکل (۳-۲) نشان داده است:

دوران‌های مماسی صفر در نظر گرفته می‌شوند و تنها دوران‌های نرمال وجود دارند. بنابراین مولفه‌های x و y در دوران‌های نرمال بصورت زیر است:

$$\Delta\theta_x = \sin \alpha_{ij} \Delta\theta_{ij} \quad (۲-۳)$$

$$\Delta\theta_y = -\cos \alpha_{ij} \Delta\theta_{ij}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

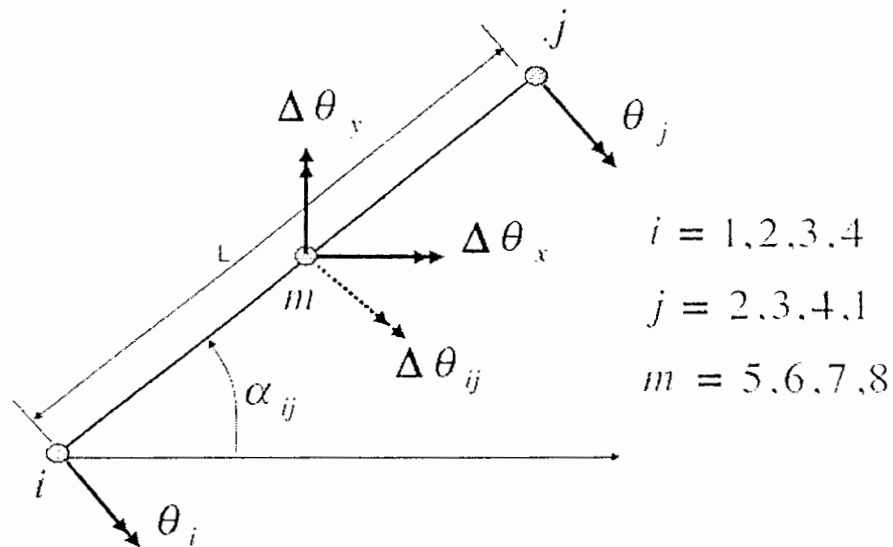
$$\theta_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s)\theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 M_{xi}(r, s)\Delta\theta_i \quad (۳-۳)$$

$$\theta_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s)\theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 M_{yi}(r, s)\Delta\theta_i$$

^۱ Static condensation

^۲ Bilinear function

^۳ Hierarchical



شکل ۳-۲: لبه المان [۲]

حال تعداد درجه آزادی تغییرمکانی از ۱۶ به ۱۲ تقلیل می‌یابد. تغییرشکل‌های سه بعدی همانند شکل (۳-۳) نسبت به سطح مرجع X-Y عبارتند از:

$$u_x(r, s) = z\theta_i(r, s) \quad (4-3)$$

$$u_y(r, s) = -z\theta_j(r, s)$$

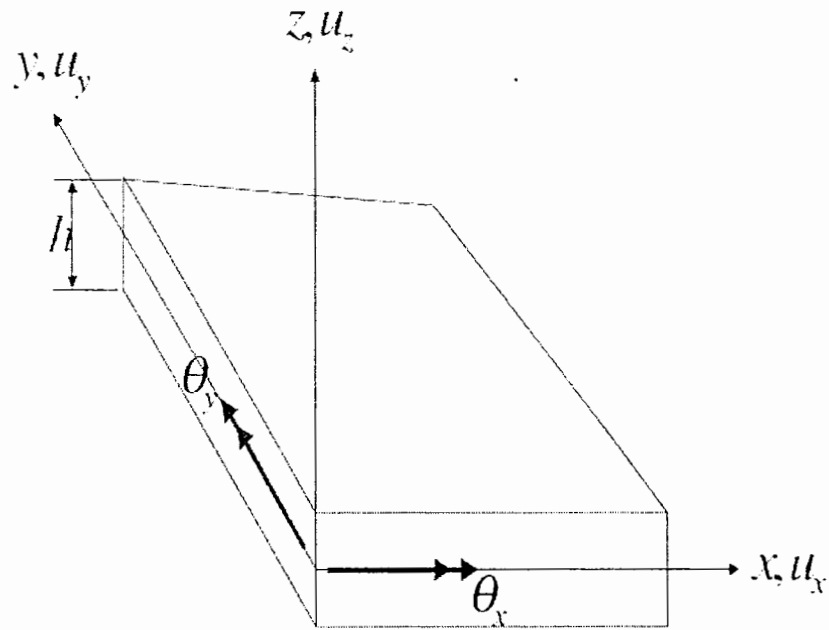
توجه شود که تغییرمکان قائم در صفحه مرجع، $u_x(r, s)$ ، به صورت یک تابع فضایی تعریف می‌شود. حال فرض می‌شود که تغییرشکل قائم در امتداد هر لبه یک تابع درجه سه است. بنابراین با توجه به پیوست الف، کرنش برشی در طول لبه برابر خواهد بود با:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{l}(u_{yj} - u_{xi}) - \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j) - \frac{2}{3}\Delta\theta_{ij} \quad (5-3)$$

در شکل قبل، می‌توان دوران‌های نرمال در گره‌های i و j را با استفاده از دوران‌های X و Y نوشت و یا در واقع معادله بالا بصورت زیر تغییر کند:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{l}(u_{yj} - u_{xi}) - \frac{\sin\alpha_{ij}}{2}(\theta_{xi} + \theta_{yj}) + \frac{\cos\alpha_{ij}}{2}(\theta_{yi} + \theta_{xj}) - \frac{2}{3}\Delta\theta_{ij} \quad (6-3)$$

که این معادله را برای هر چهار لبه المان نوشت.

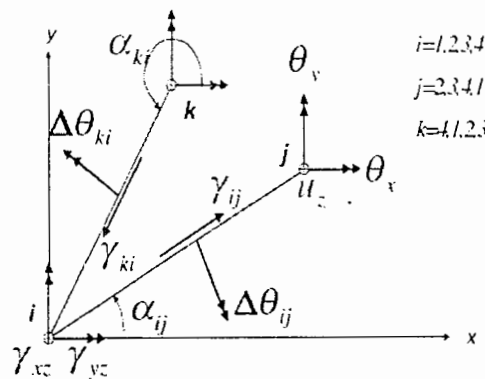


شکل ۳-۳: تغییرمکانهای مثبت در المان خمشی صفحه‌ای [۲]

حال می‌توان برش در گره‌ها را براساس برش در لبه‌ها بیان کرد. یک گره در شکل (۴-۳) نشان داده شده‌است.

دو مولفه برش میان لبه‌ای با استفاده از رابطه تبدیل کرنش زیر به برش‌های گره i مرتبط می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{ij} \\ \gamma_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ \cos \alpha_{ki} & \sin \alpha_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (7-3)$$



شکل ۴-۳: برش‌های گره‌ی [۲]

و یا به فرم معکوس می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \sin \alpha_{ki} & -\cos \alpha_{ki} \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{ij} \\ \gamma_{ki} \end{bmatrix} \quad (8-3)$$

که $\det = \cos \alpha_{ij} \sin \alpha_{ki} - \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ki}$ است.

۳-۲-۲- معادلات کرنش-تغییرمکان^۱:

با استفاده از معادلات سه بعدی کرنش-تغییرمکان، کرنش‌های یک صفحه را می‌توان بر حسب جملاتی از دوران‌های گرهی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \theta_z(r, s)_{,x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} = -z \theta_x(r, s)_{,y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = z [\theta_y(r, s)_{,y} - \theta_x(r, s)_{,x}] \end{aligned} \quad (9-3)$$

بنابراین در هر نقطه انتگرال‌گیری، پنج مولفه کرنش بر اساس جملاتی از ۱۶ تغییرمکان موجود بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{b} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ u_z \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{a}(z)\mathbf{b}(r, s)\mathbf{u} \quad (10-3)$$

بنابراین ماتریس تبدیل کرنش-تغییرمکان، از ضرب دو ماتریس بوجود می‌آید که یکی از آن دو ماتریس تابع Z است.

۳-۲-۳- سختی المان چهارضلعی:

با استفاده از معادله بالا می‌توان ماتریس سختی یک المان را بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dv = \int \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dv \quad (11-3)$$

^۱ Strain-displacement equations

که

$$D = \int \mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{a} dz \quad (12-3)$$

پس از انتگرال گیری در جهت z، رابطه تغییرشکل-نیرو برای مصالح اورتوتروپیک^۱ بصورت یک ماتریس ۵ در ۵ به شکل زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{xx} \\ \psi_{yy} \\ \psi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (13-3)$$

لنگرهای M و برش های V، نیروهایی در واحد طول هستند و ψ انحنای متناظر با این لنگرها هستند.

برای مصالح ایزوتروپیک در حالت تنش مسطح، جملات غیر صفر با استفاده از رابطه زیر بدست می آیند:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (14-3)$$

$$D_{44} = D_{55} = \frac{5Eh}{12(1+\nu)}$$

۳-۲-۴- کاهش مرتبه استاتیکی^۲:

ماتریس سختی ۱۶ در ۱۶ برای المان خمشی صفحه ای با تغییرشکل های برشی با استفاده از انتگرال گیری عددی محاسبه می شود و یا می توان از رابطه زیر آن را محاسبه کرد:

$$\bar{\mathbf{K}} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \quad (15-3)$$

که \mathbf{k}_{12} یک ماتریس ۴ در ۴ برای دورانهای نرمال ناسازگار^۳ است.

^۱ Orthotropic materials

^۲ Static condensation

^۳ Incompatible normal rotations

معادلات تعادل المان را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۱۶-۳)$$

که \mathbf{F} یک ماتریس حاوی ۱۲ مولفه نیروی گرهی است. از آنجا که نیروهای معادل با $\Delta\theta$ باید صفر باشد، درجات آزادی متناظر با این تغییرشکل‌ها می‌توانند با استفاده از کاهش مرتبه استاتیکی حذف شوند. بنابراین اگر تغییرشکل‌های برشی را در نظر بگیریم، به اندازه ۱۲ در ۱۲ ماتریس سختی المان افزوده نمی‌شود. به این المان خمشی صفحه‌ای چهارضلعی (یا مثلثی) که شامل تغییرشکل‌های برشی است را المان برشی گسسته^۱ یا DSE می‌گویند [۲].

۳-۲-۵- المانهای دیگر خمشی :

در مباحث قبل دیدیم که معادله اساسی برش گسسته در طول یک لبه المان با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{l}(u_{-j} - u_{-i}) - \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j) - \frac{2}{3}\Delta\theta \quad (۱۷-۳)$$

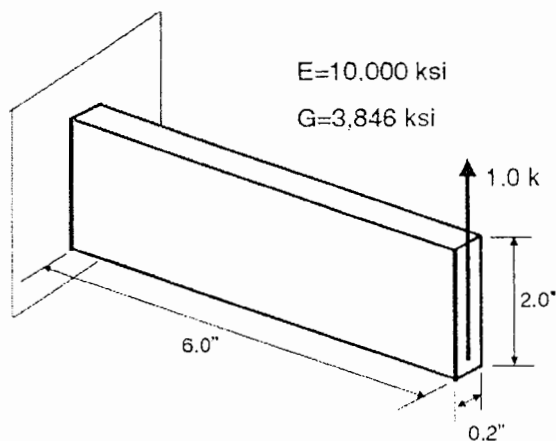
اگر $\Delta\theta$ را در وسط هر لبه صفر قرار دهیم، تغییرشکل‌های برشی در المان باقی می‌مانند. اگرچه لنگرهای داخلی المان برای صفحات نازک دارای مقدار ثابتی می‌شوند [۲]. این حالت که در المان PQ۲ رخ می‌دهد بر اساس تقریب چندجمله‌ای درجه دوم از تغییرمکان‌های نرمال است. تغییرمکان‌های بدست آمده از این المان خطای کمی دارد ولی در یک مش‌بندی غیرمتعارف و نامنظم، لنگرهای داخلی بدست آمده از این المان دارای خطای زیادی است و به همین دلیل هم استفاده از این المان توصیه نمی‌شود. اگر برش در طول لبه المان صفر در نظر گرفته شود، معادله زیر بدست می‌آید :

$$\Delta\theta = \frac{3}{2l}(w_j - w_i) - \frac{3}{4}(\theta_i + \theta_j) \quad (۱۸-۳)$$

^۱ Discrete Shear Element

بنابراین می‌توان دوران‌های نسبی میان‌لبه‌ای را مستقیماً بدون استفاده از کاهش مرتبه استاتیکی، حذف کرد. این تقریب منجر به المان گسسته کیرشهف^۱ یا DKE می‌شود که در آن تغییرشکل‌های برشی صفر در نظر گرفته می‌شوند. باید توجه کرد که المان‌های DSE و DKE، در مقادیر لنگرها و تغییرمکانها برای صفحات نازک دارای جواب‌های یکسانی هستند. برای بسیاری از مسائل المان‌های DSE و DKE تقریباً دارای جواب دقیق هستند [۲].

در مثال زیر می‌توان جوابهای حاصل از المانهای DSE و DKE و PQ۲ را با هم مقایسه کرد. تیر طره شکل (۳-۵) را در نظر بگیرید که به صورت یک المان با ضخامت ۲ اینچ مدل شده‌است. تغییرمکان‌های انتهای آن و لنگر عکس‌العمل در ابتدای آن برای المان‌های مختلف در جدول (۳-۱) آمده‌است.



شکل ۳-۵: یک تیر طره که بوسیله یک المان صفحه مدل شده‌است [۲]

لنگر حداکثر (kip-in)	تغییرمکان (inches)	تئوری و المان مورد بررسی
۶.۰۰	۰.۰۰۰۰۵۴۰	تئوری تیر

^۱Discrete Kirchhoff Element

۶,۰۰	۰,۰۰۰۰۵۸۷	تئوری تیر با تغییرشکل برشی
۶,۰۰	۰,۰۰۰۰۵۸۷	المان صفحه DSE
۶,۰۰	۰,۰۰۰۰۵۴۰	المان صفحه DKE
۳,۰۰	۰,۰۰۰۰۴۵۲	المان صفحه PQ۲

جدول ۱-۳: تغییرمکان انتها و لنگر عکس‌العمل در ابتدا برای المانهای مختلف

این مثال روشن می‌کند که می‌توان از یک المان صفحه به عنوان یک تیر یک بعدی استفاده کرد بدون اینکه از دقت حل کاسته شود.

هم چنین این تفکر که هر المانی که دارای تغییرشکل برشی است، همانند PQ۲، برای محاسبات کامپیوتری دارای دقت و قابلیت بیشتری است، درست نیست. بنابراین باید جواب حاصل از المانهای مورد بررسی را با استفاده از مثال‌های ساده‌ای که جواب دقیق دارند مقایسه کنیم.

۳-۳- المان غشایی با دورانه‌های نرمال^۱:

یک المان تیر سه‌بعدی دارای ۶ درجه آزادی تغییرمکانی و دورانی در هر گره است. المان خمشی صفحه که در بخش قبل در مورد آن بحث شد، دارای دو دوران در صفحه المان و یک تغییرمکان قائم برای هر گره است. یک المان استاندارد در حالت تنش مسطح که برای مدل‌کردن رفتار غشایی در المان‌های پوسته استفاده می‌شود، تنها دو تغییرمکان در هر گره دارند و نمی‌توانند لنگرهایی که بصورت قائم بر صفحه المان وارد می‌شوند را تحمل کنند.

یک المان قابی که بصورت عمود بر دیوار برشی یا دال قرار می‌گیرد، یکی از مسائل بسیار شایع در مدلسازی دیوارها و بسیاری از انواع سازه‌ای است. در این گونه سیستم‌ها می‌توان از قیودی استفاده کرد که لنگر المان قاب را به کوپل-نیروی تبدیل کند که در صفحه المان وارد می‌شود. برای پوسته‌هایی که به تیرهای لبه‌ای

^۱ Membrane element with normal rotations

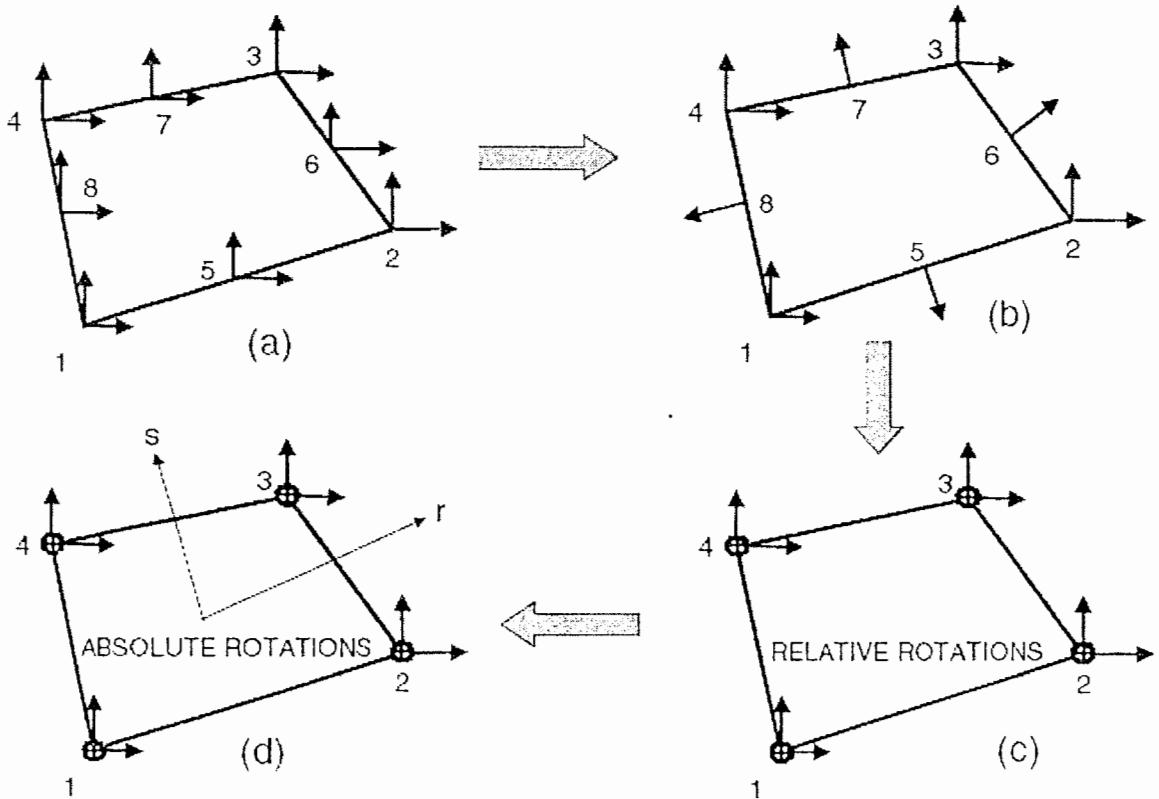
متصل هستند و هرگونه سیستم رایج سازه‌ای، برای المان غشایی نیاز است که یک دوران نرمال را به عنوان یکی از درجات آزادی اصلی سازه در نظر بگیریم [۲].

۳-۳-۱- فرضیات اساسی :

تعمیم تئوری برای المان غشایی بسیار شبیه المان‌های خمشی است. یک المان چهار ضلعی همانند شکل (۳-۶) را در نظر بگیرید .

۱. ابتدا یک المان چهار با ۱۶ درجه آزادی داریم (شکل (۳-۶-a))
۲. با چرخش لبه میانی، تغییرمکان‌های نسبی به دو بخش نرمال و مماسی تقسیم می‌شوند و مقدار تغییرمکان‌های نسبی مماسی صفر قرار داده می‌شود که با این کار تعداد درجات آزادی به ۱۲ تقلیل می‌یابد (شکل (۳-۶-b)).
۳. گام بعدی وارد کردن شرایط تغییرمکان نرمال پارابولیک^۱ برای حذف چهار تغییرمکان نرمال میان لبه-ای و چهار دوران نرمال نسبی در گره‌ها است (شکل (۳-۶-c)).
۴. مرحله آخر تبدیل دوران‌های نسبی به مقادیر مطلق و اصلاح توابع شکل برای ارضای آزمونهای قطعه است. با انجام این مرحله در نهایت یک رابطه ۱۲ در ۱۲ برای سختی المان بدست می‌آید که نسبت به ۱۲ درجه آزادی این المان محاسبه می‌شود (شکل (۳-۶-d)).

^۱ Parabolic



شکل ۳-۶: المان غشایی چهارضلعی با دورانه‌های نرمال [۲]

۳-۳-۲- تخمین تغییرمکان :

فرض اساسی برای تغییرمکان‌ها در صفحه X-Y با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود :

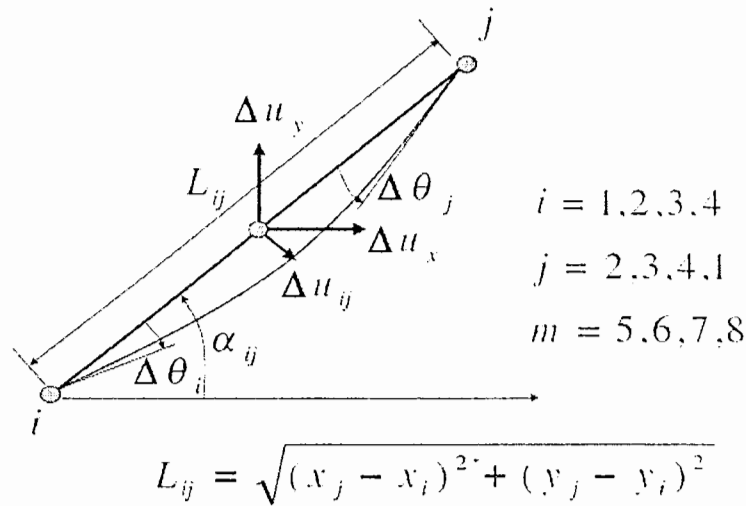
$$u_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{xi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s) \Delta u_{xi} \quad (3-19)$$

$$u_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{yi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s) \Delta u_{yi}$$

که N_i ها، همان توابع شکلی هستند که در فصل‌های قبل شرح داده شده‌اند.

۳-۳-۳- اعمال دوران گرهی :

لبه از یک المان غشایی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :



شکل ۳-۷: لبه یک المان چهارضلعی [۲]

اگر فرض شود که تغییرمکان نرمال نسبی در هر لبه پارابولیک باشد، معادله زیر بایستی ارضا شود:

$$\Delta u_{ij} = \frac{l_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \quad (20-3)$$

به دلیل اینکه تغییرمکان مماسی میان لبه‌ای صفر است، تغییرمکانهای میان لبه‌ای نسبی کلی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta u_x = \cos \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = \cos \alpha_{ij} \frac{l_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \quad (21-3)$$

$$\Delta u_y = -\sin \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = -\sin \alpha_{ij} \frac{l_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i)$$

معادله بالا می‌تواند بر هر چهار لبه و تغییرمکان‌های کلی اعمال شود. پس می‌توان نوشت:

$$u_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{xi} + \sum_{i=5}^8 M_i(r, s) \Delta \theta_i \quad (22-3)$$

$$u_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{yi} + \sum_{i=5}^8 M_i(r, s) \Delta \theta_i$$

۳-۳-۴- معادلات کرنش-تغییر مکان :

معادلات کرنش-تغییر مکان می‌تواند با استفاده از معادلات بنیادی زیر تشکیل شود :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (23-3)$$

می‌توان با استفاده از روابط بالا نوشت :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_{11} \quad \mathbf{B}_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (24-3)$$

برای اینکه المان، آزمون قطعه تنش ثابت^۱ را ارضا کند، اصلاحات زیر در ماتریس \mathbf{B}_{12} که یک ماتریس ۳ در ۴ است، باید انجام شود :

$$\bar{\mathbf{B}}_{12} = \mathbf{B}_{12} = -\frac{1}{A} \int \mathbf{B}_{12} dA \quad (25-3)$$

۳-۳-۵- رابطه تنش-کرنش :

رابطه تنش - کرنش برای مصالح ایزوتروپیک در حالت تنش مسطح می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (26-3)$$

ماتریس تنش - کرنش باید متقارن و معین مثبت^۲ باشد.

۳-۳-۶- تبدیل دوران‌های نسبی به مطلق :

ماتریس سختی ۱۲ در ۱۲ برای المان مستطیلی با دوران‌های نرمال، با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تعیین می‌شود، یا :

^۱ Constant stress patch test
^۲ Positive definite

$$\bar{\mathbf{K}} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (27-3)$$

ماتریس سختی برای المان غشایی همانند آنچه در رابطه بالا بیان شد، دارای چهار دوران نسبی مجهول در هر کره است. از مشخصات این ماتریس سختی اینست که علاوه بر سه مود حرکتی صلب جسمی، یک مود با انرژی صفر نیز دارد. این مود تغییرمکانی، که همان دوران صلب جسمی نسبی در المان است، در شکل (۳-۸) نشان داده شده است.

مود تغییرمکانی انرژی صفر دارای دوران‌های مساوی در تمام گره‌ها و تغییرمکانهای صفر میان‌لبه‌ای است. برای حذف این مود، تنها نیاز است که یک ماتریس مرتبه اول^۱ به ماتریس سختی المان اضافه شود که متناظر با همان مود است [۲]. از تعریفی که در الاستیسیته برای دوران داریم، دوران مطلق در مرکز المان، با یک تخمین از دوران صلب جسمی المان، می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] = \mathbf{b}_0 \mathbf{u} \quad (28-3)$$

که \mathbf{b}_0 یک ماتریس ۱ در ۱۲ است. تفاوت بین دوران مطلق و دوران نسبی میانگین در مرکز المان عبارتست از:

$$d = \theta_0 - \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \Delta \theta_i = \mathbf{b}_0 \mathbf{u} \quad (29-3)$$

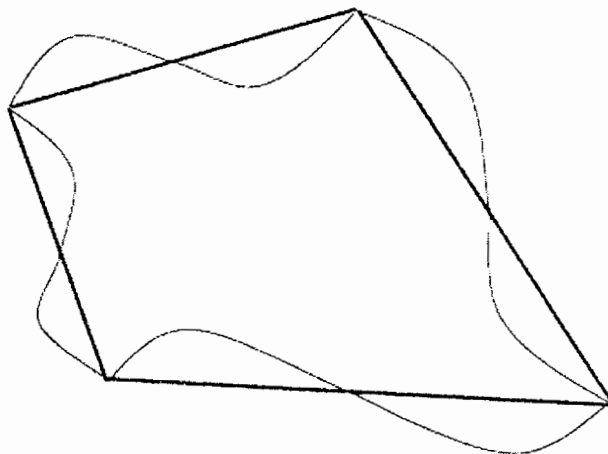
حال یک سختی \mathbf{K}_0 یا یک جمله پنالتی^۲ می‌تواند برای ایجاد این تغییرشکل اضافه شود. با استفاده از انتگرال گیری تک نقطه‌ای^۳ ماتریس سختی مرتبه اول زیر:

$$\mathbf{K}_0 = \int \bar{\mathbf{b}}_0^T k_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dv = k_0 \text{vol} \bar{\mathbf{b}}_0^T \bar{\mathbf{b}}_0 \quad (30-3)$$

^۱ Rank one matrix

^۲ Penalty term

^۳ One point integration



شکل ۳-۸: مود تغییرشکلی انزژی صفر [۲]

نتایج تجربی به همراه حل تعداد زیادی از مسائل بیانگر اینست که مقدار زیر برای سختی دورانی موثر است:

$$k_0 = 0.025 D_{33} \quad (3-31)$$

۳-۴- المانهای پوسته:

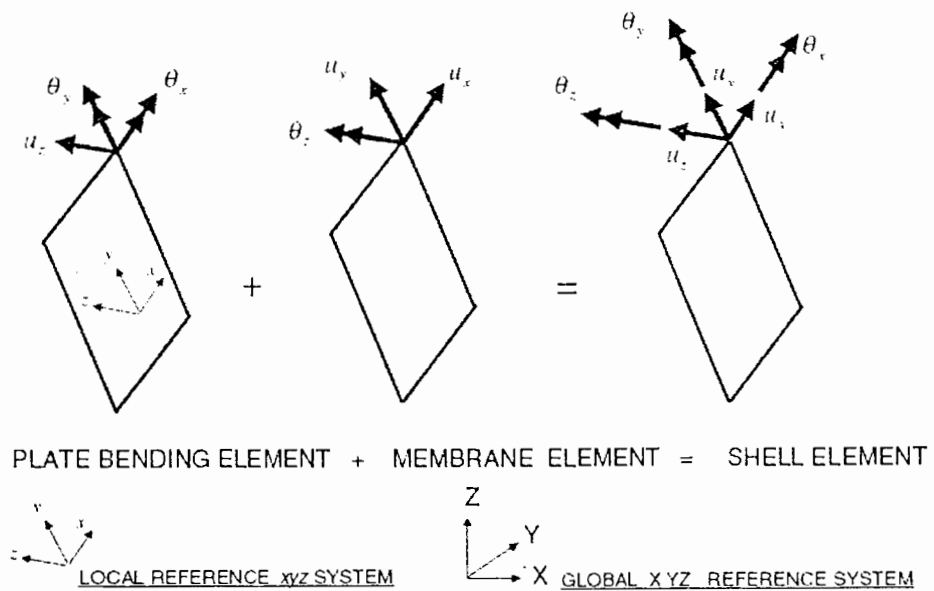
استفاده از تئوری پوسته‌های نازک برای مسائل با هندسه دلخواه، منجر به استفاده از معادلات دیفرانسیل با مرتبه بالا می‌شود که در کل می‌تواند با استفاده از محاسبات عددی به صورت تقریبی محاسبه شود. برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های پوسته‌ای که بوسیله تیرهای کناری مقید شده‌اند، روش اجزای محدود تبدیل به یک روش کاربردی می‌شود.

در دو بخش قبلی، تئوری اساسی المان‌های غشایی و صفحه‌ای بیان شد. در این بخش هر دو نوع المان غشایی و صفحه‌ای به عنوان حالتی خاص از الاستیسیته سه‌بعدی، با هم ترکیب می‌شوند. بنابراین استفاده از چنین المانهایی در تحلیل سازه‌های پوسته‌ای، موجب وارد شدن تقریب‌های کمی در جواب می‌شود.

قبل از تحلیل یک سازه با المان پوسته، ابتدا باید مستقیماً از مصالح سه‌بعدی^۱ برای مدل‌سازی استفاده شود. به عنوان مثال یک سد قوسی سه‌بعدی را در نظر بگیرید. سد قوسی، برای مدل‌شدن توسط پوسته به اندازه کافی نازک است ولی برای مدل‌سازی پی آن باید از المان مصالح^۲ کلی استفاده کرد.

۳-۴-۱- المان پوسته چهارضلعی^۳:

المان‌های خمشی صفحه‌ای دوبعدی و غشایی دوبعدی را می‌توان برای شکل‌دهی یک المان پوسته‌ای چهارگره‌ای همانند شکل (۹-۳) ترکیب کرد:



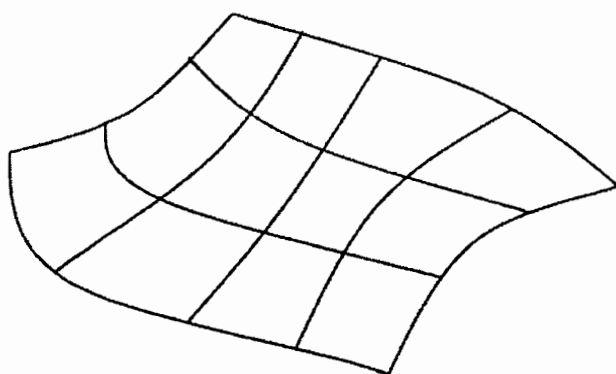
شکل ۹-۳: شکل‌گیری المان مسطح پوسته [۲]

^۱ Three dimension solids
^۲ Solid element
^۳ Quadrilateral shell element

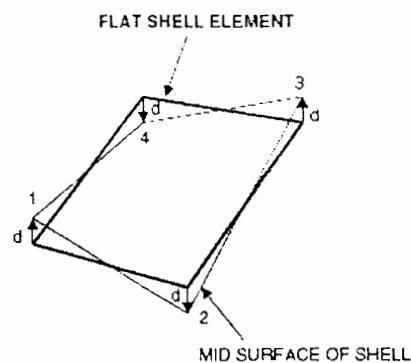
تنها نیاز است که ماتریس سختی دو المان در محورهای مختصات محلی XYZ تشکیل داد. سپس ماتریس سختی محلی ۲۴ در ۲۴، به سیستم کل XYZ تبدیل می‌شود. پس از آن سختی المان پوسته و بارها، با استفاده از روش سختی مستقیم برای تشکیل معادلات تعادل محاسبه می‌شوند.

۳-۴-۲- مدل کردن پوسته‌های دارای انحنا^۱ با استفاده از المانهای مسطح :

اگر بتوان هر چهار گره را در وسط بعد ضخامت المان قرار داد، می‌توان از المانهای پوسته‌ای چهارضلعی مسطح برای مدل‌سازی اکثر سازه‌های پوسته‌ای استفاده کرد. ولی این موضوع برای پوسته‌هایی با انحنای مضاعف ممکن نیست [۲]. سازه زیر را در نظر بگیرید :



Shell Structure With Double Curvature



Typical Flat Shell Element

شکل ۳-۱۰: استفاده از المانهای مسطح برای مدل‌سازی پوسته‌های دلخواه [۲]

^۱ Curved shell

چهار نقطه ورودی ۱ و ۲ و ۳ و ۴، بیانگر این هستند که المان بر روی سطح پوسته قرار دارد. دستگاه مختصات محلی XYZ با استفاده از ضرب بردارهای جهتی عمود برهم تعریف میکنند یا $V_z = V_{1-3} - V_{2-4}$. بردار فاصله d، عمود بر المان مسطح است و فاصله بین نقاط گرهی المان مسطح و چهارنقطه سطح میانی پوسته است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \pm \frac{z_1 + z_3 - z_2 - z_4}{2} \quad (32-3)$$

برای اکثر پوسته‌ها این فاصله برابر با صفر است و گره‌های اجزای محدود بر روی گره‌های سطح میانی قرار دارند. اگر فاصله d صفر نباشد، قبل از تبدیل به مختصات کلی، باید سختی المان تصحیح شود [۲]. ارضای تعادل نیروها در سطح میانی پوسته بسیار مهم است. این موضوع می‌تواند با انجام تبدیل ماتریس سختی المان مسطح به سطح میانی، صورت گیرد که همین تبدیل نیز خود نیازمند اعمال معادله تبدیل تغییر مکان زیر در هر گره است:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (33-3)$$

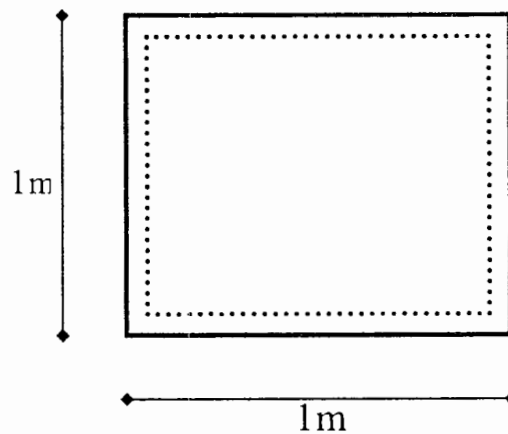
از لحاظ فیزیکی این بحث بیانگر اینست که گره‌های المان مسطح به صورت صلب به گره‌های سطح میانی متصل هستند. واضح است با کوچکتر شدن المان، فاصله d به سمت صفر میل می‌کند و نتایج حاصل از المان مسطح به جواب اصلی همگرا می‌شود.

۳-۵- مثال‌هایی از حل عددی صفحات و پوسته‌ها

در این بخش به ذکر چند مثال از تحلیل عددی صفحات و پوسته‌ها پرداخته خواهد شد و نتایج بدست آمده با نتایج دقیق یا نتایج نرم‌افزار SAP۲۰۰۰ مقایسه خواهد شد و دقت جواب بدست آمده مورد سنجش قرار خواهد گرفت. در ضمن این مسائل با ضخامت‌های مختلف حل شده است تا نشان‌دهنده این باشد که پدیده قفل‌شدگی در این المان، مرتفع گردیده است.

۳-۵-۱- صفحه‌ای با ابعاد یک متر در یک متر

صفحه‌ای به ابعاد یک متر در یک متر را در نظر بگیرید که در طول هر ۴ لبه خود دارای تکیه گاه‌های مفصلی است. این صفحه که به ۸۱ گره و ۶۴ المان با ابعاد یکسان تقسیم شده است، در مرکز خود تحت بار منفرد ۱۰۰ کیلوگرم قرار گرفته است.



شکل ۳-۱۱- صفحه به ابعاد یک متر در یک متر

سایر پارامترها عبارتند از:

$$\text{Thickness} = t = 0.00625 \text{ m}$$

$$E = 2.1 \times 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 0.3$$

(۳-۳۴)

پس از انجام تحلیل اجزای محدود، اندازه تغییرمکان مرکز صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= -0.0026462267 \text{ m} \\ \delta_{\max} \times t^3 &= 6.46 \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (35-3)$$

مقدار دقیق این تغییرمکان در تمام کتب مربوط به تئوری صفحات و پوسته‌ها وجود دارد و برابر است با:

$$\delta_{\max} \times t^3 = 6.87 \times 10^{-10} \quad (36-3)$$

ملاحظه می‌شود که جواب بدست آمده، دارای دقتی حدود ۹۴٪ است که این دقت برای این تعداد کم المان بسیار مطلوب می‌باشد. اما جواب بدست آمده از برنامه SAP۲۰۰۰ دقیقاً برابر با همان معادله (۳۶-۳) است که گیراز این هم انتظار نمی‌رفت.

این مساله برای ضخامت‌های مختلف حل شده و جواب بدست آمده در جدول (۲-۳) آمده است:

ضخامت	تغییرمکان حداکثر	$\delta_{\max} \times t^3 \times 10^{10}$
۰/۰۵	-۰/۰۰۰۰۰۵۳۸۶۳	-۶/۷۳
۰/۰۲۵	-۰/۰۰۰۰۴۱۷۶۸۲	-۶/۵۲
۰/۰۱	-۰/۰۰۰۶۴۶۷۳۸۷	-۶/۴۷
۰/۰۰۸	-۰/۰۰۱۲۶۲۳۶۸۷	-۶/۶۴
۰/۰۰۶۲۵	-۰/۰۰۲۶۴۶۲۲۶۷	-۶/۶۴
۰/۰۰۵	-۰/۰۰۵۱۶۷۱۴۷۱۹	-۶/۶۴
۰/۰۰۲۵	-۰/۰۴۱۳۲۳۵۸۸۴	-۶/۶۴
۰/۰۰۱	-۰/۶۴۵۶۲۱	-۶/۶۴
۰/۰۰۰۱	-۶۴۵/۶۱۰۶	-۶/۶۴

جدول ۲-۳: تغییرمکان حداکثر صفحه برای ضخامت‌های مختلف

از جدول (۲-۳) می‌توان نکات زیر را برداشت کرد:

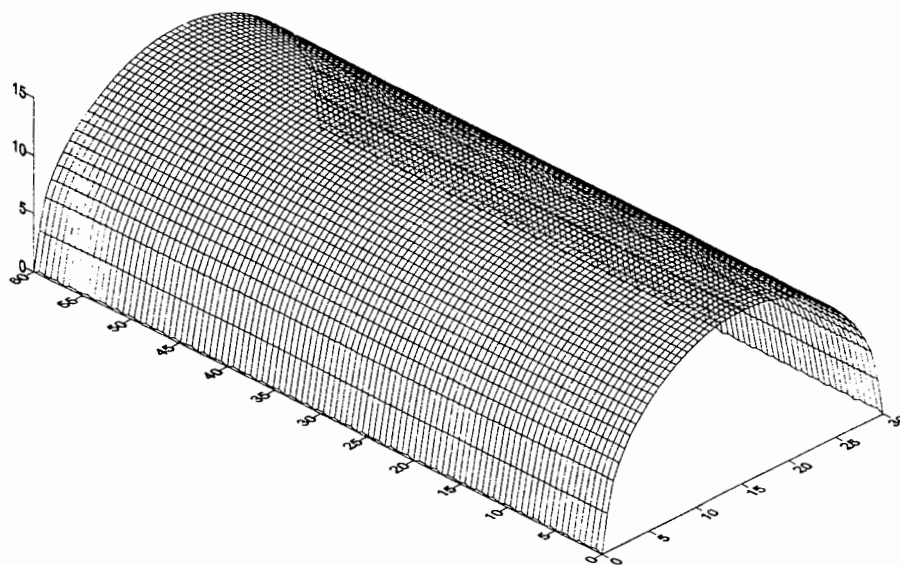
- هر چه ضخامت پوسته کمتر می‌شود، جواب‌ها همگراتر می‌شوند. در واقع هر چه ضخامت کمتر شود، مدل پوسته مورد استفاده به واقعیت نزدیک‌تر و از نظر رفتاری مدل مطلوب‌تری می‌باشد و به همین دلیل است که در شش سطر آخر جدول (۲-۳) مقادیر دقیقاً برابر هستند.

• برای صفحات نازک، کرنش‌های برشی $2\varepsilon_{xz} = \phi_x + \partial w / \partial x$ و $2\varepsilon_{yz} = \phi_y + \partial w / \partial y$ قابل صرف-نظر کردن هستند و این موضوع موجب سخت‌شدن ماتریس تغییرمکان و نتایجی دارای خطا برای تغییرمکان‌ها می‌شود. به این پدیده قفل شدگی برشی می‌گویند و در زمانی که ضخامت زیاد باشد این پدیده رخ نخواهد داد [۸]. اما همانطور که ملاحظه می‌شود در المان ویلسون این مساله برای صفحات نازک حل شده است.

تغییرمکان بدست آمده از این مساله دارای خطایی حدود ۶٪ بود که عامل اصلی آن، کم بودن تعداد المانها در مش استفاده شده برای تحلیل است. جواب این مساله وقتی تعداد المانها به ۱۰۰۰۰ برسد، بسیار به جواب دقیق نزدیک خواهد شد و تنها به اندازه ۰/۵٪ خطا خواهد داشت.

۳-۵-۲- پوسته استوانه‌ای

پوسته استوانه‌ای تحلیل شده در این بخش، دارای شکل دایروی به شعاع ۱۵ سانتی‌متر در راستای محور X و طول ۶۰ سانتی‌متر در امتداد محور Y می‌باشد که در دو راس واقع در دو انتها تحت دو بار متمرکز قائم ۱۰۰ کیلوگرم قرار گرفته است. این پوسته در شکل (۳-۱۱) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۲: پوسته استوانه‌ای

این پوسته که دارای ۱۸۹۱ گره و ۱۸۰۰ المان میباشد، در امتداد محورهای $x=0$ و $x=30$ دارای تکیه‌گاه مفصلی سراسری میباشد.

سایر پارامترها عبارتند از:

$$\text{Thickness} = t = 0.1 \text{ cm}$$

$$E = 2100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (37-3)$$

$$\nu = 0.3$$

پس از انجام تحلیل اجزای محدود، اندازه تغییرمکان مرکز صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta_{\max} = -1.5493 \text{ cm} \quad (38-3)$$

$$\delta_{\max} \times t^3 = 0.0015493$$

جواب بدست آمده در مقایسه با جواب برنامه SAP۲۰۰۰، دارای دقتی حدود ۹۹٪ است و این اختلاف اندک

تنها به دلیل اختلاف در مش‌بندی بین برنامه استفاده شده در این رساله و مش‌بندی بکارگرفته شده در

SAP۲۰۰۰ است.

جواب بدست آمده در مقایسه با جواب برنامه SAP2000، دارای دقتی حدود ۹۹٪ است و این اختلاف اندک تنها به دلیل اختلاف در مش بندی بین برنامه استفاده شده در این رساله و مش بندی بکارگرفته شده در SAP2000 است.

این مساله با ضخامت های کمتر هم حل شده است و عدم وقوع قفل شدگی برشی نشان دهنده کارایی بالای این المان و تئوری کیرشهف برای تحلیل پوسته های نازک می باشد.

ضخامت	$\delta_{\max} \times 10^3$
۰/۱	-۰/۰۰۱۵۴۹۳
۰/۰۵	-۰/۰۰۱۳۵۳۱
۰/۰۱	-۰/۰۰۱۱۵۳۰
۰/۰۰۵	-۰/۰۰۱۱۲۰۰

جدول ۳-۳: تغییر مکان حداکثر پوسته استوانه ای برای ضخامت های مختلف

۳-۵-۳- پوسته کروی

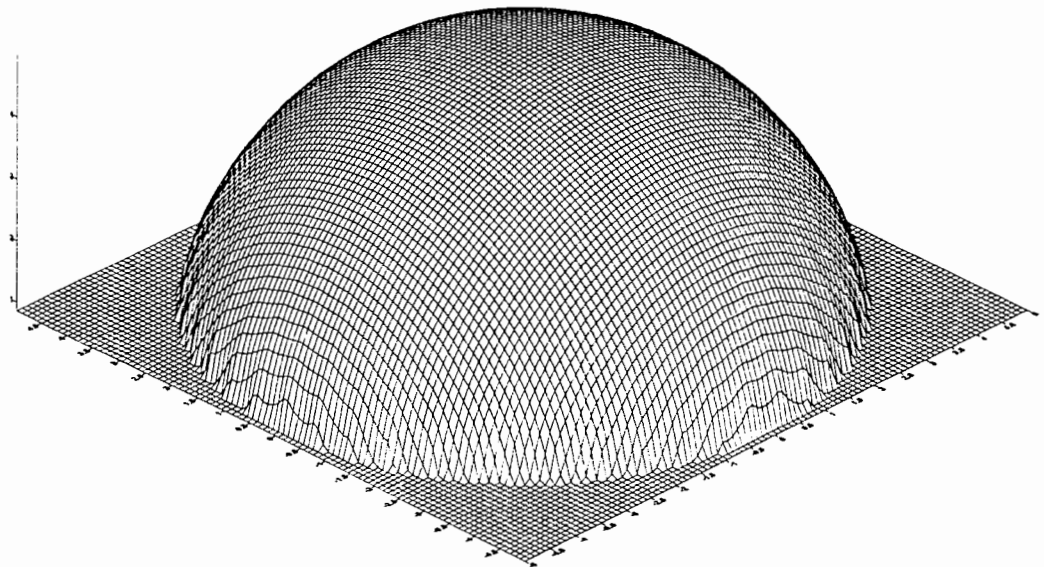
کره ای که در این بخش مورد بررسی قرار گرفته است، دارای شعاعی به طول ۵ متر می باشد (شکل ۳-۱۲) و در تمام سطح پایینی خود دارای تکیه گاه مفصلی سراسری است. این پوسته شامل ۲۵۰۱ گره و ۲۵۰۰ المان می باشد. سایر مشخصات عبارتند از:

$$\text{Thickness} = t = 0.005 \text{ m}$$

$$E = 2.1 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

(۳۹-۳)



شکل ۳-۱۳: پوسته کروی

پس از انجام تحلیل اجزای محدود، اندازه تغییر مکان مرکز صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta_{\max} \times t^3 = 0.0015493 \quad (3-40)$$

جواب بدست آمده در مقایسه با جواب برنامه SAP۲۰۰۰، دارای دقتی حدود ۹۸٪ است و این اختلاف اندک تنها به دلیل اختلاف در مش بندی استفاده شده در این رساله و مش بندی بکار گرفته شده در SAP۲۰۰۰ است.

این مساله با ضخامت‌های کمتر هم حل شده است و عدم وقوع قفل شدگی برشی نشان دهنده کارایی بالای این المان و تئوری کیرشهف برای تحلیل پوسته‌های نازک می‌باشد.

ضخامت	$\delta_{max} \times l^3$
۰/۰۱	-5.33441×10^{-7}
۰/۰۰۵	-2.2749×10^{-7}
۰/۰۰۱	-2.61147×10^{-7}

جدول ۳-۴: تغییر مکان حداکثر پوسته کروی برای ضخامت‌های مختلف

۳-۶- نتیجه‌گیری

در صورتی که در برنامه نگارش شده در این پایان‌نامه، از تعداد المان‌های مناسب برای تحلیل اجزای محدود استفاده شود، جواب‌های بسیار مناسبی بدست خواهد آمد که انطباق قابل قبولی با مسائل حل شده دارد. با توجه به مطالب ارائه شده در فصل ۴، این برنامه قادر به تحلیل پوسته‌ها با هر شکلی خواهد بود و این موضوع مزیت این برنامه نسبت به برنامه‌هایی نظیر SAP۲۰۰۰ است.

فصل چهارم

تولید شبکه اجزای محدود

۴-۱- مقدمه

در مباحث علمی مهندسی، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در مسائل مختلف مکانیک سیالات، مکانیک جامدات، سازه و غیره ظهور می‌کنند، توسط روش اجزای محدود صورت می‌گیرد. این روش، یک روش عددی است که توانایی حل معادلات پیچیده حاکم بر مساله مورد نظر را داراست. یکی از مراحل مهم حل این مسائل، تولید مش در ناحیه ای است که معادله دیفرانسیل برای آن تعریف شده است.

تولید مش به مفهوم تقسیم بندی و جایگزینی شکل هندسی اولیه با قطعات ساده‌تر و کوچک‌تر می‌باشد. این اشکال کوچک که المان نامیده می‌شوند، در اشکال دوبعدی به صورت مثلث و یا چهارضلعی و در اشکال سه بعدی به صورت چهاروجهی و یا هشت وجهی ظاهر میشوند. برای حل مسائل سازه ای با استفاده از روش اجزای محدود، ابتدا بایستی مدل هندسی اولیه به یک مدل محاسباتی تبدیل شود. بدین منظور مهمترین بخش کار، تولید مش می‌باشد. در چند دهه گذشته، محققان و برنامه‌نویسان کامپیوتری، تلاش بسیاری را جهت تولید برنامه های تحلیلی اجزای محدود به انجام رسانیده‌اند. در این میان برنامه های تولید مش، مهمترین بخش کار بوده و وقت زیادی بابت آن صرف شده است. با این وجود، امروزه نیز تلاش‌های بسیاری جهت بهبود و تولید الگوریتم‌های تولید مش انجام می‌گیرد. هدف اصلی در این برنامه ها، تولید مش با کیفیت بالا و چگالی مناسب به صورت اتوماتیک و موثر می‌باشد.

۴-۲- دیدگاه کلی نسبت به تولید مش

روش‌های تولید مش بسیار خوبی توسط بال در سال ۱۹۷۳، تاکر در سال ۱۹۸۰ و هولی در سال ۱۹۸۸ معرفی شده‌اند. همچنین در سال ۱۹۹۰ توسط شخصی به نام زاینس برنامه‌ای که توانایی تولید مش به صورت اتوماتیک و تطبیقی را دارد تولید شده است. کلا می‌توان مبحث تولید مش را یکی از مهمترین بخشهای حل مسائل سازه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود عنوان نمود و تاکنون کتابها و مقالات بسیاری در این زمینه منتشر شده است.

۴-۳- انواع روشهای تولید کننده مش

روشهای تولید مش را در یک حالت کلی می‌توان به سه گروه تقسیم نمود که عبارتند از:

- روش‌های تولید مش سازمان یافته^۱

- روش‌های تولید مش سازمان نیافته^۲

- روش‌های تولید مش ترکیبی^۳

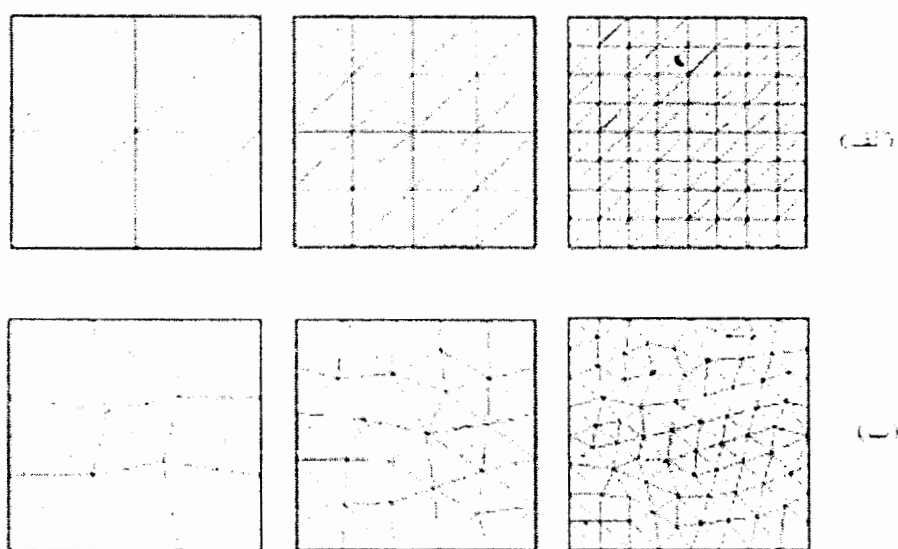
روش‌های تولید مش سازمان یافته، روش‌هایی هستند که برای هر گره و المان موجود در داخل دامنه، تعداد گره‌ها و المان‌های موجود در همسایگی آنها ثابت می‌باشد ولی در مورد مش‌های سازمان نیافته، این تعداد ثابت نبوده و می‌تواند تغییر کند. همچنین در روش‌های سازمان یافته تولید مش، ابتدا گره‌ها و سپس المان‌ها تولید می‌شوند. این در حالی است که در روش‌های سازمان نیافته، تولید المان‌ها و گره‌ها به طور همزمان صورت می‌پذیرد. از امتیازات روش‌های سازمان یافته می‌توان به سادگی الگوریتم آنها و همچنین مصرف کمتر حافظه کامپیوتر نام برد. اما از عیوب مهم آن این است که نمی‌توان از این روش به راحتی برای تولید مش در شکل‌های پیچیده استفاده کرد.

^۱ Structured Mesh Generation

^۲ Unstructured Mesh Generation

^۳ Hybrid Mesh Generation

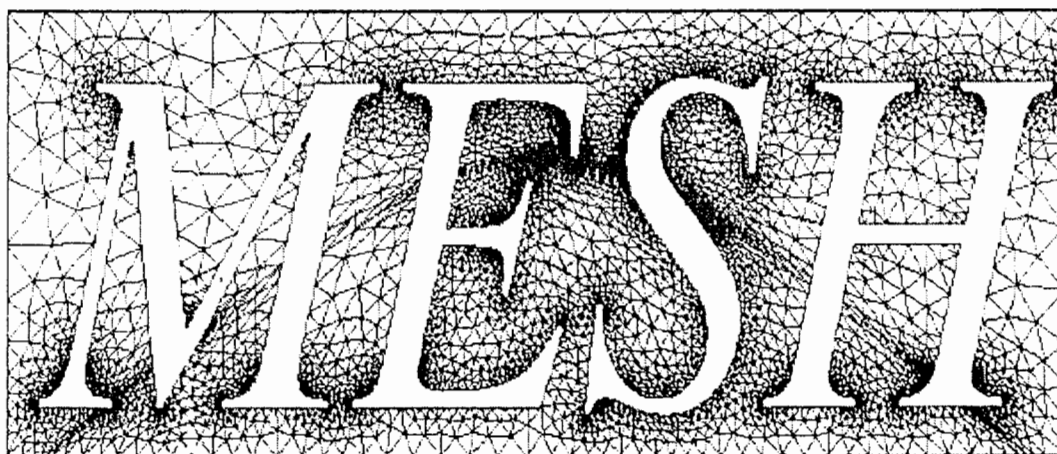
روش‌های تولید مش سازمان نیافته روش‌های قدرتمندی برای مش بندی سطوح پیچیده می‌باشند. این روش‌ها نسبت به روش‌های سازمان یافته، حافظه بیشتری از کامپیوتر را به خود تخصیص می‌دهند. محققان و متخصصان فن تولید مش، بیشتر زمان‌شان را برای تولید و اصلاح نوع از روشها مصرف کرده‌اند و مقالات بسیاری را منتشر نموده‌اند. در شکل ۴-۱ نمونه‌ای از تولید مش سازمان یافته و مش سازمان نیافته قابل ملاحظه می‌باشد.



شکل ۴-۱: الف) مش سازمان یافته ب) مش سازمان نیافته

روش‌های ترکیبی نیز همان‌گونه که از اسم‌شان پیداست، به صورت ترکیبی از روش‌های تولید مش سازمان یافته و سازمان نیافته می‌باشند. شکل (۴-۲) بیانگر توانایی‌های این دسته از روش‌ها می‌باشد. در این رساله از مش‌بندی سازمان یافته برای مدل کردن سازه‌های پوسته‌ای استفاده شده است. این مش‌بندی که بوسیله سابروتین‌های `rec_mesh` و `cir_mesh` که در محیط `FORTRAN` نگارش شده‌اند، بوجود می‌آیند دارای خصوصیات زیر می‌باشند:

۱. تصویر پوسته‌های ایجاد شده توسط این برنامه‌ها، ثابت هستند. به عنوان مثال در سابروتین `rec_mesh` تصویر پوسته تولیدشده یک مستطیل خواهدبود و این تصویر در سابروتین `cir_mesh` یک دایره خواهدبود.
۲. در واقع برای تولید یک مش، ابتدا پارامترهای مربوط به تصویر مش‌بندی موردنظر از کاربر درخواست شده و سپس با توجه به اطلاعات ورودی تصویر مش تولید می‌شود.
۳. یکی از خصوصیات این سابروتین‌ها اینست که می‌توان از معادله سطح برای تولید مش و ایجاد کد ارتفاعی برای تصویر مش ایجاد شده استفاده کرد و حتی می‌توان این روابط را برای دو محور X و Y نوشت که در ادامه به ذکر مثالهایی در این مورد پرداخته خواهد شد.
۴. بسته به نوع تصویر و محل قراگیری المان از المان‌های مستطیلی و مثلثی برای این مش‌بندی‌ها استفاده می‌شود.

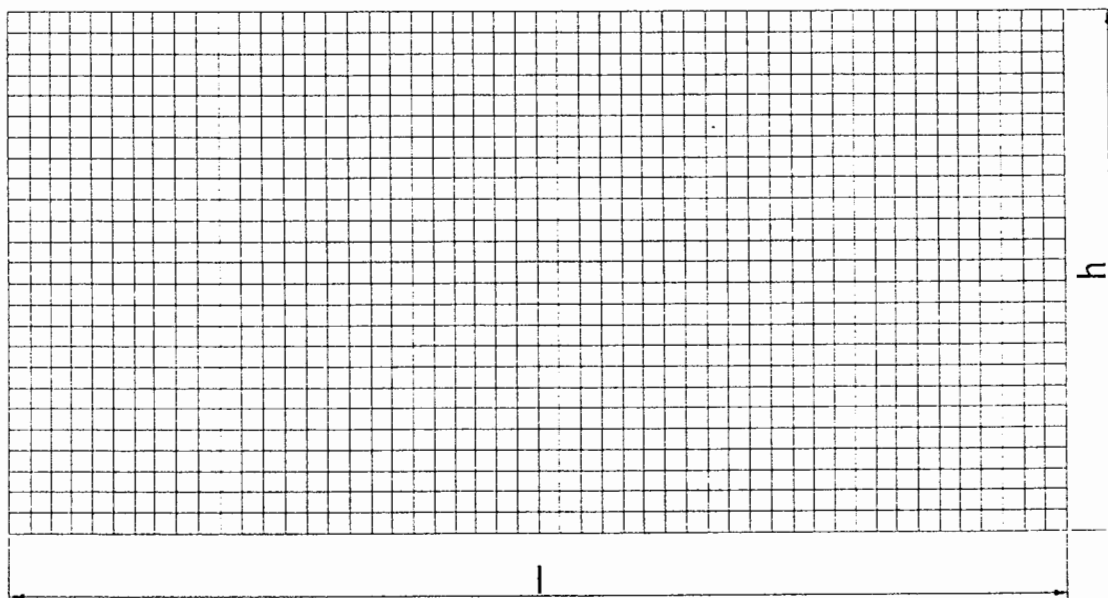


شکل ۴-۲: مش سازمان نیافته برای یک دامنه پیچیده با تعداد ۵۵۲۳ گره

۴-۴- پارامترهای مورد نیاز برای تولید مش:

فرآیند تولید مش توسط سابروتین‌هایی که در بالا ذکر شد به این صورت است که ابتدا با توجه پارامترهای ورودی برای تولید مش، تصویر مش تولید شده و سپس رابطه رویه یا سطحی که باید بررسی شود، در سابروتین وارد میشود.

در شکل زیر تصویر مستطیلی یک مش که از سابروتین `rec_mesh` بدست آمده، مشاهده می‌شود. پارامترهایی که این سابروتین برای تولید این مش به آنها نیاز دارد، با توجه به شکل زیر عبارتند از:



شکل ۴-۳: تصویر متی مستطیلی ایجاد شده توسط `rec_mesh`

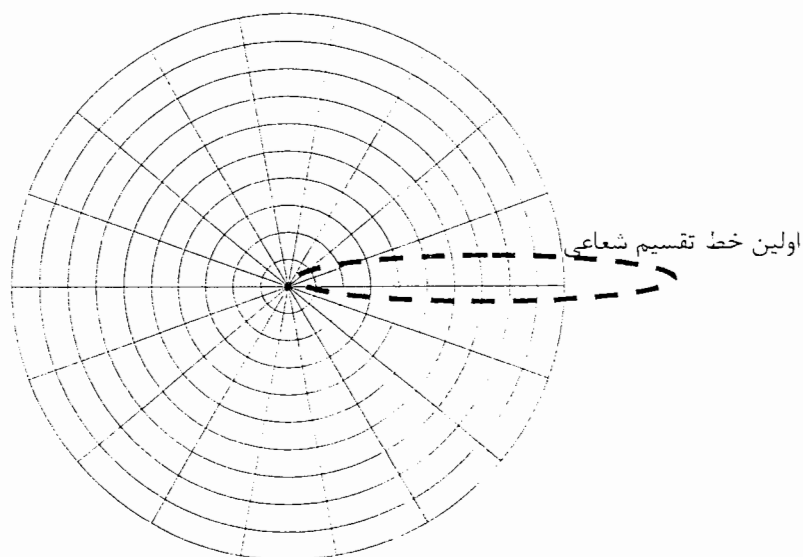
۱. طول افقی مش در جهت x ، که در شکل با l نشان داده شده است.
۲. طول قائم مش در جهت y ، که در شکل با h نشان داده شده است.
۳. تعداد تقسیمات در جهت x ، ($ncol$)
۴. تعداد تقسیمات در جهت y ، ($nrow$)

در این مش تعداد گره‌ها و تعداد المان‌ها از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$nelem = nrow \times ncol \quad (1-4)$$

$$npoin = (nrow + 1)(ncol + 1) \quad (2-4)$$

که در رابطه بالا $npoin$ و $nelem$ بترتیب تعداد نقاط گرهی و تعداد المان‌ها میباشند. پارامترهای مورد نیاز برای سابروتین `cir_mesh` که تصویر ایجاد شده از آن همانند شکل زیر است، را می‌توان به در بندهای زیر بیان کرد:



شکل ۴-۴: تصویر مش دایروی ایجادشده توسط `cir_mesh`

۱. شعاع تصویر مش (r)
۲. تعداد تقسیمات شعاعی ($nline$)
۳. تعداد تقسیمات حلقوی ($nring$)

در این مش تعداد گره‌ها و تعداد المان‌ها از روابط زیر بدست می‌آیند:

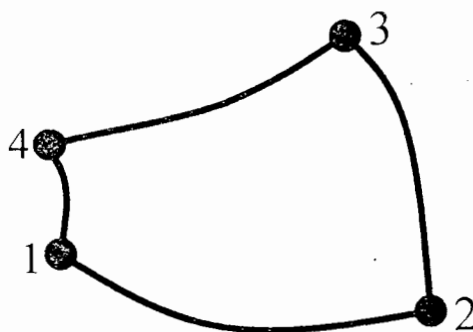
$$npoin = nring \times nline + 1 \quad (3-4)$$

$$nelem = nring \times nline \quad (4-4)$$

که در رابطه بالا $npoin$ و $nelem$ بترتیب تعداد نقاط گرهی و تعداد المان‌ها میباشند.

در مش‌های مستطیلی تولید شده مبدا مختصات در گوشه سمت چپ مش قرار دارد و در مش‌های دایروی مرکز مختصات بر مرکز دایره منطبق است.

در شکل زیر یک المان چهارضلعی چهارگره‌ای نشان داده شده است و نحوه شماره‌گذاری گره‌های یک المان که در این رساله برای المان‌ها استفاده شده است را به نمایش میگذارد.



شکل ۴-۵: شماره‌گذاری المان چهارضلعی

نحوه شماره‌گذاری کلی گره‌ها در مش مستطیلی بصورت زیر است:

- شماره‌گذاری از گره گوشه پایین، سمت چپ آغاز میشود و بصورت ردیفی تا انتهای سمت راست همان ردیف ادامه پیدا میکند و شماره بعدی برای گره واقع در ردیف بالایی و انتهای سمت چپ آن ردیف خواهد بود. شماره‌گذاری به همین ترتیب تا آخرین گره که در انتهای سمت راست بالاترین قرار دارد، ادامه پیدا خواهد کرد.

نحوه شماره‌گذاری کلی گره‌ها در مش دایروی بصورت زیر است:

- در این مش، اولین گره، همان گره واقع در مرکز دایره است و با حرکت در راستای اولین خط تقسیم شعاعی که یک افقی است و در شکل (۴-۴) نیز آمده است، ادامه پیدا خواهد کرد و پس

از رسیدن به انتهای آن، گره بعدی اولین نقطه واقع بر خط تقسیم بعدی غیر از گره مرکزی خواهد بود.

پس از اینکه تصویر مش تولید شد، می‌توان در سابروتین‌های ذکر شده رابطه سطحی که باید مورد بررسی قرار گیرد را با توجه به محل محورهای مختصات در سابروتین وارد کرد و از اطلاعات خروجی سابروتین که شامل مختصات گرهی و ماتریس شماره‌های هر المان^۱ است، برای تحلیل اجزای محدود و فرآیند بهینه‌سازی استفاده کرد.

در ادامه چند رویه که توسط این سابروتین‌ها بوجود آمده و توسط یک پلاتر^۲ ترسیم شده‌اند، آورده شده است.

۴-۵- رویه‌هایی با تصویر مستطیلی:

- رویه استوانه‌ای با مشخصات زیر:

$$Z(x, y) = \sqrt{-x^2 + 20x} \quad (۴-۵)$$

$$l = 20$$

$$h = 10$$

$$n\text{point} = 20301$$

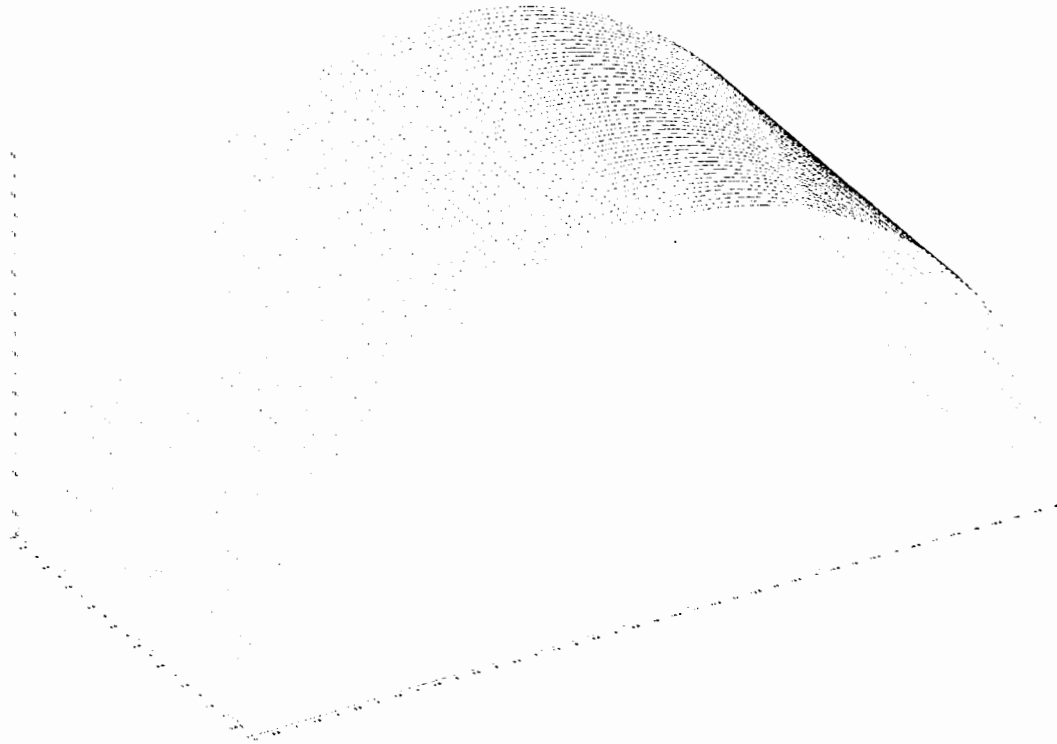
$$n\text{elem} = 20000$$

$$n\text{row} = 100$$

$$n\text{col} = 100$$

شکل (۴-۶) نشان دهنده این رویه است که یکی از مسائل حل شده در همین رساله نیز چنین رویه‌ای خواهد بود.

^۱ connectivity matrix
^۲ plotter



شکل ۴-۶: پوسته استوانه‌ای

• رویه‌ای با معادله درجه سوم در جهت Y و معادله سینوسی در جهت X

$$Z(x, y) = (y^3 + y^2 - 5y + 5) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (۴-۶)$$

$$l = 20$$

$$h = 10$$

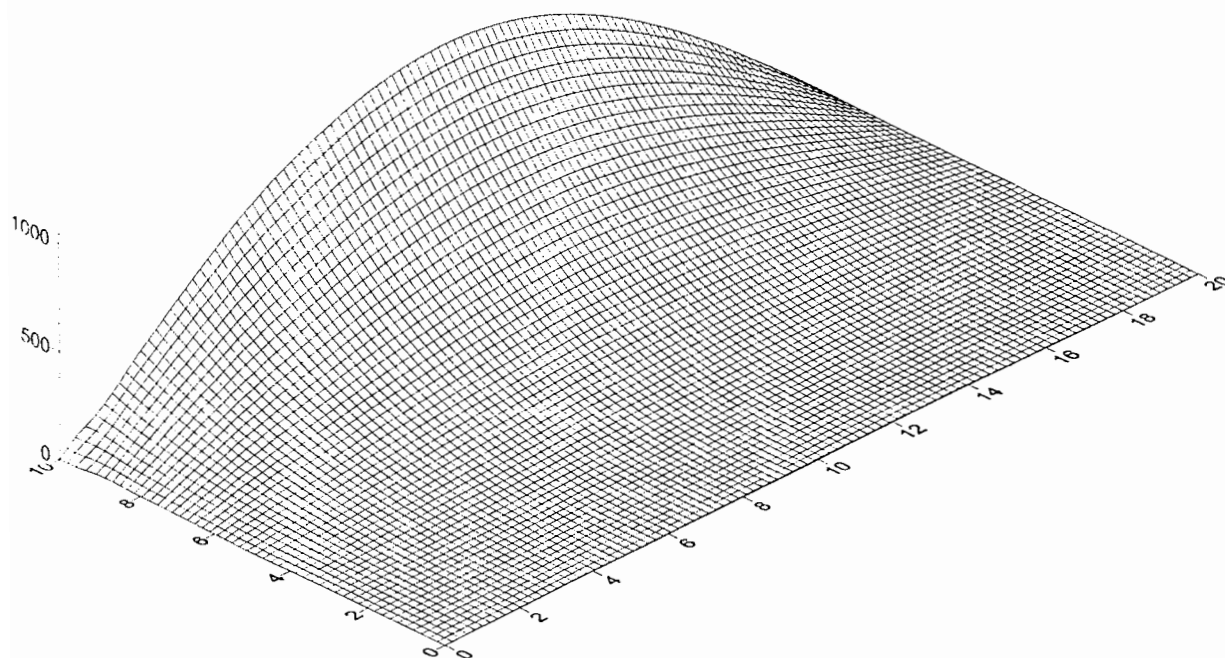
$$npoin = 20301$$

$$nelem = 20000$$

$$nrow = 100$$

$$ncol = 100$$

این رویه در شکل (۴-۷) نشان داده شده است.



شکل ۴-۷: پوسته‌ای با معادله درجه سوم در جهت y و معادله سینوسی در جهت x

- رویه‌ای با معادله سینوسی در جهت y و معادله کسینوسی در جهت x

$$Z(x, y) = 5 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \quad (7-4)$$

$$l = 20$$

$$h = 10$$

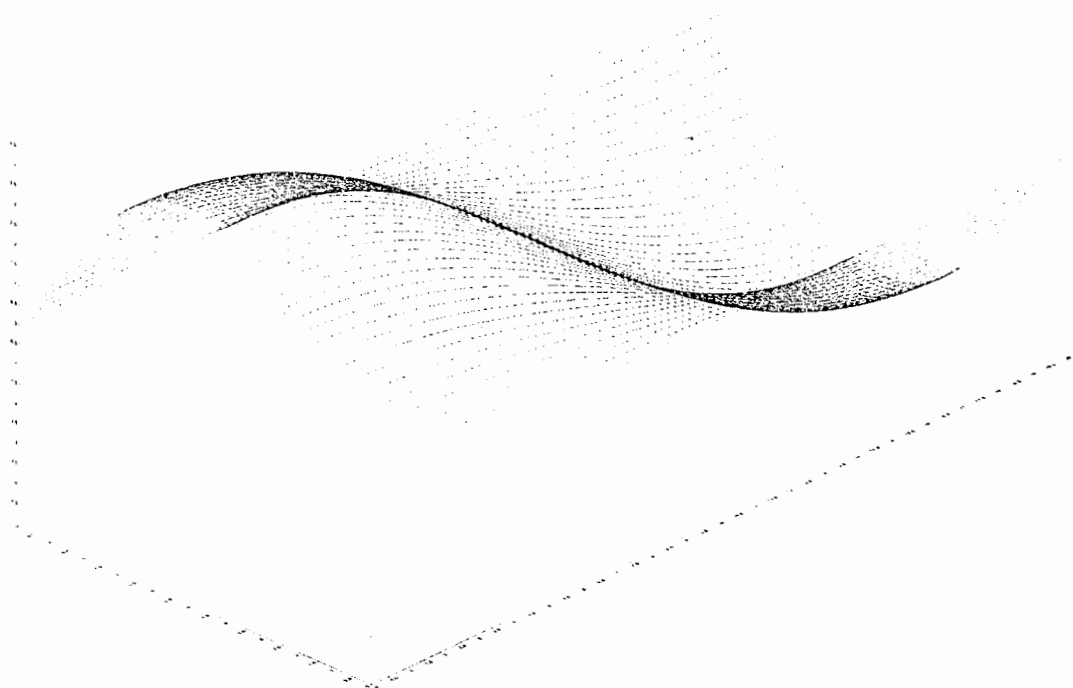
$$npoin = 20301$$

$$nelem = 20000$$

$$nrow = 100$$

$$ncol = 100$$

رویه مربوط به این رابطه نیز در شکل (۸-۴) آمده‌است.



شکل ۴-۸: پوسته‌ای با معادله سینوسی در جهت y و معادله کسینوسی در جهت x

- رویه‌ای با معادله کسینوسی در جهت y و معادله نمایی در جهت x

$$Z(x, y) = \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right) e^{\left(\frac{x}{20} + 1\right)} \quad (۸-۴)$$

$$l = 20$$

$$h = 10$$

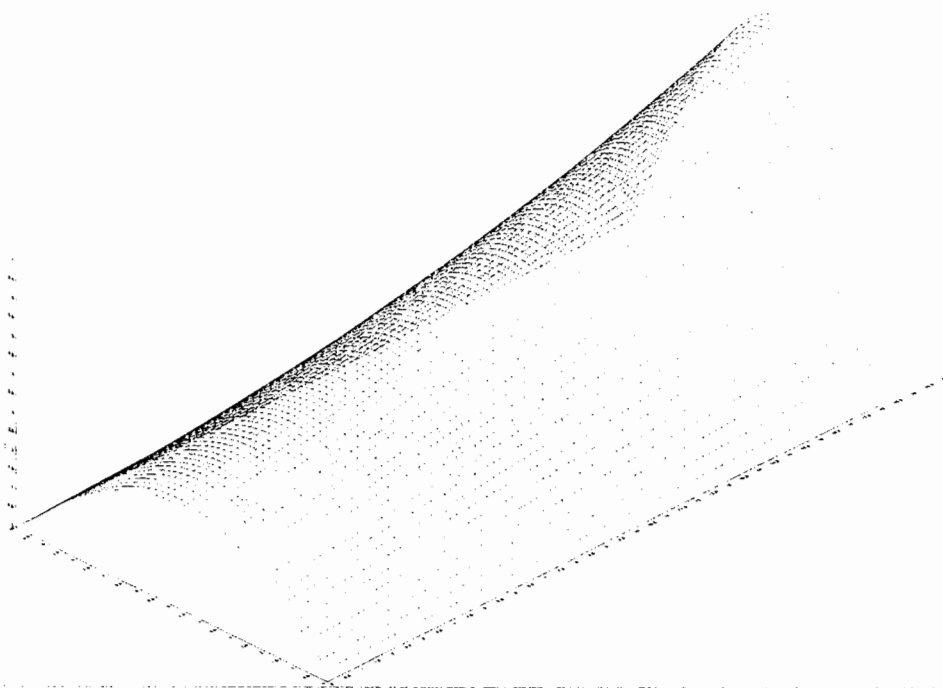
$$npoin = 20301$$

$$nelem = 20000$$

$$nrow = 100$$

$$ncol = 100$$

این رویه در شکل (۹-۴) نشان داده شده است.



شکل ۴-۹: پوسته‌ای با معادله کسینوسی در جهت y و معادله نمایی در جهت x

۴-۶- رویه‌هایی با تصویر دایروی:

- کره‌ای با مشخصات زیر

$$Z(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2} \quad (۹-۴)$$

$$r = 10$$

$$npoin = 20001$$

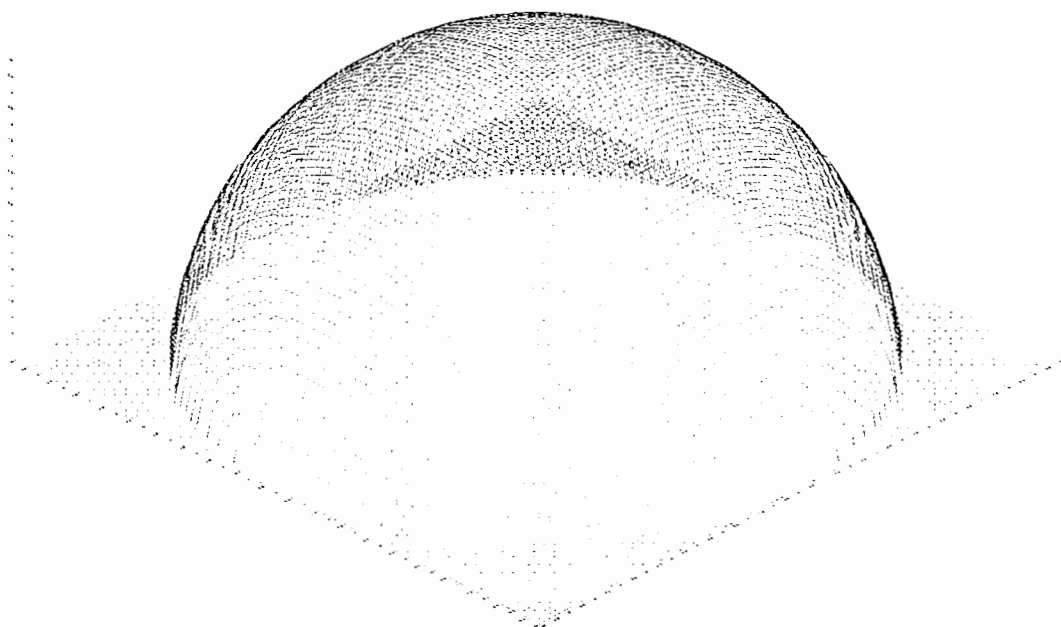
$$nelem = 20000$$

$$nring = 100$$

$$nline = 100$$

شکل (۴-۱۰) نشان دهنده این رویه است که یکی از مسائل حل شده در همین رساله نیز چنین

رویه‌ای خواهد بود.



شکل ۴-۱۰: پوسته کروی

• رویه‌ای با معادله سینوسی در هر دو جهت X و Y

$$Z(x, y) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{h} \quad (۱۰-۴)$$

$$r = 10$$

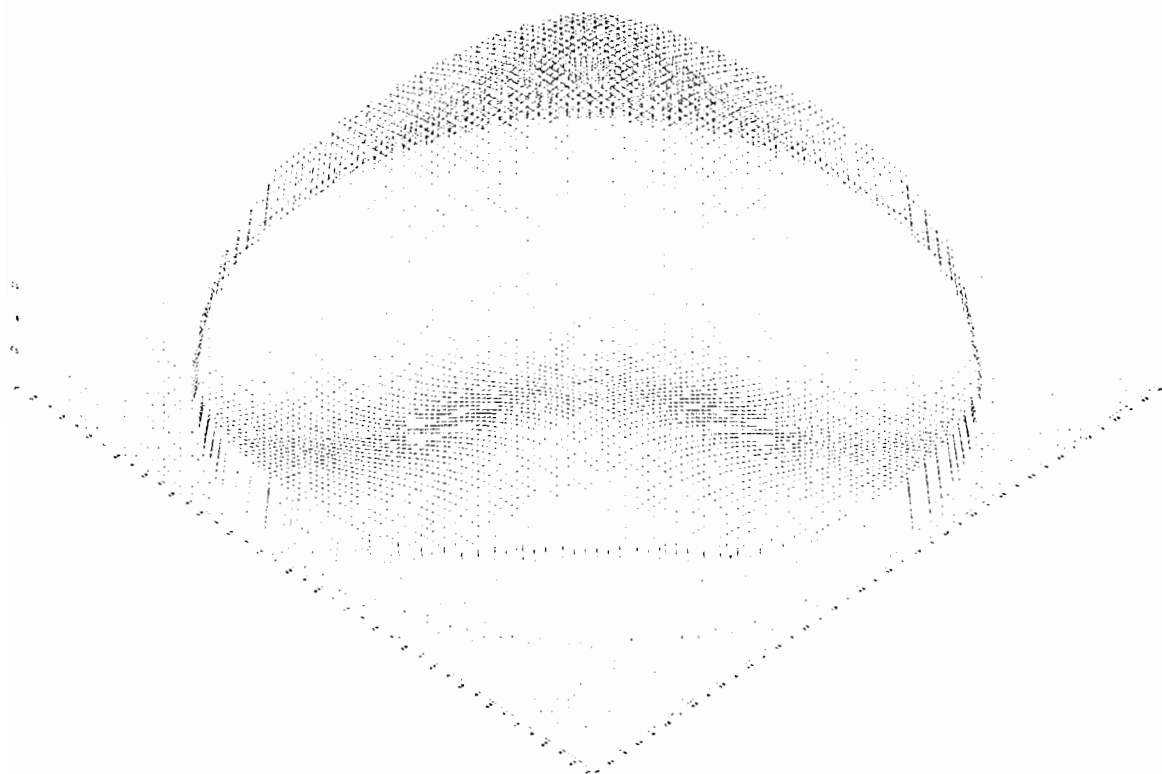
$$npoin = 20001$$

$$nelem = 20000$$

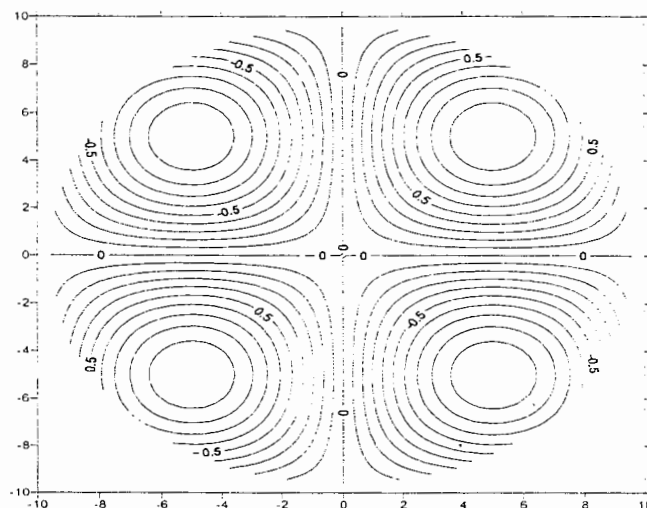
$$nring = 100$$

$$nline = 100$$

در شکل‌های (۱۱-۴) و (۱۲-۴) بترتیب نمای سه‌بعدی و خطوط تراز مربوط به این رویه آورده شده است.



شکل ۴-۱۱: پوسته‌ای با معادله سینوسی در هر دو جهت X و Y



شکل ۴-۱۲: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله سینوسی در هر دو جهت X و Y

- رویه‌ای با معادله سینوسی در جهت X و معادله کسینوسی در جهت Y

$$Z(x, y) = \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{h} \quad (۴-۱۱)$$

$$r = 10$$

$$npoin = 20001$$

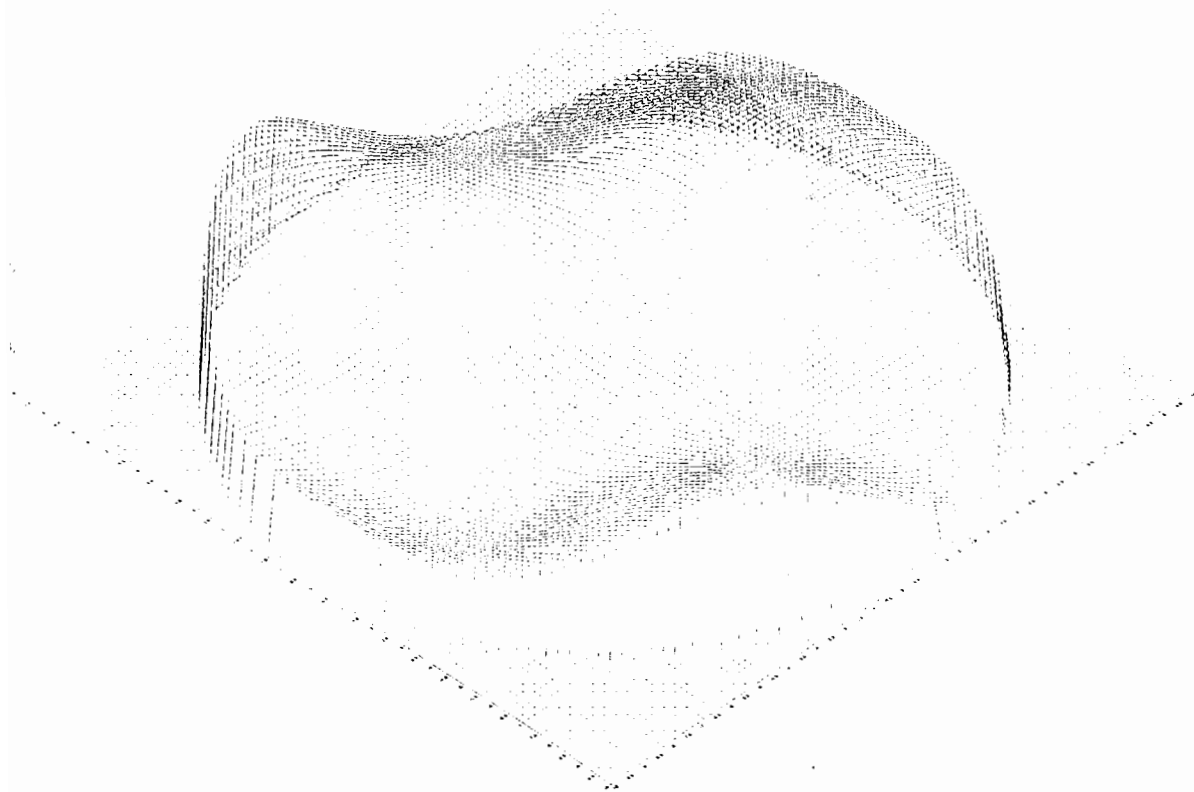
$$nelem = 20000$$

$$nring = 100$$

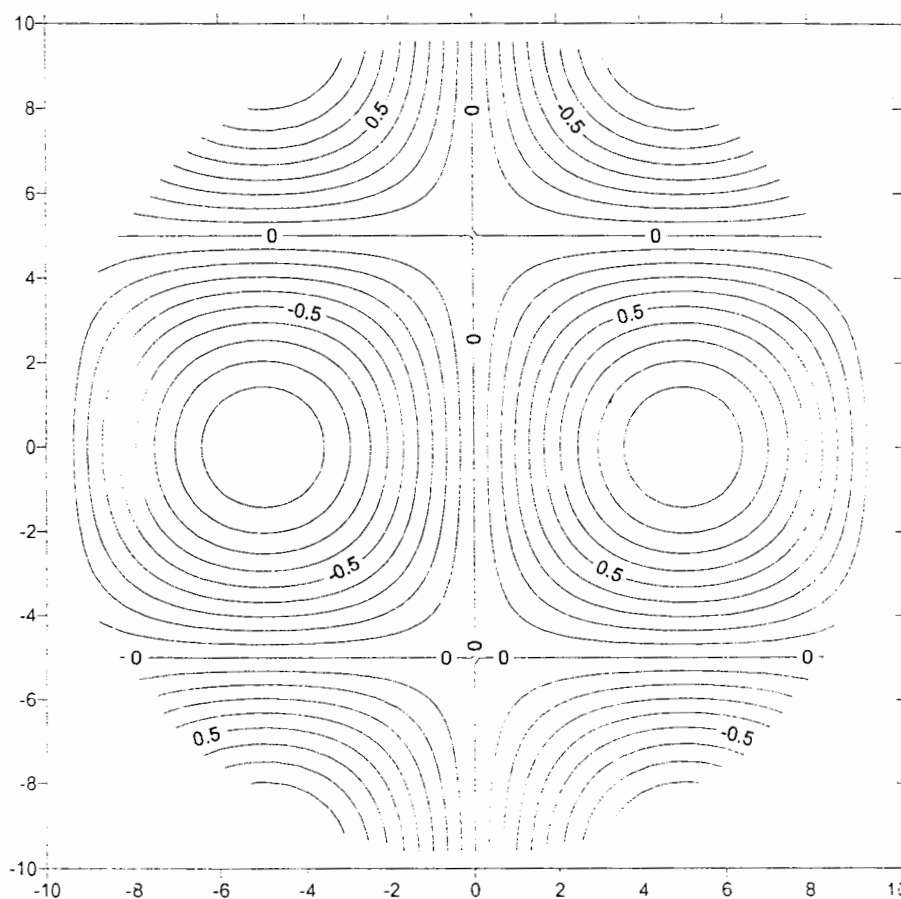
$$nline = 100$$

شکل‌های (۴-۱۳) و (۴-۱۴) بترتیب نمای سه‌بعدی و خطوط تراز مربوط به این رویه آورده شده

است.



شکل ۴-۱۳: پوسته‌ای با معادله سینوسی در جهت X و معادله کسینوسی در جهت Y



شکل ۴-۱۴: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله سینوسی در جهت X و معادله کسینوسی در جهت Y

• رویه‌ای با معادله لگاریتمی زیر

$$Z(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{10} + 11\right) \quad (۴-۱۲)$$

$$r = 10$$

$$npoin = 20001$$

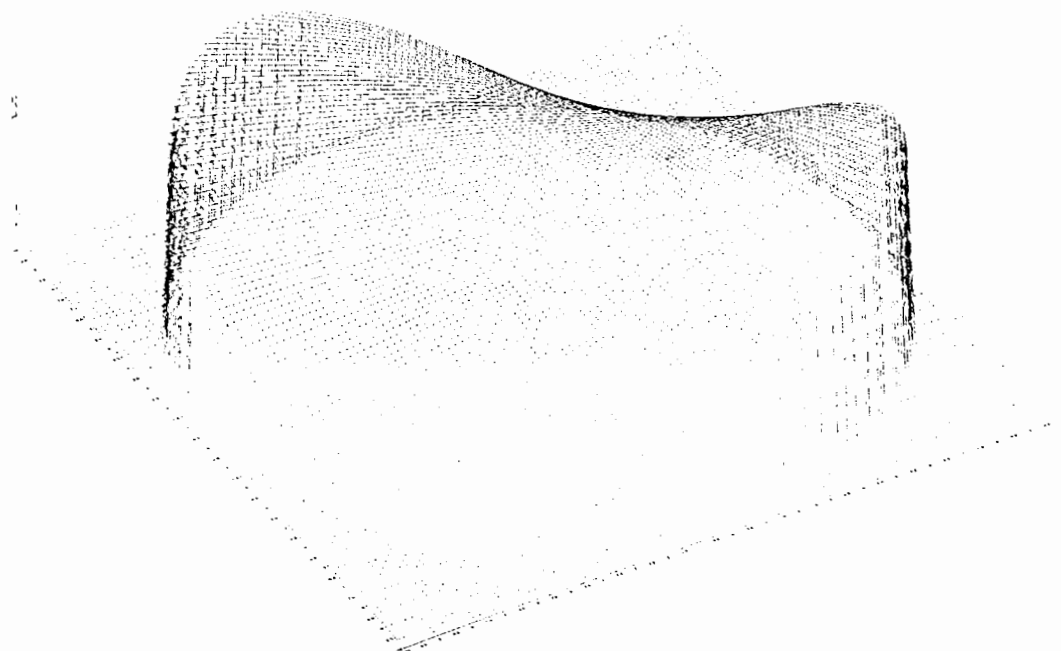
$$nelem = 20000$$

$$nring = 100$$

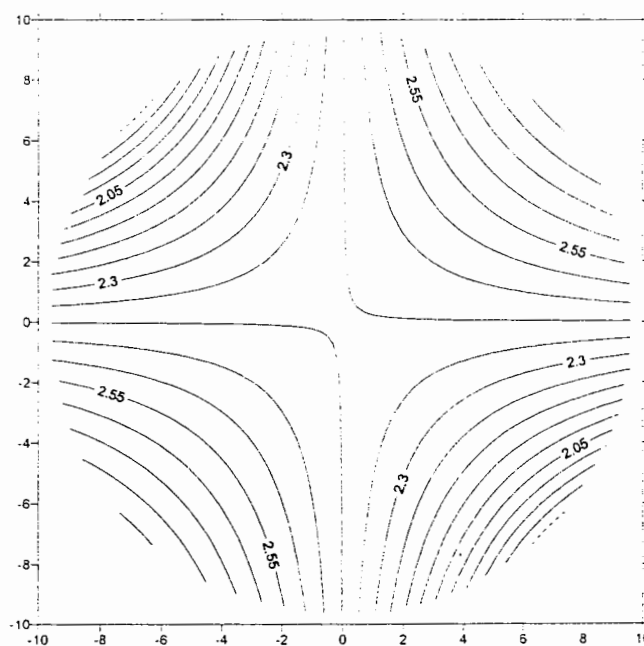
$$nline = 100$$

شکل‌های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) بترتیب نمای سه‌بعدی و خطوط تراز مربوط به این رویه آورده شده

است.



شکل ۴-۱۵: پوسته‌ای با معادله لگاریتمی



شکل ۴-۱۶: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله لگاریتمی

- رویه‌ای با معادله نمایی زیر

$$Z(x, y) = e^{\left(\frac{xy}{100}\right)} \quad (۱۳-۴)$$

$$r = 10$$

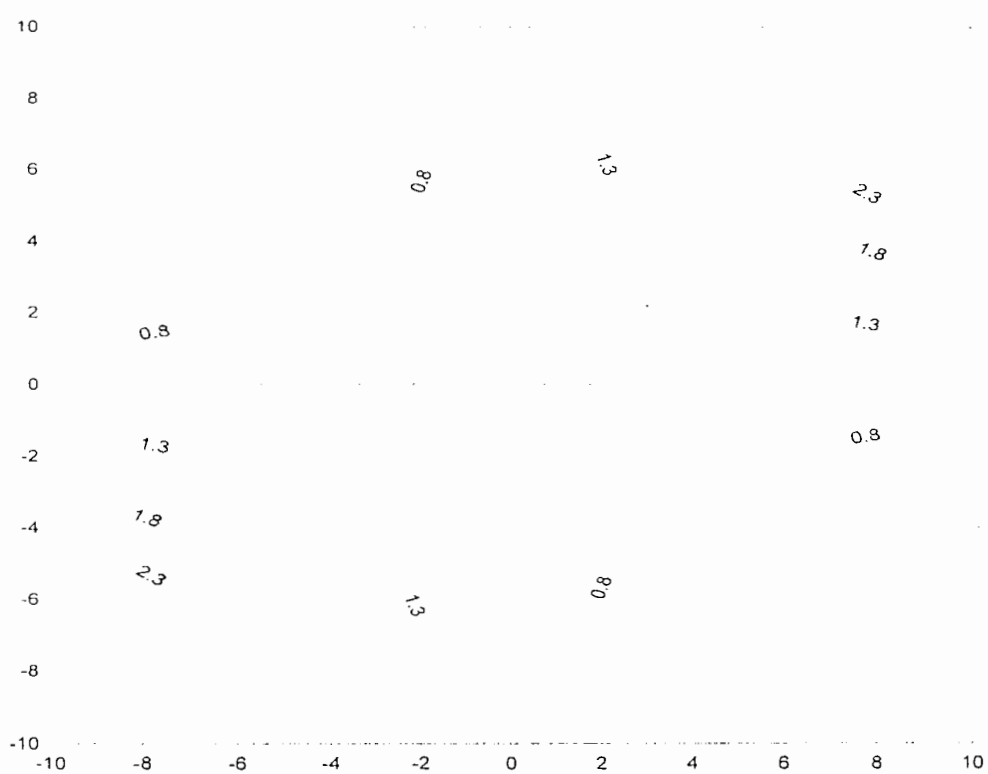
$$npoin = 20001$$

$$nelem = 20000$$

$$nring = 100$$

$$nline = 100$$

منحنی تراز مربوط به این رویه در شکل (۱۷-۴) آمده‌است.



شکل ۴-۱۷: منحنی تراز پوسته‌ای با معادله نمایی

فصل پنجم

کلیاتی در مورد بهینه‌سازی

۵-۱- مقدمه

در حال حاضر در تمام رشته‌های علمی، مبحثی به نام بهینه‌سازی^۱ وجود دارد که جزء مهمترین بخش‌های آن رشته نیز می‌باشد. اهمیت بهینه‌سازی در واقع مربوط به مسائلی نظیر اقتصاد و آرامش و امنیت و نظیر این مربوط می‌شود. در واقع با رسیدن به حالت بهینه، می‌توان با استفاده از حداقل امکانات به نتایج قابل قبولی رسید و یا با امکانات مشخص به بهترین نتیجه رسید. با توجه به این توضیحات نمی‌توان سرآغاز مشخصی برای بهینه‌سازی تعیین کرد و در واقع می‌توان گفت که جهان همواره در مسیر بهینگی حرکت می‌کند.

بهینه‌سازی را می‌توان علم تعیین بهترین جواب ریاضی یک مسأله دانست که یک واقعیت فیزیکی را مدل می‌کند. این علم شامل مطالعه شرایط بهینه برای مسائل، تعیین روش‌های الگوریتم‌بندی شده برای جواب، مطالعه در مورد ساختار چنین روش‌هایی و انجام فرآیندهای کامپیوتری است [۹].

روش‌های حلی که معمولاً برای تعیین طرح بهینه بکار گرفته می‌شود را می‌توان به چند بخش تقسیم کرد. این روشها بر اساس برنامه ریزی ریاضی^۲ به وجود آمده است. با توجه به تحقیقات و پرکاربرد بودن، این روشها بسیار مفید هستند. در نتیجه الگوریتم‌های بسیار مناسبی برای این روشها به وجود آمد [۱۰].

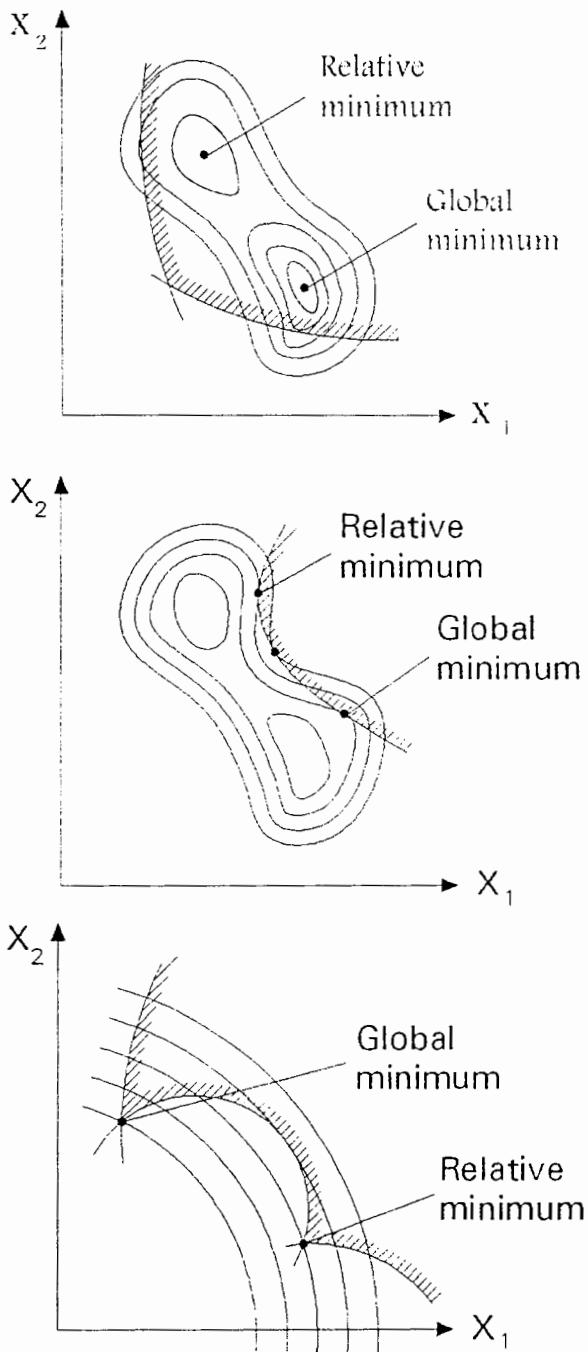
در روش‌های مبتنی بر برنامه ریزی ریاضی، جواب بهینه یک مسأله در یک نقطه بهینه مطلق منحصر به فرد^۳ به دست خواهد آمد [۱۰]. در برخی از مسائل سازه‌ای، نقاط بهینه نسبی^۴، علاوه بر نقاط بهینه مطلق وجود دارند. اکسترمم نسبی در مسائل برنامه ریزی ریاضی ممکن است به دلیل ماهیت تابع شکل و قیدها به وجود آید (شکل (۶-۱)).

^۱ Optimization

^۲ Mathematical programming

^۳ Single global optimum

^۴ Relative optima



شکل ۵-۱: حالات مختلف برای تابع هدف: قیود و نقاط اکسترمم [۱۰]

روش‌های دیگری نظیر برنامه ریزی دینامیک^۱، برنامه ریزی هندسی^۲ و روشهای کنترل بهینه^۳ برای مسائل بهینه سازی وجود دارد که از محدوده بحث این رساله خارج است و برای در این زمینه می‌توان به کتابهای مختلف بهینه‌سازی مراجعه کرد.

بهینه‌سازی را می‌توان به دو گروه تعیین حداقل نامقید^۴ و تعیین حداقل مقید^۵ تقسیم کرد. در بهینه‌سازی نامقید، قید وجود ندارد و حل مسأله ساده‌تر به نظر می‌رسد، اما در بهینه‌سازی مقید، فرمول‌بندی بر اساس برقراری توابع قید و رسیدن به جواب بهینه خواهد بود.

۵-۲- حداقل نامقید

اگر شرایط زیر برای $f(x)$ در x^* برقرار باشد، x^* یک نقطه حداقل نسبی است:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (۱-۵)$$

بسط سری تیلور تابع f حول x^* را بر حسب جملات درجه دو می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) \cong f^* + \nabla f^{*T} \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \mathbf{H}^* \Delta x \quad (۲-۵)$$

که f^* و ∇f^* و \mathbf{H}^* در x^* محاسبه می‌شوند. ∇f بردار مشتقات اول یا بردار گرادیان f است که با \mathbf{G} نمایش داده می‌شود و \mathbf{H} ماتریس مشتقات دوّم یا ماتریس هسین^۶ است:

$$\mathbf{G}^T \equiv \nabla f^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \quad (۳-۵)$$

^۱ Dynamic programming

^۲ Geomatic programming

^۳ Optimal control technique

^۴ Unconstrained minimum

^۵ Constrained minimum

^۶ Hessian matrix

$$H \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

بردار تغییر متغیرهای طراحی می‌شود:

$$\Delta x = x - x^* \quad (5-5)$$

اگر فرض شود که x^* حداقل نسبی باشد:

$$\Delta f \equiv f(x) - f^* = \nabla f^{*T} \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H^* \Delta x \geq 0 \quad (6-5)$$

نهایتاً با در نظر گرفتن جمله مرتبه اول، استنباط می‌شود که تنها زمانی $\Delta f \geq 0$ برای تمام مقادیر ممکن Δx صادق است که:

$$\nabla f^* = 0 \quad (7-5)$$

معادله بالا نشان‌دهنده شرایط لازم برای نقطه حداقل یک تابع n متغیره با مشتقات پیوسته است. با در نظر گرفتن جمله دوم رابطه (6-5):

$$q \equiv \Delta x^T H^* \Delta x > 0 \quad (8-5)$$

معادله بالا شرط کافی برای حداقل نسبی $f(x)$ در x^* است. دو معادله بالا تضمین‌کننده این است که x^* حداقل نسبی است.

۳-۵- حداقل مقید (روش ضربگرهای لاگرانژ)

برای این بخش مسأله بهینه‌سازی یک تابع با قیود مساوی در نظر گرفته می‌شود. در نقطه بهینه، تغییرات دیفرانسیل در تابع هدف $f(x)$ بر حسب تغییرات دیفرانسیل x ، باید صفر باشد:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (9-5)$$

اگر تنها یک شرط زیر در نظر گرفته شود :

$$h(\mathbf{x}) = 0 \quad (۱۰-۵)$$

پس تغییرات دیفرانسیل h خواهد شد:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (۱۱-۵)$$

با توجه به معادلات بالا :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) dx_n = 0 \quad (۱۲-۵)$$

که در آن λ یک پارامتر مجهول است و به آن ضربگر لاگرانژ^۱ می‌گویند. از معادله بالا به دست می‌آید :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \quad (۱۳-۵)$$

بنابراین یک سیستم با $n-1$ معادله و مجهول وجود خواهد داشت. در حالتی که چند قید مساوی در مسأله باشد :

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_k \quad (۱۴-۵)$$

برای هر قید یک ضربگر لاگرانژ لازم است.

در تابع لاگرانژین^۲ زیر

$$Q(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j h_j(\mathbf{x}) \quad (۱۵-۵)$$

برای پیدا کردن نقطه بحرانی^۳ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (۱۶-۵)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n_k \quad (۱۷-۵)$$

برای برقراری معادلات بالا، نیاز است که معادلات تعادل زیر برقرار باشد :

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla h_j = 0 \quad (۱۸-۵)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_k \quad (۱۹-۵)$$

^۱ Lagrange multiplier

^۲ Lagrangian function

^۳ Stationary point

باید توجه شود که این روابط ممکن است منجر به یک دستگاه غیر خطی از معادلات شود که دارای چندین جواب باشد. تمام جواب‌ها، حداقل مقید نیستند و برخی از آنها حداکثر مقید و یا نقاط زینی^۱ هستند [۱۰].

روش ضربگرهای لاگرانژ را می‌توان برای مسائل با قیود نامساوی نیز به کار برد. این مسائل با افزودن متغیرهای کمبود^۲ حل می‌شوند که برای توضیحات بیشتر می‌توان به مرجع [۱۰] این رساله مراجعه کرد.

روش‌های دیگری برای محاسبه حداقل مقید بسیار وجود دارد که از آنها می‌توان برای محاسبه و تشخیص حداقل بهینه استفاده کرد. از جمله این‌ها، روش کان - تاکر^۳ می‌باشد که در واقع این روش بیانگر شرط کافی برای بهینگی است [۱۰]. روش دیگر استفاده از توابع و مجموعه‌های مقعر^۴ است که برای شرح بیشتر می‌توان به مرجع [۱۰] این رساله مراجعه کرد.

روش‌های بهینه‌سازی مقید را می‌توان به دو بخش برنامه ریزی خطی^۵ و برنامه ریزی غیر خطی^۶ تقسیم‌بندی کرد.

۵-۳-۱- برنامه ریزی خطی

برنامه ریزی خطی یا LP یک روش برنامه ریزی ریاضی پایه‌ای است. ویژگی اصلی این روش این است که تمام قیدها و توابع هدف به صورت جملاتی خطی از متغیرها بیان می‌شوند. قیود ممکن است مساوی یا نامساوی باشند و تابع هدف حداقل یا حداکثر شود. اگرچه LP تنها برای بخش کوچکی از مسائل طراحی سازه‌ای قابل کاربرد است، اما این روش استفاده گسترده‌ای دارد. برخی از دلایل مقبولیت این روش عبارتند از [۱۰]:

۱- بهینه مطلق دقیق در تعداد مراحل کمی به دست می‌آید و یک نتیجه عملی نخواهد بود.

^۱ Saddle points

^۲ Slack variables

^۳ Kuhn - Tucker conditions

^۴ Convex function and Convex sets

^۵ Linear programming

^۶ Nonlinear programming

- ۱- کارآیی روش در مسائل با مقیاس بالا بسیار مهم است. روش‌های کارآ دارای سرعت زیاد همگرایی به جواب بهینه و حجم کم محاسبات در هر تکرار هستند.
- ۲- قابل اعتماد بودن روش، به این معنی که همگرایی به جواب بهینه از لحاظ تئوری تعیین شده باشد. الگوریتم‌های مطمئن معمولاً نیازمند محاسبات بیشتری در حین محاسبات هر چرخه است. قابلیت اطمینان و کارایی دو عامل ناسازگار^۱ هستند که باید در هنگام انتخاب الگوریتم بهینه‌سازی مورد توجه قرار گیرند [۱۰].
- با استفاده از بهینه‌سازی مقید، متغیرهای طراحی با حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر در فضای طراحی، مرتباً در حین انجام پروسه بهینه‌سازی تغییر می‌کنند. اکثر این روشها از چهار بخش اصلی زیر تشکیل شده‌اند [۱۰].

۱- تعیین مجموعه قیود فعال^۲ در هر طراحی

۲- انتخاب یک جهت جستجو در فضای طراحی بر اساس تابع هدف و مجموعه قیود فعال

۳- محاسبات مربوط به حرکت در جهت پیدا شده در مرحله قبل

۴- کنترل همگرایی که تعیین می‌کند اصلاحات جدید بر روی متغیرها نیاز است یا نه

برنامه ریزی غیر خطی را می‌توان در حالات متفاوتی بررسی و فرمول‌بندی کرد. در این رساله به دو نوع فرمول‌بندی در مسائل برنامه ریزی غیرخطی اشاره می‌شود که به ترتیب عبارتند از:

۱- روش جهت‌های عملی یا شدنی^۳

۲- روش حداقل‌سازی مقید متوالی^۴

^۱ Conflicting factors
^۲ Active constraints
^۳ The Method of Feasible Directions
^۴ Sequential Unconstrained Minimization

۵-۳-۲-۱- روش حداقل‌سازی مقید متوالی

شاید ساده‌ترین راه برای حل یک مسأله برنامه ریزی غیرخطی، تبدیل آن به دنباله‌ای از مسائل خطی باشد. برای این منظور تابع هدف و قیدهای غیرخطی در همسایگی نقطه طرح به شکل تقریبی خطی تبدیل می‌گردند. این امر با استفاده از بسط سری تیلور و نادیده گرفتن جملات غیرخطی آن انجام می‌پذیرد:

$$F(X) \approx F(X_k) + (\nabla F)_k^T (X - X_k) \quad (23-5)$$

$$g_j(X) \approx g_j(X_k) + (\nabla g_j)_k^T (X - X_k) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (24-5)$$

مسأله بهینه‌سازی خطی اخیر به طور متوالی حل شده و در هر چرخه از آن جواب بهینه چرخه پیشین جایگزین X_k می‌شود. باید توجه داشت که همگرایی به جواب مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی با استفاده از این روش با دشواریهایی همراه خواهد بود. برای استفاده از این روش، تکنیک‌های متفاوتی به وجود آمده که برخی از آنها عبارتند از:

۱- روش حد حرکت^۱

۲- روشهای با تابع پناستی خارجی^۲

۳- روشهای با تابع پناستی داخلی^۳

روش حد حرکت توسط گریفیت^۴ و استوارت^۵ ارائه و از سوی آنها برنامه‌ریزی تقریبی نامیده شده است. در این روش با وارد کردن قیدهای اضافی که تغییرات وارد شده به یک جواب بهینه واقع در یک نقطه غیر گوشه را عملی می‌کند. در روشهای با تابع پناستی خارجی، تمام جوابهای داخلی^۶ در محدوده شدنی^۷ قرار دارند. یکی از فوائد چنین روشهایی این است که حل مسأله می‌تواند از یک نقطه غیرشدنی^۸ شروع شود. یکی از نقیصه‌های مهم این روش اینست که در یک جواب شدنی نمی‌توان قبل از رسیدن به بهینه، جستجو را متوقف کنیم [۱۰].

^۱ Move Limit Method

^۲ Exterior Penalty Function Methods

^۳ Interior Penalty Function Methods

^۴ Griffith

^۵ Stewart

^۶ Intermediate Solutions

^۷ Feasible

^۸ Infeasible

در روشهای با تابع پنالیتی داخلی تمام جوابهای داخلی در منطقه شدنی قرار می‌گیرند و از لبه‌های داخلی دامنه به فضاهای قابل قبول‌تری هدایت می‌شوند. یکی از مزیت‌های این روش این است که می‌توان جستجو را در هر لحظه‌ای متوقف کرد و در یک نقطه طراحی، از طرح قابل قبولی که کاربردی است، استفاده کرد. به‌علاوه قیود، تنها در زمانی که به اواخر پروسه بهینه‌سازی می‌رسیم حالت بحرانی به خود می‌گیرند.

۵-۳-۲- روش جهت‌های شدنی

روشهای جهت‌های شدنی برای مسائلی که دارای قیود نامساوی کلی هستند، پیشنهاد می‌شود. در این روش فرض می‌شود که مشتقات توابع هدف و قیود، در دسترس هستند. در این روشها حرکت به سمت جواب بهینه به صورت گام به گام انجام می‌گیرد. برای این منظور بردار جهت S_q و فاصله حرکت α به گونه‌ای انتخاب می‌شود که نقطه طرح جدید X_{q+1} در منطقه عملی قرار گیرد:

$$X_{q+1} = X_q + \alpha S_q \quad (۲۵-۵)$$

که این مقادیر به نحوی محاسبه می‌شوند که تابع هدف بهبود یابد. در تعیین بردار جهت، دو شرط زیر باید برقرار باشد [۱۰].

۱- جهت باید شدنی باشد، یعنی اگر یک حرکت کوچک از X_q در امتداد S_q داشته باشیم از منطقه شدنی خارج نشویم. این شرط برقرار می‌شود اگر:

$$S^T \nabla g_i < 0 \quad (۲۶-۵)$$

۲- جهت به‌دست آمده باید کاربردی باشد، یعنی مقدار f بهبود یابد. اگر رابطه زیر برقرار باشد، این شرط نیز اضافه خواهد شد:

$$S^T \nabla f < 0 \quad (۲۷-۵)$$

برای توضیحات بیشتر در مورد محاسبات مربوط به تعیین جهت حرکت و فاصله حرکت و مشتقات به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

۵-۴- بهینه‌سازی سازه‌ای

در رشته‌های مهندسی مخصوصاً سازه، بهینه‌سازی اهمیت بسیار زیادی پیدا می‌کند، چرا که مستقیماً با مصالح و امنیت جامعه و مسائلی از این قبیل روبرو است. از این رو بهینه‌سازی در علوم مهندسی موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه برای افراد می‌شود و در عین حال موجب افزایش آرامش و امنیت نیز خواهد شد. اما برای اعمال بهینه‌سازی بر سیستم‌های مهندسی همانند یک سازه، نیاز به بررسی و طرح مسأله مناسب برای بهینه‌سازی و حل آن با توجه به پارامترهای مؤثر می‌باشد یا به عبارت دیگر نیاز به فرمول‌بندی سیستم‌های سازه‌ای برای بهینه‌سازی است. و این بخش، نتایج کلی به انواع فرمول‌بندی‌های رایج برای بهینه‌سازی سیستم‌های سازه و تاریخچه مختصری از نحوه پیدایش آنها خواهد داشت.

۵-۵- انواع فرمول‌بندی‌های بهینه‌سازی سازه‌ای

در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای، سه نوع فرمول‌بندی برای طراحی بهینه وجود دارد که این فرمول‌بندی‌ها، از لحاظ مفاهیم پایه، روش‌های متفاوتی هستند. در اولین آنها که به فرمول‌بندی معمولی^۱ موسوم است، تنها متغیرهای طراحی سازه‌ای به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. به این فرمول‌بندی *N.A.ND* نیز می‌گویند. دسته دوم فرمول‌بندی‌ها را با نام روش تحلیل و طراحی همزمان یا *S.A.ND*^۲ می‌شناسند. در این فرمول‌بندی‌ها علاوه بر متغیرهای سنتی طراحی، برخی متغیرهای حالت^۳، همانند تغییر شکلها، به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند و معادلات تعادل حاکم به عنوان قیدهای مساوی^۴ در نظر گرفته می‌شوند. سومین فرمول‌بندی، روش دوفازی بر اساس تغییر شکلها^۵ است که در آن در حلقه خارجی، تغییر شکلها به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند و در حلقه داخلی، متغیرهای طراحی به عنوان مجهولات در حلقه داخلی قرار دارند. [۱۱]

^۱ Conventional formulation

^۲ Nested Analysis and Design

^۳ Simultaneous Analysis and Design

^۴ State variables

^۵ Equality constraints

^۶ Displacement based two phase

در بهینه‌سازی سازه‌ای، فرمول بندی *SAND*، یکی از روش‌های مهمی بوده که از حدود سالهای ۱۹۶۰، مورد بحث قرار گرفته است. در این فرمول‌بندی علاوه بر متغیرهای طراحی، متغیرهای حالت نیز به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند. در ابتدا اشمیت^۱ و فاکس^۲ در سال ۱۹۶۵، متغیرهای حالت را وارد مسأله بهینه‌سازی سازه‌ای کردند.

ایده اصلی در این روش، تبدیل یک مسأله بهینه‌سازی با قیدهای نامساوی در فضای متغیرهای طراحی به یک مسأله نامقید در یک فضای مرکب از متغیرهای طراحی و متغیرهای حالت است، در ادامه توسط افرادی چون هافتکا^۳ و کامات^۴ و رینگرتز^۵ و کیرش^۶ مباحث جدیدی در این فرمول‌بندی مطرح گردید [۱۱] که برای توضیحات بیشتر به مرجع [۱۱] این رساله مراجعه شود.

در سالهای اخیر، فرمول‌بندی‌های *SAND* به شکل موفقیت‌آمیزی بر روی بهینه‌سازی شکل و توپولوژی سازه‌ها اعمال شده است (بندسک^۷ در سال ۱۹۹۵ و بندسک و زیگموند^۸ در سال ۲۰۰۳). این موضوع موجب پیشرفت فرمول‌بندی *SAND* برای حل مسائل بهینه‌سازی در مقیاس بالا شده است. [۱۱]

روش دیگری که برای طراحی بهینه سازه بیان شده بود، روش دوفازی بر اساس تغییر شکل‌ها بود. در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۲ توسط میسوم^۹ و گوردال^{۱۰} منتشر شد، روش بهینه‌سازی دوفازی که در سال ۱۹۷۷ و ۱۹۸۹ توسط مک کیون^{۱۱} مطرح شده بود، برای بهینه‌کردن یک خرپا به‌کار گرفته شد. این فرمول‌بندی مسأله را در فازی حل می‌کند که شامل مسائل داخلی و خارجی است. در بخش داخلی هزینه بر اساس ارضای معادلات تعادل، حداقل می‌شود. در مسأله خارجی، تغییر شکل‌ها به نحوی تعیین می‌شوند که تابع هزینه با توجه به قیود تنش و تغییر شکل، حداقل شود.

^۱ Schmit

^۲ Fox

^۳ Haftka (۱۹۸۵)

^۴ Kamat (۱۹۸۹)

^۵ Ringertz (۱۹۹۲)

^۶ Kirsch (۱۹۹۴)

^۷ Bendesqe

^۸ Bendesqe and Sigmund

^۹ Missoum

^{۱۰} Gurdal

^{۱۱} Mc keown

روش معیار بهینگی یا OC ^۱، به این دلیل که فضای طراحی آن شامل متغیرهای طراحی و ضربگرهای لاگرانژ^۲ است، توسط محققان^۳ به عنوان یک فرمول‌بندی جایگزین استفاده شده است. با شروع از شرایط کاروش-کان-تاکر^۴ یا KKT ، روابط جدید برای متغیرها به دست می‌آیند. شرایط بهینگی به عنوان قیود اضافی در نظر گرفته می‌شوند و در نقطه بهینه این شرایط ارضا می‌شوند. [۱۱]

۵-۵-۱- فرمول‌بندی معمولی

معمول‌ترین روش برای بهینه‌سازی سازه‌ای این است که تنها متغیرهای طراحی به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته شوند. در این مسائل تمام پارامترهای جوابی دیگر همانند تغییر شکل، تنش، کرنش و نیروهای داخلی به صورت توابعی مشخص^۵ از متغیرهای طراحی در نظر گرفته می‌شوند.

در این بخش، برخی از جزئیات روش $NAND$ برای بهینه‌سازی سازه‌ای و سیستم‌های مکانیکی شرح داده خواهد شد. که با در نظر گرفتن یک مسأله تحلیل خطی همانند تغییرشکل‌های کوچک و استفاده از مدل مصالح الاستیک خطی در حالت گسسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. البته این روش می‌تواند برای تحلیل غیر خطی نیز در نظر گرفته شود که در آن صورت باید از فرم پیوسته معادلات تعادل استفاده شود.

۵-۵-۱-۱- فرمول‌بندی

b : بردار متغیرهای طراحی با بعد k که بیانگر طراحی سیستم است

z : بردار تغییر شکل‌های کلی با بعد n

برای تحلیل در حالت تغییر شکل‌های خطی کوچک، معادلات تعادل سیستم به صورت زیر خواهد شد:

^۱ Optimality Criteria

^۲ Lagrange multipliers

^۳ Kirsch and Rozvany (۱۹۹۴)

^۴ Karush - Kuhn - Tucker conditions

^۵ Implicit functions

$$\mathbf{k}(\mathbf{b})\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{b}) \quad (28-5)$$

که در این رابطه :

$\mathbf{k}(\mathbf{b})$: ماتریس سختی غیرتکین $n \times n$ است که به طراحی سیستم بستگی دارد

$\mathbf{F}(\mathbf{b})$: بردار بارهای خارجی معادل با بعد n است که در هر گره از مدل گسسته سیستم وارد می‌شود

مسئله بهینه‌سازی برای این حالت را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

پیدا کردن بردار متغیر طراحی \mathbf{b} به نحوی که تابع هزینه (هدف) زیر حداقل گردد.

$$f' = f(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \quad (29-5)$$

که قیود اعمالی نیز همانند زیر می‌باشند:

$$\mathbf{g}(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \leq 0 \quad (30-5)$$

۵-۵-۱-۲- محاسبه گرادیان^۱

در حالتی که \mathbf{b} مشخص باشد، می‌توان مقادیر عددی \mathbf{z} را با استفاده از معادله (۲۸-۵) تعیین کرد ولی نمی‌توان یک تابع مشخص برای \mathbf{z} بر حسب \mathbf{b} به دست آورد. از طرفی دیگر نمی‌توان با جایگزینی \mathbf{z} را از مسئله بهینه‌سازی کنار گذاشت. در یک پروسه بهینه‌یابی متکی بر گرادیان، مشتقات تابع $f(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ و توابع قید $\mathbf{g}(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ نسبت به \mathbf{b} مورد نیاز است. از آنجائیکه \mathbf{z} به صورت یک تابع مشخص از \mathbf{b} وجود ندارد، نمی‌توان روابط مشخصی برای این مشتقات نسبت به \mathbf{b} ارائه کرد. بنابراین روش‌های تفاضلات محدود مورد استفاده قرار می‌گیرد و و دلیلش هم ساده بودن به کارگیری آن است و همچنین در این روش‌ها نیازی به روابط مشخص برای توابع هدف و قید نیست.

برای رسیدن به روابط تحلیلی گرادیان توابع، نیاز به استفاده از روش‌های دیفرانسیل‌گیری مشخص^۲ است که به آن تحلیل حساسیت طراحی^۳ می‌گویند. برای تشریح چگونگی محاسبه مشتقات، محاسبات برای تابع $f(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ مختصراً شرح داده می‌شود. بقیه توابع را نیز می‌توان به همین صورت در نظر گرفت.

^۱ Gradient evaluation

^۲ Implicit differentiation procedures

^۳ Design sensitivity analysis

$$\left. \frac{df(\mathbf{b}, \mathbf{z}(\mathbf{b}))}{d\mathbf{b}} \right|_{k \times 1} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{b}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{b}} \right|_{k \times 1} + \left. \frac{d\mathbf{z}(\mathbf{b})}{d\mathbf{b}} \right|_{k \times n} \left. \frac{\partial f(\mathbf{b}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{n \times 1} \quad (31-5)$$

به دلیل وابستگی آشکار \mathbf{b} و \mathbf{z} ، محاسبه مشتقات جزئی $f(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ نسبت به \mathbf{b} و \mathbf{z} ، خیلی سخت نخواهد بود. اگر چه،

محاسبه $\frac{dz}{db}$ در معادله (31-5) نیاز به شرح و تحلیل بیشتری دارد. در محاسبه این ماتریس $k \times n$ ، مشتق کلی معادله

(28-5) نسبت به متغیر طراحی \mathbf{b} در نظر گرفته می‌شود و معادله حاصله باز نویسی می‌شود:

$$\mathbf{KZ} = \mathbf{S} \quad (32-5)$$

که در آن:

$$\mathbf{Z}|_{n \times k} = \frac{d\mathbf{z}(\mathbf{b})^T}{d\mathbf{b}}; \mathbf{S}|_{n \times k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z})^T \quad (33-5)$$

برای مطالعه جزئیات بیشتر مربوط به محاسبات \mathbf{S} و \mathbf{K} و \mathbf{Z} به مرجع [۱۱] همین رساله مراجعه شود.

۵-۲-۵-۵- تحلیل و طراحی همزمان (SAND)

در این تئوری متغیرهای حالت و طراحی به طور همزمان به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند. معادله تعادل تبدیل به یک قید تساوی بر حسب متغیرها می‌شود. روش SAND، در اصل مسأله بهینه‌سازی را در فضایی مرکب از متغیرهای طراحی و حالت بهینه می‌کند به طوری که معادله تعادل را در مسأله وارد می‌کند که در واقع یک مسأله بهینه‌سازی تک^۱ است [۱۱]. بنابراین نیازی به تحلیل سازه‌ای مشخص^۲ یا تحلیل حساسیت طراحی نیست.

۵-۲-۵-۱- فرمول‌بندی

در تئوری SAND، فرمول‌بندی مسأله با مستقل در نظر گرفتن متغیرهای حالت و طراحی \mathbf{z} و \mathbf{b} به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی، اصلاح می‌شود. برای شرح این تئوری، بردار مرکب متغیرهای طراحی به صورت زیر تعریف می‌شود:

^۱ Single optimization problem

^۲ Explicit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (۳۴-۵)$$

نوجه شود که اگر سازه تحت اثر چند نوع بارگذاری قرار گیرد، بردار \mathbf{X} شامل چند بردار \mathbf{z} خواهد بود. حال مسأله بهینه‌سازی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱].

پیدا کردن \mathbf{X} برای حداقل کردن تابع هزینه زیر :

$$f = f(\mathbf{X}) \quad (۳۵-۵)$$

به شرطی که :

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (۳۶-۵)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0} \quad (۳۷-۵)$$

۵-۵-۲-۲- محاسبه گرادیان

در مراحل بهینه‌سازی مشتقات جزئی توابع نسبت به \mathbf{X} ، یا بهتر گفته شود نسبت به \mathbf{b} و \mathbf{z} مورد نیاز است. مشتقات جزئی f و \mathbf{g} نسبت به \mathbf{b} و \mathbf{z} بر اساس آنچه در بخش قبل گفته شد، براحتی قابل محاسبه است. مشتق جزئی \mathbf{h} نسبت به \mathbf{z} ، منتج به ماتریس سختی \mathbf{k} می‌شود و مشتق جزئی \mathbf{h} نسبت به \mathbf{b} موجب رسیدن ماتریس \mathbf{S} در رابطه (۳۳-۵) می‌شود [۱۱].

توجه شود که در فرمول‌بندی *SAND*، نیازی نیست که شرط $\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ در هر تکرار از مراحل بهینه‌سازی دقیقاً ارضا شود، یعنی نیازی به ارضای معادله تعادل در هر تکرار نیست. این ویژگی می‌تواند برای مسائل غیرخطی بسیار مناسب باشد. تنها در آخرین نقطه حل، نیاز به ارضای این شرط است. در واقع این موضوع بیانگر این است که به دلیل در نظر گرفتن \mathbf{Z} به عنوان یک متغیر مستقل، هرگز نیازی به حل $\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ برای \mathbf{Z} نیست [۱۱].

این فرمول‌بندی زمانی که حذف قیدهای مساوی ممکن و عملی نباشد، به کار گرفته می‌شود. به عنوان مثال برای مسائل غیرخطی هندسی، معادلات تحلیل غیر خطی باید برای هر مقدار از متغیرهای طراحی حل شود، اگر مسأله در فضای

متغیرهای طراحی فرمول‌بندی شده باشد در حالتی که از فرمول‌بندی *SAND* استفاده می‌شود، نیازی به تحلیل‌های غیرخطی تکراری نیست [۱۰].

۵-۵-۳- فرمول‌بندی دوفازی براساس تغییر شکل

۵-۵-۳-۱- فرمول‌بندی

این تئوری توسط مک کیون^۱ برای بهینه‌سازی سازه‌های مرکب به‌کار گرفته شده است. اگرچه اختلافاتی بین روشهای به‌کار گرفته شده توسط محققان مختلف وجود دارد، اما ایده اصلی همه آنها یکسان است؛ مسأله طراحی به یک مسأله بهینه‌سازی دو سطحی^۲ تبدیل می‌شود که تنها متغیرهای طراحی در مسأله داخلی به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند و تغییر شکلها، تنها در مسأله خارجی به عنوان متغیر در نظر گرفته می‌شوند.

مسأله بهینه‌سازی داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای تغییر مکانهای معین Z ، بردار متغیر طراحی b به نحوی پیدا شود که تابع هزینه حداقل شود.

$$f = f(b) \quad (۳۸-۵)$$

و قیود تعادل نیز خواهند شد:

$$h(b) = K(b)Z - F(b) = 0 \quad (۳۹-۵)$$

در حل مسأله داخلی معادلات (۳۸-۵) و (۳۹-۵)، تنها یک جواب بهینه موقت به‌دست خواهد آمد بر تغییرمکان‌های Z منطبق است. برای پیدا کردن جواب بهینه درست در مسأله اصلی، نیاز است که تغییرمکان‌های Z به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته شوند. بنابراین مسأله خارجی می‌تواند به صورت زیر تعریف شود.

محاسبه بردار تغییر مکان Z برای حداقل کردن تابع هدف زیر در رابطه (۳۸-۵):

$$f = f(Z) \quad (۴۰-۵)$$

به شرطی که:

$$g(Z) \leq 0 \quad (۴۱-۵)$$

^۱ Mc keown (۱۹۷۷)

^۲ Two – level optimization problem

قیود معادله (۵-۴۱) ممکن است شامل تنش یا تغییر مکان‌های مورد نیاز باشند. اگر معادله تعادل حاکم در رابطه (۵) (۳۹) با معادله خطی متناظر با آن جایگزین شود، می‌توان تحلیل‌های غیر خطی را نیز در نظر گرفت.

۵-۵-۳-۲- محاسبه گرادیان

معادله (۵-۳۹) بسیار شبیه به معادله (۵-۳۶) در فرمول بندی SAND است با این فرق که متغیر حالت Z ، معلوم است. در مراحل حل عددی نیازی به محاسبه مشتق جزئی h نسبت به Z و $\frac{dZ}{db}$ نیست، بنابراین نیازی به تحلیل‌های حساسیت یا حل معادلات تعادل نیست. توجه شود که در این فرمول بندی نیازی به برقراری دقیق رابطه $h(\mathbf{b}) = 0$ در هر تکرار از مراحل بهینه‌سازی در مسأله داخلی نیست و تنها نیاز است که در جواب نهایی این معادله برقرار باشد [۱۱]. برای مسأله بیرونی، زمانی که Z به عنوان متغیر بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود، مشتق b در معادله (۵-۴۰) باید در نظر گرفته شود. باید توجه شود که رابطه مشخصی برای f بر حسب Z وجود ندارد. بنابراین باید اجباراً از یک روش دیفرانسیل‌گیری استفاده شود. با استفاده از چنین روشی، یک رابطه مشخص برای مشتق رابطه (۵-۴۰) نسبت به تغییر مکان تعیین خواهد شد [۱۱].

۵-۶- مقایسه فرمول بندی‌های معمولی، SAND و متکی بر تغییر مکان

مقایسه این سه روش در دو جدول که در زیر آمده است انجام شده است. در این جدول پارامترهای زیر به چشم می‌خورد که عبارتند از:

k : اندازه بردار متغیرهای طراحی \mathbf{b}

n : اندازه بردار متغیرهای حالت Z

m : تعداد قیدهای نامساوی $g \leq 0$

برای فرمول‌بندی متکی بر تغییر مکان اعداد داخل براکت مربوط به مسأله داخلی است و اعداد بیرون براکت مربوط به مسأله خارجی می‌باشند.

در جدول (۵-۱) ابعاد این سه فرمول‌بندب مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

جدول ۵-۱: مقایسه ابعادی روشهای بهینه‌سازی [۱۱]

فرمول بندی متکی بر تغییر مکان	فرمول بندی SAND	فرمول بندی معمولی	
$n[k \text{ or } k+zn^*]$	$k+n$	k	تعداد متغیرها
$\cdot [n]$	n	\cdot	تعداد قیدهای مساوی
$m[\cdot]$	m	$m+zn$	تعداد قیدهای نامساوی
$Zn[zk \text{ or } zk+zk^*]$	$zk+zn$	zk	تعداد مرزهای ساده ^۱

*زمانی که متغیرهای کمبود^۲ در نظر گرفته شوند.

جدول (۵-۲) سه روش را از لحاظ کاربرد و قابل اعمال بودن مقایسه می‌کند و در واقع نقاط قوت و ضعف روشها را مقایسه می‌کند

جدول ۵-۲: بررسی نقاط قوت و ضعف روشهای بهینه‌سازی [۱۱]

نقاط ضعف	نقاط قوت	فرمول بندی
۱- معادله تعادل باید در هر تکرار حل شود که این موضوع سبب بالا رفتن هزینه محاسبات می‌شود		
۲- قیدها اجباراً توابعی از متغیرها هستند و برای محاسبه آنها نیاز به تحلیل است	۱- کمترین مقدار متغیرهای طراحی	معمولی
۳- تحلیل حساسیت طراحی باید انجام شود	۲- معادله تعادل در هر تکرار ارضا می‌شود	
۴- روشی خسته کننده است	۳- جواب به دست آمده در مراحل میانی ممکن است قابل استفاده باشند	
۵- دارای ماتریس ژاکوبین و هسیان ^۳ چگال می‌باشد و کاربرد این روش برای مسائل با مقیاس بالا را سخت می‌سازد		
۱- تعداد متغیرها و قیود زیاد است	۱- فرمول‌بندی‌ها توابعی مشخص از متغیرها هستند	SAND
۲- جوابهای به دست آمده در مراحل میانی قابل استفاده نیست	۲- نیازی به حل معادله تعادل در هر تکرار نیست	

^۱ Simple bounds

^۲ Slack variables

^۳ Hessian

^۴ Multi physics problems

۳- بعضی از قیود ممکن است به صورت خطی با متغیرها مرتبط شوند	۳- برای مسائل با مقیاس بالا باید از الگوریتمهای بهینه‌سازی استفاده شود
۴- ژاکوبین و هسیان از لحاظ عددی ماتریس‌های سبکی هستند	۴- نیاز به یکه کردن ^۱ متغیرهای بهینه‌سازی است
۵- نیازی به تحلیل حساسیت طراحی نیست	
۶- نسبتاً روش خسته کننده‌ای نیست	
۷- برای مسائلی با ماهیت فیزیکی جداگانه ^۲ ضربگرهای لاگرانژ برای اکثر قیده‌ها در دسترس هستند که این مسأله موجب کاربردی شدن این فرمول‌بندی می‌شود	
۱- دو زیر برنامه کوچکتر باید حل شود	
متکی بر	۱- برنامه خارجی ممکن است غیر قابل دیفرانسیل‌گیری باشد
تغییر مکان	۲- مسأله داخلی ممکن است جواب نداشته باشد
۲- نیازی به حل معادله تعادل در هر تکرار نیست	
۳- مسأله داخلی خطی یا درجه دو است	
۴- نیازی به تحلیل حساسیت طراحی نیست	۳- متغیرهای تغییر مکان باید یکه شوند

۵-۷- پارامترهای موجود در پروسه بهینه‌سازی

۵-۷-۱- متغیرهای طراحی^۲

یک سیستم سازه‌ای را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از کمیت‌ها شرح داد که برخی از آنها را می‌توان به عنوان متغیر در پروسه بهینه‌سازی در نظر گرفت. آن دسته از متغیرهایی که در حین طراحی ثابت هستند، به متغیرهای از پیش تعیین شده^۳ معروفند و نمی‌توانند به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گیرند. متغیرهایی که از پیش تعیین شده نباشند، متغیرهای طراحی هستند. از نقطه نظر فیزیکی، متغیرهای طراحی که به وسیله روش بهینه‌سازی تغییر می‌کنند، ممکن است نشان دهنده خواص سازه‌ای زیر باشند [۱۰]:

۱- خواص مکانیکی یا فیزیکی مصالح

۲- توپولوژی سازه

۳- هندسه یا شکل سازه

۴- ابعاد مقطع یا اندازه اعضا

^۱ Normalized

^۲ Design Variables

^۳ Preassigned variables

از نقطه نظر مکانیکی مهم است که بین متغیرهای پیوسته و گسسته ارتباط برقرار کنیم. در حالاتی که تعداد زیادی از متغیرهای گسسته با مقادیر یکنواخت در طول یک بازه معین تعریف شده باشند، استفاده از متغیر پیوسته اغلب رضایت‌بخش است.

متغیرهای طراحی مصالح: انتخاب مصالح نشان‌دهنده یک مسأله ویژه با مصالح معمولی است که خواص گسسته دارند. یعنی انتخاب از مجموعه‌ای از متغیرهای گسسته باید صورت گیرد. استفاده از چنین متغیرهای گسسته‌ای ممکن است موجب افزایش قابل توجهی در هزینه و زمان بهینه‌سازی شود. اما زمانی که تعداد مصالح در دسترس کمتر باشد، بهینه‌سازی می‌تواند با حل مسأله با هر مصالح و مقایسه نتایج در انتها انجام شود.

متغیرهای طراحی توپولوژیکی: در حالات خاصی که اعضای سازه اجازه رسیدن به اندازه صفر را داشته باشند، می‌توان توپولوژی سازه را به‌طور خودکار بهینه کرد. این خاصیت موجب حذف بخش‌های غیر اقتصادی سازه حین پروسه بهینه‌سازی می‌شود. مسائل بهینه‌سازی توپولوژیکی دارای یک مقدار بهینه کلی منحصر به فرد هستند که اگر از مجموعه متغیرهای پیوسته استفاده شود، نمی‌توان به آن رسید.

متغیرهای طراحی هندسی: متغیرهای طراحی هندسی یا شکل می‌توانند به عنوان مثال مختصات گره‌های یک خرپا یا قاب باشند. نمونه دیگری از این نوع متغیرها می‌توانند محل تکیه گاه‌های یک پل، طول دهانه‌های تیر سراسری و ارتفاع یک سازه پوسته‌ای باشد. در حالت کلی، هندسه سازه به‌وسیله متغیرهای طراحی پیوسته نشان داده می‌شود.

متغیرهای طراحی مقطع: ابعاد سطح مقطع، ساده‌ترین نوع متغیرهای طراحی هستند. مساحت یک عضو خرپا، ممان اینرسی اعضای خمشی یا ضخامت یک صفحه نمونه‌هایی از این نوع متغیرها هستند. متغیرهای طراحی مقطع معمولاً به‌صورت متغیرهای پیوسته در نظر گرفته می‌شوند.

۵-۷-۲- قیدها

هر مجموعه‌ای از متغیرهای طراحی نشان‌دهنده یک طرح از سازه می‌باشند. برخی از این طرحها در مسائل بهینه‌سازی قابل استفاده هستند اما برخی دیگر به دلایل رفتار سازه‌ای، حدود توابع و سایر مسائل قابل کاربرد نیستند. اگر یک طرح تمام شرایط را یکجا برآورده سازد، به آن طرح شدنی^۱ می‌گویند. به شرایطی که باید برآورده شوند تا یک طرح شدنی به وجود آید، قید^۲ می‌گویند. از نقطه نظر فیزیکی دو نوع قید را می‌توان تعریف کرد:

۱- قیودی که بر متغیرهای طراحی اعمال می‌شوند و به دلایل غیر رفتاری محدوده تغییرات متغیرها را محدود می‌کنند، قیود تکنولوژیکی^۳ یا قیود لبه‌ای^۴ می‌گویند. قید تکنولوژیکی یک حد تعیین شده (همانند بالا و پایین) برای متغیرهای طراحی است یا رابطه‌ای است که مقدار نسبی گروهی از متغیرها را ثابت می‌کند [۱۰]. نمونه‌هایی از چنین متغیرهایی می‌تواند شیب حداقل یک سقف، ضخامت حداقل یک صفحه یا ارتفاع حداکثر یک پوسته باشد.

۲- به قیودی که از شرایط رفتاری سازه به دست می‌آیند، قیود رفتاری^۵ می‌گویند. حدود اعمال شده بر تنشهای حداکثر، تغییر مکانها و یا مقاومت کمانشی در یک سازه، نمونه‌هایی از این نوع قیود هستند.

از نقطه نظر ریاضی هر دو نوع قیود رفتاری و طراحی ممکن است به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌ها بیان شوند:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (۴۲-۵)$$

که n_g تعداد قیود نامساوی و \mathbf{x} بردار متغیرهای طراحی است.

قیود مساوی را در اغلب موارد می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_h \quad (۴۳-۵)$$

که n_h تعداد قیود مساوی است. در بسیاری از مسائل می‌توان از قیود مساوی برای حذف بعضی از متغیرها از بهینه‌سازی استفاده کرد و تعداد متغیرهای طراحی را کاهش داد.

^۱ Feasible Design

^۲ Constraint

^۳ Technological Constraints

^۴ Side Constraints

^۵ Behavior Constraints

۵-۷-۳-تابع هدف^۱

معمولاً تعداد نامحدودی از طرح‌های شدنی در یک مسأله وجود دارد. برای رسیدن به بهترین آنها، نیاز به تشکیل تابعی از متغیرهاست تا بتوان مقایسه‌ای بین طرح‌های شدنی انجام داد که این تابع، همان تابع هدف است. همواره فرض می‌شود که تابع هدف $z = f(x)$ باید حداقل شود. اگر نیاز به حداکثر کردن تابع هدف باشد می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\max f(x) = -\min[-f(x)] \quad (۴۴-۵)$$

انتخاب تابع هدف یکی از مهمترین بخش‌های بهینه‌سازی است. در حالت کلی تابع هدف در بر گیرنده مهمترین ویژگی‌های یک طرح می‌باشد، اما در عین حال ممکن است یک جمع وزنی^۲ از تعدادی از این ویژگی‌ها باشد. یکی از پر استفاده‌ترین توابع هدف وزن می‌باشد و دلیل آن این است که به راحتی فرمول‌بندی می‌شود. تابع هدف هزینه نسبت به وزن از اهمیت بیشتری برخوردار است اما اغلب تعیین داده‌های مناسب برای رسیدن به هزینه واقعی دشوار است. یک تابع هزینه کلی می‌تواند شامل هزینه مصالح، ساخت، حمل و نقل و نظایر این باشد.

۵-۷-۴-فرمول‌بندی ریاضی^۳

یک مسأله بهینه‌سازی سازه‌ای در واقع پیدا کردن مقادیر بهینه متغیرهای طراحی است به گونه‌ای که تابع هدف حداقل شود و قیود تعیین شده ارضا شوند. رفتار سازه معمولاً می‌تواند با استفاده از معادلات تحلیل برای مقادیر معین متغیرهای طراحی مورد استفاده قرار گیرد.

با این فرض که تمام قیود مساوی می‌توانند حذف شوند، می‌توان مسأله طرح بهینه را از نظر ریاضی به انتخاب متغیرهای طراحی به صورتی تعریف کرد که معادلات زیر برقرار باشند:

$$z = f(x) \rightarrow \min \quad (۴۵-۵)$$

^۱ Objective Function

^۲ Weighted Sum

^۳ Mathematical Formulation

$$f_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (46 \text{ د})$$

در فرمول‌بندی یک مسأله بهینه‌سازی باید به نکات زیر توجه شود [۱۰]:

- ۱- تمام قیود نامساوی باید به صورت " ≤ 0 " بیان شوند. هر قید نامساوی می‌تواند به این فرم تبدیل شود.
 - ۲- اگر مقدار تابع هدف به وسیله ضرب کردن آن در یک عدد مثبت ثابت تغییر کند، طرح بهینه تغییر نخواهد کرد. اگرچه مقدار تابع هدف تغییر می‌کند.
 - ۳- قیود نامساوی را نیز می‌توان در یک عدد ثابت مثبت ضرب کرد بدون اینکه اثری در جواب بهینه داشته باشد.
 - ۴- توجه به این نکته بسیار مهم است که افزایش تعداد قیدها موجب جمع شدن^۱ محدوده شدنی^۲ می‌شود و همچنین با حذف قیود، محدوده شدنی گسترش می‌یابد. هنگامی که محدوده شدنی جمع می‌شود، طرح‌های شدنی کمتری وجود خواهد داشت و در پس آن مقدار حداقل تابع هدف افزایش می‌یابد.
- در این رساله از سه روش زیر برای بهینه‌سازی سازه‌ها استفاده شده است که مختصراً به شرح این سه روش پرداخته خواهد شد:

۱- روش جهت‌های شدنی اصلاح شده (MMFD)^۳

۲- روش برنامه ریزی خطی متوالی (SLP)^۴

۳- روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP)^۵

^۱ Shrinkage

^۲ Feasible Space

^۳ The Method Modified Feasible Directions

^۴ Sequential Linear Programming

^۵ Sequential Quadratic Programming

۵-۸- روش جهت‌های شدنی اصلاح شده (MMFD)

این روش بر اساس شروع از یک نقطه ابتدایی و سپس تعیین جهت و فاصله حرکت در هر مرحله بنا شده است. یعنی بر اساس طرح اولیه یک طرح جدید به دست می‌آید و این طرح به عنوان طرح اولیه برای طرح بعدی خواهد بود و به همین ترتیب تا رسیدن به جواب بهینه ادامه خواهد یافت. فرمول‌بندی این روش به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) \quad (47-5)$$

به شرطی که :

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (48-5)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, \dots, n \quad (49-5)$$

طرح جدید در هر چرخه با استفاده از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathbf{x}^q = \mathbf{x}^{q-1} + \alpha \mathbf{s}^q \quad (50-5)$$

که \mathbf{s}^q جهت شدنی و α فاصله حرکت می‌باشد.

در حالت کلی می‌توان پروسه روش MMFD را به بخشهای زیر تقسیم‌بندی کرد :

۱- شروع کار از $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0, q = 0$

۲- $q = q + 1$

۳- محاسبه $g_j(\mathbf{x}^{q-1}), f(\mathbf{x}^{q-1})$ ، $j = 1, \dots, m$

۴- تعیین مجموعه قیود بحرانی، J

۵- محاسبه $\nabla g_j(\mathbf{x}^{q-1}), \nabla f(\mathbf{x}^{q-1})$

۶- تعیین جهت جستجو، \mathbf{s}^q

۷- انجام یک جستجوی یک بعدی برای پیدا کردن α

۸- محاسبه \mathbf{x}^q از رابطه $\mathbf{x}^q = \mathbf{x}^{q-1} + \alpha \mathbf{s}^q$

- ۹- کنترل همگرایی به جواب بهینه، اگر ارضا شود که مسأله تمام است و اگر نشود از مرحله ۲ ادامه پیدا می‌کند. بخش‌های مهم مسأله در زیر آمده است :
- ۱- پیدا کردن جهت جستجوی شدنی و کاربردی
- ۲- پیدا کردن پارامتر اسکالر α به نحوی که $F(\mathbf{x}^{q-1} + \alpha \mathbf{s}^q)$ را با توجه به قیود بهینه‌سازی حداقل کند.
- ۳- کنترل همگرایی به جواب بهینه
- برای توضیحات بیشتر در مورد مراحل این روش می‌توان به مرجع [۱۲] مراجعه کرد.

۵-۹- روش برنامه ریزی خطی متوالی (SLP)

روش‌های برنامه ریزی خطی متوالی (SLP) بر اساس خطی سازی متوالی قیود و تابع هدف بنا شده است [۱۰]. با استفاده از بسط سری تیلور f و g حول نقطه \mathbf{x}^{q-1} تنها برای جملات خطی، مسأله مسأله برنامه ریزی غیر خطی همانند زیر به وسیله یک مسأله LP جایگزین می‌شود :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{q-1}) + \nabla f(\mathbf{x}^{q-1})^T \delta \mathbf{x} \quad (۵۱-۵)$$

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x}^{q-1}) + \nabla g_j(\mathbf{x}^{q-1})^T \delta \mathbf{x} \quad (۵۲-۵)$$

که در آن :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^q - \mathbf{x}^{q-1} \quad (۵۳-۵)$$

توجه شود که تمام ضرایب غیر از مقادیر متغیرهای طراحی \mathbf{x}^q ، ثابت هستند. بنابراین می‌توان همانند زیر، این معادلات را باز نویسی کرد :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}^0 + \nabla f(\mathbf{x}^{q-1})^T \delta \mathbf{x} \quad (۵۴-۵)$$

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x}) = \tilde{g}_j^0 + \nabla g_j(\mathbf{x}^{q-1})^T \delta \mathbf{x} \quad (۵۵-۵)$$

که :

$$\tilde{f}^0 = f(\mathbf{x}^{q-1}) - \nabla f(\mathbf{x}^{q-1})^T \delta \mathbf{x}^{q-1} \quad (۵۶-۵)$$

۳

$$g^q = g_1(x^{q-1}) - \nabla g_2(x^{q-1})^T \delta x^{q-1} \quad (57.5)$$

مسئله LP می‌تواند به تعریف مجدد x^q در هر چرخه برای جواب بهینه، می‌تواند به صورت تکراری حل شود. این روش ممکن است همیشه به سمت جواب بهینه همگرا نشود [۱۰]. مشکلاتی که ممکن است در حین حل مسئله با آنها روبرو شد عبارتند از:

۱- اگر جواب بهینه منطبق بر یکی از رئوس منطقه شدنی نباشد، نتایج LP بین رئوس منطقه شدنی نوسان می‌کند. این موضوع در مسائل مقیدی اتفاق می‌افتد که تعداد قیدهای فعال در نقطه بهینه کمتر از تعداد متغیرهای طراحی است.

۲- گاهی اوقات که جواب بهینه در یکی از رئوس منطقه شدنی باشد، اگر نقطه شروع از جواب بهینه صحیح، دور باشد، ممکن است به جواب همگرا نشود.

۳- در مسائل غیر محدب، برخی از خطی‌سازها در قیود ممکن است آن بخش از منطقه شدنی که جواب بهینه در آن قرار دارد را از مسئله حذف کند.

این مشکلات توسط روشهایی همانند روش صفحه برش^۱ و برنامه ریزی تقریبی^۲ تا حدودی برطرف شد. روش صفحه برش که توسط چنی^۳ و گلدستین^۴ و کلی^۵ ارائه شده بر اساس این خاصیت کاربردی بنا شده است که قیود خطی شده در مسائل محدب همواره در بیرون فضای شدنی قرار می‌گیرند. بنابراین می‌توان منطقه شدنی را به وسیله دستهای از قیود خطی به وجود آورد و مسئله LP را حل کرد.

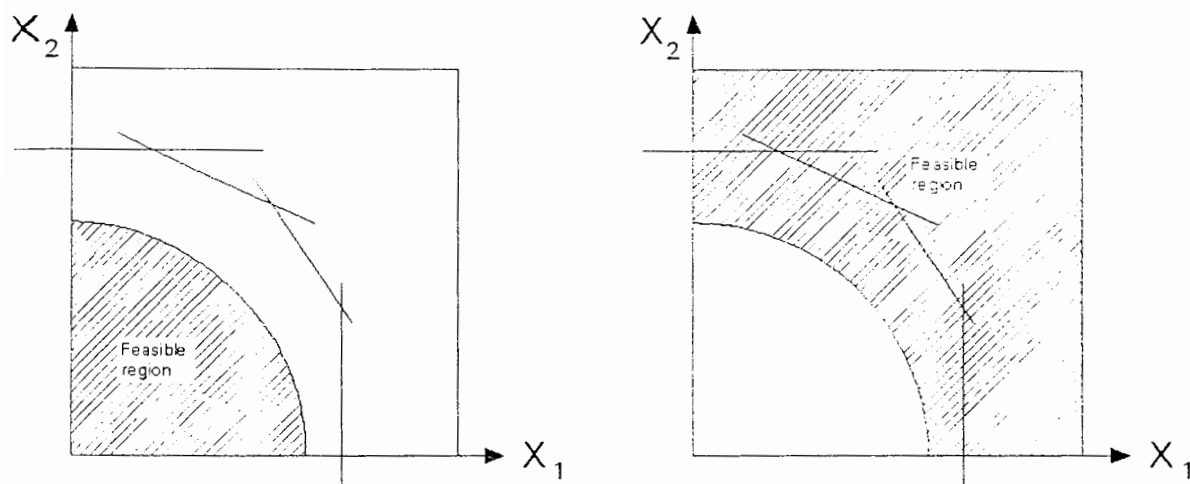
^۱ Cutting Plane

^۲ Approximation Programming

^۳ Cheney

^۴ Goldestein

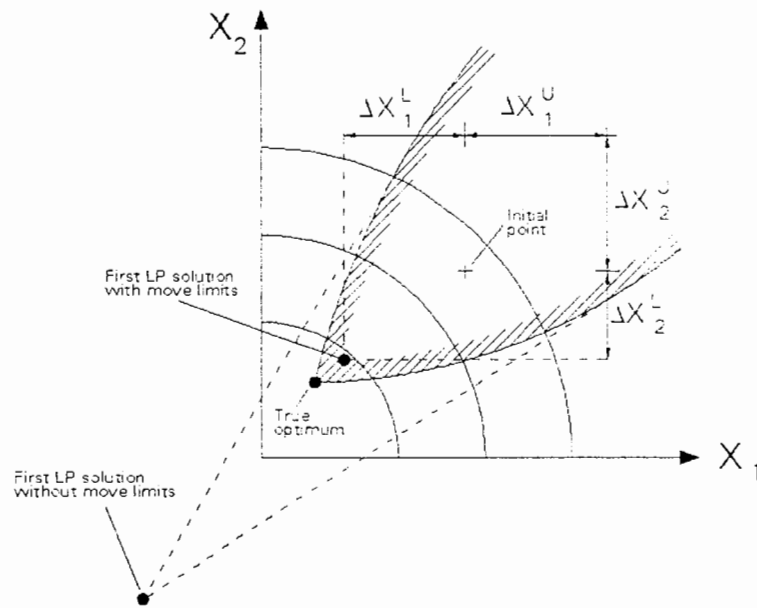
^۵ Kelly



شکل ۵-۲: استفاده از قیود خطی در مسائل غیرخطی [۱۰]

روش برنامه ریزی تقریبی توسط گریفیت^۱ و استوارت^۲ ارائه گردید. همانگونه که در شکل زیر دیده می‌شود در این روش نقطه طرح به سمت ناحیه شدنی حرکت کرده و سپس در طول این مرز به جستجوی جواب بهینه ادامه می‌دهد. قیودهای اضافی که برای اطمینان از دقت تقریب‌های خطی به‌کار رفته و حرکت نقطه طرح را مقید می‌کنند به صورت زیر تعریف می‌شوند:

^۱ Griffith
^۲ Stewart



شکل ۵-۳: استفاده از حد حرکت برای رسیدن به جواب بهینه [۱۰]

$$-\Delta x^L \leq \Delta x \leq \Delta x^U \quad (5-58)$$

که Δx^L و Δx^U حدود حرکت هستند به صورت بردارهای ثابت و مثبتی انتخاب می‌شوند و کران بالا و پایین حرکت را مشخص می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر در مورد این روشها می‌توان به مرجع [۱۰] مراجعه کرد.

۵-۱۰- برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP)

این روش با توجه به نظر محققین یکی از بهترین و قویترین روش‌های بهینه‌سازی می‌باشد. مفاهیم پایه این روش بسیار شبیه به روش برنامه‌ریزی خطی متوالی می‌باشد. ابتدا بسط تقریبی سری تیلور توابع هدف و قیدی محاسبه می‌شود. اگر چه به جای حداقل سازی تابع هدف خطی شده، یک تابع هدف تقریبی درجه دوم به وجود می‌آید [۱۲].

برای یک مسأله SQP خواهیم داشت:

$$\text{Minimize } Q(s) = f^0 - \nabla f^T S + S^T B S \quad (5-59)$$

به شرطی که:

$$(V^T g_j)^T S + g_j^0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (60-5)$$

ماتریس B که یک ماتریس معین و مثبت است، در ابتدا یک ماتریس واحد است و در چرخه‌های بعدی با استفاده از تئوری هسین^۱ برای توابع لاگرانژین مجدداً محاسبه می‌شود. حال فرض می‌شود که مساله، حداقل‌سازی Q تحت قیود خطی است. در نقطه بهینه این مساله مقادیر ضریگ‌های لاگرانژ λ_j ، محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از تابع لاگرانژین تقریبی جستجو در جهت S انجام خواهد شد. یعنی در روابط زیر α محاسبه می‌شود.

$$\text{minimize } Q = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m u_j \max[0, g_j(\mathbf{x})] \quad (61-5)$$

که :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{q-1} + \alpha \mathbf{s} \quad (62-5)$$

$$u_j = |\lambda_j| \quad j = 1, \dots, m \quad \text{در چرخه اول} \quad (63-5)$$

$$u_j = \max \left[|\lambda_j|, \frac{1}{2} (u_j - |\lambda_j|) \right] \quad j = 1, \dots, m \quad \text{در چرخه‌های بعدی} \quad (64-5)$$

و از چرخه قبلی داریم :

$$u_j = u_j \quad (65-5)$$

پس از اینکه جستجوی یک بعدی کامل شد، ماتریس B جدید با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود :

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} \frac{\mathbf{B} \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{B}}{\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p}} + \frac{\eta \eta^T}{\mathbf{p}^T \eta} \quad (66-5)$$

که در آن :

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}^q - \mathbf{x}^{q-1} \quad (67-5)$$

$$\eta = \theta \mathbf{y} + (1 - \theta) \mathbf{B} \mathbf{p} \quad (68-5)$$

$$\mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^q - \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{q-1} \quad (69-5)$$

^۱ Hessian

$$Q = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad (70-5)$$

$$\theta = \begin{cases} 1.0 \\ \frac{0.8\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{y}} \end{cases} \quad (71-5)$$

سپس \mathbf{B}^* جایگزین \mathbf{B} در سیکل جدید می‌شود.

فصل ششم

بهینه‌سازی شکل سازه‌های پوسته‌ای

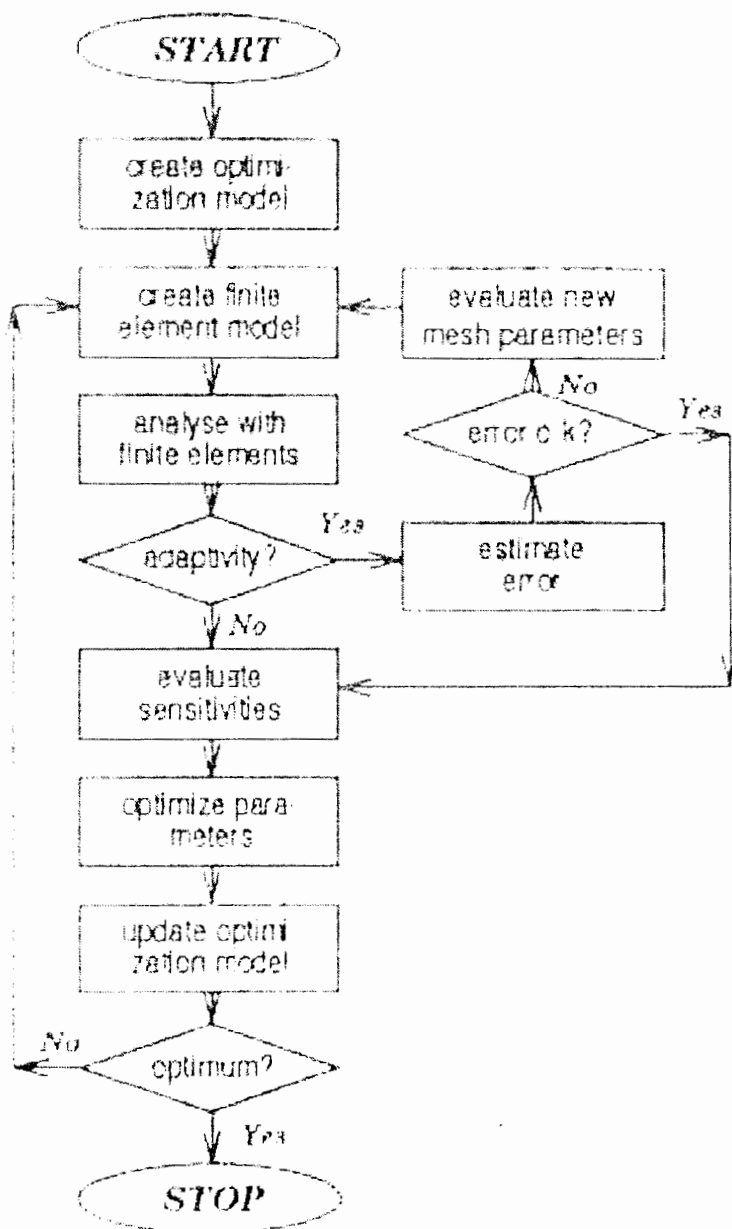
۶-۱- مقدمه:

به طور کلی دو الگوریتم معتبر برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل سازه‌ها موجود می‌باشد. یکی با استفاده از رشد تطبیقی و دیگری با استفاده از روش تغییرات مرزی. اما چون در این پایان‌نامه از روش تغییر مرزها برای ایجاد تغییر در شکل سازه استفاده می‌شود، در ادامه توضیحات بیشتری در این زمینه ارائه می‌شود.

در اینجا لازم به ذکر است با توجه به اینکه این روش در چند سال اخیر مطرح شده است، بنابراین در ابتدای راه خود بوده و به تکامل بیشتری نیاز دارد و به همین دلیل هم استفاده از این روش در برنامه‌های تجاری بهینه‌سازی در ابتدای راه خود قرار دارد.

۶-۲- الگوریتم بهینه‌سازی شکل:

در حل مسائل بهینه‌سازی شکل بایستی در ابتدا الگوریتمی را معرفی کرد تا بواسطه آن بتوان مراحل لازم برای این امر را دنبال نمود. روش کار بدین ترتیب است که ابتدا تابع هدفی مانند وزن سازه تعریف شده و الگوریتم کار خود را بر روی این تابع و با توجه به اطلاعات موجود آغاز می‌کند. فلوچارت این الگوریتم در شکل (۶-۱) قابل ملاحظه می‌باشد [۱۳].



شکل ۶-۱: الگوریتم بهینه‌سازی شکل سازه‌ها

۳-۶- تولید مدل بهینه سازی شکل:

در ابتدای فرآیند بهینه سازی شکل بایستی هندسه اولیه سازه مورد نظر را مشخص و تعریف کنیم. این کار ممکن است با روش‌های مختلفی صورت پذیرد. مثلا توسط یک برنامه کامپیوتری و یا توسط

خروجی یک برنامه پردازشگر تصویر و یا روش دستی صورت می‌گیرد، که در این پایان نامه با استفاده از برنامه‌های شرح داده شده در فصل ۴ و در غالب یک فایل متنی ارائه می‌شود..

مدل سازی شکل سازه نیز با روش‌های گوناگونی امکان پذیر میباشد که در فصل ۴ به تفصیل آمده- است. جهت یادآوری، روشی که در اینجا جهت مدل‌سازی شکل سازه مورد استفاده واقع شده است، تعریف معادلات مستقل در جهات X و Y است. ضرائب این معادلات به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه‌سازی شکل در نظر گرفته می‌شود که با تغییر مقید این ضرائب می‌توان در هر سیکل بهینه‌سازی به هندسه جدید مدل رسید. در ضمن در این رساله از مختصه Z هر گره از شبکه اجزای محدود نیز به عنوان متغیرهای طراحی استفاده شده است. در این حالت در هر سیکل، برنامه با تغییر دادن مختصه Z گره‌ها، هندسه جدید را بوجود می‌آورد و با استفاده از هندسه جدید در هر سیکل قیود مساله را بررسی می‌کند و تا رسیدن به جواب نهایی ادامه پیدا خواهد کرد. نهایتاً بایستی کلیه اطلاعات لازم برای حل مساله بهینه‌سازی شکل را به همراه مدل هندسی اولیه سازه تعریف کنیم.

۶-۴- تولید مدل اجزای محدود:

با استفاده از اطلاعات موجود در مرحله قبل بایستی بتوان از مدل هندسی سازه، یک مدل محاسباتی اجزای محدود را تولید کرد. بنابراین بایستی از یک تولید کننده مش برای گسسته‌سازی دامنه یا همان مش بندی شکل سازه استفاده کرد. پس از تولید یک مش معتبر که شرایط آن در فصل ۴ بیان شد، می‌توان مدل محاسباتی اجزای محدود را فراهم ساخت. این مش می‌تواند از نوع مثلثی و یا چهارضلعی و با مرتبه های دلخواه باشد که در این رساله برای مش‌هایی با تصویر مستطیلی از المانهای چهارضلعی و برای مش‌های با تصویر دایروی از هر دو نوع المان‌های چهار ضلعی و سه ضلعی در مدل-

سازی مساله استفاده می‌شود. برای تولید یک مدل کامل محاسباتی بایستی برنامه تولید کننده مش، توانایی انتقال اطلاعات مربوط به مرزها و تکیه گاه‌ها و بارگذاری به مدل محاسباتی را داشته باشد.

۵-۶- آنالیز اجزای محدود:

در این مرحله بایستی مدل محاسباتی را تحلیل کرده و تنش‌ها و تغییرمکان‌های بوجود آمده در سازه را ارزیابی نمود. با دانستن مقادیر تنشها و تغییرمکان‌ها می‌توان به محاسبه و کنترل تابع هدف و قیود تعریف شده اقدام کرد. با محاسبه توابع هدف و قیود، اطلاعات لازم برای انجام فرآیند بهینه‌سازی شکل گردآوری می‌شود.

۶-۶- فرآیند بهینه سازی:

در این مرحله و با استفاده از یک الگوریتم مناسب و استخدام روش‌هایی قوی از خانواده روش‌های برنامه ریزی ریاضی، سعی در ایجاد بهبود در تابع هدف می‌شود. در طول فرآیند بهینه سازی شکل مقادیری جدید برای متغیرهای طراحی تعریف می‌شود که سبب ایجاد تغییراتی در شکل سازه خواهد شد. اما این تغییرات بایستی به گونه‌ای باشد که قیود مساله بهینه‌سازی را نقض نکند و علاوه بر این نیز باعث ایجاد بهبود در مقدار تابع هدف بشود.

۶-۷- بهنگام کردن مدل بهینه سازی:

با ایجاد تغییرات در ضرائب معادلات یا مولفه Z هر گره، تغییراتی در شکل پوسته و در نتیجه در شکل سازه ایجاد می‌شود. بنابراین نیاز است که مراحل تولید مدل اجزای محدود، حل مساله اجزای محدود، ارزیابی تابع هدف و قیود و فرآیند بهینه‌سازی، دوباره برای شکل جدید انجام شوند. این فرآیند تا هنگامی که معیارهای همگرایی اکتان شوند ادامه پیدا می‌کند.

۶-۸- تعریف مساله بهینه‌سازی شکل :

در این بخش چگونگی تعریف مساله بهینه‌سازی شکل بیان می‌شود. در حالت کلی می‌توان مساله بهینه‌سازی را بصورت زیر عنوان نمود.

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{or} \quad \max \quad f(x) \\ g_j(x) & \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\ h_k(x) & = 0 \quad k = 1, 2, \dots, l \\ x_i' & \leq x_i \leq x_i'' \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (۱-۶)$$

که x بردار متغیرهای طراحی، $f(x)$ تابع هدفی که باید مینیمم یا ماکسیمم شود، $g_j(x)$ و $h_k(x)$ به ترتیب توابع قیود نامساوی و مساوی و x_i' و x_i'' حدود پایین و بالای متغیرهای طراحی x_i می‌باشند. در ادامه و با بیان مسائل حل شده، می‌توان به وضوح کاربرد این تعریف را ملاحظه کرد. البته خاطر نشان می‌سازد که تعریف مساله بهینه‌سازی از مراحل بسیار مهم در حل اینگونه مسائل می‌باشد و چگونگی تعریف صورت مساله بهینه‌سازی، تاثیر بسیاری در سرعت و دقت جواب حاصل شده و همچنین دستیابی و یا عدم دستیابی به جواب بهینه خواهد داشت.

۶-۹- توابع هدف:

یکی از علل پرداختن به بهینه‌سازی شکل بعد از بهینه‌سازی توپولوژی، امکان تعریف انواع توابع هدف می‌باشد در حالی که این امکان در بهینه‌سازی توپولوژی، بسیار محدود می‌باشد. تعدادی از توابع هدف

معمول و پر کاربرد در بهینه‌سازی شکل عبارتند از:

• تابع وزن و یا حجم کل سازه و مصالح مصرفی

• تابع انرژی کرنشی

• تابع یکنواخت کننده تنش

• تابع تنش ماکزیمم

• تابع تمرکز تنش

۶-۹-۱- تابع وزن و حجم کل:

یکی از ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین توابع هدف در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها، مینیمم‌سازی وزن و یا حجم سازه و مصالح مصرفی در آن می‌باشد. تابع هدف حجم با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود.

$$F_V = \int_{\Omega} d\Omega \quad (۲-۶)$$

با استفاده از روش اختلافات محدود می‌توان مشتق تابع هدف را نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه کرد.

$$\frac{\partial F_V}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta F_V}{\Delta x_i} = \frac{F_V(x_i + \Delta x_i) - F_V(x_i)}{\Delta x_i} \quad (۳-۶)$$

برای مینیمم کردن وزن فرض می‌شود که وزن مخصوص، تابعی از متغیرهای طراحی نباشد. بنابراین می‌توان با ضرب ثابت γ در رابطه فوق، وزن سازه را محاسبه کرد. بدین ترتیب تابع هدف وزن سازه به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$F_W = \int_{\Omega} \gamma d\Omega \quad (۴-۶)$$

مشتق این تابع را نیز به طور مشابه می‌توان با استفاده از روش اختلافات محدود به شکل زیر بدست آورد.

$$\frac{\partial F_W}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta F_W}{\Delta x_i} = \frac{F_W(x_i + \Delta x_i) - F_W(x_i)}{\Delta x_i} \quad (۵-۶)$$

✓ در این رساله از حجم سازه به عنوان تابع هدف استفاده شده است.

۶-۹-۲- تابع انرژی کرنشی:

از دیگر توابعی که به عنوان تابع هدف مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع انرژی کرنشی است. انرژی کرنشی سازه را می‌توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد.

$$F_w = \int_{\Omega} \sigma^T \mathbf{D}^{-1} \sigma \, d\Omega \quad (۶-۶)$$

مشتق تابع انرژی کرنشی با توجه به ثابت بودن ماتریس الاستیسیته \mathbf{D} ، از رابطه قبل قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial F_w}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^T \mathbf{D}^{-1} \sigma + \sigma^T \mathbf{D}^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega \quad (۷-۶)$$

۶-۹-۳- تابع تنش یکنواخت:

استفاده از این تابع هدف به منظور دستیابی به یک طرح سازه‌ای با تنش‌های یکنواخت شده می‌باشد. یعنی می‌خواهیم کلیه تنش‌های سازه برابر با حالت ایده‌آل باشد. البته این نوع تابع هدف را نمی‌توان برای هر حالتی مورد استفاده قرار داد. تابع هدف در این حالت از مجموع مربعات اختلاف بین تنش‌های موجود و تنش هدف شکل می‌گیرد. بنابراین این سعی بر این است که تا حد امکان تابع هدف کاهش یابد و در حالت ایده‌آل مقدار آن مساوی صفر می‌شود. برای تعریف تنش یکنواخت از توابع متنوعی می‌توان استفاده کرد که یکی از آنها به شکل زیر است.

$$F_L = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \, d\Omega \quad (۸-۶)$$

در این رابطه مقدار σ میتواند مساوی تنش معادل و یا تنش اصلی ماکزیمم باشد. مقدار σ_0 نیز برابر است با تنش پیشنهادی طراح و یا میانگین تنش موجود بر روی دامنه سازه. مشتق رابطه فوق نیز با فرض ثابت بودن تنش هدف σ_0 به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial F_L}{\partial x_i} = 2 \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} d\Omega \quad (9-6)$$

در سال ۱۹۹۰ شخصی به نام کیمیش^۱ یک تابع هدف اصلاح شده برای حالت تنش یکنواخت و یکسان‌سازی تنش‌ها ارائه کرد. رابطه او به شکل زیر است [۱۴]:

$$F_L = \int_{\Omega} (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} d\Omega \quad (10-6)$$

این رابطه کاملاً غیرخطی بوده و از امتیازات این تابع این است که مشتق دوم آن پیوسته می‌باشد.

۴-۹-۶- تابع تنش حداکثر:

تابع هدف در این حالت می‌تواند ماکزیمم مقدار تنش اصلی و یا ماکزیمم مقدار تنش معادل انتخاب شود. بنابراین تابع هدف به شکل زیر خواهد بود.

$$F_S = \sigma_{\max} \quad (11-6)$$

و مشتق این رابطه برابر است با:

$$\frac{\partial F_S}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{\max}}{\partial x_i} \quad (12-6)$$

۱۰-۶- توابع قید:

همان‌گونه که می‌دانیم، گاهی اوقات لازم است مقادیر تنش‌ها، تغییر مکان‌ها و غیره در بعضی از نقاط سازه از حدود مشخصی فراتر نروند. بنابراین لازم است توابعی را برای کنترل مقادیر متغیرهای طراحی در غالب توابع قید تعریف کنیم. بنابراین در فرآیند بهینه‌سازی شکل، تغییرات متغیرهای طراحی به گونه‌ای خواهد بود که هیچ یک از قیود تعریف شده را نقض نکند.

در اینجا می‌توان به چند روش قیود را تعریف نمود که عبارتند از:

- انتخاب کلیه نقاط دامنه

- انتخاب نقاط از پیش تعیین شده

- انتخاب کلیه نقاط روی مرز سازه

✓ در این پایان نامه قیود تعریف شده در دسته اول می‌گنجد.

یکی دیگر از نکات مهم که بایستی برای قیود در نظر گرفت، نرمال کردن آنها می‌باشد. نرمال کردن قیود باعث ایجاد شرایط عددی بهتری برای انجام فرآیند بهینه‌سازی شکل می‌شود. بنابراین برای حد پایین قیود نامساوی خواهیم داشت:

$$g' = \frac{G' - G(x)}{|G'|} \leq 0 \quad (۱۳-۶)$$

و برای حد بالای قیود نامساوی خواهیم داشت:

$$g'' = \frac{G(x) - G''}{|G''|} \leq 0 \quad (۱۴-۶)$$

در روابط فوق $G(x)$ می‌تواند حجم، تنش، وزن، تغییر مکان و یا هر عامل دیگری باشد و G' و G'' بترتیب حدود پایین و بالای تابع قید می‌باشند. مشتق توابع قید فوق را می‌توان از روابط زیر و بدست آورد.

$$\frac{\partial g^I}{\partial x_i} = \frac{1}{|G^I|} \frac{\partial G^I}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial g^{II}}{\partial x_i} = \frac{1}{|G^{II}|} \frac{\partial G^{II}}{\partial x_i}$$
(۱۵-۶)

اما نوع دیگری از قیود که قبلا معرفی شد، قیود مساوی هستند. به علل مختلفی از این قیود استفاده نمی‌شود. هر قید مساوی را می‌توان با استفاده از دو قید نامساوی که حدود پایین و بالای آنها با هم برابر است تعریف کرد که معادل است با رابطه زیر:

$$g^I = -g^{II} \leq 0$$
(۱۶-۶)

در حالت بهینه g^I و g^{II} بایستی هر دو مساوی صفر باشند و یا اختلاف بسیار کمی با یکدیگر داشته باشند.

سه دسته از قیود که تقریباً دربرگیرنده کلیه نیازها هستند قابل تعریف و استفاده می‌باشند. آنها عبارتند از:

- قیود تنش‌ها
 - قیود تغییر مکان‌ها
 - قیود مربوط به نقاط کلیدی
- ✓ در این رساله از قیود تغییر مکان به عنوان قیود بهینه‌سازی استفاده شده است.

۶-۱۰-۱- قیود حجم و وزن:

این قیود، توابعی عمومی هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$g_V^i = \frac{V^i - V}{V^i} \quad (17-6)$$

$$g_V^u = \frac{V - V^u}{V^u}$$

که در این روابط مقادیر V^i و V^u حدود بالا و پایین حجم مواد تشکیل دهنده سازه می‌باشند.

به طور مشابه برای تابع قید وزن نیز می‌توان نوشت:

$$g_W^l = \frac{W^l - W}{W^l} \quad (18-6)$$

$$g_W^u = \frac{W - W^u}{W^u}$$

برای محاسبه مشتقات $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ و $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ ، همانند روابط قبل از روش اختلافات محدود استفاده می‌شود.

شود.

۶-۱۰-۲- قیود تغییرمکان:

این توابع نیز کاربرد بسیاری در حل مسائل بهینه‌سازی شکل داشته و غالباً در اکثر مسائل مورد استفاده واقع می‌شوند. توابع قیود تغییرمکان اغلب به شکل زیر بیان می‌شوند.

$$g_D^l = \frac{D^l - D}{D^l} \quad (19-6)$$

$$g_D^u = \frac{D - D^u}{D^u}$$

که در این روابط D^l و D^u حدود بالا و پایین تغییرمکان در همه و یا تعدادی از گره‌ها می‌باشند. در

این پایین نامه از این قیود برای تغییرمکان‌های حداکثر استفاده شده است. علاوه بر اینها بایستی توجه

داشت که قیود تغییرمکان برای هر درجه آزادی به شکل جداگانه تعریف می‌شوند. مثلاً در یک و یا

مجموعه‌ای از گره‌ها، برای تغییرمکان جهات 1 و 2. میتوان از قیود متفاوتی استفاده کرد.

۶-۱۰-۳- قیود تنشها:

دسته ای از قیود که تقریباً در تمام مسائل بهینه‌سازی شکل بایستی مورد استفاده قرار گیرند، همین قیود مربوط به تنش‌های بوجود آمده در سازه می‌باشند. این قیود در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$g'_s = \frac{S' - S}{S'} \quad (۶-۲۰)$$

$$g''_s = \frac{S - S''}{S''}$$

که مقادیر S' و S'' به ترتیب، حدود پایین و بالای تنش مجاز می‌باشند. تنش S در روابط فوق می‌تواند تنش معادل σ_{equ} ، یا تنش اصلی حداکثر $\sigma_{Pr_{max}}$ و یا تنش اصلی حداقل $\sigma_{Pr_{min}}$ باشد. در مورد قیود تنش می‌توان همانند قیود تغییر مکان، به صورت عمومی در سراسر دامنه و یا به صورت محلی در نقاط کلیدی استفاده کرد.

۶-۱۱- متغیرهای طراحی:

در حل مسائل بهینه‌سازی چگونگی انتخاب و تعریف متغیرهای طراحی از مراحل بسیار مهم در فرآیند حل مسائل می‌باشد. اهمیت این انتخاب را می‌توان در این جمله خلاصه کرد که داشتن سرعت بالا در حل مسائل و امکان دستیابی به جواب بهینه، بدون انتخاب صحیح متغیرهای طراحی امری دور از انتظار است. در این مرحله شخص طراح بایستی از قبل تصمیم بگیرد که در چه نقاطی از سازه امکان ایجاد تغییرات و تعریف متغیر طراحی وجود دارد و همچنین با توجه با تعریف محل و جهت حرکت متغیرهای طراحی، تغییرات ایجاد شده چگونه خواهد بود.

در کارهایی که در گذشته در این زمینه انجام شده است، انواع مختلفی از متغیرهای طراحی جهت حل مسائل بهینه‌سازی شکل مورد استفاده قرار گرفته اند. مثلاً در یکی از آنها موقعیت مکانی گره‌های واقع

بر مرزهای سازه و در دیگری ضرایب چندجمله‌ایهای تعریف‌کننده مرزها به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. در روش‌های بعدی از اسپیلاینها^۱ به عنوان مدل‌کننده مرزهای سازه استفاده شد و مختصات نقاط کنترلی اسپیلاین به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه‌سازی استفاده شدند. در این پایان‌نامه از ضرائب معادلات تشکیل دهنده سطح پوسته به عنوان متغیرهای طراحی استفاده شده است. همچنین از مولفه Z مربوط به هر گره نیز به عنوان متغیر طراحی استفاده شده است که در ادامه در مورد نتایج بدست آمده از این متغیرها بحث شده است.

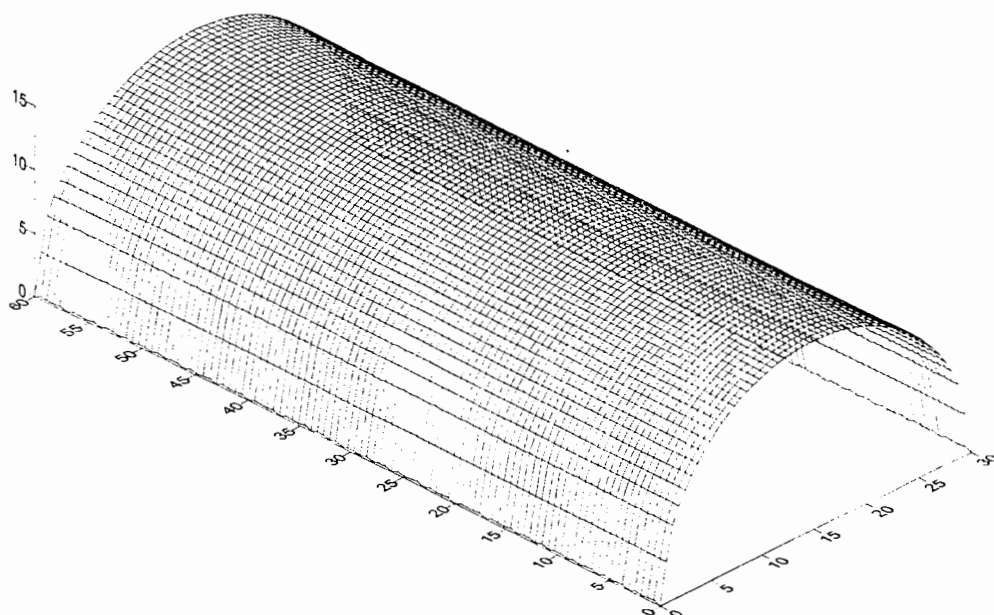
زمانی که از ضرائب معادلات تشکیل دهنده سطح پوسته به عنوان متغیر طراحی استفاده شود، بر خلاف حالتی که از مولفه Z به عنوان متغیر طراحی استفاده می‌شود، تعداد متغیرهای طراحی بسیار کاهش می‌یابد. بدین ترتیب می‌توان تا حدود زیادی از پارامترهای طراحی کاست و البته باید توجه کرد که پایین آوردن تعداد متغیرهای طراحی به گونه‌ای باشد که سبب از دست رفتن بعضی از مشخصه‌های مهم و مورد انتظار از سازه نشود. بنابراین بایستی تعادلی منطقی بین کاهش تعداد متغیرهای طراحی و انتظارات مورد نظر از سازه برقرار شود تا بتوان هم مساله‌ای راحت را حل کرد و هم جوابی مناسب را بدست آورد.

۶-۱۲-مثال‌های عددی

۶-۱۲-۱- پوسته استوانه‌ای

پوسته استوانه‌ای شکل (۶-۲) را در نظر بگیرید. شعاع این پوسته ۳ متر و طول آن ۶ متر می‌باشد که تحت ثر بار منفرد قائم در دو راس خود قرار می‌گیرد. سایر پارامترهای مساله به صورت زیر است:

^۱ SP-line



شکل ۶-۲: شکل اولیه پوسته استوانه‌ای

$$\text{Thickness} = t = 0.1 \text{ cm}$$

$$E = 2100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (۲۱-۶)$$

$$\nu = 0.3$$

که تعداد گردهای این مدل ۱۶۹ و تعداد المان‌های استفاده شده ۱۴۴ است. از تحلیل اجزای محدود

تغییر مکان حداکثر در رئوس پوسته برابر خواهد بود با:

$$\delta_{\max} = -0.0336664531 \text{ cm} \quad (۲۲-۶)$$

در این حالت مساله بهینه‌سازی به صورت حداقل سازی حجم سازه با توجه به افزایش تغییر مکان

حداکثر تا ۱.۵ برابر تعریف می‌شود، یعنی:

- حجم سازه همان تابع هدف است
- تغییر مکان حداکثر نقش قید بهینه‌سازی را ایفا می‌کند.
- کمترین مقدار تغییر مکان رئوس همان تغییر مکان اولیه است و مقدار حداکثر آن، ۱/۵ برابر تغییر مکان اولیه در رئوس پوسته می‌باشد.

با توجه به توضیحات ارائه شده در بالا می‌توان مساله بهینه‌سازی را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$V \rightarrow \min \quad (23-6)$$

به شرطی که :

$$\frac{\delta_{\max} - \delta}{\delta_{\max}} \leq 0$$

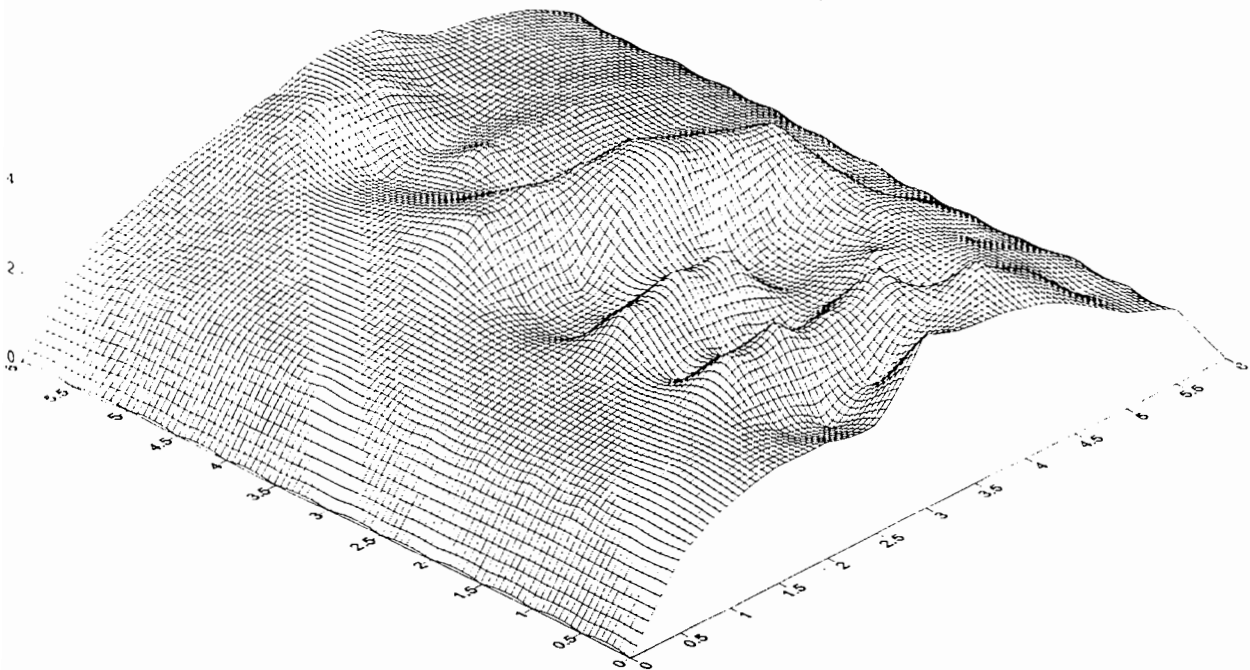
$$\frac{\delta - 1.5\delta_{\max}}{1.5\delta_{\max}} \leq 0 \quad (24-6)$$

که در روابط بالا V ، تابع هدف یا حجم سازه است و δ ، قدرمطلق تغییرمکان حداکثر در هر سیکل

بهینه‌سازی و δ_{\max} ، قدرمطلق تغییرمکان حداکثر در رئوس سازه اولیه است.

اگر از مولفه Z یا همان ارتفاع هر نقطه از پوسته به عنوان متغیر طراحی استفاده شود، پس از انجام

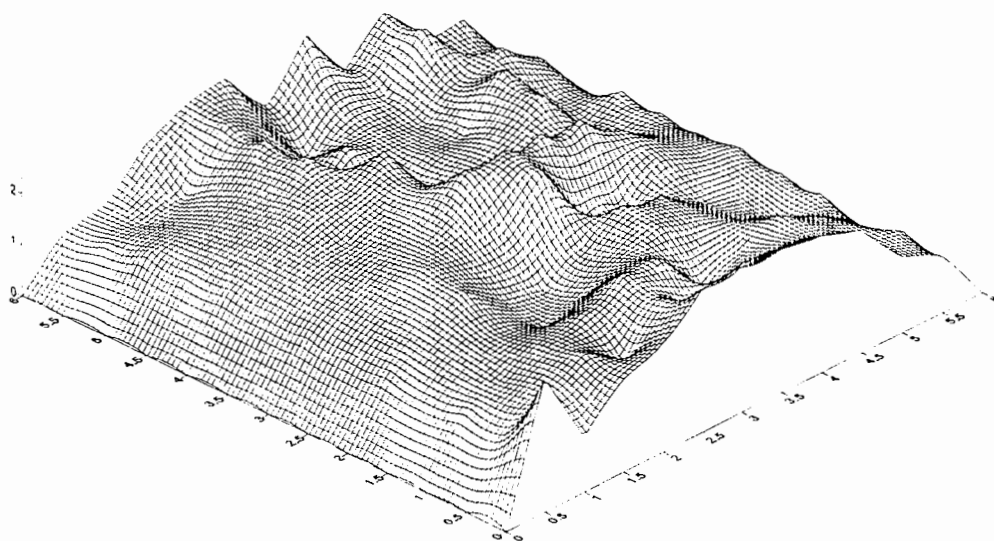
بهینه‌سازی توسط برنامه به روش SQP، شکل زیر به عنوان جواب بهینه حاصل می‌شود:



شکل ۶-۳: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SQP در حالتی مولفه Z ، متغیر طراحی باشد

همانطور که در شکل (۳-۶) ملاحظه می‌شود، شکل بدست آمده هیچ گونه وجهه کاربردی و عملی ندارد و با شکلی که مورد انتظار است کاملاً متفاوت است. دلیل این امر استفاده از مولفه Z در هر گره به عنوان متغیر طراحی است.

شکل (۴-۶) نشان دهنده شکل حاصل از بهینه‌سازی پوسته با استفاده از روش SLP است که این شکل هم مانند شکل (۳-۶) به هیچ وجه جنبه کاربردی ندارد.



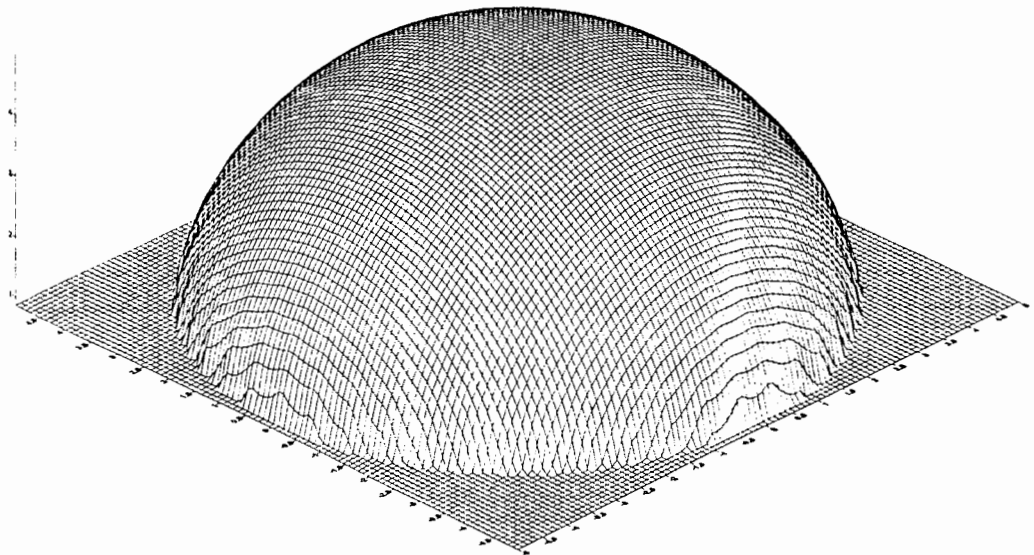
شکل ۴-۶: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SQP در حالتی مولفه Z، متغیر طراحی باشد

اگر از تعداد المان‌های بیشتری برای بهینه‌سازی استفاده شود، زمان حل مساله به طور تصاعدی زیاد شده به طوری که برای حل مساله‌ای با ۱۸۰۰ المان یا کامپیوترهای معمولی به حدود یک ماه زمان برای اجرای برنامه نیاز بود و یا می‌بایست از یک ابرکامپیوتر برای حل مساله استفاده کرد و تمام این تمهیدات تنها موجب بهبود اندکی در جواب حاصله می‌شود که احتمالاً با جواب صحیح بسیار فاصله خواهد داشت. به همین دلایل از تعداد المان‌های کمتر برای حل این مساله استفاده شده است.

در بخش (۶-۱۳) به بررسی دلایل بدست آمدن این نتایج پرداخته شده است.

۶-۱۲-۲- پوسته کروی

پوسته کروی شکل (۶-۵) را در نظر بگیرید که دارای ۱۰۰ المان و ۱۰۱ گره است.



شکل ۶-۵: شکل اولیه پوسته کروی

این پوسته در راس خود تحت اثر یک بار منفرد قرار گرفته است و توابع هدف و توابع هدف و قید استفاده شده برای

این پوسته همانند بخش ۶-۱۲-۱ می‌باشد. پس برای این مساله خواهیم داشت:

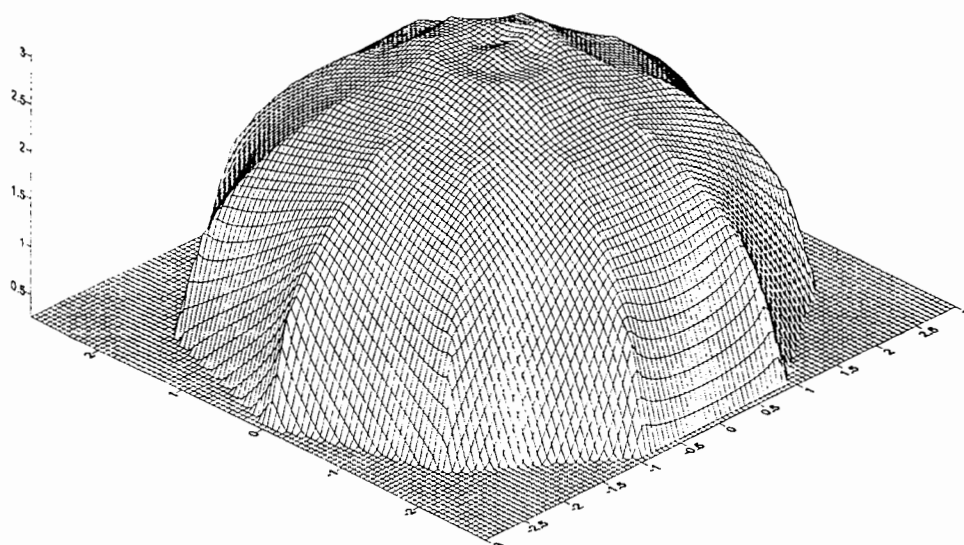
$$V \rightarrow \min \quad (25-6)$$

به شرطی که:

$$\frac{\delta_{\max} - \delta}{\delta_{\max}} \leq 0 \quad (26-6)$$

$$\frac{\delta - 1.5\delta_{\max}}{1.5\delta_{\max}} \leq 0$$

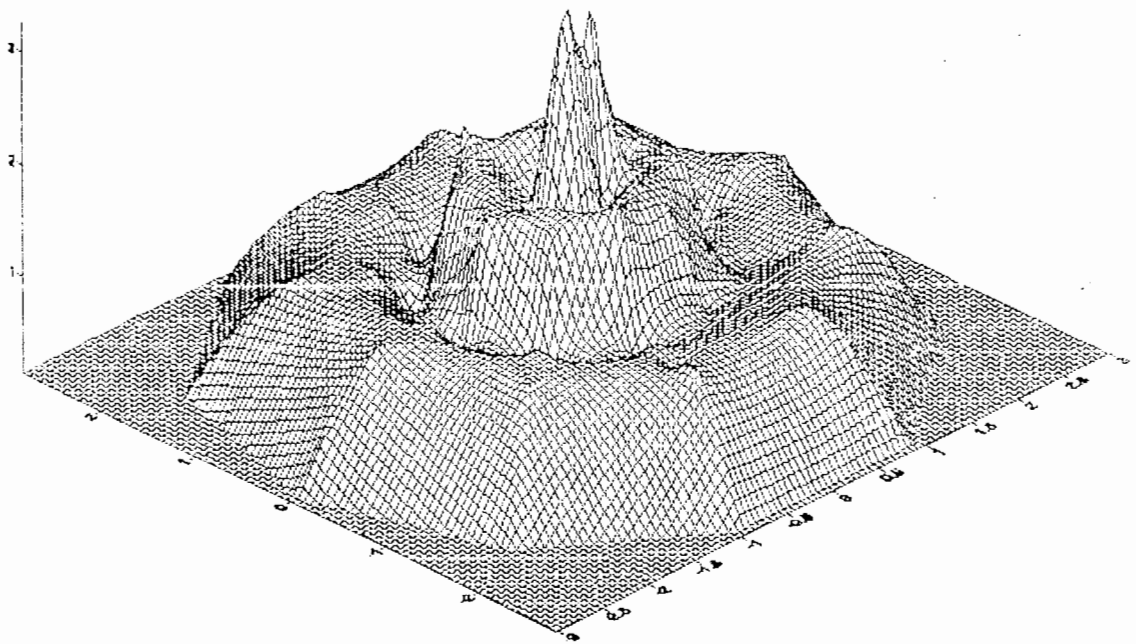
که در روابط بالا V ، تابع هدف یا حجم سازه است و δ ، قدرمطلق تغییرمکان حداکثر در هر سیکل بهینه‌سازی و δ_{max} ، قدرمطلق تغییرمکان حداکثر در رئوس سازه اولیه است. اگر از مولفه Z یا همان ارتفاع هر نقطه از پوسته به عنوان متغیر طراحی استفاده شود، پس از انجام بهینه‌سازی توسط برنامه به روش SQP، شکل زیر به عنوان جواب بهینه حاصل می‌شود:



شکل ۶-۶: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی با روش SQP در حالتی مولفه Z ، متغیر طراحی باشد همانطوری که در شکل (۶-۶) مشاهده می‌شود، شکل بدست آمده با شکل قابل انتظار پس از بهینه‌سازی متفاوت است و این تفاوت‌ها در نقاط حساس‌تر همانند اطراف راس کره نمود بیشتری پیدا می‌کند. دلایل این عدم تطبیق با جواب درست در بخش (۶-۱۳) مورد بررسی قرار گرفته است.

شکل (۶-۷) نشان دهنده شکل حاصل از بهینه‌سازی پوسته با استفاده از روش SLP است که این شکل به هیچ وجه جنبه کاربردی ندارد.

در دو مثال اخیر حل شده به وضوح می‌توان مشاهده کرد که جواب حاصله از روش SQP دارای روند منطقی‌تری نسبت به روش SLP است. یکی از دلایل این موضوع می‌تواند استفاده از جملات درجه دوم بسط تیلور تابع هدف در فرمول بندی روش SQP باشد که روش SLP از این مزیت بی‌بهره است و در آن تنها از جملات درجه اول بسط تیلور تابع هدف استفاده می‌شود که این نقطه ضعف در مسائلی همانند مسائل حل شده در این رساله نمود زیادی پیدا می‌کند.



شکل ۶-۷: شکل پوسته پس از انجام سیکل‌های بهینه‌سازی باروش SLP در حالتی مولفه z ، متغیر طراحی باشد

۶-۱۳- بحث در نتایج

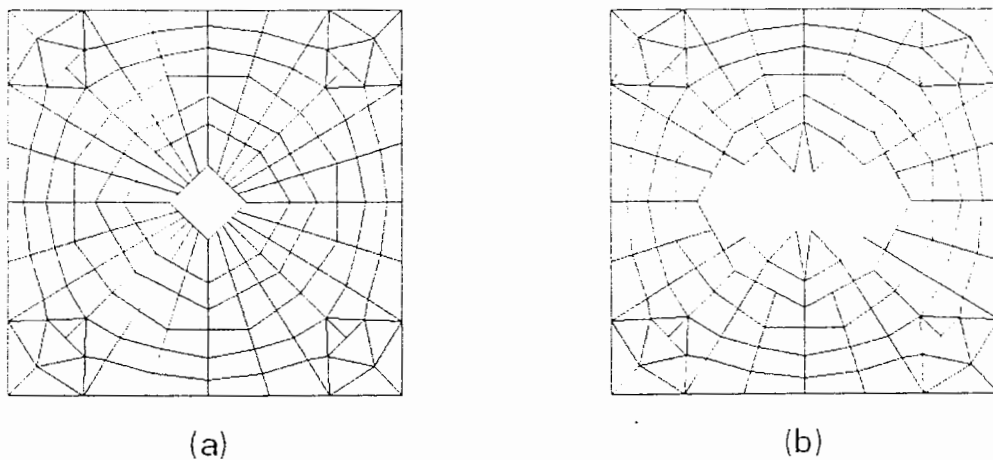
یکی از مهم‌ترین عوامل در بهینه‌سازی، تعریف مساله است. بدین معنی که عواملی مانند تابع هدف، قیدها، روش بهینه‌سازی و متغیرهای طراحی چگونه به طور صحیح انتخاب شوند و در کنار هم قرار

بگیرند. به غیر از متغیرهای طراحی که در ادامه در مورد آنها بحث خواهد شد، سایر پارامترهای استفاده شده در این رساله، پارامترهای قابل قبول و تضمین شده‌ای هستند.

اما متغیرهای طراحی را می‌توان مهمترین پارامتر بهینه‌سازی نامید چراکه تعیین کننده بعد فضای طراحی و همچنین پیچیدگی آن است و تمام قیود و سایر عوامل در فضای بوجودآمده توسط متغیرهای طراحی تعریف می‌گردند.

در مسائل بهینه‌سازی شکل، اغلب با تغییر مرزهای سازه، تنش‌ها یا تغییرمکان‌های مرزی را کاهش می‌دهند یا به شکل مطلوب تغییر می‌دهند. اگر در انتخاب این متغیرها دقتی صورت نگیرد، نتایج بدست آمده از تحلیل اجزای محدود سازه آنقدر تحت تاثیر این عدم دقت قرار می‌گیرد که نتایج حاصل از بهینه‌سازی قابل استفاده نخواهد بود. یکی از این موارد زمانی است که مختصات نقطه مرزی مدل به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی استفاده شوند [۱۵].

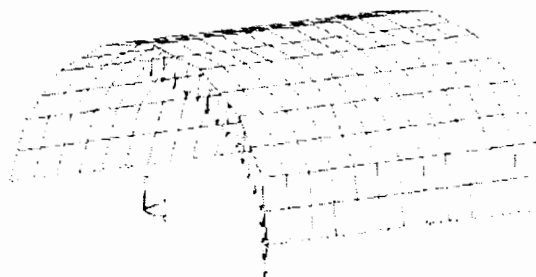
شکل زیر نشان دهنده نمونه‌ای از این مسائل است. در شکل (a-۸-۶) مدل اجزای محدود سازه اولیه آورده شده است و در شکل (b-۸-۶) مدل نهایی پس از انجام بهینه‌سازی.



شکل ۶-۸: بهینه‌سازی یک صفحه سوراخدار با استفاده از تکنیک حرکت گره‌ها [۱۵]

یکی از نخستین تلاش‌ها برای یافتن جواب بهینه سازه‌های پیوسته همانند صفحات در سال ۱۹۷۳ توسط زینکوویچ و کمبل^۱ صورت گرفت. این پژوهشگران مختصات گرهی شبکه اجزای محدود را به عنوان متغیر طراحی برای یافتن شکل بهینه بکار بردند. این نوع انتخاب متغیرهای طراحی هرچند بسیار ساده و با روش اجزای محدود سازگار است، اما چندین ایراد اساسی به همراه دارد. نخست اینکه تعداد متغیرهای طراحی لازم برای تعریف شکل ناحیه مرزی سازه اغلب بسیار زیاد است و این امر حل مساله بهینه‌سازی را بسیار مشکل و پرهزینه می‌کند. همچنین این روش به دلیل عدم امکان برقراری پیوستگی شیب‌های میان گره‌های مرزی در بیشتر موارد به طرح‌های غیرعملی منتهی می‌شود. ایراد اساسی دیگر در انتخاب مختصات گرهی به عنوان متغیرهای طراحی این است که حفظ یک شبکه اجزای محدود مناسب در طی فرآیند بهینه‌سازی مقدور نیست. مورد اخیر را می‌توان در شکل‌های (۶-۳) و (۶-۴) و (۶-۶) و (۶-۷) و (۶-۸) به وضوح مشاهده کرد.

اویسال^۲، گول^۳ و اوزمان^۴ در سال ۲۰۰۶ با در نظر گرفتن مختصات برخی از نقاط پوسته استوانه‌ای همانند شکل (۶-۲)، به عنوان متغیر طراحی، با استفاده از روش SLP بهینه‌سازی را انجام دادند. بارگذاری این پوسته در شکل (۶-۹) و شکل نهایی آن پس از بهینه‌سازی در شکل (۶-۱۰) آمده است. همانطوری که مشاهده می‌شود، مشکلاتی نظیر عدم پیوستگی شکل نهایی به چشم می‌خورد.



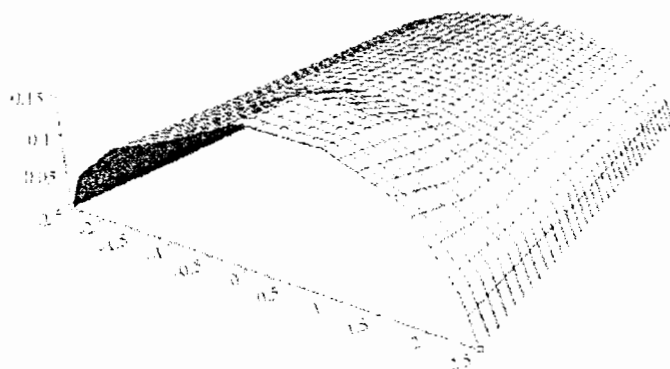
شکل ۶-۹: شکل اولیه پوسته و بارگذاری آن [۱۶]

^۱ Campbel

^۲ Uysal

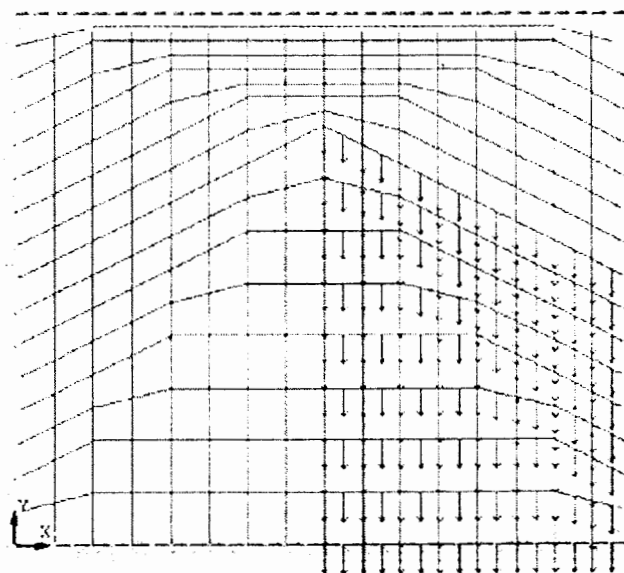
^۳ Gul

^۴ Uzman

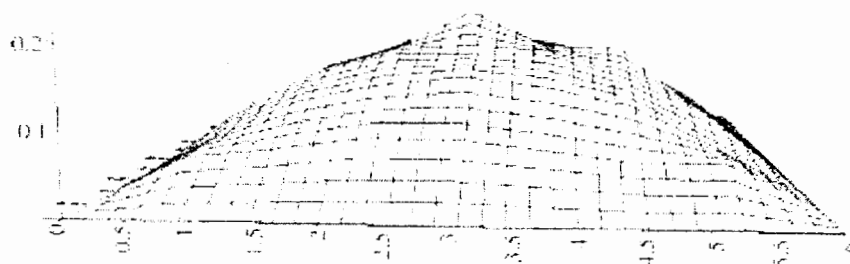


شکل ۶-۱۰: شکل نهایی پوسته پس از بهینه‌سازی [۱۶]

اویسال و همکارانش همچنین یک پوسته هرمی شکل که تحت بارگذاری همانند شکل (۶-۱۱) قرار گرفته است را با استفاده از روش SLP و همان متغیرهای طراحی که در بالا ذکر شد، تحت بهینه‌سازی قرار دارند و همانطور که در شکل (۶-۱۲) مشاهده می‌شود، نتیجه بدست آمده دارای آشفتگی بیشتری نسبت به پوسته استوانه‌ای است.



شکل ۶-۱۱: پوسته هرمی و بارگذاری آن [۱۶]



شکل ۶-۱۲: شکل نهایی پوسته هرمی پس از بهینه‌سازی [۱۶]

در نتایج بدست آمده توسط اویسال و همکارانش، بهبود نسبی نسبت به سایر مسائل که در آنها از مختصات به عنوان متغیر طراحی استفاده شده است، حاصل شده و علت این موضوع هم این است که مختصات تمام نقاط در بهینه‌سازی وارد نشده است. این امر موجب می‌شود که اولاً تعداد متغیرهای طراحی کاهش یابد و ثانیاً با درون‌یابی که برای بدست آوردن مختصات جدید بر روی نقاطی که متغیر طراحی نیستند انجام می‌شود، پیوستگی سازه پس از بهینه‌سازی اندکی نسبت به مسائلی که قبلاً حل شد بهبود می‌یابد و موجب رسیدن به جواب بهتری می‌شود.

در این رساله هم که از مولفه Z هر گره به عنوان متغیر طراحی استفاده شد، نتایجی غیرقابل استفاده بدست آمد که دلایل آن در بالا ذکر شده است. در واقع به عنوان نتیجه‌ای از مبحث بالا می‌توان ذکر کرد که این نوع انتخاب متغیرهای طراحی در سازه‌های پوسته‌ای نیز انتخاب مناسبی نخواهد بود و باید از روش‌های دیگری برای تغییر مرزها و شکل پوسته برای رسیدن به جواب بهینه استفاده کرد.

دشواری‌های موجود در انتخاب مختصات نقاط گرهی به عنوان متغیرهای طراحی، پژوهشگران را بر آن داشت که روش‌های دیگری را برای نمایش شکل ناحیه مرزی سازه در پیش گیرند. به عنوان مثال باویکاتی^۱ و راماکریشنان^۲ برای نمایش شکل سازه از یک چندجمله‌ای استفاده کردند که ضرائب این

^۱ Bhavikatti^۲ Ramakrishnan

چندجمله‌ای همان متغیرهای طراحی بودند [۱۵]. ریکتس^۱ و زینکوویچ برای نمایش یک سد قوسی از دو چندجمله‌ای یکی برای بیان شکل میان صفحه و دیگری برای بیان تغییرات ضخامت در امتداد میان صفحه استفاده کردند. این نوع انتخاب تعداد متغیرهای طراحی را بسیار کاهش می‌دهد، ولی نیاز به شناخت کلی از شکل بهینه سازه دارد و انتخاب چندجمله‌ای یا هر تابع شکلی که سازه را مدل می‌کند، بسیار مهم و اساسی خواهد بود.

نظریه کلی‌تر در این مورد این است که مرزهای سازه بوسیله یک ترکیب خطی از توابع شکل تعریف شوند که ضرائب این ترکیبها و توابع شکل به عنوان متغیرهای استفاده شوند.

در این رساله از این روش نیز برای بهینه‌سازی شکل سازه‌های پوسته‌ای استفاده شده است. همانطور که در بخش ۴ شرح داده شد، برای نمایش سطح پوسته‌های استوانه‌ای مدل شده در این رساله از دو نوع تابع شکل استفاده می‌شود. به عنوان مثال در یک حالت می‌توان در جهت X از توابع مثلثاتی و در جهت Y از توابع چندجمله‌ای یا توابع نمایی یا لگاریتمی استفاده کرد که ترکیب آنها را می‌توان به صورت حاصل ضرب آنها بیان کرد. البته نحوه ترکیب توابع شکل بسته به نوع آنها می‌تواند یک ترکیب خطی نیز باشد.

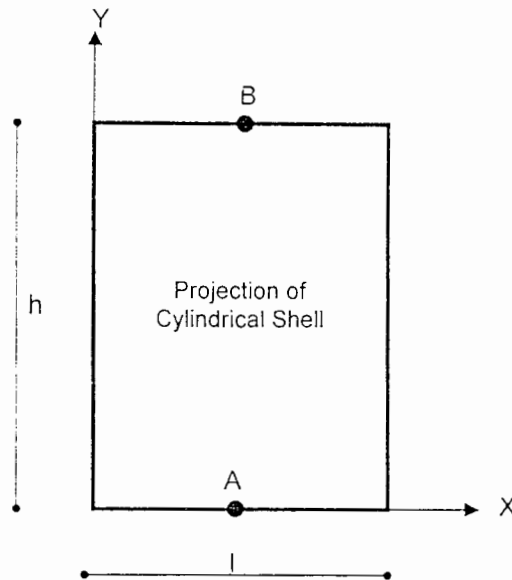
به عنوان مثال برای بهینه‌سازی سازه شکل (۶-۲) که تحت اثر دو بار قائم P در دو راس خود قرار گرفته است، می‌توان از رابطه زیر برای مدل کردن سازه استفاده کرد:

$$Z(x, y) = (ay^2 + by + c) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (۲۷-۶)$$

در ترکیب غیرخطی بالا، a و b و c همان متغیرهای طراحی هستند و l طول پوسته در جهت X است. از آنجا که به دلیل تقارن مولفه Z در دو راس پس از بهینه‌سازی نیز باید با هم برابر باشند، یک قید

^۱ Ricketts

نیز به مساله اضافه می‌شود و تعداد متغیرهای طراحی به ۲ کاهش می‌یابد و معادله قید تساوی به صورت زیر می‌شود:



شکل ۶-۱۳: تصویر پوسته استوانه‌ای

$$Z(A) = Z(B)$$

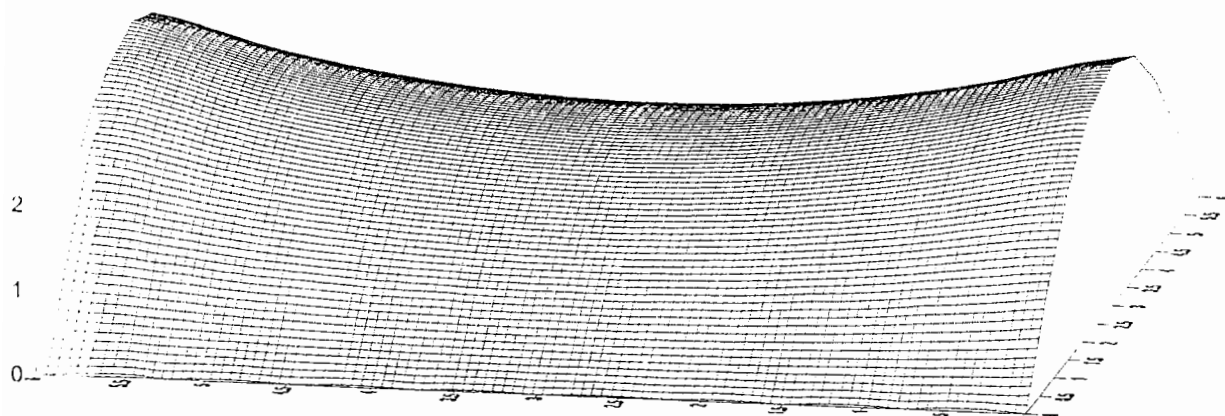
$$\Rightarrow (c) \sin \frac{\pi}{l} = (ah^2 + bh + c) \sin \frac{\pi}{l} \quad (۶-۲۸)$$

$$\Rightarrow ah^2 + bh = 0 \Rightarrow b = -ah$$

مشاهده می‌شود که با اعمال قید تساوی، تعداد متغیرهای برای بهینه‌سازی شکل پوسته استوانه‌ای به ۲ می‌رسد که در مقایسه با حالتی که در همین مساله از مولفه Z به عنوان متغیر طراحی استفاده گردید و ۷۷ متغیر طراحی وجود داشت، قابل مقایسه نیست.

۶-۱۴- بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای با استفاده از روش ضرائب معادلات

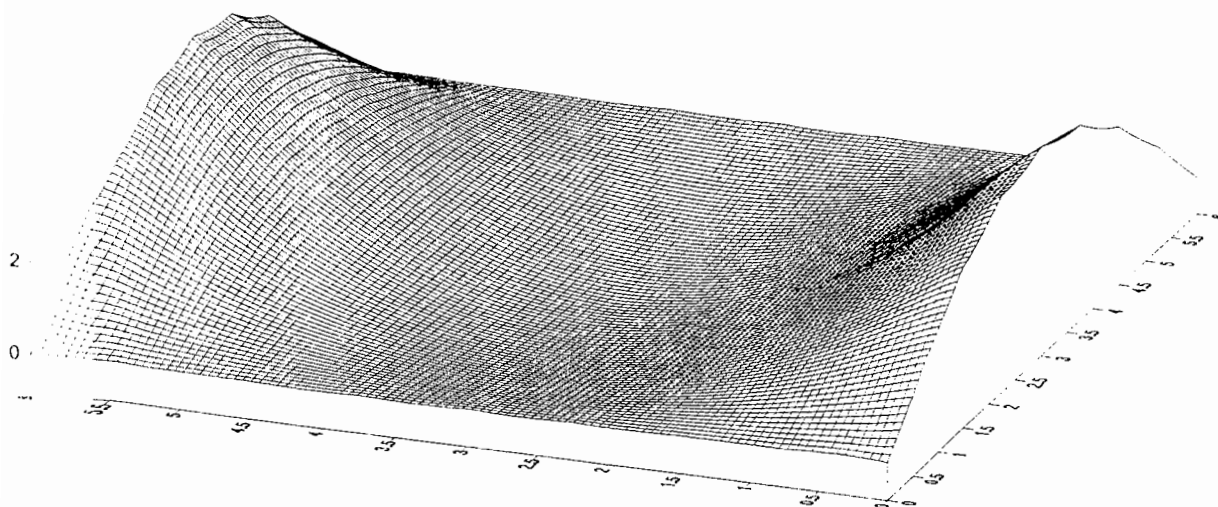
در این بخش همان پوسته‌ای که در بخش ۶-۱۲ با استفاده از متغیرهای طراحی مختصاتی بهینه شده بود را با استفاده از روش ضرائب معادلات بهینه شده است و شکل بدست آمده از روش SQP پس از ۶ سیکل بهینه‌سازی در شکل (۶-۱۴) آورده شده است.



شکل ۶-۱۴: پوسته استوانه‌ای پس از بهینه‌سازی بوسیله روش ضرائب معادلات و روش SQP

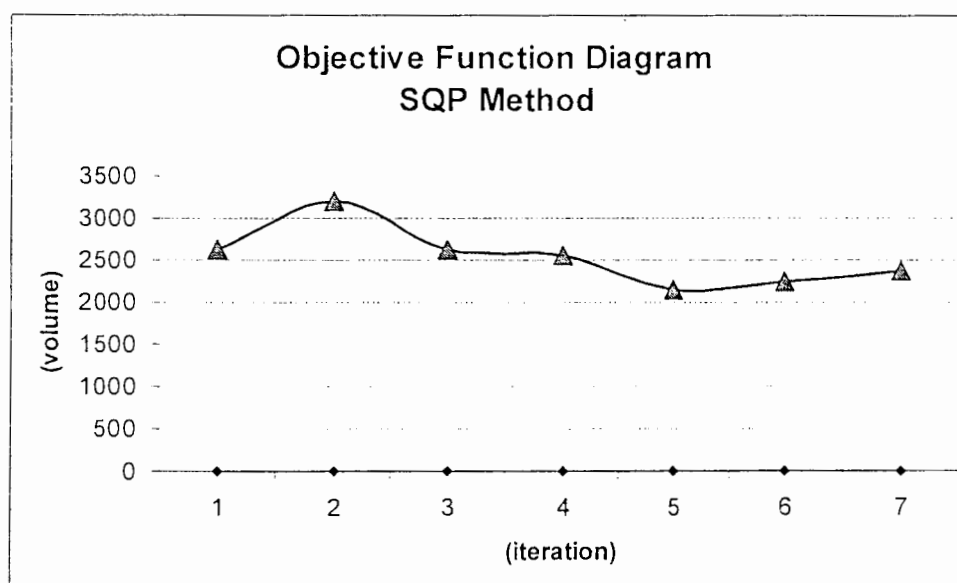
مشاهده می‌شود که شکل حاصل از این روش بسیار قابل قبول و منطقی است و با جواب‌هایی که از روش مختصاتی بدست آمد، قابل مقایسه نیست. در شکل (۶-۱۵)، شکل حاصل از روش SLP پس از ۱۸ سیکل آورده شده است. ملاحظه می‌شود که نتیجه بدست آمده از این دو روش نزدیک به هم است و که موضوع در مثالهای بخش ۶-۱۲ به چشم نمی‌خورد.

با مقایسه نتایج بدست آمده از دو روش SLP و SQP استنباط می‌شود که روش SQP دارای نتایج بهتری نسبت به SLP است و این نتایج معمولاً در تعداد سیکل‌های کمتری بدست می‌آید که یکی از دلایل آن را می‌توان استفاده از دو جمله از بسط تیلور تابع هدف در روش SQP برشمرد در حالی که در روش SLP تنها از جمله خطی اول بسط تیلور تابع هدف استفاده می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در این مورد می‌توان به مراجع [۹،۱۰،۱۱،۱۲] مراجعه کرد.

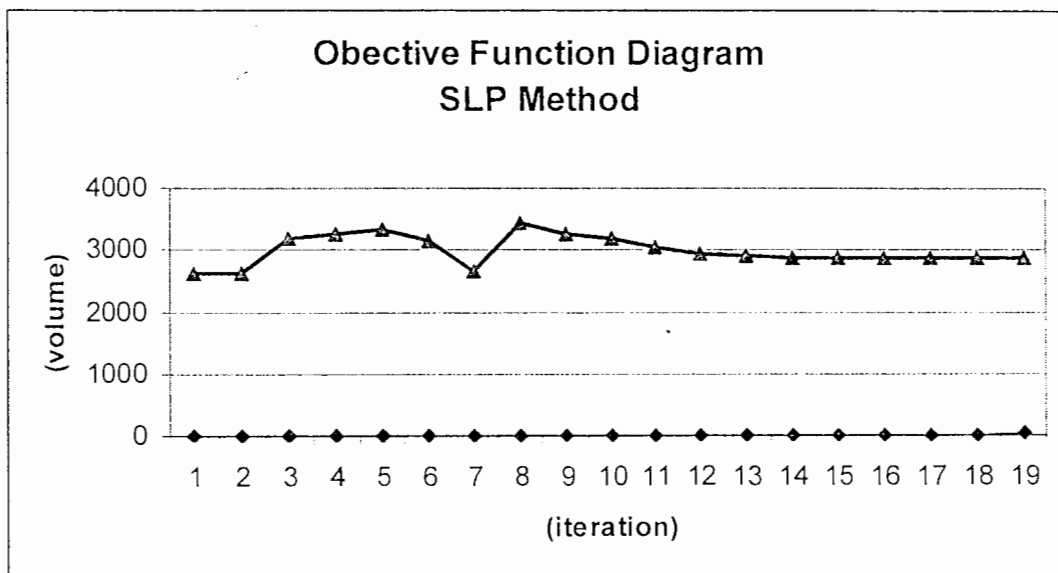


شکل ۶-۱۵: پوسته استوانه‌ای پس از بهینه‌سازی بوسیله روش ضرائب معادلات و روش SLP

تغییرات تابع هدف برای این پوسته در روش‌های SQP و SLP بترتیب در شکل‌های (۶-۱۶) و (۶-۱۷) آورده شده است.

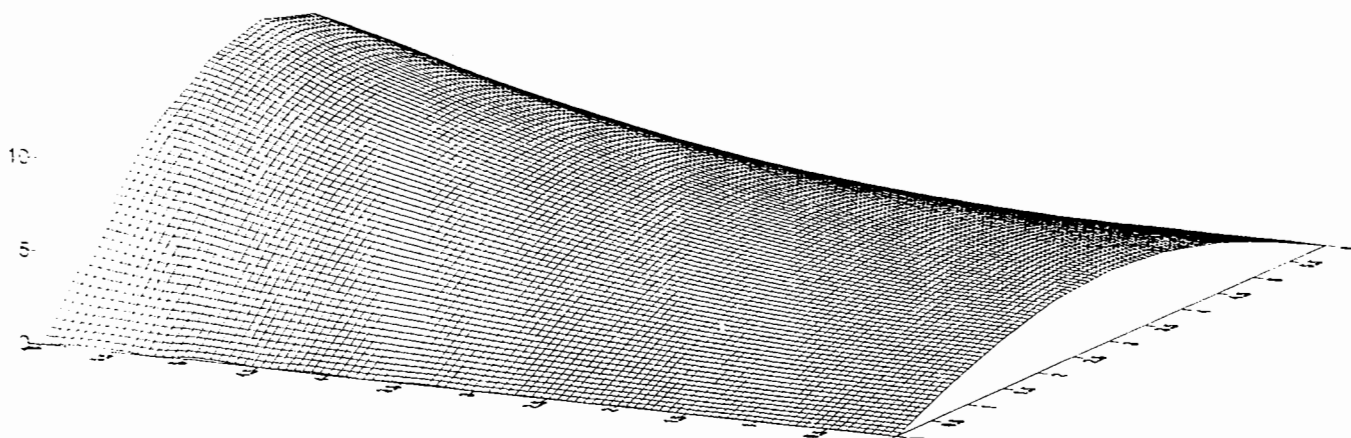


شکل ۶-۱۶: تغییرات تابع هدف در روش SQP



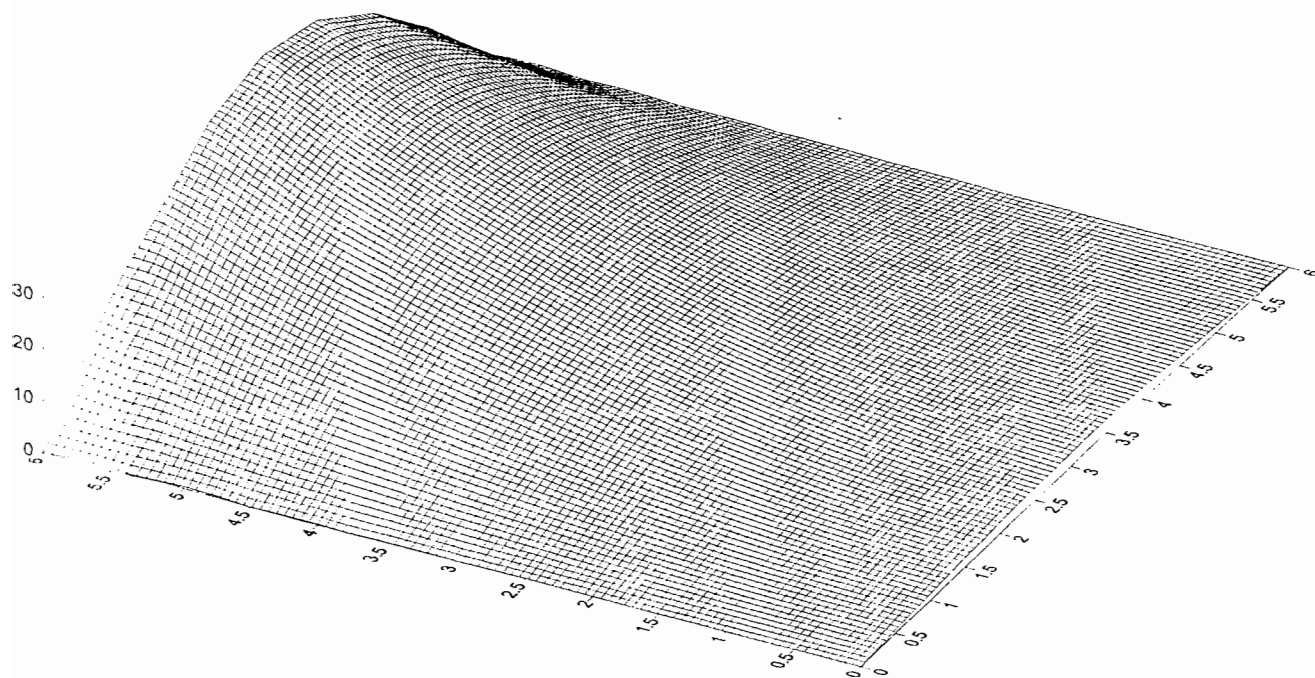
شکل ۶-۱۷: تغییرات تابع هدف در روش SLP

اگر پوسته بالا را برای حالتی که تحت یک بار قائم در یکی از دو راس خود قرار دارد، بهینه شود، اشکال (۶-۱۸) و (۶-۱۹) بترتیب از روش SQP و SLP برای حالت بهینه سازه بدست می‌آید.



شکل ۶-۱۸: شکل بهینه پوسته استوانه‌ای با یک بار قائم در یکی از رئوس خود با استفاده از روش فرانب معادلات و SQP

شکل بهینه سازه از روش SQP پس از انجام ۱۳۰ سیکل به صورت شکل (۶-۱۸) بدست آمد.



شکل ۶-۱۹: شکل بهینه پوسته استوانه‌ای با یک بار قائم در یکی از رئوس خود با استفاده از روش ضرایب معادلات و SLP

شکل بهینه سازه از روش SLP پس از انجام ۵۰۰ سیکل به صورت شکل (۶-۱۹) بدست آمد. مشاهده می‌شود که سرعت همگرایی روش SQP بسیار بیشتر از روش SLP است. توجه شود که در مساله اخیر تعداد متغیرهای طراحی ۳ است.

فصل هفتم

فرکانس طبیعی سازه‌های پوسته‌ای

۷-۱- مقدمه

تحلیل دینامیکی در پوسته‌ها یکی از مهمترین بخش‌های تحلیل پوسته‌هاست. در واقع تمام مسائل شرح داده شده در فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را می‌توان به عنوان مقدمه‌ای برای تحلیل دینامیکی در نظر گرفت. سازه‌های پوسته‌ای و رایج پراهمیت همانند سقفهای سازه‌های صنعتی، مخازن نگهداری آب و مواد سوختی، سیلوها و بدنه هواپیماها اکثراً تحت اثر بارهای دینامیکی قرار دارند و تحلیل دینامیکی چنین سازه‌هایی بسیار مورد توجه قرار دارد.

یکی از مهمترین بخش‌های تحلیل دینامیکی محاسبه فرکانس‌های طبیعی^۱ سازه است که در تمام محاسبات مربوط به تغییرشکلها، تنشها و کرنشها یکی از عوامل تعیین کننده است. فرکانس طبیعی یکی از خواص سازه‌ای است که به شرایط بارگذاری و مرزی سازه بستگی ندارد. در واقع می‌توان گفت فرکانس طبیعی برای سازه‌ای با هر نوع بارگذاری و شرایط مرزی یکسان است و تنها تابع سختی و جرم سازه است.

در این فصل به محاسبه فرکانسهای طبیعی سازه‌های پوسته‌ای پرداخته خواهد شد. تحلیل دینامیکی یک پوسته تحت اثر ابرگذاری دینامیکی جزء مباحث این فصل نخواهد بود.

^۱ natural frequency of vibration

۷-۲- معادله حرکت دینامیکی

در مسائل دینامیکی تمامی پارامترهای تغییرشکل، سرعت، تنش، کرنس و بارگذاری تابعی از زمان هستند. روشی که نشان دهنده معادلات اجزای محدود یک مساله دینامیکی باشد را می‌توان در گامهای زیر بیان کرد:

گام ۱: سازه به تعداد E المان محدود تقسیم بندی می‌شود.

گام ۲: تغییرمکان المان e به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\bar{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = [N(x, y, z)] \bar{Q}^{(e)}(t) \quad (1-7)$$

که \bar{U} بردار تغییرمکان، $[N]$ ماتریس توابع شکل و $\bar{Q}^{(e)}$ بردار تغییرمکانهای گرهی است که همگی تابعی از زمان t می‌باشند.

گام ۳: مشخصات المان همانند سختی، جرم و بارهای وارده بر هر المان تعیین می‌شود.

ار معادله (۱-۷) می‌توان کرنشها را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\varepsilon} = [B] \bar{q}^{(e)} \quad (2-7)$$

و تنشها را نیز می‌توان به همین شکل نوشت:

$$\bar{\sigma} = [D] \bar{\varepsilon} = [D] [B] \bar{Q}^{(e)} \quad (3-7)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱-۷) نسبت به زمان، رابطه سرعت همانند زیر می‌شود:

$$\dot{\bar{U}}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \dot{\bar{Q}}^{(e)}(t) \quad (4-7)$$

که $\dot{Q}^{(e)}$ بردار سرعت گرهی است. برای بدست آوردن معادلات حرکت دینامیکی سازه می‌توان از یکی از دو روش معادلات لاگرانژ^۱ یا قانون همیلتون^۲ استفاده کرد. معادلات لاگرانژ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial \dot{Q}} \right\} = \{0\} \quad (5-7)$$

که

$$L = T - \pi_p \quad (6-7)$$

تابع لاگرانژ نامیده می‌شود. T انرژی جنبشی، π_p انرژی پتانسیل، R تابع اتلاف انرژی^۳ یا میرایی، Q تغییرمکانهای گرهی و \dot{Q} سرعت گرهی است. انرژی جنبشی و پتانسیل المان e می‌تواند به این صورت بیان شود:

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \rho \dot{U}^T \dot{U} \, dV \quad (7-7)$$

و

$$\pi_p = \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} \, dV - \iint_{S_1^{(e)}} \bar{U}^T \bar{\Phi} \, dS_1 - \iiint_{V^{(e)}} \bar{U}^T \bar{\phi} \, dV \quad (8-7)$$

که $V^{(e)}$ حجم المان، ρ چگالی المان و \dot{U} بردار سرعت المان است. با این فرض که نیروهای تلف کننده انرژی متناسب با سرعت‌های نسبی هستند، تابع اتلاف انرژی یا میرایی برای المان e می‌شود:

$$R^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \mu \dot{U}^T \dot{U} \, dV \quad (9-7)$$

^۱ Lagrange equations

^۲ Hamilton's principle

^۳ dissipation function

که μ ضریب میرایی^۱ است. در معادلات (۷-۷) تا (۷-۹)، انتگرال حجم بر روی حجم المان صورت می‌گیرد و در معاله (۷-۸) انتگرال سطح بر روی آن بخش از سطح المان گرفته می‌شود که تحت اثر نیروهای معین قرار دارند.

با استفاده از معادلات (۷-۱) تا (۷-۳) روابط T و π_p و R را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = \sum_{e=1}^E T^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^{(e)}} \rho [N]^T [N] dV \right] \dot{\bar{Q}} \quad (۷-۱۰)$$

$$\begin{aligned} \pi_p = \sum_{e=1}^E \pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} \bar{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \right] \bar{Q} \\ - \bar{Q}^T \left(\sum_{e=1}^E \iint_{S_1^{(e)}} [N]^T \bar{\Phi} dS_1 + \iiint_{V^{(e)}} [N]^T \bar{\phi} dV \right) - \bar{Q}^T \bar{P}_s(t) \end{aligned} \quad (۷-۱۱)$$

$$R = \sum_{e=1}^E R^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^{(e)}} \mu [N]^T [N] dV \right] \dot{\bar{Q}} \quad (۷-۱۲)$$

که \bar{Q} بردار تغییر مکان کلی، $\dot{\bar{Q}}$ بردار سرعت کلی و \bar{P}_s بردار بارهای متمرکز گرهی در سازه است. با توجه با انتگرال‌های بالا می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$[M^{(e)}] = \text{element mass matrix} = \iiint_{V^{(e)}} \rho [N]^T [N] dV \quad (۷-۱۳)$$

$$[K^{(e)}] = \text{element stiffness matrix} = \iiint_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \quad (۷-۱۴)$$

$$[C^{(e)}] = \text{element damping matrix} = \iiint_{V^{(e)}} \mu [N]^T [N] dV \quad (۷-۱۵)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_s^{(e)} = \text{vector of element nodal forces produced by surface forces} \\ = \iint_{S_1^{(e)}} [N]^T \bar{\Phi} dS_1 \end{aligned} \quad (۷-۱۶)$$

^۱ damping coefficient

$$\begin{aligned} \bar{P}_b^{(e)} &= \text{vector of element nodal forces produced by body forces} \\ &= \iiint_{V^{(e)}} [N]^T \bar{\phi} dV \end{aligned} \quad (17-7)$$

گام ۴: بردارها و ماتریس‌های سازه اسمبل می‌شوند و معادلات حرکت کلی سیستم بدست می‌آید.

معادلات (۷-۱۰) تا (۷-۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T [\mathbf{M}] \dot{\bar{Q}} \quad (18-7)$$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \bar{Q}^T [\mathbf{K}] \bar{Q} \bar{P} \quad (19-7)$$

$$R = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T [\mathbf{C}] \dot{\bar{Q}} \quad (20-7)$$

که در این روابط

$$[\mathbf{M}]: \text{ماتریس جرم کل سازه است و برابر است با: } \sum_{e=1}^E [M^{(e)}]$$

$$[\mathbf{K}]: \text{ماتریس جرم کل سازه است و برابر است با: } \sum_{e=1}^E [K^{(e)}]$$

$$[\mathbf{C}]: \text{ماتریس جرم کل سازه است و برابر است با: } \sum_{e=1}^E [C^{(e)}]$$

$$\bar{P}(t): \text{بردار بارگذاری کل سازه است و برابر است با: } \sum_{e=1}^E (P_r^{(e)}(t) + P_k^{(e)}(t)) + \bar{P}_c(t)$$

با قرار دادن معادلات (۷-۱۸) تا (۷-۲۰) در معادله (۷-۵) می‌توان معادله حرکت دینامیکی سازه را به

صورت زیر نوشت:

$$[\mathbf{M}] \ddot{\bar{Q}}(t) + [\mathbf{C}] \dot{\bar{Q}}(t) + [\mathbf{K}] \bar{Q}(t) = \bar{P}(t) \quad (21-7)$$

که $\ddot{\bar{Q}}$ بردار شتاب‌های گرهی در سیستم کلی است. اگر از میرایی صرف‌نظر شود، معادلات حرکت به

صورت زیر می‌شود:

۷-۴- ماتریس جرم سازگار در دستگاه مختصات کلی

برای کاهش حجم محاسبات ابتدا ماتریس جرم سازگار برای هر المان در حالت اسمبل نشده بدست می‌آید و سپس به دستگاه مختصات کلی انتخاب شده برای سازه تبدیل می‌شود. اگر $[m^{(e)}]$ و $\bar{q}^{(e)}$ و $\dot{\bar{q}}^{(e)}$ بترتیب نشان‌دهنده ماتریس جرم، بردار تغییرمکان گرهی و بردار سرعت گرهی در مختصات محلی باشد، انرژی جنبشی حرکت المان را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^{(e)T} [m^{(e)}] \dot{\bar{q}}^{(e)} \quad (۲۳-۷)$$

اگر تغییرمکان‌های گرهی و سرعت‌های گرهی المان در مختصات کلی $\bar{Q}^{(e)}$ و $\dot{\bar{Q}}^{(e)}$ باشد، می‌توان از روابط تبدیل زیر استفاده کرد:

$$\bar{q}^{(e)} = [\lambda] \bar{Q}^{(e)} \quad (۲۴-۷)$$

و

$$\dot{\bar{q}}^{(e)} = [\lambda] \dot{\bar{Q}}^{(e)} \quad (۲۵-۷)$$

با جایگزینی (۲۵-۷) در (۲۳-۷) می‌توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^{(e)T} [\lambda]^T [m^{(e)}] [\lambda] \dot{\bar{Q}}^{(e)} \quad (۲۶-۷)$$

با توجه به اینکه $[M^{(e)}]$ ماتریس جرم المان در مختصات کلی است، انرژی جنبشی حرکت المان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^{(e)T} [\lambda]^T [M^{(e)}] [\lambda] \dot{\bar{Q}}^{(e)} \quad (۲۷-۷)$$

از آنجاییکه انرژی جنبشی یک کمیت اسکالر است، پس باید مستقل از دستگاه مختصات انتخاب شده باشد. از برابر هم قرار دادن روابط (۲۶-۷) و (۲۷-۷)، می‌توان ماتریس جرم سازگار المان در دستگاه مختصات کلی را به صورت زیر نوشت:

$$[M^{(e)}] = [\lambda]^T [m^{(e)}] [\lambda] \quad (28-7)$$

توجه شود که این رابطه تبدیل بسیار شبیه رابطه تبدیلی است که برای محاسبه ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات کلی استفاده می‌شود.

۷-۵- تحلیل ارتعاش آزاد

اگر هر سازه ارتجاعی را با استفاده از یک روش مناسب در لحظه اولیه $t = 0$ تحت اثر یک تحریک لحظه‌ای قرار دهیم، این سازه به صورت تناوبی نوسان خواهد کرد. این حرکت نوسانی یکی از خصوصیات سازه است و به توزیع جرم و سختی در سازه بستگی دارد. اگر میرایی در نظر گرفته شود، حد اثر دامنه نوسان کاهش پیدا خواهد کرد. از طرفی دیگر اگر از میرایی صرف نظر شود، حرکت نوسانی تا بینهایت ادامه پیدا خواهد کرد و دامنه نوسان آن بستگی به اندازه تحریک‌ها و تغییرمکانهای اعمال شده دارد. حرکت نوسانی در یک فرکانس معین که به آن فرکانس طبیعی یا مقدار مشخصه می‌گویند، رخ می‌دهد و منتج به دسته‌ای از تغییرشکل‌ها می‌شود که به آنها مودهای ارتعاش یا مودهای مشخصه می‌گویند [۱۷]. مطالعه ارتعاش آزاد در محاسبه پاسخ ارتجاعی سازه بسیار مهم است.

با این فرض که بردار نیروهای خارجی \bar{P} ، صفر باشد، تغییرمکانها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{Q} = \bar{Q} e^{i\omega t} \quad (29-7)$$

می‌توان معادله ارتعاش آزاد را به صورت زیر نوشت:

$$[[K] - \omega^2 [M]] \bar{Q} = \bar{0} \quad (30-7)$$

که \bar{Q} نشان دهنده دامنه تغییرمکان‌های \bar{Q} و ω فرکانس طبیعی ارتعاش می‌باشد. معادله (۳۰-۷) به این دلیل که هیچ‌کدام از ماتریس‌های $[K]$ و $[M]$ اتبعی از فرکانس دورانی نیستند، یک مساله مقدار

مشخصه جبری خطی است و بشرطی که دترمینان ضرب ماتریس $([K] - \omega^2[M])$ برابر صفر باشد، یک جواب غیر صفر برای $\underline{\bar{Q}}$ خواهد داشت:

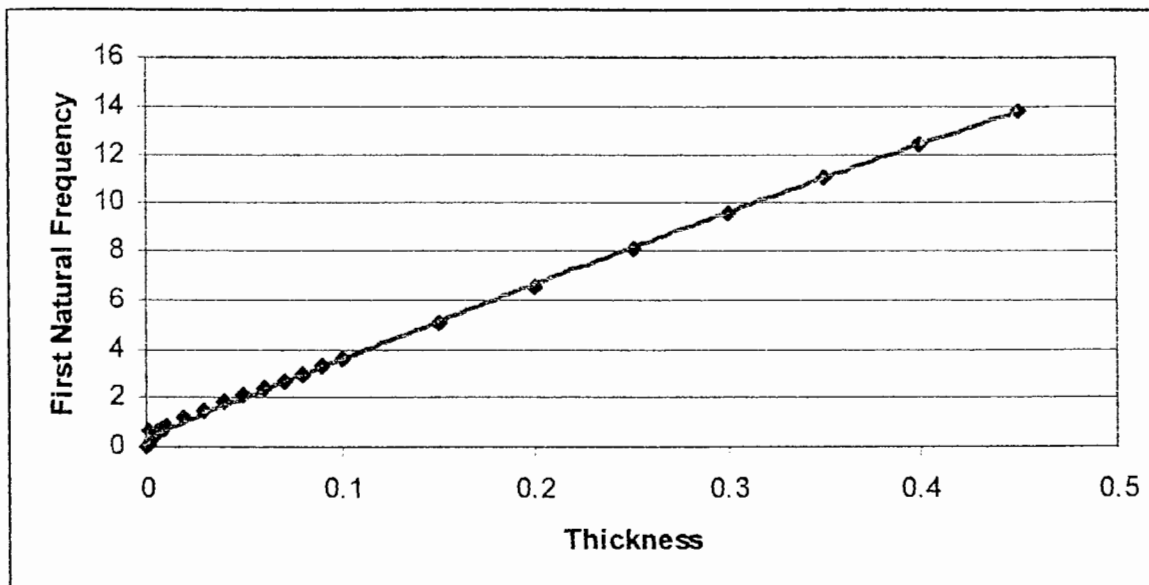
$$[[K] - \omega^2[M]] = 0 \quad (31-7)$$

در حالت کلی هیچ کدام از مقادیر ویژه معادله (31-7) با هم برابر نیستند و بنابراین سازه دارای n فرکانس طبیعی مختلف خواهد بود. تنها برای همین فرکانس‌های طبیعی، معادله (30-7) برای $\underline{\bar{Q}}$ دارای جواب غیر صفر است.

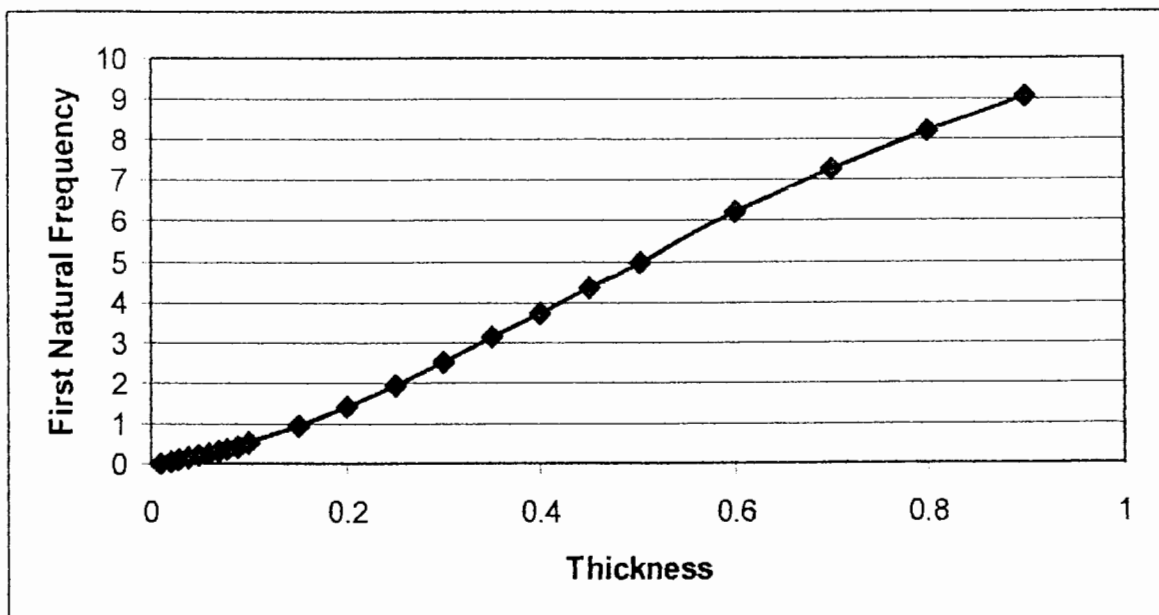
7-6- مثال‌های عددی

فرکانس‌های طبیعی ارتعاش برای برای سازه‌هایی همانند سازه‌های نشان داده شده در بخش 5-3، محاسبه شده است که تطابق بسیار مناسبی با نمونه‌های حل شده و جواب بدست آمده در برنامه SAP2000 دارد. فرکانس طبیعی بدست آمده دقیقاً با نتایج حاصله از نرم‌افزار SAP2000 یکسان است و نتایج بدست آمده برای دو مثال دیگر دارای خطایی حدود 1٪ نسبت به نتایج نرم‌افزار SAP2000 است که دلیل آن اختلاف در مش‌بندی مورد استفاده در این مدل‌هاست.

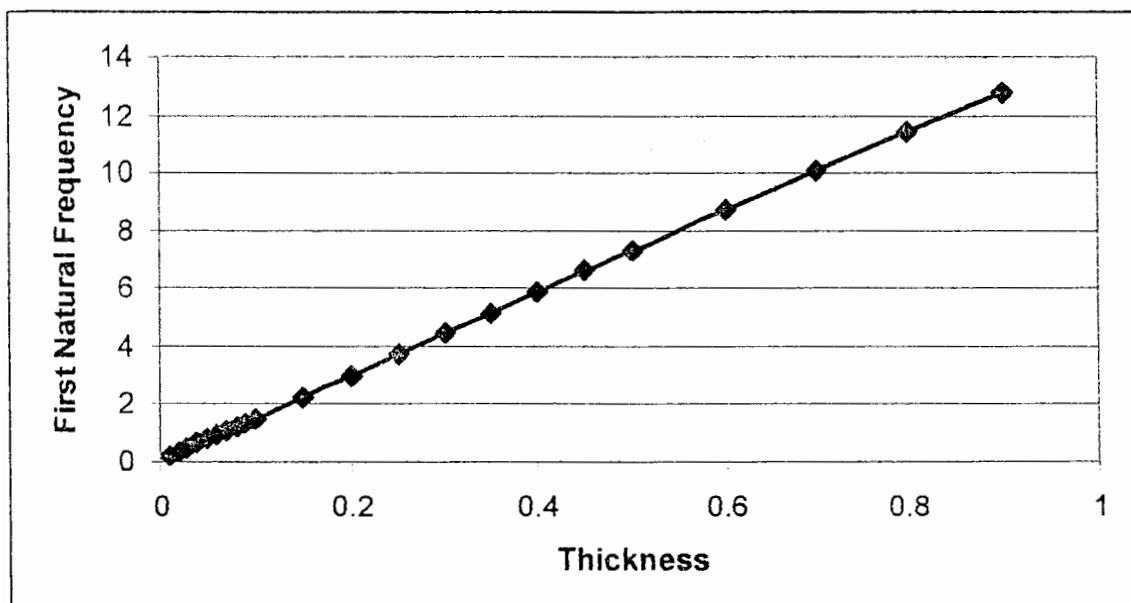
از آنجاکه فرکانس طبیعی به سختی و جرم سازه بستگی دارد، پس با تغییر این دو پارامتر قطعا فرکانس‌های طبیعی هم تغییر خواهند کرد. در شکل‌های زیر نمودار تغییرات فرکانس طبیعی به ازای تغییر ضخامت پوسته ترسیم شده است. توجه شود که با تغییر ضخامت پوسته هر دو ویژگی سختی و جرم در المان‌ها به صورت همزمان تغییر می‌کند.



شکل ۷-۱: نمودار فرکانس-ضخامت برای صفحه مربعی



شکل ۷-۲: نمودار فرکانس-ضخامت برای پوسته استوانه‌ای



شکل ۷-۳: نمودار فرکانس-ضخامت برای پوسته کروی

همانطور که در شکل‌های (۱-۷) تا (۳-۷) مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت و در پی آن با افزایش سختی و جرم سازه، فرکانس طبیعی طبیعی ارتعاش افزایش پیدا می‌کند و به نظر می‌رسد این تغییرات تقریباً به صورت خطی است.

فصل هشتم

نتیجه‌گیری و چشم‌انداز آینده

- با افزودن مودهای تغییرشکلی ناسازگار درالمان و درجه آزادی چرخشی در هر گره، از سخت‌شدگی رفتار خمشی المان جلوگیری شده‌است و رفتار خمشی آن به شکل مناسبی مدل می‌شود.
- استفاده از مودهای تغییرشکلی ناسازگار موجب ارضاشدن آزمون‌های قطعه در المان ویلسون می‌شود و به همین دلیل پایداری و همگرایی حل تضمین می‌شود.
- انمان ناسازگار ویلسون به دلیل استفاده از درجه آزادی چرخشی در هر گره، قابلیت مدل-سازی تقاطع سطوح پیچیده پوسته‌ای و سازگاری با سایر المان‌ها را دارا می‌باشد.
- توابع شکل استفاده شده برای چهار گرد گوشه‌ای در این المان، خطی می‌باشند که این امر موجب کاهش حجم محاسبات، فرمول‌بندی ساده‌تر و راحت‌تر شدن انتگرال‌گیری عددی در محاسبه ماتریس سختی المان شود که همه این مزایا در حالی بوجود می‌آید که نتایج نهایی تحلیل دارای دقت بسیار مناسبی می‌باشد.
- با استفاده از تئوری خمش کیرشهف در این المان برای مدل کردن رفتار خمشی پوسته، پدیده قفل‌شدگی برشی مشاهده نمی‌شود.
- استفاده از مختصات به عنوان متغیر طراحی در پروسه بهینه‌سازی سازه‌های پوسته‌ای، منجر به نتایج غیرکاربردی می‌شود که از دلایل آن می‌توان عدم پیوستگی شیب در مش-بندی و تعداد زیاد متغیرهای طراحی را نام برد. این نتیجه سال‌های قبل توسط پژوهشگران مطرحی همچون هافتکا برای صفحات بدست آمده بود.
- مدل اجزای محدود در حین بهینه‌سازی در حالتی که از مختصات به عنوان متغیر طراحی استفاده می‌شود، دراری شکستگی‌های زیاد و ناپیوستگی شیب در شبکه اجزای محدود می‌شود که این امر موجب بدست آمدن نتایج غیر منطقی برای تحلیل اجزای محدود و در نهایت بهینه‌سازی می‌شود.

- استفاده از ضرائب معادلات سطح به عنوان متغیرهای طراحی، مشکلاتی ناشی از انتخاب مختصات به عنوان متغیر طراحی را ندارد و موجب رسیدن به طرح‌های مطلوب و بهینه و قابل انتظار می‌شود.
- مشکل استفاده از ضرائب معادلات به عنوان متغیرهای طراحی، اینست که باید اطلاعاتی از شکل تقریبی حالت بهینه سازه داشت و اگر چنین اطلاعاتی در دست نباشد، جواب نهایی بسیار تحت تاثیر تابع شکل انتخاب شده خواهد بود.
- روش SQP دارای سرعت همگرایی بسیار بیشتری نسبت به روش SLP می‌باشد و گاهی اوقات حتی نتایج بهتری بدست می‌دهد و دلیل آن هم استفاده از جملات درجه دوم بسط تیلور تابع هدف می‌باشد که این جملات در روش SLP جایی ندارند.

۸-۳- چشم‌انداز آینده

با توجه به مطالبی که در ۶ فصل این رساله ارائه گردید، می‌توان در زمینه‌های زیر این رساله را ادامه داد:

- بهینه‌سازی همزمان شکل و ضخامت سازه‌های پوسته‌ای
- بهینه‌سازی شکل سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از قیود فرکانسی
- بهینه‌سازی همزمان محدوده فرکانسی و شکل سازه‌های پوسته‌ای
- بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی
- بهینه‌سازی توپولوژی و شکل سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی
- استفاده از مش‌بندی سازمان نیافته برای بهینه‌سازی سازه‌های پوسته‌ای

-
- استفاده از اسپلاین‌ها^۱ برای مدل‌سازی مرزهای سازه‌ای
 - استفاده از NURBS برای مدل‌سازی مرزهای سازه‌ای
 - بهینه‌سازی با استفاده از سایر روش‌های بهینه‌سازی همانند MMA و CONLIN

^۱ Spline

- [1] Zienkiewics, O. C., R. L. Taylor: *The Finite Element Method*, Vol. 1: *The Basis*, Butterwoth-Hienemann, Barcelona, 2000.
- [2] Wilson. E. L.: *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computers and Structures, California, 2002.
- [3] Zienkiewics, O. C., R. L. Taylor: *The Finite Element Method*, Vol. 1: *Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill, 1989.
- [4] Taiebat, H. H., J. P. Carter: *Three-Dimensional Non-Conforming Elements*, Research Report No. r808, University of Sydney, 2001.
- [5] Wilson, E. L., A. Ibrahimbegovic: *Use of Incompatible Displacement Methods for the Calculation of Element Stiffness and Stresses*, Finite Element Analysis and Design 7(1990) 229-241, Elsevier.
- [6] Ibrahimbegovic, A., E. L. Wilson: *A Unified Formulation for Triangular and Quadrilateral Flat Shell Elements With Six Nodal Degree of Freedom*, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 7, 1-9(1991).
- [7] Wu, C. C., M. G. Huang, T. H. H. Pian: *Consistency Condition and Convergence Criteria of Incompatible Elements: General Formulation of Incompatible Functions and its Application*, Comp & Struc, Vol. 27 (639-644), 1987.
- [8] Reddy, J. N.: *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, Singapore, 1993
- [9] Fletcher. R.: *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, Great Britain, 2001
- [10] Kirsch, U.: *Structural Optimization*, Springer, 1991
- [11] Arora, J. S., Q. Wang: *Review of Formulation for Structural and Mechanical System Optimization*, Review Article, Struct Multidisc Optim (2005)30: 251-272.
- [12] Vanderplaats, G. N.: *Design Optimization Tools*, Users Manual, Vanderplaats Research & Development, Inc, Colorado Springs, 1999.
- [13] Hassani. B., E. Hinton: *Homogenization and Structural Topology Optimization*, Springer. 1999.

[14] Ozakca, M.: *Analysis and Optimal Design of Structures with Adaptivity*, PhD Thesis, Civil Engineering University of Swansea, UK, 1993.

[15] Haftka, R. T., R. V. Grandhi: *Structural Shape Optimization – A Survey*, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering 57(1986) 91-106.

[16] Uysal. H., R. Gul, U. Uzman: *Optimum Shape Design of Shell Structures*, Engineering Structures 29(2007) 80-87.

[17] Rao, S. S.: *The Finite Element Method in Engineering*, Elsevier, USA, 2005.

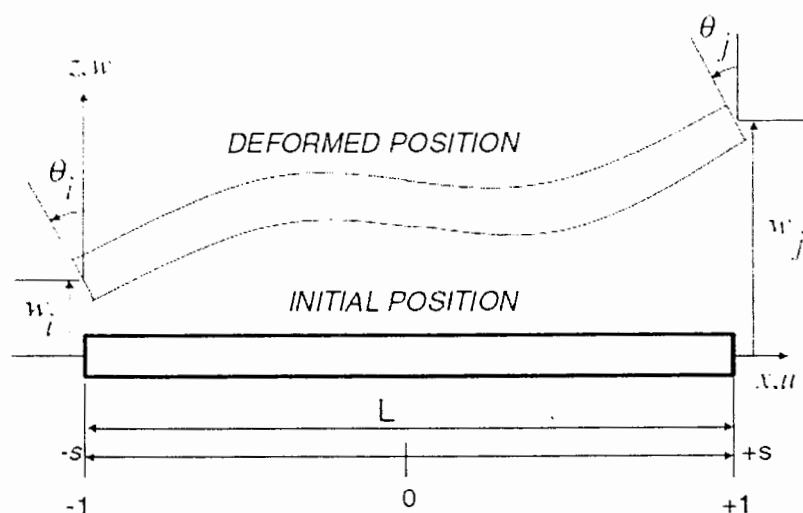
پیوست الف

محاسبه تغییر شکل های برشی

الف-۱- محاسبه تغییرمکانهای المان با تغییرشکل‌های برشی

در این پیوست روابطی برای محاسبه تغییرمکانهای یک المان صفحه‌ای ارائه می‌شود که خود این روابط با استفاده از اثر تغییرشکل‌های قائم برشی بدست می‌آیند. این معادلات بر اساس تغییرمکانهای درجه سوم^۱ محاسبه شده که برای یک تیر با سطح مقطع ثابت که فقط تحت اثر بارهای انتهایی قرار گرفته است، بدست آمده است.

برای وارد کردن اثر تغییرشکل‌های برشی در المان صفحه‌ای، نیاز است که تغییرشکل‌های برشی در امتداد لبه‌های المان صفر باشد. یک راه ساده برای نمایش این فرضیه این است که لبه یک المان صفحه‌ای به عنوان یک تیر عمیق در نظر بگیریم [۲]:



شکل الف-۱: المان تیر با تغییرشکل‌های برشی [۲]

^۱ Cubic displacements

می‌توان فرضیات زیر را در نظر گرفت :

- ابتدا تغییرمکان افقی ناشی از خمش، می‌تواند بر حسب جملاتی از مقادیر میانگین دوران، θ ، با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود :

$$u = -z\theta \quad (\text{الف-۱})$$

که Z فاصله از محور خنثی است.

- دوم، دوران میانگین از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\theta = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\Delta\theta \quad (\text{الف-۲})$$

معادله زیر را برای تغییرمکانهای عمودی W خواهیم داشت :

$$w = N_1w_1 + N_2w_2 + N_3\beta_1 + N_4\beta_2 \quad (\text{الف-۳})$$

که :

$$N_1 = \frac{1-s}{2}, \quad N_2 = \frac{1+s}{2}, \quad N_3 = 1-s^2, \quad N_4 = s(1-s^2) \quad (\text{الف-۴})$$

توجه شود که جمله $(1-s^2)\Delta\theta$ ، دوران نسبی نسبت به یک تابع خطی است. بنابراین یک دوران سلسله‌مراتبی نسبت به دوران وسط المان است.

واضح است که متغیر کلی X با استفاده از رابطه زیر به مختصات محلی S تبدیل می‌شود :

$$x = \frac{L}{2}s, \quad \hat{c}x = \frac{L}{2}\partial s \quad (\text{الف-۵})$$

- سوم، تعریف الاستیسیته کرنش برشی موثر^۱ عبارتست از [ref-۴] :

$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{hence} \quad , \quad \gamma_{\text{eff}} = \frac{\hat{c}w}{\hat{c}x} - \theta \quad (\text{الف-۶})$$

^۱ Effective shear strain

به دلیل اینکه $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{L}{2} \frac{\partial w}{\partial s}$ ، برای کرنش برشی خواهیم داشت :

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{l}(w_j - w_i) - \frac{4}{l}s\beta_1 + \frac{2}{l}(1-3s^2)\beta_2 - \frac{1-s}{2}\theta_i - \frac{1+s}{2}\theta_j - (1-s^2)\alpha \quad (\text{الف-۷})$$

اگر عبارات خطی پارابولیک را برابر صفر قرار دهیم، معادلات زیر بدست می‌آید :

$$\beta_1 = \frac{l}{8}(\theta_i - \theta_j) \quad (\text{الف-۸})$$

$$\beta_2 = \frac{l}{6}\Delta\theta \quad (\text{الف-۹})$$

پس تغییرمکانهای نرمال می‌تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$w = N_1 w_i + N_2 w_j + N_3 \frac{l}{8}(\theta_i - \theta_j) + N_4 \frac{l}{6}\Delta\theta \quad (\text{الف-۱۰})$$

همچنین کرنش برشی موثر در امتداد طول لبه ثابت است و با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{l}(w_j - w_i) - \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j) - \frac{2}{3}\Delta\theta \quad (\text{الف-۱۱})$$

حال کرنشهای خمشی و نرمال برای المان می‌تواند از رابطه زیر محاسبه شود :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2z}{l} \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{z}{l}[\theta_i - \theta_j + 4s\Delta\theta] \quad (\text{الف-۱۲})$$

بعلاوه، کرنش خمشی ε_x می‌تواند بر حسب مقادیر انحنای Ψ نوشته شود :

$$\varepsilon_x = z\Psi \quad (\text{الف-۱۳})$$

بیرمکان - تغییرشکل برای یک المان خمشی که دارای تغییرشکل‌های برشی است، می‌تواند بصورت

ماتریسی زیر نوشته شود :

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 4s \\ -l/2 & -l/2 & -1 & 1 & -2l/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad \text{or,} \quad \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{الف-۱۴})$$

رابطه تغییرشکل - نیرو برای المان خمشی به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} M \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int z^2 E dA & 0 \\ 0 & \int \alpha G dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{or,} \quad \sigma\mathbf{f} = \mathbf{c}\mathbf{d}\Delta \quad (\text{الف-۱۵})$$

که E مدول یانگ، αG مدول برشی موثر و V کل نیروی برشی موثر بر مقطع است.

با اعمال تئوری انرژی پتانسیل حداقل، ماتریس سختی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{l}{2} \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} ds \quad (\text{الف-۱۶})$$

برای حذف $\Delta\theta$ از کاهش مرتبه استاتیکی استفاده می‌شود که منجر به تشکیل ماتریس سختی ۴ در ۴ برای المان می‌شود.

الف-۲- مساحت برشی موثر

برای یک تیر همگن مستطیلی با عرض b و عمق d، توزیع برش در مقطع بصورت زیر خواهد بود :

$$\tau = \left[1 - \left(\frac{2z}{d} \right)^2 \right] \tau_0 \quad (\text{الف-۱۷})$$

که τ مقدار تنش برشی حداکثر در محور خنثی است. با انتگرال‌گیری از تنش برشی در سطح مقطع،

به رابطه زیر می‌رسیم :

$$\tau_0 = \frac{3}{bd}V \quad (\text{الف-۱۸})$$

تنش برشی با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\gamma = \frac{1}{G} \left[1 - \left(\frac{2z}{d} \right)^2 \right] \tau_0 \quad (\text{الف-۱۹})$$

انرژی کرنشی داخلی در واحد طول عبارتست از :

$$E_i = \frac{1}{2} \int \gamma \tau dA = \frac{3}{5bdG} V^2 \quad (\text{الف-۲۰})$$

کار خارجی در واحد طول عبارتست از :

$$E_e = \frac{1}{2} V \gamma_{\text{av}} \quad (\text{الف-۲۱})$$

از تساوی انرژی داخلی و خارجی خواهیم داشت :

$$V = \frac{5}{6} Gbd \gamma_{\text{av}} \quad (\text{الف-۲۲})$$

بنابراین ضریب کاهش مساحت^۱ خواهد بود :

$$\alpha = \frac{5}{6} \quad (\text{الف-۲۳})$$

^۱ Area reduction factor

برای صفحات و تیرهای غیرهمگن، می‌توان از روشی همانند روش بالا برای محاسبه این ضریب استفاده کرد.

پیوست ب

انتگرال گیری عددی

ب-۱- انتگرال گیری عددی:

بر اساس قواعد سنتی ریاضی، زمانی که انتگرال گیری دقیق از یک تابع میسر نباشد باید از انتگرال-گیری عددی استفاده کرد.

برای محاسبه ماتریس سختی المان که بر اساس توابع تقریبی محاسبه می‌شود، استفاده از انتگرال-گیری عددی باعث می‌شود که نتایج دقیق‌تر باشد و همچنین سرعت همگرایی بالا برود [۲]. در این پیوست روابط انتگرال گیری عددی یک، دو و سه بعدی به طور خلاصه شرح داده شده است. این روابط اغلب به قوانین انتگرال گیری عددی^۱ برمی‌گردد. از آنجا که قوانین انتگرال گیری کلی هستند، تابعی که از آن انتگرال گرفته می‌شود باید در فاصله ۱- تا ۱ باشد. برای مثال انتگرال یک بعدی زیر را در نظر بگیرید.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (\text{ب-۱})$$

با استفاده از تغییر متغیر $x = \frac{1}{2}(1-r)x_1 + \frac{1}{2}(1+r)x_2$ می‌توان نوشت:

$$I = J \int_{-1}^1 f(r) dr = JI_r \quad (\text{ب-۲})$$

مشخص است که:

$$dx = (x_2 - x_1) dr = J dr \quad (\text{ب-۳})$$

J همان ژاکوبین تبدیل^۲ است. برای انتگرال‌های دو بعدی و سه بعدی، ژاکوبین اندکی پیچیده‌تر است و به ترتیب متناسب با مساحت و حجم المان است.

^۱Numerical quadrature rules
^۲Jacobian of transformation

ب-۲- انتگرال گیری عددی یک بعدی:

برای انتگرال گیری از یک تابع یک بعدی، باید آن را به صورت زیر نوشت:

$$I_r = \int_1 f(r) dr = \sum_{i=1}^N w_i f(r_i) + w_2 f(r_2) + \dots + w_N f(r_N) \quad (\text{ب-۴})$$

انتگرال در نقاط گوس^۲ r_i و ضرایب وزن گوس^۴ w_i محاسبه می شود. نقاط گوس یا در مرکز قرار دارند یا به صورت جفتیابی با فاصله و وزن مساوی از مرکز قرار دارند.

یک تابع چند جمله ای همانند $f(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n$ برای انتگرال گیری در نظر گرفته می شود. در نقطه انتگرال گیری r_i :

$$f(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n \quad (\text{ب-۵})$$

واضح است که انتگرال جملات شامل توان های فرد صفر است. انتگرال گیری دقیق از هر کدام از توان های چند جمله ای منجر به رابطه زیر می شود.

$$I_r = \int_1 f(r) dr = \sum_n \int_1 a_n r^n dr = \sum_n \frac{2a_n}{n+1} = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \dots \quad (\text{ب-۶})$$

قانون تک تا سه نقطه ای^۳ به صورت زیر نوشته می شود:

$$I_r = w_\alpha f(-\alpha) + w_0 f(0) + w_\alpha f(\alpha) \quad (\text{ب-۷})$$

بنابراین با توجه به معادلات بالا قانون انتگرال گیری تک نقطه ای در $r=0$ رابطه زیر را بدست می دهد:

$$I_r = w_0 a_0 = 2a_0 \quad \text{or,} \quad w_0 = 2 \quad (\text{ب-۸})$$

به همین ترتیب قانون انتگرال گیری دو نقطه ای در $x = \pm\alpha$ به صورت رابطه زیر می شود.

$$I_r = w_\alpha (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2) + w_\alpha (a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \quad (\text{ب-۹})$$

از تساوی ضرایب a_0 و a_2 در معادله بالا رابطه زیر بدست می آید:

^۲ Gauss points

^۴ Gauss weighting factor

^۳ One to three points

$$2w_0a_0 = 2a_0 \quad \text{or,} \quad w_\alpha = 1$$

$$2w_0a_2\alpha^2 = \frac{2}{3}a_2 \quad \text{or,} \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (\text{ب-۱۰})$$

قانون انتگرال گیری سه نقطه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$I_r = w_\alpha(a_0 - a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4) + w_0a_0$$

$$+ w_\alpha(a_0 - a_1\alpha + a_2\alpha^2 - a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 \quad (\text{ب-۱۱})$$

از تساوی ضرایب a_0, a_2, a_4 و رابطه زیر بدست می‌آید:

$$2w_\alpha a_0 + w_0 a_0 = 2a_0 \quad \text{or,} \quad 2w_\alpha + w_0 = 2$$

$$2w_\alpha a_2 \alpha^2 = \frac{2}{3} a_2 \quad \text{or,} \quad \alpha^2 = \frac{1}{3w_\alpha} \quad (\text{ب-۱۲})$$

$$2w_\alpha a_4 \alpha^4 = \frac{2}{5} a_4 \quad \text{or,} \quad \alpha^4 = \frac{1}{5w_\alpha}$$

از حل این سه معادله روابط زیر بدست می‌آید:

$$w_\alpha = \frac{5}{9}, \quad w_0 = \frac{8}{9}, \quad \text{and} \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (\text{ب-۱۳})$$

توجه شود که جمع توابع وزن برای تمام قوانین انتگرال گیری یک بعدی برابر با ۲ است که در واقع طول بازه ۱- تا ۱ است.

ب-۳- انتگرال گیری عددی در دو بعد:

انتگرال گیری عددی دو بعدی را می‌توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$I_{rs} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j f(r_i, s_j) \quad (\text{ب-۱۴})$$

با استفاده از قوانین یک بعدی گوس در هر دو جهت r, s معادله بالا براحتی اثبات می‌شود. انتگرال-

گیری دو در دو سه در سه به ترتیب نیاز به ۴ و ۹ نقطه انتگرال گیری دارند برای حالت دو بعدی

جمع ضرایب وزن w_i, w_j برابر با ۴ خواهد شد.

ب-۳-۱- قانون انتگرال گیری دو بعدی هشت نقطه‌ای:

می‌توان قوانین انتگرال گیری را برای حالت دو بعدی به شکلی تعمیم داد که دقتی همانند قوانین انتگرال گیری یک بعدی با تعداد نقاط کمتر داشته باشد. در حالت کلی چند جمله‌ای درجه دوم به صورت زیر است:

$$f(r, s) = \sum_{n,m} a_{nm} r^n s^m \quad (\text{ب-۱۵})$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a_{nm} r^n s^m dr ds = \frac{4a_{nm}}{(n+1)(m+1)} \quad (\text{ب-۱۶})$$

رابطه بالا در حالتی صادق است که هر دو عدد m و n زوج باشند.

قانون انتگرال گیری دو بعدی N نقطه‌ای می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$I = \sum_{i=1}^N w_i f(r_i, s_i) = a_{00} \sum_i w_i + a_{10} \sum_i w_i r_i + a_{01} \sum_i w_i s_i + \\ + a_{11} \sum_i w_i r_i s_i + a_{20} \sum_i w_i r_i^2 + a_{00} \sum_i w_i + \dots + a_{nm} \sum_i w_i r_i^n s_i^m \quad (\text{ب-۱۷})$$

هشت نقطه انتگرال گیری که در شکل (ب-۱) نشان داده شده است را می‌توان با استفاده از رابطه زیر تعریف کرد:

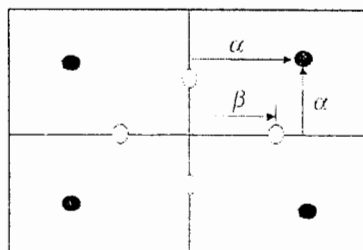
$$I = w_\alpha f(\pm \alpha, \pm \alpha) + w_\beta [f(\pm \beta, 0) + f(0, \pm \beta)] \quad (\text{ب-۱۸})$$

از تساوی ضرایب معادلات بر حسب مجهولات روابط زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_{00} & : & 4w_\alpha + 4w_\beta & = 4 \\ a_{02} a_{20} & : & 4w_\alpha \alpha^2 + 2w_\beta \beta^2 & = 4/3 \\ a_{22} & : & 4w_\alpha \alpha^4 & = 4/9 \\ a_{04} a_{40} & : & 4w_\alpha \alpha^4 + 2w_\beta \beta^4 & = 4/5 \end{aligned} \quad (\text{ب-۱۹})$$

با حل این معادلات محل این نقاط و مقادیر وزن آنها همانند زیر بدست می‌آید:

$$\alpha = \sqrt{\frac{7}{9}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{7}{15}}, \quad w_\alpha = \frac{9}{49}, \quad w_\beta = \frac{40}{49} \quad (\text{ب-۲۰})$$



$$W_s = \frac{40}{49} = ?$$

$$W_a = 1.0 - W_s$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1.0}{3\sqrt{W_s}}}$$

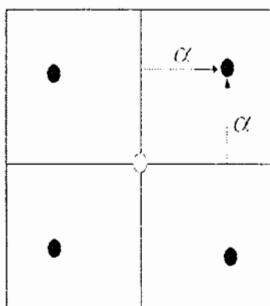
$$\beta = \sqrt{\frac{2 - 2\sqrt{W_s}}{3W_s}}$$

شکل ب-1: قانون انتگرال گیری دو بعدی هشت نقطه‌ای

ب-3-2- قانون انتگرال گیری 5 نقطه‌ای:

این قانون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I = w_\alpha f(\pm\alpha, \pm\alpha) + w_\beta f(0,0) \quad (\text{ب-21})$$



$$W_0 = ?$$

$$W_\alpha = 1.0 - W_0/4$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1.0}{3W_\alpha}}$$

شکل ب-2: قانون انتگرال گیری 5 نقطه‌ای

از تساوی ضرایب معادلات بر حسب مجهولات روابط زیر بدست می‌آید:

$$a_{00} : 4w_\alpha + 4w_\beta = 4 \quad (\text{ب-22})$$

$$a_{02}a_{20} : 4w_\alpha\alpha^2 = 4/3$$

از حل این معادلات روابط زیر بدست می‌آید:

$$w_0 = ? \quad w_\alpha = (4 - w_0)/4 \quad \text{and} \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{w_\alpha}} \quad (\text{ب-23})$$

به عنوان مثال می‌توان نوشت:

$$w = 0.004 \quad w_\alpha = 0.999 \quad \alpha = 0.5776391 \quad (\text{ب-24})$$

به دلیل اینکه قانون انتگرال گیری ۵ نقطه‌ای دارای دقت مرتبه سوم برای هر مقدار وزن مرکزی است قانون زیر ممکن است.

$$w_0 = 8/3 \quad w_\alpha = 1/3 \quad \alpha = 1.00 \quad (\text{ب-۲۵})$$

بنابراین نقاط انتگرال گیری در گره میانی و ۴ گره کناری یک المان قرار دارند. از اینرو با استفاده از این قانون در تخمین تنش‌های گرهی، نیازی به تصویر تنش‌ها در نقاط انتگرال گیری نیست [۲].
به همین ترتیبی که تا به حال توضیح داده شد، می‌توان روابط را برای حالت سه‌بعدی نیز تعمیم داد که برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مرجع [۲] در همین رساله مراجعه کنید.

انتخاب روش مناسب برای انتگرال گیری نیازمند تجربه و درک فیزیکی صحیح از تقریبی است که در فرمول‌بندی اجزای محدود مدل، استفاده شده است. بنابراین هر فرد باید مناسب‌ترین روش را برای انتگرال گیری انتخاب کند. خلاصه‌ای از نقاط انتگرال گیری و مفادیر وزن‌ها در جدول ب-۱ آمده است.

جدول ب-۱: خلاصه‌ای از قوانین انتگرال گیری

RULE	Number of Points	Location of Points			Weighting Values		
		α	β	(l)	w_α	w_β	w_0
One Dimensional-Gauss $I = \int_{-1}^1 f(r) dr$	1	-	-	0	-	-	2
	2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	-	-	1.0	-	-
	3	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	-	0	$\frac{5}{9}$	-	$\frac{8}{9}$
Two Dimensional $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds$	5	$\pm \frac{1}{\sqrt{3w_\alpha}}$	-	0	$w_\alpha = \frac{1-w_\beta}{4}$	-	$w_0 = ?$
	5	± 1	-	0	$\frac{1}{3}$	-	$\frac{8}{3}$
	8	$\pm \sqrt{\frac{7}{5}}$	$\pm \sqrt{\frac{7}{15}}$	-	$\frac{9}{40}$	$\frac{40}{40}$	-
Three Dimensional $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t) dr ds dt$	9	$\pm \frac{1}{\sqrt{3w_\alpha}}$	-	0	$w_\alpha = \frac{1-w_\beta-w_\gamma}{8}$	-	$w_0 = ?$
	14	$\pm \sqrt{\frac{19}{33}}$	$\pm \sqrt{\frac{19}{30}}$	-	$\frac{121}{361}$	$\frac{320}{361}$	-



Shahrood University of Technology

M. Sc. THESIS
Structural Engineering Department

Title

**Shape Optimization of Shell Structures
with Mathematical Programming
And Calculation of Natural Frequencies
of Free Vibration of Shells**

Supervisor
Dr. B. Hassani

Student
M. Rezaei

Summer 2007