بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده عمران و معماری

روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM)

و کاربرد آن در مکانیک جامدات

ارائه شده جهت اخذ درجه

کارشناسی ارشد
رشته عمران گرایش سازه

استاد راهنما

دکتر رضا نادری (استادیار دانشگاه صنعتی شاهرود)

استاد مشاور

دکتر بهروز حسنی (استاد دانشگاه صنعتی شاهرود)

دانشجو

بهنام پارسا (دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد)

سمنان، شاهرود
تیر ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر نازنینم

سپاس‌گزاری

اکنون که با یاری پروردگار یکتا این پایان‌نامه به سرانجام رسید، بر خود لازم می‌دانم تا از زحمات تمام کسانی که مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمایم. نخست از زحمات و رهنمودهای استاد راهنمای ارجمند خود، جناب آقای **دکتر رضا نادری** که با دقت تمام و توجهی قابل وصف تمامی مسائل و مشکلات موجود در راه انجام پایان‌نامه را مرتفع نموده و مرا در تمامی مراحل انجام آن یاری رساندند، سپاس‌گزاری می‌نمایم. کسب درجات بالاتر علمی را برای ایشان از صمیم قلب آرزومندم.

همچنین از تمامی اساتید گرانقدرم در گروه عمران دانشگاه صنعتی شاهرود، **دکتر بهروز حسنی، دکتر علی کیهانی، دکتر وحیدرضا کلات‌جاری، دکتر فرشید علایی، دکتر حامد کمیلی، دکتر طالب‌زاده، دکتر حامد افتخارزاده، دکتر سعید سعیدی، مهندس فرنوش باسلیقه و مهندس**

قاسـمزاده که در طول سـال‌های ۱۳۷۹ تا سـال ۱۳۸۷ از دانش ایشـان بهره جسـتم، قدردانی می‌نمایم. شاگردی ایشان افتخاری فراموش‌ناشدنی برای اینجانب است.

از یـاد نخواهم برد زحمـات و توجهـات بی‌دریغ خـانواده‌ی گرامی‌ام بـه ویژه **پدر بزرگوار** و **مادر نازنینم** را که در طول انجام این امر مهم دلسوزانه مرا یاری نمودند. همچنین از دوست مهربانم جناب آقای **مهندس حسین عرب یارمحمدی** و همسـر نازنین‌شان که در طول مدت انجام پایان‌نامه همراه من بوده و همواره حضـوری سـبز در طول این مسـیر دشوار داشتند، کمال قدردانی را می‌نمایم. راهنمایی‌های ارزنده‌ی دوست مهربانم جناب آقای **مهندس حبیب آقازاده** را نیز فراموش نخواهم کرد.

در پایان از مهربان‌ترین یار زندگی‌ام سـرکار خانم **مهندس ذوالفقاری** که در سـخت‌ترین شـرایط همواره در کنارم بودند، سپاس‌گزاری می‌نمایم.

آرزوی قلبی بنده فردایی همراه با شادکامی و کامیابی برای تمامی این بزرگواران است.

بهنام پارسا
تیر ۱۳۸۷

چکیده

روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM)
و کاربرد آن در مکانیک جامدات

روش اجزاء محدود توسـعه‌یافته (X-FEM) برای شـبیه‌سـازی رشـد ترک، بدون شبکه‌بندی دوباره استفاده شده است. روش مجموعه تراز (LSM) نیز برای مدل کردن ترک و دنبال کردن مسیر رشد و حرکت آن به‌کار گرفته شده است.

مدل‌کردن یک میدان ناپیوسـته با یک تقریب اجزاء محدود اسـتاندارد چالش‌های منحصربفردی از خود نشـان می‌دهد. ایجاد یک فضـای تقریب که در امتداد یک خط یا سـطح، ناپیوسـته اسـت، کاستی‌های بسـیاری را در شـبکه اجزاء محدود ایجاد می‌سـازد. شبیه‌سازی رشد و گسترش در ناپیوستگی باعث تحمیل نیاز به شبکه‌بندی دوباره در هر مرحله از محاسبات می‌شود.

در پایان‌نامه موجود، تقریب اجزاء محدود استاندارد با مجموعه‌ای از توابع ناپیوسته، تقریب زده می‌شود. پایه غنی‌شده، از یک اجتماع از مجموعه‌ی توابع شکل گره‌ای با یک مجموعه از حاصلضرب‌های توابع شکل گره‌ای با توابع غنی‌سازی، شکل می‌گیرد. ایجاد فضای تقریب در این روش، تقریب‌سازی را در رده‌ی روش‌های تقسیم یگانه (PUM) قرار می‌دهد.

ترکیب روش مجموعه تراز که برای نشان دادن موقعیت ترک و نیز موقعیت های نوک ترک استفاده شده است، با روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، منجر به روشی می‌شود که در این روش مرکب نیازی به شبکه‌بندی دوباره دامنه، هم‌زمان با رشد ترک نبوده و بنابراین این روش را بسیار کارآمد می‌نماید.

در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، توابع شکل گره‌ای با توابع ویژه‌ای غنی شده‌اند. توابع غنی‌سازی ممکن است ناپیوسته باشند (به منظور مدل کردن گسستگی‌ها در دامنه)، مشتق‌هایشان نیز ممکن است ناپیوسته باشند (به منظور مدل کردن پیچ و تاب‌ها در دامنه) یا می‌توانند به گونه‌ای انتخاب شوند که یک مشخصه ویژه را به حل وارد سازند. بدین ترتیب، یک میدان ناپیوسته بطور مستقل از شبکه اجزاء محدود نشان داده شده است. قابلیت محاسبه‌ی دقیق ضرایب شدت تنش (SIFs) برای یک شبکه که بر هندسه ترک منطبق نیست، یک نتیجه‌ی برجسته روش اجزاء محدود توسعه‌یافته می‌باشد.

کاربرد این روش در مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)، ترک ساکن منفرد و نیز رشد ترک در چندین مثال عددی مختلف نشان داده شده است. مسیرهای شبیه‌سازی‌شده‌ی ترک، همبستگی خوبی با داده‌های تجربی از خود نشان داده و نتایج ثابت و استواری با این روش بدست آمده است.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه

به طور کلی برای حل مسائل فیزیکی از سه روش استفاده شده است:

۱- روش تحلیلی دقیق (Exact Analytical Solution)

۲- روش عددی (Numerical Solution)

۳- روش تجربی (Experimental Method)

در حل دقیق، همانطور که از نام آن مشخص است، به محاسبه‌ی دقیق پارامتری معادلات دیفرانسیل حاکم بر میدان‌های فیزیکی هم‌چون میدان حرارتی، میدان تنش، میدان الکتریکی و ... پرداخته می‌شود. در حالی‌که در روش دوم به حل تقریبی و عددی این مسائل پرداخته می‌شود. روش تجربی یا آزمایشگاهی نیز با توجه به اینکه رفتار واقعی مسئله را در آزمایشگاه بررسی می‌کند، روشی مناسب محسوب می‌گردد.

در این میان، روش حل عددی که روش اجزاء محدود زیرمجموعه‌ی آن می باشد، یکی از پرکاربردترین روش های مورد استفاده در حل مسائل مهندسی است. با پیشرفت سریع علم رایانه و تحولاتی که در زمینه‌ی روش‌های عددی صورت گرفته است، روش‌های عددی به عنوان ابزاری قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر انواع پدیده‌های فیزیکی تبدیل شده است.

استفاده از روش‌های عددی علاوه بر فراهم آوردن امکان تحلیل مسائل پیچیده‌ای که امکان تحلیل آنها از طریق روش‌های متداول، هم‌چون روش‌های تحلیلی، فراهم نبوده است، منجر به افزایش دقت و کاهش زمان تحلیل بسیاری از مسائل رایج در علوم مهندسی گردیده است.

مزیت‌های حل عددی به ویژه روش اجزاء محدود[1] نسبت به روش‌های دیگر به شرح زیر است:

- ضعف عمده‌ی روش آزمایشگاهی، پرهزینه و زمان‌گیر بودن آن می‌باشد، در حالی‌که در روش حل عددی این‌چنین نیست.
- روش حل دقیق از تحلیل مدل‌های پیچیده عاجز است و تنها روش‌های حل عددی به خصوص اجزاء محدود در این زمینه کارگشا است. به عنوان مثال محاسبه‌ی تنش ماکزیمم در میل‌لنگ اتومبیل از جمله موارد پیچیده کاربرد روش‌های عددی است.
- در حل مسائلی که شرایط مرزی پیچیده می‌شود نیز حل دقیق ناتوان است و تنها روش‌های مرسوم عددی در حل این نوع مسائل بکار می‌رود. به عنوان مثال بررسی حرکت پره‌های توربین بادی در اثر بارهای آیرودینامیکی وارد بر آن از موارد مذکور می‌باشد.

اصطلاح اجزاء محدود برای اولین بار توسط کلاف[2] در سال ۱۹۶۰ جهت حل مسائل الاستیسیته دوبعدی به کار گرفته شد. هر چند اولین شخصی که عملاً از این روش در حل مسائل پیچش استفاده نمود کورانت[3] در سال ۱۹۴۳ است.

---

[1] Finite Element Method (FEM)

[2] Clough

[3] Courant

در روش اجزاء محدود غالباً مســائل فیزیکی به کمک معادلات دیفرانســیل حاکم بر ســیســتم و با اســتفاده از کمینه نمودن انرژی پتانسیل حل می شوند. روش کار بدین صورت است که کل مدل هندسی به اجزاء ریزتری به نام المان (جزء) تقســیم می‌شــود. هر المان خود دارای گره‌هایی اســت که مقادیر ورودی (بارگذاری و شرایط مرزی) و خروجی (نتایج) به آنها نسبت داده می‌شوند.

هر المان دارای رفتاری است که به آن تابع شکل گفته می‌شود و مقدار درجه آزادی (مثلاً جابجایی: **u**) در هر ناحیه از المان را مشـخص می کند. شـرط اصـلی انتخاب تابع شـکل مناسـب، قابلیت ارضاء شدن شـرایط مرزی توسط آن تابع است که این تابع می تواند درجه یک، درجه دو و یا هر تابع دیگری باشد. قابل ذکر اســـت که نرم‌افزارهای اجزاء محدود غالباً از توابع چندجمله‌ای یعنی $ax^n+bx^{n-1}+...$ برای تعریف تابع شکل استفاده می‌کنند.

روش اجزاء محـدود یکی از پرکـاربرد ترین روش‌هـای عـددی برای ایجاد راه‌حل های تقریبی برای معادلات دیفرانسـیل می‌باشد. این روش توسط دانشمندان و مهندسان در گستره وسیعی از مسائل مهندسی در گرایش‌های متفاوت از جمله برای تخمین شـکست دینامیکی سازه‌ها، جریان آشفته حول یک بال‌واره[۴] و بـارهـای حرارتی روی میکروچیـپ‌هـای الکترونیکی به‌کار می‌رود. در حالی‌که روش اجزاء محدود به خوبی گسترش و تثبیت یافته است، ولی در موارد خاصی از جمله مدل کردن گسستگی‌های در حال رشد[۵] مناسب نیســـت. این روش به عنوان یک نمونه بارز از روش گالرکین[۶]، بر پایه‌ی یک ســـاختار المانی برای ایجاد یک

[۴] Airfoil

[۵] evolving discontinuities

[۶] Galerkin method

فضای تقریب بنا شده است. ایجاد یک فضای ناپیوسته با اجزاء محدود، مستلزم قرار گرفتن پیکربندی[۷] المان با هندسه‌ی گسستگی در یک امتداد است. بدین ترتیب، تولید دوباره‌ی شبکه همزمان با رشد وگسترش ناپیوستگی صورت می‌گیرد و در نتیجه منجر به افزایش خطاهای مسئله و زمان محاسبات می‌شود.[۱و۲]

در طول چند سال گذشته، توجه به توسعه روش‌های تقریبی جدید در چارچوب روش گالرکین که نیازی به شبکه‌ای برای ایجادشان نباشد، افزایش یافته است. این روش‌ها به نام روش‌های «بدون شبکه»[۸] یا «مستقل از شبکه»[۹] نامیده شده‌اند. برخی از مفاهیم اصلی در روش‌های بدون شبکه را می توان در روش هیدرودینامیک ذره هموار (SPH)[۱۰] یافت که یک تابع هسته[۱۱] را برای ایجاد تقریب ها به‌کار می گیرد.[۱۶] اخیراً برخی تغییرات مختلف در روش استاندارد با کاربردهایی برای شکست ترد و تغییر شکل‌های بزرگ اجسام صلب صورت گرفته است. روش جزءپخش (DEM)[۱۲] و روش گالرکین مستقل از شبکه (EFG)[۱۳] نیز بصورت یک کار موازی گسترش یافته است. برای روش‌های بدون شبکه، گاهی از یک مجموعه از گره‌ها و تکنیک حداقل مربعات متحرک[۱۴] نیز استفاده می‌شود. آقای بلیچکو[۱۵] و همکارانش (۱۹۹۶)[۹] نشان دادند

---

۷ topology

۸ meshless

۹ mesh-free

۱۰ Smoothed Particle Hydrodynamics

۱۱ kernel function

۱۲ difuse-element method

۱۳ Element-Free Galerkin (EFG)

۱۴ moving-least-squares technique

۱۵ Belytschko

که برای چیدمان گره‌ای معین و انتخاب توابع وزن، توابع پایه روش EFG با روش RKPM[۱۶] یکسان هستند. [۱۶]

روش‌های بیان شـده در بالا اگرچه در شکل و ساختار با هم فرق دارند اما بیشتر روش‌ها را در قالب یک تئوری مشترک می‌توان در نظر گرفت.

روش‌های بدون شــبکه برای مســائلی در مکانیک کاربردی که از یک شــبکه اجزاء محدود متداول اسـتفاده می کنند، مشـکلات قابل توجه‌ای را بوجود می آورند. این مشـکلات شـامل مدل کردن استاتیکی و دینامیکی در اجسـام با هر دو روش EFG و SPH و نیز شـامل مدل‌سـازی جریان سـیال و تغییر شکل‌های بزرگ در اجسام با روش RKPM می‌باشد.

گزینه دیگر در برابر روش‌های تقریبی بدون شبکه مربوط به توسعه‌ی روش اجزاء محدودی است که قابلیت نمایش گسستگی‌های درون المانی را دارد. پس از یافتن این روش، المان‌هایی در اطراف هندسه ترک برای نشان دادن گسستگی دلخواه، به‌کار گرفته شده‌اند. [۱۶]

بســـیـاری از فوایـد هر دو روش را می توان در چـارچوب روش تقســـیم یگـانه[۱۷] دریافت که توابع غنی‌سازی موضعی بصورت ساده درون تقریب سهیم هستند.[۲۱]

بلیچکو و بلک[۱۸] (۱۹۹۹)[۶] مفهوم تقسیم یگانه را برای مدل‌کردن رشد ترک، با غنی‌سازی موضعی یک تقریب بر پایه اجزاء محدود توسط میدان‌های نزدیک نوک ترک[۱۹] اتخاذ کردند. یک شکل کلیدی از این

---

[۱۶] Reproducing Kernel Particle Method

[۱۷] Partition of Unity Method (PUM)

[۱۸] Black

[۱۹] near-tip crack fields

کار، تلفیق توابع غنی‌سازی ناپیوسته و استفاده از روند نگاشت برای مدل کردن گسستگی‌های دلخواه بود. همچنین تلفیق میدان‌های نزدیک نوک برای محاسبات ضرایب شدت تنش[۲۰] دقیق روی شبکه‌های نسبتاً درشت ارائه شد. متأسفانه، تکنیک نگاشت برای ترک‌های طولانی (بلند) ناکارآمد بوده و توابع نزدیک نوک مماسی[۲۱] انتخاب مناسبی برای نشان دادن گسستگی‌ها دورتر از نوک ترک نمی‌باشد.

در این پایان نامه، کار بلیچکو و بلک (۱۹۹۹)[۶] با تلفیق یک میدان ناپیوسته در طول سطوح ترک دورتر از نوک ترک تعمیم یافته است. افزایش یک میدان ناپیوسته این اجازه را به هندسه ترک می‌دهد که مستقل از شبکه مدل شده و از شبکه‌سازی دوباره همزمان با رشد ترک بی‌نیاز باشد. از قوانین ویژه‌ای برای انتخاب گره‌های غنی‌شده با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین هندسه ترک و شبکه اجزاء محدود، استفاده شده است. بیشتر کار انجام شده در این پایان‌نامه مربوط به غنی‌سازی ناپیوسته‌ای است که در مقالات موس[۲۲]، دالبو[۲۳] و بلیچکو (۱۹۹۹) [۲۲] و دالبو، موس و بلیچکو (۱۹۹۹) [۱۷] ارائه شده است.

در فصل دوم، خلاصه‌ای از روش اجزاء محدود بیان شده است. انتگرال وزنی و تشکیل روابط کاهش مرتبه یافته[۲۴] معادلات دیفرانسیل و نیز حل مسائل مقدار مرزی به وسیله‌ی روش‌های رایلی-ریتز و باقیمانده های وزنی در این فصل مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل سوم به مکانیک شکست و برخی از معیارهای شکست پرداخته شده است. در ادامه‌ی این فصل، رشد ترک در یک جسم الاستیک خطی نشان

---

[۲۰] Stress Intensity Factors (SIFs)

[۲۱] asymptotic near-tip functions

[۲۲] Moës

[۲۳] Dolbow

[۲۴] weak form

داده شــده اســت. انتگرال‌های کنتور و نمایش دامنه‌ای آنها در دوبعد آخرین مبحث این فصــل را تشــکیل می‌دهد.

در فصل چهارم ابتدا روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM) شرح داده شده است. روش مجموعه تراز (LSM) و کاربرد آن در مدل‌کردن ترک در ادامه آمده اســت. دیاگرام ورونی و مثلث‌بندی دلانی مبحث دیگری است که در این فصل بدان پرداخته شده است.

کاربرد روش اجزاء محدود توسـعه‌یافته در شــبیه‌ســازی رشـد ترک و برنامه‌های ایجاد شـده توسط نرم‌افزار Matlab جهت شبیه‌سازی رشد و گسترش ترک در فصل پنجم آمده است. فصل ششم تعدادی مثال عددی را مورد بررسی قرار می‌دهد. نتیجه‌گیری و پیشنهادات نیز در فصل هفتم ارائه شده است.

فصل ۲

روش اجزاء محدود

۲-۱- مقدمه

تقریباً هر پدیده‌ای در طبیعت اعم از علوم زیســت شــناسی، زمین شناسی، یا مکانیکی را می‌توان با کمک قوانین فیزیک بر حســب معادلات جبری، دیفرانســیلی یا انتگرالی که ارتباط دهنده‌ی مقادیر مختلف

موردنظر هستند، توصیف نمود. تعیین توزیع تنش در یک مخزن تحت فشار دارای سوراخ‌هایی با شکل ناهمگون و تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و یا آیرودینامیک، بدست آوردن غلظت آلاینده‌ها در آب دریا یا در محیط و شبیه‌سازی هوا جهت درک و پیش‌بینی مکانیسم تشکیل گردبادها و طوفان‌ها، مثال‌هایی از مسائل متعدد کاربردی مهم می‌باشند.

بیشتر مهندسین و دانش‌پژوهان در مطالعه‌ی پدیده‌های فیزیکی با دو وظیفه‌ی عمده روبرو هستند:

۱- تشکیل روابط ریاضی فرآیند فیزیکی

۲- تحلیل عددی مدل ریاضی

تشکیل روابط ریاضی برای یک فرآیند فیزیکی نیازمند داشتن پیش‌زمینه در موضوعات مربوطه (برای مثال، قوانین فیزیک) و بیشتر مواقع ابزار ریاضی مشخص می باشد. تشکیل روابط به صورت عبارات ریاضی اغلب به معادلات دیفرانسیلی ختم می‌گردد که کمیت‌های موردنظر را برای درک و یا طراحی فرآیند فیزیکی با هم مرتبط می‌سازد. توسعه‌ی مدل ریاضی یک فرآیند از طریق مفروضاتی در خصوص چگونگی رفتار آن فرآیند میسر می‌گردد.

با وجود اینکه استخراج معادلات حاکم برای بیشتر مسائل چندان مشکل نیست، حل آنها به وسیله‌ی روش‌های تحلیلی دقیق کاری بس دشوار است. در چنین مواقعی روش‌های تحلیلی تقریبی راه چاره‌ای را فراهم می‌آورند. در میان این روش‌ها، غالباً در مقالات فنی روش تفاضل محدود و روش‌های حساب تغییرات[۲۵] مانند رایلی-ریتز[۲۶] و گالرکین[۲۷] به کار گرفته شده‌اند.[۲]

---

[۲۵] variational

[۲۶] Rayleigh-Ritz

[۲۷] Galerkin

در تقریب تفاضل محدود یک معادله دیفرانسیل، مشتقات آن با تفاضل خارج قسمت‌ها (یا بسط سری تیلور تابع) که شامل مقادیر جواب در نقاط مجزای شبکه در دامنه می باشد، جایگزین شده است. معادلات جبری بدست آمده، پس از اعمال شرایط مرزی، جهت بدست آوردن مقادیر جواب در نقاط مختلف شبکه حل شده‌اند.

در حل معادلات دیفرانسیل به روش حساب تغییرات، معادله به شکل انتگرال وزنی معادل درآورده شده و سپس حل تقریبی روی دامنه به صورت ترکیبی خطی ($\sum_j c_j \phi_j$) از توابع تقریبی انتخابی مناسب ϕ_j و ضرایب نامعین c_j فرض شده است. ضرایب c_j طوری تعیین می گردند که عبارت انتگرالی معادل با معادله‌ی دیفرانسیل اصلی برقرار باشد. روش‌های حساب تغییرات مختلف، همچون رایلی-ریتز، گالرکین و حداقل مربعات در انتخاب شکل انتگرال، توابع وزن و یا توابع تقریب با یکدیگر تفاوت دارند.

روش اجزاء محدود بر کمبود روش‌های سنتی حساب تغییرات یعنی، تولید روندی منظم جهت استخراج توابع تقریبی برای زیرناحیه های دامنه فائق آمده است. این روش دارای سه ویژگی اصلی است که باعث برتری آن بر دیگر روش‌های رقیب شده است. اول اینکه، دامنه‌ی پیچیده‌ی هندسه‌ی مسئله به صورت مجموعه‌ای از زیردامنه‌های ساده به نام اجزاء محدود عرضه می‌شود. دوم، توابع تقریب برای هر جزء محدود با استفاده از این نظریه‌ی ساده که هر تابع پیوسته را می‌توان به وسیله‌ی ترکیب خطی چندجمله‌ای‌های جبری بیان نمود، استخراج می‌شود. سوم، روابط جبری بین ضرایب نامعین (به عبارت دیگر، مقادیر گره‌ای) به وسیله‌ی برقراری معادلات حاکم، اغلب به صورت انتگرال وزنی، برای هر جزء بدست می‌آید. بنابراین، روش اجزاء محدود را می توان به طور خاص، به کارگیری روش‌های رایلی-ریتز یا باقیمانده‌ی وزنی به صورت جزء-گون تصور نمود. در این روش، اغلب توابع تقریب به صورت چندجمله‌ای‌های جبری در نظر گرفته شده و

پـارامترهای نامعین بیانگر مقادیر جواب در تعداد محدودی از نقاط با اســـتفاده از مفاهیم نظریه ی میانیابی استخراج می گردند و بنابراین *توابع میانیابی* نامیده می‌شوند. درجه‌ی توابع میانیابی به تعداد گره‌ها در جزء و مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل در دست حل بستگی دارد.

۲-۲- پیشینه تاریخی

اندیشــه‌ی نمایش ناحیه‌ی موجود به صـورت مجموعه‌ای از نواحی مجزا (گسسته)، منحصر به اجزاء محدود نمی‌باشد. برای نمونه، ریاضی‌دانان باستان مقدار π را با توجه به اینکه پیرامون چندضلعی محاط در یک دایره پیرامون تقریبی دایره اســت، تخمین زدند. آنها مقدار π را با دقت تقریباً ۴۰ رقم اعشــار با تصـور دایره به صـورت چندضـلعی دارای تعداد اضـلاع بســیار، ولی محدود پیشـگویی نمودند. در زمان معاصر این مطلب جایگاهی مناسب در تحلیل سازه‌ای هواپیما پیدا کرد، به‌طوریکه برای مثال، بال‌ها و بدنه‌ی هواپیما به صـورت همبسـت تقویتی های طولی، پوسـته ها و صـفحات برشـی در نظر گرفته می شـوند. در سال ۱۹۴۱ هرینیکف[۲۸] روش به اصطلاح پیکربندی را معرفی نمود که در آن محیط کشسان هواپیما با مجموعه‌ی میله‌ها و تیرها بیان گردید. به کارگیری توابع پیوسته‌ی قطعه‌گون تعریف شده روی یک زیردامنه برای تقریب تابعی نامعین را می‌توان در کار کورانت یافت (۱۹۴۳) که از همبست اجزاء مثلثی و اصل کمینه انرژی پتانسیل کل برای مطالعه‌ی مسئله پیچش سنت ونانت[۲۹] استفاده کرد. اگرچه برخی ویژگی‌های کلیدی روش اجزاء محدود را می توان در کـارهـای هرینیکف (۱۹۴۱) و کورانـت (۱۹۴۳) یـافت اما ارائه رســـمی آن به آرگیریس[۳۰] و

[۲۸] Hernikoff

[۲۹] Saint Venant

[۳۰] Argyris

کلسی[۳۱] (۱۹۶۰) و ترنر[۳۲]، کلاف، مارتین[۳۳] و تاپ[۳۴] (۱۹۵۶) نسبت داده شده است. عبارت اجزاء محدود اولین بار توسط کلاف در سال ۱۹۶۰ استفاده شد. از آن هنگام، انتشار مقالاتی درباره ی کاربرد اجزاء محدود به صورت تصاعدی رشد نموده و امروزه تعداد بسیاری مقاله ی علمی که تنها به نظریه و کاربرد این روش اختصاص یافته است، موجود می‌باشد.[۲]

۲-۳- مفاهیم اساسی روش اجزاء محدود

بارزترین ویژگی روش اجزاء محدود که آن‌را از دیگر روش ها تفکیک می کند، تقسیم دامنه ی مشخص به یک دسته زیردامنه‌ی ساده، به نام اجزاء محدود می‌باشد. هر شکل هندسی که محاسبه‌ی حل یا تقریب آن امکان‌پذیر باشد، یا روابط لازم بین مقادیر جواب در نقاط منتخب به نام گره‌های زیردامنه را فراهم آورد، به عنوان یک جزء محدود قابل توصیف است. دیگر ویژگی‌های روش شامل جستجو برای یافتن حل تقریبی پیوسته، اغلب به صورت چندجمله‌ای، روی جزء بر حسب مقادیر گره‌ای و همبست معادلات اجزاء با اعمال پیوستگی حل و تعادل نیروها در بین اجزاء می‌باشد. مستطیل و مثلث، نمونه‌هایی از هندسه‌ی اجزاء هستند. بنابراین، تقسیم دامنه‌ای با هندسه‌ی پیچیده به قطعاتی که مقادیر مورد نیاز آنها قابل محاسبه باشد، امری بسیار طبیعی و کاربردی است. این نظریه را می‌توانیم به توابع بیان کننده‌ی مقادیر فیزیکی تقریبی گسترش دهیم. برای مثال، تغییرات دما در دامنه‌ای دوبعدی را می‌توانیم به صورت سطحی منحنی تصور

---

[۳۱] Kelsey

[۳۲] Turner

[۳۳] Martin

[۳۴] Topp

نموده و آن‌را روی هر قسمتی از دامنه، به عبارت دیگر، روی زیردامنه یا جزء به وسیله‌ی تابعی با درجه‌ای دلخواه تقریب زنیم.

به‌طور خلاصه، در اجزاء محدود، دامنه‌ی داده شده به زیردامنه‌هایی به نام اجزاء محدود تقسیم شده و حل تقریبی برای مسئله روی هر یک از آنها بدست می‌آید. تقسیم مجموعه به اجزاء کوچک دارای دو مزیت است:

۱. بیان دقیق هندسه‌های پیچیده و با مواد متفاوت را امکان‌پذیر می‌نماید.

۲. بیان دقیق حل در محدوده ی هر جزء را برای نمایان ساختن تأثیرات موضعی ممکن می‌سازد.

سه گام اصلی روش اجزاء محدود عبارتند از:

۱. تقسیم کل مجموعه به قطعات کوچکتر (برای بیان هندسه و نیز حل مسئله).

۲. یافتن حل تقریبی به صورت ترکیب خطی مقادیر گره‌ای و توابع تقریبی برای هر قسمت.

۳. استخراج روابط بین مقادیر گره ای حل روی هر قسمت و همبست آنها برای بدست آوردن حل برای مجموعه.

تعدادی دیگر از نکات مربوط به این روش عبارتند از:

۱. یک دامنه را بسته به شکل آن می توان با بیش از یک نوع جزء شبکه بندی نمود. چنانچه بیش از یک نوع جزء برای نمایش دامنه‌ای استفاده شده باشد، معادلات هر نوع به‌طور مجزا بدست می‌آید.

۲. در اغلب موارد به دو دلیل معادلات روی یک جزء قابل حل نیستند. اول اینکه حل دقیق برای آنها وجود ندارد. در اینجاست که روش‌های حساب تغییرات مطرح می گردند. دوم، معادلات مجزای حاصل از روش‌های حساب تغییرات به طور مستقل از دیگر اجزاء قابل حل نیستند، زیرا همبست اجزاء تحت شرایط پیوستگی، مرزی و یا شرایط اولیه قرار دارند.

۳. تعداد و محل گره‌ها در یک جزء به هندسه جزء و نیز درجه‌ی چندجمله‌ای تقریب و شکل انتگرالی معادلات بستگی دارد.

۴. در حالت کلی، همبست اجزاء بر این استوار است که حل و احتمالاً مشتق‌های آن برای معادلات مرتبه بالا در مرز بین اجزاء پیوسته می‌باشد.

۵. عموماً، همبست اجزاء محدود تحت شرایط مرزی و یا اولیه قرار دارد. معادلات مجزای مرتبط با شبکه‌ی اجزاء محدود تنها بعد از اعمال شرایط مرزی و یا اولیه حل می‌شوند.

۶. سه منبع خطا در حل اجزاء محدود وجود دارد: (۱) خطاهای ناشی از تقریب دامنه، (۲) خطاهای ناشی از تقریب حل و (۳) خطاهای ناشی از محاسبات عددی.

۲-۴- لزوم شکل‌های انتگرال وزنی

در روش اجزاء محدود، از عبارت انتگرالی برای تولید روابط جبری میان ضرایب u_j در تقریب

$$u \approx \sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j \qquad (۱-۲)$$

استفاده می‌کنیم که u بیانگر حل یک معادله‌ی دیفرانسیل خاص می‌باشد. از آنجا که جای‌گذاری (۲-۱) در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم همواره به تعداد معادلات مستقل جبری خطی مورد نیاز برای ضرایب مجهول u_j ختم نمی‌گردد، استفاده از عبارت انتگرالی معادل با معادله ی دیفرانسیل حاکم الزامی است. تنها راه حصول اطمینان از برابری دقیق تعداد n معادله‌ی موجود با مجهولات، مستلزم صفر شدن **انتگرال‌های وزنی** خطا در معادله می‌باشد.

می‌توانیم حل تقریبی U را به صورت انتگرال وزنی بنویسیم:

$$\int_0^1 wR\,dx = 0 \qquad (۲-۲)$$

که R را **باقیمانده** و w را **تابع وزن** می‌نامیم. از رابطه‌ی (۲-۲) به تعداد معادلات مستقل برای w، معادلات مستقل خطی بدست می‌آوریم.

عبارت انتگرالی از نوع (۲-۲) ابزاری را برای بدست آوردن معادلات به تعداد ضرایب مجهول در تقریب فراهم می‌آورد. روش حساب تغییرات، روشی است که در آن حل‌های تقریبی از نوع $u \approx \sum_j c_j\phi_j + \phi_0$ مطلوب است و در آن ضرایب c_j با استفاده از عبارت انتگرالی، به صورتی که در بالا نشان داده شد، تعیین می‌گردد. روش‌های حساب تغییرات در انتخاب تابع وزن w و عبارت انتگرالی مورد استفاده که به نوبه‌ی خود در انتخاب توابع تقریب ϕ_j مؤثر می‌باشد، با یکدیگر تفاوت دارند. در روش اجزاء محدود، دامنه‌ای مشخص به صورت همبست زیردامنه‌ها در نظر گرفته شده و یافتن حلی تقریبی برای هر زیردامنه به همان صورت روش‌های حساب تغییرات می‌باشد.

۲-۵- تعدادی از مفاهیم و روابط ریاضی

دامنه و مرز: هدف بیشتر تحلیل‌ها، تعیین توابع مجهول به نام **متغیرهای وابسته** است که دسته‌ای معادلات دیفرانسیل داده شده در دامنه یا ناحیه‌ای مشخص و تعدادی شرایط مرزی روی مرز دامنه را ارضاء نمایند. یک دامنه، مجموعه‌ای از نقاط در فضا است، با این خاصیت که اگر P نقطه‌ای از این دامنه باشد آنگاه تمام نقاط به حد کافی نزدیک به P متعلق به آن دامنه می‌باشند. از این تعریف چنین بر می‌آید که یک دامنه تنها شامل نقاط داخلی است. چنانچه هر دو نقطه از دامنه‌ای را بتوان با خطی که تماماً در دامنه قرار دارد به هم متصل نمود، آن دامنه را **محدب** و **همبند ساده** می نامند. مرز یک دامنه گروهی از نقاط هستند که در همسایگی هر یک از این نقاط، نقاطی وجود دارند که متعلق به آن دامنه می‌باشند و همچنین نقاطی که به آن تعلق ندارند. با این تعریف توجه داریم که نقاط روی مرز دامنه متعلق به دامنه

نمی‌باشـند. از نماد Ω برای نشـان دادن دامنه‌ای اختیاری و Γ برای نشـان دادن مرز آن اسـتفاده خواهیم نمود.

تابعی با چندین متغیر در دامنه Ω را کلاس $C^m(\Omega)$ می‌نامیم، اگر تمام مشـتق‌های جزیی آن به انضـمام مرتبه mام آن وجود داشـته و در دامنه‌ی Ω پیوسـته باشند. بنابراین، چنانچه f در دوبعد دارای کلاس C^0 باشـد، آنگاه f پیوسته می باشد (به عبارت دیگر، $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ وجود دارند ولی ممکن است پیوسـته نباشند). حروف x و y همواره برای مختصات قائم یک نقطه در فضای دوبعدی به‌کار برده خواهد شـد. زمانی که متغیرهای وابسـته تابعی از یک متغیر مستقل هستند، دامنه یک پاره خط خواهد بود و نقاط انتهایی پاره خط را نقاط مرزی می‌نامیم. وقتی که متغیرهای وابسـته تابعی از دو متغیر باشـند، دامنه یک سطح خواهد بود و منحنی بسته‌ی دربرگیرنده‌ی آن سطح مرز آن می‌باشد. یک معادله‌ی دیفرانسیل هنگامی بیانگر یک **مسـئله مقدار مرزی** اسـت که متغیرهای وابسـته و احتمالاً مشـتقات آن ملزم به اتخاذ مقادیر معینی روی مرز باشـند. یک **مسئله مقدار اولیه** مسـئله‌ای است که متغیر وابسته و احتمالاً مشتق‌های آن در لحظه ی اولیه (به عبارت دیگر، در زمان $t = 0$) معین باشـند. مسائل مقدار اولیه عموماً مسائل وابسته به زمان می‌باشند.

رابطه انتگرال‌گیری جزء به جزء: فرض می‌کنیم u، v و w توابع به تعداد کافی مشـتق پذیر مختصه x باشند، آنگاه رابطه‌ی انتگرال‌گیری جزء به جزء زیر برقرار می‌باشد:

$$\int_a^b w\frac{dv}{dx}dx = \int_a^b wdv = -\int_a^b vdw + [wv]_a^b = -\int_a^b v\frac{dw}{dx}dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) \quad (۳-۲)$$

این اتحاد را به سادگی می‌توان اثبات نمود.

تابعی‌ها: یک عبارت انتگرالی به صورت

$$I(u)=\int_a^b F(x,u,u')dx, u=u(x), u'=\frac{du}{dx} \quad (۴-۲)$$

که $F(x,u,u')$ یک تابع معین و دارای آرگومان‌های x، u و du/dx اســت، **تابعی** نامیده می‌شود. مقدار انتگرال $I(u)$ به u وابســته اســت، بنابراین نمادگذاری $I(u)$ مناســب می‌باشــد. هرچند برای یک مقدار مشخص u، $I(u)$ بیانگر مقداری عددی می‌باشد.

نماد حســـاب تغییرات: تابع $F=F(x,u,u')$ را در نظر می گیریم. برای یک مقدار مشـــخص اختیاری متغیر مستقل x، F به u و u' وابسته می باشد. تغییر u به مقدار αv که α مقداری ثابت و v یک تابع است را حساب تغییرات u نامیده و با δu مشخص می‌نماییم:

$$\delta u=\alpha v \quad (۵-۲)$$

عملگر δ را نماد حساب تغییرات می نامیم. δu، حساب تغییرات تابع u، نمایانگر تغییر قابل قبول در تابع $u(x)$ در یک مقدار مشـخص متغیر مستقل x می باشد. چنانچه u در یک نقطه معین باشد (معمولاً روی مرز)، حساب تغییرات u در آنجا صفر می‌باشد.

۲-۶- تشکیل روابط کاهش مرتبه یافته برای مسائل مقدار مرزی

انگیزه‌ی تشــکیل روابط انتگرالی مســائل مقدار مرزی از این حقیقت ســرچشــمه گرفته اســت که روش‌های حســـاب تغییرات تقریبی، برای مثال، ریتز، گالرکین، مجموع مربعات، تجمع محلی یا به طور کلی روش‌های باقیمانده وزنی، بر اســاس عبارات انتگرالی وزنی معادلات حاکم بنا نهاده شــده‌اند. از آنجا که روش اجزاء محدود، روشـــی برای ایجاد توابع تقریبی مورد نیاز در به‌کارگیری جزء-گون روش حســـاب تغییرات می باشد، مطالعه ی تشکیل روابط انتگرال وزنی و کاهش مرتبه یافته معادلات دیفرانسیل لازم است. علاوه بر

دلیل فوق، تشـکیل روابط کاهش مرتبه یافته، طبقه بندی شرایط مرزی را به شرایط مرزی طبیعی و اساسی آسان می‌نماید که نقش عمده‌ای را در استخراج توابع تقریب و انتخاب درجه آزادی گره‌ای مدل اجزاء محدود ایفا می‌نماید.

در این بخش، هدف اولیه ایجاد شـــکل کاهش مرتبه یافته یک معادله دیفرانســـیل داده شـــده و طبقه‌بندی شـــرایط مرزی مربوط به آن معادله می‌باشـــد. شـــکل ضـــعیف، یک عبارت انتگرال وزنی معادله دیفرانسیل است که مشتق گیری بین متغیرهای وابسته و تابع وزن توزیع شده است و شرایط مرزی را شامل می‌گردد. شایان ذکر است که هدف اصلی نوشتن عبارت انتگرال وزنی برای معادله دیفرانسیل داشتن ابزاری جهت بدست آوردن N رابطه‌ی جبری مستقل خطی بین ضرایب c_j برای تقریب زیر می‌باشد:

$$u \approx U_N = \sum_j c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \qquad (۶-۲)$$

این امر با انتخاب N تابع وزن مستقل خطی در عبارت انتگرالی میسر می‌گردد.

تولید شکل کاهش مرتبه یافته هر معادله دیفرانسیل در صورت وجود، دارای سه مرحله می‌باشد:

(**مرحله ۱**) تمام عبارات معادله دیفرانســـیل را در یک طرف مســـاوی قرار داده، تابع وزن w را در کل معادله ضـرب کرده و روی دامنه‌ی مسـئله انتگرال‌گیری می‌نماییم. توجه داریم که عبارت انتگرال وزنی هر معادله دیفرانســـیل قابل دســـتیابی اســـت. به طور کلی، تابع وزن w در عبارت انتگرالی تحت شـــرایط پیوستگی سست‌تری نسبت به متغیر وابسته u قرار دارد. عبارت انتگرال وزنی تنها معادل معادله دیفرانسیل است و هیچ گونه شرایط مرزی را شامل نمی‌گردد.

(**مرحله ۲**) درحالیکه عبارت انتگرال وزنی، بدســت آوردن N رابطه‌ی جبری بین c_jها برای N تابع وزن مختلف دلخواه w را امکان‌پذیر می‌ســازد، توابع تقریب ϕ_j را ملزم می‌نماید به گونه‌ای باشــند که

U_N به تعدادی که در معادله دیفرانسـیل اصـلی آمده است قابل انتگرال گیری باشد و شرایط مرزی معین را ارضـاء نماید. چنانچه مشـتق گیری بین حل تقریبی U_N و تابع وزن W توزیع شـود، شکل انتگرالی بدست آمده، شـرایط پیوستگی ضعیفتری را روی ϕ_j ایجاب می نماید بنابراین، عبارت انتگرال وزنی را *شکل کاهش مرتبه یافته* می‌نامیم. تشـکیل روابط کاهش مرتبه یافته دارای دو مشـخصـه‌ی مطلوب می‌باشـد. اول اینکه، احتیاج به پیوسـتگی ضعیف تری (به عبارت دیگر کمتری) برای متغیر وابسته می باشد و اغلب به دسته‌ای از معادلات جبری بر حسـب ضـرایب ختم می گردد. دوم اینکه، شـرایط مرزی طبیعی مسـئله در شکل کاهش مرتبه یافته آن گنجانده می شـود و بنابراین حل تقریبی U_N تنها لازم است شرایط اساسی مسئله را ارضاء نماید. این دو ویژگی شـکل کاهش مرتبه یافته نقش مهمی را در ایجاد شبیه سازی اجزاء محدود یک مسئله ایفا می نماید. قسمت مهم این مرحله، شناسایی دو نوع شرایط مرزی **طبیعی** و **اساسی** مرتبط با هر معادله دیفرانسـیل می‌باشـد. ضـرایب تابع وزن و مشـتق‌های آن در عبارت‌های مرزی را **متغیرهای ثانویه** (SV) می‌نامند. شناسایی متغیرهای ثانویه روی مرز، **شرایط مرزی طبیعی** (NBC) را تشکیل می‌دهد. متغیرهای ثانویه همواره دارای مفهوم فیزیکی هستند و اغلب کمیت‌های مورد نظر می‌باشند.

(مرحله ۳) سـومین و آخرین مرحله‌ی تشـکیل روابط کاهش مرتبه یافته، اعمال شـرایط مرزی حقیقی مسـئله تحت بررسـی می باشد. در اینجاست که تابع وزن W در نقاط مرزی جایی که شرایط مرزی اسـاسـی معین شـده‌اند باید برابر صفر باشد. به بیانی دیگر، w باید شکل همگن شرایط مرزی اساسی معین مسئله را ارضاء نماید.

به‌طور خلاصـه، برای ایجاد شـکل کاهش مرتبه یافته سـه مرحله وجود دارد: در مرحله اول کلیه عبارات معادله دیفرانسـیل را در یک طرف قرار داده، سپس کل معادله را در تابع وزن ضرب و در محدوده‌ی

مســـئله انتگرال گیری می کنیم. عبارت حاصـــل را شـــکل انتگرال وزنی معادله می نامیم. در مرحله دوم، از انتگرال گیری جزء به جزء بهره جســته و مشــتق گیری را بین متغیرهای وابسته و تابع وزن به طور یکنواخت توزیع کرده و با استفاده از عبارات مرزی شکل متغیرهای اولیه و ثانویه را مشخص می‌نماییم. در مرحله سوم، عبارات مرزی را با مقید نمودن تابع وزن به ارضـاء شـکل همگن شـرایط مرزی اساسی معین و با جایگذاری متغیرهای ثانویه با مقادیر معین آنها، اصلاح می‌نماییم.

باید خاطر نشـان سـازیم که برای بدسـت آوردن معالات جبری به تعداد ضرایب مجهول در تقریب متغیرهای وابسته‌ی معادله، یک عبارت انتگرال وزنی یا شکل کاهش مرتبه یافته یک معادله دیفرانسیل مورد نیاز می‌باشد. به ازای انتخاب های مختلف تابع وزن، معادلات جبری مختلفی می توانیم بدست آوریم. به علت قیدی که بر روی تابع وزن در مرحله سـوم گذاشــته ایم، آن تابع باید متعلق به همان فضای توابعی باشد که توابع تقریب هستند.

۲-۷- روش‌های تقریبی حساب تغییرات

هدف در این بخش مطالعه‌ی اختصاری روش‌های تقریبی حساب تغییرات است که شامل روش‌های رایلی-ریتز، گالرکین، پتروف-گالرکین، حداقل مربعات و تجمع محلی می‌باشد. در کلیه‌ی این روش‌ها، منظور یافتن حل تقریبی به شــکل ترکیب خطی از توابع مناســب ϕ_j و پارامترهای مجهول c_j، یعنی $\sum_j c_j\phi_j$ اسـت. پارامترهای c_j طوری تعیین خواهند شـد که حل تقریبی، شکل انتگرال وزنی یا شکل کاهش مرتبه یافته معادله‌ی حاکم را ارضـاء نماید یا معادله‌ی مرتبه‌ی دوم مربوط به معادله‌ی تحت بررسی را کمینه کند. روش های مختلف بر اســـاس انتخاب تابع وزن w و توابع تقریبی ϕ_j با یکدیگر تفاوت دارند. هدف اولیه ی این بخش ارائه‌ی تعدادی از روش‌های حســاب تغییرات کلاســیک (ســنتی) می‌باشــد. روش اجزاء محدود از

روش‌های حساب تغییرات برای تشکیل روابط مجزا برای هر جزء استفاده می‌کند. انتخاب توابع تقریب در روش‌های اجزاء محدود با روش‌های حساب تغییرات کلاسیک تفاوت دارد.

۲-۷-۱- روش رایلی-ریتز

در روش رایلی-ریتز، ضرایب تقریب c_j با استفاده از شکل کاهش مرتبه یافته مسئله بدست می‌آیند و انتخاب توابع وزن به وسیله ی $w=\phi_j$ محدود می گردد. در این روش، هدف یافتن حل تقریبی رابطه‌ی

$$B(w,u)=l(w) \quad (۲-۷)$$

به صورت سری محدود زیر است:

$$u_N=\sum_{j=1}^{N} c_j\phi_j+\phi_0 \quad (۲-۸)$$

که ثابت‌های c_j **ضرایب ریتز** نامیده می‌شوند و به صورتی انتخاب می گردند که رابطه‌ی (۲-۷) برای $w=\phi_i$ ، $i=1,2,\ldots,N$ برقرار باشد.

۲-۷-۲- روش باقیمانده‌های وزنی

همان‌طور که پیشتر اشاره نمودیم، همیشه می توانیم شکل انتگرال وزنی یک معادله دیفرانسیل را، چه معادله خطی باشد چه غیرخطی بنویسیم. روش باقیمانده های وزنی، حالت کلی رایلی-ریتز است که در آن توابع وزن را می توان از مجموعه‌ای از توابع مستقل انتخاب نمود و لازمه‌ی آن تنها تعیین پارامترها به وسیله‌ی شکل انتگرال وزنی هر معادله می‌باشد. از آنجا که این نوع شامل هیچ‌گونه شرایط مرزی معین

مسئله نمی‌باشد، توابع تقریب را باید به گونه‌ای انتخاب نماییم که حل تقریبی، هر دو شرایط مرزی اساسی و طبیعی را ارضاء نماید. علاوه بر آن، توابع وزن را می توان مستقل از توابع تقریب انتخاب کرد لیکن لازم است آنها به صورت مستقل خطی باشند.

روش باقیمانده‌های وزنی را می‌توان به صورت کلی آن با در نظر گرفتن معادله‌ی عملگر زیر تشریح نمود:

$$A(u) = f \quad in \quad \Omega \tag{۹-۲}$$

که A یک عملگر (خطی یا غیرخطی) و اغلب یک عملگر دیفرانسیل می‌باشد که روی متغیر وابسته u عمل می‌کند و f تابعی معین با متغیرهای مستقل است. در روش باقیمانده‌های وزنی، حل u تقریباً به همان صورت روش رایلی-ریتز به وسیله‌ی عبارت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0 \tag{۱۰-۲}$$

با این تفاوت که شرایط ϕ_0 و ϕ_j برای روش باقیمانده‌ی وزنی دشوارتر از روش رایلی-ریتز است. با جای‌گذاری حل تقریبی u_N در سمت چپ (۲-۹) تابع $f_N \equiv A(u_N)$ حاصل می‌گردد که عموماً برابر با تابع معین f نمی‌باشد. اختلاف $A(u_N) - f$، که باقیمانده‌ی تقریب نامیده می‌شود، غیرصفر است:

$$R \equiv A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \tag{۱۱-۲}$$

باقیمانده‌ی R، تابع موقعیت و همچنین پارامترهای c_j می‌باشد. در روش باقیمانده‌ی وزنی پارامترهای c_j با الزام صفر شدن باقیمانده‌ی R به صورت انتگرال وزنی تعیین می‌گردند:

$$\int_{\Omega} \psi_i(x,y) R(x,y,c_j) dxdy = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,N) \qquad (۱۲-۲)$$

که Ω دامنه‌ی دوبعدی و ψ_i توابع وزن هستند که عموماً با توابع تقریب ϕ_i یکسان نمی‌باشند.

شــرایط ϕ_0 و ϕ_j برای روش باقیمانده‌ی با روش رایلی-ریتز که بر اســاس شــکل (انتگرال) کاهش مرتبه یافته معادله‌ی دیفرانسیل است، تفاوت دارد.

۲-۷-۲-۱- روش پتروف- گالرکین

زمانیکه $\psi_i \neq \phi_i$ باشد، روش باقیمانده‌ی وزنی را روش پتروف-گالرکین می‌نامیم.

۲-۷-۲-۲- روش گالرکین

برای حالتی‌که تابع وزن ψ_i برابر تابع تقریب ϕ_i باشـــد، روش باقیمانده ی وزنی بیشـــتر به روش گالرکین معروف است. معادلات جبری تقریب گالرکین عبارتند از:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} c_j = F_i \qquad (۱۳-۲)$$

که

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dxdy, \quad F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A(f - A(\phi_0))] dxdy \qquad (۱۴-۲)$$

به‌طور کلی، روش گالرکین مانند روش رایلی-ریتز نمی‌باشد. این موضوع باید با توجه به این واقعیت که روش اول از شــکل انتگرال وزنی اســتفاده می‌کند در حالی‌که روش دوم از شــکل کاهش مرتبه یافته (یا حساب تغییرات) برای تعیین ضرایب c_j استفاده می‌کند، آشکار باشد. در نتیجه، توابع تقریب مورد استفاده در روش گالرکین لازم است از مرتبه بالاتری نسبت به روش رایلی-ریتز برخوردار باشند.

چنانچه معادله اجازه دهد و در صـورتی که بخواهیم، مشتق گیری را می‌توان از حل u به تابع وزن منتقل نمود، $w=\phi_i$؛ و در نتیجه شکل کاهش مرتبه یافته حاصل می‌شود که شرایط پیوستگی توابع تقریب را سست می‌کند و شرایط مرزی طبیعی معین مسئله را شامل می‌گردد. روش‌های رایلی-ریتز و گالرکین در دو حالت نتایج یکسانی ارائه می‌کنند:

(الف) زمانی‌که کلیه شرایط مرزی معین مسئله از نوع اساسی باشند و بنابراین شرایط ϕ_i در هر دو روش یکسان می‌گردد و شکل انتگرال وزنی به شکل کاهش مرتبه یافته کاهش می‌یابد؛

(ب) زمانی‌که توابع تقریب روش گالرکین در روش رایلی-ریتز استفاده گردد.

۲-۷-۲-۳- روش حداقل مربعات

در این روش پارامترهای c_j را با کمینه‌سازی انتگرال مربع باقیمانده تعیین می‌کنیم.

۲-۷-۲-۴- روش تجمع محلی

در روش تجمع محلی، حـل تقریبی u_N برای (۲-۷) به صــورت (۲-۹) با الزام اینکه باقیمانده ی معادله در N نقطه‌ی منتخب $(i=1,2,\ldots,N)$، مقادیر $X^i=(x^i,y^i)$ بطور یکســان در دامنه Ω برابر صــفر باشد، مطلوب است.

۲-۸- مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم

روش‌های سنتی حساب تغییرات (برای مثال، رایلی-ریتز، گالرکین و حداقل مربعات) که پیشتر بیان شد، به علت کمبودهایی همچون مشکل تشکیل توابع تقریب، چندان کاربردی نیستند. انتخاب توابع تقریب که اختیاری می‌باشـند، جدای از ارضـاء پیوسـتگی، مسـتقل خطی بودن، کامل بودن شـرایط مرزی اساسی،

زمانی‌که دامنه دارای هندسه‌ی پیچیده‌ای باشد بسیار دشوارتر می‌گردد. از آنجا که انتخاب توابع تقریب به شکل مستقیم بر کیفیت تقریب تأثیرگذار است، اطلاع از این موضوع که روندی نظام یافته برای تشکیل آنها وجود ندارد، ناخوشایند می‌باشد. به علت این کمبود، روش‌های تقریبی سنتی، جدای سهولت بدست آوردن حل‌های تقریبی، در مقایسه با روش‌های تفاضل محدود هرگز به عنوان رقیب محاسباتی تلقی نگردیده‌اند.

به صورت ایده‌آل، یک روش محاسباتی مؤثر باید دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. باید دارای شالوده‌ی ریاضی و همچنین فیزیکی منطقی باشد (به عبارت دیگر، حل‌های همگرا ارائه نماید و قابل استفاده در مسائل کاربردی باشد).

۲. نباید محدودیتی در مورد هندسه و ترکیب فیزیکی دامنه یا طبیعت «بارگذاری» داشته باشد.

۳. فرآیند تشکیل روابط باید مستقل از شکل دامنه و شکل ویژه‌ی شرایط مرزی باشد.

۴. روش باید دارای انعطاف پذیری کافی برای تقریب با درجات مختلف بدون نیاز به تشکیل دوباره‌ی روابط برای کل مسئله باشد.

۵. باید دارای فرآیند نظام یافته‌ای برای استفاده در رایانه‌های عددی باشد.

روش اجزاء محدود روشی است که در آن دامنه‌ای مشخص به صورت ترکیبی از دامنه‌های ساده به نام اجزاء محدود بیان می‌گردد بطوریکه، امکان تشکیل منظم توابع تقریب موردنیاز در تقریب حساب تغییرات یا باقیمانده‌ی وزنی برای حل یک مسئله روی هر جزء وجود دارد. بنابراین، روش اجزاء محدود، با روش‌های سنتی رایلی-ریتز، گالرکین، حداقل مربعات، تجمع محلی و روش‌های باقیمانده‌ی وزنی دیگر از نظر طرز تشکیل توابع تقریب تفاوت دارد لیکن، این تفاوت عهده‌دار سه ویژگی روش اجزاء محدود می‌باشد:

۱. ***تقســـیم کل به جزءها***، که ارائه دامنه هایی با هندســـه پیچیده را به صـــورت ترکیبی از دامنه‌های ســـاده‌ی هندســـی مجاز می‌ســـازد و اســـتخراج منظم توابع تقریب را امکان‌پذیر می‌نماید.

۲. ***استخراج توابع تقریب برای هر جزء***: توابع تقریب اغلب چندجمله‌ای‌های جبری هستند که با استفاده از نظریه میان‌یابی استخراج می‌گردند.

۳. ***همبســـت اجزاء***، که بر اســـاس پیوســـتگی حل و توازن شارهای داخلی می باشد. همبست اجزاء بیانگر مشـابه گســـســـته ی دامنه اصـلی و دستگاه معادلات مربوط به آن بیانگر مشابه عددی مدل ریاضی مسئله مورد تحلیل می‌باشد.

این ســه ویژگی که گام های اصـلی اســتخراج روابط اجزاء محدود را تشکیل می دهند با هم ارتباط تنگاتنگی دارند. هندسه‌ی اجزاء مورد استفاده برای بیان دامنه مسئله باید به گونه‌ای باشد که توابع تقریب را بتوان منحصـراً اســتخراج نمود. توابع تقریب نه تنها به هندســه وابسته هستند بلکه به تعداد و محل نقاط یا **گره‌ها** در جزء و کمیت‌های میان‌یابی شــده نیز بســتگی دارند. زمانی‌که توابع تقریب استخراج شوند، فرآیند بدست آوردن روابط جبری بین ضرایب مجهول دقیقاً مشابه فرآیند مورد استفاده در روش های رایلی-ریتز و باقیمانده‌ی وزنی می‌باشد.

روش اجزاء محــدود نــه تنها بر کمبودهای روش های حســـاب تغییرات ســـنتی فائق می آید بلکه ویژگی‌های روش محاســباتی مؤثری نیز به آن اعطا شده است. گام‌های اصلی موجود در تحلیل اجزاء محدود در زیر آمده است:

(۱) شبکه‌بندی دامنه‌ی مشخص به صورت ترکیبی از اجزاء محدود منتخب:

الف- شبکه‌ی اجزاء محدود را به صورت اجزاء منتخب تشکیل می‌دهیم.

ب- گره‌ها و اجزاء را شماره‌گذاری می‌نماییم.

ج- خواص هندسی موردنیاز برای مسئله را استخراج می‌نماییم.

(۲) استخراج معادلات برای کلیه‌ی اجزاء شبکه

الف- روابط حساب تغییرات را برای معادله‌ی دیفرانسیل داده شده برای جزء نمونه می‌نویسیم.

ب- با فرض اینکه متغیر وابسته‌ی نمونه u به صورت زیر است:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \psi_i$$

آن‌را در ۲-الف برای رسیدن به معادلات اجزاء به صورت زیر جایگذاری می‌نماییم:

$$\left[K^e\right]\left\{u^e\right\} = \left\{F^e\right\}$$

ج- توابع میانیابی اجزاء را استخراج یا در صورت موجود بودن در مراجع، انتخاب نموده و ماتریس‌های اجزاء را محاسبه می‌کنیم.

(۳) همبست معادلات اجزاء برای بدست آوردن معادلات کل مسئله

الف- شرایط پیوستگی بین اجزاء را از میان متغیرهای اولیه (روابط بین درجه آزادی محلی و درجه آزادی مطلق – اتصال اجزاء) با ارتباط دادن گره‌های اجزاء به گره‌های مطلق مشخص می‌نماییم.

ب- معادلات اجزاء را با استفاده از ۳-الف و ۳-ب همبست می‌نماییم.

(۴) اعمال شرایط مرزی مسئله

الف- درجات آزادی اولیه‌ی مطلق را تعیین می‌کنیم.

ب- درجات آزادی ثانویه‌ی مطلق را تعیین می‌کنیم.

(۵) حل معادلات همبست شده

(۶) پس‌پردازش نتایج

الف- تغییرات حل یا کمیت های دیگر را از درجات آزادی اولیه محاسبه شده در قسمت ۵، حساب می‌کنیم.

ب- نتایج را به صورت جدول و یا ترسیمی ارائه می‌کنیم.

۲-۹- انتگرال‌گیری عددی

ارزیابی عددی انتگرال‌ها، به نام **انتگرال‌گیری عددی** یا **تربیع عددی** مشتمل بر تقریب انتگرال با یک چندجمله‌ای با درجه‌ی کافی می‌باشد، زیرا انتگرال یک چندجمله‌ای را می‌توان دقیقاً محاسبه نمود.

برای مثال، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx \tag{۲-۱۵}$$

تابع $F(x)$ را با چندجمله‌ای زیر تقریب می‌زنیم:

$$F(x) \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \psi_i(x) \tag{۲-۱۶}$$

که F_i بیانگر مقدار $F(x)$ در iامین نقطه‌ی محدوده‌ی $[x_A, x_B]$ می‌باشد و $\psi_i(x)$ چندجمله‌ای‌هایی با درجه $N-1$ می‌باشند. این بیان را می‌توان به صورت میانیابی اجزاء محدود $F(x)$ در نظر گرفت که F_i مقدار تابع در iامین گره می‌باشد. میانیابی می‌تواند از نوع لاگرانژ یا هرمیت باشد.

بطور کلی یک رابطه‌ی انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx \approx \sum_{i=1}^{r} F(x_i) W_i \tag{۲-۱۷}$$

که x_i را **نقاط انتگرال‌گیری** و W_i را **ضرایب وزنی انتگرال‌گیری** می‌نامند. این روابط نیازمند محاسبه‌ی ضرب و جمع تابعی‌ها برای بدست آوردن مقدار انتگرال می‌باشند. آنها هرگاه مقدار $F(x)$ یک چندجمله‌ای مرتبه $r-1$ باشد، مقادیر دقیقی از انتگرال را ارائه می‌نمایند.

از بین کلیه‌ی روابط انتگرال‌گیری، روابط گوس-لژاندر متداولترین می‌باشد. این رابطه تبدیل انتگرال را برای محاسبه در محدوده‌ی $[-1,+1]$ را ایجاب می‌نماید. این مطلب نیازمند انتقال مختصه‌ی کلی مسئله x به مختصه‌ی محلی ξ می‌باشد. زمانیکه $x = x_A$ باشد، $\xi = -1$ است و زمانیکه $x = x_B$ باشد، $\xi = 1$ است.

انتقال بین x و ξ را می‌توان به صورت تبدیل «کششی» خطی زیر بیان نمود:

$$x = a + b\xi \tag{۱۸-۲}$$

a و b ثابت‌هایی هستند که با برقراری شرایط فوق تعیین می‌گردند:

$$x_A = a + b(-1), x_B = a + b(1) \tag{۱۹-۲}$$

با حل برای a و b خواهیم داشت:

$$b = \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{1}{2}h_e, a = \frac{1}{2}(x_B + x_A) = x_A + \frac{1}{2}h_e \tag{۲۰-۲}$$

در نتیجه انتقال به صورت زیر می‌گردد:

$$x = x_A + \frac{1}{2}h_e(1+\xi) \tag{۲۱-۲}$$

که x_A بیانگر مختصه مطلق گره‌ی انتهایی سمت چپ جزء Ω^e و h_e طول جزء می‌باشد.

مختصـه ی محلی ξ از دو جهت مفید است: (۱) برای ساخت تابع‌های میان‌یابی مناسب است، (۲) لازمه‌ی انتگرال گیری با استفاده از روش انتگرال گیری گوس-لژاندر می‌باشد.

۲-۱۰- خلاصه

در این فصل، دو عنوان اصلی را بررسی نمودیم:

- انتگرال وزنی و تشکیل روابط کاهش مرتبه یافته معادلات دیفرانسیل
- حل مسائل مقدار مرزی به وسیله‌ی روش‌های رایلی-ریتز و باقیمانده‌ی وزنی

عبـارات انتگرال وزنی برای تولیـد معـادلات جبری لازم و کافی جهت حل برای پارامترهای c_j در حل تقریبی لازم می‌باشـند. بنابراین معادلات جبری، معادل با کمینه‌سـازی خطای ایجاد شـده در تقریب معادله‌ی دیفرانسیل به صورت انتگرال وزنی می‌باشند.

در مطالعه‌ی این دو عنوان، روندی سـه مرحله‌ای برای توسـعه‌ی شکل کاهش مرتبه یافته معادله‌ی دیفرانسـیل ارائه شـد و روش‌هایی برای بدسـت آوردن معادلات جبری بر حسـب پارامترهای مجهول حل تقریبی توسـعه یافت. این عناوین به شـکل مسـتقیم در روش اجزاء محدود که به کارگیری قطعه‌گون روش حسـاب تغییرات اسـت، قابل اسـتفاده می باشـند. بنابراین، موضـوعات بررسـی شده در این فصل قلب اجزاء محدود را تشکیل می‌دهد.

روش‌های سنتی (برای مثال، رایلی-ریتز، گالرکین و حداقل مربعات) ابزاری ساده را برای پیدا کردن حل‌های تقریبی ناحیه‌ای پیوسته برای مسائل فیزیکی فراهم می‌آورند. حل‌های تقریبی حاصل از این روش‌ها، توابع پیوسته‌ای از موقعیت در دامنه می‌باشند.

فصل ۳

مکانیک شکست

۳-۱- مقدمه

معیارهای سـنتی و متداول شکست غالباً قادر نیستند به صورت کامل اکثر موارد شکست سازه‌ای را که در تنش‌های خیلی کمتر از مقاومت نهایی مواد اتفاق می‌افتد، توجیه کنند. نمونه‌هایی از این موارد شامل پل‌ها، مخازن، لوله‌ها، جنگ‌افزارها، کشتی‌ها، راه‌آهن و سازه‌های هوافضا می‌باشند. از طرف دیگر آزمایش‌های انجام شـده توسط گریفیث[۳۵] در سال ۱۹۲۱ میلادی روی فیبرهای شیشه به این نتیجه انجامید که مقاومت واقعی مواد خیلی کمتر از مقـاومت نظری آن می باشـــد. به منظور توضـــیح این پدیده ها، مبحث «مکانیک شـکست» مطرح گردید. مکانیک شکست بر روی این فرضیه واقع‌بینانه که «تمام مواد دارای ترک‌های بسیار ریز بوده و این هسته اولیه آغاز شکست در قطعه می‌باشد»، بنا گردیده است.[۱]

[۳۵] Griffith

یکی از اهداف اصـلی مکانیک شکست در جایی که ترکی وجود داشته باشد، مطالعه ظرفیت تحمل بار سـازه‌ها می‌باشـد. بنابراین، یک فلسـفه و روش جدید طراحی توسط مکانیک شکست به جای استفاده از معیارهای سـنتی شـکسـت ارائه می‌گردد. از آن جایی که عملاً سـازه‌ای بدون نقص نمی‌تواند سـاخته شود، طراحی ایمن سـازه‌ها باید از دو طریق انجام شـود: یا نیروی مکانیکی ایمن باید محاسـبه گردد؛ و یا اندازه ترکی که در سازه ایجاد می‌شود با نیروی کار مشخص محاسبه گردد.

طراحی با مکانیک شـکسـت مسـتلزم شـناخت اندازه ترک بحرانی و پارامتری اسـت که مشـخص کننده‌ی میل ترک به گسـترش باشـد. این پارامتر خواهد توانسـت نتایج اندازه‌گیری‌های آزمایشـگاهی را به کارآیی سـازه ارتباط دهد به‌طوریکه پاسخ یک سازه ترک‌دار بتواند از داده‌های آزمایش پیش‌بینی گردد. این پارامتر به عنوان تابع رفتار ماده، اندازه ترک، شکل هندسی قطعه و شرایط بارگذاری تعیین می‌گردد.

از طرف دیگر، مقدار بحرانی این پارامتر که به سـفتی شکست[۳۶] معروف بوده و یک خاصیت و ثابت ماده است، توسط آزمایش تعیین می‌گردد. سفتی شکست توان ماده را در برابر شکست در صورت وجود ترک بیان می‌کند. با معادل قرار دادن این پارامتر با مقدار بحرانی‌اش می‌توانیم بین نیروی مکانیکی وارده، اندازه ترک و شـکل هندسـی قطعه یک رابطه برقرار نماییم که خود این، اطلاعات لازم برای طراحی سازه را به ما می‌دهد.

سفتی شکست برای درجه‌بندی مقاومت ماده در برابر تسلیم یا شکست در معیارهای سنتی طراحی به‌کار گرفته می‌شود.

[۳۶] Fracture toughness

در انتخاب مواد برای کاربردهای سازه‌ای، می‌بایست بین موادی با مقاومت تسلیم بالا اما سفتی شکست نسبتاً پایین و موادی با مقاومت تسلیم پایین اما سفتی شکست بالا یکی را انتخاب نماییم.

۳-۲- معیارهای تسلیم

معیار تصمیم‌گیری در مورد این که کدام ترکیب از تنش‌های چندمحوری باعث تسلیم می‌شوند «معیار تسلیم» نام می‌گیرد. در حقیقت، اولین قدم در تحلیل هر جریان پلاستیک تصمیم‌گیری در مورد این است که چگونه یک معیار تسلیم انتخاب کنیم. قدم بعدی، تصمیم‌گیری در مورد چگونگی توصیف رفتار ماده بعد از شروع تسلیم است.

حال معمول‌ترین معیارهای تسلیم را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳-۲-۱- مثال‌هایی از معیارهای تسلیم

از زمان‌های بسیار دور (از سال ۱۷۷۳ میلادی) معیارهای متعددی برای تسلیم پیشنهاد شده‌اند. خیلی از آنها در اصل به عنوان معیار شکست برای مواد ترد پیشنهاد شدند و سپس به عنوان معیار تسلیم برای مواد نرم بکار رفتند. معمول‌ترین معیارها عبارتند از:

۳-۲-۱-۱- تئوری تنش اصلی بیشینه

با توجه به این تئوری که مربوط به «رانکین» است، هنگامی که بیشترین تنش اصلی از تنش کششی تسلیم بیشتر می‌شود یا هنگامی که بیشترین تنش اصلی از تنش فشاری تسلیم ماده بیشتر می‌شود، ماده تسلیم می‌شود. بهتر است بگوییم هنگامی تسلیم شروع می‌شود که:

$$\sigma_3 = -\sigma_0 \quad or \quad \sigma_1 = \sigma_0 \qquad (۱-۳)$$

این معیار تطابق بسیار کمی با نتایج بدست آمده از آزمایش نشان داده است و به همین دلیل، کمتر از آن استفاده می‌شود.

۳-۲-۱-۲- تئوری تنش برشی بیشینه یا تئوری ترسکا

این تئوری نشان دهنده آن است که تسلیم هنگامی اتفاق می‌افتد که بیشترین تنش برشی به مقدار بیشـترین تنش برشـی که تحت کشـش سـاده به وجود می‌آید برسد. پس معیار ترسکا نمایانگر آن است که تسلیم هنگامی که یکی از شش شرط زیر برقرار باشند اتفاق می‌افتد:

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_0 \\ \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_0 \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

برای حالت تنش خالص داریم: $\sigma_1 = -\sigma_3 = k_0$ و $\sigma_2 = 0$.

تئوری ترسـکا شـکست را تحت شرایط $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k_0 = \sigma_0$ یا $k_0 = 1/2\,\sigma_0$ پیش‌بینی می‌کند یعنی، تنش تسلیم در برش خالص نصف تنش حد تسلیم در کشش ساده است.

۳-۲-۱-۳- تئوری انرژی تغییرشکل یا معیار فون مایزس

این تئوری چنین بیان می‌شـود که هنگام وقوع تسـلیم موقعی اسـت که انرژی تغییرشـکل برابر با انرژی تغییرشکل در نقطه تسلیم در کشش ساده باشد بنابراین:

$$U_d = \frac{1}{2G} J_2 \qquad (۳-۳)$$

در نقطه تسلیم در کشش ساده:

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_0^2 \qquad (۴-۳)$$

بنابراین شرط تسلیم چنین خواهد شد:

$$\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]=\sigma_0^2 \qquad (۵-۳)$$

و برای حالت دومحوری داریم:

$$\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2=\sigma_0^2 \qquad (۶-۳)$$

شـکل این معادله یک بیضـی اسـت که به عنوان بیضـی هوبر-مایزس شناخته می شود. برای حالت برش خالص داریم:

$$\sigma_2=0 \quad and \quad \sigma_1=-\sigma_3=k_0 \qquad (۷-۳)$$

و چون

$$J_2=\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \qquad (۸-۳)$$

بنابراین

$$J_2=\sigma_1^2=k_0^2 \qquad (۹-۳)$$

و معیار فون-مایزس وقوع تسلیم را هنگامی پیش‌بینی می‌کند که:

$$k_0^2=\frac{1}{3}\sigma_0^2 \quad or \quad k_0={\sigma_0}/{\sqrt{3}} \qquad (۱۰-۳)$$

این بدان معناست که تنش تسلیم در برش خالص $۱/۳^{-۱/۲}$ برابر تنش تسلیم در کشش ساده است.

معیـار فون-مایزس معمولاً با نتایج تجربی بیش از معیارهای دیگر تطابق دارد و کاربرد آن از معیار ترسـکا بیشـتر است چون، هیچ اطلاعات اولیه‌ای با توجه به مقادیر نسبی تنش‌های اصلی مورد نیاز نیست. به همین دلیل، این معیار در حال حاضر بطور گسترده برای رفتارهای مستقل از نرخ مواد کاربرد دارد.

۳-۳- روش تعادل انرژی برای مواد ترد ایده‌آل

مطالعه نشـان می‌دهد که شـکست یک سازه در شرایطی که تنش وارده کمتر از تنش تسلیم قطعه باشد، اغلب به ترک‌ها یا ترک‌های بسیار ریز در سازه نسبت داده می‌شود.

مطالعات سـازه‌ای که به مکانیک کاربردی اجسـام ترک‌دار می‌پردازد، «مکانیک شـکسـت» نامیده می‌شـود. به طور خاص، ایده‌آل‌سـازی سـازه‌هایی که بر پایه نادیده گرفتن پلاسـتیسـیته نوک ترک انجام می‌شـود، مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)[۳۷] نامیده می‌شود که اصول آن توسط گریفیث[۳۸] معرفی شـد. وی پخش ترک‌های ترد را در شـیشه مورد بررسی قرار دارد. وی با استفاده از نظریه‌های بنیادی انرژی در مکانیک کلاسـیک و ترمودینامیک نشـان داد که یک تعادل انرژی سـاده وجود دارد، تعادلی بین کاهش انرژی پتانسیل در جسم تحت تنش در اثر گسترش ترک U_p و افزایش انرژی سطح در اثر افزایش سطح ترک U_γ.

با روش تعادل گریفیث، می‌توانیم مقاومت نظری مواد ترد را پیش‌بینی کنیم و رابطه‌ای بین مقاومت شکست و اندازه ترک ارائه دهیم و لیکن این روش جزییات فرآیند شکست در نوک ترک را بررسی نمی کند. برای نمونه اگر موضعی را در نظر بگیریم که در آن گسترش ترک بعد از مقدار معینی تغییر شکل پلاستیک

[۳۷] Linear Elastic Fracture Mechanics

[۳۸] Griffith

در نوک ترک اتفاق افتد، لازم است که انرژی ذخیره شده برای این منظور (تغییر شکل پلاستیک) را به حساب آوریم. یعنی، قسمتی از انرژی ذخیره شده که صرف تغییرشکل پلاستیک می‌شود در محاسبه منظور گردد. همچنین، این نکته شایان ذکر است که در وضعیت دینامیکی، باید عبارت انرژی جنبشی را که مربوط به ترک‌های با حرکت سریع می‌باشد، در معادله تعادل منظور گردد.

۳-۴- تحلیل الاستیک خطی اجسام ترک‌دار

۳-۴-۱- مقدمه

حتی هنگامی که جان افراد در خطر باشد، باز نمی‌توان اعضا و سازه‌های بدون عیب و نقص تولید کرد. مکانیک شکست، یک چارچوب لازم در مکانیک کاربردی است که برای توصیف رفتار چنین اعضا و سازه‌های ترک‌دار در اثر بارهای مکانیکی اعمال شده و محیط، ضروری است. بدون شک، اخیراً قدم‌های بزرگی در زمینه مکانیک شکست برداشته شده است که منجر به معرفی معیارهای جدید طراحی بر پایه توجه بیشتر به اثر ترک‌ها و ترک‌های ریز اجزاء بر روی اعضای ماشین‌ها و سازه‌ها و همچنین قدرت ما در تعیین صحیح رشد آنها گردیده است.

مکانیک شکست، طبق مطالب فوق، برای ارزیابی کمی موارد زیر بکار می‌رود:

- درجه اطمینانی که یک سازه در مقابل شکست ترد از خود بروز می‌دهد.
- شرایط لازم برای شروع ترک، رشد و توقف آن.
- عمر باقیمانده در یک عضو تحت بارگذاری دینامیکی.

به این ترتیب، مکانیک شکست بر حسب زمان و یا تعداد سیکل‌ها، میزانی را که یک ترک یا یک عیب شبه ترکی قبل از ایجاد شکسب گسترش می‌یابد، توصیف می‌کند. چنین دستاوردهایی، امروز، به شکل فزآینده در حال پیدا کردن کاربرد خود در صنعت هستند.

۳-۴-۲- انواع تغییرشکل نوک ترک

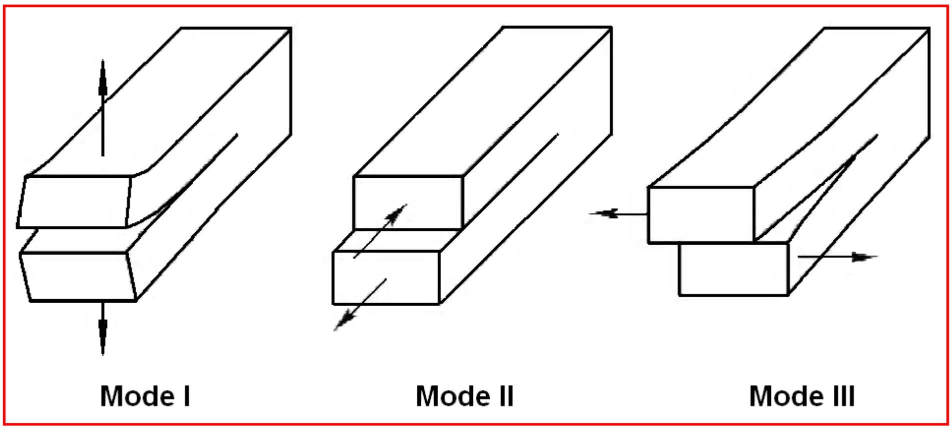
در چارچوب مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)، میدان تنش در مجاورت نوک ترک بستگی به طول ترک، تنش اعمال شده σ و اندازه عضو و شکل هندسی موضعی آن است. این مفهوم، که چیزی را که به عنوان ضریب تمرکز تنش (SIF) شناخته می‌شود بکار می‌گیرد، در سال ۱۹۵۰ توسط ایروین به عنوان ادامه کار پیشروی گریفیث که در دهه ۱۹۲۰ شروع شده بود، دنبال شد. ایروین نشان داد که میدان تنش الاستیک در مجاورت یک ترک می‌تواند به وسیله نمایش سری تانسور تنش σ_{ij} نشان داده شود:[1]

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2}\left\{K_I f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta) + \ldots\right\} \qquad (۳-۱۱)$$

که در آن r و θ مختصات قطبی-استوانه‌ای هستند که موقعیت یک المان را در جلوتر از نوک ترک بیان می‌کنند. K_I، K_{II} و K_{III} ضرایب شدت تنش هستند که مربوط به سه نوع پایه تغییر مکان سطح ترک می‌باشند. این سه نوع در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند.

همانطور که از شکل (۳-۱) مشهود است یک ترک می‌تواند به سه طریق تحت تنش واقع شده و گسترش یابد:

- **بازشونده:** جابجایی سطح ترک عمود بر سطح ترک می‌باشد.
- **لغزشی:** جابجایی سطح ترک در صفحه ترک اما عمود بر لبه ترک می‌باشد.
- **پاره‌گی:** جابجایی سطح ترک در صفحه ترک ولی موازی لبه ترک است.



شکل ۳-۱: مدهای تغییر شکل نوک ترک

برای هر بارگذاری، بزرگی میدان تنش با یک ضـریب اسـکالر به نام «ضریب شدت تنش[۳۹]» تعریف می‌شـود. برای هر مد بارگذاری، یک ضـریب شـدت تنش وجود دارد که به ترتیب برای مدهای I، II و III با K_I، K_{II} و K_{III} مشخص می‌شود. یک ترک هنگامی در مد مختلط بارگذاری شده است که بیش از یک ضریب شدت تنش برای نمایش میدان‌های نوک ترک نیاز باشد.

در یک سیستم کارتزین منطبق بر بدنه‌ی Ω و با استفاده از یک سیستم مختصات قطبی متصل به نوک ترک (شـــکـل ۳-۲) ، مجموعه کامل میدان های جابجایی و تنش در هر نقطه $P = x = (r,\theta) \in \Omega$ تحت «کرنش صفحه‌ای»، بصورت زیر می‌باشد:[۲۳]

- مد I:

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\
v(r,\theta) &= \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\\
w(r,\theta) &= 0
\end{aligned}
\qquad (۱۲-۳)
$$

[۳۹] Stress Intensity Factor (SIF)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}(r,\theta)=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
&\sigma_{yy}(r,\theta)=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
&\sigma_{zz}(r,\theta)=\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\\
&\sigma_{xy}(r,\theta)=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\\
&\sigma_{xz}(r,\theta)=\sigma_{yz}(r,\theta)=0
\end{aligned}
\qquad (۱۳\text{-}۳)
$$

که K_I ضریب شدت تنش مد I بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$
K_I=(2\pi r)^{1/2}\lim_{r\to 0}\sigma_{yy}(r,0) \qquad (۱۴\text{-}۳)
$$

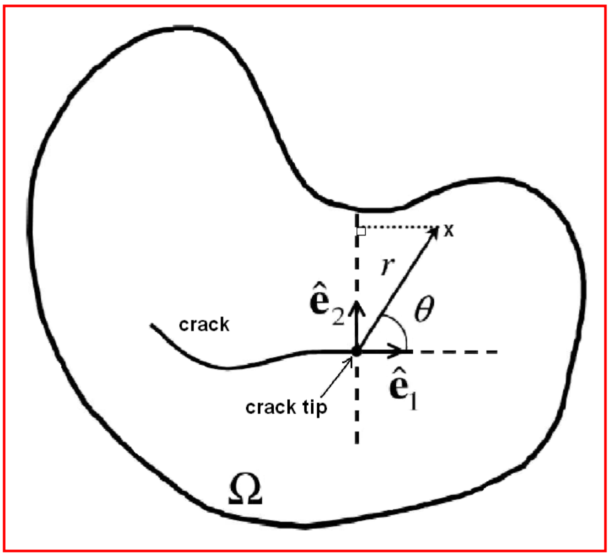
- مد II:

$$
\begin{aligned}
&u(r,\theta)=\frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\\
&v(r,\theta)=\frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(-1+2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\
&w(r,\theta)=0
\end{aligned}
\qquad (۱۵\text{-}۳)
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}(r,\theta)=-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\\
&\sigma_{yy}(r,\theta)=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\\
&\sigma_{zz}(r,\theta)=\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\\
&\sigma_{xy}(r,\theta)=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
&\sigma_{xz}(r,\theta)=\sigma_{yz}(r,\theta)=0
\end{aligned}
\qquad (۱۶\text{-}۳)
$$

که K_{II} ضریب شدت تنش مد II بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$
K_{II}=(2\pi r)^{1/2}\lim_{r\to 0}\sigma_{xy}(r,0) \qquad (۱۷\text{-}۳)
$$



شکل ۳-۲: سیستم مختصات قطبی متناظر با یک نوک ترک

در تمام عبارت‌های بالا، E مدول یانگ، ν ضـریب پواسـون و μ مدول برشـی الاسـتیسیته است.

برای دســت‌یابی به عبارت‌های مربوط به «تنش صــفحه‌ای» برای میدان‌های جابجایی و تنش از عبارت‌های بالا، σ_{zz} بایستی صفر قرار داده شده و ضریب پواسون ν با $\nu/_{1+\nu}$ جایگزین شود.[۲۳]

- مد III:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(r,\theta) &= 0 \\
\sigma_{yy}(r,\theta) &= 0 \\
\sigma_{zz}(r,\theta) &= 0 \\
\sigma_{xy}(r,\theta) &= 0 \\
\sigma_{xz}(r,\theta) &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2} \\
\sigma_{yz}(r,\theta) &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= 0 \\
v(r,\theta) &= 0 \\
w(r,\theta) &= \frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

که K_{III} ضریب شدت تنش مد III بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_{III} = (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \lim_{r \to 0} \sigma_{zy}(r,0) \qquad (۲۰-۳)$$

ضـرایب شـدت تنش دارای واحد «تنش در ریشـه دوم طول» می‌باشـند که در دسـتگاه متریک $MPa\sqrt{m}$ و در دستگاه انگلیسی $ksi\sqrt{in}$ می باشد.

۳-۵- رشد ترک در یک جسم الاستیک خطی

در این پایان‌نامه هر جا که سخن از *رشد ترک* یا *گسترش ترک* به میان آمد، منظور رشد ترک *شبه استاتیکی* می‌باشد که در آن تأثیرات اینرسی ناچیز است. در این تقریب شبه استاتیکی فرض بر آن است که جسم همواره در حال تعادل است.

برخی معیارهایی که برای تعیین جهت و امتداد رشد ترک پیشنهاد شده‌اند عبارتند از:[۱۶]

- معیار بیشینه تنش حلقوی (Erdogan and Sih, 1963)،
- معیار کمینه انرژی کرنشی (Sih, 1973)،
- معیار مقدار صفر K_{II} (Salganic, 1974)،
- معیار بیشینه نرخ آزادسازی انرژی (Nuismer, 1975).

در این پایان‌نامه، معیار **بیشینه تنش حلقوی** را استفاده می‌کنیم که بیان می‌دارد ترک از نوک آن در امتداد θ_c که تنش پیرامونی (حلقوی) $\sigma_{\theta\theta}$ بیشـینه اسـت گسـترش می‌یابد. تحت بارگذاری مختلط عمومی، مجانب نزدیک نوک تنش پیرامونی و تنش برشی شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} -3\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \tag{۳-۲۱}$$

تنش پیرامونی در امتداد گسترش ترک یک تنش اصلی است بنابراین، زاویه بحرانی θ_c که بیانگر امتداد شعاعی گسترش ترک می‌باشد را می‌توان با قرار دادن مقدار تنش برشی $\sigma_{r\theta}$ برابر صفر در رابطه (۳-۲۱) تعیین کرد. بعد از چند دستکاری کوچک، عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\frac{\theta}{2}) \left[\frac{1}{2} K_I \sin(\theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3\cos(\theta) - 1) \right] = 0 \tag{۳-۲۲}$$

این رابطه منجر به رابطه‌ای می‌شود که زاویه گسترش ترک θ_c را در سیستم مختصات نوک ترک تعیین می‌نماید:

$$K_I \sin(\theta_c) + K_{II} (3\cos(\theta_c) - 1) = 0 \tag{۳-۲۳}$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\theta_c = 2\arctan \frac{1}{4} \left(K_I / K_{II} \pm \sqrt{(K_I / K_{II})^2 + 8} \right) \tag{۳-۲۴}$$

ریشه‌ای که به ازای آن مقدار $\sigma_{\theta\theta}$ در رابطه (۳-۲۱) مثبت است، امتداد رشد ترک می‌باشد. در تمام عبارات بالا، r و θ همان است که در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.

۳-۶- انتگرال‌های کنتور و نمایش دامنه‌ای آنها در دوبعد[۴۰]

[۴۰] Contour integrals and their domain representations in two-dimensions

در میان روش‌های عددی برای محاسبه‌ی پارامترهای شکست، روش‌های انتگرال مرزی (Forth and Keat, 1996; Sladek et al., 2000) و روش انتگرال دامنه‌ای (Shih et al., 1996; Nikishkov and Atluri, 1987; Moran and Shih, 1987) ابزارهای مناسبی به نظر می‌آیند. در این پایان‌نامه، روش انتگرال دامنه‌ای با تلفیق با انتگرال‌های انرژی تعاملی[۴۱]، برای تعیین ضرایب شدت تنش مد مختلط بکار رفته است. در روش انتگرال انرژی تعاملی، میدان‌های کمکی[۴۲] معرفی شده و به میدان‌های واقعی افزوده شده‌اند. با انتخاب مناسب این میدان‌های کمکی، یک رابطه می‌توان بین ضرایب شدت تنش مد مختلط و انتگرال‌های انرژی تعاملی یافت.[۲۳]

نرخ آزادسازی انرژی برای مسائل مد مختلط عمومی در دوبعد را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$J = \frac{1}{E^*}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) \qquad (۲۵-۳)$$

که E^* بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^* = \begin{cases} \dfrac{E}{1-\nu^2} & for \quad plane \quad strain \\ E & for \quad plane \quad stress \end{cases} \qquad (۲۶-۳)$$

یک ترک را در دوبعد در نظر می‌گیریم. این ترک با یک خط مستقیم نمایش داده شده و یک سیستم مختصات موضعی در نوک ترک (x_1,x_2) بنا شده است.

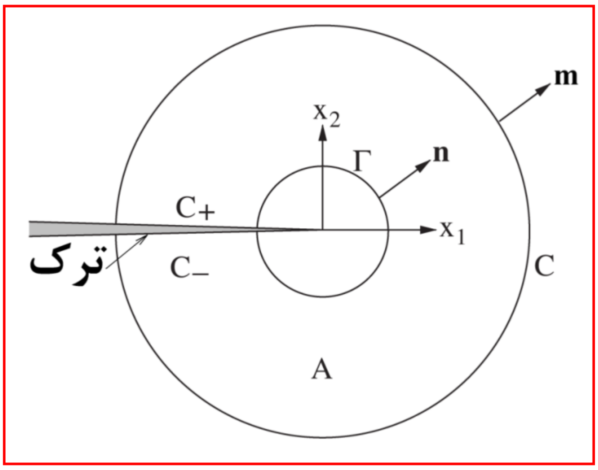
[۴۱] Interaction energy integrals

[۴۲] Auxiliary fileds

Γ را یـک کنتور دربرگیرنـده نوک ترک و n را یک بردار واحد عمود بر کنتور Γ با جهت گیری نشـان داده شـده در شـکل (۳-۳) قرار می‌دهیم. کنتور انتگرال جی[۴۳] بصـورت زیر تعریف می‌شـود (Rice, 1968)[۲۳]:

$$J = \int_{\Gamma} \left[W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} \left[W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \qquad (۲۷-۳)$$

که $T_i = \sigma_{ij} n_j$ یک کشش روی کنتور Γ می‌باشد.



شکل ۳-۳: دامنه مورد استفاده برای محاسبه ضرایب شدت تنش مد مختلط در فضای دوبعدی

دو حالت از یک جسم ترک‌خورده مورد ملاحظه است. حالت ۱، ($\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$)، متناظر با حالت موجود و حالت ۲، ($\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$)، یک حالت کمکی که بصـورت میدان‌های مماسی برای مد I یا مد II انتخاب خواهد شد. مقدار انتگرال جی برای مجموع این دو حالت بصورت زیر می‌باشد:

---

[۴۳] Contour integral J

$$J^{(1+2)}=\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(1)}+\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\delta_{ij}-\left(\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}\right)\frac{\partial\left(u_i^{(1)}+u_i^{(2)}\right)}{\partial x_1}\right]n_j d\Gamma \quad (۲۸-۳)$$

با بسط و مرتب‌سازی دوباره رابطه فوق خواهیم داشت:

$$J^{(1+2)}=J^{(1)}+J^{(2)}+I^{(1,2)} \quad (۲۹-۳)$$

که $I^{(1,2)}$ انتگرال تعاملی برای حالت ۱ و ۲ نامیده می‌شود:

$$I^{(1,2)}=\int_{A}\left[-W^{(1,2)}\delta_{1j}+\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1}+\sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}\right]\frac{\partial q}{\partial x_j}dA \quad (۳۰-۳)$$

که $W^{(1,2)}$ انرژی کرنشی تعاملی نامیده می‌شود:

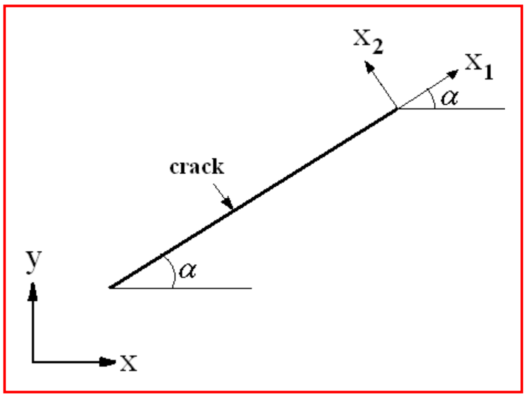
$$W^{(1,2)}=\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}=\sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (۳۱-۳)$$

بعد از حل مسئله مقدار مرزی، میدان‌های جابجایی و تنش حالت ۱ یعنی $\sigma_{ij}^{(1)}$ و $u_i^{(1)}$ و مشتق‌های فضایی میدان جابجایی در سیستم مختصات کارتزین کلی $u_{i,x}^{(1)}$ و $u_{i,y}^{(1)}$ را بدست می‌آوریم. این عبارت‌ها نیاز به انتقال به سیستم مختصات نوک ترک با کمک یک بردار انتقال مناسب می‌باشد.

مشتق‌های میدان جابجایی با توجه به x_1 و x_2 بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} u_{1,x_1}^{(1)} & u_{1,x_2}^{(1)} \\ u_{2,x_1}^{(1)} & u_{2,x_2}^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,x}^{(1)} & u_{1,y}^{(1)} \\ u_{2,x}^{(1)} & u_{2,y}^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (۳۲-۳)$$

که α زاویه تمایل (کجی) بین سیستم مختصات نوک ترک موضعی و سیستم مختصات کلی می‌باشد (شکل ۴-۳).



شکل ۳-۴: سیستم مختصات محلی و کلی

با نوشتن معادله (۳-۲۵) برای حالت‌های ترکیبی خواهیم داشت:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*}\left(K_I^1 K_I^2 + K_{II}^1 K_{II}^2\right) \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

معادله (۳-۲۸) و (۳-۳۱) منجر به نسبت زیر خواهد شد:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*}\left(K_I^1 K_I^2 + K_{II}^1 K_{II}^2\right) \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

انتخاب درست حالت ۲ بصورت مد I خالص میدان های مماسی با $K_I^{(2)} = 1$ و $K_{II}^{(2)} = 0$ منجر به دستیابی به ضریب شدت تنش برای حالت I بر حسب انتگرال تعاملی بصورت زیر می‌شود:

$$K_I^{(1)} = \frac{2}{E^*} I^{(1,ModeI)} \qquad (۳۵\text{-}۳)$$

با روشی مشابه، به منظور محاسبه‌ی K_{II}، حالت ۲ را به عنوان مد II خالص با $K_{II}^{(2)} = 0$ و $K_I^{(2)} = 1$ انتخاب می‌کنیم، از این‌رو:

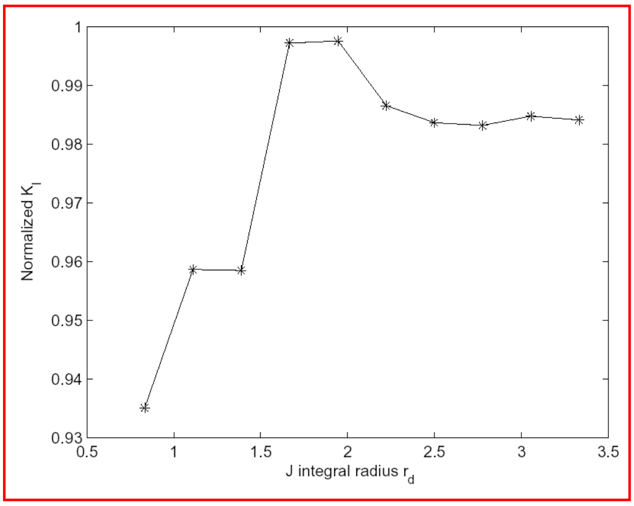
$$K_{II}^{(1)} = \frac{2}{E^*} I^{(1,ModeII)} \qquad (۳۶\text{-}۳)$$

انتگرال کنتور (۳-۳۰) برای محاسـبات اجزا محدود، روش مناسـبی نیسـت، بنابراین انتگرال را در قالب یک شـکل دامنه‌ای معادل با ضرب تابع زیر انتگرال با یک تابع وزن‌دار بطور کافی یکنواخت $q(x)$ که بین مقدار یک و صـفر متغیر اسـت، قرار می‌دهیم. بنابراین برای هر کنتور Γ (شـکل ۳-۳) با فرض اینکه سـطوح ترک در ناحیه A که با کنتور C_0 محصـور شـده اسـت، مسـتقیم اسـت، انتگرال تعاملی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$I^{(1,2)} = \lim_{\Gamma \to 0} \left\{ \int_{\Gamma \cup C_0 \cup C^+ \cup C^-} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] q m_j \, ds \right\} \quad (۳۷-۳)$$

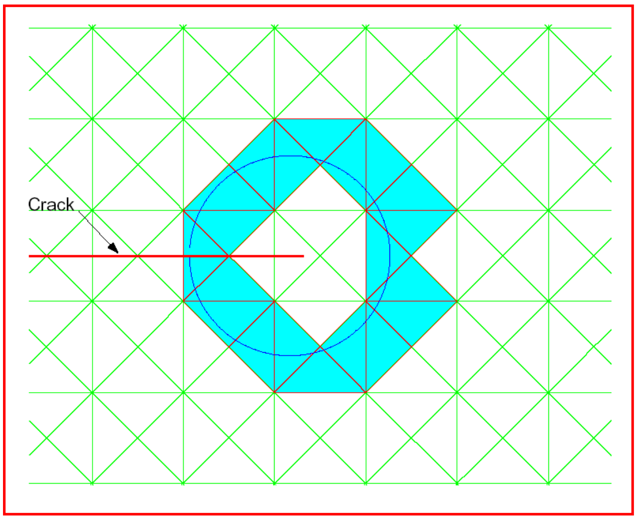
برای ارزیابی عددی انتگرال بالا، دامنه A یک مجموعه از تمامی المان هایی اسـت که با دایره‌ای با مرکز نوک ترک و شـعاع از پیش تعیین شـده $r_d = r_k h_{local}$ که r_k یک ضریب عددی و h_{local} ریشه دوم سطح المان نوک می باشد، تقاطع دارند. مشاهده شده است که اگر اندازه دامنه کوچک باشد یعنی $r_k \leq 2$، ضـرایب شـدت تنش متناظر نادرسـت بدسـت می‌آیند. این امر به واسـطه‌ی تکینگی در نوک ترک می‌باشد. زمانی که اندازه‌ی دامنه به اندازه کافی بزرگ می‌باشـد یعنی $r_k > 2$، تأثیر تکینگی کوچک اسـت و انتگرال جی مسـتقل از کنتور دامنه می‌باشـد (شـکل ۳-۵). در این پایان‌نامه از مقدار $r_k = 3$ اسـتفاده شده است. همچنین در صورت استفاده از المان‌های Q۴[۴۴]، برای محاسبه‌ی انتگرال فعل و انفعالی، ۹ نقطه گاوسی برای المان‌هایی که با ترک بریده نشده‌اند، استفاده شده است. المان‌های بریده شده با ترک، به چهار مثلث که هر کدام شامل ۱۳ نقطه گاوسی می‌باشند، تقسیم شده‌اند.

[۴۴] منظور المان‌های چهارگوش چهار گره‌ای است.

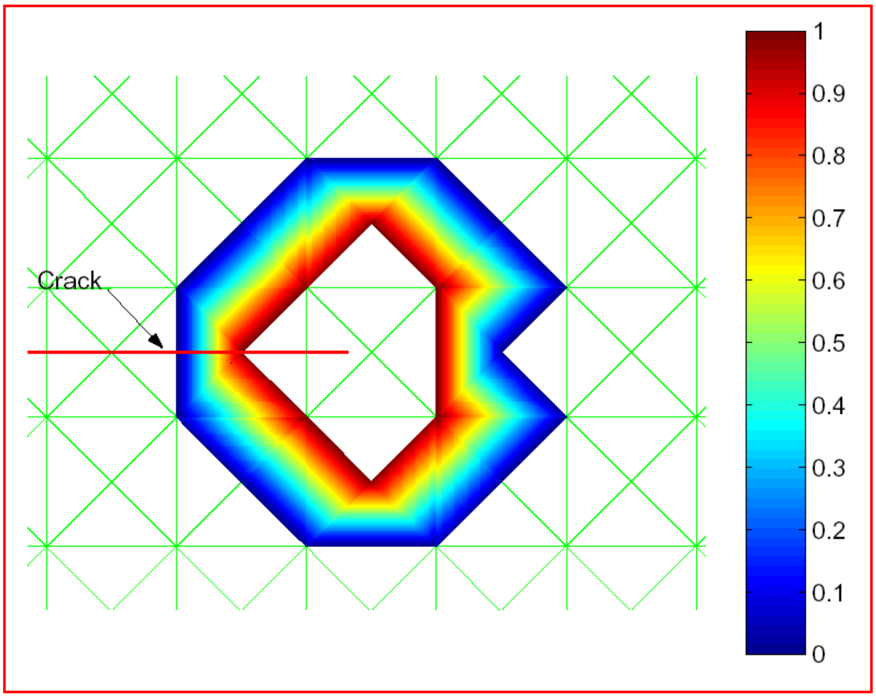


شکل ۳-۵: تأثیر مقدار r_d در مقدار ضریب شدت تنش

شکل (۳-۶) یک مجموعه از المان‌های دامنه A را نشان می‌دهد. مقدار تابع وزن q در گره‌ها نیز در شکل (۳-۷) ترسیم شده است.



شکل ۳-۶: المان‌های انتخابی در اطراف نوک ترک



شکل ۳-۷: مقدار تابع وزن q روی المان‌ها

الگوریتمی که برای محاسبه‌ی انتگرال جی در این پایان‌نامه به کار رفته است در ادامه آمده است.

```
detection of the elements on which we integrate
loop over these elements
  loop over Gauss points
    computation of displacement, stress, strain in local coordinates
    computation of the auxiliary fields
    computation of I1 and I2
  end of loop on GPs
end of loop on elements
```

شکل ۳-۸: الگوریتم محاسبه انتگرال تعاملی (Interaction Integral)

بایستی توجه داشت که نقاط گاوسی‌ای که برای محاسبه ی انتگرال تعاملی استفاده می شود با آن نقاط گاوسی که برای محاسبه‌ی ماتریس سختی استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. برای محاسبه ی انتگرال

تعاملی، هفت نقطه گاوسی برای المان‌هایی که با ترک بریده نشده‌اند، استفاده شده است. المان‌هایی که با ترک بریده شده‌اند به مثلث‌هایی تقسیم شده‌اند که برای هر کدام از آنها هفت نقطه گاوسی استفاده شده است.

فصل ۴

مدل‌سازی ترک‌ها با روش اجزاء محدود توسعه‌یافته[۴۵]

در این فصل، یک روش غنی‌سازی جهت مدل‌کردن گسستگی‌های دلخواه در چارچوب الاستیسیته خطی دوبعدی تشریح شده است. یک تقریب اجزاء محدود برای یک ناپیوستگی با تأکید بر روی مدل‌سازی دلخواه شکل ترک ارائه شده است.

۴۵ Extended Finite Element Method (X-FEM)

در مقایســه با اســتفاده از تقریب کلاســیک (ســنتی) برای مدل‌ســازی ترک‌ها با اجزاء محدود، با غنی‌ســازی ناپیوســتگی، هندسه ترک بصورت مستقل از شبکه نمایش داده شده است. همچنین غنی‌سازی نزدیک نوک[۴۶] در تقریب‌سازی، جهت محاسبه‌ی درست ضرایب شدت تنش[۴۷]، به‌کار گرفته شده است.

۴-۱- فرمول‌سازی مسئله

در این بخش، بطور خلاصه معادلات حاکم برای الاستوپلاستیک خطی را مرور کرده و شکل کاهش مرتبه یافته[۴۸] متناظر را ارائه می‌دهیم.

۴-۱-۱- معادلات حاکم

دامنه ی Ω با مرز Γ را در نظر می گیریم. مرز Γ متشــکل از مجموعه های Γ_u، Γ_t و Γ_d می باشــد بطوریکه $\Gamma=\Gamma_d\cup\Gamma_t\cup\Gamma_u$. همانطورکه در شــکل (۴-۱) نشــان داده شــده اســت، جابجایی‌های معین $\bar{u}$ روی دامنه Γ_u عمل می‌نمایند در حالیکه کشش $\bar{t}$ روی دامنه Γ_t وارد می‌شود. مرز داخلی Γ_d (خطوط در دوبعد و سطوح در سه بعد) بر این فرض استوار است که بدون کشش می‌باشد.

معادلات تعادل و شرایط مرزی عبارتند از:[۱۶و۲۳]

$$\nabla\cdot\sigma+b=0 \quad in \quad \Omega \qquad (۴-۱)$$

$$\sigma\cdot n=\bar{t} \quad on \quad \Gamma_t \qquad (۴-۲)$$

---

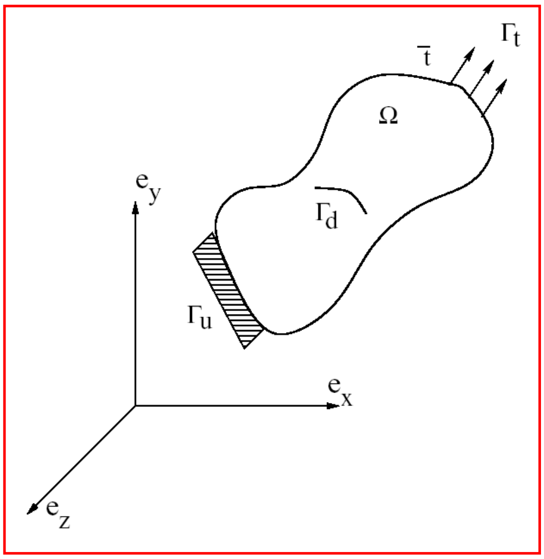
۴۶ near tip enrichment

۴۷ Stress Intensity Factors (SIFs)

۴۸ weak form

$$\sigma \cdot n = 0 \quad on \quad \Gamma_d \tag{۳-۴}$$

که n بردار نرمال یکه می‌باشد. در بالا، σ تانسور تنش کوشی و b چگالی نیروی جسمی است.



شکل ۴-۱: جسم با مرز داخلی در معرض بار

با فرض کرنش‌ها و جابجایی‌های کوچک، معادلات جنبشی شامل جابجایی-کرنش بصورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \nabla_s u \tag{۴-۴}$$

که ∇_s قسمت متقارن اپراتور گرادیان بوده و شرایط مرزی بصورت زیر می‌باشد:

$$u = \bar{u} \quad on \quad \Gamma_u \tag{۵-۴}$$

رابطه پیوستگی نیز با توجه به قانون هوک عبارتست از:

$$\sigma = C : \varepsilon \tag{۶-۴}$$

که C تانسور الاستیک می‌باشد.

۴-۱-۲- شکل حساب تغییرات[۴۹]

فضای میدان‌های جابجایی مجاز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$u = \left\{ \upsilon \in \nu : \upsilon = \bar{u} \quad on \quad \Gamma_u \right\} \tag{۷-۴}$$

که فضـای v وابســته به روش حل می‌باشـد. جزئیات این موضـوع زمانی که دامنه شـامل یک مرز داخلی یا گوشه‌ی مقعر می‌باشد در کار بابوشکا و روزنویگ[۵۰] (۱۹۷۲) و گریسوارد[۵۱] (۱۹۸۵) یافت شود.[۱۶]

فضای تابع نمونه بطور مشابه زیر تعریف می‌شود:

$$u_0 = \left\{ \upsilon \in \nu : \upsilon = 0 \quad on \quad \Gamma_u \right\} \tag{۸-۴}$$

شکل کاهش مرتبه یافته[۵۲] معادلات تعادل بصورت زیر می‌باشد:

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(\upsilon) d\Omega = \int_\Omega b \cdot \upsilon d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot \upsilon d\Gamma \tag{۹-۴}$$

---

۴۹ Variational formulation

۵۰ Rosenzweig

۵۱ Grisvard

۵۲ weak form

با اســتفاده از رابطه پیوســتگی و قیدهای جنبشــی در شــکل کاهش مرتبه یافته، مشــکل یافتن $u \in \mathbf{u}$ است به‌طوریکه:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \varepsilon(\upsilon) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \upsilon d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot \upsilon d\Gamma \quad \forall \upsilon \in u_0 \qquad (۱۰\text{-}۴)$$

۴-۲- غنی‌سازی ناپیوسته[۵۳]

در این بخش، شـکل حساب تغییرات گسسته و ایجاد یک تقریب با کمک غنی‌سازی که در سرتاسر یک خط مفروض یا سطح، ناپیوسته است، نشان داده شده است.

۴-۲-۱- شکل حساب تغییرات گسسته

v^h را به عنوان زیرفضای با ابعاد محدود v قرار داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v^h \equiv span\{\varphi_i\}_{i=1}^{N} \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

که $\{\varphi\}$ مجموعه توابع پایه می‌باشد.

زیرفضاهای المان محدود $u^h \subset u$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u^h = \left\{ \upsilon^h \in v^h : \upsilon^h = \bar{u} \quad on \quad \Gamma_u \right\} \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

$$u_0^h = \left\{ \upsilon^h \in v^h : \upsilon^h = 0 \quad on \quad \Gamma_u \right\} \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

در شکل کاهش مرتبه یافته گسسته بایستی u^h به گونه‌ای یافت شود که:

---

[۵۳] Discontinuous enrichment

$$\int_{\Omega}\varepsilon(u^h):C:\varepsilon(\upsilon^h)d\Omega=\int_{\Omega}b\cdot\upsilon^h d\Omega+\int_{\Gamma_t}\bar{t}\cdot\upsilon^h d\Gamma \quad \forall\upsilon^h\in u_0^h \quad (۱۴-۴)$$

به‌طور آشکار، زیر فضای u^h بایستی یک میدان جابجایی ناپیوسته در میان Γ_d برای u^h باشد تا بطور معقول درســت باشــد. با توجه به محدودیت $h\rightarrow 0$ زمانی که $N\rightarrow\infty$، بایســتی توابع پایه $\{\varphi_i\}$ را به گونه‌ای انتخاب نماییم که v^h به v نزدیک شود.

با روش اجزاء محدود یک میدان ناپیوســته معمولاً با شــبکه‌بندی روشن هندسه ترک بدست می‌آید یعنی، لبه ترک در امتداد لبه‌ی المان‌هایی که در مجاورت ترک قرار دارند منطبق می‌گردد.

در ادامه، روش اجزاء محدود توســعه‌یافته که توابع ناپیوســته در تمام توابع شــکل گره‌ای و درجات اضافی آزادی را ترکیب می‌کند، معرفی می‌نمائیم.

۴-۲-۲- تقریب اجزاء محدود توسعه‌یافته

ایده اصــلی در روش اجزاء محدود توســعه یافته، غنی‌ســازی فضــای اجزاء محدود استاندارد با برخی توابع اضافی است.

حال مدل ساده‌ای از یک دامنه ترک‌خورده را در نظر می‌گیریم. مدل شامل یک مدل اجزای محدود اســتاندارد و یک ترک مســتقل از المان‌ها می‌باشــد. شکل (۴-۲) شبکه‌بندی مدل نمونه و خط گسستگی را نشــان می‌دهد. مجموعه‌ی تمام n گره در شــبکه را با I و مجموعه‌ی گره‌های غنی‌شــده n^E را با J نشــان می‌دهیم. توابع شکل گره‌ای $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ هرکدام یک تکیه‌گاه فشرده[۵۴] ω_i دارند که با اجتماع المان‌های متصل

---

[۵۴] Compact support

به گره I که در شــکل (۴-۳) نشــان داده شــده اســت، مشــخص می‌شوند. به منظور سهولت، ما اغلب به این زیرمجموعه از دامنه به عنوان تکیه‌گاه گره اشاره خواهیم کرد.

تقریب غنی‌شده برای میدان جابجایی $u(x)$ بصورت زیر می‌باشد:[۶و۸و۱۱و۱۲و۱۴و۱۶و۲۳]

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{j \in J} b_j \phi_j(x) H(x) \tag{۱۵-۴}$$

که تابع غنی‌سازی $H(x)$ در سرتاسر Γ_d گسسته است.

در رابطه قبل، u_i و b_j بردارهای درجه آزادی گره‌ای نســـبت به مؤلفه‌های جابجایی در پایه (e_x,e_y) می‌باشند. مجموعه‌ی J شامل تمام گره‌هایی است که تقاطع Γ_d را در بر می‌گیرند یعنی:

$$J = \left\{ j \in I : \omega_j \cap D \neq 0 \right\} \tag{۱۶-۴}$$

که D هندســه‌ی گســســتگی Γ_d را مشــخص می‌نماید. برای نمونه، گره‌هایی که با دایره در شــکل (۴-۲) مشخص شده‌اند در مجموعه‌ی J بوده و با تابع $H(x)$ غنی می‌شوند.

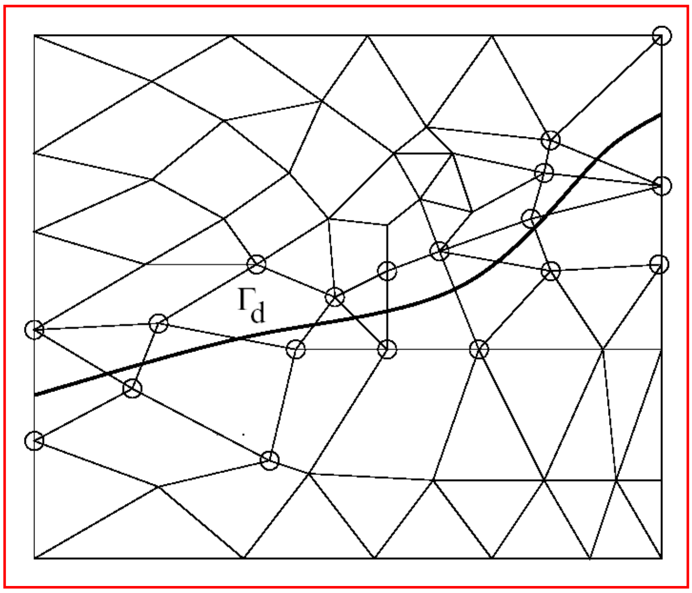
تقریب‌ســازی (۴-۱۵) به سادگی برای چندین گسستگی تعمیم می‌یابد. دوخط نامتقاطع گسستگی Γ_{d1} و Γ_{d2} را در نظر می‌گیریم. تقریب‌سازی بصورت زیر خواهد بود:

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{j \in J_1} b_j^1 \phi_j(x) H_1(x) + \sum_{j \in J_2} b_j^2 \phi_j(x) H_2(x) \tag{۱۷-۴}$$

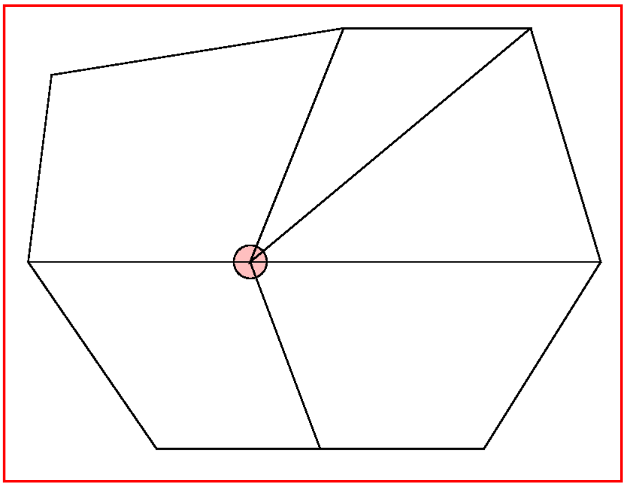
که مجموعه‌های J_1 و J_2 چنین تعریف می‌شوند که گره‌هایی هستند که به ترتیب تقاطع‌های Γ_{d1} و Γ_{d2} را در بر می‌گیرند.

هر تابعی که در سرتاسر Γ_d ناپیوسته است می‌تواند برای مدل کردن یک گسستگی دلخواه در $u^h(x)$ اســتفاده شــود ولی شــاید ساده‌ترین انتخاب، یک تابع ثابت است که در طول Γ_d تغییر علامت می‌دهد. برای

نمونه تابعی را در نظر می‌گیریم که مقدار ۱ را روی یک سمت Γ_d و ۱- را در سمت دیگر داشته باشد. فایده‌ی چنین تابعی این است که زمانی که هندسه D از اتصال یک سری قطعات خط مستقیم تشکیل شده است این تابع نیازی به نگاشت ندارد (بخش ۴-۳-۱ را ببینید).

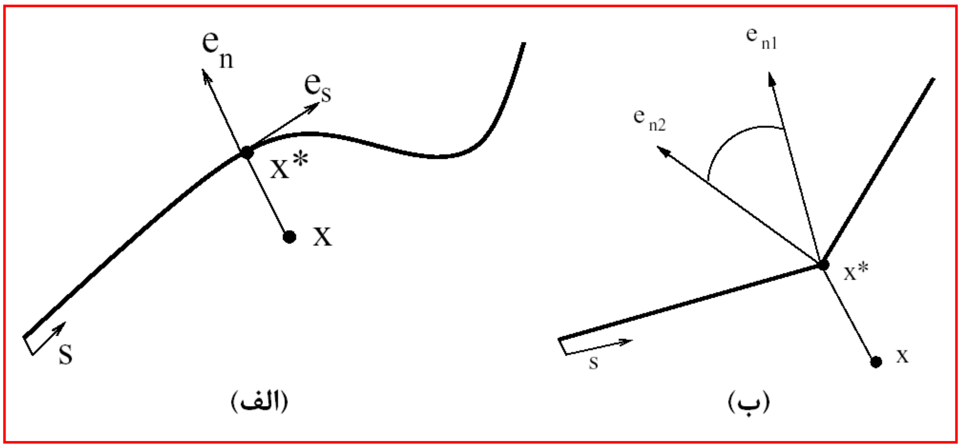


شکل ۴-۲: خط گسستگی Γ_d روی یک شبکه عمومی. گره‌هایی که با دایره مشخص شده‌اند با یک تابع ناپیوسته غنی شده‌اند.



شکل ۴-۳: تکیه‌گاه یک گره

حال ایجاد تابع ناپیوسته H(x) را در دوبعد شرح می‌دهیم. این تابع، یک تابع «هار تعمیم‌یافته»[۵۵] است. فرض می‌شود که سطح Γ_d یک منحنی است که توسط دستگاه مختصات منحنی‌وار[۵۶] s مشخص می‌شود (شکل (۴-۴) را ببینید).



شکل ۴-۴: نمایش مختصات عمودی و مماسی برای یک ترک یکنواخت (الف) و برای یک ترک تاب‌خورده (ب). x^* نزدیکترین نقطه به x روی ترک می‌باشد. در هر دو مورد بالا، تابع جهش عبارتست از: H(x) = -1.

با داشتن نقطه مفروض **x** روی دامنه، نزدیکترین نقطه روی Γ_d به **x** را با $\mathbf{x}^*$ مشخص می کنیم. در $\mathbf{x}^*$ بردارهای مماسی و عمود بر منحنی، e_s و e_n را ایجاد می کنیم. با توجه به جهت e_n داریم: $e_s \times e_n = e_z$. تابع H(x) با توجه به علامت $(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*).e_n$ مشخص می‌شود یعنی:

$$H(x)=\begin{cases} 1 & for \quad (x-x^*).e_n>0 \\ -1 & for \quad (x-x^*).e_n<0 \end{cases} \qquad (۱۸-۴)$$

---

[۵۵] Generalized Haar function

[۵۶] Curvilinear

در مورد ترک پیچ و تاب‌خورده[۵۷] نشـان داده شـده در شـکل (۴-۴ ب)، جایی که بجای بردار نرمال یکه، مخروطی از نرمال‌ها در x^* تعریف شده است، اگر $(x- x^*)$ متعلق به مخروط نرمال‌ها در x^* باشد $H(x) = 1$ و در غیر اینصورت $H(x) = -1$.[۱۶و۲۳]

۴-۲-۳- گسستگی‌های متقاطع

زمانی که دو خط گسـستگی با هم برخورد می‌کنند، این که غنی‌سازی هر یک از ترک‌ها بطور جدا صـورت گیرد، کافی نیست. این مسئله را می توان با در نظر گرفتن دو گسستگی متقاطع در زاویه °۹۰ روی یک شبکه یکنواخت تصدیق کرد، هنگامی که هر دو گسستگی روی شبکه قرار گیرند. اگر دو گسستگی بطور مجزا غنی شـوند (۴-۱۷)، فضـای تقریب جهت نشـان دادن تمام مدهای گسـسـتگی بجز در محل برخورد، مناسب نیست.

تقریب هر دو گسـسـتگی را زمانی که نقطه برخورد را با x_{12} مشـخص کرده‌ایم، در نظر می‌گیریم. تقریب درست با شروع با گسستگی منفرد ایجاد می‌شود:

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{j \in J_1} b_j^1 \phi_j(x) H_1(x) \qquad (۱۹-۴)$$

توابع پایه غنی‌شـــده $\{\phi_j(x)H_1(x)\}$ تکیه‌گاه‌هایی مانند توابع پایه $\{\phi_j(x)\}$ دارند بنابراین، تکیه‌گاه برخی از توابع پایه غنی‌شده برای ترک اول با ترک دوم برخورد خواهد کرد و اینها هم بایستی غنی شوند.

---

۵۷ kinked crack

تابع غنی‌سازی مناسب I(x) برای این گره‌های «متقاطع»[۵۸] حاصلضرب H1(x) و H2(x) می‌باشد.[۱۶]

این موضوع در شکل (۶-۵) بطور شماتیک نشان داده شده است.

در این صورت تقریب درست بصورت زیر خواهد بود:

(۲۰-۴)

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{j \in J_1} b_j^1 \phi_j(x) H_1(x) + \sum_{j \in J_2} b_j^2 \phi_j(x) H_2(x) + \sum_{j \in J_{12}} b_j^{12} \phi_j(x) I(x)$$

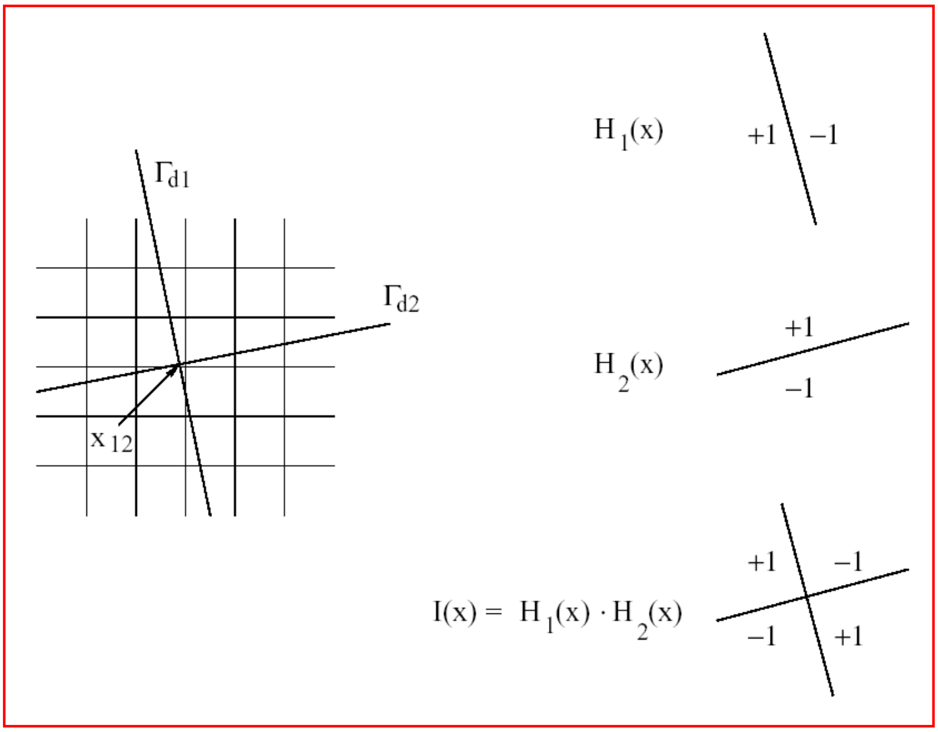
که مجموعه J_{12} شامل گره‌هایی است که x_{12} را در بر می‌گیرند:

$$J_{12} = \{ j \in I : x_{12} \in \omega_j \} \qquad (۲۱-۴)$$

با روند بیان‌شده در بالا، تقریب‌سازی برای هر تعداد از گسستگی‌های متقاطع می‌تواند بدست آید.

---

۵۸ intersected



شکل ۴-۵: ایجاد یک تابع غنی‌سازی «تقاطع» متشکل از حاصلضرب توابع جهش منفرد

۴-۳- غنی‌سازی نزدیک نوک[۵۹]

در این بخش، تغییرات ایجاد شـده برای یک تقریب‌سازی با غنی‌سازی ناپیوسته (۴-۱۵) برای مدل کردن ناحیه‌ی نزدیک رأس یک ترک را نشان می‌دهیم. شکل توابع نزدیک رأس برای الاستیسیته خطی داده شـده است. با مورد ساده‌ای از ترک لبه‌ای روی یک شبکه یکنواخت مانند شکل (۴-۶) آغاز می‌کنیم. تقریب شکل زیر را بخود می‌گیرد:

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{j \in J} b_j \phi_j(x) H(x) + \sum_{k \in K} \phi_k \left(\sum_{l=1}^{4} c_k^l F_l(x) \right) \quad (۴\text{-}۲۲)$$

[۵۹] Near-Tip Enrichment

که J مجموعه گره‌های وابســـته به بخش درونی ترک[۶۰] و K مجموعه وابســـته به نوک ترک می‌باشــد. برای نمونه، گره‌های مجموعه‌ی J با دایره و گره‌های مجموعه‌ی K با مربع در شـــکل (۴-۸) مشـــخص شـــده‌اند. تعاریف دقیق از این مجموعه‌ها بعدها بیان خواهد شد.

تابع H(x) پیشـــتر در معادله (۴-۱۸) داده شـــده است. تابع‌های نزدیک نوک $F_l(x)$ از جابجایی‌های مماســـی واقعی[۶۱] نزدیک نوک در جسم دوبعدی در معرض بارگذاری مختلط عمومی مشتق می شود. اینها بر حسب مختصات قطبی (r,θ) محلی در نوک ترک بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix} \cos(\theta/2)[\kappa-1+2\sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2)[\kappa+1-2\cos^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix} \sin(\theta/2)[\kappa+1+2\cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2)[\kappa-1-2\sin^2(\theta/2)] \end{Bmatrix}\end{aligned} \qquad (۲۳-۴)$$

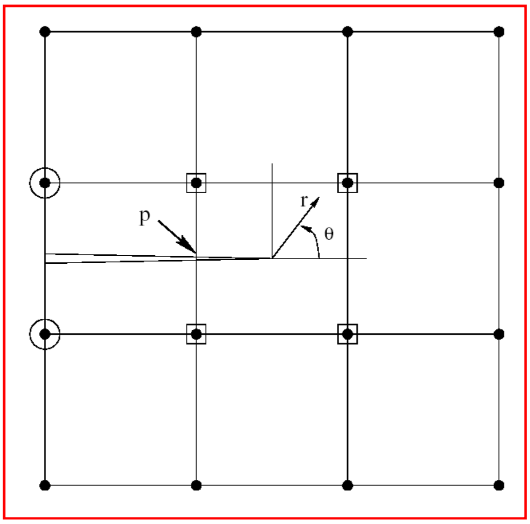
که K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش و μ و κ مشخصات ماده می‌باشد. این مقادیر بصورت زیر می‌باشند:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & for \quad plane \quad strain \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & for \quad plane \quad stress \end{cases} \qquad (۲۴-۴)$$

---

[۶۰] crack interior

[۶۱] exact asymptotic displacements



شکل ۴-۶: ترکی که بر روی شبکه قرار ندارد. غنی‌سازی گره‌هایی که با دایره مشخص شده‌اند با H(x) گسستگی را تا نقطه P مدل می‌کند و بنابراین گره‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک غنی می‌شوند.

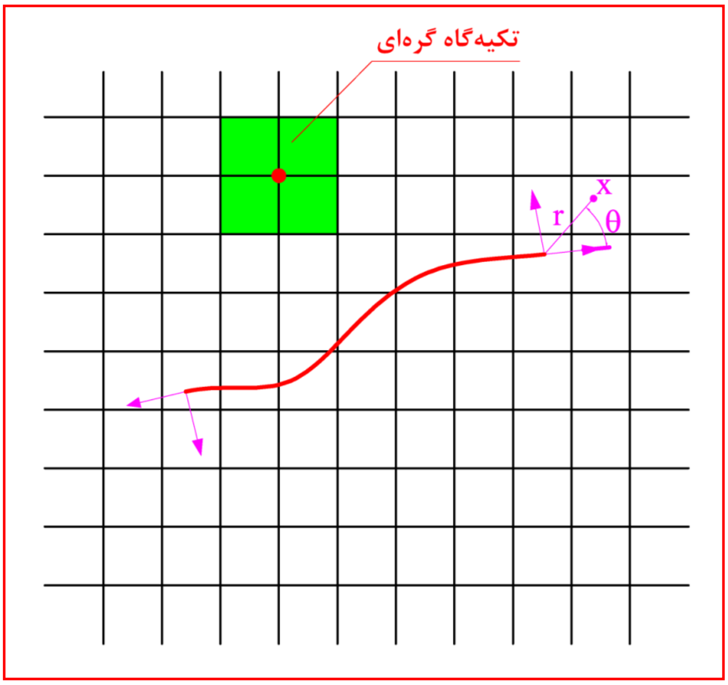
توابع $F_l(x)$ توابعی در نظر گرفته می‌شوند که میادین بالا را پوشش می‌دهند (فلمینگ[۶۲] و همکاران، ۱۹۹۷):[۱۶و۲۳]

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^{4}=\left\{\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2}),\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2}),\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta),\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta)\right\} \quad (۲۵-۴)$$

که (r,θ) مختصات قطبی محلی در نوک ترک، مانند شکل (۴-۷) می‌باشند. توجه داریم که تابع اول، در امتداد سطوح ترک ناپیوسته است در حالی‌که باقیمانده‌ی توابع، پیوسته‌اند. این موضوع در شکل (۴-۸) بخوبی نشان داده شده است.

---

۶۲ Fleming

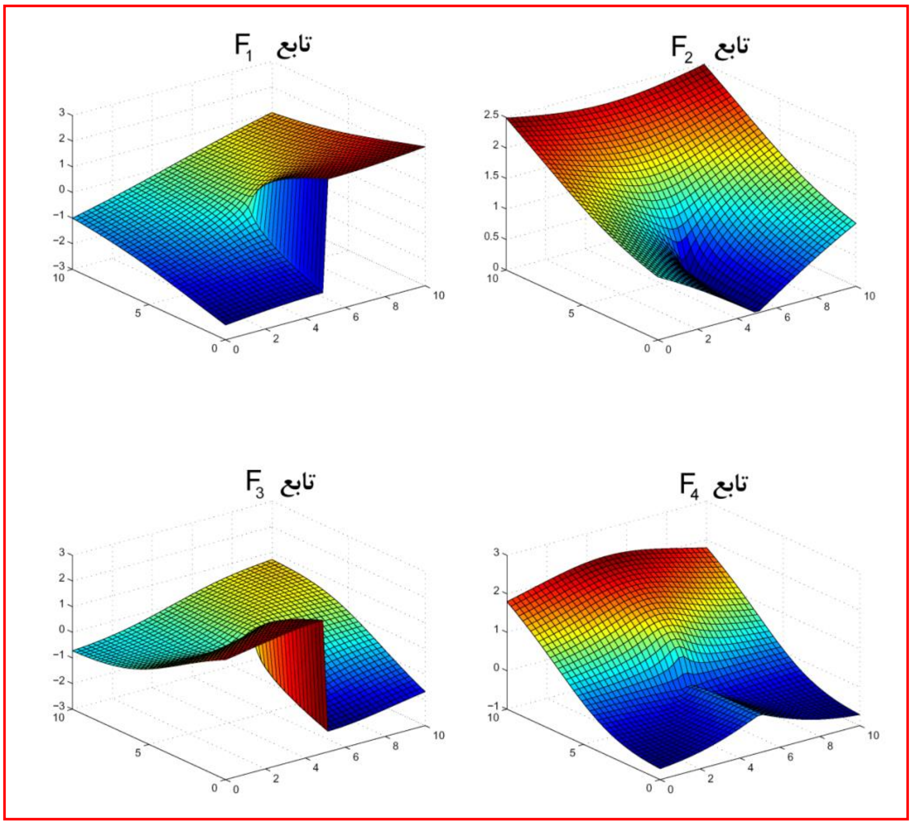


شکل ۴-۷: مختصات قطبی محلی در نوک ترک

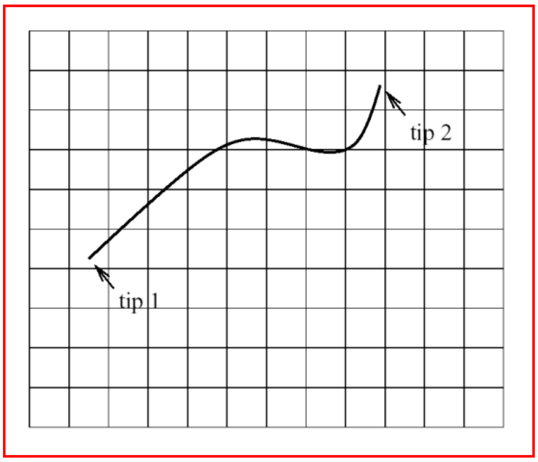
حال موردی از یک ترک اختیاری با دو نوک نشان داده شده در شکل (۴-۹) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تقریب (۴-۲۲) به سادگی به شکل عمومی زیر در می‌آید:

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{j \in J} b_j \phi_j(x) H(x) +$$

$$\sum_{k \in K_1} \phi_k \left(\sum_{l=1}^{4} c_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K_2} \phi_k \left(\sum_{l=1}^{4} c_k^{l2} F_l^2(x) \right) \qquad (۴-۲۶)$$



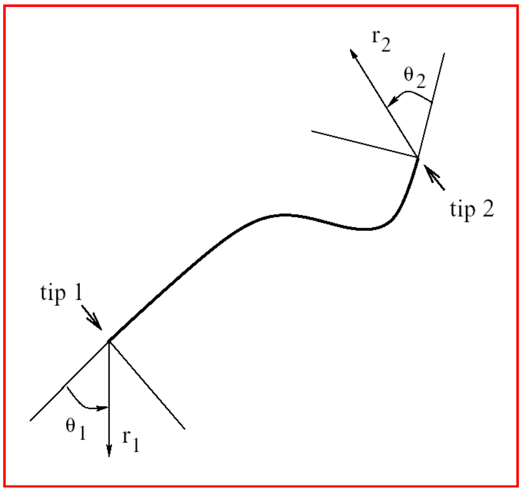
شکل ۴-۸: نمایش دو بعدی توابع نزدیک نوک مماسی[۶۳]



شکل ۴-۹: یک ترک اختیاری روی یک شبکه

[۶۳] near tip asymptotic functions

که K_1 و K_2 مجموعه گره‌های غنی‌شـــده برای نوک ترک اول و دوم می‌باشـــند. توابع $F_l^1(x)$ و $F_l^2(x)$ همانند آنهایی است که در معادله (۴-۲۵) داده شده است.



شکل ۴-۱۰: محورهای محلی برای مختصات قطبی روی دو نوک ترک

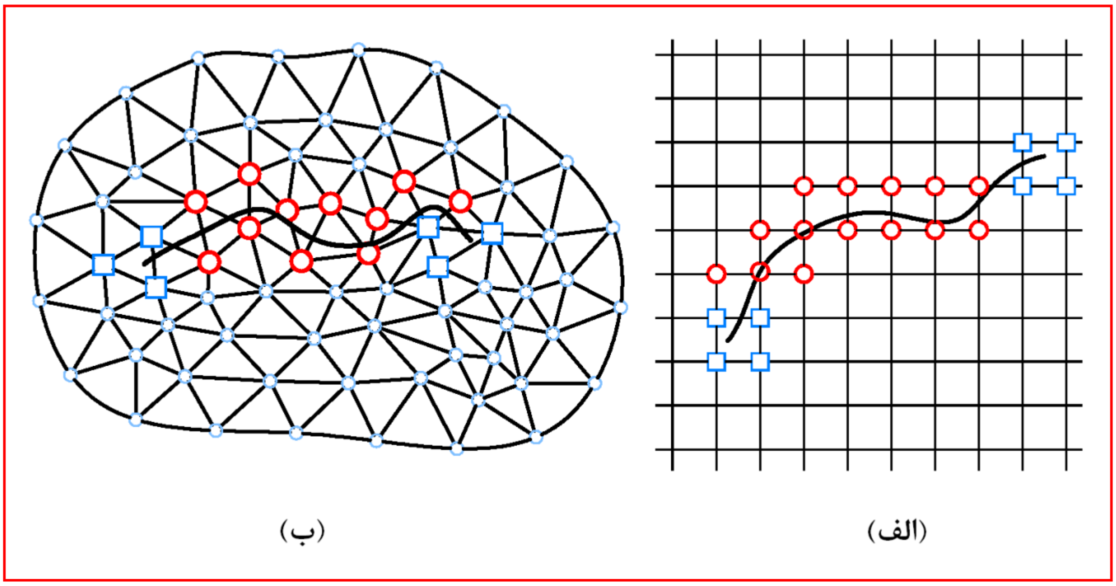
بازمی‌گردیم به تعاریف مجموعه‌های J، K_1 و K_2. مکان نوک‌های ترک ۱ و ۲ را با x_1 و x_2 و هندسه ترک را با D مشخص می‌نمائیم. مجموعه‌های K_1 و K_2 شامل آن گره‌هایی است که به ترتیب نوک‌های ۱و ۲ را در بر می‌گیرند. مجموعه J مجموعه گره‌هایی اســت که توسط ترک قطع شده و نیز متعلق به هیچکدام از دو مجموعه K_1 و K_2 نیستند. به‌طور دقیق‌تر:

$$K_1 = \{k \in I : x_1 \in \varpi_k\} \tag{۴-۲۷}$$

$$K_2 = \{k \in I : x_2 \in \varpi_k\} \tag{۴-۲۸}$$

$$J = \{j \in I : \omega_j \bigcap D \neq 0, j \notin K_1, j \notin K_2\} \tag{۴-۲۹}$$

شـکل (۴-۱۱) مجموعه‌های J (گره‌هایی که با دایره مشــخص شــده‌اند)، K_1 (گره‌هایی که با مربع نزدیک نوک ۱ مشــخص شــده‌اند) و K_2 (گره‌هایی که با مربع نزدیک نوک ۲ مشــخص شــده‌اند) را برای دو شبکه‌ی یکنواخت و شبکه‌ی غیریکنواخت به تصویر می‌کشد.



شـکل ۴-۱۱: ترک روی یک شـبکه یکنواخت (راسـت) و روی یک شـبکه غیریکنواخت (چپ). گره‌هایی که با دایره مشـخص شده‌اند با تابع جهش[۶۴] غنی شده‌اند در حالیکه گره‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع نوک ترک[۶۵] غنی شده‌اند.

تذکرات

---

[۶۴] Jump function

[۶۵] crack tip functions

از تعاریف مجموعه‌های J، K_1 و K_2 درمی‌یابیم که هر گره‌ای که تکیه‌گاه آن با ترک قطع شده باشد با یک تابع ناپیوسته غنی خواهد شد: نوع H برای گره‌های مجموعه J و نوع F برای گره‌های مجموعه‌های K_1 و K_2. بنابراین میدان جابجایی[۶۶]، امکان ناپیوسته بودن در طول گسترش ترک را دارا می‌باشد.

در مورد ترک‌های چندگانه، تقریب با توجه به تخصیص مجموعه‌های مناسب برای مجموعه‌های J، K_1 و K_2 برای هر ترک بدست می‌آید.

ترکیب میدان‌های غنی‌سازی موضعی از معادله (۴-۲۶) یک نمونه معین از روش تقسیم یگانه[۶۷] است.

۴-۳-۱- یک تابع نزدیک نوک دیگر[۶۸]

زمانی که چندین قطعه ترک با میدان‌های نزدیک نوک غنی شده باشند، یک نگاشت[۶۹] لازم است تا گسستگی ها در توابع نزدیک نوک را با لبه های ترک تطبیق دهد. در این بخش، روند نگاشت را مرور کرده و یک تابع نزدیک نوک دیگر را نشان می‌دهیم.

ترک بصورت مجموعه‌ای (یکسری) از قطعات خط راست متصل‌کننده‌ی نوک‌ها مدل شده است. گسستگی‌های واقع در میدان‌های نزدیک نوک به کمک یک روند بیان شده در کار فلمینگ، چو، موران و بلیچکو (۱۹۹۷) و بلیچکو و بلک (۱۹۹۹) با هر قطعه در یک ردیف قرار می‌گیرد.[۱۶] در این روند، گسستگی

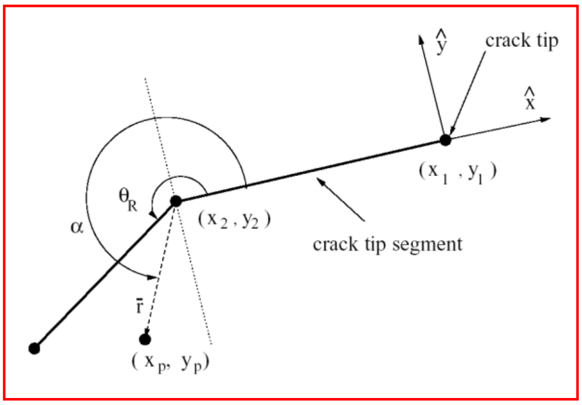
۶۶ displacement field

۶۷ Partition of Unity Method (PUM)

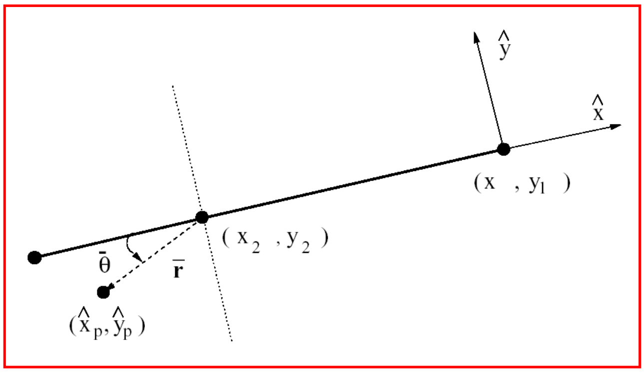
۶۸ alternative near-tip function

۶۹ mapping

در توابع نزدیک نوک به کمک یک تکنیک نگاشت که هر بخش از گسستگی را روی مدل ترک می‌چرخاند، با ترک در یک امتداد قرار می‌گیرد.



شکل ۴-۱۲: هندسه اولیه برای نگاشت توابع غنی‌سازی



شکل ۴-۱۳: نقطه نگاشته شده (x^*,y^*) مورد استفاده برای تعیین توابع $F_l(r,\theta)$

گام کلیدی در این تکنیک، تغییر زاویه θ در $F_l(r,\theta)$ می‌باشد. با داشتن نقطه (x_p,y_p)، زاویه $\bar{\theta}(x_p,y_p)$ را بر حسب زاویه ی قطعه، θ_R (شکل (۴-۱۲) را ببینید) و زاویه $\alpha(x_p,y_p)$ بصورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi/2}{3\pi/2 - \theta_R}\right)(\alpha - \theta_R) & for \quad \alpha > \theta_R \\ \left(\dfrac{\pi/2}{\theta_R - \pi/2}\right)(\alpha - \theta_R) & for \quad \alpha < \theta_R \end{cases} \qquad (۴-۳۰)$$

مختصـات نقطه نمونه (x_p,y_p) به مختصـات نوک ترک $(\hat{x},\hat{y})$ مانند شـکل (۴-۱۳) نگاشـت شـده است:

$$(\hat{x}_p,\hat{y}_p)=(-l-\bar{r}\cos(\bar{\theta}),-\bar{r}\sin(\bar{\theta})) \qquad (۴-۳۱)$$

که l فاصله بین (x_1,y_1) و (x_2,y_2) بوده و $\bar{r}$ در شکل نشان داده شده است.

۴-۴- معادلات تعادل گسسته‌سازی شده[۷۰]

با جایگزینی تقریب جابجایی (۴-۲۲) در تعریف کرنش (۴-۴) به رابطه‌ی تقریب‌زده‌شـده‌ی کرنش زیر می‌رسیم:[۱۶و۲۳]

$$\varepsilon^h=\bar{B}\bar{u}=\begin{bmatrix} B_I^u & B_J^a & B_K^{b1} & B_K^{b2} & B_K^{b3} & B_K^{b4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_I \\ a_J \\ b_K^1 \\ b_K^2 \\ b_K^3 \\ b_K^4\end{bmatrix} \qquad (۴-۳۲)$$

که $\bar{B}$ گرادیان متقارن گسسته‌سازی‌شده توابع شکل توسعه‌یافته بوده و مؤلفه‌های آن بصورت زیر می‌باشد:

$$B_I^u=\begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x}\end{bmatrix} \qquad (۴-۳۳)$$

۷۰ Discretized equilibrium equations

$$B_J^a = \begin{bmatrix} \left(\tilde{N}_J\left(H - H(x_J)\right)\right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\tilde{N}_J\left(H - H(x_J)\right)\right)_{,y} \\ \left(\tilde{N}_J\left(H - H(x_J)\right)\right)_{,y} & \left(\tilde{N}_J\left(H - H(x_J)\right)\right)_{,x} \end{bmatrix} \qquad (۳۴-۴)$$

$$B_K^{bl}\Big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} \left(\tilde{N}_K\left(B_K^l - B_K^l(x_K)\right)\right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\tilde{N}_K\left(B_K^l - B_K^l(x_K)\right)\right)_{,y} \\ \left(\tilde{N}_K\left(B_K^l - B_K^l(x_K)\right)\right)_{,y} & \left(\tilde{N}_K\left(B_K^l - B_K^l(x_K)\right)\right)_{,x} \end{bmatrix} \qquad (۳۵-۴)$$

با جایگذاری جابجایی (۴-۲۲) و کرنش (۴-۳۲) در شکل کاهش مرتبه یافته سیستم گسسته استاندارد معادلات بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$Ku = f^{ext} \qquad (۳۶-۴)$$

که f^{ext} بردار نیروهای خارجی گره‌ای و K ماتریس سختی است:

$$K = \int_{\Omega^h} \overline{B}^T C \overline{B} d\Omega \qquad (۳۷-۴)$$

عبارت f^{ext} بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{ext} = \left\{ f_I^u ; f_J^a ; f_K^{b1} ; f_K^{b2} ; f_K^{b3} ; f_K^{b4} \right\} \qquad (۳۸-۴)$$

که در آن:

$$f_I^u = \int_{\Gamma_t} N_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I b d\Omega \qquad (۳۹-۴)$$

$$f_J^a = \int_{\Gamma_t} \tilde{N}_J\left(H - H(x_J)\right)\bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{N}_J\left(H - H(x_J)\right) b d\Omega \qquad (۴۰-۴)$$

$$f_K^{bl}\Big|_{l=1,2,3,4} = \int_{\Gamma_t} \tilde{N}_K \left(B_K^l - B_K^l(x_K)\right)\bar{t}\, d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{N}_K \left(B_K^l - B_K^l(x_K)\right) b\, d\Omega \quad (۴۱-۴)$$

۴-۵- جزئیات کاربردی

تا پیش از این، شکل توابع غنی‌سازی گسستگی‌ها را ارائه داده و تعاریف مجموعه گره‌ها (یا درجه آزادی[۷۱]) انتخابی برای غنی‌سازی را بیان نموده‌ایم. در این بخش، برخی از جزئیات کاربردی انتخاب گره‌ای و طرح مورد استفاده برای ایجاد ماتریس سختی داده شده است.

۴-۵-۱- انتخاب گره برای غنی‌سازی

در بخش (۴-۳)، سه مجموعه مجزا از گره‌ها برای غنی‌سازی، مطابق با هر نوک ترک و روی ترک شناسایی شدند که عبارتند از:

$$K_1 = \{k \in I : x_1 \in \varpi_k\} \quad (۴۲-۴)$$

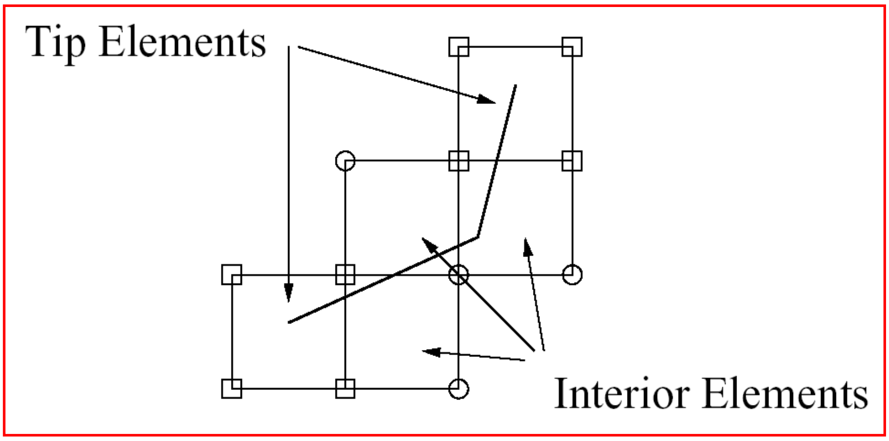
$$K_2 = \{k \in I : x_2 \in \varpi_k\} \quad (۴۳-۴)$$

$$J = \{ j \in I : \omega_j \cap D \neq 0,\ j \notin K_1,\ j \notin K_2 \} \quad (۴۴-۴)$$

توجه داریم که مجموعه J شامل گره‌هایی است که تکیه‌گاه آنها توسط ترک قطع می‌شود. این موضوع بیان می‌کند که اگر ترک فقط با مرز تکیه‌گاه گره‌ای برخورد نماید، آن گره با تابع H(x) غنی نخواهد شد. این مطلب از غنی‌سازی هر گره‌ای با یک تابع ثابت (+۱ یا -۱) روی تمام تکیه‌گاه‌شان جلوگیری می‌نماید که در نتیجه از خلق یک وابستگی خطی در تقریب‌سازی جلوگیری می‌کند.

[۷۱] Degree of freedom (DOF)

در عمل، مجموعه‌های بالا بدین صورت تعیین می‌شوند: ابتدا تمام المان‌های متقاطع با ترک تعیین می‌شـــوند. از این مجموعه المان‌ها، ســـه مجموعه‌ی جدا از هم از «المان‌های نوک ترک» (برای هر یک از نوک‌های ۱ و ۲) و «المان‌های درونی» را مشـخص می‌سـازیم. این مجموعه‌ها در شـکل (۴-۱۴) برای یک چیدمان ترک یا شبکه نوعی نشان داده شده است. سپس گره‌های المان‌های نوک به هر یک از مجموعه‌های K_1 یا K_2 نسـبت داده می‌شـوند. گره‌های المان‌های درونی که به هیچ یک از مجموعه‌های K_1 یا K_2 تعلق ندارند، به مجموعه‌ی J نسبت داده می‌شوند.



شـکل ۴-۱۴: مجموعه‌های المان برای تعیین گره‌های غنی‌شـده. گره‌های المان‌های نوک (مربعی) که با تابع نزدیک نوک غنی می‌شوند. باقیمانده‌ی گره‌های درونی (دایره‌ای) با تابع H(x) غنی می‌شوند.

۴-۵-۲- انتگرال المانی

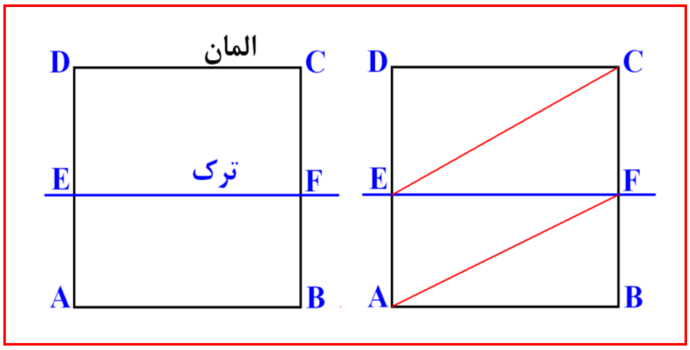
در مشـتق شـکل کاهش مرتبه یافته، تئوری دیورژانس بکار رفته اسـت. تئوری دیورژانس تنها روی دامنه‌ای که u_i بطور کافی منظم باشـد قابل کاربرد اسـت یعنی u_i نبایستی شامل گسستگی باشد و بنابراین سـطح ترک بایسـتی به عنوان یک مرز داخلی برای دامنه انتگرال‌گیری در نظر گرفته شود. برای مثال، برای المان ABCD در شـکل (۴-۱۵) لازم است تا این المان به مثلث‌های کوچکتری تقسیم شده و انتگرال‌گیری

روی این زیر دامنه ها صورت پذیرد. در شکل (۴-۱۶) این مثلث بندی برای المان نوک نشان داده شده است. از آنجا که عمل انتگرال‌گیری روی این مثلث‌ها صـورت می‌گیرد، جهت دسـتیابی به نتایج صـحیح، در این مثلث‌ها، از مربع‌سـازی گاوسـی مرتبه بالاتر[۷۲] اسـتفاده می‌کنیم. در این پایان‌نامه، ۱۳ نقطه گاوسـی در هر مثلث کوچکتر برای المان نوک و ۳ نقطه گاوسی در هر مثلث کوچکتر در المان‌های بریده‌شده استفاده شده است.

روند انتگرال‌گیری عددی برای المان‌های برخورد کرده با ترک بصورت زیر است:

۱. ایجاد مثلث‌بندی دلانی[۷۳] برای تشکیل مثلث‌های کوچکتر.

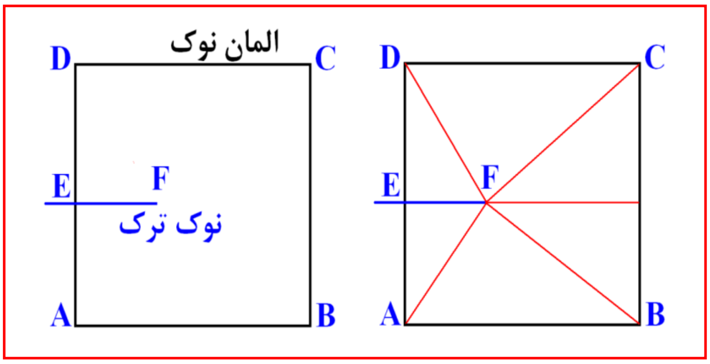
۲. برای هر مثلث کوچکتر، مختصات و وزن‌های نقاط گاوسی محاسبه شده و به سیستم مختصات اصلی منتقل شده است.



شکل ۴-۱۵: مثلث‌های استفاده شده برای المان بریده‌شده با ترک

[۷۲] high order Gauss quadrature rule

[۷۳] Delaunay triangulation



شکل ۴-۱۶: مثلث‌های استفاده شده برای المان نوک

۴-۶- روش مجموعه تراز[۷۴]

۴-۶-۱- مقدمه

روش مجموعه تراز برای نشان دادن موقعیت ترک و نیز موقعیت‌های نوک ترک به کار می‌رود. روش اجزاء محدود توسـعه‌یافته[۷۵] هم برای محاسـبه میدان‌های تنش و جابجایی موردنیاز برای تعیین نرخ رشـد ترک به کار می‌رود. ترکیب این روش‌ها منجر به روشی می‌شود که در این روش مرکب نیازی به شبکه‌بندی دوباره دامنه، همزمان با رشد ترک نبوده و بنابراین این روش را بسیار کارآمد می‌نماید.[۲۳و۲۶و۲۹]

روش مجموعه تراز یک طرح عددی اسـت که توسـط اوشـر و سـتین[۲۴] برای مدل‌کردن حرکت ناپیوسـتگی، توسعه یافته است. در این روش، ناپیوستگی به صورت یک مجموعه تراز صفر از یک تابع از یک درجه بالاتر نشـان داده می‌شـود. نمایش ترک به کمک روش مجموعه تراز، انتخاب گره‌های غنی‌شـده و نیز تعریف توابع غنی‌سازی را آسان می‌سازد.

۴-۶-۲- مفاهیم اولیه

---

[۷۴] Level Set Method (LSM)

[۷۵] eXtended Finite Element Method (X-FEM)

روش مجموعه تراز یک تکنیک عددی برای دنبال کردن حرکت یک ناپیوستگی است. در این روش، ناپیوســتگی موردنظر بصــورت مجموعه تراز صــفر یک تابع $\phi(\mathrm{x}(t), t)$ نشــان داده می‌شود. این تابع، یک بعد بالاتر از بعد ناپیوستگی می‌باشد. تابع تغییرات برای ناپیوستگی را می‌توان به عنوان یک تابع برای تحول تابع ϕ بیان داشت.

بطورکلی، یک ناپیوستگی متحرک $\gamma(t)\subset R^2$ را می‌توان بصورت یک منحنی مجموعه تراز از یک تابع $\phi(\mathbf{x},t):R^2\times R\rightarrow R$ فرمول‌سازی می‌نمائیم که:

$$\gamma(t) = \{x \in R^2 : \phi(x,t) = 0\} \qquad (۴۵\text{-}۴)$$

شرایط اساسی روی ϕ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(x,t) = \pm \min_{x_\gamma \in \gamma(t)} \|x - x_\gamma\| \qquad (۴۶\text{-}۴)$$

که ϕ یک فاصله علامت‌دار تا ناپیوستگی است. علامت + یا – بستگی به مکان نقطه $\mathbf{x}$ دارد که در کدام سمت ناپیوستگی قرار دارد.

فواید بســیاری در اســتفاده از روش مجموعه تراز برای دنبال کردن ناپیوســتگی‌ها وجود دارد. ابتدا اینکه، برخلاف دیگر روش‌های پیگیری ناپیوستگی، حرکت ناپیوستگی روی یک شبکه ثابت محاسبه می‌شود. دوم اینکه، این روش دســت به تغییرات در پیکربندی ســطح مشــترک بطور طبیعی می‌زند. سوم اینکه، تابع تغییرات[۷۶]، فارغ از بعد ناپیوستگی و بصورت زیر می‌باشد:

$$\phi_t + F\|\nabla\phi\| = 0 \qquad (۴۷\text{-}۴)$$

[۷۶] evolution equation

$$\phi(x,t=0)=given \qquad (۴۸-۴)$$

که در آن F سـرعت در پیشـانی در $\mathbf{x}\in\gamma(t)$ در امتداد عمود بر سطح مشترک می‌باشد. از اینرو، تعمیم روش به ابعاد بالاتر به راحتی صـورت می پذیرد. در نهایت اینکه، مشـخصـات هندسی سطح مشترک را می توان از تابع مجموعه تراز ϕ بدست آورد. برای مثال، بردار یکه عمود بر سطح مشترک بصورت زیر می‌باشد:

$$\vec{n}=\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \qquad (۴۹-۴)$$

یک اشکال در روش مجموعه تراز آن است که نمایش مجموعه تراز نیاز به یک تابع از یک بعد بالاتر از بعد ترک اصلی دارد که این مطلب منجر به افزایش زمان محاسبات می شود. به‌هرحال، ما تنها علاقمند به بررسـی حرکت در نزدیکی ترک هسـتیم. از اینرو، محاسبه مجموعه تراز بایستی در ناحیه اطراف ناپیوستگی صـورت گیرد. این امر با مکان یابی ناپیوسـتگی و ایجاد تابع مجموعه تراز با استفاده از رابطه (۴-۴۶) در یک ناحیه‌ی از پیش تعیین شده در هر یک از لبه‌های ناپیوستگی انجام می‌شود.

۴-۶-۳- الگوریتم مجموعه تراز برای مدل‌سازی رشد ترک

ما رشد ترک در یک بعد در چارچوب مجموعه تراز را با نشان دادن ترک به عنوان مجموعه تراز صفر از یک تابع $\psi(\mathbf{x},t)$ مدل می‌کنیم. یک نقطه پایانی از ترک بصـورت تقاطع مجموعه تراز صـفر تابع ψ با یک مجموعه تراز صـفر عمودی تابع $\phi_i(\mathbf{x},t)$ که i تعداد نوک‌های یک ترک مفروض می‌باشد، نشان داده می‌شود. برای ترک‌هایی که تمام ترک درون جسـم قرار دارد، دو تابع ϕ_1 و ϕ_2 برای دو نوک ترک اسـتفاده می‌شـود.

برای ترک‌های لبه‌ای[۷۷]، تنها یک تابع ϕ_1 موردنیاز است. مقادیر تابع مجموعه تراز تنها در گره‌ها ذخیره شده است. توابع در شبکه با همان توابع شکل مربوط به جابجایی، درون‌یابی می‌شوند. از اینرو:

$$\phi_i(x,t)=\sum_{j\in J}\phi_{ij}(t)N_j(x) \tag{۵۰-۴}$$

$$\psi(x,t)=\sum_{j\in J}\psi_j(t)N_j(x) \tag{۵۱-۴}$$

تابع مجموعه تراز نشـان‌دهنده‌ی ترک اولیه با محاسـبه‌ی تابع فاصـله علامت‌دار[۷۸] برای ترک ایجاد می‌شود. یک مشکل در انجام این کار از این حقیقت سرچشمه می‌گیرد که اگرچه نوک ترک درون دامنه قرار دارد، تابع مجموعه تراز نشـان‌دهنده‌ی ترک بایسـتی اسـاساً روی تمام دامنه ایجاد شده باشد. برای رفع این مشکل ترک اولیه بطور مماس از نوکش توسعه یافته و تابع فاصله علامت‌دار (۴-۴۶) از این ترک توسعه‌یافته ایجاد می‌شود.

تابع مجموعه ترازی که نوک ترک را نشان می‌دهد اساساً بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_i(x,0)=(x-x_i)\cdot\hat{t} \tag{۵۲-۴}$$

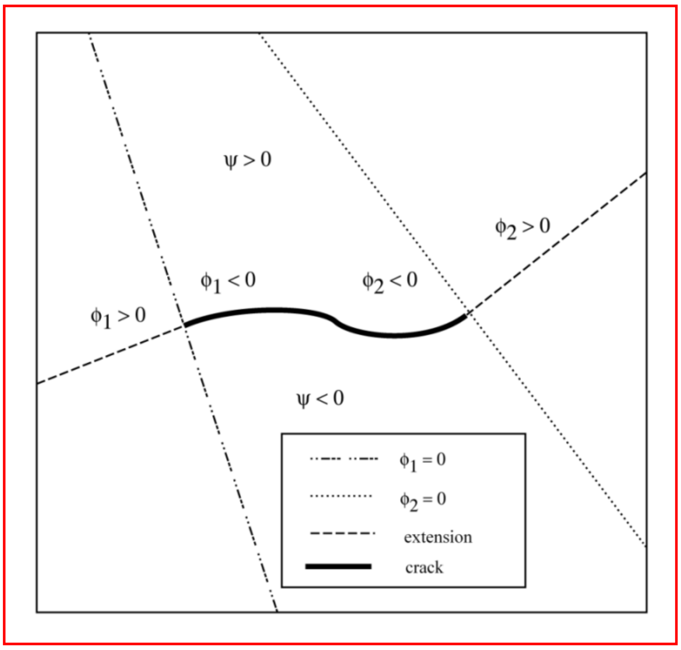
که $\hat{t}$ یک بردار یکه مماس بر ترک در نوک آن و $\mathbf{x}_i$ مکان i-امین نوک ترک است.

با داشـتن تابع $\phi_i(\mathbf{x},t)$، تابع صـفحه‌ای ϕ_i یک مجموعه تراز صـفر دارد که عمود بر ψ در نوک ترک می‌باشد. توابع مجموعه تراز اولیه ψ و ϕ_i و نمایش ترک در شکل‌های (۴-۱۷) و (۴-۱۸) آمده است.

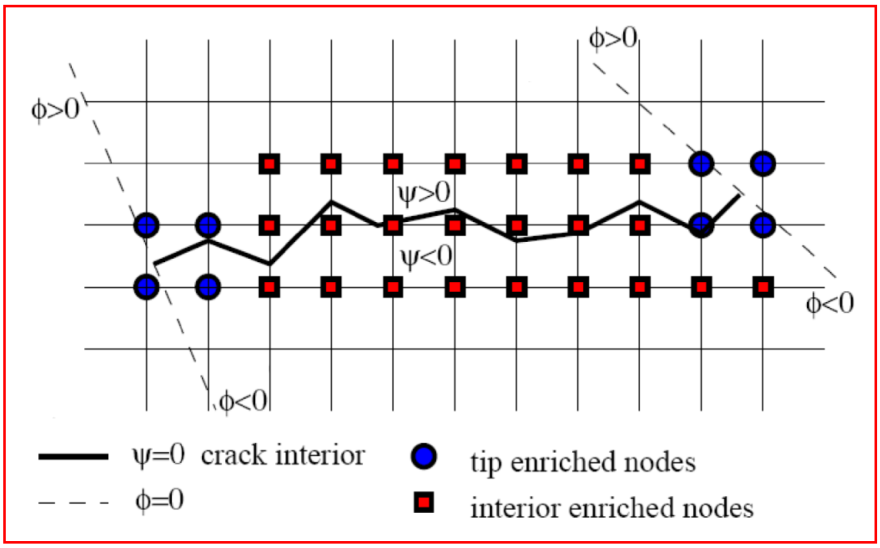
---

[۷۷] Edge cracks

[۷۸] Signed-distance function



شکل ۴-۱۷: توابع مجموعه تراز اولیه ψ و ϕ_i و نمایش ترک



شکل ۴-۱۸: توابع مجموعه تراز اولیه ψ و ϕ_i و نمایش ترک به همراه شبکه المان محدود

نکته مهم این است که اگرچه ترک واقعی درون دامنه قرار می‌گیرد، مجموعه تراز صفر تابع ψ تمام دامنه را می‌شکافد.

از دیدگاه روش مجموعه تراز، ترک به عنوان مجموعه تراز صفر تابع ψ که $\phi_1 \leq 0$ و $\phi_2 \leq 0$ می‌باشد در نظر گرفته می‌شــود (در مورد ترک‌های داخلی[۷۹]). در مورد ترک‌های لبه‌ای تنها $\phi_1 \leq 0$ می‌باشــد. هنگامی‌که بیش از یک نوک ترک وجود دارد، ســاده‌تر این اســت که یک تابع منفرد $\phi(\mathbf{x},t)$ برای نمایش مجموعه تراز نوک ترک تعریف شود:

$$\phi(x,t) = \max_i(\phi_i) \tag{۵۳-۴}$$

تـابع ϕ این اجازه را به ما می‌دهد که مکان ترک تنها با یک تابع تعریف شـــود چه اینکه ترک یک نوک داشته باشد چه دو نوک. به بیان دیگر، یک ترک با مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$\left\{ x : \psi(x,t) = 0 \quad and \quad \phi(x,t) \leq 0 \right\} \tag{۵۴-۴}$$

همانطور که پیشــتر اشاره شد، تا زمانی که تنها تغییرات یک منحنی یک بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم نیازی به به‌روزکردن[۸۰] مجموعه‌های تراز روی تمام دامنه دوبعدی نیســت. فرض می‌کنیم که زمانی که یک قســمت از یک ترک شــکل گرفت، آن قســمت، دیگر دچار تغییرشــکل و تغییرمکان نخواهد شــد. بنـابراین، توابع ψ، ϕ_i و ϕ تنهـا روی یـک ناحیه کوچک از المان‌های اطراف هر نوک ترک نیاز به بروزکردن دارند. این نوار باریک با احاطه کردن نوک ترک با یک لایه از پیش تعیین شـده از المان‌ها سـاخته می‌شـود. تعداد المان‌های احاطه‌کننده به طوری انتخاب شده است که بیشتر از طول رشد ترک است.

[۷۹] Interior cracks

[۸۰] update

رشـد ترک با بروزکردن مناسـب توابع ψ، ϕ_i و سـپس ایجاد دوباره ی توابع بروزشده ی ϕ مدل شده است. یک ترک در هر نوک با روشی مشابه و صرفنظر از تعداد ترک‌ها و تعداد نوک‌های هر ترک، توسعه داده شده است. تغییرات ψ، ϕ_i با امتداد رشد ترک (θ_c) تعیین شده است. اندازه‌ی گسترش ترک (‖**F**‖) به انتخاب قانون رشد ترک بستگی دارد. مکان جاری نوک ترک، $X_i=(x_i,y_i)$ نیز در معادلات تغییر و تحول استفاده شده است.

مقادیر ψ، ϕ_i را در گام n با ψ^n و ϕ_i^n نشان می‌دهیم. الگوریتم تغییرات توابع مجموعه تراز ψ، ϕ_i بصورت زیر می‌باشد:

۱- ϕ_i^n را با کمک رابطه‌ی (۴-۴۷) بروز می‌کنیم. در این رابطه **F** همواره سـرعت عمود بر سـطح مشـترک می‌باشد. بهرحال، **F** لزوماً عمود بر مجموعه تراز صفر ϕ_i^n نیست. به همین علت بایستی ابتدا ϕ_i^n را بچرخانیم برای اینکه **F** بصـورت عمود اسـت. ϕ_i^n پس از چرخش، $\hat{\phi}_i^n$ نامیده شـده و بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$\hat{\phi}_i=(x-x_i)\frac{F_x}{\|F\|}+(y-y_i)\frac{F_y}{\|F\|} \qquad (۵۵-۴)$$

۲- ترک با محاسـبه‌ی مقادیر جدید ψ^{n+1} تنها در جاییکه $\hat{\phi}_i>0$ می‌باشد که این ناحیه با Ω^{update} نشان داده می‌شود، توسعه می‌یابد. ناحیه‌ای که در آن $\hat{\phi}_i<0$ می‌باشد را با $\Omega^{\text{no update}}$ نشان می‌دهیم.

$$\psi^{n+1}=\psi^n \quad in \quad \Omega^{no\ \ update} \qquad (۵۶-۴)$$

$$\psi^{n+11}=\pm\left|(X-X_i)\times\frac{F}{\|F\|}\right|=\pm\left|(x-x_i)\frac{F_y}{\|F\|}-(y-y_i)\frac{F_x}{\|F\|}\right| \quad in \quad \Omega^{update} \qquad (۵۷-۴)$$

علامت ψ^{n+1} در Ω^{update} با علامت روی یک طرف معین از ترک در $\Omega^{\text{no update}}$ سازگار است.

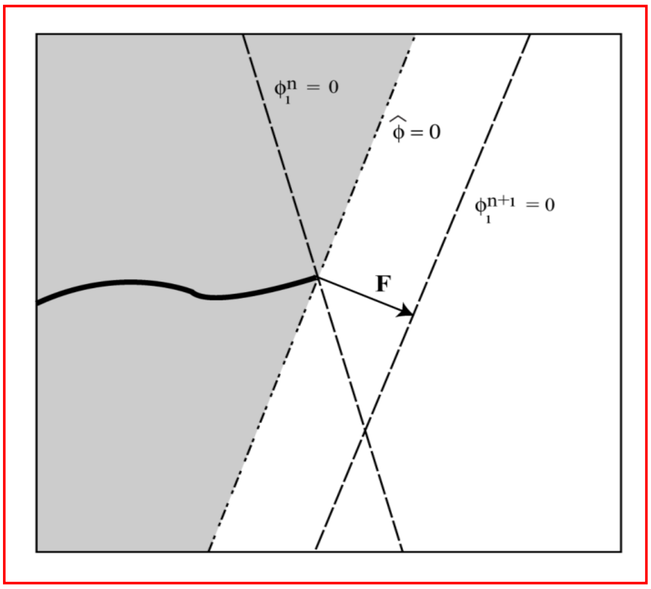
۳- ϕ_i^{n+1} با کمک رابطه‌ی (۴-۴۷) محاســبه شـده است بطوریکه مکان به‌روزشده‌ی نوک ترک را نشان می‌دهد:

$$\phi_i^{n+1} = \hat{\phi}_i - \Delta t \|F\| \qquad (۴-۵۸)$$

که همیشه $\|\nabla\phi\| = 1$ می‌باشد. نحوه‌ی محاسبه‌ی $\hat{\phi}$ پیشتر نشان داده شده است.

۴- زمانی که تمام ϕ_i^{n+1}های متناظر با یک ترک به‌روز شـدند، ϕ^{n+1} با اسـتفاده از رابطه (۴-۵۳) به‌روز می‌شوند.

حـال مکان نوک ترک جدید i را می توان با یافتن تقاطع مجموعه های تراز صـــفر ϕ_i^{n+1} و ψ^{n+1} توسعه‌یافته تعیین نمود.



شکل ۴-۱۹: به‌روزکردن تابع مجموعه تراز. ناحیه خاکستری ناحیه $\Omega^{\text{no update}}$ می‌باشد.

۴-۶-۴- تلفیق[۸۱] روش مجموعه تراز و اجزاء محدود توسعه‌یافته

تلفیق این دو روش به منظور مدل‌کردن رشـد ترک صـورت می‌گیرد. الگوریتم بیان شده برای رشد ترک در بخش قبل به سـادگی قابل اجرا اسـت. مقادیر ψ، ϕ_t و ϕ در گره‌ها ذخیره شده‌اند. هرگونه اطلاعات موردنیـاز برای رشـــد ترک مانند موقعیت نوک ترک را می‌توان از این مقادیر گره‌ای، بدون نیاز به اطلاعات دیگر مربوط به ترک بدست آورد. الگوریتم X-FEM، یک طرح کارآمد است که تغییرات یک ترک روی یک شـــبکه را تعیین می‌کند. شـــبکه در تمام طول محاســـبه‌ی تغییرات ترک، بدون تغییر اســـت. بدین دلایل، روش‌های مجموعه تراز و X-FEM در کنار هم به خوبی کار می‌کنند.

افزون بر این، نمایش مجموعه تراز یک ترک، محاســـبه‌ی غنی‌ســـازی را ســـهولت می‌بخشـــد. تابع غنی سازی H(x) بطوری تعریف شده است که گسستگی با ترک منطبق است. بدین دلیل که ترک به عنوان مجموعه تراز صفر ψ تعریف شده است، تمام مقادیر رو یا زیر ترک، یا منفی‌اند یا مثبت.

از تابع H(x) می‌توانیم ببینیم که:

$$H(y) = H^*\big(\psi(x,t)\big) = \begin{cases} 1 \quad for \quad \Psi(x,t) > 0 \\ -1 \quad for \quad \Psi(x,t) < 0 \end{cases} \qquad (۵۹\text{-}۴)$$

بنابراین برای تعیین مکان یک نقطه نســـبت به ترک بایســـتی ابتدا علامت ψ را در آن نقطه تعیین کنیم.

---

[۸۱] coupling

توابع غنی‌سازی $F_l(r,\theta)$ در سیستم مختصات موضعی نوک ترک تعریف شده‌اند. این سیستم مختصات را می‌توان با تابع مجموعه تراز نشان‌دهنده‌ی نوک ترک تعیین کرد. تابع متناظر با نوک‌ها، ϕ، همیشه صفحه‌ای است و $\|\nabla\phi\|=1$ و مجموعه تراز صفر آن عمود بر مجموعه تراز صفر تابع ψ در نوک‌های ترک می‌باشد. تعامد این دو مجموعه تراز یک دستگاه مختصات طبیعی را ایجاد می‌نماید. جهت محور x محلی با $\nabla\phi$ تعیین شده است. جهت محور y به راحتی برابر است با $\hat{e}_z\times\nabla\phi$ که در آن $\hat{e}_z=(0,0,1)$ می‌باشد. در این سیستم مختصات موضعی، آرگومان‌های تابع شاخه $F_l(r,\theta)$ می‌تواند با کمک توابع مجموعه تراز تعیین شود. یعنی در نقطه X شعاع از نوک ترک و زاویه انحراف از مماس به نوک ترک بصورت زیر است:

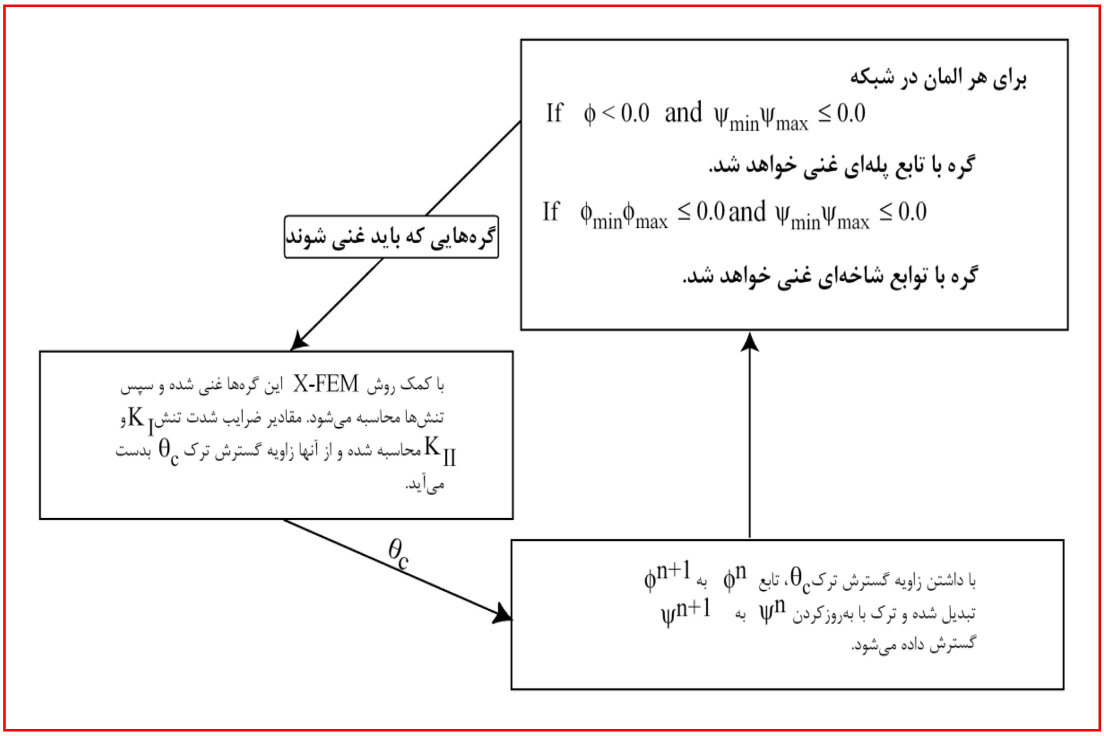
$$r=\sqrt{\psi^2(X,t)+\phi^2(X,t)} \tag{۶۰-۴}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\psi(X,t)}{\phi(X,t)} \tag{۶۱-۴}$$

گره‌های انتخابی برای غنی‌سازی را می‌توان از مقادیر گره‌ای ψ و ϕ تعیین نمود. در یک المان مشخص، مقادیر کمینه و بیشینه‌ی مقادیر گره‌ای ψ روی گره‌های آن را با ψ_{min} و ψ_{max} نشان می‌دهیم. اگر $\phi<0$ و $\psi_{min}\psi_{max}\leq 0$، آنگاه ترک المان را برش داده و گره‌های المان بایستی با تابع H(x) غنی شوند.

به‌طور مشابه اگر ϕ_{min} و ϕ_{max} را به ترتیب مقادیر کمینه و بیشینه‌ی مقادیر گره‌ای ϕ روی گره‌های یک المان باشند، اگر $\phi_{min}\phi_{max}\leq 0$ و $\psi_{min}\psi_{max}\leq 0$ باشد آنگاه، نوک ترک درون آن المان قرار گرفته و گره‌های آن با تابع $B_l(r,\theta)$ غنی شوند.

تلفیق روش مجموعه تراز و X-FEM در شکل (۴-۲۰) نشان داده شده است. برای یک ترکیب مشخص، هر تکرار با آزمایش توابع مجموعه تراز در هر گره از المان و انتخاب گره‌هایی که نیازمند غنی‌سازی آغاز می‌شود. سپس این گره‌ها با تابع مناسب غنی‌شده و میدان تنش با X-FEM تعیین می‌شود. هنگامی که میدان تنش تعیین شد، ضرایب شدت تنش[۸۲] محاسبه شده و از این ضرایب جهت رشد ترک θ_c محاسبه می‌شود. سپس زاویه θ_c در به‌روزکردن توابع مجموعه تراز استفاده می‌شود. وقتی که توابع مجموعه تراز به‌روز شوند، این روند دوباره تکرار می‌شود.



شکل ۴-۲۰: تلفیق روش مجموعه تراز و X-FEM

۸۲ Stress Intensity Factors (SIF)

۴-۷- دیاگرام ورونی[۸۳] و مثلث‌بندی دلانی[۸۴]

دیاگرام ورونی و مثلث‌بندی دلانی یکی از اساسی‌ترین و مفیدترین ساختارهای هندسی است که یک مجموعه از نقاط نامنظم را تعریف می‌کند. برای ساده‌سازی و در جهت اهداف موردنظر از تئوری فضای اقلیدسی دوبعدی که قابل تعمیم در d بعد می‌باشد استفاده می‌کنیم. برای مثال مجموعه N که از m گره مجزا از هم $N=\{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_m\}$ در R^2 تشکیل شده را بررسی می کنیم. دیاگرام ورونی (دیاگرام مرتبه اول ورونی) مجموعه N، صفحه را به ناحیه‌های T_i (بسته و محدب یا نامحدود) تقسیم کرده است که هر ناحیه T_i با گره n_i همراه می باشد و دارای این شرط است که هر نقطه در T_i به n_i از هر گره $n_j \in N, j \neq i$ نزدیکتر است. نزدیکترین همسایگی[۸۵]، به عبارت دیگر T_i مکان هندسی نقاطی است که به گره n_i از هر گره دیگر نزدیکتر می‌باشد. نواحی T_i خانه‌های ورونی (چندضلعی ورونی) از n_i هستند. در اصطلاح ریاضی چندضلعی ورونی، T_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_i=\left\{x\in R^2 : d(x,x_i)<d(x,x_j)\forall j\neq i\right\} \qquad (۶۲-۴)$$

که فاصله اقلیدسی $d(x_i,x_j)$، فاصله میان x_i و x_j می باشد. چندضلعی ورونی برای گره A و دیاگرام ورونی برای مجموعه N، شامل ۷ گره به ترتیب در اشکال (۴-۲۱) و (۴-۲۲) نشان داده شده است. در شکل (۵-۱) چندضلعی ورونی T_i، برای گره A رسم شده است. برای رسم T_i از گره A به تمام گره ها خطی وصل کرده و عمود منصف این خط‌ها را رسم می‌کنیم، محل تقاطع عمود منصف‌ها چندضلعی ورونی گره

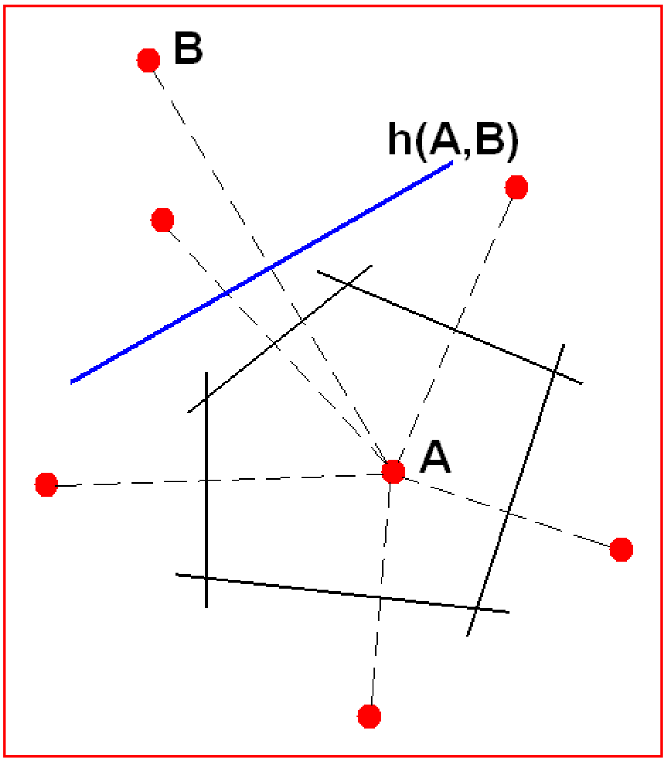
---

۸۳ Voronoi Diagram

۸۴ Delaunay Tessellation (DT)

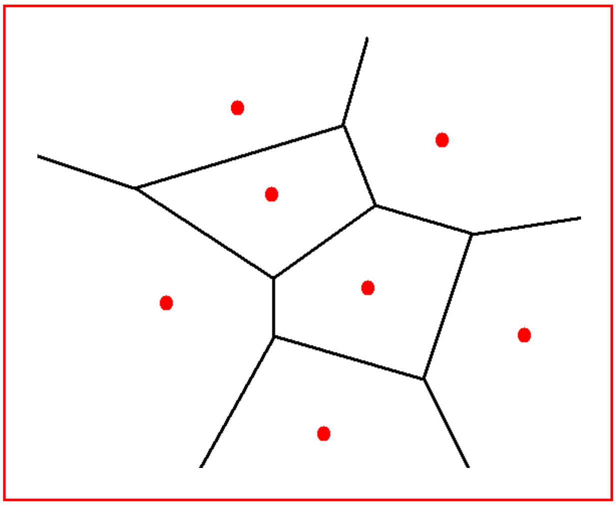
۸۵ Nearest Neighbor

A را تشکیل می‌دهند. در شکل (۴-۲۲) دیاگرام ورونی مجموعه N رسم شده است به این ترتیب که برای تمام گره‌های چندضلعی ورونی آن گره را رسم می‌کنیم، به مجموعه ایجاد شده دیاگرام ورونی مجموعه N گوییم. برای همه گره های n_i که داخل پوشش محدب[۸۶] هستند، چندضلعی ورونی بسته و محدب می باشد در حالیکه برای گره‌های قرار گرفته در مرز پوشش محدب چندضلعی نامحدود هستند. نزدیکترین همسایگی عامل اصلی شرح دیاگرام ورونی می‌باشد که در علوم طبیعی، فیزیک و مهندسی نیز کاربرد دارد.



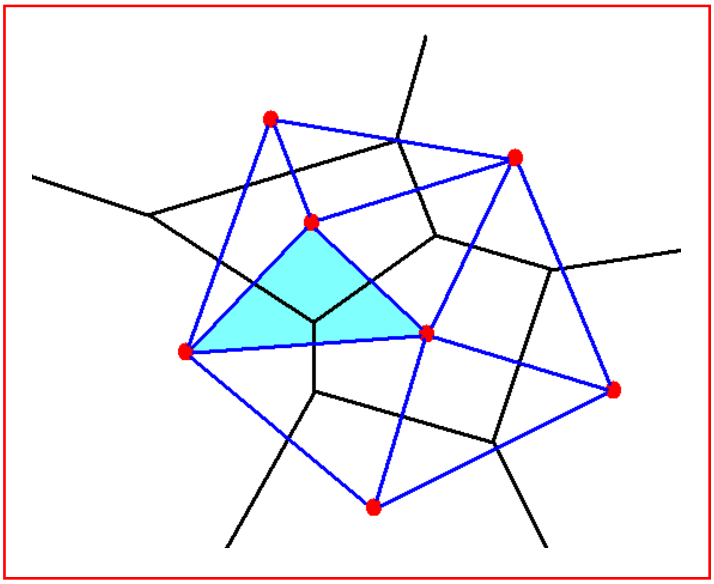
شکل ۴-۲۱: چندضلعی ورونی گره A

[۸۶] Convex hull



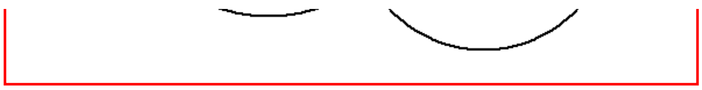
شکل ۴-۲۲: دیاگرام ورونی مجموعه N

مثلث‌بندی دلانی با کمک دیاگرام ورونی انجام می‌شـــود. برای رســـم مثلث دلانی، گره‌هایی را که چندضـــلعی ورونی آنها با هم یک مرز مشـــترک دارند به هم وصـــل می‌کنیم، مثلث‌های ایجاد شـــده همان مثلث‌های دلانی هستند که در شکل (۴-۲۳) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۲۳: مثلث بندی دلانی

یکی از ویژگی‌های مهم مثلث دلانی، معیار دایره محیطی است. اگر $\left(n_j, n_k, n_l\right)$ معرف مثلث‌بندی دلانی (DT) از مجموعه گره باشـــد، آنگاه دایره محیطی مثلث دلانی شـــامل گره دیگری از مجموعه N نمی‌باشـد. در درون‌یابی همســایگی طبیعی $(n-n)$، این دوایر محیطی به عنوان دوایر محیطی همســایگی طبیعی $(n-n)$ شناخته می‌شوند و مرکز این دوایر محیطی یک رأس چندضلعی ورونی می‌باشند. در شکل (۴-۲۴)، دوایر محیطی همســایگی طبیعی $(n-n)$، همراه با مثلث‌بندی دلانی (DT)، نشــان داده شــده است.



شکل ۴-۲۴: دوایر محیطی همسایگی طبیعی (n-n) همراه با مثلث‌های دلانی

فصل ۵

کاربرد روش اجزاء محدود توسعه‌یافته در شبیه‌سازی رشد و گسترش ترک

در این فصل، تأکید اصلی روی نتایج انجام غنی‌سازی ناپیوسته برای شبیه‌سازی رشد ترک به کمک روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM) می‌باشد. توانایی مدل‌سازی رشد ترک بدون شبکه‌بندی دوباره و بررسی مسیرهای رشد ترک مختلف به کمک یک شبکه ثابت مورد بحث قرار گرفته است.

۵-۱- مرور قوانین رشد ترک

در این بخش، شبیه‌سازی رشد ترک شبه‌استاتیکی[۸۷] در دامنه‌های دوبعدی با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته معرفی شده است. از آنجا که ترک بطور مستقل از شبکه تعریف شده است، هیچ‌گونه شبکه‌بندی دوباره‌ای در هر مرحله از رشد ترک موردنیاز نیست.[۲۳]

در فرمول‌سازی حاضر، ترک بصورت مجموعه‌ای از قطعات خط مستقیم نمایش داده شده است (شکل ۵-۱). بدین منظور ضروری است تا زاویه رشد ترک θ_c و طول رشد آن Δa برای هر قطعه جدید محاسبه شود.

برخی معیارهایی که برای تعیین امتداد رشد ترک پیشنهاد شده‌اند عبارتند از:[۱۶و۲۳]

- عمود بر امتداد بیشینه تنش حلقوی[۸۸] (اردوگان[۸۹] و سی[۹۰]، ۱۹۷۴)،
- عمود بر امتداد کمینه انرژی کرنشی (سی، ۱۹۷۴)،

---

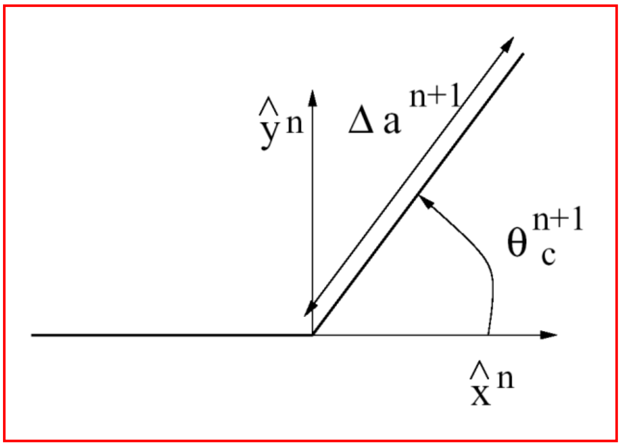
[۸۷] quasi static

[۸۸] hoop stress

[۸۹] Erdogan

[۹۰] Sih

- در امتدادی که K_{II} روی زاویه گسترش ترک به صفر میل کند (گلداستین[۹۱] و سالگانیک[۹۲]، ۱۹۷۴)،
- در امتدادی که بیشینه نرخ آزادسازی انرژی می‌باشد (نیسمر[۹۳]، ۱۹۷۵).



شکل ۵-۱: نمایش قطعات ترک

در این پایان‌نامه، معیار بیشــینه تنش حلقوی را استفاده می‌کنیم که بیان می‌دارد ترک از نوک آن در امتداد θ_c که تنش پیرامونی[۹۴] (حلقوی) $\sigma_{\theta\theta}$ بیشــینه اســت، گســترش می‌یابد. تحت بارگذاری مختلط عمومی[۹۵]، مجانب[۹۶] نزدیک نوک تنش پیرامونی و تنش برشی بصورت زیر است:

---

[۹۱] Goldstein

[۹۲] Salganic

[۹۳] Nuismer

[۹۴] circumferential

[۹۵] general mixed-mode loadings

[۹۶] asymptotic

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}3\cos(\theta/2)+\cos(3\theta/2)\\ \sin(\theta/2)+\sin(3\theta/2)\end{Bmatrix}$$
$$+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}-3\sin(\theta/2)-3\sin(3\theta/2)]\\ \cos(\theta/2)+3\cos(3\theta/2)]\end{Bmatrix} \qquad (۱-۵)$$

تنش پیرامونی در امتداد گســترش ترک یک تنش اصــلی است بنابراین، زاویه بحرانی θ_c که بیانگر امتداد شــعاعی گسترش ترک می‌باشد را می‌توان با قرار دادن مقدار تنش برشی $\sigma_{r\theta}$ برابر صفر در رابطه (۵-۱) تعیین کرد. بعد از چند دستکاری کوچک، عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos(\frac{\theta}{2})\left[\frac{1}{2}K_I\sin(\theta)+\frac{1}{2}K_{II}(3\cos(\theta)-1)\right]=0 \qquad (۲-۵)$$

این رابطه منجر به رابطه‌ای می‌شــود که زاویه گســترش ترک θ_c را در سیستم مختصات نوک ترک تعیین می‌نماید:

$$K_I\sin(\theta_c)+K_{II}(3\cos(\theta_c)-1)=0 \qquad (۳-۵)$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\theta_c=2\arctan\frac{1}{4}\left(K_I/K_{II}\pm\sqrt{(K_I/K_{II})^2+8}\right) \qquad (۴-۵)$$

ریشــه‌ای که به ازای آن مقدار $\sigma_{\theta\theta}$ در رابطه (۷-۱) مثبت است، امتداد رشد ترک می‌باشد. یک مقدار بسیار مناسب برای تعیین مقدار θ_c که توسط سو[۹۷] (۲۰۰۲) ارائه شده است، عبارتست از:

$$\theta_c=2\arctan\left[\frac{-2K_{II}/K_I}{1+\sqrt{1+8(K_{II}/K_I)^2}}\right] \qquad (۵-۵)$$

۹۷ Suo

با توجه به مقادیر مختلف K_{II}، ترک تحت زوایای مختلفی رشـد خواهد کرد. اگر $K_{II}=0$ باشد آنگاه، $\theta_c=0$ خواهد شد. این حالت اصطلاحاً مد خالص I نامیده می‌شود. اگر $K_{II}>0$ باشد آنگاه، $\theta_c<0$ و اگر $K_{II}<0$ باشد آنگاه، $\theta_c>0$ خواهد شد.

طول گسترش ترک را می توان یا با قانون پاریس[۹۸] تعیین نمود و یا اینکه یک مقدار از پیش تعیین شده را برای آن انتخاب کرد. در این پایان‌نامه، راه دوم انتخاب شده است.

پاریس و اردوگان[۹۹] در سـال ۱۹۶۳ قانونی برای رشـد ترک ناشـی از خسـتگی پیشـنهاد کردند که افزایش طول ترک را به تعداد دوره‌های بارگذاری و محدوده‌ی ضریب شدت تنش مربوط می‌سازد:

$$\Delta a = C(\Delta K)^m \Delta N \tag{۶-۵}$$

که پارامترهای C و m از ثابت‌های ماده بوده و به‌طور تجربی از آزمایش‌های خسـتگی بدست می‌آیند. در بالا ΔK اختلاف بین ضـرایب شـدت تنش کمینه و بیشینه (K^{max}-K^{min}) در طول تعداد دوره‌های ΔN می‌باشد. به‌طور کلی سـه ناحیه ی مشـخصه رشد ترک ناشی از خستگی در مواد وجود دارد که در شکل (۵-۲) نشان داده شـده است. ناحیه A، با یک مقدار آستانه (حدی) از مقدار ضریب شدت تنش آغاز می‌شود. تا زمانی که شیب این نمودار در این ناحیه به یک مقدار ثابت نرسیده است، ترک رشد نخواهد کرد. ناحیه B، ناحیه‌ای را نشـان می‌دهد که نسـبت $\ln(da/dN)$ و $\ln(\Delta K)$ خطی بوده و در این ناحیه، قانون پاریس برای تعیین رشـد ترک ناشـی از خسـتگی حاکم است. ناحیه C، شیبی را نشان می دهد که افزایش کوچکی در محدوده ضریب شدت تنش ΔK، منجر به افزایش زیاد در پیشرفت و رشد ترک در هر سیکل da/dN می‌شود.

---

۹۸ Paris law

۹۹ Paris and Erdogan

تحت بارگذاری‌های مختلط عمومی، مقدار ΔK با یک ضـــریب شـــدت تنش مد I معادل، K_1^{eq} جایگزین می‌شود. ضریب شدت تنش مد I معادل به کمک زاویه رشد θ_c در رابطه (۵-۱) برای تنش حلقوی $\sigma_{\theta\theta}$ بدست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta_c) = \frac{K_1^{eq}}{\sqrt{2\pi r}} \qquad (۵-۷)$$

که پس از چند دستکاری کوچک خواهیم داشت:

$$K_1^{eq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - K_{II}\,\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)\sin\left(\theta_c\right) \qquad (۵-۸)$$

این مقادیر را می توان با مقادیر بحرانی برای مصـالح (در صورت وجود) مقایسه کرده و نتیجه گرفت که رشد ترک زمانی رخ می‌دهد که:

$$K_1^{eq} \geq K_c \qquad (۵-۹)$$

که K_c ضریب شدت تنش بحرانی یا طاقت شکست[۱۰۰] ماده می‌باشد.

روند شـبیه‌سـازی رشد ترک با روش اجزاء محدود توسعه‌یافته در شکل (۵-۳) به‌طور خلاصه آمده است. بایستی توجه داشت که پس از رشد ترک، نوع غنی‌سازی برخی از گره‌ها تغییر می‌یابد. برای مثال یک المان نوک پس از رشد ترک ممکن است به یک المان درونی تغییر یابد.

۵-۲- برنامه رایانه‌ای به روش اجزاء محدود توسعه‌یافته

[۱۰۰] fracture toughness

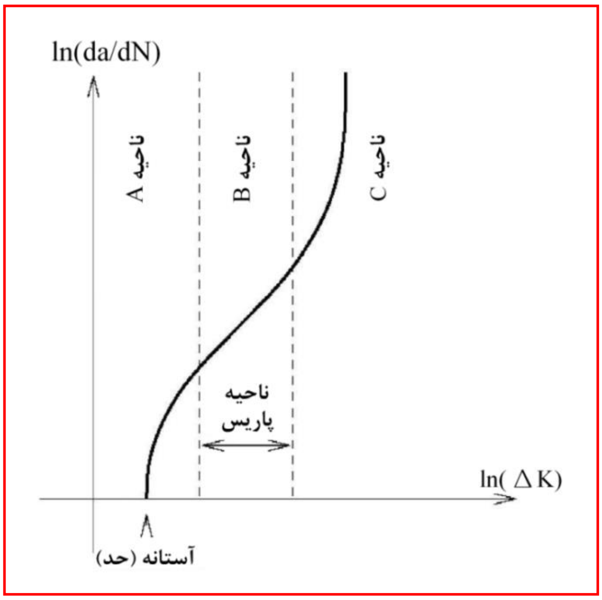
در این بخش، برنامه به‌کار رفته در این پایان‌نامه برای حل مسائل شبیه‌سازی ترک و رشد آن به کمک روش اجزاء محدود توسعه‌یافته توضیح داده شده است. دلیل استفاده از نرم‌افزار Matlab، قدرت و توانایی بالای این نرم‌افزار در استفاده و به‌کارگیری ماتریس‌ها می‌باشد.

۵-۲-۱- مقدمه

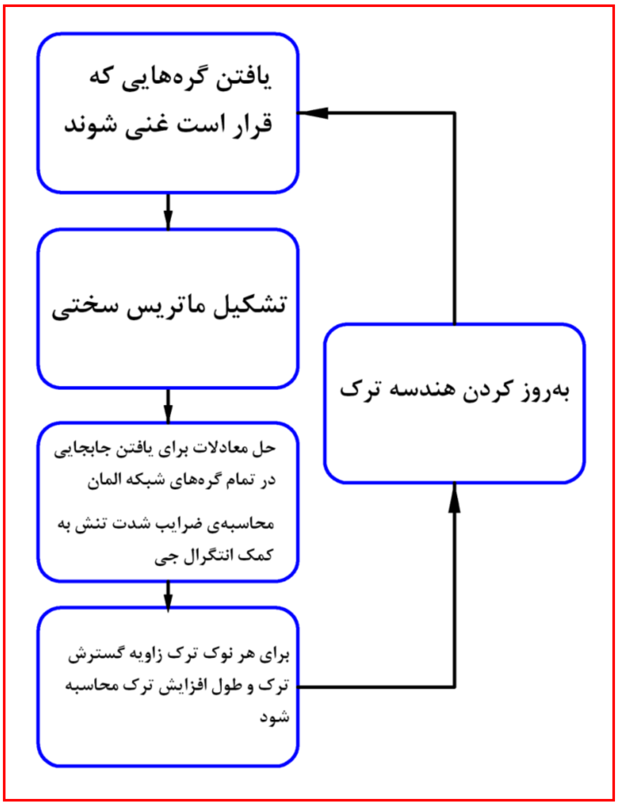
روش‌های عددی نقش مهمی در حل مسائل مختلف ایفا می‌کنند. با افزایش توانایی رایانه‌ها، هم از لحاظ نرم‌افزاری و هم از لحاظ سخت‌افزاری، دامنه‌ی مسائلی که توسط این روش‌ها قابل حل بودند نیز افزایش یافت. بدین منظور توسعه‌ی نرم‌افزارهایی که بتوانند در حل این مسائل سودمند باشند به یکی از چالش‌های اصلی تبدیل شد. هدف این پایان‌نامه، کاربرد یک برنامه اجزاء محدود غنی‌شده‌ی قابل استفاده برای شبیه‌سازی ترک و رشد آن می‌باشد.

۵-۲-۲- شرح برنامه رایانه‌ای روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM)

برنامه (های) اصلی روش اجزاء محدود توسعه یافته در قالب چند مثال متفاوت آمده است که البته ساختار کلی تمامی این برنامه‌ها یکی است. علاوه بر این برنامه‌های اصلی، تعدادی توابع دیگر برای استفاده در این برنامه‌ها ایجاد شده‌اند که در ادامه به برخی از مهم‌ترین آنها اشاره خواهیم نمود.



شکل ۵-۲: نمایش شماتیک رشد ترک پاریس



شکل ۵-۳: نمودار روش X-FEM برای شبیه‌سازی ترک

ساختار برنامه شامل قسمت‌های اساسی زیر است:

- Input data : ورودی‌های برنامه که شــامل هندســه مدل، هندســه ترک، بارگذاری، تعداد المان‌های شبکه، مشخصات ماده و در مجموع، تمامی مشخصات موردنیاز برای معرفی مدل را بیان می‌دارد.
- meshRectangularRegion : بـه کمـک این تـابع مـاتریس هـای node و element که به ترتیب بیانگر مختصــات تمامی گره‌ها و شــماره‌ی گره‌های مربوط به هر المان هســتند، محاسبه می‌شود. این تابع بصورت زیر می‌باشد:

```
function [node,element] = meshRectangularRegion(pt1, pt2, pt3, pt4,
nnx,nny,elemType)
numx = nnx-1;
numy = nny-1;
switch elemType
 case 'PARTICLE'
       node=square_node_array(pt1,pt2,pt3,pt4,nnx,nny);
       inc_u=1;
       inc_v=nnx;
       node_pattern=[ 1 2 nnx+2 nnx+1 ];
       [element]=make_elem(node_pattern,numx,numy,inc_u,inc_v);
   case 'Q4'
       node=square_node_array(pt1,pt2,pt3,pt4,nnx,nny);
       inc_u=1;
       inc_v=nnx;
       node_pattern=[ 1 2 nnx+2 nnx+1 ];
       [element]=make_elem(node_pattern,numx,numy,inc_u,inc_v);
   case 'Q9'
       node=square_node_array(pt1,pt2,pt3,pt4,nnx,nny);
       inc_u=2;
       inc_v=2*nnx;
       node_pattern=[ 1 3 2*nnx+3 2*nnx+1 2 nnx+3 2*nnx+2 nnx+1 nnx+2 ];
       [element]=make_elem(node_pattern,numx,numy,inc_u,inc_v);
   case 'T3'
       node=square_node_array(pt1,pt2,pt3,pt4,nnx,nny);
       node_pattern1=[ 1 2 nnx+1 ];
       node_pattern2=[ 2 nnx+2 nnx+1 ];
       inc_u=1;
       inc_v=nnx;
       element=[make_elem(node_pattern1,numx,numy,inc_u,inc_v);
       make_elem(node_pattern2,numx,numy,inc_u,inc_v)];
   otherwise
       error('For now, only PARTICLE, Q4, Q9 and T3 are supported by the mesh
generator');
end
```

- level set initialization : گره‌های غنی‌شونده در قالب دو ماتریس split_nodes و tip_nodes که به ترتیب بیانگر گره‌های درونی و گره‌های نوک می‌باشند، تعیین می‌شوند.
- plot_mesh : با توجه به ماتریس‌های node و element و نیز با توجه به نوع المان انتخابی (Q4، Q9، T3 و ...) دامنه‌ی مورد مطالعه و شبکه‌بندی آن را نمایش می‌دهد.
- quadrature : این تابع یک بردار ستونی n×1 به نام W که شامل وزن‌ها و یک ماتریس n×dim به نام Q که شامل نقاط گاوسی است را تولید می‌کند. که n بیانگر تعداد نقاط گاوسی است.
- discontQ4quad و disTipQ4quad : به کمک این دو تابع و نیز به کمک دو تابع delaunay و tricheck که از توابع درونی برنامه‌ی Matlab هستند، المان‌های درونی و المان نوک مثلث‌بندی شده و مقادیر ماتریس‌های W و Q برای این مثلث‌ها محاسبه می‌شود.
- lagrange_basis : به کمک این تابع و با توجه به نوع المان انتخابی، توابع شکل گره‌ای و نیز ماتریس B (ماتریس کرنش-جابجایی) تعیین می‌شود.
- xfemBmatrix : به کمک این تابع، ماتریس B برای گره‌های غنی‌شده تعیین می‌شود.
- jdomain : به کمک این تابع، المان‌هایی که بایستی به کمک آنها انتگرال جی محاسبه شود، تعیین می‌شوند.

در ابتدای برنامه، مقادیر ورودی برنامه از جمله هندسه‌ی مقطع، هندسه‌ی ترک، مشخصات ماده، تعداد المان‌های شبکه و دیگر ورودی‌های موردنیاز تعیین می‌شوند. به کمک این مقادیر، ماتریس‌های node و element را می توان به کمک تابع meshRectangularRegion یافت. سپس به کمک یک الگوریتم نسبتاً ساده، مقادیر توابع φ و ψ برای تمام گره‌ها محاسبه شده و به کمک آنها، المان‌های درونی ترک و المان نوک

تعیین می‌شـوند. با داشتن این المان‌ها، گره‌های غنی‌شونده‌ی درونی، split_nodes، و گره‌های غنی‌شونده‌ی نوک، tip_nodes، یافت می‌شوند. در این حالت تعداد مجهولات کلی عبارت خواهند بود از:

```
% Each split node is enriched by ONE function, H(x)
% Each tip node is enriched by FOUR functions, F_i(x)
% then, the total dofs is :
% total dof = numnode*nsd + numsplitnode*1*nsd + numstipnode*4*nsd
% here, two dimension, nsd = 2

total_unknown = numnode*2 + size(split_nodes,1)*1*2 +  size(tip_nodes,1)*4*2;
```

وزن‌ها و نقاط گاوســی برای تمام المان‌ها از جمله المان‌های درونی و المان‌های نوک به کمک توابع quadrature، discontQ4quad و disTipQ4quad تعیین می شــوند. با یافتن ماتریس سختی $\mathbf{K}$ و با داشتن بردار نیرو $\mathbf{f}$، بردار جابجایی $\mathbf{u}$ محاســبه می شود. در پایان برای یافتن مقادیر ضرایب شدت تنش، المان هایی که بایســتی به کمک آنها انتگرال تعاملی محاســبه شــود، تعیین می شــوند. با داشتن این المان ها و به کمک انتگرال تعاملی، مقادیر ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شود.

فصل ۶

مثال‌های عددی

این فصل از دو قسمت تشکیل شده است:

بخش اول، نتایج عددی محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش (SIF)[101] برای مسائل مکانیک شکست الاستیک خطی دوبعدی عددی را نشان می‌دهد. همگرایی این مقادیر ضرایب شدت تنش (SIF) با ریزتر شدن شبکه (تعداد المان‌های بیشتر) و نیز تأثیر برخی از عوامل وارد در مسئله مورد مطالعه قرار گرفته است.

بخش دوم مثال‌های عددی شبیه‌سازی رشد ترک را معرفی می‌کند. شبکه‌های مستطیلی مورد استفاده در این مثال‌ها توسط نرم‌افزار Matlab ایجاد شده‌اند. پردازش‌های اولیه مانند جابجایی و نمایش تنش نیز با نرم‌افزار Matlab صورت گرفته است.[102]

۶-۱- مسائل ترک ساکن

در تمام مثال‌های بعدی، شرایط کرنش صفحه‌ای[103] فرض شده است. محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش به کمک شکل دامنه‌ای انتگرال تعاملی[104] صورت گرفته است.

۶-۱-۱- صفحه‌ی گسترده (بی نهایت)[105]

---

[101] Stress Intensity Factors

[102] این برنامه بر اساس روش کار آقای Nguen Vinh Phu در پایان‌نامه دکترای ایشان تحت عنوان An object oriented approach to eXtended Finite Element Method with applications to fracture mechanics نوشته شده است.

[103] Plane Strain

[104] domain form of the interaction integral

[105] Infinite plate

به عنوان اولین مثال در این بخش، یک صفحه‌ی گسترده شامل یک ترک مستقیم به طول ۲a که تحت تنش دوردست σ از ترک می‌باشد را در نظر می‌گیریم (شکل (۶-۱) را ببینید).

در طول ABCD مقادیر جابجایی در دو امتداد x و y و بر حسب مختصات قطبی r و θ واقع در نوک ترک بصورت زیر می‌باشد:

$$u_x = \frac{2(1+\nu)}{\sqrt{2\pi}}\frac{K_I}{E}\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$u_y = \frac{2(1+\nu)}{\sqrt{2\pi}}\frac{K_I}{E}\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (۶-۱)$$

که $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ ضریب شدت تنش، ν ضریب پواسون و E مدول یانگ می باشد. ABCD مربعی با اضلاع ۱۰×۱۰ mm² بوده و *a*=۱۰ mm، E=۱۰⁷ N/mm²، ν=۰/۳ و σ=۱۰⁴ N/mm². هندسه و شبکه اجزا محدود دامنه ABCD در شکل (۶-۱) نشان داده شده است. این شبکه مستطیلی شامل ۱۹×۱۹=۳۶۱ المان بوده و همان‌طور که می‌توان مشاهده کرد، شبکه بر ترک منطبق نمی‌باشد. تغییر مکان گره‌های لبه‌های پایین، راست و بالا با معادله‌ی (۶-۱) تعیین شده‌اند.

مربع‌سازی گاوس[۱۰۶] برای روش X-FEM با المان‌های چهارگوش چهارگره‌ای (Q۴)[۱۰۷] بصورت زیر است (شکل ۶-۲):

- المان‌های بدون غنی‌سازی: چهار نقطه گاوسی (GP)[۱۰۸]
- المان‌های قسمتی غنی‌شده[۱۰۹] نوک: شانزده نقطه گاوسی

[۱۰۶] Gauss quadrature

[۱۰۷] four-noded quadrilateral elements

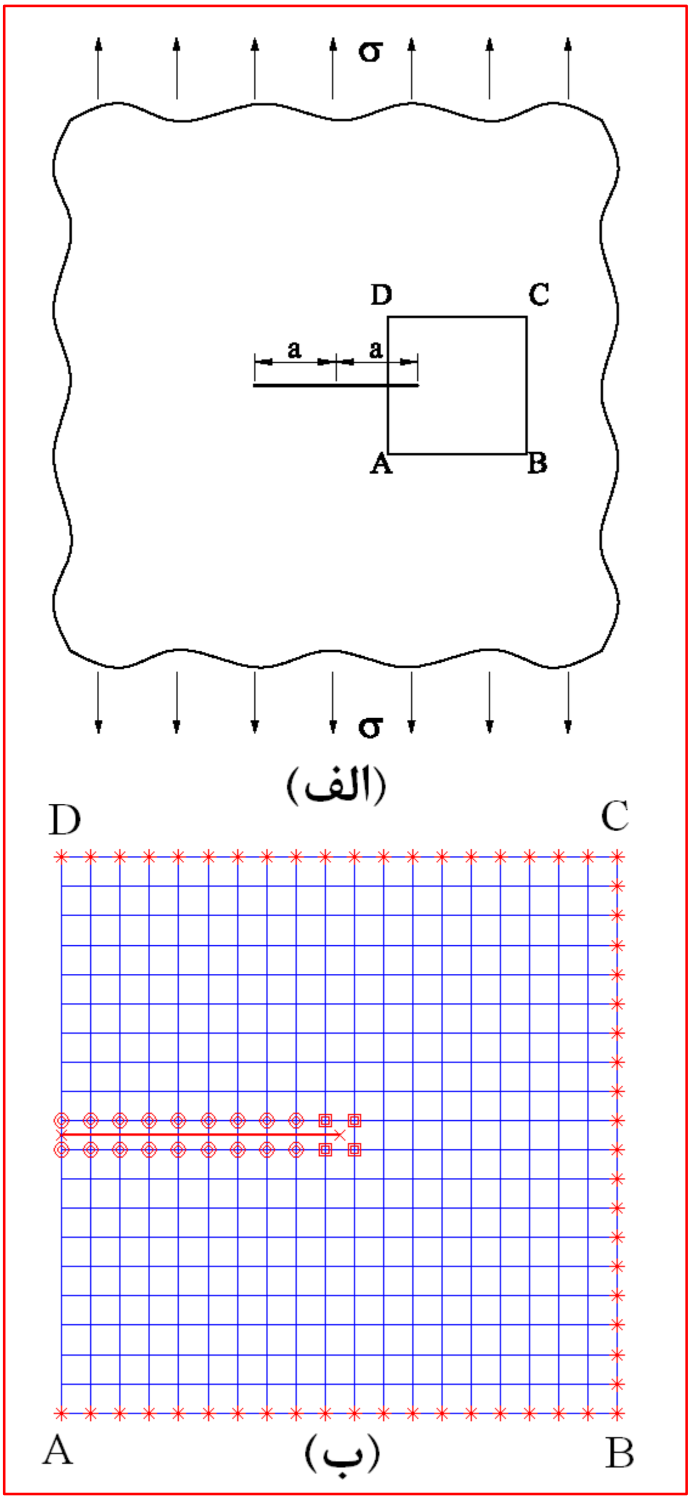
[۱۰۸] Gauss Point

[۱۰۹] partially enriched – blending

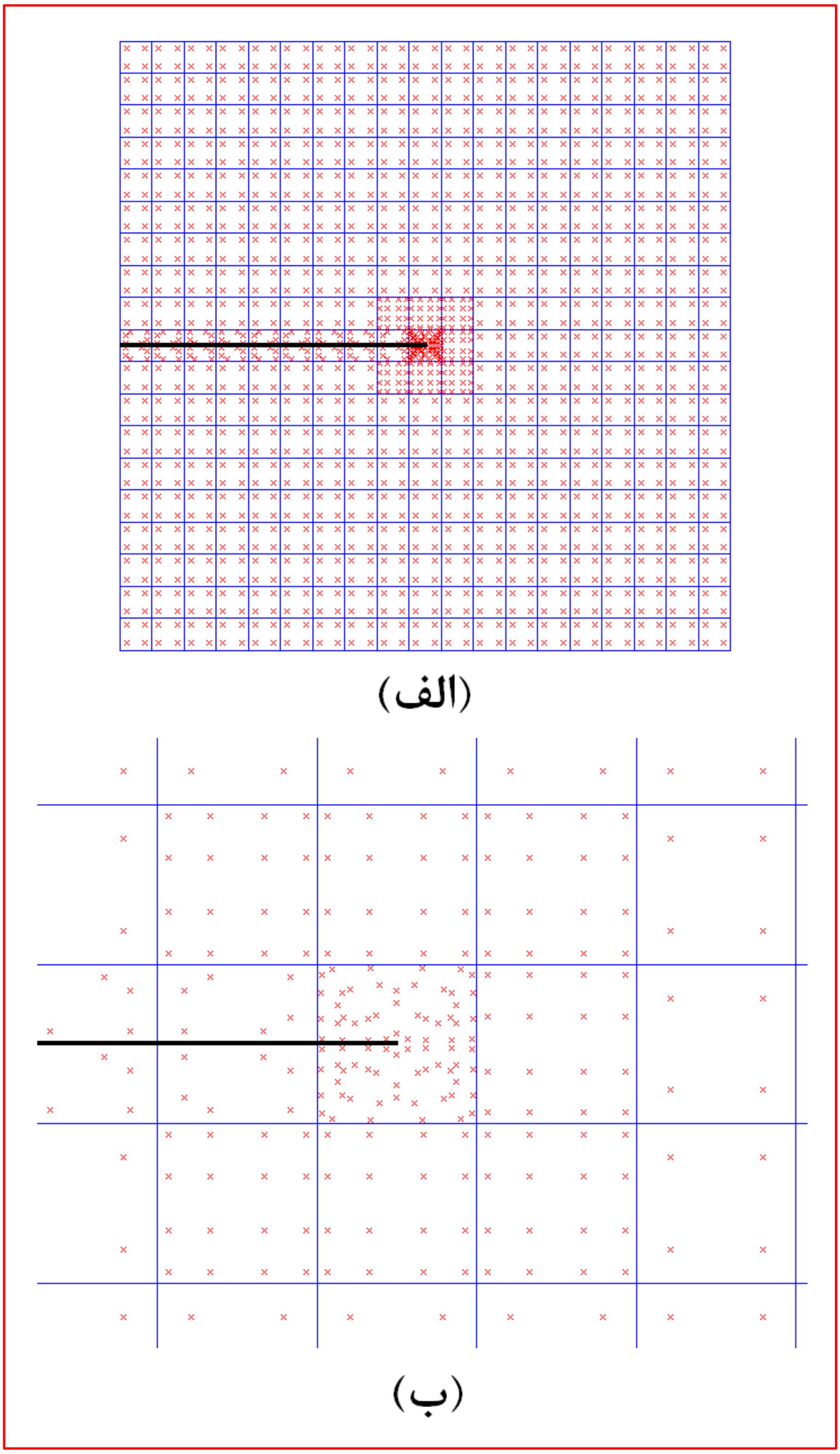
- المان‌های قسمتی غنی‌شده درونی[۱۱۰]: چهار نقطه گاوسی
- المان‌های کامل غنی‌شده نوک: ۱۳ نقطه در هر مثلث و در مجموع ۷۸ نقطه گاوسی (شکل ۶-۳)
- المان‌های کامل غنی‌شده درونی: برای هر مثلث ۳ نقطه و در مجموع ۱۲ نقطه گاوسی

بایستی توجه داشت که در موارد فوق، منظور از المان‌های قسمتی غنی‌شده، المان‌هایی است که برخی از گره‌های آن غنی شده و برخی دیگر غنی نشده‌اند. این المان‌ها در شکل (۶-۴) به خوبی نشان داده شده‌اند.

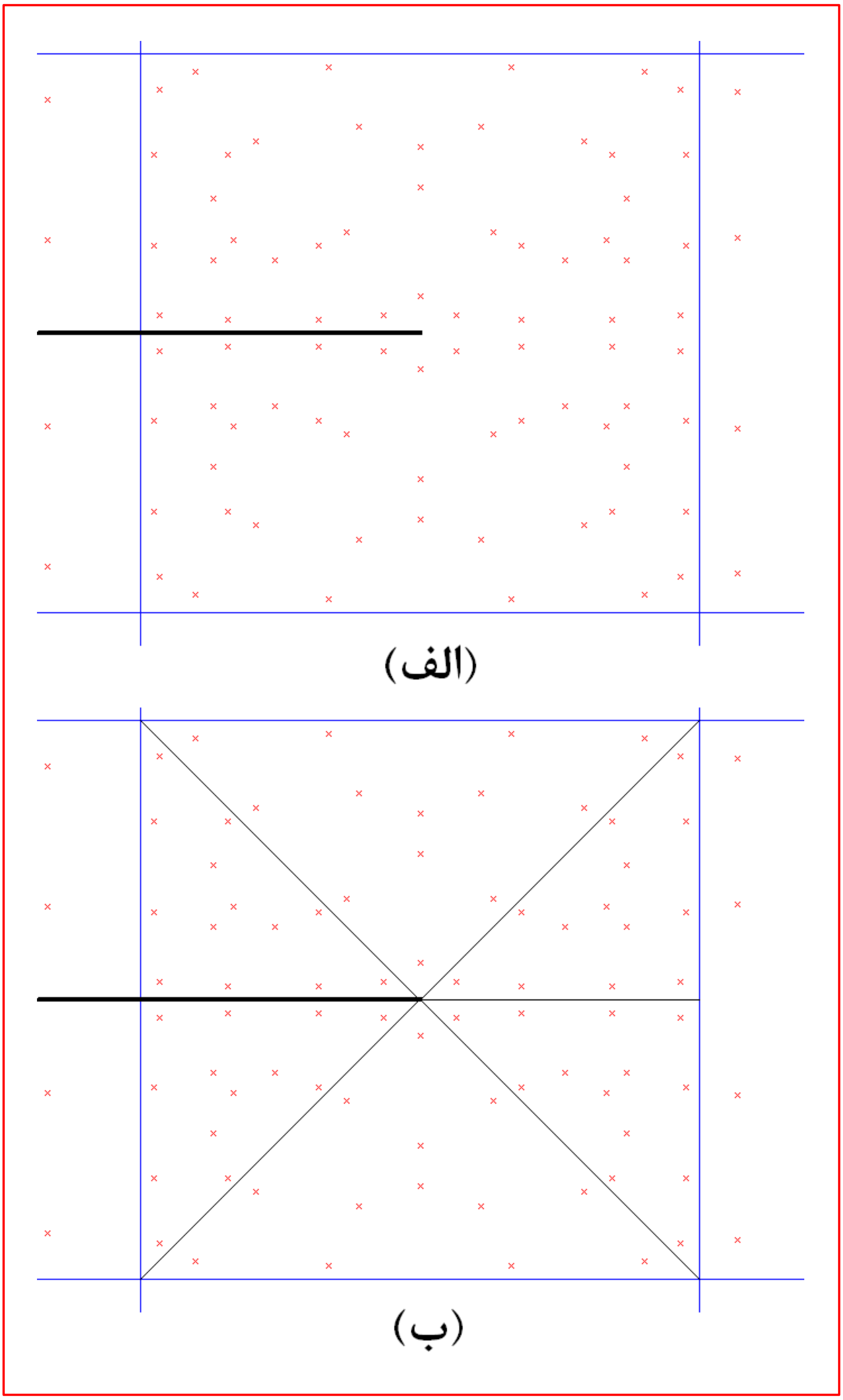
[۱۱۰] Split



شکل ۶-۱: صفحه‌ی گسترده ترک خورده تحت تنش: (الف) هندسه و بارهای وارده؛ (ب) گسسته‌سازی در اطراف نوک ترک، گره‌هایی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع پله‌ای و گره‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع شاخه‌ای غنی شده‌اند.



شکل ۶-۲: نقاط گاوسی مورد استفاده در محاسبه ماتریس سختی در روش عددی



شکل ۶-۳: نقاط گاوسی مورد استفاده در المان نوک

برای محاسبه‌ی انتگرال تعاملی، ۵۲ نقطه گاوسی برای المان‌های بریده‌شده با ترک و برای المان‌های بریده‌نشده ۹ نقطه گاوسی استفاده شده است.

تغییرشـکل بدسـت آمده با این روش در شـکل (۶-۵) نمایش داده شـده و با تغییرشکل‌های واقعی مقایسه شده است.

ضـرایب شـدت تنش، با اسـتفاده از شکل دامنه‌ای انتگرال تعاملی محاسبه شده‌اند. اندازه‌ی دامنه با فاصـله‌گذاری شـبکه محلی در نوک ترک مشخص می‌شود: $r_d = r_k\ h_{local}$: h_{local} که r_k یک ضریب عددی و h_{local} ریشـه‌ی دوم مسـاحت المان نوک می‌باشـد. مقادیر نرمالایز شـده‌ی ضـریب شـدت تنش برای مقادیر مختلف r_k در جدول (۶-۱) آمده اسـت. با توجه به این نتایج درمی‌یابیم که اگر اندازه‌ی دامنه کوچک باشـد یعنی $r_k \leq 2$، مقادیر ضـرایب شـدت تنش متناظر نادرسـت می‌باشـند. این امر به واسطه‌ی تکینگی در نوک ترک می‌باشـــد. هنگامی که اندازه دامنه به اندازه کافی بزرگ باشـــد، $r_k > 2$، تأثیر تکینگی کوچک بوده و انتگرال جی[۱۱۱] مستقل از کنتور دامنه می‌باشد. در تمام مثال‌های بعدی از ضریب r_k=3 استفاده خواهیم کرد بنابراین هر گره‌ای درون دایره‌ای با مرکز نوک ترک و به شعاع $r_{enr}=3h_{local}$ با توابع شاخه‌ای[۱۱۲] غنی شده‌اند (شکل ۶-۶).

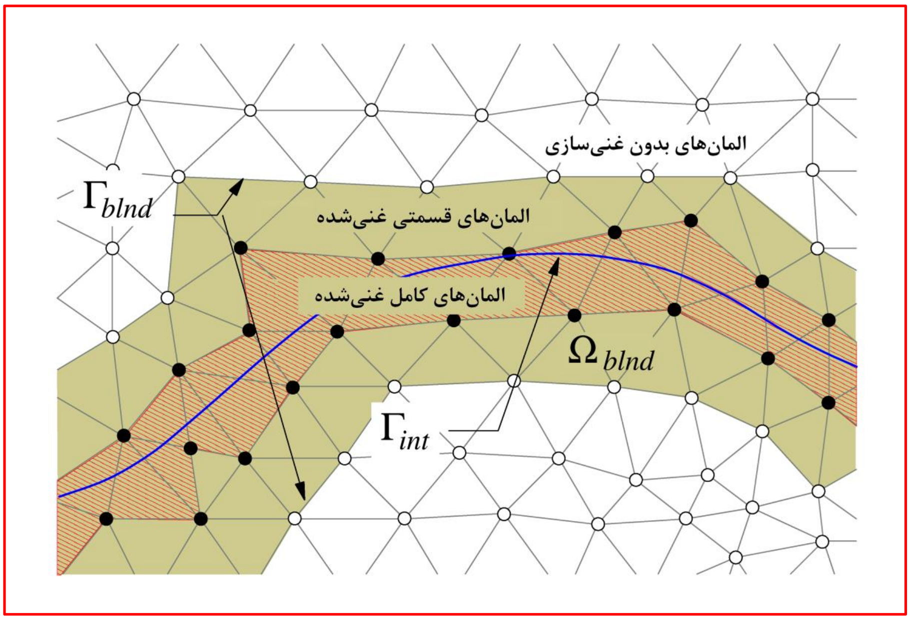
کانتورهای تنش فون مایسز[۱۱۳] در شکل (۶-۷) ترسیم شده است.

---

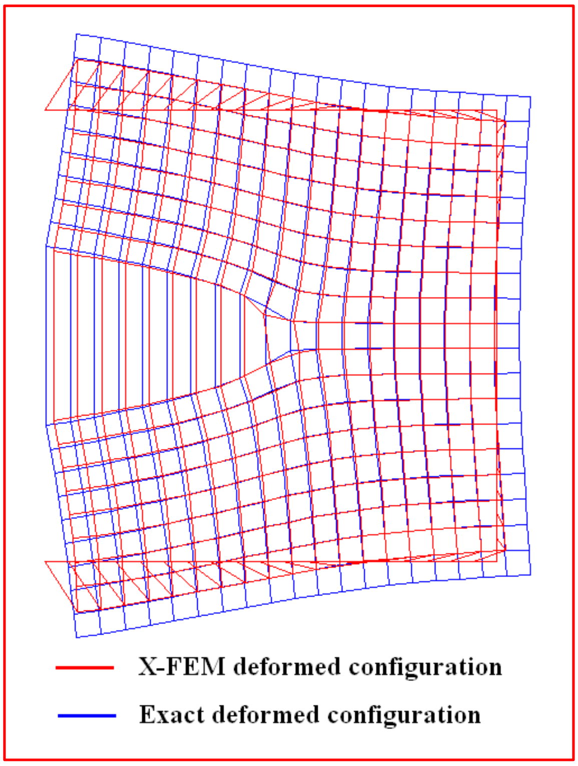
[۱۱۱] J-Integral

[۱۱۲] Branch functions

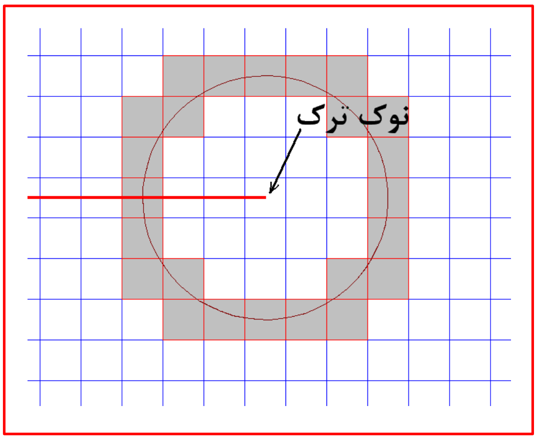
[۱۱۳] The von Mises stress contours



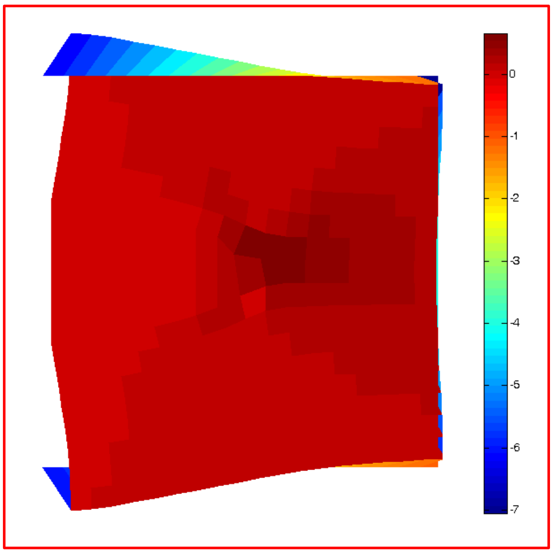
شکل ۶-۴: نمایش المان‌های قسمتی غنی‌شده



شکل ۶-۵: مقایسه شبکه تغییرشکل یافته



شکل ۶-۶: المان‌های مورد استفاده برای محاسبه‌ی انتگرال تعاملی



شکل ۶-۷: کانتورهای تنش فون مایسز

جدول ۶-۱: مقادیر K_I و مقادیر نرمالایزشده آن (K^{exact}=1.7725e+5).

r_k	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
K_I ($\times 10^5$)	1.7807	1.7298	1.7277	1.7281	1.7281	1.7284	1.7281
K_I/K^{exact}	1.0046	0.9759	0.9747	0.9750	0.9750	0.9751	0.9750

۶-۱-۲- ترک لبه‌ای در کشش[۱۱۴]

یک صـفحه با ابعاد $1\times2\ in^2$ تحت یک کشش $\sigma=1/0$ psi روی لبه‌های بالایی و پایینی مانند شکل (۶-۸) قرار دارد. جابجایی در امتداد محور y در گوشه پایین سمت راست صفر بوده و صفحه در گوشه پایین سـمت چپ گیردار شـده اسـت. مشـخصـات ماده $E=10^3$ psi و $\nu=0/3$ می‌باشـد. ضـریب شدت تنش مد I عبارتست از (تادا، پاریس و ایروین؛ ۱۹۷۳)[۱۱۵]:[۲۳]

$$K_I = F\left(\frac{a}{b}\right)\sigma\sqrt{\pi a} \tag{۶-۲}$$

که a طول ترک، b عرض صفحه و $F(a/b)$ تابعی تجربی است که برای $a/b \le 0/6$ برابر است با:

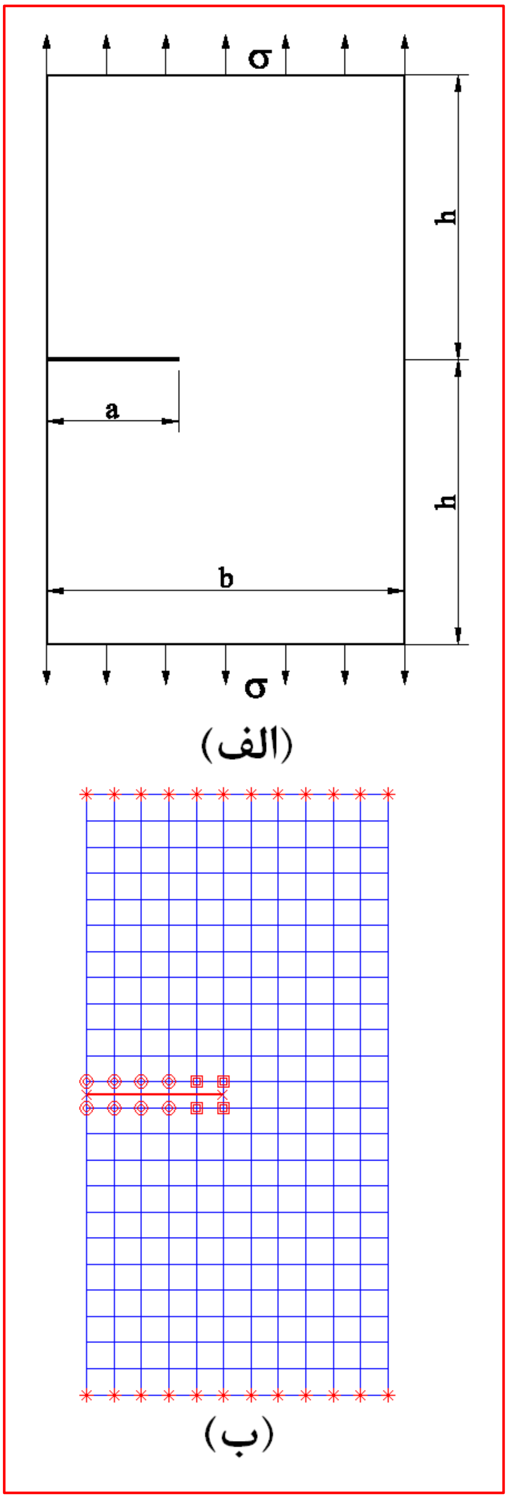
$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{b}\right) + 10.55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{b}\right)^4 \tag{۶-۳}$$

با $a=0/45$ in، ضریب شدت تنش برابر ۲/۸۷۶۶ خواهد شد.

ضریب شدت تنش برای گسسته‌سازی‌های مختلف دامنه و نیز مقادیر مختلف r_k محاسبه شده و در جدول (۶-۲) آمده است. بر اساس این جدول می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر ضرایب شدت تنش، مستقل از مقدار انتخابی ضـریب r_k می‌باشد. وجود المان‌های قسمتی غنی‌شده در کاهش دادن سرعت همگرایی نقش بسـزایی دارند. در مقابل، انتخاب یک شـبکه ریزتر میزان درسـتی مقادیر ضرایب شدت تنش را افزایش داده است.

[۱۱۴] Edge crack in tension

[۱۱۵] Tada, Paris, and Irwin (1973)



شکل ۶-۸: ترک لبه‌ای تحت کشش: (الف) هندسه و بارهای وارده؛ (ب) گسسته‌سازی در اطراف نوک ترک، گره‌هایی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع پله‌ای و گره‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع شاخه‌ای غنی شده‌اند.

جدول ۶-۲: مقادیر K_I و مقادیر نرمالایزشده آن برای گسسته‌سازی‌های مختلف

Elements No.	SIFs	r_k						
		1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5

11×23= 253	K_I	2.8115	2.8077	2.7758	2.7756	2.7733	2.7738	2.7734
	K_I/K^{exact}	0.9772	0.9758	0.9648	0.9648	0.9639	0.9641	0.9639
23×43= 1081	K_I	2.8699	2.8388	2.8364	2.8331	2.8347	2.8342	2.8342
	K_I/K^{exact}	0.9975	0.9867	0.9858	0.9847	0.9852	0.9851	0.9851
35×71= 2485	K_I	2.9257	2.8580	2.8588	2.8593	2.8572	2.8582	2.8577
	K_I/K^{exact}	1.0169	0.9933	0.9936	0.9938	0.9930	0.9934	0.9932

۶-۱-۳- ترک لبه‌ای تحت تنش برشی[116]

یک صفحه در طول لبه پایینی خود گیردار شده و تحت یک تنش برشی τ=۱/۰ psi روی لبه بالایی خود می‌باشد (شکل (۶-۹) را ببینید). مشخصات ماده E=۳×۱۰[۷] psi و ν=۰/۲۵ می‌باشد. ضرایب شدت تنش عبارتند از (جی یائو و کورتن؛ ۱۹۸۰)[117]:[23]

$$K_I = 34.0 \quad psi\sqrt{in}$$
$$K_{II} = 4.55 \quad psi\sqrt{in} \qquad (۴-۶)$$

در این مثال تأثیر ریزترشدن شبکه مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور دو شبکه‌ی ۱۳×۲۹=۳۷۷ و ۲۷×۵۹=۱۵۹۳ المانی مورد استفاده قرار گرفته است. مقادیر ضرایب شدت تنش و مقادیر نرمالایزشده آنها در جدول (۶-۳) آمده است.

جدول ۶-۳: مقادیر K_I و K_{II} مقادیر نرمالایزشده آنها برای گسسته‌سازی‌های مختلف

Elements No.	SIFs	r_k					
		1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
	K_I	33.3618	32.3569	32.2739	32.2659	32.2529	32.2609

[116] Edge crack under shear stress

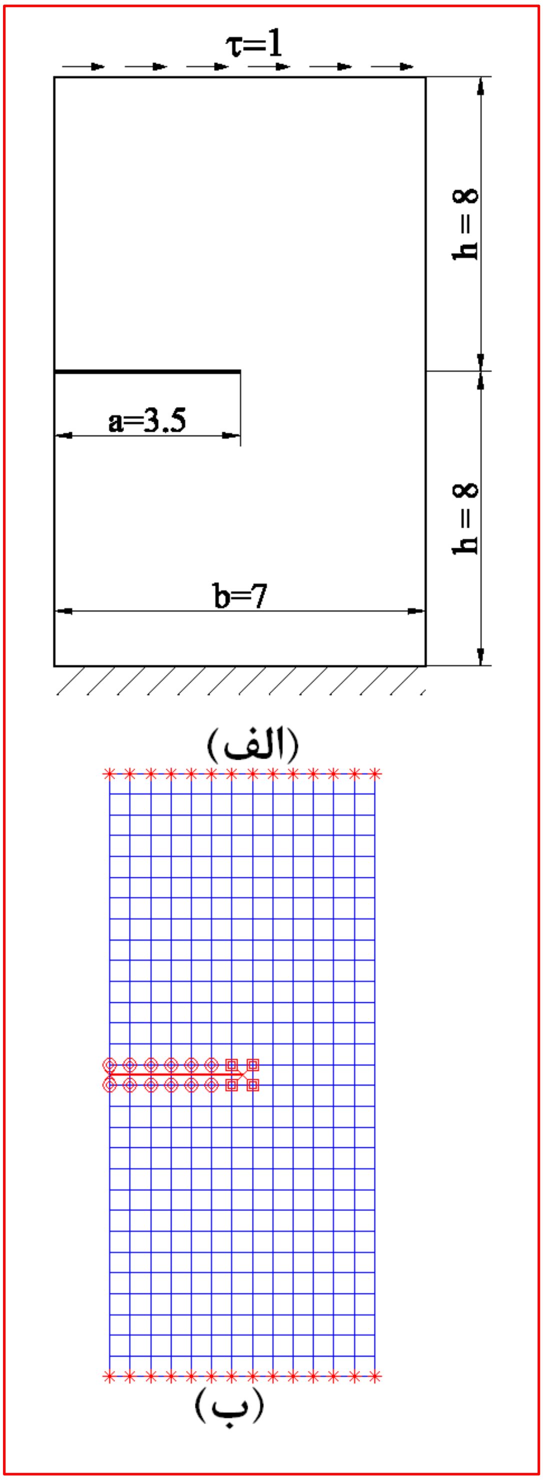
[117] J Yau, and Corten (1980)

13×29= 377	K_I/K^{exact}	0.9812	0.9517	0.9492	0.9490	0.9486	0.9489
	K_{II}	4.9181	4.7169	4.6244	4.5768	4.5697	4.5160
	K_{II}/K^{exact}	1.0809	1.0367	1.0164	1.0059	1.0043	0.9925
27×59= 1593	K_I	34.3375	33.3471	33.2373	33.2641	33.2537	33.2641
	K_I/K^{exact}	1.0099	0.9808	0.9776	0.9784	0.9781	0.9784
	K_{II}	5.0340	4.8762	4.7172	4.7592	4.7447	4.7304
	K_{II}/K^{exact}	1.1064	1.0712	1.0367	1.0460	1.0428	1.0396

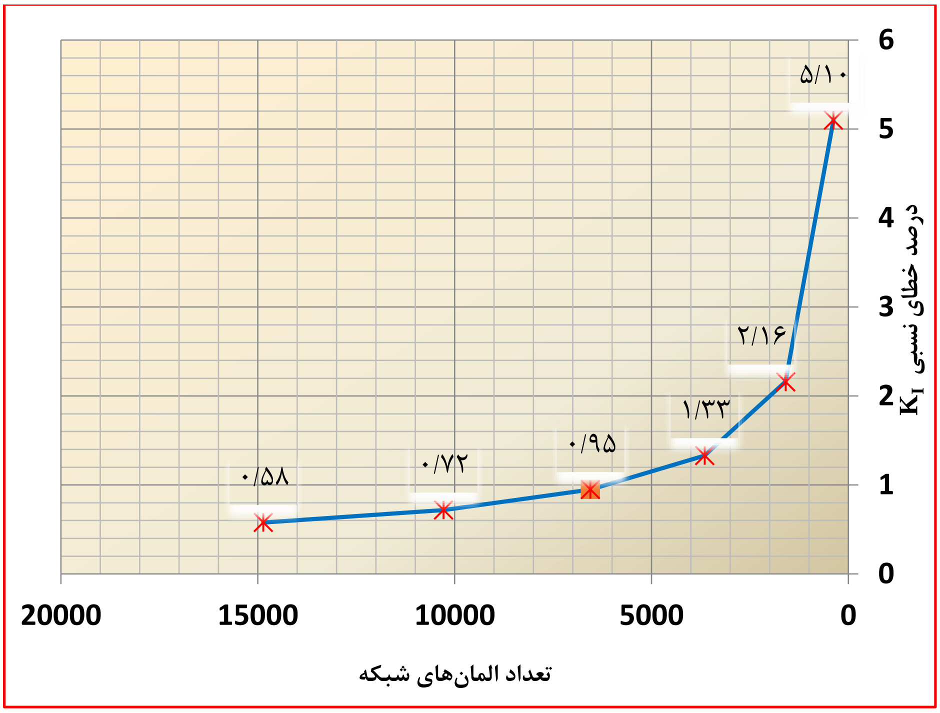
همگرایی مقادیر ضرایب شدت تنش در این مثال مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار ضریب شدت تنش مد یک (K_I) برای شبکه‌های مختلف و با مقدار r_k = ۳/۰ محاسبه شده است. این مقادیر در جدول (۶-۴) آمده و در شکل (۶-۱۰) به تصویر کشیده شده است. با توجه به این شکل می توان مشاهده کرد که اگرچه با انتخاب شبکه ریزتر، همگرایی افزایش یافته است ولی، این همگرایی در شبکه‌بندی‌های ریز با سرعت بسیار کمی رخ می‌دهد.

جدول ۶-۴: مقادیر K_I و درصد خطای نسبی آنها برای شبکه‌های مختلف در ترک لبه‌ای تحت برش

Elements No.	K_I	$(K_I - 34)/34$ (%)
13×29= 377	32.2659	5.10
27×59= 1593	33.2641	2.16
41×89= 3649	33.5474	1.33
55×119= 6545	33.6786	0.95
69×149= 10281	33.7550	0.72
83×179= 14857	33.8027	0.58



شکل ۶-۹: ترک لبه‌ای تحت تنش برشی: (الف) هندسه و بارهای وارده؛ (ب) گسسته‌سازی در اطراف نوک ترک، گره‌هایی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع پله‌ای و گره‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع شاخه‌ای غنی شده‌اند.



شکل ۶-۱۰: همگرایی مقادیر K_I برای ترک لبه‌ای تحت تنش برشی

۶-۲- مسائل رشد ترک

این بخش فواید اصلی استفاده از روش X-FEM نسبت به دیگر روش‌های عددی در زمینه‌ی شبیه‌سازی رشد ترک را نشان می‌دهد. مثال‌های ارائه شده در اینجا تنها مسائل رشد ترک شبه استاتیکی[۱۱۸] می‌باشند. به هر حال، باید توجه داشت که هیچ محدودیتی در استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM) وجود ندارد. رشد ترک دینامیکی توسط بلیچکو و چن (۲۰۰۳)[۱۱۹] مورد مطالعه قرار گرفته است.

---

[۱۱۸] quasi-static

[۱۱۹] Chen and Belytschko

شبیه‌سازی رشد ترک‌های چندگانه[۱۲۰] با استفاده از روش X-FEM که اجازه‌ی برخورد ترک‌ها با یکدیگر را می‌دهد توسط بادین (۲۰۰۴)[۱۲۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.[۲۳]

۶-۲-۱- رشد ترک در یک صفحه گسترده

در این قسمت رشد ترک در یک صفحه گسترده که در بخش ۶-۱-۱ بیان شد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این قسمت تمامی اطلاعات همان اطلاعات بخش ۶-۱-۱ می‌باشد. صفحه با شبکه‌ی ۸۴۱=۲۹×۲۹ المانی مدل شده است. تمامی المان‌ها چهارگوش چهارگره‌ای (Q۴) می‌باشند. امتداد رشد ترک به کمک ضرایب شدت تنش و با توجه به معیار حداکثر تنش حلقوی تعیین شده است. در هر گام، ترک به اندازه‌ی ۱ mm رشد خواهد داشت. این مثال برای سه گام مورد مطالعه قرار گرفته است.

جدول ۶-۵: مقادیر K_I و K^{exact} برای ترک در صفحه گسترده

Elements No.	SIFs	Step 1	Step 2	Step 3	Step 4
29×29= 841	K_I	1.7308e+5	1.7516e+5	1.7637e+5	1.7687e+5
	K^{exact}	1.7725e+5	1.7813e+5	1.7901e+5	1.7988e+5
	Error (%)	2.3	1.7	1.5	1.7
Tip position		(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)

۶-۲-۲- رشد یک ترک لبه‌ای در کشش

۱۲۰ Multiple crack growth simulation

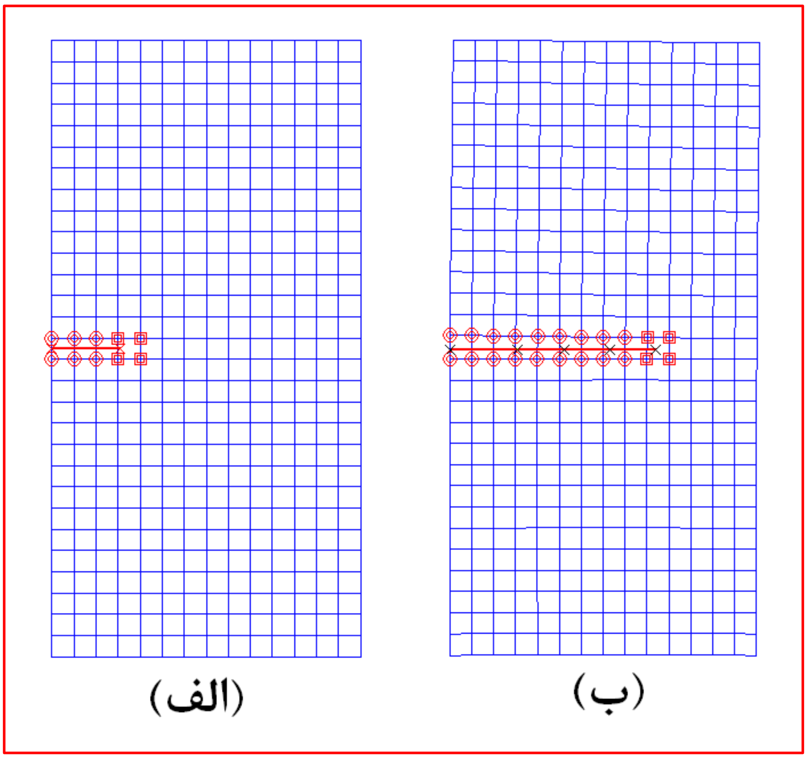
۱۲۱ Budyn

در این قسمت رشد ترک لبه‌ای بیان شده در بخش ۶-۱-۲ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تمامی اطلاعات همان اطلاعات بخش ۶-۱-۲ می‌باشد با این تفاوت که طول ترک اولیه ۰/۲۲ in خواهد بود. صفحه یکبار با شبکه‌ی ۴۰۶=۲۹×۱۴ و بار دیگر با شبکه‌ی ۱۷۱۱=۵۹×۲۹ المانی مدل شده است. در هر گام، ترک به اندازه‌ی ۰/۱۵ in رشد خواهد داشت. این مثال برای سه گام مورد مطالعه قرار گرفته است. مکان نهایی نوک ترک در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده است.

جدول ۶-۶: مقادیر K_I و K^{exact} برای ترک لبه‌ای در کشش

Elements No.	SIFs	Step 1	Step 2	Step 3	Step 4
14×29=406	K_I	1.1774	2.0713	3.6755	7.2055
	K^{exact}	1.1805	2.1008	3.8614	7.6794
	Error (%)	0.26	1.40	4.80	6.17
29×59=1711	K_I	1.1850	2.1067	3.7800	7.5208
	K^{exact}	1.1805	2.1008	3.8614	7.6794
	Error (%)	0.38	2.81	2.11	2.07
Tip position		(0.22,1.0)	(0.37,1.0)	(0.52,1.0)	(0.67,1.0)

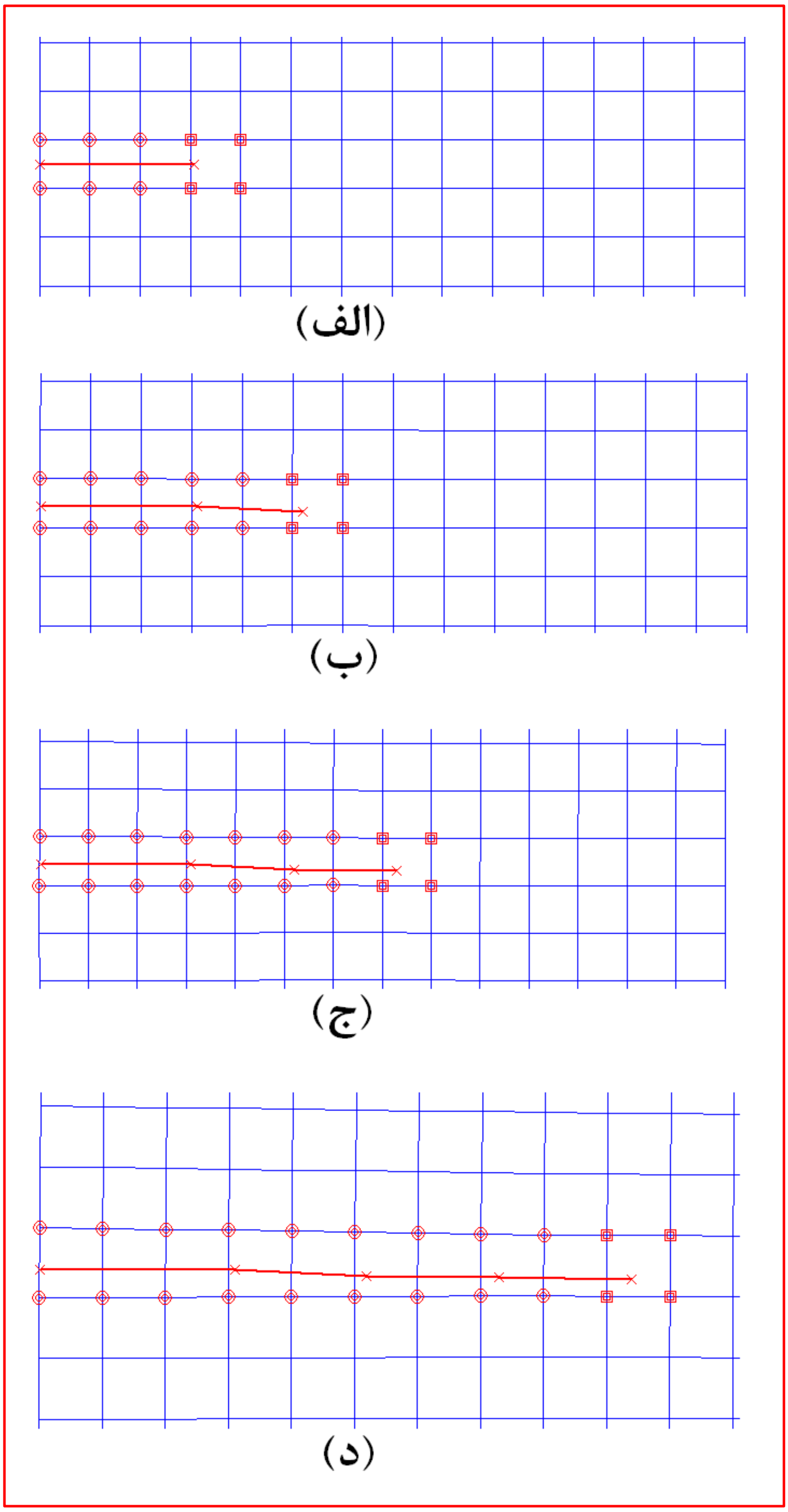
در این مسئله فرض بر این بود که با توجه به هندسه و نوع بارگذاری، مقدار ضریب شدت تنش مد II برابر صفر می‌باشد بنابراین، مقدار زاویه گسترش ترک، θ_c نیز برابر صفر می‌باشد. حال مسئله را بر اساس مقادیر واقعی بدست آمده از برنامه که در آن مقادیر ضریب شدت تنش مد II غیرصفر می‌باشد بررسی می‌کنیم. مقادیر ضرایب شدت تنش برای هر دو شبکه و نیز مقدار زاویه گسترش ترک، θ_c در جدول ۶-۷ آمده است. مکان نهایی نوک ترک در شکل‌های (۶-۱۱) و (۶-۱۲) نشان داده شده است.



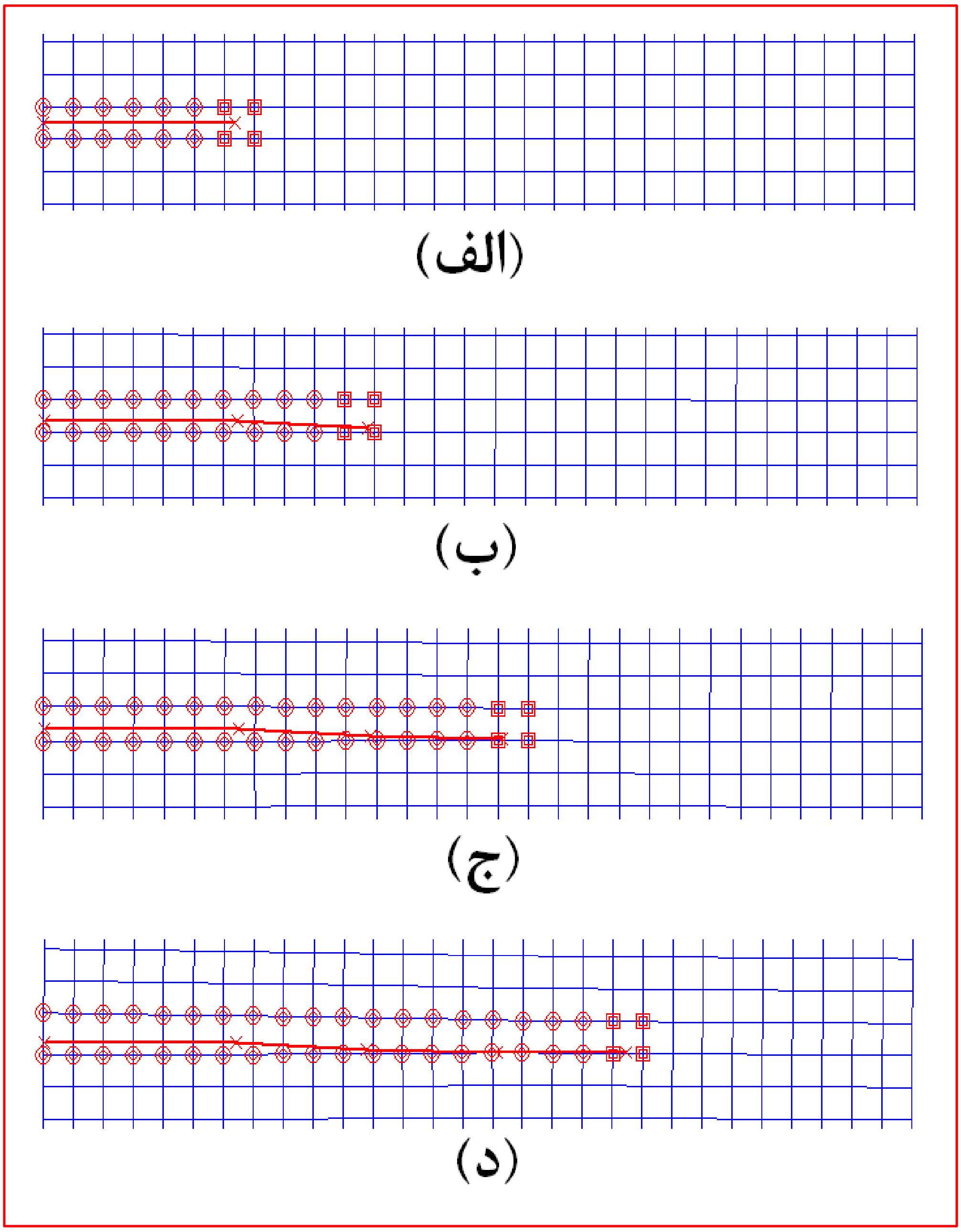
شکل ۶-۱۱: گسترش ترک لبه‌ای تحت کشش: (الف) ترک اولیه؛ (ب) مسیر ترک پس از سه گام

جدول ۶-۷: مقادیر K_I و K_{II} و θ_c برای ترک لبه‌ای در کشش

Elements No.	SIFs	Step 1	Step 2	Step 3	Step 4
14×29= 406	K_I	1.1774	2.0719	3.6754	7.2075
	K_{II}	0.0294	-0.0122	0.0213	0.0241
	ϑ_c	-0.0498	0.0117	-0.0116	-0.0067
	Tip position	(0.2200, 1.0000)	(0.3698, 0.9925)	(0.5198, 0.9908)	(0.6698, 0.9890)
29×59= 1711	K_I	1.1850	2.1096	3.7897	7.5592
	K_{II}	0.0305	-0.0207	0.0019	0.0360
	ϑ_c	-0.0514	0.0196	-0.0010	-0.0095
	Tip position	(0.2200, 1.0000)	(0.3698, 0.9923)	(0.5198, 0.9894)	(0.6698, 0.9892)



شکل ۶-۱۲: گسترش ترک لبه‌ای تحت کشش در گام‌های مختلف برای شبکه‌ی ۴۰۶ المانی



شکل ۶-۱۳: گسترش ترک لبه‌ای تحت کشش در گام‌های مختلف برای شبکه‌ی ۱۷۱۱ المانی

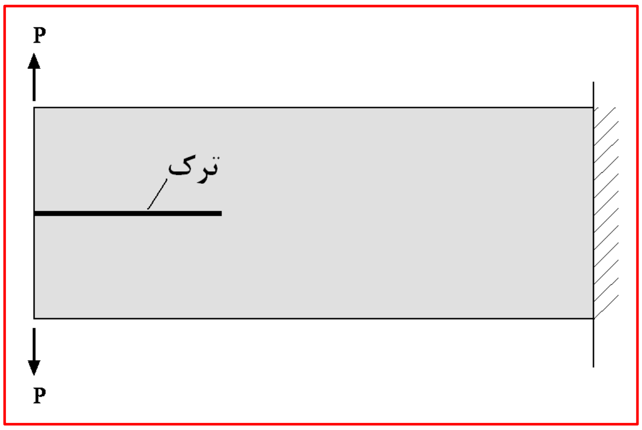
۶-۲-۳- تیر کنسول[۱۲۲]

۱۲۲ Double Cantilever Beam (DCB)

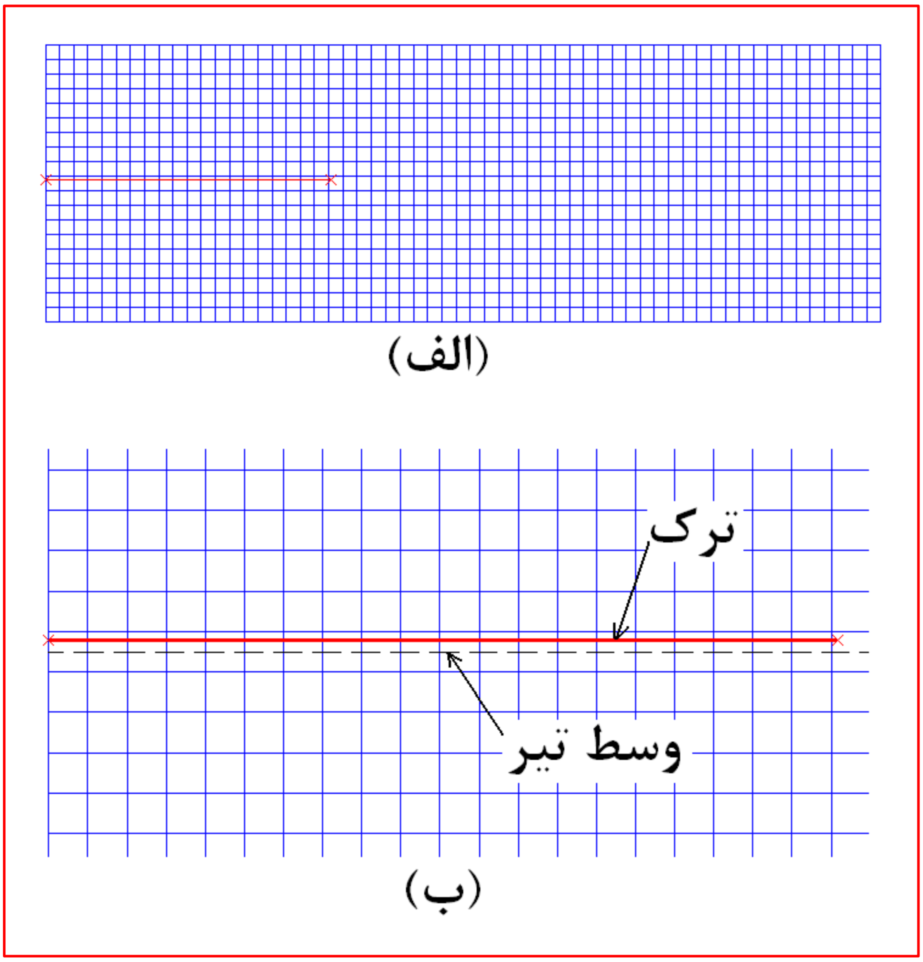
در شکل (۶-۱۴)، یک تیر کنسول (DCB) نشان داده شده است. ابعاد تیر ۲×۶ بوده و طول ترک اولیه a=۲/۰۵ می‌باشد. به منظور گسترش ترک نامتقارن، ترک کمی بالاتر از خط میانی تیر قرار گرفته است (شکل (۶-۱۵)). مشخصات ماده E=۱۰۰ و ν=۰/۳ می‌باشد. نیروی P=۱ بر انتهای آزاد تیر وارد می‌شود.

اگر ترک اولیه روی خط میانی تیر قرار می گرفت، مقدار ضریب شدت تنش مد دوم، K_{II}، برابر صفر شده و ترک بصورت مستقیم روی خط میانی تیر گسترش می‌یافت ولی با قرار گرفتن ترک مقدار کمی بالاتر از خط میانی تیر، امکان گسترش نامتقارن ترک وجود خواهد داشت. ترک در هر گام به اندازه‌ی Δa=۰/۱۵ گسترش می یابد. گسترش ترک برای شبکه‌ی ۲۰×۶۰ برای چندین گام در شکل (۶-۱۶) نشان داده شده است. از این شکل می توان به همسان بودن مسیر بدست آمده با نتایج تجربی حاصل از مکانیک جامدات پی برد.

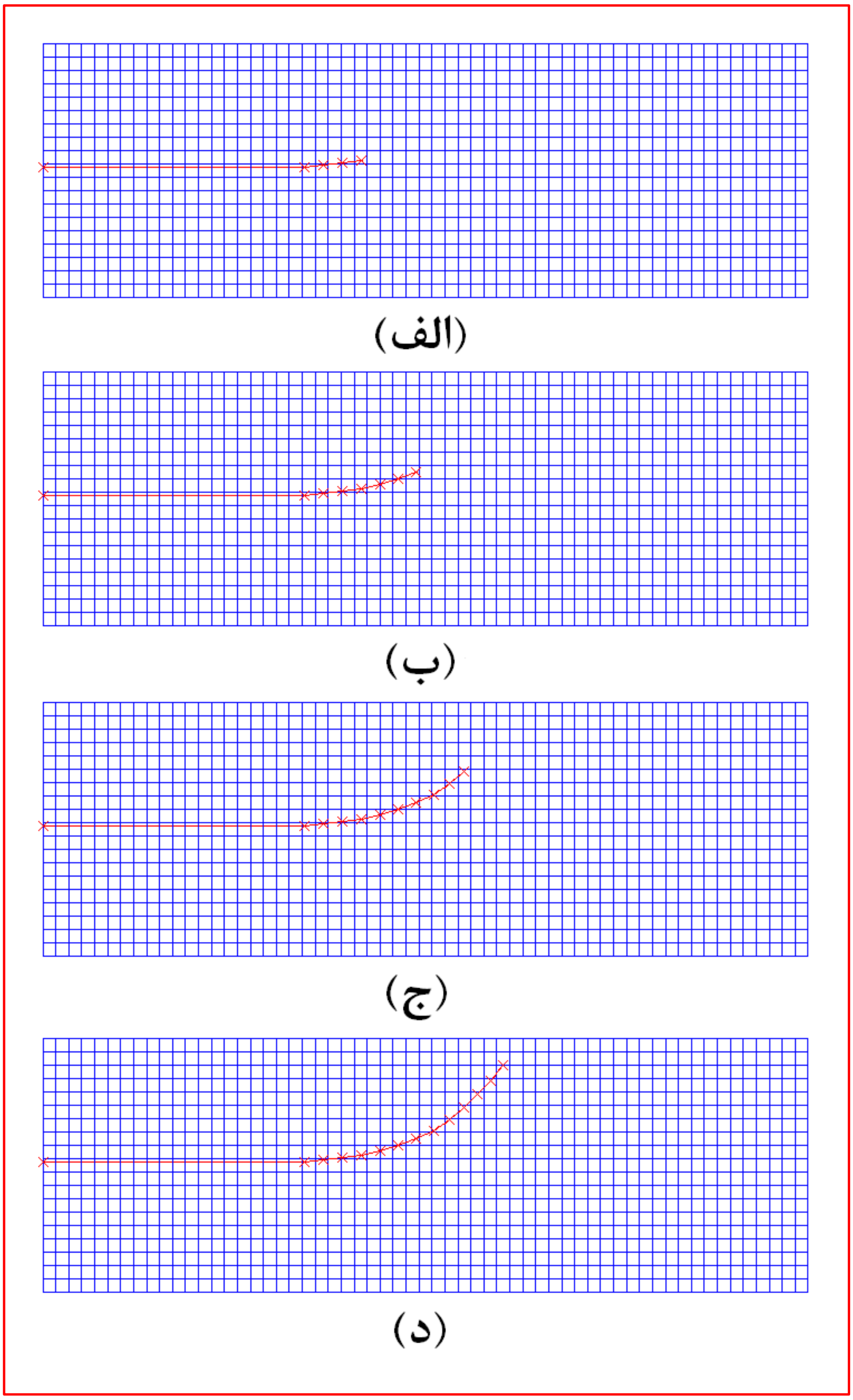
عوامل مؤثر بر دقت مسیر ترک شبیه‌سازی شده (۱) ریزبودن شبکه؛ (۲) اندازه‌ی دامنه (r_d=r_k h_{local})؛ و (۳) طول افزایش ترک (Δa) می‌باشند. مسیر گسترش ترک برای دو شبکه مختلف ۲۰×۶۰ و ۴۰×۱۲۰ در شکل (۶-۱۷) مقایسه شده است.



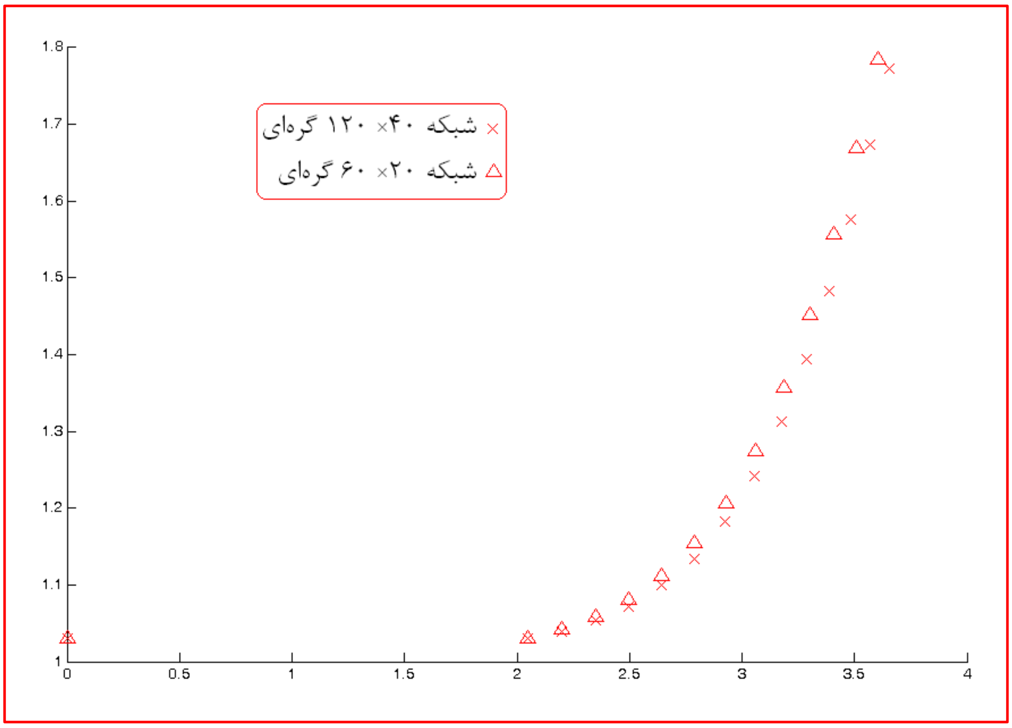
شکل ۶-۱۴: هندسه و بارگذاری تیر کنسول



شکل ۶-۱۵: (الف) نمایش ترک اولیه و (ب) بزرگ‌نمایی ناحیه ترک



شکل ۶-۱۶: مسیر گسترش ترک در شبکه ۲۰×۶۰ گره‌ای پس از (الف) سه گام؛ (ب) شش گام؛ (ج) نه گام و (د) دوازده گام.



شکل ۶-۱۷: مقایسه موقعیت نوک ترک در دو شبکه ۴۰×۱۲۰ و ۲۰×۶۰ گره‌ای

۶-۳- نتیجه‌گیری

این بخش آنالیز بررسی تنش برای مسائل مختلف با کمک روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM) را نشان داد. درستی محاسبات ضرایب شدت تنش برای مسائل مختلف از جمله ترک در صفحه گسترده، ترک لبه‌ای در کشش و ترک لبه‌ای در برش و گسترش نامتقارن ترک مورد بررسی قرار گرفت. سازگاری این روش با مسائل رشد ترک نیز در این بخش نشان داده شد. بر اساس نتایج، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته یک روش قدرتمند جهت شبیه‌سازی ترک و بررسی گسترش ترک در مکانیک جامدات می‌باشد. این روش بدون نیاز به شبکه‌بندی دوباره، کاهش زمان انجام محاسبات را در مقایسه با سایر روش‌های گسترش ترک ارائه خواهد نمود.

فصل ۷

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۷-۱- خلاصه کار انجام شده در این پایان‌نامه

در زمینه مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)[۱۲۳]، روش اجزاء محدود غنی شده به نام روش اجزاء محدود توسعه‌یافته (X-FEM)[۱۲۴] ارائه گردیده است. روش به‌طور موفقیت‌آمیز برای ترک ساکن و مسائل رشد ترک شبه‌استاتیکی به‌کار رفته است.

برای مدل کردن ترک در LEFM، تقریب المان محدود سنتی بر پایه جابجایی با تابع ناپیوسته و میدان‌های نزدیک نوک مماسی الاستیک خطی غنی شده است. ترک‌ها به‌طور مستقل از شبکه اصلی نمایش داده شده است که مرحله پیش‌پردازش را ساده‌تر می‌سازد و به‌ویژه اینکه همزمان با رشد ترک نیازی به تغییر دادن شبکه نیست.

---

[۱۲۳] Linear Elastic Fracture Mechanics

[۱۲۴] eXteded Finite Element Method

اگرچه m-فایل‌های[۱۲۵] به‌کار رفته در این پایان‌نامه برای المان‌های محدود خطی به‌کار رفته‌اند ولی تعمیم روش X-FEM به مرتبه بالاتر مشکل نخواهد بود. برخی ویژگی‌های کار موجود عبارتند از:

۱. ترک‌ها به کمک روش مجموعه تراز (LSM)[۱۲۶] مدل شده‌اند.

۲. در این روش ترک‌ها نمی‌توانند روی لبه‌های المان قرار گیرند.

۳. یافتن المان‌هایی که با ترک برخورد کرده‌اند برای شبکه‌های بسیار ریز مناسب و مؤثر نیستند.

با توجه به این مطالب و مثال‌ها، نتیجه‌ای که می‌توان به آن اشاره کرد «*شبیه‌سازی رشد ترک بدون نیاز به شبکه‌بندی دوباره*» می‌باشد یعنی، ناپیوستگی و به‌ویژه ترک به طور مستقل از شبکه موجود در هر مرحله از رشد آن مدل شده است.

بایستی توجه داشت که برای حصول نتایج بهتر و کاربردی‌تر در زمینه شبیه‌سازی رشد ترک، بهتر است که بر خلاف این پایان‌نامه که در آن ترک به صورت خطوط مستقیم مدل شده است، ترک به صورت هموارتر مدل شود. بدین منظور استفاده از روش مجموعه تراز و روش اجزاء محدود توسعه یافته مرتبه بالاتر، مناسب است. همچنین به منظور افزایش دقت نتایج می‌توان محدوده‌ی انتخاب المان‌های نوک را افزایش داد و از المان‌های بیشتری به عنوان المان‌های نوک استفاده کرد. این مورد را می‌توان در رابطه با المان‌های درونی نیز اعمال کرد.

۷-۲- مسیرهای مناسب در کارهای بعدی

---

[۱۲۵] فایل‌های برنامه Matlab.

- Matlab که برگرفته از (MATix LABoratory) می‌باشد، یک برنامه کامپیوتری طراحی شده برای انجام محاسبات مهندسی و علمی است.

[۱۲۶] Level Set Method

این پایان‌نامه می‌تواند به عنوان گام آغازین در راه بسیار طولانی یادگیری و به‌کارگیری روش X-FEM برای کاربردهای واقعی باشد. کوشش‌های زیادی برای رسیدن بدین هدف نیاز است و برخی از مقوله‌هایی که نیاز به تحقیق و پژوهش دارند در ادامه آمده است.

این روش برای دو بعد بکار رفته است و یک هدف پرچالش می‌تواند توسعه روش به سه بعد باشد. گرچه این مورد مشکلات زیادی را ندارد ولی برخی از مقوله هایی که بایستی بطور دقیق مورد بررسی قرار گیرد عبارتند از:

- ***تشریح هندسه ترک‌ها:*** برای ترک‌های سه بعدی، روشن است که روش مجموعه تراز (LSM) بایستی استفاده شود. مجموعه‌های تراز با حل معادلات دیفرانسیل جزیی هایپربولیک[۱۲۷]، به‌روز می‌شوند که البته برای ترک‌های سه‌بعدی و پیچیده مناسب نیست. بنابراین روش مجموعه تراز برداری[۱۲۸] موجود در کار ونتورا، ژو و بلیچکو (۲۰۰۱)[۱۲۹] بایستی مورد استفاده قرار گیرد چرا که به‌روز کردن میدان مجموعه تراز برداری تنها یک تعداد کمی از معادلات هندسی را درگیر می‌سازد.[۲۳]
- ***تنش صفحه‌ای و یا کرنش صفحه‌ای:*** در تمام مقالاتی که روی تحلیل ترک‌های سه بعدی به کمک روش X-FEM کار می‌کنند، شرایط تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای برای جبهه ترک فرض می‌شود. این مطلب کاملاً درست نمی‌باشد چرا که برای جبهه ترک نزدیک سطح آزاد، شرایط تنش صفحه‌ای حاکم است در حالیکه برای جبهه ترک درون جسم جامد، کرنش صفحه‌ای بایستی استفاده شود.

---

[۱۲۷] hyperbolic partial differential equations

[۱۲۸] vector level set method

[۱۲۹] Ventura, Xu, and Belytschko, 2001

- ***انتگرال‌گیری عددی*** یک موضوع تحقیق در حال پیشرفت است. روش به‌کار رفته در این پایان‌نامه نیازمند افراز المان‌های برخورد کرده با ترک به مثلث‌های ریزتر می‌باشد که در هر مثلث یک مربع‌سازی گاوسی[۱۳۰] مرتبه بالا به‌کار رود. این روش، بطور روشن هزینه محاسباتی را به نسبت زیادی افزایش خواهد داد. نیاز به یک طرح مربع‌سازی بهتر کاملاً روشن است. بچت، مینه‌بو، موس و بورگاردت (۲۰۰۵)[۱۳۱]،[۵] یک طرح مربع‌سازی بسیار دقیق برای توابع مماسی ارائه داده‌اند. آقای استفان بورداس[۱۳۲] [۱۱و۱۲] نیز انتقال انتگرال دامنه‌ای[۱۳۳] به انتگرال کانتوری[۱۳۴] بر اساس تئوری دیورژانس را پیشنهاد کرده است.
- ***ترک‌های چندگانه:*** یکی دیگر از زمینه‌های موردعلاقه مدل‌سازی ترک‌های چندگانه است که توسط بادین (۲۰۰۴)[۱۳۵] [۱۳] آغاز شده است. البته این کد در Matlab نوشته شده است که تعمیم آن بسیار سخت خواهد بود.

ABSTRACT

Extended finite element method (X-FEM) and its application in solid mechanics

[۱۳۰] Gauss quadrature

[۱۳۱] Béchet, Minnebo, Moës and Burgardt, 2005

[۱۳۲] Stéphane Bordas

[۱۳۳] domain integral

[۱۳۴] contour integral

[۱۳۵] Budyn, 2004

Behnam Parsa

The modeling of a discontinuous field with a standard finite element approximation presents unique challenges. The construction of an approximating space which is discontinuous across a given line or surface places strict restrictions on the finite element mesh. The simulation of an evolution of the discontinuity is in turn burdened by the requirement to remesh at each stage of the calculation. This work approaches the problem by locally enriching the standard element-based approximation with discontinuous functions. The enriched basis is formed from a union of the set of nodal shape functions with a set of products of nodal shape functions and enrichment functions. The eXtended Finite Element Method (X-FEM) is used to simulate the crack growth without remeshing. In X-FEM, the standard FE approximation domain is enriched with special functions to help capture the challenging features of a problem. Enrichment functions may be discontinuous (to model discontinuities in the field), their derivatives can be discontinuous (to model kinks in the field), or they can be chosen to incorporate a known characteristic of the solution (such as the square root singularity of linear elastic fracture mechanics). Applications to linear elastic fracture mechanics (LEFM), single static crack as well as crack growth are presented and demonstrated with several numerical examples.

Shahrood University of Technology
Department of Civil Engineering

EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD (X-FEM) AND ITS APPLICATION IN SOLID MECHANICS

A THESIS
SUBMITTED AS A PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS

for the degree

MASTER OF SCIENCE

Field of Structural Engineering

By
Behnam Parsa (Master of Science Student)

Supervisor
Reza Naderi (Assistant Professor)

Advisor
Behrooz Hassani (Professor)

SHAHROOD, SEMNAN

July 2008

منابع و مراجع

۱. مگید، اس، ای، ۱۳۷۶، مکانیک شکست، فرهی، غ، چاپ اول، انتشارات دانشگاه بوعلی سینا.

۲. ردی، جی، ان، ۱۳۸۴، مقدمه‌ای بر روش اجزاء محدود، جلد اول، راستگو، ع، سلطانی، ن، چاپ اول، انتشارات دانشگاه تهران.

۳. ردی، جی، ان، ۱۳۸۴، مقدمه‌ای بر روش اجزاء محدود، جلد دوم، راستگو، ع، سلطانی، ن، چاپ اول، انتشارات دانشگاه تهران.

4. Barth, T., Sethian, J. A. Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains. *Journal of Computational Physics* 1998; 145, 1 – 40.
5. Béchet, E., H. Minnebo, N. Moës, and B. Burgardt (2005). Improved implementation and robustness study of the x-fem for stress analysis around cracks. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
6. Belytschko, T., Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1999; 45(5):601 – 620.
7. Belytschko, T., Y. Y. Lu, L. Gu. Element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1994; 37:229 – 256.
8. Belytschko, T., Moës, N., Usui, S., Parimi, C. Arbitrary discontinuities in finite element. International Journal of Numerical Methods in Engineering 2001; 50 (4): 993 – 1013.
9. Belytschko, T., Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl (1996). Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, 3-47.
10. Boduroglu, H. and F. Erdogan (1983). Internal and edge cracks in a plate of finite width under bending. Journal of Applied Mechanics 50, 621-628.
11. Bordas, S. (2001, November). An extended finite element method for elastic and elastic-plastic cracks in complex components.
12. Bordas, S. (2003, December). Extended Finite Element and level set methods with applications to growth of cracks and biofilms. Ph. D. thesis, Northwestern University.
13. Budyn, E. (2004, June). Multiple Crack Growth by the eXtended Finite Element Method. Ph. D. thesis, Northwestern University.
14. Chessa, J. (2002, December). The Extended Finite Element Method for Free Surface and Two Phase Flow Problems. Ph. D. thesis, Northwestern University.
15. Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the eXtended finite element method. International Journal of Numerical Methods in Engineering 2000; 48: 1741 – 1760.

16. Dolbow, J. An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics. Ph.D. Thesis, Theoretical and applied mechanics, Northwestern University, 1999.
17. Dolbow, J., Moës N., Belytschko T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. Finite Elements in Analysis and Design 1999.
18. Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2001; 190(51–52): 6825 – 6846.
19. Dolbow, J. and T. Belytschko (1999). Numerical integration of the galerkin weak form in meshfree methods. Computational Mechanics 41, 1339-1362.
20. Dunant, C., S. Bordas, P. Nguyen, A. Guidoum, and H. Nguyen-Dang (2005). Architecture trade-offs of including a mesher in an object-oriented extended finite element code.
21. Melenk, J. M., Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1996; 39:289 – 314.
22. Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1999; 46:131 – 150.
23. Nguyen, P., S. Bordas, C. Dunant, H. Nguyen-Dang, and G. A. (2005). An object-oriented extended finite element library, part ii: numerical applications in fracture mechanics. International Journal of Solids and Structures
24. Phu N. V. An object oriented approach to the extended finite element method with application to fracture mechanics. Ph. D. Thesis; 2005; Hochiminh City University of Technology.
25. Osher, J., A. Sethian. Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithem based on Hamilton-Jacobi formulations. Journal of Computational Physics 1988; 79(1):112 – 49.
26. Stazi, F., E. Budyn, J. Chessa, and T. Belytschko (2003). An extended finite element method with higher-order elements for crack problems with curvature. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
27. Stolarska, M., D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko (2001). Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 51 (8), 943-960.

28. Sukumar, N. and J.-H. Prévost (August 2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. part i: Computer implementation. International Journal of Solids and Structures.
29. Sukumar, N., N. Moës, T. Belytschko, and B. Moran (2000). Extended Finite Element Method for three-dimensional crack modelling. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48 (11), 1549-1570.
30. Sukumar, N., D. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineer*ing* 190 (47), 6183-6200.