

به نام یزدان پاک



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گرایش: ذرات بنیادی

مطالعه خصوصیات ماده‌ی کوارکی قطبیده با استفاده از پتانسیل برهم‌کنش‌های بین کوارکی

رقیه عباسی

استاد راهنما:

دکتر محسن بیگدلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

مهر ۱۳۹۰



دانشگاه زنجان

شماره: ۲۹۶۴

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

تاریخ: ۹۰/۸/۲

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

خانم: رقیه عباسی رشته: فیزیک گرایش: ذرات بنیادی

تحت عنوان: مطالعه خصوصیات ماده‌ی کوارکی با استفاده از پتانسیل برهم کنش‌های بین کوارکی

در تاریخ ۹۰/۷/۱۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه زنجان برگزار گردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می‌باشد:

قبول (با درجه: ب برتر) امتیاز: ۱۷.۵ (.....) دفاع مجدد مردود

- ۱- مهر: ۱۸-۲۰
- ۲- شماره قفسه: ۱۶-۱۳۹۹
- ۳- شماره: ۱۲-۱۵۱۹۹
- ۴- قبل قبول: ۱۲-۱۳۹۹

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر محسن بیگدلی	استادیار	
۲- استاد ممتحن داخل دانشگاه	دکتر طیب کاکاوند	دانشیار	
۳- استاد ممتحن داخل دانشگاه	دکتر سعید قنبری	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سعید مقصودی	استادیار	



دکتر محمد حسین شهباز
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

استادای داوران

دکتر حبیب‌امیری
معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشگاه علی

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات نابِ باورِ بودن، لذت و غرورِ دانستن، جسارتِ خواستن، عظمتِ رسیدن و تمام تجربه‌های

یکتا و زیبای زندگی‌م، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم.

سپاس‌گزاری

سپاس‌گزارم از اساتید بزرگواری که بدون راهنمایی ایشان ره به جایی نمی‌بردم. سپاس‌گزارم از خانواده‌ی عزیزم که بدون پشتیبانی‌شان در راه می‌ماندم. و سپاس‌گزارم از دوستان وفادارم که بدون همراهی‌شان رنج تنهایی امیدی باقی نمی‌گذاشت.

چکیده

کوارک‌ها بخشی از ذرات بنیادی هستند که در مدل استاندارد دسته‌بندی می‌شوند. این ذرات در حالت عادی به صورت محبوس در هادرون‌ها قرار دارند. تلاش‌های زیادی برای بررسی کوارک‌های آزاد انجام شده است. یکی از حالت‌های احتمالی وجود ماده‌ی کوارکی به صورت آزاد، درون ستاره‌های کوارکی است. تحت شرایط فوق‌العاده دما و فشار ساختار آشنای ماده که شامل هسته و الکترون‌هاست، از هم گسیخته می‌شود و انتظار می‌رود کوارک‌ها و گلوئون‌ها به فاز آزاد گذار کنند. بعد از گذار پایدارترین شکل ماده، ماده‌ی کوارکی خواهد بود. ماده‌ی کوارکی به فازهایی اطلاق می‌شود که در آن درجه‌ی آزادی شامل کوارک‌ها است.

با کشف مگنتارها که ستاره‌هایی نوترونی با میدان‌های مغناطیسی غیر عادی و بسیار قوی $\approx 10^{15} G$ هستند، مطالعه‌ی گذرا فاز به حالت فرومغناطیسی در یک ماده‌ی کوارکی چگال اهمیت ویژه‌ای پیدا کرد. در این پایان‌نامه با استفاده از یک مدل سه بعدی برای ماده‌ی کوارکی قطبیده با پتانسیل (حبس) کوارک-کوارک وابسته به چگالی، ویژگی‌های ماده‌ی کوارکی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش قطبش، انرژی کل ماده‌ی قطبیده افزایش یافته و معادله حالت سخت‌تر می‌شود.

کلمات کلیدی: ماده‌ی کوارکی قطبیده، تخمین جفت‌های مستقل، رهیافت بتا-گلدستون، عملگر پاولی، پتانسیل *string – flip like*، ستاره‌ی کوارکی.

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	۱.۱ مدل استاندارد	۲
۷	ستارگان فشرده	۲
۹	۱.۲ ساختار ستاره‌ی نوترونی	۹
۱۲	۲.۲ ماده کوارکی شگفت در ستاره‌های نوترونی	۱۲
۱۵	۳.۲ تپ اختر	۱۵
۱۷	سیستم بس ذره‌ای	۳
۱۸	۱.۳ سیستم N -ذره‌ای	۱۸
۱۹	۲.۳ دستگاه دو ذره‌ای	۱۹
۲۱	۱.۲.۳ دستگاه دو ذره‌ای برهم‌کنشی	۲۱
۲۳	۳.۳ نظریه اختلال	۲۳
۲۵	۴.۳ تخمین جفت‌های مستقل	۲۵
۲۵	۱.۴.۳ رهیافت بتا-گلدستون	۲۵
۲۹	۵.۳ معادلات بتا - گلدستون در مختصات کروی	۲۹
۳۲	۶.۳ عملگر پاولی	۳۲
۳۳	۷.۳ معادله‌ی حالت	۳۳

۳۵	سیستم قطبیده	۸.۳
۳۶	میانگین زاویه‌ای عملگر پاولی	۱.۸.۳
۳۷	معادله‌ی حالت سیستم قطبیده	۹.۳
۳۹	بررسی خصوصیات ماده‌ی کوارکی قطبیده	۴
۴۰	پتانسیل String - flip like	۱.۴
۴۲	معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده	۲.۴
۴۶	ماده کوارکی نیمه نسبیتی	۳.۴
۴۷	تعیین چگالی کوارک‌ها در ماده کوارکی	۱.۳.۴
۵۷	بحث و نتیجه‌گیری	۵

لیست تصاویر

۱۰ ساختار ستاره‌ی نوترونی	۱.۲
۱۴ ستاره‌ی کوارکی	۲.۲
۱۶ مگنتار	۳.۲
۲۸ ناحیه‌ی انتگرال‌گیری برای معادله‌ی بتا - گلدستون در فضای تکانه.	۱.۳
۴۳ انرژی به ازای ذره غیر نسبیتی ماده‌ی کوارکی قطبیده، پتانسیل درجه دو	۱.۴
۴۴ انرژی به ازای ذره غیر نسبیتی ماده‌ی کوارکی قطبیده، پتانسیل خطی	۲.۴
۴۵ پتانسیل متوسط ذرات ماده‌ی کوارکی قطبیده، پتانسیل درجه دو	۳.۴
۴۶ پتانسیل متوسط ذرات ماده‌ی کوارکی قطبیده، پتانسیل خطی	۴.۴
۴۹ انرژی به ازای ذره ماده‌ی کوارکی قطبیده نیمه نسبیتی، پتانسیل درجه دو	۵.۴
۵۰ انرژی به ازای ذره ماده‌ی کوارکی قطبیده نیمه نسبیتی، پتانسیل خطی	۶.۴
۵۱ چگالی انرژی ماده‌ی کوارکی قطبیده نیمه نسبیتی، پتانسیل درجه دو	۷.۴
۵۲ چگالی انرژی ماده‌ی کوارکی قطبیده نیمه نسبیتی، پتانسیل خطی	۸.۴
۵۳ معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده، پتانسیل درجه دو	۹.۴
۵۴ معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده، پتانسیل خطی	۱۰.۴
۵۵ تغییرات انرژی بر حسب قطبش، پتانسیل درجه دو	۱۱.۴
۵۶ تغییرات انرژی بر حسب قطبش، پتانسیل خطی	۱۲.۴

فصل ۱

مقدمه

کیهان همواره به عنوان آزمایشگاهی عظیم برای بررسی پدیده‌هایی که تنها در شرایط خاص به وقوع می‌پیوندد، مورد توجه بوده است. فشارهای بسیار بالا و یا پایین، چگالی‌هایی که تا کنون بر روی زمین قابل تولید نبودند، از جمله مزایای این محیط است که باعث ایجاد موقعیت فوق‌العاده‌ای جهت بررسی مدل‌ها و نظریات در شرایط متفاوت با آزمایشگاه‌های زمینی می‌شود [۱]. از جمله پدیده‌های جالب توجه برای بررسی در فضا ستاره‌های کوارکی^۱ هستند که فصل مشترکی بین فیزیک ذرات بنیادی و اختر فیزیک ایجاد می‌کنند.

برای اولین بار احتمال وجود ستاره‌ای که کاملاً از ماده کوارکی ساخته شده باشد در ۱۹۷۰ توسط ایتو^۲ مطرح شد. وی کوارک‌های بالا، پایین و شگفت^۳ را به عنوان گاز فرمی آزاد و تبهگنی با جرم یکسان $m_q = 10 \text{ GeV}$ در نظر گرفت و حداکثر جرم ستاره را $M_{max} \sim 10^{-3} M_{\odot}$ تخمین زد که این مقدار بسیار کمتر از میزان بدست آمده در روش‌های جدید است [۲]. البته معادله حالت ایتو خود مقید نیز نبود. یک سال بعد بودمر^۴ ماده‌ی کوارکی شگفت را به عنوان حالت پایه واقعی ماده پیشنهاد

^۱Quark Star

^۲Itoh

^۳Strange

^۴Bodmer

کرد. اولین معادله حالت خود-مقید در ۱۹۷۶ توسط برکنر و کپوراسو^۵ ارایه شد. آنها در مقاله‌ی خود کوارک‌ها را بدون جرم و برهم‌کنش در نظر گرفتند و حداکثر جرم را $M_{max} = 2/8 M_{\odot}$ به دست آوردند. ویتن^۶ (۱۹۸۶) مقدار ثابت کیسه‌ای را که با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی به دست آورده بود، در محاسبه معادله حالت به کار گرفت و شعاع و جرمی مشابه ستاره‌های نوترونی معمولی برای ستاره‌ی کوارکی محاسبه کرد. در ۱۹۸۶ هینسل^۷ و گروهش مدلی واقعی‌تر را برای به دست آوردن معادله حالت ستاره کوارکی ارائه کردند. آنها جرم کوارک شگفت و برهم‌کنش‌های مرتبه‌ی پایین QCD را لحاظ نمودند. نتایج مشابهی توسط آلکوک^۸ در ۱۹۸۶ ارائه شد، وی هم‌چنین سناریوهای مختلف برای تشکیل ستاره کوارکی را مورد بررسی قرار داد. بعد از انتشار مقالات هینسل و آلکوک سایر تلاش پژوهشگران در ایجاد تصحیح و بهبود معادله حالت با پیشنهاد روش‌هایی بهتر از مدل کیسه‌ای و هم‌چنین بررسی سایر خواص این گونه از ستارگان، مانند تابش نوترینو، چرخش، ابر شارگی، نحوه‌ی سرد شدن و تابش الکترومغناطیس متمرکز شد.

۱.۱ مدل استاندارد

مدل استاندارد بهترین چارچوب نظری است که تا امروز برای بررسی ذرات بنیادی و برهم‌کنش‌های آنها فرمول‌بندی شده است. این مدل در سال ۱۹۷۰ پیشنهاد شد. بر طبق این مدل، ماده از ذراتی بنیادی با اسپین $\frac{1}{2}$ ، یا همان فرمیون‌ها ساخته شده است: ۶ کوارک و ۶ لپتون^۹. در جدول ۱.۱، علامت و نسبت بار الکتریکی آنها آورده شده است.

^۵ Brecher and Caporaso

^۶ Witten

^۷ Haensel

^۸ Alcock

^۹ Lepton

جدول ۱.۱ : فرمیون‌های بنیادی

ذره	طعم	$Q/ e $
لیپتون‌ها	$e \quad \mu \quad \tau$	-۱
	$\nu_e \quad \nu_\mu \quad (\nu_\tau)$	۰
کوارک‌ها	$u \quad c \quad t$	$+\frac{2}{3}$
	$d \quad s \quad b$	$-\frac{1}{3}$

لیپتون‌ها حامل بار الکتریکی هستند، آشناترین آنها الکترون e با واحد بار منفی است. دیگر لیپتون‌های باردار میون μ ^{۱۰} و تاون τ ^{۱۱} هستند. این لیپتون‌ها از الکترون سنگین‌تر هستند. لیپتون‌های نوترونی، یا نوترینوها^{۱۲} با علامت ν نشان داده می‌شوند. طعم‌های^{۱۳} مختلف نوترینو با هر طعم لیپتون باردار جفت شده و با اندیس آن مشخص می‌شود. برای مثال در واپاشی بتا، الکترون e به نوترینوی الکترونی ν_e واپاشیده می‌شود.

میون و تاون هر دو ناپایدار بوده و به سرعت به الکترون، نوترینو و دیگر ذرات واپاشیده می‌شوند. نیمه عمر متوسط میون μ ، $2/2 \times 10^{-6} s$ و تاون، $2/9 \times 10^{-13} s$ است. کوارک‌ها دارای بار کسری $|e|/3$ یا $2|e|/3$ هستند. در جدول ۱.۱ جرم کوارک‌ها نیز آورده شده است.

انواع کوارک‌ها، یا طعم‌شان، همان‌گونه که در جدول ۱.۱ آورده شده است، با نشانه‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

^{۱۰}Muon

^{۱۱}Tauon

^{۱۲}Neutrino

^{۱۳}Flavour

u برای کوارک بالا^{۱۴}، d برای کوارک پایین^{۱۵}، s برای کوارک شگفت^{۱۶}، c برای کوارک چارم^{۱۷}، b برای کوارک ته^{۱۸} و t برای کوارک سر^{۱۹}.

کوارک‌ها برخلاف لپتون‌ها به صورت آزاد نمی‌توانند باشند. آنها فقط در ترکیباتی مانند uud یافت می‌شوند. پروتون‌ها و نوترون‌ها از سبک‌ترین کوارک‌ها " u "، " d " ساخته شده‌اند. پروتون از uud تشکیل شده است و نوترون ddu . کوارک‌های سنگین‌تر هم در شکل‌گیری ذرات شرکت می‌کنند. اما بسیار ناپایدار بوده و به سرعت به ترکیبات u و d واپاشیده می‌شوند. فقط در شتاب‌دهنده‌های ساخت بشر و یا به طور طبیعی در پرتوهای کیهانی می‌توان گونه‌های مختلف کوارک‌های سنگین و ناپایدار را مشاهده نمود.

کوارک‌ها علاوه بر طعم، درجه‌ی آزادی دیگری به نام رنگ^{۲۰} دارند. هر طعم از کوارک در سه رنگ متفاوت است.

همان‌گونه که پیش از این گفتیم مدل استاندارد علاوه بر ذرات برهم‌کنش‌های بنیادی را نیز فرمول‌بندی می‌کند. بر طبق این مدل چهار برهم‌کنش بنیادی وجود دارد:

^{۱۴}Up

^{۱۵}Down

^{۱۶}Strange

^{۱۷}Charm

^{۱۸}Bottom

^{۱۹}Top

^{۲۰}Colour

جدول ۲.۱ : بوزون‌های حامل

اسپین/پاریته	حامل	برهم‌کنش
1^-	گلوئون، G	قوی
1^-	فوتون، γ	الکترومغناطیسی
1^+ ، 1^-	Z^0 ، W^\pm	ضعیف
2^+	گراویتون، g	گرانشی

۱. برهم‌کنش قوی

۲. برهم‌کنش الکترومغناطیسی

۳. برهم‌کنش ضعیف

۴. برهم‌کنش گرانشی

برهم‌کنش ذرات مادی (فرمیون‌ها) توسط تبادل نوعی دیگر از ذرات که ذاتاً بوزون هستند انجام می‌شود. به این ذرات، ذرات حامل^{۲۱} گفته می‌شود. در جدول ۱.۲ بوزون‌های حامل نیرو آورده شده‌اند. هر برهم‌کنش نوع یا انواع حامل و هم‌چنین بار خاص خود را دارا است. به عنوان مثال بار برهم‌کنش الکترومغناطیسی همان بارهای آشنای مثبت و منفی هستند. بار مسئول برهم‌کنش قوی، رنگ نام دارد. سه نوع رنگ تا کنون پیش‌بینی شده که شامل سبز، قرمز و آبی می‌باشند. بار مربوط به برهم‌کنش ضعیف، طعم خوانده می‌شود. بار الکترومغناطیسی و رنگ همواره دارای بقا هستند و بدون در نظر گرفتن نوع برهم‌کنش مقدار کل آنها ثابت خواهد ماند[۳]. با استفاده از نمودارهای فاینمن این نکته به راحتی قابل نمایش است، به این صورت که بار ورودی به هر گره با بار خروجی از آن برابر است. اما در برهم‌کنش‌های ضعیف طعم پایستار نمی‌ماند، هر چند در سایر برهم‌کنش‌ها این نوع بار پایستار می‌ماند. ذرات حاملی که در طی انجام برهم‌کنش‌ها مبادله می‌شوند مجازی هستند،

^{۲۱}Force Carrier

زیرا با تابش یک ذره توسط یک ذره منفرد امکان حفظ پایستاری انرژی و تکانه وجود ندارد. اما با محدود کردن این نقض پایستاری با اصل عدم قطعیت، این مقدار قابل اندازه‌گیری نیست. به عبارت دیگر ذرات حامل در طی برهم‌کنش قابل مشاهده نیستند و مجازی خوانده می‌شوند. می‌توان نتیجه گرفت که اگر ذره حامل یک برهم‌کنش جرم زیادی داشته باشد امکان طی مسافت زیادی نخواهد داشت، به عبارت دیگر برد برهم‌کنش کوتاه خواهد شد.

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.1)$$

$$\Delta P \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.1)$$

این اتفاق در مورد برهم‌کنش ضعیف می‌افتد. ذرات حامل این برهم‌کنش (W^\pm, Z^0) جرم بسیار زیادی دارند بنابراین برهم‌کنش ضعیف کوتاه برد است. ذره برهم‌کنش قوی گلوئن^{۲۲} نام دارد. گلوئن‌ها برعکس فوتون که حامل بار نیستند، رنگ دارند بنابراین با یکدیگر برهم‌کنش قوی انجام می‌دهند. این امر بررسی برهم‌کنش قوی را پیچیده‌تر می‌کند. پتانسیل برهم‌کنش قوی دارای جمله‌ای با وابستگی خطی به فاصله نسبی ذرات است بنابراین با افزایش فاصله انرژی سیستم افزایش می‌یابد. بنابراین برای ایجاد سیستمی با رنگ کل غیر صفر یا یک نیاز به انرژی بی‌نهایت داریم! وجود چنین دستگاهی در شرایط عادی امکان‌پذیر نیست. به این پدیده محدودیت رنگ^{۲۳} گفته می‌شود. در شرایط عادی با دور شدن دو ذره دارای رنگ، گلوئن مبادله شونده جرمی بیش از جرم یک جفت کوارک پیدا کرده و به سرعت به یک کوارک و پادکوارک واپاشی می‌کند. نیمه عمر هر کدام از برهم‌کنش‌ها بسته به شدت آن، متغیر است. نیمه عمر معمول برهم‌کنش‌های قوی $10^{-23} s$ ، نیمه عمر برهم‌کنش الکترومغناطیسی $10^{-16} s$ و نیمه عمر برهم‌کنش ضعیف $10^{-8} s$ است.

^{۲۲} Gloun

^{۲۳} Colour Confinement

فصل ۲

ستارگان فشرده

صحبت درباره‌ی ستارگان فشرده^۱ از جایی آغاز می‌گردد که بحث درباره‌ی تحول ستارگان معمولی در آنجا پایان می‌یابد.

ستاره توده‌ی وسیعی از گرد و غبار و گاز است که نیروی گرانشی باعث جذب این گرد و غبار و در نهایت به فروریزش^۲ ستاره به درون خود منجر می‌شود. انقباض ستاره تا جایی پیش می‌رود که نیرویی از داخل با فشار گرانشی مخالفت کند و ستاره را به تعادل برساند، که در عموم ستاره‌ها این فشار داخلی از انفجارات هسته‌ای و واکنش‌های هم‌جوشی ایجاد می‌شود و از فروریزش ستاره به درون خود جلوگیری می‌کند. اگر سوخت یک ستاره که بیشتر هیدروژن است به اتمام برسد، ستاره مقاومت خود در مقابل فشار گرانشی را از دست می‌دهد و به یکی از سه حالت کوتوله‌ی سفید، ستاره‌ی نوترونی و سیاه‌چاله تبدیل می‌شود، این که ستاره به کدام حالت تبدیل شود بستگی به جرم ستاره‌ای دارد.

ستاره‌های نوترونی، ستاره‌هایی فشرده هستند که در آنها طی واکنش‌های ضعیف الکترون و پروتون به نوترون تبدیل شده و گاز تبهگن نوترونی ایجاد می‌شود. جرم این نوع ستارگان نزدیک جرم

^۱ Compact Stars

^۲ Collapse

خورشید $M \simeq 1/4 M_{\odot}$ است، در حالی که شعاعشان $10^{15} \sim$ بار کوچک‌تر از شعاع خورشید است. به همین علت ستاره‌های نوترونی انرژی گرانشی بسیار زیادی دارند. چگالی جرمی میانگین آنها $\rho \simeq \frac{3M}{4\pi R^3} \simeq 7 \times 10^{14} \text{ gcm}^{-3}$ است که در آن $\rho_0 = 2/8 \times 10^{14} \text{ gcm}^{-3}$ چگالی اشباع هسته‌ای است [۴، ۵]. چگالی مرکزی این نوع از ستاره حتی بیش از این بوده و تا $(10 - 20)\rho_0$ نیز می‌رسد. ستارگان فشرده دو تفاوت اساسی با ستاره‌های نرمال دارند. اول این‌که آنها سوخت هسته‌ای نمی‌سوزانند و نمی‌توانند از خودشان در مقابل رُمبش گرانشی که با تولید فشار گرمایی ایجاد می‌شود، محافظت کنند. دومین ویژگی متمایزکننده‌ی ستاره‌های فشرده از ستاره‌های معمولی، اندازه‌ی کوچک آنها است. ستاره‌های فشرده شعاع بسیار کوچک‌تری نسبت به ستاره‌های نرمال با جرمی در همان حدود داشته و بنابراین گرانش سطحی بسیار قوی را دارا هستند. به علت چگالی بسیار زیاد ستارگان فشرده، مطالعه‌ی آنها نیاز به فهم عمیق فیزیکی ساختار ماده و طبیعت نیروهای بین ذره‌ای دارد.

ستاره‌های نوترونی شامل دو گونه هستند:

- ۱- ستاره‌های نوترونی عادی^۳ که دارای ماده هادرونی در بخش‌های خارجی هستند و در سطح چگالی و فشار صفر دارند یعنی خود مقید^۴ نیستند. این نوع از ستاره‌های نوترونی در هسته خود دارای مواد شگفت مانند کائون^۵ و پیون^۶ و احتمالاً کوارک‌های آزاد هستند.
- ۲- ستاره‌های ماده کوارکی شگفت^۷ که تقریباً تمام آن از ماده کوارکی شگفت تشکیل شده، به جز لایه‌ی نازکی از ماده هسته‌ای که در سطح آن قرار دارد [۷]. ستاره‌های SQM تقریباً در تمامی مدل‌هایی که جهت بررسی آنها استفاده شده معادله حالت خود مقید دارند، یعنی در چگالی و انرژی غیر صفر فشارشان صفر پیش بینی شده است. خصوصیت مشترک دو گونه در مراحل اولیه تشکیل

^۳Normal Neutron star

^۴Self bound

^۵Kaon

^۶Pion

^۷Strange Quark Matter Stars (SQM Star)

و انباشت ۹۹ درصدی جرم در هسته‌هایشان است.

۱.۲ ساختار ستاره‌ی نوترونی

بر طبق نظریه‌های کنونی ستاره‌ی نوترونی می‌تواند به اتمسفر[^] و چهار قسمت داخلی مهم تقسیم شود:

۱. پوسته‌ی بیرونی،

۲. پوسته‌ی درونی،

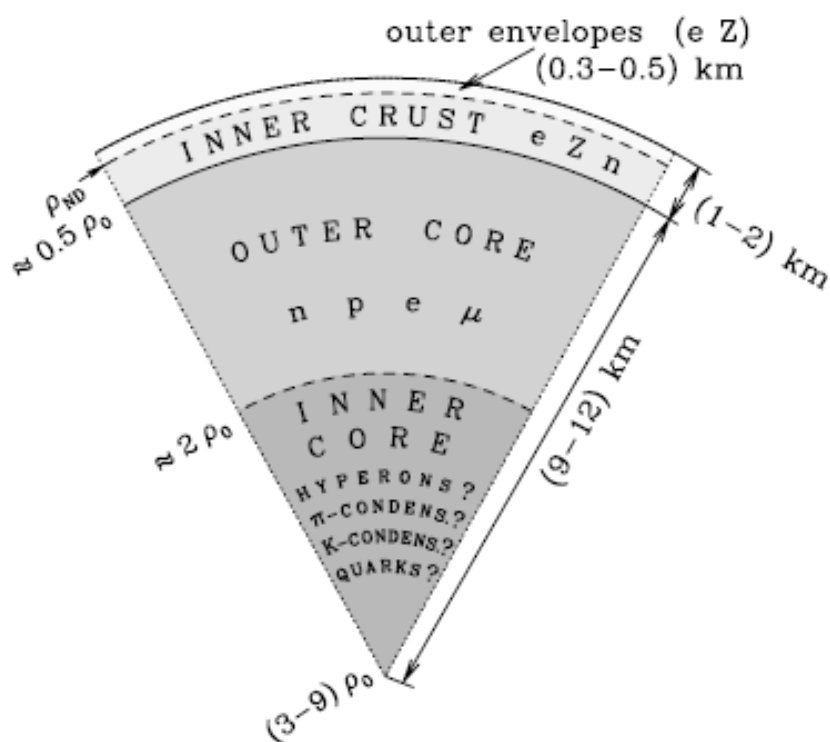
۳. هسته‌ی بیرونی،

۴. هسته‌ی درونی.

همان‌گونه که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است.

• **اتمسفر** یک لایه‌ی پلاسمای نازک است که طیف تابش گرمایی الکترومغناطیسی ستاره‌ی نوترونی را شکل می‌دهد. گستره‌ی گرمایی، تابش و قطبش پدیدار شده به طور نظری می‌تواند با حل مسئله‌ی گذار گرمایی در لایه‌های اتمسفر تعیین شود. این تابش‌ها اطلاعات با ارزشی در تعیین پارامترهای لایه‌های سطحی (دمای موثر سطحی، گرانش سطحی، ترکیبات شیمیایی، شدت و هندسه‌ی میدان مغناطیسی سطحی) و همچنین جرم و شعاع ستاره‌ی نوترونی را دربر دارند. ضخامت اتمسفر می‌تواند از چند ده سانتی‌متر در یک ستاره‌ی نوترونی داغ (با دمای موثر سطحی $T_s \sim 3 \times 10^6 K$) تا کم‌تر از چند میلی‌متر در یک ستاره‌ی نوترونی سرد ($T_s \sim 3 \times 10^5 K$) تغییر کند. ستاره‌های نوترونی خیلی سرد یا شدیداً مغناطیس شده ممکن است سطح مایع یا جامد داشته باشند.

[^]Atmosphere



شکل ۱.۲: ساختار ستاره‌ی نوترونی [۴]

• پوسته‌ی بیرونی پوسته‌ی بیرونی از لایه‌ی زیرین اتمسفر تا لایه‌ای با چگالی

$\rho = 4 \times 10^{11} \text{ gcm}^{-3}$ گسترده می‌شود. ضخامت پوسته‌ی بیرونی در حدود چند صد متر است. و این پوسته از یون‌ها و الکترون‌ها تشکیل شده است و همچنین یک لایه‌ی سطحی خیلی نازکی از این پوسته (حدود چند متر در ستاره‌ی نوترونی داغ) شامل گاز الکترونی تبه‌گن است. در لایه‌های عمیق‌تر، گاز تقریباً ایده‌آل و شدیداً تبه‌گن را تشکیل می‌دهند که در چگالی $\rho \gg 10^6 \text{ gcm}^{-3}$ فوق‌نسبیتی می‌شود. فشار در این ناحیه اساساً توسط الکترون‌ها فراهم می‌شود و در چگالی $\rho \geq 10^4 \text{ gcm}^{-3}$ اتم‌ها توسط این فشار الکترونی کاملاً یونیزه می‌شوند. کسری از غشا به طور کلی جامد است و به همین علت غشا، اغلب پوسته هم نامیده می‌شود. انرژی فرمی الکترونی با افزایش چگالی افزایش می‌یابد که باعث فرآیند گیراندازی بتا در هسته‌های اتمی می‌شود و سیستم را غنی از نوترون‌ها می‌کند این در حالی است که در

قسمت انتهایی غشا، نوترون‌ها شروع به چکه کردن از ساختار هسته‌ای به گاز نوترونی خالص می‌کنند.

- **پوسته‌ی درونی** در حدود یک کیلومتر ضخامت دارد چگالی در پوسته‌ی درونی از $\rho = 4 \times 10^{11} \text{gcm}^{-3}$ در ناحیه‌ی مرزی بالایی تا $0.5\rho_0 \sim$ در قسمت انتهایی پوسته تغییر می‌کند. این پوسته شامل الکترون‌ها، نوترون‌های آزاد و هسته‌های اتمی غنی نوترونی است. مقدار نوترون‌های آزاد با افزایش ρ افزایش می‌یابد. در لایه‌های انتهایی پوسته، در بازه‌ی چگالی از $\frac{1}{3}\rho_0 \simeq$ تا $\frac{1}{4}\rho_0 \simeq$ هسته‌ها ممکن است غیرکروی شوند و یک پوسته‌ی هسته‌ای را شکل دهند اما این نتیجه‌ی یک مدل غیرمستقل است. هسته‌ها در سطح پوسته-هسته ناپدید می‌شوند. نوترون‌های آزاد در پوسته‌ی درونی و نوکلئون‌هایی که در هسته‌ی اتمی محدود شده‌اند می‌توانند در حالت ابرشاره باشند.

- **هسته‌ی بیرونی** چگالی $2\rho_0 \leq \rho \leq 0.5\rho_0$ را دربر می‌گیرد و در حدود چندین کیلومتر ضخامت دارد از نوترون‌ها به همراه ترکیب چند درصدی از پروتون‌ها، الکترون‌ها و با احتمالی از میوئون‌ها (که ماده‌ی $npe\mu$ نامیده می‌شود) تشکیل می‌شود. ویژگی‌های چنین ترکیبی با توجه به شرایط خنثایی بار و تعادل بتا و همچنین مدل میکروسکوپی *many-body* برهم‌کنش‌های هسته‌ای تعیین می‌شود. تعادل بتا، تعادل را با توجه به در نظر گرفتن واپاشی بتای نوترونی و فرآیندهای معکوس آن ایجاب می‌کند. الکترون‌ها و میوئون‌ها گاز فرمی ایده‌آل را تشکیل می‌دهند و نوترون‌ها و پروتون‌هایی که به واسطه نیروهای هسته‌ای برهم‌کنش می‌کنند مایع فرمی شدیداً برهم‌کنش کننده را شکل می‌دهند و همچنین می‌توانند در حالت ابرشاره نیز باشند.

- **هسته‌ی درونی** در چگالی $\rho \geq \rho_0$ ناحیه‌ی مرکزی ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی را تشکیل می‌دهد (در ستاره‌های با جرم پایین، هسته‌ی بیرونی تا مرکز ستاره گسترده می‌شود که به فقدان هسته‌ی درونی منجر می‌شود). هسته‌ی درونی در حدود چندین کیلومتر ضخامت دارد و چگالی مرکزی آن در حدود $(10 - 15)\rho_0$ است. چندین فرضیه پیشگویی‌هایی در مورد حضور فرمیون‌های

جدید و یا چگالی بوزونی در هسته‌ی درونی مطرح کرده‌اند. چهار نظریه اصلی در مورد ساختار هسته‌ی درونی به صورت زیر است:

۱. ماده‌ی هایپرونی

۲. چگالش کائونی

۳. چگالش پیونی

۴. گذار فاز به ماده‌ی کوارکی که از کوارک‌های سبک u ، d و کوارک شگفت s با مخلوطی از الکترون‌ها همراه است [۴، ۵].

۲.۲ ماده کوارکی شگفت در ستاره‌های نوترونی

در مقالات بسیاری نشان داده شده که در مرکز ستاره‌های نوترونی چگالی به γ برابر چگالی استاندارد هسته‌ای ($\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$) می‌رسد. در فشار و چگالی بالا ماده نوکلئونی نسبت به واپاشی ضعیف و تبدیل شدن به ماده کوارکی ناپایدار است [۹]. به عبارت دیگر حالت زمینه^۹ حقیقی مواد، ماده کوارکی شگفت است. این ادعا با نتایج آزمایشگاهی و تجربیات روزمره در تضاد نیست زیرا واپاشی یک هسته سنگین به SQM دارای نیمه عمر $[10^{10}] \text{ yr}$ است و تنها در شرایط خاص این نوع برهم‌کنش به سرعت رخ می‌دهد. همچنین با برون‌یابی محاسبات شبکه‌ی دینامیک رنگ شناس^{۱۰} مشخص شده در چگالی‌های ۳ الی ۵ برابر چگالی استاندارد گذار فاز به ماده کوارکی اتفاق می‌افتد [۱۰، ۱۱]. بنابراین به وقوع پیوستن این گذار و وجود ستاره کوارکی و یا حداقل ایجاد ماده کوارکی در هسته ستاره نوترونی انتظاری دور از واقعیت نیست. در هسته ستاره نوترونی، بعد از گذار فاز، ماده کوارکی عمدتاً از کوارک‌های بالا و پایین و همچنین مقداری کوارک شگفت تشکیل شده است، بنابراین برای حفظ خنثایی الکتریکی چگالی کوارک پایین تقریباً دو برابر کوارک بالاست

^۹Ground State

^{۱۰}Lattice QCD

و کوارک شگفتی بسیار ناچیزی وجود دارد [۵، ۱۴]. درست بعد از گذار، پتانسیل شیمیایی کوارک‌های بالا و پایین بیش از جرم نوع شگفت خواهد بود.

$$\mu_u, \mu_d \geq m_s c^2 = 150 \text{ MeV}. \quad (1.2)$$

بنابراین از نظر انرژی کوارک‌های پایینی که در سطح فرمی قرار دارند میل به واپاشی و تبدیل شدن به کوارک شگفت خواهند داشت.

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e. \quad (2.2)$$

$$u + e \rightarrow d + \nu_e. \quad (3.2)$$

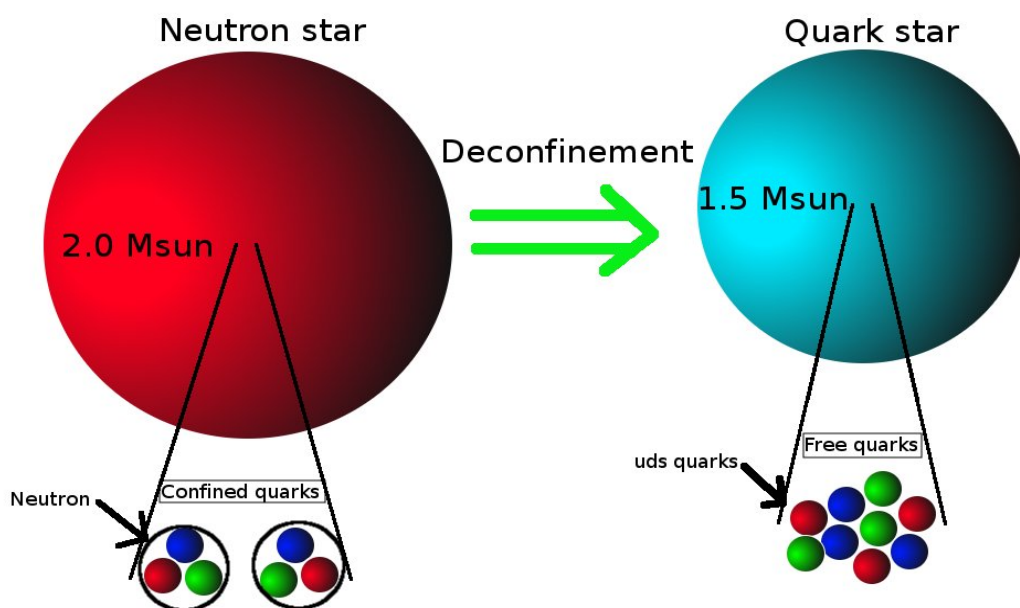
$$u + d \rightarrow s + u. \quad (4.2)$$

$$s + u \rightarrow u + d. \quad (5.2)$$

تولید سایر انواع کوارک‌ها مانند چارم و ته به علت جرم زیادشان محتمل نیست [۱۳، ۱۲]. یکی از احتمالات مورد توجه این است که در اثر آزاد شدن ناشی از تشکیل ماده کوارکی شگفت باعث تبدیل کل ستاره به ماده کوارکی شگفت شود [۱۱]. این ستاره ممکن است به صورت ستاره کوارکی خالص یافت شود. حالت محتمل‌تر وجود لایه‌ای نازک از ماده هسته‌ای در سطح ستاره است، این امر تشخیص ستاره کوارکی را از ستارگان نوترونی دیگر مشکل خواهد کرد. این لایه در صورت نبودن خنثایی الکتریکی در ماده کوارکی به علت نامساوی بودن جرم کوارک‌ها پدید می‌آید. در این حالت الکترون‌ها نیز در ماده کوارکی یافت می‌شوند. چگالی ماده کوارکی در نزدیکی سطح به سرعت صفر خواهد شد، این تغییر شدید تنها در چند فمتومتر اتفاق می‌افتد به طوری که میدان الکتریکی نمی‌تواند پیش از آن از بین برود. چنین میدانی می‌تواند پوسته‌ای به جرم $10^{-5} M_{\odot}$ را بر روی ستاره نگه دارد [۱۵، ۱۶، ۱۷]. مقدار کوارک شگفت تا زمانی که دستگاه به تعادل شیمیایی برسد افزایش خواهد یافت.

همان‌گونه که در بالا گفته شد در مرحله گذار فاز تولید ماده کوارکی در اثر برهم‌کنش ضعیف زیر:

$$d + u \rightarrow s + u. \quad (6.2)$$



شکل ۲.۲: ستاره‌ی کوارکی [۱۹]

کوارک شگفت تولید می‌شود، تعادل شیمیایی در مدت کوتاهی $10^{-7} s$ حاصل خواهد شد [۲۹].

بنابراین با فرض در تعادل شیمیایی بودن ماده کوارکی شگفت خواهیم داشت:

$$\mu_d = \mu_s. \quad (7.2)$$

قید دیگری که باید بر سیستم اعمال کرد شرط خنثایی الکتریکی است:

$$\sum_{i=u,d,s} \rho_i q_i = 0, \quad (8.2)$$

$$-\frac{1}{3}\rho_d - \frac{1}{3}\rho_s + \frac{2}{3}\rho_u = 0, \quad (9.2)$$

بنابراین به سادگی می‌توان استنباط کرد که در دمای صفر و با صرف نظر کردن از الکترون‌ها چگالی

هر سه کوارک یکسان خواهد بود:

$$\rho_s = \rho_d = \rho_u. \quad (10.2)$$

۳.۲ تپ اختر

تپ اخترها^{۱۱} ستارگان نوترونی چرخان هستند که تابش های شدید و متناوب گسیل می کنند. به علت میدان مغناطیسی قوی شان به راحتی قابل رصد هستند. اولین رصد تپ اختر در ۱۹۶۸ انجام گرفت. بسیار زود تشخیص داده شد که این تابش ها ناشی از ستارگان در حال چرخش و فشرده هستند. هنگام رمبش ستاره پایستار شار مغناطیسی باعث ایجاد میدان مغناطیسی قوی می شود. این میدان مغناطیسی قوی و چرخش ستاره سبب تولید تابش های الکترومغناطیسی با تناوب پایین خواهد شد، این پدیده در طی فرآیندی که هنوز کاملاً شناخته نشده تابش قابل رصد الکترومغناطیسی را در قطب های ستاره ایجاد می کند. عموماً قطب های مغناطیسی و جغرافیایی بر هم منطبق نیستند بنابراین اگر بطور تصادفی در مسیر چنین پرتوهایی قرار بگیریم تابشی با شدت متناوب، با دوره چرخش ستاره را مشاهده خواهیم کرد. تابش الکترومغناطیس به انرژی نیاز دارد. این انرژی با کند شدن چرخش ستاره در اثر مقاومت مغناطیسی فضایی که در آن میدان مغناطیسی ستاره پراکنده شده، تأمین می شود. با چنین مدلی و با استفاده از نرخ کند شدن تناوب گردش ستاره محققین می توانند میدان مغناطیسی ستاره را محاسبه کنند و با استفاده از خواص آن می توان ساختار ستاره را حدس زد.

تپ اخترها بسته به محدوده ی طیفی که تابش می کنند در سه گروه قرار می گیرند: رادیو پالسارها^{۱۲}، تپ اخترهای پرتو ایکس^{۱۳} و تپ اخترهای پرتو گاما^{۱۴} که به آنها مگتتار هم می گویند. برخی ستاره های نوترونی تابش هایی در تمام طیف ها نشان داده اند. شدت میدان مغناطیسی در پالسارها در حدود ۱۰^{۱۲} گاوس و در مگتتارها ۱۰^{۱۵} گاوس می باشد.

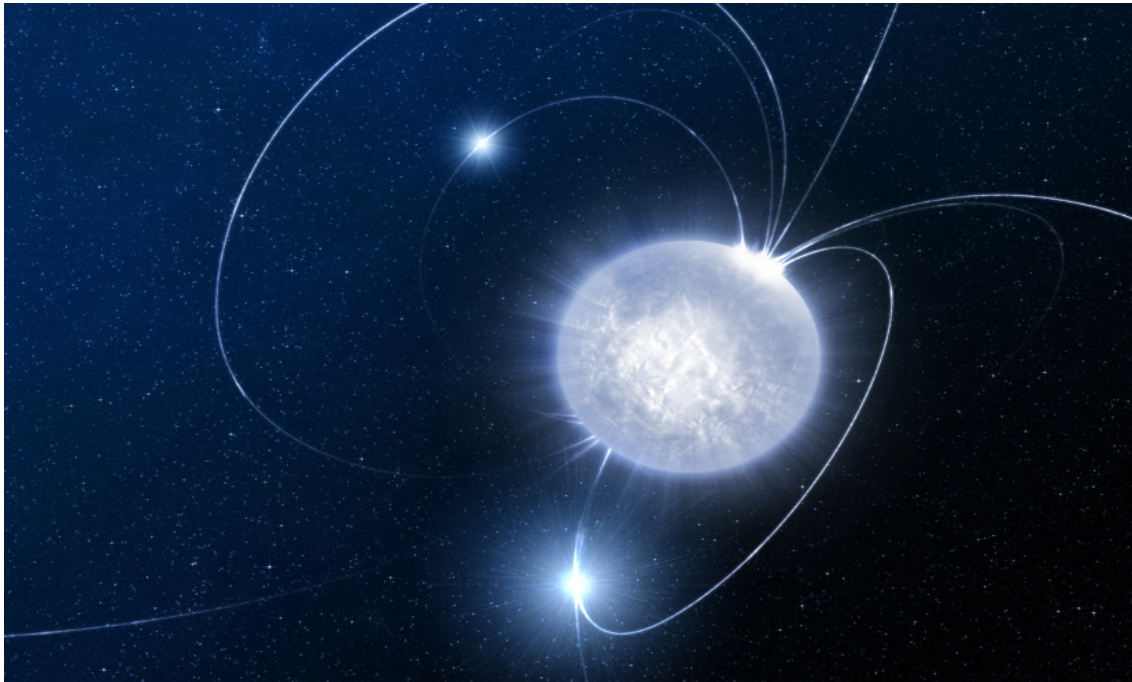
این ستارگان را همچنین نسبت به قدرت فعالیتشان می توان تقسیم بندی کرد. می توان قدرت شتاب، قدرت چرخش و قدرت میدان مغناطیس آنها را در نظر گرفت [۴].

^{۱۱}Pulsar

^{۱۲}Radio pulsars

^{۱۳}X-ray pulsar

^{۱۴}Gamma-ray pulsar



شکل ۳.۲: مگنتار [۱۸]

منشأ میدان مغناطیسی در ستاره‌های نوترونی مسئله‌ای است که مدت زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. یافته‌های اخیر از مگنتارها، ستاره‌های نوترونی با قدرت میدان مغناطیسی بیش از $B_{cr} = \frac{m_e c^2}{e \hbar} \sim 4/4 \times 10^{13} G$ (و نوعاً $10^{15} G$ ~)، موجب ایجاد انگیزه برای دانستن منشأ میدان مغناطیسی قوی آن‌هاست. پیش از این باور بر این بود که میدان مغناطیسی ستاره‌های نوترونی از منشأ (پیدایش‌شان) به ارث رسیده است، ولی میدان مغناطیسی غیرعادی مگنتارها، نظریه‌پردازان را مجبور به تجدید نظر دوباره‌ی آن می‌کند [۶].

فصل ۳

سیستم بس ذره‌ای

برای بدست آوردن پارامترهای آماری و ترمودینامیکی دستگاه پر جمعیتی مانند یک ستاره‌ی فشرده ناگزیر باید از رهیافت‌های بس-ذره‌ای^۱ استفاده کرد. به همین منظور در این پایان‌نامه از روش بتا-گلدستون^۲ استفاده شده است. در این رهیافت ابتدا ذرات دستگاه را بدون برهم‌کنش در نظر گرفته و آنها را با توجه به اصل طرد در ترازهای انرژی قرار می‌دهند. سپس با در نظر گرفتن ذرات به عنوان جفت‌های مستقل، انرژی برهم‌کنش بین آنها را به سیستم اضافه می‌کنیم. اثر سیستم بر هر جفت تنها از طریق اصل طرد پاولی^۳ است، به این صورت که تراز اشغال شده توسط یک جفت، در دسترس جفت‌های دیگر نخواهد بود. به این ترتیب دستگاهی از ذرات آزاد خواهیم داشت که انرژی برهم‌کنش جفت‌های مستقل به آن اضافه شده است.

در جهان فیزیکی با سیستم‌هایی سروکار داریم که دارای ذرات برهم‌کنش کننده‌ی بی‌شماری هستند. برای توصیف چنین سیستم‌هایی لازم است که معادله‌ی شرودینگر آنها حل شود. اما این کار در عمل کار دشواری است. بنابراین لازم است که به روش‌های دیگری روی بیاوریم. یکی از این روش‌ها، روش جفت‌های مستقل است. به این منظور در اینجا، ابتدا توضیحی کوتاه درباره‌ی سیستم‌های

^۱Many Body Approach

^۲Bethe-Goldstone

^۳Paouli Exclusion Principle

N -ذره‌ای ارائه می‌دهیم. از آنجا که در روش مورد بحث ذرات به عنوان جفت‌های مستقل در نظر گرفته می‌شوند، نگاهی اجمالی به سیستم‌های دو ذره‌ای داشته سپس با در نظر گرفتن پتانسیلی وابسته به فاصله‌ی نسبی ذرات، این مدل را به واقعیت نزدیک‌تر می‌کنیم. برای حل معادله‌ی شرودینگر چنین سیستمی ناچار از روش‌های تخمینی کمک می‌گیریم که ما در اینجا نظریه‌ی اختلال را شرح می‌دهیم. اکنون مقدمات لازم برای توصیف رهیافت بتا-گلدستون که در چارچوب نظریه‌ی جفت‌های مستقل است فراهم شده و می‌توانیم فرمول‌بندی کلی آن را شرح دهیم. در بخش بعد، این رهیافت را در سیستم مختصات کروی، که برای حل مسئله‌ی مدل مورد نظر در این پایان‌نامه مناسب است، می‌آوریم.

۱.۳ سیستم N -ذره‌ای

مطالعات کوانتومی درباره‌ی ذره‌ی منفرد را به آسانی می‌توان به دستگاه N -ذره‌ای تعمیم داد. N ذره با تابع موج $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ توصیف می‌شود و به قسمی بهنجار می‌شود که

$$\int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_N |\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2 = 1. \quad (1.3)$$

تعبیر $|\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2$ تعمیم تعبیر $|\psi(x)|^2$ است، یعنی چگالی احتمال برای یافتن ذره ۱ در x_1 ، ذره ۲ در x_2 ، ...، و ذره N در x_N را نتیجه می‌دهد. گسترش زمانی چنین تابع موجی با حل معادله‌ی دیفرانسیل

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, x_2, \dots, x_N; t) = H \psi(x_1, x_2, \dots, x_N; t), \quad (2.3)$$

داده می‌شود که در آن هامیلتونی باز به تناظر با شکل کلاسیک

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + v(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (3.3)$$

بنا می‌شود [۲۰].

حل دقیق معادله‌ی ۲.۳ در عمل کار بسیار دشواری است. از این رو به روش‌های تخمینی روی می‌آوریم. برای حل تقریبی این‌گونه معادلات مدل‌های مختلفی ارائه شده که می‌توان به کوانتس مرتبه‌ی دوم^۴، مدل هارتری-فوک^۵ و نظریه‌ی اختلال اشاره کرد. ما در اینجا از روش جفت‌های مستقل که منجر به رهیافت بتا-گلدستون می‌شود؛ استفاده کرده‌ایم. برای بررسی این مدل ابتدا مقدمه‌ای کوتاه درباره‌ی سیستم‌های دو ذره‌ای خواهیم گفت.

۲.۳ دستگاه دو ذره‌ای

برای دو ذره‌ای که با هم برهم‌کنش نمی‌کنند هامیلتونی ساده

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}, \quad (۴.۳)$$

را داریم. می‌توانیم انتظار داشته باشیم که چون دو ذره مستقل از هم هستند، احتمال یافتن یکی از آن دو در x_1 و دیگری در x_2 عبارت است از حاصل ضرب دو احتمال مستقل

$$P(x_1, x_2) = P(x_1)P(x_2). \quad (۵.۳)$$

از این‌رو انتظار داریم که جواب

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x_1, x_2) = Eu(x_1, x_2), \quad (۶.۳)$$

باید به صورت

$$u(x_1, x_2) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2), \quad (۷.۳)$$

^۴Second Quantization

^۵Hartree-Fock model

جدایی پذیر باشد. با جایگزینی این رابطه در ۶.۲ می توان نوشت:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2 \phi_1(x_1)}{dx_1^2} = E_1 \phi_1(x_1),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2 \phi_2(x_2)}{dx_2^2} = E_2 \phi_2(x_2). \quad (۸.۳)$$

که در آن $E = E_1 + E_2$ است. این دو معادله به آسانی حل می شوند و داریم:

$$u(x_1, x_2) = C e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}, \quad (۹.۳)$$

که در آن

$$k_1 = \frac{2m_1 E_1}{\hbar^2}, \quad k_2 = \frac{2m_2 E_2}{\hbar^2}. \quad (۱۰.۳)$$

حال جواب را با استفاده از مختصات

$$x = x_1 - x_2, \quad (۱۱.۳)$$

و

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (۱۲.۳)$$

یعنی فاصله ی بین ذرات و مختصات مرکز جرم بازنویسی می کنیم. و با معرفی

$$P = k_1 + k_2, \quad (۱۳.۳)$$

و

$$k = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}, \quad (۱۴.۳)$$

جواب به شکل زیر خواهد بود:

$$u(x_1, x_2) = C e^{iP \cdot X} e^{ikx}, \quad (۱۵.۳)$$

که در آن P عدد موج متناظر با اندازه حرکت کل و k عدد موج متناظر با اندازه حرکت نسبی است. عامل اول حرکت مرکز جرم را نمایش می‌دهد و عامل دوم تابع موج داخلی است. انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E = \frac{\hbar^2 P^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\hbar^2 k^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (16.3)$$

عامل اول انرژی دستگاه دو ذره‌ای است که جرم آن $m = m_1 + m_2$ و با اندازه حرکت کل به طور آزاد حرکت می‌کند و جمله‌ی دوم انرژی داخلی است. چنانچه جرم کاهش یافته‌ی μ را معرفی کنیم:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (17.3)$$

آنگاه این جمله عبارت است از $\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ که انرژی ذره‌ی منفرد است، یعنی انرژی ذره‌ی آزادی به جرم μ و اندازه حرکت $\hbar k$ است [۲۰].

۱.۲.۳ دستگاه دو ذره‌ای برهم‌کنشی

همیلتونی را با افزودن پتانسیلی که به فاصله‌ی نسبی دو ذره بستگی دارد تغییر می‌دهیم.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x_1, x_2) + v(x_1, x_2)u(x_1, x_2) = Eu(x_1, x_2). \quad (18.3)$$

با استفاده از مختصات مرکز جرم و فاصله‌ی نسبی که در ۱۱.۲ تعریف کردیم و آن‌ها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x_1 = X - \frac{\mu}{m_1}x, \quad (19.3)$$

$$x_2 = X - \frac{\mu}{m_2}x. \quad (20.3)$$

اندک عملیات جبری نشان می‌دهد که معادله‌ی ۱۸.۳ به شکل زیر در می‌آید:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x) \right) u(x, X) = Eu(x, X). \quad (21.3)$$

باز هم از جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. پتانسیل فقط تابعی از x است. با تعریف

$$u(x, X) = \Phi^{CM}(X)\phi(x), \quad (22.3)$$

پیدا می‌کنیم :

$$\Phi^{CM}(X) = e^{iPX}. \quad (23.3)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$u(x, X) = e^{iPX}\phi(x). \quad (24.3)$$

با جاگذاری آن در معادله‌ی ۱۸.۲ و جداسازی به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + v(x)\phi(x) = \epsilon \phi(x). \quad (25.3)$$

این همان معادله‌ی شرودینگر تک‌ذره‌ای با جرم کاهش‌یافته‌ی μ و انرژی ϵ است [۲۰].

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$E = \epsilon + \frac{\hbar^2 P^2}{2M}.$$

می‌بینیم که مسئله‌ی حل سیستم دو ذره‌ای تبدیل به حل قسمت نسبی آن ، معادله‌ی ۲۵.۳، می‌شود و برای این منظور روش‌های تقریبی مختلفی وجود دارد. در بخش بعد مدل اختلال که یکی از مدل‌های حل تقریبی است ارائه شده است.

۳.۳ نظریه اختلال

در این بخش سعی می‌شود تا شکل کلی نظریه اختلال نمایش داده شود زیرا این نظریه زمینه‌ساز معرفی رهیافت بتا-گلدستون است.

یک سیستم با هامیلتونی زیر را در نظر بگیرید:

$$H = H_0 + V, \quad (26.3)$$

H_0 هامیلتونی مختل نشده یا همان هامیلتونی مدل و V جمله‌ی اختلالی است. برای H_0 داریم:

$$H_0|\phi_0\rangle = E_0|\phi_0\rangle, \quad (27.3)$$

و

$$H_0|\phi_i\rangle = E_i|\phi_i\rangle, \quad (28.3)$$

یا

$$(H_0 - E_i)|\phi_i\rangle = 0. \quad (29.3)$$

E_i ها ویژه مقادیر H_0 و $|\phi_i\rangle$ ها ویژه حالت بهنجار H_0 هستند که آنها را دانسته فرض می‌کنیم. E_0 ویژه مقدار حالت پایه‌ی سیستم مختل نشده یعنی $|\phi_0\rangle$ است که غیر تبهگن فرض می‌شود. می‌خواهیم با استفاده از هامیلتونی بدون اختلال به ویژه مقادیر تقریبی هامیلتونی مختل شده زیر دست یابیم.

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (30.3)$$

یا

$$(E - H_0 - V)|\Psi\rangle = 0. \quad (31.3)$$

در اینجا $|\Psi\rangle$ را طوری بهنجار می‌کنیم که تصویرش در حالت پایه بدون اختلال برابر یک شود

$$\langle\phi_0|\Psi\rangle = 1. \quad (32.3)$$

با حل معادلات ۲۹.۳ و ۳۱.۳ می توان نوشت:

$$\langle \phi_0 | H_0 | \Psi \rangle = E_0 \langle \phi_0 | \Psi \rangle. \quad (33.3)$$

در نتیجه تأثیر اختلال در انرژی به صورت:

$$E - E_0 = \langle \phi_0 | V | \Psi \rangle, \quad (34.3)$$

خواهد بود. برای بدست آوردن $|\Psi\rangle$ می توان از ویژه حالت های اختلال نیافته استفاده کرده و آن را بسط داد.

$$|\Psi\rangle = |\phi_0\rangle + \frac{Q}{\varepsilon - H_0} (\varepsilon - E + V) |\Psi\rangle. \quad (35.3)$$

با استفاده از بسط بدست آمده می توان نمو انرژی ناشی از اختلال در تراز پایه را بدست آورد.

$$E - E_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_0 | V \left\{ \frac{Q}{\varepsilon - H_0} (\varepsilon - E + V) \right\}^n | \phi_0 \rangle. \quad (36.3)$$

در روابط فوق ε پارامتری اختیاری است و برای راحتی در حل مسئله در نظر گرفته می شود. در نظریه بریلوئن-ویگنر برابر ویژه مقدار هامیلتونی اختلالی $\varepsilon = E$ در نظر گرفته می شود و Q به کمک عملگر تصویر و بصورت $Q = (\hat{I} - |\phi_0\rangle\langle\phi_0|)$ تعریف می شود. با فرض های در نظر گرفته شده معادلات ۳۵.۳ و ۳۶.۳ به شکل زیر در خواهند آمد:

$$\begin{aligned} E - E_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_0 | V \left\{ \frac{Q}{\varepsilon - H_0} \right\}^n | \phi_0 \rangle, \\ |\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |\phi_0\rangle \left\{ \frac{Q}{\varepsilon - H_0} V \right\}^n | \phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (37.3)$$

۴.۳ تخمین جفت‌های مستقل

در بخش قبلی مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی و تابع موج سیستم با استفاده از نظریه‌ی اختلال و توابع موج تک ذره‌ای محاسبه شد. اگر نیروی دو ذره در فواصل کوچک قوی باشد، وارد کردن اثر برهم‌کنش در تابع موج مهم می‌شود. این موضوع، یعنی وارد کردن برهم‌کنش در تابع موج، در چارچوب تخمین جفت‌های مستقل نیز انجام می‌شود. به این منظور از معادلات بتا گلدستون استفاده می‌کنیم.

۱.۴.۳ رهیافت بتا-گلدستون

معادله‌ی شرودینگر برای دو فرمیون در دریای فرمی با پتانسیل $\lambda v(x_1, x_2)$ برهم‌کنش دارند در نظر بگیرید. اثر محیط بس-ذره^۱، بر این دو ذره با اصل طرد است که حالت‌های میانی مجاز را محدود می‌کند. با فرض $m_1 = m_2$ معادله‌ی شرودینگر

$$[T_1 + T_2 + \lambda v(1, 2)]\psi(1, 2) = E \psi(1, 2),$$

با استفاده از روابط به دست آمده در نظریه‌ی اختلال در شکل کمی متفاوت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$\psi(1, 2) = \phi_0(1, 2) + \sum_{n \neq 0} \phi_n(1, 2) \frac{1}{E - E_n} \langle \phi_n | \lambda v | \psi(1, 2) \rangle, \quad (38.3)$$

$$E - E_0 = \langle \phi_0 | \lambda v | \psi(1, 2) \rangle. \quad (39.3)$$

که در آن ویژه حالت‌های ϕ_n ویژه توابع H_0 هستند.

$$H_0 \phi_n = (T_1 + T_2) \phi_n = E_n \phi_n. \quad (40.3)$$

^۱Many - particle medium

یکی بودن این دو شکل هامیلتونی، با به کار بردن عملگر $H_0 - E = T_1 + T_2 - E$ در معادله‌ی ۲۶.۴ و استفاده از رابطه‌ی کامل بودن ویژه‌حالت‌های H_0 تأیید می‌شود. معادله‌ی ۲۷.۴ نیز همان شرط بهنجارش برای ψ است:

$$\langle \phi_0 | \psi \rangle = 1. \quad (۴۱.۳)$$

و سایر مقدارهای چشم‌داشتی را نیز از رابطه‌ی $\langle O \rangle = \frac{\langle \psi | O | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ باید به دست آوریم. اگر سیستم به یک جعبه‌ی بزرگ با حجم V محدود شده باشد، توابع موج مختل نشده، امواج تخت با شرایط مرزی زیر خواهند بود:

$$\phi_{k_1 k_2}(1, 2) = V^{-\frac{1}{2}} e^{ik_1 \cdot x_1} V^{-\frac{1}{2}} e^{ik_2 \cdot x_2}. \quad (۴۲.۳)$$

برای سادگی بحث می‌توانیم از اثر اسپین چشم‌پوشی کرده و با دو ذره، مانند ذره‌های تمیز پذیر رفتار کنیم. اکنون قسمت بس-ذره‌ای مسئله با محدود کردن جمع روی حالت‌های میانی در رابطه‌ی ۲۶.۴ به صورت زیر به کار برده می‌شود:

$$\sum_n \rightarrow \sum_{k_1, k_2 > k_F}$$

زیرا تمام حالت‌های دیگر در دریای فرمی قبلاً پر شده‌اند.

با توجه به این که در یک محیط همگن تکانه‌ی کل دو ذره پایسته است، می‌توانیم تعاریف زیر را معرفی کنیم:

$$P = k_1 + k_2, \quad k = \frac{1}{2}(k_1 - k_2). \quad (۴۳.۳)$$

و

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad x = (x_1 - x_2). \quad (۴۴.۳)$$

و

$$\mathcal{V} = \frac{m}{\hbar^2} v, \quad (۴۵.۳)$$

و رابطه‌ی انرژی نیز به شکل زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{\hbar^2 P^2}{4m} + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m}. \quad (46.3)$$

نیز جواب معادله‌ی شرودینگر به شکل زیر خواهد بود:

$$\psi(1, 2) = V^{-1/2} e^{P \cdot R} V^{-1/2} \psi_{iP,k}(x). \quad (47.3)$$

که در آن قسمت اول، حرکت مرکز جرم و قسمت دوم، تابع موج داخلی جفت برهم‌کنشی است. توجه داریم که اگر ذره‌ها از ابتدا در دریای فرمی باشند، P نمی‌تواند بیشتر از $2k_F$ شود. جاگذاری رابطه‌ی 35.4 در رابطه‌های 26.4 و 27.4 نتایج زیر را به دست می‌دهد:

$$\psi_{P,k}(x) = e^{ik \cdot x} + \lambda \int_{\Gamma} \frac{d^3 t}{(2\pi)^3} e^{it \cdot x} \frac{1}{\kappa^2 - t^2} \langle t | \mathcal{V} | \psi_{P,k} \rangle, \quad (48.3)$$

و

$$\kappa^2 - k^2 = \lambda V^{-1} \langle k | \mathcal{V} | \psi_{P,k} \rangle. \quad (49.3)$$

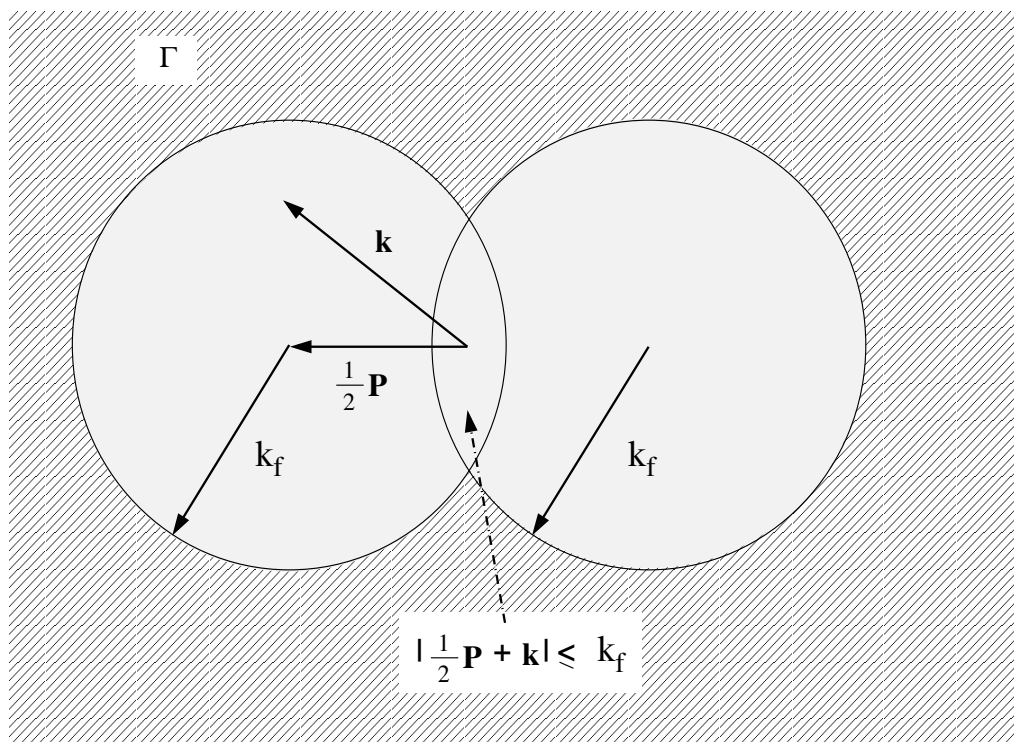
که در آن

$$F \equiv \left| \frac{1}{2} P + k \right| < k_F, \quad (50.3)$$

و

$$\Gamma \equiv \left| \frac{1}{2} P \pm t \right| > k_F, \quad (51.3)$$

ناحیه‌ی Γ خارج کره‌ی فرمی $| \frac{1}{2} P \pm t | > k_F$ و ناحیه‌ی F داخل کره‌ی فرمی $| \frac{1}{2} P + k | < k_F$ است. شکل 1.3.



شکل ۱.۳: ناحیه‌ی انتگرال‌گیری برای معادله‌ی بتا - گلدستون در فضای تکانه.

این معادله‌ها، معادلات بتا - گلدستون^۷ نام دارد که در واقع معادله‌ی شرودینگر برای دو فرمیون در یک گاز فرمی است و اصل طرد پاولی دست‌یابی حالت‌های میانی که پیش از آن توسط سایر فرمیون‌ها اشغال شده‌اند را ممنوع می‌کند [۲۱]. نمو انرژی برای سیستم با جمع روی نمو انرژی جفت‌های برهم‌کنش کننده تعیین می‌شود:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2}^{k_f} \Delta \varepsilon_{k, P}. \quad (52.3)$$

در حالت کلی معادلات بتا-گلدستون فقط با استفاده از روش‌های عددی قابل حل است.

^۷Bethe -Goldstone

۵.۳ معادلات بتا - گلدستون در مختصات کروی

روشی مشابه آن‌چه که در بخش ۴.۳ ارائه شد، برای به‌دست آوردن معادله‌ی بتا - گلدستون در مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این حالت تابع موج حرکت نسبی شامل اثر محیط است. اثر محیط توسط اصل طرد پاولی در تابع موج اعمال می‌شود. سپس با استفاده از تقریب جفت‌های مستقل^۱ و در نظر گرفتن این‌که تمام حالت‌های تک‌ذره‌ای با تکانه‌ی $k_i \leq k_f$ در حالت پایه‌ی گاز فرمی پیش از آن اشغال شده‌اند باز نویسی می‌شود. (یادآوری می‌کنیم که برای گاز فرمی سه بعدی رابطه‌ی چگالی و تکانه‌ی فرمی $\rho = \frac{k_f^3 \nu}{6\pi^2}$ است). در این حالت روشن است که قیدهایی بر روی حالت‌های قابل دسترس برای تکانه‌ی حرکت نسبی دو ذره اعمال می‌شود. در واقع با تعریف

$$P = k_1 + k_2, \quad k = \frac{k_1 - k_2}{2}.$$

بر خلاف حالت مختل نشده (که تکانه‌ی فرمی آن k_1, k_2 و k در داخل کره‌ی فرمی قرار دارند) فقط $k_a = \frac{k_1 - k_2}{2}$ هایی را به خود می‌گیرد که شرط $k'_1, k'_2 > k_f$ را برآورده کنند. همانند آن‌چه که در بخش گذشته انجام دادیم، از معادله‌ی شرودینگر برای بخش نسبی شروع می‌کنیم:

$$H_{rel}\psi_n(r) = E_n\psi_n(r). \quad (53.3)$$

که در آن هامیلتونی به صورت زیر تعریف شده است:

$$H_{rel} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + v(r) \quad (54.3)$$

ما به دنبال حل معادله‌ی بالا با شرط مرزی زیر هستیم:

$$\psi_n(r) |_{r=R} = 0. \quad (55.3)$$

با توجه به تقارن کروی مسئله و مستقل فرض کردن پتانسیل از قسمت فضایی، جواب‌های رابطه‌ی بالا را به شکل زیر بر حسب هماهنگ‌های کروی و قسمت شعاعی پیشنهاد می‌دهیم:

$$\Psi_{nlm} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} b_{nl}^m \varphi_{nl}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi). \quad (56.3)$$

^۱Independent Pair Approximation

در رابطه‌ی بالا $\varphi_{nl}(r)$ تابع موج شعاعی است که می‌توانیم آن را به صورت برهم‌نهی خطی از حل‌های آزاد (توابع بسط کروی) قرار دهیم:

$$\varphi_{nl}(r) = \sum_i N_{il} c_{ni}^\ell j_\ell(k_i r). \quad (57.3)$$

که در این حالت هر موج پاره‌ای به تنهایی در شرط مرزی گفته شده ($\psi_n(r) |_{r=R} = 0$) صدق می‌کند. عدد موج k_i از یک مجموعه‌ی گسسته (برای l های مختلف) انتخاب شده و در شرط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$j_\ell(k_i R) = 0. \quad (58.3)$$

با استفاده از روابط بالا، توابع موج مختل نشده را در مختصات کروی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\langle R, r | \phi_o(1, 2) \rangle = \phi_p^{CM}(R) N_{ol} j_\ell(k \cdot r) Y_\ell^m(\Omega_r), \quad (59.3)$$

$$\langle R, r | \phi_a(1, 2) \rangle = \phi_p^{CM}(R) N_{al} j_\ell(k_a \cdot r) Y_\ell^m(\Omega_r). \quad (60.3)$$

در روابط بالا $\langle R, r | \phi_o(1, 2) \rangle$ تابع موج مختل نشده‌ی حالت پایه است. تابع موج حالت مختل شده نیز به صورت زیر است:

$$\Psi_{p,k}(R, r) = \phi_p^{CM}(R) \psi_{p,k}(r) = \phi_p^{CM}(R) \sum_{\ell m} a_{nl}^m \chi(r) Y_\ell^m(\Omega_r), \quad (61.3)$$

که در آن:

$$\psi_{p,k}(r) = \sum_{\ell m} a_{nl}^m \chi(r) Y_\ell^m(\Omega_r). \quad (62.3)$$

با در نظر گرفتن روابط بالا و استفاده از نظریه‌ی اختلال، قسمت شعاعی تابع موج مختل شده به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\chi(r) Y_\ell^m = c_{no}^\ell N_{ol} Y_\ell^m(\Omega_r) + \sum_i Q(p, k_i) c_{ni}^\ell N_{il} j_\ell(k_i r) Y_\ell^m(\Omega_r), \quad (63.3)$$

در روابط بالا $\phi_p^{CM}(R)$ تابع موج مرکز جرم، $j_\ell(k_i r)$ توابع بسل کروی و \mathcal{N}_{ℓ} ضرایب بهنجارش آنها است. نیز عملگر پاؤلی را که به شکل زیر است معرفی کرده‌ایم:

$$Q(P, k_a) = \Theta \left(\left| \frac{P}{\hbar} + k_a \right| - k_F \right) \Theta \left(\left| \frac{P}{\hbar} - k_a \right| - k_F \right), \quad (64.3)$$

که در آن Θ تابع پله‌ی هویساید^۹ و k_f سطح فرمی است. روشن است که عملگر Q به هر دو تکانه‌ی کل و نسبی جفت‌ذرات وابسته است. با به دست آمدن تابع موج مختل شده می‌توانیم با حل معادله‌ی شرودینگر برای بخش نسبی، ضرایب c_{nl} را به ازای هر ℓ از معادله‌ی جبری که در زیر به دست خواهیم آورد، پیدا کنیم. برای این کار معادله‌ی شرودینگر را که به کمک عملگر ∇^2 :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2 \dots \quad (65.3)$$

و توابع موج در مختصات کروی به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$b_{nl}^m \left(-r^2 \frac{\partial^2 \phi_{nl}(r)}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \phi_{nl}(r)}{\partial r} + r^2 V(r) + \ell(\ell + 1) \right) \phi_{nl}(r) = r^2 b_{nl}^m \phi_{nl}(r) \varepsilon_{nl}^{BG} \quad (66.3)$$

با معادله‌ی دیفرانسیل بسل کروی که در زیر آمده است، در نظر می‌گیریم:

$$r^2 \frac{d^2 R(kr)}{dr^2} + 2r \frac{dR(kr)}{dr} + (k^2 r^2 - n(n + 1)) R(kr) = 0. \quad (67.3)$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی ۶۶.۳ و ۶۷.۳ همچنین در نظر گرفتن تقارن کروی پتانسیل منطقی به نظر می‌رسد که بخش شعاعی را با استفاده از توابع بسل کروی بسط داد. حال با استفاده از تعامد توابع بسل و اندکی ساده سازی می‌توان معادله‌ی شرودینگر را به صورت ویژه مقداری در آورد:

$$(\varepsilon_n^{BG} - k_b^2) c_{na}^l Q(P, k_a) - \tilde{\alpha} \sum_{\alpha} \mathcal{V}_{ab}^l c_{na}^l Q(P, k_b) = 0, \quad (68.3)$$

که در آن:

$$E_{nl}^{BG} = \frac{\hbar^2}{m} \varepsilon_{nl}^{BG}, \quad (69.3)$$

^۹Heaviside Step Function

$$c_{nl_i}^m b_{nl}^m = a_{nl_i}^m, \quad (70.3)$$

و

$$V_{i,j}^\ell = \mathcal{N}_{i\ell} \mathcal{N}_{j\ell} \frac{1}{\alpha} \int_0^R j_\ell(k_i r) j_\ell(k_j r) V(r) r^\nu dr, \quad (71.3)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{m}{\hbar^2} \alpha, \quad (72.3)$$

$$\mathcal{N}_{i\ell} = \sqrt{\frac{2}{R^\nu}} \frac{1}{|j_{\ell+1}(k_{i+1} R)|}. \quad (73.3)$$

در روابط بالا به ترتیب E_{ln}^{BG} انرژی موج نسبی و $\mathcal{N}_{i\ell}$ ضریب بهنجارش تابع بسل کروی هستند [22].

6.3 عملگر پاولی

دیدیم که اثر محیط بس ذره‌ای بر زوج ذره‌ها با عملگر پاولی است که اشغال حالت‌های میانی توسط ذره را محدود می‌کند. در این قسمت کمی بیشتر در مورد آن صحبت خواهیم کرد. معادله‌ی شرودینگر برای دو ذره‌ی برهم‌کنشی در سیستم بس ذره‌ای با معادله‌ی بتا-گلدستون تعریف می‌شود:

$$(\varepsilon_n^{BG} - k_b^\nu) c_{na}^l Q(P, k_a) - \tilde{\alpha} \sum_\alpha \mathcal{V}_{ab}^l c_{na}^l Q(P, k_b) = 0. \quad (74.3)$$

عملگر Q که به شکل زیر نوشته می‌شود، از اشغال حالت‌های میانی توسط دو ذره که تکانه کم‌تر از تکانه‌ی فرمی k_F دارند جلوگیری می‌کند:

$$Q = \frac{1}{\nu} \sum_{\alpha\beta} |\alpha\beta\rangle \langle \alpha\beta| \Theta(k_\alpha - k_f) \Theta(k_\beta - k_f), \quad (75.3)$$

که در آن α نشان‌گر حالت یک تک ذره با تکانه k_α (و اسپین s_α) و $|\alpha\beta\rangle$ یک حالت بهنجار شده و پادمتقارن دو ذره‌ای است و $\Theta(x)$ تابع پله‌ی هویساید است، عملگر Q در سیستم تکانه مرکز جرم و نسبی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\langle l' m_l | Q(P, k) | l m_l \rangle = \int d\Omega Y_{l' m_l}^*(\Omega) Y_{l m_l}(\Omega) \Theta\left(\left|\frac{P}{\sqrt{2}} + k\right| - k_f\right) \Theta\left(\left|\frac{P}{\sqrt{2}} - k\right| - k_f\right). \quad (76.3)$$

می‌بینیم که عملگر Q نه تنها به اندازه بلکه به زاویه‌ی بین تکانه‌های کل و نسبی دو کوآرک بستگی دارد و حل دقیق آن کار دشواری است. با به کارگیری تقریبی به نام تقریب میانگین زاویه‌ای^{۱۰} دشواری وابستگی زاویه‌ای را کاهش می‌دهیم [۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶].

$$\langle l' m_l | Q(P, k) | l m_l \rangle = \delta_{ll'} \begin{cases} 0 & \text{برای } k < \sqrt{k_F^2 - \frac{P^2}{4}}, \\ 1 & \text{برای } k > k_F - \frac{P}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\frac{P^2}{4} + k^2 - k_F^2}{Pk} & \text{سایر جاها.} \end{cases} \quad (77.3)$$

۷.۳ معادله‌ی حالت

برای بدست آوردن ویژگی‌های سیستم بس‌ذره‌ای با روش بتا-گلدستون ابتدا باید طیف انرژی برهم‌کنش جفت ذرات را بدست آورد.

با حل عددی رابطه‌ی ۷۴.۳ و رابطه‌ی زیر که از تبدیلات کانونیک انرژی سیستم دو ذره‌ای در مختصات مرکز جرم و حرکت نسبی برای یک گاز فرمی با زوج‌های برهم‌کنشی به دست می‌آید، می‌توانیم طیف انرژی کل یک سیستم N -ذره‌ای را به دست آوریم.

^{۱۰} Angle-average approximation

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \frac{\nu^2}{2\rho^2} \sum_{s,s_z} \int \frac{d^3k}{2\pi^3} \int \frac{d^3P}{2\pi^3} \Theta\left(k_F - \left|\frac{P}{2} + k\right|\right) \Theta\left(k_F - \left|\frac{P}{2} - k\right|\right) E_{Pk}^{(s)} \\ &= \frac{\nu^2}{8\rho^2\pi^6} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty dP P^2 \mathfrak{S}(k, P) \left(E_{Pk}^{(0)} + 3E_{Pk}^{(1)}\right). \end{aligned} \quad (78.3)$$

در بالا s, s_z نشانگر اعداد کوانتومی اسپین و ν تبهگنی هستند و $\mathfrak{S}(k, P)$ نیز نتیجه‌ی انتگرال‌گیری بر روی زاویه‌ی بین k و P می‌باشد. این عبارت فقط در تابع‌های Θ ظاهر شده و با استفاده از متوسط عملگر پاولی، پاسخ معادله‌ی بتا - گلدستون مستقل از جهت P شده است. انرژی دو ذره نیز به صورت خلاصه شده‌ی زیر نوشته شده است:

$$E_{Pk}^{(s)} = E^{CM} + \varepsilon^{BG}. \quad (79.3)$$

یادآوری می‌کنیم که به علت فرمی بودن ذرات مورد بررسی تابع موج آنها باید نسبت به تعویض ذرات فرد باشد. بنابراین تابع موج فضایی $l = 0$ را متناظر با حالت اسپینی تک‌تایی و تابع موج فضایی $l = 1$ را همراه با حالت سه‌تایی در نظر می‌گیریم. در این صورت انرژی بتا-گلدستون نیز به صورت زیر می‌شود:

$$\varepsilon_{nl}^{BG} = \varepsilon_{nl=0}^{BG} + 3\varepsilon_{nl=1}^{BG}, \quad (80.3)$$

می‌دانیم که انرژی کل مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل است. پس با داشتن انرژی جنبشی که از رابطه‌ی زیر برای یک سیستم N ذره‌ای به راحتی قابل محاسبه است:

$$T = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\nu^2}{(2\pi^2)^6} \int_0^{k_F} d^3k_i \int_0^{k_F} d^3k_j \left(\frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_j^2}{2m} \right). \quad (81.3)$$

می‌توانیم طیف انرژی پتانسیل را به دست آوریم:

$$V = E - T. \quad (82.3)$$

به بیان دیگر:

$$V = \frac{\nu^2}{2\rho} \sum_{S, s_z} \int \int \left(\frac{\hbar^2}{m} \varepsilon_{nl}^{BG} - \frac{\hbar^2 (k_1 - k_2)^2}{m} \right) \mathfrak{S}(k, P) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}. \quad (83.3)$$

با نتایجی که تا اینجا به دست آمده، آمادگی بررسی سیستم قطبیده را با استفاده از تخمین جفت‌های مستقل داریم.

۸.۳ سیستم قطبیده

در این قسمت، روابط به دست آمده در بخش‌های پیشین را برای دستگاه بس ذره‌ای قطبیده باز نویسی می‌کنیم.

دستگاه قطبیده، سیستمی متشکل از ذرات با اسپین‌های بالا و پایین و چگالی‌های به ترتیب ρ^+ و ρ^- و پارامتر قطبش δ است.

$$\rho = \rho^+ + \rho^-, \quad (84.3)$$

$$\delta = \frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho}. \quad (85.3)$$

پیدا است که $\delta = 0$ ماده‌ی ناقطبیده و $\delta = 1$ ماده‌ی کاملاً قطبیده است. برای تکانه‌ی فرمی بر حسب

چگالی‌های بالا و پایین داریم:

$$\rho^+ = \frac{1 + \delta}{2} \rho, \quad (86.3)$$

$$\rho^- = \frac{1 - \delta}{2} \rho, \quad (87.3)$$

و

$$k_F^+ = k_F \left(\frac{1 + \delta}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (88.3)$$

$$k_F^- = k_F \left(\frac{1-\delta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (۸۹.۳)$$

در روابط بالا k_F^+ و k_F^- به ترتیب تکانه‌ی فرمی ذرات با اسپین بالا و اسپین پایین هستند. بنابراین عملگر پاولی به شکل زیر خواهد شد:

$$\Theta \left(\left| \frac{P}{2} + k \right| - k_F^+ \right) \Theta \left(\left| \frac{P}{2} - k \right| - k_F^- \right). \quad (۹۰.۳)$$

۱.۸.۳ میانگین زاویه‌ای عملگر پاولی

تقریبی که در قسمت قبل نیز برای از بین بردن وابستگی زاویه‌ای عملگر Q استفاده کردیم را در این قسمت به اختصار شرح می‌دهیم. تعریف عملگر پاولی^{۱۱} برای دو ذره μ و ν و دو تکانه‌ی فرمی متفاوت به صورت زیر است:

$$Q = \begin{cases} 0 & \text{اگر } k_\mu \leq k_F^+ \text{ یا } k_\nu \leq k_F^-, \\ 1 & \text{اگر } k_\mu > k_F^+ \text{ و } k_\nu > k_F^-. \end{cases} \quad (۹۱.۳)$$

در تقریب میانگین زاویه‌ای، عملگر Q با میانگین‌گیری بر روی تمام زوایا جایگزین می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{Q} = \langle Q \rangle = \frac{\int Q(P, k, \theta) d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(P, k, \theta) d\theta. \quad (۹۲.۳)$$

^{۱۱}Pauli Exclusion Operator

k و P بین $\theta_1 < \theta < \theta_2$ است و در بازه‌ی $Q \neq 0$ است. و با توجه به مقادیر k_F^+ ، k_F^-

k و P ، چند حالت ممکن است [۲۷]:

$$\bar{Q} = \begin{cases} 0 & \text{برای } k^2 < \frac{1}{4} \left((k_F^+)^2 + (k_F^-)^2 \right) - \frac{P^2}{4}, \\ 1 & \text{برای } \left(\frac{P}{4} - k \right)^2 > (k_F^+)^2, \\ \frac{1}{\sqrt{Pk}} \left(\left(k + \frac{P}{4} \right)^2 - (k_F^+)^2 \right) & \text{برای } (k_F^-)^2 < \left(\frac{P}{4} - k \right)^2 < (k_F^+)^2, \\ \frac{1}{Pk} \left(k^2 + \frac{P^2}{4} - \frac{1}{4} \left((k_F^+)^2 + (k_F^-)^2 \right) \right) & \text{سایر جاها.} \end{cases} \quad (93.3)$$

۹.۳ معادله‌ی حالت سیستم قطبیده

با استفاده از نتایج به دست آمده برای عملگر Q و حل معادله‌ی بتا - گلدستون می‌توانیم انرژی بتا - گلدستون را به کمک رابطه‌ای همانند آنچه در بخش پیش آورده شد، به دست آورده و سپس انرژی پتانسیل سیستم قطبیده را محاسبه نماییم:

$$\frac{E}{N} = \frac{\nu^2}{8\rho^2\pi^4} \sum_{S, s_z} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty dP P^2 \left| \langle \frac{1}{4}\sigma_{z+} + \frac{1}{4}\sigma_{z-} \rangle \right| \mathfrak{S}(k, P) \left(E_{Pk}^{(0)} + E_{Pk}^{(1)} \right). \quad (94.3)$$

انتگرال $\mathfrak{S}(k, P)$ نسبت به تکانه‌ی مرکز جرم و حرکت نسبی با توجه به اندازه‌های k و k_F^+ و k_F^- به صورت زیر تعیین می‌شود [۲۸]:

$$\mathfrak{S}(k, P) = \frac{2}{3}\pi \left[(k_F^+)^3 + (k_F^-)^3 - \frac{2}{3} \left((k_F^+)^2 + (k_F^-)^2 \right) k \right. \\ \left. - \frac{2}{16} \left((k_F^+)^2 - (k_F^-)^2 \right)^2 k^{-1} + k^3 \right]. \quad (95.3)$$

برای

$$\frac{1}{\nu} |k_F^+ - k_F^-| < k < \frac{1}{\nu} |k_F^+ + k_F^-|,$$
$$\mathfrak{S}(k, P) = \frac{4}{3} \pi \min(k_F^+, k_F^-). \quad (96.3)$$

و برای

$$k < \frac{1}{\nu} |k_F^+ - k_F^-|,$$
$$\mathfrak{S}(k, P) = 0. \quad (97.3)$$

فصل ۴

بررسی خصوصیات ماده‌ی کوارکی قطبیده

در فصل‌های گذشته درباره‌ی ستارگان نوترونی صحبت کردیم. دیدیم که در شرایط خاص فشار و دما، مواد تشکیل دهنده‌ی هسته دست‌خوش گذار فاز به ماده‌ی کوارکی می‌شود که به این‌گونه از ستارگان *SQM* یا ستاره‌های کوارکی گفته می‌شود. سپس به معرفی مگنتارها، که ستاره‌هایی نوترونی با میدان‌های مغناطیسی و غیرعادی و بسیار قوی و حاوی ماده‌ی کوارکی قطبیده هستند پرداختیم. دستگاهی مانند یک ستاره، دارای ذرات برهم‌کنش کننده‌ی بی‌شماری است. برای توصیف دقیق چنین سیستم‌هایی لازم است تا پتانسیل برهم‌کنش بین ذرات را در معادله‌ی شرودینگر وارد کنیم. اما حل مستقیم و دقیق آن تقریباً ناممکن است. بنابراین لازم است تا به روش‌های دیگری روی بیاوریم. از این رو در فصل سوم به معرفی رویکرد بس‌ذره‌ای پرداختیم. سپس تخمین جفت‌های مستقل که در آن از رهیافت بتا-گلدستون استفاده می‌شود را برای یک سیستم N ذره‌ای قطبیده و ناقطبیده شرح داده و طیف انرژی و معادله‌ی حالت را با استفاده از آن به دست آوردیم.

ماده‌ی کوارکی نیز یک سیستم بس‌ذره‌ای است و تمام مباحث مطرح شده در فصل گذشته را می‌توانیم برای بررسی آن استفاده کنیم.

در بررسی برهم‌کنش جفت ذرات در ماده‌ی کوارکی از پتانسیل دو ذره‌ای مدل *String – flip like* استفاده شده است. که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۱.۴ پتانسیل String - flip like

برای توصیف دقیق سیستمی مانند ماده‌ی کوارکی لازم است که پتانسیل برهم‌کنش بین ذرات را در معادله‌ی شرودینگر وارد کنیم. پتانسیلی که در چنین توده‌ی موادی به کار گرفته می‌شود باید ویژگی‌هایی مانند ایجاد پدیده‌ی حبس رنگ، نشان دادن آزادی مجانبی و ایجاد تقارن تبدیلی^۱ بین کوارک‌ها در اصل طرد را برآورده کند.

در این پایان‌نامه برای بررسی برهم‌کنش جفت ذرات از پتانسیل دو ذره‌ای مدل String – flip like استفاده شده است. این مدل در حقیقت مدل String-flip است، با این تفاوت که جمله‌ای نمایی که به چگالی دستگاه و فاصله نسبی دو ذره وابسته است در آن ضرب شده. هر دو مدل در بررسی گذار فاز ماده هادرونی به کوارکی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. String – flip like همچنین با موفقیت در طیف سنجی هادرونی بکار گرفته شده است [۲۹، ۳۰]. این پتانسیل ناشی از رفتار آماری برهم‌کنش قوی در دستگاه چگال است و با ایجاد سد پتانسیل باعث ایجاد حالت مقید خواهد شد، همچنین با افزایش چگالی گذار فاز را نشان خواهد داد. ویژگی کلیدی این مدل ارائه‌ی برهم‌کنش‌های محدودکننده‌ی وابسته به چگالی بین کوارک‌ها است. همان‌گونه که در مدل‌های هسته‌ای نیز به خوبی شناخته شده است، نیروهای وابسته به چگالی، برهم‌کنش‌های بس ذره‌ای را که در یک سیستم چگال کوارکی انتظار می‌رود، شبیه‌سازی می‌کنند.

با این مقدمات پتانسیل برهم‌کنشی بین دو کوارک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(\rho, r) = V_{conf}(r) e^{-cr\rho}. \quad (۱.۴)$$

که در آن $r = |r_1 - r_2|$ فاصله‌ی نسبی بین کوارک‌ها، $\rho = \frac{N}{\Omega}$ چگالی (یکنواخت) یک سیستم N فرمیونی در حجم Ω و c یک ضریب ثابت (بعدی) و V_{conf} پتانسیل حبس^۲ است. مدل String-flip، پتانسیل حبس را تابعی خطی یا درجه دوم از فاصله فرض می‌کند. پتانسیل ۱.۴ یک نیروی قوی و محدودکننده را فقط در محدوده‌ای از چگالی‌های پایین (و برای فواصل کوتاه) شبیه‌سازی می‌کند،

^۱Exchange Symmetry

^۲Confinement Potential

همان جایی که در واقع جفت کوارک‌ها باید در داخل هادرون‌ها محدود شده باشند و این در حالی است که در چگالی‌های بالا قابل چشم‌پوشی می‌شود، که انتظار می‌رود سیستم در آن شبیه یک گاز فرمیونی رفتار کند (پلاسمای کوارکی با برهم‌کنش ضعیف یا حتی بدون برهم‌کنش). همان‌طور که در بالا گفتیم در مدل String-flip پتانسیل حبس به صورت تابع خطی یا درجه دوم از فاصله فرض می‌شود که ما در این پایان‌نامه هر دو مدل را مورد بررسی قرار داده‌ایم:

$$V_{conf}^Q(r) = \frac{1}{4}\alpha_q r^2, \quad (2.4)$$

$$V_{conf}^L(r) = \frac{1}{4}\alpha_l r. \quad (3.4)$$

پارامترهای c و α_q و α_l ضرایب مربوط می‌باشند که وابسته به شدت پتانسیل هستند و با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شوند. ما در اینجا جرم کوارک‌ها را در محاسبه‌ی پتانسیل، یکسان و برابر با $m_q = 220 \text{ Mev}/c$ در نظر گرفته‌ایم. این مقدار m_q در مدل‌های مختلف غیر نسبیته برای ماده‌ی کوارکی، به منظور ایجاد طیف‌نمایی هادرونی، به کار گرفته شده است. شدت پتانسیل هارمونیک α_q به منظور دست یافتن به ابعاد هادرونی مقدار ثابت $\alpha_q = 120 \text{ Mev}\cdot\text{fm}^{-2}$ در نظر گرفته شده است. در پتانسیل خطی نیز $\alpha_l = 445 \text{ Mev}\cdot\text{fm}^{-1}$ فرض شده است. این مقادیر بر اساس نتایج تجربی در طیف‌سنجی تک‌هادرونی به دست آمده‌اند.

اکنون نوبت پارامتر c در تابع نمایی پتانسیل است. روشن است که مقدار آن بر وابستگی چگالی برهم‌کنش تاثیر دارد. این مقدار را با استفاده از مدل‌های موفق ارائه شده، در پتانسیل هارمونیک $c = 1 \text{ fm}^2$ و در پتانسیل خطی $c = 0.5 \text{ fm}^2$ در نظر می‌گیریم.

در نمودارهای به دست آمده از نتایج محاسبات، پتانسیل هارمونیک را به نام خلاصه شده‌ی QCP و پتانسیل خطی را با LCP نشان داده‌ایم.

۲.۴ معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده

اکنون با استفاده از روابط به دست آمده در فصل گذشته برای سیستم قطبیده و با در نظر گرفتن پتانسیل بین کوارک‌ها می‌توانیم معادلات بتا-گلدستون را برای ماده‌ی کوارکی قطبیده بازنویسی کرده و آن را به صورت عددی حل کنیم. این معادله به شکل یک معادله‌ی ویژه مقداری بوده و می‌توان از حل آن، مقادیر انرژی بتا-گلدستون و ویژه توابع و ویژه مقادیر ماده‌ی کوارکی قطبیده را به دست آورد. سپس با استفاده از رابطه‌ی به دست آمده برای انرژی سیستم قطبیده، می‌توانیم طیف انرژی غیر نسبیتی آن را محاسبه کنیم. نمودار انرژی ماده‌ی کوارکی قطبیده بر حسب چگالی و برای قطبش‌های مختلف در شکل ۱.۴ و ۲.۴ برای هر دو پتانسیل خطی و درجه دوم رسم شده است. همان‌گونه که از شکل ۱.۴ و ۲.۴ پیداست، انرژی ماده‌ی کوارکی با افزایش قطبش، افزایش یافته است. این اختلاف در انرژی قطبش‌های مختلف با افزایش چگالی بیشتر شده است. نیز، همان‌طور که دیده می‌شود منحنی‌های انرژی در هیچ نقطه‌ای هم‌دیگر را قطع نکرده‌اند. این رفتار می‌تواند نشان‌دهنده‌ی عدم وجود گذار خودبه‌خودی به حالت‌های فرومغناطیس در ماده‌ی کوارکی قطبیده غیر نسبیتی باشد. همانند آنچه در فصل گذشته به دست آوردیم (بخش ۷.۳)، با محاسبه‌ی انرژی جنبشی غیر نسبیتی برای ماده‌ی کوارکی قطبیده،

$$T = \frac{1}{N} \sum_i \epsilon_i^{(+)} + \frac{1}{N} \sum_i \epsilon_i^{(-)}$$

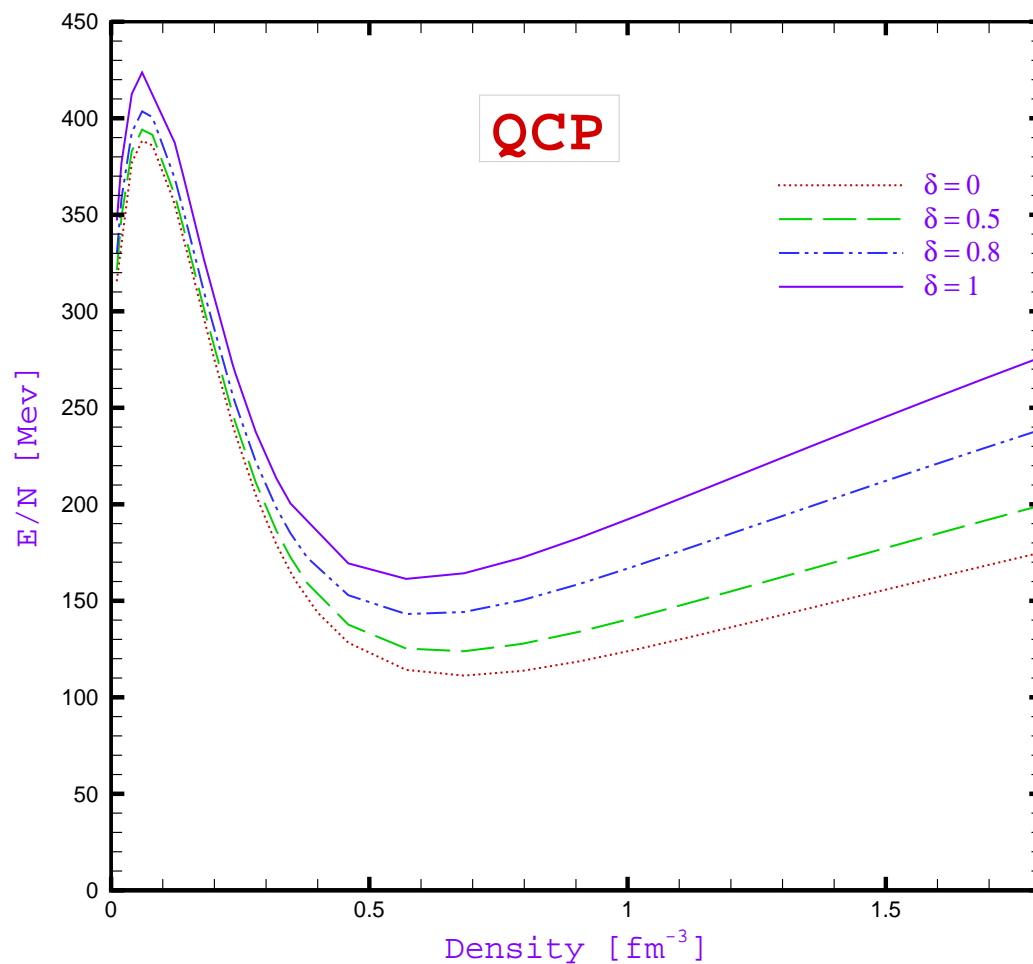
$$= \frac{3}{10} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left[(1 + \delta)^{\frac{5}{3}} + (1 - \delta)^{\frac{5}{3}} \right] \left(\frac{\rho}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.4)$$

می‌توان طیف انرژی پتانسیل را از انرژی کل به دست آورد.

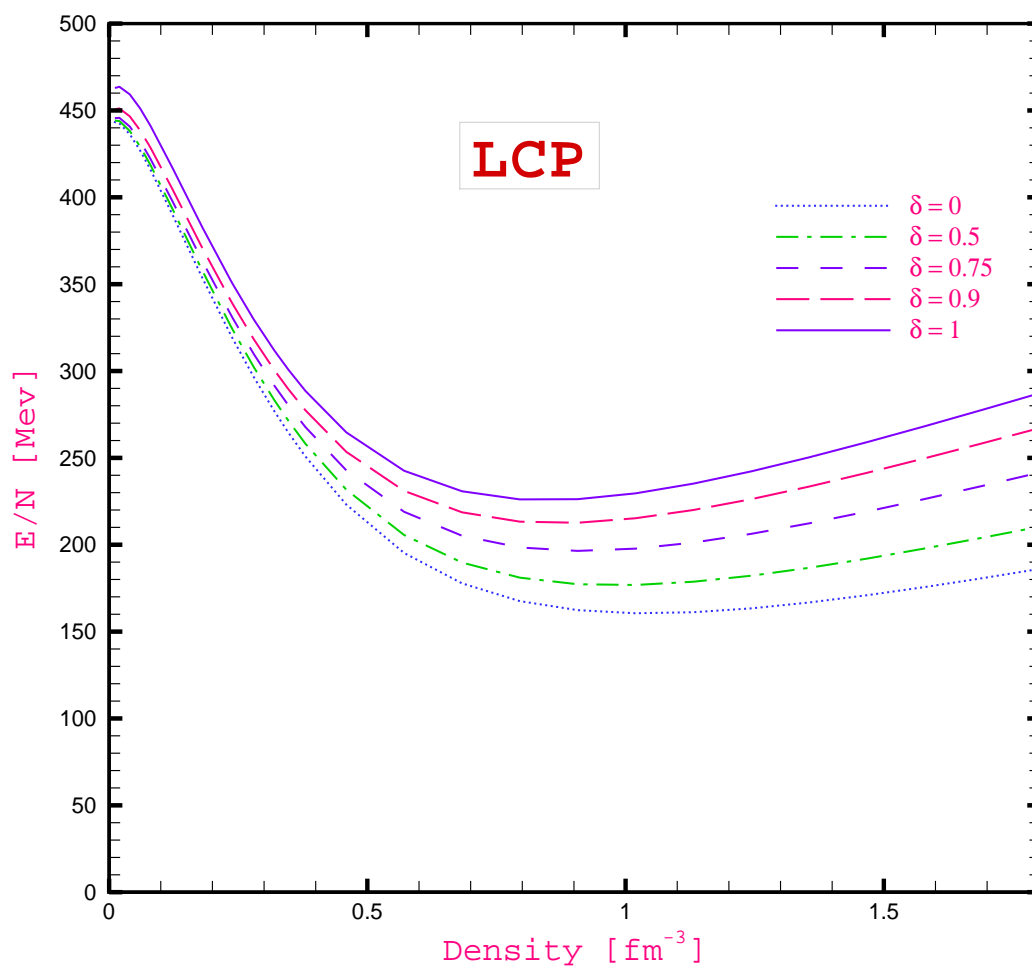
$$V = E - T. \quad (5.4)$$

در شکل ۲.۴ و ۳.۴ انرژی پتانسیل‌های خطی و درجه دوم برای قطبش‌های مختلف ماده‌ی کوارکی آورده شده است. می‌توان دید که با افزایش چگالی مقدار انرژی پتانسیل کمتر شده و رفتار سیستم به حالت گاز فرمی آزاد نزدیک‌تر می‌شود. هم‌چنین با افزایش قطبش، انرژی پتانسیل نیز بیشتر می‌شود.

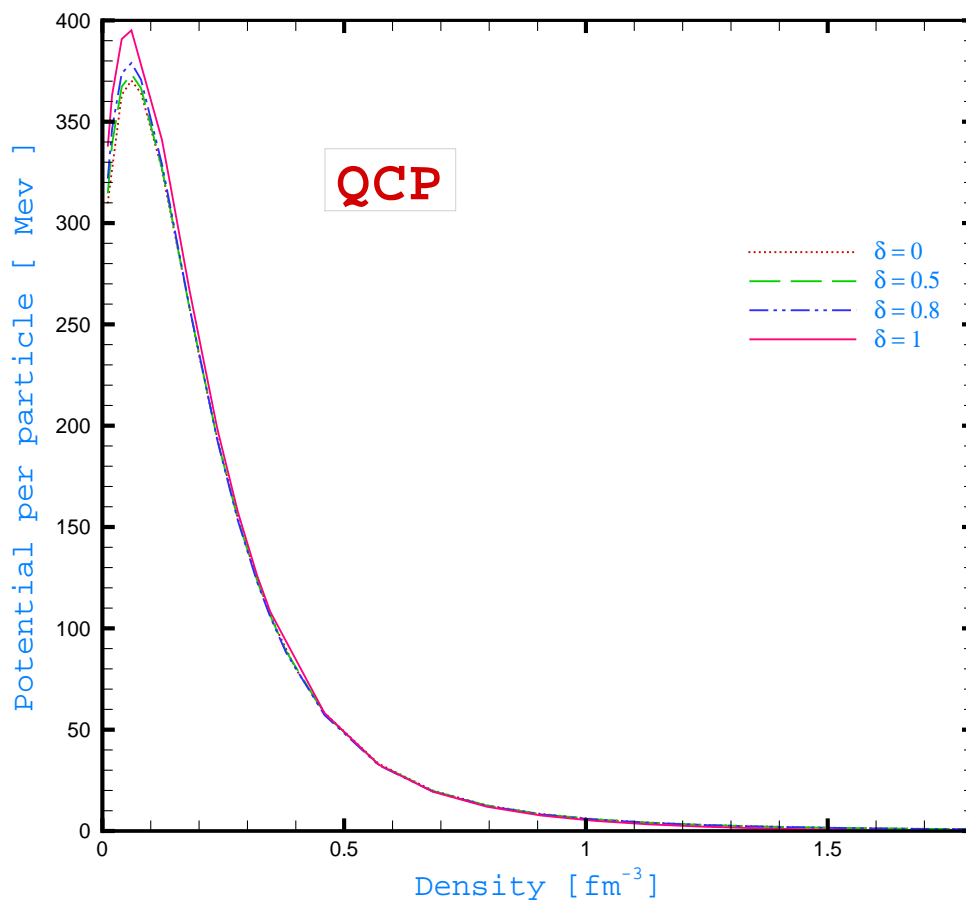
البته این افزایش در چگالی‌های پایین بیشتر است و در چگالی‌های بالاتر با توجه به کم شدن سهم انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل در اثر تغییر قطبش کمتر است.



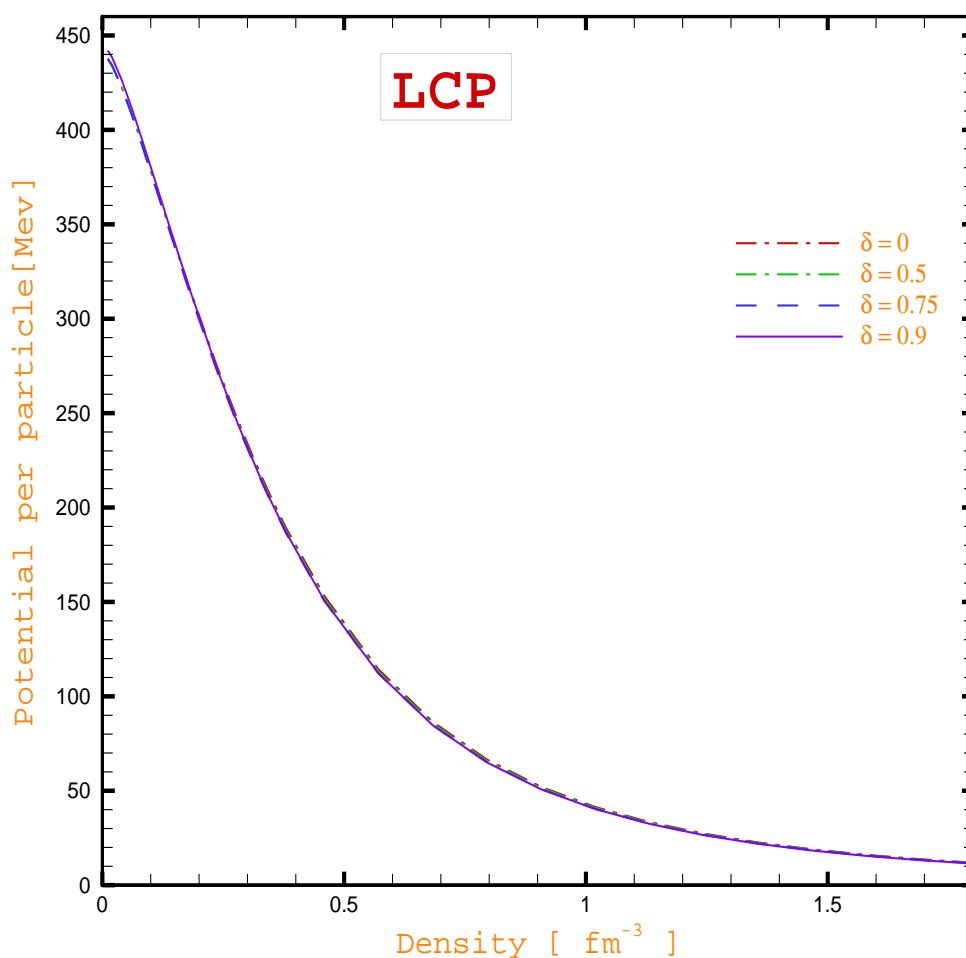
شکل ۱.۴: انرژی کل غیر نسبیتی ماده‌ی کوارکی قطبیده بر حسب چگالی، با در نظر گرفتن پتانسیل حبس درجه دوم نسبت به فاصله (QCP). انرژی ماده‌ی کوارکی با افزایش قطبش، افزایش یافته است.



شکل ۲.۴: انرژی کل غیر نسبیتی ماده‌ی کوارکی قطبیده بر حسب چگالی، با در نظر گرفتن پتانسیل حبس خطی نسبت به فاصله (LCP).



شکل ۳.۴: انرژی پتانسیل به ازای ذره ماده‌ی کوارکی قطبیده (QCP). با افزایش چگالی مقدار انرژی پتانسیل کمتر شده و رفتار سیستم به حالت گاز فرمی آزاد نزدیک‌تر شده است. هم‌چنین با افزایش قطبش، انرژی پتانسیل نیز افزایش یافته است که این افزایش در چگالی‌های پایین بیشتر است و در چگالی‌های بالاتر با توجه به کم شدن سهم انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل در اثر تغییر قطبش کمتر است.



شکل ۴.۴: انرژی پتانسیل به ازای ذره ماده‌ی کوارکی قطبیده (LCP).

۳.۴ ماده کوارکی نیمه نسبیتی

در بخش پیشین انرژی ماده کوارکی، به صورت غیرنسبیتی و بدون در نظر گرفتن تمایز بین انواع کوارک‌ها به دست آمد. در نمودارهای به دست آمده برای انرژی (شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴) دیدیم که با افزایش چگالی، منحنی به دست آمده واگراتر می‌شود. و شک و تردید جدی در اعتبار روش غیر نسبیتی به وجود می‌آید. برای اجتناب از آن، مدل ماده‌ی کوارکی را با نسبیتی فرض کردن آن

واقعی تر می‌کنیم. به این منظور طعم کوارک‌ها را متمایز کرده و انرژی نیمه‌نسبیتی کوارک‌ها را به دست می‌آوریم.

۱.۳.۴ تعیین چگالی کوارک‌ها در ماده کوارکی

برای محاسبه انرژی، لازم است چگالی کوارک‌ها و الکترون‌ها را بر حسب چگالی باریونی^۳ بدانیم. این کار را با در نظر گرفتن دو شرط تعادل بتا^۴ و خنثایی بار در فصل دوم انجام دادیم. در آنجا استنباط کردیم که در دمای صفر و با صرف نظر کردن از الکترون‌ها چگالی هر سه کوارک یکسان خواهد بود:

$$\rho_s = \rho_d = \rho_u, \quad (6.4)$$

با داشتن چگالی به سادگی می‌توان سطح فرمی هر ذره را بدست آورد.

$$k_f = \sqrt[3]{\frac{6\pi^2\rho}{\nu}}. \quad (7.4)$$

و نیز انرژی جنبشی نسبیتی به ازای هر ذره در ماده‌ی کوارکی غیرقطبیده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{N} \sum_{k,\nu} \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} \\ &= \frac{L^3}{N} \frac{\nu}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} \\ &= \frac{3}{8\rho} \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(x \sqrt{x^2 + 1} (2x^2 + 1) - \sinh^{-1}(x) \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

در رابطه‌ی بالا از تغییر متغیر $x = \frac{\hbar k}{mc}$ استفاده شده است و $\rho = \frac{L^3}{N}$ است. انرژی جنبشی نیمه‌نسبیتی ماده‌ی کوارکی حاصل جمع سهم انرژی هر سه نوع کوارک u و d و s است. پس:

$$T_{rel} = \sum_{i=u,d,s} T_i. \quad (9.4)$$

^۳Baryon

^۴Betta

این انرژی برای حالت قطبیده به شکل زیر می‌شود:

$$T_i = T_i^+ + T_i^-$$

$$= \frac{\nu}{2\rho\pi^2} \left\{ \int_0^{k_F^+} k^2 \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} dk + \int_0^{k_F^-} k^2 \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} dk \right\}. \quad (10.4)$$

باز هم با در نظر گرفتن هر سه نوع کوآرک u و d و s :

$$T_{rel} = \sum_{i=u,d,s} T_i. \quad (11.4)$$

بنابراین انرژی کل نیمه نسبیتی یک ماده کوآرکی شامل ۳ نوع کوآرک u ، d و s با چگالی‌های مساوی با چگالی‌های باریونی را می‌توان محاسبه کرد که جمع انرژی جنبشی نیمه نسبیتی سه نوع کوآرک و انرژی پتانسیل می‌باشد.

$$\varepsilon_{sr} = V + T_{rel}. \quad (12.4)$$

در این قسمت جرم سه کوآرک بالا، پایین و شگفت را به ترتیب $m_u = 3\text{Mev}$ ، $m_d = 6\text{Mev}$ و $m_s = 150\text{Mev}$ قرار دادیم. در نمودارهای ۵.۴ و ۶.۴ منحنی انرژی نیمه نسبیتی به ازای هر ذره‌ی ماده کوآرکی قطبیده بر حسب چگالی، برای قطبش‌های مختلف رسم شده است. برای محاسبه‌ی ساختار ستاره‌ی کوآرکی با استفاده از معادله‌ی TOV احتیاج به چگالی انرژی داریم که آن را با u نمایش می‌دهیم:

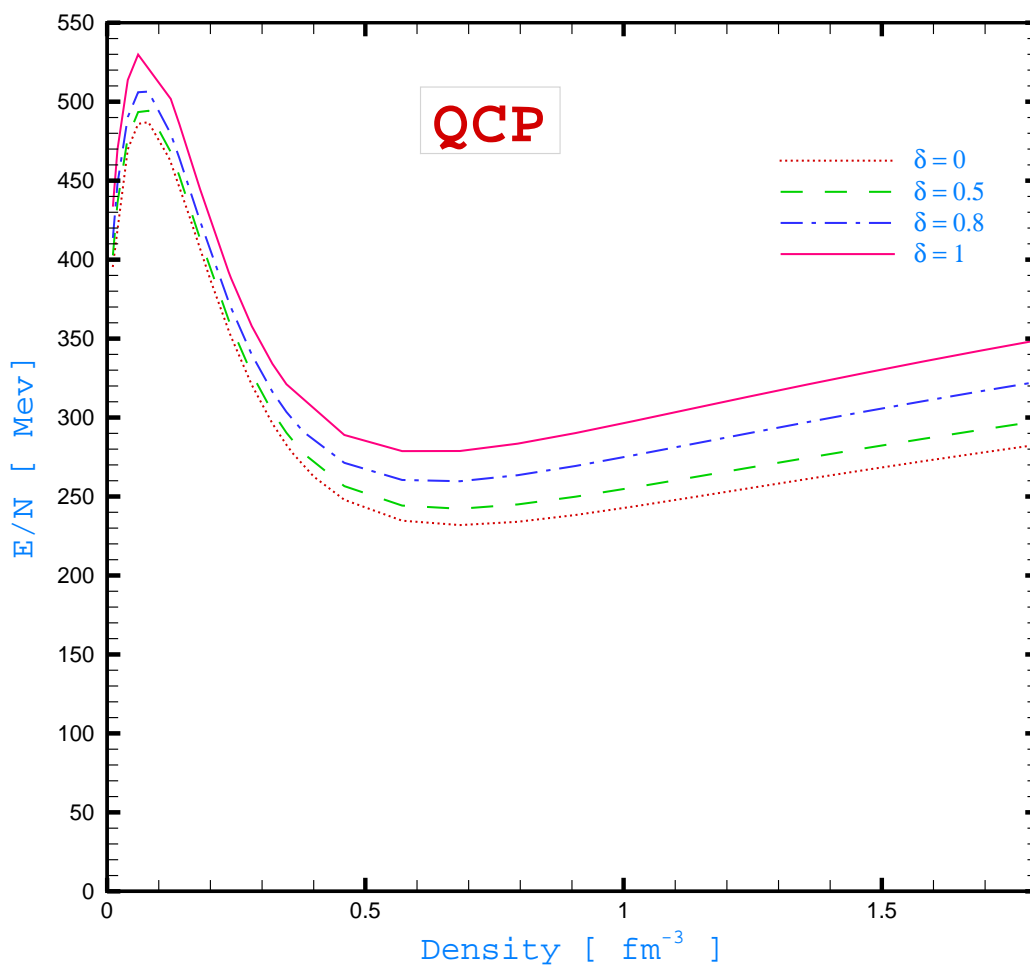
$$u = \rho \varepsilon_{sr}. \quad (13.4)$$

با به دست آوردن انرژی کل به عنوان تابعی از چگالی، فشار دستگاه با استفاده از رابطه‌ی زیر به صورت عددی به دست می‌آید:

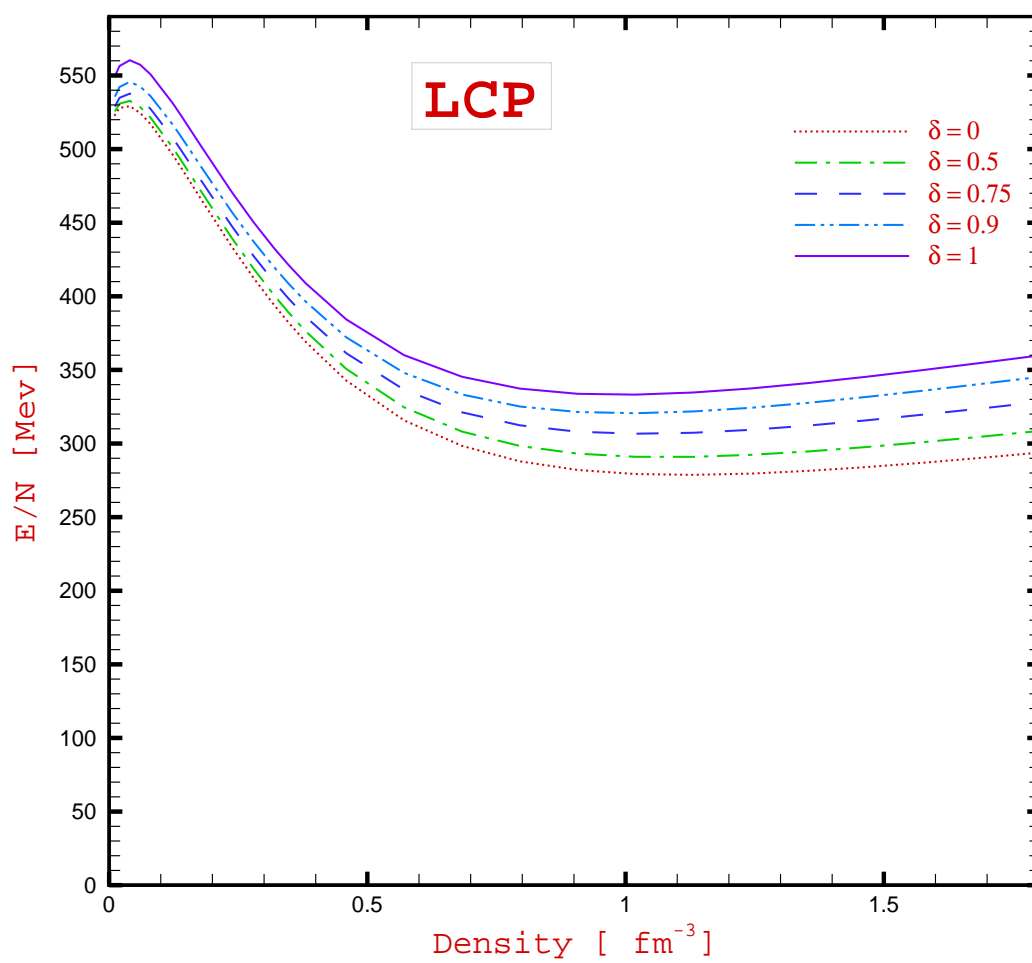
$$\mathcal{P} = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \varepsilon. \quad (14.4)$$

در شکل‌های ۷.۴، ۸.۴ و ۹.۴، ۱۰.۴ به ترتیب چگالی انرژی نیمه نسبیتی و معادله‌ی حالت ماده‌ی کوآرکی قطبیده نشان داده شده است. از شکل نمودارها پیداست که چگالی انرژی کوآرکی

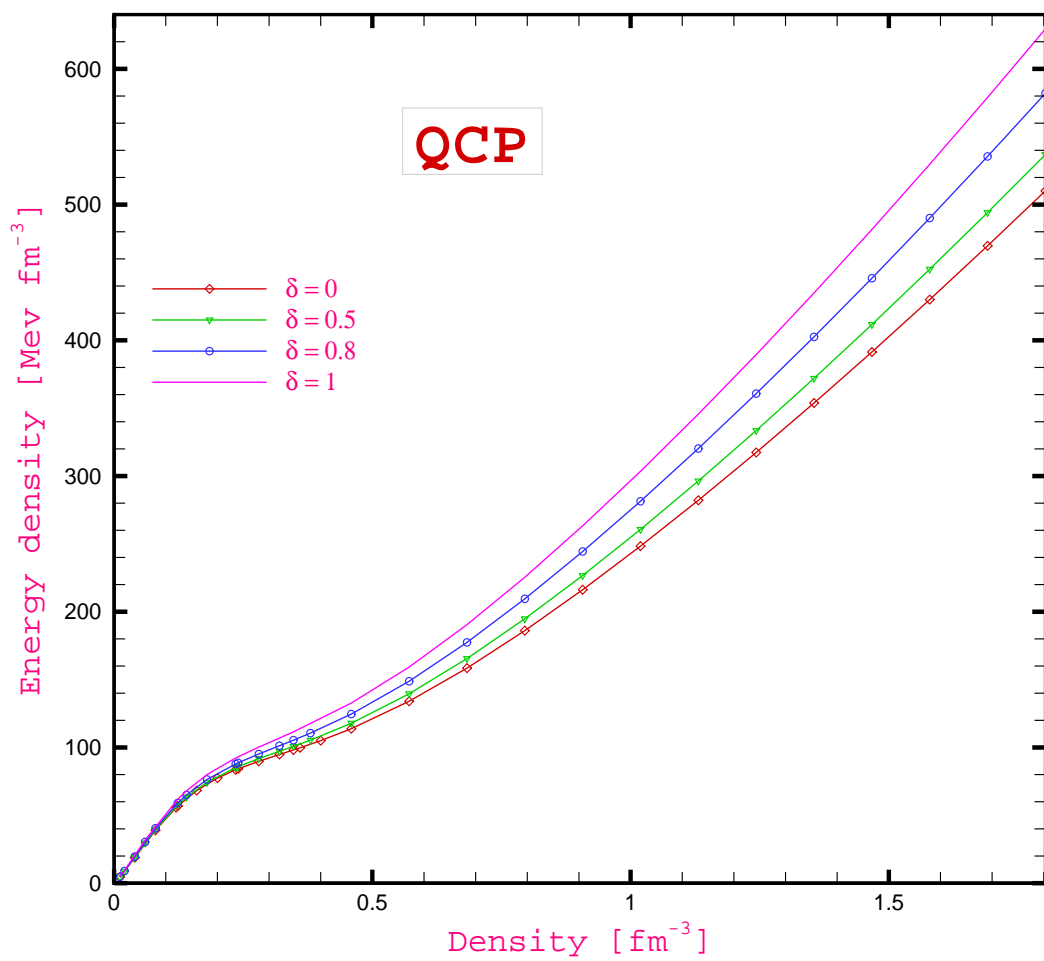
قطبیده با افزایش قطبش برای هر دو نوع پتانسیل، افزایش یافته است. و نیز ماده هم‌چنان به صورت پارامغناطیس باقی مانده و هیچ گذار خودبه‌خودی رخ نداده است. هم‌چنین با افزایش قطبش فشار متوسط ذرات افزایش یافته و معادله‌ی حالت سخت‌تر شده است. به تابع فشار بر حسب چگالی سیستم، معادله‌ی حالت گفته می‌شود. این رابطه از آن جهت دارای اهمیت است که می‌توان ساختار یا رابطه‌ی جرم - شعاع سیستم را به کمک آن محاسبه کرد.



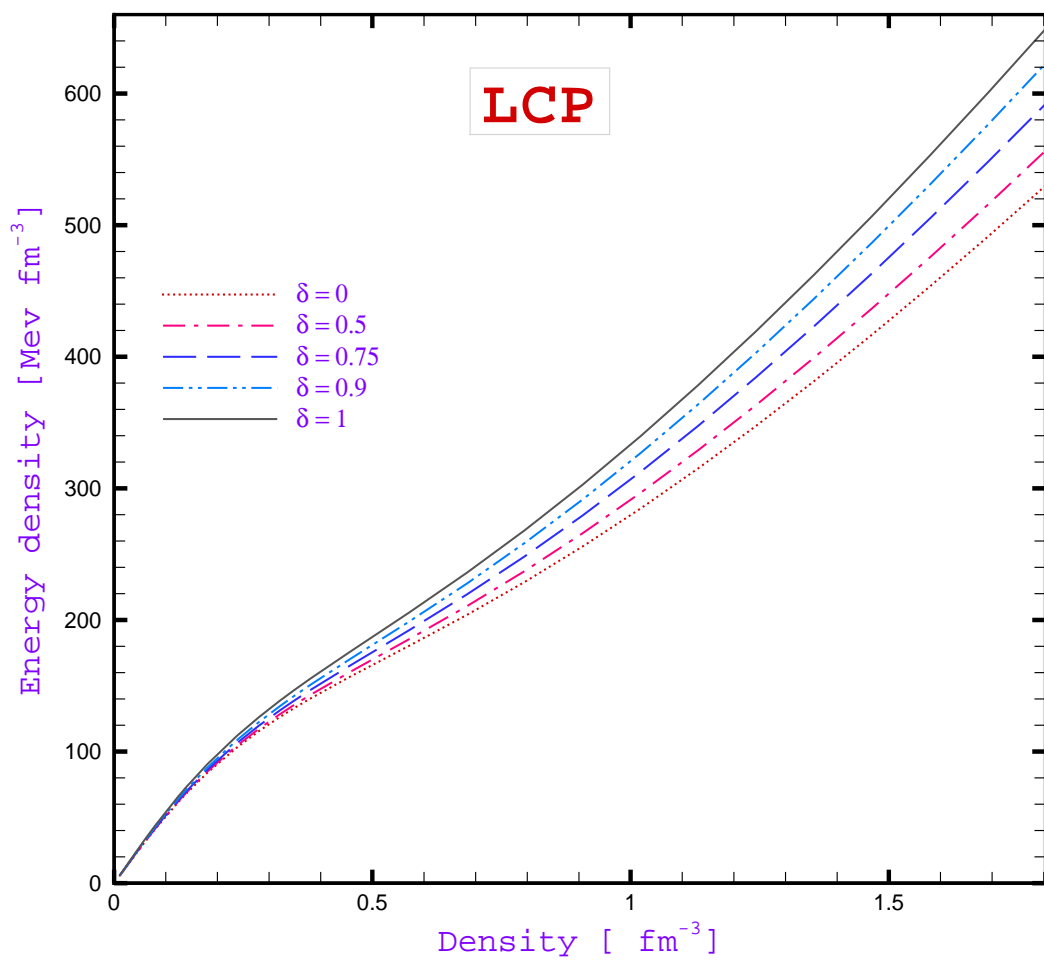
شکل ۵.۴: انرژی نیمه‌نسبیتی به ازای هر ذره ماده‌ی کوارکی قطبیده (QCP). چگالی انرژی ماده‌ی کوارکی قطبیده با افزایش قطبش، افزایش یافته است. و نیز ماده هم‌چنان به صورت پارامغناطیس باقی مانده و هیچ گذار خودبه‌خودی رخ نداده است.



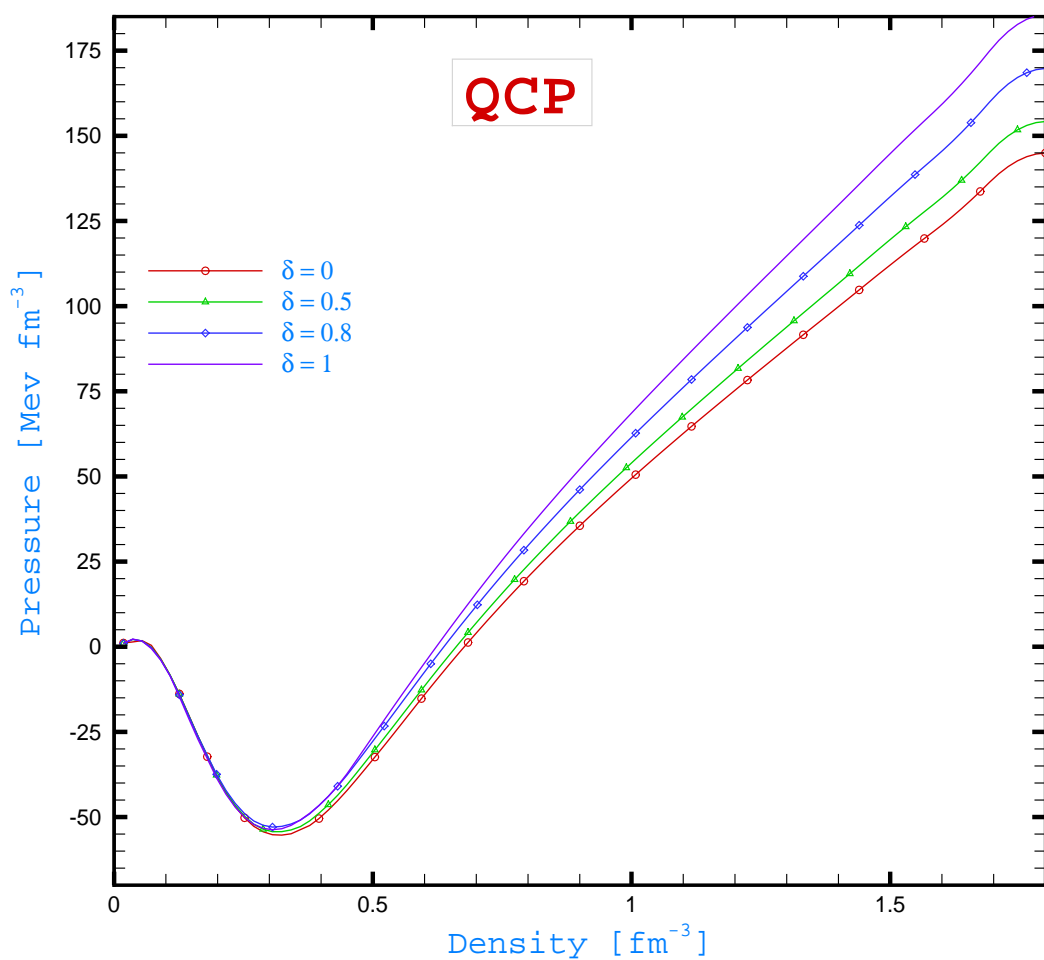
شکل ۶.۴: انرژی نیمه‌نسبیتی به ازای هر ذره ماده‌ی کوارکی قطبیده (LCP).



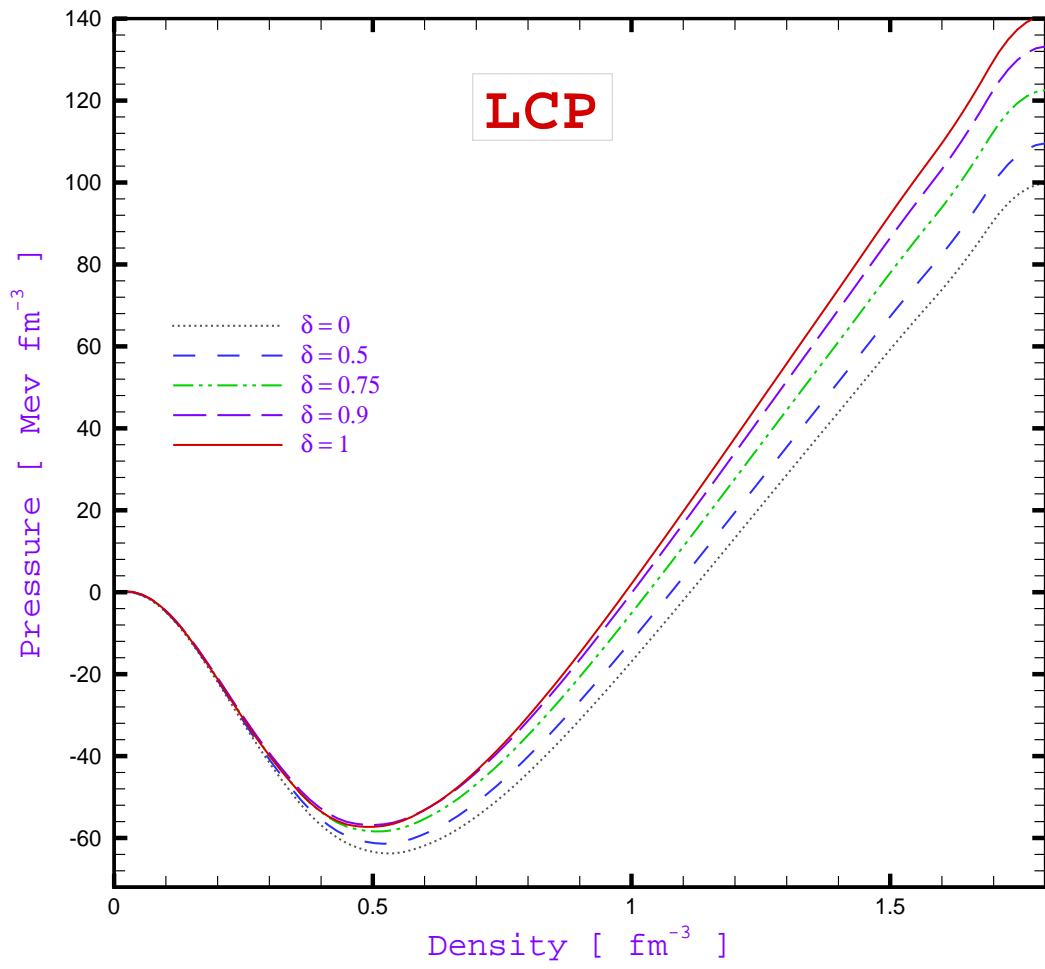
شکل ۷.۴: چگالی انرژی نیمه نسبیتی ماده‌ی کوارکی قطبیده (QCP). چگالی انرژی ماده‌ی کوارکی قطبیده با افزایش قطبش، افزایش یافته است.



شکل ۸.۴: چگالی انرژی نیمه نسبتی ماده‌ی کوارکی قطبیده (LCP).

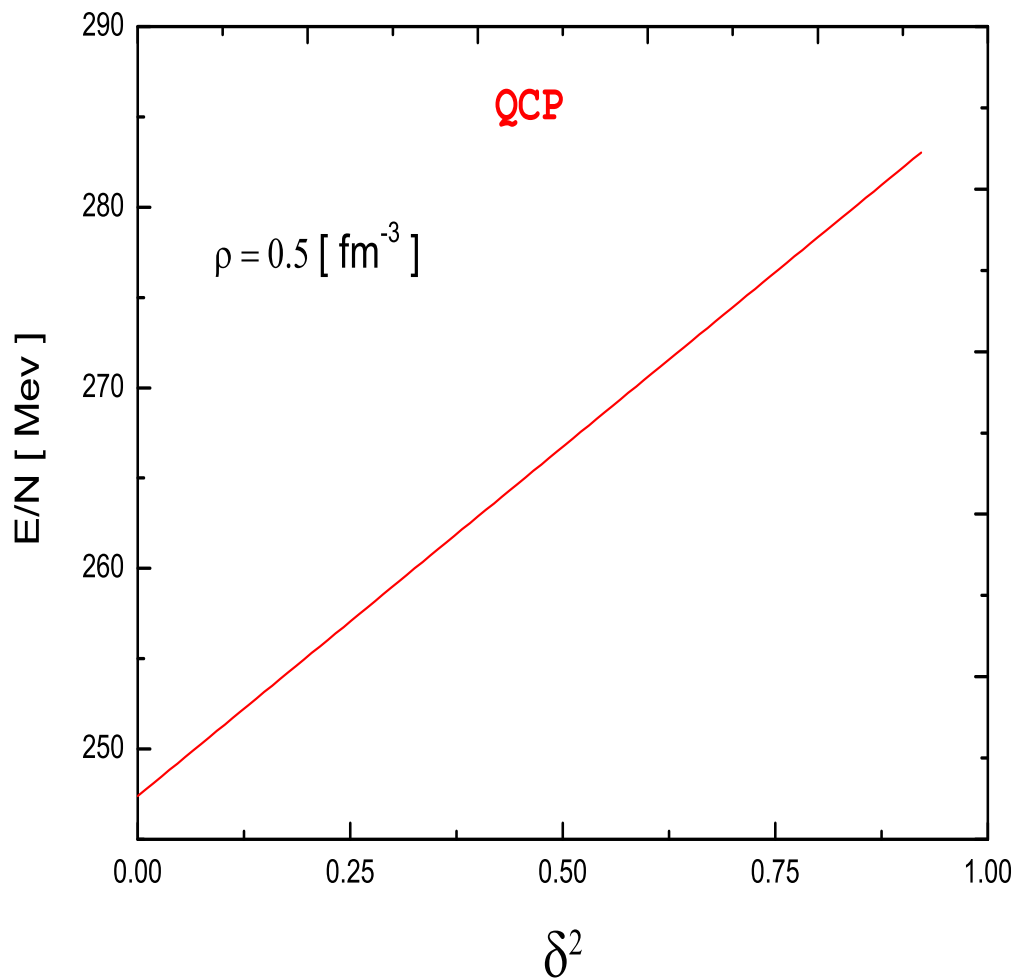


شکل ۹.۴: معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده (QCP). با افزایش قطبش فشار متوسط ذرات افزایش یافته و معادله‌ی حالت سخت‌تر شده است.

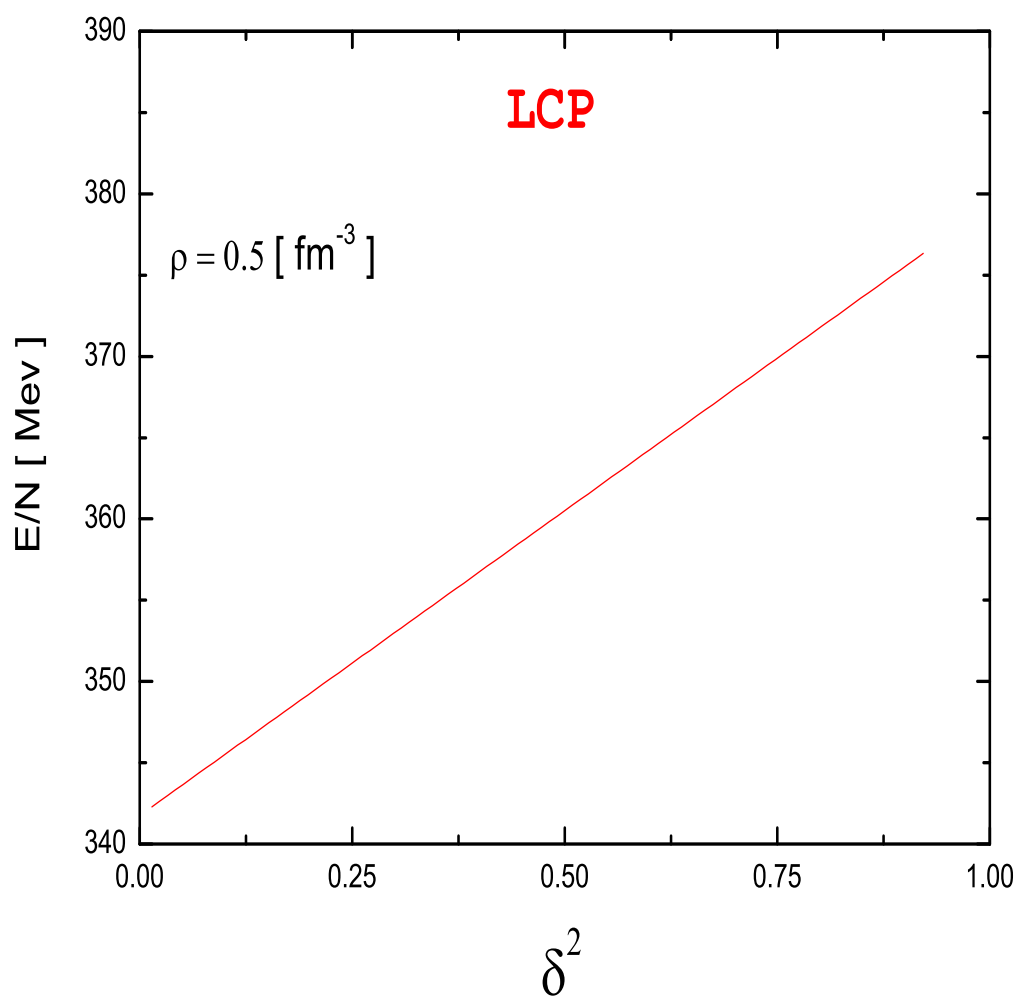


شکل ۱۰.۴: معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده (LCP).

و در پایان تمام نتایج به دست آمده را در دو نمودار ۱۰.۴ و ۱۱.۴ خلاصه کرده و تغییرات انرژی بر حسب مربع قطبش را برای چگالی مشخصی رسم کرده‌ایم. همان‌گونه که در شکل‌ها نیز می‌توان دید با افزایش قطبش، انرژی افزایش یافته و این تغییرات برای هر دو پتانسیل خطی و درجه دوم به صورت خطی است.



شکل ۱۱.۴: انرژی بر حسب قطبش برای چگالی مشخص (QCP). با افزایش قطبش انرژی نیز به صورت خطی افزایش می‌یابد.



شکل ۱۲.۴: انرژی بر حسب قطبش برای چگالی مشخص (LCP).

فصل ۵

بحث و نتیجه‌گیری

ما در این پایان‌نامه ویژگی‌های ماده‌ی کوارکی قطبیده را با استفاده از مدل *string – fliplike* مورد مطالعه و بررسی قرار دادیم. دیدیم که در این مدل انرژی هر ذره سیستم با حل معادله‌ی شرودینگر به دست می‌آید. برای این کار هامیلتونی، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل در نظر گرفته شده است. پتانسیل در هامیلتونی یک پتانسیل کلی وابسته به چگالی است که در این پتانسیل، یک پتانسیل حبس وجود دارد. مدل *string – fliplike* فرض می‌کند که پتانسیل حبس تابعی خطی یا درجه دوم از فاصله نسبی بین دو کوارک است. هر دو نوع پتانسیل در این پایان‌نامه در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن پارامترهای آماری و ترمودینامیکی دستگاه بس ذره‌ای، رهیافت بس ذره‌ای و مدل جفت‌های مستقل را معرفی کردیم و با استفاده از رهیافت بتا-گلدستون، انرژی کل غیر نسبیتی را برای ماده‌ی کوارکی قطبیده محاسبه نمودیم. در نتایج به دست آمده مشاهده شد که با افزایش قطبش، انرژی نیز در هر دو نوع پتانسیل افزایش می‌یابد. و برای هر دو نوع پتانسیل هیچ گذار خود به خودی به فاز فرومغناطیسی رخ نداده و ماده‌ی کوارکی همچنان به صورت پارامغناطیس باقی می‌ماند. از طیف انرژی کل غیر نسبیتی، انرژی پتانسیل ماده‌ی کوارکی قطبیده را برای قطبش‌های مختلف به دست آوردیم. در نمودارهای به دست آمده مشاهده شد که با افزایش قطبش، هر دو نوع انرژی پتانسیل نیز افزایش می‌یابد. البته این افزایش در چگالی‌های پایین بیشتر است و در چگالی‌های بالا

رفتار تقریباً یکسانی داشته و به حالت گاز آزاد نزدیک‌تر می‌شود.
با محاسبه‌ی انرژی جنبشی نیمه‌نسبیتی، انرژی کل نیمه‌نسبیتی و معادله حالت را برای سیستم کوارکی
قطبیده به دست آوردیم. از نتایج به دست آمده مشاهده شد که با افزایش قطبش، انرژی کل افزایش
یافته و معادله‌ی حالت ماده‌ی کوارکی قطبیده سخت‌تر می‌شود.

کتاب نامه

- [1] M. Gyulassy and L. McLerran, Nucl. Phys. A **750**, 30(2005).
- [2] N. Itoh, Prog and Theor. Phys., **44**, 291 (1970).
- [3] D. H. Perkins, Introduction to High Energy Physics, (Cambridge, 2000).
- [4] P. Haensel and A.Y.Potekhin and D.G.Yakovlev, Neutron Stars, Springer (2007).
- [5] S. Shapiro and S. Teukolsky, Black Holes, White Dwarfs and Neutron stars, Wiley (1983).
- [6] T. Tatsumi, Phys. Lett. B **489**, 280 (2000).
- [7] J. M. Lattimer and M. Prakash, Science **304**, 536 (2004).
- [8] G. Gilmore, Science, **304**, 1915 (2004).
- [9] C. Alcock and E. Farhi, Astrophys. J., **310**, 261 (1986).
- [10] S. C. Phatak and P. K. Sahu, nucl-th/0106012 (2001).
- [11] E. Witten, Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).

- [12] F. Weber, *Astro-Phys.*, 0606093 (2006).
- [13] E. Farhi and A. Olinto, *astro-Phys. J.*, **261**, 310 (1986).
- [14] P. K. Sahu, *Hep-Phys.*, 9504367 (1995).
- [15] M. G. Alford and K. Rajagopal, S. Reddy, and A. W. Steiner, *Phys. Rev. D* **73**, 11 (2006).
- [16] P. Jaikumar and S. Reddy, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 041101 (2006).
- [17] M. Stejner and J. Madsen, *Astro-Phys.* 0512144 (2005).
- [18] <http://www.nasa.com>.
- [19] <http://www.capca.ucalgary.ca>.
- [20] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, (Wiley, 2003).
- [21] A. L. Fetter and J. walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (McGraw Hill, 2003).
- [22] W. M. Alberico and P. Czerski, M. Nardi, *Eur. Phys. J. A* **4**, 195 (1999).
- [23] E. Schiller and H. Müther, *Phys. Rev. C* **59**, 2934 (1999).
- [24] T. Cheon and E. F. Redish, *Phys. Rev. C* **39**, 331 (1989).
- [25] K. Suzuki and R. Okamoto, *Nucl. Phys. A* **665**, 92 (2000).
- [26] M. I. Haftel and F. Tabakin, *Nucl. Phys. A* **158**, 1 (1970).
- [27] D. Alonso and F. Sammarruca, *Phys. Rev. C* **67**, 054301 (2003).

- [28] G. H. Bordbar and M. Bigdeli, Phys. Rev. C **75**, 045804 (2007).
- [29] S. Godfrey, and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).
- [30] S. Capstick, and N. Isgur, Phys. Rev. D **34**, 2809 (1986).
- [31] G. H. Bordbar and S. M. Zebarjad and M. r. Vahdani and M. Bigdeli,
Mod. Phys. B **19**, 3379 (2005).

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

partial waves	امواج پاره‌ای
internal energy	انرژی داخلی
isospin	ایزواسپین
interaction	برهم‌کنش
linear superposition	برهم‌نهی خطی
antisymmetric	پادمتقارن
confining potential	پتانسیل حبس
Bethe-Goldstone wavefunction	تابع موج بتا-گلدستون
radial wavefunction	تابع موج شعاعی
Heaviside step function	تابع پله‌ی هویساید
canonical transformation	تبدیل کانونیک
momentum	تکانه
Fermi momentum	تکانه‌ی فرمی
angle-average approximation	تقریب میانگین زاویه‌ای
bound pairs	جفت‌های محدود

reduced mass	جرم کاهش یافته
probability density	چگالی احتمال
single-particle state	حالت تک-ذره ای
intermediate state	حالت میانی
intermediate two-particle state	حالت میانی دو ذره ای
thermodynamical limit	حد ترمودینامیکی
Fermi sea	دریای فرمی
non-interacting particles	ذرات بدون برهم کنش
many-body approach	رهیافت بس-ذره ای
boundry condition	شرط مرزی
wavenumber	عدد موج
Fermi wavenumber	عدد موج فرمی
Pauli exclusion operator	عملگر طرد پاولی
momentum space	فضای تکانه
quark	کوارک
Fermi gas	گاز فرمی
non-interacting Fermi gas	گاز فرمی بدون برهم کنش
spin polarized quark matter	ماده ی کوارکی قطبیده
non-relativistic quark model	مدل کوارکی غیر نسبیتی
unperturbed	مختل نشده
dense medium	محیط چگال
plane wave	موج تخت
eigen function	ویژه تابع

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

angle-average approximation	تقریب میانگین زاویه‌ای
antisymmetric	پاد متقارن
Bethe-Goldstone wavefunction	تابع موج بتا-گلدستون
boundry condition	شرط مرزی
bound pairs	جفت‌های محدود
canonical transformation	تبدیل کانونیک
confining potential	پتانسیل حبس
dense medium	محیط چگال
eigenfunction	ویژه تابع
Fermi gas	گاز فرمی
Fermi mumentum	تکانه‌ی فرمی
Fermi sea	دریای فرمی
Fermi wavenumber	عدد موج فرمی
interaction	برهم‌کنش
intermediate state	حالت میانی

intermediate two-particle state	حالت میانی دو ذره‌ای
internal energy	انرژی داخلی
isospin	ایزواسپین
Heaviside step function	تابع پله هویساید
linear superposition	برهم‌نهی خطی
many-body approach	رهیافت بس-ذره‌ای
many-body interaction	برهم‌کنش بس-ذره‌ای
momentum	تکانه
momentum space	فضای تکانه
non-interacting particle	ذرات بدون برهم‌کنش
non-interacting Fermi gas	گاز فرمی بدون برهم‌کنش
non-relativistic quark model	مدل کوارکی غیر نسبیتی
partial waves	امواج پاره‌ای
Pauli exclusion operator	عملگر طرد پاولی
plane wave	موج تخت
probability density	چگالی احتمال
quark	کوارک
radial wavefunction	تابع موج شعاعی
reduced mass	جرم کاهش یافته
single-particle state	حالت تک-ذره‌ای
spherical harmonics	هماهنگ‌های کروی
spin polarized quark matter	ماده‌ی کوارکی قطبیده
thermodynamical limit	حد ترمودینامیکی

unperturbed مختل نشده

wavenumber عدد موج

Abstract

Quarks are known as elementary particles in standard model. In normal situation they are confined inside hadrons. Many efforts have been taken to study free quarks in different condition of density and temperature. There is possibility of existence of the deconfinement quark in neutron stars. Under extreme condition of temperature and pressure, the familiar structure of matter breaks down; meanwhile the phase transition is expected. After the transition the stable form of matter is quark matter.

Recent discovery of magnetars, which have huge magnetic field and came into a new class of compact stars, stimulate interest in the studying of their properties.

In this thesis, the properties of spin polarized quark matter have been studied using a three dimensional model for polarized quark matter with a density dependent quark-quark (confining) potential. Calculation of our results show that the ground state energy of quark matter increases by increasing spin polarization and spontaneous phase transition to ferromagnetic state does not occur. We have also found that the equation of state becomes stiffer by increasing polarization.

Keywords: *Spin polarized quark matter, Independent pair approximation, Bethe-Goldstone equation, Pauli operator, String-flip like potential, Quark star.*



Shahrood University of Technology

Physics Faculty

Study of the Properties of Polarized Quark Matter using the Potential of Quark-Quark Interaction

Roghaye Abbasi

Supervisor:

Dr Mohsen Bigdeli

October 2011