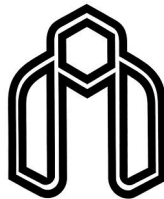


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته ای

بررسی چگونگی تاثیر فرمالیزم ایزواسپین در برهمکنش های هسته ای با A
نوکلئون

دانشجو: حامد فیضی

استاد راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حامد فیضی

تحت عنوان:

برسی چگونگی تاثیر فرمالیزم ایزواسپین در برهمکنش های هسته ای با A نوکلئون

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۲۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	دکتر محمد رضا شجاعی		پروفسور علی اکبر رجیبی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی
			نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و کرم بی‌کرانش، این کمترین بنده را نیز در بر گرفت تا به وسع توان خویش گامی کوچک در گستره علم و معرفت بردارم و از خرمن دانش و تجربه بزرگان و نیک اندیشان خوشه چینی کرده باشم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره پرخاطره از دوران تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، هرچند واژه‌ها را یارای آن نیست که لطف، محبت و بزرگواری کسانی را که در تمام دوران زندگی‌ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده‌ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام، بوسه بر دستانشان زده و از زحمات تمامی آنان صمیمانه تشکر می‌نمایم. از اعضای خانواده‌ام، خصوصاً پدر و مادر مهربانم، که در تمام مراحل زندگی همواره راه‌گشای مشکلاتم بوده‌اند بسیار سپاسگذارم و مراتب تشکر قلبی و باطنی خویش را نسبت به الطاف و مهربانی‌های آنها ابراز می‌دارم. همچنین لازم می‌دانم که از زحمات فراوان استاد توانمندم جناب آقای پروفسور رجبی که با راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده، نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. از استاد مشاور بزرگواریم جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که با صبر و حوصله فراوان مرا در به سرانجام رساندن این رساله یاری دادند کمال تشکر را دارم همچنین از اساتید دوره کارشناسی ارشدم، آقایان دکتر حسن آبادی و دکتر توکلی تشکر و قدردانی می‌نمایم. برای دوستان بسیار خوبم که هیچگاه مرا در طول این دوران، تنها نگذاشته و همواره مشوق من بوده‌اند به خصوص آقایان زارعی، امیری، برهمند، صفدری، بسکابادی، عظیم فرد، گراوند، امیرعباسی، محمدیان و خانم‌ها حسن آبادی، عزیزی و مینایی از صمیم قلب آرزوی بهترین‌ها را دارم و امیدوارم همه این عزیزان در تمام مراحل زندگی خویش موفق و سربلند باشند.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

حامد فیضی

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

یکی از اهداف اصلی تحقیقات در فیزیک، یافتن قوانین ساده‌ای است که موجب درک عمیق‌تر و وحدت پدیده‌های گوناگون شود. در وهله دوم هدف جاه طلبانه‌تر ساختن مدل‌هایی است که در یک محدوده کوچک‌تر، درکی از فرآیندهای فیزیکی درگیر در محدوده‌ای وسیع‌تر را در اختیار ما می‌گذارند و منجر به تجزیه و تحلیل اصولی اطلاعات تجربی موجود می‌شوند. همانطور که می‌دانیم اهمیت این مدل‌ها در فیزیک هسته‌ای بیشتر از شاخه‌های دیگر فیزیک است زیرا این واقعیت که هسته شامل ذرات زیادی است اما نه به اندازه کافی که بتوان آنها را آماری در نظر گرفت، توضیح می‌دهد که چرا می‌توان آنها را هم به صورت یک مجموعه‌ای از نوکلئون‌های منفرد توصیف کرد و هم به صورت یک شی شبیه به قطره مایع متراکم و باردار و همچنین به علت طبیعت نیروهای هسته‌ای، حل کامل معادلات مربوط به سیستم‌های چند نوکلئونی به دلایلی از قبیل تانسوری بودن نیروها و جفت‌شدگی بین معادلات مربوطه کاری بس دشوار است. در این پایان‌نامه، ما به معرفی و بررسی این مدل‌ها پرداخته و با استفاده از اصول مکانیک کوانتومی ابرتقارنی ترازهای انرژی هسته را بدست می‌آوریم سپس تاثیر ایزواسپین را به عنوان یکی از مفاهیم مهم در فیزیک هسته‌ای و ذرات بنیادی در این برهمکنش‌ها محاسبه می‌نماییم. در قسمت بعد ما ابتدا با استفاده از مختصات فوق‌کروی و با فرض اینکه ذرات بدون بار هستند معادلات سیستم را حل می‌کنیم سپس با اعمال ایزواسپین تصحیح مربوط به آن را بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی:

مدل‌ها و برهمکنش‌های هسته‌ای ؛ ایزواسپین ؛ پتانسیل Woods-Saxon ؛ مکانیک کوانتومی

ابرتقارنی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

❖ جواب تحلیلی معادله شرودینگر برای پتانسیل Woods-Saxon با استفاده از اصول ناوردایی شکل

(هجدهمین کنفرانس بهاره فیزیک، IPM، اردیبهشت ۱۳۹۰)

❖ بررسی چگونگی تاثیر فرمالیزم ایزواسپین در شکافتگی جرمی سیستم سه نوکلئونی با استفاده از

توابع فوق کروی (نوزدهمین کنفرانس سالیانه فیزیک، ارومیه، شهریور ۱۳۹۰)

❖ حل معادله شرودینگر به روش ابرتقارنی در حضور پتانسیل Woods-Saxon با استفاده از تقریب

Pekeris (نوزدهمین کنفرانس سالیانه فیزیک، ارومیه، شهریور ۱۳۹۰)

❖ **Supersymmetric Solution of Schrödinger Equation for Woods-Saxon Potential by Using the Pekeris Approximation** (Accepted in Acta Phys B, 5/25/2011)

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۲	۱-۱ پیشگفتار
۵	۲-۱ خواص هسته‌ها
۶	۳-۱ خواص نیروی نوکلئون- نوکلئون
۸	۴-۱ مدل‌های هسته‌ای
۹	❖ ۱-۴-۱ مدل قطره مایع
۱۲	❖ ۲-۴-۱ مدل گاز فرمی
۱۵	❖ ۳-۴-۱ مدل پوسته‌ای
۱۸	❖ ۴-۴-۱ کوانتوم میدان یوکاوا؛ پیون
۲۰	❖ ۵-۴-۱ مدل جمعی
۲۲	۵-۱ پتانسیل‌های هسته‌ای
۲۳	۶-۱ برهمکنش‌های هسته‌ای
۲۴	❖ ۱-۶-۱ فوتون فضا گونه؛ برهمکنش فوتون- هادرون
۲۶	❖ ۲-۶-۱ مزون‌های برداری؛ برهمکنش فوتون- هادرون
۲۹	❖ ۳-۶-۱ برهمکنش پیون-نوکلئون؛ فرایندهای هادرون- هادرون
۳۱	❖ ۴-۶-۱ برهمکنش‌های دیگر

فصل دوم: ایزواسپین

۳۳	۱-۲ پایستگی بار الکتریکی
۳۵	۲-۲ استقلال نیروهای هادرونی از بار الکتریکی
۳۶	۳-۲ ایزواسپین
۴۰	۴-۲ نوردایی ایزواسپین

۴۳ ۵-۲ ایزواسپین ذرات
۴۶ ۴-۲ ایزواسپین در هسته ها
۴۸ ۵-۲ شکست ایزواسپین
۵۰ ۶-۲ اثرات نیروی الکترومغناطیسی
۵۲ ۷-۲ ایزواسپین و پایداری بار الکتریکی

فصل سوم: ابرتقارن در مکانیک کوانتومی

۵۵ ۱-۳ مقدمه
۵۶ ۱-۳ متغیرهای گراسمن و جبر حاکم بر آنها
۵۹ ۲-۳ هامیلتونی ابرتقارن
۶۲ ۳-۳ هامیلتونی های همتا و تابع ابرتانسیل
۶۳ ۴-۳ عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده
۶۴ ۵-۳ هامیلتونی ابرتقارن برای $N=1$ و $N=2$
۶۷ ۶-۳ چگونگی ساختن هامیلتونین و پتانسیل های همراه
۷۱ ۷-۳ تجزیه هامیلتونی و سلسله هامیلتونی ها
۷۳ ۸-۳ اصول ناوردایی شکل

فصل چهارم: بدست آوردن ترازهای انرژی در مدل هسته ای Mean Field و اعمال اثر ایزواسپین

قسمت الف

۷۶ ۱-۴ مقدمه
۷۶ ۲-۴ مروری بر کارهای انجام شده پیشین
۷۷ ۳-۴ مدل پتانسیل میانگین (Mean potential model)
۸۳ ۴-۴ پتانسیل Woods-Saxon
۸۴ ۵-۴ بدست آوردن ترازهای انرژی با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

قسمت ب

۹۲ ۶-۴ مقدمه
۹۲ ۷-۴ مختصات ژاکوبی
۹۳ ۸-۴ بدست آوردن ترازهای انرژی به روش مستقیم برای سیستم سه نوکلئونی
۹۶ ۹-۴ فرمالیزم ایزواسپین
۱۰۰ نتیجه گیری
۱۰۱ مراجع

فهرست شکل‌ها و تصاویر

فصل اول

- شکل ۱-۱ مدلی کلاسیکی برای نیروی تانسوری بین دو نوکلئون ۸
- شکل ۲-۱ انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته‌های مختلف ۱۰
- شکل ۳-۱ اختلاف انرژی بر نوکلئون (B/A) محاسبه شده توسط فرمول نیمه تجربی جرم و مقدار تجربی ۱۲
- شکل ۴-۱ چاه‌های مربعی مدل گاز فرمی برای پروتون‌ها و نوترون‌ها ۱۳
- شکل ۵-۱ انرژی جدایی نوترون بر حسب عدد جرمی؛ گواهی بر مدل پوسته‌ای ۱۶
- شکل ۶-۱ اوربیتال‌های نوکلئون در یک مدل لایه‌ای با برهمکنش اسپین-مدار ۱۷
- شکل ۷-۱ مقایسه شکل پتانسیل "تبادل تک پایونی" یوکاوا با پتانسیل کولنی ۱۸
- شکل ۸-۱ حالت‌های مختلف یک هسته تغییر شکل یافته ۲۲
- شکل ۹-۱ نمودارهای سه امکان تجربی برای مطالعه برهمکنش فوتون-هادرون ۲۶
- شکل ۱۰-۱ ایجاد و واپاشی مزون‌های برداری معرفی شده توسط ساکورایی ۲۹
- شکل ۱۱-۱ برهمکنش پيون-نوکلئون؛ گسیل و جذب پيون ۳۰
- شکل ۱۲-۱ برهمکنش ضعیف بین نوترون و پروتون؛ تبادل W ۳۱

فصل دوم

- شکل ۱-۲ اختلاف انرژی بستگی بر نوکلئون $\left(\frac{B}{A}\right)$ در جفت هسته‌های آینه‌ای ۳۶
- شکل ۲-۲ مانستگی ایزواسپین با اثر زیمان ۴۴
- شکل ۳-۲ حالت پایه و ۵ حالت برانگیخته ${}^7\text{Li}$ و ${}^7\text{Be}$ ۵۱

فصل چهارم

- شکل ۱-۴ مقایسه مقدار تجربی تغییرات چگالی ماده هسته‌ای با مدل Mean Field ۷۸
- شکل ۲-۴ پتانسیل میانگین و تقریب آن با پتانسیل هماهنگ ۷۹

- شکل ۳-۴ اشغال پایین ترین ترازها در پتانسیل میانگین برای ایزوبارهای مختلف $A = 7$ ۸۰
- شکل ۴-۴ انرژی ایزوبارهای مختلف $A = 7$ همراه با حالت های نامقید ۸۱
- شکل ۵-۴ پتانسیل استاندارد Woods-Saxon و پارامترهای مهم آن ۸۴
- شکل ۶-۴ نمودار تغییرات چگالی هسته ای بر حسب فاصله از مرکز هسته ۸۶
- شکل ۷-۴ تابع موج حالت پایه دوترون ۸۹
- شکل ۸-۴ نمودار تغییرات چگالی هسته ای بر حسب فاصله از مرکز هسته ۹۷

فهرست جدول ها

فصل اول

- جدول ۱-۱ انرژی بستگی مربوط به هسته های 2H ، 3H و 4He ۷
- جدول ۲-۱ مقایسه گشتاورهای چارقطبی بدست آمده از مدل تک ذره و مقدار تجربی ۲۱
- جدول ۳-۱ ذرات میدانی در برهمکنش ها ۲۴
- جدول ۳-۱ مزون های برداری ۲۹

فصل دوم

- جدول ۱-۲ مانستگی ایزواسپین نوکلئون ها با اسپین ۳۷

فصل چهارم

- جدول ۱-۱ مقدار انرژی بستگی 3He و 3H برحسب MeV در مدل های مختلف ۹۸
- جدول ۲-۴ مقدار اختلاف انرژی بستگی 3He و 3H برحسب جملات برهمکنشی مختلف ۹۸

فصل اول

کلیات

۱-۱ پیشگفتار

یکی از اهداف اصلی تحقیقات در فیزیک یافتن قوانین ساده‌ای است که موجب درک عمیق‌تر و وحدت پدیده‌های گوناگون شود. در وهله دوم هدف جاه طلبانه‌تر ساختن مدل‌هایی است که در یک محدوده کوچک‌تر، درکی از فرآیندهای فیزیکی درگیر در محدوده وسیع‌تر را در اختیار ما می‌گذارد و منجر به تجزیه و تحلیل اصولی اطلاعات تجربی موجود، در حالیکه بافت سیستم‌های پیچیده در حال بررسی است، می‌شود. یک شرط لازم برای رسیدن به این اهداف، توسعه اسباب و ادوات آزمایشگاهی و روش‌هایی است که اطلاعات لازم برای تعیین صحت این مدل‌ها و معرفی مفاهیم جدید را در اختیار ما می‌گذارند. مساله درک و پیشگویی رفتار و خواص هسته‌ها یکی از دشوارترین وظایفی است که دانشمندان قرن گذشته و حاضر با آن رو برو بوده‌اند. از آغاز قرن بیستم تاکنون عناصر شگفت‌انگیزی در فیزیک هسته‌ای کشف و سنتز شده‌اند و با توجه به خواص این هسته‌ها کاربردهای مهمی با استفاده از آنها ساخته شده‌اند و پدیده‌های بدیعی شکل گرفته‌اند. [1]

تاریخچه فیزیک هسته‌ای نشان از افزایش یکنواخت و مداوم به سمت درک امروزی از هسته اتمی دارد که شروع آن از آزمایش معروف رادرفورد، میانه راه از طریق کشف نوترون توسط چادویک و اوج در فرمولاسیون قطره مایع و مدل پوسته‌ای در میان مهم‌ترین معیارها بوده است. علی‌رغم پیشرفت‌های چشمگیری که بیش از یک دوره نزدیک به یک قرن ایجاد شده، رشته فیزیک هسته‌ای در حال حاضر در زمینه‌های زیر در حال مطالعه است:

ظهور پرتوهای یونی رادیواکتیو به طور وسیعی قابلیت مشاهده ما را گسترش داده‌اند و نتایج اولیه از این نسل جدید از آزمایشات در حال حاضر نشان می‌دهد که درک فعلی از هسته، که عمدتاً بر اساس آزمایش‌هایی در طول خط پایداری است، نیازمند اصلاح است. این زمینه که همواره در حال شکوفایی است از طریق تعامل بسیار قوی بین مشاهدات تجربی و مدل‌سازی نظری نشأت می‌گیرد. در واقع در زمینه‌های بسیار کمی از فیزیک، توسعه آزمایش و نظریه تا این حد درهم تنیده و به هم نزدیک است. این همبستگی آزمایش و تئوری بخش قابل توجهی از جذابیت فیزیک هسته‌ای است:

ایده‌های جدید اغلب می‌توانند پیشنهاد شوند و در یک فرآیند کوتاه تایید، رد و یا جانشین گردند و مشاهدات تجربی می‌توانند به سرعت منجر به مفاهیم نظری جدیدی شوند. یک مثال تاریخی از این عبارت اخیر معرفی ایزواسپین هایزنبرگ تنها چند ماه پس از کشف نوترون توسط چادویک است. ماهیت نیروی قوی بین نوکلئون‌ها که هسته را به هم پیوند می‌دهد و هنوز به طور کامل درک نشده است، به همراه بسیاری از خصوصیات این سیستم‌های چند ذره‌ای، منجر به یک میدان غنی و پیچیده ای از پرسش‌های علمی می‌شود و منتج زمینه پژوهشی بسیار خلاق است. این واقعیت که هسته شامل ذرات زیادی است اما نه به اندازه کافی که بتوان آنها را آماری در نظر گرفت، توضیح می‌دهد که چرا می‌توان آنها را هم به صورت یک مجموعه‌ای از نوکلئون‌های منفرد توصیف کرد و هم به صورت یک شی شبیه به قطره مایع متراکم و باردار. این دو نمایش ارائه شده از هسته منعکس کننده ویژگی‌های جمعی و تک ذره ای خود هسته است، که هر دو آشکارا توسط هسته‌ها نشان داده شده‌اند. بنابراین سوالات زیر را بوجود می‌آورند: چگونه اثرات جمعی می‌تواند از رفتار ذرات فردی بوجود آید؟ چگونه می‌توان این خصوصیات را که به ظاهر متضاد هستند با یکدیگر آشتی داد؟ راه حل این پارادوکس توسط لیوت ارائه شد که در سال ۱۹۵۸ نشان داد که چگونه ممکن است از یک ذره، تغییر شکل جمعی هسته‌ای با استفاده از استدلال تقارن بر اساس $SU(3)$ بوجود آیند.

Arima و Iachello در سال ۱۹۷۵ یک خط استدلال مشابه را دوباره با استفاده از روش تقارن با پیشنهاد مدل برهمکنش بوزون (IBM) دنبال کردند. این مدل و الحاقات آن، ارائه و توسعه یک پل ارتباطی بین رفتار تک ذره‌ای و جمعی است که تقریباً بر اساس طبیعت بوزونی ابرموقعیت جفت نوکلئونی می‌باشد که بر پویایی نوکلئون ظرفیت تسلط داشته و متضمن نیروهای هسته‌ای است و به طور قابل ملاحظه‌ای در این کار موفق بود. این مساله بسیار شبیه به تئوری نیمه رسانایی باردین، کوپر، شریفر (BCS) بر اساس جفت شدگی الکترون‌ها با جفت کوپر اسپین صفر است که منجر به رفتار جمعی ای که ما به عنوان ابررسانایی می‌شناسیم می‌شود. از این چارچوب، مفهومی یکپارچه برای هسته‌های زوج-زوج و فرد-جرم بدست می‌آیند. یکی از جذاب‌ترین ویژگی‌های IBM این است

که منجر به یک توصیف ساده جبری می‌شود که در آن به اصطلاح تقارن دینامیکی نقشی محوری را هم به عنوان راهی برای بهبود درک اولیه ما از نقش تقارن در پویایی‌های هسته‌ای و هم به عنوان نقطه شروعی که از آن می‌توان محاسبات دقیق را انجام داد، ایفا می‌کند.

به طور خاص، این رویکرد، در مرحله اول شرحی یکپارچه از خواص هسته‌هایی با جرم متوسط و سنگین زوج-زوج معرفی می‌کند، که در این چارچوب به عنوان متعلقاتی (به طور کلی) برای توصیف نواحی انتقالی بین تقارن‌های دینامیکی مختلف مجسم شده‌اند. بعدها، هسته‌های جرم-فرد نیز از این دیدگاه توسط در برداشتن درجات آزادی بیشتر یک تک فرمیون مدل پوسته‌ای مورد بررسی قرار گرفتند. پیشنهاد جسورانه‌ای سپس توسط Iachello در سال ۱۹۸۰ داده شد که شرح همزمان هسته‌های زوج-زوج و فرد-جرم را از طریق معرفی $superalgebra$ ، با سطوح انرژی در هر یک از دو هسته‌های متعلق به چندتایی‌های یکسان ممکن می‌ساخت. در حقیقت، این پیشنهاد بر اساس این واقعیت است که هسته‌های زوج-زوج به صورت بوزون (مرکب) رفتار می‌کنند در حالی که هسته‌های فرد-جرم به صورت فرمیون (تقریبی) رفتار می‌کنند. در انرژی‌هایی با مقیاس مناسب حالت‌های آنها می‌تواند به صورت اصلی و ابتدایی مشاهده شود.

این ایده ساده اما وسیع سپس اینگونه مطرح گردید که این دو نوع هسته، هر دو می‌توانند در یک چارچوب مفهومی واحد، مربوط به برهمکنش بوزون-بوزون و بوزون-فرمیون با یک روش دقیق و معین تعبیه شوند. پس از آن، این مفاهیم در چندین ناحیه از جداول هسته‌ای مورد آزمایش قرار گرفتند. گام نهایی شامل وارد کردن هسته‌های فرد-فرد به این چارچوب واحد سپس توسط گسترش این ایده‌ها به، مدل بوزونی نوترون پروتون برداشته شد و بنابراین تئوری "ابرمتقارن کوارتت" هسته فرمول بندی گردید.

تقارن و چارچوب ریاضی آن (نظریه گروه) نقش به طور فزاینده مهمی را در فیزیک ایفا می‌کند. هر دو سیستم‌های چند جسمی کلاسیکی و کوانتومی معمولاً پیچیدگی‌های بسیاری از خود نشان می‌دهند اما تجزیه و تحلیل تقارن‌های آنها اغلب باعث ساده سازی می‌شوند که می‌تواند منجر به درک

عمیق تر و بینش‌های جدید گردد. علاوه بر این، تقارن، خود می‌تواند راه حلی به سوی تدوین یک نظریه فیزیکی صحیح را با اشاره به رهنمودها و محدودیت‌ها در مورد یک وضعیت نامعلوم، ارائه دهد. قابل توجه است که با وجود طیف گسترده‌ای از سیستم‌هایی که ممکن است بررسی شوند، تمام آنها از سیستم‌های کلاسیک گرفته تا مولکول‌ها، هسته‌ها و ذرات بنیادی، نظریه گروه اصول اساسی یکسانی را به کار می‌گیرد و اطلاعات مفید یکسانی را از همه آنها استخراج می‌کند. این جهان شمولی در انطباق ملاحظات تقارن، یکی از جذاب‌ترین ویژگی‌های نظریه گروه است. اکثر مردم دارای درکی شهودی از تقارن، به خصوص در مظهر بارزترین آن در شرایط دگرگونی‌های هندسی هستند که موجب ناوردایی یک جسم و یا سیستم می‌شود. با این حال این تفسیر برای درک ارتباط عمیقش با فیزیک کافی نیست، و لذا لازم می‌شود مفهوم تبدیلات تقارن را به ایده‌های انتزاعی تعمیم دهیم. روابط ریاضی این تبدیلات موضوع نظریه گروه می‌باشد. در طول این سالها پژوهش‌های بسیاری در مورد نظریه ریاضی گروه‌ها و کاربردهای آن در فیزیک نوشته شده است [2,3,4]. تحقیق حاضر تلاش می‌کند از روش‌های تقارن به عنوان زمینه ساختار فیزیک هسته‌ای استفاده شود. ما در اینجا از به کار بردن نظریه ریاضی گروه‌ها پرهیز می‌کنیم و بحث را از مدل‌های هسته‌ای شروع می‌نماییم و مبحث با مفهوم ایزواسپین، که امروزه جهت روشن سازی خواص هسته‌ای برای رسیدن به ایده‌ها و روش‌هایی استفاده می‌شود که زمینه ساز کشف ابرتقارن در هسته اتم است، ادامه می‌یابد و در انتها با استفاده از اصول مکانیک کوانتومی ابرتقارنی ترازهای هسته‌ای در مدل میدان میانگین بدست می‌آیند.

۲-۱ خواص هسته‌ها

هر هسته خاص را نوکلید می‌نامند. نوکلیدها دارای خواص منحصر به فردی هستند و پس از شناسایی هر نوکلید، برای اندازه‌گیری این خواص منحصر به فرد می‌توان اقدام کرد. خواص هسته‌ای به دو دسته استاتیکی و دینامیکی تقسیم می‌شوند. منظور از خواص استاتیکی، خصوصیتی مانند جرم، شعاع، فراوانی نسبی (برای نوکلیدهای پایدار)، مدها واپاشی، اسپین، گشتاور دو قطبی مغناطیسی و

گشتاور چارکطبی الکتریکی و منظور از خواص دینامیکی، خواصی مانند نیمه عمرها (برای نوکلیدهای رادیواکتیو)، مدهای واکنش و سطح مقطع‌های واکنش، و حالت‌های برانگیخته نوکلید است. تاکنون نوکلیدهای مربوط به ۱۱۲ عدد اتمی مختلف (از ۱ تا ۱۱۱) را شناسایی کرده‌اند که تعداد کل آنها با احتساب ایزوتوپهای گوناگون از ۱۰۰۰ هم تجاوز می‌کند. با توجه به شتابدهنده‌هایی که به منظور تولید و بررسی ایزوتوپ‌های خیلی دور از ایزوبارهای پایدارشان ساخته شده‌اند تعداد نوکلیدهای جدیدی که به دقت مطالعه شده‌اند هر روز در حال افزایش است. نمودار نوکلیدهای پایدار و نوکلیدهای رادیواکتیو شناخته شده را در شکل ۱-۲ نشان داده‌ایم. چنانکه می‌توان انتظار داشت گردآوری خواص اندازه‌گیری شده این همه نوکلید، کاری بس عظیم است از طرف دیگر، بازیابی و استفاده از این اطلاعات هم به همان اندازه مهم است. برای نمونه، برای تعیین بهترین مقدار تجربی مربوط به مدهای واپاشی یک ایزوتوپ چه کاری باید انجام دهیم و یا برای تعیین اسپین و گشتاور مغناطیسی ایزوتوپ‌های دیگر، کاری که باید انجام دهیم چیست.

۳-۱ خواص نیروی نوکلئون - نوکلئون

خواص نیروهای بین نوکلئون‌ها را می‌توان به طور مستقیم در آزمایش‌های برخورد و یا به طور غیر مستقیم با استخراج آنها از خواص سیستم‌های مقید، یعنی هسته‌ها، مطالعه کرد. از مشخصات مشاهده شده هسته‌ها، می‌توان نتایجی را درباره نیروی هسته‌ای یعنی نیروی هادرونی بین نوکلئون‌ها بدست آورد. مهمترین این نتایج عبارتند از:

- ۱- این نیرو غالباً جاذب است، در غیر این صورت دافعه کولنی بین نوکلئون‌ها موجب فروپاشی هسته می‌گردید و هسته‌های پایدار نمی‌توانستند وجود داشته باشند. همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قوی‌تر است. نسبت قدرت به صورت معادله زیر است:

$$(1-1) \quad \approx 1 / 10^{-2} / 10^{-12} \text{ ضعیف / الکترومغناطیسی / هادرونی}$$

۲- همانطور که در جدول زیر مشاهده می شود مقایسه انرژی های بستگی 2H ، 3H و 4He حکایت از این دارد که برد نیروی هسته ای از مرتبه ۱ fm است. اگر این نیرو توسط پتانسیلی با این پهنا نمایش داده شود عمق چاه پتانسیل در حدود ۵۰ MeV خواهد بود.

جدول ۱-۱: انرژی بستگی مربوط به هسته های 2H ، 3H و 4He

ویژه هسته	تعداد پیوندها	بر ذره	بر پیوند	کل
2H	۱	۲.۲	۲.۲	۲.۲
3H	۳	۲.۸	۲.۸	۸.۵
4He	۶	۷	۷۴.۷	۲۸

۳- نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند و پس از تصحیح برهمکنش الکترومغناطیسی، نیروهای p-p و n-p بین نوکلئون هایی که در یک حالت باشند یکسان هستند. در فصل سوم به صورت مشروح به این مطلب می پردازیم که نهایتاً منجر به معرفی عدد کوانتومی جدیدی به نام ایزواسپین می شود.

۴- نیروهای هادرونی اشباع پذیرند. برای تایید این خاصیت توجه کنید که اگر هر نوکلئون تمام نوکلئون های دیگر را جذب می کرد آنگاه تعداد زوج برهمکنش ها برابر $\frac{A(A-1)}{2}$ می بود و در آن صورت انتظار می رفت که انرژی بستگی متناسب با A^2 باشد و تمام هسته ها، قطری برابر با برد نیروی هسته ای داشته باشند. هر دو پیش بینی یعنی انرژی بستگی متناسب با A^2 و حجم هسته ای ثابت برای هسته های $A \geq 4$ شدیداً با تجربه مخالفت می کند بنابراین یک ذره تنها تعداد محدودی از نوکلئون های دیگر را جذب می کند و نوکلئون های دیگر یا تحت تاثیر قرار نمی گیرند و یا دفع می شوند. این خاصیت را می توان از طریق نیروهای تبدالی^۱ و یا از طریق نیروهایی که در فواصل کوتاه به شدت دافعه هستند^۲ (مغزه سخت) توجیه کرد.

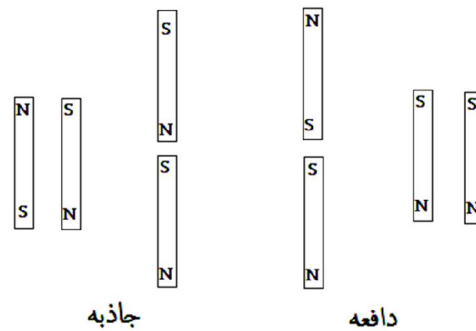
^۱W.Heisenberg, Z.Physik, 77,1 (1932)

^۲R.Jastrow, phys.Rev, 81,165(1951)

۵- نیروی بین نوکلئون‌ها در هسته به جهت‌گیری اسپین هر دو نوکلئون وابسته است.

۶- نیروهای هسته‌ای شامل یک مولفه تانسوری (غیر مرکزی) هستند. این خاصیت را می‌توان

به صورت زیر نمایش داد:



شکل ۱-۱: مدلی کلاسیکی برای نیروی تانسوری بین دو نوکلئون

۴-۱ مدل‌های هسته‌ای

در توصیف نیروهای هسته‌ای با ابهامات زیادی حتی در گستره انرژی پایین‌تر از ۳۵۰ مواجه هستیم. علاوه بر این با بهترین نیروها محاسبات (ابتدا به ساکن) خواص هسته‌ای حتی با بهترین ماشین‌های محاسبه، بی‌نهایت مشکل است. برای بدست آوردن خواص هسته‌ها به روش مستقیم با چند مشکل بنیادی مواجه هستیم. یکی از این مشکلات این است که از لحاظ ریاضی در حل مساله چند جسمی با کار دشواری روبرو هستیم. مشکل دوم به ماهیت نیروی هسته‌ای مربوط می‌شود زیرا نیروهای هسته‌ای خیلی پیچیده اند و شواهد موجود نشان می‌دهد که برهمکنش نوکلئون‌ها نه تنها از طریق نیروهای متقابل دو جسمی بلکه از طریق نیروهای سه جسمی صورت می‌گیرد یعنی نیروی وارده بر نوکلئون ۱ نه تنها به مواضع هر یک از نوکلئون‌های ۲ و ۳ بستگی دارد بلکه شامل یک جمله اضافی است که از همبستگی بین مواضع هر یک از نوکلئون‌های ۲ و ۳ ناشی می‌شود. برای این نیرو در فیزیک کلاسیک نیروی مشابهی سراغ نداریم. بنابراین برای بررسی هسته‌ها یک رهیافت جدید در نظر می‌گیریم. این رهیافت به این صورت است که عمداً یک نظریه خیلی ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد همراه با نیروهای هسته‌ای ساده شده، انتخاب می‌کنیم. بدین

ترتیب یک مدل هسته‌ای می‌سازیم یعنی چشم انداز ساده‌ای از ساختار هسته‌ای در نظر می‌گیریم که متضمن خصوصیات اصلی هسته‌هاست. معیار موفقیت هر مدل را باید در دو نکته دانست:

۱- مدل باید بتواند خواص هسته‌ای تاکنون اندازه‌گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد.

۲- مدل باید خواص دیگری را پیش‌بینی کند که در آزمایش‌های جدید قابل اندازه‌گیری باشند.

این شیوه مدل‌سازی فرآیندهای پیچیده، در بسیاری از عرصه‌های علمی رایج است. مدل‌سازی زیست-شیمی‌دان‌ها در مورد تکثیر ژن‌ها و مدل‌سازی متخصصان هواشناسی در مورد دینامیک پیچیده جریان‌های جوی که موجب تغییر آب و هوا می‌شود از جمله این نمونه‌هاست [5].

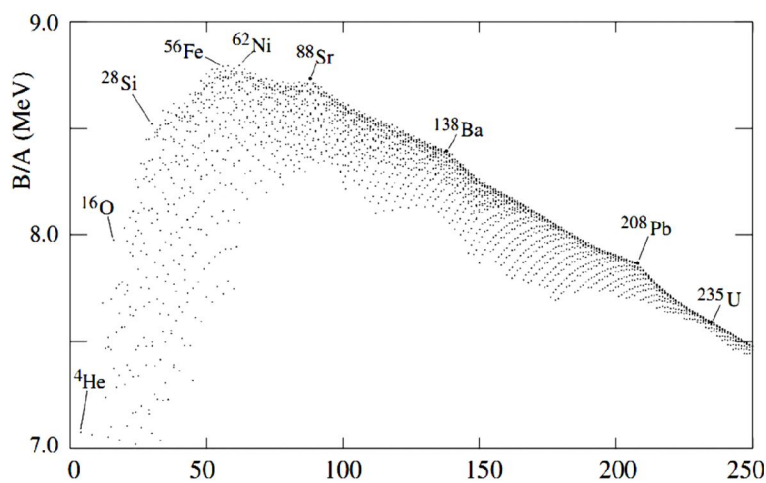
به طور کلی مدل‌های هسته‌ای را می‌توان به مدل‌های ذره مستقل (IPM) که در آنها فرض می‌شود ذرات، در پایین‌ترین مرتبه، به طور مستقل در یک پتانسیل هسته‌ای مشترک حرکت می‌کنند، و مدل‌های دسته‌جمعی یا برهمکنش قوی (SIM) که در آنها نوکلئون‌ها قویاً به یکدیگر جفت می‌شوند، تقسیم کرد. ساده‌ترین مدل SIM مدل قطره مایع؛ و ساده‌ترین مدل IPM مدل گاز فرمی است. هر دو این مدل‌ها را در این بخش بررسی خواهیم کرد. در قسمت بعدی، مدل پوسته‌ای IPM که در آن نوکلئون‌ها تقریباً به طور مستقل در یک پتانسیل کروی ایستا که به وسیله توزیع چگالی هسته‌ای تعیین می‌شود؛ و مدل دسته‌جمعی SIM که حرکت‌های دسته‌جمعی هسته در آن در نظر گرفته می‌شود را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مدل وحدت یافته، ویژگی‌های مدل پوسته‌ای و مدل دسته‌جمعی را ترکیب می‌کند: در این مدل فرض می‌شود که نوکلئون‌ها تقریباً مستقل از یکدیگر در یک پتانسیل مشترک غیر کروی با تغییرات اندک، حرکت می‌کنند، و برانگیختگی‌های نوکلئون‌های منفرد و تمامی هسته بررسی می‌شود [6].

۱-۴-۱ مدل قطره مایع

یکی از برجسته‌ترین واقعیات پیرامون هسته، ثابت بودن تقریبی چگالی هسته است، یعنی حجم یک هسته با تعداد نوکلئون‌های تشکیل دهنده آن متناسب است. همین واقعیت برای مایعات نیز برقرار

است و بر اساس آن یکی از اولین مدل‌های هسته‌ای توسط بور^۱ و فون وایتکر^۲ معرفی شد. در این مدل، هسته به صورت قطرات مایع تراکم ناپذیر با چگالی بی‌نهایت زیاد در نظر گرفته می‌شود. این مدل روند تغییر انرژی بستگی نسبت به عدد اتمی و همچنین تصویری فیزیکی از فرآیند شکافت را به صورت نسبتاً خوبی ارائه می‌دهد. انرژی بستگی متوسط بسیاری از هسته‌ها با تقریب ۱۰ درصد در حدود ۸ MeV است. در شکل زیر انرژی بستگی نوکلئون‌ها در نوکلیدهای مختلف نشان داده شده است:



شکل ۱-۲: انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته‌های مختلف [7]

تلاش برای درک منحنی انرژی بستگی به فرمول نیمه تجربی جرم منتهی می‌شود. هسته‌ای شامل A نوکلئون، Z پروتون و N نوترون را در نظر بگیرید. به علت وجود انرژی بستگی B که نوکلئون‌ها را در کنار یکدیگر نگه می‌دارد، جرم کل چنین هسته‌ای از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل دهنده آن اندکی کمتر است. برای حالت‌های مقید؛ B مثبت است و انرژی لازم برای تفکیک هسته به پروتون و نوترون‌های تشکیل دهنده آن را نشان می‌دهد. انرژی بستگی بر نوکلئون $\left(\frac{B}{A}\right)$ بر حسب رابطه زیر بیان می‌شود:

^۱N. Bohr, Nature, 137,344(1936)

^۲C. F. Von Weizsacker, Z.Physik, 96,431(1935)

$$\frac{B}{A} = a_v - a_s A^{-\frac{1}{3}} + a_{sym} \left(\frac{Z-N}{A} \right)^2 - a_c Z^2 A^{-\frac{4}{3}} \quad (2-1)$$

رابطه فوق، رابطه بته-وایتسکر است. ضرایب ثابت در این رابطه با برازش انرژی‌های بستگی مشاهده شده در آزمایشات تعیین می‌شوند. یک مجموعه نوعی از این ضرایب عبارتند از:

$$a_c = 0.70 \text{ MeV}, \quad a_{sym} = 22.5 \text{ MeV}, \quad a_s = 17.2 \text{ MeV}, \quad a_v = 15.6 \text{ MeV} \quad (3-1)$$

با این مقادیر شمای کلی منحنی انرژی بستگی نشان داده شده در شکل ۱-۲ به خوبی بدست می‌آید.

جملات معادله (۱-۲) به ترتیب جمله حجمی، جمله سطحی، جمله تقارنی و جمله کولنی نامیده می‌شوند. در مورد انرژی بستگی دو مورد را تذکر می‌دهیم:

۱- در اینجا فرض کرده‌ایم که ضرایب موجود در معادله (۱-۲) پارامترهای قابل تنظیمی هستند

که به وسیله آزمایش تعیین می‌گردند. در یک بررسی کامل‌تر می‌توان این ضرایب را بر حسب

مشخصات نیروهای هسته‌ای بدست آورد مخصوصاً محاسبه مهمترین ضریب یعنی a_v مدت

مدیدی فیزیکدان‌های نظری را به سوی خود جلب کرده بود زیرا این ضریب نهایتاً به خواص

ماده هسته‌ای مربوط می‌شود. ماده هسته‌ای حالتی از ماده است که می‌تواند در یک هسته

نامتناهی وجود داشته باشد. نزدیکترین تقریب به این حالت در ستاره‌های نوترونی وجود دارد.

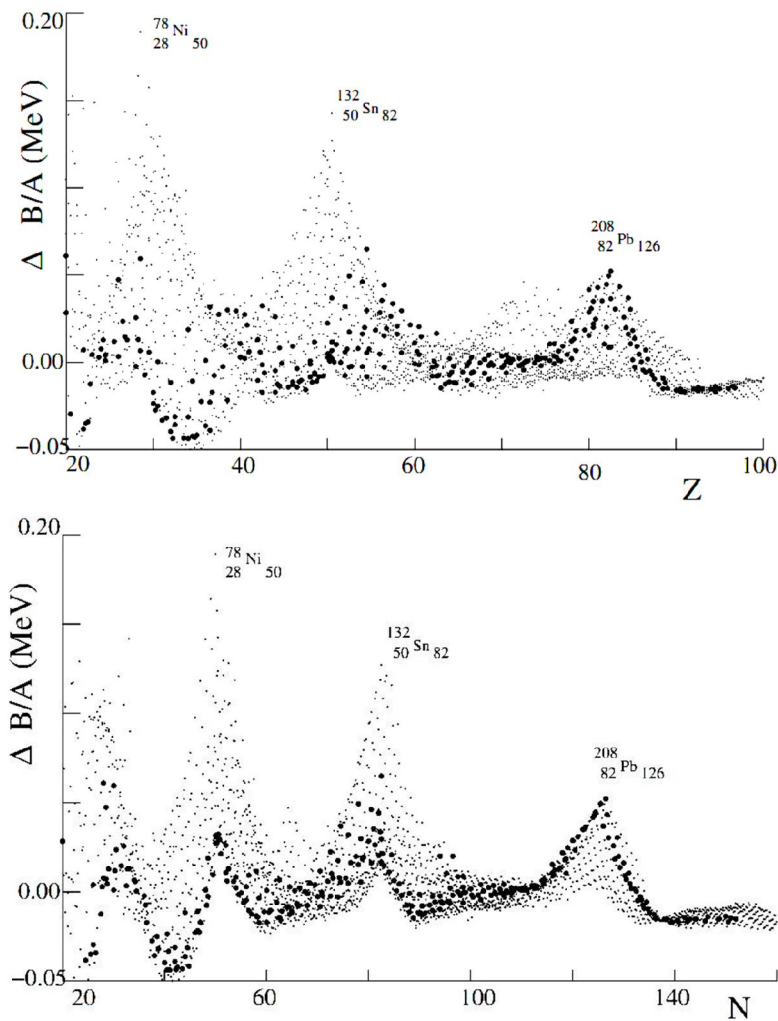
۲- با برونمایی رابطه بته-وایتسکر به نواحی‌ای که هنوز کاملاً شناخته نشده‌اند می‌توان خواص

پایداری ماده را بررسی کرد. چنین مطالعاتی در مواردی مانند بررسی عناصر خیلی سنگین

مصنوعی، بررسی انفجارهای هسته‌ای و خصوصاً در اختر فیزیک حائز اهمیتند.

در شکل ۱-۳ انرژی بستگی محاسبه شده توسط رابطه بته-وایتسکر و مقدار تجربی بر حسب عدد

نوترونی و عدد پروتونی با یکدیگر مقایسه شده‌اند:

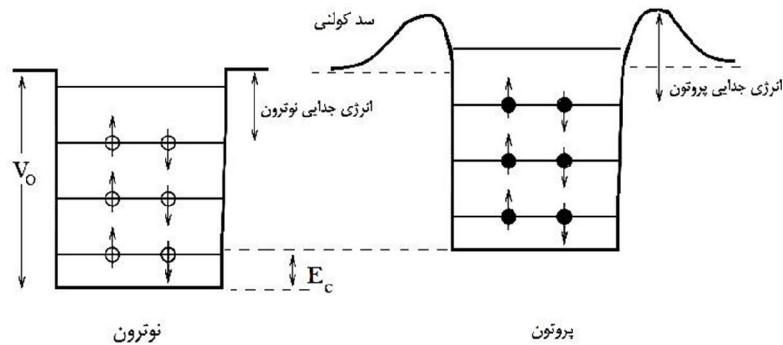


شکل ۳-۱: اختلاف انرژی بر نوکلئون (B/A) محاسبه شده توسط فرمول نیمه تجربی جرم و مقدار تجربی به صورت تابعی از الف: تعداد نوترون‌ها (N) و ب: تعداد پروتون‌ها (Z). نقاط بزرگ عناصر β -پایدار هستند [7].

۲-۴-۱ مدل گاز فرمی

همانطور که قبلاً نیز ذکر شد، محاسبه خواص هسته‌ای حتی با بهترین ماشین‌های محاسبه، کاری بینهایت مشکل است بنابراین در اغلب مسائل هسته‌ای، لازم است که روش را ساده کرده و از مدل‌های هسته‌ای ویژه همراه با نیروهای هسته‌ای ساده شده استفاده کنیم. اگر هسته را به صورت یک گاز فرمی واگن از نوکلئون‌ها در نظر بگیریم، ابتدایی‌ترین مدل ذره مستقل بدست می‌آید. فرض اساسی در این مدل اینست که نوکلئون‌ها با توجه به اصل پائولی، آزادانه در سراسر هسته‌ای با شعاع

معلوم حرکت می کنند. وضعیت حاصل از این فرض، با دو چاه، یکی برای نوترون ها و دیگری برای پروتون ها در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل ۱-۴: چاه های مربعی مدل گاز فرمی برای پروتون ها و نوترون ها

پروتون ها و نوترون های آزاد، در فواصل دور از چاه ها انرژی یکسانی دارند و ترازهای صفر برای هر دو چاه یکسانند ولی به علت دافعه کولنی، شکل و عمق دو چاه متفاوت است. عمق چاه پروتونی به اندازه E_c از عمق چاه نوترونی کمتر است و پتانسیل پروتونی دارای یک سد کولنی است. پروتون هایی که بخواهند از خارج به داخل هسته نفوذ کنند باید یا در سد تونل بزنند یا به اندازه کافی انرژی داشته باشند که از روی آن بگذرند. هر چاه دارای تعدادی متناهی تراز است و هر تراز می تواند دو نوکلئون را در خود جای دهد. فرض بر این است که دمای هسته به حدی پایین است که نوکلئون ها پایین ترین حالت های قابل دسترس خود را اشغال می کنند. این حالت با جمله "گاز فرمی واگن" توصیف می شود. در این حالت نوکلئون ها تمام ترازهایی تا انرژی جنبشی E_f را پر می کنند. ویژه انرژی ها در یک چاه پتانسیل به صورت زیر هستند:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} N^2 \quad (۴-۱)$$

برای هر انرژی دو مقدار تکانه ممکن است:

$$p = \pm \sqrt{2mE} \quad (۵-۱)$$

که علامت آن مربوط به جهت حرکت در امتداد محور x هاست. از معادله (۴-۱) داریم:

$$N = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \quad (۶-۱)$$

معادله بالا برای ذره ای با یک درجه آزادی صادق است. برای ذره‌ای در سه بعد، حجم سلول برابر با $l^3 = (2\pi\hbar)^3$ است و تعداد حالت‌ها در سه بعد در حجم $\int d_p^3 d_x^3$ در فضای فاز شش بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d_p^3 \quad (۷-۱)$$

شاخص ۱ نشان دهنده تعداد حالت‌ها برای یک ذره است. با انتگرال گیری از رابطه بالا تا p_{max} تعداد کل حالت‌ها، n ، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{V p_{max}^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (۸-۱)$$

هر حالت تکانه می‌تواند دو نوکلئون، یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین قبول کند بنابراین تعداد هر یک از دو نوع نوکلئون یعنی پروتون‌ها و نوترون‌ها برابر $n=N$ است و بنابراین داریم:

$$N = \frac{V p_N^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (۹-۱)$$

که در آن p_N تکانه ماکزیموم نوترون‌ها و V حجم هسته‌ای است. از رابطه $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R_0^3 A}{3}$ برای حجم تکانه ماکزیموم برای نوترون‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$p_N = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi N}{4A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (۱۰-۱)$$

به همین نحو تکانه ماکزیموم برای پروتون‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$p_Z = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi Z}{4A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (۱۱-۱)$$

مقدار مناسب انرژی فرمی از هسته‌های خود-مزدوج که در آنها $N = Z$ است بدست می‌آید. با به کار بردن رابطه غیر نسبیتی بین انرژی و تکانه و جایگذاری مقادیر عددی در معادله (۱۱-۱) خواهیم داشت:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \approx 40 \text{ MeV} \quad (۱۲-۱)$$

با استفاده از معادلات (۱۰-۱) و (۱۱-۱) انرژی جنبشی متوسط کل به صورت زیر بدست می‌آید [6]:

$$\langle E(Z, N) \rangle = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N^{\frac{5}{3}} - Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (13-1)$$

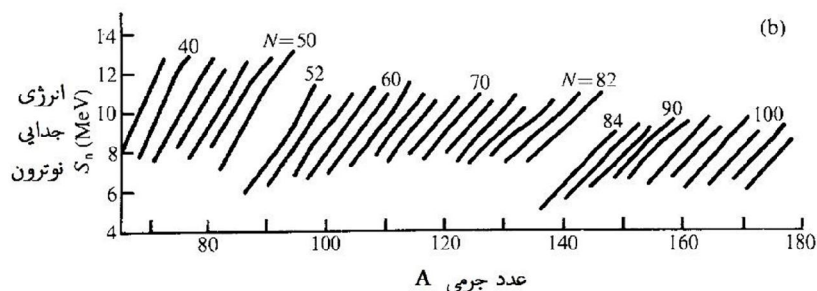
لازم به یاد آوری است که در این معادلات جرم پروتون و نوترون یکسان در نظر گرفته شده است و برهمکنش بین ذرات را با مرز هسته جایگزین کرده‌ایم که توسط چاه پتانسیل نمایش داده می‌شود.

۳-۴-۱ مدل پوسته ای

مدل‌هایی که در بخش‌های گذشته معرفی شد اگر چه خواص ماکروسکوپی هسته را تشریح می‌کنند اما در توجیه حالت‌های برانگیخته هسته‌ای عاجزند. بارتلت و همچنین الساسر نشان دادند که هسته‌هایی که در آنها N یا Z یکی از اعداد ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۸ باشند دارای پایداری بیشتری هستند. در ابتدا شواهد این آزمایش، فراوانی عناصر، تعداد ایزوتوپ‌ها و انرژی ذرات آلفای گسیل شده بودند. الساسر سعی کرد پایداری این نوکلیدها را بر اساس حرکت مستقل پروتون‌ها و نوترون‌ها در یک چاه پتانسیل تک ذره ای توضیح دهد اما نتوانست توجیهی برای هسته‌های ۸۲ و ۱۲۸ پیدا کند. به دو دلیل توجه کمی به کار او شد: اول اینکه مدل یاد شده پایه پایه نظری آشکاری نداشت و دوم اینکه در آن زمان شواهد تجربی موجود کم بود. با این وجود به تدریج شواهد وجود اعداد جادویی بیشتر شد. در شکل ۱-۵ انرژی جدایی نوترون بر حسب انرژی رسم شده است که مدل پوسته‌ای را کاملاً تایید می‌کند. این اعداد جادویی وجود نوعی از پوسته‌ها را پیشنهاد می‌کنند. بالاخره در سال ۱۹۴۹، اعداد جادویی بر حسب مدارهای تک ذره ای توسط ماریاگوپرت مایر^۱ و جوزف اچ جنسن^۲ توضیح داده شدند [9]. در مدل پوسته‌ای، مساله پتانسیل هسته‌ای را با این فرض بنیادی حل می‌شود که حرکت هر نوکلئون منفرد را تحت تاثیر پتانسیل واحدی که نوکلئون‌های دیگر همه در تولید آن نقش دارند در نظر می‌گیریم. اگر هر یک از نوکلئون‌ها را به این نحو مورد بررسی قرار دهیم، آنگاه می‌توانیم برای

^۱M. G. Mayer, *Phys. Rev* 78,16(1950)

^۲H. D. Jensen, , *Phys. Rev* 75,1766(1949)

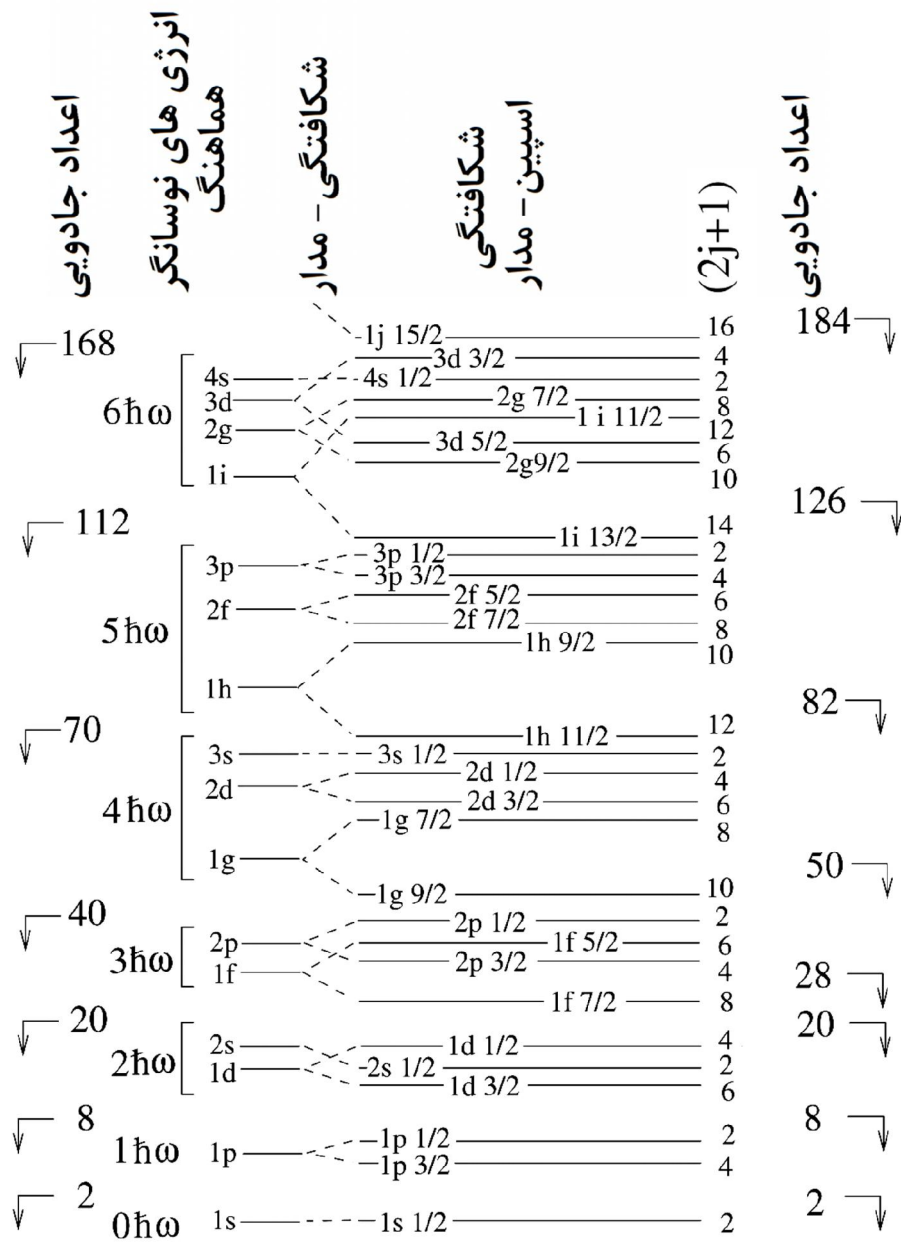


شکل ۱-۵: انرژی جدایی نوترون بر حسب عدد جرمی؛ شاهدهی بر مدل پوسته‌ای [7]

تمامی نوکلئون‌های موجود در هسته، ترازهای انرژی متناظر به زیر پوسته‌ها را به دست آوریم. فرض مستقل بودن نوکلئون‌ها و کرویت ساده‌انگاری بیش از حد است زیرا بین نوکلئون‌ها، برهمکنش‌هایی وجود دارد که نمی‌توان آنها را به وسیله یک پتانسیل مرکزی توصیف کرد و معلوم شده است که شکل هسته همیشه کروی نیست.

وجود مدارهای فضایی مشخص را اصل پائولی تعیین می‌کند. فرض می‌کنیم که در یک هسته سنگین، تقریباً در ته چاه پتانسیل برخوردی بین دو نوکلئون صورت گیرد و نوکلئون‌ها در هنگام برخورد با هم انرژی مبادله می‌کنند، اگر تمامی ترازهای انرژی تا تراز نوکلئون‌ها پر شده باشد، هیچ راهی برای کسب انرژی نوکلئون باقی نمی‌ماند مگر آنکه مقدار انرژی به اندازه‌ای باشد که نوکلئون را به تراز ظرفیت برساند. انرژی لازم برای این انتقال که از تراز نزدیک به پایه به تراز ظرفیت انجام می‌شود معمولاً بیشتر از مقداری است که در برخورد بین دو نوکلئون از یکی از آنها به دیگری منتقل می‌شود بنابراین چنین برخوردی بین نوکلئون‌ها نمی‌تواند رخ دهد و گویی نوکلئون‌ها در حرکت مداریشان با هیچ گونه ممانعتی از طرف سایر نوکلئون‌های درون هسته روبرو نمی‌شوند.

اگر برای حل معادلات در این مدل پتانسیل نوسانگر هماهنگ را در نظر بگیریم و اثر اسپین-مدار هسته‌ای را روی ترازها اعمال نماییم به جدول شکل زیر می‌رسیم که اعداد جادویی را به طور کامل در اختیار قرار می‌دهد و حتی اعداد جادویی دیگری را نیز پیش بینی می‌کند.



شکل ۱-۶: اوربیتال های نوکلئون در یک مدل لایه ای با برهمکنش اسپین-مدار [7]

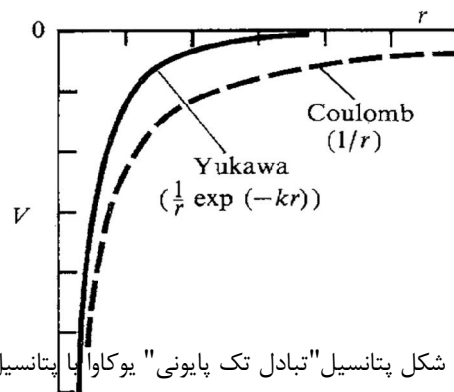
همانطور که از شکل بالا به راحتی مشخص می شود، انرژی شکافتگی اسپین-مدار با افزایش تکانه زاویه ای مداری l افزایش می یابد و در نتیجه برای هسته های سنگین تر که در آنها مقادیر بزرگتر l ظاهر می گردند دارای اهمیت بیشتری است.

۱-۴-۴ کوانتوم میدان یوکاوا ؛ پایون

قانون عکس مجذوری میدان الکترواستاتیک، تقریبی از نظریه ظریف اما دشوار و بحث برانگیز الکترودینامیک کوانتومی محسوب می‌شود. فرض اساسی این نظریه این است که، برهمکنش، ناشی از فوتون‌های رد و بدل شده بین بارهای الکتریکی است. فوتون دارای انرژی $h\nu$ است و ممکن است در نگاه اول موجب شکست ناوردایی انرژی سیستم به نظر برسد، با این حال اصل هایزنبرگ، عدم قطعیت انرژی ΔE را در بازه Δt با شرط $\Delta E \Delta t \leq \hbar$ تایید می‌کند. برای برهمکنش تا فاصله r با سرعت نور، می‌توان نوشت: $\Delta t \approx \frac{r}{c}$ و بنابراین طول موج فوتون مجازی به صورت $\lambda = 2\pi r$ بدست می‌آید. یوکاوا در سال ۱۹۳۵ مشخص نمود که "نظریه کوانتومی میدان‌های (هسته‌ای) باید بر اساس کوانتوم جدیدی مرتب گردند". او با هوشیاری فراوان اضافه کرد "علاوه بر نیروی تبادل و نیروهای اولیه الکتریکی و مغناطیسی، نیروهای دیگری نیز ممکن است بین ذرات بنیادی وجود داشته باشند". او عبارتی برای پتانسیل هسته‌ای به صورت زیر بدست آورد [8]:

$$V = -\frac{g^2}{r} \exp(-kr) \quad (۱۴-۱)$$

در شکل زیر نمودار پتانسیل کولنی و یوکاوا با یکدیگر مقایسه شده‌اند:



شکل ۷-۱: مقایسه شکل پتانسیل "تبادل تک پایونی" یوکاوا با پتانسیل کولنی (تبادل فوتونی)

یوکاوا با مقایسه نتایج بدست آمده و نتایج تجربی، تخمینی برای مقادیر k به صورت $K = 10^{14} \approx$ و 10^{15} g به صورت چندین مرتبه بزرگتر از بار بنیادی e ، بدست آورد.

در حال حاضر "ثابت جفت شدگی" نیروی هسته‌ای به صورت $1 \approx \frac{g^2}{\hbar c}$ و نیروهای الکترومغناطیسی

به صورت $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ بدست آمده است. یوکاوا با فرض اینکه کوانتوم میدان هسته‌ای دارای بار

الکتریکی $+e$ و $-e$ است دریافت که مقدار جرم M این ذرات باید در حدود 200 برابر جرم الکترون باشد. این مطلب به دنبال این واقعیت است که نیروهای نوکلئون- نوکلئون در یک دامنه کوتاه $r = 2fm$ که در حدود شعاع دوترون است عمل می‌کند بنابراین ما می‌توانیم با استفاده مجدد از رابطه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta E \Delta t \leq \hbar$ و $\Delta t \approx \frac{r}{c}$ و $\Delta E = mc^2$ مقدار 200 MeV را برای کوانتوم میدان هسته‌ای بدست آوریم.

یوکاوا فروتنانه و با اعتماد بنفس اظهار داشت که اگر ذراتی با جرم یاد شده و با بار مثبت یا منفی توسط آزمایش آشکار نشوند، به نظر می‌رسد نظریه فوق دارای اشکال است. دو سال بعد، با کشف میون با ویژگی‌های $m_\mu \cong 207m_e$ و $q = \pm e$ توسط ندرمایر و اندرسون (۱۹۳۷) به نظر می‌رسید که شک و تردید یوکاوا برطرف گردیده است. متاسفانه میون به هیچ طریقی به صورت قوی با پروتون، نوترون و یا هسته‌های دیگر برهمکنش نمی‌کند و بنابراین تا سال ۱۹۴۷ که پاول و همکارانش مزون پای (یا پیون) را در امولسیون‌های هسته‌ای که در معرض پرتوهای کیهانی خارج از جو قرار گرفته بود مشاهده کردند، هویت ذرات یوکاوا تایید نشد. آنها مشخصات ذرات پیشگویی شده توسط یوکاوا را به صورت $m_\pi \cong 264m_e$ برای $q = 0$ و $m_\pi \cong 273m_e$ برای $q = \pm e$ بدست آوردند. مزون‌های باردار (لتیس، اوجیالینی و پاول ۱۹۴۷) به یک میون واپاشی می‌کردند که به نوبه خود به شکل یک الکترون واپاشی می‌کرد. پرکینز (۱۹۴۷) برای اولین بار برهمکنش پیون و هسته را که موجب فروپاشی هسته می‌شد مشاهده کرد و در عرض چند سال بسیاری از ذرات ناپایدار جدید مشاهده شدند.

مدل ساده "پتانسیل تبادل تک پیونی" یوکاوا به عنوان یک راهنما، به خصوص برای نیروهای هسته ای فراتر از حدود 2 fm بسیار مفید است، اما دارای تعدادی ویژگی نامطلوب است. به عنوان مثال، در حال حاضر به طور کلی مشخص شده است که به منظور توضیح پراکندگی نوکلئون نوکلئون در انرژی بالا، نوعی از پتانسیل مغز دافعه هسته‌ای در محدوده زیر 2 fm مورد نیاز است، و چنین خاصیتی به توضیح "اشباع نیروهای هسته‌ای و چگالی تقریباً ثابت ماده هسته‌ای" کمک می‌کند. نظریه‌های

مزونی در اوایل، با انواع خاصی از نیروی تبادلی، جمله نیروی دافعه مورد نیاز برای ایجاد جلوگیری از فروپاشی ماده هسته‌ای به درون ابعاد نوکلئون را تولید کردند، اما این نظریه‌ها نمی‌توانند پراکندگی را در انرژی‌های بالا توضیح دهند. معلوم شده است که بجز پیون سایر ذرات نیز با نوکلئون‌ها به صورت قوی برهمکنش می‌کنند، و برای توضیح اثرات قطبش در طول پراکندگی‌های هسته‌ای مزون‌های برداری با اسپین غیر صفر هستند نیز لازم شناخته شده‌اند، با این حال پیون‌ها و کائون‌ها هنوز دارای اسپین صفر هستند. ممکن است که برهمکنش کامل نوکلئون-نوکلئون مشکلی فراتر از پیچیدگی اصولی باشد که اهمیت آن در ساختار کوارک-گلوئون نوکلئون‌ها در انرژی‌های بالاتر، به طور فزاینده افزایش می‌یابد.

۱-۴-۵ مدل جمعی

طیف نوری در سال ۱۹۳۵ وجود گشتاورهای چارکطبی هسته‌ها را آشکار ساخت. این گشتاور، انحراف شکل، توزیع بار هسته‌ای را از یک کره اندازه می‌گیرد بنابراین وجود یک گشتاور چارکطبی، هسته‌های غیر کروی را ایجاد می‌کند و هر چه مقدار این گشتاور بیشتر باشد، انحراف توزیع بار هسته‌ای از یک هسته کروی بیشتر است. این واقعیت که بسیاری از گشتاورهای چارکطبی مشاهده شده هسته‌ها بخصوص در حوالی $A = 25$ ، $150 \leq A \leq 190$ و $A > 200$ ، از آنچه توسط مدل پوسته‌ای پیش بینی می‌شود بزرگترند ما را به مدلی دیگر به نام مدل جمعی سوق می‌دهد. در این مدل علاوه بر جنبه‌های فردی نوکلئون‌ها، به خواص جمعی و جفت‌شدگی نوکلئون‌ها نیز توجه می‌شود خصوصاً برای هسته‌هایی که در حیطه ذکر شده بالا هستند. در جدول زیر مقادیر چارکطبی پیش بینی شده در مدل تک ذره و تجربی با یکدیگر مقایسه شده‌اند:

جدول ۱-۲: مقایسه گشتاورهای چارقفبی بدست آمده از مدل تک ذره و مقدار تجربی

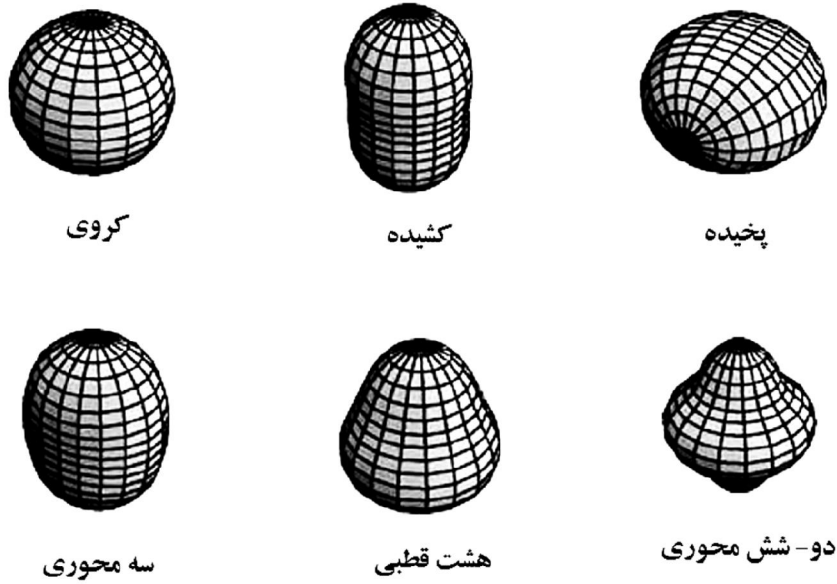
$\frac{Q_{obs}}{Q_{sp}}$	Q_{sp}	Q_{obs}	J	مشخصه	N	Z	نوکلید
20	-0.1	-2.6	$\frac{5}{2}$	دو بار جادویی + یک نوترون	9	8	^{17}O
1	+5	+5.5	$\frac{3}{2}$	دو بار جادویی + یک حفره پروتونی	20	19	^{39}K
-20	-25	+560	$\frac{7}{2}$	بین پوسته ها	104	71	^{175}Lu
1	-30	-35	$\frac{9}{2}$	دو بار جادویی + یک پروتون	126	83	^{209}Bi

رین واتر نشان داد که می توان در غالب مفاهیم مدل پوسته ای چنین گشتاورهای بزرگی را با این فرض که مغزه پوسته بسته تغییر شکل داده است تشریح کرد. در واقع اگر مغزی بیضوی باشد، گشتاوری متناسب با تغییر شکل آن بدست خواهد آمد. تغییر شکل مغزی گواهی بر اثرات چند جسمی است و در نتیجه مدهای جمعی برانگیزش امکان پذیر خواهند بود. ظاهر شدن این مدها شگفت آور نیست زیرا لرد ریلی در سال ۱۸۷۷، پایداری و نوسان قطره های مایع باردار را مورد بررسی قرار داد و نیلز بور و کالکار^۱ نیز در سال ۱۹۳۶ نشان دادند که سیستم ذراتی که در اثر جاذبه متقابلشان گرد هم آمده اند می توانند نوسان های جمعی انجام دهند. نوسان های پلاسما یک مثال کلاسیک از این اثرات جمعی است. تقریباً از سال ۱۹۵۰ آگه بور و بن ماتلسون مطالعه سازمان یافته ای را از حرکت جمعی هسته ها شروع کردند^۲. در طی سال های اخیر با اصلاح این بررسی ها، خواص مطلوب مدل های پوسته ای و جمعی را ترکیب کرده و مدل جامع هسته ای را بوجود آورده اند. تمامی هسته تغییر شکل یافته می تواند دوران کند و این نوع برانگیزش جمعی به ظاهر شدن نوارهای دورانی منجر خواهد شد. هسته تغییر شکل یافته به صورت یک پتانسیل غیر کروی برای حرکت خیلی سریع

^۱N. Bohr, F. Kalckar, *Nature*, 137, 344(1936)

^۲A. Bohr, B. R. Mottelson, *Phys. Rev.*, 27, 16(1953)

تر تک ذره عمل می کند. ترازهای انرژی یک تک ذره را در چنین پتانسیلی می توان بررسی کرد و حاصل آن مدل نیلسون^۱ است. در شکل ۸-۱ حالت های مختلف یک هسته تغییر شکل یافته نشان داده شده است.



شکل ۸-۱: انواع هسته های تغییر شکل یافته در مدل SIM

هسته های ردیف بالا هسته های "تغییر شکل یافته"^۱ و هسته های ردیف پایین هسته های "فوق تغییر شکل یافته"^۲ نامیده می شوند.

۵-۱ پتانسیل های هسته ای

قانون عکس مجددوری نیروی گرانش، اولین بار توسط نیوتن در قرن هفدهم معرفی شد و رابطه مشابه آن برای الکترواستاتیک توسط کاوندیش و کولن در حدود ۱۰۰ سال بعد شناسایی گردید. امید به اینکه اولین تقریب برای نیروهای دیگر، به عنوان مثال، نیروهای واندروالسی و نیروی هسته ای بین یک نوترون و یک پروتون به طور قابل مقایسه ای قوانین ساده توانی باشند، غیر معمول نیست [8].

^۱ Deformed

^۲ Superdeformed

متاسفانه، چنین رویکردی به ندرت موفق است و روش‌های جایگزین نیز باید از میان بسیاری از آنهایی که در بیان تغییرات انرژی پتانسیل برحسب فاصله بین دو ذره موفق هستند انتخاب شوند. برای قوانین عکس مجذوری، تغییرات پتانسیل برحسب فاصله بین دو ذره و مطالعه ساختار الکترومغناطیسی اتم به عنوان مثال، نسبتاً سر راست است. برای نیروهای هسته‌ای هیچ پتانسیل یکتایی با همان عمومیت نیروهای گرانشی و الکترواستاتیکی یافت نشده است، اما با پیشرفت در درک بیشتر هسته، فرم‌های ساده‌ای برای پتانسیل‌های برهمکنش هسته‌ای ساخته شده‌اند.

از جمله این پتانسیل‌ها که عموماً در مدل پوسته‌ای به کار می‌روند می‌توان به چاه مربعی و نوسانگر هماهنگ اشاره کرد. چاه مربعی بنا به دلایلی تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیست زیرا برای جدا کردن یک پروتون یا نوترون از هسته، با صرف انرژی لازم باید بتوانیم آن را از چاه خارج کنیم بنابراین عمق چاه نمی‌تواند بی‌نهایت باشد همچنین لبه پتانسیل هسته‌ای نباید تیز باشد بلکه باید به آرامی به سوی صفر میل کند. پتانسیل نوسانگر هماهنگ نیز دارای انرژی جدایی بی‌نهایت است و لبه اش نیز به قدر کافی تیز نیست. مناسب‌ترین پتانسیل هسته‌ای پتانسیلی بینابینی به نام پتانسیل Woods-Saxon است [5].

۱-۶ برهمکنش‌های هسته‌ای

صرف نظر از نیروی گرانش که هیچ اثر قابل اندازه‌گیری در برهمکنش‌های ذرات ندارد، سه نوع نیروی بنیادی وجود دارد که بین ذرات عمل می‌کنند: ضعیف، الکترومغناطیسی و قوی. به زبان نظریه جدید میدان، هر نیرو از طریق تبادل ذرات یا کوانتوم‌های میدان، حادث می‌شود. کوانتوم‌های میدانی خود می‌توانند به عنوان ذرات بنیادی با مجموعه خواصی معین در نظر گرفته شوند. یک شیوه ترسیمی مفید برای نمایش گسیل یا جذب کوانتوم‌های میدان، استفاده از نمودارهای فاینمن است. نمودارهای فاینمن نه تنها نمایشی تصویری از برهمکنش‌های ذرات را ارائه می‌دهد بلکه محاسبه احتمال وقوع واکنش‌های مختلف و فرآیندهای واپاشی را از طریق به کارگیری مجموعه‌ای از قواعد ممکن می‌سازد.

در هسته و در فرآیندهای هسته‌ای، برهمکنش‌های مختلفی می‌تواند انجام شود. از جمله این برهمکنش‌ها می‌توان به برهمکنش هادرونی به عنوان مهمترین نوع برهمکنش در هسته، برهمکنش ضعیف که عامل اصلی واپاشی‌های هسته‌ای است و برهمکنش بین نوکلئون‌ها و لپتون‌ها مانند پراکندگی الکترون‌ها از هسته و برهمکنش فوتون با هسته اشاره کرد. در این قسمت ما به طور خلاصه این برهمکنش‌ها را معرفی کرده و هر یک را توضیح می‌دهیم. در جدول زیر کوانتوم میدان‌های مختلف نشان داده شده است [6]:

جدول ۱-۳: ذرات میدانی در برهمکنش‌ها

ذره میدانی	جرم	بار	اسپین
γ	۰	۰	۱
W^{\pm}	$81 \frac{GeV}{c^2}$	± 1	۱
Z^0	$93 \frac{GeV}{c^2}$	۰	۱
گلوئون‌ها	۰	۰	۱
گراویتون	۰	۰	۲

۱-۶-۱ فوتون‌های فضا گونه ؛ برهمکنش فوتون - هادرون

برهمکنش فوتون‌های حقیقی با هادرون‌ها در انرژی‌های پایین و متوسط (در حدود 20 MeV) بخش قابل ملاحظه‌ای از فیزیک نظری را برای حداقل 40 سال تشکیل داده است. مثالی از این نوع برهمکنش فروپاشی فوتونی دوترون به صورت زیر است:

$$\gamma + d = p + n \quad (15-1)$$

این فرآیند در سال 1934 توسط چادویک و گلدهابر کشف شد و برای اندازه‌گیری جرم نوترون به کار رفت. از جمله کاربردهای این نوع از برهمکنش‌ها، کاوش در حالت‌های برانگیخته هسته‌ای به کمک پرتو گامای فرودی است. برهمکنش فوتون‌هایی با انرژی‌های خیلی بالا (در حدود GeV) با هادرون

ها، تصویر کاملا متفاوتی را از این برهمکنش ها ارائه می دهد و جنبه های جدیدی از این برهمکنش ها را در اختیار ما می گذارد. در این حالت فوتون "خواص هادرون گونه" نشان می دهد. همانطور که می دانیم فوتون نمی تواند زوج ذرات حقیقی جرم دار را در فضای آزاد تولید کند و حضور یک هسته برای گرفتن تکانه الزامی است. با این وجود، اصل عدم قطعیت نقض پایستگی انرژی را به مقدار ΔE در خلال زمان هایی کمتر از $\frac{\hbar}{\Delta E}$ مجاز می داند بنابراین یک فوتون می تواند یک زوج مجازی یا یک ذره مجازی با همان اعداد کوانتومی خود و با همان انرژی کل ΔE تولید کند. واپاشی مجازی یک فوتون با انرژی E_γ به یک هادرون h با جرم m_h را در نظر می گیریم. پایستگی تکانه ایجاب می کند که فوتون و هادرون دارای تکانه واحدی باشند:

$$p = p_h = \frac{E_\gamma}{c} \quad (16-1)$$

انرژی هادرون برابر است با:

$$E_h = (p^2 c^2 + m_h^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = (E_\gamma^2 + m_h^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad (17-1)$$

بنابراین اختلاف انرژی بین فوتون و هادرون به صورت زیر بدست می آید:

$$\Delta E = E_h - E_\gamma = (E_\gamma^2 + m_h^2 c^4)^{\frac{1}{2}} - E_\gamma \quad (18-1)$$

موارد حدی انرژی فوتون در مقایسه با انرژی سکون هادرون به صورت زیر است:

$$\Delta E = m_h c^2, \quad E_\gamma \ll m_h c^2 \quad (19-1)$$

$$\Delta E = \frac{m_h^2 c^4}{2E_\gamma}, \quad E_\gamma \gg m_h c^2 \quad (20-1)$$

بازه زمانی که هادرون می تواند وجود داشته باشد عبارتست از:

$$T = \frac{\hbar}{m_h c^2}, \quad E_\gamma \ll m_h c^2 \quad (21-1)$$

$$T = \frac{2\hbar E_\gamma}{m_h^2 c^4}, \quad E_\gamma \gg m_h c^2 \quad (22-1)$$

اگر هادرون با سرعت نور سیر کند مسافتی که می پیماید به صورت زیر بدست می آید:

$$L = \frac{\hbar}{m_h c} = \lambda_h, \quad E_\gamma \ll m_h c^2 \quad (23-1)$$

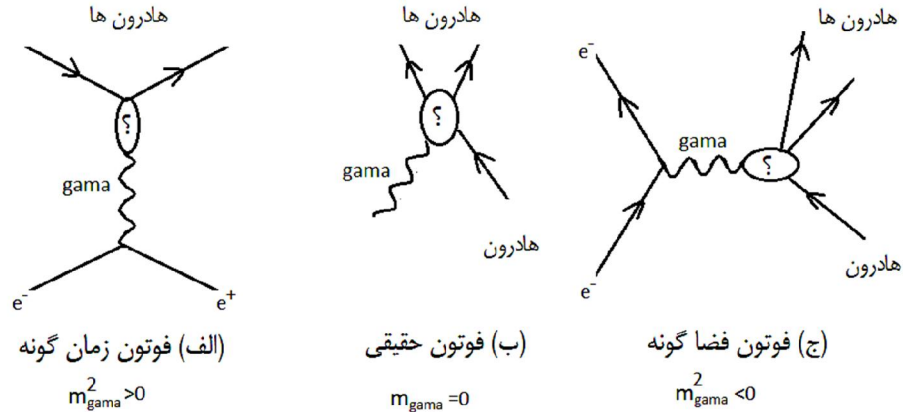
$$L = \frac{2\hbar E_\gamma}{m_h^2 c^3} = 2\lambda_h \frac{E_\gamma}{m_h c^2}, \quad E_\gamma \gg m_h c^2 \quad (24-1)$$

که در آن λ_h طول موج کامپتون کاهش یافته هادرون است. اعداد کوانتومی فوتون از جمله ایزواسپین واپاشی به یک پیون را مجاز نمی‌دارند و پایین‌ترین حالت ممکن هادرون شامل دو پیون است و نتیجتاً λ_h توسط رابطه زیر محدود می‌شود:

$$\lambda_h = \frac{\hbar}{2m_\pi c} \approx 0.7 \text{ fm} \quad (25-1)$$

کم‌جرم‌ترین ذره با $J^\pi = 1^-$ مزون ρ است که برای آن $\lambda_h = 0.3 \text{ fm}$ بدست می‌آید. معادله (۲۵-۱) نشان می‌دهد که طول مسیر در انرژی‌های بالاتر از GeV می‌تواند خیلی بیشتر از قطرهای هسته‌ای شود.

سه نمودار از نمودارهای فایمنی که درباره برهمکنش‌های فوتون-هادرون اطلاعاتی ارائه می‌کنند در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل ۱-۹: نمودارهای سه امکان تجربی برای مطالعه برهمکنش فوتون-هادرون

۱-۶-۲ مزون‌های برداری؛ برهمکنش فوتون-هادرون

همایلتونی برهمکنش الکترومغناطیسی را می‌توان از اصل کمترین کنش بدست آورد. این اصل فقط بار الکتریکی را به عنوان یک ثابت اساسی معرفی می‌کند و فرض می‌شود که جریان‌ها ناشی از حرکت

بارها باشند. لپتون‌ها را به صورت ذرات نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. در اینصورت احتمال چگالی جریان یک لپتون با سرعت توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$\vec{J}_{em} \text{ (لپتون‌ها)} = \rho \vec{V} \quad (۲۶-۱)$$

همیلتونی برهمکنش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H_{em} = \frac{q}{c} \int d^3x (c\rho A_0 - \vec{J}_{em} \cdot \vec{A}) \quad (۲۷-۱)$$

جریان پایسته است بنابراین معادله پیوستگی زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (۲۸-۱)$$

همیلتونی برهمکنش و معادله پیوستگی را می‌توان اختصاراً با "چاربردار" بیان کرد^۱. کمیتی چاربردار نامیده می‌شود که تحت تبدیلات لورنتس ناوردا بماند. حاصلضرب داخلی دو چاربردار A_μ و B_μ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\mu \cdot B_\mu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \vec{B} \quad (۲۹-۱)$$

حاصلضرب داخلی دو چاربردار دلخواه، یک کمیت نرده‌ای یا ناوردای لورنتس است، یعنی تحت هر تبدیل لورنتسی ناوردا باقی می‌ماند. چاربردارهای مهمی که وجود دارند عبارتند از:

$$X_\mu = (ct, \vec{X}) \quad \text{فضا-زمان} \quad (۳۰-۱)$$

$$P_\mu = \left(\frac{E}{c}, \rho \right) \quad \text{چار-تکانه} \quad (۳۱-۱)$$

$$j_\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad \text{چار-جریان} \quad (۳۲-۱)$$

$$A_\mu = (A_0, \vec{A}) \quad \text{چار-پتانسیل} \quad (۳۳-۱)$$

$$\nabla_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad \text{چار-گرادیان} \quad (۳۴-۱)$$

همیلتونی یک ذره نقطه‌ای با بار q در حضور میدان‌های خارجی توسط روشی که به وسیله لارمور معرفی شده است از همیلتونی ذره آزاد بدست می‌آید. برای انجام این کار، انرژی و تکانه ذره آزاد را با

^۱Feynman Lectures, I, Chapter 17, II, Chapter 25.

روابط زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \quad \text{و} \quad H \rightarrow H - qA_0 \quad (35-1)$$

با به کار بردن چاربردارهای روابط (۳۰-۱) تا (۳۴-۱) کمترین کنش الکترومغناطیسی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(P_\mu)_{\text{free}} \rightarrow \left(P_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \right) \quad (36-1)$$

هامیلتونی و معادله پیوستگی به ترتیب به صورت معادله (۳۷-۱) و (۳۸-۱) بدست می‌آیند:

$$H_{em} = \frac{q}{c} \int d^3x \ j_\mu A_\mu \quad (37-1)$$

$$\nabla_\mu j_\mu = 0 \quad (38-1)$$

باید تاکید کنیم که جریان الکترومغناطیسی هادرون‌ها به سادگی جریان لپتون‌ها نیست. عامل شکل کشسان نوکلئون‌ها و عامل g نشان می‌دهند که برهمکنش نوکلئون‌ها با میدان الکترومغناطیسی مستقیماً توسط کمترین کنش الکترومغناطیسی داده نمی‌شود. نهایتاً چگالی جریان الکترومغناطیسی کل یک سیستم را به صورت زیر می‌نویسیم:

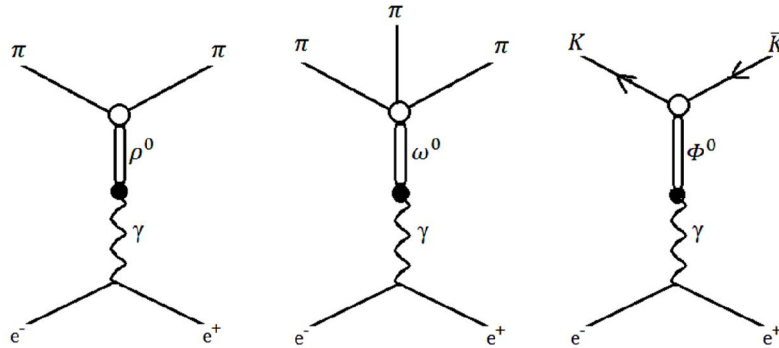
$$e j_{em} (\text{کل}) = e j_{em} (\text{لپتون‌ها}) + e j_{em} (\text{هادرون‌ها}) \quad (39-1)$$

برهمکنش فوتون با یک هادرون همانگونه که از واپاشی پيون خنثی پیداست به تنهایی از طریق بار الکتریکی انجام نمی‌گیرد.

در سال ۱۹۶۰ ساکورایی پیشنهاد کرد که دو هادرون این زوج، باید قویاً با یکدیگر جفت شوند و یک مزون برداری را ایجاد کنند^۱. بنابراین بر طبق این نظریه فوتون به یک مزون برداری تبدیل می‌شود. ساکورایی پیشنهاد خود را خیلی جلوتر از زمانی که مزون‌های برداری به صورت تجربی کشف شوند ارائه کرد [6]. در حال حاضر پیشنهادهای نظری می‌توانند برای طراحی آزمایش‌های جدید به کار روند ولی فقط نتایج آزمایشات است که می‌تواند راهگشای شناخت اساسی از برهمکنش بین فوتون‌ها و

^۱ J.J. Sakurai, *Ann. Phys. (New York)*, 11, 1, (1960)

هادرون ها باشد. در شکل زیر چگونگی تبدیل فوتون مجازی به یک مزون برداری نشان داده شده است:



شکل ۱-۱: ایجاد و واپاشی مزون های برداری معرفی شده توسط ساکورایی

سه مزون جدول ۴-۱ دارای اسپین $J=1$ ، پاریته منفی، پاریته باری منفی و فوتون بار صفر هستند. از آنجا که پاریته یک بردار، منفی و تعداد مولفه های مستقل آن نظیر ذره ای با اسپین ۱ است، این مزون ها را مزون های برداری می نامند.

جدول ۴-۱: مزون های برداری

مزون	I	J	π	η_e	Y	انرژی سکون (MeV)	پهنا (MeV)	مد واپاشی اصلی
ρ^0	۱	۱	-۱	-۱	۰	۷۷۰	۱۴۶	$\pi\pi$
ω^0	۰	۱	-۱	-۱	۰	۷۸۴	۱۰	$\pi^+ \pi^- \pi^0$
ϕ^0	۰	۱	-۱	-۱	۰	۱۰۹۴	۴	$K\bar{K}$

۲-۶-۱ برهمکنش پیون- نوکلئون؛ فرآیندهای هادرون- هادرون

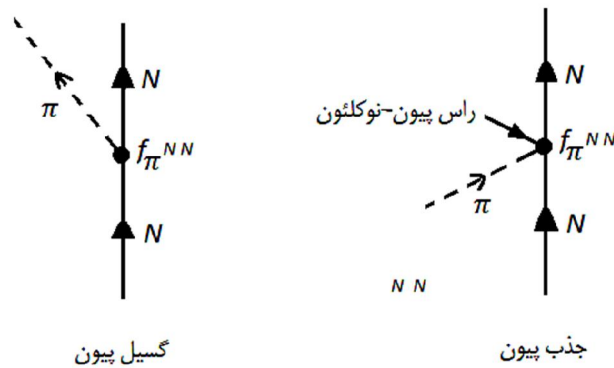
پیش از اینکه یوکاوا در سال ۱۹۳۴ وجود یک بوزون سنگین را فرض کند، درباره طبیعت نیروهای هسته ای تقریباً آگاهی وجود نداشت. وقتی پیون کشف و به عنوان کوانتوم یوکاوا شناخته شد و معلوم

شد که ذره‌ای شبه نرده‌ای- شبه برداری است، بسیاری از ابهامات موجود در مورد ماهیت نیروهای هسته‌ای از بین رفت ولی هنوز هم ممکن نبود که نیروی هسته‌ای را به طور رضایت بخشی توصیف کرد. امروزه می‌دانیم که علاوه بر پيون‌ها، کوانتوم‌های خیلی بیشتری وجود دارند که باید در نظر گرفته شوند ولی پيون و برهمکنش آن با نوکلئون نقش خاص و بسیار مهمی را ایفا می‌کند. پيون دارای دو ویژگی مهم است:

۱- عمر پيون به قدر کافی طولانی هست تا بتوان باریکه‌های شدید پيوني را تهیه و برهمکنش پيون‌ها و نوکلئون‌ها را مطالعه کرد.

۲- پيون سبک‌ترین مزون است بنابراین در گستره انرژی 500 MeV می‌توان بدون مداخله سایر مزون‌ها، برهمکنش پيون-نوکلئون را مطالعه کرد.

پيون‌ها چون بوزون هستند می‌توانند منفردا گسیل یا جذب شوند. در شکل زیر این مطلب نشان داده شده است:



شکل ۱-۱۱: برهمکنش پيون-نوکلئون؛ گسیل و جذب پيون

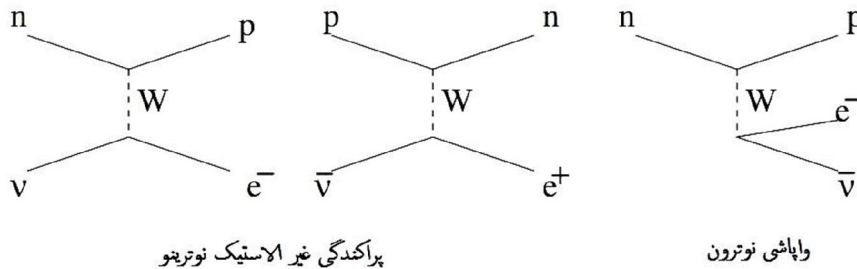
در شکل ۱-۱۱، $f_{\pi NN}$ ، ثابت جفت شدگی نامیده می‌شود و قدرت برهمکنش پيون-نوکلئون را مشخص می‌کند. اصولاً برای پراکندگی‌های پيون-نوکلئون ده فرآیند گوناگون ممکن است ولی سه فرآیند زیر مهمترین آنها هستند:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ n \quad , \quad \pi^- p \rightarrow \pi^- p \quad , \quad \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \quad (۴۰-۱)$$

در بررسی پراکندگی پيون- نوکلئون، زمانی که انرژی پيون فرودی 170 MeV باشد حالت تشدید بوجود می‌آید. این تشدید را به دلیل اینکه ذره برانگیخته حاصل، دارای انرژی 1236 MeV است، $\Delta(1236)$ می‌نامند. اسپین و ایزواسپین $\Delta(1236)$ را با استدلال‌های ساده می‌توان تعیین کرد. پيون‌ها دارای ایزواسپین 1 و نوکلئون‌ها دارای ایزواسپین $\frac{1}{2}$ هستند بنابراین همانطور که در فصل بعد به طور مشروح توضیح داده می‌شود این دو ذره می‌توانند ایزواسپین کل $\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ را تشکیل دهند. اگر $\Delta(1236)$ دارای ایزواسپین $\frac{1}{2}$ می‌بود فقط دو حالت باردار تشدید رخ می‌داد که در این صورت $\Delta^0(1236)$ و $\Delta^+(1236)$ وجود می‌داشتند اما علاوه بر این دو حالت تشدید، $\Delta^{++}(1236)$ نیز در این فرآیندها ظاهر می‌شود بنابراین Δ باید دارای ایزواسپین $\frac{3}{2}$ باشد. این حالت ذره دیگری را پیش بینی می‌کند که $\Delta^-(1236)$ نامیده می‌شود و در هدف‌های پروتونی قابل مشاهده نیست.

۱-۶-۳ برهمکنش‌های دیگر

از جمله برهمکنش‌های دیگری که در فرآیندهای هسته‌ای می‌تواند روی دهد برهمکنش ضعیف است. این برهمکنش عامل اصلی واپاشی‌های خود به خودی هسته‌هاست. شکل ۱-۱۲ یک نمونه از این برهمکنش‌ها را نشان می‌دهد:



شکل ۱-۱۲: برهمکنش ضعیف بین نوترون و پروتون؛ تبادل W [7].

فصل دوم

ایزو اسپین

۱-۱ پایستگی بار الکتریکی

ما آنچنان به این واقعیت که الکتریسیته به وجود نمی‌آید و از بین نمی‌رود عادت کرده‌ایم که اغلب فراموش می‌کنیم بپرسیم: پایستگی بار الکتریکی تا چه حد معتبر است؟. یک راه مناسب برای جستجوی نقض احتمالی پایستگی بار اینست که ببینیم آیا الکترون و امی پاشد یا خیر. اگر بار الکتریکی پایسته نمی‌بود واپاشی الکترون به یک نوترینو و یک فوتون به صورت:

$$e = \nu + \gamma \quad (1-2)$$

تحت تمامی قوانین شناخته شده پایستگی، مجاز می‌بود [6]. مشاهده چنین فرایندی می‌تواند به این صورت باشد که اگر الکترون مقیدی در یک اتم واپاشد، حفره‌ای در پوسته به جا می‌گذارد و این حفره به وسیله الکترونی از یک حالت بالاتر پر می‌شود و یک پرتو x گسیل می‌گردد. تاکنون هیچ پرتو x ای از این نوع مشاهده نشده است و عمر متوسط الکترون از 2×10^{21} سال بیشتر است. این نتیجه را با این بیان که بار کل در هر واکنش پایسته است تعمیم می‌دهیم. بار الکتریکی در حالت اولیه و نهایی هر واکنش باید یکسان باشد:

$$\sum q_{\text{نهایی}} = \sum q_{\text{اولیه}} \quad (2-2)$$

این قانون پایستگی با تمام مشاهدات سازگار است. کوانتش بار الکتریکی به ما اجازه می‌دهد که پایستگی بار الکتریکی را به صورت دیگری بیان کنیم. کوانتش، از آزمایش قطره روغن میلیکان نتیجه می‌شود؛ تمام مشاهدات با این مساله که بار الکتریکی یک ذره همواره به صورت مضرب صحیحی از کوانتوم بنیادی e است یعنی $q = Ne$ موافقت دارد. N را عدد بار الکتریکی و گاهی به غلط بار الکتریکی می‌نامند. رابطه $q = Ne$ ایجاب می‌کند که بار نوترون باید دقیقاً صفر باشد و بارهای الکترون و پروتون باید از نظر قدر مطلق مساوی باشند. در حقیقت مشاهده رفتار باریکه‌های نوترونی و اتم‌های خنثی نشان می‌دهد که بار نوترون از $3 \times 10^{-20} e$ کمتر است و حاصل جمع بار الکترون-پروتون کمتر از $3 \times 10^{-17} e$ است. بنابراین یک عدد بار الکتریکی N به تمام ذرات نسبت می‌دهیم.

پایستگی بار الکتریکی معادله (۲-۲) ایجاب می کند که N در یک قانون پایستگی جمع پذیر صدق کند یعنی در هر واکنشی نظیر:

$$a + b \rightarrow c + d + f \quad (۳-۲)$$

جمع اعداد بار ثابت باقی می ماند:

$$N_a + N_b = N_c + N_d + N_f \quad (۴-۲)$$

معادله (۲-۲) یک قانون پایستگی است. همانطور که می دانیم هر قانون پایستگی به یک اصل تقارن مربوط است. برای بیان اینکه چه اصل تقارنی منجر به پایستگی بار می شود به صورت زیر عمل می کنیم: فرض کنید ψ_q یکحالت با بار الکتریکی q را توصیف می کند و در معادله شرودینگر زیر صدق می نماید:

$$i\hbar \frac{d\psi_q}{dt} = H\psi_q \quad (۵-۲)$$

اگر Q عملگر بار الکتریکی باشد، از معادلات مکانیک کوانتومی می دانیم که $\langle Q \rangle$ در صورتی پایسته است که Q و H جا به جا شوند. در این صورت ψ_q را نیز می توان طوری انتخاب کرد که یک ویژه تابع Q باشد:

$$Q \psi_q = q \psi_q \quad (۶-۲)$$

و ویژه مقدار q نیز پایسته است. ویل برای پاسخ به این سوال که چه تقارنی تضمین می کند که Q و H جا به جا شوند تبدیلی به صورت زیر را در نظر گرفت:

$$\psi'_q = e^{i\varepsilon Q} \psi_q \quad (۷-۲)$$

در اینجا ε یک پارامتر حقیقی دلخواه و Q عملگر بار الکتریکی است. این تبدیل را تبدیل پیمانهای نوع اول می نامیم. "ناوردایی پیمانهای" به این معناست که ψ'_q و ψ_q در یک معادله شرودینگر به صورت زیر صدق می کنند:

$$i\hbar \frac{d\psi'_q}{dt} = H\psi'_q \quad (۸-۲)$$

یا:

$$i\hbar \frac{d}{dt} e^{i\varepsilon Q} \psi_q = H e^{i\varepsilon Q} \psi_q \quad (9-2)$$

با ضرب کردن $e^{-i\varepsilon Q}$ در معادله (۹-۲) از سمت چپ، با توجه به اینکه Q مستقل از زمان و یک عملگر هرمیتی است نتیجه می‌شود:

$$e^{-i\varepsilon Q} H e^{i\varepsilon Q} = H \quad (10-2)$$

به دلیل اینکه ε یک پارامتر دلخواه است، می‌توان آن را آنقدر کوچک در نظر گرفت که $\varepsilon Q \ll 1$ باشد. با بسط تابع نمایی خواهیم داشت:

$$(1 - i\varepsilon Q) H (1 + i\varepsilon Q) = H \quad (11-2)$$

به عبارت دیگر:

$$[Q, H] = 0 \quad (12-2)$$

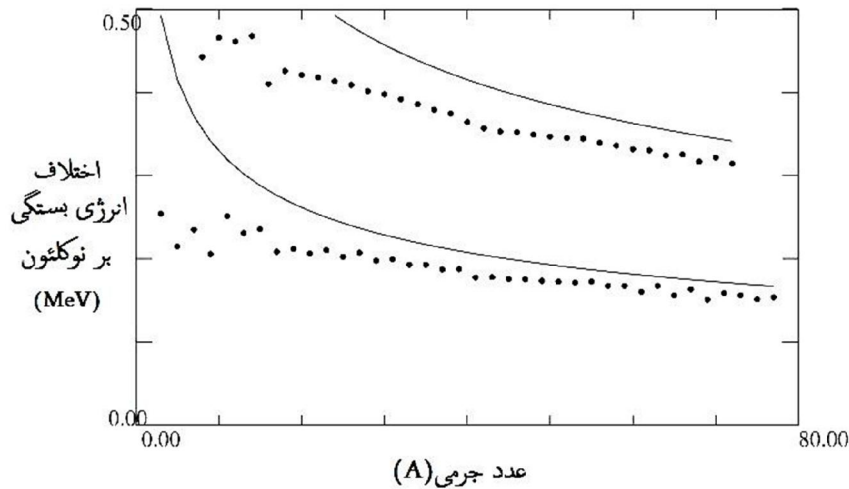
ناوردایی تحت تبدیل پیمانهای معادله (۷-۲)، پایداری بار الکتریکی را تضمین می‌کند [6]. نگرش به این ارتباط می‌تواند به صورت بالعکس باشد یعنی چون مشاهده می‌شود بار الکتریکی پایسته است، هامیلتونی قابل قبول باید تحت تاثیر تبدیل پیمانهای ناوردا باشد. استدلال‌های فوق بسیار مهم هستند زیرا الکتریسیته (Q) را به مکانیک کوانتومی (ψ) مربوط می‌کنند.

۲-۲ استقلال نیروهای هادرونی از بار الکتریکی

وقتی نوترون در سال ۱۹۳۲ کشف شد ماهیت نیروهایی که هسته‌ها را کنار هم نگه می‌داشت هنوز مرموز بود. گرچه در آن سال‌ها آزمایشات پراکندگی در انرژی‌های پایین انجام می‌شد ولی نتیجه این آزمایشات باز هم شگفت‌آور بود زیرا بعد از کم کردن اثر نیروی کولنی در پراکندگی $p-p$ ؛ ملاحظه شد که قدرت نیروی $p-p$ ، $n-p$ و $n-n$ تقریباً یکی است. استقلال نیروهای هادرونی از بار را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

نیروی بین دو نوکلئونی که در یک حالت قرار دارند صرف نظر از اثرات الکترومغناطیسی یکسانند. امروزه معلوم شده است که نه تنها نیروی بین نوکلئون‌ها بلکه تمام نیروهای هادرونی مستقل از بار

هستند. یکی از مهمترین شواهد این مساله اختلاف انرژی بستگی بر هر نوکلئون در هسته های آینه ای است که به طرز شگفت انگیزی در هسته های مختلف ثابت می ماند. شکل ۱-۲ نشان دهنده این مطلب است:



شکل ۱-۲: اختلاف انرژی بستگی بر نوکلئون $\left(\frac{B}{A}\right)$ در جفت هسته های آینه ای. نقاط پایین مربوط به $|Z - N| = 1$ و نقاط بالا مربوط به $|Z - N| = 2$ است [7].

۲-۳ ایزواسپین

پس از کشف نوترون توسط چادویک، هایزنبرگ متوجه شد که دستگاه ریاضی ماتریس اسپین پائولی می تواند برای برچسب زدن به دو حالت باری نوکلئون، نوترون و پروتون [10] استفاده شود. به این ترتیب او پایه و اساس یک توسعه مهم در فیزیک یعنی استفاده از تبدیلات تقارنی در فضاهای انتزاعی را بنا نهاد. نقطه شروع، مشاهده جرم نوترون و پروتون است که این دو بسیار مشابهند:

$$m_p c^2 = 938.27203 (8) \text{ MeV} \quad \text{و} \quad m_n c^2 = 939.56536 (8) \text{ MeV}$$

و هر دو دارای اسپین $\frac{1}{2}$ هستند. علاوه بر این، تجربه نشان می دهد که اگر سهم برهمکنش الکترومغناطیسی نادیده در نظر گرفته شود، نیروهای بین دو نوترون همانند همان نیروی بین دو پروتون است. بطور دقیق تر، نیروی هسته ای قوی بین دو نوکلئون با اسپین غیر موازی (تقریباً) مستقل

از اینکه آنها نوترون یا پروتون هستند یافت می‌شود. استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی جدید و پایسته‌ای به نام ایزواسپین می‌شود. این نشان دهنده وجود یک تقارن در برهمکنش قوی است و ایزواسپین، فرمالیسم مناسبی را برای جستجو و کاوش نتایج آن تقارن در هسته فراهم می‌کند. تأکید می‌کنیم که برابری جرم‌ها و اسپین نوکلئون‌ها برای اعتبار تقارن ایزواسپین کافی نیست و استقلال از بار نیروی هسته‌ای نیز به همان اندازه مهم است. تعریف ایزواسپین برای هسته‌های پیچیده به صورتی که ما امروز می‌شناسیم اولین بار توسط Wigner بیان شد [11] و او کسی بود که نام "اسپین ایزوتوپی" را ابداع کرد.

در سال ۱۹۳۲ هاینبرگ پروتون و نوترون را به صورت دو حالت از یک ذره در نظر گرفت. بدون برهمکنش الکترومغناطیسی، این دو حالت دارای جرم یکسانی هستند ولی وجود این برهمکنش باعث اختلاف کمی در جرم‌ها می‌شود. با توجه به اینکه عامل شکل‌های مغناطیسی نوترون و پروتون دارای وابستگی تابعی یکسانی هستند اگر فرض کنیم که گشتاور مغناطیسی با ساختار هادرونی در ارتباط است این شباهت جالب‌تر خواهد بود. برای توصیف دو حالت نوکلئون یک فضای بار معرفی می‌کنیم و به مانستگی زیر در رابطه با دو حالت اسپینی یک ذره با اسپین می‌رسیم:

جدول شماره ۲-۱: مانستگی ایزواسپین نوکلئون‌ها با اسپین

نوکلهون در فضای ایزواسپین	سمتگیری ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در فضای معمولی
بالا- پروتون	بالا
پایین- نوترون	پایین

دو حالت یک ذره معمولی با اسپین $\frac{1}{2}$ نه به عنوان دو ذره بلکه به صورت دو حالت از یک ذره تلقی می‌شود. همچنین پروتون و نوترون به ترتیب به صورت حالت بالا و پایین نوکلئون‌ها در نظر گرفته می‌شوند. نوکلئونی که دارای ایزواسپین $\frac{1}{2}$ است تعداد $2I + 1 = 2$ سمتگیری ممکن در فضای ایزواسپین دارد. رسم بر این است که در این وضعیت را با معرفی یک کمیت جدید، ایزواسپین \vec{I} ،

توصیف می کنند. سه مولفه بردار ایزواسپین \vec{I} را با I_1 و I_2 و I_3 مشخص می کنیم. مقدار I_3 بنا بر تعریف، پروتون را از نوترون متمایز می سازد.

مقدار I_3 برای پروتون $+\frac{1}{2}$ و برای نوترون $-\frac{1}{2}$ است. چون در هسته های پایدار همواره تعداد نوترون ها از پروتون ها بیشتر است I_3 در این موارد مثبت می شود. مناسب ترین راه برای نوشتن مقادیر I و I_3 برای یک حالت مفروض به کار بردن کت دیراک است به صورت $|I, I_3\rangle$ است بنابراین داریم:

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \text{نوترون} \quad \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \text{پروتون}$$

همچنین می توان نوترون و پروتون را در نمایش ماتریسی به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{نوترون} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{پروتون}$$

رابطه بار ذره و ایزواسپین برای نوکلئون ها به صورت زیر است:

$$q = e \left(I_3 + \frac{1}{2} \right) \quad (13-2)$$

به علت برابری نزدیک جرم ها و برهمکنش بین نوکلئون ها، هامیلتونی هسته (تقریباً) نسبت به تبدیلات بین حالت های پروتون و نوترون ناورداست. کلی ترین تحولات در میان این حالت ها (که بهنجارش خود را حفظ کرده اند)، ماتریس یکانی 2×2 می باشد. اگر ما این ماتریس را به صورت شکل زیر نمایش دهیم [1]:

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & 1 + \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (14-2)$$

که ε یک عدد مختلط بینهایت کوچک است؛ یکانی بودن روابط زیر را اعمال می کند:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^* = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}^* = 0 \quad (15-2)$$

یک شرط اضافی از الزام اینکه باید دترمینان ماتریس یکانی مساوی ۱ شود بدست می آید:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0 \quad (16-2)$$

که آزادی تغییر فاز یکسان و به طور همزمان را برای نوترون و پروتون حذف می کند. ما نتیجه گیری می کنیم که تبدیلات فیزیکی بی نهایت کوچک بین یک نوترون و یک پروتون می تواند به صورت زیر پارامتر بندی شود:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}i\varepsilon_z & -\frac{1}{2}i(\varepsilon_x - i\varepsilon_y) \\ -\frac{1}{2}i(\varepsilon_x + i\varepsilon_y) & 1 + \frac{1}{2}i\varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

که شامل یک عامل مرسوم $-\frac{i}{2}$ است و در این حال $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$ اعداد بی نهایت کوچک حقیقی هستند. این معادلات می توانند بر حسب معادلات اسپین پائولی بازنویسی شوند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}i\varepsilon_x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}i\varepsilon_y \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}i\varepsilon_z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

بنابراین تبدیلات بی نهایت کوچک بین پروتون و نوترون می تواند به صورت سه عملگر نوشته شود:

$$I_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19-2)$$

$$I_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (20-2)$$

$$I_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

که "دقیقا" همان روابط تبدیلی که برای عملگرهای تکانه زاویه ای معتبرند، برآورده می کند. اعمال عملگرهای I_μ بر روی حالت های نوکلئون است به راحتی با استفاده از نمایش ماتریسی آن یافت می شود. به عنوان مثال:

$$I_z |n\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} |n\rangle \quad (22-2)$$

$$I_z |p\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} |p\rangle \quad (23-2)$$

که نشان می دهد عملگر بار به صورت زیر است:

$$Q = \frac{e(1-2I_z)}{2} \quad (24-2)$$

همچنین ترکیب $I_\pm \equiv I_x \pm iI_y$ را می توان معرفی نمود به صورتی که روابط جابجایی زیر را ارضا می کند:

$$[I_z, I_{\pm}] = \pm I_{\pm} \quad (25-2)$$

$$[I_+, I_-] = 2I_z \quad (26-2)$$

و نقشی به عنوان عملگرهای بالا آورنده و پایین آورنده به صورت زیر ایفا می کند:

$$I_+ |n\rangle = 0, \quad I_- |n\rangle = |p\rangle \quad (27-2)$$

$$I_- |p\rangle = 0, \quad I_+ |p\rangle = |n\rangle \quad (28-2)$$

توجه داشته باشید که ما به نوترون (پروتون) ایزواسپین بالا (پایین) اختصاص داده ایم و ما می توانیم این رابطه را به صورت عکس در نظر بگیریم، همانگونه که فیزیک ذرات این رابطه عکس معمول است. این مطلب هم ارزی رسمی بین اسپین و ایزواسپین را ثابت می کند و ما اکنون می توانیم تمام نتایج مشابه تکانه زاویه ای را به جبر ایزواسپین تعمیم دهیم.

۲-۴ نوردایی ایزواسپین :

وقتی استقلال از بار را معرفی می کنیم و ایزواسپین را به تمام ذرات تعمیم دهیم، جنبه های جدید و نتایج تازه ای ظاهر خواهد شد. استقلال از بار بیان می کند که از نظر نیروهای هادرونی، پروتون و نوترون تفاوتی ندارد. مادامی که فقط برهمکنش هادرونی وجود دارد بردار ایزواسپین I می تواند در هر جهتی قرار بگیرد. به عبارت دیگر در فضای ایزواسپینی نوردایی دورانی وجود دارد (سیستم تحت دوران حول هر محوری نوردا است). این واقعیت را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$[H_{had}, \vec{I}] = 0 \quad (29-2)$$

که در آن H_{had} هامیلتونی مربوط به نیروهای هادرونی است. در صورتی که فقط H_{had} حضور داشته باشد $2I + 1$ حالت آن با مقادیر مختلف I_3 واگن هستند و انرژی (جرم) آنها یکسان است. به سادگی می توان گفت که چنانچه فقط برهمکنش هادرونی وجود داشته باشد پروتون و نوترون دارای جرم یکسانی خواهند بود. برهمکنش الکترومغناطیسی همسانگردی فضای ایزواسپین را از بین می برد یعنی

تقارن را می شکنند و نتیجه زیر را بدست می دهد:

$$[H_{had} + H_{em}, \vec{I}] = 0 \quad (۳۰-۲)$$

با این همه می دانیم که بار الکتریکی حتی در حضور H_{em} همیشه پایسته است:

$$[H_{had} + H_{em}, Q] = 0 \implies [H_{had} + H_{em}, I_3] = 0 \quad (۳۱-۲)$$

بنابراین حتی در حضور برهمکنش الکترومغناطیسی مولفه سوم ایزواسپین پایسته است. قبل از تعمیم مفهوم ایزواسپین به تمام هادرون ها و جستجو در پیامدهای این فرض چند نکته مقدماتی را درباره فضای ایزواسپین تذکر می دهیم:

تاکید می کنیم که \vec{I} برداری است در فضای ایزواسپین و نه در فضای معمولی. جهت در فضای ایزواسپین هیچ ربطی به جهت در فضای معمولی ندارد و مقدار \vec{I} و I_3 در فضای ایزواسپین نیز هیچ ربطی به فضای معمولی ندارد و همچنین لازم به تذکر است که تنها مولفه سوم ایزواسپین مربوط به یک کمیت فیزیکی می شود و مولفه های دیگر را نمی توان مستقیما به یک کمیت فیزیکی قابل اندازه گیری مربوط کرد.

حال وجود کلی فضای ایزواسپین را فرض و ارتباط بین مولفه سوم آن و بار الکتریکی را به صورت خطی و به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$q = aI_3 + b \quad (۳۲-۲)$$

با چنین رابطه ای پایستگی بار الکتریکی منجر به پایستگی I_3 خواهد شد. بنابراین I_3 حتی در حضور برهمکنش الکترومغناطیسی هم عدد کوانتومی خوبی است. عملگر یکانی برای دوران در فضای ایزواسپین حول جهت $\hat{\alpha}$ و به اندازه ω به صورت زیر است:

$$U_{\alpha}(\omega) = \exp(i\omega\hat{\alpha} \cdot \vec{I}) \quad (۳۳-۲)$$

در اینجا \vec{I} مولد هرمیتی وابسته به عملگر یکانی U است و انتظار داریم که \vec{I} یک مشاهده پذیر باشد. برای مطالعه خواص فیزیکی \vec{I} ابتدا فرض می کنیم که فقط برهمکنش هادرونی وجود داشته باشد. در این صورت بار الکتریکی برای تمام سیستم های فیزیکی صفر است و معادله (۳۲-۲) جهت I_3 را تعیین

خواهد کرد. بنابراین استقلال از بار ایجاب می کند که یک سیستم هادرونی بدون برهمکنش الکترومغناطیسی تحت هر دوران در فضای ایزواسپین ناوردا باشد یعنی:

$$[H_{had}, U_{\hat{\alpha}}(\omega)] = 0 \quad (34-2)$$

و از این رابطه بلافاصله نتیجه می شود:

$$[H_{had}, \vec{I}] = 0 \quad (35-2)$$

نتیجه اینکه، استقلال نیروهای هادرونی از بار منجر به پایستگی ایزواسپین می شود. با توجه به اینکه در مورد تکانه زاویه ای، روابط جابجایی از عملگر یکسانی رابطه $U_n(\delta) = e^{\frac{-i\delta \hat{n} \cdot \vec{J}}{\hbar}}$ و به کمک مراحل جبری ساده نتیجه می شوند و هیچ فرض دیگری دخالت ندارد، همانند روابط مربوط به اسپین می توان همین استدلال را برای $U_{\hat{\alpha}}(\omega)$ نیز به کار برد و روابط جابجایی زیر را بدست آورد:

$$[I_1, I_2] = iI_3 \quad (36-2)$$

$$[I_2, I_3] = iI_1 \quad (37-2)$$

$$[I_3, I_1] = iI_2 \quad (38-2)$$

نیازی به محاسبه ویژه مقادیرها و ویژه توابع عملگرهای ایزواسپین نیست زیرا آنها مانسته کمیات متناظر برای اسپین معمولی هستند:

$$I_{op}^2 |I, I_3\rangle = I(I+1) |I, I_3\rangle \quad (39-2)$$

$$I_{3,op} |I, I_3\rangle = I_3 |I, I_3\rangle \quad (40-2)$$

در اینجا I_{op}^2 و $I_{3,op}$ عملگر و I و I_3 اعداد کوانتومی هستند. مقادیر مجاز I عبارتند از:

$$I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (41-2)$$

برای هر مقدار I و I_3 می تواند $(2I+1)$ مقدار از $-I$ تا I را بپذیرد. معلوم خواهد شد که ایزواسپین برای فهمیدن و رده بندی ذرات زیر اتمی ضروری است. در بالا متذکر شدیم که مولفه های I_1 و I_2 مستقیماً به مشاهده پذیرها مربوط نیستند اما ترکیب های خطی $I_{\pm} = I_1 \pm iI_2$ دارای مفاهیم

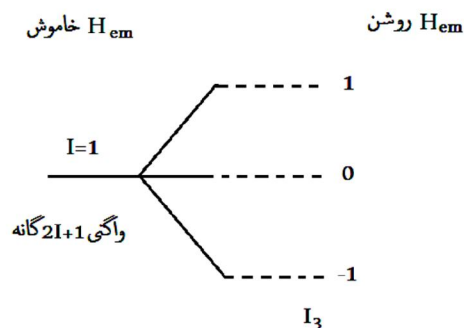
فیزیکی هستند. اگر I_+ و I_- به حالت $|I, I_3\rangle$ اثر کند، I_+ باعث افزایش و I_- باعث کاهش یک واحد در مقدار I_3 خواهند شد [7,12]:

$$I_{\pm} |I, I_3\rangle = [(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)]^{\frac{1}{2}} |I, I_3 \pm 1\rangle \quad (2-42)$$

۲-۵ ایزواسپین ذرات

مفهوم ایزواسپین برای اولین بار در هسته‌ها به کار برده شد؛ اما درک خواص برجسته آن در رابطه با ذرات ساده تر است. مادامی که فقط برهمکنش هادرونی حضور داشته باشد احتمالاً ایزواسپین عدد کوانتومی خوبی است. برهمکنش الکترومغناطیسی همسانگردی فضای ایزواسپین را از بین می‌برد، درست همانگونه که میدان مغناطیسی همسانگردی فضای معمولی را از بین می‌برد. در نتیجه ایزواسپین و تجلیات آن در وضعیت‌هایی که برهمکنش الکترومغناطیسی ناچیز است باید به طور بارزتری ظاهر شود. برای هسته‌ها عدد بار الکتریکی کل می‌تواند به ۱۰۰ هم برسد در صورتی که برای ذرات معمولاً ۰ یا ۱ است. بنابراین ایزواسپین در فیزیک ذرات باید عدد کوانتومی بهتری باشد و راحت تر بتوان آن را تشخیص داد. اگر ایزواسپین در طبیعت مشاهده پذیر باشد، خواص زیر پیش بینی می‌شود:

- ۱- عدد کوانتومی I می‌تواند ۰ و $\frac{1}{2}$ و ۱ و $\frac{3}{2}$ و ... را بپذیرد.
 - ۲- برای یک ذره مفروض، I یک کمیت تغییر ناپذیر است.
 - ۳- در غیاب برهمکنش الکترومغناطیسی ذره ای با ایزواسپین I به صورت $2I + 1$ گانه واگن است و کلیه $2I + 1$ زیر ذره دارای انرژی و جرم یکسان هستند.
 - ۴- از آنجا که I و H_{had} جابجا می‌شوند تمام زیر ذره ها دارای خواص هادرونی یکسانی هستند و فقط توسط مقدار I_3 از یکدیگر تمییز داده می‌شوند.
- در شکل زیر نشان داده شده است که برهمکنش الکترومغناطیسی به صورت کلی یا جزئی واگنی را از بین می‌برد و در نتیجه باعث مانستگی ایزواسپین با اثر زیمان می‌شود.



شکل ۲-۲: مانستگی ایزواسپین با اثر زیمان

اصطلاحاً به $2I + 1$ زیر ذره متعلق به یک حالت مفروض ایزواسپین I یک چندتایی ایزواسپینی گفته می‌شود. اعداد کوانتومی که تحت برهمکنش الکترومغناطیسی پایسته هستند در اثر روشن شدن H_{em} تغییری نخواهند کرد و از آنجا که اغلب اعداد کوانتومی چنین خاصیتی دارند، یک چندتایی ایزواسپینی تقریباً دارای خواص یکسانی هستند مثلاً اسپین، عدد باریونی، پاریته و ابربار آنها یکسان است. خصوصاً پیون به وضوح نشان می‌دهد که فضای ایزواسپین با فضای معمولی متفاوت است و خواص در این دو فضا به یکدیگر مربوط نیستند زیرا پیون در فضای ایزواسپین یک بردار (سه تاییه ایزواسپینی) و در فضای معمولی یک اسکالر (اسپین ۰) است.

$$I_3 = \begin{cases} +1 & \pi^+ & m = 139.576 & \frac{MeV}{c^2} \\ 0 & \pi^0 & m = 134.972 & \frac{MeV}{c^2} \\ -1 & \pi^- & m = 139.576 & \frac{MeV}{c^2} \end{cases} \quad (۴۳-۲)$$

برای پیون ها بار به وسیله رابطه:

$$q = eI_3 \quad (۴۴-۲)$$

داده می‌شود که حالت خاصی از رابطه (۳۲-۲) است. اگر بتوان تمام زیر ذرات را که متعلق به یک چندتایی هستند پیدا کرد آنگاه تعیین عدد کوانتومی I آسان است زیرا تعداد آنها $2I + 1$ است و از روی آن I به راحتی بدست می‌آید ولی اکثر اوقات شمارش ذرات امکان پذیر نیست و لذا لازم است که به روش‌های دیگری نظیر قواعد گزینش متوسل شویم. در اثر زیمان معمولی تبیین این که زیر

ترازهای مختلف، اعضای یک چیز تایی زیمان هستند، ساده است: اگر میدان مغناطیسی را به صفر تقلیل دهیم، ترازها به یک تراز واگن تبدیل خواهند شد. این روش را نمی توان برای چندتایی ایزواسپینی به کار برد زیرا برهمکنش الکترومغناطیسی را نمی توان خاموش کرد. برای نشان دادن این که شکافتگی مشاهده شده فقط در اثر H_{em} است، لازم است که به محاسبات متوسط شویم. مقایسه پيون و نوکلئون نشان می دهد که مسئله ساده نیست زیرا گرچه پروتون سبک تر از نوترون است ولی پيون های باردار سنگین تر از پيون خنثی هستند. با این حال، بر اساس محاسباتی که تا این زمان انجام شده است، به احتمال زیاد می توان شکافتگی جرمی را در اثر برهمکنش الکترومغناطیسی دانست. سایر هادرون ها را می توان به طور خلاصه تری مورد بحث قرار داد. کائون در دو حالت ذره ای و دو حالت پاد ذره ای ظاهر می شود اختصاص $I = \frac{1}{2}$ به هیپرون ها با تمام حقایق شناخته شده مطابقت دارد. فرض می کنیم که هیپرون های با جرم تقریبا مساوی، چندتایی های ایزواسپین تشکیل می دهند. λ به تنهایی ظاهر می شود و لذا یک تکتایی است. سیگما سه حالت باری نشان می دهد و لذا یک ایزوبار است. ذره آبشاری یک دوتایی است و Ω یک تکتایی. تمام هادرون هایی که تا به حال با آن ها سروکار داشته ایم را می توان با اعداد کوانتومی جمع پذیر A ، q ، Y و I_3 مشخص کرد. برای پيون ها بار و I_3 با رابطه (۲-۴۴) به هم مربوط اند. گلن^۱ و نیشیجیما^۲ نشان دادند که چگونه می توان این رابطه را تعمیم داد تا ذرات شگفت را نیز در برگیرد. آنها فرض کردند که بار و I_3 توسط یک رابطه خطی مانند (۲-۳۲) به یکدیگر مربوط باشند. مقدار ثابت a در معادله (۲-۳۲) با استفاده از معادله $q = eI_3$ مساوی e است. برای پیدا کردن ثابت b توجه می کنیم که I_3 از $-I$ تا $+I$ تغییر می کند. بنابراین میانگین بار یک چندتایی برابر b است:

$$\langle q \rangle = b \quad (۲-۴۵)$$

از قبل می دانیم:

$$Y = A + S \quad (۲-۴۶)$$

که در آن Y فوق بار، A عدد باریونی و S شگفتی است. با استفاده از این رابطه میانگین بار چندتایی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{2} e Y \quad (47-2)$$

فقط برای ذراتی که ابربار آنها صفر است مرکز بار چندتایی در $q = 0$ قرار می گیرد. برای سایر ذرات این مرکز جا به جا می شود. با تعمیم معادلات (۳۲-۲) و (۴۴-۲) بدست می آوریم:

$$q = \left(I_3 + \frac{1}{2} Y \right) e = \left(I_3 + \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} S \right) e \quad (48-2)$$

این رابطه به رابطه گلن-نیشیجیما معروف است. اگر q را یک عملگر در نظر بگیریم می توان گفت که عملگر بار الکتریکی متشکل از یک ایزونرده $\left(\frac{1}{2} e Y \right)$ و مولفه سوم یک ایزوبار (eI_3) است. مرکز بار در چندتایی های ایزواسپینی که در آنها $Y \neq 0$ است جابجا شده اند و در صفر نیستند بلکه همانطور که از معادله (۴۷-۲) پیداست، در $\frac{1}{2} e Y$ واقع شده اند. ایزواسپین یک عدد کوانتومی بسیار مفید در فیزیک ذرات است. مقدار I برای یک ذره مفروض تعداد زیر حالت های آن را مشخص می کند همچنین در تمام واکنش ها، مولفه سوم ایزواسپین، I_3 ، پایسته است.

۲-۶ ایزواسپین در هسته ها

برای یک سیستم های چند نوکلئونی (مانند هسته) ایزواسپین کل I و مولفه Z آن I_3 می تواند به صورت جفت شدگی ایزواسپین های ذرات منفرد همانند اسپین نوکلئون ها طرح ریزی شود. عملگرهای مناسب ایزواسپین عبارتند از:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A \vec{I}_i \quad (49-2)$$

که در آن جمع روی تمام نوکلئون ها خواهد بود. هسته ای با A نوکلئون، Z پروتون و N نوترون دارای بار الکتریکی Ze است. بار الکتریکی کل را می توان با استفاده از معادله (۱۳-۲) و جمع روی تمام نوکلئون ها نوشت:

$$Ze = \sum_{i=1}^A q_i = e \left(I_3 + \frac{1}{2} A \right) \quad (50-2)$$

مولفه سوم ایزواسپین نیز از جمع روی تمام نوکلئون‌ها بدست می‌آید:

$$I_3 = \sum_{i=1}^A I_{3,i} \quad (51-2)$$

بدست آوردن I_3 بسیار آسان است و از معادله زیر بدست می‌آید:

$$I_3 = Z - \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (Z - N) \quad (52-2)$$

ولی تخصیص عدد کوانتومی I چندان آسان نیست زیرا تعداد A بردار ایزواسپین با $I = \frac{1}{2}$ وجود دارند که باید به صورت برداری جمع شوند، به همین دلیل جمع آنها می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد. مقدار بیشینه I برابر $\frac{1}{2} A$ و مقدار کمینه آن $|I_3|$ است. مقدار بیشینه زمانی حاصل می‌شود که ایزواسپین تمام نوکلئون‌ها با هم موازی باشند و مقدار کمینه از آنجا ناشی می‌شود که هیچ برداری نمی‌تواند از یکی از مولفه‌هایش کوچکتر باشد. بنابراین ایزواسپین در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2} |Z - N| \leq I \leq \frac{1}{2} A \quad (53-2)$$

معادله (53-2) نشان می‌دهد که اگر A زوج باشد، I عددی صحیح و اگر A فرد باشد، I عددی نیمه صحیح خواهد بود. چنانچه برهمکنش الکترومغناطیسی وارد شود واگنی از بین می‌رود. هر زیر حالت به وسیله یک مقدار منحصر به فرد I_3 مشخص می‌شود و همانطوری که در معادله (50-2) نشان داده شده است، به صورت ایزوبار مختلفی ظاهر می‌شود. مادامیکه برهمکنش الکترومغناطیسی کوچک باشد یعنی:

$$\frac{Ze^2}{\hbar c} \ll 1 \quad (54-2)$$

انتظار می‌رود که بتوان حالت‌های هسته‌ای را با I علامت‌گذاری کرد. امروزه ثابت شده است که حتی به حالت‌هایی که شرط معادله (54-2) را نیز برقرار نمی‌کنند، می‌توان I نسبت داد. این گونه حالت‌ها را حالت‌های "مانسته ایزوباری" می‌نامیم [6,12].

۱۰-۱۰ شکست ایزواسپین

برهمکنش کولنی بین پروتون‌ها، هم‌ارزی بین نوکلئون‌ها را از بین می‌برد و از این رو تقارن ایزواسپین را می‌شکند. اثر اصلی برهمکنش کولنی شکستن تقارن "دینامیکی" ایزواسپین است. این مطلب می‌تواند توسط بازنویسی برهمکنش کولنی نشان داده شود:

$$V = \sum_{k < l} \left(\frac{1}{2} - I_z(k) \right) \left(\frac{1}{2} - I_z(l) \right) \frac{e^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (55-2)$$

به صورت جمع روی قسمت‌های ایزواسکالر، ایزو بردار و ایزوتانسور:

$$V = \sum_{k < l} \sum_{t=0,1,2} V_0^{(t)}(k, l) \quad (56-2)$$

با:

$$V_0^{(0)}(k, l) = \left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{3}} (I(k) \times I(l))_0^{(0)} \right) \frac{e^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (57-2)$$

$$V_0^{(1)}(k, l) = -\frac{1}{2} (I_z(k) + I_z(l))_0^{(0)} \frac{e^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (58-2)$$

$$V_0^{(2)}(k, l) = \sqrt{\frac{2}{3}} (I(k) \times I(l))_0^{(2)} \frac{e^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (59-2)$$

که در آن جفت‌شدگی در ایزواسپین انجام شده است. اثر برهمکنش کولنی روی یک حالت داده شده $\langle \eta I I_3 \rangle$ می‌تواند از تئوری اختلال مرتبه اول با جابجایی انرژی روی این حالت ناشی برهمکنش کولنی V مطابق با عناصر قطری ماتریس $\langle \eta I I_3 | V | \eta I I_3 \rangle$ بدست آید. برای محاسبه این عناصر ماتریس، قضیه Wigner - Eckart در فضای ایزواسپین می‌تواند اعمال شود و در نتیجه آن وابستگی I_3 به صورت زیر استخراج شود:

$$\langle \eta I I_3 | \sum_{k < l} V_0^{(t)}(k, l) | \eta I I_3 \rangle = \langle I I_3 t 0 | I I_3 \rangle \langle \eta I | \sum_{k < l} V_0^{(t)}(k, l) | \eta I \rangle \quad (60-2)$$

ضرب همبستگی در اینجا همان ضرایب کلبش-گوردون معمولی وابسته به $SU(2) \supset SO(2)$ هستند. از بیان صریح برای این ضرایب به صورت:

$$\langle I I_3 0 0 | I I_3 \rangle = 1 \quad (61-2)$$

$$\langle I I_3 1 0 | I I_3 \rangle = \frac{I_3}{\sqrt{I(I+1)}} \quad (62-2)$$

$$\langle II_3 20 | II_3 \rangle = \frac{3I_3^2 - I(I+1)}{\sqrt{I(I+1)(2I-1)(2I+3)}} \quad (۶۳-۲)$$

ما استنتاج کردیم که وابستگی I_3 عناصر ماتریسی قطری برهمکنش کولنی حداکثر درجه دوم است. اگر عناصر خارج از قطر ماتریس اختلاط ایزواسپین در برهمکنش کولنی V صرف نظر شود، در این صورت معادله (۵۵-۲) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$V \approx \tilde{V} \equiv \kappa_0 + \kappa_1 I_z + \kappa_2 I_z^2 \quad (۶۴-۲)$$

برای بعضی از ضرایب ویژه κ_0 ، κ_1 و κ_2 که با توجه به بحث قبل وابسته به ایزواسپین I و سایر اعداد کوانتومی η بستگی دارد. این مطلب می‌تواند به صورت شکست تقارن دینامیکی از نوع زیر دیده شود:

$$\begin{array}{ccc} SU(2) \supset SO(2) \equiv \{I_z\} & & (۶۵-۲) \\ I & & I_3 \end{array}$$

هامیلتونین \tilde{V} شکافته می‌شود ولی ویژه حالت‌های $|\eta II_3\rangle$ با $I_3 = -I, -I+1, \dots, +I$ آمیخته نمی‌شوند و ویژه طیفی به صورت زیر دارد:

$$\tilde{E}(I_3) = \kappa_0 + \kappa_1 I_3 + \kappa_2 I_3^2 \quad (۶۶-۲)$$

در بیان I_z بسط وجود دارد اما تقریب، برای برهمکنش کولنی واقعی، است، آن بخش قطری آن را نشان می‌دهد، که در آن قسمت‌های آمیختگی I گانه ایزوبردارها و ایزوتانسورها صرف نظر شده‌اند. در این تقریب ایزواسپین یک عدد کوانتومی خوب باقی می‌ماند و معادله (۶۶-۲) نشان دهنده انرژی کولنی است. برای پیدا کردن انرژی کل یک حالت خاص، ما نیاز داریم که برهمکنش هسته‌ای و شیفیت انرژی ناشی از تفاوت جرم نوترون و پروتون را در نظر بگیریم. اگر برهمکنش هسته‌ای دقیقا یک ایزواسکالر باشد، سهم آن برای تمام اعضای چندتایی ایزواسپینی ثابت است و اگر آن ذاتا حداکثر به صورت دو جسمی باشد، وابستگی انرژی در I_3 می‌تواند حداکثر به صورت درجه دوم مطابق با استدلال‌های مشابه در مورد برهمکنش کولنی نشان داده شود. از سوی دیگر، تفاوت جرم نوترون و

پروتون به صورت خطی در I_3 افزایش می‌یابد، بنابراین، در این تقریب، انرژی کل اعضای یک چندتایی ایزواسپینی از طریق فرمول زیر بدست می‌آید:

$$B(A, I_3) = C_0 + C_1 I_3 + C_2 I_3^2 \quad (۶۷-۲)$$

که ضرایب C_i اکنون شامل اثرات برهمکنش هسته ای و اختلاف جرم نوترون و پروتون است. کمیت $B(A, I_3)$ (همواره مثبت) انرژی بستگی یک حالت هسته A نوکلئونی با $I_3 = \frac{N-Z}{2}$ است و رابطه ای با $M(N, Z)$ به صورت زیر دارد:

$$B(A, I_3) = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - M(N, Z)c^2 \quad (۶۸-۲)$$

خلاصه ای از این بحث این است که طیف برانگیختگی هسته های مختلف متعلق به چندتایی ایزواسپینی مشابه (با I یکسان اما I_3 مختلف) یکسان هستند، اما نه اینکه حالات مربوطه (همچنین به عنوان حالت‌های آنالوگ ایزوباری شناخته می‌شوند) انرژی بستگی یکسان داشته باشند. فرمول (۲-۶۷) بر رابطه ای بین انرژی‌های مطلق حالت‌های آنالوگ ایزوباری دلالت می‌کند و به عنوان "معادله جرم چندتایی ایزواسپینی" یا IMME^۱ شناخته می‌شود. IMME توسط Wigner پیشنهاد شد [19] در حالیکه، عبارات مربوط به ضرایب K_i در معادله (۲-۶۶) بر اساس نظریه اختلال چگالی هامیلتونین الکترومغناطیسی در مرجع [18] داده شده بود. برای حالت $T \geq \frac{3}{2}$ یک آزمون امکان پذیر است زیرا پارامترهای G_i را می‌توان از حالت‌های آنالوگ ایزوباری در سه هسته ثابت کرد و سپس برای دیگر اعضای چندتایی پیش بینی خاصی بوجود می‌آید. کاربردهای اولیه IMME توسط ویلکینسون [12] بررسی گردید و شروع کار از آنجا در نظر گرفته شد و سپس بسیاری از چندتایی ایزواسپینی هسته‌ای بررسی شده‌اند [1].

۲-۷ اثرات نیروی الکترومغناطیسی

در هسته‌ها، نیروی الکترومغناطیسی دو اثر تولید می‌کند:

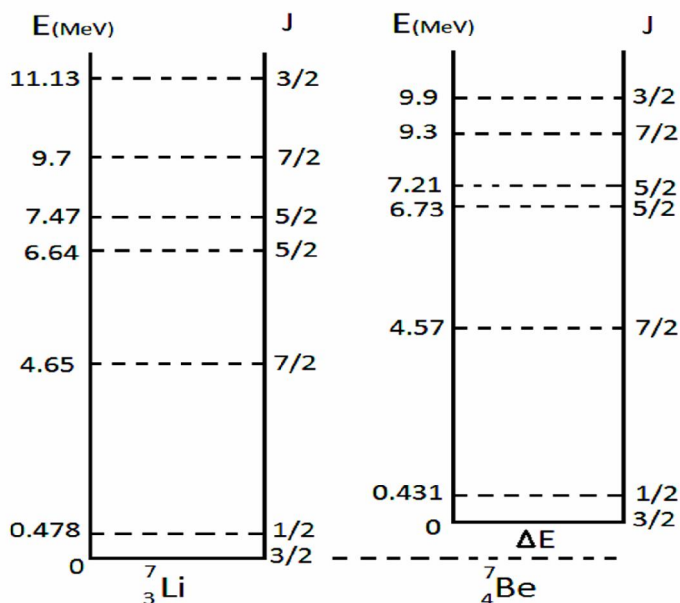
۱- نیروی دافعه بین پروتون‌های داخل هسته.

۲- اختلاف جرم بین پروتون و نوترون.

دافعه کولنی را می توان محاسبه کرد و اختلاف جرم به صورت تجربی و از آزمایش بدست می آید. اثرات الکترومغناطیسی روی انرژی یک چندتایی ایزواسپینی که موجب اختلاف انرژی آنها می شود در ایزوهای (A, Z) و $(A, Z + 1)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\Delta E = E(A, Z + 1) - E(A, Z) \approx \Delta E_{coul} - (m_n - m_p)c^2 \quad (۶۹-۲)$$

معمولا حالت های پایه هسته ای، کمترین مقداری را که معادله (۲-۵۳) مجاز می کند یعنی $I_{min} = \frac{1}{2}(Z - N)$ را می پذیرد. همانطور که از معادله (۲-۵۳) پیداست، یکتایی های ایزواسپینی $I = 0$ تنها می توانند در نوکلیدهایی که در آنها $Z = N$ است ظاهر شوند. این گونه هسته ها را "خود مزدوج" می نامند. حالت های پایه هسته های 2H ، 4He ، 6Li ، 8Be ، ${}^{12}C$ ، ${}^{14}N$ و ${}^{16}O$ دارای ایزواسپین صفر هستند. دوتایی های ایزواسپینی در ویژه هسته های آینه ای که برای آنها $Z = \frac{A \pm 1}{2}$ است اتفاق می افتد. شکل ۲-۳ حالت پایه و ۵ حالت برانگیخته مربوط به دو هسته آینه ای را نشان می دهد. معادله (۲-۶۹) یک شکافتگی انرژی 0.6 MeV را پیش بینی می کند که با مقدار مشاهده شده 0.86 MeV مطابقت معقولی دارد [6].



شکل ۲-۳: حالت پایه و ۵ حالت برانگیخته ${}^7\text{Li}$ و ${}^7\text{Be}$ ؛ دوتایی های ایزواسپینی

۲-۸ ایزواسپین و پایستگی بار الکتریکی

ایزواسپین ریشه سطح مقطع‌های نسبی و انشعابات واپاشی مشاهده شده در مزون‌هاست. هادرون‌ها با خواص مشابه و جرم‌های تقریباً یکسان به چندتایه‌های ایزواسپینی به صورت (p, n) ؛ $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ ؛ (π^-, π^0, π^+) ؛ $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$ و ... تقسیم بندی می‌شوند. از ایزواسپین برای برچسب زنی به اعضای چندتایه استفاده می‌کنیم. کمیت I_3 را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$I_3 = \frac{Q}{e} - \frac{\bar{Q}}{e} \quad (۲-۷۰)$$

که در آن Q بار الکتریکی ذره و \bar{Q} بار متوسط چندتایه است که از جمع بستن تمام بارها و تقسیم کردن بر تعداد ذرات بدست آمده است. توجه به این نکته ضروریست که بعضی از چندتایه‌ها بارشان حول صفر متقارن (مانند π) و بعضی هم نامتقارن هستند.

این تعریف I_3 به چندتایه‌ها مشخصاتی می‌دهد که همواره حول $I_3 = 0$ متقارن هستند بنابراین برای Δ داریم $\frac{Q}{e} = \frac{1}{2}$ و ذرات مربوط به این چندتایه به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$I_3(\Delta^{++}) = +\frac{3}{2}, \quad I_3(\Delta^+) = +\frac{1}{2}, \quad I_3(\Delta^0) = -\frac{1}{2}, \quad I_3(\Delta^-) = -\frac{3}{2}$$

و برای نوکلئون‌ها داریم:

$$I_3(p) = +\frac{1}{2}, \quad I_3(n) = -\frac{1}{2}$$

برای چند تایه‌هایی که قبلاً حول صفر متقارن بوده‌اند (مانند پيون‌ها و Σ) داریم $I_3 = \frac{Q}{e}$. بنابراین پایستگی I_3 در فرایندهای واپاشی و واکنش کاملاً معادل پایستگی بار الکتریکی است.

برای هر چندتایه ایزواسپین I را چنان معرفی می‌کنیم که یک بردار I را در فضای ایزواسپین با مولفه‌های مناسب مشخص می‌کند. بنابراین عدد کوانتومی $I = 1$ را برای ρ و پيون‌ها، $I = 0$ را برای Λ^0 ، η و ω و $I = \frac{3}{2}$ را برای Δ و ... در نظر می‌گیریم. در تحلیل واپاشی‌ها و واکنش‌ها باید عدد کوانتومی I را در فرایندهای برهمکنش قوی پایسته نگه داشت اما ممکن است پایستگی I در فرایندهای ضعیف یا الکترومغناطیسی نقض شود. مثلاً واپاشی $\eta' = \eta + \pi^0$ را در نظر بگیرید که در آن هر ذره η و η'

دارای ایزواسپین $I = 0$ هستند در حالیکه برای پیون I برابر ۱ است. از جفت شدگی بردارهای به طول ۰ و ۱ برآیندی به طول ۱ برای محصولات نهایی به دست می آید و به این ترتیب پایستگی ایزواسپین در این واپاشی نقض می شود. به طور مشابه ، واپاشی $\eta' = \omega + \pi^0$ از لحاظ ایزواسپین ممنوع است، اما واپاشی $\eta' = \eta + 2\pi$ مجاز است زیرا 2π می تواند با $I = 0$ جفت شود تا در طرف راست برآیند صفر برای I به دست آید [5].

فصل سوم

ابرتقارن

در طول بیست سال گذشته، چارچوب مفهومی جدیدی برای درک مسائلی که در مکانیک کوانتومی به صورت بالقوه تحلیل پذیر هستند، با استفاده از ایده‌های گرفته شده از نظریه میدان کوانتومی توسعه داده شده است. این چارچوب جدید، ابرتقارن نام دارد [13]. به صورت خلاصه، ابرتقارن^۱، تقارنی است که فرمیون‌ها و بوزون‌ها را به هم مرتبط می‌سازد. بر طبق این نظریه، بوزون‌ها (یعنی مبادله کننده‌های برهمکنش) به فرمیون‌ها (یعنی سازندگان اصلی ماده) توسط یک ابرتقارن به یکدیگر وابسته‌اند. ابرتقارن (SUSY) به عنوان پاسخی به تلاش فیزیکدانان برای بدست آوردن توضیحاتی برای وحدت تمام فعل و انفعالات اساسی طبیعت به وجود آمد. SUSY با درجه‌های آزادی بوزونی و فرمیونی و ترکیب آنها که ظرافت بیشتری را از طبیعت فراهم می‌کند به صورت ابرمیدان مرتبط است. جبر درگیر در SUSY جبر "لای مدرج" است که تحت ترکیبی از روابط بسته جابجایی و پاد جابجاییست [38]. ابرتقارن در ساده‌ترین حالتش، یعنی به صورت مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، اولین بار توسط کوپر، فریدمن و ویتن^۲ مورد بررسی قرار گرفت. این افراد نشان دادند زمانی که از مفهوم ابرتقارن در مکانیک کوانتومی استفاده شود منجر به یک روش جدید برای ایجاد هامیلتونین‌هایی با طیف مشابه می‌شود. در اینجا لازم به ذکر است که تاکنون هیچ شواهدی تجربی از ابرتقارن بودن در طبیعت مشاهده نشده است. با این وجود در پانزده سال گذشته، ایده‌های SUSY رویکردهای جدیدی را به دیگر شاخه‌های فیزیک مانند اتمی، مولکولی، هسته‌ای، آماری و فیزیک ماده چگال و همچنین مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی ایجاد کرده است. به طور ساده، SUSY شکسته نشده منجر به تبهگنی بین طیف بوزون‌ها و فرمیون‌ها در یک نظریه واحد می‌شود. از آنجایی که این پدیده در طبیعت مشاهده نشده است ما نیازمند یک ابرتقارنیم که به خودی خود شکسته شود. تنها در این صورت است که این مساله می‌تواند توجیه شود. هنگامی که دانشمندان شروع به مطالعه جنبه‌های

^۱Supersymmetry

^۲Cooper, Freedman, Witten

مختلف مکانیک کوانتومی ابرمتقارن (SUSYQM) کردند، به زودی روشن شد که این زمینه نه فقط به خودی خود بلکه به عنوان یک مدل برای تست روش‌های نظریه میدان جالب است. در آن زمان بود که دانشمندان متوجه شدند که SUSYQM دیدی نسبت به روش فاکتورگیری Infeld و Hull می‌دهد که اولین تلاش برای دسته بندی مسائلی بود که بالقوه قابل حل تحلیلی بودند [13]. با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، بسیاری از مسائل و پتانسیل‌هایی که به طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا تحت شرایط خاصی قابل حل می‌باشند، به آسانی حل می‌شوند. با استفاده از اصول ناوردایی شکل براحتی پتانسیل‌هایی مانند پاش-تله، اکارت، ویگنر-اکارت و روزن-مورس حل شده‌اند. همچنین می‌توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابرتقارن در روش‌هایی تقریبی مانند روش وردشی^۱ بدست آورد. علاوه بر این می‌توان معادلات پائولی و دیراک را با استفاده از آن حل کرد [14].

در سال ۱۹۸۱ ویتن برای آنکه یک مدل ساده غیرنسبیتی برای سازوکار شکست خود به خودی ابرتقارن فراهم کند مکانیک کوانتومی ابرتقارن را بر پایه ساده‌ترین شکل ممکن جبری معرفی کرد. فرمول بندی ویتن از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی توجه زیادی را در دو دهه گذشته به خود جلب کرده است. در این فصل ما به طور خیلی خلاصه این فرمول بندی و نماد گذاری را معرفی می‌کنیم.

۳-۲ متغیرهای گراسمن و جبر حاکم بر آنها

برای معرفی ابرتقارن نیازمند معرفی متغیرهای گراسمن^۲ هستیم. متغیرهای گراسمن در واقع متغیرهایی پادجابجا پذیر هستند. اگر n متغیر گراسمن به صورت $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ داشته باشیم، رابطه زیر بین هر جفت از آنها برقرار است:

$$q_i q_j = -q_j q_i \quad (۱-۳)$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$q_i^2 = 0 \quad (۲-۳)$$

^۱Variational Approach

^۲Grassmann

بنابراین اگر یک تابع تنها تابع متغیرهای گراسمن باشد می توان آن را به صورت زیر بسط داد:

$$F(q) = a + bq \quad (۳-۳)$$

در رابطه بالا a و b اعداد حقیقی هستند. اگر تابع گراسمن شامل n متغیر باشد، آنگاه بسط تابع $F(q)$ را به صورت زیر می توان نوشت:

$$F(q) = F^{(0)} + \sum F_i^{(1)} q_i + \sum F_{ij}^{(2)} q_i q_j + \dots + \sum F_{ijk\dots n}^{(n)} q_i q_j \dots q_n \quad (۴-۳)$$

مشتق: مشتق گیری در جبر گراسمن می تواند از دو سمت چپ و راست انجام گیرد. اگر از تابع

$$F(q) = q_1 q_2 \text{ از سمت راست نسبت به } q_1 \text{ مشتق بگیریم، داریم:}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 q_2) = \delta_{11} q_2 - \delta_{12} q_1 \quad (۵-۳)$$

و هنگامی که تابع $F(q)$ ، حاصلضرب m متغیر گراسمن باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} (q_1 q_2 \dots q_m) &= \delta_{i1} q_2 q_3 \dots q_m \\ &- \delta_{i2} q_1 q_3 \dots q_m + \dots + (-1)^{m-1} \delta_{im} q_1 q_2 \dots q_{m-1} \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

مشتق از سمت چپ نسبت به q_i به صورت زیر تعریف می شود:

$$(q_1 q_2) \frac{\partial}{\partial q_1} = \delta_{12} q_1 - \delta_{11} q_2 \quad (۷-۳)$$

اگر حاصلضرب m متغیر گراسمن را داشته باشیم، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} (q_1 q_2 \dots q_m) \frac{\partial}{\partial q_i} &= \delta_{mi} q_1 q_2 \dots q_{m-1} \\ &- \delta_{(m-1)i} q_1 q_2 \dots q_{m-1} q_m + \dots + (-1)^{m-1} \delta_{im} q_1 q_2 \dots q_{m-1} \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

چون متغیرهای گراسمن پادجابجا پذیرند مشتق های پاره ای آنها نیز پادجابجا پذیر می باشند:

$$\{dq_i, q_j\} = \{q_i, dq_j\} = \{dq_i, dq_j\} = 0 \quad (۹-۳)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j} \right\} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial q_i} = 0 \quad (۱۰-۳)$$

برای اثبات این رابطه از اثر رابطه پادجابجایی (۹-۳) و (۱۰-۳) بر تابع $F(q_1, q_2)$ استفاده می کنیم.

تابع $F(q_1, q_2)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$F(q_1, q_2) = a + bq_1 + cq_2 + dq_1q_2 \quad (۱۱-۳)$$

داریم:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2} \right\} F(q_1, q_2) = \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} F(q_1, q_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_1} F(q_1, q_2) =$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (c - dq_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (b - dq_2) = -d + d = 0 \quad (۱۲-۳)$$

انتگرال: در انتگرال گیری معمولی می دانیم هنگامی که بر روی تمام فضا انتگرال می گیریم می توان

رابطه زیر را نوشت:

$$\int h(x) dx = h(x + a) dx \quad (۱۳-۳)$$

در مورد انتگرال تابع گراسمن نیز می توان به همین صورت عمل کرد:

$$\int h(q) dq = \int h(q + c) dq \quad (۱۴-۳)$$

با جایگذاری $F(q) = a + bq$ در انتگرال فوق داریم

$$\int (a + bq) dq = \int (a + bq + bc) dq \quad (۱۵-۳)$$

اگر روابط زیر را در نظر بگیریم:

$$I_0 = \int dq \quad (۱۶-۳)$$

$$I_1 = \int q dq \quad (۱۷-۳)$$

از رابطه (۱۵-۳) بدست می آید:

$$aI_0 + bI_1 = (a + bc)I_0 + bI_1 \quad (۱۸-۳)$$

ملاحظه می شود که جواب $I_0 = 0$ و $I_1 = 1$ در رابطه فوق صدق می کند. بنابراین تعریف می کنیم:

$$\int dq = 0 \quad (۱۹-۳)$$

$$\int q dq = 1 \quad (۲۰-۳)$$

$$\int q_i dq_i = \delta_{ij} \quad (۲۱-۳)$$

متغیرهای زوج و فرد گراسمن: اگر تعداد فردی از متغیرهای گراسمن را در هم ضرب کنیم یک متغیر فرد گراسمن (O) و اگر تعداد زوجی از متغیرهای گراسمن را در هم ضرب کنیم یک متغیر زوج گراسمن (E) بوجود می‌آید. می‌توان ثابت کرد که این متغیرها در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[O_1, O_2]_+ = 0 \quad (22-3)$$

$$[E_1, E_2]_- = 0 \quad (23-3)$$

$$[E, O]_- = 0 \quad (24-3)$$

که در آن از عبارت های زیر استفاده شده است:

$$[A, B]_- = AB - BA \quad (25-3)$$

$$[A, B]_+ = AB + BA \quad (26-3)$$

۳-۳ هامیلتونی ابر تقارن

همان طور که در بخش ۱-۳ بیان شد، لاگرانژین فرمیون ها و بوزون ها، در دو فضای زمان- مکان مختلف بیان می‌شوند بنابراین حالت‌های بوزونی و فرمیونی نیز به دو فضای جداگانه تعلق دارند. ابرتقارن به عنوان تقارنی بین حالت‌های بوزونی و فرمیونی به این صورت که به وسیله ابرتقارن می‌توان حالت‌های فرمیونی و بوزونی را در یک فضای بزرگتر (اجتماع دو فضای فرمیونی و بوزونی) بیان کرد و حالت‌های فرمیونی (بوزونی) را به حالت‌های بوزونی (فرمیونی) تبدیل نمود، به کار می‌رود. برای توضیح چگونگی این عمل در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک بوزونی را در دستگاه مختصات تعمیم یافته $p = q$ به صورت زیر می‌نویسیم [15,16]:

$$H_B = p^2 + \frac{1}{4}\omega_B q^2 \quad (27-3)$$

که در آن $[q, p] = i$ و $\hbar = 1$ است. عملگر های بالا برنده و پایین آورنده زیر را تعریف می‌کنیم:

$$b^+ = (\omega_b)^{-\frac{1}{2}} \left(ip - \frac{\omega_b}{2} q \right) \quad (28-3)$$

$$b = (\omega_b)^{-\frac{1}{2}} \left(ip + \frac{\omega_b}{2} q \right) \quad (29-3)$$

می توان نشان داد که روابط جابجایی این عملگرها به صورت زیر است:

$$[b, b^+] = 1 \quad (30-3)$$

$$[b, b] = [b^+, b^+] = 0 \quad (31-3)$$

هامیلتونی بر حسب این عملگرها به صورت زیر در می آید:

$$H_b = \omega_B [b^+, b] \quad (32-3)$$

اگر n_B ترازهای انرژی بوزونی را نشان دهد، طیف انرژی این نوسانگرها عبارت خواهد بود از:

$$E_B = \omega_B \left(n_B + \frac{1}{2} \right) \quad (33-3)$$

حال عملگرهای a و a^+ را که از قوانین پاد جابجایی فرمیونی تبعیت می کنند تعریف می کنیم:

$$[a, a^+] = 1 \quad (34-3)$$

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0 \quad (35-3)$$

اگر هامیلتونی سیستم فرمیونی را به صورت زیر بنویسیم:

$$H_F = \omega_F [a^+, a] \quad (36-3)$$

طیف انرژی، در صورتی که n_F ، نشان دهنده ترازهای انرژی فرمیونی باشد، عبارتند از:

$$E_F = \omega_F \left(n_F - \frac{1}{2} \right) \quad (37-3)$$

چون فرمیون ها با توابع موج پادمقارن بیان می شوند، بنابراین از آمار فرمی دیراک پیروی می کند.

بنابراین برای تعداد ذرات در یک تراز داریم: $n_F = n_F^2$ بدیهی است که n_F تنها می تواند ۰ و ۱ باشد

یک سیستم متشکل از یک فرمیون و یک بوزون دارای هامیلتونی زیر است:

$$H_S = H_B + H_F = \omega_F a^+ a + \omega_B b^+ b \quad (38-3)$$

و مقدارهای آن چنین می شود:

$$E = E_b + E_F = \omega_B n_b + \omega_F n_F + \frac{1}{2} (\omega_B - \omega_F) \quad (39-3)$$

از معادله اخیر دیده می شود که اگر $\omega_B = \omega_F$ باشد، به ازای یک انرژی ثابت با نابود شدن یک بوزون

$(n_B \rightarrow n_B - 1)$ باید یک فرمیون خلق $(n_F \rightarrow n_F + 1)$ شود و بالعکس، پس برای اینکه بتوانیم

یک طیف متقارن داشته باشیم می‌توانیم $\omega_B = \omega_F = \omega$ را در نظر بگیریم. در این صورت هامیلتونی و انرژی سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H = \omega (a^+ a + b^+ b) \quad (40-3)$$

$$E = \omega (n_B + n_F) \quad (41-3)$$

چون تنها دو مقدار ۰ و ۱ را می‌تواند اختیار کند، بنابراین هر انرژی تبهگن دو گانه است، به جز در حالت پایه که تنها یک حالت غیر تبهگن داریم. $n_B = n_F = 0$ که دارای انرژی صفر است. صفر بودن انرژی حالت پایه و غیر تبهگنی آن کمک می‌کند تا SUSY غیر شکسته داشته باشیم. چون تبهگنی SUSY این نتیجه را می‌دهد که همزمان با خلق (نابودی) یک بوزون یک فرمیون نابود (خلق) شود بنابراین عملگری می‌سازیم که چنین خاصیتی داشته باشد:

$$Q = \omega^{\frac{1}{2}} b a^+ \quad (42-3)$$

$$Q^+ = \omega^{\frac{1}{2}} b^+ a \quad (43-3)$$

دیده می‌شود که Q یک فرمیون را خلق و یک بوزون را نابود می‌کند و بالعکس Q^+ یک فرمیون را نابود و یک بوزون را خلق می‌کند. بنابراین اثر این عملگرها را بر حالت‌های فرمیونی و بوزونی می‌توان به صورت زیر دید:

$$Q|B\rangle = |F\rangle \quad (44-3)$$

$$Q^+|F\rangle = |B\rangle \quad (45-3)$$

به طوری که برای یک حالت متشکل از n_F فرمیون و n_B بوزون داریم:

$$Q |n_B, n_F\rangle = |n_B - 1, n_F + 1\rangle \quad (46-3)$$

$$Q^+ |n_B, n_F\rangle = |n_B + 1, n_F - 1\rangle \quad (47-3)$$

با استفاده از عملگرهای معادلات (۴۲-۳) و (۴۳-۳) هامیلتونی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_s = \{Q, Q^+\} \quad (48-3)$$

می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرار است:

$$\{Q, Q\} = \{Q^+, Q^+\} = 0 \quad (۴۹-۳)$$

$$[H_S, Q] = [H_S, Q^+] = 0 \quad (۵۰-۳)$$

می توان عملگرهای فرمیونی را به صورت ماتریس های پائولی نمایش داد. بنابراین می توانیم a و a^+ را به صورت عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده پائولی نمایش دهیم:

$$a = \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۱-۳)$$

$$a^+ = \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۲-۳)$$

که از روابط پادجابجایی تبعیت می کنند. هامیلتونی در معادله (۳۸-۳) را می توان با استفاده از نمایش معادلات (۵۱-۳) و (۵۲-۳) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} H_S &= \omega[b^+, b] + \frac{\omega}{2}\sigma_3 = \left(-p^2 + \frac{1}{4}\omega^2 q^2\right)I + \frac{1}{2}\omega\sigma_3 \\ &= \omega \begin{bmatrix} bb^+ & 0 \\ 0 & b^+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۵۳-۳)$$

که در آن I ماتریس یکه و $\sigma_3 = [\sigma_+, \sigma_-]$ است. ملاحظه می شود که این هامیلتونی ابرتقارنی به طور ساده ای نشان دهنده یک نوسانگر بوزونی است که با یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ در یک میدان مغناطیسی جفت شده است.

۳-۴ هامیلتونی های همتا و تابع ابر پتانسیل

برای تعمیم هامیلتونی SYSY اگر در معادله (۵۳-۳) به جای مختصات ωq تابع معمولی $W(x)$ قرار دهیم داریم:

$$A = \left(W(x) + \frac{d}{dx}\right) \quad (۵۴-۳)$$

$$A^+ = \left(W(x) - \frac{d}{dx}\right) \quad (۵۵-۳)$$

که در آن $i \frac{d}{dx}$ جانشین p و A, A^+ جانشین b, b^+ شده اند و با جایگذاری (۵۱-۳) و (۵۲-۳) در (۴۲-۳) و (۴۳-۳) داریم:

$$Q = (ip - W(x))\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^+ & 0 \end{bmatrix} \quad (56-3)$$

$$Q^+ = (ip + W(x))\sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57-3)$$

که در آن Q و Q^+ ابربار نامیده می‌شوند. با استفاده از معادلات (54-3)، (55-3)، (56-3) و (57-3) و قرار دادن در هامیلتونی رابطه (48-3) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_S = \{Q^+, Q\} &= (p^2 + W^2)I + \sigma_3 W' = \{A, A^+\} + \sigma_3 [A, A^+] \\ &= \omega \begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & A^+A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58-3)$$

که در این روابط $W(x)$ ابرپتانسیل^۱ نامیده می‌شود و W' مشتق W نسبت به x می‌باشد و H و H^+ به هامیلتونی‌های هم‌متا^۲ معروفند.

۵-۳ عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده

طیف انرژی هامیلتونی H در حالت گسسته به صورت زیر می‌باشد [13]:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (59-3)$$

که در آن، $|n\rangle$ ویژه حالت های هامیلتونی و E_n ویژه مقدار های آن می‌باشد. همیشه می‌توان یک عملگر پایین آورنده R و یک عملگر بالابرنده R^+ بسازیم که در معادله زیر صدق کند:

$$R = \sum C_{n-1}^* |n-1\rangle\langle n| \quad (60-3)$$

$$R^+ = \sum C_n |n+1\rangle\langle n| \quad (61-3)$$

بنابراین اثر آن‌ها بر یک ویژه حالت H مانند $|k\rangle$ چنین است:

$$R |k\rangle = C_{k-1}^* |k-1\rangle \quad (62-3)$$

$$R^+ |k\rangle = C_k |k+1\rangle \quad (63-3)$$

^۱Superpotential

^۲Partner Hamiltonians

که در آن ضرایب C_n به دلخواه انتخاب شده‌اند. به ترتیب با ضرب R^+ و R در معادله (۳-۶۲) و (۳-۶۳) خواهیم داشت:

$$R R^+ |k\rangle = |C_k|^2 |k\rangle \quad (۳-۶۴)$$

$$R^+ R |k\rangle = |C_{k-1}|^2 |k\rangle \quad (۳-۶۵)$$

روابط بالا بیانگر این نکته است که ویژه حالت‌های عملگرهای $R R^+$ و $R^+ R$ همان ویژه حالت‌های H هستند بنابراین با ترکیب $R R^+$ و $R^+ R$ می‌توان هامیلتونی را به صورت زیر نوشت:

$$H = \sum a_{mn} (R^+ R)^m (R R^+)^n \quad (۳-۶۶)$$

با توجه به معادله (۳-۶۶) دیده می‌شود که ساده‌ترین صورت هامیلتونی، از ترکیب خطی $R R^+$ و $R^+ R$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H = a_{00} + a_{10} R R^+ \quad (۳-۶۷)$$

اگر روابط:

$$a_0 = \varepsilon_0 \quad \text{و} \quad a_{10} = \sigma_- \sigma_+ \quad \text{و} \quad a_{00} = \sigma_+ \sigma_- \quad (۳-۶۸)$$

$$R^+ = A^+ \quad \text{و} \quad R = A \quad (۳-۶۹)$$

را در معادله (۳-۶۷) قرار دهیم، این معادله به صورت ابرمتقارن زیر خواهد بود که با معادله (۳-۵۸) مطابقت دارد:

$$H = \varepsilon_0 I + \begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & A^+ A \end{bmatrix} = \varepsilon_0 I + \begin{bmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} \quad (۳-۷۰)$$

در این معادله ε_0 انرژی حالت پایه هامیلتونی است.

۳-۶ هامیلتونی ابرمتقارن برای $N=1$ و $N=2$

برای بدست آوردن ساختار کلی نظریه SUSY لازم است که فضا-زمان معمولی را به فضا-زمانی تعمیم دهیم که شامل مجموعه‌ای از درجات آزادی اسپین نیز باشد [15,16]. به عبارت دیگر برای

وحدت بوزون‌ها و فرمیون‌ها در یک ابرچندگانه منفرد، لازم است که فضای مینکوفسکی معمولی را به ابرفضایی که هم شامل میدان‌های فرمیونی و هم میدان‌های بوزونی است تعمیم دهیم. برای سادگی، ابرفضایی را در نظر می‌گیریم که به وسیله θ و t ایجاد شده باشد که θ یک متغیر پادجابجایی است $(\theta^2 = 1)$. برای بررسی تقارن‌های وابسته به این فضا، انتقال‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$t \rightarrow t' = t + i\varepsilon\theta \quad (71-3)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta + \varepsilon \quad (72-3)$$

که در آن ε یک متغیر گراسمن است. ابرمیدان زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi(t, \theta) = q(t) + i\theta\psi(t) \quad (73-3)$$

این میدان به گونه‌ای نوشته شده که ناوردایی لاگرانژین تحت انتقال زمانی، بقای انرژی سیستم را نتیجه می‌دهد. در رابطه (73-3) میدان‌های $q(t)$ و $\psi(t)$ به ترتیب متغیرهای بوزونی و فرمیونی هستند و ثابت می‌شود که ضرب \hat{t} باید مختصه زمان حقیقی باشد. با استفاده از معادلات انتقالی (71-3) و (72-3) و جبر گراسمن، یک تغییر کوچک در ابرمیدان $\varphi(t, \theta)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \varphi(t', \theta') - \varphi(t, \theta) = q(t + i\varepsilon\theta) + i(\theta + \varepsilon)\psi(t + i\varepsilon\theta) - q(t) - i\theta\psi(t) \\ &= q(t) + i\varepsilon\theta q(t) + i(\theta + \varepsilon)\psi(t) + i\theta\varepsilon\psi(t) - q(t) - i\theta\psi(t) \\ &= i\varepsilon\theta q(t) + i\varepsilon\psi(t) \end{aligned} \quad (74-3)$$

از طرفی داریم:

$$\delta\varphi = \delta q \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \delta\psi \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \delta q(t) + i\theta\delta\psi(t) \quad (75-3)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$\delta q(t) = i\varepsilon\psi(t) \quad (76-3)$$

$$\delta\psi(t) = \varepsilon q(t) \quad (77-3)$$

و یا به صورت کلی‌تر داریم:

$$\delta\varphi = \varepsilon Q \varphi \quad (۷۸-۳)$$

که در آن Q به صورت زیر تعریف شده است :

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad (۷۹-۳)$$

اگر یک بار دیگر عملگر Q را بر φ اثر دهیم، خواهیم داشت:

$$Q^2 \varphi = Q[i\psi(t) + i\theta q] \quad (۸۰-۳)$$

$$\{Q, Q^+\}\varphi = i\varphi \quad (۸۱-۳)$$

اگر φ را به صورت $\frac{\partial}{\partial t}\varphi$ نشان دهیم، داریم:

$$i \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \{Q, Q^+\}\varphi \quad (۸۲-۳)$$

که از آن می توان هامیلتونی H را به صورت زیر نتیجه گیری کرد:

$$H = \{Q, Q^+\} \quad (۸۳-۳)$$

به سادگی می توانیم مطالب فوق را که برای مکانیک کوانتومی ابرتقارنی با یک متغیر گراسمن ($N=1$) بود، به حالتی با دو متغیر گراسمن ($N=2$) تعمیم دهیم. حالتی را در نظر می گیریم که دو متغیر پادجایایی θ_1 و θ_2 را داشته باشیم. مشابه با حالت $N=1$ ، انتقالات $N=2$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$t \rightarrow t' = t + i\varepsilon_1\theta_1 + i\varepsilon_2\theta_2 \quad (۸۴-۳)$$

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1' = \theta_1 + \varepsilon_1 \quad (۸۵-۳)$$

$$\theta_2 \rightarrow \theta_2' = \theta_2 + \varepsilon_2 \quad (۸۶-۳)$$

که در آن مقدار $dt - i\theta_1 d\theta_1 - i\theta_2 d\theta_2$ ناوردا می باشد. اگر به جای مختصات θ_1 و θ_2 مختصات θ و $\bar{\theta}$ را جایگزین کنیم، داریم:

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 - i\theta_2) \quad (۸۷-۳)$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_1 + i\theta_2) \quad (۸۸-۳)$$

معادلات انتقالی (۸۴-۳)، (۸۵-۳) و (۸۶-۳) به صورت زیر در می آید:

$$t \rightarrow t' = t + i\bar{\varepsilon}\theta + i\varepsilon\bar{\theta} \quad (۸۹-۳)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta + \varepsilon \quad (۹۰-۳)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\varepsilon} \quad (۹۱-۳)$$

که در آن ε و $\bar{\varepsilon}$ به صورت زیر هستند:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 - i\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \quad (۹۲-۳)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \quad (۹۳-۳)$$

به طور کلی ابرمیدان در حالت $N=2$ (مشابه با $N=1$) به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\varphi(t, \theta, \bar{\theta}) = q(t) + i\theta\bar{\psi}(t) + i\theta\psi(t) + \theta\bar{\theta}A(t)$$

که در آن ψ و $\bar{\psi}$ متغیرهای گراسمن هستند. برای بدست آوردن انتقالات توابع $A(t)$ ، $\psi(t)$ ،

$\bar{\psi}(t)$ و $q(t)$ تغییر کوچکی در φ ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \delta\varphi = \varphi(t', \theta', \bar{\theta}') - \varphi(t, \theta, \bar{\theta}) &= (i\varepsilon\bar{\psi} - i\bar{\varepsilon}\psi) \\ &+ i\theta[-\bar{\varepsilon}(\dot{q} + iA)] + i\theta\bar{\theta}[\varepsilon\bar{\psi} - \bar{\varepsilon}\psi] \end{aligned} \quad (۹۴-۳)$$

با توجه به معادله بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\delta q = i\varepsilon\bar{\psi} + i\bar{\varepsilon}\psi \quad (۹۵-۳)$$

$$\delta A = \varepsilon\bar{\psi} - \bar{\varepsilon}\psi \quad (۹۶-۳)$$

$$\psi\delta = -\bar{\varepsilon}(\dot{q} + iA) \quad (۹۷-۳)$$

$$\psi\sigma = \varepsilon(\dot{q} - iA) \quad (۹۸-۳)$$

اگر مولدهای SUSY یعنی Q و \bar{Q} را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t} \quad (۹۹-۳)$$

$$\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \quad (۱۰۰-۳)$$

همیلتونی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H = \{Q, \bar{Q}\} \quad (۱۰۱-۳)$$

۷-۳ چگونگی ساخت هامیلتونی و پتانسیل های همتا

یکی از کاربردهای ابرتقارن در مکانیک کوانتومی (مکانیک کوانتومی ابرتقارنی) حل معادلات کوانتومی مانند معادله شرودینگر در حضور پتانسیل های مختلف می باشد. به این ترتیب که می توان با استفاده از پتانسیل های ساده، پتانسیل های مشکل را ساخت و ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیل های حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر پتانسیل های حل نشده تبدیل کرد. این روش کم و بیش شبیه به حل نوسانگر هارمونیک یک بعدی است. در نوسانگر هارمونیک یک بعدی با استفاده از عملگرهای نردبانی A و A^+ و با داشتن یک تابع موج می توان توابع موج مراتب بالاتر را بدست آورد. در این قسمت هامیلتونین های ابرتقارنی^۱ و چگونگی کاربرد آنها را ذکر می کنیم.

هامیلتونی زیر را در نظر می گیریم:

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (۱۰۲-۳)$$

که ویژه توابع را با $\psi_n^{(1)}(x)$ و ویژه مقادیر آن را با E_n نمایش می دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E\psi_0(x) \quad (۱۰۳-۳)$$

که در آن E_0 انرژی حالت پایه است. حال $V_1(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \quad (۱۰۴-۳)$$

در این صورت هامیلتونی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ عبارتست از:

$$H_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (۱۰۵-۳)$$

واضح است که مقدار انرژی حالت پایه این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی H به اندازه E_0 کاهش یافته است و چون $V(x)$ و $V_1(x)$ به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین دارای ویژه توابع یکسانی هستند. اگر ویژه مقدار انرژی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ ، $E_n^{(1)}$ و ویژه توابع آن $\psi_n^{(1)}$ باشد داریم:

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0 \quad (۱۰۶-۳)$$

$$\psi_n^{(1)} = \psi_n \quad (107-3)$$

هامیلتونی H_1 را به صورت حاصلضرب دو عملگر می‌نویسیم:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{d}{dx} + W(x) \right) \left(\frac{d}{dx} + W(x) \right) \quad (108-3)$$

که در آن $W(x)$ ابرپتانسیلی است که در رابطه (3-58) معرفی کردیم. اگر دو عملگر A و A^+ را به

صورت زیر تعریف کنیم:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (109-3)$$

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (110-3)$$

هامیلتونی H_1 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H_1 = A^+ A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (111-3)$$

با جایگذاری معادلات (3-109) و (3-110) در معادله (3-111)، پتانسیل $V_1(x)$ بر حسب

ابرتانسیل $W(x)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H = \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - W(x) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (112-3)$$

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (113-3)$$

چون انرژی حالت پایه صفر است داریم:

$$A\psi_0^{(1)}(x) = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0^{(1)}(x) = 0 \quad (114-3)$$

از رابطه اخیر می‌توان $W(x)$ را بر حسب $\psi_0^{(1)}(x)$ و بالعکس بدست آورد:

در این معادلات N_0 ضریب بهنجارش می‌باشد. هامیلتونی دیگری را به صورت زیر می‌سازیم:

$$H_2 = A A^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (117-3)$$

با قرار دادن معادلات (3-109) و (3-110) در معادله (3-117)، $V_2(x)$ بر حسب $W(x)$ بدست می

آید:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (118-3)$$

پتانسیل های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ را پتانسیل های همتا و H_1 و H_2 را هامیلتونی های همتا می نامند. حال می خواهیم به وسیله عملگرهای A و A^+ ، ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی های همتا را به یکدیگر تبدیل کنیم. در حالت کلی داریم:

$$H_1(\psi_n^{(1)}) = A^+ A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} \quad (119-3)$$

اگر دو طرف رابطه را از سمت چپ در A ضرب کنیم، داریم:

$$H_2(A\psi_n^{(1)}) = A A^+ (A\psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)} (A\psi_n^{(1)}) \quad (120-3)$$

ملاحظه می شود که $E_n^{(1)}$ ها ویژه مقادیر انرژی H_2 نیز می باشند بنابراین به جز در حالت پایه، ویژه مقادیر انرژی H_1 و H_2 یکسان هستند همچنین با اثر A به روی $\psi_n^{(1)}$ (ویژه تابع H_1) ویژه تابع H_2 بدست می آید. به طور مشابه اگر $\psi_n^{(1)}$ و $E_n^{(2)}$ به ترتیب ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی H_2 باشند، آنگاه داریم:

$$H_2(\psi_n^{(2)}) = A A^+ \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)} \quad (121-3)$$

با ضرب A^+ از سمت چپ در دو طرف رابطه فوق داریم:

$$H_1(A^+\psi_n^{(2)}) = A^+ A (A^+\psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)} (A^+\psi_n^{(2)}) \quad (122-3)$$

معادله فوق نیز نشانگر آن است که $E_n^{(2)}$ ویژه مقدار H_1 می باشد و با اثر A^+ بر ویژه توابع H_2 ، ویژه توابع H_1 بدست می آید. اگر $A\psi_n^{(1)}$ را متناسب با $\psi_{n-1}^{(2)}$ و $A^+\psi_n^{(2)}$ را متناسب با $\psi_n^{(1)}$ در نظر بگیریم، با بهنجار کردن آنها بدست می آید:

$$E_0^{(1)} = 0 \quad (123-3)$$

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad (124-3)$$

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A\psi_{n+1}^{(1)} \quad (125-3)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = [E_{n+1}^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} A^+\psi_{n+1}^{(2)} \quad (126-3)$$

البته اگر $\psi_n^{(1)}$ بهنجار باشند، با اثر A به روی آنها $\psi_n^{(2)}$ نیز بهنجار خواهند بود و بالعکس. می بینیم که بجز حالت پایه که همتای ابرتقارنی ندارد، با داشتن ویژه توابع هامیلتونی H_1 (H_2) می توان ویژه توابع H_2 (H_1) را با اثر A (A) بر آنها بدست آورد.

۳-۸ تجزیه هامیلتونی و سلسله هامیلتونین ها

در بخش های گذشته دیدیم که چگونه می توان با استفاده از عملگر A ویژه توابع H_1 را به ویژه توابع H_2 تبدیل کرد. در مرحله بعدی می توانیم W_2 را چنان بدست آوریم که پتانسیل همتای دیگری به نام V_3 برای V_2 پیدا کنیم. اگر به همین ترتیب V_4 ، V_5 و ... V_n را بدست آوریم، یک دسته پتانسیل و همراه با آن یک دسته هامیلتونی H_1 ، H_2 و H_3 بدست می آوریم که ویژه مقادیر یکسانی دارند با این تفاوت که هر هامیلتونی یک تراز انرژی از هامیلتونی قبلی کمتر دارد. در این بخش طریقه بدست آوردن دسته هامیلتونی های ابرتقارن را بیان می کنیم. هامیلتونی H_1 را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (127-3)$$

که در آن انرژی حالت پایه و A_1 و A_1^+ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (128-3)$$

$$A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (129-3)$$

در این صورت هامیلتونی SUSY و پتانسیل های همتای V_2 به صورت زیر در می آیند:

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (130-3)$$

$$V_2(x) = W_1^2 + W_1' + E_0^{(1)} = V_1(x) + 2W_1' = V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)}(x) \quad (131-3)$$

که در آن $W_1 = \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x)$ می باشد. از معادلات (3-123) تا (3-126) می دانیم:

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \quad (132-3)$$

$$\psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_1 \psi_{n+1}^{(1)} \quad (133-3)$$

از رابطه فوق واضح است که انرژی حالت پایه H_2 برابر $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ و تابع موج حالت پایه آن $\psi_0^{(2)}$

می باشد. بنابراین با داشتن $\psi_n^{(2)}$ می توانیم A_2 و A_2^+ را بسازیم:

$$W_2 = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(2)}(x) \quad (134-3)$$

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x) \quad (135-3)$$

$$A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \quad (136-3)$$

همیلتونی H_2 را می توان به صورت زیر بر حسب A و A^+ نوشت:

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = A_2^+ A_2 + E_1^{(1)} \quad (137-3)$$

بنابراین می توانیم همیلتونی همتای H_2 (H_3) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (138-3)$$

که در آن عبارتست از:

$$V_3(x) = W_2^2(x) + W_2'(x) + E_1^{(1)} = V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(2)} = \\ V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)}) \quad (139-3)$$

بین ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع همیلتونی های H_1 ، H_2 و H_3 روابط زیر برقرار است:

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (140-3)$$

$$\psi_n^{(3)} = \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_2 \psi_{n+1}^{(2)} \\ = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_1^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)} \quad (141-3)$$

بدیهی است که اگر H_1 دارای m حالت مقید باشد آنگاه می توان m همیلتونی دیگر بدست آوریم که

همیلتونی i ام به جز $i - 1$ تراز انرژی اولیه H_1 مقادیر انرژی آن را دارا می باشد. برای همیلتونی i ام

داریم:

$$H_i = A_i^+ A_i - E_{i-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_i(x) \quad (142-3)$$

$$A_i = \frac{d}{dx} + W_i(x) \quad (143-3)$$

$$A_i^+ = -\frac{d}{dx} + W_i(x) \quad (144-3)$$

$$W_i = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(i)}(x) \quad (145-3)$$

$$E_n^{(i)} = E_{n+1}^{(i-1)} = \dots E_{n+i+1}^{(1)} \quad (146-3)$$

$$\psi_n^{(i)} = \left(E_{n+i+1}^{(1)} - E_{i-2}^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left(E_{n+i+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_{i-1} \dots A_1 \psi_{n+i-1}^{(1)} \quad (147-3)$$

$$V_i(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{(i-1)}) \quad (148-3)$$

در معادله (۱۴۶-۳) $E_n^{(i)}$ ، تراز n ام انرژی از هامیلتونی i ام را نشان می‌دهد. با استفاده از روابط

مکانیک کوانتومی می‌توان ضرایب انتقال موج و انعکاس را برای هامیلتونی i ام بدست آورد:

$$R_i(k) = \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_-^{(1)} + ik}\right) \dots \left(\frac{W_-^{(i-1)} - ik}{W_-^{(i+1)} + ik}\right) R_1(k) \quad (149-3)$$

$$T_i(k) = \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_-^{(1)} + ik'}\right) \dots \left(\frac{W_-^{(i-1)} - ik}{W_-^{(i+1)} + ik'}\right) T_1(k) \quad (150-3)$$

که در آن به جای W_i نماد $W^{(i)}$ به کار برده شده است و k و k' توسط روابط زیر داده می‌شوند [14]:

$$k = \left(E - [W_-^{(1)}]^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (151-3)$$

$$k' = \left(E - [W_+^{(1)}]^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (152-3)$$

۳-۹ اصول نوردایی شکل

تاکنون اصول مربوط به ساختن هامیلتونی، ابرپتانسیل و پتانسیل‌های همراه را با استفاده از قوانین مکانیک کوانتومی ابرتقارنی بیان کردیم. حال به چگونگی استفاده از این قوانین برای بدست آوردن ویژه انرژی‌های معادله شرودینگر در حضور پتانسیل‌های مختلف می‌پردازیم. برای اینکار لازم است ابتدا اصول نوردایی شکل را که اولین بار توسط گلدشتاین بیان شد معرفی نماییم. اصول نوردایی شکل، در سال ۱۹۳۰ توسط گلدشتاین^۱ به این صورت بیان شد که اگر بتوان پتانسیل‌های همراه را

توسط نگاشت متغیرهای آن به صورتی تبدیل کرد که اختلاف آنها تنها در یک مقدار ثابت باشد آنگاه ویژه انرژی‌های مراتب بالاتر به سادگی توسط رابطه زیر بدست می‌آیند [13,15,16]:

$$V_+(a_0, x) = V_-(a_1, x) + R(a_1) \quad (۱۵۳-۳)$$

$$E_0^{(k)} = \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (۱۵۴-۳)$$

$$E_{nl} = E_{nl}^{(-)} + E_0 \quad (۱۵۵-۳)$$

در رابطه (۱۵۳-۳) a_1 تابعی از a_0 است. از معادلات بالا در بدست آوردن ویژه انرژی‌های پتانسیل های مختلف، به طور وسیعی استفاده می‌شود.

فصل چهارم

بدست آوردن ترازهای هسته ای

در مدل هسته ای Mean Field و

اعمال اثر ایزواسپین

قسمت الف

۴-۱ مقدمه

در فصل دوم به طور مختصر به لزوم و اهمیت مدل‌های هسته‌ای اشاره کردیم و به معرفی مدل‌های هسته‌ای مختلف و مزیت‌های هر یک پرداختیم و تاکید کردیم که یکی از مدل‌های موفق در توصیف خواص هسته‌ای و خصوصاً حالت‌های برانگیخته، مدل تک ذره است. در این فصل ما ابتدا مروری خلاصه بر کارهای انجام شده پیشین خواهیم داشت سپس ضمن معرفی و توضیح ویژگی‌های یک نوع پر اهمیت از این مدل یعنی مدل Mean Field، با استفاده از اصول مکانیک کوانتومی ابرتقارنی به حل معادلات مربوط به این مدل پرداخته و ترازهای انرژی نوکلید را در این مدل هسته‌ای بدست می‌آوریم.

۴-۲ مروری بر کارهای انجام شده پیشین

فیزیک هسته‌ای از چنان صورت بندی نظری منسجمی برخوردار نیست که با استفاده از آن بتوانیم تمام پدیده‌ها را به روشی بنیادی تحلیل و تعبیر کنیم. فیزیک اتمی با صورت بندی الکترودینامیک کوانتومی خود از چنین امکاناتی برخوردار است و به کمک آن می‌توانیم برخی از کمیت‌های مشاهده پذیر را تا شش رقم با معنی محاسبه نماییم. بنابراین در فیزیک هسته‌ای معمولاً باید روش پدیده شناختی را در پیش بگیریم. مدل‌های هسته‌ای نیز از این امر مستثنی نیستند بنابراین اغلب کارهای انجام شده در این حیطه نیز به همین صورت می‌باشند و افراد مختلف مدل‌های مختلفی را پیشنهاد کرده‌اند [27]. تعداد این مدل‌ها با احتساب پتانسیل‌های مختلف بالغ بر ۱۰۰ مدل است [26]. با توجه به اهمیت مدل‌های هسته‌ای، از آغاز فیزیک هسته‌ای تاکنون افراد زیادی به تحقیقات در این زمینه پرداخته‌اند. از آنجا که این پایان نامه بیشتر به مدل‌هایی می‌پردازد که بر پایه پتانسیل Woods-Saxon است بیشتر به کارهای انجام شده در این زمینه می‌پردازیم. جدیداً کارهای انجام شده به حل معادله شرودینگر در حضور این پتانسیل مرتبط است. با توجه به این مساله که این معادله تنها در

حالت $l = 0$ به صورت تحلیلی قابل حل است و در حالت $l \neq 0$ تنها با روش‌های عددی می‌توان به حل آن پرداخت، اکثر کارهای انجام شده در حالت تکانه زاویه‌ای صفر می‌باشد. اولین روش‌های بدست آوردن ترازهای انرژی به روش‌های عددی بوده است و انرژی‌های پذیرفته شده برای ترازهای انرژی نیز همین انرژی‌ها هستند. روش‌های تحلیلی به کار برده شده معمولاً بسط‌های توانی، روش NU و SUSY برای حالات $l = 0$ است. در سال ۲۰۰۹ ویژه انرژی‌های معادله شرودینگر را در حالت $l = 0$ و به روش NU بدست آمده‌اند. در مراجع [19]، [20]، [27]، [28] و [39] نمونه‌هایی از کارهای انجام شده قبلی وجود دارد.

۳-۴ مدل پتانسیل میانگین (Mean Potential Model)

مدل پتانسیل میانگین متکی بر این مشاهده است که با تقریب خوب، نوکلئون‌های منفرد در داخل هسته رفتاری همانند ذرات مستقل، در پتانسیل میانگین (یا میدان میانگین) ناشی از سایر نوکلئون‌ها دارند. برای بدست آوردن یک توصیف کیفی از این پتانسیل میانگین، $V(R)$ ، ما این پتانسیل را به عنوان مجموع پتانسیل $v(r, r')$ بین نوکلئون واقع در r و یک نوکلئون واقع در r' می‌نویسیم:

$$V(r) = \int v(r - r') \rho(r') dr' \quad (۱-۴)$$

در این معادله، چگالی هسته‌ای $\rho(r')$ ، متناسب با احتمال در واحد حجم برای یافتن هسته در مجاورت r' است. در مورد پروتون این دقیقاً به شکل تابعی است که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است. اکنون در مورد v و ρ توضیح می‌دهیم. $v(r - r')$ از نوع جاذبه و کوتاه برد است. این تابع به سرعت در فاصله بزرگتر از ۲ fm به صفر سقوط می‌کند، در حالی که ضخامت نوعی هسته "بسیار" بزرگتر است و از ۶ fm برای هسته‌های سبک مانند اکسیژن تا ۱۴ fm برای سرب است. به منظور ساده کردن معادلات، می‌توان پتانسیل V را به صورت تقریبی توسط تابع دلتا (مانند برهمکنش نقطه مانند) نشان داد.

$$v(r - r') \approx -v_0 \delta(r - r') \quad (۲-۴)$$

ثابت v_0 را می توان به عنوان یک پارامتر آزاد در نظر گرفت اما انتظار می رود که انتگرال این پتانسیل با پتانسیل بین دو نوکلئون یکسان باشد:

$$v_0 = \int d^3\vec{r} v(\vec{r}) \sim 200 \text{ MeV fm}^3 \quad (3-4)$$

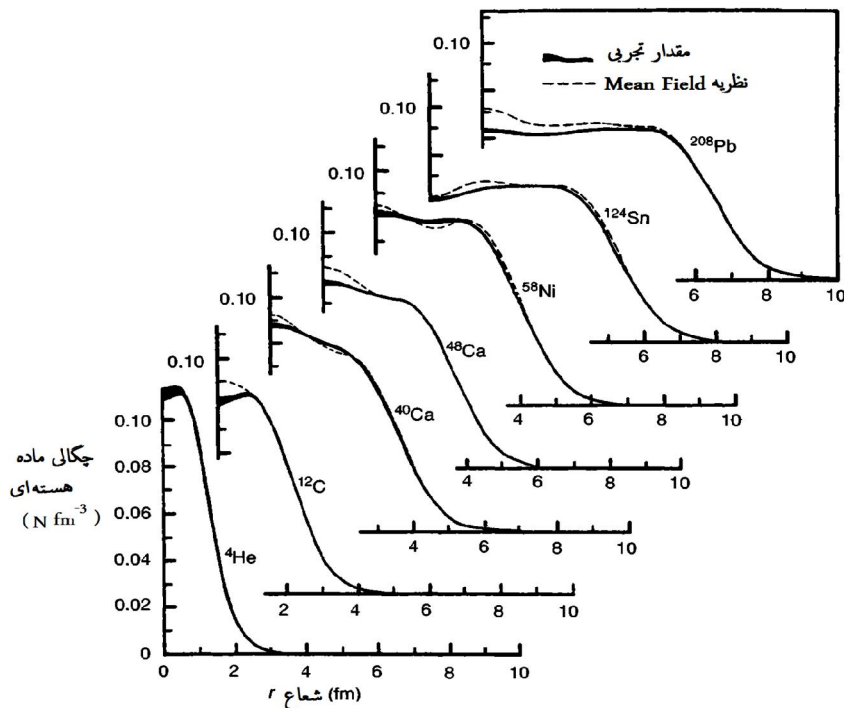
که ما از مقادیر مرجع v استفاده کرده ایم. بنابراین پتانسیل میانگین به صورت ساده زیر است:

$$V(r) = -v_0 \rho(r) \quad (4-4)$$

با به کار بردن مقدار تقریبی چگالی به صورت $\rho \sim 0.15 \text{ fm}^{-3}$ ما عمق تقریبی پتانسیل را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$V(r < R) \sim -30 \text{ MeV} \quad (5-4)$$

که در آن شعاع هسته است. با توجه به شکل تابع چگالی بار و ماده هسته ای نشان داده شده در شکل ۴-۱، درمی یابیم که در اولین تقریب، شکل پتانسیل باید به صورت تابع چگالی بار باشد. لازم به ذکر است که تغییرات چگالی بار و چگالی ماده هسته ای با دقت 0.1 fm با هم برابر است.



شکل ۴-۱: مقایسه مقدار تجربی تغییرات چگالی ماده هسته ای با مدل Mean Field [17]

یک بیان تحلیلی بسیار پر کاربرد پتانسیل Woods-Saxon است [18]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{R}\right)} \quad (۶-۴)$$

یک پتانسیل نسبتاً ساده‌تر که منجر به نتایج کیفی مشابه می‌شود پتانسیل نوسانگر هماهنگ است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (۷-۴)$$

می‌توان V_0 را به صورت زیر در نظر گرفت:

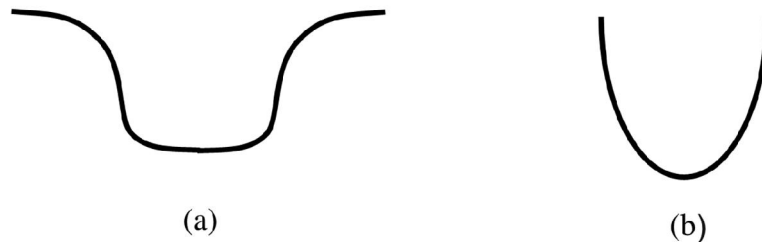
$$V_0 = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \quad (۸-۴)$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (۷-۴)، V به صورت زیر بدست می‌آید:

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \quad r < R \quad (۹-۴)$$

$$V(r) = 0 \quad r > R \quad (۱۰-۴)$$

بر خلاف تصور ما از شکل ۲-۴ این دو پتانسیل بسیار به یکدیگر شبیه هستند ولی باید توجه داشت که شرط $V(r > R) = 0$ یک شرط ضروری برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ محسوب می‌شود. به صورت کمی، اختلاف نسبت جواب‌های حاصل از این دو پتانسیل از مرتبه $0/9999$ برای حالت پایه و $0/9995$ برای اولین حالت برانگیخته با اختصاص مقدار مناسب ω در (۲-۴) است. در سطوح انرژی‌های بالاتر از این پتانسیل‌ها (۲-۴) الف و (۲-۴) ب بسیار متفاوتند.

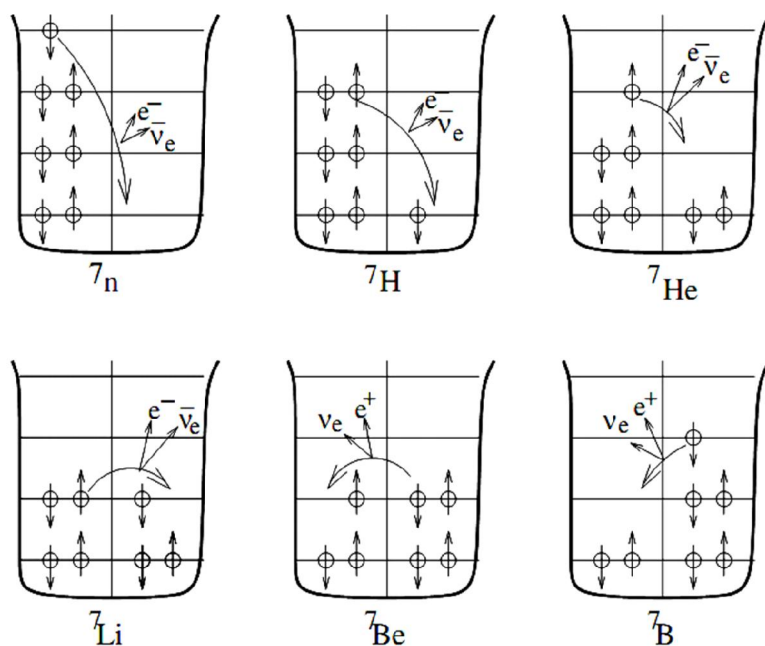


شکل ۲-۴: پتانسیل میانگین و تقریب آن با پتانسیل هماهنگ [7]

در این مدل، نوکلئون‌ها می‌توانند به طور مستقل از یکدیگر حرکت کنند و پروتون‌ها و نوترون‌ها به طور جداگانه از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند و سطوح انرژی و پیکربندی از یک روش مشابه که

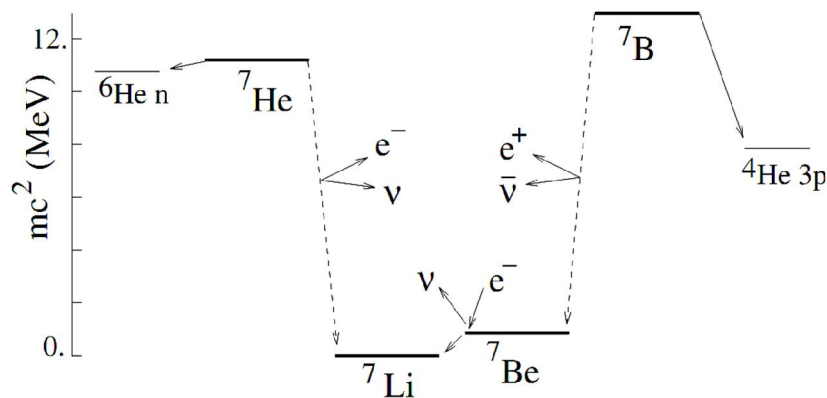
برای اتم‌های پیچیده در تقریب هارتری-فوک^۱ استفاده می‌شود بدست می‌آیند [7]. همانند الکترون‌ها در بعضی از اتم‌ها، اوربیتال‌های پروتون و نوترون، سطوح فرمیونی مستقل هستند. بسیار آموزنده است، برای مثال، در مدل پتانسیل میانگین، پایداری هسته‌های مختلف $A = 7$ را که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است، بررسی نمائیم.

شکل ۳-۴ نشان می‌دهد که به دلیل اصل پائولی، هسته‌ای که دارای فزونی زیاد نوترون نسبت به پروتون است و یا بالعکس، نیازمند قرار دادن نوکلئون‌ها در سطوح انرژی بالا است. این مطلب نشان می‌دهد که کمترین انرژی در پیکربندی‌هایی با تعداد تقریباً برابر پروتون و نوترون یعنی ${}^7\text{Li}$ یا ${}^7\text{B}$ ظاهر خواهد شد. ما انتظار داریم که دیگر پیکربندی‌ها بتوانند توسط تبدیل نوترون به پروتون‌ها و یا



شکل ۳-۴: اشغال پایین‌ترین ترازها در پتانسیل میانگین برای ایزوهای مختلف $A = 7$ [7].

بالعکس واپاشی β انجام دهند. جرم‌های مشاهده شده از هسته‌های $A = 7$ ، در شکل ۴-۴ نشان داده شده است و تصور اولیه ما را تأیید می‌کند:



شکل ۴-۴: انرژی ایزوبارهای مختلف $A = 7$. حالت های نامقید ${}^7\text{He}$ و ${}^7\text{B}$ نیز نشان داده شده اند [7,8].

۱- ${}^7\text{Li}$ مقیدترین هسته در هسته های نامبرده است. این هسته پایدار است و به شدت نسبت به هسته آینه ایش ${}^7\text{Be}$ که در آن دافعه کولنی بزرگی بین ۴ پروتون وجود دارد مقیدتر است. در این هسته، سطوح انرژی واقعی پروتون ها از طریق برهمکنش کولنی افزایش یافته است. خواص فیزیکی این دو هسته که تشکیل نوعی ایزواسپین قرین را می دهند، خیلی مشابه است.

۲- هسته های آینه ای ${}^7\text{B}$ و ${}^7\text{He}$ می توانند واپاشی β انجام دهند و به ترتیب به ${}^7\text{Be}$ و ${}^7\text{Li}$ تبدیل گردند. در واقع، پروتون ها و نوترون های اضافی در سطوحی قرار می گیرند که بسیار بالاتر از سطوحی هستند که برای آنها گسیل نوترون برای ${}^7\text{He}$ و گسیل ۳ پروتون برای ${}^7\text{B}$ امکان پذیر است. این ها، مدهای واپاشی غالب هستند. هنگامی که گسیل نوکلئون امکان پذیر است، طول عمر عموماً بسیار کوتاه است، $\tau = 10^{-22}\text{s}$ برای ${}^7\text{B}$ و $\tau = 10^{-21}\text{s}$ برای ${}^7\text{He}$.

۳- هیچ حالت مقیدی برای ${}^7\text{n}$ ، ${}^7\text{H}$ ، ${}^7\text{C}$ ، و یا ${}^7\text{N}$ مشاهده نشده است. این تصویری از هسته که به صورت حرکت نوکلئون ها در یک میدان میانگین ترسیم شده است، به ما اجازه می دهد جنبه های مختلف پدیده شناختی هسته را درک نمائیم.

۴- برای یک A معین، حداقل انرژی، برای تعداد بهینه ای از پروتون و نوترون حاصل خواهد شد. اگر پروتون ها باردار نبودند، سطوح آنها همانند نوترون های متناظرشان بود و در این حالت

تعداد بهینه متناظر با $N = Z$ (یا $Z \pm 1$ برای A فرد) می‌بود. این مورد برای هسته‌های سبک صادق است، ولی با افزایش A سطوح پروتون‌ها نسبت به نوترون‌ها به علت دافعه کولنی افزایش خواهد یافت و در این حالت ترکیب بهینه به صورت $N > Z$ است. برای هسته‌های آینه‌ای، آنهایی که مرتبط با تبدیل N و Z به یکدیگرند، دافعه کولنی باعث می‌شود هسته $N > Z$ نسبت به هسته $Z > N$ پایدارتر باشد.

۵- انرژی‌های بستگی وقتی که نوکلئون‌ها می‌توانند به جفت نوترون‌ها و جفت پروتون‌ها با اسپین مخالف گروه بندی شوند بزرگتر هستند. از آنجا که نیروی نوکلئون-نوکلئون جاذبه است، اگر نوکلئون‌ها در کنار یکدیگر قرار گیرند، انرژی کاهش می‌یابد، اما با توجه به اصل پائولی، این امکان تنها در صورتی وجود دارد که آنها دارای اسپین مخالف باشند. برای این اثرات جفتیدگی، چندین جلوه وجود دارد: از میان ۱۶۰ هسته A -زوج، β -پایدار؛ تنها چهار هسته سبک، ${}^2\text{H}$ ، ${}^6\text{Li}$ ، ${}^{10}\text{B}$ و ${}^{14}\text{N}$ ، فرد-فرد هستند و بقیه همگی زوج-زوجند (پنجمین عنصر فرد-فرد ${}^{180m}\text{Ta}$ با نیمه عمر 10^{15} سال است و به طور کلی می‌تواند پایدار در نظر گرفته شود).

۶- اصل پائولی توضیح می‌دهد که چرا "نوترون در هسته می‌تواند پایدار باشد در حالی که نوترون‌های آزاد ناپایدارند". ممکن است؟ واپاشی نوترون در ${}^7\text{n}$ ، ${}^7\text{H}$ ، ${}^7\text{He}$ و ${}^7\text{Li}$ توسط فلش در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. به منظور تبدیل یک نوترون به یک پروتون توسط واپاشی β ، پروتون نهایی باید انرژی‌ای را که در فرآیند $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ از نظر انرژی امکان پذیر است به خود بگیرد. اگر تمام سطوح پایین تر اشغال شده باشند ممکن است این فرآیند امکان پذیر نباشد. این موردی است که برای Li اتفاق می‌افتد زیرا برهمکنش کولنی سطوح پروتون را اندکی بیش از $0.78 \text{ MeV} = (m_n - m_p - m_e)c^2$ افزایش می‌دهد. از این رو نوترون‌ها می‌توانند توسط اصل پائولی "stabilized" گردند [7].

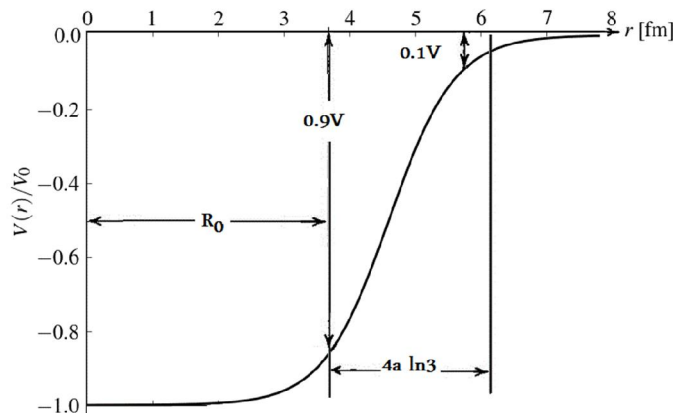
۷- بالعکس، در یک هسته یک پروتون می تواند "destabilized" شود در صورتی که فرآیند $p \rightarrow n e^+ \nu_e$ بتواند اتفاق بیفتد. این امر در صورتی ممکن است که اوربیتال های پروتون در اثر دافعه کولنی بیشتر از مقدار $1.8 \text{ MeV} = (m_n + m_e - m_p)c^2$ نسبت به اوربیتال های نوترونی بالا بیابند. در مورد ${}^7\text{Be}$ و ${}^7\text{Li}$ نشان داده شده در شکل ۴-۴، سطوح پروتون به مقداری بین $(m_n + m_e - m_p)c^2$ و $(m_n - m_p - m_e)c^2$ افزایش یافته اند بنابراین هیچکدام از این دو هسته نمی توانند واپاشی β انجام دهند (هسته ${}^7\text{Be}$ به علت واکنش قاپیدن-الکترون از ابر الکترونی داخلی ناپایدار است: ${}^7\text{Be} e^- \rightarrow {}^7\text{Li} \nu_e$).

۴-۴ پتانسیل Woods-Saxon

یکی از پتانسیل های بسیار مهم در فیزیک هسته ای، پتانسیل Woods-Saxon است. این پتانسیل کوتاه برد که اولین بار توسط وودز و ساکسون در سال ۱۹۵۴ معرفی شد بخش اصلی مدل پوسته ای و مدل اپتیکی را که در پراکندگی های هسته ای کاربرد دارد تشکیل می دهد. همچنین از این پتانسیل به صورت گسترده ای برای توصیف برهمکنش نوترون با هسته های سنگین استفاده می شود. شکل این پتانسیل که بر حسب r یعنی فاصله از مرکز هسته است به صورت زیر می باشد [18,6,5]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} \quad (11-4)$$

در شکل زیر پتانسیل Woods-Saxon و پارامترهای مهم آن ترسیم شده است:



شکل ۴-۵ پتانسیل استاندارد Woods-Saxon و پارامترهای مهم آن

اگر از این پتانسیل در مدل پوسته‌ای استفاده شود R_0 شعاع هسته و برابر فاصله‌ای است که چگالی هسته به ۹۰ درصد مقدار ماکزیمم خود می‌رسد، a ضخامت پوسته است و به فاصله‌ای گفته می‌شود که چگالی هسته از ۹۰ درصد به ۱۰ درصد مقدار مرکزی خود می‌رسد و V_0 عمق چاه پتانسیل جاذبه‌ای است. رابطه R_0 و V_0 با عدد جرمی از فرمول‌های زیر بدست می‌آیند:

$$R_0 = 1.25 A^{\frac{1}{3}} \quad \text{و} \quad V_0 = 35 + 0.5A \quad (۴-۱۲)$$

لازم به ذکر است که معادله شرودینگر در حضور این پتانسیل به صورت تحلیلی قابل حل نیست و تنها با روش‌های عددی می‌توان به حل آن پرداخت.

۴-۵ بدست آوردن ترازهای انرژی مدل هسته‌ای Mean Field با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

همانطور که در قسمت گذشته بیان شد کاری که برای توصیف حرکت نوکلئون‌ها در این مدل هسته‌ای باید انجام شود حل معادله دیراک یا شرودینگر در فضای سه بعدی و بدست آوردن ترازهای انرژی نوکلئون‌هاست. تابع موج در این مدل به صورت تابع موج آخرین نوکلئون تزویج نشده و یا حاصلضرب تانسوری آخرین نوکلئون‌های تزویج نشده است. از آزمایشات پراکندگی می‌دانیم که انرژی جنبشی

نوکلئون‌ها در داخل هسته در حدود 10 MeV است بنابراین می‌توانیم با اطمینان خاطر از مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی که با معادله شرودینگر بیان می‌شود استفاده کنیم. معادله شرودینگر در سه بعد به صورت زیر است:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + V(r, \theta, \phi) \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi) \quad (13-4)$$

اگر پتانسیل V در این معادله تنها وابسته به r باشد می‌توان از جداسازی متغیرها در حل این معادله استفاده نمود. در این حالت تابع موج به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r) Y_{l, m_l}(\theta, \phi) \quad (14-4)$$

با جایگذاری معادله (14-4) در معادله (13-4)، معادله شعاعی شرودینگر در حضور پتانسیل Woods-Saxon به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2} \right) R_{nl}(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} \right) R_{nl}(r) = 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq r < \infty \quad (15-4)$$

در این معادله L عملگر تکانه زاویه‌ای است که موجب دور شدن نوکلئون‌ها از مرکز هسته می‌شود و μ جرم کاهش یافته نوترون-پروتون است. در ابتدا برای حل این معادله تابع موج را به صورت $U_{nl}(r) = rR_{nl}(r)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت معادله (15-4) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2 U_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) U_{nl}(r) = 0 \quad (16-4)$$

معادله بالا از دو جهت با معادله شرودینگر تک ذره در یک بعد متفاوت است :

۱- اول اینکه دارای یک جمله مرکز گریز متناسب با $l(l+1)$ است.

دوم اینکه تابع موج باید در شرایط مرزی $U(0) = 0$ و $U(\infty) = 0$ صدق کند.

برای حل اینگونه معادلات در این حالت، پتانسیل موثر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + V_l(r) \quad (17-4)$$

برای معادله (۱۶-۴) این پتانسیل به صورت زیر نوشته می شود:

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{WS}}(r) + V_l(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \quad (18-4)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$$r = R_0(x + 1) \quad (19-4)$$

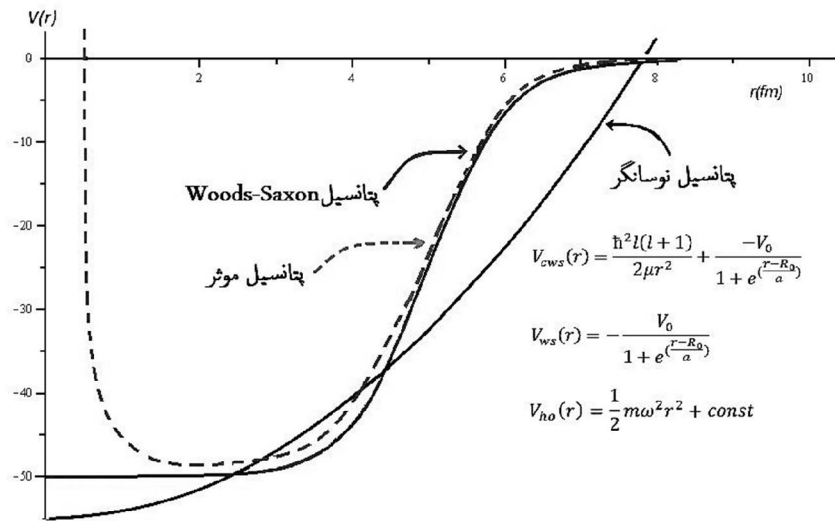
$$\alpha = \frac{R_0}{a} \quad (20-4)$$

معادله (۱۶-۴) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$(21-4) \frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - V_{\text{eff}}) U_{nl}(x) = 0$$

اگر برای حل معادله بالا به روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مراجعه کنیم در می‌یابیم که معادله (۲۱-۴) در حضور پتانسیل موثر معادله (۱۸-۴) به علت جفت شدگی و ترکیب قسمت نمایی و معکوس مربع برای حالت‌هایی که در آنها $l \neq 0$ است توسط روش‌های استاندارد مانند SUSY و NU به صورت تحلیلی قابل حل نیست [19,27].

در شکل زیر پتانسیل Woods-Saxon، پتانسیل موثر رابطه (۱۸-۴) و پتانسیل هماهنگ را که به صورت تحلیلی قابل حل است با یکدیگر مقایسه نموده‌ایم:



شکل ۴-۶: پتانسیل وودز-ساکسون، پتانسیل هماهنگ و پتانسیل موثر در مقایسه با یکدیگر

بنابراین برای حل این معادله در حالتی که $l \neq 0$ است باید به روش‌های دیگری متوسل شویم. یکی از این روش‌ها، استفاده از تقریب‌های مناسب است. ما در اینجا از تقریب Pekeris استفاده می‌کنیم [19,22,24]. این تقریب که اولین بار در سال ۱۹۳۴ به کار برده شد بر پایه بسط سد مرکز گریز (جمله $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ سد مرکز گریز نامیده می‌شود زیرا باعث دفع نوکلئون‌ها از مرکز هسته می‌شود و این مطلب به خوبی در شکل ۴-۶ دیده می‌شود) حول سطح هسته به صورت وابستگی نمایی است. با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای معادلات (۴-۱۹)، (۴-۲۰) و با در نظر گرفتن Ω به صورت:

$$\Omega = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \quad (۲۲-۴)$$

خواهیم داشت:

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} = \Omega(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots) \quad (۲۳-۴)$$

با استفاده از تقریب Pekeris جمله سد مرکز گریز $V_l(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V_l(x) = \Omega \left(d_0 + \frac{d_1}{1+e^{ax}} + \frac{d_2}{(1+e^{ax})^2} \right) \quad (۲۴-۴)$$

با بسط رابطه (۲۴-۴) در $r = R_0$ و یا به عبارت دیگر در $x = 0$ خواهیم داشت :

$$V_l(x) = \Omega \left[\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \right) - \frac{\alpha}{4} (d_1 + d_2)x + \frac{\alpha^2}{16} d_2 x^2 + \frac{\alpha^3}{48} (d_1 + d_2)x^3 - \frac{\alpha^4}{96} d_2 x^4 + \dots \right] \quad (۲۵-۴)$$

با مقایسه روابط (۲۳-۴) و (۲۵-۴) و مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف x در این دو معادله خواهیم داشت:

$$\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \right) = 1 \quad (۲۶-۴)$$

$$-\frac{\alpha}{4} (d_1 + d_2) = -2 \quad (۲۷-۴)$$

$$\frac{\alpha^2}{16} d_2 = 3 \quad (۲۸-۴)$$

$$\frac{\alpha^3}{48} (d_1 + d_2) = -4 \quad (۲۹-۴)$$

با حل معادلات بالا، مقادیر d_0 ، d_1 و d_2 به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$d_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (30-4)$$

بنابراین پتانسیل موثر در رابطه (۴-۱۸) به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$V_{\text{eff}}(x) = \Omega d_0 - \frac{V_0 - \Omega d_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{\Omega d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \quad (31-4)$$

با قرار دادن پتانسیل موثر در معادله (۴-۲۱)، معادله شرودینگر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \Omega d_0 + \frac{V_0 - \Omega d_1}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\Omega d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (32-4)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$$\frac{2\mu(E_{nl} - \Omega d_0)}{\hbar^2} = \varepsilon \quad (33-4)$$

$$\frac{2\mu(V_0 - \Omega d_1)}{\hbar^2} = \beta \quad (34-4)$$

$$\frac{2\mu\Omega d_2}{\hbar^2} = \gamma \quad (35-4)$$

بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\gamma}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (36-4)$$

برای حل معادله (۴-۳۶) راه‌های مختلفی وجود دارد. در اینجا برای حل این معادله، یک جواب

پیشنهادی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(37-4) W_1(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(A + \frac{B}{1 + e^{\alpha x}} \right)$$

با جایگذاری معادله (۴-۳۷) در معادله (۴-۳۶) خواهیم داشت:

$$A^2 + \frac{B^2}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{-\alpha B e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_1(x) - E_0^{(1)}) \quad (38-4)$$

با تبدیل جمله چهارم از سمت چپ بر حسب جمله دوم و سوم بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} A^2 + \frac{B^2 - \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB - \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} &= \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_1(x) - E_0^{(1)}) \\ &= -\varepsilon - \frac{\beta}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{\gamma}{(1 + e^{\alpha x})^2} \end{aligned} \quad (39-4)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب قسمت های نمایی در طرفین معادله (۳۹-۴) خواهیم داشت:

$$A^2 = -\varepsilon \quad (۴۰-۴)$$

$$2AB - \alpha B = -\beta \quad (۴۱-۴)$$

$$B^2 + \alpha B = \gamma \quad (۴۲-۴)$$

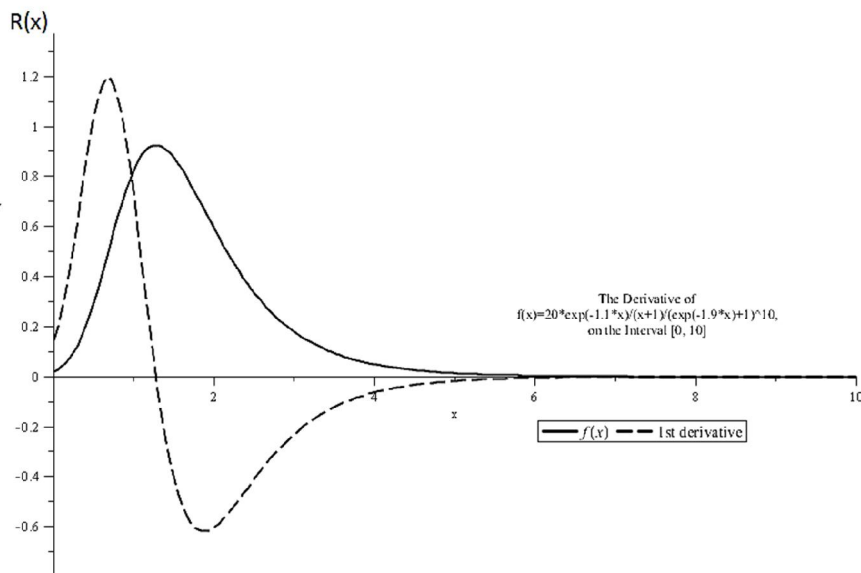
با استفاده از روابط (۳۳-۴) و (۴۰-۴) تا (۴۲-۴)، انرژی حالت پایه به صورت زیر بدست می آید:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \Omega d_0 \quad (۴۳-۴)$$

و با استفاده از روابط (۱-۳)، (۳۷-۴) و (۴۰-۴) تا (۴۲-۴) تابع موج حالت پایه برحسب x به صورت زیر بدست می آید:

$$(۴۴-۴) R_0(x) = \frac{N_0}{(x+1)R_0} \exp\left(\left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2}\right)x\right) (e^{-\alpha x} + 1)^{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{-2\alpha}}$$

با جایگذاری پارامترهای مربوط به دوترون می توان تابع موج حالت پایه برای دوترون را بدست آورد. در شکل ۴-۷، این تابع موج برای دوترون رسم شده است. حال با بدست آوردن تابع موج حالت پایه، به سراغ حالات برانگیخته می رویم. برای بدست آوردن این حالات همانطور که در فصل سوم



شکل ۴-۷: تابع موج حالت پایه دوترون $R_0(x) = \frac{20}{(x+1)} \exp(-1.1x) (e^{-1.9x} + 1)^{10}$

گفته شد باید از اصول نوردایی شکل استفاده نماییم. با جایگذاری تابع ابرپتانسیل معادله (۴-۳۷) در معادلات (۳-۱۱۳) و (۳-۱۱۸)، پتانسیل‌های همراه V_+ و V_- به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 - \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB + \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} \right) \quad (۴۵-۴)$$

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 + \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB - \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} \right) \quad (۴۶-۴)$$

با نگاشت $B_1 = B_0 - \alpha$ در معادله (۴۵-۴) و با جایگذاری رابطه $A = \frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2}$ در معادله (۴۶-۴) و استفاده از روابط (۳-۱۵۳) و (۳-۱۵۴) به راحتی می‌توان نشان داد که پتانسیل‌های همراه $V_+(x)$ و $V_-(x)$ صرف نظر از یک مقدار ثابت با یکدیگر برابرند بنابراین با استفاده از رابطه (۳-۱۵۳) می‌توان برای آنها از اصول نوردایی شکل استفاده نمود. به عبارت دیگر داریم:

$$B_1 = B_0 - \alpha, \quad B_n = B_0 - n\alpha \quad (۴۷-۴)$$

در این صورت بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (۴۸-۴) R(a_1) &= V_+(B, x) - V_-(B - \alpha, x) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - \alpha)} - \frac{B - \alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 \right] \\ R(a_i) &= V_+(B - (i - 1)\alpha, x) - V_-(B - i\alpha, x) \\ &= \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - i\alpha)} - \frac{B - i\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - (i - 1)\alpha)} - \frac{B - (i - 1)\alpha}{2} \right)^2 \right] \quad (۴۹-۴) \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود $R(a_i)$ مستقل از x است. با استفاده از روابط (۳-۱۵۴) و (۳-۱۵۵) ویژه انرژی‌ها به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$(۵۰-۴) E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - n\alpha)} - \frac{B - n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0$$

معادله (۵۰-۴) را می‌توان بر حسب پارامترهای اصلی به صورت زیر نوشت:

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{l(l+1)(d_1 + d_2)}{R_0^2} - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} + \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{4} + \frac{n\alpha}{2} \right)^2 \right]$$

$$- \left(\frac{\frac{l(l+1)(d_1+d_2) - 2\mu V_0}{R_0^2} - \frac{\hbar^2}{- \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}}{4} + \left(\frac{\frac{2\mu(V_0 - \Omega d_1)}{\hbar^2}}{- \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \frac{\hbar^2 l(l+1)d_0}{2\mu R_0^2} \quad (51-4)$$

ویژه توابع مراتب بالاتر را می‌توان به راحتی از روابط (3-125) و (3-126) بدست آورد:

$$\psi_0^{(1)} = [E_0^{(0)}]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{-\beta}{- \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} + \frac{- \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{2(1 + e^{\alpha x})} \right) + \frac{d}{dx} \right] \left[\frac{N_0}{(x+1)R_0} \exp \left(\left(\frac{-\beta}{- \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right) x \right) (e^{-\alpha x} + 1)^{\frac{- \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{-2\alpha}} \right] \quad (125-3)$$

$$\psi_0^{(2)} = [E_0^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A \psi_0^{(1)} \quad (126-3)$$

قسمت ب

۴-۶ مقدمه

در این بخش ما به بررسی معادلات مربوط به سیستم‌های مقید چند نوکلئونی در مختصات فوق کروی می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا مختصات ژاکوبی را معرفی کرده و سپس با بررسی یک سیستم سه نوکلئونی به عنوان مثال، انرژی بستگی این سیستم را می‌آوریم و در انتها تاثیر ایزواسپین را روی انرژی بستگی این سیستم محاسبه می‌کنیم.

۴-۷ مختصات ژاکوبی

برای حل کلیه مسائل ریاضی و فیزیکی معمولاً به تعریف مختصات نیازمندیم و این مختصات به کار رفته می‌تواند با توجه به مساله مورد نظر و به جهت ساده شدن روابط تغییر نماید. یکی از انواع این مختصات، مختصات ژاکوبی است. مختصات ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شود [29]:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 \quad (۴-۵۴)$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{6}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_3)^2 \quad (۴-۵۵)$$

⋮
⋮
⋮

و به طور کلی داریم:

$$\bar{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{r}_j - \bar{r}_{i+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (۴-۵۶)$$

آخرین مختصه ژاکوبی به صورت زیر است:

$$\bar{\xi}_N = \bar{R} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \dots + \bar{r}_N}{N} \quad (۴-۵۷)$$

$\bar{\xi}_i$ بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلست و آخرین مختصه ژاکوبی بردار مرکز جرم کل ذرات است.

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{j=1}^N d\vec{r}_j = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j \equiv d\vec{x} \quad (58-4)$$

برای توصیف مکان A ذره می توان از مختصات ژاکوبی استفاده نمود که در این حالت با توجه به اینکه هر ذره دارای ۳ درجه آزادی است ما نیازمند 3A مختصه ژاکوبی هستیم. در این صورت ابرشعاع به صورت زیر نوشته می شود :

$$x = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} (\vec{r}_i - R)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59-4)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان هایی از فاصله نسبی آنها باشند می توان آنها را برحسب ابرشعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل ها، پتانسیل های فوق مرکزی گویند [29].

۴-۸ بدست آوردن تراز های هسته ای برای سیستم سه نوکلئونی با استفاده از توابع فوق

کروی

برای یک سیستم سه نوکلئونی هامیلتونی به صورت زیر است [34]:

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{-\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_i^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (60-4)$$

پتانسیل بین ذرات را به صورت زیر در نظر می گیریم [7,33]:

$$V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_0 \left(1 + \frac{\langle S_i \cdot L_i \rangle}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{\partial}{\partial |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) \times \left[\left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{R} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{و} \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \leq R \quad (61-4)$$

اگر $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| > R$ آنگاه $V_0 = 0$ خواهد بود. بنابراین معادله شرودینگر در حضور این پتانسیل به صورت

زیر نوشته می شود :

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_i^2} \right) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + \frac{V_0}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left(1 + \frac{\langle S_i \cdot L_i \rangle}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{\partial}{\partial |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right)$$

$$\times \left[\left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{R} \right)^2 - 1 \right] \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = E \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (62-4)$$

برای سه ذره مختصات ژاکوبی به صورت زیر است :

$$\bar{\rho} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}} \quad (63-4)$$

$$\lambda = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{\sqrt{6}} \quad (64-4)$$

$$\bar{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3} \quad (65-4)$$

در این صورت ابر شعاع به صورت زیر خواهد بود :

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2 + R^2} \quad (66-4)$$

با توجه به اینکه بر سیستم نیروی خارجی اعمال نمی شود اگر مبدا دستگاه مختصات را در مرکز جرم

سه نوکلئون در نظر بگیریم $R = 0$ و بنابراین $x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ خواهد بود. با در نظر گرفتن تابع موج

به صورت زیر:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \psi(r_1, r_2, r_3) \mathcal{Y}_{K,n}(\Omega) \quad (67-4)$$

که در آن $\mathcal{Y}_{K,n}(\Omega)$ توابع هارمونیک فوق کروی بوده و در حالت سه بعدی به همان $Y_{l,m}$ های

معمولی تبدیل می شوند و با جایگذاری مختصات ژاکوبی خواهیم داشت :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_0 \left[\frac{2\langle S_t.L \rangle_t}{R^2} + \left(\frac{x^2}{R^2} - 1 \right) \right] - E_{K,n} \right) \psi_{K,n}(x, \Omega) = 0 \quad (68-4)$$

که در آن μ جرم کاهش یافته نوترون-پروتون است و :

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\Gamma^2(\Omega)}{x^2} \quad (69-4)$$

$$\Gamma^2(\Omega) \mathcal{Y}_{K,n}(\Omega) = -K(K+4) \mathcal{Y}_{K,n}(\Omega) \quad (70-4)$$

با در نظر گرفتن تابع موج به صورت $U_{K,n}(x) = x^{\frac{5}{2}} \psi_{K,n}(x)$ و با استفاده از تغییر متغیر $\xi = D^{\frac{1}{2}}x$ که در آن $D = \frac{2\mu V_0}{R^2 \hbar^2}$ معادله (۶۸-۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2 U_{K,n}(\xi)}{d\xi^2} - \left(\xi^2 + \frac{K(K+4)D}{\xi^2} - 2DK - \frac{2\mu(V_0 + E_{K,n})}{\hbar^2} \right) U_{K,n}(\xi) = 0 \quad (۷۱-۴)$$

که در آن از روابط زیر استفاده شده است:

$$S_t = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\bar{1}}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{\bar{3}}{2} \quad (۷۲-۴)$$

$$L_t = L_1 + L_2 + L_3 = K \quad (۷۳-۴)$$

$$S_t \cdot L_t = \frac{1}{2} (J_t^2 - L_t^2 - S_t^2) = \begin{cases} -2K, & S \uparrow \\ -4K - 1, & S \downarrow \end{cases} \quad (۷۴-۴)$$

با توجه به شکل معادله (۷۱-۴) اگر $t(t+1) = K(K+4)D$ و $\xi \rightarrow 0$ تابع موج متناسب با ξ^{t+1} و اگر $\xi \rightarrow \infty$ تابع موج متناسب با $\exp(-\frac{\xi^2}{2})$ خواهد بود بنابراین جواب پیشنهادی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$U_{K,n}(\xi) = f(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^{t+1} \quad (۷۵-۴)$$

با قرار دادن رابطه (۷۵-۴) در (۷۱-۴) خواهیم داشت:

$$\xi f'' + 2(t+1-\xi^2)f' + \xi \left(\frac{2\mu(V_0 + E_{K,n})}{\hbar^2} + 2DK - 2t - 3 \right) f = 0 \quad (۷۶-۴)$$

با جایگذاری $S = \xi^2$ بدست می‌آوریم:

$$Sf'' + \left(t + \frac{3}{2} - S \right) f' + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu(V_0 + E_{K,n})}{\hbar^2} + 2DK - t - \frac{3}{2} \right) f = 0 \quad (۷۷-۴)$$

با مقایسه رابطه (۷۷-۴) با معادله دیفرانسیل اساسی کومر خواهیم داشت [7,33]:

$$\psi_{K,n}(\xi) = N F\left(n, t + \frac{3}{2}; S\right) \exp\left(-\frac{S}{2}\right) S^{\frac{t+1}{2}} \quad (78-4)$$

که در آن F تابع کومر است و داریم:

$$n = \frac{-1}{2} \left(\frac{2\mu(V_0 + E_{K,n})}{\hbar^2} + 2DK - t - \frac{3}{2} \right) \quad (79-4)$$

تابع موج سیستم برای حالت پایه بر حسب X به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi_0(\xi) = N_0 F\left(0, t + \frac{3}{2}; DX^2\right) \exp\left(-\frac{DX^2}{2}\right) X^{t+1} \quad (80-4)$$

با توجه به ویژگی‌های توابع کومر و شرایط مرزی، ویژه انرژی‌های بدست آمده به صورت زیر است:

$$E_{t,n} = \left(2n + t + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2V_0 \hbar^2}{\mu R^2}\right)^{\frac{1}{2}} - V_0 \quad (81-4)$$

با جایگذاری مقادیر $V_0 = 10\text{MeV}$ ، $t = 1$ ، $\mu = 469.4\text{MeV}$ ، $R = 1.8\text{fm}$ انرژی بستگی سیستم سه

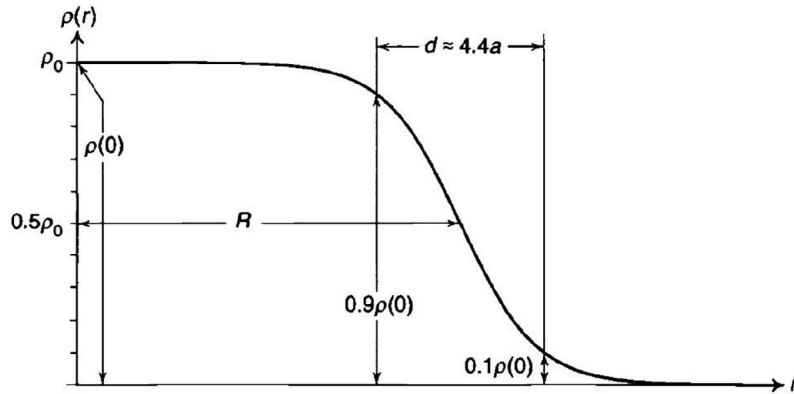
نوکلئونی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E_0 = -7.948\text{MeV} \quad (82-4)$$

۹-۴ فرمالیزم ایزواسپین

همانطور که در فصل دوم گفته شد، با توجه به اینکه ایزواسپین پروتون و نوترون $\frac{1}{2}$ است، یک سیستم سه نوکلئونی می‌تواند دارای ایزواسپین کل $\frac{3}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ باشد. چون در طبیعت سیستم ۳ پروتونی و ۳ نوترونی وجود ندارد بنابراین ایزواسپین کل تنها می‌تواند $\frac{1}{2}$ باشد که با توجه به مولفه سوم ایزواسپین، سیستم به صورت دو پروتون و یک نوترون یا یک پروتون و دو نوترون خواهد بود. اگر سیستم دارای شکستگی ایزواسپین نباشد تاثیر ایزواسپین می‌تواند تنها توسط اثرات الکترومغناطیسی بدست آید. نیروی الکترومغناطیسی دو اثر تولید می‌کند: ۱- نیروی دافعه بین پروتون‌های هسته ۲- اختلاف جرم بین پروتون و نوترون. برای بدست آوردن فرمالیزم ایزواسپین در یک سیستم سه نوکلئونی راه‌های

مختلفی وجود دارد. ساده ترین راه، تعیین تابع چگالی بار بر حسب ایزواسپین و سپس محاسبه تاثیر آن روی انرژی سیستم است [1,12]. در این حالت تابع چگالی را به صورت تابع فرمی در نظر می گیریم. شکل این تابع به صورت زیر است:



شکل ۴-۸: نمودار تغییرات چگالی هسته ای بر حسب فاصله از مرکز هسته

تغییرات چگالی هسته ای به صورت تابع زیر است:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right) \right]^{-1} \quad (۴-۸۳)$$

انتگرال چگالی روی تمام فضا باید با بار کل برابر باشد بنابراین داریم:

$$\int_0^{\infty} \rho \, dv = \sum_{i=1}^A q_i = e \left(I_3 + \frac{1}{2} A \right) \quad ; \quad A=3 \quad (۴-۸۴)$$

$$\int_0^{\infty} 4\pi\rho_0 \left[1 + \exp\left(\frac{r-1.8}{0.52}\right) \right]^{-1} r^2 dr = 39.7236 \quad (۴-۸۵)$$

مقدار I_3 برای ${}^3\text{H}$ برابر $-\frac{1}{2}$ و برای ${}^3\text{He}$ برابر $\frac{1}{2}$ است. با استفاده از رابطه (۴-۸۴) و (۴-۸۵) و با

انتگرال گیری به روش عددی، انرژی الکترواستاتیکی به صورت زیر بدست می آید :

$$\rho_0({}^3\text{He}) = 7.1647 \times 10^{-21} \text{C} \quad \Delta E_c = 860 \text{KeV} \quad (۴-۸۶)$$

$$\rho_0({}^3\text{H}) = 3.5823 \times 10^{-21} \text{C} \quad \Delta E_c = 280 \text{KeV} \quad (۴-۸۷)$$

بنابراین مقدار ΔE ناشی از فرمالیزم ایزواسپین به صورت زیر بدست می آید :

$$\Delta E_I(^3\text{H}) = 280\text{KeV} \quad (88-4)$$

$$\Delta E_I(^3\text{He}) = 860\text{KeV} \quad (89-4)$$

نتیجه بدست آمده در اینجا و در سایر مراجع در جدول ۴-۱ آمده است. اختلاف انرژی بستگی هسته

های آینه‌ای ^3H و ^3He علاوه بر ایزواسپین ناشی از اثرات دیگری نیز هست یعنی :

$$\Delta E_B = \Delta E_I + \text{سایر اثرات} \quad (90-4)$$

در جدول ۴-۲ تاثیر سایر برهمکنش‌هایی که در اینجا در نظر گرفته نشده است، آمده است.

جدول ۴-۱: مقدار انرژی بستگی ^3H و ^3He برحسب MeV در مدل‌های مختلف [30,31]

پتانسیل مرتبط هسته ای	^3H	^3He
AV18	۷.۶۲۴	۶.۹۲۵
N3LO-Idaho	۷.۶۱۸	۶.۹۱۷
AV18+URIX	۸.۴۷۹	۷.۷۵۰
N3LO+Idaho+N2LOL	۸.۴۷۴	۷.۷۴۲
مدل ما	۷.۶۶۸	۷.۰۸۸
مقدار تجربی	۸.۴۸۲	۷.۷۱۸

جدول ۴-۲: مقدار اختلاف انرژی بستگی ^3H و ^3He برحسب جملات برهمکنشی مختلف برگرفته شده از مرجع [30]

جمله برهمکنشی	$B(^3\text{H}) - B(^3\text{He})$
هسته ای CSB	۶۵ KeV
کولنی کامل*	۶۴۸ KeV
گشتاور مغناطیسی	۱۷ KeV
نیروی مدار-مدار	۷ KeV
اختلاف جرم نسبیتی	۱۴ KeV
جمع	۷۵۱ KeV
مقدار تجربی	KeV۷۶۴

همانطور که مشاهده می شود مقدار مناسبی برای انرژی بستگی سیستم بدست آمده است. گرچه بعضی از مدل های جدول ۴-۱ انرژی مناسبتری را به دست می دهند ولی مزیت این مدل نسبت به مدل های دیگر اینست که به راحتی می توان این معادلات را برای هسته های بیشتر از ۳ نوکلئون نوشت و ویژگی های این هسته ها را محاسبه نمود.

نتیجه گیری:

در این پایان نامه ما با استفاده از اصول مکانیک کوانتومی ابرتقارنی و با استفاده از تقریب Pekeris ، تابع موج حالت پایه و حالت های برانگیخته هسته ای را توسط حل معادله شعاعی شرودینگر را در حضور پتانسیل Woods-Saxon و در حالت $l \neq 0$ بدست آوردیم. همانطور که مشاهده شد تابع موج، شرایط مرزی را برآورده می کند. توابع موج مراتب بالاتر به راحتی از اصول ناوردایی شکل بدست آمدند و سازگار با حالت های برانگیخته هسته ای هستند. در قسمت دوم ما با استفاده از مختصات ژاکوبی و توابع فوق کروی، معادله شرودینگر را برای یک سیستم سه نوکلئونی در حالت بدون بار حل نموده و انرژی و تابع موج حالت پایه را بدست آوردیم سپس با محاسبه تاثیر ایزواسپین، شکافتگی جرم ناشی از برهمکنش الکترومغناطیسی را محاسبه نموده و با مقدار تجربی مقایسه کردیم. مزیت این مدل نسبت به مدل های دیگر اینست که به راحتی می توان این معادلات را برای هسته های بیشتر از ۳ نوکلئون نوشت و ویژگی های این هسته ها را محاسبه نمود. همانطور که مشاهده شد تابع موج، شرایط مرزی را برآورده می کند و نتایج بدست آمده توافق خوبی با تجربه دارند. لازم به یاد آوری است که نتایج بدست آمده نه تنها در فیزیک تئوری بلکه در فیزیک تجربی نیز مورد توجه هستند زیرا نتایج، دقیق، عمومی و در مطالعه سایر جنبه های فیزیک هسته ای از جمله پراکندگی های هسته ای بسیار پر کاربرد هستند.

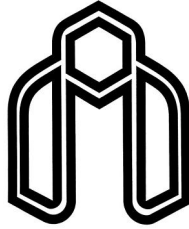
مراجع:

- [1] A.Frank, J. Jolie, P. Van Isacker; (2009); "Symmetries in Atomic nuclei, from Isospin to Supersymmetry", Vol. 230 Springer.
- [2] M. Hamermesh, (Addison-Wesley, Reading MA 1962), "Group Theory and Its Application to Physical Problems", VII, 43, 44
- [3] H.J. Lipkin, (North-Holland, Amsterdam 1966), "Lie Groups for Pedestrians" VII
- [4] A. Frank, P. Van Isacker, (Wiley-Interscience, New York 1994), "Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure Physics" VII, 1, 12
- [5] کنت س کرین؛ "آشنایی با فیزیک هسته ای"؛ جلد ۱ و ۲، انتشارات نشر دانشگاهی، چاپ پنجم (۱۳۸۶)
- [6] H. F. Felder; E.M. Henley ;(1977) "Subatomic Physics"; prentice Hall. with Persian translation.
- [7] J.L.Basdevant, J.Rich, M.Spiro.p.cm; (2005) "Fundamentals in Nuclear Physics, From Nuclear Structure to Cosmology"; Springer, USA.
- [8] E. J. BURGE ;(1988) "Atomic Nuclei and their Particles"; Second edition, Clarendon press, Oxford Physics.
- [9] M. G. Mayer, J. Hans, D. Jensen; "Elementary theory of nuclear shell structure";(1955) john wiley and sons; London.
- [10] W.Heisenberg:Z.Phys. 77, 1 (1932) 8; D.M. Brink,(1934) "Nuclear Forces"; Translation of Heisenberg's original paper
- [11] E.P. Wigner; (1937)Phys. Rev. 51, 106 9, 41, 109
- [12] D.H.Wilkinson;" Isospin in nuclear physics" Vol.1(1968)
- [13] Fred Cooper, Avinash Khar, Uday Sukhatme ; (2001) ; "Supersymmetry in Quantum Mechanics"; World Scientific Publishing
- [۱۴] توکلی، م؛ "ابرتقارن در مکانیک کوانتومی"؛(۱۳۸۶)؛ پایان نامه ارشد
- [15] Jeorg Junker;(1996) "Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics"; Springer, Germany
- [16] P. Bin'etruy;(2006) "Supersymmetry, Theory,Experiment and Cosmology"; Oxford Graduate Texts
- [17] K.Heyde; (1999) "Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics"; An Introductory Approach Graduate Student Series in Physics; Second edition; IOP
- [18] R.D. Woods, D.S. Saxon, (1954) Phys.Rev.95
- [19] V.H. Badalov, H. I. Ahmadov and A.I.Ahmadov; "Analytical solution of the shrodinger equation with woods saxon potential for albitary l state"; (2009) Int Modern Phys E Vol.18

- [20] C.Berkdemir, A.Berkdemir, R.Sever; “Deformed woods-saxon potential in the frame of supersymmetric quantum mechanics for any l state”, (2005) *nucl-th/0502044v2*
- [21] F.Cooper, J. N.Ginocchio; “Relationship between supersymmetry and solvable potentials”; (1987) *physical Rev D* **Vol.36**
- [22] D.A. morales; “Supersymmetric improvement of the Pekeris approximation for the rotating Morse potential”; (2004) *Chemical Physics Letters* **394**
- [23] J. Sadeghi, M. R. Pahlavani,(2004) “The hierarchy of hamiltonians for spherical Woods-Saxon potential” *Af. J. Mth. Phy*, **Vol.1** No 2
- [24] C.L Pekeris, (1934) *Phys Rev.***45**
- [25] Practical Quantum mechanics, (2000) **Vol.1**(Springer, Berlin)
- [26] W. Greiner; et al (Frankfort,1996) “Nuclear Models” 1st edition **Vol.1**
- [27] S.M.Ikhdaïr, R.Sever; (2010) “Approximate analytical solutions of the generalized Woods-Saxon potentials including the spin-orbit coupling term and spin symmetry”; *Cent Eur J Phys* **8(4)**
- [28] C.Tezcan, R.Sever; (2009) “A general approach for the exact solution of schrodinger equation”; *Int J Theor Phys* **48**
- [29] A.A. Rajabi; (2005) “Exact Analytical solution of the shrodinger equation for an N -identical body-force system”;*Few-body systems* **Vol.37**
- [30] T.K.Das, H.T.Coelho; (1982) “Trinucleon columb energy with inclusion of a tree nucleons force”; *physical review c*,**Vol.26**
- [31] A. Kievsky; (2003) “Selected Topics in Correlated Hyper spherical Harmonics” ; *Few body systems* **Vol.35**
- [33] S.Gosta, Nilson, Ingemar Ragnarsson; (1995) “Shape And Shells In Nuclear Structure”; **Vol.1**,1st published
- [34] W.Greiner; (Frankfort,1994)” *Quantum mechanics*” 3rd edition**Vol.1**
- [35] S. M. Ikhdaïr, R. Sever; (2010) “Any l -state solution of the Woods-saxon potential in albitary dimention”; *math-ph***5083v1**
- [36] K.Heyde; (1999) “Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics”; An Introductory Approach Graduate Student Series in Physics; Second edition; IOP
- [37]A.Sitenko, V.Tartakovskii; (Kluwer,1997) “Nuclear structure and nuclear intraction”;**Vol.84**
- [38] F. Iachello; (Springer-Verlag, Berlin 2006) “Lie Algebras and Applications” ; **VII**, 3, 4
- [39] K. K. Fang, E. L. Tomusiak; “Three model of Li using hyperspherical Harmonics”, (1977) *Physical Rev C*, **Vol.16**, no

Abstract

One of the main goals of research in physics is to find simple rules that give rise to a deeper understanding and unification of diverse phenomena. A less ambitious goal is to construct models which, in a more or less restricted range, permit an understanding of the physical processes involved and lead to a systematic analysis of the available experimental data while providing insights into the complex systems being studied. As we know, importance of these models is more than other aspects of physics because the fact that nuclei contain many particles but not nearly enough to treat them statistically, explains why they can be alternatively described both as a collection of individual nucleons and as a single object akin to a charged, dense liquid drop. Also because of the nature of the strong force among nucleons, tensor forces and coupling equation, entire solving of nuclear equation is very difficult. In this thesis, by introducing nuclear models, we solve relative equations by using supersymmetry quantum mechanics and we derive energy spectrum, eigenvalues and eigenfunctions. In next section, by using the hyperspherical function and uncharged nucleons, we solve the Schrödinger equation of three nucleon system and then we apply Isospin formalism to energy levels and calculate mass cleavage.



دانشگاه صنعتی شاهرود

Shahrood University of Technology
Faculty Physics

**An investigation about Isospin formalism intract by an
A nucleon**

Hamed feizi

Supervisor:
Pr Ali Akbar Rajabi

2011 September