

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته ای

انرژی بستگی هسته‌ای با A نوکلئون به کمک پتانسیل‌های برهم‌کنش فوق

کروی

دانشجو: سمیه حسن آبادی

استاد راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۰



تقدیم بہ

خانوادہ عزیزم و

اساتید بزرگوارم در دانشگاہ صنعتی شہرود

## تقدیر و تشکر

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف بی‌کرانش اینجانب را نیز دربرگرفت تا در راه او قدمی هر چند کوچک بردارم و به این سبب توفیقات خود در زمینه کسب و درک علوم لایتناهی را مدیون نظر لطف او می‌دانم. بر خود لازم می‌دانم به رسم ادب و احترام از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای پروفیسور علی اکبر رجیبی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان و صبر و حوصله فراوان، که نقش مهمی در به ثمر رسیدن این کار داشته‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر حسین موحدیان و جناب آقای دکتر حسین توکلی عنبران که علاوه بر اینکه اینجانب افتخار شاگردی این دو بزرگوار را داشته‌ام، زحمت مطالعه، نقد و داوری کار را بر عهده داشتند نهایت تشکر و قدردانی را دارم. همچنین زحمات تمامی اعضای خانواده‌ام، به خصوص پدر، مادر و برادر عزیزم جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی، اساتید بزرگوارم در دوران کارشناسی و کارشناسی ارشد، کلیه معلمان و دوستان دوران تحصیل را ارج نهاده و کمال تشکر را دارم. همچنین دوستان و اساتید بزرگوارم، آقای صابر زرین کمر، آقای مهندس حامد رحیمف، آقای مصطفی غفوریان، آقای مهندس علیزاده و خانم‌ها خوش‌آبادی، عودی و عزیززی که همواره مایه دلگرمی اینجانب در این مدت بوده و متحمل زحمات زیادی شدند نهایت سپاس‌گذاری را دارم.

## تعهدنامه

اینجانب سمیه حسن آبادی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک-هسته‌ای دانشکده

فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه: انرژی بستگی هسته‌ای با A نوکلئون به کمک

پتانسیل‌های برهم‌کنش فوق کروی تحت راهنمایی‌های پروفسور علی اکبر رجبی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

## تاریخ

## امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده :

پیشنهادات زیادی برای مطالعه ساختار هسته از جمله مدل‌های پوسته‌ای، قطره مایعی و کوارک-مانند ارائه شده‌اند که هر کدام دارای مزایا و معایب خود هستند. در این پایان نامه بر بنیان مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی کار می‌کنیم. برای حصول نتایج دقیق‌تر، دافعه میان پروتون‌ها را در نظر می‌گیریم و پتانسیل وود-ساکسون اصلاح شده را به کار می‌بریم. پس از به دست آوردن طیف انرژی و پرکردن ترازها با در نظر داشتن اصل طردپاولی، توانسته‌ایم ضرایب پتانسیل مناسب را با در نظر گرفتن ملاحظات پدیدارشناختی بدست آورده و از این طریق انرژی بستگی هسته‌های مختلف را گزارش کرده‌ایم. بعلاوه، ویژه توابع بر حسب چند جمله‌ای‌های ژاکوبی گزارش شده‌اند و مقادیر انتظاری با استفاده از قضیه هلمن-فاینمن تعیین شده‌اند.

در فصل چهارم، انرژی بستگی دوترون تحت پتانسیل یوکاوا محاسبه و با نتایج تجربی موجود مقایسه شده است. در فصل آخر، با در ذهن داشتن کاربردهای محتمل فرمول‌بندی جرم وابسته به مکان و پیامدهای مطلوب معادلات موج نسبیتی، انرژی بستگی برخی مزون‌های اسپین صفر و یک تحت پتانسیل‌های پر کاربرد هولسن و کراتزر محاسبه شده‌اند.

کلمات کلیدی: انرژی بستگی، برهم‌کنش فوق‌کروی، مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی، معادله موج

نسبیتی و مزون

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

محاسبه انرژی بستگی مزون‌ها با استفاده از حل معادله کلاین‌گوردن با پتانسیل هولسن و جرم وابسته به مکان (نوزدهمین کنفرانس سالیانه فیزیک، ارومیه، شهریور ۱۳۹۰).



## فهرست مطالب

۱	فصل اول: مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی
۱-۱-۱	نیروهای بنیادی
۱-۱-۱-۱	نیروی گرانشی
۱-۱-۱-۲	نیروی الکترومغناطیسی
۱-۱-۱-۳	نیروی هسته‌ای ضعیف
۱-۱-۱-۴	نیروی هسته‌ای قوی
۲-۱	ذرات بنیادی
۱-۲-۱	هادرون‌ها
۲-۲-۱	باریون‌ها
۳-۲-۱	مزون‌ها
۴-۲-۱	کوارک‌ها
۵-۲-۱	گلوئون‌ها
۶-۲-۱	لپتون‌ها
۷-۲-۱	فوتون
۸-۲-۱	بوزون‌ها
۱۳	فصل دوم: مطالعه هسته و ویژگی‌های آن
۱-۲	ساختار هسته
۲-۲	ویژگی‌های پروتون و نوترون
۳-۲	پراکندگی الکترون از توزیع بار هسته
۴-۲	مدل‌های هسته‌ای
۱-۴-۲	مدل قطره مایع
۲-۴-۲	مدل پوسته‌ای
۵-۲	انرژی بستگی هسته
۱-۵-۲	انرژی جدایی
۲-۵-۲	انرژی بستگی متوسط بر نوکلئون
۲۶	فصل سوم: بررسی حالت‌های غیر نسبیتی با استفاده از پتانسیل‌های مناسب
۱-۳	هماهنگ‌های فوق کروی
۲-۳	حل معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل هولسن
۳-۳	بررسی انرژی بستگی هسته با استفاده از پتانسیل وود-ساکسون اصلاح شده

فصل چهارم: محاسبه انرژی بستگی دوترون .....	۴۱
۱-۴- خواص نیروی بین نوکلئون ها .....	۴۲
۲-۴- دوترون .....	۴۲
۳-۴- پتانسیل یوکاوا .....	۴۳
۴-۴- محاسبه انرژی بستگی دوترون .....	۴۵
فصل پنجم: بررسی مزون های با اسپین صفر و یک .....	۵۰
۱-۵- مزون .....	۵۱
۲-۵- محاسبه انرژی بستگی مزون های با اسپین صفر .....	۵۳
۳-۵- محاسبه انرژی بستگی مزون های با اسپین یک .....	۵۷
نتیجه گیری .....	۶۱
پیوست الف: .....	۶۲
مراجع: .....	۶۶

## فهرست اشکال

- شکل ۱-۱- شماتیکی از ساختار هادرون ها ..... ۵
- شکل ۲-۱- شماتیکی از ساختار مزون ..... ۶
- شکل ۳-۱- شماتیکی از گلوئون ها ..... ۷
- شکل ۴-۱- پراکندگی کامپتون ..... ۱۰
- شکل ۵-۱- پدیده فوتوالکتریک ..... ۱۱
- شکل ۶-۱- خانواده بوزون ها و فرمیون ها ..... ۱۲
- شکل ۱-۲- سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کشسان الکترون از طلا ..... ۱۶
- شکل ۲-۲- چگالی بار الکتریکی  $^{208}_{82}Pb$  ..... ۱۷
- شکل ۳-۲- چگالی بار الکتریکی سه هسته سبک، متوسط و سنگین ..... ۱۸
- شکل ۴-۲- انرژی بستگی متوسط بر حسب عدد جرمی ..... ۲۳
- شکل ۵-۲- جدایی نوترون بر حسب عدد نوترونی ..... ۲۵
- شکل ۶-۲- پتانسیل های کولنی ، وود ساکسون و وود ساکسون اصلاح شده ..... ۴۰
- شکل ۱-۴- تابع موج دوترون در حالت پایه ..... ۴۹
- شکل ۱-۵- توابع موج به ازای  $V_0 = 0.2, J = 0, 1, 2$  ..... ۶۰

## فهرست جداول

- جدول ۱-۱- نیروهای بنیادی ..... ۴
- جدول ۲-۱- ویژگی های باریون های با اسپین  $(1/2)$  ..... ۵
- جدول ۳-۱- لپتون ها ..... ۸
- جدول ۱-۳- مقادیر محاسبه شده  $k$  برای هسته های مختلف ..... ۳۵
- جدول ۲-۳- مقادیر محاسبه شده انرژی بستگی به ازای  $k_{ave} = 1.24035$  ..... ۳۹
- جدول ۱-۴- انرژی بستگی دوترون ..... ۴۸
- جدول ۱-۵- ویژگی های مزون های با اسپین صفر ..... ۵۲
- جدول ۲-۵- ویژگی های مزون های با اسپین یک ..... ۵۳
- جدول ۳-۵- انرژی بستگی مزون پای ..... ۵۶
- جدول ۴-۵- ویژه مقادیر محاسبه شده به ازای اعداد کوانتومی و  $V_0$  های متفاوت ..... ۵۹



## فصل اول

# مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی

## ۱-۱- نیروهای بنیادی

فیزیک هسته‌ای مطالعه ساختار هسته و برهم‌کنش بین اجزای تشکیل‌دهنده آن است. مطالعه فیزیک هسته‌ای را با بررسی برهم‌کنش‌های بنیادی موجود در طبیعت آغاز می‌کنیم. منشأ تمام نیروهای موجود در طبیعت چهار نیروی بنیادی است که عبارتند از نیروهای: گرانشی، الکترومغناطیسی، هسته‌ای ضعیف و هسته‌ای قوی.

### ۱-۱-۱- نیروی گرانشی

این نیرو از شناخته شده‌ترین نیروها در حوزه تجربه بشر بوده و تنها نیروی بلند بردی است که بین مواد خنثی (از نظر الکتریکی) عمل می‌کند. منشأ این نیرو جرم است. نیروی گرانشی به طور کلاسیکی با قانون گرانش عمومی نیوتن توصیف می‌شود. بر طبق

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1-1)$$

که در آن  $G$  (ثابت جهانی گرانش) مقیاسی از اندازه و قدرت نیروی گرانش را به دست می‌دهد که در مقایسه با سایر نیروها فوق‌العاده ضعیف است.

### ۱-۱-۲- نیروی الکترومغناطیسی

منشأ این نیرو بارهای الکتریکی مثبت و منفی است، در حالتی که دو بار در حال سکون باشند نیروی الکتروستاتیکی بین آنها توسط قانون کولن داده به صورت معادله (۲-۱) داده می‌شود:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2-1)$$

در مورد ذرات باردار وقتی در حال حرکت باشند، نیروی دیگری غیر از نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که

نیروی مغناطیسی نام دارد. بنابراین به ذره در حال حرکت یک نیروی الکترومغناطیسی وارد می‌شود که کمیت برداری است و در رابطه با تبادل فوتون‌ها است.

### ۱-۱-۳- نیروی هسته‌ای ضعیف

یکی از چهار نیروی پایه در فیزیک است که بین کوارک‌ها و لپتون‌ها اتفاق می‌افتد، باعث تبدیل و تبادل انرژی و تکانه بین آنها می‌شود و ۱۰ تا ۱۳ بار از نیروی هسته‌ای قوی ضعیف‌تر است. همانند سایر نیروهای پایه در فیزیک، نیروی هسته‌ای ضعیف نیز توسط تبادل بوزون‌ها صورت می‌گیرد، و با تبادل  $w^\pm, z^0$  مشخص می‌شود. این نیرو در فواصل میکروسکوپی عمل کرده و هنگامی بروز می‌کند که ذرات در یک نقطه با یکدیگر تلاقی می‌کنند. و به دلیل ماهیت این نیرو توصیف آن با فیزیک کلاسیک امکان‌پذیر نیست، بلکه باید آن را با فیزیک کوانتومی توصیف کرد.

### ۱-۱-۴- نیروی هسته‌ای قوی

نیروی هسته‌ای قوی یکی از چهار نیروی پایه در فیزیک است که نقش آن پایداری و با هم نگه داشتن، کوارک‌ها و ذرات تشکیل شده از آنها (مانند نوترون‌ها و پروتون‌ها) در هسته اتم‌ها است. این نیرو به همین خاطر از نیروی الکترومغناطیسی بسیار قوی‌تر است و می‌تواند هسته اتم‌ها را با وجود نیروی دافعه بین پروتون‌های آن (با بار الکتریکی مثبت) پایدار نگه دارد. همانند نیروی الکترومغناطیسی و نیروی هسته‌ای ضعیف این نیرو نیز توسط تبادل بوزون‌ها انجام می‌گیرد (یا توجیه می‌شود) که در اینجا ذره تبادل شده گلوئون نام دارد. گلوئون‌ها از هشت نوع مختلف هستند که دارای بار رنگی می‌باشند و آن را بین کوارک‌ها انتقال می‌دهند. تفاوت اصلی بین برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی و برهم‌کنش هسته‌ای قوی برد نامحدود نیروی الکترومغناطیسی در مقایسه با برد کوتاه حدود یک فرمی نیروی هسته‌ای است، همانطور که در جدول ۱-۱ نشان داده شده است [۲،۱].

جدول ۱-۱- نیروهای بنیادی [۱]

نیروهای بنیادی	عمل کننده بر	برد
گراشی	همه ذرات	$\infty$
الکترومغناطیسی	همه ذرات باردار	$\infty$
هسته‌ای ضعیف	لپتون‌ها و هادرون‌ها	$< 10^{-18} (m)$
هسته‌ای قوی	هادرون‌ها	$\approx 10^{-15} (m)$

## ۱-۲- ذرات بنیادی

همانطور که می‌دانیم ماده از مولکول و مولکول‌ها از اتم‌ها تشکیل شده‌اند، اتم‌ها از هسته و الکترون‌ها و هسته نیز از پروتون‌ها و نوترون‌ها تشکیل شده‌اند. با پیشرفت‌های جدید در عرصه علم به ویژه کوانتوم و تکنولوژی ساخت شتاب دهنده‌های عظیم‌تر بینش ما در مورد ساختار ماده تغییر کرده است. اکنون ثابت شده است که دیگر پروتون‌ها و نوترون‌ها ذرات تجزیه‌پذیر هستند و خود از کوارک‌ها تشکیل شده‌اند اما ذرات بنیادی دیگر کدام‌ها هستند؟ چند نوع کوارک داریم؟ انتقال نیرو توسط کدام ذرات صورت می‌گیرد؟

### ۱-۲-۱- هادرون‌ها

هادرون‌ها ذرات زیراتمی هستند که از فرمیون‌هایی چون کوارک و آنتی کوارک و بوزون‌هایی چون گلوئون تشکیل شده‌اند. این ذرات نیروی قوی هسته‌ای اعمال می‌کنند. هادرون‌ها مانند دیگر ذرات دارای عدد



کوانتومی هستند. این ذرات ممکن است در دمای بسیار پایین خود به خود از بین بروند، دو زیرمجموعه از هادرون‌ها وجود دارد که عبارتند از باریون‌ها و مزون‌ها [۳].



شکل ۱-۱- شماتیکی از ساختار هادرون‌ها [۲]

### ۱-۲-۲- باریون‌ها

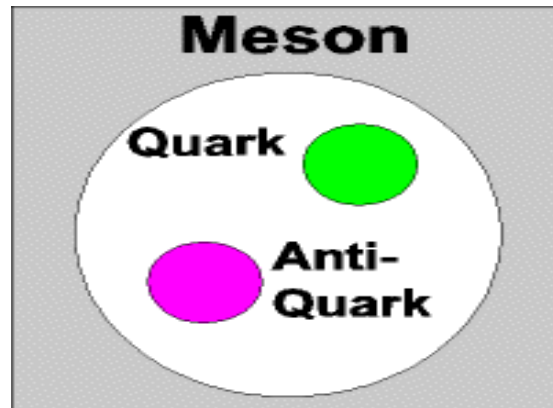
باریون‌ها ذراتی هستند که از کوارک تشکیل شده‌اند. برای مثال پروتون از دو کوارک بالا و یک کوارک پایین تشکیل شده است و یا نوترون از دو کوارک پایین و یک کوارک بالا تشکیل شده است. باریون‌ها اغلب سنگین با برهم کنش قوی و اسپین نیمه صحیح هستند. سبک‌ترین اعضای آن پروتون‌ها هستند [۳]. تعدادی از باریون‌ها طبق مدل استاندارد به صورت جدول ۱-۲- هستند:

جدول ۱-۲- ویژگی‌های باریون‌ها با اسپین  $(\frac{1}{2})$  [۲]

باریون	توزیع کوارکی	بار الکتریکی	جرم $(MeV/c^2)$
$p$	$uud$	+۱	۹۳۸/۲۸۰
$n$	$udd$	۰	۹۳۹/۵۷۳
$\Lambda$	$uds$	۰	۱۱۱۵/۶
$\Sigma^+$	$uus$	+۱	۱۱۸۹/۴
$\Sigma^0$	$uds$	۰	۱۱۹۲/۵
$\Sigma^-$	$dds$	-۱	۱۱۹۷/۳
$\Xi^0$	$uss$	۰	۱۳۱۴/۹
$\Xi^-$	$dss$	-۱	۱۳۲۱/۳

## ۱-۲-۳- مزون‌ها

مزون‌ها ذراتی با برهم‌کنش‌های قوی و اسپین صحیح هستند و با نوکلئون‌ها از طریق نیروی قوی برهم‌کنش می‌کنند. مزون‌ها متشکل از یک کوارک و یک پاد کوارک هستند. مزون‌های پای ( $\pi$ ) سبک‌ترین اعضای خانواده مزون‌ها هستند. تبادل مزون‌های پای از یک نوکلئون به نوکلئون دیگر عامل عمده پیوند هسته‌ای است. جرم مزون پای تقریباً  $\frac{1}{7}$  جرم پروتون می‌باشد. مزون‌های پای به صورت مثبت، منفی یا خنثی وجود دارند. این ذرات نیز به نوبه خود پاد ذره هم دارند. به عنوان مثال پاد ذره مزون پای مثبت، ذره مزون پای منفی است. شبیه فوتون مزون پای خنثی با پاد ذره خود یکسان است [۳].



شکل ۱-۲-۱- شماتیکی از ساختار مزون [۲]

## ۱-۲-۴- کوارک‌ها

دست کم شش نوع کوارک وجود دارد که هر کدام آنها حاصل عدد کوانتومی جدید یعنی طعم هادرونی است و به صورت زیر تقسیم بندی می‌شوند: [۳]

• کوارک b

• کوارک c

• کوارک d

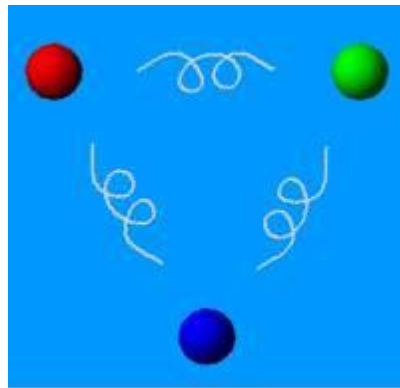
• کوارک s

• کوارک t

• کوارک u

### ۱-۲-۵- گلوئون‌ها

گلوئون‌ها جرم در حال سکونشان مساوی صفر است و اسپینی مساوی یک دارند. گلوئون‌ها درون هادرون-ها هستند و در حالت آزاد مشاهده نشده‌اند.



شکل ۱-۳-- شماتیکی از گلوئون‌ها [۲]

## ۱-۲-۶- لپتون‌ها

لپتون‌ها ذرات بنیادی هستند و برهم‌کنش قوی هیچ تاثیری بر آنها ندارد. لپتون‌ها به سه زوج به صورت  $(\tau, \nu_\tau), (\mu, \nu_\mu), (e, \nu_e)$  و البته پاد ذره‌هایشان به صورتی که در جدول ۱-۳ نشان داده شده است تقسیم بندی می‌شوند. لپتون‌ها دارای اسپین نیمه صحیح هستند [۳].

جدول ۱-۳- لپتون‌ها [۲]

لپتون‌ها		
میون ( $\mu$ )	میون ( $\mu$ )	الکترون ( $e$ )
نوترینوی میون ( $\nu_\mu$ )	نوترینوی میون ( $\nu_\mu$ )	نوترینوی الکترون ( $\nu_e$ )

## ۱-۲-۷- فوتون

از برخی جهات فوتون ذره‌ای بسیار نوین است. پلانک<sup>۱</sup> در سال ۱۹۰۰ نخستین گام را در کشف آن برداشت. او می‌خواست دلیل به اصطلاح طیف جسم سیاه برای امواج الکترومغناطیسی که از یک جسم داغ منتشر می‌شود را توضیح دهد. مکانیک آماری که در تبیین سایر فرایندهای حرارتی بسیار موفق بود، هنگامی که درباره میدان الکترومغناطیسی به کار می‌رفت نتایج چندان محسوسی به بار نمی‌آورد. به ویژه به فاجعه ماورابنفش<sup>۲</sup> منجر شد که پیش‌بینی می‌کرد توان کل تشعشع یافته بی‌نهایت است. پلانک متوجه شد که اگر فرض شود تابش الکترومغناطیسی کوانتیده باشد و با بسته‌های کوچک انرژی مطابق رابطه (۱-۳) انجام شود می‌توان از این فاجعه گریخت.

<sup>1</sup> Max Plank

<sup>2</sup> Ultraviolet Catastrophe

$$E = h\nu \quad (3-1)$$

که  $\nu$  فرکانس تابش و  $h$  ثابت پلانک است. امروزه مقداری که برای ثابت پلانک شناخته می‌شود، عبارت است از

$$h = 6.62 \times 10^{-27} \text{ (erg.s)}$$

پلانک ادعا نمی‌کرد که می‌داند چرا تابش کوانتیده است ولی گمان می‌کرد که علت آن نوع تابش می‌باشد. بنا به دلایلی سطح داغ فقط نور را به صورت بسته‌های کوچک منتشر می‌کند. انیشتین<sup>۱</sup> در سال ۱۹۰۵ نظری بنیادی‌تر داشت. او ایده پلانک و فرمول او را در مورد پدیده فوتوالکتریک به کار برد، هنگامی که اشعه الکترومغناطیسی به سطح یک فلز برخورد می‌کند، الکترون‌ها از آن خارج می‌شوند. وی معتقد بود که کوانتوم نور تابیده به یک الکترون در فلز برخورد می‌کند و انرژی را آزاد می‌کند و الکترون برانگیخته از سطح فلز خارج شده و انرژی  $\omega$  (که آن را تابع کار فلز می‌نامند- ثابتی است که بستگی به فلز دارد) را از دست می‌دهد، سپس الکترون با انرژی  $E \leq h\nu - \omega$  خارج می‌شود.

به دست آوردن فرمول بالا کار آسانی است اما نتایج بسیار زیادی دارد. بیشترین انرژی الکترون مستقل از شدت نور بوده و فقط بستگی به فرکانس آن دارد. به طور حتم اشعه‌های شدیدتر، الکترون‌های بیشتری از سطح فلز جدا می‌کند ولی انرژی آنها یکسان است. بر خلاف نظریه پلانک، نظریه انیشتین با استقبال روبه‌رو نشد و در طی ۲۰ سال بعد او یک تنه از کوانتوم نور دفاع می‌کرد. تا اینکه در سال ۱۹۱۶ میلیکان<sup>۲</sup> بررسی مفصل پدیده فوتوالکتریک<sup>۳</sup> را به پایان برد و گزارش داد که در هر مورد معادله فوتوالکتریک انیشتین به طور دقیق نتایج مشاهده شده را پیش‌بینی می‌کند، اما نظریه نیمه‌ذره‌ای که انیشتین با آن به نتیجه رسید، امروزه کاملاً غیرقابل پذیرش به نظر می‌رسد.

---

<sup>1</sup> Albert Einstein

<sup>2</sup> Robert Andrews Milikan

<sup>3</sup> Photoelectric effect

سرانجام آزمایش کامپتون<sup>۱</sup> در سال ۱۹۲۳ گره‌گشا شد. کامپتون متوجه شد که پراکندگی به وسیله یک ذره در حال سکون طبق معادله (۴-۱) طول موج را عوض می‌کند:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (۴-۱)$$

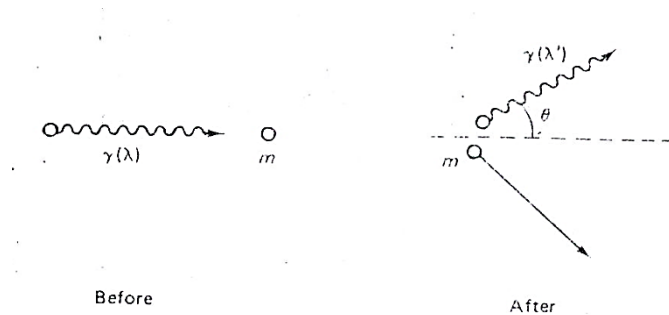
که  $\lambda$  طول موج نور تابیده،  $\lambda'$  طول موج پراکنده شده،  $\theta$  زاویه پراکندگی است و

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad (۵-۱)$$

طول موج کامپتون ذره هدف به جرم  $m$  است. این دقیقاً همان فرمولی است که نور را به

عنوان ذره‌ای با جرم در حال سکون صفر و انرژی برابر با مقدار داده شده توسط پلانک و با بکارگیری بقای

نسبیتی انرژی و تکانه در یک برخورد کشسان معمولی در نظر می‌گرفتیم حاصل می‌گردید (شکل ۴-۱).



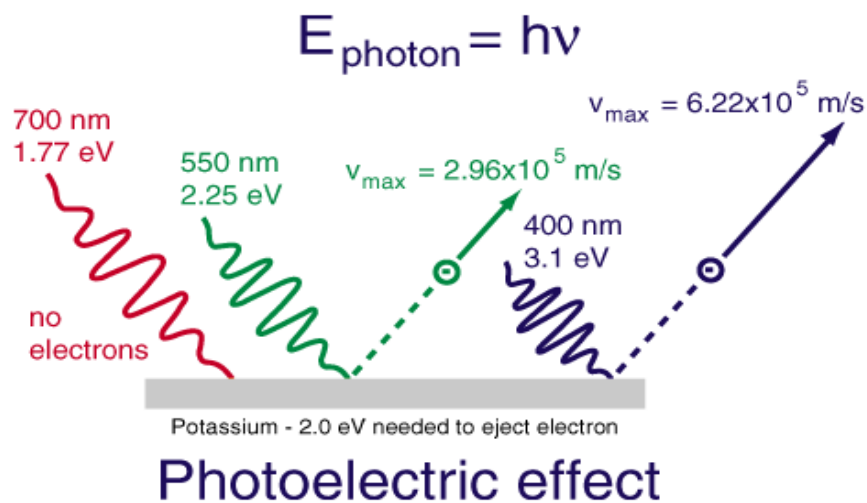
شکل ۴-۱- پراکندگی کامپتون [۴]

این یک مدرک تجربی و غیر قابل انکار مبنی بر رفتار ذره‌ای نور در مقیاس اتمی بود. نام این ذره را فوتون نامیدند. فوتون را با علامت  $\gamma$  (اشعه گاما) نشان می‌دهند. اگر چه فوتون در ابتدا با عدم استقبال فیزیکدانان روبرو شد ولی سرانجام جایگاه طبیعی خود را در نظریه میدان کوانتوم<sup>۲</sup> پیدا کرد و چشم انداز تازه‌ای برای برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی ارائه نمود. در الکترودینامیک کلاسیک، دافعه الکتریکی (مثلاً دو الکترون) را به میدان آنها نسبت می‌دهیم. هر الکترون در ایجاد میدان سهمیم است و هر یک به آن پاسخ می‌دهد، اما در نظریه کوانتومی میدان، میدان الکتریکی کوانتیده است به شکل فوتون‌ها و می‌توان

<sup>1</sup> Arthur Holly Compton

<sup>2</sup> Quantum Field Theory

برهم‌کنش را شامل جریانی از فوتون‌ها دانست که بین دو بار الکتریکی تردد می‌کنند، هر الکترون همواره آنها را منتشر و جذب می‌کند و همین مطلب در مورد هر نیروی غیر تماسی درست است. از مبادله ذرات به عنوان واسطه سخن می‌گویند. در الکترودینامیک واسطه فوتون است [۴].



شکل ۱-۵- پدیده فوتوالکتریک [۲]

## ۱-۲-۸- بوزون‌ها

در فیزیک ذرات برهم‌کنش‌های ضعیف هسته‌ای بوزون‌ها نقش مهمی ایفا می‌کنند اینها تنها اندرکشی هستند که می‌توانند شخصیت ذرات پایه را عوض کنند. و ضمن پیروی از قوانین بقای بارهای لپتون و باریونی موجب تبدیل‌های متقابل آنها شود [۳].

Fermions		Bosons	
Leptons and Quarks	Spin = $\frac{1}{2}$	Spin = 1*	Force Carrier Particles
Baryons (qqq)	Spin = $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$	Spin = 0, 1, 2...	Mesons (q $\bar{q}$ )

شکل ۱-۶-- خانواده بوزون ها و فرمیون ها [۲]

مطالعه فیزیک هسته‌ای نیازمند اطلاعاتی راجع به ذرات بنیادی است به همین منظور در این فصل به بررسی اجمالی این ذرات پرداخته شد.



## فصل دوم

# مطالعه هسته و انرژی بستگی آن

## ۲-۱- ساختار هسته

هسته مجموعه‌ای مقید از نوترون‌ها و پروتون‌ها است.  ${}^A_Z X$  نشان دهنده هسته اتم عنصر شیمیایی  $X$  است با  $A$  نوکلئون که تعداد  $Z$  تای آن پروتون و تعداد  $N = A - Z$  تای آن نوترون می‌باشند. به  $A = N + Z$  عدد جرمی هسته می‌گویند.

هسته‌هایی که تنها از لحاظ تعداد نوترون تفاوت دارند ایزوتوپ<sup>۱</sup> می‌گویند. به هسته‌هایی با  $A$  یکسان اما  $Z$  متفاوت ایزوبار<sup>۲</sup> می‌گویند.

## ۲-۲- ویژگی‌های پروتون و نوترون

نوکلئون‌ها همانند لپتون‌ها فرمیون‌اند و اسپین  $1/2$  دارند. جرم نوترون  $0.14\%$  درصد بیش از پروتون است.

$$m_n = 939.566 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$$

نوترون بار الکتریکی خالص ندارد. بار پروتون مخالف بار الکترون است، زیرا بار الکتریکی خالص اتم‌ها صفر است و پروتون‌ها سبب می‌شوند که بار الکتریکی الکترون‌ها کاملاً خنثی شوند.

بار الکتریکی پروتون در یک نقطه تمرکز نیافته است بلکه به طور متقارن حول مرکز پروتون توزیع شده است. با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی شعاع میانگین این توزیع بار تقریباً برابر  $R_p \approx 0.8 \text{ fm}$  است. همچنین توزیع بار گسترده‌ای برای نوترون یافت شده است، به طوریکه بار مثبت در ناحیه مرکزی با بار

---

<sup>1</sup> Isotope

<sup>2</sup> Isobar

منفی در فواصل دورتر خنثی می‌گردد. توزیع ماده نیز در نوکلئون‌ها به فاصله‌ای در حدود  $R_p$  گسترش می‌یابد. هم پروتون و هم نوترون دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی طبق معادله (۱-۲) هستند.

$$\begin{aligned}\mu_p &= 2.79285 \left( \frac{e\hbar}{2m_p} \right) \\ \mu_n &= -1.91304 \left( \frac{e\hbar}{2m_n} \right)\end{aligned}\quad (1-2)$$

روشن است که هیچ یک از گشتاورهای مغناطیسی به مقدار  $e\hbar/2m_p$  که از معادله ساده دیراک<sup>۱</sup> به دست می‌آید، مربوط نمی‌شوند. این موضوع اشاره‌ای صریح به این امر دارد که خود نوکلئون‌ها ذرات بنیادی نیستند [۵].

## ۲-۳- پراکندگی الکترون از توزیع بار هسته

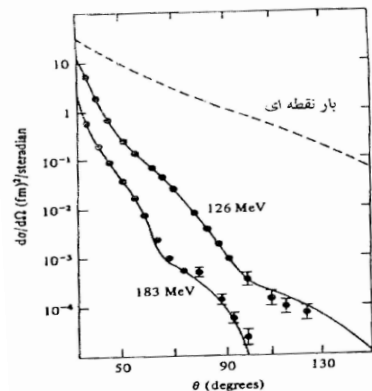
تحلیل مشهور رادرفورد<sup>۲</sup> درباره پراکندگی ذرات  $\alpha$  از ماده در سال ۱۹۱۱ روشن ساخت که اندازه هسته اتم در مقایسه با اندازه خود اتم کوچک است و توزیع الکترونی به فاصله‌ای در حدود آنگستروم ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) از هسته گسترش می‌یابد. این آزمایش و آزمایش‌های پس از آن نشان دادند که توزیع نوکلئون‌ها در محدوده چند فرمی ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ) محدود شده است. در دهه ۱۹۵۰ از آزمایش‌هایی که با استفاده از پراکندگی کشسان الکترون‌های پر انرژی به منظور کاویدن توزیع بار هسته‌ای انجام گرفت، اطلاعات دقیقی به دست آمد. استفاده از لپتون‌های باردار (الکترون‌ها یا میون‌ها) برای کاوش ماده هسته ای بسیار سودمند است، زیرا لپتون‌های باردار با نوکلئون‌ها عمدتاً از طریق نیروهای الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کنند. اگر قرار باشد از آزمایش‌های پراکندگی اطلاعاتی مفصلی درباره توزیع بار هسته به دست آوریم، روشن است که  $\lambda$  (طول موج دوبروی ذره فرودی) باید کمتر یا دست کم حدود فواصلی باشد که چگالی بار هسته در آن تغییر می‌کند. الکترونی با طول موج  $\lambda/2\pi \approx 1 \text{ fm}$  تکانه‌ای برابر با

<sup>1</sup> Paul Dirac

<sup>2</sup> Ernest Rutherford

می‌شود. در چنین انرژی  $P = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$  دارد و در نتیجه انرژی آن برابر  $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{\frac{1}{2}} \approx 200\text{MeV}$  می‌شود.

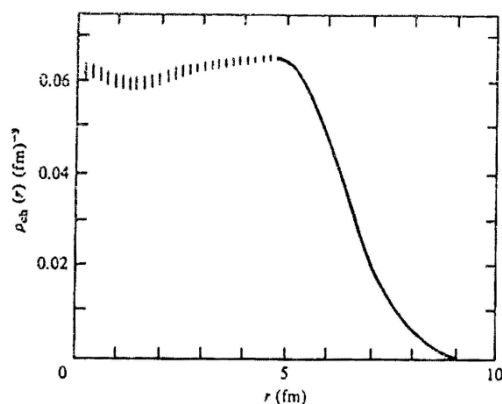
هایی، به جای استفاده از معادله شرودینگر<sup>۱</sup> برای توصیف الکترون، از معادله موج نسبیتی دیراک استفاده می‌شود. آزمایش‌های انجام شده سطح مقطع دیفرانسیلی  $\frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega}$  را در پراکندگی کشسان از هسته تحت زاویه  $\theta$  به دست می‌دهند. داده‌های آزمایشگاهی نمونه‌ای در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲- سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کشسان الکترون از طلا [۵]

چگالی بار هسته‌ای را با تابع چگالی  $e\rho_{ch}(\vec{r})$  معرفی خواهیم کرد. این تابع لزوماً تابعی متقارن کروی نیست. اما برای هسته‌هایی که متقارن کروی هستند، یا تقریباً این گونه‌اند می‌توان فرض کرد که چگالی بار تنها به  $r$  فاصله از مرکز هسته بستگی دارد. پس امکان آن وجود دارد که با استفاده از معادله موج دیراک برای الکترون  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  را با استفاده از  $\rho_{ch}(\vec{r})$  کاملاً تعیین کرد. مساله عکس این موضوع، یعنی یافتن  $\rho_{ch}(\vec{r})$  با استفاده از دانسته‌های مربوط به  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  مشکل‌تر است. در شکل (۲-۲) ایده مربوط به نتایج داده‌های پراکندگی وارون آمده است.

<sup>۱</sup> Ervin Schrodinger



شکل ۲-۲- چگالی بار الکتریکی  $^{208}_{82}Pb$  [۵]

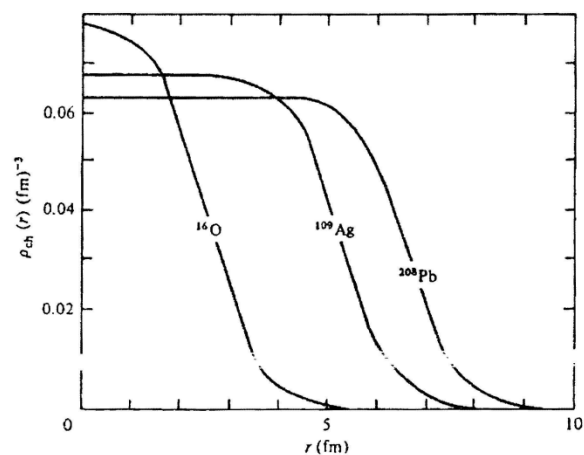
به طور معمول شکل قابل قبولی برای  $\rho_{ch}(\vec{r})$  در نظر گرفته می‌شود، به طوری که این شکل با عبارت ریاضی ساده، شامل چند پارامتر است. سازگارترین شکل مورد پذیرش طبق معادله (۲-۲) است.

$$\rho_{ch}(\vec{r}) = \frac{\rho_{ch}^0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (2-2)$$

که در آن  $a, R$  پارامترهایی هستند که باید تعیین شوند.  $\rho_{ch}^0$  نیز ثابت بهنجارش است، این ثابت به گونه‌ای انتخاب می‌شود که در شرط (۳-۲) صدق کند:

$$\int \rho_{ch}(\vec{r}) d^3\vec{r} = 4\pi \int_0^\infty \rho_{ch}(\vec{r}) r^2 dr \quad (3-2)$$

این عبارت فقط توزیع باری را توصیف می‌کند که بطور یکنواخت از مرکز هسته تا تا فاصله  $R$  گسترش یافته و سپس در ناحیه خوش تعریفی نزدیک سطح به ضخامت تقریبی  $a$ ، این توزیع بار به صفر می‌گراید. در شکل ۳-۲ توزیع‌های بار هسته‌ای حاصل از داده‌های تجربی پراکندگی را برای یک هسته سبک، یک هسته متوسط و یک هسته سنگین نشان می‌دهد [۵].



شکل ۲-۳- چگالی بار الکتریکی سه هسته سبک، متوسط و سنگین [۵]

## ۲-۴- مدل‌های هسته‌ای

مدل‌های هسته‌ای به منظور توصیف جنبه‌های متفاوت هسته‌ها، ارائه شده است که عبارتند از:

- ۱- مدل قطره مایع
- ۲- مدل پوسته‌ای
- ۳- مدل شبه کوارکی
- ۴- مدل خوشه هسته‌ای و ...

## ۲-۴-۱- مدل قطره مایع

در این بخش یک روش نیمه تجربی را که منجر به رابطه ساده‌ای برای انرژی بستگی هسته‌ها می‌شود را معرفی می‌کنیم. این مدل بر جاذبه قوی بین نوکلئونی تاکید می‌کند که در سال ۱۹۳۵ پیشنهاد شد و در آن چند فرض اساسی وجود دارد [۶]:

۱- نیروی هسته‌ای برای هر نوکلئون یکسان است، یعنی به نوع آن که پروتون باشد یا نوترون بستگی ندارد.

۲- پیوند بین نوکلئون‌ها به حالت اشباع می‌رسد.

۳- هسته از ماده غیر قابل تراکم تشکیل شده است.

فرمولی که در این روش برای محاسبه انرژی بستگی ارائه می‌شود به صورت معادله (۲-۴) است:

$$B_{tot}(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{z(z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta \quad (۲-۴)$$

که جملات در فرمول بالا به ترتیب از چپ به راست جمله حجمی، جمله سطحی، جمله کولنی، جمله عدم تقارن و جمله تصحیح انرژی زوجیت می‌باشند.

## ۲-۴-۲- مدل پوسته‌ای

نظریه اتمی با استفاده از مدل پوسته‌ای توانسته است به طور کاملاً روشن، جزئیات پیچیده ساختار اتم‌ها را توضیح دهد. به همین دلیل متخصصان فیزیک هسته‌ای به امید آنکه بتوانند به توصیف روشنی از خواص هسته‌ها دست یابند سعی کرده‌اند در بررسی ساختار هسته‌ای از نظریه مشابهی استفاده کنند. در مدل پوسته‌ای اتم‌ها، پوسته‌ها را با الکترون‌هایی که انرژی‌شان به ترتیب افزایش می‌یابد پر می‌کنند، و این آرایش الکترونی به گونه‌ای است که اصل طرد پائولی<sup>۱</sup> در آن رعایت می‌شود. بدین ترتیب، هر اتمی

---

<sup>1</sup> Pauli Exclusion Principle

متشکل است از یک ناحیه مرکزی خنثی که پوسته‌های پر دارد، و چند الکترون ظرفیت که در خارج از ناحیه خنثی قرار دارد.

در این مدل، فرض بر این است که عمدتاً همین الکترون‌های ظرفیت هستند که خواص اتم‌ها را تعیین می‌کنند. هنگامی که سعی می‌کنند تا این مدل را به قلمرو هسته‌ای گسترش دهند، از همان ابتدای کار با چند مانع روبه‌رو می‌شویم، در مورد اتم‌ها، پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تامین می‌کند، یعنی یک عامل خارجی زیر پوسته یا مدارها را سازمان می‌دهد.

در این حالت معادله شرودینگر را با همین پتانسیل همراه با تصحیحاتی در آن می‌توان حل کرد و انرژی لایه‌ها را محاسبه نموده، در صورتی که در مورد هسته‌ها هیچ پتانسیل یا عامل خارجی وجود ندارد. در مدل پوسته‌ای، حرکت هر نوکلئون منفرد را تحت تاثیر پتانسیل واحدی که نوکلئون‌های دیگر همه در تولید آن شرکت دارند، در نظر می‌گیریم. یکی دیگر از مشکلات توسعه مدل لایه‌ای به قلمرو هسته‌ای این است که در مدل لایه‌ای اتمی مدارهای فضایی برای الکترون‌ها داریم و خواص اتم‌ها بر حسب این مدارها بررسی می‌شود، و در این مدارها چون حجم الکترون‌ها در مقایسه با حجم اتم بسیار کوچک است، برخوردی بین الکترون‌ها انجام نمی‌شود، در حالی که در ابعاد هسته‌ای قطر نوکلئون‌ها در مقایسه با ابعاد هسته نسبتاً بزرگ است و یک نوکلئون ممکن است در طی حرکتش در یک مدار، برخوردهای متعددی انجام شود.

در تقریبی که برای مطالعه هسته‌های چند نوکلئونی به کار می‌رود، فرض بر آن است که نیروهایی را که توسط نوکلئون‌های دیگر بر یک نوکلئون وارد می‌شود، می‌توان در تقریب اول با چاه پتانسیل نمایش داد. این چاه پتانسیل، پتانسیل نظریه پوسته‌ای نامیده می‌شود. قدرت عمل این تقریب واضح است، زیرا مسئله پیچیده چند جسمی را به ساده‌ترین مسئله در فیزیک کوانتومی یعنی مسئله تک ذره در چاه پتانسیل تبدیل می‌کند.



اولین مرحله در مدل پوسته‌ای انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب است. چاه نامتناهی، تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیست، چون برای جدا کردن یک نوترون یا پروتون از هسته، با صرف انرژی کافی باید بتوانیم آن را از چاه خارج کنیم، پس عمق چاه بی‌نهایت نیست. از طرفی لبه پتانسیل هسته‌ای نباید تیز باشد، بلکه مثل توزیع بار مقدار پتانسیل بعد از شعاع میانگین باید به آهستگی به سمت صفر میل کند. از طرفی، پتانسیل نوسانگر هماهنگ هم لبه‌اش به مقدار کافی تیز نیست و انرژی جدایی آن نیز بی‌نهایت است. پس پتانسیلی که در نظر می‌گیریم به صورت معادله (۵-۲) است:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{(r-R)}{a}\right)} \quad (5-2)$$

که به آن پتانسیل وود-ساکسون (Woods-Saxon) گفته می‌شود که در آن شعاع میانگین و  $a$  ضخامت پوسته است که مقادیر آنها به ترتیب عبارتند از  $R = 1.25A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$ ,  $a = 0.524 \text{ fm}$ . عمق چاه  $V_0$  چنان تنظیم می‌شود که برای انرژی‌هایی که از مرتبه  $50 \text{ MeV}$  است، مقادیر مناسبی به دست آید [۷].

## ۲-۵- انرژی بستگی هسته<sup>۱</sup>

انرژی بستگی هسته را با  $B_{tot}(A, Z)$  نشان می‌دهند که می‌توان آن را به دو روش زیر بیان کرد:

۱- انرژی بستگی یک هسته برابر جرمی است که وقتی  $Z$  پروتون و  $N$  نوترون گرد هم آمده و هسته را تشکیل می‌دهند به انرژی تبدیل می‌شود و به هنگام تشکیل هسته مقداری انرژی برابر با انرژی بستگی آزاد می‌شود.

---

<sup>1</sup> Nuclear Binding Energy

۲- انرژی بستگی برابر با انرژی لازم برای شکستن هسته به صورت ذرات تشکیل دهنده آن یعنی  $Z$  پروتون و  $N$  نوترون است.

در واقع اختلاف بین جرم واقعی هسته و مجموع جرم تک تک نوکلئون‌های آنرا به واحد انرژی، انرژی بستگی کل می نامند. در محاسبات به جای جرم هسته‌ای، جرم اتمی در نظر گرفته می‌شود و واحد جرم اتمی که این واحد را با  $U$  نشان می‌دهند که به صورت معادله (۶-۲) تعریف می‌شود:

$$1U = \frac{1}{12} \text{ (جرم اتم کربن 12)} \quad (۶-۲)$$

علت اینکه در محاسبات به جای جرم هسته‌ها از جرم اتم‌ها استفاده می‌شود، این است که انرژی بستگی الکترون‌ها و جرم آنها در مقایسه با نوکلئون‌ها ناچیز می‌باشد، می‌توان از آنها صرف نظر کرد بدون اینکه اشکالی در محاسبات ایجاد کند.

$$B_{tot}(A, Z) = [ZM_p + NM_n - M_N(A, Z)]c^2 \quad (۷-۲)$$

که با اضافه و کم کردن  $ZM_e$  به معادله (۷-۲) داریم:

$$B_{tot}(A, Z) = [ZM_H + NM_n - M(A, Z)]c^2 \quad (۸-۲)$$

که در آن  $M(A, Z)$  جرم اتمی است که هسته آن دارای جرم  $M_N(A, Z)$  است. [۶،۷]

## ۲-۵-۱- انرژی جدایی<sup>۱</sup>

مقدار انرژی لازم برای کندن یک ذره از هسته (که این ذره ممکن است نوترون، ذره آلفا، پروتون، دوترون و... باشد) است. انرژی جدایی را کار لازم برای جدا کردن یک ذره از هسته نیز می‌نامیم و آن را با  $S$  نشان می‌دهیم. البته وقتی چنین ذره‌ای توسط هسته گیر می‌افتد، این انرژی آزاد می‌شود.

انرژی جدایی نوترون و پروتون به ترتیب به صورت معادلات (۹-۲) و (۱۰-۲) تعریف می‌شوند:

---

<sup>1</sup> Separation Energy

$$S_n = [M_n + M_N(A-1, Z) - M_N(A, Z)]c^2 = B(A, Z) - B(A-1, z) \quad (9-2)$$

$$S_p = [M_p + M_N(A-1, Z-1) - M_N(A, Z)]c^2 = B(A, Z) - B(A-1, z-1) \quad (10-2)$$

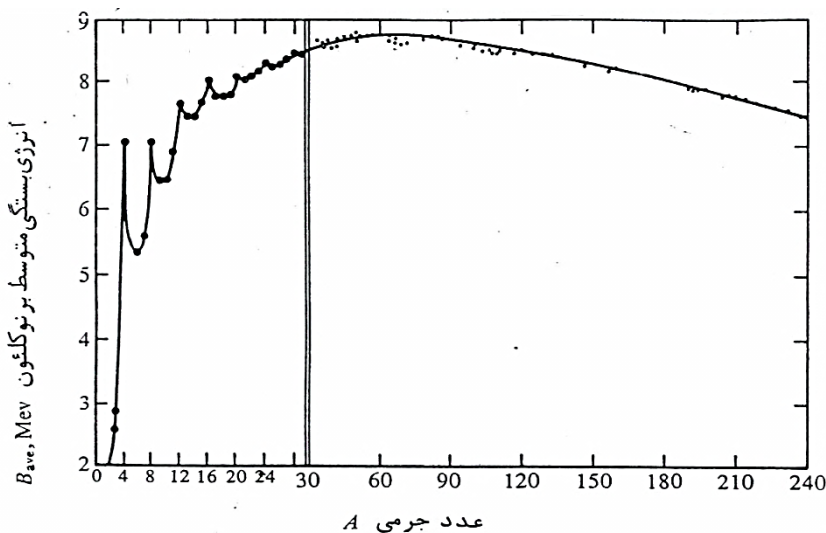
انرژی جداسازی در فیزیک هسته‌ای مانند انرژی یونش در اتم‌ها بر ساختار پوسته‌ای هسته‌ها دلالت می‌کند، که مشابه ساختار پوسته‌ای اتم‌ها است.

## ۲-۵-۲- انرژی بستگی متوسط بر نوکلئون<sup>۱</sup>

انرژی بستگی متوسط را با  $B_{ave}$  نشان می‌دهند که به صورت معادله (۱۱-۲) تعریف می‌شود

$$B_{ave}(A, Z) = \frac{B_{tot}(A, Z)}{A} \quad (11-2)$$

که  $B_{tot}$  را می‌توان با اندازه‌گیری دقیق جرم توسط طیف‌سنجی جرمی به دست آورد. نمودار انرژی بستگی متوسط بر حسب عدد جرمی به صورت شکل ۲-۴ است.



شکل ۲-۴- انرژی بستگی متوسط بر حسب عدد جرمی [۷]

تغییرات  $B_{ave}(A, Z)$  بر حسب  $A$  با استفاده از داده‌های تجربی برای هسته‌های موجود در طبیعت مطابق شکل بالا است، اما این شکل چند ویژگی مهم دارد که عبارتند از:

<sup>1</sup> Average binding energy per nucleon

۱- منحنی جز در ناحیه هسته‌های بسیار سبک، مقدار نسبتاً ثابتی را نشان می‌دهد و انرژی بستگی متوسط بسیاری از هسته‌ها تقریباً در حدود  $8 \text{ (MeV)}$  برای هر نوکلئون است.

۲- منحنی در نزدیکی  $A = 60$  قله پهنی دارد و در همین ناحیه است که بستگی هسته‌ای به حداکثر می‌رسد و وجود این قله به این معنی است که به دو طریق می‌توان به تولید انرژی دست یافت. در نواحی پایین تر از  $A = 60$  از طریق ترکیب هسته‌های سبک و تشکیل هسته‌های سنگین تر و در نواحی بالاتر از  $A = 60$  از طریق شکستن هسته‌های سنگین و تبدیل آنها به هسته‌های سبک تر است که روش اول را همجوشی هسته‌ای<sup>۱</sup> (گداخت هسته‌ای) و روش دوم را شکافت هسته‌ای<sup>۲</sup> می‌نامند.

۳- انرژی بستگی متوسط در  $A$  های زیاد، کاهش پیدا می‌کند و دلیل آن این است که با افزایش عدد اتمی نیروی دافعه کولنی افزایش می‌یابد.

۴- افت در  $A$  های کم مربوط به این است که بستگی کامل نوکلئون فقط هنگامی به وجود می‌آید که نوکلئون به وسیله نوکلئون‌های دیگر احاطه شده باشد، چون برای نوکلئون‌ها در لایه‌های بیرونی هسته این حالت اشباع پیش نمی‌آید و هسته‌های سبک قسمت بیشتر نوکلئون‌هایش در سطح قرار می‌گیرد، پس انرژی بستگی کاهش می‌یابد.

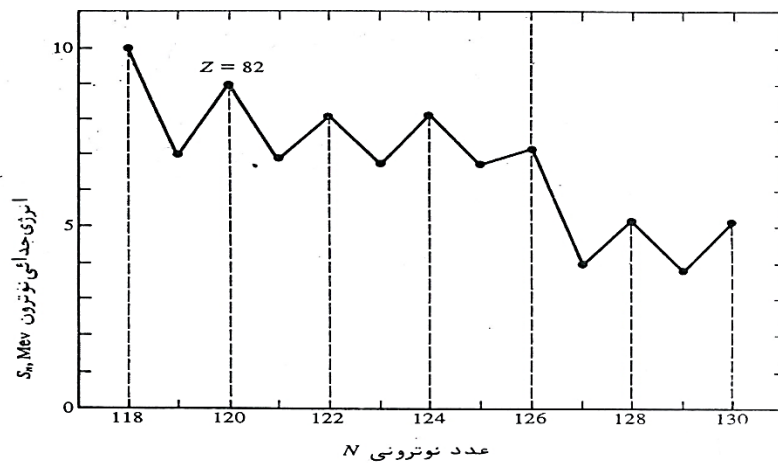
۵- نکته بعدی که می‌توان به آن اشاره کرد، افزایش انرژی بستگی به طور ناگهانی برای بعضی از هسته هاست. با توجه به این منحنی و منحنی  $S_n$  برحسب  $N$  که در شکل ۲-۵ نشان داده شده است دیده می‌شود که برای یک  $Z$  معین،  $S_n$  برای هسته‌ای با  $N$  زوج بیشتر از  $S_n$  با  $N$  فرد است. همچنین برای یک  $N$  معین،  $S_p$  برای هسته‌های با  $Z$  زوج بیشتر از  $Z$  فرد می‌باشد که این اثر را زوجیت می‌نامند و باعث می‌شود که هسته‌های زوج-زوج پایدارتر از هسته‌های زوج-فرد و به همین ترتیب پایدارتر از هسته‌های فرد-فرد باشد و این اثر به علت خاصیتی از نیروهای هسته‌ای است که بستگی بیشتری را

---

<sup>1</sup> Nuclear fusion

<sup>2</sup> Nuclear fission

بین جفت نوکلئون‌های یکسان که دارای تکانه زاویه‌ای مختلف الجهت بوده و در یک حالت کوانتومی به سر می‌برند، ایجاد می‌کند.



شکل ۲-۵- انرژی جدایی نوترون بر حسب عدد نوترونی [۶]

فصل سوم

بررسی حالت‌های غیر نسبیتی با استفاده از

پتانسیل‌های مناسب

### ۳-۱- هماهنگ‌های فوق کروی<sup>۱</sup>

از میان روش‌های مختلفی که برای حل معادله شرودینگر مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش بسط هماهنگ‌های فوق کروی (H.H.) یکی از کارآمدترین روش‌ها است [۸-۱۱]. حرکت مرکز جرم یک سیستم  $N$  ذره‌ای را می‌توان به طور ساده در مختصات ژاکوبی<sup>۲</sup> بیان کرد. در این مختصات  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$  را به صورت تابعی از مکان نسبی ذرات  $\vec{r}_{12}, \vec{r}_{23}, \dots, \vec{r}_{M1}$  بیان می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1} \\ & \vec{r}_{12}, \vec{r}_{23}, \dots, \vec{r}_{M1} \\ & \xi_1^2 = \frac{r_{12}^2}{2} = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)^2 = 2(R - r_2)^2 \\ & \xi_2^2 = \frac{1}{6}(r_1 + r_2 - 2r_3)^2 = \frac{3}{2}(R - r_3)^2 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \xi_{N-1}^2 = \frac{1}{N(N-1)}[r_1 + r_2 + \dots - (N-1)r_N]^2 = \frac{N}{N-1}(R - r_N)^2 \end{aligned} \quad (1-3)$$

که ابر شعاع<sup>۳</sup> برای این مختصات به صورت معادله (۳-۲) تعریف می‌شود:

$$x = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i+1}{i} (R - r_{i+1})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-3)$$

عملگر لاپلاسی در مختصات فوق کروی به صورت معادله (۳-۲) ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\xi_i}^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} = - \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2} \right) \\ L^2(\Omega) &= \gamma(\gamma + D - 2) \end{aligned} \quad (3-3)$$

<sup>1</sup> Hyperspherical Harmonics

<sup>2</sup> Jacobi coordinates

<sup>3</sup> Hyper radius

$L^2(\Omega)$  در رابطه فوق، عملگر مداری بزرگ است و این عملگر شامل مختصات زاویه‌ای  $\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \dots$  و ابر زاویه<sup>۱</sup>های  $t_1, t_2, \dots$  است که در آن  $t_1$  را طبق معادله (۴-۳) در نظر می‌گیریم:

$$t_1 = \arctg\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) \quad (۴-۳)$$

ویژه مقادیر  $L^2(\Omega)$  به صورت معادله (۵-۳) تعریف می‌شوند:

$$L^2(\Omega) = \gamma(\gamma + D - 2) \quad (۵-۳)$$

که در آن  $\gamma$  عدد کوانتومی بزرگ است که از طریق  $\begin{cases} \gamma = 2n + l_{\xi_1} + l_{\xi_2} + \dots \\ l_{\xi_1}, l_{\xi_2}, \dots \end{cases}$  معین می‌شود.  $n$  مقدار

صحیح مثبت دارد و  $l_{\xi_1}, l_{\xi_2}, \dots$  تکانه‌های زاویه‌ای وابسته به مختصات ژاکوبی نسبی  $\xi_1, \xi_2, \dots$  هستند.

### ۳-۲- حل معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل هولسن

پتانسیل هولسن (Hulthen) پتانسیلی کوتاه برد است که برای مقادیر کوچک  $r$  شبیه پتانسیل کولنی عمل می‌کند، به ازای مقادیر بزرگ  $r$  به صورت نمایی کاهش می‌یابد. این پتانسیل هم در مکانیک کوانتومی نسبیتی و هم در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی مهم می‌باشد که در اینجا به بررسی حالت غیر نسبیتی می‌پردازیم [۱۲].

معادله غیر نسبیتی شرودینگر در بعد با استفاده از هماهنگ‌های فوق کروی به صورت معادله (۶-۳) است [۱۶-۱۳]:

$$r^{1-D} \frac{\partial}{\partial r} (r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r}) \psi_{nlm}(r, \Omega) + \frac{\Lambda_D^2(\Omega)}{r^2} \psi_{nlm}(r, \Omega) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E_{n,l} - V(r)] \psi_{nlm}(r, \Omega) = 0 \quad (۶-۳)$$

پتانسیل هولسن به صورت معادله (۷-۳) است:

---

<sup>1</sup> Hyper angles



$$V(r) = \frac{-V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \quad (7-3)$$

با قرار دادن پتانسیل هولسن در معادله (۶-۳) و با جدا سازی متغیرها داریم:

$$r^{1-D} \frac{d}{dr} (r^{D-1} \frac{d}{dr}) R_{nl}(r) - \frac{l(l+D-2)}{r^2} R_{nl}(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E_{n,l} + \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (8-3)$$

با معرفی تبدیل (۹-۳):

$$R_{nl}(r) = r^{-\frac{(D-1)}{2}} U_{nl}(r) \quad (9-3)$$

و قرار دادن آن در فرمول (۸-۳) داریم:

$$U_{nl}''(r) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,l} + \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}}) - \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4r^2} (\frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2}) \right] U_{nl}(r) = 0 \quad (10-3)$$

با استفاده از تقریب (۱۱-۳) و قرار دادن آن در معادله (۱۰-۳) [۱۷، ۱۸] داریم:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2} \quad (11-3)$$

معادله (۱۰-۳) به معادله (۱۲-۳) تبدیل می‌شود:

$$U_{nl}''(r) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,l} + \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}}) - \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4r^2} (\frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2}) \right] U_{nl}(r) = 0 \quad (12-3)$$

تغییر متغیر  $s = e^{-\alpha r}$  را در معادله (۱۲-۳) وارد می‌کنیم و داریم:

$$\frac{d^2 U_{nl}(s)}{ds^2} + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \frac{dU_{nl}(s)}{ds} + \frac{1}{s^2(1-s)^2} [s^2(-\varepsilon^2 - \delta) + s(2\varepsilon^2 + \delta - \gamma) - \varepsilon^2] U_{nl}(s) = 0 \quad (13-3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 &= \frac{2\mu E_{n,l}}{\alpha^2 \hbar^2}, \\ \delta &= \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2} \\ \gamma &= \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4} \end{aligned} \quad (14-3)$$

با مقایسه معادله (۳-۱۳) با (پیوست الف) ضرایب (۳-۱۵) به دست می‌آیند:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

$$\xi_1 = \varepsilon^2 + \delta,$$

$$\xi_2 = 2\varepsilon^2 + \delta - \gamma, \quad \xi_3 = \varepsilon^2$$

$$\alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4} + \varepsilon^2 + \delta \quad (۳-۱۵)$$

$$\alpha_7 = -2\varepsilon^2 - \delta + \gamma$$

$$\alpha_8 = \varepsilon^2$$

و برای به دست آوردن ویژه مقادیر انرژی طبق (پیوست الف) نتیجه (۳-۱۶) به دست می‌آید

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{2} + \frac{n(n+2l+D-2) + (\gamma - \delta)}{2n+2l+D-1} \right]^2 \quad (۳-۱۶)$$

که این معادله طیف انرژی حاصل از پتانسیل هولسن را به دست می‌دهد.

### ۳-۳- بررسی انرژی بستگی هسته با استفاده از پتانسیل وود- ساکسون اصلاح شده

تاکنون معادلات غیر نسبیتی زیادی با استفاده از پتانسیل وود-ساکسون (Woods-Saxon) مورد بررسی قرار گرفته است [۲۰، ۱۹]. در این قسمت برای دستیابی به نتایج بهتر دافعه پروتون‌ها را نیز در نظر گرفته و از پتانسیل وود-ساکسون اصلاح شده (Modified Woods-Saxon) استفاده کرده‌ایم که در شکل ۳-۱ نشان داده شده است و سپس با بررسی حالت‌های غیر نسبیتی و حل معادله شرودینگر و به دست آوردن ویژه مقادیر انرژی و ترازهای انرژی و قرار دادن نوکلئونها در ترازها با رعایت اصل طرد پائولی و محاسبه انرژی فرمی مربوط به آنها و به دست آوردن انرژی بستگی متوسط به ازای هر نوکلئون و با

استفاده از پدیدارشناختی ضریب مناسب برای پتانسیل کولنی را برای هسته‌های مختلف مطابق جدول ۳-۱ به دست آورده‌ایم. همچنین ویژه توابع مربوطه را برحسب چند جمله‌ای‌های ژاکوبی و ویژه مقادیر چشم‌داشتی را با استفاده از تئوری هلمن فاینمن<sup>۱</sup> محاسبه کرده ایم [۲۲،۲۱].

پتانسیل وود-ساکسون اصلاح شده به صورت معادله (۱۷-۳) است:

$$V(r) = \frac{k}{r} - \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}, \quad a \ll R_0 \quad (17-3)$$

با در نظر گرفتن معادله شرودینگر به صورت معادله (۱۸-۳):

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,l}^D - V(r)) - \frac{l(l+D-2)}{r^2} \right] R_{n,l}(r) = 0 \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (18-3)$$

و تبدیل (۱۹-۳) که باعث حذف مشتق مرتبه اول می‌شود

$$U_{n,l}(r) = r^{\frac{D-1}{2}} R_{n,l}(r), \quad (19-3)$$

با قرار دادن معادلات (۱۷-۳) و (۱۹-۳) در معادله (۱۸-۳) معادله (۲۰-۳) به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 U_{n,l}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E_{n,l}^D - \frac{k}{r} + \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\hbar^2 (D-2l-1)(D+2l-3)}{8\mu r^2} \right] U_{n,l}(r) = 0 \quad (20-3)$$

حال تغییر متغیرهای (۲۱-۳) را در نظر می‌گیریم:

$$x = \frac{r-R_0}{R_0}, \quad R_0 = a\alpha, \quad e^{\frac{r-R_0}{a}} = e^{\alpha x} \quad (21-3)$$

که با این تغییر متغیرها، پتانسیل وود-ساکسون اصلاح شده به صورت معادله (۲۲-۳) تبدیل می‌شود:

$$V_{M-W-S} = \frac{k}{R_0(1+x)} - \frac{V_0}{1 + e^{\alpha x}} \quad (22-3)$$

<sup>1</sup> Hellmann-Feynman theorem (HFT)

با وارد کردن تغییر متغیر (۲۱-۳) در جمله گریز از مرکز و جمله کولنی و نوشتن بسط تیلور حول  $x=0$  برای آنها داریم:

$$V_1(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} (1-2x+3x^2-4x^3) \quad (۲۳-۳)$$

$$V_2(r) = \frac{k}{R_0(1+x)} = \frac{k}{R_0} (1+x)^{-1} = \frac{k}{R_0} (1-x+x^2-x^3)$$

با در نظر گرفتن تقریب پکریس<sup>۱</sup> برای پتانسیل های (۲۲-۳) به صورت  $V_1^*(r)$  و  $V_2^*(r)$  [۲۳، ۲۴]:

$$V_1^*(x) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \left\{ c_0 + \frac{c_1}{1+e^{ax}} + \frac{c_2}{(1+e^{ax})^2} \right\} \quad (۲۴-۳)$$

$$V_2^*(x) = \frac{k}{R_0} \left\{ c'_0 + \frac{c'_1}{1+e^{ax}} + \frac{c'_2}{(1+e^{ax})^2} \right\}$$

با نوشتن بسط تیلور (۲۴-۳) حول  $x=0$  و ضمن مقایسه با (۲۳-۳) ضرایب ثابت به صورت معادله (۲۵-۳) به دست می آیند:

$$c_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \quad c_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad c_2 = \frac{48}{\alpha^2}, \quad (۲۵-۳)$$

$$c'_0 = 1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2}, \quad c'_1 = \frac{4}{\alpha} - 16, \quad c'_2 = \frac{16}{\alpha^2}$$

و در این صورت معادله (۲۰-۳) را به صورت معادله (۲۶-۳) باز نویسی می کنیم:

$$\frac{d^2 U_{n,l}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E_{n,l}^D - \frac{k}{R_0} \left( c'_0 + \frac{c'_1}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{c'_2}{(1+e^{\frac{r-R_0}{a}})^2} \right) + \frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} \right. \quad (۲۶-۳)$$

$$\left. - \frac{\hbar^2 l(l+d-2)}{2\mu} \left( c_0 + \frac{c_1}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{c_2}{(1+e^{\frac{r-R_0}{a}})^2} \right) \right\} U_{n,l}(r) = 0$$

با انتخاب

<sup>1</sup> Pekeris approximation

$$\frac{\hbar^2 (D+2l-1)(D+2l-3)}{8\mu} = \delta_l^D \quad (27-3)$$

معادله (۲۶-۳) به معادله (۲۸-۳) تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2 U_{n,l}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E_{n,l}^{(D)} - \delta_l^D c_0 - \frac{k}{R_0} c'_0 + \frac{V_0 - \delta_l^D c_1 - \frac{k}{R_0} c'_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\delta_l^D c_2 - \frac{k}{R_0} c'_2}{(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}})^2} \right\} U_{n,l}(r) = 0 \quad (28-3)$$

با وارد کردن تغییر متغیر (۲۹-۳)

$$z = \left( 1 + e^{\frac{r-R_0}{a}} \right)^{-1} \quad (29-3)$$

معادله (۲۸-۳) به معادله (۲۹-۳) تبدیل می‌شود:

$$\frac{z^2 (1-z)^2}{a^2} \frac{d^2 U_{n,l}(r)}{dz^2} + \frac{z(1-z)(1-2z)}{a^2} \frac{dU_{n,l}(r)}{dz} + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,l}^{(D)} - \delta_l^D c_0 - \frac{k}{R_0} c'_0) + z(V_0 - \delta_l^D c_1 - \frac{k}{R_0} c'_1) - z^2(\delta_l^D c_2 - \frac{k}{R_0} c'_2) \right\} U_{n,l}(r) = 0 \quad (30-3)$$

معادله (۳۰-۳) را به صورت معادله (۳۱-۳) ساده می‌کنیم:

$$\frac{d^2 U_{n,l}(z)}{dz^2} + \frac{1-2z}{z(1-z)} \frac{dU_{n,l}(z)}{dz} + \frac{2\mu a^2}{\hbar^2 z^2 (1-z)^2} \left\{ E_{n,l}^{(D)} - \delta_l^D c_0 - \frac{k}{R_0} c'_0 + z \left( V_0 - \delta_l^D c_1 - \frac{k}{R_0} c'_1 \right) - z^2 \left( \delta_l^D c_2 - \frac{k}{R_0} c'_2 \right) \right\} U_{n,l}(z) = 0 \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (31-3)$$

با انتخاب (۳۲-۳)

$$\varepsilon^2 = \frac{2\mu \left( E_{n,l}^{(D)} - \delta_l^D c_0 - \frac{k}{R_0} c'_0 \right) a^2}{\hbar^2}, \beta^2 = \frac{2\mu \left( V_0 - \delta_l^D c_1 - \frac{k}{R_0} c'_1 \right)}{\hbar^2}, \gamma^2 = \frac{2\mu \left( \delta_l^D c_2 - \frac{k}{R_0} c'_2 \right)}{\hbar^2} \quad (32-3)$$

معادله (۳۱-۳) به صورت معادله (۳۳-۳) نوشته می‌شود:

$$U''_{n,l}(z) + \frac{1-2z}{z(z-1)} U'_{n,l}(z) + \frac{(\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2)}{[z(z-1)]^2} U_{n,l}(z) = 0 \quad (33-3)$$

برای حل این معادله از روش  $NU$  استفاده می‌کنیم، به این صورت که از مقایسه معادله (33-3) با (پیوست الف) ضرایب به صورت (34-3) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \alpha_2 &= 2 & \alpha_3 &= 1 \\ \xi_1 &= \gamma^2 & \xi_2 &= \beta^2 & \xi_3 &= \varepsilon^2 \\ \alpha_4 &= 0 & \alpha_5 &= 0 & \alpha_6 &= \gamma^2 & \alpha_7 &= -\beta^2 & \alpha_8 &= \varepsilon^2 \\ \alpha_9 &= -\beta^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2, & \alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{\xi_3}, & \alpha_{11} &= 2\sqrt{\xi_1}, & \alpha_{12} &= \sqrt{\xi_3}, & \alpha_{13} &= \sqrt{\xi_1} \end{aligned} \quad (34-3)$$

و معادله ویژه مقدراری به صورت معادله (35-3) به دست می‌آید:

$$-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\gamma^2} = 0 \quad (35-3)$$

که می‌توان به صورت معادله (36-3) ساده کرد:

$$-\frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E_{n,l}^D - \delta_l^D c_0 - \frac{k}{R_0} c'_0 \right\} = \frac{1}{4} \left\{ -n + \frac{\sqrt{1+4\gamma^2}-1}{2} + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{-n + \frac{\sqrt{1+4\gamma^2}-1}{2}} \right\}^2 \quad (36-3)$$

و تابع موج نیز به صورت معادله (37-3) است:

$$U_{n,l}(z) = z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 2\varepsilon)}(1-2z) \quad (37-3)$$

که  $P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z)$  چندجمله‌ای ژاکوبی است که به صورت معادله (38-3) تعریف می‌شود:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n+\alpha} (1-z)^{n+\beta}] \quad (38-3)$$

در این قسمت ویژه مقادیر چشم‌داشتی را با استفاده از (تئوری هلمن فاینمن) به صورت زیر محاسبه کرده‌ایم.

هامیلتونی یک سیستم کوانتومی تابعی از پارامترهای  $q$  است و  $E_{n,l}(q)$  و  $U_{n,l}(q)$  به ترتیب نشان‌دهنده

ویژه مقادیر و ویژه توابع  $H$  هستند و تئوری هلمن فاینمن به صورت معادله (39-3) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial E_{n,l}(q)}{\partial q} = \langle U_{n,l}(q) | \frac{\partial H(q)}{\partial q} | U_{n,l}(q) \rangle \quad (39-3)$$

که در این بخش هامیلتونی به صورت معادله (۴۰-۳) است:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 (D-2l-1)(D+2l-3)}{4r^2} + \frac{k}{r} - \frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} \quad (40-3)$$

برای محاسبه  $\langle r^{-2} \rangle$  با انتخاب  $q=l$  معادله (۴۱-۳) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial E_{n,l}}{\partial l} = \langle U_{n,l}(l) | \frac{\partial H(l)}{\partial l} | U_{n,l}(l) \rangle = \frac{\hbar^2}{2\mu} (2l+D-2) \langle r^{-2} \rangle \quad (41-3)$$

و برای محاسبه  $\langle r^{-1} \rangle$  با انتخاب  $q=k$

$$\frac{\partial E_{n,l}}{\partial k} = \langle U_{n,l}(k) | \frac{\partial H(k)}{\partial k} | U_{n,l}(k) \rangle = \langle r^{-1} \rangle \quad (42-3)$$

معادله (۴۲-۳) به دست می‌آید.

جدول ۱-۲- مقادیر محاسبه شده  $k$  برای هسته‌های مختلف

عدد جرمی	K	عدد جرمی	K
۶	۰/۲۸۷۶	۳۵	۰/۶۴۵۴
۷	۰/۲۷۶۱	۳۶	۰/۶۴۰۰
۸	۰/۲۶۴۸	۳۹	۱/۲۹۰۲
۹	۰/۲۵۳۸	۴۰	۱/۲۸۶۰
۱۰	۰/۲۴۳۱	۴۱	۱/۲۸۱۸
۱۱	۰/۲۳۲۸	۴۲	۱/۲۷۷۶
۱۲	۰/۲۲۲۷	۴۳	۱/۲۷۳۴
۱۳	۰/۲۱۳۰	۴۴	۱/۲۶۹۳
۱۴	۰/۲۰۳۵	۴۵	۱/۲۶۵۲
۱۵	۰/۱۹۴۳	۴۶	۱/۲۶۱۰
۱۶	۰/۱۸۵۴	۴۷	۱/۲۵۶۹
۱۷	۰/۱۷۶۴	۴۸	۱/۲۵۲۹
۱۸	۰/۱۶۷۸	۴۹	۱/۲۴۸۸
۱۹	۰/۱۶۱۳	۵۰	۱/۲۴۴۷

٢٠	٠/٧٣٤٨	٥١	١/٢٤٠٧
٢١	٠/٧٢٨٣	٥٢	١/٢٣٤٧
٢٢	٠/٧٢٢٠	٥٣	١/٢٣٢٧
٢٣	٠/٧١٥٧	٥٤	١/٢٢٨٨
٢٤	٠/٧٠٩٤	٥٥	١/٢٢٤٨
٢٥	٠/٧٠٣٣	٥٦	١/٢٢٠٩
٢٦	٠/٦٩٧٢	٥٧	١/٢١٧٠
٢٧	٠/٦٩١٢	٥٨	١/٢١٣١
٢٨	٠/٦٨٥٢	٥٩	١/٢٠٩٢
٢٩	٠/٦٧٩٣	٦٠	١/٢٠٥٣
٣٠	٠/٦٧٣٥	٦١	١/٢٠١٥
٣١	٠/٦٦٧٨	٦٢	١/١٩٧٧
٣٢	٠/٦٦٢١	٦٣	١/١٩٣٩
٣٣	٠/٦٥٦٥	٦٤	٠/٧٠٦٣
٣٤	٠/٦٥٠٩	٦٥	٠/٧١٢٢
عدد جرمی	K	عدد جرمی	K
٦٦	٠/٧١٨١	٩٣	١/٨٥٩١
٦٧	٠/٧٢٣٩	٩٤	١/٨٥٦٢
٦٨	٠/٧٢٩٦	٩٥	١/٨٥٣٧
٦٩	٠/٧٣٥٢	٩٦	١/٨٥٠٤
٧٠	٠/٧٤٠٨	٩٧	١/٨٤٧٥
٧١	٠/٧٤٦٤	٩٨	١/٨٤٤٧
٧٢	٠/٧٥١٨	٩٩	١/٨٤١٨
٧٣	١/٩١٨٥	١٠٠	١/٨٣٨٩
٧٤	١/٩١٥٤	١٠١	١/٨٣٦٠
٧٥	١/٩١٢٤	١٠٢	١/٨٣٣٢
٧٦	١/٩٠٩٤	١٠٣	١/٨٣٠٣
٧٧	١/٩٠٦٤	١٠٤	١/٨٢٧٥
٧٨	١/٩٠٣٤	١٠٥	١/٨٢٤٦
٧٩	١/٩٠٠٤	١٠٦	٠/٥٥٨٠
٨٠	١/٨٩٧٥	١٠٧	٠/٥٦٣٥
٨١	١/٨٩٤٥	١٠٨	٠/٥٦٨٠



٨٢	١/٨٩١٥	١٠٩	٠/٥٧٢٤
٨٣	١/٨٨٨٥	١١٠	٠/٥٧٤٨
٨٤	١/٨٨٥٦	١١١	٠/٥٨١٢
٨٥	١/٨٨٢٦	١١٢	٠/٥٨٥٦
٨٦	١/٨٧٩٧	١١٣	٠/٥٨٩٩
٨٧	١/٨٧٦٧	١١٤	٠/٥٩٤٢
٨٨	١/٨٧٣٨	١١٥	٠/٥٩٨٥
٨٩	١/٨٧٠٨	١١٦	٠/٦٠٢٧
٩٠	١/٨٦٧٩	١١٧	٠/٦٠٦٩
٩١	١/٨٦٥٠	١١٨	٠/٦١١٠
٩٢	١/٨٦٢٠	١١٩	٢/٦٥٣٤
٩١	١/٨٥٩١	١٢٠	٢/٦٥١٠
٩٢	١/٨٦٢٠	١٢١	٢/٦٤٨٧
عدد جرمی	K	عدد جرمی	K
١٢٢	٢/٦٤٦٣	١٥١	٢/٥٧٨٤
١٢٣	٢/٦٤٣٩	١٥٢	٢/٥٧٦١
١٢٤	٢/٦٤١٦	١٥٣	٢/٥٧٣٨
١٢٥	٢/٦٣٩٢	١٥٨	٠/٤٦٠٠
١٢٦	٢/٦٣٦٩	١٥٩	٠/٤٦٤٢
١٢٧	٢/٦٣٤٥	١٦٠	٠/٤٦٧٨
١٢٨	٢/٦٣٢١	١٦١	٠/٤٧١٤
١٢٩	٢/٦٢٩٨	١٦٢	٠/٤٧٥٠
١٣٠	٢/٦٢٧٤	١٦٣	٠/٤٧٨٦
١٣١	٢/٦٢٥١	١٦٤	٠/٤٨٢١
١٣٢	٢/٦٢٢٧	١٦٥	٠/٤٨٥٦
١٣٣	٢/٦٢٠٤	١٦٦	٠/٤٨٩١
١٣٤	٢/٦١٨٠	١٦٧	٠/٤٩٢٦
١٣٥	٢/٦١٥٧	١٦٨	٠/٤٩٦١
١٣٦	٢/٦١٣٤	١٦٩	٠/٤٩٩٥
١٣٧	٢/٦١١٠	١٧٠	٠/٥٠٢٩
١٣٨	٢/٦٠٨٧	١٧١	٠/٥٠٦٣
١٣٩	٢/٦٠٠٦	١٧٢	٠/٥٠٩٧

۱۴۰	۲/۶۰۴۰	۱۷۳	۰/۵۱۳۱
۱۴۱	۲/۶۰۱۷	۱۷۴	۰/۵۱۶۴
۱۴۲	۲/۵۹۹۹	۱۷۵	۰/۵۱۹۸
۱۴۳	۲/۵۹۷۰	۱۷۶	۰/۵۲۳۱
۱۴۴	۲/۵۹۶۷	۱۷۷	۰/۵۲۶۴
۱۴۵	۲/۵۹۴۷	۱۷۸	۰/۵۲۹۷
۱۴۶	۲/۵۹۲۳	۱۷۹	۳/۵۰۱۵
۱۴۷	۲/۵۸۷۷	۱۸۰	۳/۴۹۹۵
۱۴۸	۲/۵۸۵۴	۱۸۱	۳/۴۹۷۵
۱۴۹	۲/۵۸۳۰	۱۸۲	۳/۴۹۳۵
۱۵۰	۲/۵۸۰۷	۱۸۳	۳/۴۹۱۵
عدد جرمی	K	عدد جرمی	K
۱۸۴	۳/۴۸۹۵	۱۹۱	۳/۴۷۵۶
۱۸۵	۳/۴۸۷۵	۱۹۲	۳/۴۷۳۶
۱۸۶	۳/۴۸۵۵	۱۹۳	۳/۴۷۱۶
۱۸۷	۳/۴۸۳۵	۱۹۴	۳/۴۶۹۶
۱۸۸	۳/۴۸۱۶	۱۹۵	۳/۴۶۷۶
۱۸۹	۳/۴۷۹۶	۱۹۶	۳/۴۶۵۶
۱۹۰	۳/۴۷۷۶	۱۹۷	۳/۴۶۳۶

با قرار دادن  $k_{ave} = 1.24035$  برای  $39 \leq A \leq 63$  انرژی بستگی متوسط را برای این هسته‌ها محاسبه

کرده‌ایم که در جدول ۳-۲ ارائه شده است:

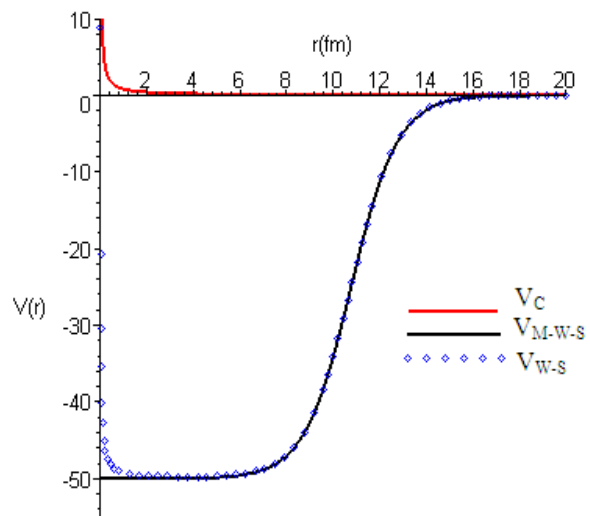
جدول ۳-۲- مقادیر محاسبه شده انرژی بستگی به ازای  $k_{ave} = 1.24035$

عدد جرمی	انرژی بستگی متوسط
۳۹	۷/۱۵۴۱
۴۰	۷/۲۱۹۹
۴۱	۷/۲۸۶۴
۴۲	۷/۳۵۳۷
۴۳	۷/۴۲۱۸
۴۴	۷/۴۹۰۶
۴۵	۷/۵۶۰۱
۴۶	۷/۶۳۰۴
۴۷	۷/۷۰۱۴
۴۸	۷/۷۷۳۰
۴۹	۷/۸۴۵۴
۵۰	۷/۹۱۸۴
۵۱	۷/۹۹۲۲
۵۲	۸/۰۶۶۶
۵۳	۸/۱۴۱۷
۵۴	۸/۲۱۷۵
۵۵	۸/۲۹۳۹
۵۶	۸/۳۷۱۱
۵۷	۸/۴۴۸۸
۵۸	۸/۵۲۷۳
۵۹	۸/۶۰۴۶
۶۰	۸/۶۸۶۳
۶۱	۸/۷۶۶۷
۶۲	۸/۸۴۷۹
۶۳	۸/۹۲۹۷

ضرایب به دست آمده برای پتانسیل کولنی در مسائل مختلف می تواند مفید باشد، همانطور که دیده می -

شود برای هسته های  $39 \leq A \leq 63$  با قرار دادن  $k_{ave} = 1.24035$  انرژی بستگی متوسط را محاسبه

کرده‌ایم که همانطور که انتظار می‌رود با مقدار تجربی آن که در حدود  $8\text{ (MeV)}$  است همخوانی خوبی دارد.



شکل ۲-۶-- پتانسیل‌های کولنی ، وود ساکسون و وود ساکسون اصلاح شده

## فصل چهارم

# محاسبه انرژی بستگی دوترون

## ۴-۱- خواص نیروی بین نوکلئون‌ها

نیروی نوکلئون- نوکلئون دارای خواص زیر است [۷]:

- ۱- نیروی هسته‌ای دارای برد کوتاهی است و در فواصل بلندتر این نیرو بسیار ضعیف می‌شود.
- ۲- این نیرو در فواصل کوتاه قوی‌تر از نیروی کولنی است.
- ۳- نیروی بین نوکلئون‌ها تقریباً مستقل از نوع نوکلئون‌ها است.
- ۴- بعضی از ذرات مانند الکترون‌ها تحت تاثیر نیروی هسته‌ای قرار نمی‌گیرند.
- ۵- نیروی نوکلئون- نوکلئون به اسپین نوکلئون‌ها بستگی دارد.

## ۴-۲- دوترون

دوترون از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است. دوترون دارای هیچ حالت برانگیخته‌ای نیست. انرژی بستگی آن در حدود  $B_{tot} = 2.224 MeV$  است که برای محاسبه آن می‌توان از اندازه‌گیری پرتوهای گامای گسیل شده از گیراندازی نوترون حرارتی توسط پروتون تعیین کرد.



و انرژی بستگی دوترون به صورت معادله (۲-۴) محاسبه می‌شود:

$$\left[ m({}^1H) + m(n) - m({}^2H) \right] c^2 = 2.22463 MeV \quad (2-4)$$

که این مقدار برابر انرژی فوتون تولید شده است.

اسپین دوترون برابر با یک است که اسپین کل دوترون برابر با برابند اسپین ذاتی پروتون و نوترون و تکانه زاویه‌ای نوکلئون‌ها حول مرکز جرمشان است.

$$I = S_p + S_n + l \quad (3-4)$$

$$I = 1, S_p = \frac{1}{2}, S_n = \frac{1}{2}, l = ?$$

از طرفی برآیند اسپین پروتون و نوترون می‌تواند برابر یک یا صفر باشد، در این صورت  $l$  می‌تواند دارای مقادیر زیر باشد:

$$l = 0, 1, 2 \quad (4-4)$$

پارایته دوترون زوج است که با توجه به اینکه پارایته از فرمول  $(-1)^l$  به دست می‌آید، می‌توان به این نتیجه رسید که  $l = 1$  قابل قبول نیست.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون برابر  $\mu = 0.85\mu_N$  است و گشتاور چهارقطبی الکتریکی آن نیز برابر  $Q = 0.00282 b$  است [۷].

### ۴-۳ - پتانسیل یوکاوا

در سال ۱۹۳۵ هیدکی یوکاوا<sup>۱</sup>، فیزیکدان ژاپنی یک پتانسیل ریاضی به منظور نمایش برهم‌کنش نوکلئون نوکلئون پیشنهاد کرد. یوکاوا تلاش کرد تا پتانسیلی بیابد که تبادل ذراتی که منجر به نیروی هسته‌ای می‌شوند را توصیف کند. اگر  $m$  جرم در حال سکون ذره مبادله شده باشد آنگاه تا زمانی که  $t$  بزرگ‌تر از آنچه رابطه عدم قطعیت مجاز می‌شمارد، نباشد، یک ذره مجازی می‌تواند خلق شود و برای مدت زمان  $t$  مطابق معادله (۴-۵) دوام داشته باشد:

$$t = \frac{\hbar}{mc^2} \quad (5-4)$$

در این صورت بزرگترین مسافتی که ذره می‌تواند حرکت کند مطابق معادله (۴-۶) است:

---

<sup>1</sup> Hideki Yukawa

$$x = ct = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{mc^2} \quad (6-4)$$

بنابراین برای برد یک فرمی ( $1f$ ) جرم ذره مبادله شده از مرتبه  $200 \frac{\text{MeV}}{c^2}$  است. از سوی دیگر فوتون‌ها دارای جرم سکون صفر و برد نامحدود هستند. معادلات اساسی میدان‌های الکترومغناطیسی نمی‌توانند برای میدان هسته‌ای به کار روند، زیرا در این مورد ذرات میدان بدون جرم هستند. به رابطه‌ای نیاز است که با رابطه اساسی نسبیتی معادله (۷-۴) که انرژی و جرم در حال سکون را پیوند می‌دهد، سازگار باشد:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (7-4)$$

که در نظریه کوانتومی به انرژی، عملگر  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  و به تکانه  $-i\hbar \nabla$  نسبت داده می‌شود، با استفاده از این جایگذاری‌ها در رابطه (۷-۴)، یک معادله دیفرانسیل نسبیتی شبیه معادله (۸-۴) حاصل می‌شود که معادله کلاین-گوردن<sup>۱</sup> نامیده می‌شود:

$$\left(\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (8-4)$$

که در معادله (۸-۴)  $\phi$  دامنه میدان را نشان می‌دهد. حال به دنبال پتانسیلی استاتیکی خواهیم بود که جواب مستقل از زمان معادله (۹-۴) باشد:

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = 0 \quad (9-4)$$

که در آن  $k = \frac{mc}{\hbar}$  است. در مختصات شعاعی، جواب متقارن کروی معادله (۹-۴) به صورت معادله (۴-۱۰) است

$$\phi = g \frac{e^{-kr}}{r} \quad (10-4)$$

<sup>1</sup> Klein- Gordon Equation



که در معادله (۴-۱۰)  $g$  نمایانگر قدرت میدان پایونی است. بنابر محاسبات یوکاوا نیروی هسته‌ای باید مرتبه‌ای از  $k^{-1} = \frac{\hbar}{mc}$  داشته باشد. حل معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل یوکاوا در دوره‌های گذشته با استفاده از روش‌های عددی و اختلالی به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. اما حل تحلیلی برای آن ارائه نشده است. در این فصل حل تحلیلی معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل یوکاوا مورد بررسی قرار گرفته است و در این روش حل از تقریب نمایی برای جمله گریز از مرکز استفاده کرده ایم [۲۵].

#### ۴-۴- محاسبه انرژی بستگی دوترون

پتانسیل یوکاوا به صورت معادله (۴-۱۱) است [۲۶-۲۸]:

$$v(r) = -\lambda \frac{e^{-ar}}{r} \quad (۴-۱۱)$$

قسمت شعاعی معادله شرودینگر پس از جایگذاری معادله (۴-۱۱) به صورت معادله (۴-۱۲) به دست می‌آید:

$$r^{1-D} \frac{d}{dr} (r^{D-1} \frac{d}{dr}) R_{nl}(r) - \frac{l(l+D-2)}{r^2} R_{nl}(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E + \lambda \frac{e^{-ar}}{r} \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (۴-۱۲)$$

و با استفاده از تغییر متغیر (۴-۱۳):

$$R_{nl}(r) = r^{-\frac{(D-1)}{2}} U_{nl}(r) \quad (۴-۱۳)$$

معادله (۴-۱۲) تبدیل به معادله (۴-۱۴) می‌شود:

$$U_{nl}''(r) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,l} + \lambda \frac{e^{-ar}}{r}) - \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4r^2} \right] U_{nl}(r) = 0 \quad (۴-۱۴)$$

و با استفاده از تقریب (۴-۱۵) [۲۹،۳۰]:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2} \quad (15-4)$$

و یا به طور معادل

$$\frac{1}{r} \approx \frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})} \quad (16-4)$$

همچنین با استفاده از تغییر متغیر  $s = e^{-2\alpha r}$  و معادلات (15-4) و (16-4) معادله (14-4) تبدیل به معادله (17-4) می‌شود:

$$\frac{d^2 U_{nl}(s)}{ds^2} + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \frac{dU_{nl}(s)}{ds} + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \left[ s^2 \left( \frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2} - \frac{\mu \lambda}{\hbar^2 \alpha} \right) + s \left( \frac{-\mu E}{\hbar^2 \alpha^2} + \frac{\mu \lambda}{\hbar^2 \alpha} - \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4} \right) + \frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2} \right] U_{nl}(s) = 0 \quad (17-4)$$

از مقایسه معادله (17-4) با (پیوست الف) ضرایب به صورت (18-4) به دست می‌آیند:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

$$\xi_1 = -\frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2} + \frac{\mu}{\hbar^2 \alpha},$$

$$\xi_2 = -\frac{\mu E}{\hbar^2 \alpha^2} + \frac{\mu}{\hbar^2 \alpha} - \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4}, \quad \xi_3 = -\frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}$$

$$\alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4} + \frac{\mu \lambda}{\hbar^2 \alpha} - \frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2} \quad (18-4)$$

$$\alpha_7 = -\frac{\mu \lambda}{\hbar^2 \alpha} + \frac{\mu E}{\hbar^2 \alpha^2} + \frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{4}$$

$$\alpha_8 = -\frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}$$

$$\alpha_9 = \frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}$$

$$\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}},$$

$$\alpha_{11} = 2 + 2\left(\sqrt{\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}} + \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}\right),$$

$$\alpha_{12} = \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}},$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}} + \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}} \right)$$

ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع به ترتیب به صورت معادلات (۴-۱۹) و (۴-۲۰) به دست می‌آیند:

$$n + \frac{1}{2}(2n + 1) + (2n + 1) \left[ \sqrt{\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}} + \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}} \right] + n(n - 1) - \frac{\mu \lambda}{\hbar^2 \alpha} + \quad (۴-۱۹)$$

$$\frac{(2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4} + 2\sqrt{\left(\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}\right) \frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}} = 0$$

$$\psi(s) = s^{\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}} (1 - s)^{-\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}} + \frac{1}{2} + \left(\sqrt{\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}} + \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}\right)} \times$$

$$\frac{(-1)^n}{n! 2^n (1 - s)^{2\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}} (1 + s)^{2\left(\sqrt{\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}} + \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}\right) - 2\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}} \times \quad (۴-۲۰)$$

$$\frac{d^n}{ds^n} \left[ (1 - s)^{2\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}} + n} (1 + s)^{2\left(\sqrt{\frac{1 + (2l + D - 1)(2l + D - 3)}{4}} + \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}\right) - 2\sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2}}} \right]$$

همانطور که گفته شد انرژی بستگی دوترون در حدود  $2.224 \text{ MeV}$  است که در مقایسه با جرم پروتون و نوترون خیلی کم است. دوترون دارای اعداد کوانتومی به صورت (۴-۲۱) است:

$$l = 0, S = 1, J = 1 \quad (۴-۲۱)$$

که به ترتیب عبارتند از اندازه حرکت مداری نسبی، اسپین کل و اندازه حرکت زاویه‌ای کل.

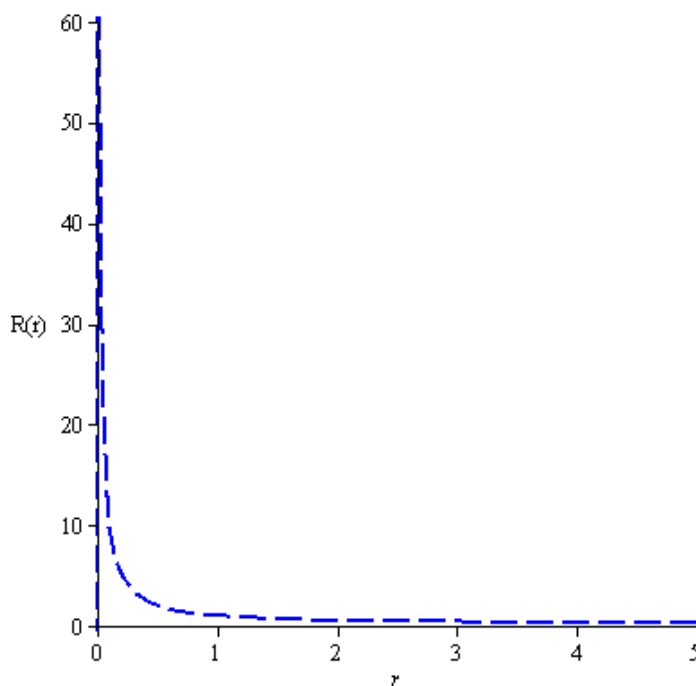
در این قسمت انرژی بستگی دوترون را به ازای  $n=0$ ,  $l=0$ ,  $\mu=0.50433u$ ,  $\hbar=c=1$ ,  $D=3$

متفاوت به دست آورده‌ایم، که در جدول ۴-۱ ارائه شده است:

جدول ۴-۱- انرژی بستگی دوترون

$\alpha$	$\lambda$	$E_b (MeV)$	$\alpha$	$\lambda$	$E_b (MeV)$
۰/۹۲	۰/۴۹	۲/۵۵۰۶۱۸۱	۰/۹۷	۰/۵۰	۲/۰۴۱۹۸۳۸
۰/۹۳	۰/۴۹	۲/۳۴۹۴۶۱۴	۰/۹۶	۰/۵۱	۲/۷۱۰۹۹۵۸
۰/۹۴	۰/۴۹	۲/۱۵۶۵۷۸۷	۰/۹۷	۰/۵۱	۲/۵۰۳۴۹۵۷
۰/۹۵	۰/۴۹	۱/۹۷۱۹۵۰۳	۰/۹۸	۰/۵۱	۲/۳۰۴۲۴۹۹
۰/۹۴	۰/۵۰	۲/۶۳۰۲۰۶۱	۰/۹۹	۰/۵۱	۲/۱۱۳۲۵۸۴
۰/۹۵	۰/۵۰	۲/۴۲۵۸۷۷۷	۰/۹۹	۰/۵۲	۲/۵۸۲۳۳۵
۰/۹۶	۰/۵۰	۲/۲۲۹۸۰۳۶	۱/۰۰	۰/۵۲	۲/۳۷۹۹۱۷۶

و همچنین تابع موج دوترون در حالت پایه به صورت شکل ۱-۴ است:



شکل ۱-۴- تابع موج دوترون در حالت پایه

همانطور که دیده می‌شود مقادیر به دست آمده در جدول ۱-۴ همخوانی خوبی با مقدار تجربی انرژی بستگی دوترون دارند.

## فصل پنجم

# بررسی مزون‌های با اسپین صفر و یک

## ۵-۱- مزون

در اینجا یک سوال پیش می‌آید که مدل کلاسیک اصلا به آن نپرداخته است، چه چیزی اجزای هسته را کنار هم نگه می‌دارد؟ چون پروتون‌های با بار مثبت باید همدیگر را به شدت دفع کنند، ولی کنار هم و فشرده چیده شده‌اند. روشن است که نیروی دیگری باید وجود داشته باشد که قوی‌تر از نیروی دافعه الکتریکی است و پروتون‌ها و نوترون‌ها را کنار هم نگه می‌دارد. فیزیکدانان آن دوره آن را نیروی قوی نامیده بودند، اما اگر چنین نیروی قوی در طبیعت موجود است چرا آن را در زندگی روزمره حس نمی‌کنیم؟ پاسخ این است که آن نیرو اگر چه قوی است، ولی برد آن کوتاه است.

یوکاوا در سال ۱۹۳۴ نخستین نظریه شایان توجه نیروی قوی را ارائه کرد. یوکاوا فرض کرده بود که پروتون و نوترون به وسیله نوعی میدان به یکدیگر جذب می‌شوند، درست به همان ترتیب که الکترون به وسیله میدان الکتریکی پروتون و ماه به وسیله میدان جاذبه زمین جذب می‌شود، این میدان باید کوانتیده باشد و یوکاوا پرسیده بود که خواص کوانتوم آن چیست؟ ذره ای که تبادل آن ویژگی‌های شناخته شده‌ی نیروی قوی را پدید آورد؟ برای نمونه برد کوتاه نیرو نشان می‌داد که واسطه خیلی سنگین است، یوکاوا محاسبه کرده بود که جرم آن نزدیک به ۳۰۰ برابر الکترون یا حدود یک ششم جرم پروتون است. چون این ذره بین الکترون و پروتون واقع می‌شد آن را مزون (یعنی ذره میانه) نامیدند که در جدول ۵-۱ ویژگی‌های مزون‌های با اسپین صفر و در جدول ۵-۲ ویژگی‌های مزون‌های با اسپین یک مورد بررسی قرار گرفته است. اکنون یوکاوا می‌دانست که چنین ذره‌ای در آزمایشگاه مشاهده نشده و بنابراین فرض کرده بود که نظریه‌اش نادرست است، اما در آن زمان شماری از پژوهش‌های برنامه‌ریزی شده درباره پرتوهای کیهانی در دست انجام بود و در سال ۱۹۳۷ دو گروه جداگانه ذراتی را یافتند که با توصیف یوکاوا جور در

می‌آمدند، در واقع پرتوهای کیهانی که در هر ثانیه، زمین را بمباران می‌کنند، در درجه نخست از این نوع ذره‌های با وزن میانه تشکیل شده‌اند. برای مدتی به نظر می‌رسید که همه چیز بر وفق مراد است، اما با انجام پژوهش‌های مفصل‌تر درباره ذرات اشعه کیهانی تفاوت‌های شگفت‌انگیزی بروز کرد، عمر آنها آنگونه که گفته شده بود، نبود و در ظاهر خیلی سبک‌تر از آن بودند که یوکاوا پیش‌بینی کرده بود. از این بدتر اندازه‌گیری‌های گوناگون جرم با یکدیگر سازگاری نداشتند. در سال ۱۹۴۶ آزمایش‌های تعیین‌کننده‌ای در رم انجام شد که نشان می‌داد ذرات پرتوهای کیهانی برهم‌کنش ضعیفی با هسته اتم دارند. اگر این ذرات در واقع همان مزون یوکاوا بودند، یعنی فرستنده نیروی قوی برهم‌کنش باید چشمگیر می‌بود. سرانجام این معما در سال ۱۹۴۷ توسط گروهی از دانشمندان حل شد که در واقع دو نوع ذره میان وزن در پرتوهای کیهانی وجود دارد که به آنها پایون ( $\pi$ ) و میون ( $\mu$ ) می‌گفتند. مزون یوکاوا همان پایون است که در جو زمین به مقدار زیاد تولید می‌شود، ولی به طور معمول مدتها پیش از رسیدن به زمین تجزیه می‌شود. این گروه از دانشمندان امولسیون عکاسی خود از قله کوهها را ظاهر کردند یکی از فراورده‌های واپاشی میون می‌باشد که سبک‌تر است و بیشتر میون‌ها را در سطح دریا مشاهده می‌کنیم. بنابراین در جستجوی مزون یوکاوا صرفاً یک علامت بین راه بود و هیچ ربطی به برهم‌کنش‌های قوی نداشت. در واقع از نظر رفتاری خیلی شبیه الکترون اما سنگین‌تر از آن است و بهتر است آن را جزء خانواده لپتون‌ها بدانیم [۴].

جدول ۵-۱- ویژگی‌های مزون‌های با اسپین صفر [۲]

مزون	بار الکتریکی	توزیع کوارکی	جرم ( $MeV/c^2$ )
$\pi^\pm$	۱- و ۱	$u\bar{d}, d\bar{u}$	۱۳۹/۵۶۹
$\pi^0$	.	$\frac{(u\bar{u} - d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	۱۳۴/۹۶۴
$k^\pm$	۱- و ۱	$u\bar{s}, s\bar{u}$	۴۹۳/۶۷
$k^0$	.	$d\bar{s}$	۴۹۷/۷۲



$\eta$	.	$\frac{(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})}{\sqrt{6}}$	۵۴۸/۸
$\eta'$	.	$\frac{(u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s})}{\sqrt{3}}$	۹۵۷/۶
$D^\pm$	۱ و -۱	$c\bar{d}$	۱۸۶۹
$D^0$	.	$c\bar{u}$	۱۸۶۵
$B^\pm$	۱ و -۱	$u\bar{b}, b\bar{u}$	۵۲۷۱
$B^0$	.	$d\bar{b}$	۵۲۷۵
$\eta_c$	.	$c\bar{c}$	۲۹۸۱

جدول ۵-۲- ویژگی‌های مزون‌های با اسپین یک [۲]

مزون	توزیع کواریکی	بار الکتریکی	جرم ( $MeV/c^2$ )
$\rho$	$u\bar{d}$	۱	۷۷۰
$k^*$	$u\bar{s}$	۱	۸۹۲
$\omega$	$\frac{(u\bar{u} + d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	.	۷۸۳
$\phi$	$s\bar{s}$	.	۱۰۲۰
$D^*$	$c\bar{d}$	۱	۲۰۱۰
$\gamma$	$b\bar{b}$	.	۹۴۶۰

## ۵-۲- محاسبه انرژی بستگی مزون‌های با اسپین صفر

حل معادلات موج نسبیتی مانند کلاین‌گوردن و دیراک یکی از مسئله‌های جالب در فیزیک انرژی بالا و فیزیک هسته‌ای است. تا کنون سعی شده است که روش‌هایی که برای حل معادلات غیرنسبیتی به کار رفته است برای معادلات نسبیتی نیز به کار برده شود. روش ابرتقارن<sup>۱</sup> [۳۱، ۳۲]، روش حدسی<sup>۲</sup> [۳۳، ۳۴] و... تا کنون معادله کلاین‌گوردن برای جرم وابسته به مکان و پتانسیل‌های مختلفی حل شده است، در این

<sup>۱</sup> Supersymmetry

<sup>۲</sup> Ansatz

قسمت معادله کلاین گوردن با استفاده از پتانسیل هولسن و جرم وابسته به مکان حل شده است و در آن ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع متناظر را به دست آورده ایم و با استفاده از ویژه مقادیر انرژی، انرژی بستگی مزون ها را محاسبه کرده ایم.

قسمت شعاعی معادله کلاین گوردن به صورت معادله (۱-۵) است [۳۶،۳۵]:

$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) - \frac{1}{\hbar^2 c^2} (m_0^2 c^4 - (E - V(r))^2) R(r) = 0 \quad (1-5)$$

تغییر متغیر (۲-۵) را وارد می کنیم:

$$R(r) = r^{-1} u(r) \quad (2-5)$$

در این صورت معادله (۱-۵) به معادله (۳-۵) تبدیل می شود:

$$u''(r) + \left[ \frac{(E - V(r))^2 - (m(r)c^2)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = 0 \quad (3-5)$$

با در نظر گرفتن پتانسیل هولسن و جرم وابسته به مکان به صورت معادله (۴-۵):

$$V(r) = -\frac{V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}}$$

$$m(r) = m_0 \left( 1 - \frac{m_1}{m_0} \frac{e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \right) \quad (4-5)$$

با در نظر گرفتن تقریب (۵-۵):

(۵-۵)

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2}$$

با قرار دادن معادلات (۴-۵) و (۵-۵) در معادله (۳-۵) به معادله (۶-۵) می رسیم:

$$u''(r) + \left( \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{e^{-ar}}{(1-e^{-ar})} \left( \frac{2EV_0}{\hbar^2 c^2} + \frac{2m_1 m_0 c^2}{\hbar^2} - l(l+1)\alpha^2 \right) \right) u(r) + \left( \frac{e^{-2ar}}{(1-e^{-ar})^2} \left( \frac{V_0^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m_1^2 c^2}{\hbar^2} \right) \right) u(r) = 0 \quad (6-5)$$

با وارد کردن تغییرمتغیر  $s = e^{-ar}$  در معادله (6-5)، معادلات (7-5) حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2}{ds^2} + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \frac{d}{ds} + \frac{1}{s^2(1-s)^2} [\gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_3] = 0 \quad (7-5)$$

$$\gamma_1 = \frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{2EV_0}{\alpha^2} + \frac{V_0^2}{\alpha^2} - \frac{m_0^2}{\alpha^2} - \frac{2m_1 m_0}{\alpha^2} - \frac{m_1^2}{\alpha^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{-2E^2}{\alpha^2} + \frac{2EV_0}{\alpha^2} + \frac{2m_0^2}{\alpha^2} + \frac{2m_1 m_0}{\alpha^2} - l(l+1)$$

$$\gamma_3 = \frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m_0^2}{\alpha^2}$$

از مقایسه معادله (7-5) با (پیوست الف) ضرایب (8-5) حاصل می‌شود:

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 1 \quad \alpha_4 = 0 \quad \alpha_5 = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\alpha^2} (-E^2 + 2EV_0 - V_0^2 + m_0^2 + 2m_0 m_1 + m_1^2)$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{\alpha^2} (2E^2 - 2EV_0 - 2m_0^2 - 2m_0 m_1) + l(l+1)$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{\alpha^2} (-E^2 + m_0^2)$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{\alpha^2} (m_1^2 - V_0^2) + l(l+1) + \frac{1}{4} \quad (8-5)$$

همچنین معادله ویژه مقدار انرژی به صورت معادله (9-5) است:

$$\frac{1}{2} + n(n+1) + (2n+1)\sqrt{\frac{m_1^2 - V_0^2}{\alpha^2} + l(l+1)} + \frac{1}{4} +$$

$$(2n+1)\sqrt{\frac{m_0^2 - E^2}{\alpha^2} - \frac{2EV_0}{\alpha^2} - \frac{2m_1m_0}{\alpha^2} + l(l+1)} + \quad (9-5)$$

$$2\sqrt{\frac{m_0^2 - E^2}{\alpha^2} \left(\frac{m_1^2 - V_0^2}{\alpha^2} + l(l+1) + \frac{1}{4}\right)} = 0$$

تابع موج نیز به صورت معادله (۱۰-۵) به دست می‌آید:

$$\psi(s) = s \sqrt{\frac{m_0^2 - E^2}{\alpha^2}} (1-s)^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m_1^2 - V_0^2}{\alpha^2} + l(l+1) + \frac{1}{4}}} \times$$

$$P_n^{(2\sqrt{\frac{m_0^2 - E^2}{\alpha^2}}, 2\sqrt{\frac{m_1^2 - V_0^2}{\alpha^2} + l(l+1) + \frac{1}{4}})} \quad (10-5)$$

$$(1-2s)$$

برای محاسبه انرژی بستگی مزون‌ها طبق معادله (۱۱-۵) داریم [۳۷]:

$$E_b = E_{nl} - m_0c^2 \quad m_{0\pi}c^2 = 139.570 \text{ MeV} \quad (11-5)$$

و همچنین در جدول ۳-۵ انرژی بستگی پایون را برای هسته‌های مختلف محاسبه کرده‌ایم که نتایج به دست آمده را با نتایج مرجع ۳۶ که برای پتانسیل وود-ساکسون (Woods-Saxon) حل شده است، مقایسه کرده‌ایم. که در آن  $E_b^a$  مربوط به محاسبات این پتانسیل است و  $E_b^b$  مربوط به مرجع ۳۶ می‌باشد.

جدول ۳-۵- انرژی بستگی مزون پای

عدد جرمی	$V_0(\text{MeV})$	$n$	$l$	$E_b^a(M=0.3) (\text{MeV})$	$E_b^a(M=0.4) (\text{MeV})$	$E_b^b (\text{MeV})$
۴۰	۴۵/۷۰	۰	۱	-۱۲۴/۳۷۶۰	-۱۱۲/۹۷۷۱	-۱۰۷/۸۷۷۷
۵۶	۴۷/۷۸	۰	۱	-۱۳۰/۸۶۶۲	-۱۱۷/۱۶۷۷	-۱۲۷/۵۲۳۸
۶۶	۴۹/۰۸	۰	۲	-۸۷/۶۶۲۹	-۸۷/۷۵۸۵	-۵۰/۳۳۵۹
۹۲	۵۲/۴۶	۰	۲	-۹۵/۳۴۸۱	-۹۳/۴۴۴۱	-۱۰۱/۸۹۶۷
۱۴۰	۵۸/۷۰	۰	۳	-۶۶/۹۷۴۸	-۷۱/۰۵۱۵	-۹۲/۵۳۲۷
۲۰۸	۶۷/۵۴	۰	۵	-۲۵/۱۳۷۹	-۳۲/۱۸۱۷	-۳۳/۶۰۱۴

### ۵-۳- محاسبه انرژی بستگی مزون‌های با اسپین یک

در این قسمت به بررسی مزون‌های با اسپین یک با استفاده از معادله دافین-کمر-پتیو<sup>۱</sup> با استفاده از پتانسیل کراتزر (Kratzer) پرداخته‌ایم. فرم معادله  $DKP$  به صورت معادله (۱۲-۵) است [۴۲-۳۸]:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + (E_{n,J} - U_v^0)^2 - m^2 \right) F_{n,J}(r) = 0. \quad (12-5)$$

پتانسیل برداری کراتزر به صورت معادله (۱۳-۵) است [۴۳]:

$$U_v^0(r) = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1}{r^2} \quad (13-5)$$

که در آن  $U_0, U_1$  ضرایب ثابتی هستند.

با استفاده از روش حدسی تابع موج را به صورت معادله (۱۴-۵) در نظر می‌گیریم:

$$F_{n,J}(r) = K_n(r) \exp[W_J(r)] \quad (14-5)$$

$K_n(r)$  و  $W_J(r)$  به ترتیب به صورت معادلات (۱۵-۵) و (۱۶-۵) انتخاب می‌کنیم:

$$K_n(r) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ \prod_{i=1}^v (r - a_i^v) & n > 1 \end{cases} \quad (15-5)$$

$$W_J(r) = \frac{a}{r} + br + c \ln r \quad (16-5)$$

با قرار دادن معادلات (۱۵-۵) و (۱۶-۵) در معادله (۱۴-۵) و دیفرانسیل‌گیری معادله (۱۷-۵) حاصل می‌شود:

<sup>1</sup> Duffin, Kemmer and Petiau

$$F''_{n,J}(r) = \left[ W''_J(r) + W'^2_J(r) + \frac{K''_n(r) + 2K'_n(r)W'_J(r)}{K_n(r)} \right] \quad (17-5)$$

با استفاده از معادلات (14-5) و (17-5) برای حالت بدون گره و قرار دادن آنها در معادله (12-5) معادله (18-5) به دست می‌آید:

$$b^2 + E_{0,J}^2 - m^2 + \frac{2cb - 2EV_0}{r} + \frac{-c + c^2 - 2ab - J(J+1) + V_0^2 - 2EV_1}{r^2} + \frac{-2ca + 2V_0V_1 + 2a}{r^3} + a^2 + V_1^2 = 0 \quad (18-5)$$

که با مساوی صفر قرار دادن ضرایب مختلف  $r$  در معادله (18-5)، معادلات (19-5) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} b^2 + E_{0,J}^2 - m^2 &= 0 \\ 2cb - 2EV_0 &= 0 \\ -c + c^2 - 2ab - J(J+1) + V_0^2 - 2EV_1 &= 0 \\ -2ca + 2V_0V_1 + 2a &= 0 \\ a^2 + V_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (19-5)$$

که با استفاده از معادلات (19-5) و به دست آوردن  $a, b, c$  معادله ویژه مقدراری انرژی به صورت معادله (20-5) به دست می‌آید:

$$\frac{E_{0,J}V_0}{\sqrt{m^2 - E_{0,J}^2}} + \frac{E_{0,J}^2V_0^2}{m^2 - E_{0,J}^2} + \frac{4V_0V_1\sqrt{m^2 - E_{0,J}^2}}{-\frac{E_{0,J}V_0}{\sqrt{m^2 - E_{0,J}^2}} - 1} - J(J+1) + V_0^2 - 2E_{0,J}V_1 = 0 \quad (20-5)$$

با قرار دادن ثابت‌ها در معادله (14-5) تابع موج به صورت معادله (21-5) به دست می‌آید که در شکل 5-1 به ازای  $V_0 = 0.2, J = 0, 1, 2$  رسم شده است:

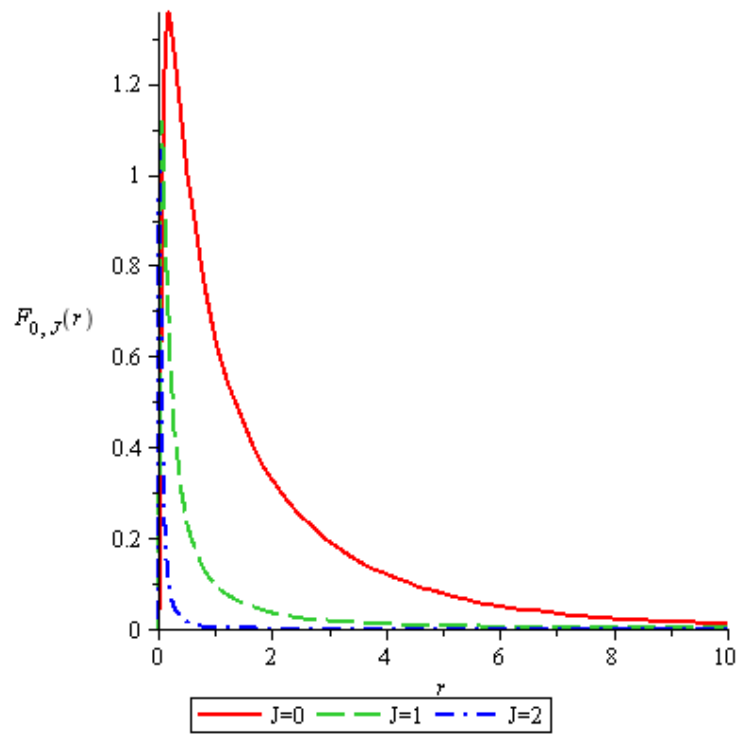
$$F_{0,J}(r) = N_{0,J} r^{\left(\frac{-E_{0,J}V_0}{\sqrt{m^2 - E_{0,J}^2}}\right)} \exp \left[ \left( \frac{2V_0V_1}{E_{0,J}V_0} - 1 \right) \frac{1}{r} + \left( -\sqrt{m^2 - E_{0,J}^2} \right) r \right] \quad (21-5)$$

ویژه مقادیر انرژی به دست آمده به ازای  $V_1 = 0.5$ ,  $m=1$  و مقادیر مختلف  $J$ ,  $V_0$  در جدول ۴-۵ ارائه شده است:

جدول ۴-۵- ویژه مقادیر محاسبه شده به ازای اعداد کوانتومی و  $V_0$  های متفاوت

$ n, J\rangle$	$E_{0,J}$ for $V_0 = 0.1 \text{ fm}^{-1}$	$E_{0,J}$ for $V_0 = 0.2 \text{ fm}^{-1}$	$E_{0,J}$ for $V_0 = 0.3 \text{ fm}^{-1}$
$ 0,0\rangle$	۰/۹۸۷۱۰۴	۰/۹۵۰۶۰۱	۰/۸۹۶۰۲۷
$ 0,1\rangle$	۰/۹۹۷۰۵۹	۰/۹۸۸۲۹۷	۰/۹۷۳۸۹۲
$ 0,2\rangle$	۰/۹۹۸۹۶۰	۰/۹۹۵۸۴۲	۰/۹۹۰۶۵۴
$ 0,3\rangle$	۰/۹۹۹۴۹۲	۰/۹۹۷۹۷۱	۰/۹۹۵۴۳۵
$ 0,4\rangle$	۰/۹۹۹۷۰۳	۰/۹۹۸۸۱۵	۰/۹۹۷۳۳۴
$ 0,5\rangle$	۰/۹۹۹۸۰۷	۰/۹۹۹۲۲۷	۰/۹۹۸۲۶۲
$ 0,6\rangle$	۰/۹۹۹۸۴۵	۰/۹۹۹۴۵۸	۰/۹۹۸۷۸۰
$ 0,7\rangle$	۰/۹۹۹۸۹۹	۰/۹۹۹۵۹۹	۰/۹۹۹۰۹۸
$ 0,8\rangle$	۰/۹۹۹۹۲۳	۰/۹۹۹۶۹۱	۰/۹۹۹۳۰۶
$ 0,9\rangle$	۰/۹۹۹۹۳۸	۰/۹۹۹۷۵۵	۰/۹۹۹۴۵۰
$ 0,10\rangle$	۰/۹۹۹۹۵۰	۰/۹۹۹۸۰۱	۰/۹۹۹۵۵۴

و برای محاسبه انرژی بستگی مزون‌های با اسپین یک با استفاده از فرمول  $E_b = E_{0J} - m_0c^2$  که در آن  $m_0c^2$  برابر جرم مزون‌های با اسپین یک است.



شکل ۵-۱- توابع موج به ازای  $V_0 = 0.2, J = 0, 1, 2$



## نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه به بررسی انرژی بستگی هسته‌های مختلف با استفاده از حل تحلیلی معادله غیرنسبیتی شرودینگر با پتانسیل وود-ساکسون اصلاح شده (Modified Woods-Saxon) پرداخته‌ایم، ویژه‌مقادیر انرژی را به دست آورده و با پرکردن ترازها و رعایت اصل طرد پائولی و محاسبه متوسط انرژی بستگی برای هسته‌های مختلف و با استفاده از پدیدار شناختی، مناسب‌ترین ضریب پتانسیل را برای هسته‌های مختلف به دست آورده و با استفاده از ضریب پتانسیل میانگین انرژی بستگی متوسط را برای هسته‌های مختلف به دست آورده‌ایم که همانطور که انتظار داشتیم با مقدار تجربی آن که در حدود  $8\text{MeV}$  است همخوانی خوبی داشتند. همچنین به بررسی حالت غیرنسبیتی با استفاده از پتانسیل یوکاوا پرداخته‌ایم و با به دست آوردن ویژه‌مقادیر انرژی موفق به محاسبه انرژی بستگی دوترون شده که مقادیر به دست آمده با مقدار تجربی همخوانی بسیار خوبی داشت. و در ادامه با بررسی حالت‌های نسبیتی برای ذرات با اسپین صفر و یک توانسته‌ایم انرژی بستگی آنها را محاسبه کنیم که نتایج به دست آمده برای ذرات با اسپین صفر همخوانی خوبی با کارهای قبلی داشتند.

## پیوست الف:

### روش Nikiforov-Uvarov

برخی از معادلات دیفرانسیل درجه دوم را می‌توان به روش Nikiforov-Uvarov و با تغییر متغیر مناسب

$s = s(r)$  حل کرد [۴۵، ۴۴]:

$$\psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi_n(s) = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

که  $\sigma(s)$  و  $\tilde{\sigma}(s)$  چند جمله‌هایی حداکثر درجه دوم هستند و  $\tilde{\tau}(s)$  یک چند جمله‌ای درجه اول است.

برای یافتن جواب‌های خاص معادله به روش جداسازی متغیرها، با تبدیل (الف-۲) کار می‌کنیم:

$$\psi_n(s) = \varphi(s) y_n(s) \quad (\text{الف-۲})$$

با این تبدیل معادله (الف-۱) به معادله فوق هندسی - گونه<sup>۱</sup> (الف-۳) تبدیل می‌شود:

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (\text{الف-۳})$$

که  $\varphi(s)$  با مشتق لگاریتمی معادله (الف-۴) تعریف می‌شود:

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (\text{الف-۴})$$

$y_n(s)$  یک تابع فوق هندسی - گونه است که جواب‌های آن چند جمله‌هایی هستند که از رابطه رودریگز<sup>۲</sup> به

دست می‌آیند

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)] \quad (\text{الف-۵})$$

که  $B_n$  ثابت نرمالیزاسیون است و  $\rho(s)$  باید در شرط (الف-۶) صدق کند

<sup>1</sup> Hypergeometric type equation

<sup>2</sup> Rodrigues relation

$$\frac{d}{ds} w(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \quad (\text{الف-۶})$$

$$w(s) = \sigma(s)\rho(s)$$

تابع  $\pi(s)$  و پارامتر  $\lambda$  مورد نیاز روش  $NU$  به صورت معادلات (الف-۷) تعریف می‌شوند:

$$\pi(s) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}$$

$$\lambda = k + \pi'(s) \quad (\text{الف-۷})$$

به منظور یافتن مقدار  $k$ ، عبارت زیر رادیکال باید مربع یک چند جمله‌ای باشد. بنابراین، معادله ویژه مقدری (الف-۸) به دست می‌آید:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \delta'' \quad (\text{الف-۸})$$

که

$$\tau(s) = \tau'(s) + 2\pi(s) \quad (\text{الف-۹})$$

معادله (الف-۹) و مشتق آن باید منفی باشد.

در یک پژوهش دیگر با استفاده از روش  $NU$ ، طیف انرژی و تابع موج را برای شکل کلی معادله شرودینگر محاسبه کرده‌اند [۴۶].

معادله (الف-۱۰) شکل کلی معادله شرودینگر برای هر نوع پتانسیل است:

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\zeta_1 s^2 + \zeta_2 s - \zeta_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \right] \psi(s) = 0 \quad (\text{الف-۱۰})$$

با مقایسه معادله (الف-۱۰) با معادله (الف-۱) داریم:

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$\sigma = s(1 - \alpha_3 s) \quad (\text{الف-۱۲})$$

هم چنین

$$\tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \quad (\text{الف-۱۳})$$

با جایگذاری آن‌ها در معادله (الف-۷) خواهیم داشت

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8} \quad (\text{الف-۱۴})$$

که

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3 \quad (\text{الف-۱۵})$$

چون تابع زیر رادیکال باید مربع کامل باشد:

$$k_{\pm} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (\text{الف-۱۶})$$

و

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \quad (\text{الف-۱۷})$$

برای  $k_-$  معادلات (الف-۱۸) به دست می‌آید:

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s - \left[ (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8} \right]$$

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2 \left[ (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8} \right]$$

$$\tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (\text{الف-۱۸})$$

که پس از جایگذاری در معادله (الف-۸)، معادله (الف-۱۹) حاصل می‌شود:

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (\text{الف-۱۹})$$

معادله (الف-۱۹) طیف انرژی مسئله را ارائه می‌کند.

از معادلات (الف-۶) تابع وزن به صورت معادله (الف-۲۰) خواهد شد:

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1} (1 - \alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11} - \alpha_{10} - 1}{\alpha_3}} \quad (\text{الف-۲۰})$$

و از رابطه (الف-۵) توابع  $y_n(s)$  به صورت معادله (الف-۲۱) است:

$$y_n(s) = P^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11} - \alpha_{10} - 1}{\alpha_3}\right)} (1 - \alpha_3 s) \quad (\text{الف-۲۱})$$

که

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \\ \alpha_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \\ \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \\ \alpha_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \end{aligned} \quad (\text{الف-۲۲})$$

و

$$\varphi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \quad (\text{الف-۲۳})$$

و جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت معادله (الف-۲۴) به دست می‌آید:

$$\psi_n(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11} - \alpha_{10} - 1}{\alpha_3}\right)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (\text{الف-۲۴})$$

که از معادله (الف-۲۴) به عنوان ویژه تابع استفاده می‌شود.

## مراجع :

- [۱] The Great Physicist, arXiv: Physics/0508195V1 [physics. hist- ph]
- [۲] [http:// en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)
- [۳] هانس فراون فلدر، ارنست م. هنلی، ۱۳۷۴، "فیزیک زیر اتمی"، بارزی م و فلاحی م، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۲، ۱۱۵، ۲۲۷)
- [۴] دیوید جفری گریفیتس، ۱۳۸۴، "مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی"، قهرمانی ن، چاپ اول، نوپردازان، تهران، (۱۴-۱۸).
- [۵] کاتینگهام/گرینوود، ۱۳۸۷، "مبانی فیزیک هسته‌ای"، رحیمی ف و رضازاده ح، چاپ دوم، دانشگاه فردوسی مشهد، (۲۱، ۲۲) و (۳۷-۴۱).
- [۶] والتر میرهوف، ۱۳۶۷، "مبانی فیزیک هسته‌ای"، رحیمی ف، چاپ دوم، دانشگاه فردوسی مشهد، (۵۵-۵۷) و ۶۲.
- [۷] کنت کرین، ۱۳۷۱، "آشنایی با فیزیک هسته‌ای"، جلد اول، ابوکاظمی ا و رهبر م، چاپ پنجم، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۵۷-۱۶۳) و (۹۰، ۹۱).
- [۸] A. A. Rajabi, (2005), Iranian Journal of Physics Research, Vol. 5, No. 292005.
- [۹] A. A. Rajabi, (2006), Commun. Theor. Phys. 45 pp. 669-674.
- [۱۰] A. A. Rajabi, (2005), Few- Body Systems 37, pp. 197-213.
- [۱۱] M. Fabre de La Ripelle, S. A. Sofianos, R. M. Adam, (2005), Annals of Physics 316, pp. 107-159.
- [۱۲] D. Agboola, arXiv: 0811.3626V3 [math-ph] 15 Apr 2009.
- [۱۳] Sameer M. Ikdair and Ramazan Sever, (2008), Cent. Eur. J. Phys. 6 (3) 697-703.
- [۱۴] Sameer M. Ikdair, (2008), Chinese Journal of Physics, Vol. 46, No. 3.
- [۱۵] D. Agboola (2010), CHIN. PHYS. LETT, Vol. 27, No. 4), 040301.

- [۱۶] Sameer M. Ikdair and Ramazan Sever (2008), Ann. Phys **17**, N0. 11,( 897-910).
- [۱۷] C- Y- Chen, D- S. Sun and F- L. LU, (2007), Phys Lett A **370**, 219.
- [۱۸] W. C. Qiang, R. S. Zhou and Y. Gao, (2007), Phys, Lett A, **371**, 201.
- [۱۹] V. H. Badalov, H. I. Ahmadov and A. I. Ahmadov, arXiv: 0905.2731V1 [math-ph] 17 May 2009.
- [۲۰] Hakan Erkol, Ersan Demiralp, (2007), Physics Letters A, (55-63),**365**.
- [۲۱] G. Hellmann Einfhruung in die Quantenchemie **1937**.
- [۲۲] R. P. Feynman, (1939), Phys. Rev. **56**, 340.
- [۲۳] C. L. Pekeris, (1934), Phys. Rev **45**.98.
- [۲۴] S.Flugge, (1994), Practical Quantum Mechanic, **Vo l 1**, (Springer, Berlin).
- [۲۵] کنت کرین، ۱۳۷۳، "آشنایی با فیزیک هسته‌ای"، جلد دوم، میرفخرایی ن و مدرس م، چاپ دوم، مرکز نشر دانشگاهی، ص (۳۴۰-۳۴۲)
- [۲۶] Mirosław. Bylicki, Artur Stachow, Jacek Karwowski and K. Mukherjee, (2007), Chemical Physics **331**, pp. 346- 350.
- [۲۷] E. Z. Liverts, E. G. Drukarev, V. B. Mandelzweig, (2007), Annals of Physics **322**, pp. 2958- 2977.
- [۲۸] E. Z. Liverts, V. B. Madelzweig, (2009), Annals of Physics **324**. pp. 388- 407
- [۲۹] Akpan N. Ikot, Louis E. Akpabio and Edet J. Uwah, (2011), EJTP **8** No.25, pp. 225- 232.
- [۳۰] C. S. Jia, T. Chen and L. G. Cui, (2009), Phys Lett A. **373**, 1621.
- [۳۱] S. Zarrinkamar et al., (2010), Ann. Phys., **325** pp. 1720-1726.
- [۳۲] S. Zarrinkamar et al., (2010), Ann. Phys., **325**, pp. 2522–2528.
- [۳۳] H. Egrifes and R. Sever, (2008), Int. J. Theor. Phys. **46**, 935.
- [۳۴] S. M. Ikhdaire and R. Sever, (2007), J. Mol. Struc.-Theochem **806**, 155.
- [۳۵] Altugh Arda, Ramazan Sever and Cevdet Tezcan, arXiv: 0811.2096V1 [math-ph] 13 Nov 2008.
- [۳۶] V. H. Badalov, H. I. Ahmadov and S. V. Badalov, arxiv: 0912.3890V1[math-ph] 19 Dec 2009.
- [۳۷] W. Greiner, **Relativistic Quantum Mechanic** (Springer, Berlin, 1990).
- [۳۸] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A 166, 127 (1938).
- [۳۹] R. J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).
- [۴۰] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A, 173, 91 (1939).

- [۴۱] G. Petiau, Acad. R. Belg. Mem. Collect. 16 (**1936**), 1114.
- [۴۲] S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, H. Rahimov and H. Hassanabadi, (**2011**), Modern Physics Letter A, **Vol 26**, 22
- [۴۳] S. M. Ikdair and R. Sever, (**2008**) J. Mol. Struct. Theochem **855**,13.
- [۴۴] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, Special Functions of Mathematical Physics, Birkhaauser: Basel (**1988**).
- [۴۵] S. A. Moszkowski and M. W. Kermode, (**1993**), ACTA PHYSICA POLONICA B, **VOL 24**.
- [۴۶] Cevdet Tezcan, Ramazan Sever, arXiv: 0807.2304V2 [quant-ph] 17 Dec **2009**.



## **Abstract**

There have been many propositions to study the structure of the nucleon including the shell, liquid drop and quark-like models with their own advantages and failures. Here we work on the basis of nonrelativistic quantum mechanics. More precisely speaking, in order to obtain more exact results, the repulsion among the protons is considered and the modified Woods-Saxon potential is applied. After obtaining the energy spectrum and filling up the energy levels by taking into account the Pauli Exclusion Principle, we have succeeded in finding the proper potential coefficient by phenomenological considerations and thereby the average binding energies of different nuclei have been reported. In addition, the energy eigenvalues are given in terms of the Jacobi polynomials and the expectation values are obtained via the Hellmann-Feynman theorem.

In chapter 4, Deuteron binding energy has been calculated under the Yukawa potential and the comparison with the existing experimental data is included. In the last chapter, bearing in mind the possible application of position-dependent mass formalism and appealing consequences of relativistic wave equations, we have reported the binding energies of some spin-zero and  $-1$  Mesons under the established Hulthén and Kratzer potentials.



**Shahrood University of Technology**  
**Physics Department**

**Master of Science Thesis**

**Nuclear Binding Energy with A Nucleons via  
Hyperspherical interaction Potentials**

Supervisor:

**Prof. Ali Akbar Rajabi**

By:

**Somayyeh Hassanabadi**

**September– 2011**