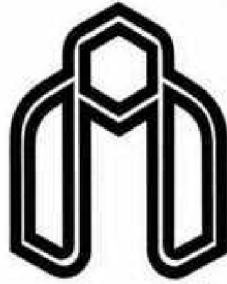


الله
الرحمن الرحيم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گرایش فیزیک: ذرات بنیادی

محاسبه فرم فاکتور پروتون به کمک کوارک‌های تشکیل دهنده

با پتانسیل مناسب

دانشجو: زهرا شیرزادفر

استاد راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اسفند ۱۳۸۹

چکیده:

تابع موج نسبیتی مربوط به کوارک‌ها با در نظر گرفتن پتانسیل اسکالر و برداری به صورت تحلیلی به دست آمده است و سپس فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون با توجه به تابع موج محاسبه شده‌اند.

حرکت کوارک‌ها توسط مختصات ژاکوبی ρ و λ توصیف شده‌اند. به منظور توصیف بهتر دینامیک سه کوارک، معرفی کردن مختصات فوق کروی مناسب می‌باشد که با جایگزینی ρ و λ در $x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ به دست خواهد آمد که x فوق شعاع است.

در انتها، شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون با توجه به فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی محاسبه شده‌اند. نتایج تصحیحات قابل ملاحظه‌ای به ویژه برای ممان مغناطیسی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: فرم فاکتور، پروتون، پتانسیل رنگ، پتانسیل فوق مرکزی، دیراک.

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

- ۱-۱- آشنایی با ذرات بنیادی..... ۲
- ۲-۱- نیروهای بنیادی..... ۷
- ۳-۱- الکترودینامیک کوانتومی..... ۹
- ۴-۱- کرومودینامیک کوانتومی..... ۱۳

فصل دوم: معادله‌ی کلاین-گوردون و معادله‌ی دیراک

- ۱-۲- معادله‌ی کلاین-گوردون برای یک ذره آزاد بدون اسپین..... ۱۸
- ۲-۲- جواب معادله‌ی کلاین-گوردون..... ۱۹
- ۳-۲- برهم کنش یک ذره کلاین-گوردون با پتانسل الکترومغناطیسی..... ۲۲
- ۴-۲- معادله‌ی دیراک..... ۲۶
- ۵-۲- شکل کواریانت معادله‌ی دیراک و ماتریس‌های γ دیراک..... ۲۷
- ۶-۲- جریان پایسته و مزدوج هرمیتی معادله‌ی دیراک..... ۲۹
- ۷-۲- اسپینورهای ذره‌ی آزاد..... ۳۰
- ۸-۲- پادذرات..... ۳۴
- ۹-۲- الکترون با اسپین $1/2$ در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی..... ۳۷

فصل سوم: ساختار هادرون‌ها

- ۱-۳- بررسی پراکندگی الکترون از یک توزیع بار- فرم فاکتورها..... ۴۱
- ۲-۳- پراکندگی الکترون- پروتون. فرم فاکتورهای پروتون..... ۴۵
- ۳-۳- پراکندگی غیر الاستیک الکترون- پروتون ($ep \rightarrow eX$)..... ۵۱
- ۴-۳- مقیاس بندی بیورکن..... ۵۸
- ۵-۳- پارتون‌ها و مقیاس بندی بیورکن..... ۶۱
- ۶-۳- بررسی اجزای داخل پروتون..... ۶۳

فصل چهارم: فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

- ۱-۴- مدل‌های نوکلئون..... ۷۵
- ۲-۴- معرفی پتانسیل پیشنهادی..... ۷۷
- ۳-۴- محاسبه تابع موج پروتون به کمک کواریک‌های تشکیل دهنده در مختصات فوق کروی..... ۷۸
- ۴-۴- $\frac{g_A}{g_V}$ برای پروتون..... ۸۴
- ۵-۴- فرم فاکتورهای الکترو مغناطیسی در مختصات فوق کروی..... ۸۵
- ۶-۴- نتیجه‌گیری و پیشنهادات..... ۸۸
- منابع..... ۸۹

چکیده

فهرست اشکال

فصل اول

شکل ۱-۱- جدول ذرات بنیادی..... ۶

فصل دوم

شکل ۱-۲- برهم کنش یک الکترون بدون اسپین با میدان الکترومغناطیسی A^μ ۲۵

شکل ۲-۲- عوامل رأس برای قوانین فاینمن (الف) الکترون با اسپین $1/2$ (ب) الکترون بدون اسپین..... ۳۹

فصل سوم

شکل ۱-۳- پایین ترین مرتبه ی پراکندگی الکترون از یک توزیع بار..... ۴۱

شکل ۲-۳- پایین ترین مرتبه ی پراکندگی الاستیک الکترون- پروتون..... ۴۵

شکل ۳-۳- دستگاه مختصات بریت..... ۵۰

شکل ۴-۳- فرم فاکتورهای پروتون به عنوان تابعی از q^2 ۵۰

شکل ۵-۳- نمودار پایین ترین مرتبه ی پراکندگی $ep \rightarrow eX$ ۵۱

شکل ۶-۳- سطح مقطع $ep \rightarrow eX$ بر حسب جرم W ۵۲

شکل ۷-۳- (الف) پراکندگی الاستیک $ep \rightarrow ep$ با فوتون هایی با طول موج بلند اندازه ی پروتون را از طریق آنالیز فرم

فاکتورهای الاستیک اندازه گیری می کند. (ب) در پراکندگی غیرالاستیک عمیق یک فوتون با طول موج کوتاه کوارک-

های داخل پروتون را تجزیه می کند..... ۵۸

شکل ۸-۳- تعیین تابع ساختار $v\omega_2$ توسط پراکندگی الکترون- پروتون به عنوان تابعی از Q^2 در $\omega = 4$ ۶۱

شکل ۹-۳- یک پروتون متشکل از کوارک های ظرفیت، گلوئون ها و جفت کوارک- پادکوارک های دریا می باشد..... ۶۴

شکل ۱۰-۳- نسبت F_2^{en}/F_2^{ep} به عنوان تابعی از x در پراکندگی غیرالاستیک عمیق اندازه گیری شده است..... ۶۸

شکل ۱۱-۳- رسم تابع ساختار مطابق با ترکیب بندی های فرضی مختلف برای پروتون..... ۷۰

شکل ۱۲-۳- تفاوت $F_2^{ep} - F_2^{en}$ به عنوان تابعی از x ، در پراکندگی غیرالاستیک عمیق..... ۷۱

شکل ۱۳-۳- (الف) توابع ساختار کوارک با توجه به آنالیز داده های پراکندگی غیرالاستیک عمیق. (ب) سهم کوارک-

های ظرفیت و دریا را در ساختار پروتون نشان می دهد..... ۷۲

فهرست جداول

فصل اول

جدول ۱-۱- چهار نیروی بنیادی موجود در طبیعت..... ۷

فصل چهارم

جدول ۱-۴- مقایسه‌ی جرم کوارک، شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون در مدل پیشنهادی و مدل کیسه‌ای با مقادیر تجربی..... ۸۸

فصل اول

مقدمه

❖ آشنایی با ذرات بنیادی

❖ نیروهای بنیادی

❖ الکترودینامیک کوانتومی

❖ کرومودینامیک کوانتومی

۱-۱- آشنایی با ذرات بنیادی

ذرات بنیادی به لحاظ نیمه عمرشان و نیز پایداریشان و ظاهر شدن در واکنش‌ها و پدیده‌های میکروسکوپی و در کل خواص شیمیایی و فیزیکی خودشان در خانواده‌های مختلف دسته بندی و بررسی می‌شوند. عده‌ای از این ذرات که با فراوانی بیشتر در اغلب اوقات ظاهر می‌شوند و پدیده‌های میکروسکوپی را کنترل می‌کنند، به ذرات بنیادی واقعی معروف هستند.

هیپرون‌ها:

اساساً چهار دسته هیپرون وجود دارد که عبارتند از: هیپرون لاند، هیپرون سیگما، هیپرون کسی، هیپرون امگا.

تمام هیپرون‌ها به ذرات هسته‌ای تجزیه می‌گردند. هر هیپرون دارای یک ضد ذره با علامت مخالف است. دنیای ذرات هم از نظر تنوع و هم از نظر نوع تأثیرات و تبدیلات متقابل، دنیای غنی محسوب می‌شود.

هادرون‌ها:

تحقیقاتی که با شتاب دهنده‌های بزرگ انجام شده‌اند به‌طور قوی به دانش ذرات بنیادی کمک کرده‌اند. قبل از همه اشاره‌ای به بزرگترین خانواده ذرات، هادرون‌ها، یعنی ذرات شرکت کننده در برهم‌کنش‌های قوی هسته‌ای اشاره می‌شود. ذراتی را که تحت تأثیر نیروی قوی قرار می‌گیرند، هادرون می‌گویند. هادرون‌ها بر دو نوع‌اند: باریون‌ها و مزون‌ها. باریون‌ها هادرون‌هایی با اسپین نیمه صحیح و مزون‌ها هادرون‌هایی با اسپین صحیح هستند. بیشتر این ذرات در نتیجه اندرکنش‌های قوی هسته‌ای به هادرون‌های دیگر وامی‌باشند. آن‌ها عمر کوتاهی دارند که در فرآیندهای هسته‌ای معمول چنین زمانی (ثانیه 10^{-23}) را نمی‌توان مستقیماً اندازه گرفت. اما هادرون‌هایی با عمر 10^{-13} تا 10^{-8} ثانیه نیز وجود دارند. برد واپاشی این ذرات با عمر دراز اندرکنش‌های ضعیف ما کم هستند. تعداد خیلی زیادی از هادرون‌ها کشف شده و گروه بندی آن‌ها در رده‌ها و خانواده‌های مختلف، طبیعت بنیادی آن‌ها را

مبهم جلوه می‌دهد. مدل کوارکی ساختار هادرون‌ها، گروه‌بندی هادرون‌ها را در خانواده و طبیعت و ساختار این خانواده‌ها و همچنین دیگر خواص ساده هادرون‌ها را به طور خیلی طبیعی توضیح می‌دهد. اصول بنیادی این مدل را می‌توان به شرح زیر فرمول بندی کرد:

- هادرون‌ها را به معنای درست کلمه نمی‌توان جزء ذرات بنیادی به شمار آورد، آن‌ها ساختار درونی پیچیده‌ای دارند و از ذرات بنیادی‌تری تشکیل شده‌اند. عناصر اصلی ساختار هادرون‌ها کوارک نام دارد.
- نظام هادرونی امکان می‌دهد که اظهار کنیم کلیه باریون‌های شناخته شده از سه کوارک و پاد باریون‌ها از سه پاد کوارک تشکیل شده‌اند. در حالی که تمام مزون‌ها از یک کوارک و یک پاد کوارک تشکیل شده است.

یک ایراد نظری که بر مدل کوارکی وارد بود این است که به نظر می‌رسید این مدل اصل طرد پائولی را نقض می‌کند. در فرمول بندی اولیه‌ی پائولی، اصل طرد اظهار می‌داشت که هیچ دو الکترونی نمی‌توانند یک حالت را اشغال کنند. اصل طرد باید برای کوارک‌ها نیز برقرار باشد، برای مثال فرض می‌شود Δ^{++} از سه کوارک یکسان u در یک حالت تشکیل شده باشد؛ به نظر می‌رسد این مورد با اصل پائولی ناسازگار باشد. در سال ۱۹۶۴، گرینبرگ راهی برای گریز از این معضل پیشنهاد کرد. او اظهار داشت کوارک‌ها نه تنها در سه طعم (u, d, s) ظاهر می‌شوند، بلکه هر یک از آن‌ها می‌توانند هر سه رنگ ((قرمز))، ((آبی)) و ((سبز)) هم داشته باشند. برای ساختن یک باریون به سادگی می‌توان یک کوارک از هر رنگ را در نظر گرفت، پس دیگر u ها در Δ^{++} یکسان نیستند (یکی از آن‌ها قرمز، یکی آبی و دیگری سبز است). لازم به ذکر نیست که واژه‌ی رنگ در اینجا هیچ ربطی به معنای لغوی معمول آن ندارد. قرمزی، آبی و سبزی فقط برچسب‌هایی برای نشان دادن سه ویژگی است که کوارک‌ها علاوه بر بار و شگفتی دارند.

کوارک‌ها:

مدت زیادی این‌طور تصور می‌شد که پروتون‌ها و نوترون‌ها ذرات بنیادی هستند و بنابراین گمان می‌رفت مثل تقسیم الکترون دیگر قابل تقسیم نبوده و دارای یک ساختار داخلی نیستند. امروزه می‌دانیم که نوکلئون‌ها یا به عبارت دیگر پروتون‌ها و نوترون‌ها خود از ذرات کوچک‌تری ساخته شده‌اند که کوارک نامیده می‌شوند. طبق مدل استاندارد شش کوارک داریم که همراه با پاد کوارک‌ها، دوازده ذره بنیادی را تشکیل می‌دهند. این کوارک‌ها به ترتیب اکتشاف عبارتند از: بالا^۱، پایین^۲، شگفت^۳، افسون^۴، ته^۵ و سر^۶. با این همه فقط دو نوع آن‌ها در تشکیل مواد پایدار معمولی نقش مهمی دارند که عبارت از کوارک u و کوارک d هستند.

لپتون‌ها:

در حال حاضر شش لپتون شناخته شده است که به همراه پاد ذرات آن‌ها دوازده ذره خواهند شد. شش لپتون عبارتند از: الکترون، موئون، تآو، نوترینوی الکترون، نوترینوی موئون و نوترینوی تآو. به نظر می‌رسد لپتون‌ها از چیز دیگری تشکیل نشده باشند. لپتون‌ها ذراتی با اسپین $1/2$ هستند که نیروی قوی بر آن‌ها اثری ندارد.

فوتون‌ها:

جرم در حال سکون‌شان برابر صفر است و اسپینی برابر یک دارند. فوتون‌ها حاملان نیروی الکترومغناطیسی هستند.

¹ Up
² Down
³ Strange
⁴ Charm
⁵ Bottom
⁶ Top

گلوئون‌ها:

گلوئون‌ها جرم در حال سکون‌شان مساوی صفر است و اسپینی مساوی یک دارند. گلوئون‌ها درون هادرون‌ها هستند و در حالت آزاد مشاهده نشده‌اند و حاملان نیروی قوی هستند.

بوزون‌ها:

در فیزیک ذرات، برهم‌کنش‌های ضعیف هسته‌ای نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. این‌ها تنها اندرکنشی هستند که می‌توانند شخصیت ذرات پایه را عوض کنند و ضمن پیروی از قوانین بقای بارهای لپتونی و باریونی موجب تبدیل‌های متقابل آن‌ها شوند.

- ساز و کار نیروهای برهم‌کنش ضعیف هسته‌ای مدت‌های مدید نظر پژوهش‌گران را به سوی خود جلب کرده بود. فرضیه‌ای مطرح شده بود که مطابق آن این نیروها از تعادل نوع خاصی کوانتوم‌های میدان نیروی برهم‌کنش ضعیف هسته‌ای به نام بوزون‌های میانی ناشی می‌شوند.
- برخلاف گلوئون‌ها، بوزون‌های میانی مثل فوتون‌ها باید در حالت آزاد وجود داشته باشند. نظریه امکان وجود سه تا از این بوزون‌های میانی را پیش‌بینی می‌کند. چند تا از این ذرات (بوزون‌های میانی) سرانجام در سال ۱۹۸۲ کشف شد [۱].

of Matter (Fermions)

	I	II	III	
mass→	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
charge→	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
name→	u up	c charm	t top	γ photon
Quarks	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	d down	s strange	b bottom	g gluon
Leptons	<2.2 eV	<0.17 MeV	<15.5 MeV	91.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z⁰ weak force
	0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	±1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	e electron	μ muon	τ tau	W[±] weak force
				Bosons (Forces)

شکل ۱-۱- جدول ذرات بنیادی

۱-۲- نیروهای بنیادی

بین ذرات بنیادی چهار نوع نیرو عمل می‌کنند که آن‌ها را نیروهای بنیادی یا اولیه می‌نامند و عبارتند از: قوی، الکترومغناطیسی، ضعیف و گرانشی. این نیروها در جدول زیر به ترتیب شدت نزولی فهرست بندی شده‌اند.

جدول ۱-۱- چهار نیروی بنیادی موجود در طبیعت

نیرو	شدت	نظریه	واسطه
قوی	10	کرومودینامیک	گلوئون
الکترومغناطیس	10^{-2}	الکتروودینامیک	فوتون
ضعیف	10^{-13}	فلیورودینامیک	Z و W
گرانشی	10^{-42}	ژئومترودینامیک	گراویتون

۱- نیروی قوی یا نیروی پر قدرت کوارک:

نیروی قوی که نیروی رنگ نیز نامیده می‌شود. از جدا شدن بیش از حد کوارک‌های داخل هسته از یکدیگر و یا حتی از پرت شدن آن‌ها به خارج جلوگیری می‌کند. نیروی پر قدرت کوارک یا نیروی قوی از طریق ذرات مبادله کننده یا به اصطلاح گلوئون‌ها انتقال می‌یابد. این نیرو مانند چسب، پیوستگی بین کوارک‌ها را تضمین می‌کند. نیروی هسته‌ای که پروتون‌ها و نوترون‌ها را در هسته اتم به هم پیوسته نگاه می‌دارد در واقع نیروی بنیادی نیست بلکه نیرویی است که از نیروی رنگ کوارک‌ها (یعنی قوی‌ترین نیرویی که به آن اشاره می‌شود) به دست می‌آید.

۲- نیروی الکترومغناطیسی:

این نیرو هنگامی که صحبت از بارهای الکتریکی به میان می‌آید ظاهر می‌شود. یک ذره دارای بار الکتریکی مثبت به وسیله‌ی یک ذره مثبت دیگر دفع و به سوی یک ذره دارای بار الکتریکی منفی جذب می‌شود. این نیرو توسط فوتون‌ها یا ذرات نوری مبادله می‌شود. نظریه‌ی فیزیکی که نیروهای

الکترومغناطیسی را توصیف می‌کند، الکترودینامیک نامیده می‌شود. فرمول‌بندی کلاسیک آن را ماکسول بیش از صد سال پیش انجام داده است. نظریه‌ی ماکسول با نسبت خاص سازگار بود (در واقع الهام بخش اصلی آن بود). نظریه‌ی کوانتومی الکترودینامیک را توموگا، فاینمن و شوئینگر در سال ۱۹۴۰ تکمیل کرده بودند.

۳- نیروی ضعیف:

بسیاری از ذرات نسبت به هیچ یک از دو نیروی یاد شده در بالا یعنی نیروی قوی کوارک و نیروی الکترومغناطیسی واکنش نشان نمی‌دهند، از آن میان ذراتی هستند که فاقد بار الکتریکی و رنگ هستند. برای این‌گونه ذرات یک نیروی بنیادی دیگر وجود دارد که در فاصله‌های خیلی خیلی کم کارگر است و مناسبت نامگذاری نیروی ضعیف به این نام، ضعیف بودن شدت آن در مقایسه با نیروی قوی است. نیروهای ضعیف که مسئول واپاشی هسته‌ای بتا (و نیز واپاشی پیون، میون و بسیاری از ذرات شگفت دیگر) هستند در فیزیک کلاسیک ناشناخته بود. توصیف نظری آن‌ها از ابتدا با یک فرمول‌بندی کوانتوم نسبیتی صحیح ارائه شده بود. اولین نظریه‌ی نیروهای ضعیف را فرمی در سال ۱۹۹۳ ارائه کرده، لی و یانگ، فاینمن، و گل‌مان و دیگران در دهه‌ی پنجاه آن را اصلاح کردند و سرانجام گلاشو، واینبرگ و سلام در دهه‌ی شصت آن را به شکل حاضر در آوردند. از نظریه‌ی برهم‌کنش‌های ضعیف گاهی به عنوان نظریه‌ی گلاشو-واینبرگ-سلام^۷ یاد می‌شود. این مدل برهم‌کنش‌های ضعیف و الکترومغناطیسی را تجلی مختلف یک نیروی الکتروضعیف در نظر می‌گیرد و از این جهت چهار نیرو به سه نیرو تقلیل می‌یابد.

۴- گرانش:

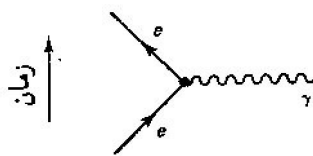
نیروی جاذبه‌ای است که میان اجسامی که دارای جرم می‌باشند حکمفرماست. هر جرمی، هر جسم دیگر دارای جرم را با نیرویی که با افزایش فاصله‌ی میان جرم‌ها کاهش می‌یابد، جذب می‌کند.

⁷ GWS

همین نیروی گرانشی است که نیروی بستگی منظومه‌ی خورشیدی و کهکشان‌ها را تأمین می‌کند، و از این‌رو نیروی بسیار مهمی است. این نیرو نسبت به نیروهای بنیادی دیگر در مورد ذرات بنیادی و در فواصل کوتاه بسیار ضعیف است. حامل نیروی گرانشی را گراویتون می‌نامند. ناقلان نیروی بنیادی همگی از ذرات بنیادی به شمار می‌آیند. نیروی گرانشی ضعیف‌ترین نیرو در بین چهار نیروی بنیادین به شمار می‌آید. نظریه‌ی کلاسیک گرانی، قانون گرانش عمومی نیوتن است. تعمیم نسبیتی آن نظریه‌ی نسبیت عام انیشتین است. (بهتر است بگوییم ژئومترودینامیک). هنوز باید روی یک نظریه‌ی کاملاً رضایت بخش کوانتومی برای گرانی کار شود [۲].

۱-۳- الکترو دینامیک کوانتومی:

الکترو دینامیک کوانتومی^۸، قدیمی‌ترین، ساده‌ترین و موفق‌ترین نظریه‌ی دینامیک است. بقیه‌ی نظریه‌ها به طور هوشمندانه‌ای از آن ساخته شده‌اند. بنابراین مناسب است که توصیفی از الکترو دینامیک کوانتومی بیان شود. همه‌ی پدیده‌های الکترومغناطیسی سرانجام به فرآیند بنیادی زیر تبدیل می‌شوند:

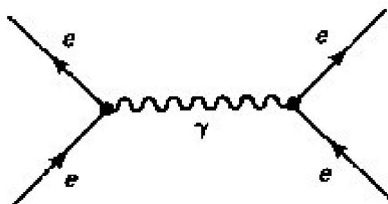


این نمودار بیان می‌کند که ذره‌ی باردار وارد و با جذب یا گسیل فوتون، خارج می‌شود. ذره‌ی باردار الکترون در نظر گرفته شده است که می‌تواند درست همانند کوارک یا هر لپتون دیگر، به جز نوترینو باشد.

⁸ Quantum electrodynamics (QED)

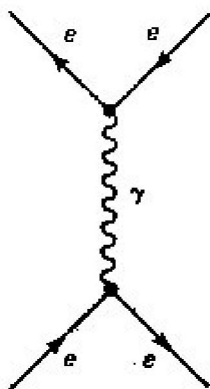
لازم به ذکر است که برهم کنش‌های ذره‌ای معمولاً به صورت نمودارهای فاینمن^۹ نشان داده می‌شود. این نمودارها برای فیزیکدانان انرژی زیاد از این نظر جالب توجه است که محاسبات پیچیده‌شان را آسان می‌کند. به کمک این نمودارها می‌توان فرآیندهای ذره‌ای را در نظر مجسم نمود. قواعد ترسیم نمودار فاینمن به قرار زیر است:

- همه‌ی ذرات ورودی و خروجی به صورت خط‌های مستقیم رسم می‌شوند.
 - حامل‌های نیرو به صورت خط‌های موجی، که ذرات را به هم وصل می‌کند، رسم می‌شوند.
 - با قرار دادن پیکان روی خط‌های مستقیم، جهت حرکت در طول زمان مشخص می‌شود.
- برای توضیح فرآیندهای پیچیده‌تر، دو یا چند رأس ابتدایی به هم وصل می‌شوند. برای مثال حالت زیر در نظر گرفته می‌شود:

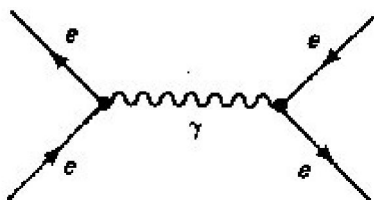


در اینجا دو الکترون وارد و با رد و بدل کردن یک فوتون، خارج می‌شوند. (نیازی نیست معین شود کدام یک فوتون را گسیل و کدام یک آن را جذب کرده است، نمودار شامل هر دو صورت ممکن است). بنابراین نمودار بالا برهم کنش بین دو الکترون را بیان می‌کند. در نظریه‌ی کلاسیک این فرآیند را دفع کولنی بارهای همنام (اگر در حالت سکون باشند) می‌نامند. در الکترودینامیک کوانتومی این فرآیند پراکندگی مولر نامیده می‌شود و گفته می‌شود برهم کنش با رد و بدل کردن یک فوتون انجام می‌شود. در الکترودینامیک کوانتومی مجاز است که نمودارهای فاینمن حول هر پیکر بندی توپولوژیکی دلخواه چرخانده شود. برای مثال می‌توان نمودار قبل را به صورت زیر چرخاند:

^۹ Feynman

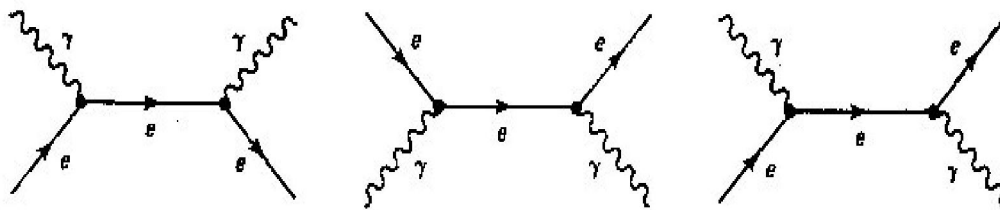


قاعده‌ی بازی آن است که مسیر ذره‌ای را که در زمان به عقب برمی‌گردد، (چنان‌که پیکان نشان می‌دهد) پاد ذره‌ای در نظر گرفت که در جهت زمان حرکت می‌کند (فوتون پاد ذره‌ی خودش است و به همین دلیل روی مسیر فوتون پیکانی قرار نمی‌دهند). پس در فرآیند نشان داده شده یک الکترون و یک پوزیترون نابود می‌شوند و یک فوتون تشکیل می‌شود و سپس دوباره یک جفت الکترون-پوزیترون تولید می‌شود. پس یک الکترون و یک پوزیترون وارد و یک الکترون و یک پوزیترون خارج می‌شود (البته نه همان الکترون و پوزیترون اولیه، اما چون همه‌ی الکترون‌ها یکسان هستند، این موضوع اهمیت زیادی ندارد). این برهم‌کنش جاذبه‌ی کولنی دو بار مخالف را نشان می‌دهد. در الکترودینامیک این فرآیند را پراکندگی بابا می‌نامند. نمودار کاملاً متفاوت زیر نیز معرف همین فرآیند است:

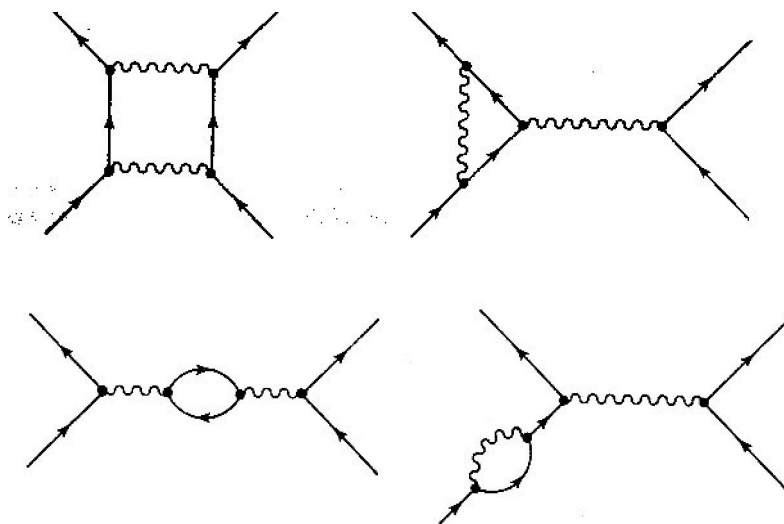


در تحلیل پراکندگی بابا باید هر دو نمودار را در نظر گرفت.

می‌توان نمودارهای متنوع زیر را با استفاده از دو رأس ساخت که به ترتیب از سمت چپ، نابودی زوج، تولید زوج و پراکندگی کامپتون را توصیف می‌کنند.



اگر از رئوس بیشتری استفاده شود، تنوع نمودارها به سرعت افزایش می‌یابد. برای مثال با ترکیب چهار رأس، می‌توان نمودارهای زیر را به دست آورد:



در هر نمودار دو الکترون وارد و دو الکترون خارج می‌شوند. این نمودارها دفع بارهای همنام را توصیف می‌کنند (پراکندگی مولر). تا آن جا که به مشاهده‌ی فرآیندها مربوط می‌شود ساختار داخلی نمودارها زائد هستند. خطوط داخلی (خطوطی که از داخل نمودار شروع می‌شوند و به داخل نمودار ختم می‌شوند) مبین ذراتی هستند که دیده نمی‌شوند و در واقع بدون تغییر کامل فرآیند نمی‌توان آن‌ها را مشاهده کرد. این ذرات را ذرات مجازی می‌نامیم. فقط خطوط خارجی (آنهایی که به نمودار وارد یا از آن خارج می‌شوند) نشانگر ذرات واقعی (قابل مشاهده) هستند. خطوط خارجی معرف نوع فرآیند فیزیکی است که رخ می‌دهد. خطوط داخلی سازوکار فرآیند را نشان می‌دهند.

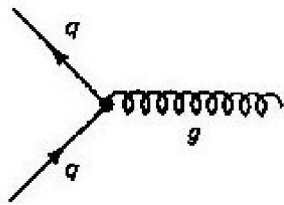
نمودارهای فاینمن کاملاً نمادین هستند، آن‌ها مسیر ذره را نشان نمی‌دهند. بعد قائم زمان و بعد افقی فضا است که متناظر با فاصله‌های فیزیکی نیست. برای مثال، در پراکندگی بابا الکترون و پوزیترون جذب

می‌شود و نه دفع. آن‌چه نمودار نشان می‌دهد این است که در ابتدا یک الکترون و یک پوزیترون وجود دارد، سپس این دو فوتونی مبادله می‌کنند و سرانجام هم‌چنان یک الکترون و یک پوزیترون وجود دارد. هر نمودار فاینمن نماینگر عددی است که می‌توان آن را با استفاده از آن‌چه که قاعده‌های فاینمن نامیده می‌شود، محاسبه کرد. فرض کنید قرار است فرآیند فیزیکی خاصی (مثلاً پراکندگی مولر) تحلیل شود. ابتدا همه‌ی نمودارهای با خطوط خارجی مناسب رسم می‌شود (یکی با دو رأس، دیگری با چهار رأس و غیره). سپس با استفاده از قاعده‌های فاینمن سهم هر نمودار محاسبه و همه با هم جمع می‌شوند. جمع کل تمام نمودارهای فاینمن با خطوط خارجی معین، فرآیند واقعی فیزیکی را نشان می‌دهد. البته در اینجا مسئله‌ای که پیش می‌آید آن است که برای یک برهم‌کنش خاص تعداد نامحدودی نمودار فاینمن وجود دارد. خوشبختانه هر رأس در نمودار فاینمن یک ثابت ساختار ریز $\alpha = (e^2/\hbar c) = 1/137$ را وارد می‌کند و چون این عدد کوچک است، نمودارهای با تعداد رأس بیشتری سهم کمتری در نتیجه‌ی نهایی دارند و بسته به دقت مورد نیاز می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. قاعده‌های فاینمن پایستگی انرژی و تکانه را در هر رأس و در نتیجه در همه‌ی نمودار برقرار می‌کنند. این مسئله باعث می‌شود که رئوس بنیادی در الکترودینامیک کوانتومی به خودی خود فرآیند فیزیکی ممکن را نمایش ندهند [۲].

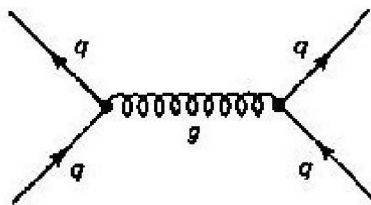
۱-۴- کرومودینامیک کوانتومی:

در کرومودینامیک^{۱۰}، رنگ نقش بار را دارد و فرآیند به صورت کوارک ← کوارک + گلوئون است (چون لپتون رنگ ندارد در برهم‌کنش قوی شرکت نمی‌کند).

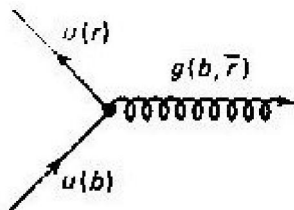
¹⁰ Quantum chromodynamics (QCD)



مانند قبل برای نشان دادن فرآیندهای پیچیده‌تر، دو رأس بنیادی یا بیشتر با هم ترکیب می‌شود. برای مثال نیروی میان دو کوارک (که در درجه‌ی اول مسئول بستگی آن‌ها به هم و تشکیل باریون‌ها و به طور غیر مستقیم، مسئول نگه داشتن نوترون و پروتون در هسته است) را با نمودار مرتبه‌ی پائین زیر نشان می‌دهند:



و گفته می‌شود نیروی میان دو کوارک با مبادله‌ی گلوئون رد و بدل می‌شود. تا اینجا کرومودینامیک بسیار شبیه الکتروдинامیک است. اما تفاوت مهمی نیز وجود دارد، برجسته‌ترین تفاوت آن است که در الکتروдинامیک یک نوع بار الکتریکی وجود دارد (که می‌تواند مثبت یا منفی باشد، یعنی برای مشخص کردن بار یک ذره، یک عدد کافی است) ولی در کرومودینامیک سه نوع رنگ وجود دارد (قرمز، سبز، آبی) و در فرآیند $q \rightarrow q + g$ رنگ کوارک (و نه طعم آن) می‌تواند تغییر کند. مثلاً یک کوارک بالای آبی به یک کوارک بالای قرمز تبدیل می‌شود. چون رنگ (مثل بار) همیشه پایسته است، باید این اختلاف رنگ را گلوئون حمل کند. در این مثال اختلاف برابر یک واحد آبی منهای یک واحد قرمز است.



پس گلوئون‌ها ((دورنگ)) و حامل یک واحد رنگ مثبت و یک واحد رنگ منفی هستند. روشن است که تعداد ۹ حالت مختلف وجود دارد و می‌توان انتظار داشت ۹ نوع گلوئون وجود داشته باشد ولی به دلایلی فقط ۸ نوع گلوئون وجود دارد.

چون گلوئون‌ها خودشان حامل رنگ هستند (برخلاف فوتون که از نظر الکتریکی خنثی است) مستقیماً با بقیه‌ی گلوئون‌ها جفت می‌شوند. پس علاوه بر رأس بنیادی گلوئون-کوارک، رأس بنیادی گلوئون-گلوئون نیز وجود دارد. در واقع دو نوع رأس سه گلوئونی و چهار گلوئونی وجود دارد.



این جفت شدگی مستقیم گلوئون-گلوئون نه تنها کرومودینامیک را بسیار پیچیده‌تر از الکترومدینامیک می‌کند، بلکه آن را غنی‌تر می‌سازد.

اختلاف دیگر کرومودینامیک و الکترومدینامیک در اندازه‌ی ثابت جفت شدگی است. گفته شد که هر رأس در الکترومدینامیک کوانتومی ضریب $\alpha = 1/137$ را وارد می‌کند. کوچکی این عدد به این معنی است که فقط باید نمودارهای فاینمن، با تعداد رئوس کم را در نظر گرفت. به لحاظ تجربی ثابت جفت شدگی مربوط به نیروی قوی، α_s ، که از نیروی بین دو پروتون محاسبه می‌شود، بزرگتر از یک است. یکی از پیروزی‌های بزرگ کرومودینامیک کوانتومی کشف این مهم بود که در این نظریه عددی که نقش ثابت جفت شدگی را دارد، اصلاً ثابت نیست، بلکه به فاصله‌ی بین ذرات برهم‌کنش کننده بستگی دارد و آن را ثابت جفت شدگی پویا می‌نامند. در فاصله‌های نسبتاً بزرگ مشخصه‌ی فیزیک هسته‌ای، این عدد بزرگ است، در فاصله‌های کوتاه (کمتر از اندازه‌ی پروتون) کاملاً کوچک می‌شود. این پدیده که از آن به عنوان آزادی مجانبی یاد می‌شود به این معنی است که داخل پروتون یا پیون، کوارک‌ها،

بدون برهم‌کنش زیاد این طرف و آن طرف می‌روند. از دیدگاه نظری، کشف آزادی مجانبی حساب فاینمن را ابزار معقولی برای کرومودینامیک کوانتومی در محدوده‌ی انرژی‌های بالا می‌سازد.

تفاوت نهایی میان الکترومدینامیک و کرومودینامیک آن است که در حالی که بسیاری از ذرات حامل بار الکتریکی هستند، اما ذرات طبیعی حامل رنگ نیستند. به طور تجربی، به نظر می‌رسد که کوارک‌ها در بسته‌های بی‌رنگ دوتایی (مزون‌ها) و سه‌تایی (باریون‌ها) محبوس‌اند. اگر کرومودینامیک درست باشد، باید برای مقید بودن کوارک‌ها توضیحی داشته باشد. یعنی به عنوان نتیجه‌ای از این نظریه، باید بتوان ثابت کرد که کوارک‌ها فقط می‌توانند به صورت ترکیب‌های بدون رنگ وجود داشته باشند. قطعاً این برهان، افزایش بی‌حد انرژی پتانسیل، وقتی کوارک‌ها از هم دور می‌شوند، را نشان خواهد داد. پس برای جدا کردن کامل آن‌ها باید مقدار انرژی نامحدود (یا به قدری که برای خلق زوج کوارک-پادکوارک جدید لازم باشد) را صرف کرد. اما تا کنون هیچ‌کسی دلیلی قطعی مبنی بر اینکه کرومودینامیک مستلزم محصور بودن است را ارائه نکرده است و مشکل اینجاست که محصور بودن رفتار دور بردی را برای برهم‌کنش کوارک-کوارک ایجاد می‌کند. اما این درست رژیمی است که در آن حساب فاینمن غلط از آب در می‌آید [۲].

فصل دوم

معادله‌ی کلاین-گوردون و معادله‌ی دیراک

❖ معادله‌ی کلاین-گوردون برای یک ذره آزاد بدون اسپین

❖ جواب معادله‌ی کلاین-گوردون

❖ برهم‌کنش یک ذره کلاین-گوردون با پتانسیل الکترومغناطیسی

❖ معادله‌ی دیراک

❖ شکل کواریانت معادله‌ی دیراک و ماتریس‌های γ دیراک

❖ جریان پایسته و مزدوج هرمیتی معادله‌ی دیراک

❖ اسپینورهای ذره‌ی آزاد

❖ پاد ذرات

❖ الکترون با اسپین $1/2$ در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی

۲-۱- معادله‌ی کلاین-گوردون برای یک ذره آزاد بدون اسپین:

انرژی غیر نسبیتی به صورت $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ است، با در نظر گرفتن $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ و

رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد.

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = (-i\hbar \vec{\nabla})^2 / 2m + V(x) \right) \psi(x, t) \quad (1-2)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$$

گذاری از کوانتوم مکانیک غیر نسبیتی به طرف کوانتوم مکانیک نسبیتی انجام می‌شود، یعنی روابط کوانتوم مکانیک به نوعی با نسبیت خاص آمیخته می‌شود. چنین تئوری اصولاً می‌تواند برای مطالعه‌ی رفتار ذرات بسیار ریز به کار رود.

انرژی نسبیتی به صورت $E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$ است، همانند قبل $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ و $p \rightarrow -i\hbar \nabla$

جایگذاری می‌شود و در نتیجه رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = (-i\hbar \vec{\nabla})^2 c^2 + E_0^2$$

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + (m_0 c^2)^2 \right) \phi(x, t) \quad (2-2)$$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2}_{\partial_\mu \partial^\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x, t) = 0 \Rightarrow \left(\square^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0$$

معادله‌ی فوق معادله‌ی کلاین-گوردون^{۱۱} نام دارد که برای بررسی حرکت نسبیتی ذره آزاد بدون

اسپین و جرم m_0 می‌باشد [۲-۴].

^{۱۱} Klein-Gordon

۲-۲- جواب معادله‌ی کلاین-گوردون:

ار آن جا که ذره آزاد است و پتانسیلی بر آن اثر نمی‌کند، معادله‌ی کلاین-گوردون معادل نسبیتی معادله‌ی شرودینگر برای ذره‌ی آزاد است. لذا همان جواب معادله‌ی شرودینگر مربوط به ذره‌ی آزاد برای جواب معادله‌ی کلاین-گوردون پیشنهاد شده است: [۲-۴]

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &= Ne^{-i(p \cdot x)/\hbar} \\ \phi(x, t) &= Ne^{-i(p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}\end{aligned}\quad (۳-۲)$$

N ضریب نرمالیزاسیون بوده و چهاربردارهای p, x به صورت $x \equiv (ct, \vec{x})$ ، $p \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ می‌باشند.

با توجه به روابط $x^0 = ct$ و $p^0 = \frac{E}{c}$ و $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ و $E = \hbar \omega$ رابطه‌ی زیر به دست آمده است:

$$\phi(x, t) = Ne^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (۴-۲)$$

با گذاشتن جواب پیشنهادی فوق در معادله‌ی کلاین-گوردون رابطه‌ی انرژی نسبیتی به دست می‌آید که از ابتدا با آن شروع شد، لذا این جواب پیشنهادی، جواب قابل قبولی است و به عنوان جواب معادله‌ی کلاین-گوردون یا تابع موج برای یک ذره‌ی بدون اسپین نسبیتی در نظر گرفته شده است.

از رابطه‌ی $E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$ می‌توان نتیجه گرفت که $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + E_0^2}$ می‌باشد، یعنی بر

این اساس می‌توان گفت انرژی ذره نسبیتی که در معادله‌ی کلاین گوردون صدق می‌کند می‌تواند مثبت یا منفی باشد. انرژی منفی با این فرض توجیه می‌شود که این انرژی مربوط به ذره‌ای است که از لحاظ بار، باری مخالف ذره با انرژی مثبت دارد و در خلاف جهت زمان حرکت می‌کند (پاد ذره). بر این اساس طبق معادله‌ی کلاین-گوردون اساساً چهار جواب برای ذره‌ی آزاد نسبیتی وجود دارد:

۱- انرژی مثبت، اندازه حرکت مثبت:

$$\begin{aligned}\phi_1(x, t) &= Ne^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_1 t)} \\ E &= +\hbar \omega = +\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ \vec{p} &= +\hbar \vec{k}\end{aligned}\quad (۵-۲)$$

۲- انرژی منفی، اندازه حرکت مثبت:

$$\begin{aligned}\phi_2(x, t) &= Ne^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ E &= -\hbar\omega = -\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \\ \vec{p} &= +\hbar\vec{k}\end{aligned}\quad (6-2)$$

۳- انرژی مثبت، اندازه حرکت منفی:

$$\begin{aligned}\phi_3(x, t) &= \phi_1^*(x, t) = Ne^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ E &= +\hbar\omega = +\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \\ \vec{p} &= -\hbar\vec{k}\end{aligned}\quad (7-2)$$

۴- انرژی منفی، اندازه حرکت منفی:

$$\begin{aligned}\phi_4(x, t) &= \phi_2^*(x, t) = Ne^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ E &= -\hbar\omega = -\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \\ \vec{p} &= -\hbar\vec{k}\end{aligned}\quad (8-2)$$

بنابراین یکی از مشکلات در بحث معادله‌ی کلاین-گوردون، وجود بحث انرژی منفی برای ذره‌ی آزاد است.

یکی دیگر از اشکالاتی که در بحث معادله‌ی کلاین-گوردون خود را نشان می‌دهد، به بحث چگالی احتمال $\rho(x, t)$ در این زمینه باز می‌گردد که در آن چگالی احتمال گاهی اوقات می‌تواند منفی شود.

برای به دست آوردن چگالی احتمال و چگالی جریان احتمال معادله‌ی کلاین-گوردون از سمت راست در ϕ^* و مزدوج مختلط آن در ϕ ضرب می‌شود، سپس این دو معادله از هم کم شده، در نتیجه رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i\hbar}{c^2} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{c^2} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{-i\hbar}{c} \phi^* \nabla \phi + \frac{i\hbar}{c} \phi \nabla \phi^* \right) = 0 \quad (9-2)$$

و از مقایسه با معادله‌ی پیوستگی $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \nabla \cdot \vec{j}(x, t) = 0$ روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\rho(x, t) = \frac{i\hbar}{c^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad (10-2)$$

$$\vec{j}(x, t) = \frac{\hbar}{ic} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$$

در بحث معادله‌ی شرودینگر $\rho(x, t)$ همواره مثبت است $(\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \geq 0)$ ، اما در

بحث معادله‌ی کلاین-گوردون $\rho(x, t)$ به مشتق زمانی $\psi(x, t)$ بستگی دارد. لذا چون $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ در

زمان‌های مختلف مقادیر متفاوتی را اختیار می‌کند که می‌تواند مثبت یا منفی باشد، $\rho(x, t)$ می‌تواند

در این بحث مثبت یا منفی باشد. اما اگر $\rho(x, t) < 0$ باشد، این بدان معناست که احتمال حضور ذره

در مکان \vec{x} و در زمان t منفی است و این از لحاظ قواعد کلی احتمالات بی‌معناست.

لذا نتایج حاصل از معادله‌ی کلاین-گوردون دو اشکال عمده دارد:

۱- بحث ذره‌ی آزاد با انرژی منفی

۲- بحث چگالی احتمال منفی

شکل چگالی جریان احتمالی که از معادله‌ی کلاین-گوردون به دست می‌آید تقریباً مشابه چگالی

جریان احتمالی است که از معادله‌ی شرودینگر حاصل می‌شود.

در حالت کلی شکل کواریانت معادله‌ی پیوستگی به صورت $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$ است. چهار بردار j^{μ} در

بحث کلاین-گوردون به صورت زیر در نظر گرفته شده است تا شکل کواریانت معادله‌ی پیوستگی برقرار

شود.

$$j^{\mu} = \frac{i\hbar}{c} (\phi^* \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \phi^*) \quad (11-2)$$

در ابتدای بحث گفته شد که جواب معادله‌ی کلاین-گوردون برای ذره‌ی آزاد به صورت

$\phi(x, t) = N e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ است. اکنون ضریب نرمالیزاسیون N محاسبه می‌شود، بدین منظور از این

واقعیت بهره گرفته شده است که باید چگالی احتمال کل برابر با یک باشد. روابط مربوط به ϕ و ϕ^*

در رابطه‌ی مربوط به $\rho(x, t)$ قرار داده می‌شود و رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\rho(x,t) = \frac{2\hbar\omega N^2}{c^2} \quad (12-2)$$

بنابراین برای N رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\int \rho(x,t) d^3x = 1$$

$$\int \frac{2\hbar\omega N^2}{c^2} d^3x = 1 \Rightarrow N = \frac{c}{\sqrt{2EV}} \quad (13-2)$$

در سیستم طبیعی $c = 1$ می‌باشد و در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2EV}} \quad (14-2)$$

۲-۳- برهم‌کنش یک ذره کلاین-گوردون با پتانسیل الکترومغناطیسی:

در این جا پتانسیل وارد بحث معادله‌ی کلاین-گوردون می‌شود. توجه شود که تنها برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد و از اندرکنش‌های هسته‌ای موثر صرف‌نظر می‌شود. در الکتروپدینامیک کلاسیک، حرکت ذره‌ی آزاد با بار $-e$ در پتانسیل الکترومغناطیسی $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ با جایگذاری زیر به دست می‌آید: [۲ و ۳]

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu$$

$$i\hbar\partial^\mu \rightarrow i\hbar\partial^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \quad (15-2)$$

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu - \frac{ie}{\hbar c} A^\mu$$

حال نتایج فوق در معادله‌ی کلاین-گوردون لحاظ می‌شود تا به نوعی اثر پتانسیل الکترومغناطیسی در معادله‌ای که ذره‌ی کلاین-گوردون بر اساس آن رفتار می‌کند وارد شده باشد. انتظار می‌رود که جواب این معادله‌ی جدید، تابع موج ذره بدون اسپین جرم‌دار در حضور یک پتانسیل الکترومغناطیسی باشد.

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$$

$$\left(\left(\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu\right)\left(\partial^\mu - \frac{ie}{\hbar c} A^\mu\right) + m_0^2\right)\phi = 0 \quad (16-2)$$

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\phi = \left(\frac{ie}{\hbar c} \partial_\mu A^\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \partial^\mu + \frac{e^2 A^2}{\hbar^2 c^2}\right)\phi$$

از طرفی روابط زیر برقرار است:

$$\text{if } i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H_0 \phi, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V)\psi \Rightarrow \psi(x, t) = \sum_n a_n \phi_n e^{-iE_n t} \quad (17-2)$$

یعنی جواب معادله‌ی شرودینگر با یک پتانسیل اختلالی می‌تواند به صورت بسطی از جواب‌های ذره‌ی آزاد این معادله نوشته شود (در تقریب مرتبه‌ی اول).

حال در معادله‌ی (16-2) با توجه به آنچه که در بالا شرح داده شد، اگر به جای ϕ ، ψ قرار گیرد، کل جمله‌ی اپراتوری سمت راست به عنوان یک جمله‌ی اختلالی در نظر گرفته می‌شود.

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = \left(\underbrace{\frac{ie}{\hbar c} \partial_\mu A^\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \partial^\mu}_{-V} + \frac{e^2 A^2}{\hbar^2 c^2}\right)\psi \quad (18-2)$$

چون اختلال کوچک است، در پتانسیل اختلالی معرفی شده از جمله‌ی A^2 صرف نظر می‌شود و پتانسیل اختلالی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V = \frac{-ie}{\hbar c} (\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) \quad (19-2)$$

پتانسیل فوق که توسط پارامتر e توصیف شده است، از طریق رابطه‌ی $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ به

ثابت ساختار ریز ارتباط پیدا می‌کند. کوچکی جفت شدگی الکترومغناطیسی، به این معناست که می‌توان یک بسط اختلالی از V بر حسب توان‌های α نوشت. کوچک‌ترین توان α که در دامنه‌ی پراکندگی وارد می‌شود، تقریب خوبی است. با دانستن این پتانسیل اختلالی می‌توان ψ را به دست آورد. رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n \quad \text{with} \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn} \quad (20-2)$$

H_0 هامیلتونی مستقل از زمان است. اگر $H = H_0 + V(x, t)$ باشد، آن‌گاه با توجه به $H\psi = E\psi$ می‌توان نوشت:

$$(H_0 + V(x, t))\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (21-2)$$

بنابراین جواب‌های معادله‌ی کلاین-گوردون در شرایطی که ذره تحت یک پتانسیل اختلالی قرار گرفته باشد به صورت زیر است:

$$\psi(x, t) = \sum_n a_n \phi_n e^{-iE_n t / \hbar} \quad (22-2)$$

حال بحثی که راجع به برهم‌کنش ذرات کلاین-گوردون با پتانسیل الکترومغناطیسی بیان شد، دنبال می‌شود. در حالت کلی، اگر ذره‌ی کلاین-گوردون تحت اثر یک پتانسیل خارجی قرار گیرد، احتمال این‌که این ذره بعد از برهم‌کنش با این پتانسیل از حالت i به حالت f برود، عبارت است از:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x \\ &= -i \int \phi_f^* \left(\frac{-ie}{\hbar c} (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) \right) \phi_i d^4x \\ &= +i \int \frac{ie}{\hbar c} (\phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) + \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i) \end{aligned} \quad (23-2)$$

برای جمله‌ی اول رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\int \phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4x = - \int \partial_\mu (\phi_f^*) A^\mu \phi_i d^4x \quad (24-2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (24-2) در (23-2) رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$T_{fi} = +i \left[\frac{ie}{\hbar c} \int ((\phi_f^* \partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i) A^\mu d^4x \right] \quad (25-2)$$

از طرفی می‌توان T_{fi} را به صورت زیر نیز نوشت:

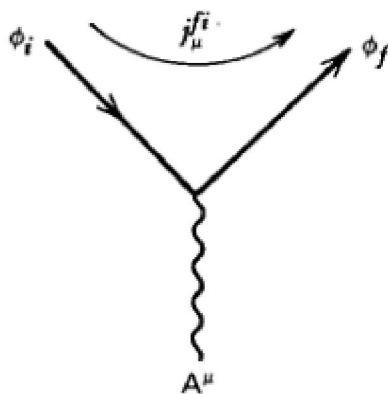
$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (26-2)$$

که j_μ^{fi} به صورت زیر است:

$$j_{\mu}^{fi} = \frac{-ie}{\hbar c} (\phi_f^* (\partial_{\mu} \phi_i) - (\partial_{\mu} \phi_f^*) \phi_i) \quad (27-2)$$

به این ترتیب این بحث را می‌توان این‌طور تعبیر کرد که جریانی از ذرات از حالت اولیه به حالت

نهایی با یک پتانسیل الکترومغناطیسی A_{μ} برهم‌کنش می‌کنند و در این شرایط با احتمال T_{fi} از حالت i به حالت f گذار انجام می‌دهند.



شکل ۱-۲- برهم‌کنش یک الکترون بدون اسپین با میدان الکترومغناطیسی A^{μ}

با قرار دادن ϕ_i و ϕ_f از روابط زیر در رابطه‌ی مربوط به j_{μ}^{fi} ، چگالی جریان به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} \phi_i &= N_i e^{-ip_i \cdot x} & \rightarrow & \quad \phi_i^* = N_i e^{ip_i \cdot x} \\ \phi_f &= N_f e^{-ip_f \cdot x} & \rightarrow & \quad \phi_f^* = N_f e^{ip_f \cdot x} \end{aligned} \quad (28-2)$$

با قرار دادن (۲۸-۲) در (۲۷-۲) رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} j_{\mu}^{fi} &= \frac{-ie}{\hbar c} \left[N_f e^{ip_f \cdot x} \partial_{\mu} (N_i e^{-ip_i \cdot x}) - \partial_{\mu} (N_f e^{ip_f \cdot x}) N_i e^{-ip_i \cdot x} \right] \\ &= \frac{-ie}{\hbar c} \left[N_f e^{ip_f \cdot x} (-ip_{i\mu} N_i e^{-ip_i \cdot x}) - (ip_{f\mu} N_f e^{ip_f \cdot x}) N_i e^{-ip_i \cdot x} \right] \\ &= \frac{-ie}{\hbar c} \left[N_f N_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x} (-ip_{i\mu}) + N_f N_i (-ip_{f\mu}) e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \right] \\ &= \frac{-ie}{\hbar c} \left[N_f N_i (-i(p_i + p_f)_{\mu}) e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \right] \end{aligned} \quad (29-2)$$

در سیستم طبیعی $\hbar = 1$ و $c = 1$ است و چگالی جریان برای یک ذره کلاین-گوردون که در مجاورت

پتانسیل الکترومغناطیسی A_{μ} از حالت i به f حالت می‌رود، j_{μ}^{fi} ، به صورت زیر است.

$$j_{\mu}^{fi} = -eN_i N_f (p_i + p_f)_{\mu} e^{i(p_f - p_i)x} \quad (30-2)$$

۲-۴- معادله‌ی دیراک:

برای مدت زمانی تصور می‌شد که معادله‌ی کلاین - گوردون تنها تعمیم نسبیتی معادله‌ی شرودینگر است تا اینکه دیراک معادله‌ی دیگری ارائه داد. هدف او نوشتن معادله‌ی نسبیتی بود که بر خلاف معادله‌ی کلاین - گوردون نسبت به $\frac{\partial}{\partial t}$ خطی باشد، یعنی درجه‌ی مشتق زمانی آن برابر یک باشد. برای حفظ کردن شکل چنین معادله‌ای باید این معادله نسبت به ∇ هم خطی باشد. لذا چنین معادله‌ای می‌بایست دارای شکل کلی زیر باشد: [۵-۲]

$$H\psi = (\alpha.P + \beta m)\psi \quad (31-2)$$

چهار ضریب β و α_i ($i = 1, 2, 3$) می‌بایست دارای خواصی باشند که این خواص برای یک ذره‌ی آزاد رابطه‌ی انرژی - اندازه حرکت نسبیتی را برای هامیلتونین برقرار کند؛

$$H^2\psi = (P^2 + m^2)\psi \quad (32-2)$$

این دو معادله با یکدیگر، نماینده‌ی معادله‌ای هستند که دیراک پیشنهاد نمود و معادله‌ی دیراک نام گرفت. جواب‌های این معادله ساختار کاملاً قوی در توصیف ذرات و پاد ذرات با اسپین ۱/۲ را دارند.

$$H^2\psi = (\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m)\psi$$

$$= \left(\alpha_i^2 P_i^2 + \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_0 P_i P_j + \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_0 P_i m + \beta^2 m^2 \right) \psi \quad (33-2)$$

چون α_i ها و β با هم جا به جا نمی‌شوند، لذا این ضرایب عدد نیستند. دیراک α ها و β را ماتریس‌های مربعی در نظر گرفت. α_i ها و β ($\alpha_i^2 = I, \beta^2 = I$) ماتریس‌های هرمیتی، بدون

تریس^{۱۲}، با ابعاد زوج و ویژه مقادیر $\lambda = \pm 1$ هستند. حداقل ابعاد مربوط به α_i ها و β برابر 4×4 است، یعنی این ماتریس‌ها نمی‌توانند 2×2 باشند. انتخاب برای چهار ماتریس (α, β) یکتا نیست. اغلب از نمایش دیراک - پائولی استفاده می‌شود که عبارتند از:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (۳۴-۲)$$

I ماتریس یکانی 2×2 است و $\sigma_i = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ماتریس‌های پائولی هستند:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۳۵-۲)$$

یک نمایش دیگر از α_i ها و β نمایش وایل می‌باشد:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۶-۲)$$

بیشتر نتایج مستقل از نوع انتخاب ماست. همه‌ی فیزیک فقط به خواص مربوط به α_i ها و β وابسته است. تا زمانی که نوع انتخاب مشخص نشده باشد، از نمایش دیراک - پائولی استفاده می‌شود. از آن جا که α_i ها و β با نمایش‌های اخیر، ماتریس‌های 4×4 هستند، ψ هم باید یک ماتریس ستونی 4×1 باشد. یعنی ψ در این شرایط یک اسکالر نیست بلکه یک بردار دارای حداقل چهار مولفه است. به ψ در این شرایط اسپینور دیراک گفته می‌شود. ممکن است که انتظار دو دسته جواب مستقل باشد (یکی برای ذرات و یکی برای پاد ذرات)، اما به جای دو دسته، چهار دسته جواب مستقل حاصل می‌شود.

۲-۵- شکل کواریانت معادله‌ی دیراک و ماتریس‌های γ ی دیراک:

معادله‌ی دیراک (۲-۳۱) از سمت چپ در β ضرب می‌شود:

¹² Traceless

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} \psi &= (\alpha \cdot (-i \vec{\nabla}) + \beta m) \psi \\
i \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i \beta \alpha \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta^2 m \psi \\
i \left(\beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta \alpha \cdot \vec{\nabla} \right) \psi - m \psi &= 0
\end{aligned} \tag{۳۷-۲}$$

ماتریس‌های γ ی دیراک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \alpha) \tag{۳۸-۲}$$

با توجه به عبارت فوق معادله‌ی (۳۷-۲) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \tag{۳۹-۲}$$

معادله‌ی فوق شکل کواریانت معادله‌ی دیراک^{۱۳} نامیده می‌شود [۵ و ۳].

چهار ماتریس $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ به عنوان یک چهار بردار γ^μ شناخته می‌شوند. بر اساس معرفی $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \alpha)$ و ویژگی‌های که برای α_i ها و β ($\alpha_i^2 = I, \beta = I$) ذکر شد، ثابت می‌شود که ماتریس‌های γ ی دیراک در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{۴۰-۲}$$

$$\gamma^0 = \beta \Rightarrow \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, (\gamma^0)^2 = I \tag{۴۱-۲}$$

$$\gamma^k = \beta \alpha^k \Rightarrow \left. \begin{aligned} \gamma^{k\dagger} &= (\beta \alpha^k)^\dagger = \alpha^k \beta = -\gamma^k \\ (\gamma^k)^2 &= \beta \alpha^k \beta \alpha^k = -I \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3 \tag{۴۲-۲}$$

نتایج مربوط به همیوگ هرمیتی به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{۴۳-۲}$$

¹³ Dirac

۲-۶- جریان پایسته و مزدوج هرمیتی معادله‌ی دیراک:

معادله‌ی دیراک می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - m\psi = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (۴۴-۲)$$

مزدوج هرمیتی معادله‌ی دیراک به صورت زیر است:

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k) - m\psi^\dagger = 0 \quad (۴۵-۲)$$

برای اینکه شکل کواریانت معادله حفظ شود، لازم است که علامت منفی $-\gamma^k$ از بین برود ضمن اینکه علامت جمله‌ی اول بدون تغییر باقی بماند. با توجه به اینکه $\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0$ می‌باشد، طرفین معادله‌ی فوق از سمت راست در γ^0 ضرب می‌شود و اسپینور الحاقی نیز به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (۴۶-۲)$$

در نتیجه رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0 \quad (۴۷-۲)$$

معادله‌ای به صورت $\partial_\mu j^\mu = 0$ از مجموع دو رابطه‌ی (۲-۳۹) و (۲-۴۷) به دست آمده است. به این صورت که معادله‌ی (۲-۳۹) از سمت چپ در $\bar{\psi}$ و رابطه‌ی (۲-۴۷) از سمت راست در ψ ضرب شده و سپس با هم جمع شدند:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (۴۸-۲)$$

بنابراین جریانی به صورت $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ ، رابطه‌ی پیوستگی جریان یعنی $\partial_\mu j^\mu = 0$ را ارضا می‌کند. باید j^μ توسط چگالی احتمال ρ و چگالی جریان \vec{j} مشخص شود. چگالی احتمال به صورت زیر است:

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \quad (۴۹-۲)$$

که مقداری مثبت می‌باشد. از آنجائی که $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ به عنوان چگالی جریان بار تعبیر می‌شود، بنابراین بار $-e$ به j^μ دیراک اضافه شده است:

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (50-2)$$

از این پس از j^μ به عنوان چهار بردار چگالی جریان الکترون تعبیر می‌شود [۳].

۲-۷- اسپینورهای ذره‌ی آزاد:

جواب‌های معادله‌ی دیراک برای یک ذره‌ی آزاد به صورت زیر است:

$$\psi = u(p)e^{-ip \cdot x} \quad (51-2)$$

u اسپینور چهار مولفه‌ای و مستقل از x است. با جایگذاری در رابطه‌ی (۲-۳۹) رابطه‌ی زیر به دست آمده است:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad (52-2)$$

که با استفاده از علامت اختصاری $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$ برای هر چهار بردار A_μ رابطه‌ی فوق به صورت زیر نوشته شده است:

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad (53-2)$$

این بدین معناست که بخش اسپینوری جواب ذره‌ی آزاد دیراک هم در خود معادله صدق می‌کند. بر این اساس این نتیجه گرفته شده است که این بخش اسپینوری در حقیقت ویژه بردارهای مربوط به هامیلتونی H می‌باشد. لذا به منظور پیدا کردن اسپینورهای دیراک، تلاش شده تا ویژه بردارهای هامیلتونی به دست آید. بدین منظور از شکل اصلی معادله‌ی دیراک (۲-۳۱) شروع می‌شود:

$$Hu = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u = Eu \quad (54-2)$$

در رابطه‌ی فوق مقدار انرژی برابر با $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ است، یعنی برای به دست آوردن جواب یک بار انرژی‌های مثبت و بار دیگر انرژی‌های منفی در نظر گرفته شده است. معادله‌ی فوق دارای چهار

جواب مستقل است که دو جواب مربوط به حالت انرژی مثبت و دو جواب مربوط به حالت انرژی منفی می‌باشد. قبل از اینکه اسپینورهای دیراک در حالت کلی به دست آید یعنی حالتی که ذره در حال سکون نباشد، $\vec{p} \neq 0$ ، اسپینورهای دیراک برای یک ذره در حال سکون $\vec{p} = 0$ به دست آمده است. با استفاده از نمایش‌های دیراک - پائولی برای α و β رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$Hu = \beta mu = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{pmatrix} u \quad (55-2)$$

معادله‌ی فوق یک معادله‌ی ویژه مقدری با ویژه مقادیر $E = m, m, -m, -m$ و ویژه بردارهای زیر است:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (56-2)$$

دو جواب اول معادله‌ی دیراک برای ذرات ساکن، u^1 و u^2 ، یک الکترون با انرژی مثبت را توصیف می‌کنند و جواب‌های ذرات با انرژی منفی به عنوان پاد ذرات با انرژی مثبت (پوزیترون) در نظر گرفته شده‌اند. لذا u^3 و u^4 اسپینورهای مربوط به پاد ذرات ساکن می‌باشند [5-2].

حال اسپینورهای دیراک برای یک ذره که در حالت کلی ساکن نیست $\vec{p} \neq 0$ بیان می‌شود:

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (57-2)$$

در اینجا u به اسپینورهای دو مولفه‌ای u_A و u_B تقسیم شده است. این دو مولفه توسط معادلات زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot p u_B &= (E - m) u_A \\ \sigma \cdot p u_A &= (E + m) u_B \end{aligned} \quad (58-2)$$

برای جواب‌های $E > 0$ ، با در نظر گرفتن $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$ روابط زیر برقرار است:

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (59-2)$$

و برای مولفه‌ی دیگر u با استفاده از رابطه‌ی دوم (58-2) عبارت زیر به دست آمده است:

$$u_B^{(s)} = \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \chi^{(s)} \quad (60-2)$$

بنابراین برای $E > 0$ ، چهار-اسپینور معادله‌ی دیراک به صورت زیر است:

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E > 0 \quad (61-2)$$

در این جا $s = 1, 2$ و N ثابت نرمالیزاسیون است.

برای تعیین جواب‌های چهار-اسپینور انرژی منفی معادله‌ی دیراک، با در نظر گرفتن $u_B^{(s)} = \chi^{(s)}$

و رابطه‌ی اول (58-2) رابطه‌ی زیر به دست آمده است:

$$u_A^{(s)} = \frac{\sigma \cdot p}{E - m} u_B^{(s)} = -\frac{\sigma \cdot p}{|E| + m} \chi^{(s)} \quad (62-2)$$

بنابراین برای $E < 0$ ، چهار اسپینور معادله‌ی دیراک به صورت زیر است:

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\sigma \cdot p}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0 \quad (63-2)$$

یک الکترون با اندازه حرکت \vec{p} ، دارای چهار جواب است، $u^{(1,2)}$ که منطبق بر انرژی‌های مثبت

هستند و $u^{(3,4)}$ که منطبق بر انرژی‌های منفی می‌باشند. به راحتی قابل بررسی است که چهار جواب

به دست آمده متعامد هستند:

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0, \quad r \neq s \quad (64-2)$$

در رابطه‌ی فوق $r, s = 1, 2, 3, 4$ می‌باشد.

با معلوم شدن اسپینورهای دیراک، تابع موج مربوط به ذراتی که از معادله‌ی دیراک تبعیت می‌کنند بر اساس رابطه‌ی (۲-۵۱) به دست می‌آید. همان‌طور که اشاره شد دو اسپینور دارای ویژه مقادیر مثبت و یکسان و دو اسپینور دارای ویژه مقادیر منفی و یکسان هستند، لذا برای انرژی‌ها به نوعی یک تبه‌گنی دو گانه برای هر حالت با انرژی مثبت و انرژی منفی ایجاد می‌شود. برای اینکه حالت ψ_1 از ψ_2 و حالت ψ_3 از ψ_4 متمایز شود، عملگر دیگری لازم است که با H و \vec{P} جابه‌جا پذیر باشد و ویژه بردارهای $u(p)$ در آن ویژه مقادیر متمایزی بدهند به طوری که نسبت به آن عملگر حالت تبه‌گن وجود نداشته باشد. لذا به این منظور عملگر مناسبی به نام helicity معرفی شده است که به صورت زیر می‌باشد:

$$\Sigma \cdot \hat{p} \equiv \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix}, \quad \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (2-65)$$

\hat{p} بردار یکه در جهت ممنتوم است. جابه‌جا پذیری عملگر helicity با اندازه حرکت خطی \vec{P} واضح است و جابه‌جا پذیری این عملگر با هامیلتونی نیز ثابت شده است.

مولفه‌ی اسپین در جهت حرکت، $\frac{1}{2} \sigma \cdot \hat{p}$ ، عدد کوانتومی خوبی است که از آن برای برچسب زدن جواب‌های چهارگانه‌ی معادله‌ی دیراک استفاده شده است. این عدد کوانتومی (مولفه‌ی اسپین در جهت حرکت) helicity حالت نامیده شده است. مقادیر ویژه (λ) عملگر helicity $\frac{1}{2} \sigma \cdot \hat{p}$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\lambda = \begin{cases} +\frac{1}{2} \text{ positive helicity} & \longrightarrow \\ -\frac{1}{2} \text{ negative helicity} & \longleftarrow \end{cases}$$

هیچ یک از مولفه‌های دیگر σ ویژه مقادیر مناسبی ندارند تا از آن‌ها به عنوان اعداد کوانتومی استفاده نمود.

با انتخابی که طبق معادله‌ی (۲-۵۹) برای اسپینورهای دیراک بیان شد، اندازه حرکت خطی در

راستای محور z یعنی به صورت $\vec{p} = (0, 0, p)$ در نظر گرفته شده و رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{1}{2} \sigma \cdot \hat{p} \chi^{(s)} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3}{|\vec{p}|} \right) \chi^{(s)} = \frac{1}{2} \sigma_3 \chi^{(s)} = \lambda \chi^{(s)} \quad (۲-۶۶)$$

که $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ به ترتیب متناظر با $s = 1, 2$ می‌باشد. به این ترتیب ویژه‌حالت‌های تبهگنی هامیلتونی

دیراک از یکدیگر جدا می‌شوند:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) = \phi(x, t) u_1 &\Rightarrow \lambda = +\frac{1}{2} & E > 0 \\ \psi_2(x, t) = \phi(x, t) u_2 &\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} & E > 0 \\ \psi_3(x, t) = \phi(x, t) u_3 &\Rightarrow \lambda = +\frac{1}{2} & E < 0 \\ \psi_4(x, t) = \phi(x, t) u_4 &\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} & E < 0 \end{aligned} \quad (۲-۶۷)$$

۲-۸- پاد ذرات:

دو جواب اول معادله‌ی دیراک $u^{(1,2)} e^{-ip \cdot x}$ ، به وضوح یک الکترون آزاد با انرژی E و اندازه

حرکت \vec{p} را توصیف می‌کنند. دو جواب مربوط به الکترون‌های آزاد با انرژی منفی $u^{(3,4)}$ ، مربوط به پاد ذرات می‌باشند که پوزیترون‌ها نامیده می‌شوند.

یک پوزیترون با انرژی E و اندازه حرکت \vec{p} می‌تواند توسط یکی از جواب‌های الکترون با انرژی

$-E$ و اندازه حرکت $-\vec{p}$ توصیف شود.

$$u^{(3,4)}(-p) e^{-i[-p] \cdot x} \equiv v^{(2,1)}(p) e^{ip \cdot x} \quad (۲-۶۸)$$

که $p^0 \equiv E > 0$ می‌باشد و اسپینورهای پوزیترون یعنی v ، برای سازگاری نوشتاری معرفی شده‌اند.

گفته شد که معادله‌ی دیراک برای $u(p)$ به صورت $(\not{p} - m)u(p) = 0$ است، اما برای $v(p)$

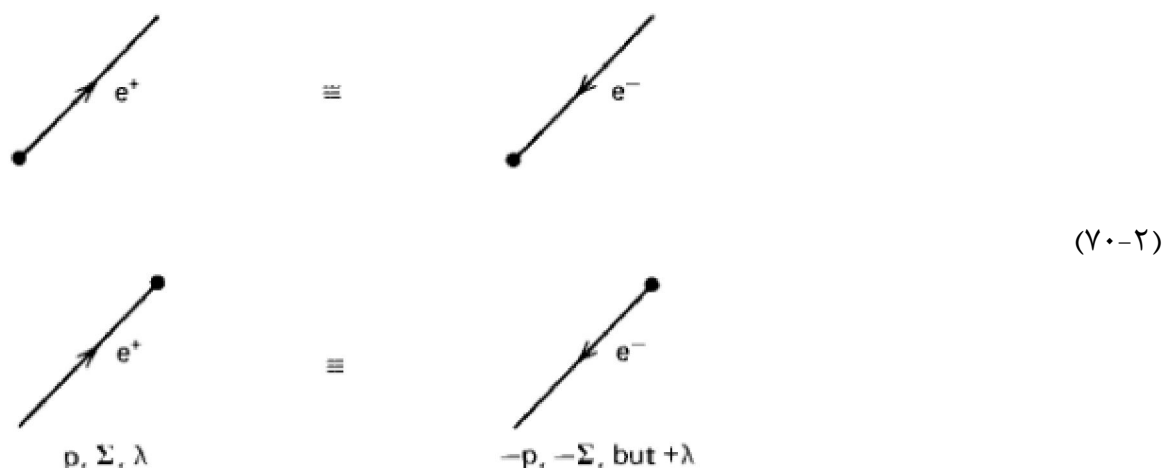
یعنی برای یک الکترون با انرژی $-E$ و تکانه $-p$ (پوزیترون با انرژی E و تکانه p) عبارت زیر برقرار است:

$$(-\not{p} - m)u(-p) = 0 \Rightarrow (\not{p} + m)v(p) = 0 \quad (۶۹-۲)$$

و تأکید می‌شود که در این جا نیز $p^0 \equiv E > 0$ می‌باشد.

رسم دیاگرام‌های فاینمن بر اساس ذرات (الکترون‌ها) انجام می‌شود. برای مثال یک پوزیترون ورودی با انرژی E به عنوان یک الکترون خروجی با انرژی $-E$ کشیده می‌شود. تنها خصوصیت جدید در انطباق ذره-پادذره بحث اسپین آن‌ها می‌باشد. در رابطه‌ی (۶۸-۲) دیده شد که اسپینورهای ضد ذرات ۱ و ۲ به ترتیب با اسپینورهای ذرات ۳ و ۴ معادل قرار داده شده‌اند. در چار چوب در حال سکون، غیبت یک اسپین بالا در راستای یک محور خاص معادل با حضور یک اسپین پایین در راستای همان محور است. از آن جا که در بحث ضد ذرات، اسپین و اندازه حرکت معکوس می‌شوند، $\frac{1}{2}\sigma \cdot \hat{p}$ helicity، بدون تغییر می‌ماند.

خلاصه‌ی بحث‌ها به صورت زیر نشان داده می‌شود:



معادله‌ی دیراک برای یک الکترون (بار $-e$) در یک میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

$$\left[\gamma^\mu (i \partial_\mu + e A_\mu) - m \right] \psi = 0 \quad (۷۱-۲)$$

یک معادله‌ی دیراک معادل برای پوزیترون (بار $+e$) هم وجود دارد:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi_C = 0 \quad (72-2)$$

باید نوعی تناظر یک به یک بین ψ و ψ_C برقرار باشد. برای ارتباط ψ_C به ψ ابتدا مزدوج مختلط معادله‌ی دیراک برای یک الکترون در حضور یک میدان الکترومغناطیسی در نظر گرفته می‌شود:

$$[-\gamma^{\mu*} (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi^* = 0 \quad (73-2)$$

ماتریسی به صورت $(C\gamma^0)$ وجود دارد به نحوی که معادله‌ی زیر را برآورده می‌سازد:

$$-(C\gamma^0)\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu (C\gamma^0) \quad (74-2)$$

در این صورت معادله‌ی $(73-2)$ به صورت $(72-2)$ نوشته خواهد شد:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m](C\gamma^0\psi^*) = 0 \quad (75-2)$$

چون معادله‌ی $(75-2)$ به فرم معادله‌ی $(72-2)$ است، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\psi_C = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T \quad (76-2)$$

T به معنی ترانهادی ماتریس است.

با توجه به نمایش ماتریس‌های گاما طبق معادلات $(34-2)$ و $(38-2)$ ، نشان داده شده است که

یکی از انتخاب‌های ممکن برای C به صورت زیر است:

$$C\gamma^0 = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = i\gamma^2\gamma^0 \quad (77-2)$$

و روابط زیر نیز به دست آمده‌اند:

$$\psi_C^{(1)} = i\gamma^2 [u^{(1)}(p)e^{-ip \cdot x}]^* = u^{(4)}(-p)e^{ip \cdot x} = v^{(1)}(p)e^{ip \cdot x} \quad (78-2)$$

$$C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T \quad (79-2)$$

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$$

$$\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1}$$

مشاهده شد که جریان الکترونی در فیلد حقیقی به صورت $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ است.

جریان مرتبط با میدان با بار مزدوج عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 j_C^\mu &= -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C \\
 &= -e(-\psi^T C^{-1})\gamma^\mu(C\bar{\psi}^T) \\
 &= e\psi^T(C^{-1}\gamma^\mu C)\bar{\psi}^T \\
 &= -e\psi^T(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T \\
 &= -(e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)
 \end{aligned} \tag{۸۰-۲}$$

منشأ علامت منفی اضافی که در خط آخر معرفی شده است، مهم می‌باشد و برای یک نتیجه‌ی با معنای

فیزیکی کاملاً حایز اهمیت است. این نتیجه‌ی با معنای فیزیکی پرداختن به این مسئله است که j_C^μ

جریان پوزیترون‌ها باشد. علامت منفی مربوط به ارتباط میان آمار و اسپین می‌باشد. در تئوری میدان

این مسئله به طبیعت پاد متقارن میدان‌های فرمیونی باز می‌گردد [۳].

۲-۹- الکترون با اسپین ۱/۲ در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی:

اولین قدم پیدا کردن فرم پتانسیل اختلالی است که به یک ذره دیراک در میدان

الکترومغناطیسی وارد می‌شود. در مجاورت میدان الکترومغناطیسی خارجی روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
 p^\mu &\rightarrow p^\mu - qA^\mu, \quad q = -e \\
 p^\mu &\rightarrow p^\mu + eA^\mu \\
 i\hbar\partial^\mu &\rightarrow i\hbar\partial^\mu + eA^\mu \\
 \partial^\mu &\rightarrow \partial^\mu - ieA^\mu
 \end{aligned} \tag{۸۱-۲}$$

با اعمال رابطه‌ی فوق بر روی معادله‌ی دیراک روابط زیر به دست آمده است:

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \rightarrow (\gamma_\mu(i\partial^\mu) - m)\psi = 0 \tag{۸۲-۲}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_\mu (i\partial^\mu + eA^\mu) - m)\psi &= 0 \\
(\gamma_\mu (i\partial^\mu) + e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi &= 0 \\
(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi &= -e\gamma_\mu A^\mu \psi \\
\left(\gamma_0 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) - \gamma_i p^i - m\right)\psi &= -e\gamma_\mu A^\mu \psi
\end{aligned}
\tag{۸۳-۲}$$

ملاحظه می‌شود که جمله‌ی اول که مربوط به جمله‌ی انرژی است $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)$ یک γ_0 اضافه دارد،

لذا برای از بین بردن این γ^0 و تبدیل عبارت فوق به عبارتی که مشابه معادله‌ی شرودینگر شود، طرفین در γ^0 ضرب شده است.

$$\gamma^0 \times (\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = -e\gamma^0 \gamma_\mu A^\mu \psi \tag{۸۴-۲}$$

در نتیجه γ_0 موجود در جمله‌ی انرژی از بین می‌رود و معادله‌ی فوق به صورت $(E + \dots)\psi = V\psi$ تبدیل می‌شود و پتانسیل اختلالی به فرم زیر خواهد بود:

$$V = -e\gamma^0 \gamma_\mu A^\mu \tag{۸۵-۲}$$

با به کار بردن تئوری اختلال مرتبه‌ی اول، احتمال گذار برای یک ذره دیراک از حالت i به f

بر اثر اعمال پتانسیل اختلالی به دست آمده است:

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= -i \int \psi_f^\dagger V(x) \psi_i d^4x \\
&= -i \int \bar{\psi}_f (-e\gamma_\mu A^\mu) \psi_i(x) d^4x \\
&= -i \int -e\bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i A^\mu d^4x \\
&= -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x
\end{aligned}
\tag{۸۶-۲}$$

که j_μ^{fi} با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
j_\mu^{fi} &\equiv -e\bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i \\
&= -e\bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x}
\end{aligned}
\tag{۸۷-۲}$$

j_μ^{fi} می‌تواند به عنوان جریان گذار الکترومغناطیسی میان حالت‌های الکترونی i و f در نظر گرفته شود. یادآوری می‌شود که جریان گذار برای الکترون بدون اسپین به صورت زیر است:

$$j_\mu^{fi} = -e(p_f + p_i)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (۸۸-۲)$$

در شکل زیر قواعد فاینمن برای الکترون بدون اسپین و الکترون با اسپین $1/2$ نشان داده شده است.



(ب) الکترون بدون اسپین

(الف) الکترون با اسپین $1/2$

شکل ۲-۲- عوامل رأس برای قوانین فاینمن

عامل رأس یک ماتریس 4×4 در فضای اسپینی است که بین اسپینورهای سطری $u^{(s)}(p_i)$ و ستونی $\bar{u}^{(r)}(p_f)$ توصیف کننده الکترون‌های ورودی و خروجی با ممنتوم p_i و p_f و حالت‌های اسپینی s و r ساندویچ شده‌اند. یک الکترون بدون اسپین می‌تواند تنها از طریق بارش با A^μ برهم-کنش کند و جفت شدگی شامل $(p_f + p_i)^\mu$ است، اما یک الکترون با اسپین $1/2$ هم به واسطه‌ی بارش و هم ممان مغناطیسی‌اش می‌تواند برهم‌کنش کند.

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left((p_i + p_f)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu \right) u_i \quad (۸۹-۲)$$

رابطه‌ی فوق معروف به ترکیب گوردون می‌باشد [۶-۷ و ۳].

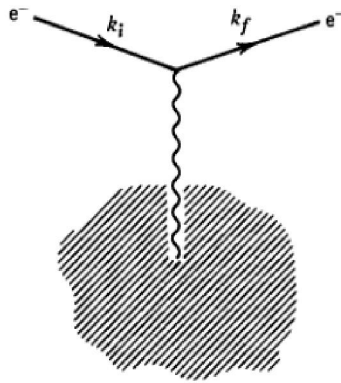
فصل سوم

ساختار هادرون‌ها

- ❖ بررسی پراکندگی الکترون از یک توزیع بار - فرم فاکتورها
- ❖ پراکندگی الکترون - پروتون. فرم فاکتورهای پروتون
- ❖ پراکندگی غیرالاستیک الکترون - پروتون ($ep \rightarrow eX$)
- ❖ مقیاس بندی بیورکن
- ❖ پارتون‌ها و مقیاس بندی بیورکن
- ❖ بررسی اجزای داخل پروتون

۳-۱- بررسی پراکندگی الکترون از یک توزیع بار - فرم فاکتورها:

تصویربرداری از جسم به وسیله پراکندگی یک پرتو الکترونی از آن تکنیکی است که در فیزیک به خوبی ثابت شده است. فرض کنید قرار است توزیع بار نشان داده شده در شکل ۳-۱ تعیین شود که می‌تواند برای مثال ابر الکترونی یک اتم باشد [۳].



شکل ۳-۱- پایین‌ترین مرتبه‌ی پراکندگی الکترون از یک توزیع بار

روش کار اندازه‌گیری توزیع زاویه‌ای الکترون‌های پراکنده شده و مقایسه آن با سطح مقطع مربوط به پراکندگی الکترون‌ها از یک بار نقطه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{point}} |F(q)|^2 \quad (1-3)$$

q ممنتوم انتقالی بین الکترون فرودی و هدف است.

$$q = k_i - k_f \quad (2-3)$$

لازم به ذکر است که در اینجا پراکندگی الکترون‌های غیر پلاریزه با انرژی E از یک توزیع بار بدون اسپین و استاتیک $Z\rho(\vec{x})$ در نظر گرفته شده است که به صورت زیر نرمالیزه می‌شود:

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = 1 \quad (3-3)$$

برای یک هدف استاتیک دیده می‌شود که فرم فاکتور تبدیل فوریه‌ی توزیع بار است؛

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3x \quad (4-3)$$

به صورت زیر قابل محاسبه است: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{point}$

سطح مقطع پراکندگی کل عبارت از احتمال گذار از یک حالت خاص مانند i به یک حالت دیگر مانند f در واحد زمان و واحد حجم به ازای شار فرودی ذرات پراکنده شده ضربدر تعداد حالت‌های مجاز نهایی می‌باشد.

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} \frac{V d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f v 2E_i} \quad (5-3)$$

که کمیت $|T_{fi}|^2$ در رابطه‌ی فوق توصیف احتمال پراکنده شدن ذره از حالت i به حالت f می‌باشد؛

$$T_{fi} = -i \int j_{\mu}^{fi} A^{\mu} d^4 x \quad (6-3)$$

نیز جریان گذار الکترومغناطیسی میان حالت‌های الکترونی i و f است که با توجه به (۲-۸۸) با رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$j_{\mu}^{fi} = -e \bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i e^{i(k_f - k_i) \cdot x} = -e \bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i e^{-iq \cdot x} \quad (7-3)$$

میدان الکترومغناطیسی مربوط به توزیع بار به صورت زیر انتخاب شده است:

$$A^{\mu} = (\phi, 0) \quad (8-3)$$

در نتیجه روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int d^4 x j_0^{fi} \phi(\vec{x}) = -i \int d^4 x (-e \bar{u}_f \gamma_0 u_i) e^{-iq \cdot x} \phi(\vec{x}) \\ T_{fi} &= -i \int dt e^{-iq_0 x_0} \int d^3 x e^{iq \cdot \vec{x}} (-e \bar{u}_f \gamma_0 u_i) \phi(\vec{x}) \\ T_{fi} &= -i (2\pi \delta(E_f - E_i)) (-e \bar{u}_f \gamma_0 u_i) \int e^{iq \cdot \vec{x}} \phi(\vec{x}) d^3 x \\ T_{fi} &= -2\pi i \delta(E_f - E_i) (-e \bar{u}_f \gamma_0 u_i) \int e^{iq \cdot \vec{x}} \phi(\vec{x}) d^3 x \end{aligned} \quad (9-3)$$

برای انتگرال آخر با در نظر گرفتن روابط زیر،

$$\square^2 A^{\mu} = j^{\mu}, \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = -Ze \rho(\vec{x}) \quad (10-3)$$

و همچنین از قضیه‌ی گرین $\int (G\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2G)d^3x = 0$ و در نظر گرفتن تغییر متغیرهای (۱۱-۳) و (۱۲-۳) رابطه‌ی (۱۳-۳) به دست آمده است:

$$G = e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \Rightarrow \nabla^2 G = -q^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \Rightarrow e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -\frac{\nabla^2 G}{q^2} \quad (11-3)$$

$$\phi(\vec{x}) = \Phi \quad (12-3)$$

$$\begin{aligned} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{x}) d^3x &= \int -\frac{\nabla^2 G}{q^2} \Phi d^3x = -\frac{1}{q^2} \int G \nabla^2 \Phi d^3x \\ &= -\frac{1}{q^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (-Ze\rho(\vec{x})) d^3x \\ &= \frac{Ze}{q^2} \int d^3x \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{Ze}{q^2} F(\vec{q}) \end{aligned} \quad (13-3)$$

و اما با جمع روی اسپین‌های نهایی الکترون و میانگین گیری روی اسپین‌های اولیه رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} |\bar{u}_f(k_f) \gamma^0 u_i(k_i)|^2 = 4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (14-3)$$

که از روابط زیر استفاده شده است:

$$k = |\vec{k}_i| = |\vec{k}_f|, v = k/E \quad (15-3)$$

θ نیز زاویه‌ی پراکندگی الکترون و k_i, k_f هم چهاربردارهای تکانه‌ی آن است:

$$k_i = (E, \vec{K}_i) \quad (16-3)$$

$$k_f = (E, \vec{K}_f) \quad (17-3)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} d^3k_f &= k_f^2 dk_f d\Omega \\ E_f^2 &= M^2 + k_f^2 \Rightarrow E_f dE_f = K_f dk_f \\ d^3k_f &= k_f E_f dE_f d\Omega \\ d^3k_f \delta(E_f - E_i) &= k_f E_f d\Omega dE_f \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (18-3)$$

q^2 نیز در رابطه‌ی زیر داده شده است؛

$$q^2 = (k_i - k_f)^2 \approx -4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (۱۹-۳)$$

با استفاده از روابط (۳-۶) تا (۳-۱۹) و جایگذاری در رابطه‌ی (۳-۵) عبارت زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{4\pi^2 \delta^2(E_f - E_i) e^2 4E^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta) z^2 e^2 |F(\vec{q})|^2}{2\pi \delta(E_f - E_i) 16k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} 8\pi^3 \times 2E} \frac{d^3 k_f}{2vE} \quad (۲۰-۳) \\ &= \frac{(Z\alpha)^2 E^2 d\Omega \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(\vec{q})|^2 \end{aligned}$$

که به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(\vec{q})|^2 \quad (۲۱-۳)$$

در رابطه‌ی فوق $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ می‌باشد و با توجه به رابطه‌ی (۳-۱) نتیجه زیر به دست آمده است:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{po\ int} \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (۲۲-۳)$$

اگر توزیع بار تقارن کروی داشته باشد یعنی تنها تابعی از $r \equiv |\vec{x}|$ باشد، در حد $q \rightarrow 0$ می‌توان

$F(\vec{q})$ را به صورت زیر بسط داد

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \int \left(1 + i\vec{q}\cdot\vec{x} - \frac{(\vec{q}\cdot\vec{x})^2}{2!} + \dots\right) \rho(\vec{x}) d^3x \quad (۲۳-۳) \\ &= \int \rho(\vec{x}) d^3x + \int i\vec{q}\cdot\vec{x} \rho(\vec{x}) d^3x - \int \frac{(i\vec{q}\cdot\vec{x})^2}{2!} \rho(\vec{x}) d^3x + \dots \end{aligned}$$

در روابط زیر انتگرال‌ها محاسبه شده‌اند؛

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = 1 \quad (۲۴-۳)$$

$$\int \vec{q} \cdot \vec{x} \rho(\vec{x}) d^3x = \int q r \cos \theta \rho(\vec{r}) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= -2\pi q \int r^3 \rho(\vec{r}) dr \int_0^\pi \cos \theta d(\cos \theta) = 0 \quad (25-3)$$

$$\int \frac{(\vec{q} \cdot \vec{x})^2}{2!} \rho(\vec{x}) d^3x = \int \frac{(q r \cos \theta)^2}{2} \rho(\vec{r}) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{q^2}{2} 2\pi \int r^4 \rho(\vec{r}) dr \int_0^\pi -\cos^2 \theta d(\cos \theta)$$

$$= \frac{q^2}{6} 4\pi \int r^4 \rho(\vec{r}) dr = \frac{q^2}{6} \int r^2 \rho(\vec{r}) (4\pi r^2 dr)$$

$$= \frac{q^2}{6} \int r^2 \rho(\vec{r}) dv = \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle \quad (26-3)$$

در نهایت عبارت زیر به دست آمده است؛

$$F(\vec{q}) = 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{6} \langle r^2 \rangle + \dots \quad (27-3)$$

۲-۳- پراکندگی الکترون-پروتون. فرم فاکتورهای پروتون

پراکندگی الکترون-پروتون بهترین روش برای بررسی ساختار داخلی پروتون است. اما ابتدا باید به چند نکته توجه نمود، اول اینکه پروتون مانند الکترون دارای اسپین است بنابراین ممان مغناطیسی آن هم علاوه بر برهمکنش‌های الکتریکی ناشی از بار آنها، در پراکندگی $e-p$ موثر است، و دوم اینکه اگر سطح انرژی الکترون فرودی خیلی زیاد باشد دیگر پروتون بر اثر این برهمکنش استاتیک و پایا باقی نخواهد ماند بلکه تحت بمباران این الکترون‌ها متلاشی خواهد شد.

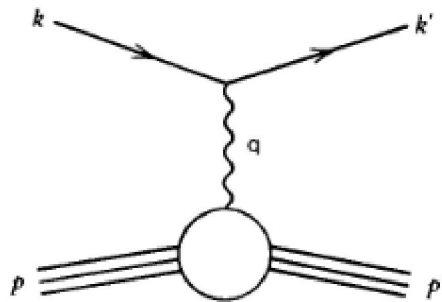
حال اگر پروتون یک بار نقطه ای e با ممان مغناطیسی دیراک $e/2M$ بود می شد به راحتی پاسخ سطح مقطع پراکندگی الکترون-پروتون را با استفاده از روابط مربوط به پراکندگی به دست آورد.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (28-3)$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (29-3)$$

فاکتور $\frac{E'}{E}$ از پس زنی هسته ناشی می‌شود.

پایین ترین مرتبه دامنه پراکندگی الاستیک $ep \rightarrow ep$ ، شکل ۳-۲ به صورت زیر است [۸ و ۲]؛



شکل ۳-۲- پایین ترین مرتبه‌ی پراکندگی الاستیک الکترون - پروتون

$$T_{fi} = -i \int j_{\mu} \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^{\mu} d^4x \quad (30-3)$$

که $q = p' - p$ است و J^{μ}, j^{μ} به ترتیب جریان الکترونی و پروتونی می‌باشند.

$$j^{\mu} = -e \bar{u}(k') \gamma^{\mu} u(k) e^{i(k'-k)x} \quad (31-3)$$

$$J^{\mu} = e \bar{u}(p') [\] u(p) e^{i(p'-p)x} \quad (32-3)$$

برای مطالعات پراکندگی که شامل پروتون است، باید جریان مربوط به پروتون را شناخت.

از آنجا که پروتون یک ساختار وسیع دارد یعنی از یک سری اجزا تشکیل شده است، نمی‌توان در رابطه‌ی مربوط به جریان آن درون براکت‌ها γ^{μ} قرار داد. اما از آنجا که J_{μ} یک ۴ بردار لورنتس است، لذا باید کلی‌ترین شکل ۴ برداری که از γ_{μ}, q, p', p (ماتریس‌های گاما) می‌توان ساخت را بین \bar{u}, u ساندویچ نمود. تنها دو ترم مستقل براین اساس وجود دارد؛ $\gamma^{\mu}, i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}$ و ضرایب مربوط به هر کدام توابعی از q^2 هستند و q^2 تنها متغیر اسکالر مستقلی است که در راس مربوط به p در نمودار فاینمن وجود دارد.

توجه داشته باشید که $p \cdot q$ متغیر اسکالر مستقل نیست و وابسته به q^2 است؛

$$p' = p + q \quad (33-3)$$

طرفین به توان ۲ می‌رسد،

$$M^2 = M'^2 + 2p \cdot q + q^2 \quad (34-3)$$

$$p \cdot q = -\frac{q^2}{2}$$

بنابراین اگر فرض شود $J_p^\mu = \bar{u} \Gamma^\mu u$ ، در این صورت Γ^μ ترکیبی از γ^μ, p', p, q, p' است. لذا عبارتهایی که باید لحاظ شوند عبارت هستند از:

$$\gamma^\mu - \sigma^{\mu\nu} q_\nu - \sigma^{\mu\nu} (p_f + p_i)_\nu - (p_f + p_i)^\mu - (p_f - p_i)^\mu \quad (35-3)$$

جملات شامل γ^μ به خاطر پایستگی پاریتی و جمله $(p - p')^\mu$ به خاطر پایستگی جریان $\partial_\mu j_\mu = 0$ در نظر گرفته نمی‌شوند. جملات شامل $(p + p')^\mu$ نیز با توجه به ترکیب گوردون بر حسب ترکیب خطی جملات $\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu, \gamma^\mu$ بازنویسی می‌شود که ترکیب گوردون به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{u} \gamma^\mu u = \frac{1}{2m} \bar{u} \left((p_i + p_f)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u \quad (36-3)$$

می‌توان جملات $\sigma^{\mu\nu} (p_f + p_i)_\nu, (p_f + p_i)^\mu$ را بر حسب $\sigma^{\mu\nu} q_\nu, \gamma^\mu$ نوشت، در نتیجه آنچه باقی می‌ماند سه جمله $\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} q_\nu, q^\mu$ است. روشن است که ضرایب مربوط به آنها تابعی از q^2 هستند. لذا رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$J_p^\mu = e \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{\kappa}{2M} i \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3(q^2) q^\mu \right] u(p) e^{iq \cdot x} \quad (37-3)$$

اصل بقای جریان در فضای اندازه حرکت به صورت زیر است:

$$q_\mu J_p^\mu = 0 \quad (38-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$q_\mu \left(e\bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{\kappa}{2M} i \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3(q^2) q^\mu \right] u(p) e^{iq \cdot x} \right) = 0 \quad (39-3)$$

که به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$\bar{u} \left(F_1(q^2) q_\mu \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{\kappa}{2M} i q_\mu \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3(q^2) q_\mu q^\mu \right) u = 0 \quad (40-3)$$

برای جمله سوم، داریم:

$$q_\mu q^\mu = q^2 \neq 0 \Rightarrow F_3(q^2) = 0 \quad (41-3)$$

بنابراین به جای براکت در رابطه‌ی مربوط به جریان پروتون عبارت زیر قرار داده می شود:

$$[] = \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + i \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \quad (42-3)$$

بر اساس استدلال کلی که بیان شد، کلی ترین شکل برای جریان ذره ای با اسپین ۱/۲ که نمی دانیم ساختار دارد یا نه، به صورت زیر است:

$$J_p^\mu = e\bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + i \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) e^{iq \cdot x} \quad (43-3)$$

F_1, F_2 دو فرم فاکتور مستقل هستند و $\kappa = 1.79$ گشتاور مغناطیسی بی هنجار^{۱۴} است.

هنگامی که q^2 به سمت صفر میل می کند، $q^2 \rightarrow 0$ ، یعنی هنگامی که فوتون‌هایی با طول موج

بلند بررسی می شوند، پروتون نقطه‌ای به نظر می رسد، در این حد برای پروتون مقادیر زیر داده شده است:

$$F_1(0) = 1, \quad F_2(0) = 1 \quad (44-3)$$

در صورتی که رابطه‌ی (۴۲-۳) برای محاسبه‌ی دیفرانسیل سطح مقطع پراکندگی الکترون- پروتون بکار رود رابطه‌ی زیر حاصل می شود:

¹⁴ Anomalous magnetic moment

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (45-3)$$

رابطه‌ی فوق به رابطه‌ی روزنبلات معروف است. ثابت‌های ساختاری $F_1(q^2), F_2(q^2)$ از طریق آزمایشگاهی با تعیین سطح مقطع برهمکنش $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ به صورت تابعی از q^2, θ قابل اندازه‌گیری هستند. اگر پروتون بدون ساختار و به صورت یک ذره نقطه‌ای در نظر گرفته شود، در این صورت در رابطه‌ی مربوط به فرمول روزنبلات باید $\kappa = 0$ و $F_1(q^2) = 1$ لحاظ شود. در این شرایط این فرمول برای $ep \rightarrow ep$ ساختاردار به رابطه‌ی $ep \rightarrow ep$ نقطه‌ای تبدیل می‌شود.

عملاً بهتر است که به جای $F_{1,2}(q^2)$ ترکیبی خطی از این دو تابع ساختاری در رابطه‌ی مربوط به فرمول روزنبلات قرار گیرد:

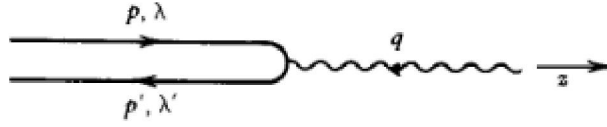
$$G_E \equiv F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2 \quad (46-3)$$

$$G_M \equiv F_1 + \kappa F_2 \quad (47-3)$$

G_E, G_M به نحوی تعیین شده اند که هیچ جمله‌ای به صورت $G_E G_M$ در رابطه‌ی مربوط به سطح مقطع پراکندگی ظاهر نشود، در این صورت فرمول روزنبلات برای پراکندگی $ep \rightarrow ep$ دارای ساختار به فرم زیر در می‌آید:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \tau \equiv -\frac{q^2}{4M^2} \quad (48-3)$$

هم چنین ثابت شده که فرم فاکتورهای $G_M(q^2), G_E(q^2)$ به ترتیب به توزیع بار و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون مرتبط می‌شوند که این کار در دستگاه مختصات بریت انجام شده است. این دستگاه مختصات دستگامی است که در آن اندازه حرکت پروتون قبل و بعد از برهم‌کنش مساوی و در خلاف جهت هم است، درست مانند ذره‌ای که به یک دیواره برخورد می‌کند.



شکل ۳-۳- دستگاه مختصات بریت

در این دستگاه مختصات، انرژی انتقالی به پروتون وجود ندارد. محور \$Z\$ در امتداد \$\vec{p}\$ انتخاب می‌شود. به ترتیب هیلیسیتی اولیه و نهایی پروتون هستند.

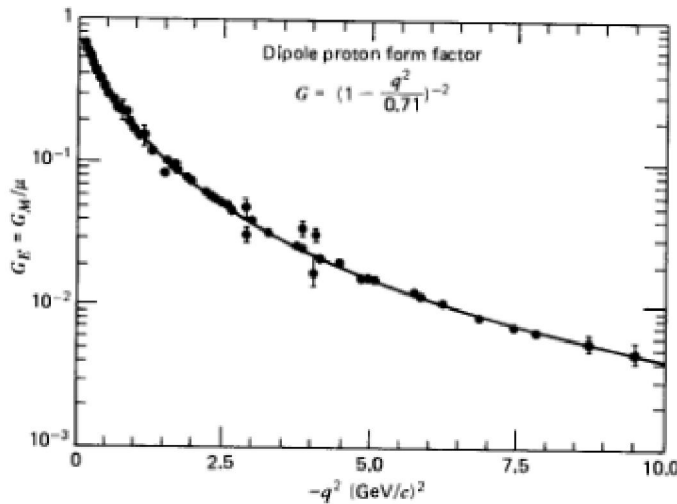
استفاده از ترکیب گوردون به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J^\mu(0) = e\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu (F_1 + \kappa F_2) - \frac{(p^\mu + p'^\mu)}{2M} \kappa F_2 \right] u(p) \quad (49-3)$$

در نتیجه روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} \rho &= 2Me G_E(q^2) & \text{for } \lambda = -\lambda' \\ J_1 \pm iJ_2 &= \mp 2|\vec{q}|e G_M(q^2) & \text{for } \lambda = \lambda' = \mp \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (50-3)$$

همان‌طور که در رابطه‌ی فوق دیده می‌شود \$G_M(q^2), G_E(q^2)\$ به ترتیب به توزیع بار و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون نسبت داده می‌شوند.



شکل ۳-۴- فرم فاکتورهای پروتون به عنوان تابعی از \$q^2\$

با توجه به شکل (۳-۴) رابطه‌ی زیر به دست آمده است:

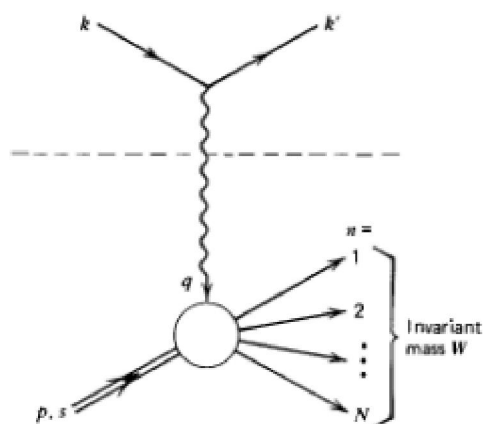
$$G_E(q^2) \approx \left(1 - \frac{q^2}{0.71}\right)^{-2} \quad (\text{in units of } GeV^2) \quad (۳-۵۱)$$

و برای میانگین مجذور شعاع باری پروتون با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۷)، عبارت زیر به دست آمده است:

$$\langle r^2 \rangle = 6 \left(\frac{dG_E(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0} = (0.81 \times 10^{-13} \text{ cm})^2 \quad (۳-۵۲)$$

۳-۳- پراکندگی غیرالاستیک الکترون - پروتون ($ep \rightarrow eX$)

با اندازه‌گیری سایز پروتون، شاید علاقه‌مند باشیم با افزایش $-q^2$ مربوط به فوتون برای دستیابی به رزولوشن بهتر، نگاه جزئی‌تری به ساختار پروتون نماییم. این مسئله به راحتی با افزایش انرژی ذره فرودی یعنی الکترون انجام شده است. در این شرایط به دلیل انرژی بالای انتقال یافته، پروتون شکافته شده و تصویر (۳-۲) به تصویر (۳-۵) تبدیل می‌شود.



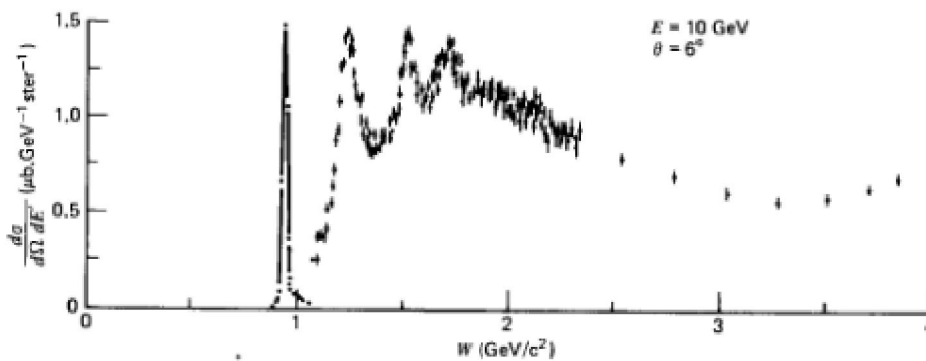
شکل ۳-۵- نمودار پایین‌ترین مرتبه‌ی پراکندگی $ep \rightarrow eX$

برای $-q^2$ های نسبتاً کوچک، ممکن است پروتون به یک حالت Δ برانگیخته شود و بنابراین یک

مزون π اضافه تولید می‌شود، $ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow ep\pi^0$ ، و برای جرم ناوردا (در شکل ۳-۵)، $W^2 = M_\Delta^2$ ،

را می‌توان نوشت.

وقتی q^2 خیلی بزرگ می‌شود، ممکن است پروتون اولیه ویژگی‌های خود را از دست بدهد و فرمالیزم جدیدی برای اقتباس اطلاعات از اندازه‌گیری‌ها نیاز باشد. در نمودار زیر توزیع جرم ناوردا نمایش داده شده است.



شکل ۳-۶- سطح مقطع $ep \rightarrow eX$ بر حسب جرم W

وقتی پروتون شکافته نشده است یک پیک وجود دارد و آن مربوط به $W = M$ است و پیک‌های بعد مربوط به زمانی است که هدف به حالت‌های رزونانس باریونی برانگیخته شده است. در ورای رزونانس‌ها حالت‌های چند ذره‌ای با اجرام ناوردای بزرگ منجر به یک توزیع کاهش هموار جرم ناوردا می‌شوند.

مشکلی که اکنون وجود دارد، با یادآوری جریان مربوط به پروتون نقطه‌ای (۳-۲۹) و پروتون دارای ساختار (۳-۳۰) و شکل ۳-۲ شرح داده می‌شود. اگر چه همه چیز در بالای خط چین در شکل ۳-۵ هم‌چنان بدون تغییر است، اما حالت نهایی زیر خط چین یک فرمیون یگانه نیست که با یک \bar{u} دیراک توصیف شود، زیرا ذرات زیادی تولید شده‌اند. بنابراین J^μ باید شکل پیچیده‌تری از (۳-۳۰) داشته باشد.

بهترین نقطه‌ی شروع، عبارت مربوط به سطح مقطع برهمکنش $ep \rightarrow ep$ نقطه‌ای است [۳ و ۲].

$$d\sigma \sim L_{\mu\nu}^e (L^p)^{\mu\nu} \quad (۳-۵۳)$$

در پراکندگی ناکشسان عبارت فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d\sigma \sim L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \quad (54-3)$$

که $L_{\mu\nu}^e$ تانسور لپتونی بوده و همه چیز در قسمت لپتونی دیاگرام در بالای انتشارگر فوتون بدون تغییر باقی می ماند. $W^{\mu\nu}$ نیز تانسور هادرونی است که برای پارامتربندی شکل نادیده گرفته شده جریان در انتهای دیگر انتشارگر به کار برده شده است.

کلی ترین شکل تانسور $W^{\mu\nu}$ باید از $g^{\mu\nu}$ و تکانه های مستقل q, p ($p' = p + q$) ساخته شود. از آن جایی که سطح مقطع با جمع بندی روی اسپین های ورودی و خروجی و متوسط گیری روی اسپین های ورودی پارامتر بندی می شود γ^μ در این شکل کلی وارد نمی شود. شکل کلی برای $W^{\mu\nu}$ به صورت زیر است:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \quad (55-3)$$

در این رابطه سهم مربوط به جملات پادمتقارن حذف می شود، چرا که بعد از ضرب تانسور متقارن $L_{\mu\nu}^e$ سهم آن ها در سطح مقطع صفر می شود.

W_3 نیز برای تابع ساختار نقض پاریته^{۱۵}، وقتی یک باریکه نوترینو با یک باریکه الکترون جایگزین می شود نگه داشته شده است، در این شرایط فوتون حقیقی با یک بوزون ضعیف جایگزین می شود.

در بحث هایی که در بالا به آن ها اشاره شده است روابط زیر به دست آمده است:

$$L_{\mu\nu}^e = L_{\nu\mu}^e \quad (56-3)$$

$$q^\mu L_{\mu\nu}^e = q^\nu L_{\mu\nu}^e = 0 \quad (57-3)$$

ضمناً قانون بقای جریان در رأس هادرونی روابط زیر را ایجاب می کند:

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0 \quad (58-3)$$

با جایگذاری (55-3) در رابطه ی فوق عبارت زیر حاصل می شود:

¹⁵ Parity-Violating

$$\begin{aligned}
 q_{\mu} W^{\mu\nu} &= -W_1 q_{\mu} g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} q_{\mu} p^{\mu} p^{\nu} + \frac{W_4}{M^2} q_{\mu} q^{\mu} q^{\nu} + \frac{W_5}{M^2} q_{\mu} (p^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} p^{\nu}) \\
 &= -W_1 q^{\nu} + \frac{W_2}{M^2} (q \cdot p) p^{\nu} + \frac{W_4}{M^2} q^2 q^{\nu} + \frac{W_5}{M^2} ((q \cdot p) q^{\nu} + q^2 p^{\nu}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{۵۹-۳}$$

در رابطه‌ی بالا ضرایب p^{ν} و q^{ν} به ترتیب برابر با صفر قرار داده می‌شود، در نتیجه برای W_4 و W_5 رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\frac{W_2}{M^2} (q \cdot p) + \frac{W_5}{M^2} q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2
 \tag{۶۰-۳}$$

$$-W_1 + \frac{W_4}{M^2} q^2 + \frac{W_5}{M^2} q \cdot p = 0 \quad \Rightarrow \quad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 W_2
 \tag{۶۱-۳}$$

بنابراین از چهار تابع ساختاری که در $W^{\mu\nu}$ معرفی شده است فقط دو تای آن‌ها مستقل هستند. لذا $W^{\mu\nu}$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu} q^{\nu}}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p^{\mu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q^{\mu} \right) \left(p^{\nu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q^{\nu} \right)
 \tag{۶۲-۳}$$

W_i ها در این تعبیر، توابعی از متغیرهای اسکالر لورنتس هستند که از چهار بردارهای موجود در رأس هادرونی ساخته می‌شوند. برخلاف پراکندگی الاستیک که ثابت ساختار فقط تابعی از q^2 بود، در اینجا W_i ها توابعی از دو متغیر اسکالر q^2 و ν می‌باشند. برای ν رابطه‌ی زیر داده شده است:

$$\nu \equiv \frac{p \cdot q}{M}
 \tag{۶۳-۳}$$

جرم ناوردای W مربوط به سیستم هادرون نهایی به صورت زیر به q^2 و ν مربوط می‌شود:

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2M\nu + q^2
 \tag{۶۴-۳}$$

رایج است که q^2 و ν را با متغیرهای بدون بعد زیر جایگزین می‌کنند:

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu}, \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}
 \tag{۶۵-۳}$$

ناحیه مجاز برای این متغیرها $0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq x \leq 1$ می‌باشد که در ادامه نشان خواهیم داد.

در چارچوب آزمایشگاه روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
p^\mu &= (M, 0) \\
k^\mu &= (E, \vec{k}) \\
k'^\mu &= (E', \vec{k}') \\
q^2 &= (k - k')^2 < 0
\end{aligned}
\tag{۶۶-۳}$$

E و E' انرژی اولیه و نهایی الکترون هستند.

با توجه به رابطه‌ی (۶۳-۳) و (۶۶-۳) برای $p.k$ و $p.q$ در رابطه‌ی (۶۵-۳) روابط زیر به دست آمده است:

$$p.k = (M, 0) \cdot (E, \vec{k}) = ME \tag{۶۷-۳}$$

$$p.q = (M, 0) \cdot (E - E', \vec{k} - \vec{k}') = M(E - E') = \nu M \tag{۶۸-۳}$$

در رابطه‌ی فوق برای ν شرط زیر برقرار خواهد بود:

$$\nu = E - E' > 0 \tag{۶۹-۳}$$

در نتیجه x در رابطه‌ی (۶۵-۳) مثبت خواهد بود. همچنین از رابطه‌ی (۶۴-۳) عبارت زیر برقرار خواهد بود:

$$W^2 > M^2 \Rightarrow q^2 + 2\nu M \geq 0 \Rightarrow \frac{-q^2}{2\nu M} \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 \tag{۷۰-۳}$$

بنابراین همان‌طور که گفته شد $0 \leq x \leq 1$ خواهد بود و اما برای y روابط زیر برقرار است:

$$y = \frac{p.q}{p.k} = \frac{(M, 0) \cdot (E - E', \vec{k} - \vec{k}')}{(M, 0) \cdot (E, \vec{k})} = \frac{M(E - E')}{ME} = \frac{E - E'}{E} = 1 - \frac{E'}{E} > 0 \tag{۷۱-۳}$$

$$\text{if } E' \ll E \Rightarrow y = 1$$

$$\text{if } E = E' \Rightarrow y = 0$$

بنابراین $0 \leq y \leq 1$ خواهد بود.

محاسبه‌ی سطح مقطع برهم‌کنش برای $ep \rightarrow eX$ بسیار ساده است، درست مشابه

$L_{\mu\nu}^{muon} \rightarrow e\mu^-$ یا $(ep \rightarrow ep)$ با جایگذاری $W_{\mu\nu}$ (شامل دو تابع ساختاری W_1 و W_2) به جای $L_{\mu\nu}^{muon}$ یا $(L_{\mu\nu}^p)$. [۳]

$$(L^e)^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2 \left[k'^{\mu} k^{\nu} + k'^{\nu} k^{\mu} - (k' \cdot k - m^2) g^{\mu\nu} \right] \times \left[W_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p_{\mu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q_{\mu} \right) \left(p_{\nu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q_{\nu} \right) \right] \quad (۷۲-۳)$$

با صرف نظر کردن از جرم الکترون (m) و با توجه به اینکه $q^{\mu} L_{\mu\nu}^e = q^{\nu} L_{\mu\nu}^e = 0$ می‌باشد، رابطه‌ی زیر به دست آمده است:

$$(L^e)^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2 \left[k'^{\mu} k^{\nu} + k'^{\nu} k^{\mu} - k' \cdot k g^{\mu\nu} \right] \left[-W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p_{\mu} p_{\nu} \right] \\ = 4W_1 (k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} \left[2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k' \right] \quad (۷۳-۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۶۶) روابط زیر به دست می‌آیند:

$$p \cdot k = (M, 0) \cdot (E, \vec{k}) = ME \\ p \cdot k' = (M, 0) \cdot (E', \vec{k}') = ME' \quad (۷۴-۳) \\ q^2 \approx -2\vec{k} \cdot \vec{k}' = -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

با جایگذاری (۳-۷۴) در (۳-۷۳) رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود: [۳ و ۸]

$$(L^e)^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 4W_1 \left(2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{2W_2}{M^2} \left(2M^2 EE' - 2M^2 EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ = 4EE' \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(v, q^2) + \sin^2 \frac{\theta}{2} 2W_1(v, q^2) \right\} \quad (۷۵-۳)$$

با قرار دادن شار فرودی F در دستگاه آزمایشگاهی و فاکتور فضای فاز برای الکترون خروجی،

سطح مقطع پراکندگی غیر الاستیک $ep \rightarrow eX$ به دست آمده است:

$$d\sigma = \frac{1}{F} |m|^2 dQ = \frac{1}{4\sqrt{(k \cdot p)^2 - m^2 M^2}} \left\{ \frac{e^4}{q^4} (L^e)^{\mu\nu} W_{\mu\nu} 4\pi M \right\} \frac{d^3 k'}{2E'(2\pi)^3} \quad (۷۶-۳)$$

$4\pi M$ ضریب نرمالیزاسیون $W_{\mu\nu}$ می‌باشد. با قرار دادن (۷۵-۳) در (۷۶-۳) و با در نظر گرفتن

$$q^4 = 16E^2 E'^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \text{ و } d^3 k' = E'^2 dE' d\Omega \text{ از نتیجه‌ی زیر حاصل شده است.}$$

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (۷۷-۳)$$

از جرم الکترون نیز صرف نظر شده است و $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ می‌باشد.

اکنون کلیه‌ی اطلاعات موجود روی توابع ساختار خلاصه می‌شود (با صرف نظر از جرم الکترون).

برای همه‌ی برهمکنش‌ها، سطح مقطع برهمکنش در انرژی E' و زاویه θ مربوط به الکترون پراکنده شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'}{q^4} \left\{ \right\} \quad (۷۸-۳)$$

برای هدف میونی به جرم m (یا یک هدف کوارکی به جرم m با جایگذاری $\alpha^2 \rightarrow \alpha^2 e_q^2$ که

e_q کسر بار کوارک می‌باشد) رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\left\{ \right\}_{e\mu \rightarrow e\mu} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2m} \right) \quad (۷۹-۳)$$

برای پراکندگی الاستیک از یک هدف پروتونی دارای ساختار نیز رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{ \right\}_{ep \rightarrow ep} = \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right) \quad (۸۰-۳)$$

که $\tau = -q^2/4M^2$ و M جرم پروتون است. نهایتاً برای حالتی که هدف پروتونی توسط بمباران الکترونی می‌شکند رابطه‌ی زیر داده شده است:

$$\left\{ \right\}_{ep \rightarrow eX} = W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (۸۱-۳)$$

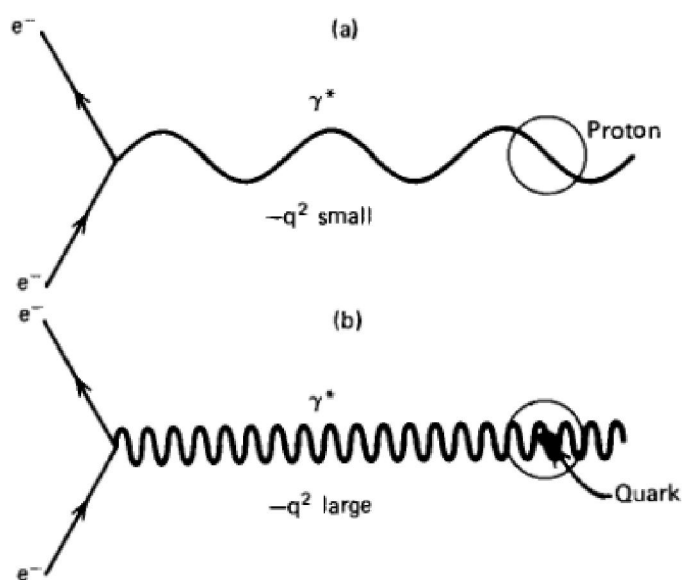
با به کار بردن تابع دلتا، (۷۹-۳) و (۸۰-۳) می‌توانند روی E' انتگرال‌گیری شوند و نتیجه به شکل

زیر در می‌آید:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{E'}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\right) \quad (3-82)$$

۳-۴- مقیاس بندی بیورکن

اگر کوارک‌های نقطه‌ای گونه با اسپین ۱/۲ داخل پروتون وجود داشته باشند، باید با استفاده از فوتون‌های مجازی با طول موج کوچک ($-q^2$ بزرگ) قادر به دیدن آن‌ها در داخل پروتون بود (شکل ۳-۷). در واقع نشانه‌ی وجود ذرات بدون ساختار در یک سیستم پیچیده مانند پروتون این است که در طول موج‌های کوچک، پروتون توصیف شده توسط معادله‌ی (۳-۸۱) به طور ناگهانی شروع به رفتار شبیه یک ذره‌ی آزاد دیراک (کوارک) می‌کند و (۳-۸۱) تبدیل به (۳-۷۹) می‌شود.



شکل ۳-۷- (الف) پراکندگی الاستیک $ep \rightarrow ep$ با فوتون‌هایی با طول موج بلند اندازه‌ی پروتون را از طریق آنالیز فرم فاکتورهای الاستیک اندازه‌گیری می‌کند. (ب) در پراکندگی غیر الاستیک عمیق یک فوتون با طول موج کوتاه کوارک‌های داخل پروتون را تجزیه می‌کند.

و توابع ساختار پروتون به صورت زیر خواهد شد:

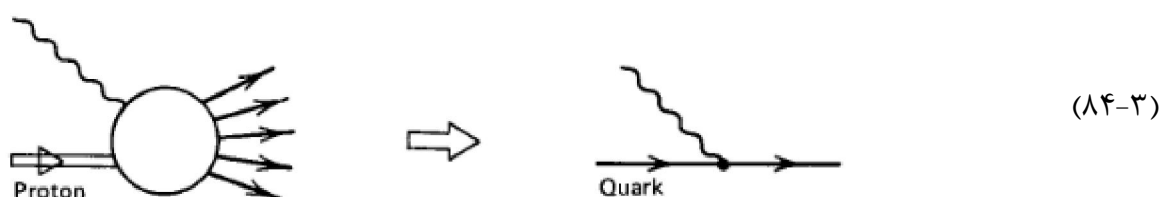
$$2W_1^{po\ int} = \frac{Q^2}{2m^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad (۸۳-۳)$$

$$W_2^{po\ int} = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

برای راحتی متغیر مثبت $Q^2 \equiv -q^2$ معرفی شده است [۲ و ۳].

m جرم کوارک است و کلمه $po\ int$ یادآور این است که کوارک یک ذره‌ی دیراک بدون ساختار

است. رابطه‌ی (۸۳-۳) به صورت زیر تصویر شده است:



یعنی در Q^2 بزرگ، پراکندگی غیر الاستیک الکترون- پروتون به صورت پراکندگی الاستیک الکترون

از یک کوارک آزاد در درون پروتون به نظر می‌رسد. با استفاده از رابطه‌ی $\delta(x/a) = a\delta(x)$ ، (۸۳-۳)

به صورت توابع ساختار بدون بعد معرفی می‌شود:

$$2mW_1^{po\ int}(\nu, q^2) = \frac{Q^2}{2m\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) \quad (۸۵-۳)$$

$$\nu W_2^{po\ int}(\nu, q^2) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right)$$

خاصیت چشم‌گیری که این توابع دارند این است که تنها توابعی از $Q^2/2m\nu$ هستند و ν و

Q^2 مستقل نیستند. این رفتار می‌تواند با رفتار مربوط به پراکندگی الاستیک الکترون- پروتون فرق

داشته باشد. برای سادگی $\kappa = 0$ قرار داده شده است، بنابراین $G_E = G_M \equiv G$ می‌باشد. با مقایسه‌ی

(۸۰-۳) و (۸۱-۳) روابط زیر برقرار است:

$$W_1^{elastic} = \frac{Q^2}{4M^2} G^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right), \quad (۸۶-۳)$$

$$W_2^{elastic} = G^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

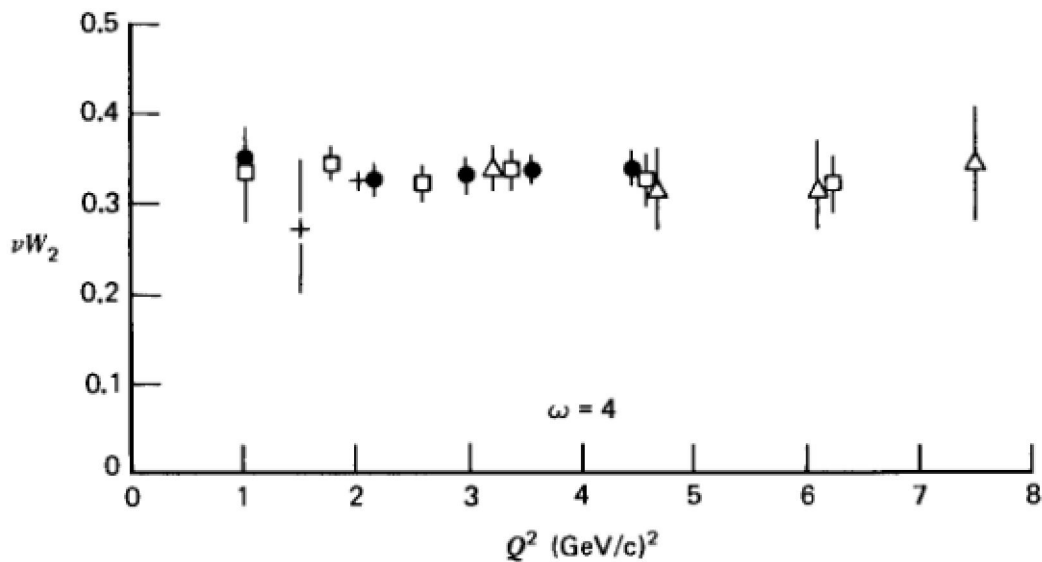
در مقایسه با (۳-۸۳)، توابع ساختاری فوق شامل فرم فاکتور $G(Q^2)$ می‌باشد و در نتیجه نمی‌توانند به صورت توابعی از تنها یک متغیر بدون بعد بازنویسی شود. هنگامی که در (۳-۵۱)، Q^2 به بیشتر از $(0.71\text{GeV})^2$ افزایش می‌یابد شانس پراکندگی الاستیک کاهش می‌یابد و پروتون به احتمال زیاد تجزیه می‌شود و توابع ساختار نقطه‌ای تنها به متغیر بدون بعد $Q^2/2m\nu$ بستگی پیدا می‌کند. بنابراین تغییر متغیرهای زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} MW_1(\nu, Q^2) &\xrightarrow{\text{large } Q^2} F_1(\omega) \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &\xrightarrow{\text{large } Q^2} F_2(\omega) \end{aligned} \quad (۳-۸۷)$$

و برای ω رابطه‌ی زیر داده شده است:

$$\omega = \frac{2q \cdot p}{Q^2} = \frac{2M\nu}{Q^2} \quad (۳-۸۸)$$

توجه کنید در (۳-۸۷) مقیاس از آن‌چه در (۳-۸۵) بود، تغییر یافته است. جرم پروتون به جای جرم کوارک معرفی شده تا متغیر بدون بعد ω تعریف شود. حضور کوارک‌های آزاد با این واقعیت مشخص می‌شود که توابع ساختار غیر کشسان در یک ω مشخص، مستقل از Q^2 هستند. نمونه‌ای از داده‌ها در شکل ۳-۸ نشان داده شده است. در $\nu\omega_2$ در $\omega = 4$ مستقل از Q^2 است و فوتون در واقع با ذرات نقطه‌ای گونه برهم‌کنش می‌کند. این ذرات توسط بیورکن پارتون نامیده شده است.



شکل ۳-۸- تعیین تابع ساختار νW_2 توسط پراکندگی الکترون- پروتون به عنوان تابعی از Q^2 در $\omega = 4$.

۳-۵- پارتون‌ها و مقیاس‌بندی بیورکن:

مقیاس‌بندی واقعی تجربی تقریبی است. صورت صریحی از رابطه‌ی (۳-۸۴) به شکل زیر در

نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: } E, p \text{ entering a circle, multiple arrows exiting, and a wavy line exiting.} \\
 = \sum_i \int dx e_i^2 \left[\text{Diagram 2: } E, p \text{ entering an oval, multiple arrows exiting, and a wavy line exiting labeled } i \text{ with } xE, xp \text{ below it.} \right]
 \end{array}$$

(۳-۸۹)

رابطه‌ی (۳-۸۹) این واقعیت را تصدیق می‌کند که انواع گوناگونی از پارتون‌های نقطه‌ای، پروتون را می‌سازند (کوارک‌های $i = u, d, \dots$ با بارهای e_i و گلوئون‌ها که با فوتون‌ها برهم‌کنش نمی‌کنند). هر یک از آن‌ها می‌توانند کسر متفاوت x از انرژی و تکانه‌ی پروتون را حمل کنند. تابع توزیع تکانه‌ی پارتون به صورت زیر معرفی شده است:

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx} = \frac{xp}{p} \quad (90-3)$$

کمیت $f_i(x)$ تابع احتمال پارتون شماره i که مقدار x از تکانه‌ی پروتون را داراست، تعریف می‌شود. با جمع بندی روی همه‌ی کسرهای x نتیجه‌ی زیر برقرار می‌شود:

$$\sum_{i'} \int dx x f_{i'}(x) = 1 \quad (91-3)$$

i' جمع بندی روی کلیه‌ی پارتون‌هاست. به صورت خلاصه داریم:

	<i>Proton</i>	<i>Parton</i>	
	↓	↓	
<i>Energy</i>	E	$x E$	
<i>Momentum</i>	p_L	$x p_L$	(92-3)
	$p_T = 0$	$p_T = 0$	
<i>Mass</i>	M	$m = (x^2 E^2 - x^2 p_L^2)^{1/2} = x M$	

پروتون و پارتون‌هایش در امتداد محور z حرکت می‌کنند (یعنی $p_T = 0$) و دارای تکانه‌های

طولی p_L و $x p_L$ هستند.

با توجه به روابط (85-3) و (87-3) توابع ساختار بدون بعد به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= M W_1(v, Q^2) = \frac{M Q^2}{4m^2 v} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m v}\right) \\ &= \frac{Q^2}{4x^2 M v} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2x M v}\right) \\ &= \frac{1}{2x^2 \omega} \delta\left(1 - \frac{1}{x \omega}\right) \end{aligned} \quad (93-3)$$

$$F_2(\omega) = v \omega_2(v, Q^2) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m v}\right) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2x M v}\right) = \delta\left(1 - \frac{1}{x \omega}\right)$$

در روابط فوق $m = xM$ می‌باشد و ω نیز متغیر بدون بعد تعریف شده در معادله‌ی (۳-۸۸) می‌باشد. حال با جمع بندی نتایج مربوط به یک پارتون، (۳-۹۳)، بر روی کلیه‌ی پارتون‌های سازنده‌ی یک پروتون، (۳-۸۹) و (۳-۹۰)، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$F_2(\omega) = \sum_i \int dx e_i^2 f_i(x) x \delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right) \quad (۳-۹۴)$$

$$F_1(\omega) = \frac{\omega}{2} F_2(\omega)$$

بر حسب قرارداد $F_{1,2}(\omega)$ را به صورت $F_{1,2}(x)$ تعریف کرده و نتایج بر حسب x بیان می‌شوند. بنابراین با توجه به (۳-۸۷)، رابطه‌ی (۳-۹۴) در Q^2 بزرگ به صورت زیر خواهد شد:

$$vW_2(v, Q^2) \rightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (۳-۹۵)$$

$$MW_1(v, Q^2) \rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2x} F_2(x) \quad (۳-۹۶)$$

که x به صورت زیر تعریف می‌شود:

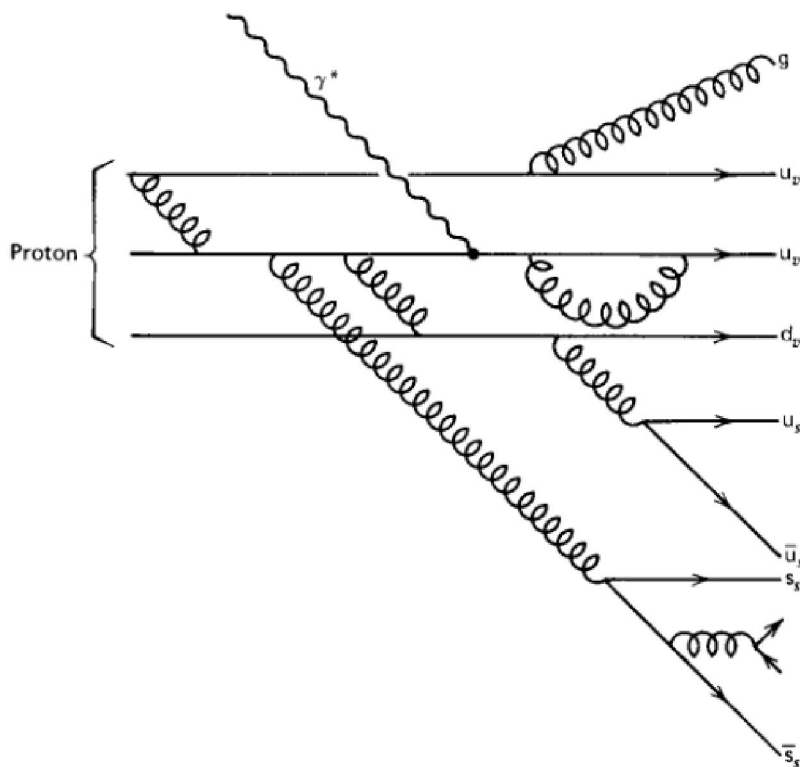
$$x = \frac{1}{\omega} = \frac{Q^2}{2Mv} \quad (۳-۹۷)$$

و برابر با متغیر سینماتیکی مربوط به فوتون مجازی که در رابطه‌ی (۳-۶۵) معرفی شده، می‌باشد. به عبارت دیگر متغیر سینماتیکی برای فوتون مجازی باید دقیقاً برابر با x باشد تا توسط پارتونی با تکانه‌ی کسری x جذب شود. تابع دلتا در رابطه‌ی (۳-۹۴) این دو متغیر فیزیکی متمایز را برابر قرار می‌دهد.

توابع ساختاری غیر الاستیک $F_{1,2}$ ، (۳-۹۵) و (۳-۹۶)، توابعی از تنها یک متغیر به نام x هستند و در یک x مشخص مستقل از Q^2 هستند [۳ و ۲].

۳-۶- بررسی اجزای داخل پروتون

آیا پراکندگی پروتون-فوتون مجازی شبیه شکل ۳-۹ خواهد بود؟



شکل ۳-۹- یک پروتون متشکل از کوارک‌های ظرفیت، گلوئون‌ها و جفت کوارک-پادکوارک‌های دریا می‌باشد.

همان‌گونه که فرم فاکتورهای الاستیک اطلاعاتی راجع به اندازه‌ی پروتون برای ما فراهم می‌کند، فرم فاکتور غیر الاستیک در Q^2 بالا نیز ساختار کوارکی پروتون را آشکار می‌سازد. بعد از به وجود آمدن مقیاس بندی بیورکن، روابط (۳-۹۵) و (۳-۹۶) برای استخراج کردن اطلاعات بیشتر شد. جمع در (۳-۹۵) مربوط به پارتون‌های باردار در پروتون است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{ep}(x) &= \sum_i e_i^2 f_i(x) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \end{aligned} \quad (۳-۹۸)$$

$u^p(x)$ و $\bar{u}^p(x)$ احتمال توزیع کوارک‌ها و آنتی‌کوارک‌های u در پروتون هستند. از احتمال

حضور کوارک‌های شگفت و کوارک‌های سنگین‌تر در داخل پروتون صرف نظر شده است.

شش تابع ساختار کوارکی ناشناخته، $f_i(x)$ وجود دارد. قابل ذکر است که توابع ساختار غیرالاستیک برای نوترون‌ها به‌طور تجربی توسط پراکندگی الکترون از هدف دوتریوم قابل حصول است. با توجه به (۳-۹۸) برای نوترون نیز رابطه‌ی زیر داده شده است:

$$\frac{1}{x} F_2^{en} = \sum_i e_i^2 f_i = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n + \bar{u}^n] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n + \bar{d}^n] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n + \bar{s}^n] \quad (۳-۹۹)$$

از آن‌جا که پروتون و نوترون اعضای دو تایه‌ی ایزواسپینی هستند، تعداد کوارک‌های آن‌ها به هم وابسته است. تعداد کوارک‌های u در یک پروتون با تعداد کوارک‌های d در یک نوترون برابر است و هم‌چنین برای کوارک‌های دیگر نیز صادق است. روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} u^p(x) &= d^n(x) \equiv u(x), \\ d^p(x) &= u^n(x) \equiv d(x), \\ s^p(x) &= s^n(x) \equiv s(x). \end{aligned} \quad (۳-۱۰۰)$$

به عبارت دیگر احتمال حضور کوارک u (d) در پروتون برابر احتمال حضور کوارک d (u) در نوترون است و احتمال وجود سایر ذرات هم در پروتون و نوترون یکسان است. عبارت‌های فوق منجر به حدود زیر می‌شود:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \leq 4 \quad (۳-۱۰۱)$$

که برای مولفه‌ی پایینی (بالایی) تنها کوارک‌های u (d) در پروتون در نظر گرفته می‌شود. قیود بیشتر روی توابع ساختار کوارکی $f_i(x)$ از این واقعیت ناشی می‌شود که اعداد کوانتومی پروتون باید دقیقاً همان اعداد کوانتومی ترکیب uud کوارک‌های ظرفیت باشد.

همان‌طور که در شکل ۳-۹ نشان داده شده، پروتون از سه کوارک ظرفیت^{۱۶} $u_v u_v d_v$ به همراه تعداد زیادی جفت کوارک-پادکوارک $u_s \bar{u}_s, d_s \bar{d}_s, s_s \bar{s}_s$ و تشکیل شده که به عنوان کوارک‌های دریا^{۱۷}

¹⁶ Valence

¹⁷ Sea

شناخته شده‌اند. اگر کوارک‌های دریا به صورت ذراتی ترسیم شود که به وسیله‌ی کوارک‌های ظرفیت تابش شوند، آن‌گاه به عنوان اولین تقریب ممکن است فرض شود که سه کوارک سبک‌تر u, d, s با توزیع تکانه و فرکانس تقریباً یکسانی در دریا وجود دارند و از جفت کوارک-پادکوارک سنگین‌تر $c_s \bar{c}_s$ و ... صرف‌نظر می‌شود. برای این تصویر از پروتون به صورت خلاصه داریم:

$$u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) = S(x) \quad (۱۰۲-۳ \text{ الف})$$

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x) \quad (۱۰۲-۳ \text{ ب})$$

$$d(x) = d_v(x) + d_s(x) \quad (۱۰۲-۳ \text{ ج})$$

با این فرض که توابع توزیع تمام کوارک‌ها و پادکوارک‌های دریا یکی باشند و با $S(x)$ نمایش

داده شوند، روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2$$

$$\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad (۱۰۳-۳)$$

$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0$$

رابطه‌ی فوق از (۱۰۲-۳) و رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$u - \bar{u} = u - \bar{u}_s = u - u_s = u_v$$

$$d - \bar{d} = d - \bar{d}_s = d - d_s = d_v \quad (۱۰۴-۳)$$

$$s - \bar{s} = s_s - \bar{s}_s = 0$$

لازم به ذکر است که این قواعد جمع در هر تصویری که دریا متشکل از جفت کوارک-پادکوارک

در نظر گرفته شود صحیح بوده و بنابراین روی اعداد کوانتومی پروتون که منحصرأ به وسیله‌ی کوارک-

های ظرفیت تعیین می‌شود، تأثیر نمی‌گذارد [۹ و ۲-۳].

با در نظر گرفتن روابط (۱۰۲-۳) و (۹۸-۳) و (۹۹-۳) روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{ep} &= \frac{4}{9} [u_s + u_v + \bar{u}_s] + \frac{1}{9} [d_s + d_v + \bar{d}_s] + \frac{1}{9} [s_s + \bar{s}_s] \\ &= \frac{4}{9} [2S + u_v] + \frac{1}{9} [2S + d_v] + \frac{1}{9} [2S] \\ &= \frac{1}{9} [4u_v + d_v] + \frac{4}{3} S \end{aligned}$$

(۱۰۵-۳)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{en} &= \frac{4}{9} [d_s + d_v + \bar{d}_s] + \frac{1}{9} [u_s + u_v + \bar{u}_s] + \frac{1}{9} [s_s + \bar{s}_s] \\ &= \frac{4}{9} [2S + d_v] + \frac{1}{9} [2S + u_v] + \frac{1}{9} [2S] \\ &= \frac{1}{9} [u_v + 4d_v] + \frac{4}{3} S \end{aligned}$$

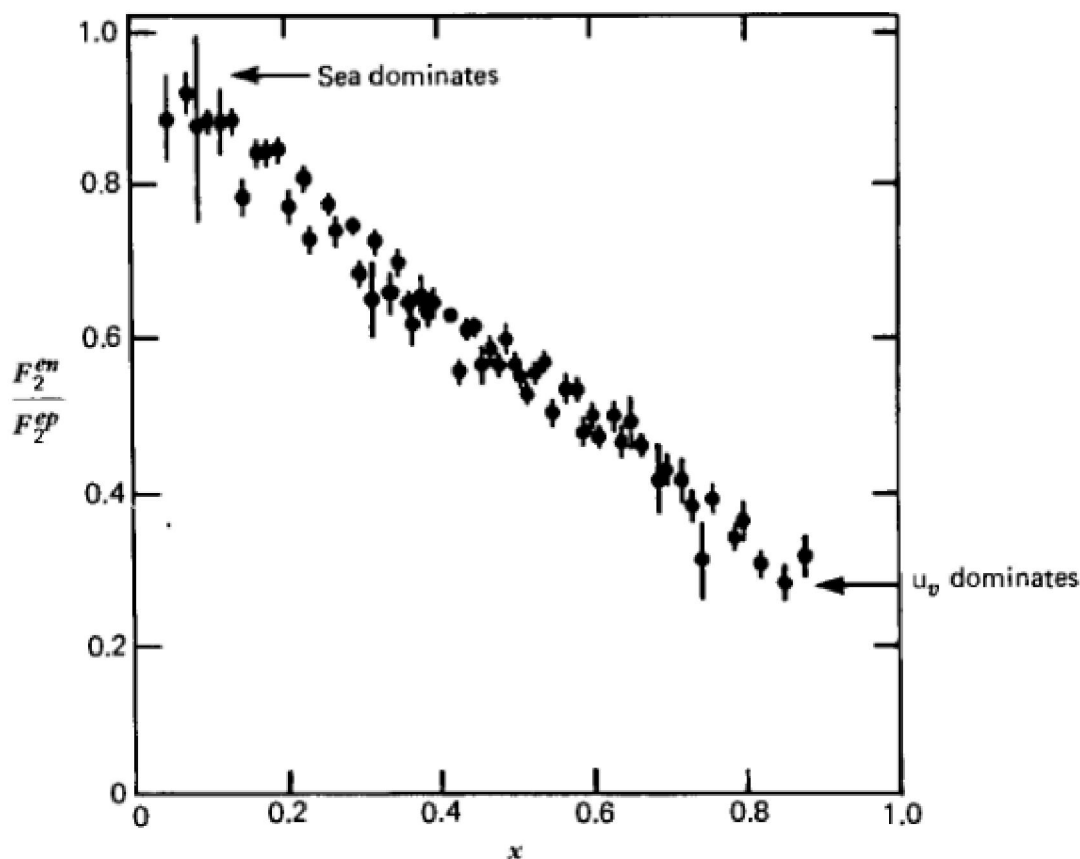
هنگام بررسی پروتون در تکانه‌های کوچک ($x \approx 0$)، انتظار می‌رود که حضور جفت کوارک-

پادکوارک‌هایی که دریا $S(x)$ را تشکیل می‌دهند بر کوارک‌های ظرفیت غالب شده و این بدان معنی

است که از رابطه‌ی (۱۰۵-۳) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (۱۰۶-۳)$$

در واقع این یک موضوع تجربی است که می‌تواند با توجه به داده‌های شکل ۳-۱۰ بررسی شود.



شکل ۳-۱۰- نسبت F_2^{en}/F_2^{ep} به عنوان تابعی از x در پراکندگی غیر الاستیک عمیق اندازه گیری شده است.

از طرف دیگر، هنگامی که ساختار پروتون را در تکانه های بزرگ بررسی می شود ($x \approx 1$)، سهم

کوارک های ظرفیت در (۳-۱۰۵) غالب شده و نتیجه ی زیر به دست می آید:

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v} \quad (3-107)$$

برای پروتون شواهدی وجود دارد که در x بزرگ $u_v \gg d_v$ است و نسبت (۳-۱۰۷) به $\frac{1}{4}$ میل

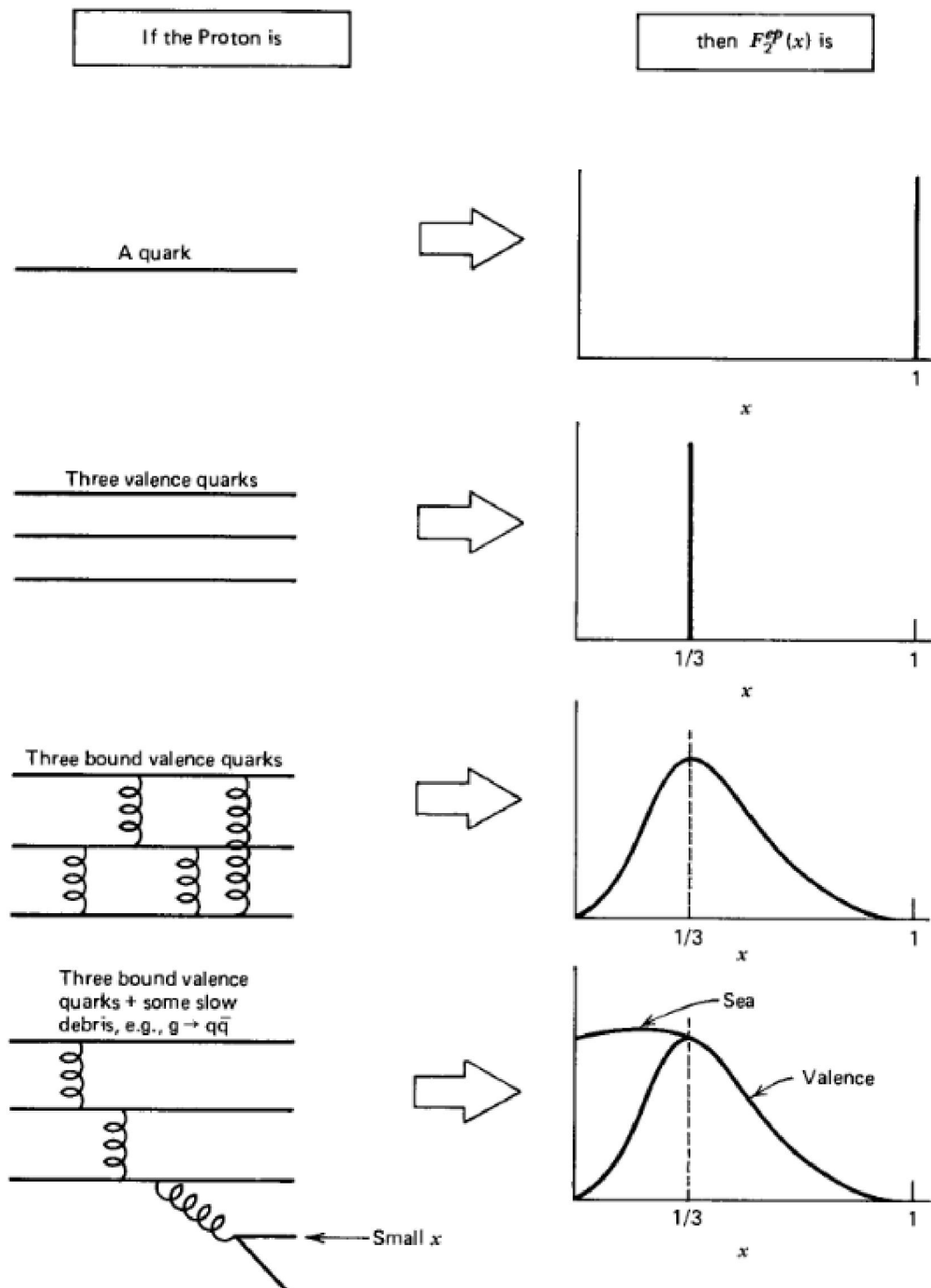
می کند، همان طور که در شکل ۳-۱۰ نیز نشان داده شده است.

حال باید دید با توجه به تصویر داده شده از پروتون (شکل ۳-۹)، $F_2(x)$ باید به چه شکلی

باشد؟ شکل آن می تواند با توجه به تقریب های متوالی شکل ۳-۱۱ حدس زده شود. این شکل به صورت

توصیفی است. در حالت اول فرض می شود که پروتون تنها از یک کوارک تشکیل شده و در نتیجه کل

تکانه‌ی پروتون را حمل می‌کند. در حالت دوم، پروتون از سه کوارک تشکیل شده و در نتیجه سهم مربوط به هر کوارک برابر با $\frac{1}{3}$ خواهد بود. اما گذار از تقریب دوم به سوم به خاطر این واقعیت است که کوارک‌ها به هم باند بوده و هنگامی که با هم برهم‌کنش می‌کنند می‌توانند مجدداً تکانه‌ها را بین خودشان توزیع کنند و در نتیجه در $x = \frac{1}{3}$ یک پیک خواهیم داشت و نمودار به صورت منحنی خواهد بود. داده‌های مربوط به $F_2^{ep}(x)$ در Q^2 بزرگ نشان می‌دهند که تقریب چهارم مطابق با شکل ۳-۹ می‌باشد.



شکل ۳-۱۱- رسم تابع ساختار مطابق با ترکیببندی‌های فرضی مختلف برای پروتون

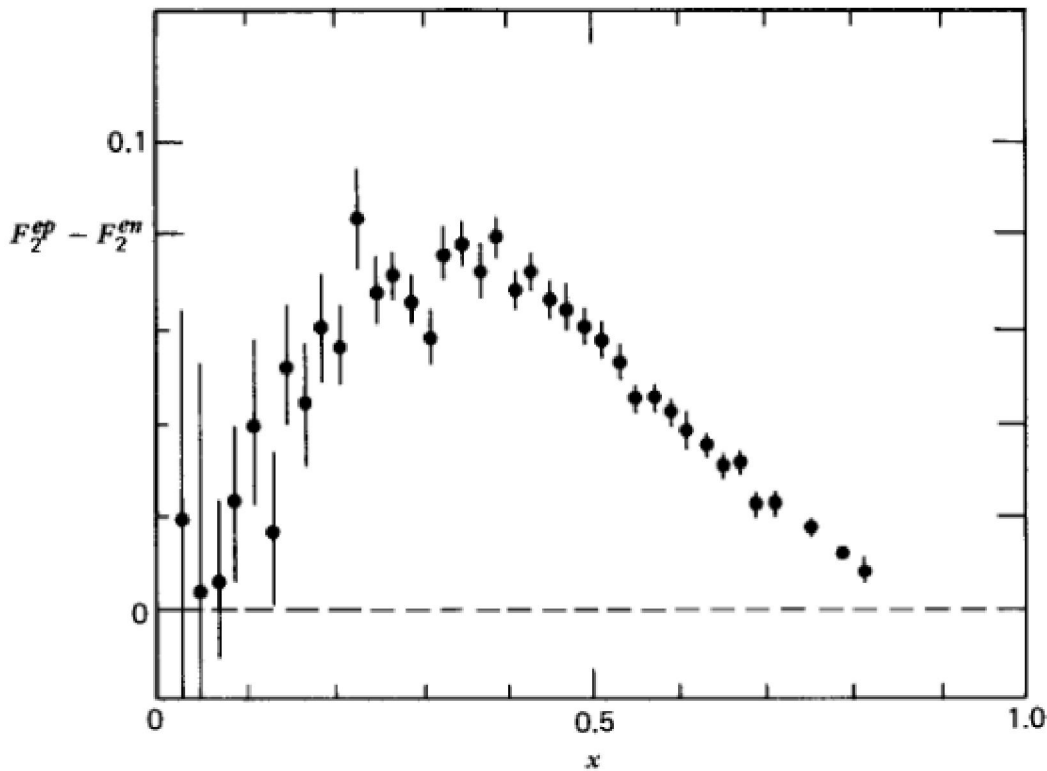
با تفاضل روابط (۳-۱۰۵) داریم:

$$\frac{1}{x} [F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)] = \frac{1}{3} [u_v(x) - d_v(x)] \quad (۳-۱۰۸)$$

در رابطه‌ی فوق کوارک‌های ظرفیت بدون حضور کوارک‌های دریا مشاهده می‌شود. نتیجه شبیه

به حالت سوم از شکل ۳-۱۱ بوده و در $x = \frac{1}{3}$ نیز یک پیک وجود خواهد داشت که در شکل ۳-۱۲

نشان داده شده است.

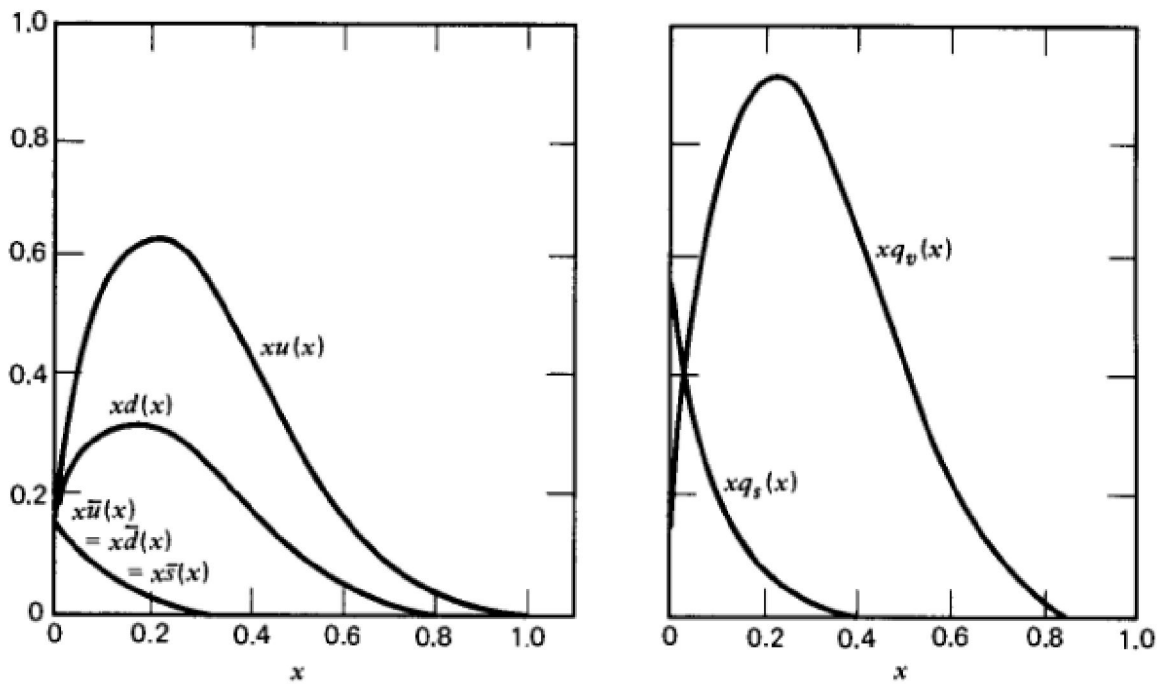


شکل ۳-۱۲- اختلاف $F_2^{ep} - F_2^{en}$ به عنوان تابعی از x ، در پراکندگی غیر الاستیک عمیق.

یک روش پدیده شناسی دیگر این است که در Q^2 بزرگ داده‌های مربوط به $F_2^{ep, en}(x)$ بر

حسب توزیع‌های ظرفیت و دریا پارامتری شود و توابع ساختار کوارک در هر x شامل قوانین جمع (۳-

۱۰۳) به دست آید. نتایج چنین آنالیزی در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده است.



(الف)

(ب)

شکل ۳-۱۳- (الف) توابع ساختار کوارک با توجه به آنالیز داده‌های پراکندگی غیرالاستیک عمیق. (ب) سهم کوارک‌های ظرفیت و دریا را در ساختار پروتون نشان می‌دهد.

شکل ۳-۱۳- الف توزیع پادکوارک \bar{q} را نشان می‌دهد که مشمول فرض (۳-۱۰۲) نیز می‌باشد.

هنگامی که $x u_v(x) \rightarrow 0$ میل می‌کند، دیده می‌شود که چگونه در x کوچک

$u(x) = u_v(x) + u_s(x)$ به $\bar{u}(x)$ میل می‌کند، یعنی اثر ذرات و پادذرات یکی خواهد شد. شکل

۳-۱۳- ب تصویر کلی مولفه‌های کوارک دریا و ظرفیت را بر طبق حالات سوم و چهارم از شکل ۳-۱۱

نشان می‌دهد.

اکنون گلوئون‌ها بررسی می‌شوند تا مشخص شود چه سهمی از تکانه‌ی پروتون توسط گلوئون‌ها

حمل خواهد شد؟ در پراکندگی غیرالاستیک عمیق، پارتون‌ها معرفی شدند که بر اساس مدل کوارکی

همان کوارک‌ها و گلوئون‌ها می‌باشند. سهمی از تکانه‌ی کل پروتون که توسط کوارک‌ها حمل می‌شود به

صورت زیر است:

$$\int_0^1 dx (xp) [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = p - p_g \quad (109-3)$$

طرفین بر p تقسیم می‌شود؛

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 - \varepsilon_g \quad (110-3)$$

که $\varepsilon_g \equiv p_g/p$ می‌باشد و از آنجا که گلوئون‌ها دارای بار الکتریکی نیستند با فوتون‌ها برهم‌کنش نمی‌کنند، بنابراین از سمت راست معادله کاسته می‌شود. با انتگرال‌گیری روی داده‌های تجربی $F_2^{ep, en}(x)$ اطلاعات زیر به دست آمده است:

$$\int dx F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9} \varepsilon_u + \frac{1}{9} \varepsilon_d = 0.18 \quad (111-3)$$

$$\int dx F_2^{en}(x) = \frac{1}{9} \varepsilon_u + \frac{4}{9} \varepsilon_d = 0.12$$

ε_u در رابطه‌ی فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_u \equiv \int_0^1 dx x (u + \bar{u}) \quad (112-3)$$

ε_u (ε_d) تکانه‌ی حمل شده توسط کوارک‌ها و پادکوارک‌های u (d) می‌باشد. رابطه‌ی (۱۱۱-۳) از روابط (۹۸-۳) و (۹۹-۳) حاصل می‌شود، در این روابط از کوارک‌های شگفت صرف‌نظر شده زیرا این کوارک‌ها تنها کسر کوچکی از تکانه‌ی نوکلئون را حمل می‌کنند. حال از رابطه‌ی (۱۱۰-۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g &\approx 1 - \int_0^1 dx x (u + \bar{u}) - \int_0^1 dx x (d + \bar{d}) \\ &\approx 1 - \varepsilon_u - \varepsilon_d \end{aligned} \quad (113-3)$$

و با در نظر گرفتن رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۱۱۱-۳)، مقادیر زیر به دست آمده است:

$$\varepsilon_u = 0.36, \quad \varepsilon_d = 0.18, \quad \varepsilon_g = 0.46 \quad (114-3)$$

با توجه به مقادیر به دست آمده مشاهده می‌شود که تقریباً نیمی از تکانه و انرژی پروتون در پراکندگی

غیر الاستیک عمیق توسط گلوئون‌ها حمل می‌شود [۹ و ۲-۳].

فصل چهارم

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

❖ مقدمه

❖ معرفی پتانسیل پیشنهادی

❖ محاسبه تابع موج پروتون به کمک کوارک‌های تشکیل دهنده در

مختصات فوق کروی

❖ برای پروتون $\frac{g_A}{g_V}$

❖ فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی در مختصات فوق کروی

❖ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۴-۱- مقدمه:

مسئله‌ی ساختار نوکلئون یک موضوع اساسی در مطالعه‌ی فیزیک هادرون‌هاست که هم از نظر تئوری و هم از نظر آزمایشگاهی بررسی می‌شود.

از دیدگاه تئوری اولین قدم مشخص کردن درجات آزادی است که به منظور توصیف دینامیک داخلی نوکلئون وارد می‌شود. کوارک‌ها سال‌ها پیش به منظور توصیف خواص هادرون‌ها معرفی شده‌اند، درست به این دلیل که آنها توانسته‌اند یک ابزار مناسب برای طبقه بندی هیپرون‌های مشاهده شده فراهم کنند. امروزه نظریه‌ی جریان برای ذرات برهم‌کنش‌کننده‌ی قوی (QCD) براساس کوارک‌ها و برهم‌کنش آن‌ها با گلوئون‌ها می‌باشد. این واقعیت نقش کوارک‌ها را در توصیف‌های تئوری تقویت می‌کند، اما شواهدی نیز ارائه می‌شود که درجات آزادی دیگری هم (گلوئون‌ها، جفت کوارک-پادکوارک‌ها) باید در نظر گرفته شود. در حال حاضر روشی مبتنی بر کرومودینامیک کوانتومی به خاطر این واقعیت که حل دقیقی از معادلات کرومودینامیک امکان‌پذیر نمی‌باشد، شدنی نیست. نتایج محاسبات شبکه مطمئناً تقویت شده و پیش می‌رود اما متأسفانه هنوز برای توصیف سیستماتیکی خواص هادرون‌ها کافی نیست [۱۳]. بنابراین باید به مدل‌ها رجوع کرد. در بسیاری از مدل‌ها، کوارک‌ها تنها درجات آزادی هستند که در نظر گرفته می‌شوند و به روش‌های مختلف مانند روش پتانسیل [۱۴ و ۱۵] یا روش‌های جبری (یعنی نظریه‌ی گروه) [۱۶] مورد بحث قرار می‌گیرند. اما مدل‌های کمی نیز در جایی که درجات آزادی میدان مزونی در طرح تقریبی انرژی‌های پائین برای برهم‌کنش کوارک - گلوئون معرفی شده‌اند، وجود دارد. به‌علاوه روش‌های گوناگونی مانند $chiral - CQM$ [۱۷ و ۱۸] یا توصیف سولیتونی نوکلئون [۱۹] وجود دارد. همه‌ی مدل‌های ذکر شده یا بوسیله‌ی ساختمان یا به خاطر ویژگی‌های اصلی‌شان به وضعیتی با انرژی پائین و یا Q^2 پائین اشاره دارند. از طرف دیگر نباید فراموش کرد که

یک تأیید قوی از ساختار کوآرکی پروتون به وسیله‌ی مطالعه‌ی پراکندگی غیر کشسان عمیق^{۱۸} لپتون‌ها فراهم شده است، جایی که پارتون‌ها به عنوان درجات آزادی مناسب حضور می‌یابند [۱۳].

موفقیت توصیف کوآرک-پارتون، با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن درجات آزادی پلاریزاسیون، فعالیت زیادی در مورد توابع ساختار نوکلئون در کرومودینامیک کوانتومی به راه انداخته است. اخیراً علاقه زیادی به بررسی با روش پارتونی برای برخی از برهم‌کنش‌ها (مانند پراکندگی کامپتون مجازی، تولید ذره با بررسی‌های هادرونی، ...) ایجاد شده است.

از آن جا که دینامیک اصولی برای محدوده‌ی Q^2 پائین و بالا باید مانند هم باشند، مشکل تطبیق حدود مدل کوآرک تشکیل دهنده^{۱۹} (در نهایت با درجات آزادی مزونی) و تصویر پارتونی^{۲۰} ایجاد می‌شود.

یک موضوع جالب در این زمینه به وسیله‌ی فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی کشسان فراهم می‌شود. رفتار آن‌ها در Q^2 بالا به سادگی توسط ماهیت کوآرکی نوکلئون تعیین می‌شود در حالی که در هر مدل کوآرکی دیگری برای فرم فاکتورهای کشسان تنها حالت پایه به وضوح در نظر گرفته می‌شود. یک توصیف مناسب از فرم فاکتورها برای فهم دینامیک داخلی نوکلئون می‌تواند تعیین کننده باشد. اخیراً علاقه‌ی تازه‌ای برای مطالعه‌ی فرم فاکتورهای کشسان هم از نظر تجربی و هم از نظر تئوری ایجاد شده است و این موضوع اطلاعات با ارزشی برای ایجاد مدل‌ها فراهم می‌کند. برای مثال، از نظر تجربی، داده‌های تازه‌ی زیادی از $TJNAF$ از نسبت میان فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون داریم که انحراف قابل توجه‌ای از رفتار مقیاس‌بندی^{۲۱} پذیرفته شده نشان می‌دهند. از دیدگاه تئوری تلاش‌های زیادی برای توصیف فرم فاکتورهای کشسان در مدل‌های کوآرک انجام شده است. اخیراً خواص

¹⁸ Deep Inelastic Scattering (DIS)

¹⁹ Constituent Quark Models (CQM)

²⁰ Parton Picture

²¹ Scaling behaviour

باریون‌ها به وسیله‌ی روش فوق مرکزی بررسی می‌شود. در این‌جا نیز به منظور توصیف دینامیک سه کوآرک، مختصات فوق کرووی به کار برده می‌شود [۱۳].

در این فصل پتانسیل پیشنهادی معرفی و معادله‌ی دیراک در مختصات فوق کرووی برای این پتانسیل حل می‌شود تا تابع موج پروتون به دست آید. سپس با داشتن تابع موج، خواص الکترومغناطیسی یعنی؛

- فرم فاکتور الکتریکی

- فرم فاکتور مغناطیسی

محاسبه شده و از طریق فرم فاکتورها، شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون محاسبه می‌شود و پاسخ‌ها با نتایج تجربی مقایسه خواهد شد.

۴-۲- معرفی پتانسیل پیشنهادی:

حرکت کوآرک داخلی توسط مختصات ژاکوبی $\vec{\rho}$ و $\vec{\lambda}$ توصیف می‌شود:

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3), \quad (1-4)$$

که هم ارز با $\rho, \Omega_\rho, \lambda, \Omega_\lambda$ می باشد. مختصات فوق کرووی بر حسب مقادیر ρ و λ تعریف می‌شوند:

$$x = \sqrt{\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2} \quad (2-4)$$

$$\zeta = \arctan\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \quad (3-4)$$

که x فوق شعاع و ζ فوق زاویه است [۲۰ و ۲۱].

فرض می‌شود که پتانسیل V تنها تابعی از x است، یعنی فوق مرکزی در نظر گرفته می‌شود و با توجه به اینکه فوق شعاع x وابسته به مختصات هر سه کوآرک است، پتانسیل $V = V(x)$ نیز مربوط به هر سه کوآرک است.

در این مدل دو نوع پتانسیل در نظر می‌گیریم که منجر به حل تحلیلی بر اساس روش حدسی خواهد شد.

پتانسیل اول، مربوط به نوسانات هر کوارک نسبت به کوارک دیگر است که این حرکت نوسانی هماهنگ ساده است. پس پتانسیلی که در اینجا پیشنهاد می‌شود پتانسیل نوسانگر ساده است که به صورت ax^2 بیان می‌شود.

$$V_{h.o.}(x) = \sum_{i < j} \frac{1}{2} k (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = \frac{3}{2} k x^2 = ax^2 \quad (4-4)$$

پتانسیل دوم، پتانسیل فوق کولنی است که مربوط به بار رنگ کوارک‌هاست [۲۴-۲۰].

$$V_{hyc}(x) = -\frac{c}{x} \quad (5-4)$$

دقت شود که پتانسیل‌های دیگری نیز یافت می‌شوند ولی در اینجا فقط ترکیبی از دو پتانسیل فوق در نظر گرفته شده است.

۴-۳- محاسبه تابع موج پروتون به کمک کوارک‌های تشکیل‌دهنده در مختصات

فوق کروی:

همان‌طور که می‌دانیم پروتون از سه کوارک تشکیل شده است، بنابراین برای یافتن تابع موج پروتون، معادله‌ی دیراک برای یک سیستم سه ذره‌ای حل خواهد شد. می‌توان تابع موج مربوط به هر یک از کوارک‌ها را محاسبه نموده و با ضرب تانسوری این توابع موج، به تابع موج پروتون رسید. در این-جا برای راحتی کار کوارک‌های تشکیل‌دهنده‌ی پروتون، ذراتی با جرم و انرژی یکسان در نظر گرفته شده‌اند که به وسیله‌ی پتانسیل پیشنهادی برهم‌کنش می‌کنند. تابع موج کوارک که در معادله‌ی دیراک صدق می‌کند با $\psi(\vec{x})$ نشان داده می‌شود و رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

$$\left[\gamma_0 \varepsilon + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - (m + U(x)) \right] \psi(\vec{x}) = 0 \quad (6-4)$$

پتانسیل‌های فوق مرکزی که منجر به حل تحلیلی در مدل پیشنهادی می‌شوند به صورت زیر

می‌باشد:

$$U(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + e\gamma_0)A(x) \quad (7-4)$$

پارامتر e می‌تواند هر مقداری داشته باشد [۲۵-۲۸]. در این بررسی برابر با یک در نظر گرفته

می‌شود و پتانسیل برهم‌کنش به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A(x) = ax^2 - \frac{c}{x} \quad (8-4)$$

این پتانسیل خواص جالب و نتایج فیزیکی خوبی دارد. حل معادله دیراک به صورت تحلیلی انجام

خواهد شد. فرض می‌شود پتانسیل کوارک، $U(x)$ ، تنها به فوق شعاع x بستگی دارد. معادله‌ی دیراک

ممکن است به روش‌های مختلف تحت تبدیلات لورنتس انتقال یابد. معمولاً پتانسیل اسکالر فوق مرکزی

$(U_0(x))$ و پتانسیل برداری فوق مرکزی $(V_0(x))$ به صورت زیر به کار برده می‌شود.

$$-i\bar{\alpha}\cdot\bar{\nabla}\psi(x) + \beta[m + U_0(x)]\psi(x) + V_0(x)\psi(x) = \varepsilon\psi(x) \quad (9-4)$$

در اینجا پتانسیل اسکالر و برداری مساوی و برابر با مقدار زیر قرار داده شده است: [۲۹]

$$V_0(x) = U_0(x) = \frac{1}{2}A(x) \quad (10-4)$$

با نوشتن $\psi(x)$ به صورت $\psi_{j_3}(x) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ ، معادله‌ی دیراک جفت شده برای مولفه‌ی بالا و پایین

تابع موج، به دست می‌آید:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} (m + U_0(x)) + V_0(x) \right) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (11-4)$$

روابط فوق به صورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود:

$$\begin{aligned} (\sigma.P)\chi + (m + U_0(x) + V_0(x))\phi &= \varepsilon\phi \\ (\sigma.P)\phi - (m + U_0(x) - V_0(x))\chi &= \varepsilon\chi \end{aligned} \quad (12-4)$$

که مقادیر ϕ و χ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\phi &= g_\gamma(x) Y_{jl}^{j_3}(\hat{x}) \\ \chi &= if_\gamma(x) Y_{j'l'}^{j'_3}(\hat{x})\end{aligned}\quad (13-4)$$

با ادغام دو رابطه در معادله (۱۲-۴) و با توجه به رابطه (۱۰-۴) برای مولفه‌ی بالایی معادله‌ی دیراک رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{P^2 g_\gamma(x)}{m + \varepsilon} + (m - \varepsilon + A(x)) g_\gamma(x) = 0 \quad (14-4)$$

حرکت کوارک داخلی معمولاً به وسیله‌ی مختصات نسبیتی ژاکوبی توصیف می‌شود. اپراتور P^2

برای یک کوارک در سیستم سه کوارکی با در نظر گرفتن ($\hbar = c = 1$) برابر است با: [۲۰-۲۲]

$$P^2 = -(\nabla_\rho^2 + \nabla_\lambda^2) = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right) \quad (15-4)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۱۵-۴) در (۱۴-۴) معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$g_\gamma''(x) + \frac{5}{x} g_\gamma'(x) + \frac{L^2(\Omega) g_\gamma(x)}{x^2} + (\varepsilon^2 - m^2 - (\varepsilon + m) A(x)) g_\gamma(x) = 0 \quad (16-4)$$

که $A(x)$ به وسیله‌ی رابطه‌ی (۸-۴) داده شده است و $L^2(\Omega) = \gamma(\gamma + 4)$ اپراتور اربیتال بزرگ

می‌باشد. γ نیز عدد کوانتومی زاویه‌ای بزرگ بوده و با رابطه‌ی $\gamma = 2\nu + l_\rho + l_\lambda$ داده می‌شود. l_ρ و

l_λ تکانه‌ی زاویه‌ای مربوط به مختصه‌ی ρ و λ هستند و $\nu = 0, 1, \dots$ می‌باشد. برای حل معادله‌ی

دیفرانسیل (۱۶-۴) با پتانسیل برهم‌کنشی $A(x) = ax^2 - \frac{c}{x}$ ، از جواب حدسی استفاده می‌شود

[۲۴ و ۳۰-۳۲].

$$g_\gamma(x) = h(x) \exp[Z(x)] \quad (17-4)$$

$h(x)$ و $Z(x)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شوند:

$$\begin{cases} h(x) = 1 + \alpha_1 x \\ Z(x) = -\frac{1}{2} \alpha x^2 + \delta \ln(x) \end{cases} \quad (18-4)$$

بنابراین رابطه‌ی مربوط به $g'(x)$ و $g''(x)$ برابر است با:

$$g'_\gamma(x) = h'(x)e^{Z(x)} + Z'(x)g_\gamma(x) \quad (19-4)$$

$$g''_\gamma(x) = h''(x)e^{Z(x)} + 2h'(x)Z'(x)e^{Z(x)} + (Z''(x) + Z'^2(x))g_\gamma(x)$$

که با توجه به (۱۹-۴) رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد:

$$g''_\gamma(x) + \frac{5}{x}g'_\gamma(x) = \left[Z''(x) + Z'^2(x) + \frac{h''(x) + 2Z'(x)h'(x)}{h(x)} + \frac{5(h'(x) + h(x)Z'(x))}{h(x)x} \right] g_\gamma(x) \quad (20-4)$$

حال از رابطه‌ی (۱۸-۴) روابط زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} h' = \alpha_1 \\ h'' = 0 \\ Z'(x) = -\alpha x + \frac{\delta}{x} \\ Z''(x) = -\alpha - \frac{\delta}{x^2} \end{cases} \quad (21-4)$$

با محاسبه‌ی عبارت داخل کروشه در (۲۰-۴) و ساده سازی کسرهای رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} & -\alpha - \frac{\delta}{x^2} + \left(-\alpha x + \frac{\delta}{x}\right)^2 + \frac{2\left(-\alpha x + \frac{\delta}{x}\right)\alpha_1}{1 + \alpha_1 x} + \frac{5\left(\alpha_1 + (1 + \alpha_1 x)\left(-\alpha x + \frac{\delta}{x}\right)\right)}{x(1 + \alpha_1 x)} = \\ & -\alpha - \frac{\delta - \delta^2}{x^2} + \alpha^2 x^2 - 2\alpha\delta - \frac{2\alpha\alpha_1 x}{1 + \alpha_1 x} + \frac{2\delta\alpha_1}{x(1 + \alpha_1 x)} + \frac{5\alpha_1}{x(1 + \alpha_1 x)} + \frac{5\left(-\alpha x + \frac{\delta}{x}\right)}{x} \\ & -\alpha - \frac{\delta - \delta^2}{x^2} + \alpha^2 x^2 - 2\alpha\delta + \frac{2\alpha}{1 + \alpha_1 x} - 2\alpha + \frac{2\delta\alpha_1 + 5\alpha_1}{x} - \frac{\alpha_1^2(2\delta + 5)}{1 + \alpha_1 x} - 5\alpha + \frac{5\delta}{x^2} \\ & -8\alpha - 2\alpha\delta + \frac{\delta^2 + 4\delta}{x^2} + \alpha^2 x^2 + \frac{2\alpha}{1 + \alpha_1 x} + \frac{2\delta\alpha_1 + 5\alpha_1}{x} - \frac{\alpha_1^2(2\delta + 5)}{1 + \alpha_1 x} \end{aligned} \quad (22-4)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۱۶-۴) معادله‌ی زیر به دست آمده است:

$$-8\alpha - 2\alpha\delta + \frac{\delta^2 + 4\delta}{x^2} + \alpha^2 x^2 + \frac{2\alpha}{1 + \alpha_1 x} + \frac{2\delta\alpha_1 + 5\alpha_1}{x} - \frac{\alpha_1^2(2\delta + 5)}{1 + \alpha_1 x} = \quad (23-4)$$

$$\frac{\gamma(\gamma + 4)}{x^2} + (m^2 - \varepsilon^2) + (\varepsilon + m)ax^2 - (\varepsilon + m)\frac{c}{x}$$

از مقایسه‌ی دو طرف معادله‌ی (۲۳-۴) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\delta^2 + 4\delta = \gamma(\gamma + 4) \Rightarrow \delta = \gamma, -\gamma - 4$$

$$-8\alpha - 2\alpha\delta = m^2 - \varepsilon^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\varepsilon^2 - m^2}{2(4 + \delta)}$$

$$(\varepsilon + m)a = \alpha^2 \Rightarrow a = \frac{(\varepsilon + m)(\varepsilon - m)^2}{4(4 + \delta)^2} \quad (24-4)$$

$$2\alpha = \alpha_1^2(2\gamma + 5) \Rightarrow \alpha_1 = -\left(\frac{2(a(\varepsilon + m))^{\frac{1}{2}}}{2\delta + 5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2\delta\alpha_1 + 5\alpha_1 = -(\varepsilon + m)c \Rightarrow c = \frac{-\alpha_1(2\delta + 5)}{\varepsilon + m}$$

با در نظر گرفتن $\delta = \gamma$ ، پارامترهای پتانسیل یعنی a و c در غیاب تصحیحات مرکز جرم به صورت

زیر می‌باشند:

$$a = \frac{(\varepsilon + m)(\varepsilon - m)^2}{4(4 + \gamma)^2} \quad (25-4)$$

$$c = \left[\left(\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m} \right) \left(\frac{2\gamma + 5}{\gamma + 4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

اکنون این مسئله در حضور تصحیحات مرکز جرم حل می‌شود:

$$M' = M + E_{cm} = 3\varepsilon \quad (26-4)$$

M' جرم تصحیح شده‌ی نوکلئون با انرژی مرکز جرم E_{cm} می‌باشد. برای سه کوارک ($i = 1, 2, 3$) با

انرژی ε و جرم m ، از رابطه‌ی (۱۴-۴) می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$\left[-\sum_{i=1}^3 \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^3 A_1(r_i) - 3(\varepsilon^2 - m^2) \right] \prod_{i=1}^3 \varphi_i = 0 \quad (27-4)$$

که $A_1(r_i) = (\varepsilon + m)A(r_i)$ می‌باشد. از مختصات ژاکوبی رابطه‌ی فوق به سه معادله‌ی مجزا برای ρ, λ و R تفکیک می‌شود که مختصه‌ی مربوط به مرکز جرم به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \quad (28-4)$$

با در نظر گرفتن $\eta = \sqrt{3}R$ رابطه‌ی (27-4) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left[-\nabla_\eta^2 + A_1(\eta) - (\varepsilon^2 - m^2)\right]\varphi(\eta) = 0 \quad (29-4)$$

از رابطه‌ی فوق به وضوح دیده می‌شود که انرژی مرکز جرم به صورت زیر است.

$$E_{cm} = (\varepsilon^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (30-4)$$

با فرض $\xi = \frac{m}{\varepsilon}$ و با توجه به رابطه‌ی (26-4) و (30-4) رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود:

$$M + \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} = 3\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{M}{3 - \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (31-4)$$

و با توجه به رابطه‌ی فوق پارامترهای a و c و پارامتر α_1 در حضور تصحیح مرکز جرم به صورت زیر است:

$$a = \frac{M^3 (1 + \xi)(1 - \xi)^2}{4(4 + \gamma)^2 (3 - \sqrt{1 - \xi^2})^3} \quad (32-4)$$

$$c = \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\gamma + 5}{\gamma + 4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (33-4)$$

$$\alpha_1 = \frac{-(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} M}{(2\gamma + 5)^{\frac{1}{2}} (\gamma + 4)^{\frac{1}{2}} (3 - \sqrt{1 - \xi^2})} \quad (34-4)$$

روابط (17-4)، (18-4)، (24-4)، (31-4) و (34-4) به منظور به‌دست آوردن مولفه‌ی بالایی اسپینور

فوق مرکزی یعنی $g_\gamma(x)$ به کار برده می‌شوند و مولفه‌ی بالایی تابع موج به‌دست خواهد آمد:

$$g_{\gamma}(x) = \left[x^{\gamma} - \frac{yx^{\gamma+1}}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \right] e^{-\frac{y^2x^2}{4}} \quad (35-4)$$

در معادله‌ی فوق پارامتر γ به صورت زیر می‌باشد:

$$y = \frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} M}{(4+\gamma)^{\frac{1}{2}} (3-\sqrt{1-\xi^2})} \quad (36-4)$$

مولفه‌ی پایینی اسپینور فوق مرکزی دیراک یعنی $f_{\gamma}(x)$ با توجه به معادله‌ی (4-12) می‌تواند

به دست آید. بنابراین جواب معادله‌ی دیراک تحت پتانسیل فوق کروی که در روابط (4-7) و (4-8)

معرفی شده، به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi_{\gamma} = \frac{N}{4\pi} \left[\begin{array}{c} x^{\gamma} - \frac{yx^{\gamma+1}}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-i\bar{\sigma}.r(3-\sqrt{1-\xi^2})}{(1+\xi)M} \left(\gamma x^{\gamma-1} - \frac{y^2}{2} x^{\gamma+1} + \frac{y^3 x^{2+\gamma} - 2y(\gamma+1)x^{\gamma}}{2(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{array} \right] e^{-\frac{y^2x^2}{4}} \quad (37-4)$$

برای حالت پایه به ازای $\gamma=0$ تابع موج به صورت زیر است:

$$\psi_{\gamma}(x) = \frac{N}{4\pi} \left[\begin{array}{c} 1 - \frac{yx}{\sqrt{5}} \\ \frac{-i\bar{\sigma}.r(3-\sqrt{1-\xi^2})}{(1+\xi)M} \left(\frac{y^3x^2}{2\sqrt{5}} - \frac{y^2}{2}x - \frac{y}{\sqrt{5}} \right) \end{array} \right] e^{-\frac{y^2x^2}{4}} \quad (38-4)$$

4-4-4 برای پروتون: $\frac{g_A}{g_V}$

برای بدست آوردن پارامتر ξ از مقدار $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$ برای پروتون که از آزمایش بدست آمده است

استفاده می‌شود [۱۰ و ۲۵]. با استفاده از تابع موج پروتون (4-38) و رابطه‌ی زیر پارامتر ξ محاسبه می-

شود [۷]:

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\int_0^\infty |f(x)|^2 x^5 dx}{\int_0^\infty (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) x^5 dx} \right] \quad (39-4)$$

با انجام محاسبه مقدار $\xi = 0.5112473817817015$ می‌باشد. مقدار جرم پروتون نیز برابر با $M = 938 \text{ Mev}$ می‌باشد و با توجه به این که $1 \text{ fm} = 0.005068 \text{ Mev}^{-1}$ مقدار جرم پروتون بر حسب fm^{-1} برابر با $M = 4.753784 \text{ fm}^{-1}$ است.

از رابطه‌ی (۳۲-۴) و (۳۳-۴) پارامترهای پتانسیل a و c به ازای $\gamma = 0$ به دست آمده و با جایگذاری در روابط (۲۵-۴) مقدار جرم کوارک برابر با $m_q = 224.02951 \text{ Mev}$ به دست خواهد آمد که نتیجه‌ی قابل قبولی در محدوده‌ی مورد نظر است.

مقدار γ نیز در رابطه‌ی (۳۶-۴) برابر با $\gamma = 0.9543179094484853 \text{ fm}^{-1}$ می‌باشد. با محاسبه‌ی مقدار γ رابطه‌ی (۳۸-۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\psi_\gamma(x) = \frac{N}{4\pi} \left[\begin{array}{c} 1 - 0.426x \\ -i \vec{\sigma} \cdot \hat{r} (0.057x^2 - 0.135x - 0.126) \end{array} \right] e^{-0.227x^2} \quad (40-4)$$

۴-۵- فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی در مختصات فوق کروی:

فرم فاکتور الاستیک در مختصات فوق کروی و برای حالت متقارن $L = 0$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۳۲].

$$F_{00}(q^2) = \sum_{\nu\gamma} \int d\Omega Y_\nu(\Omega) Y_\gamma(\Omega) \times \int_0^\infty dx x^5 \psi_{\nu\gamma}(x) j_0(\sqrt{2/3}qx \sin \theta) \bar{\psi}_{\nu\gamma}(x) \quad (41-4)$$

با استفاده از بسط تابع بسط کروی رابطه‌ی فوق می‌تواند به صورت تقریبی زیر نوشته شود [۳۳]:

$$F_{00}^{app}(q^2) \approx 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle \quad (42-4)$$

که در رابطه‌ی بالا عبارت زیر برقرار است [۳۳]:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle x^2 \sin^2 \theta \rangle \equiv \frac{1}{3} \langle x^2 \rangle \quad (43-4)$$

همان‌طور که گفته شد فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی تبدیلات فوریه توزیع بار و گشتاور مغناطیسی هستند.

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(r) d^3r \\ &= \int e^{iqr \cos\theta} \rho(r) r^2 d(\cos\theta) d\varphi dr \\ &= \int dr \frac{\sin qr}{qr} [g^2(r) + f^2(r)] \\ &= \int dr j_0(qr) [g^2(r) + f^2(r)] \end{aligned} \quad (44-4)$$

برای فرم فاکتور الکتریکی در مختصات فوق کروی رابطه‌ی زیر برقرار است [۱۰]:

$$G_E(q^2) = \int_0^\infty x^5 j_0(qx) [f^2(x) + g^2(x)] dx \quad (45-4)$$

که در آن از $\rho(x) = |\psi|^2 = N^2 (f^2(x) + g^2(x))$ استفاده شده است که مقدار ضریب نرمالیزاسیون برای حالت پایه $N^2 = 0.8$ است و برای $q = 0$ رابطه‌ی زیر داده شده است:

$$G_E(0) = \int_0^\infty x^5 dx \psi^\dagger \psi = 1 \quad (46-4)$$

$$G_E(q^2) = (1 - 0.968q^2) \exp(-0.55q^2) \quad (47-4)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۵) عبارت زیر برقرار است:

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(-6 \frac{dG_E}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (48-4)$$

و با محاسبه‌ی عبارت فوق مقدار $\langle r^2 \rangle$ به دست می‌آید:

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 1.005 fm \quad (49-4)$$

و سپس فرم فاکتور مغناطیسی محاسبه می‌شود که همان‌طور که گفته شد تبدیل فوریه‌ی گشتاور مغناطیسی است:

$$G_M(q^2) = \int e^{iq \cdot r} \mu(r) d^3r \quad (50-4)$$

$$\mu(r) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}) \quad (51-4)$$

$$\vec{j} = e_q \bar{\psi} \gamma \psi \quad (52-4)$$

با توجه به رابطه‌ی $j_0(qr) \cos \theta d(\cos \theta) = j_1(qr)$ به دست خواهد آمد [۱۰]:

$$G_M(q^2) = -\frac{4M}{|\vec{q}|} \int_0^\infty x^5 j_1(qx) f(x) g(x) dx \quad (53-4)$$

با جایگذاری $f(x)$ و $g(x)$ رابطه‌ی زیر برای فرم فاکتور مغناطیسی پروتون به دست آمده است:

$$G_M(q^2) = 2.83(1 - 0.716q^2) \exp(-0.55q^2) \quad (54-4)$$

و برای محاسبه‌ی گشتاور مغناطیسی از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\mu = \frac{e}{2M} G_M(q^2 = 0) = -\frac{2}{3} e \int_0^\infty x^5 dx f(x) g(x) \quad (55-4)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی فرم فاکتور الکترومغناطیسی مقدار ممان مغناطیسی به دست آمده است:

$$\mu_p = 2.83n.m \quad (56-4)$$

لازم به ذکر است که در محاسبه‌ی انتگرال‌ها از روابط انتگرالی زیر نیز استفاده شده است:

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\beta \alpha^{\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\nu + 1)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) M_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (57-4)$$

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \phi\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right)$$

$$\phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha + 1) z^2}{\gamma(\gamma + 1) 2!} + \dots$$

۴-۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات:

همان‌طور که در جدول ۴-۱ دیده می‌شود، روش محاسبه‌ی شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون با استفاده از فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی، به مقادیر تجربی نزدیک بوده و این صحت محاسبات را تأیید می‌کند. مقدار جرم کوارک نیز در محدوده‌ی قابل انتظار قرار دارد. برای بهبود جواب-ها باید سایر پتانسیل‌ها را که در برهم‌کنش بین کوارک‌ها نقش دارند، در محاسبات وارد کنیم. همچنین برای بررسی دقیق برهم‌کنش‌ها باید اثر اسپین کوارک‌ها را نیز در نظر گرفت. همان‌طور که مشاهده گردید در این پتانسیل اثر گلوئون‌ها را بر روی تابع موج پروتون محاسبه نکرده‌ایم، بنابراین می‌توان این پتانسیل‌ها را نیز در نظر گرفته و معادله‌ی دیراک را حل کرد. لازم به ذکر است در این مطالعه تأثیر پتانسیل برداری و اسکالر را برابر در نظر گرفتیم. پیشنهاد می‌شود برای بهتر شدن مدل مورد مطالعه میزان تأثیرگذاری پتانسیل‌های اسکالر و برداری را بصورت ضرایبی در معادله‌ی دیراک وارد کنیم. در این صورت پیشنهاد می‌شود نتایج حاصل بهتر شود.

جدول ۴-۱ مقایسه‌ی جرم کوارک، شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون در مدل پیشنهادی و مدل کیسه‌ای با مقادیر تجربی

پروتون	مدل کیسه‌ای	مدل پیشنهادی	مقدار تجربی
m_q	0	224.02951Mev	$\sim 100 \sim 350 \text{ Mev}$
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	0.73fm	1.005fm	$0.88 \pm 0.03 \text{ fm}$
μ_p	1.9 n.m	2.83n.m	2.79 n.m

منابع:

۱- شوارتز س، (۱۳۷۵) "سیری در جهان ذرات زیر اتمی" ابوکاظمی م.ا، پاشائی‌راد ج. انتشارات

فاطمی

۲- گریفیث د، (۱۳۸۵) "آشنایی با ذرات بنیادی" مشفق ح.ر، کیمیاگر س. مرکز نشر دانشگاهی

3. Halzen F. and Martin A.D. (1984), **"Quarks and Leptons: An Introductory course in Modern particle physics"**
4. Greiner W. (1990), **"Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations"**
5. Bjorken J. D. and Drell S. D. (1964), **"Relativistic Quantum Mechanics"**
6. Gross. (1994), **"Relativistic to Quantum Mechanics"**
7. Close F. E. (1979), **"An Introduction to Quarks and Partons"**
8. Thomas W. and Weise W. (2000), **"The Structure of the Nucleon"**
9. Close F., Donnachie S. and Shaw G. (2007), **"Electromagnetic Interactions and Hadronic structure"**
10. Tegen R., Brockmann R. and Weise W. (1982), Z. Phys. A- Atoms and Nuclei **307**, 339- 350
11. Bhaduri R. K. (1998), **"Models of the Nucleon from Quarks to Soliton"**
12. Arfken G. (1985), **"Mathematical Methods for Physicists"**
13. Giannini M.M., **"Models of the nucleon"** Nuclear Physics A666&667 (2000) 321c- 329c
14. Isgur N. and Karl G., Phys. Rev. **D18**, 4187 (1978); **D19**, 2653 (1979); **D20**, 119 (1979); Godfrey S. and Isgur N., Phys. Rev. **D32**, 189 (1985); Capstick S. and Isgur N., Phys. Rev. **D 34**, 2809 (1986)
15. Giannini M.M., Rep. Prog. Phys. **54**, 453 (1991)
16. Bijiker R., Iachello F. and Leviatan A., Ann. Phys. (N. Y.) 236, 69 (1994)
17. Goltzman L. Ya., Riska D.O., Phys. Rep. **C268**, 263 (1996)
18. Goltzman L. Ya., Papp Z., Plessas W., Varga K., Wagenbrunn R. F., Phys. Rev. **C57** , 3406 (1998); Goltzman L. Ya., Papp Z., Plessas W., Varga K., Wagenbrunn R. F., Phys. Rev. **D58**, 094030 (1998)
19. Holzwarth G., Z. Phys. A 356 339 (1996)

20. Ferraris M., Giannini M.M., Pizzo M., Santopinto E., Tiator L., Physics Letters **B 364** (1995) 231-238
21. Sanctis M. De, Giannini M.M., Repetto L. and Santopinto E. (2000) Physical Review C, Volume **62**, 025208
22. Giannini M.M., Santopinto E. and Vassallo A. (2002) Nuclear physics, **A623**, 100c- 109c (1997) Nuclear physics, **A699**, 308-311
23. Sanctis M. De, Giannini M.M., Santopinto E. and Vassallo A., Nuclear Physics **A 755** (2005) 294c-297c
24. Rajabi A. A. (2003), Indian journal of pure and applied physics, 41, 89-94
25. Rajabi A. A. (2004), Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. **28**, No. A2
26. Smith G. B., Tassie J. (1971), J. Phys. Ny**65** (1971) 325
27. Bell J. S., Ruegg H. (1975), Nucl. Phys. **B98**,151; Bell J. S., Ruegg H. (1976), Nucl. Phys. **B 104**, 546
28. Znojil M. (1990), J. Math Phys .31
29. Bell J.S., Ruegg H. Nuclear Physics **B98** (1975) 151-153
30. Kaushal R. S. (1991). Ann. Phys. Ny**206**, 90
31. Oezelik S., Simek M. (1991), Phys. Lett. A **152**, 145
32. Kaushal R. S. (1989), Phys. Lett. A1 **42**, 57
33. Coelho H. T., Das T. K., Vallieres M. (1977), Revista Brasileria de Fisica, Vol. **7**, No. 2

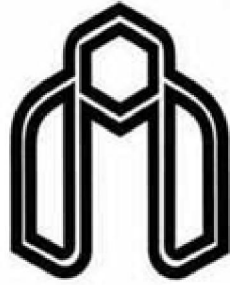
Abstract:

We calculate the relativistic wave function for quarks in a scalar-vector potential, analytically and after that the electromagnetic form factors of proton are calculated using the wave function.

The internal quark motion is described by the Jacobi coordinate ρ and λ . In order to describe three quark dynamics it is convenient to introduce the hyperspherical coordinates, which are obtained substituting the absolute values ρ and λ in $x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$, where x is the hyper radius.

In the end, the charge radius and magnetic moment of the proton is calculated by attention to the electromagnetic form factors. The results show considerable correction, especially for the magnetic moment.

Keywords - form factor, proton, color potential, hypercentral potential, Dirac.



Shahrood University of technology

Faculty of physics

**Calculating proton form factor with constituent
quarks in suitable interaction potential**

By: Zahra Shirzadfar

Supervisor: Dr A.A. Rajabi

March 2011