

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد ذرات بنیادی

رفتار بحرانی خمش‌های ذاتی و عرضی سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسیه

نگارنده: میلاد پیره باب

استادان راهنما

دکتر مرتضی رفیعی
دکتر سید علی حسینی منصوری

مهر ۱۴۰۰

پایان نامه خود را تقدیم می کنم به خانواده
مهر بانم.

سپاس‌گزاری...

برخود لازم می‌دانم از
مادر فداکار و پدر مهربانم به خاطر حمایت و محبت بی‌دریغ،
اساتید راهنمای ارجمندم آقایان دکتر مرتضی رفیعی و دکتر علی حسینی منصوری
به خاطر راهنمایی‌ها و حمایت‌های بسیار ارزشمندشان که در تمام طول تحصیل از
محبت‌های ایشان بهره‌مند بودم،
اساتید داور آقای دکتر مصطفی عنابستانی و آقای دکتر کاظم فدافن بی‌تقصیر به خاطر
مطالعه پایان‌نامه،
مراتب تشکر و قدردانی خود را به عمل آورم.

میلاذ پیره باب

مهر ۱۴۰۰

تعهد نامه

اینجانب میلاد پیره باب دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ذرات بنیادی فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان رفتار بحرانی خمش های ذاتی و عرضی سیاه چاله های باردار پاددوسیه ، تحت راهنمایی مرتضی رفیعی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

میلاد پیره باب

مهر ۱۴۰۰

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، در ابتدا ضمن معرفی سیاهچاله‌های مختلف به بررسی ترمودینامیک آنها می‌پردازیم و قانون‌های ترمودینامیکی را برای سیاهچاله‌ها معرفی و مطالعه می‌نماییم. در ادامه ضمن معرفی مفاهیمی همچون هندسه‌ی ترمودینامیکی راینیر، به کاربرد این رهیافت در مطالعه گذار فاز سیاهچاله‌ها می‌پردازیم. از آنجایی که تطابق یک به یک بین نقاط گذار برای ظرفیت گرمایی و تکینگی‌های خمش در این رهیافت هندسی همیشگی نیست، رهیافت جدیدی در این زمینه معرفی خواهیم کرد. در این رهیافت هندسی جدید که به فرمالیسم جدید هندسه ترمودینامیک (¹NTG) موسوم است، ارتباط یک به یک میان نقاط گذار برای ظرفیت گرمایی و تکینگی‌های خمش برقرار است. بنابراین در ادامه محاسبات از این رهیافت جدید بهره می‌بریم.

در ادامه مطابق با مرجع [۱]، نماهای ^۲ بحرانی و دامنه‌های ^۳ جهان‌شمول خمش‌های ^۴ ترمودینامیکی نظیر خمش ذاتی ^۵ و عرضی ^۶ را در نقطه بحرانی تغییر فاز سیاهچاله بزرگ-کوچک را برای سیاهچاله‌های AdS باردار، به صورت تحلیلی و عددی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نقطه بحرانی، درمی‌یابیم که خمش ذاتی بهنجار شده R_N و خمش عرضی K_N به ترتیب دارای نمایه بحرانی ۲ و ۱ هستند. بر این اساس، دامنه‌های جهان‌شمول $R_N t^2$ و $K_N t$ با پارامتر دمای $t = T/T_c - 1$ که در آن T_c مقدار بحرانی دما یا دمای بحرانی تعریف می‌شوند. در نزدیکی نقطه بحرانی، دامنه بحرانی $R_N t^2$ و $K_N t$ وقتی که $t \rightarrow 0^+$ باشد، برابر با $-1/2$ خواهد بود، در حالی که در حد $t \rightarrow 0^-$ این دو پارامتر به صورت $R_N t^2 \approx -1/8$ و $K_N t \approx -1/4$ می‌باشند. این نتایج نه تنها برای سیاهچاله AdS باردار چهار بعدی، که همچنین در ابعاد گسترده‌تر نیز صدق می‌کنند. بنابراین، چنین خصوصیات فراگیری سبب ایجاد نگرشی جدید در هندسه ترمودینامیکی و تغییرات فازی سیاهچاله می‌شوند.

در انتها، خمش‌های ترمودینامیک حاصل از هندسه NTG را در سیاهچاله خنثی پنج-بعدی گاوس-بونت در فضای AdS ^۷، بررسی می‌نماییم. نتایجمان نشان می‌دهد که خمش ذاتی و عرضی دارای همان مقادیر جهان‌شمول به‌دست آمده برای سیاهچاله‌های باردار AdS است که مستقل از ثابت جفت‌شدگی گاوس بونت می‌باشند.

کلمات کلیدی: ترمودینامیک سیاهچاله، هندسه ترمودینامیکی، سیاهچاله AdS، خمش ذاتی، خمش عرضی

¹New formalism of Thermodynamic Geometry (NTG)

²Exponent

³Amplitude

⁴Curvature

⁵Intrinsic

⁶Extrinsic

⁷Anti de-Sitter

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر	
ق	فهرست جداول	
۱	مقدمه	۱
۵	مروری بر قوانین ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها	۲
۶	۱.۲ سیاه‌چاله‌ی شوارتس شیلد	۱.۲
۷	۲.۲ سیاه‌چاله ریسنر نردستروم	۲.۲
۹	۳.۲ سیاه‌چاله کرو و کرنیومان	۳.۲
۱۰	۴.۲ سیاه‌چاله‌ها در زمینه کیهانی	۴.۲
۱۱	۵.۲ چهار قانون ترمودینامیک برای سیاه‌چاله‌ها	۵.۲
۱۲	۱.۵.۲ قانون صفرم	۱.۵.۲
۱۲	۲.۵.۲ قانون اول	۲.۵.۲
۱۳	۳.۵.۲ قانون دوم	۳.۵.۲
۱۳	۴.۵.۲ قانون سوم	۴.۵.۲
۱۵	۳ نظریه افت و خیز و هندسه ترمودینامیکی	۳
۱۵	۱.۳ نظریه افت و خیز	۱.۳
۲۰	۲.۳ متریک راپنیر	۲.۳
۲۲	۳.۳ فرمالیسم جدید از هندسه‌ی ترمودینامیکی (NTG)	۳.۳
۲۵	۴.۳ ابرسطح و خمش عرضی	۴.۳
۲۹	۴ بررسی رفتار بحرانی خمش‌های ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌های AdS باردار	۴
۲۹	۱.۴ مقدمه	۱.۴
۳۰	۲.۴ تعریف خمش‌های ترمودینامیکی	۲.۴
۳۱	۳.۴ سیال وان‌دروالس	۳.۴

۳۶		سیاه‌چاله‌های AdS باردار چهاربعدی	۴.۴
۳۸		سیاه‌چاله‌های AdS باردار با ابعاد بزرگ‌تر	۵.۴
		رفتار بحرانی خمش‌های ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله گاوس بونت بدون بار GB-	۵
۴۳		AdS	
۴۳		مقدمه	۱.۵
۴۴		سیاه‌چاله گاوس بونت	۲.۵
۴۹		نتایج	۶
۵۱		مراجع	

فهرست تصاویر

۸	۱.۲	تابع $f(r)$ برای سیاهچاله ریسرنردستروم ، نقاط تلاقی هر منحنی با محور r نقاط افق رویداد هستند.
۱۰	۲.۲	ساختار افق رویداد سیاهچاله کر
۱۸	۱.۳	سیستم بسته A_0 متشکل از سیستم باز A و منبع A_r
۳۳	۱.۴	منحنی $\ln(n_g - n_l)$ بر حسب $\ln(1 - \hat{T})$ در امتداد منحنی همزیستی گاز-مایع در نمودار $\hat{p} - \hat{T}$. خط مستقیم آبی با معادله $\ln \Delta n = \beta \ln(1 - \hat{T}) + b$ گذشته شده از نقاط قرمز (داده‌های عددی) با $\beta = 0.49999$ و $b = 1/38615$ مشخص می‌شود [۱].
۳۳	۲.۴	نمودار $\ln - \ln$ از $\kappa_T P_c$ بر حسب $\ln(1 - \hat{T})$. (راست) شیب خط آبی مستقیم گذشته از نقاط قرمز (داده‌های عددی) در امتداد منحنی همزیستی مایع اشباع شده $1/0.1239$ است (چپ) در امتداد منحنی همزیستی گاز اشباع شده 0.98745 است [۱].
۳۶	۳.۴	خمش عرضی $\ln K $ بر حسب $\ln(1 - \hat{T})$. داده‌های عددی با نقاط قرمز نشان داده شده است و معادله خط تطبیق داده شده با خط آبی پیوسته تعیین می‌شود. (راست) در امتداد منحنی همزیستی مایع اشباع شده ، شیب 0.99869 است (چپ) در امتداد منحنی همزیستی گاز اشباع شده ، شیب $1/0.0147$ است [۱].

فهرست جداول

۱۱	۱.۲	شبهت‌های میان قوانین ترمودینامیک معمول با قوانین ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها.
۲۱	۱.۳	ترمودینامیک هندسی سیاه‌چاله‌ها در ابعاد مختلف
۲۳	۲.۳	تطابق میان نقاط واگرایی خمش اسکالر و نقاط گذار فاز
۲۷	۳.۳	تابع خمش عرضی و متغیرهای ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌های $Kerr$ ، $EMGB$ و BTZ ، RN
۳۹	۱.۴	مقادیر عرض از مبدا و شیب $\ln \kappa_T P_c = \ln \Delta n = c_n \ln(1 - \hat{T}) + d_n$ و $-c_k \ln(1 - \hat{T}) - d_k$ برای منحنی‌های همزیستی اشباع شده سیاه‌چاله کوچک و بزرگ [۱].
۴۰	۲.۴	عرض از مبدا و شیب مربوط به خط مستقیم $\ln - \ln$ برای منحنی همزیستی اشباع شده سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک [۱].
۴۱	۳.۴	دامنه‌های بحرانی خمش‌های ترمودینامیکی در نزدیکی نقطه بحرانی [۱].

فصل ۱

مقدمه

هاوکینگ و پیج^۱ از نخستین دانشمندانی بودند که ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها در فضای پاددوسیه^۲ و نیز ساختار فازی آنها را مورد مطالعه قرار دادند [۲]. پس از آن لحاظ نمودن ثابت کیهان‌شناسی به عنوان یک متغیر ترمودینامیکی در مطالعه ساختار فازی ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها مورد توجه زیادی واقع شده است. به بیانی دقیق‌تر، ثابت کیهان‌شناسی که همان چگالی انرژی خلاء فضا-زمان است [۳] به عنوان یک متغیر ترمودینامیکی که نقش فشار ترمودینامیکی را در قانون اول ترمودینامیک بازی می‌کند، در نظر گرفته می‌شود [۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶]. علت این امر به منظور سازگاری قانون اول ترمودینامیک با رابطه اسمار^۳ است. در این صورت جرم معرفی شده در قانون اول ترمودینامیک با انرژی داخلی سیستم برابر نخواهد بود بلکه با پتانسیل ترمودینامیکی آنتالپی هم ارز است. کمیت ترمودینامیکی فشار با رابطه زیر به ثابت کیهان‌شناسی مربوط است.

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{(d-1)(d-2)}{16\pi l^2} \quad (1.1)$$

که d بعد فضا-زمان، Λ ثابت کیهان‌شناسی و l شعاع فضای آنتی دوسیه است. به ازای $\Lambda = 0$ فضا را تخت، به ازای $\Lambda > 0$ آن را دوسیه و در غیر این صورت، یعنی در حالت $\Lambda < 0$ آن را پاددوسیه می‌گویند. با چنین تعریفی از فشار ترمودینامیکی می‌توان قانون اول ترمودینامیک بر روی افق رویداد یک سیاه‌چاله‌های پاددوسیه را به‌دست آورد. در این صورت، هم‌ارز با

¹Hawking and Page

² Anti-de Sitter

³Smarr relation

قانون اول ترمودینامیک برای سیستم‌های ترمودینامیکی معمول، قانون اول ترمودینامیک برای سیاه‌چاله‌های پاددوسسته با در نظر گرفتن ثابت کیهان‌شناسی متغیر به شکل زیر خواهد بود با این تفاوت که به جای انرژی، آنتالپی، به جای دما، گرانش سطحی و به جای آنتروپی مساحت قرار می‌گیرد.

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ + VdP. \quad (2.1)$$

که در آن $T = \frac{k}{\pi}$ دمای هاوکینگ سیاه‌چاله (k گرانش سطحی سیاه‌چاله است)، $S = \frac{A}{4}$ آنتروپی (A مساحت در واحد های پلانک است)، Ω سرعت زاویه ای، J تکانه زاویه ای، Φ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین بی نهایت و افق سیاه‌چاله، Q بار الکتریکی سیاه‌چاله و M جرم سیاه‌چاله است. برای فشار و با استفاده از قانون اول ترمودینامیک کمیت همیوگ که دارای ابعاد حجم است را به صورت $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S,Q,J}$ می‌توان لحاظ نمود.

علاوه بر گذار فاز هاوکینگ-پیچ که میان تابش حرارتی و سیاه‌چاله‌های بزرگ پایدار اتفاق می‌افتد، گذار فاز سیاه‌چاله بزرگ-کوچک نیز در یک سیاه‌چاله AdS باردار نیز وجود دارد. مشابه با سیال وان در والس^۱ (VdW)، این گذار فاز مشابه با گذار فاز مایع-گاز است [۱۷]. این گذار فاز از دمای صفر آغاز شده و سپس با افزایش دما، نقطه گذار فاز گسترش یافته و در یک نقطه بحرانی که در آن گذار فاز مرتبه اول تبدیل به یک گذار فاز مرتبه دوم می‌شود، ادامه می‌یابد. در مورد این سیاه‌چاله‌ها، در نزدیکی نقطه بحرانی، توان‌های بحرانی مشترکی با سیال VdW یافت می‌شود. بنابراین، علاوه بر این، ساختار فازهای بیشتری نیز نظیر گذار فاز مقعر، نقطه سه گانه، گذار فاز خط λ و ... در مورد این سیاه‌چاله‌های باردار مورد بررسی قرار گرفته است [۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲].

از سوی دیگر، هندسه ریمانی ابزاری سودمند برای ما فراهم می‌سازد تا برخی از جنبه‌های ترمودینامیکی مانند گذارهای فازی و رفتارهای بحرانی را مطالعه کنیم [۳۳]. برای مثال، واینهولد یک متریک ریمانی^۲ در فضای تعادل ترمودینامیکی ارائه داد که با یک هسیان^۳ از تابع انرژی داخلی تعریف می‌شود [۳۴]. با بکارگیری نظریه افت و خیز^۴ در حالت تعادل، راپنیر [۳۳، ۳۵] نیز یک ساختار متریک متفاوت که با مشتق مرتبه دوم تابع آنتروپی ساخته شده است را ارائه داد. به نظر می‌رسد که متریک واینهولد به وسیله دما T به عنوان فاکتور هم‌مدیس^۵، به صورت هم‌مدیس با متریک راپنیر ارتباط پیدا می‌کند. عموماً اعتقاد بر این است که یک گذار فاز، رقابتی میان برهم‌کنش میکروسکوپی و حرکت حرارتی درجات میکرو آزادی یک سیاه‌چاله است. بنابراین با ترکیب گذار فاز و هندسه ترمودینامیکی می‌توانیم روی ریزساختارهای سیاه‌چاله‌ها تحقیق کنیم. این ایده در ابتدا در منبع [۳۶]، جایی که برهم‌کنش بین دو مولکول سیاه‌چاله با ایجاد هندسه راپنیر کشف شد، پیاده سازی شده است. همان‌گونه

¹Van der Waals

²Riemannian metric

³Hessian

⁴Fluctuation theory

⁵Conformal factor

که در منبع [۳۳] عنوان شده، خمش ذاتی ترمودینامیکی مقیاسی مانند طول همبستگی^۱ سیستم دارد و در نقطه بحرانی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. با این وجود، در برخی نمونه‌های متناقض ([۳۶، ۳۷، ۳۸] خمشی نرده‌ای^۲ (اسکالر) هندسه راپنیر، در نقطه بحرانی دقیقاً واگرا نیست. برای رفع این مشکل، یک فرمول‌بندی جدید از هندسه راپنیر که از ملزومات پتانسیل‌های ترمودینامیکی مربوط به تابع انرژی (به جای تابع آنتروپی) توسط تبدیلات لژاندر^۳ به وجود آمده است را می‌توان در منابع ([۳۹، ۴۰، ۴۱]) مشاهده کرد. این فرمول‌بندی جدید هندسه ترمودینامیکی (NTG) امکان همخوانی (تناظر) یک به یک بین نقاط بحرانی که در آن‌ها گذار فاز رخ می‌دهد با تکینگی‌های^۴ خمش را فراهم می‌سازد.

در این پایان‌نامه، با بهره‌مندی از هندسه ترمودینامیکی NTG ابتدا خمش‌های ذاتی و عرضی مربوط به فضای ترمودینامیکی برای سیاهچاله‌های باردار پادوسیته و نیز سیاهچاله خنثی گاوس-بونت پادوسیته در پنج بعد را بررسی می‌نماییم. سپس رفتار بحرانی چنین خمش‌های را در نزدیکی نقطه بحرانی مطالعه می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که دامنه‌های بحرانی چنین خمش‌های مقادیری جهان‌شمول هستند به طوری مستقل از بعد فضا-زمان و نیز هرگونه ثابت جفت‌شدگی هستند.

در این پایان‌نامه، ابتدا در فصل ۲ فیزیک سیاهچاله‌های باردار و چرخان و بدون بار را مرور می‌کنیم و همچنین چهار قانون ترمودینامیک مربوط به سیاهچاله‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه، در فصل ۳ هندسه ریمانی و نظریه افت و خیز ترمودینامیکی و هندسه‌های وینهلد و راپنیر را تعریف می‌کنیم و خمیده یا تخت بودن فضای حالات تعادلی ترمودینامیکی برای دو متریک راپنیر و وینهلد را تحقیق می‌کنیم. همچنین در انتهای همین فصل فرمول‌بندی جدیدی از نمایش هندسه‌ی ترمودینامیک به نام (NTG) را مورد بررسی قرار می‌دهیم که هم‌خوانی میان نقاط گذار فاز و نقاط تکینگی خمش اسکالر را به خوبی توجیه می‌کند. در فصل ۴ در ابتدا کمیت‌های ترمودینامیکی مربوط سیال واندوالس و سیاهچاله‌های باردار پادوسیته، نظیر معادله حالت، نمودار $P - V$ ، تغییرات چگالی عددی، تراکم‌پذیری همدمای مورد مطالعه قرار می‌دهیم و سپس رفتار چنین کمیت‌هایی و همچنین خمش‌های ترمودینامیک حاصل از هندسه ترمودینامیکی (NTG) را در نزدیکی نقطه بحرانی از طریق دو مسیر هم‌حجم و منحنی همزیستی را بررسی می‌نماییم. در انتها در فصل ۵ با تعریف کمیت‌های ترمودینامیکی نظیر دما، فشار و حجم، معادله حالت را برای سیاهچاله خنثی گاوس بونت در ۵ بعد را به‌دست می‌آوریم. سرانجام با پیروی از روش بکار رفته در فصل ۴ و استفاده از معادله حالت مذکور، رفتار بحرانی خمش‌های ترمودینامیک را برای این سیاهچاله مورد تحقیق قرار می‌دهیم.

¹Correlation length

²Scalar curvature

³Legendre transformation

⁴Singularity

فصل ۲

مروری بر قوانین ترمودینامیک سیاهچاله ها

نظریه سیاهچاله ها یکی از موضوعات جذابی است که در سال های اخیر توسط دانشمندان زیادی مورد تحقیق قرار گرفته است. به بیانی ساده سیاهچاله ناحیه ای از فضا و زمان است که توسط مرزی بنام افق رویداد احاطه شده است و نیز در داخل این ناحیه نیروی گرانشی خیلی قوی وجود دارد، که حتی نور هم راه گریز از این ناحیه را ندارد، بنابراین این ناحیه غیر قابل دیدن است. برای نخستین بار در سال ۱۷۸۴ جان مایکل^۱ که یک کشیک انگلیسی بود، امکان رسیدن به سرعتی بیش از سرعت نور را با استفاده از گرانش نیوتنی مطرح کرد. در این راستا مدتی بعد در سال ۱۷۹۵ پیر لاپلاس^۲ نخستین دانشمندی بود که با بهره گیری از مفاهیم گرانش موفق به به دست آوردن شعاع گرانشی شد. اما نظریه های دقیق تر درباره سیاهچاله در حدود سال ۱۹۱۶، توسط شوارتس شیلد^۳ با حل دقیق معادلات انیشتین محاسبه شد. معادله شناخته شده اینشتین برای منبعی از ماده و انرژی به صورت زیر داده می شود.

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{\Lambda\pi GT_{ab}}{C^4} \quad (۱.۲)$$

در رابطه بالا R_{ab} تانسور خمش، R خمش اسکالر و T_{ab} نیز تانسور انرژی تکانه است. برای محیط خلاء به علت اینکه هیچ منبع انرژی یا ماده ای وجود ندارد $T_{ab} = 0$ است. در این

^۱ Michell Jane

^۲ Laplace Pierre

^۳ Schwarzschild Karl

صورت معادله اینشتین مربوط به حل خلاء یا حل شوارتس شیلد با

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0 \quad (2.2)$$

داده می شود. حل چنین معادله مربوط به سیاهچاله بدون بار است، اما با در نظر گرفتن بار حل جدیدی برای معادلات اینشتین پیشنهاد شد. در سال ۱۹۱۸ میلادی فیزیکدانی به نام ریسنر نردستروم حل جدیدی را برای سیاهچاله های باردار با تقارن کروی به دست آورد که به نام سیاهچاله ریسنر نردستروم معرفی می شود [۴۲، ۴۳]. در سال ۱۹۲۰، فیزیکدان ناشناخته نروژی، جرج تافت جیسن^۱ ثابت کرد معادله اینشتین برای تمام محیط ها با تقارن کروی حل یکسانی دارد [۴۴]. همچنین در سال ۱۹۲۳ دانشمند دیگری بنام جرج بیرکف^۲ نظریه مشابهی را مطرح کرد. نظریه بیرکف نشان می دهد که متریک شوارتس شیلد حل یگانه ای بیرون از هر توزیع جرمی متقارن کروی است، حتی اگر این توزیع متقارن وابسته به زمان باشد. توجه داشته باشید که بایستی تقارن مسئله بقا داشته باشد. دانشمندانی چون اسنایدر^۳ و اوپنهیتر^۴ دلیل تشکیل سیاهچاله ها را فروپاشی ستاره های پر جرم بر اثر نیروی گرانشی بیان کردند [۴۵]. مدت ها پس از حل ریسنر نردستروم، در سال ۱۹۶۳ حل متفاوت دیگری برای سیاهچاله های چرخان بدون بار توسط روی کر^۵ مطرح و به نامش نامگذاری شد. در حالی که با در نظر گرفتن بار و چرخش برای یک سیستم حل متفاوت دیگری بنام کر نیومن نیز معرفی شد. به طور کلی سیاهچاله ها را می توان بر حسب سه پارامتر اصلی بار، جرم و تکانه زاویه ای در سه گروه زیر تقسیم بندی کرد.

- سیاهچاله های بدون بار که با حل شوارتس شیلد توصیف می شوند.
- سیاهچاله های باردار که با حل ریسنر نردستروم توصیف می شوند.
- سیاهچاله های چرخان که با حل کر توصیف می شوند.

۱.۲ سیاهچاله ی شوارتس شیلد

متریک مربوط به حل خلاء شوارتس شیلد به صورت

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.2)$$

تعیین می گردد که

$$d\Omega^2 = (\sin^2\theta d\theta^2 + d\varphi^2) \quad (4.2)$$

¹ Jorg Tofte Jebsen

² George D. birkhoff

³ Snyder

⁴ Oppenheimer

⁵ Roy Kerr

عنصر زاویه‌ای مربوط به کره با شعاع واحد است. همان طور که می‌دانیم هر چیزی که به داخل سیاهچاله‌ها فرو رود دیگر راه فراری به بیرون از سیاهچاله نخواهد داشت، بنابراین همان طور که قبلاً اشاره شد باید مرزی بنام افق رویداد وجود داشته باشد که اشیاء از آن مرز وارد سیاهچاله شوند و دیگر نتوانند از آن خارج شوند. برای مثال افق رویداد سیاهچاله شوارتس شیلد در $r = 2M$ قرار دارد که M جرم سیاهچاله است. بسیار روشن است که با قرار دادن $r = 2M$ در رابطه (۳.۲) ضریب dr^2 در متریک شوارتس شیلد به بینهایت میل می‌کند که نشان دهنده این موضوع است که در $r = 2M$ یک تکینگی^۱ ظاهری اتفاق می‌افتد. برای رفع چنین تکینگی از دستگاه‌های مختصات دیگر مثل مختصات کروسکال- سزیکرس^۲ استفاده می‌کنند.

۲.۲ سیاهچاله ریسر نردستروم

حل ریسر نردستروم از حل همزمان معادلات انیشتین و ماکسول به دست می‌آید. به بیان دیگر، حل معادله زیر

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{\Lambda\pi GT_{ab}}{C^4} \quad (5.2)$$

با تانسور انرژی تکانه،

$$T_{ab} = F_{ac}F_b^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \quad (6.2)$$

به جواب ریسر نردستروم منتج می‌گردد. در رابطه (۶.۲) تانسور ماکسول F در معادله ماکسول $\nabla_a F^{ab} = 0$ و نیز $\partial_{[a}F_{bc]} = 0$ صدق می‌کند. همچنین به این علت که تانسور انرژی تکانه برای میدان الکترومغناطیس بدون رد است، می‌توان اسکالر ریچی را در معادله (۵.۲) برابر صفر در نظر گرفت، لذا خواهیم داشت

$$R_{ab} = \frac{\Lambda\pi GT_{ab}}{C^4} \quad (7.2)$$

باز حل معادله انیشتین- ماکسول در مختصات کروی حل زیر حاصل می‌شود.

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (8.2)$$

که $f(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ و M و Q به ترتیب جرم و بار سیاهچاله ریسر نردستروم هستند. لازم به ذکر است که هم متریک سیاهچاله شوارتزشیلد و هم متریک ریسر نردستروم تکینگی در نقطه $r = 0$ دارند که با استفاده از ناوردای کریشمن، $I = R_{abcd}R^{abcd}$ ، می‌توان مشاهده نمود زمانی که شعاع به سمت صفر میل کند I نیز به سمت بینهایت میل می‌کند، در این صورت $r = 0$ به عنوان تکینگی واقعی سیاهچاله است که حتی با تغییر مختصات نیز قابل

¹Singularity

²Kruskal- Szekeres

برطرف شدن نیست. در حل سیاهچاله ریسر نردستروم ، میدان های الکترومغناطیسی تنها با میدان الکتریکی زیر در نظر گرفته شده اند.

$$E_r = F_{rt} = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (9.2)$$

که از حل معادلات ماکسول در خلاء یعنی

$$\nabla_a F^{ab} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} F^{ab}) \quad (10.2)$$

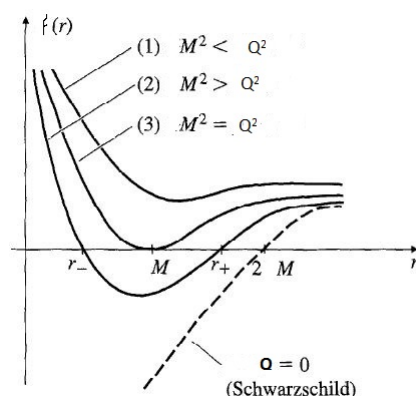
محاسبه می شود و Q بار سیاهچاله است. لذا انتظار می رود که انتگرال از میدان الکتریکی در سرتاسر یک کره دو بعدی در بینهایت مقدار بار است.

$$Q = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S^2} d\theta d\varphi r^2 \sin \theta E^r \quad (11.2)$$

به طور معمول ریشه های معادله $f(r) = 0$ مکان افق رویداد را مشخص می کنند که در مورد سیاهچاله RN افق های رویداد در

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (12.2)$$

قرار دارند که ریشه r_+ افق رویداد بیرونی تر است در حالی که ریشه r_- افق رویداد داخلی یا افق رویداد کوشی^۱ را نشان می دهد. با در نظر گرفتن معادله (۱۲.۲) می توان سه حالت را برای سیاهچاله RN متصور شد. در شکل ۱.۲ نموداری از تابع $f(r)$ بر حسب r رسم شده است.



شکل ۱.۲: تابع $f(r)$ برای سیاهچاله ریسر نردستروم ، نقاط تلاقی هر منحنی با محور r نقاط افق رویداد هستند.

همان طور که از شکل پیداست:

۱- وقتی $M^2 < Q^2$ باشد، هیچ افق رویدادی وجود ندارد و تکینگی زمان گونه به شمار می رود.

¹Cauchy

۲- زمانی که $M^2 > Q^2$ باشد هر دو ریشه r_+ و r_- به ترتیب افق رویداد بیرونی و افق رویداد داخلی هستند. بیرون افق رویداد بیرونی متریک زمان گونه، در میان دو افق متریک فضاگونه و پس از عبور از افق رویداد داخلی تا رسیدن به تکینگی واقعی سیاهچاله متریک زمان گونه است.

۳- زمانی که $M^2 = Q^2$ باشد حالت فرینه از سیاهچاله ریسر نردستروم به دست می آید و این حالت یک حالت فیزیکی به شمار نمی آید علاوه بر آن مختصات t در تمام نقاط بجز در نقطه $r = M$ زمان گونه است.

۳.۲ سیاهچاله کر و کر نیومان

حل کر و کر نیومان خیلی پیچیده تر از حل سیاهچاله های شوارتس شیلد و ریسر نردستروم بشمار می روند. متریک سیاهچاله کر با تقارن محوری و با دو مشخصه جرم و تکانه زاویه ای بر واحد جرم ($a = J/M$) در مختصات بیر- لینگوست^۱ به صورت زیر داده می شود.

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi + \quad (13.2)$$

$$\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (14.2)$$

که در رابطه بالا

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (15.2)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos \theta \quad (16.2)$$

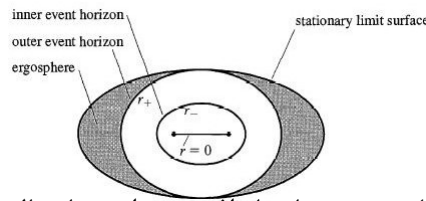
می توان افق های رویداد سیاهچاله کر را در حالت $M^2 > a^2$ به صورت

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (17.2)$$

بیان کرد. همان طور که از رابطه بالا پیداست زمانی که $J < M^2$ باشد، سیاهچاله کر یک سیاهچاله فیزیکی است و دارای دو افق رویداد است و از سوی دیگر برای حالت $J = M^2$ حد فرینه ی سیاهچاله کر حاصل می شود. همچنین زمانی که $J = 0$ باشد متریک کر به متریک شوارتس شیلد تبدیل می گردد. لازم به ذکر است که حل سیاهچاله کر دارای تقارن محوری و نیز ایستا است. همان گونه که در شکل ۲.۲ پیداست بین افق رویداد بیرونی و سطح حد ایستا ماده ای بنام اگروسفر^۲ وجود دارد.

¹Boyer-Lindquist

²Ergosphere



شکل ۲.۲: ساختار افق رویداد سیاهچاله کر

اکنون با اضافه کردن بار به سیاهچاله کر به حلی به نام سیاهچاله کر نیومان خواهیم رسید. هندسه‌ی فضای این سیاهچاله خیلی به هندسه‌ی فضا زمانی کر نزدیک است با این تفاوت که

$$\Delta = \Delta_{Kerr} + Q^2 \quad (۱۸.۲)$$

لذا افق‌های رویداد در سیاهچاله کر نیومان اندکی با سیاهچاله کر متفاوت هستند به طوری که در حالت $M^2 > a^2 + Q^2$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (۱۹.۲)$$

است. بسیار جالب است که قرار دادن $a = 0$ به حل افق‌های رویداد در سیاهچاله ریسر نردستروم می‌رسیم. بنابراین می‌توان گفت در این حالت متریک سیاهچاله کر نیومان نمایشی از سیاهچاله ریسر نردستروم است و نیز اگر $Q = 0$ باشد حل سیاهچاله کر حاصل می‌شود. توجه داشته باشید که حالت $a^2 + Q^2 = M^2$ حالت فرینه سیاهچاله کر نیومان است.

۴.۲ سیاهچاله‌ها در زمینه کیهانی

در ابتدا ثابت کیهانشناسی به عنوان یک ضریب پنهان در معادلات اینشتین در نظر گرفته می‌شد به این علت که در آن زمان اینشتین و دیگر دانشمندان اعتقاد داشتند که جهان ایستا است اما زمانی که مشاهدات هابل نشان داد که جهان در حال انبساط است، اینشتین ثابت کیهانشناسی را از معادلات خود حذف کرد و آن را به عنوان بزرگترین اشتباه در طول دوران زندگی نام برد. مشاهدات رصدی اخیر مبنی بر شتابدار بودن عالم هستند و امکان استفاده از ثابت کیهانشناسی در معادلات اینشتین را به وجود می‌آورد. چگالی چنین انرژی به صورت $\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ است بنابراین معادله اینشتین به صورت

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + g_{ab}\Lambda = \frac{\Lambda\pi GT_{ab}}{C^4} \quad (۲۰.۲)$$

یا

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = \frac{\Lambda\pi GT_{ab}}{C^4} \quad (۲۱.۲)$$

داده می‌شوند که G_{ab} تانسور اینشتین است. در خلاء یعنی جای که منبعی وجود ندارد و $T_{ab} = 0$ است، معادله بالا به صورت

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \quad (۲۲.۲)$$

داده می‌شود که می‌توان Λ را منفی و یا مثبت در نظر گرفت. به ترتیب $\Lambda > 0$ اشاره به فضای دوسپتته (dS) دارد و $\Lambda < 0$ مربوط به فضای پاد دوسپتته (AdS) است. ساده ترین نوع سیاهچاله در فضای آنتی دوسپتته سیاهچاله‌ی شوارتس‌شیلد-پاددوسپتته است که فاقد بار الکتریکی و تکانه زاویه‌ای است و به لحاظ هندسی تقارن کروی دارد. ضریب متریک در این سیاهچاله عبارت است از

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (23.2)$$

که در این رابطه l شعاع فضای پاددوسپتته است که با رابطه $\Lambda = -3/l^2$ در چهار بعد به ثابت کیهان‌شناسی مربوط می‌شود.

۵.۲ چهار قانون ترمودینامیک برای سیاهچاله‌ها

برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ دانشمندانی مانند هاوکنگ^۱ و کارتر^۲ این چهار قانون را فرمولبندی کردند. این قوانین شباهت زیادی به همان قوانین ترمودینامیک برای سیستم‌های ترمودینامیکی معمول دارند. برای سیاهچاله‌ها کمیت‌های مانند آنترپی، دما، انرژی با روابط زیر داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hbar k}{2\pi k_B c} \\ S_H &= \frac{A}{4l_p^2} \\ E &= Mc^2 \end{aligned} \quad (24.2)$$

که k گرانش سطحی و $l_p = \hbar G/c^3$ طول پلانک است. همچنین A مساحت سطح افق و E انرژی (جرم) سیاهچاله است بنابراین می‌توان همانند ترمودینامیک معمول قانون‌های مشابهی برای آنها متصور شد. در جدول ۱.۲ شباهت‌های میان چهار قانون ترمودینامیکی برای سیستم‌های ترمودینامیک معمول و سیاهچاله‌ها آورده شده است.

جدول ۱.۲: شباهت‌های میان قوانین ترمودینامیک معمول با قوانین ترمودینامیک سیاهچاله‌ها.

سیاهچاله	سیستم ترمودینامیکی	قانون
ثابت بودن گرانش سطحی در سراسر افق رویداد سیاهچاله	تعادل گرمای با منبع در دمای T ثابت	قانون صفرم
$dM = \frac{k}{4\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ$	$dE = TdS - PdV + \mu dN$	قانون اول
$dA \geq 0$	$dS \geq 0$	قانون دوم
رسیدن به گرانش سطحی $k = 0$ غیر قابل دسترس است.	رسیدن به دمای $T = 0$ غیر قابل دسترس است.	قانون سوم

^۱Hawking

^۲ Carter

۱.۵.۲ قانون صفرم

افق رویداد را با کمیت k یا گرانش سطحی توصیف می کنند که این کمیت در سراسر افق رویداد مقدار ثابتی است و رابطه ی مستقیم با دمای سیاهچاله (دمای هاوکینگ) دارد، یعنی

$$T_H = \frac{k}{2\pi} \quad (25.2)$$

همچنین ثابت بودن گرانش سطحی تشابه زیادی به قانون صفرم ترمودینامیک دارد که بیان می کند دمای یک سیستم در حال تعادل ترمودینامیکی در همه جای آن یکسان است. به عنوان یک مثال خاص، برای سیاهچاله شوارتس شیلد که $(k = 1/4GM)$ این دما برابر

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi G k_B M} \approx 6/2 \times 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} K \quad (26.2)$$

است. بنابراین می توان نتیجه گرفت این دما برای سیاهچاله ای با جرم خورشید مقدار بسیار ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. اما در مورد سیاهچاله های چرخان مانند کر دمای هاوکینگ کاهش بیشتری دارد به گونه ای که

$$T_H = \frac{\hbar k}{2\pi k_B} = 2 \left(1 - \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}}\right)^{-1} \frac{\hbar}{8\pi M k_B} < T_H^{sch} \quad (27.2)$$

همچنین برای سیاهچاله ی ریسر نردستروم که یک سیاهچاله باردار است دمای هاوکینگ آن نسبت به حالت بی بار باز هم مقداری کاهش می یابد،

$$T_H = \frac{\hbar k}{2\pi k_B} = \left(1 - \frac{Q^2}{r_+^4}\right) \frac{\hbar}{8\pi M k_B} < T_H^{sch} \quad (28.2)$$

بنابراین با افزودن بار و یا دوران به سیاهچاله ها دمای کمتر از دمای هاوکینگ سیاهچاله شوارتس شیلد حاصل می شود.

۲.۵.۲ قانون اول

این قانون به تغییرات انرژی (جرم) زمانی که سیاهچاله از یک حالت ایستا به حالت ایستای دیگر تغییر شکل می دهد، می پردازد که با رابطه زیر داده می شود.

$$dM = \left(\frac{k}{8\pi}\right) dA + \text{"work terms"} \quad (29.2)$$

و یا

$$dM = T_H dS_{BH} + \text{"work terms"} \quad (30.2)$$

این معادله شباهت خیلی زیادی به قانون اول ترمودینامیک معمول دارد. هاوکینگ برای اولین بار با بهره مندی از نظریه میدان های کوانتومی اثبات کرد که آنترپی و مساحت سطح افق با هم متناسب هستند، یعنی

$$S_{BH} = \frac{A}{4} \quad (31.2)$$

که زیر نویس S_{BH} اشاره به آنتروپی بکشتین-هاوکینگ^۱ دارد. "work terms" شامل جفت‌های مزدوجی از کمیت‌های فزونبر و نا فزونبر هست که به نوع سیاهچاله وابسته است. برای مثال برای سیاهچاله کر-نیومان

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (32.2)$$

است که Ω همان سرعت زاویه‌ای و Φ پتانسیل الکتریکی هستند که با رابطه‌های مشتقی زیر تعریف می‌شوند.

$$\Omega = \left(\frac{\partial M}{\partial J} \right) \quad (33.2)$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right) \quad (34.2)$$

۳.۵.۲ قانون دوم

این قانون نشان می‌دهد که مساحت افق رویداد یک سیاهچاله با گذشت زمان هرگز کاهش نمی‌یابد یعنی همیشه $\Delta A \geq 0$ است. به دلیل اینکه آنتروپی با مساحت افق رویداد رابطه مستقیم دارد به بیانی دیگر می‌توان گفت که آنتروپی یک سیاهچاله هرگز کاهش نمی‌یابد. اما این قانون زمانی که آثار کوانتومی یعنی تابش هاوکینگ برای سیاهچاله‌ها لحاظ می‌شود دیگر برقرار نیست در حالی انتظار داریم آنتروپی جهان همیشه افزایش یابد. از یک سو آزمایش‌های ذهنی نشان داد که تابش از سیاهچاله باعث افزایش آنتروپی محیط اطراف سیاهچاله می‌شود و از سوی دیگر بکشتین با معرفی آنتروپی تعمیم یافته [۴۶، ۴۷] به صورت زیر

$$S' = S_{BH} + S_m \quad (35.2)$$

که در آن S_m آنتروپی اطراف سیاهچاله و S_{BH} آنتروپی سیاهچاله است، موفق شد نشان دهد که آنتروپی هیچگاه کاهش نمی‌یابد ($\Delta S' \geq 0$) که این قانون جدید، بنام قانون دوم تعمیم یافته (GSL)^۲ معروف است.

۴.۵.۲ قانون سوم

طبق قانون سوم رسیدن به حد $k = 0$ برای سیاهچاله‌ها غیر ممکن است. حد $k = 0$ حد فرینه برای سیاهچاله‌ها است. به عنوان مثال در سیاهچاله کر حد فرینه در $J = M^2$ واقع است در این حد دمای این سیاهچاله صفر است اما آنتروپی مربوط به این سیاهچاله مقداری غیر صفر است که این برخلاف انتظاری است که ما در سیستم‌های ترمودینامیک معمول داریم، یعنی رسیدن به دما صفر باعث صفر شدن آنتروپی می‌شود.

¹Bekenstein-Hawking

²The Generalized Second Law

فصل ۳

نظریه افت و خیز و هندسه ترمودینامیکی

در این فصل مفاهیم ترمودینامیکی از منظر هندسه‌ی ریمانی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. از جمله شناخته‌شده‌ترین هندسه‌ی ترمودینامیکی هندسه راپنیر است که در سال ۱۹۷۹ توسط جورج راپنیر^۱ برای سیستم‌های ترمودینامیکی با استفاده از نظریه افت و خیز^۲، پایه ریزی شد. از این هندسه معمولاً برای بررسی نقاط گذار در سیاهچاله‌ها استفاده می‌شود، اما در پاره‌ای از سیاهچاله‌ها چنین هندسه‌ای در توجیه فیزیک نقاط گذار ناتوان است. بنابراین در پایان این فصل فرمالیسم جدیدی از هندسه ترمودینامیک مطرح می‌شود که نشان می‌دهد میان نقاط گذار فاز و نقاط تکینگی حاصل از خمش چنین هندسه‌ای یک تطابق کاملاً یک به یک وجود دارد.

۱.۳ نظریه افت و خیز

بر طبق قانون اول ترمودینامیک انرژی به دو صورت گرما و کار در میان سیستم‌های ترمودینامیکی منتقل می‌شود. علاوه بر آن، قوانین ترمودینامیکی کمیت جدیدی به نام آنتروپی را معرفی

^۱George Ruppeiner

^۲The fluctuation theory

می‌کنند. این کمیت برای اولین بار توسط رادولف کلاسیوس^۱ در سال ۱۸۵۰ مطرح شد. در نظریه کلاسیوس برای هر فرآیندی برگشت پذیر یا برگشت ناپذیر برای یک چرخه،

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (1.3)$$

است که dQ انرژی گرمایی در دمای T است. اما در یک مسیر مشخص بین نقاط A و B در فرایند برگشت پذیر تابع حالت جدیدی به نام آنتروپی معرفی می‌شود که مستقل از مسیر میان دو نقطه است و فقط به حالت های اولیه و پایانی بستگی دارد.

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (2.3)$$

معمولاً یک تعریف معمول از آنتروپی، میزان بی نظمی سیستم است. علاوه بر آن آنتروپی نقشی اساسی را در ترمودینامیک یک سیستم و نیز مکانیک آماری بازی می‌کند. در سیستم های ترمودینامیک معمول قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \quad (3.3)$$

همان‌طور که پیداست آنتروپی تابعی از انرژی درونی، حجم سیستم و تعداد ذرات است. برای مثال، آنتروپی گاز ایده آل با زیر داده می‌شود.

$$S = k \ln \left[\left(\frac{u}{u_0} \right)^{\frac{g}{\gamma}} \frac{v}{v_0} \right] \quad (4.3)$$

که متغیرهای u و v به ترتیب انرژی و حجم گاز و ثابت های k و g به ترتیب ثابت بولتزمن و درجات آزادی مولکول هستند. طبق قانون اول ترمودینامیک برای گاز ایده آل

$$dS = \frac{1}{T}du + \frac{p}{T}dv \quad (5.3)$$

انرژی درونی و معادله حالت گاز ایده‌آل با معادلات دیفرانسیلی زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right) \Leftrightarrow u = \frac{gk}{\gamma} T \quad (6.3)$$

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right) \Leftrightarrow pv = kT \quad (7.3)$$

همچنین اگر dS انتگرال پذیر باشد، برای هر سیستم بی دررو در حالت تعادل ($dQ_{rev} = 0$) می‌توان،

$$dS = 0 \Leftrightarrow S = S_{maximum} \quad (8.3)$$

¹Clausius

در حالی که برای هر فرایند غیر قابل برگشت پذیر $dS > 0$ است. بنابراین رسیدن به حالت تعادل مستلزم رسیدن به بیشترین مقدار آنتروپی است. به بیانی معادل در هر فرایند ترمودینامیکی آنتروپی سیستم در حال افزایش است که بیانی از قانون دوم ترمودینامیک است. به طور معمول مشاهده پذیرهای فیزیکی ماکروسکوپیکی براساس یک سری از کمیت های میکروسکوپیکی در حال تعادل پایه ریزی شده اند که اکثراً به مقدار میانگین نزدیک هستند و انحراف خودبه خودی سیستم از چنین مقادیری منجر به توصیف رفتار طبیعی سیستم خواهد شد. انحراف از مقدارهای میانگین، را به اصطلاح افت و خیز ترمودینامیکی می نامند.

در مکانیک آماری، آنتروپی یک سیستم در آنسامبل میکروکانونی به این صورت تعریف می شود.

$$S = \ln \Omega \quad (9.3)$$

که Ω مشخص کننده تعداد میکروحالت های سیستم و تابعی از ماکروحالت سیستم است یعنی $\Omega = \Omega(E, V, N)$ که E ، V و N به ترتیب انرژی، حجم و تعداد ذرات سیستم را مشخص می کنند. همان طور که از معادله (۹.۳) پیداست بین کمیت ماکروسکوپی مثل آنتروپی و تعداد میکروحالت های سیستم یک ارتباط لوگرایتمیک برقرار است به طوری که آنتروپی صفر مربوط به سیستمی با یک میکروحالت را نشان می دهد. اینشتین در سال ۱۹۰۷ میلادی با وارون کردن معادله (۹.۳) معادله ای برای تعداد میکروحالات سیستم پیشنهاد داد.

$$\Omega = e^S \quad (10.3)$$

آنتروپی سیستمی را که در جعبه ای به حجم V و دارای انرژی داخلی U است، را فرض کنید.

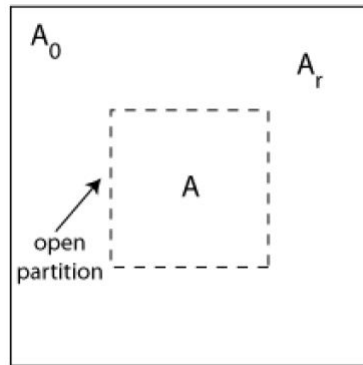
$$S = S(U, V) \quad (11.3)$$

به علت اینکه S و U و V کمیت های جمع پذیر هستند در این صورت آنتروپی و انرژی را در واحد حجم می توان نوشت، لذا داریم

$$\{s, u\} = \{S/V, U/V\} \quad (12.3)$$

حال فرض کنید سیستم A_0 با انرژی U_0 و حجم V_0 را به دو قسمت تقسیم کنیم به طوری که قسمت اول، سیستم محدود A با انرژی U و حجم V و قسمت دوم منبع A_r با انرژی U_r و حجم V_r باشند. به علت اینکه در آنسامبل میکروکانونی احتمال رخ دادن برای هر میکروحالت برابر است، بنابراین احتمال یافتن انرژی در واحد حجم برای سیستم A بین مقادیر انرژی u و $u + du$ متناسب با شمار میکروحالت های سیستم A_0 است [۴۸].

$$P(u, V) = C \Omega(u, V) du \quad (13.3)$$



شکل ۱۰.۳: سیستم بسته A_0 متشکل از سیستم باز A و منبع A_r .

در رابطه بالا Ω تعداد میکروحالات و C ضریب بهنجارش هستند. اکنون با قرار دادن معادله (۱۰.۳) در رابطه (۱۳.۳) به رابطه زیر می‌رسیم.

$$P(u, V) = C \exp \left[\frac{S(u, V)}{k_B} \right] du \quad (14.3)$$

که $S(u, V)$ آنتروپی سیستم A_0 است وقتی که سیستم A دارای انرژی u باشد. چنین معادله پایه نظریه افت و خیز ترمودینامیکی نامیده می‌شود. به علت اینکه آنتروپی کمیتی جمع‌پذیر است می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

$$S(u, V) = Vs(u) + V_r s(u_r) \quad (15.3)$$

در مکانیک آماری می‌توان فرض کرد که برخی تقسیم‌بندی‌های یکسان از انرژی میان سیستم‌های A_0 و A_r که مقدار آنتروپی $S(u, V)$ را بیشینه می‌کند، وجود دارند. این مقدار بیشینه در انرژی‌های $u = u^*$ و $u_r = u_r^*$ اتفاق می‌افتد. لذا با بسط تیلور آنتروپی در چنین انرژی‌ها به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$S(u, V) = Vs(u^*) + V_r s(u_r^*) + V s'(u^*) \Delta u + V_r s'(u_r^*) \Delta u_r + \frac{V}{2} s''(u^*) (\Delta u)^2 + \frac{V_r}{2} s''(u_r^*) (\Delta u_r)^2 + \dots \quad (16.3)$$

در رابطه رابطه بالا $\Delta u = u - u^*$ و $\Delta u_r = u_r - u_r^*$ هستند. از رابطه (۱۶.۳) پیداست که بسط مرتبه اول بایستی در نقاط بیشینه صفر باشد بنابراین

$$V s'(u^*) \Delta u + V_r s'(u_r^*) \Delta u_r = 0 \quad (17.3)$$

حال با استفاده از معادله بقای انرژی، $V \Delta u = -V_r \Delta u_r$ ، در رابطه (۱۷.۳) اتحاد زیر برقرار می‌شود.

$$s'(u^*) = s'(u_r^*) \quad (18.3)$$

در این صورت حذف عبارات شامل مشتق اول از آنتروپی مستلزم قرار دادن $u^* = u_r^*$ است. همچنین می‌توان انرژی را به صورت عبارت زیر نوشت.

$$Vu^* + V_ru_r^* = V_0u_0 \quad (۱۹.۳)$$

به علت اینکه $V + V_r = V_0$ پس می‌توان نتیجه گرفت که $u^* = u_r^* = u_0$ است. همچنین معادله بقای انرژی تایید می‌کند که می‌توان از مشتق‌های مراتب بالا از $s(u_r)$ نسبت به مشتق‌های $s(u)$ چشم‌پوشی کرد. با اعمال این تغییرات در معادله (۱۶.۳)، سرانجام رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$S_0(u, V) = Vs(u_0) + V_rs(u_0) + \frac{V}{\gamma} s''(u_0)(\Delta u)^2 + \dots \quad (۲۰.۳)$$

حال با جای‌گذاری (۲۰.۳) در (۱۴.۳) سرانجام به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$P(u, V)du = A \exp \left[-\frac{V}{\gamma} g(u_0)(\Delta u)^2 \right] du \quad (۲۱.۳)$$

که $g(u_0) = -s''(u_0)/k_B$ همیشه مقداری مثبت و A ثابت بهنجار است. به منظور به دست آوردن این ثابت از شرط بهنجارش $\int p(u, V)du = 1$ می‌توان استفاده کرد. در این صورت

$$A = \sqrt{\frac{V}{\gamma\pi} g(u_0)} \quad (۲۲.۳)$$

بنابراین رابطه (۲۱.۳) را به صورت تابع توزیع گوسین می‌توان در نظر گرفت، یعنی

$$P_G(u, V)du = \sqrt{\frac{Vg(u_0)}{\gamma\pi}} \exp \left[-\frac{V}{\gamma} g(u_0)(\Delta u)^2 \right] du \quad (۲۳.۳)$$

این تابع توزیع زمانی که $u = u_0$ باشد به بیشترین مقدار خود خواهد رسید و با دور شدن از این انرژی این تابع به شدت نزول پیدا می‌کند.

برای حالتی با بیش از یک متغیر نوسانی آنتروپی به صورت $S(x_1, \dots, x_n)$ تعریف می‌شود و با بسط آن حول نقاط میانگین به رابطه زیر می‌رسیم.

$$S - S_0 = -\frac{1}{\gamma} g_{ij} x_i x_j \quad (۲۴.۳)$$

در این صورت تابع توزیع احتمال با

$$P = A \exp \left(-\frac{1}{\gamma} g_{ij} x_i x_j \right) \quad (۲۵.۳)$$

مشخص می‌شود که با استفاده از شرط بهنجار،

$$\int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n P(x_1, \dots, x_n) = 1 \quad (۲۶.۳)$$

ثابت بهنجارش، A به دست می‌آید [۴۹].

$$A = \frac{\sqrt{g}}{(\gamma\pi)^{n/2}} \quad (۲۷.۳)$$

با قرار دادن این معادله در معادله (۲۵.۳)، تابع توزیع گاوسی برای بیش از یک متغیر با

$$P = \frac{\sqrt{g}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} g_{ij} x_i x_j\right) \quad (28.3)$$

قابل تعریف است که $g = |g_{ij}|$ و $g_{ij} = -\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}$ هستند. همچنین با رابطه $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ می‌توان فاصله بین حالت‌های تعادلی در یک منیفلد به دست آورد. به منیفلدی که فاصله حالت‌هایش با این معادله مشخص می‌شود، منیفلد ریمانی ترمودینامیکی می‌گویند. بنابراین اندازه فاصله میان دو حالت تعادلی با احتمال نوسان یا افت و خیز میان این حالات تعریف می‌شود. برای مثال احتمال کم نشان دهنده فاصله زیاد میان دو حالت است.

۲.۳ متریک راپنیر

در سال ۱۹۷۹ راپنیر روش متفاوتی را برای مطالعه ترمودینامیک سیستم‌های فیزیکی با استفاده از هندسه ریمانی پیشنهاد داد. [۵۰] در این روش سیستم‌های ترمودینامیکی با هندسه ریمانی نمایش داده می‌شوند. این مدل بر پایه نظریه افت و خیز میان حالت‌های تعادلی سیستم بنا شده است. متریک راپنیر با ماتریس هسین از آنتروپی سیستم نسبت به کمیت‌های فزونبر سیستم به دست می‌آید.

$$g^R = H_{i,j} S \quad (29.3)$$

که $H_{i,j} S = \partial^2 S / \partial X^i \partial X^j$ ماتریس هسین از آنتروپی است که $X^i = (U, N^a)$ با $a = 1, \dots, n$ هستند که U انرژی درونی و N^a کمیت‌های فزونبر سیستم هستند. همچنین پیش از راپنیر در سال ۱۹۷۵ میلادی برای اولین بار دانشمندی به نام وینهلد مدل فضای فاز ترمودینامیکی را پیشنهاد داد و نیز با بهره‌گیری از علم ریاضیات توانست یک نمایش هندسی برای فضای تعادلی بین حالت‌های ترمودینامیکی به دست آورد [۵۱]. متریک وینهلد متریکی در نمایش انرژی است. در نمایش انرژی، تمام متغیرهای فزونبر سیستم با $Y^i = (S, N^a)$ نمایش داده می‌شود که معادل با متغیرهای $X^i = (U, N^a)$ است، تنها با این تفاوت که بجای متغیر انرژی در نمایش آنتروپی، متغیر آنتروپی در نمایش انرژی بکار رفته است. به طور کلی متریک وینهلد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g^W = H_{i,j} U \quad (30.3)$$

که $H_{i,j} U = \partial^2 U / \partial Y^i \partial Y^j$ ماتریس هسین از انرژی است. در ترمودینامیک هندسی، متریک مربوط به فضای حالت ترمودینامیکی از اهمیت زیادی برخوردار است. بنابراین متریک وینهلد و راپنیر از جمله متریک‌های هستند که یک ساختار منطقی از فضای حالات ترمودینامیکی تعریف می‌کنند. به منظور ساخت چنین متریک‌های در نمایش انرژی کافی است از قانون اول

ترمودینامیک شروع و با استفاده از ماتریس‌های هسین متریک وینهلد را بسازیم. همچنین این دو متریک با عامل دما به یکدیگر مربوط می‌شوند، به طوری که

$$ds^2 = g_{ij}^R dX^i dX^j = \frac{1}{T} g_{ij}^W dY^i dY^j \quad (31.3)$$

تعریف می‌شود. که T دما را نشان می‌دهد. هندسه ترمودینامیک راپنیر در ابتدا برای مطالعه سیستم‌های گازی از جمله گاز ایده‌آل و گاز واندروالس مورد استفاده قرار گرفت. خمش به دست آمده از متریک راپنیر در مورد سیستم گاز ایده‌آل صفر است که نشان می‌دهد فضای ترمودینامیکی یک فضای تخت است اما در سیستم گاز واندروالس خمش مقداری غیر صفر را می‌دهد همچنین این خمش دقیقاً در نقاط واگرایی ظرفیت گرمایی یا نقاط گذار فاز واگرا است. متریک راپنیر برای سیاه‌چاله‌های گوناگون به دست آمده است و خمش اسکالر مربوطه نیز محاسبه شده است. در جدول ۱.۳ تختی و خمیدگی فضای ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌های مختلف آورده شده است [۵۲]. در بسیاری از این سیاه‌چاله‌ها از جمله سیاه‌چاله

جدول ۱.۳: ترمودینامیک هندسی سیاه‌چاله‌ها در ابعاد مختلف

فضا و زمان	سیاه‌چاله	هندسه راپنیر	هندسه وینهلد
۳ بعدی	BTZ	تخت	خمیده
۴ بعدی	$Kerr$	خمیده	تخت
	RN	تخت	خمیده
	$RNAdS$	خمیده	خمیده
	KN	خمیده	تخت
۵ بعدی	$Kerr$	خمیده	تخت
	RN	تخت	خمیده
D بعدی ($D > 5$)	$Kerr$	خمیده	تخت
	RN	تخت	خمیده

ریسنرندستروم سازگاری میان نقاط تکینگی خمش اسکالر با نقاط گذار فاز در ظرفیت گرمایی مشاهده نمی‌شود، به عبارت دیگر نقاط تکینگی نقاط گذار نیستند در صورتی که انتظار داریم نقاط گذار با نقاط تکینگی خمش در یک مکان رخ دهند.

اکنون فرمالیسم جدید از متریک راپنیر را که در مراجع [۵۳، ۵۴، ۵۵] پیشنهاد شده است را مرور می‌کنیم. این متریک تطابق یک به یک میان نقاط واگرایی خمش و نقاط گذار را نشان می‌دهد. برای سیاه‌چاله‌های باردار به طور کلی رابطه اول ترمودینامیک برای این سیاه‌چاله‌ها به صورت $dM = TdS + \Phi dQ$ نوشته می‌شود که M جرم، T دما و S آنترپی، Φ پتانسیل الکتریکی و Q بار الکتریکی سیاه‌چاله هستند. بنابراین برای این نوع سیاه‌چاله‌ها

می‌توان ظرفیت‌های گرمایی را در پارامترهای فزونبر و نافزونبر ثابت با روابط زیر تعریف نمود.

$$C_{X^i} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{X^i} \quad X^i = (\Phi, Q) \quad (32.3)$$

از طرف دیگر خمش اسکالر مربوط به متریک‌های هسینی در دو بعد به شکل دترمینانی نوشته می‌شوند.

$$R^H = \frac{\begin{vmatrix} H_{1,1}f & H_{1,2}f & H_{2,2}f \\ H_{1,1;1}f & H_{1,2;1}f & H_{2,2;1}f \\ H_{1,1;2}f & H_{1,2;2}f & H_{2,2;2}f \end{vmatrix}}{2(\det[H_{i,j}f])^2} \quad (33.3)$$

که $H_{1,1;1}f = \partial_1(\partial_1^2 f)$ است. همان گونه که از رابطه بالا پیداست نقاط تکینگی خمش اسکالر ریشه‌های جمله مخرج یعنی $\det[H_{i,j}f]$ است. اکنون این سوال مطرح می‌شود که نقاط تکینگی کدام منیفلد ترمودینامیکی در تطابق کامل با نقاط گذار فاز هر یک از ظرفیت‌های گرمایی بالا است. پاسخ این سوال در متریک ساخته شده از توابع لژاندر نهفته است. برای تابع جرم $M(S, Q)$ متریک راپنیر با هسین ماتریس $g^R = \frac{H_{i,j}M}{T}$ با $X^i = (S, Q)$ تعریف می‌شود که دیرمینان آن به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\det[H_{i,j}M] = \begin{vmatrix} \frac{M_{SS}}{T} & \frac{M_{SQ}}{T} \\ \frac{M_{SQ}}{T} & \frac{M_{QQ}}{T} \end{vmatrix} = \frac{1}{TC_\Phi C_S} \quad (34.3)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که نقاط واگرایی C_Φ منطبق بر نقاط واگرایی خمش $R(S, Q)$ ساخته شده از $M(S, Q)$ است. همچنین در رابطه بالا $C_S \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_S$ تعریف شده است. اما هسین متریک ساخته شده از تابع آنتالپی $\bar{M}(S, \Phi) = M - Q\Phi$ به فرم $\bar{g} = \frac{H_{i,j}\bar{M}}{T}$ با $X^i = (S, \Phi)$ دارای دترمینان

$$\det[\bar{g}] = \begin{vmatrix} \frac{\bar{M}_{SS}}{T} & \frac{\bar{M}_{S\Phi}}{T} \\ \frac{\bar{M}_{S\Phi}}{T} & \frac{\bar{M}_{\Phi\Phi}}{T} \end{vmatrix} = -\frac{C_S}{TC_Q} \quad (35.3)$$

است که نقاط تکینگی $\bar{R}(S, \Phi)$ با نقاط گذار C_Q یکسان است. همچنین در جدول (۲.۳) این تطابق برای برخی از سیاه‌چاله‌ها محاسبه شده است.

۳.۳ فرمالیسم جدید از هندسه ترمودینامیکی (NTG)

در برخی از سیاه‌چاله‌ها، نوشتن Q به عنوان تابعی از (S, Φ) معمولاً دشوار یا غیرممکن است. از این رو راحت‌تر است تا متریک $\bar{g}_{ij}$ را از مختصات (S, Φ) در مختصات (S, Q) بازنویسی کرد. با استفاده از ماتریس تبدیل ژاکوبی

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \quad (36.3)$$

جدول ۲.۳: تطابق میان نقاط واگرایی خم‌سکالر و نقاط گذار فاز.

RN	$kerr$
$M(S, Q) = \frac{\sqrt{S\pi}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{Q}{S} \right)$ $T(S, Q) = \frac{S - Q\sqrt{\pi}}{\sqrt{S\pi}\sqrt{\pi}}$ $R(S, Q) = 0$ $C_\Phi(S, Q) = -2S$	$M(S, J) = \sqrt{\frac{S}{\pi} + \frac{J^2\pi}{S}}$ $T(S, J) = \frac{S^2 - 4J^2\pi^2}{4S^2\sqrt{\pi}\sqrt{S^2 + 4J^2\pi^2}}$ $R(S, J) = -\frac{S(S^2 + 12J^2\pi^2)}{(S^2 + 4J^2\pi^2)(4\pi^2 J^2 - S^2)}$ $C_\Omega(S, J) = 2 \frac{(-S^2 + 4J^2\pi^2)S^2}{(S^2 + 4J^2\pi^2)^2}$
$\bar{M}(S, \Phi) = \sqrt{\frac{S}{\pi}} (\Phi^2 - 1)$ $T(S, \Phi) = \frac{1 - \Phi^2}{\sqrt{\pi}S}$ $\bar{R}(S, \Phi) = -\frac{-1 + \Phi^2}{(-1 + 3\Phi^2)^2 S}$ $C_Q(S, \Phi) = -2 \frac{S(\Phi^2 - 1)}{-1 + 3\Phi^2}$	$\bar{M}(S, \Omega) = \sqrt{\frac{S}{\pi} - \left(\frac{S\Omega}{\pi}\right)^2}$ $T(S, \Omega) = \frac{-2S\Omega^2 + \pi}{4\pi\sqrt{S(-S\Omega^2 + \pi)}}$ $\bar{R}(S, \Omega) = 4 \frac{(-S\Omega^2 + \pi)\pi^2(\pi^2 - 2S\Omega^2\pi - 4S^2\Omega^4)}{(\pi^2 - 4S\Omega^2\pi + 4S^2\Omega^4)^2(-2S\Omega^2 + \pi)S}$ $C_J(S, \Omega) = -2 \frac{\pi S(-2S\Omega^2 + \pi)}{4S^2\Omega^4 - 4S\Omega^2\pi + \pi^2}$

می‌توان از مختصات (S, Φ) به مختصات جدید (S, Q) منتقل شد. در مختصات جدید، مولفه‌های متریک به صورت زیر تغییر می‌کنند.

$$\bar{g}_{ij} = J_{ik}^T \bar{g}_{kl} J_{lj} \quad (37.3)$$

که J^T ماتریس ترانزاده J است. حال با استفاده از ماتریس ژاکوبی (۳۶.۳) و نیز نوشتن مولفه‌های متریک در نمایش آنتالپی به صورت

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\Phi & \left(\frac{\partial T}{\partial \Phi} \right)_S \\ -\left(\frac{\partial Q}{\partial S} \right)_\Phi & -\left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_S \end{pmatrix} = \frac{\partial(T, -Q)}{T \partial(S, \Phi)} \quad (38.3)$$

به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\bar{\mathbf{g}}' = \left(\frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \right)^T \left(\frac{\partial(T, -Q)}{T \partial(S, \Phi)} \right) \left(\frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \right) = \left(\frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \right)^T \left(\frac{\partial(T, -Q)}{T \partial(S, Q)} \right) \quad (39.3)$$

اکنون با توجه به روابط ماکسول $(\frac{\partial T}{\partial Q})|_S = (\frac{\partial \Phi}{\partial S})|_Q$ و نیز استفاده از قانون اول، $dM = TdS + \Phi dQ$ ، شکل متریک نهایی که یک فرمولبندی جدید از ترمودینامیک هندسی است با رابطه زیر تعریف می‌شود [۴۱].

$$g^{NTG} = \bar{\mathbf{g}}' = \text{diag} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_Q, -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right)_S \right) = \frac{1}{T} \text{diag} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial S^2}, -\frac{\partial^2 M}{\partial Q^2} \right) \quad (40.3)$$

بسیار جالب است که در ابتدا از تابع پتانسیل آنتالپی در ساخت متریک استفاده شد ولی نهایتاً در فرمولبندی جدید تابع پتانسیل جرم $M(S, Q)$ است که می‌تواند ابزاری مناسب برای برقراری ارتباطی یک به یک میان نقاط گذار C_Q و نقاط تکینگی R^{NTG} باشد [۴۱].

مشابه با روند بالا، برای سیاه‌چاله‌های با $(n+1)$ متغیر ترمودینامیکی $X^j = (S, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ و پتانسیل آنتالپی $\bar{M} = M - \sum_i^n \Phi_i Q_i$ ، ماتریس متریک در نمایش آنتالپی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\bar{g} = \frac{\partial(T, -Q_1, -Q_2, \dots, Q_n)}{T \partial(S, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)} \quad (41.3)$$

در رابطه بالا از قانون اول ترمودینامیک $d\bar{M} = TdS - \sum_i Q_i d\Phi_i$ استفاده شده است. اکنون با تعریف ماتریس ژاکوبی زیر

$$J \equiv \frac{\partial(S, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)}{\partial(S, Q_1, Q_2, \dots, Q_n)} \quad (42.3)$$

تحت تغییر مختصات از $(S, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ به $(S, Q_1, \dots, Q_n)$ ، متریک (41.3) شکل بلوکه قطری زیر را در مختصات جدید به خود می‌گیرد.

$$\bar{g}' = \begin{pmatrix} C_{Q_1, \dots, Q_n}^{-1} & \circ \\ \circ & (-G)_{n \times n} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 M}{\partial S^2} & \circ \\ \circ & (-G)_{n \times n} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (43.3)$$

که G ماتریس مربعی با رنک n است که به صورت زیر تعریف شده است.

$$\mathbf{G} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 M}{\partial Y^i \partial Y^j}; \quad Y^i = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad (44.3)$$

با تعریف ماتریس $\eta_i^j = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ رابطه 43.3 را می‌توان به شکل بسته زیر بازنویسی کرد [41].

$$dI_M^2 = -\frac{1}{T} \left(\eta_i^j \frac{\partial^2 M}{\partial X^j \partial X^l} dX^i dX^l \right) \quad (45.3)$$

که $X^i = (S, Q_1, \dots, Q_n)$ متغیرهای ترمودینامیک فزونبر هستند. علاوه بر این، همان‌طور که اشاره شد، تکنیکی‌های خم‌ش به‌دست آمده از متریک راپنیر $(R_{S, Q_1, Q_2, \dots, Q_n})$ در نمایش جرم

$$g_{ij}^R = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 M}{\partial X^i \partial X^j} \quad X^i = (S, Q_1, \dots, Q_n) \quad (46.3)$$

دقیقا در نقاط گذار ظرفیت $C_{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n} = T (\partial S / \partial T)_{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n}$ اتفاق می‌افتند [53، 54، 55]. این متریک را می‌توان به روشی مشابه با قبل به شکل بسته‌ای از پتانسیل آنتالپی نوشت. برای این منظور در ابتدا با بهره‌گیری از قانون اول ترمودینامیک $dM = TdS + \sum_{i=1}^n \Phi_i dQ_i$ می‌توان متریک راپنیر در نمایش جرم را به صورت زیر نوشت.

$$g^R = \frac{\partial(T, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)}{T \partial(S, Q_1, Q_2, \dots, Q_n)} \quad (47.3)$$

سپس تحت تغییر مختصات از $(S, Q_1, \dots, Q_n)$ به $(S, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ از طریق ماتریس ژاکوبی زیر

$$J \equiv \frac{\partial(S, Q_1, Q_2, \dots, Q_n)}{\partial(S, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)} \quad (48.3)$$

در مختصات جدید، متریک (۱.۵) به شکل بلوکه قطری زیر تبدیل می‌شود.

$$\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} C_{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n}^{-1} & \circ \\ \circ & (-G)_{n \times n} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial S^2} & \circ \\ \circ & (-G)_{n \times n} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (۴۹.۳)$$

که ماتریس $\bar{G}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{G} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial Y^i \partial Y^j}; \quad Y^i = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) \quad (۵۰.۳)$$

حال متریک بلوکه قطری ۴۹.۳ را می‌توان به شکل بسته زیر بازنویسی کرد.

$$dI_M^{\check{}} = -\frac{1}{T} \left(\eta_i^j \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X^j \partial X^l dX^i dX^l} \right) \quad (۵۱.۳)$$

که $X^j = (S, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ است. اکنون هر دو متریک (۴۵.۳) و (۵۱.۳) را می‌توان با المان فاصله‌ی زیر تعریف کرد [۴۱].

$$dI_{NTG}^{\check{}} = -\frac{1}{T} \left(\eta_i^j \frac{\partial^2 \Xi}{\partial X^j \partial X^l} \right) dX^i dX^l \quad (۵۲.۳)$$

که $\eta_i^j = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ و نیز پتانسیل ترمودینامیکی است. بسیار جالب است زمانی که $(\Xi = M)$ و نیز مختصات $X^i = (S, Q_1, \dots, Q_n)$ انتخاب شوند، در این صورت تکینگی‌های خمش اسکالر (ذاتی) حاصل از این متریک یعنی $R^{NTG}(S, Q_1, \dots, Q_n)$ منطبق بر نقاط واگرایی ظرفیت گرمایی $C_{Q_1, \dots, Q_n}$ است. علاوه بر این زمانی که $(\Xi = \bar{M})$ ، و نیز $X^i = (S, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ انتخاب شوند می‌توان مشاهده نمود که تکینگی‌های خمش حاصل از این متریک یعنی $R^{NTG}(S, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ دقیقاً در نقاط گذار فاز مربوط به ظرفیت گرمایی $C_{\Phi_1, \dots, \Phi_n}$ اتفاق رخ می‌دهند.

۴.۳ ابرسطح و خمش عرضی

در بخش قبل نقش خمش ذاتی (اسکالر) از خمینه ترمودینامیکی $\mathcal{M}$ را در نمایش‌های گوناگون پتانسیل مورد بررسی قرار دادیم. اکنون نقش خمش عرضی از ابرسطح‌ها در ترمودینامیک هندسی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

از نقطه نظر هندسه‌ای، در یک منیفلد $\mathcal{M}$ $(d+1)$ بعدی می‌تواند یک ابر سطح d نورگونه، زمان‌گونه و یا فضاگونه غوطه‌ور باشد. این ابرسطح Σ با لحاظ کردن قید،

$$\Phi(x^\alpha) = 0 \quad (۵۳.۳)$$

روی مختصات منیفلد $\mathcal{M}$ و با پارامتربندی کردن مختصات به شکل $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ که

همچنین بردار $\Phi_{,\alpha}$ بردار نرمال بر ابر سطح Σ است (منظور از علامت α ، مشتق بخشی نسبت به x^α است). لذا بردار نرمال واحد در صورتی که در جهت افزایش Φ باشد یعنی، $n^\alpha \Phi_{,\alpha} > 0$ و نیز ابرسطح نورگونه نباشد به صورت زیر تعریف می شود [۵۶].

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \Phi_{,\alpha}}{\sqrt{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|}}; \quad n_\alpha n^\alpha = \varepsilon \quad (54.3)$$

که $\varepsilon = -1$ برای ابرسطح فضاگونه و $\varepsilon = 1$ برای ابرسطح زمان گونه است. همچنین المان فاصله از ابرسطح Σ با استفاده از رابطه $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ و تعریف بردار مماس $E_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$ با معادله زیر داده می شود.

$$ds_\Sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) = h_{ab} dy^a dy^b \quad (55.3)$$

که $h_{ab} = g_{\alpha\beta} E_a^\alpha E_b^\beta$ متریک القایی (ذاتی) ابرسطح است. از طرفی تانسور خمش عرضی ابرسطح با رابطه،

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} E_a^\alpha E_b^\beta \quad (56.3)$$

قابل تعریف است. این تانسور متقارن است ($K_{ab} = K_{ba}$) و علاوه بر آن برحسب مشتق لی از متریک نیز قابل بیان است.

$$K_{ab} = \frac{1}{\varepsilon} (L_n g_{\alpha\beta}) E_a^\alpha E_b^\beta \quad (57.3)$$

همچنین اسکالر خمش عرضی با ردگیری از تانسور خمش مانند رابطه پایین به دست می آید.

$$K \equiv h^{ab} K_{ab} = n^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha (\sqrt{g} n^\alpha) \quad (58.3)$$

که $g = \det(g_{\mu\nu})$ است. اکنون بار دیگر سیاه چاله های باردار با منیفلد دو بعدی را در نظر گرفته و بسته به تقاضا یکی از ابرسطح را مورد تحلیل قرار خواهیم داد. در واقع محاسبه خمش عرضی از ابرسطح ها برای بررسی نقاط گذار و مشخص کردن نواحی پایدار و ناپایدار در اطراف نقاط گذار است. همانطور که در مرجع [۵۵] نشان داده شده است خمش عرضی اطلاعات بیشتری را نسبت به خمش ذاتی در مورد نقاط گذار و نیز پایداری سیستم اطراف این نقاط خواهد داد. اکنون برای بررسی نقاط گذار فاز C_Q از طریق خمش عرضی، بایستی ابرسطح Q ثابت را در نظر گرفت زیرا این ظرفیت گرمایی در بار الکتریکی ثابت تعریف شده است.

طبق رابطه (۵۴.۳) بردار نرمال بر ابرسطح Q ثابت $(\Phi(x^\alpha) = Q - cons = 0)$ با رابطه،

$n_Q = -1/\sqrt{|g^{QQ}|}$ داده می شود. در این صورت خمش اسکالر عرضی با،

$$K(S, Q) = \frac{1}{\varepsilon g} [(n^\mu \partial_\mu) g] + (\partial_\mu n^\mu) \quad (59.3)$$

به دست می آید که $n^\mu = (n^S, n^Q) = (g^{SQ}, g^{QQ}) n_Q$ است. از طرفی دیگر در فرمالسیم NTG (۵۲.۳) با انتخاب $\Xi = M$ و نیز $X^i = (S, Q)$ به متریک زیر خواهیم رسید که تکینگی های خمش ذاتی از آن بر نقاط واگرایی C_Q منطبق هستند.

$$g = \text{diag}\left(C_Q^{-1}, -\frac{C_S^{-1}}{T}\right) \quad (۶۰.۳)$$

بنابراین بردار نرمال بر ابرسطح Q ثابت،

$$n^\mu = (\circ, n^Q) = \left(\circ, \sqrt{|TCS|}\right) \quad (۶۱.۳)$$

است. لازم به ذکر است این بردار یک بردار نرمال واحد است ($n_\mu n^\mu = -1$). در این صورت خمش عرضی به سادگی با معادله زیر داده می شود.

$$K^{NTG}(S, Q) = \left[\frac{TC_Q}{C_S^{-1}} \left[\sqrt{|TCS|} \partial_Q \left(\frac{C_S^{-1}}{TC_Q} \right) \right] + \partial_Q \sqrt{|TCS|} \right] \Big|_{Q=cte} \quad (۶۲.۳)$$

رابطه بالا نشان می دهد که نقاط تکینگی خمش عرضی دقیقا در نقاط گذار فاز C_Q اتفاق می افتد. در جدول (۴.۳)، خمش عرضی و نیز دما و ظرفیت گرمایی برای سیاهچاله های RN ، $Kerr$ ، BTZ و $EMGB$ آورده شده است. در تمام موارد ریشه های مخرج خمش عرضی همان نقاط گذار هستند.

جدول ۳.۳: تابع خمش عرضی و متغیرهای ترمودینامیکی برای سیاهچاله های RN ، $Kerr$ ، BTZ و $EMGB$.

RN	$kerr$
$M(S, Q) = \frac{\sqrt{S\pi} \left(\pi^{-1} + \frac{Q^2}{S} \right)}{2}$	$M(S, J) = \frac{\sqrt{\frac{S}{\pi} + 4 \frac{J^2 \pi}{S}}}{2}$
$T(S, Q) = -\frac{\sqrt{S\pi} Q^2}{2S^2}$	$T(S, J) = -\frac{4J^2 \pi^2 - S^2}{4\sqrt{\pi} S^2} \frac{1}{\sqrt{4J^2 \pi^2 + S^2}}$
$K(S, Q) = \circ$	$K(S, J) = \frac{2J\pi (4\pi J^4 \pi^4 + 8J^2 \pi^2 S^2 + 3S^4) \sqrt{2}\sqrt{S}}{(4\pi J^4 \pi^4 + 24J^2 \pi^2 S^2 - S^4) \sqrt{16J^4 \pi^4 - S^4}}$
$C_Q(S, Q) = -S/2$	$C_J(S, J) = -\frac{2S(16J^4 \pi^4 - S^4)}{4\pi J^4 \pi^4 + 24J^2 \pi^2 S^2 - S^4}$

فصل ۴

بررسی رفتار بحرانی خمش‌های ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌های AdS باردار

۱.۴ مقدمه

از زمان معرفی چهار قانون ترمودینامیک سیاه‌چاله [۵۷، ۵۸]، مطالعه گذار فاز تبدیل به یکی از زمینه‌های فعال و رو به رشد در فیزیک سیاه‌چاله شده است. همچنین این مطالعه، رویکردی جالب توجه برای تحقیق در مورد ریزساختارهای سیاه‌چاله‌ها فراهم می‌سازد و انتظار می‌رود که بتوان برهم‌کنش‌های میکروسکوپی سیاه‌چاله‌ها را نیز بر اساس فیزیک آماری کشف کرد. هنگام مطالعه گذار فاز، پدیده‌های بحرانی نظیر نماهای بحرانی و دامنه‌هاب بحرانی می‌توانند سبب آشکار شدن ویژگی‌هایی جهان‌شمول در نزدیکی نقطه بحرانی برای سیستم شوند. بنابراین بررسی رفتار بحرانی برای کمیت‌های ترمودینامیکی حائز اهمیت است. در مراجع [۵۹، ۶۰] نشان داده شده است که خمش ذاتی در نقطه بحرانی به بی‌نهایت منفی ($-\infty$) میل می‌کند. علاوه بر این، با استفاده از فرمول بندی جدید هندسه (NTG) نماهای بحرانی و دامنه بحرانی در نزدیکی نقطه گذار فاز قابل محاسبه است. همان‌طور که در فصل ۳ اشاره شد، علاوه بر خمش ذاتی، خمش عرضی نیز یک رویکرد جالب در فضای حالت ترمودینامیکی برای بررسی

گذار فاز است. در مرجع [۶۱] نشان داده شده‌است که خمش عرضی یک ابرسطح^۱ معین در فضای ترمودینامیکی حاوی اطلاعات مفیدی در مورد موقعیت نقطه بحرانی و پایداری سیستم است. به عبارت دیگر خمش عرضی دارای نقاط واگرایی و علائم مشترکی با ظرفیت گرمایی ویژه^۲ حول نقطه بحرانی است. در این فصل، نتایج و محاسبات مربوط به مرجع [۱] مرور می‌نماییم. به بیانی دقیق‌تر، نماهای بحرانی و دامنه‌های بحرانی را برای خمش ذاتی از خمینه^۳ ترمودینامیکی و خمش عرضی روی ابرسطح‌های هم‌دما از چنین خمینه ترمودینامیکی برای سیال و اندروالس و سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسسته مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم.

۲.۴ تعریف خمش‌های ترمودینامیکی

همانگونه که در فصل قبل اشاره شد، فرمول‌بندی جدید هندسه ترمودینامیکی (NTG) [۴۱] به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$dl_{NTG}^2 = \frac{1}{T} \left(\eta_i^j \frac{\partial^2 \Xi}{\partial X^j \partial X^i} dX^i dX^j \right) \quad (1.4)$$

که در آن $\eta_i^j = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ و Ξ پتانسیل ترمودینامیکی و X^i متغیرهای فزون‌ور یا نافزون‌ور هستند. این هندسه قادر به توضیح یک هم‌خوانی یک به یک بین نقاط گذار فاز و تکنیکی‌های خمش است. برای مثال، در خمینه ترمودینامیکی دوبعدی، با در نظر گرفتن انرژی آزاد به عنوان پتانسیل ترمودینامیکی یعنی، $\Xi = F$ و $X_i = (T, x)$ ، که در آن x می‌تواند هر کدام از کمیت‌های حجم V ، بار Q ، تکانه زاویه‌ای J یا دیگر کمیت‌های فزون‌ور باشند، تکنیکی‌های خمش دقیقاً با نقاط گذار فاز و ظرفیت گرمایی در y ثابت یا Cy ، متناظر هستند. در این مورد، المان طول به این صورت تعریف می‌شود.

$$dl_{NTG}^2 = \frac{1}{T} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} dT^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} dx^2 \right) \quad (2.4)$$

با استفاده از شکل دیفرانسیلی انرژی آزاد، $dF = -SdT + ydx$ ، می‌توان المان‌های متریک بالا را به این صورت بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} dl_{NTG}^2 &= \frac{1}{T} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x dT^2 + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_T dx^2 \\ &= \frac{C_x}{T} dT^2 + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_T dx^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

که $C_x = T(\partial S / \partial T)_x$ ظرفیت گرمایی در x ثابت است. در فضای ترمودینامیکی تعمیم‌یافته، ثابت کیهان‌شناسی به عنوان فشار ترمودینامیکی و کمیت مزدوج آن به عنوان حجم ترمودینامیکی

¹Hypersurface

²Specific heat

³Manifold

سیاه‌چاله تفسیر می‌شود. در این صورت، رفتارهای بحرانی سیاه‌چاله AdS باردار بسیار شبیه سیال VdW خواهد شد. گرچه که ظرفیت گرمایی در حجم ثابت برای سیاه‌چاله‌های باردار $C_V = 0$ است، اما در مقایسه با ظرفیت گرمایی در حجم ثابت سیال VdW یعنی $C_V = 3K_B/2$ ، می‌توان ظرفیت گرمایی سیاه‌چاله AdS باردار را بعنوان حد $K_B \rightarrow 0^+$ سیال VdW در نظر گرفت [۶۰]. بنابراین، بهتر است که خمش ذاتی بهنجار شده $R_N = RC_V$ را تعریف کرد که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$R_N = RC_V = \frac{(\partial_V P)^2 - T^2 (\partial_{T,V} P)^2 + 2T^2 (\partial_V P)(\partial_{T,T,V} P)}{2(\partial_V P)^2} \quad (۴.۴)$$

مطابق با معادله حالت برای سیاه‌چاله‌هایی که رفتاری شبیه به سیال VdW دارند، همیشه فشار P به طور خطی به دما T بستگی دارد، بنابراین $\partial_{T,T,V} P = 0$ و در نتیجه خمش ذاتی بهنجار شده (۴.۴) به این عبارت زیر کاهش می‌یابد.

$$R_N = \frac{1}{2} \left[1 - \left(T \frac{\partial_{V,T} P}{\partial_V P} \right)^2 \right], \quad (۵.۴)$$

از طرف دیگر، برای بررسی شرایط بحرانی یک سیستم ترمودینامیکی بایستی اکثر کمیت‌های ترمودینامیکی را ثابت نگه داشت، آنگاه نقطه بحرانی به پارامترهای ترمودینامیکی کمتری وابستگی پیدا می‌کند. بنابراین می‌توان برای ایجاد یک ابرسطح در خمینه ترمودینامیکی ایجاد شده از متریک NTG یکی از متغیرهای ترمودینامیکی را ثابت فرض کرد و رفتار بحرانی خمش عرضی چنین ابرسطحی را بررسی نمود. در این راستا در مرجع [۶۱] نشان داده شده است که خمش عرضی یک ابرسطح مربوط به متغیر ترمودینامیکی ثابت از خمینه ترمودینامیکی در نقاط گذار فاز واگرا بوده و همچنین حاوی اطلاعاتی مفیدی در مورد پایداری سیستم ترمودینامیکی است. اکنون با توجه به نمودار $P - V$ به علت اینکه منحنی‌ها در دماهای ثابت رسم شده‌اند می‌توان ابرسطح‌های $T =$ را در خمینه ترمودینامیکی ساخته شده از متریک (۳.۴) در نظر گرفت. بردار یکه عمود^۱ بر چنین ابرسطح‌هایی به صورت $n_i = (n_T, n_V) = (1, 0)$ و $n^i = g^{ij} n_j = (C_V^{1/2}/T, 0)$ تعریف می‌شود. در این صورت، خمش عرضی، $K = \nabla_i n^i$ ، با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$K_N = K \sqrt{C_V} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{T \partial_{V,T} P}{\partial_V P} \right] \quad (۶.۴)$$

مشابه با خمش ذاتی بهنجار شده، خمش عرضی بهنجار شده K_N را نیز قابل تعریف است.

۳.۴ سیال وان دروالس

اولین و ساده‌ترین نمونه شناخته شده یک سیستم برهم‌کنشی، سیال VdW می‌باشد که می‌توان آن را برای توضیح گذار فاز مرتبه اول بین فازهای گاز و مایع، مورد استفاده قرار داد. معادله

^۱Unit normal vector

حالت آن به صورت زیر است.

$$P = \frac{T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (7.4)$$

که در آن v حجم مخصوص سیال^۱ و وابسته به حجم کل با رابطه $v = V/N$ است که در آن N تعداد کل مولکول‌های میکروسکوپی می‌باشد. نقطه بحرانی نیز با استفاده از مجموعه‌ای از دو شرط $(\partial_v P)T = 0$ و $(\partial_{v,v} P)T = 0$ به دست می‌آید. با توجه به معادله حالت (۷.۴)، نقاط بحرانی به شکل خواهند بود

$$P_c = \frac{a}{3vb^2}, \quad v_c = 3b, \quad T_c = \frac{8a}{3vb} \quad (8.4)$$

با تعریف متغیرهای کاهش یافته به صورت $\hat{P} = \frac{P}{P_c}$ ، $\hat{v} = \frac{v}{v_c}$ و $\hat{T} = \frac{T}{T_c}$ رابطه (۷.۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\hat{P} = \frac{8\hat{T}}{3\hat{v}-1} - \frac{3}{\hat{v}^2} \quad (9.4)$$

که معادله حالت در فضای پارامتری کاهش یافته است [۶۲]. با در نظر گرفتن شکل کاهش یافته چگالی عددی به صورت $\hat{n} = 1/\hat{v}$ بین فازهای مایع و گاز، می‌توان رابطه (۹.۴) را بر حسب چگالی عددی سیال کاهش یافته به صورت زیر نوشت.

$$\hat{P} = \frac{8\hat{T}\hat{n}}{3-\hat{n}} - 3\hat{n}^2. \quad (10.4)$$

در فضای پارامتری کاهش یافته، تراکم‌پذیری هم‌دما^۲ κ_T نیز به این صورت تعریف می‌شود.

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{P_c \hat{V}} \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{P}} \right)_{\hat{T}} = -\frac{1}{P_c \hat{v}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{P}} \right)_{\hat{T}} = \frac{1}{P_c \hat{n}} \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial \hat{P}} \right)_{\hat{T}} \quad (11.4)$$

با استفاده از معادله حالت (۹.۴)، خواهیم داشت.

$$\kappa_T P_c = \frac{(3-\hat{n})^2 / 6\hat{n}}{4\hat{T} - \hat{n}(3-\hat{n})^2} \quad (12.4)$$

به منظور بسط کمیت‌های ترمودینامیکی حول نقطه بحرانی، پارامترهای جدید زیر برای ساده سازی محاسبات مفید هستند.

$$t = \hat{T} - 1, \quad \omega = \hat{v} - 1, \quad \pi = \hat{p} - 1. \quad (13.4)$$

اکنون نمای بحرانی β که مربوط به اختلاف چگالی عددی دو فاز مایع-گاز در امتداد منحنی هم‌زیستی^۳ در نمودار $T-P$ در نزدیکی نقطه بحرانی است [۶۲]، بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta n = n_g - n_l \propto (-t)^\beta \quad t < 0. \quad (14.4)$$

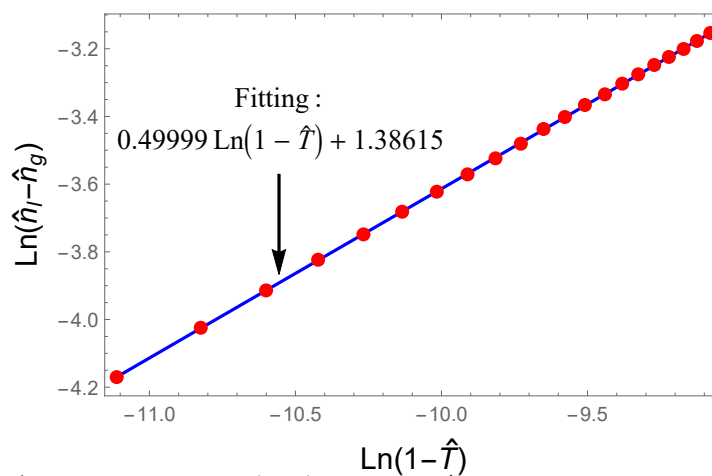
¹Specific volume

²Isothermal compressibility

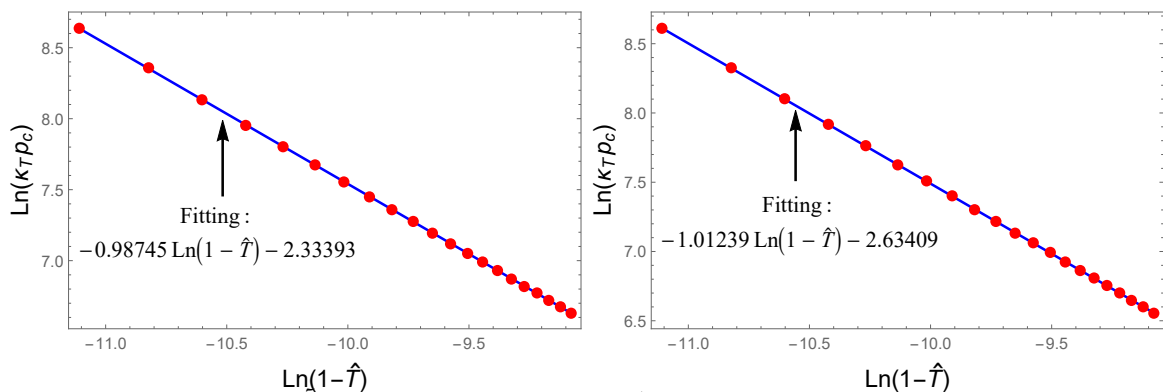
³Coexistence curve

در رابطه زیراندیس g مربوط به فاز گازی و زیراندیس l مربوط به فاز مایع است. در شکل ۱.۴، $\ln(n_g - n_l)$ را به عنوان تابعی از $\ln(1 - \hat{T})$ رسم شده است. با تطابق دادن معادله خط مستقیم با نقاط داده‌های عددی (نقاط قرمز) $\beta = 0.49999 \sim 0.5$ به دست می‌آید که با نتایج مرجع [۶۲] تطابق دارد. از طرفی نماهای بحرانی γ و γ' به ترتیب برای تراکم‌پذیری هم‌دمای κ_T در امتداد خط هم‌حجم $\hat{n} = 1$ و منحنی هم‌زیستی $\hat{p} - \hat{v}$ را نشان می‌دهند که به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\kappa_T P_c \propto \begin{cases} t^\gamma & t > 0, \\ (-t)^{-\gamma'} & t < 0. \end{cases} \quad (15.4)$$



شکل ۱.۴: منحنی $\ln(n_g - n_l)$ برحسب $\ln(1 - \hat{T})$ در امتداد منحنی هم‌زیستی گاز-مایع در نمودار $\hat{p} - \hat{T}$. خط مستقیم آبی با معادله $\ln \Delta n = \beta \ln(1 - \hat{T}) + b$ گذشته شده از نقاط قرمز (داده‌های عددی) با $\beta = 0.49999$ و $b = 1.38615$ مشخص می‌شود [۱].



شکل ۲.۴: نمودار $\ln - \ln$ از $\kappa_T P_c$ برحسب $\ln(1 - \hat{T})$. (راست) شیب خط آبی مستقیم گذشته از نقاط قرمز (داده‌های عددی) در امتداد منحنی هم‌زیستی مایع اشباع شده $1/0.1239 -$ است (چپ) در امتداد منحنی هم‌زیستی گاز اشباع شده $0.98745 -$ است [۱].

بنابراین، با قرار دادن $\hat{n} = 1$ در رابطه (۱۲.۴) و بسط مرتبه‌های پایین t ، می‌توان $\gamma = 1$ به دست آید. همچنین نمودار $\ln - \ln$ تراکم‌پذیری هم‌دمای $\kappa_T P_c$ برحسب $(1 - \hat{T})$ برای $t < 0$

در امتداد منحنی همزیستی $\hat{p} - \hat{v}$ در شکل ۲.۴ رسم شده است. همانطور که پیداست داده ها از رفتار بحرانی مجانبی $\kappa_T P_c \approx (-t)^{\gamma'}$ با نمای $\gamma' = 1$ در هر دو منحنی همزیستی مایع-گاز اشباع شده پیروی می کند.

. اکنون رفتار بحرانی خمشی ذاتی R_N و خمشی عرضی K_N در نزدیکی نقطه بحرانی را می توان بررسی نمود. برای این منظور، بهتر است ابتدا رابطه (۱۱.۴) به این صورت بازنویسی شود.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{n}} \right)_{\hat{T}} = (\kappa_T P_c \hat{n})^{-1}. \quad (16.4)$$

همچنین چگالی کاهش یافته در منحنی همزیستی را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$\frac{1}{\hat{n}} = \frac{\theta}{\hat{n}_l} + \frac{(1-\theta)}{\hat{n}_g}, \quad (17.4)$$

که θ کسر فاز مایع است، به صورتی که برای $\theta = 1$ ، فاز مایع خالص ($\hat{n} = \hat{n}_l$) و برای $\theta = 0$ ، فاز گازی خالص ($\hat{n} = \hat{n}_g$) غالب خواهند بود. با استفاده از چگالی عددی کاهش یافته (۱۷.۴)، معادله (۱۶.۴) را می توان به این صورت نوشت.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{n}} \right)_{\hat{T}} = \frac{1}{\kappa_T P_c} \left(\frac{\theta}{\hat{n}_l} + \frac{(1-\theta)}{\hat{n}_g} \right). \quad (18.4)$$

با نزدیک شدن به سمت نقطه بحرانی در امتداد منحنی همزیستی برای $t < 0$ ، خواهیم داشت.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{n}} \right)_{\hat{T}|_{n_l}} = -\frac{1}{\kappa_T P_c \hat{n}_l} \propto (-t)^{\gamma' - \beta}, \quad (19.4)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{n}} \right)_{\hat{T}|_{n_g}} = -\frac{1}{\kappa_T P_c \hat{n}_g} \propto (-t)^{\gamma' - \beta}, \quad (20.4)$$

از سوی دیگر، با نزدیک شدن به نقطه بحرانی در امتداد منحنی هم حجم ($\hat{n} = 1$) با $t > 0$ رابطه زیر نتیجه می شود.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{n}} \right)_{\hat{T}} = -\frac{1}{\kappa_T P_c} \propto t^{\gamma}. \quad (21.4)$$

علاوه بر این عبارت درون پرانتز در معادلات (۵.۴) و (۶.۴) را می توان به این شکل نوشت.

$$T \frac{\partial_{V,T} P}{\partial_V P} = \hat{T} \frac{\partial_{\hat{V},\hat{T}} \hat{P}}{\partial_{\hat{V}} \hat{P}} = \hat{T} \frac{\partial_{\hat{n},\hat{T}} \hat{P}}{\partial_{\hat{n}} \hat{P}} = (1+t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{n}} \right)_t \right). \quad (22.4)$$

بنابراین، رفتار بحرانی رابطه بالا به شکل زیر تعیین می گردد.

$$\left(\hat{T} \frac{\partial_{\hat{n},\hat{T}} \hat{P}}{\partial_{\hat{n}} \hat{P}} \right)_{|_{n_l, n_g}} \sim \frac{(\gamma' - \beta)}{t} \quad t < 0, \quad (23.4)$$

$$\left(\hat{T} \frac{\partial_{\hat{n},\hat{T}} \hat{P}}{\partial_{\hat{n}} \hat{P}} \right)_{|_{\hat{n}=1}} \sim \frac{\gamma}{t} \quad t > 0, \quad (24.4)$$

سرانجام با جایگزین کردن این مقادیر در رابطه (۵.۴)، رفتار بحرانی R_N با رابطه زیر مشخص می‌شود [۱].

$$R_N t^2 \approx -\frac{(\gamma' - \beta)^2}{4} \quad t < 0, \quad (25.4)$$

$$R_N t^2 \approx -\frac{\gamma^2}{4} \quad t > 0. \quad (26.4)$$

در مورد سیال VdW با نمای بحرانی $\beta = 1/2$ و $\gamma = \gamma' = 1$ خواهیم داشت،

$$R_N t^2 \approx -\frac{1}{8} \quad t < 0, \quad (27.4)$$

$$R_N t^2 \approx -\frac{1}{4} \quad t > 0, \quad (28.4)$$

که دقیقاً مطابق با مراجع [۵۹، ۶۰] با $t < 0$ است، در حالی که برای $t > 0$ ، این عبارت با مراجع [۶۳، ۶۴] سازگاری دارد لازم به ذکر است که انتخاب مسیرهای مختلف در نمودار $P - V$ (وقتی که $\alpha = 0$ باشد^۱). توجه داشته باشید که انتخاب ما از مسیرهای مختلف در نمودار $\hat{p} - \hat{v}$ برای رسیدن به نقطه بحرانی منجر به ایجاد یک ناپیوستگی در مقدار خمشی ذاتی می‌شود. علاوه بر این، رفتار بحرانی خمشی عرضی بهنجار شده (۶.۴) با

$$K_N t \approx -\frac{\gamma' - \beta}{4} \quad t < 0 \quad (29.4)$$

$$K_N t \approx -\frac{\gamma}{4} \quad t > 0 \quad (30.4)$$

داده می‌شود [۱]. با انتخاب نماهای بحرانی $\beta = 1/2$ و $\gamma = \gamma' = 1$ برای سیال VdW می‌توان مشاهده کرد که

$$K_N t \approx -\frac{1}{4} \quad t < 0, \quad (31.4)$$

$$K_N t \approx -\frac{1}{4} \quad t > 0, \quad (32.4)$$

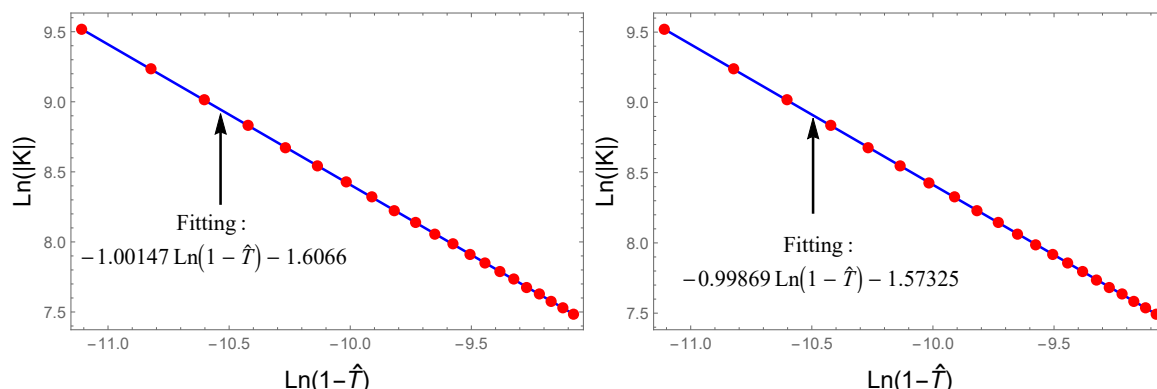
این رفتار بحرانی مربوط خمشی عرضی به صورت عددی در مرجع [۱] بررسی شده است. در نزدیکی نقطه بحرانی، با فرض رابطه زیر برای خمشی عرضی، می‌توان نمای بحرانی را از داده‌های عددی محاسبه نمود.

$$K_N \sim -\left(1 - \hat{T}\right)^{-c_K} \quad \text{or} \quad \ln |K| = -c_K \ln(1 - \hat{T}) + d_K. \quad (33.4)$$

از روی عرض از مبدا خطوط $\ln - \ln$ مستقیم در منحنی‌های هم‌زیستی مایع و گاز اشباع شده در شکل ۳.۴، می‌توان نتیجه گرفت که

$$K_N t \sim K \left(1 - \hat{T}\right) \sqrt{C_v} = -\sqrt{\frac{3}{4}} e^{\frac{-1.57325 + 1.60662}{4}} = -0.249779 \approx -\frac{1}{4} \quad (34.4)$$

دربخش بعدی رفتار خمشی‌های بهنجار شده در نزدیکی نقطه بحرانی برای سیاه‌چاله‌های باردار AdS چهار و چند بعدی که رفتاری مشابه سیال VdW نشان می‌دهند، بررسی می‌شود.
^۱توان بحرانی α برای ظرفیت گرمایی در حجم ثابت است.



شکل ۳.۴: خمشی عرضی $\ln |K|$ بر حسب $\ln(1 - \hat{T})$. داده‌های عددی با نقاط قرمز نشان داده شده است و معادله خط تطبیق داده شده با خط آبی پیوسته تعیین می‌شود. (راست) در امتداد منحنی همزیستی مایع اشباع شده، شیب -0.99869 است (چپ) در امتداد منحنی همزیستی گاز اشباع شده، شیب -1.00147 است [۱].

۴.۴ سیاه‌چاله‌های AdS بارداری چهاربعدی

در این بخش، درستی روابط (۲۵.۴) و (۲۹.۴) را برای یک سیاه‌چاله AdS بارداری چهاربعدی بررسی می‌کنیم. ساختار ترمودینامیکی و فاز چنین سیاه‌چاله‌هایی در مرجع [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. معادله حالت برای یک سیاه‌چاله AdS بارداری چهاربعدی به این صورت است.

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4}, \quad (35.4)$$

که در آن حجم ویژه $v = 2r_h$ (شعاع افق رویداد^۱ است). در این سیاه‌چاله‌ها یک گذار فاز بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ مشابه با گذار فاز مایع و گاز در سیال vdW اتفاق می‌افتد و نقطه بحرانی با $P_c = 1/96\pi Q^2$ ، $T_c = \sqrt{6}/18\pi Q$ و $v_c = 2\sqrt{6}Q$ مشخص می‌شود. در فضای پارامتری کاهش یافته، معادله حالت به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\hat{P} = \frac{8\hat{T}}{3\hat{v}} - \frac{2}{\hat{v}^2} + \frac{1}{3\hat{v}^4}. \quad (36.4)$$

علاوه بر این، منحنی همزیستی سیاه‌چاله کوچک / بزرگ در نمودار $P - T$ با رابطه [۶۶]

$$\hat{T}^2 = \hat{P} (3 - \sqrt{\hat{P}}) / 2, \quad (37.4)$$

داده می‌شود که $\hat{T} = T/T_c$ و $\hat{P} = P/P_c$ به ترتیب دما و فشار کاهش یافته هستند. با استفاده از این رابطه و معادله حالت ۳۵.۴ می‌توان حجم‌های ترمودینامیکی کاهش یافته را

¹Event horizon

برای سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک در امتداد منحنی همزیستی به دست آورد.

$$\hat{V}_s = \left(\frac{\sqrt{3 - \sqrt{\hat{P}}} - \sqrt{3 - 3\sqrt{\hat{P}}}}{\sqrt{2\hat{P}}} \right)^3, \quad (38.4)$$

$$\hat{V}_l = \left(\frac{\sqrt{3 - \sqrt{\hat{P}}} + \sqrt{3 - 3\sqrt{\hat{P}}}}{\sqrt{2\hat{P}}} \right)^3, \quad (39.4)$$

که $\hat{V} = V/V_c = \hat{v}^3$ ، $V = \frac{4}{3}\pi r_h^3$ و $V_c = 8\sqrt{6}\pi Q^3$ می‌باشد. حال رفتار بحرانی ناشی از اختلاف چگالی عددی بین فازهای سیاه‌چاله بزرگ و کوچک را روی منحنی همزیستی $P - T$ تعیین می‌شود. از طریق رابطه (38.4)، رفتار بحرانی مجانبی $\Delta\hat{n}$ با

$$\Delta\hat{n} = \hat{n}_l - \hat{n}_s \approx 6\sqrt{-2t}, \quad (40.4)$$

به دست می‌آید که در آن برای سیاه‌چاله‌های AdS باردار $n_l \approx 1 + 3\sqrt{-2t}$ و $n_s \approx 1 - 3\sqrt{-2t}$ هستند. مقایسه این عبارت با تعریف رابطه (14.4) نشان می‌دهد که نمای بحرانی $\beta = 1/2$ می‌شود. اکنون می‌توان رفتار بحرانی κ_T در حد $t \rightarrow 0^\pm$ را در نظر گرفت. با گرفتن مشتق از معادله حالت (36.4) بر حسب حجم کل، خواهیم داشت.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{T}} = -\frac{4}{9\hat{V}^{7/3}} + \frac{4}{3\hat{V}^{5/3}} - \frac{8\hat{T}}{9\hat{V}^{4/3}}. \quad (41.4)$$

که با نوشتن رابطه بالا بر حسب پارامترهای بسط یا همان $t = \hat{T} - 1$ و $w' = \hat{V} - 1$ و اعمال بسط تیلور^۱ تا پایین‌ترین مرتبه‌ها، روابط زیر حاصل می‌شود.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{T}} \approx -\frac{8}{9}t - \frac{4}{27}w'^2 \quad t > 0, \quad (42.4)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{T}} \approx \frac{8}{9}t - \frac{4}{27}w'^2 \quad t < 0. \quad (43.4)$$

در امتداد منحنی هم‌حجم با در نظر گرفتن $w' = 0$ و با استفاده از معادلات (11.4) و (19.5) رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\kappa_T P_c \approx \frac{8}{9} \frac{1}{t} \quad t > 0. \quad (44.4)$$

که با تطابق تعریف (15.4) نمای بحرانی $\gamma = 1$ حاصل می‌شود. از طرف دیگر با بسط پایین‌ترین مرتبه بر حسب t ، از رابطه (38.4) خواهیم داشت.

$$w'^2_{s,l} \approx 18t. \quad (45.4)$$

¹Taylor expanding

که با جایگزین کردن این مقادیر در رابطه (۱۹.۵) و با استفاده از رابطه (۱۱.۴) در نهایت عبارت زیر به دست می‌آید.

$$\kappa_T P_c \approx \frac{9}{16} \frac{1}{t} \quad t < 0. \quad (46.4)$$

که با تطبیق رابطه (۱۵.۴) نمای بحرانی $\gamma' = 1$ نتیجه می‌شود. از سوی دیگر با بهره‌مندی از معادلات (۵.۴) و (۶.۴) خمشی ذاتی بهنجارشده R_N و خمشی عرضی K_N به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$R_N = \frac{(\hat{V}^{2/3} - 1)(\hat{V}^{2/3} - 1 - 4\hat{T}\hat{V})}{2(1 - 3\hat{V}^{2/3} + 2\hat{T}\hat{V})^2}. \quad (47.4)$$

$$K_N = \frac{1 - 3\hat{V}^{2/3}}{2(1 - 3\hat{V}^{2/3} + 2\hat{T}\hat{V})^2}. \quad (48.4)$$

با نوشتن این عبارت‌ها بر حسب پارامترهای بسط و سپس قرار دادن $w' = 0$ برای $t > 0$ داریم و $w' = w'_s = -w'_l = 3\sqrt{-2t}$ برای $t < 0$ ، تا پایین‌ترین مرتبه از t روابط بحرانی زیر به دست می‌آید.

$$R_N t^2 \approx \begin{cases} \frac{1}{2} & t > 0 \\ -\frac{1}{\lambda} & t < 0 \end{cases}, \quad \text{and} \quad K_N t \approx \begin{cases} -\frac{1}{2} & t > 0 \\ -\frac{1}{4} & t < 0 \end{cases}. \quad (49.4)$$

بسیار جالب است که نتایج بالا با نتایج حاصل برای سیال VdW در تطابق هستند. همچنین با قرار دادن مقادیر $\beta = 1$ و $\gamma = \gamma' = 1$ در روابط (۲۵.۴) و (۲۷.۴)، همان دامنه‌های بحرانی جهان‌شمول بالا حاصل می‌شود. برای $t < 0$ ، $R_N t^2 \sim -\frac{1}{\lambda}$ با نتیجه گزارش شده در مرجع [۵۹] سازگار است.

۵.۴ سیاه‌چاله‌های AdS باردار با ابعاد بزرگ‌تر

به دنبال مطالعه در بخش‌های قبل در مورد سیال VdW و سیاه‌چاله‌های AdS باردار چهار بعدی، مطالعه رفتار بحرانی R_N و K_N برای یک سیاه‌چاله AdS باردار با ابعاد بزرگ‌تر حائز اهمیت است. در فضای پارامتری کاهش‌یافته، معادله حالت برای سیاه‌چاله‌های RN-AdS با ابعاد بزرگ‌تر به این صورت زیر است.

$$\hat{P} = \frac{\hat{V}^{-\frac{2(d-2)}{d-1}} + (d-2)\hat{V}^{\frac{2}{1-d}}(\hat{\Delta} - 2d + 4(d-3)\hat{T}\hat{V}^{\frac{1}{d-1}})}{(d-3)(2d-5)} \quad (50.4)$$

لازم به ذکر است که بر خلاف مورد چهاربعدی، هیچ شکل تحلیلی از منحنی هم‌زیستی برای سیاه‌چاله‌های کوچک-بزرگ وجود ندارد. با این وجود، فرمول‌هایی از منحنی هم‌زیستی با

تناسبی دقیق برای موارد پنج تا ده بعدی، در منبع [۶۵] به دست آمده است. بنابراین، می‌توان منحنی هم‌زیستی را بسیار نزدیک به نقطه بحرانی به صورت عددی محاسبه نمود و سپس رفتار بحرانی کمیت‌های ترمودینامیکی نظیر تراکم‌پذیری هم‌دما، چگالی عددی، خمش ذاتی بهنجار شده و خمش عرضی را در امتداد منحنی‌های هم‌زیستی تعیین نمود [۱]. برای محاسبه نماهای بحرانی β ، γ و γ' ، ابتدا باید رفتار تراکم‌پذیری هم‌دما $\kappa_T P_c$ و اختلاف چگالی عددی Δn بین سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک را در نزدیکی نقطه بحرانی بررسی نماییم. تراکم‌پذیری هم‌دما در سیاه‌چاله AdS باردار با ابعاد بزرگ‌تر با استفاده از روابط (۱۱.۴) و (۵۰.۴) به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\kappa_T P_c = \frac{(-3+d)(-1+d)(-5+2d)}{2(d-2) \left(\hat{V}^{-\frac{2}{d-1}} \left(2(d-3) \hat{T} \hat{V}^{\frac{1}{d-1}} - 2d+5 \right) + \hat{V}^{-\frac{2(d-2)}{d-1}} \right)}. \quad (51.4)$$

در مسیر رسیدن به نقطه بحرانی در امتداد منحنی هم‌حجم $\hat{V} = 1$ در $t > 0$ ، رفتار بحرانی تراکم‌پذیری هم‌دما κ_T با

$$\kappa_T P_c \approx \frac{(d-1)(2d-5)}{4(d-2)t}, \quad (52.4)$$

به دست می‌آید که بر نمای بحرانی $\gamma = 1$ دلالت می‌کند. در مرجع [۱] با استفاده از روش مساحت‌های برابر ماکسول، رفتار Δn و $\kappa_T P_c$ برای $t < 0$ در ابعاد $d = 5 - 10$ به ترتیب در امتداد منحنی‌های هم‌زیستی $\hat{P} - \hat{T}$ و $\hat{P} - \hat{V}$ به صورت عددی محاسبه شده است که نتایج آن در جدول ۱.۴ قابل مشاهده است. طبق داده‌های جدول ۱.۴، واضح است که مقادیر توان

جدول ۱.۴: مقادیر عرض از مبدا و شیب $\ln = \Delta n = c_n \ln(1 - \hat{T}) + d_n$ و $\ln |\kappa_T P_c| = -c_k \ln(1 - \hat{T}) - d_k$ برای منحنی‌های هم‌زیستی اشباع شده سیاه‌چاله کوچک و بزرگ [۱].

Quantity	Coefficient	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d = 8$	$d = 9$	$d = 10$
$\ln(\Delta n)$	c_n	0.50004	0.50004	0.0005	0.0005	0.50006	0.50006
	d_n	2.17107	2.22602	2.28272	2.38664	2.33658	2.43293
$\ln \kappa_T P_c (LBH)$	c_k	1.00901	1.00938	1.00982	1.01029	1.01076	1.01122
	$-d_k$	0.29237	0.02490	0.18017	0.34698	0.48771	0.60945
$\ln \kappa_T P_c (SBH)$	c_k	0.99080	0.99044	0.98999	0.98952	0.98904	0.98857
	$-d_k$	0.07027	0.20613	0.42211	0.60038	0.75259	0.88563

بحرانی $\beta = c_n$ و $\gamma' = c_k$ که متوسط دو شیب $c_k(SBH)$ و $c_k(LBH)$ هستند، با افزایش بعد فضا‌زمان تغییری چندانی ندارند، بنابراین

$$\beta \approx \frac{1}{2}, \quad \gamma' \approx 1 \quad (53.4)$$

هستند. این مقادیر با مقادیر سیال VdW و سیاه‌چاله‌های AdS باردار چهار بعدی یکسان هستند. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که صرف نظر از تغییر بعد فضا-زمان، خمشی ذاتی بهنجار شده R_N و خمشی عرضی K_N رفتار بحرانی جهان‌شمولی را در نزدیکی نقطه بحرانی از خود نشان دهند. از سوی دیگر با استفاده از معادلات (۵.۴) و (۶.۴) و (۵۰.۴) می‌توان به راحتی رفتار بحرانی خمشی‌های ترمودینامیکی را برای $t > 0$ بصورت زیر تعیین نمود.

$$R_N t^2 \approx -\frac{1}{3}, \quad K_N t \approx -\frac{1}{3}, \quad (54.4)$$

رابطه بالا نشان‌دهنده یک رفتار جهان‌شمول برای خمشی‌های ترمودینامیکی نزدیک نقطه بحرانی در امتداد منحنی هم‌حجم، مشابه با مقادیر سیال VdW و سیاه‌چاله‌های AdS باردار چهار بعدی می‌باشد، یا به عبارت دیگر می‌توان گفت که این مقادیر به جزئیات سیستم فیزیکی وابسته نیستند. همچنین رفتار بحرانی خمشی‌های ترمودینامیکی در نزدیکی نقطه بحرانی در امتداد منحنی هم‌زیستی سیاه‌چاله‌های کوچک / بزرگ در نمودار $P-V$ در مرجع [۱] بررسی شده است. ضرایب عرض از مبدا و شیب خط مستقیم $\ln-\ln$ مربوط به R_N و K_N بر حسب $(1 - \hat{T})$ در جدول ۲.۴ آورده شده است.

با در نظر گرفتن خطای عددی^۱، شیب‌ها نشان می‌دهند که نمای بحرانی برای R_N و K_N به صورت $c_R = 2$ و $c_K = 1$ هستند که در سازگاری کامل با مقادیر حاصله برای سیال VdW هستند. همچنین دامنه‌های بحرانی در جدول ۳.۴ آورده شده است [۱]. به وضوح می‌توان

جدول ۲.۴: عرض از مبدا و شیب مربوط به خط مستقیم $\ln - \ln$ برای منحنی هم‌زیستی اشباع شده سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک [۱]

Quantity	Coefficient	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d = 8$	$d = 9$	$d = 10$
$\ln R_N (SBH)$	c_R	2.01116	2.01297	2.01455	2.01598	2.01729	2.01851
	d_R	2.21562	2.23775	2.25709	2.27454	2.29054	2.30541
$\ln R_N (LBH)$	c_R	1.98875	1.98693	1.98532	1.98388	1.98255	1.98132
	$-d_R$	1.94227	1.92008	1.90054	1.88292	1.86674	1.85169
$\ln K_N (SBH)$	c_k	1.00567	1.00657	1.00737	1.00808	1.00874	1.00935
	$-d_k$	1.45537	1.146644	1.47611	1.48484	1.49284	1.50028
$\ln K_N (LBH)$	c_k	0.99446	0.99355	0.99275	0.99202	0.99136	0.99074
	$-d_k$	1.31866	1.30756	1.29779	1.28898	1.28089	1.27336

دید که تغییر دامنه‌ها با افزایش بعد فضا-زمان، ناچیز است. در نتیجه، رفتار بحرانی خمشی‌های

¹numerical error

جدول ۳.۴: دامنه‌های بحرانی خمشی‌های ترمودینامیکی در نزدیکی نقطه بحرانی [۱]

Quantity	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d = 8$	$d = 9$	$d = 10$
$R_N t^2$	-0.12506	-0.12507	-0.12508	-0.12509	-0.12510	0.12511
$-\frac{(\gamma' - \beta)^2}{2}$	-0.12493	-12.493	-0.12493	-0.12493	-0.12492	-0.12492
$K_N t$	-0.24982	-0.24982	-0.24984	-0.24985	-0.24986	-0.24987
$-\frac{(\gamma' - \beta)}{2}$	-0.24993	-0.24993	-0.24993	-0.24993	-0.24992	-0.24992

ترمودینامیکی بهنجار شده برای $t < 0$ در امتداد منحنی هم‌زیستی بصورت زیر بیان می‌شود.

$$R_N t^2 \approx -\frac{1}{\lambda}, \quad K_N t \approx -\frac{1}{\epsilon}, \quad (55.4)$$

که عدم وابستگی دامنه‌های بحرانی به بعد فضا زمان را نشان می‌دهد. علاوه بر این، این مقادیر موید دامنه‌های جهان‌شمول به دست آمده در رابطه‌های (۲۵.۴) و (۲۹.۴) هستند.

فصل ۵

رفتار بحرانی خمشی‌های ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله گاوس بونت بدون بار GB-AdS

۱.۵ مقدمه

همان‌گونه که در فصل قبل دیدیم، خمشی ذاتی بهنجار دارای نمای جهان‌شمول ۲ و دامنه بحرانی $R_{Nt}^2 = -1/8$ برای سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسیده است. علاوه بر این برای چنین سیاه‌چاله‌هایی، خمشی عرضی نیز در نزدیکی نقطه بحرانی در امتداد منحنی همزیستی دارای نمای جهان‌شمول ۱ و دامنه بحرانی $K_{Nt}^2 = -1/4$ است. بنابراین در این بخش، چنین ویژگی‌های جهان‌شمولی را برای خمشی‌های ترمودینامیکی در نزدیکی نقطه بحرانی را برای سیاه‌چاله گاوس بونت^۱ بدون بار در فضای پاددوسیده را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به این علت که جفت‌شدگی گاوس بونت نقشی شبیه بار را در سیاه‌چاله‌های باردار بازی می‌کند، و همچنین رفتاری مشابه با سیال واندروالس را نشان می‌دهد [۶۷]، بنابراین خود را محدود به مدل بدون بار سیاه‌چاله گاوس بونت می‌کنیم.

^۱Gauss-bonnet (GB)

۲.۵ سیاه‌چاله گاوس بونت

کنش سیاه‌چاله GB پنج بعدی بدون بار در فضای AdS به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} (\mathcal{R} - 2\Lambda + \alpha \mathcal{L}_{GB}) \right) \quad (۱.۵)$$

که در آن

$$\mathcal{L}_{GB} = \mathcal{R}_{\mu\nu\gamma\delta} \mathcal{R}^{\mu\nu\gamma\delta} - 4 \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \mathcal{R}^2 \quad (۲.۵)$$

و α ثابت جفت شدگی در گرانش GB است. بنابراین حل این سیاه‌چاله با تقارن کروی با عنصر متریک زیر داده می‌شود.

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{3} \left(\frac{16M}{\pi r^4} + \Lambda \right)} \right) \quad (۳.۵)$$

که در آن پارامترهای M جرم سیاه‌چاله هستند. اکنون در فضای فاز تعمیم‌یافته با تعریف ثابت کیهانشناسی Λ بصورت فشار ترمودینامیکی،

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (۴.۵)$$

می‌توان گذار فاز از نوع سیاه‌چاله‌های کوچک-بزرگ و نیز منحنی همزیستی آن‌ها را بررسی نمود. با قرار دادن رابطه $f(r_h) = 0$ در افق رویداد بیرونی می‌توان جرم سیاه‌چاله را بصورت زیر به دست آورد.

$$M = \frac{\pi}{\Lambda} \left(4P\pi r_h^4 + 3r_h^2 + 6\alpha \right) \quad (۵.۵)$$

لازم به ذکر است که جرم این سیاه‌چاله نقش پتانسیل ترمودینامیکی $H \equiv M$ را دارد [۶۸]. همچنین آنتروپی این سیاه‌چاله با رابطه زیر داده می‌شود.

$$S = \frac{\pi^2 r_h}{2} \left(r_h^2 + 12\alpha \right) \quad (۶.۵)$$

طبق قانون اول ترمودینامیک برای آنتالپی بصورت $dM = dH = TdS + VdP + Ad\alpha$ کمیت‌های ترمودینامیکی بصورت زیر به دست می‌آیند.

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{\alpha, P} = \frac{8\pi P r_h^3 + 3r_h}{6\pi r_h^2 + 24\pi\alpha}, \quad (۷.۵)$$

$$A = \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right)_{S, P} = -\frac{\pi}{\Lambda} \frac{32\pi P r_h^4 + 9r_h^2 - 12\alpha}{r_h^2 + 4\alpha}, \quad (۸.۵)$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{\alpha, S} = \frac{\pi^2 r_h^4}{2} \quad (۹.۵)$$

که A کمیت مزدوج با ضریب α و پارامتر V حجم ترمودینامیکی سیاه‌چاله هستند. با استفاده از رابطه ۷.۵ معادله حالت با رابطه زیر داده می‌شود.

$$P = \frac{T}{v} - \frac{2}{3\pi v^2} + \frac{64T\alpha}{9v^3}. \quad (10.5)$$

که در آن $v = (4/3)r_h$ حجم ویژه تعریف شده است. همان‌طور که از این رابطه پیداست، این معادله حالت شبیه به معادله حالت سیال واندروالس است. بنابراین وجود یک گذار فاز سیاه‌چاله کوچک-بزرگ انتظار می‌رود که نمودارهای مربوط به این گذار فاز در مرجع [۶۷] رسم شده است. با حل معادلات، $(\partial_v P)_T = (\partial_{v,v} P)_T = 0$ در نقطه بحرانی مقدار کمیت‌های ترمودینامیک بصورت زیر به دست می‌آید.

$$P_c = \frac{1}{96\pi\alpha}, \quad T_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{12\alpha}}, \quad V_c = 72\pi^2\alpha^2, \quad v_c = \sqrt{\frac{64\alpha}{3}} \quad (11.5)$$

اکنون با تعریف کمیت‌های کاهش یافته با

$$\hat{P} = \frac{P}{P_c}, \quad \hat{T} = \frac{T}{T_c}, \quad \hat{v} = \frac{v}{v_c} \quad (12.5)$$

معادله حالت بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\hat{P} = \frac{3\hat{T}}{\hat{v}} - \frac{3}{\hat{v}^2} + \frac{\hat{T}}{\hat{v}^3} \quad (13.5)$$

همان‌گونه که پیداست معادله حالت کاهش یافته (۱۳.۵)، مستقل از پارامتر α است. همچنین از طریق ارتباط میان حجم ترمودینامیکی V و حجم ویژه v بصورت

$$V = \frac{84\pi^2 v^4}{512} \quad (14.5)$$

معادله حالت را می‌توان برحسب حجم کاهش یافته $\hat{V} = \frac{V}{V_c} = \hat{v}^4$ با رابطه زیر بیان نمود.

$$\hat{P} = \frac{\hat{T}}{\hat{V}^{3/4}} - \frac{3}{\sqrt{\hat{V}}} + \frac{3\hat{T}}{\hat{V}^{1/4}} \quad (15.5)$$

با استفاده از معادله حالت بالا، در فضای پارامتری کاهش یافته، منحنی همزیستی در نمودار $T - P$ با رابطه زیر مشخص شده است [۶۷].

$$\hat{T} = \sqrt{\frac{\hat{P}(3 - \hat{P})}{2}} \quad (16.5)$$

اکنون با بهره‌مندی از رابطه بالا، حجم‌های ترمودینامیکی کاهش‌یافته $\hat{V}_l$ و $\hat{V}_s$ به‌ترتیب برای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در نمودار $P - V$ با رابطه‌های زیر داده می‌شوند [۶۷].

$$\begin{aligned}\hat{V}_s &= \left(\frac{2\hat{T} - \sqrt{6}\sqrt{2\hat{T}^2 - 3 + \sqrt{9 - 8\hat{T}^2}}}{3 - \sqrt{9 - 8\hat{T}^2}} \right)^4 \\ \hat{V}_l &= \left(\frac{2\hat{T} + \sqrt{6}\sqrt{2\hat{T}^2 - 3 + \sqrt{9 - 8\hat{T}^2}}}{3 - \sqrt{9 - 8\hat{T}^2}} \right)^4\end{aligned}\quad (۱۷.۵)$$

در ابتدا رفتار بحرانی κ_T را با حد $t \rightarrow 0^\pm$ در نظر می‌گیریم. با مشتق گرفتن از فشار (۱۵.۵) بر حسب حجم کل خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{T}} = -\frac{3T}{4\hat{V}^{5/4}} - \frac{3T}{4\hat{V}^{7/4}} + \frac{3}{2\hat{V}^{3/2}} \quad (۱۸.۵)$$

با بازنویسی معادله بالا بر حسب پارامترهای بسط یا همان $t = \hat{T} - 1$ و $w' = \hat{V} - 1$ و اعمال بسط تیلور روی پایین‌ترین مرتبه‌ها به بسط زیر خواهیم رسید.

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{T}} \approx -\frac{3t}{2} + \frac{9tw'}{4} - \frac{183tw'^2}{64} - \frac{3w'^2}{64} \quad t > 0, \quad (۱۹.۵)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{T}} \approx \frac{3t}{2} - \frac{9tw'}{4} + \frac{183tw'^2}{64} - \frac{3w'^2}{64} \quad t < 0. \quad (۲۰.۵)$$

در طول منحنی هم‌حجم، با در نظر گرفتن $w' = 0$ و با استفاده از معادلات (۱۱.۴) و (۱۹.۵) به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\kappa_T P_c \approx \frac{2}{3t} \quad t > 0. \quad (۲۱.۵)$$

طبق تعریف رابطه (۱۵.۴) به $\gamma = 1$ می‌رسیم. با توجه به بسط پایین‌ترین مرتبه بر حسب t ، از رابطه (۱۷.۵) نتیجه می‌شود،

$$w'^2_{s,l} \approx \frac{3t}{128}. \quad (۲۲.۵)$$

با جایگزین کردن این مقادیر در رابطه (۲۰.۵) و با استفاده از رابطه (۱۱.۴) در نهایت به این عبارت خواهیم رسید.

$$\kappa_T P_c \approx \frac{1}{3t} \quad t < 0. \quad (۲۳.۵)$$

اکنون بنابر رابطه (۱۵.۴) نمای بحرانی $\gamma' = 1$ به‌دست می‌آید. از طرف دیگر با نوشتن رابطه (۵.۴) و (۶.۴) بر حسب پارامترهای کاهش‌یافته به رابطه زیر می‌رسیم.

$$R_N = RC_V = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\hat{T} \frac{\partial_{\hat{V}, \hat{T}} \hat{P}}{\partial_{\hat{V}} \hat{P}} \right)^2 \right], \quad (۲۴.۵)$$

$$K_N = K\sqrt{C_V} = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} \left[1 - \frac{\hat{T}\partial_{\hat{V},\hat{T}}\hat{P}}{\partial_{\hat{V}}\hat{P}} \right] \quad (25.5)$$

اکنون با استفاده از معادله حالت ۱۵.۵ خمش ذاتی بهنجار شده R_N و خمش عرضی K_N را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$R_N = - \frac{2\sqrt[4]{\hat{V}} (\hat{T}\sqrt{\hat{V}} + \hat{T} - \sqrt[4]{\hat{V}})}{(\hat{T}\sqrt{\hat{V}} + \hat{T} - 2\sqrt[4]{\hat{V}})^2}. \quad (26.5)$$

$$K_N = \frac{\sqrt[4]{\hat{V}}}{2\sqrt[4]{\hat{V}} - \hat{T}(\sqrt{\hat{V}} + 1)}. \quad (27.5)$$

با نوشتن این عبارات بر حسب پارامترهای بسط t و w' و سپس قرار دادن $w' = 0$ برای $t > 0$ و نیز $w' = w'_s = -w'_l = \sqrt{3t/128}$ برای $t < 0$ به رابطه بسط زیر می‌رسیم.

$$R_N t^\gamma \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} & t > 0 \\ -\frac{1}{\lambda} & t < 0, \end{cases} \quad and \quad K_N t \approx \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} & t > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} & t < 0. \end{cases} \quad (28.5)$$

جالب توجه است که نتایج بالا با نتایج حاصل برای سیال VdW و سیاه‌چاله های باردار AdS تطبیق دارند. درعین حال این مقادیر مستقل از ثابت جفت‌شدگی گاوس بونت (α) است که این خود دلیلی بر جهان‌شمول بودن این مقادیر است.

فصل ۶

نتایج

در این پایان‌نامه، با استفاده از فرمالیسم جدید هندسه ترمودینامیکی (NTG) پس از تعریف خمش‌های ذاتی و عرضی، رفتارهای بحرانی خمش‌های ذاتی بهنجار شده R_N و عرضی بهنجار شده K_N را برای سیال VdW، سیاه‌چاله‌های باردار و سیاه‌چاله گاوس بونت خنثی مورد بررسی قرار داده‌ایم. برای سیال VdW و سیاه‌چاله‌های باردار از طریق معادله حالت و نمودار $P - V$ مشاهده نمودیم که در امتداد دو مسیر هم‌حجم ($t > 0$) و نیز منحنی همزیستی دوفازی ($t < 0$) برای رسیدن به نقطه بحرانی، R_N دارای توان بحرانی ۲ و K_N دارای توان بحرانی ۱ هستند. همچنین دامنه‌های بحرانی $R_N t^2$ و $K_N t$ مقادیری جهان‌شمول هستند. به‌طوریکه هم محاسبات عددی و هم محاسبات تحلیلی نشان داده‌اند که $R_N t^2 = -1/8$ را برای $t \rightarrow 0^-$ و $-1/2$ را برای $t \rightarrow 0^+$ ، و مقادیر $K_N t = -1/4$ برای $t \rightarrow 0^-$ و $-1/2$ را برای $t \rightarrow 0^+$ دست می‌آید. حتی در مورد سیاه‌چاله‌های باردار d بعدی می‌توان دید که این دامنه‌های بحرانی مستقل از بعد فضا زمان d هستند که این خود دلیلی بر جهان‌شمول بودن این مقادیر است. در ادامه بطور تحلیلی، مقادیر دامنه‌های بحرانی برای خمش‌های ترمودینامیک حاصل از هندسه NTG را برای سیاه‌چاله خنثی پنج-بعدی GB-AdS محاسبه نمودیم. نتایج ما نشان می‌دهد.

$$R_N t^2 \approx \begin{cases} \frac{1}{4} & t > 0 \\ -\frac{1}{8} & t < 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad K_N t \approx \begin{cases} -\frac{1}{4} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} & t < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

همانطور که پیداست دامنه‌های بحرانی مستقل از ثابت جفت‌شدگی گاوس بونت است که

نشان‌دهنده جهان‌شمول بودن آنهاست. تا اینجا مشاهده نموده‌ایم که مقادیر دامنه‌های بحرانی برای سیستم‌هایی سیال و اندوالس، سیاه‌چاله‌های باردار d بعدی و نیز سیاه‌چاله خنثی گاوس بونت مستقل از پارامترهای فیزیکی سیستم هستند. در ادامه می‌توان جهان‌شمول بودن این مقادیر را برای سیاه‌چاله‌های دیگر نیز بررسی نمود.

مراجع

- [1] S. A. H. Mansoori, M. Rafiee and S. W. Wei, (2020), "Universal criticality of thermodynamic curvatures for charged AdS black holes," **Phys. Rev. D**, 102, 124066.
- [2] S. Hawking and D. N. Page, (1983) "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space", **Commun. Math. Phys.** 87 577.
- [3] C. V. Johnson, (2014), "Quantum Gravity and Nuts and Bolts of Thermodynamic volume", **Class. Quant. Grav.** 31, 23, 235003.
- [4] B. P. Dolan, "The cosmological constant and the black hole equation of state", (2011) **Class. Quant. Grav.** 28, 125020.
- [5] B. P. Dolan, (2011), "Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics", **Class. Quant. Grav.** 28, 235017.
- [6] B. P. Dolan, (2014), "The compressibility of rotating black holes in D-dimensions", **Class. Quant. Grav.** 31, 035022.
- [7] A. Larranaga and A. Cardenas, (2012), "Geometric Thermodynamics of Schwarzschild-AdS black hole with a Cosmological Constant as State Variable", **J. Korean Phys. Soc.** 60, 987.
- [8] A. Smailagic and E. Spallucci, (2013), "Thermodynamical phases of a regular AdS black hole", **Int. J. Mod. Phys. D**, 22, 1350010,
- [9] E. Spallucci and A. Smailagic, (2013), "Maxwell's equal area law for charged Anti-deSitter black holes", **Phys. Lett. B** 723, 436.
- [10] S. Chen, X. Liu, C. Liu, and J. Jing, (2013), " $P - V$ criticality of AdS black hole in $f(R)$ gravity", **Chin. Phys. Lett.** 30, 060401,

- [11] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, and M. Sedra, (2014), " Critical Behaviors of 3D Black Holes with a Scalar Hair", **Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.** 12, 02, 1550017
- [12] R.-G. Cai, L.-M. Cao, L. Li, and R.-Q. Yang, (2013), "P-V criticality in the extended phase space of Gauss-Bonnet black holes in AdS space", **J. High Energy Phys.**, 1309, 005.
- [13] A. Belhaj, M. Chabab, H. E. Moumni, L. Medari, and M. Sedra, (2013), "The Thermodynamical Behaviors of Kerr-Newman AdS Black Holes" , **Chin. Phys. Lett.** , 30 , 090402.
- [14] J.-X. Mo, X.-X. Zeng, G.-Q. Li, X. Jiang, and W.-B. Liu, (2013), "A unified phase transition picture of the charged topological black hole in Horava-Lifshitz gravity", **J. High Energy Phys.**, 1310, 056.
- [15] M.-S. Ma, H.-H. Zhao, L.-C. Zhang, and R. Zhao,(2014), "Existence condition and phase transition of Reissner-Nordström-de Sitter black hole", **Int. J. Mod. Phys. A** 29, 1450050.
- [16] S. Ulhoa and E. Spaniol, (2016), "On Gravitational Entropy of de Sitter Universe", **Journal of Gravity**, 2016, 4504817.
- [17] Kubiznak D. and Mann R. B. (2012), " P-V criticality of charged AdS black holes" **J. High Energy Phys**, 1207, 033.
- [18] Altamirano N. and Kubiznak D. and Mann R. B. (2013), " Reentrant phase transitions in rotating ads black holes" **Phys. Rev. D**, 88, 101502.
- [19] Altamirano N. and Kubiznak D. and Mann R. B. and Sherkatghanad Z. (2014), " Kerr-AdS analogue of triple point and solid/liquid/gas phase transition" **Class. Quant. Grav.**, 31, 042001.
- [20] N. Altamirano, D. Kubiznak , R. B. Mann and Z. Sherkatghanad, (2014), " Thermodynamics of rotating black holes and black rings: phase transitions and thermodynamic volume" **Galaxies**, 2, 89.
- [21] B. P. Dolan , A. Kostouki , D. Kubiznak and R. B. Mann (2014), " Isolated critical point from Lovelock gravity" **Class. Quant. Grav.**, 31, 242001.

- [22] S. W. Wei and Y. X. Liu (2013), " Critical phenomena and thermodynamic geometry of charged Gauss-Bonnet AdS black holes" **Phys. Rev. D**, 87, 044014.
- [23] S. W. Wei and Y. X. Liu (2014), " Triple points and phase diagrams in the extended phase space of charged Gauss-Bonnet black holes in AdS space" **Phys. Rev. D**, 90, pp 044057.
- [24] A. M. Frassino, D. Kubiznak , R. B. Mann and F. Simovic , (2014), " Multiple reentrant phase transitions and triple points in Lovelock thermodynamics" **J. High Energy Phys**, 1409, pp 080.
- [25] Cai R. G. and Cao L. M. and Li L. and and Yang R. Q. (2013), " P-V criticality in the extended phase space of Gauss-Bonnet black holes in AdS space" **J. High Energy Phys**, 1309, pp 005.
- [26] H. Xu, W. Xu and L. Zhao (2014), " Extended phase space thermodynamics for third order Lovelock black holes in diverse dimensions" **Eur. Phys. J. C**, 74, pp 3074.
- [27] R. A. Hennigar, W. G. Brenna and R. B. Mann (2015), " P-V criticality in quasi-topological gravity" **J. High Energy Phys**, 1507, pp 077.
- [28] R. A. Hennigar and R. B. Mann (2015), " Reentrant phase transitions and van der Waals behaviour for hairy black holes" **Entropy**, 17, pp 8056.
- [29] R. A. Hennigar , R. B. Mann and E. Tjoa (2017), " Superfluid black holes" **Phys. Rev. Lett**, 118, pp 021301.
- [30] D. C. Zou, R. Yue and M. Zhang (2017), " Reentrant phase transitions of higher-dimensional AdS black holes in dRGT massive gravity" **Eur. Phys. J. C**, 77, pp 256.
- [31] S. W. Wei and Y. X. Liu (2020), " New insights into thermodynamics and microstructure of AdS black holes" **Sci. Bull**, 65, pp 259.
- [32] Z. Sherkatghanad, B. Mirza, Z. Mirzaiyan and S. A. H. Mansoori (2016), " Critical behaviors and phase transitions of black holes in higher order gravities and extended phase spaces" **Int. J. Mod. Phys. D**, 26, 3, pp 1750017.
- [33] G. Ruppeiner (1979), " Thermodynamics: A Riemannian geometric model" **Phys. Rev. A**, 20, pp 1608.

-
- [34] F. Weinhold (1975), " Metric geometry of equilibrium thermodynamics" **J. Chem. Phys.**, 63, pp 2479.
 - [35] G. Ruppeiner (1995), " Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory" **Rev. Mod. Phys**, 67, pp 605.
 - [36] S. W. Wei and Y. X. Liu (2015), " Insight into the microscopic structure of an AdS black hole from thermodynamical phase transition" **Phys. Rev. Lett**, 115, pp 111302.
 - [37] J. Aman, I. Bengtsson and N. Pidokrajt (2003), " Geometry of black hole thermodynamics" **Gen. Rel. Grav**, 35, pp 1733.
 - [38] T. Sarkar, G. Sengupta and B. N. Tiwari, (2006), " On the thermodynamic geometry of BTZ black holes" **J. High Energy Phys**, 0611, pp 015.
 - [39] S. A. H. Mansoori and B. Mirza (2014), " Correspondence of phase transition points and singularities of thermodynamic geometry of black holes" **Eur. Phys. J. C**, 74, 99, pp 2681
 - [40] S. A. H. Mansoori, B. Mirza and M. Fazel (2015), " Hessian matrix, specific heats, Nambu brackets, and thermodynamic geometry" **J. High Energy Phys**, 1504, pp 115
 - [41] S. A. H. Mansoori and B. Mirza, (2019), " Geometrothermodynamics as a singular conformal thermodynamic geometry" **Phys. Lett. B**, 799, pp 135040
 - [42] H. Reissner, (1916), "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie", **Ann. Phys** 50 , 106 (1916).
 - [43] G. Nordström , (1918), "On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory", **Proc. Kon. Ned. Akad. Wet**, 20, 1238 .
 - [44] N. V. Johansen and F. Ravndal, (2006), "On the discovery of Birkhoff's theorem", **Gen. Rel. Grav**, 38 537.
 - [45] J. R. Oppenheimer, H. Snyder, (1939), "On Continued gravitational contraction", **Phys. Rev**, 56, 455 .
 - [46] J. D. Bekenstein , (1973), "Extraction of energy and charge from a black hole", **Phys. Rev. D**, 7, 949.

- [47] J. D. Bekenstein , (1974), "Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics", **Phys. Rev.D** 9, 3292.
- [48] G. Ruppeiner, (2010), "Thermodynamic curvature measures interactions", **American Journal of Physics**, 78, 1170.
- [49] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Statistical Physics, Pergamon Press (Hungary 1980).
- [50] G. Ruppeiner, (1979), "Thermodynamics: a Riemannian geometric model", **Phys. Rev. A**, 20, 1608.
- [51] F. Weinhold, (1975), "Metric geometry of equilibrium thermodynamics", **J. Chem. Phys**, 63, 2479.
- [52] Aman, J., Bengtsson, I., Pidokrajt, N. (2003), "Geometry of black hole thermodynamics", **Gen. Rel. Grav.** 35, 1733.
- [53] S. A. H Mansoori and B. Mirza (2014), " Correspondence of phase transition points and singularities of thermodynamic geometry of black holes" **Eur. Phys. J. C**, 74, pp 2681.
- [54] S. A. H. Mansoori, B. Mirza and M. Fazel (2015), " Hessian matrix, specific heats, Nambu brackets, and thermodynamic geometry" **J. High Energy Phys**, 04, pp 115.
- [55] S. A. H. Mansoori , B. Mirza and E. Shariati (2016), " Extrinsic and intrinsic curvatures in thermodynamic geometry" **Phys. Lett. B**, 759, pp 298.
- [56] E. Poisson, A Relativist's Toolkit, 2004 Cambridge University Press, The United Kingdom.
- [57] J. D. Bekenstein (1973), " Black holes and entropy" **Phys. Rev. D**, 7, pp 2333.
- [58] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking (1973), " The four laws of black hole mechanics" **Comm.Math. Phys.**, 31, pp 161.
- [59] S. W. Wei , Y. X. Liu and R. B. Mann (2019), " Repulsive Interactions and Universal Properties of Charged Anti-de Sitter Black Hole Microstructures" **Phys. Rev. Lett**, 123, 7, pp 071103.

- [60] S. W. Wei, Y. X. Liu and R. B. Mann (2019), " Ruppeiner Geometry, Phase Transitions, and the Microstructure of Charged AdS Black Holes" **Phys. Rev. D**, 100, 12, pp 124033.
- [61] S. A. H. Mansoori . and B. Mirza and E. Sharifian (2016), " Extrinsic and intrinsic curvatures in thermodynamic geometry" **Phys. Lett. B**, 759, pp 298-305
- [62] D. C. Johnston, (2014) "Thermodynamic properties of the van der Waals fluid," Morgan Claypool, San Rafael, CA, (2014), [arXiv:1402.1205 [cond-mat.soft]].
- [63] P. Kumar P. and T. Sarkar, (2014), " Geometric Critical Exponents in Classical and Quantum Phase Transitions" **Phys. Rev. E**, 90, 4, pp 042145.
- [64] R. Maity, S. Mahapatra and T. Sarkar, (2015), " Information Geometry and the Renormalization Group" **Phys. Rev. E**, 92, 5, pp 052101.
- [65] S. W. Wei and Y. X. Liu, (2015), " Clapeyron equations and fitting formula of the coexistence curve in the extended phase space of charged AdS black holes" **Phys. Rev. D**, 91, 4, pp 044018.
- [66] E. Spallucci and A. Smailagic (2013), " Maxwell's equal area law for charged Anti-deSitter black holes" **Phys. Lett. B**, 723, pp 436-441.
- [67] S. W. Wei and Y. X. Liu, (2020), "Intriguing microstructures of five-dimensional neutral Gauss-Bonnet AdS black hole", **Phys.Lett. B**, 803, 135287.
- [68] Cai R. G. and Cao L. M. and Li L. and Yang R. Q. (2013), " P-V criticality in the extended phase space of Gauss-Bonnet black holes in AdS space" **J. High Energy Phys.**, 1309, pp 005

Aabstract

In the thesis, we introduce different black holes and study their thermodynamics of processing and also introduce the laws of thermodynamics for black holes. In the following, we will introduce concepts such as Ruppenier's thermodynamic geometry, and apply this approach to the use of phase study of black holes. Since the one-to-one matching between singularities of heat capacity and singularities of geometric scalar in Ruppenier approach, we also introduce the new approach in this field. In this new geometric approach, called the new formalism of thermodynamic (NTG) geometry, the correct relationship between the phase transition for heat capacity and the singularities in scalar curvatures is established. Therefore, we have used this new approach in the remainder of this thesis.

Then, critical exponents and critical amplitude of thermodynamic intrinsic and extrinsic curvatures of the large-small black hole phase for the charged AdS black hole were studied. At the critical point, we find that the normalized intrinsic curvature R_N and the extrinsic curvature K_N represent the critical values 2 and 1, respectively. Accordingly, the general domains $R_N t^2$ and $K_N t$ with the temperature parameter $t = T/T_c - 1$ where T_c is the critical temperature value or critical temperature. Near the critical point, we find that the critical domain $R_N t^2$ and $K_N t$ when $t \rightarrow 0^+$, will be equal to $-1/2$, while in the range $t \rightarrow 0^-$. These two parameters are $R_N t^2 \approx -1/8$ and $K_N t \approx -1/4$. These results apply not only to four-dimensional charged AdS black holes, but also to larger dimensions.

Then, at the end, we study the thermodynamic curvatures associated with NTG geometry for the five-dimensional Gauss-bonnet neutral black hole in the AdS space. Our results show that the intrinsic and extrinsic curvature gets the same universal amplitudes obtained for charged AdS black holes so that they are independent of the Gauss-Bonnet coupling values.

Keywords: Black hole Thermodynamics, Thermodynamic Geometry, Ads Black hole, Intrinsic curvature, Extrinsic curvature



Faculty Of Physics

MSc Thesis in Particle Physics

Critical behavior of intrinsic and extrinsic curvatures for charged Ads black holes

By: Milad Pirebab

Supervisors:

Dr. Morteza Rafiee
Dr. Seyed Ali Hosseini Mansoori

October 2021