

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



پردیس بین المللی خوارزمی

رساله دکتری فیزیک هسته‌ای

مدل‌های ساختاری برای محاسبه طیف انرژی هسته‌های

خاص با N یا Z جادویی

نگارنده : جمشید خسروی بیژانم

استاد راهنما :

دکتر محمدرضا شجاعی

استاد مشاور:

دکتر سید ایمان حسینی

اسفند ماه ۱۳۹۹

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:

تقدیم به استاد ارجمندم

که سپیدی را بر تخته سیاه زندگی نگاشت

تقدیم به پدرم

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

تقدیم به همسرم

اسطوره زندگی، پناه خستگی و امید بودم.

تقدیم به فرزندانم

ملیکا جان، کامران جان و کوروش عزیز، جوانه های آرزویم

تقدیم به برادرانم

همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگی

تقدیم به خواهرم

که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است.

تقدیم به همکارانم

که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند

سپاس

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

یارب دل ما را تو به رحمت جان ده درد همه را به صابری درمان ده

این بنده چه داند که چه می باید جست داننده تویی هر آنچه دانی آن ده

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به

همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه زندگیست.

سپاس خدای را که هر چه دارم از اوست به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و

کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم

آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛

اکنون که مرا من آفریدی، سپاس می گویم، چون توجهم را بسوی خود خواندی.

سپاس می گویم ترا برای حس درک تو، برای اشتیاق، برای بیش، خرد، دانش، هوشمندی، شناخت و

خوشبختی. شکر می کنم برای دردها و ناراحتی هائی که مرا وادار کردند تا به تو روی آورم و بیشتر

احساس نیاز و نزدیکی کنم. شکر می کنم برای کمک هائی که کردی تا در آزمایشهای سربلند باشم.

شکر می کنم برای آخرین طپش قلبم تا مرا بسوی خود خوانی. سپاسگزارم ترا برای عمر جاودانه ای

که بمن خواهی داد. و سپاس برای تمام نعمت هائی که در فهم نمی گنجند.

تقدیر و تشکر

به مصداق «من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق» بسی شایسته است از استاد راهنمای گرانقدر، فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمدرضا شجاعی؛ که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر نمایم. چرا که بدون راهنمایی‌های ایشان تأمین این پایان‌نامه بسیار مشکل مینمود. لازم می‌دانم از استاد مشاور پایان‌نامه ام آقای دکتر سید ایمان حسینی کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از استادان فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر فرهاد ذوالفقارپوردانشیار فیزیک هسته‌ای دانشگاه محقق اردبیلی؛ جناب آقای دکتر مجتبی هاشم زاده استادیار فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود و سرکار خانم دکتر نسرین صالحی دانشیار هسته‌ای دانشگاه شاهرود که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند و همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر سید ایمان آقایان و دانشجویان همدوره‌ای خودم سرکار خانم دکتر بینش، خانم دکتر اصلان زاده، خانم دکتر ملکی نژاد و جناب دکتر دارویی کمال تشکر و قدردانی دارم.

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد
به نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند صحیفه‌های سخن از تو علم پرور باد
همچنین از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه‌جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان‌نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛ سپاسگزاری می‌نمایم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم
تشکر ویژه دارم از همسر مهربانم: که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود. از سرمایه‌های زندگی‌ام: فرزندان عزیزم کامران جان و کوروش عزیزم و همچنین از خواهر و برادرانم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بودند تشکر می‌نمایم.

با سپاس بی‌دریغ خدمت دوست گرانمایه‌ام آقای هادی ذیحقی که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند.

و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

جمشید خسروی بیژانم

اسفند ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **جمشید خسروی بیژانم** دانشجوی دوره دکتری رشته **فیزیک هسته‌ای** دانشکده پردیس خوارزمی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله «**مدل های ساختاری برای محاسبه طیف انرژی هسته های خاص با N یا Z جادویی**» تحت راهنمایی دکتر **محمدرضا شجاعی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «**دانشگاه صنعتی شاهرود**» و یا «**Shahrood University of Technology**» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که با حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود. استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

مدل‌های ساختاری کاربرد وسیعی در بررسی و شناخت ایزوتوپ‌ها دارند. دو مدل لایه‌ای و خوشه‌ای از جمله مدل‌های کارآمد و پرترفدار در بررسی ویژگی‌های استاتیکی هسته‌ها از جمله تعیین انرژی حالت پایه و شعاع باری آنها می‌باشند. در این رساله با استفاده از مدل خوشه‌ای ایزوتوپ‌های ^{17}O ، ^{18}O ، ^{19}O را با در نظر گرفتن یک پوسته بسته ^{16}O مورد مطالعه قرار داده ایم. ^{17}O را با یک نوترون اضافی و پوسته ^{16}O در نظر گرفته ایم به همین ترتیب ^{18}O و ^{19}O را نیز با استفاده از مختصات ژاکوبی بررسی و انرژی بستگی این ایزوتوپ‌ها را حساب نموده ایم. سپس با استفاده از خوشه‌های آلفا ایزوتوپ‌های ^6Li و ^7Li را در یک سیستم دو ذره‌ای بررسی و انرژی بستگی این ایزوتوپ‌ها را محاسبه نموده ایم. در مدل خوشه‌ای ^6Li را به صورت یک ذره ی آلفا (شامل دو پروتون و دو نوترون است) و دوترون ($\alpha + ^2\text{H}$) و ^7Li را به صورت یک ذره ی آلفا و تریتون ($\alpha + ^3\text{H}$) به عنوان یک سیستم دو ذره‌ای در نظر گرفته ایم. بنابراین با در نظر گرفتن مدل لایه‌ای و خوشه‌ای به حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل شبه هلمن با استفاده از روش تحلیلی NU پرداخته و ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و توابع موج حالت پایه را برای ایزوتوپ‌های فوق محاسبه نمودیم.

کلمات کلیدی: مدل‌های خوشه‌ای؛ مدل لایه‌ای؛ خوشه آلفا؛ دوترون؛ تریتون؛ پتانسیل هلمن

فهرست مقالات مستخرج از رساله

۱. خسروی بیژانم، جمشید؛ شجاعی، محمد رضا "محاسبه انرژی سیستم‌های دو و چهار ذره‌ای با استفاده از مدل خوشه‌ای "هشتمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان‌ها، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۶.
۲. خسروی بیژانم، جمشید؛ ستاری نیکخو، نگین؛ شجاعی، محمد رضا "فرم فاکتور پائولی و دیراک با استفاده از مدل LF کوارک-پادکوارک برای نوترون "هفتمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان‌ها، دامغان، ۱۳۹۵.
۳. خسروی بیژانم، جمشید؛ شجاعی، محمد رضا "مدل‌های ساختاری برای محاسبه طیف انرژی هسته‌های خاص با N یا Z جادویی "کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، قم، ۱۳۹۶.

[۴] Khosravi Bijaeim, Jamshid; Malekinezhad, Nasrin, Mohammadreza.

Shojaei, "Calculation of the Electric Quadrupole Moment of ${}^6\text{Li}$ and ${}^7\text{Li}$ in Shell Model and Cluster Model", Jordan Journal of Physics, Volume 14, Number 4, 2021. pp. 253-259

[۵] Khosravi Bijaeim, Jamshid; Shojaei, Mohammad Reza And Mousavi, Mohsen ,

Investigation of Oxygen Isotopes in the D-Dimension Schrodinger equation by the PNU method", U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 81, Iss. 1, 2019

فهرست مطالب

فصل اول.....	۱
مدل‌های ساختاری هسته‌ها.....	۱
۱-۱ خواص هسته.....	۲
اسپین هسته.....	۲
۲-۱-۱ ایزواسپین هسته.....	۳
۳-۱-۱ جرم و انرژی بستگی هسته‌ها در حالت‌های پایه.....	۴
۲-۱ پدیده‌شناسی هسته اتمی.....	۸
۳-۱ معرفی مدل‌های هسته‌ای.....	۱۳
۱-۳-۱ مدل قطره مایع.....	۱۴
۲-۳-۱ مدل پوسته‌ای.....	۱۷
۴-۳-۱ مدل ذره مستقل.....	۱۸
۵-۳-۱ مدل خوشه‌ای.....	۱۹
فصل دوم.....	۲۳
برهم کنش‌های هسته‌ای.....	۲۳
۱-۲ نیروی هسته‌ای.....	۲۴
۲-۲ خواص برهم کنش‌های هسته‌ای.....	۲۵
۳-۲ نیروهای بنیادی.....	۲۸
۱-۳-۲ نیروی هسته ای قوی.....	۲۹
۲-۳-۲ نیروی الکترومغناطیسی.....	۲۹
۳-۳-۲ برهمکنش ضعیف هسته‌ای.....	۳۰
۴-۳-۲ نیروی جاذبه یا گرانش.....	۳۰
۴-۲ مدل نیروی تبادل.....	۳۰
۵-۲ نیروهای چند جسمی.....	۳۴
۶-۲ پتانسیل هسته‌ای.....	۳۶
۱-۶-۲ پتانسیل وود-ساکسون.....	۳۶
۲-۶-۲ پتانسیل نوسانگر هماهنگ.....	۳۷
۷-۲ برهم کنش اسپین-مدار.....	۳۹
فصل سوم.....	۴۱
طیف انرژی هسته‌های خاص.....	۴۱

۴۲	۱-۳ مقدمه.....
۴۲	۲-۳ معرفی پتانسیل‌های پیشنهادی بین ذرات و خوشه‌ها.....
۴۶	۳-۳ بررسی روش NU.....
۴۹	۴-۳ معادله کلاین گوردن ($D + 1$) بعدی.....
۵۱	۵-۳ ویژه مقادیر انرژی و توابع موج.....
۵۷	۶-۳ محاسبه انرژی ایزوتوپ ^{12}C و 160
۵۹	۷-۳ حل معادله شرودینگر با پتانسیل شبه هلمن:.....
۶۱	۸-۳ محاسبه انرژی حالت پایه در مدل لایه ای و مدل خوشه ای.....
۶۴	۸-۳-۱ معادله شرودینگر در مدل خوشه ای.....
۶۵	۸-۳-۲ روش محاسبه و نتایج.....
۶۷	۸-۳-۳ معادله شرودینگر در مدل لایه ای.....
۷۰	۹-۳ بحث و نتیجه‌گیری.....
۷۱	مراجع.....

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱: تصویری شماتیک از هسته که از نوترون‌ها و پروتون‌ها ساخته شده است. ۸.....
- شکل ۱-۲: نمایش تصویری شماتیک از یک دوترون در حالت مقید (pn). ۸.....
- شکل ۱-۳: انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون [۱] ۱۰.....
- شکل ۱-۴: نمایشی از چاه پتانسیل برای پروتون‌ها در مدل گاز فرمی. ۱۲.....
- شکل ۱-۵: چاه پتانسیل برای نوترون‌ها (سمت چپ) و برای پروتون‌ها (سمت راست) در مدل گاز فرمی. ۱۲....
- شکل ۱-۶: فراوانی، H ، برای ویژه هسته‌های زوج-زوج مختلف، به صورت تابعی از A [۳] ۱۸.....
- شکل ۱-۷: شکل‌گیری چهار خوشه آلفا در هسته ^{16}O ۲۰.....
- شکل ۱-۲: اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوکلئون در انرژی‌های متوسط [۲]. ۲۷.....
- شکل ۲-۲: ساختار اتم ۲۸.....
- شکل ۲-۳: نیروی بین کوارک‌ها ۲۹.....
- شکل (۲-۴) نیروهای چند جسمی: (a) نیروی سه جسمی (b) نیروی دو جسمی ۳۴.....
- شکل (۲-۵) نمودار فایمن نیروی سه جسمی [۱۶]. ۳۵.....
- شکل ۲-۶: ساختار پوسته‌ای حاصل از پتانسیل‌های چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ ۳۸.....
- شکل ۲-۷: پتانسیل واقع بینانه در مدل پوسته‌ای ۳۸.....
- شکل ۲-۸: نمودار پتانسیل‌های مدل لایه‌ای، نوسانگر هماهنگ، وود-ساکسون، چاه مربعی برای ^{208}Pb ۳۹.....
- شکل ۲-۹: طرح تقریبی برای ترازهای پروتون [۲۰]. ۴۰.....
- شکل ۱-۳: انرژی بستگی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب پارامتر v_0 با مقادیر مختلف v_1 برای مقدار ثابت $\alpha=0.08\text{fm}^{-1}$ ، $m=8\text{fm}^{-1}$ و $\hbar=c=1$ ، برای سیستم‌های دو جسمی (a)، سه جسمی (b) ۵۵.....
- شکل ۲-۳: تغییر انرژی بستگی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب پارامتر v_1 با مقادیر مختلف v_0 برای مقدار ثابت $\alpha=0.08\text{fm}^{-1}$ ، $m=8\text{fm}^{-1}$ و $\hbar=c=1$ ، برای سیستم‌های دو جسمی (a)، سه جسمی (b) ۵۵...
- شکل ۳-۳: مقایسه بین انرژی بستگی حالت پایه معادله شرودینگر برای سیستم‌های دو جسمی، سه جسمی و چهار جسمی بر حسب مقادیر مختلف v_1 (a) و v_0 (b) برای مقدار ثابت $\alpha=0.08\text{fm}^{-1}$ ، $m=8\text{fm}^{-1}$ و $\hbar=c=1$ ۵۶.....
- شکل ۳-۴: ساختار خوشه‌ای ایزوتوپ‌های ^{12}C و ^{16}O ۵۸.....

فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱ وابستگی اعداد کوانتومی به فرد و زوج بودن نوکلئون‌ها [۲] ۳
- جدول ۱-۲ انرژی بستگی چند هسته سبک ۷
- جدول ۱-۳ انرژی بستگی هسته‌های خوشه آلفا [۷] ۲۰
- جدول ۳-۱ ویژه مقادیر انرژی حالت پایه برای برخی ایزوتوپ‌های اکسیژن ۵۷
- جدول ۳-۲: مقایسه ترازهای انرژی محاسبه شده ایزوتوپ ^{12}C با نتایج تجربی ۵۸
- جدول ۳-۳: مقایسه ترازهای انرژی محاسبه شده ایزوتوپ ^{16}O با نتایج تجربی ۵۸
- جدول ۳-۴: انرژی حالت پایه برای ایزوتوپ‌های ^{12}C و ^{16}O ۶۱
- جدول ۳-۵: مقایسه انرژی بستگی با نتایج تجربی و کارهای دیگران ۷۰

فصل اول

مدل‌های ساختاری هسته‌ها

۱-۱ خواص هسته

فیزیک هسته‌ای شاخه‌ای از علم فیزیک است که به مطالعه ساختار و برهمکنش بین اجزای هسته می‌پردازد. هسته‌ها از نظر خواص فیزیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: دسته اول خواص استاتیکی نام دارد که وابستگی به زمان ندارد مانند: جرم، شعاع، بار الکتریکی، انرژی بستگی، اسپین، ایزواسپین، پارته، گشتاور دو قطبی مغناطیسی، گشتاور چار قطبی الکتریکی و انرژی حالت‌های برانگیخته. دسته دوم خواص دینامیکی نام دارد که وابستگی به زمان دارد مانند: احتمال واکنش و احتمال واپاشی. می‌دانیم که اگر برآیند گشتاور نیروی خارجی به سیستمی وارد نشود تکانه‌ی زاویه‌ای آن سیستم پایسته می‌ماند. از آنجایی که یک هسته‌ی منفرد چنین سیستمی است، تکانه‌ی زاویه‌ای یکی از خصوصیات ثابت آن است. عدد کوانتومی تکانه‌ی زاویه‌ای کل هسته برابر است با:

$$I = \sqrt{I(I+1)} \hbar \quad (1-1)$$

گشتاور مغناطیسی ناشی از اسپین که فقط با نظریه‌ی کوانتومی نسبیتی قابل درک است [۱].

$$\mu = \frac{e}{2M} l \hbar \quad (2-1)$$

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2M_e} \quad (3-1)$$

که در آن I عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری و μ گشتاور دو قطبی مغناطیسی می‌باشد.

اسپین هسته

اسپین از خاصیت‌های بنیادی ذرات زیراتمی است که معادل کلاسیک ندارد و یک خاصیت کوانتومی به‌شمار می‌آید. نزدیک‌ترین خاصیت کلاسیک به اسپین اندازه حرکت زاویه‌ای است. در مکانیک کوانتوم عملگر اسپین درست از همان قانون جابجایی عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای پیروی

می‌کند. همان‌طور که ذره‌های بنیادی، دارای جرم و بارالکتریکی و اسپین متفاوت هستند. اسپین یک ذره می‌تواند صفر یا هر عدد صحیح و نیم‌صحیح بزرگ‌تر از صفر باشد، یعنی $1/2$ یا 1 یا $3/2$ و الی آخر. حالت‌های هسته را معمولاً با اسپین منحصر بفرد I که یک عدد کوانتومی بوده که نشانگر تکانه کل (ذاتی و مداری) کل نوکلئون‌های هسته می‌باشد. بنابراین بردار I را می‌توان به صورت رابطه زیر نوشت:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{I}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i \quad (4-1)$$

بسته به اینکه تعداد نوکلئون‌ها زوج یا فرد باشد، عدد کوانتومی I ممکن است مقادیر درست یا نیم‌درست را به خود اختصاص دهد.

جدول (۱-۱) وابستگی اعداد کوانتومی به فرد و زوج بودن نوکلئون‌ها [۲]

I	Z	N	A
درست	زوج	زوج	زوج
نیم درست	زوج	فرد	فرد
درست	فرد	فرد	زوج
نیم درست	فرد	زوج	فرد

هسته های زوج-زوج دارای اسپین صفر و هسته های زوج-فرد و فرد-زوج دارای اسپین نیم درست می باشند.

۱-۱-۲ ایزواسپین هسته

هایزنبرگ با ایده گرفتن از نظریه اسپین، مفهوم ریاضی جدیدی به نام «ایزوتوپ اسپین» یا ایزواسپین را معرفی کرد. او پیشنهاد کرد که همان‌طور که در حضور میدان الکتریکی خطوط طیفی یکی هستند

و با وجود میدان مغناطیسی به چند خط دیگر شکافته می‌شوند، نوکلئون‌ها (پروتون و نوترون) هم در حقیقت در مقابل نیروی هسته‌ای یک ذره هستند اما، با در نظر گرفتن نیروی الکترومغناطیسی، رفتار متفاوتی نشان می‌دهند. در فیزیک هسته‌ای با ایزواسپین این تفاوت بیان می‌شود. استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزواسپین می‌شود. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزواسپینی معرفی می‌شود که به آن فضای ایزواسپینی می‌گویند، به طوری که دو حالت یک ذره با اسپین $1/2$ به صورت دو حالت متفاوت از یک ذره منفرد یعنی نوکلئون تلقی می‌شود که پروتون در حالت بالا و نوترون در حالت پایین در نظر گرفته می‌شود [۳ و ۲].

۱-۱-۳ جرم و انرژی بستگی هسته‌ها در حالت‌های پایه

به نظر می‌رسد که هسته بیشتر مانند قطره مایعی کروی شکل با چگالی کم و بیش یکنواخت باشد. چگونه می‌توان ویژگی‌های آن را فهمید؟ هسته سیستمی کوانتوم مکانیکی است. به طور کلی حالت‌های برانگیخته آن با انرژی‌هایی در حدود یک کیلو الکترون ولت یا بیشتر از حالت پایه فاصله می‌گیرند. همانند هر سیستم محدود دیگری، هسته در حالت پایه‌اش، انرژی و تکانه زاویه‌ای خوش تعریفی دارد. پروتون‌ها و نوترون‌های درون هر هسته تحت تأثیر نیروهای جاذبه هسته‌ای و دافعه الکترومغناطیسی با هم برهمکنش دارند و در فضای هسته‌ای مقید می‌مانند. این انرژی بستگی بطور مستقیم در جرم اتم تأثیرگذار است.

از آنجا که هسته سیستمی مقید است، برای جداسازی Z پروتون و N نوترون به $B(N, Z)$ انرژی لازم داریم. از رابطه انیشتین برای جرم و انرژی، انرژی بستگی $B(N, Z)$ ، از طریق رابطه زیر به جرم هسته‌ها $m_{nuc}(N, Z)$ مربوط می‌گردد:

$$m_{nuc}(N, Z) = Zm_p + Nm_n - \frac{B(Z, N)}{c^2} \quad (5-1)$$

برای تشکیل هسته باید $B(N, Z)$ مثبت باشد. خواهیم دید که انرژی‌های بستگی هسته‌ای، از مرتبه یک درصد انرژی جرم سکون $m_{nuc}c^2$ هستند.

در عمل، جرم اتم‌های یونی را مستقیماً اندازه‌گیری می‌کنند، نه جرم خود هسته‌ها. اگر $m_a(N, Z)$ جرم اتم خنثی باشد،

$$m_a(N, Z) = Zm_p + Nm_n - \frac{B(Z, N)}{c^2} - \frac{b_{electronic}}{c^2} \quad (6-1)$$

در این معادله، $b_{electronic}$ انرژی بستگی الکترون‌های اتمی است. برای بسیاری از اهداف، می‌توان از این سهم‌های الکترونی چشم‌پوشی کرد (با استفاده از مدل ساده آماری توماس-فرمی مقدار کل انرژی بستگی الکترونی برای اتمی خنثی تقریباً $20/8 Z^{5/3} \text{ eV}$ می‌شود).

جرم‌های اتمی با دقت بسیار بالایی تعیین شده‌اند و در جدول‌ها به جای جرم‌های هسته‌ای، جرم‌های اتمی چاپ شده‌اند. اندازه‌گیری‌هایی که در طیف‌سنج‌های جرمی صورت می‌گیرد، به انحراف یون‌های باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بستگی دارند. با استفاده از ابزارهایی که با نوآوری و نبوغ زیادی ساخته می‌شوند، جرم‌های نسبی با دقتی در حد یک در 10^7 به دست می‌آیند. یکای کاربردی برای این جرم‌ها، یکای جرم اتمی است که به صورت یک دوازدهم جرم اتم خنثای ^{12}C تعریف

$$1 \text{ amu} = 931.49432 \pm 0.00028 \frac{\text{MeV}}{c^2} \text{ می‌شود:}$$

اختلاف بین اتم‌های پایدار و ناپایدار پرتوزا را (که برای آنها طیف‌سنج جرمی مناسب نیست)، می‌توان با اندازه‌گیری انرژی آزاد شده طی واپاشی اتم ناپایدار و با استفاده از رابطه جرم انرژی انیشتین، تعیین کرد.

در جدول ۱-۲ انرژی بستگی تجربی برای چند هسته سبک تر نشان داده شده‌اند، این هسته‌ها با اضافه کردن پی در پی یک پروتون به همراه یک نوترون به نوترون خشت اولیه، به دست آمده‌اند. توجه کنید که همه انرژی‌های بستگی مثبت هستند این موضوع، بازتاب جاذبه بلند برد برهمکنش نوکلئون-نوکلئون است.

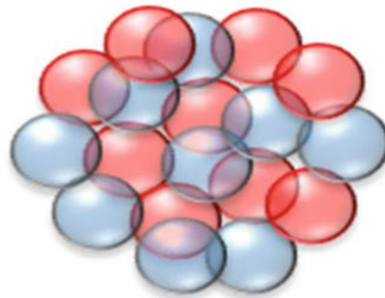
در جدول ۱-۲ انرژی بستگی میانگین به ازای هر نوکلئون، $\frac{B(N, Z)}{A}$ نیز آمده است. بنظر می‌آید که برای هسته‌های سنگین‌تر جدول، انرژی بستگی میانگین اندک اندک به حدود مقدار 8MeV نزدیک می‌شود، اما اعداد از هسته‌ای به هسته دیگر، تا حدی افت و خیز دارند. همانگونه که در جدول هم نشان داده شده است، این افت و خیز در تفاوت انرژی بستگی بین یک هسته و هسته پیش از آن آشکارا نمایان است. می‌توان این انرژی را انرژی بستگی آخرین نوکلئون اضافه شده به یک هسته در زنجیره‌ای معین، در نظر گرفت. این مقدار انرژی به ویژه برای هسته‌های زوج-زوج ${}^4_2\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$ زیاد است و برای هسته‌هایی که بلافاصله پشت سر آنها می‌آیند کوچک است. هسته‌های پس از آنها با افزودن سه نوکلئون دیگر ایجاد می‌شوند و هسته‌های زوج-زوج بعدی را تشکیل می‌دهند. در اینجا به آشکار می‌بینیم که انرژی بستگی اضافی به زوجیت نوترون-نوترون و پروتون-پروتون مربوط می‌گردد. این اثر از ویژگی جاذبه برهمکنش نوکلئون-نوکلئون ریشه می‌گیرد و به جفت‌شدگی اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مربوط می‌گردد. در جدول ۱-۲ اسپین‌ها و پارامترهای هسته‌ها برای مراجعات بعدی آمده‌اند، خواهیم دید که هسته‌های زوج-زوج اسپین صفر دارند.

جدول (۱-۲) انرژی بستگی چند هسته سبک

هسته	انرژی بستگی <i>MeV</i>	انرژی بستگی آخرین نوکلئون <i>MeV</i>	انرژی بستگی بر نوکلئون <i>MeV</i>	اسپین و پارите
$^{16}_8\text{O}$	۱۲۷/۶۲	۱۲/۱	۸/۰	0^+
$^{17}_8\text{O}$	۱۳۱/۷۶	۱/۴	۷/۸	$5/2^+$
^8_4Be	۵۶/۵۰	۱۷/۳	۷/۱	0^+
^9_4Be	۵۸/۱۶	۱/۷	۶/۵	$3/2^-$
$^{12}_6\text{C}$	۹۲/۱۶	۱۶/۰	۷/۷	0^+
$^{13}_6\text{C}$	۹۷/۱۱	۵/۰	۷/۵	$1/2^-$

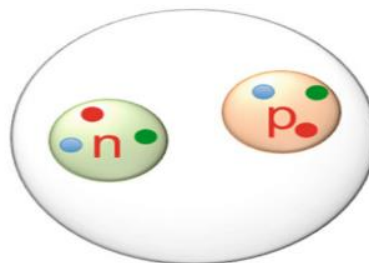
نخستین هسته زوج-زوج ^4He به دلیل جرم کم، بارالکتریکی اندک و انرژی بستگی نسبتاً بزرگ ^4He در فیزیک هسته‌ای شاخه از اهمیت بسیار برخوردار است. در واقع ^4He اهمیت بسزایی در تاریخ اولیه فیزیک هسته‌ای داشته و پیش از آن که چنانکه شاید و باید شناخته شود نام ویژه‌ای به آن داده شده بود، ذره آلفا که هنوز هم به کار می‌رود. ممکن است بخشی از انرژی‌های بستگی هسته‌های ^4He ، $^{12}_6\text{C}$ ، $^{16}_8\text{O}$ به ساختار پوسته‌ای مربوط باشند. مثلاً انرژی بستگی ^8Be به اندازه 0.1 MeV کمتر از انرژی بستگی دو ذره آلفا است و در نتیجه هسته ^8Be ناپایدار است. ولی در مقایسه با مقیاس زمان هسته‌ای به مدت بسیار طولانی‌تری، حضوری گذرا دارد اما اگر تشکیل گردد سرانجام به دو ذره آلفا تبدیل می‌گردد.

مورد جالب دیگر ${}^5\text{He}$ که ایزوتوپ ناپایداری است. اگر ${}^5\text{He}$ هم تشکیل گردد پیش از تبدیل شدن به یک نوترون و یک ذره آلفا، حضوری گذرا دارد.



شکل ۱-۱: تصویری شماتیک از هسته که از نوترون‌ها و پروتون‌ها ساخته شده است.

شکل ۱-۱ تصویری شماتیک از نوکلئون‌هاست. واضح است که این شکل فقط یک راه برای نشان دادن هسته است.



شکل ۲-۱: نمایش تصویری شماتیک از یک دوترون در حالت مقید (pn).

شکل ۲-۱ حالت مقید یک پروتون و نوترون در داخل هسته دوترون می باشد.

۲-۱ پدیده‌شناسی هسته اتمی

یکی از خواص استاتیکی مهم هسته ها ،اندازه هسته و چگالی هسته است. برخی از مسائل مربوط به حالت های پایدار را مورد بررسی قرار داده و قبل از نشان دادن واکنش های هسته ای مورد علاقه، یک مدل هسته اتمی بازبینی می کنیم، اندازه هسته ها با استفاده از آزمایش های پراکندگی اندازه گیری

می‌شود که برای بدست آوردن اطلاعات از هسته‌ها آنها را مورد بمباران قرار می‌دهیم. این ذرات می‌توانند آلفا یا الکترون شتاب داده شده تا انرژی‌های متوسط یا بالا تا چند MeV باشد. اندازه هسته از برهمکنش الکترومغناطیسی مشخص می‌شود و به صورت آزمایشی از طریق پراکندگی هسته-الکترون اندازه‌گیری می‌شود، که به چگالی بار الکتریکی حساس است. شعاع هسته‌ای R به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R = 1.2 A^{1/3} \text{ fm} \quad (7-1)$$

فرض کنید که هسته‌ها کروی شکل هستند، حجم آنها $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 7.42 A \text{ fm}^3$ و چگالی آنها 0.13 نوکلئون در هر fm^3 است. این مقدار برای $55 \leq A \leq 209$ کاملاً ثابت است. به منظور بررسی چگالی هسته‌ای، همانطور که توسط نیروی هسته‌ای دیده می‌شود، ذرات دیگر می‌توانند به عنوان "پرتابه" استفاده شوند: π^0 ، $\pi^\pm$ یا نوترون. بسته به آزمایش و کمیت مورد اندازه‌گیری، می‌توان از مدل‌های مختلف هسته‌ای استفاده کرد، در اینجا باید به صراحت اشاره کنیم که جرم الکترون‌ها در این واحد گنجانده شده است. amu هست:

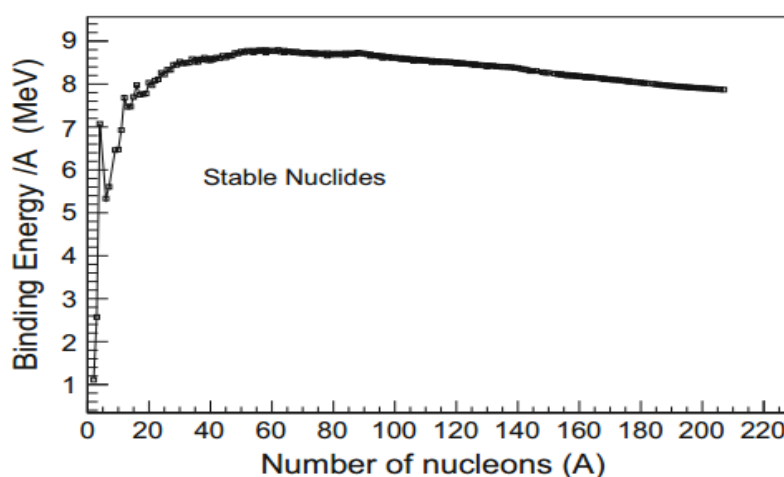
$$u = 931.4940 \text{ MeV}/c^2 = 1.6605389 \times 10^{-27} \text{ Kg} \quad (8-1)$$

جرم یک اتم از لحاظ تجربی کمتر از مجموع جرم‌های اجزای تشکیل دهنده‌اش است:

$$M(Z, N) < Z(m_p + m_e) + Nm_n \quad (9-1)$$

$$-B \equiv \Delta M(Z, N) \equiv M(Z, N) - Z(m_p + m_e) - Nm_n \quad (10-1)$$

ما ΔM را کسر جرم می‌نامیم هنگامی که در c^2 ضرب می‌شود، انرژی بستگی کل B را بدست می‌آوریم: اگر ما می‌خواهیم تمام نوکلئون‌ها را کاملاً جدا کنیم، باید انرژی برابر با انرژی بستگی فراهم کنیم. مقدار جالب انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون B/A است. مقدار تجربی آن برای نوکلئید پایدار به عنوان تابعی از A در شکل ۱-۳ ترسیم شده است. به طور متوسط، این مقدار بین 7MeV تا 9MeV به ازای نوکلئون است. آن مقدار برای نوکلئیدهای کوچک افزایش می‌یابد، تا حداکثری برای ^{56}Fe ، و سپس کاهش می‌یابد. نوکلئید در بخش بالارونده منحنی می‌تواند در شرایط مناسب با دیگر نوکلئیدهای کوچک ترکیب شده و انرژی را ساطع کنند در این مورد ما همجوشی هسته‌ای داریم. نوکلئیدها در عدد جرمی بالاتر از ۶۰ از شکستن هسته‌های سنگین و تبدیل به هسته‌های سبک که در این حالت ما شکافت هسته‌ای داریم.

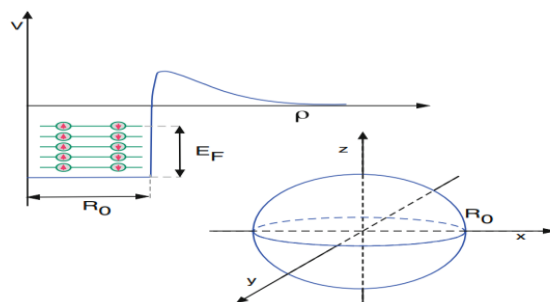


شکل ۱-۳: انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون [۱]

شکل ۱-۳ انرژی بستگی به ازای نوکلئون به عنوان تابعی از عدد جرمی $A = Z + N$ برای نوکلئیدهای پایدار یا با عمر طولانی نشان می‌دهد. نوکلئید با A پایین و انرژی بستگی کم برای هر نوکلئون، می‌تواند در شرایط مناسب، با افزایش A و حرکت در جهت انرژی‌های بستگی بیشتر، تحت

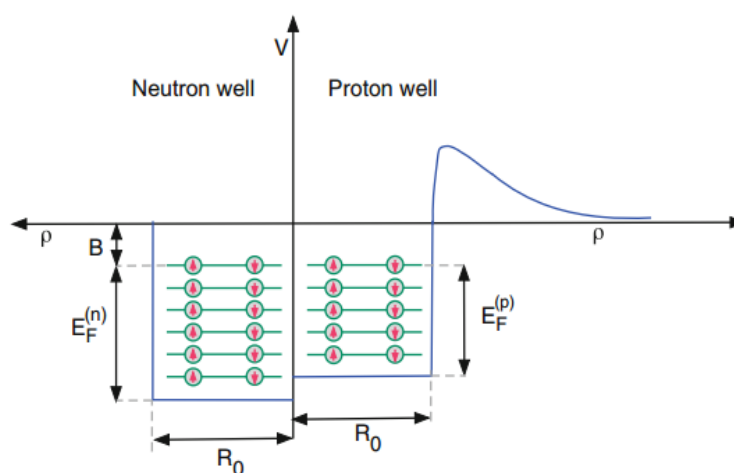
واکنش شکافت قرار گیرد. برعکس، نوکلئید با A بالا، هنگامی که به دو نوکلئید با A پایین تقسیم می‌شوند، می‌تواند انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون را در هر نوکلئید دختر افزایش دهد. فرآیندهای شکافت و همجوشی دارای $Q > 0$ به ترتیب برای A بالا و A پایین هستند. شایان ذکر است که ${}^4\text{He}$ یا ذره آلفا دارای انرژی بستگی νMeV به ازای نوکلئون است و این یک نوکلئیدی بسیار پایدار است.

مدل‌های دیگر برای هسته‌ها مدل گاز فرمی، مدل پوسته‌ای و مدل جمعی است. در مدل گاز فرمی، نوکلئون‌ها به عنوان ذرات بدون برهمکنش در نظر گرفته می‌شوند. برهمکنش متقابل آنها با برآیند جاذبه آنها جایگزین شده است، که یک چاه پتانسیل تشکیل می‌دهد و نوکلئون‌ها را درون کره‌ای به شعاع R_0 نگه می‌دارد، همانطور که در شکل ۱-۴ دیده می‌شود. این نوکلئون‌های غیر برهمکنشی تحت آمار فرمی با اصل طرد پاولی قرار دارند، به همین دلیل اسم مدل، مدل فرمی نامگذاری شده است. درحالی‌که فقط نوترون‌ها را در نظر بگیریم: هر حالت کوانتومی یا سطح انرژی در چاه می‌تواند توسط دو نوترون با اسپین مخالف اشغال شود. همین شرایط برای پروتون‌ها نیز معتبر است. اکنون، در حالی که چاه‌های دو نوع نوکلئون الزاماً یک عمق نباشند، فرض می‌شود که آنها شعاع مشابهی دارند. علاوه بر این، پتانسیل پروتون به دلیل محاسبه دافعه الکترواستاتیک در خارج از چاه دارای شکل متفاوتی است. نوکلئون‌ها تمام حالت‌های انرژی موجود را اشغال می‌کنند، تا سطح E_F که "سطح انرژی فرمی" نامیده می‌شود. در شکل ۱-۴ نمایشی از چاه پتانسیل برای پروتون‌ها در مدل گاز فرمی را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱: نمایشی از چاه پتانسیل برای پروتون ها در مدل گاز فرمی.

پروتون‌ها به عنوان ذرات غیر برهمکنشی در نظر گرفته می‌شوند و درون یک کره از شعاع R_0 مقید شده‌اند، چاه پتانسیل یک بعدی در امتداد مختصات قطبی ρ است؛ تمام حالت‌های در دسترس تا انرژی $E_F^{(p)}$ اشغال شده‌اند. در شکل ۵-۱ پتانسیل کولن $1/\rho$ برای $\rho > R_0$ برای پروتون‌ها سمت راست و نوترون‌ها سمت چپ در مدل گاز فرمی ترسیم شده است. همه حالت‌ها تا سطح انرژی یکسان اشغال شده‌اند اما عمق دو چاه پتانسیل می‌تواند متفاوت باشد.



شکل ۵-۱: چاه پتانسیل برای نوترون‌ها (سمت چپ) و برای پروتون‌ها (سمت راست) در مدل گاز فرمی.

۱-۳ معرفی مدل‌های هسته‌ای

فیزیک هسته‌ای به عنوان یک شاخه مستقل از فیزیک اتمی از سال ۱۸۹۶ یعنی زمانی که هانری بکرل^۱ تیره شدن صفحات عکاسی بر اثر یک تابش ناشناخته را کشف کرد، آغاز شد. این تابش از برخی مواد معدنی سرچشمه می‌گرفت. او به طور تصادفی رادیواکتیویته را کشف کرد. هسته‌های ناپایدار به طور خود به خودی متلاشی می‌شوند. به ویژه زوج فیزیکیان، پیر^۲ و ماری کوری^۳ و نیز ارنست رادرفورد و همکارانش در این تحولات سهم عمده‌ای داشتند. برای بررسی حرکت نوکلئون‌ها در هسته و چگونگی برهمکنش آنها مدل‌سازی از مفیدترین کارها می‌باشد. البته قطعاً هر مدل در بعضی زمینه‌ها نارسا خواهد بود، از اینرو مدل را باید برای هدفی که در دست بررسی داریم انتخاب می‌کنیم. طی چندین سال مدل‌های هسته‌ای فراوانی پا به عرصه نهاده است. این مدل‌ها گستره‌ی وسیعی از برهمکنش‌های ممکن قوی هسته‌ای تا برهمکنش‌های ممکن بسیار ضعیف، همچنین مواردی که بین آنها قرار دارد، در برمی‌گیرد. از جمله مدل‌های متداول برای مطالعه ساختار هسته مدل‌های ذره مستقل و مدل دسته‌جمعی^۴ می‌باشد. در مدل ذره مستقل ذرات در پائین‌ترین مرتبه صورت مستقل در یک پتانسیل مشترک حرکت می‌کنند. مانند مدل لایه‌ای^۵. در مدل دسته‌جمعی یا برهم‌کنش قوی، به علت برهم‌کنش‌های کوتاه‌برد و قوی بین نوکلئون‌ها، نوکلئون‌ها قویاً به یکدیگر جفت می‌شوند. مانند مدل قطره مایع^[۴].

^۱ Henri Becquerel

^۲ Piere

^۳ Marie Curie

^۴ Collective

^۵ Shell Model

۱-۳-۱ مدل قطره مایع

بت^۱ فرضیه‌ای ارائه داد مبنی بر اینکه نوکلئون‌های درون هسته را می‌توان ذراتی در نظر گرفت که روی یکدیگر اثری ندارند و همه‌ی آنها توسط یک پتانسیل یک جسمی به یکدیگر پیوند دارند. بر این اساس از جمله مدل‌های اولیه برای مطالعه ساختار هسته یعنی مدل قطره مایع توسط بور^۲ و فون وایکسر^۳ از روی قطره‌های مایع پیشنهاد شده است. در این مدل هسته بصورت قطرات مایع باردار تراکم‌ناپذیر با چگالی زیاد در نظر گرفته می‌شود که همچون مولکول‌ها در یک قطره مایع دائماً حرکت کاتوره‌ای دارند و هسته تمامیت خود را با نیروهای مشابه کشش سطحی قطره مایع حفظ می‌کند. این مدل برای بیان روند تغییر انرژی بستگی نسبت به عدد اتمی و واکنش هسته‌ای مفید می‌باشد.

مدل قطره مایع برای این سوال که چرا بعضی از نوکلئیدها مانند ^{235}U ، ^{239}Pu با نوترون‌های کند شکافته می‌شوند و برخی دیگر ^{238}U ، ^{232}Th نوترون‌های سریع پاسخ ساده‌ای دارد که علت آن را در انرژی فعال‌سازی بیان می‌کند، یعنی حداقل میزان انرژی که هسته بتواند به قدر کافی تغییر شکل دهد. تغییر شکلی که نیروهای رانش الکتریکی بتواند بر نیروهای جاذبه الکتریکی غلبه کند. این مقدار انرژی فعال‌سازی را می‌توان به کمک تئوری ریاضی مدل قطره مایع محاسبه نمود که رابطه تعمیم یافته و کلی انرژی بستگی را می‌دهد. یکی از مهمترین واقعیت‌های موجود در هسته، ثابت بودن تقریبی چگالی هسته است. حجم یک هسته با عدد A (تعداد نوکلئون) متناسب می‌باشد و این واقعیتی است که در مورد مایعات نیز صادق می‌باشد.

^۱ Beth
^۲ N. Bohr
^۳ F. Von Weizsacker

همانگونه که در شکل (۳-۱) نشان داده شد، متوسط انرژی بستگی بر حسب نوکلئون رسم شده است. نظم و ثبات انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون بصورت تابعی از عدد جرمی A و ثابت بودن چگالی هسته‌ای منجر به ارائه فرمول نیمه تجربی جرم و پیشنهاد مدل قطره مایع توسط وایسکر شد. نخستین واقعیت لازم برای رسیدن به یک فرمول برای جرم، ثابت بودن تقریبی انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون برای $A \geq 50$ است، بنابراین انرژی بستگی متوسط برای یک هسته نامتناهی بدون سطح باید دارای مقدار ثابتی مثل a_v باشد، که همان انرژی بستگی ماده هسته‌ای است. با توجه به اینکه چگالی هسته ثابت و حجم یک هسته با عدد A متناسب است، لذا سهم انرژی حجمی در انرژی بستگی به صورت زیر می‌باشد،

$$E_v = a_v A \quad (۱۱-۱)$$

که در آن a_v مقدار ثابت قابل تعیین که در حدود 8 MeV می‌باشد.

نوکلئون‌های سطحی پیوندهای کمتری دارند و اندازه متناهی یک هسته حقیقی منجر به یک جمله E_s به صورت رابطه زیر در انرژی بستگی می‌گردد که متناسب با سطح هسته بوده و انرژی بستگی را کاهش می‌دهد،

$$E_s = -a_s A^{2/3} \quad (۱۲-۱)$$

انرژی کولنی ناشی از نیروی دافعه الکتریکی است که بین هر دو پروتون وجود دارد. برای سادگی فرض شده است، پروتون‌ها به صورت یکنواخت در سراسر کره‌ای به شعاع $R = R_0 A^{1/3}$ توزیع

شده‌اند، با استفاده از معادله انرژی کولنی، $E_c = \frac{3}{5} \frac{(ze)^2}{R}$ ، سهم کولنی در انرژی بستگی به صورت زیر خواهد شد.

$$E_c = -a_c z^2 A^{-1/3} \quad (۱۳-۱)$$

انرژی کولنی باعث کاهش انرژی بستگی هسته ای می شود لذا با علامت منفی ظاهر می شود.

انرژی تقارنی از اصل طرد ناشی می شود، زیرا این اصل برای آنکه هسته‌ای بخواهد نوعی از نوکلئون را بیشتر از نوع دیگر داشته باشد انرژی بیشتری مطالبه می کند، که عبارت تقریبی آن به صورت زیر است،

$$E_{sym} = -a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A} \quad (۱۴-۱)$$

که علامت منفی کاهش انرژی بستگی در اثر این جمله است.

با ترکیب نمودن روابط فوق انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون رابطه‌ای که وایسکر پیشنهاد کرد به صورت زیر خواهد شد [۵]،

$$\bar{B} = \frac{B}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A^2} - a_c z^2 A^{-1/3} \quad (۱۵-۱)$$

مقادیر ثابت در این روابط با برارزش انرژی‌های بستگی مشاهده شده در آزمایش‌ها تعیین می شود.

$$a_v = 15.6 \text{ MeV} , \quad a_s = 17.2 \text{ MeV} \quad a_{sym} = 22.5 \text{ MeV} , \quad a_c = 0.70 \text{ MeV} \quad (۱۶-۱)$$

۱-۳-۲ مدل پوسته‌ای

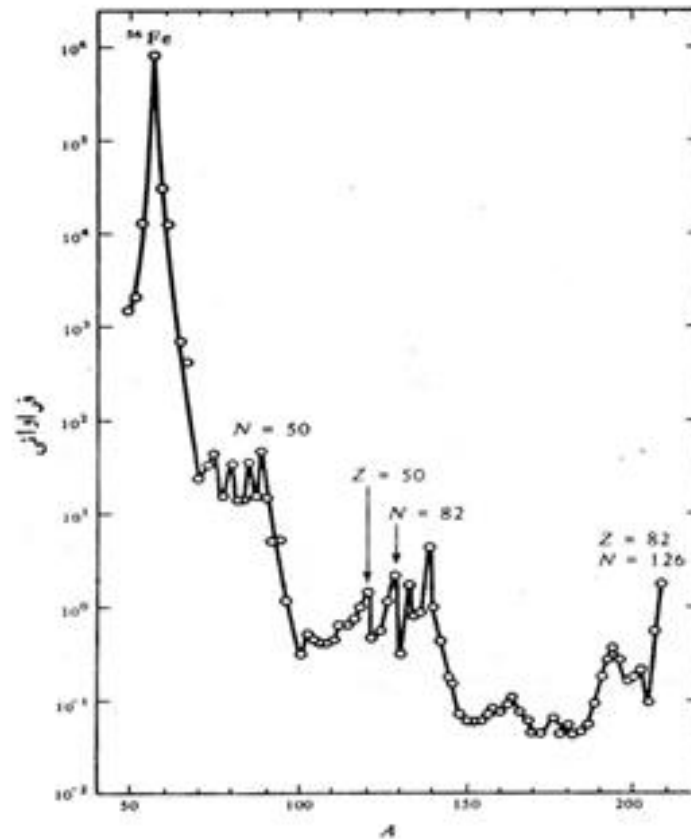
در مدل پوسته‌ای فرض بر این است که پوسته‌ها با پروتون‌ها و نوترون‌هایی که انرژی‌شان بترتیب افزایش می‌یابد پر می‌شود. علی‌رغم جاذبه شدید بین نوکلئون‌ها که انرژی بستگی را ایجاد می‌کند حرکت نوکلئون‌ها مستقل از یکدیگر بوده و این تناقض ظاهری توسط اثرهای ناشی از طرد پائولی از بین می‌رود زیرا این اصل شدت امکان برخورد نوکلئون‌ها را محدود می‌سازد.

خواص هسته‌ای وجود دارد که رفتاری ناپیوسته برای مقادیر خاصی از نوترون و پروتون از هسته بروز می‌کند که نتیجه آن ساختار پوسته‌ای برای هسته‌ها است. ناپیوستگی‌ها تماماً وقتی یافت می‌شود که نوترون یا پروتون مقادیر ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ را داشته باشند. این مقادیر را اعداد جادویی گویند. مطالعات انجام شده بر روی هسته‌های با مقادیر N و Z فوق نشان داده است که این هسته‌ها پایدارترند و انرژی بستگی‌شان نسبت به هسته‌های کاملاً نظیرشان بیشتر است.

برخی شواهد تجربی وجود ساختار پوسته‌ای هسته را می‌توان از فراوانی نسبی ویژه هسته‌های زوج-زوج مختلف در شکل (۱-۶) که به صورت تابعی از عدد اتمی A برای $A > 50$ رسم شده است بدست آورد. ویژه هسته‌هایی که برای آنها N مساوی ۵۰ و ۸۲ و ۱۲۶ است، سه قله مشخص تشکیل می‌دهند. در حال حاضر این اعداد توسط مدل پوسته‌ای بخوبی توضیح داده شده‌اند. فراوانی‌ها نسبت به Si اندازه‌گیری شده‌اند $[H(Si)=10^6]$.

مدل پوسته‌ای بر اساس مکانیک کوانتومی ساخته و پرداخته شده است و در موارد زیر از جمله بررسی خواص نوکلئیدهایی که موجب گسیل ذرات آلفا، بتا و فوتون‌های گاما می‌شوند و بیان

چگونگی میدان الکتریکی و مغناطیسی اطراف هسته‌ها موفق بوده است ولی این مدل برای توضیح عمل شکافت کمکی نمی‌کند [۴ و ۶].



شکل ۱-۶ فراوانی، H ، برای ویژه هسته‌های زوج-زوج مختلف، به صورت تابعی از A [۳]

۱-۳-۴ مدل ذره مستقل

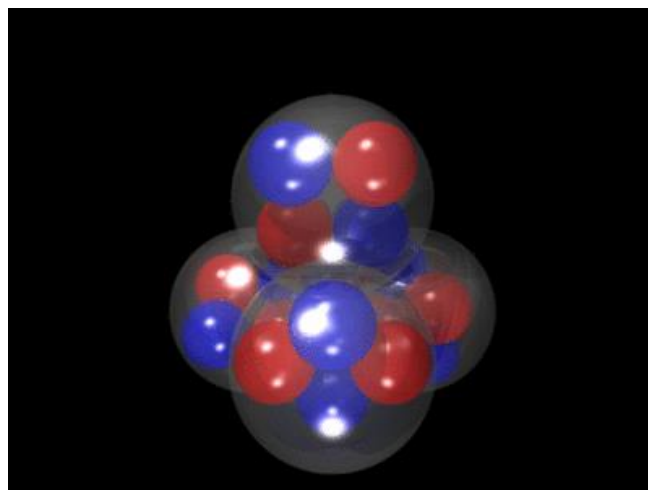
مدل پوسته‌ای ذره‌ی مستقل بر پایه این فرض استوار است که هر نوکلئونی در هسته فقط تحت تأثیر میدان متوسطی است که دیگر نوکلئون‌های موجود در هسته پدید می‌آورند. این مدل هسته‌ای تقریب توانمندی نیست، ولی این توانایی را دارد که بسیاری از ویژگی‌های هسته‌هایی را که نسبت به پوسته‌های نوکلئونی بسته یک نوکلئون اضافی (تک ذره) یا یک نوکلئون کسری (تک حفره) دارند،

بازتولید کند. مدل پوسته‌ای ذره‌ی مستقل زمانی که چند نوکلئون ظرفیت در خارج از پوسته‌های بسته وجود داشته باشند با محدودیت‌های بیشتری رو به رو می‌شود، زیرا حتی هنگامی که هسته در حالت پایه‌اش هم باشد هم نمی‌توان فرض کرد زوج‌های نوکلئونی یکسان همیشه با هم جفت می‌شوند و واحدهای با اسپین صفر را خواهند ساخت.

۱-۳-۵ مدل خوشه‌ای

مدل خوشه‌ای بر اساس این فرضیه بنا نهاده شده است که می‌توان هسته‌ها را بصورت خوشه‌های کوچک از نوکلئون‌ها که در کنار هم گرد آمده‌اند در نظر گرفت که مهمترین این خوشه‌های نوکلئون‌ها، ذرات آلفا می‌باشد. در نتیجه به بررسی مدل ذره آلفا می‌پردازیم. بالا بودن انرژی بستگی ذره α ویژگی‌های خاصی را برای هسته‌هایی نظیر ^8Be , ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne , ^{24}Mg , ^{28}Si و ^{40}Ca که حاوی تعداد درستی از ذره آلفا هستند بوجود می‌آورد. همان‌طور که در جدول (۱-۳) مشاهده می‌شود، انرژی بستگی این هسته‌ها مساوی با جمع انرژی بستگی ذرات آلفایشان به اضافه یک سهم کوچک از انرژی بستگی حاصل پیوند بین ذرات آلفا با یکدیگر می‌باشد، که با انتخاب پتانسیل مناسب $\alpha-\alpha$ می‌توان شعاع و انرژی بستگی هسته‌های خوشه آلفا را محاسبه کرد. در یک توصیف سنتی از هسته، می‌توان هسته‌ها را به صورت کروی و ترکیب تقریباً همگنی از پروتون‌ها و نوترون‌ها دانست. در توصیف دقیق‌تر از هسته، انحراف از شکل کروی یا به عبارتی تغییر شکل محوری هسته‌ها که به مدل دسته جمعی معروف است، در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، هسته‌هایی با عدد جرمی $A < 150$ ، به کمک مدلی مبتنی بر ارتعاشات حول شکل تعادل کروی بررسی می‌شوند در حالی که خواص هسته‌های با عدد جرمی بین ۱۵۰ تا ۱۹۰ خیلی شبیه اثرات دورانی سیستم‌های غیر کروی است [۵]. در سیستم هسته‌های سبک انحراف از حالت کروی تنها در

قالب انحراف‌های محوری دیده نمی‌شود بلکه ساختار خوشه‌ای^۱ نیز ایجاد می‌کند. در بسیاری از موارد، یک تصویر مناسب از هسته مشابه شکل ۷-۱ است.



شکل ۷-۱ شکل‌گیری چهار خوشه آلفا در هسته ^{16}O

جدول ۳-۱ انرژی بستگی هسته‌های خوشه آلفا [۷]

Nucleus	Number of alphas	Number of Bonds between Alphas	$B_{\alpha\alpha}$ (MeV)	$B_{\alpha\alpha}/\text{Bond}$ (MeV)
$^4\text{He}_2$	1	0	0.00	
$^8\text{Be}_4$ (unstable)	2	1	-0.10	-0.10
$^{12}\text{C}_6$	3	3	7.26	2.42
$^{16}\text{O}_8$	4	6	14.40	2.40
$^{20}\text{Ne}_{10}$	5	8	19.15	2.39
$^{24}\text{Mg}_{12}$	6	12	28.46	2.37
$^{28}\text{Si}_{14}$	7	15	38.44	2.56
$^{32}\text{S}_{16}^+$	8	18	45.38	2.52
$^{36}\text{Ar}_{18}^+$	9	20	52.02	2.60
$^{40}\text{Ca}_{20}^{++}$	10	24	59.05	2.46

¹ Clustering structure

هسته‌های ^{16}O , ^{12}C , ^8Be , ^4H و ... با تقریب مرتبه اول شامل ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ذره آلفا هستند که در پیکربندی هندسی معینی مانند مثلث متساوی‌الاضلاع برای ^{12}C و چهاروجهی ^{16}O و غیره ... اساس این موضوع در کاهش انرژی پتانسیل و رسیدن به پایداری است. در بزرگترین مقیاس‌های شناخته شده برای انسان، پدیده مجموعه شدن ستارگان بعد از انفجار بزرگ و شکل‌گیری کهکشان‌ها و نیز پتانسیل بستگی گرانشی سیاره‌ها در سیستم منظومه خورشیدی نشانی از جمع شدن و تمایل به خوشه‌ای شدن است [۸]. همچنین اتمها باعث شکل‌گیری مولکولها و نیز مایعات و گازها می‌گردد. در جامدات نیز، کریستال‌ها این نقش را ایفا می‌کنند. در سال ۱۹۳۱ بر اساس تئوری واپاشی ذرات آلفا، گامو^۱ به بررسی هسته‌ها به صورت ترکیبی از ذرات آلفا پرداخت. البته در آن زمان هنوز ماهیت ذره نوترون شناخته شده نبود و او هسته‌هایی با عدد جرمی $A=4n$ ($n=2,3,4,\dots$) مانند ^{12}C , ^8Be و ^{16}O را متشکل از ذرات آلفایی می‌دانست که از پروتون‌ها و الکترون‌ها تشکیل شده بودند و بیان نمود به دلایل نامعلوم، اگر چه الکترون‌ها رفتار مبهمی در ساختار هسته‌ای دارند ولی تأثیری بر روی حرکت ذرات آلفا و پروتون‌ها در ساختار هسته‌ای ندارند و در واقع می‌توان ذرات آلفا و پروتون‌ها را به صورت مستقل از الکترون‌ها بررسی کرد [۹ و ۱۰].

¹ Gamow

فصل دوم

برهم کنش‌های هسته‌ای

۲-۱ نیروی هسته‌ای

بحث درباره‌ی مطالعه فیزیک هسته‌ای را با بررسی برهمکنش‌های بنیادی موجود در طبیعت شروع می‌کنیم با چهار نیروی بنیادی که منشأ تمام نیروهای موجود در طبیعت بوده و عبارتند از: نیروهای الکترومغناطیسی، گرانشی، هسته‌ای قوی و هسته‌ای ضعیف. طبیعت دقیق نیروهای هسته‌ای، ناشناخته است. با این وجود نیروها باید کوتاه برد باشند. نیروهایی که در فیزیک اتمی و کلاسیک با آن مواجه هستیم، نیروهای گرانشی و الکترومغناطیسی هستند که نوکلئون‌ها را کنار هم نمی‌توانند نگه دارند. نیروی الکترومغناطیسی هیچ گونه اثری نمی‌تواند بر نوترون‌ها داشته باشد، زیرا نوترون‌ها بار الکتریکی ندارند. نیروی الکترومغناطیسی که بین پروتون‌ها وجود دارد یک نیروی دافعه‌ی کولنی قوی است که باعث از هم پاشیدگی هسته می‌شود. نیروی گرانشی بین هر جفت از نوکلئون‌ها به صورت جاذبه است اما این نیرو 10^{36} مرتبه از نیروی الکتریکی موجود بین پروتون‌ها کوچکتر است. بنابراین اثر آن در تمام پدیده‌های هسته‌ای و اتمی کاملاً قابل اغماض است. پس بین دو نیرویی که در بالا شرح داده شده‌اند نمی‌توانند علت وجودی هسته و انسجام آن باشند. تنها راه توجیه این است که وجود نیروی سومی را در طبیعت بپذیریم که به آن نیروی هسته‌ای می‌گویند. متوجه می‌شویم که این نیرو در فواصل کوتاه، یعنی در حدود ابعاد هسته، باید بسیار قوی باشد زیرا لازم است که بیشتر از نیروی دافعه کولنی بین پروتون‌ها باشد تا بر آن غلبه کند. از سویی دیگر ساختار مولکولی را می‌توان تنها با نیروی الکترومغناطیسی توجیه کرد، لذا نتیجه می‌گیریم که نیروی هسته‌ای در فواصلی از مرتبه‌ی فاصله‌ی بین هسته‌ها در مولکول‌ها (تقریباً 10^{-11} متر) باید قابل اغماض باشد. نوکلئون‌ها (نوترون‌ها و پروتون‌ها) این مزیت را دارند که طول موجشان در انرژی‌های حدود 20 MeV به اندازه‌ی کافی کوتاه است. اما الکترون‌ها این مزیت را دارند که برهم کنش آن‌ها با هسته به خوبی

شناخته شده است (برهم کنش الکترومغناطیسی). لذا دقیق‌ترین نتایج با پراکندگی الکترون بدست می‌آید.

۲-۲ خواص برهم کنش‌های هسته‌ای

خواص هر هسته با نیروهایی تعیین می‌شود که نوترون‌ها و پروتون‌های سازنده‌ی آن بر همدیگر وارد می‌کنند. بخش هسته‌ای این نیرو بسیار پیچیده است و با مفاهیم پایه به آسانی قابل محاسبه و به طور صریح قابل مشاهده نیست. محاسبات ساختار هسته‌ای عموماً مبنی بر روش‌هایی از قبیل بررسی پراکندگی نوکلئون-نوکلئون می‌باشد. برخی از ویژگی‌های نیروی نوکلئون-نوکلئون عبارتند از:

- (۱) برهم کنش بین دو نوکلئون از پایین‌ترین مرتبه‌ی پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای حاصل می‌شود. این پتانسیل مورد بررسی را به صورت چاه مربعی در نظر گرفته‌ایم، که باعث سادگی محاسبات می‌شود. ویژگی مشترک این پتانسیل در بستگی انحصاری آن به فاصله بین نوکلئونی r است.
- (۲) برهم کنش نوکلئون-نوکلئون قویاً وابسته به اسپین است. این نتیجه‌گیری از عدم موفقیت در مشاهده‌ی حالت مقید تک تایی دوترون ($S=0$) و همچنین از اندازه‌گیری اختلاف سطح مقطع‌های حالت‌های تک‌تایی و سه‌تایی حاصل شده است.

- (۳) پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله‌ی غیرمرکزی، به نام پتانسیل تانسوری است. عمده‌ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده‌ی گشتاور چارقطبی در حالت پایه‌ی دوترون حاصل می‌شود. تابع موج حالت s ($l=0$) تقارن کروی دارد، یعنی گشتاور چارقطبی الکتریکی آن صفر است. نیروی تانسوری باید، به جای $V(r)$ به شکل $V(\mathbf{r})$ باشد. بدیهی است که برای نوکلئون منفرد انتخاب یک جهت مشخص در فضا اختیاری است. تنها جهت مرجع برای نوکلئون جهت اسپین آن است و از این رو تنها جمله‌ای که می‌توان در نظر گرفت به صورت $\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$ یا $\mathbf{S} \times \mathbf{r}$ است

که بردار مکان $\mathbf{r}$ را با جهت $\mathbf{S}$ ارتباط می دهند. برای تأمین شرط ناوردایی پارितه ، باید با تعداد زوجی از عوامل $\mathbf{r}$ سروکار داشته باشیم، بنابراین پتانسیل بین دو نوکلئون باید به جملاتی مانند $(s_1 \cdot \mathbf{r})(s_2 \cdot \mathbf{r})$ یا $(s_1 \times \mathbf{r}) \cdot (s_2 \times \mathbf{r})$ بستگی داشته باشد. بخش تانسوری پتانسیل بین دو نوکلئونی را به صورت $V_T(r)S_{12}$ می توان در نظر گرفت که در آن $V_T(r)$ بستگی شعاعی نیرو و بزرگی آن بوده و داریم:

$$S_{12} = \frac{3(s_1 \cdot \mathbf{r})(s_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - s_1 \cdot s_2 \quad (1-2)$$

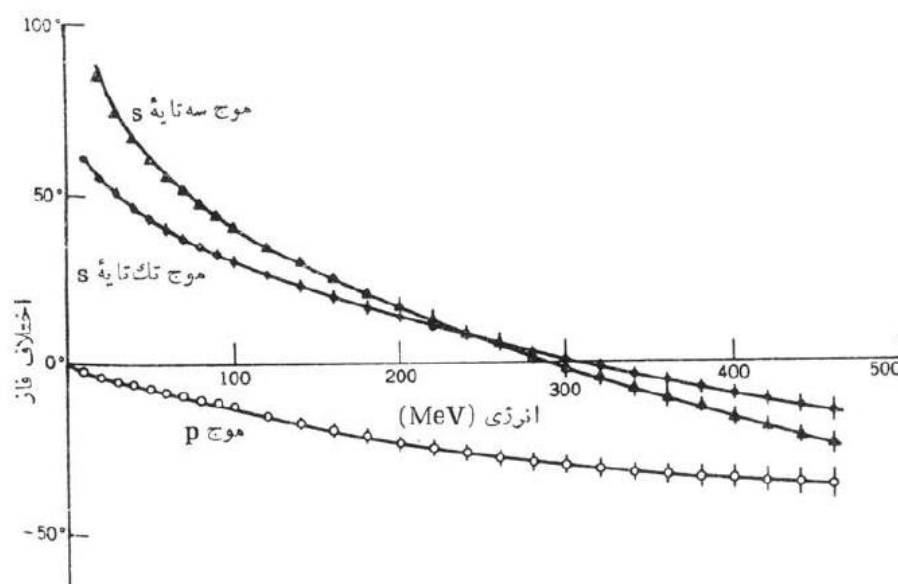
که این جمله متضمن ویژگی تانسوری نیروست و متوسط آن در تمام زوایا برابر صفر می شود.

۴) نیروی نوکلئون-نوکلئون نسبت به بار نوکلئون تقارن دارد. بدین مفهوم که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم پروتون-پروتون، تفاوتی بین برهمکنش پروتون-پروتون و برهمکنش نوترون-نوترون نیست. در اینجا منظور از « بار » خصوصیت یا جنس نوکلئون (پروتون یا نوترون) است و نه بار الکتریکی آن. دلیل این امر آن است که طولهای پراکندگی و همچنین بردهای موثر در برهمکنش های pp و nn باهم مساوی است.

۵) نیروی نوکلئون-نوکلئون تقریباً مستقل از بار الکتریکی است. بدین مفهوم که پس از تصحیح نیروی کولنی pp ، هر سه نیروی هسته ای nn ، pp و pn با هم مساوی اند. لذا استقلال بار شرطی قوی تر از تقارن بار است.

۶) برهم کنش نوکلئون-نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می شود. این نتیجه از بررسی کیفی چگالی هسته ای حاصل می شود. رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت می ماند، و از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن

بیش از حد نوکلئون‌ها جلوگیری کند. برای آنکه مسئله را کمی تر بررسی کنیم، پراکندگی نوکلئون-نوکلئون را در انرژی‌های بالا در نظر می‌گیریم. اختلاف فاز موج تک تایه S برای پراکندگی نوکلئون-نوکلئون را تا انرژی 500 MeV در شکل (۱-۲) داریم، اختلاف فاز موج S در انرژی حدود 300 MeV منفی می‌شود، که این نشان از تغییر نیرو از جاذبه به دافعه است [۲]. روند تغییر اختلاف فاز موج S از مقادیر مثبت به منفی، در انرژی حدود 300 MeV، نشان دهنده این نکته است که در این انرژی‌ها، نوکلئون فرودی با مغز دافعه در برهم کنش نوکلئون-نوکلئون مواجه شده است [۲].



شکل ۱-۲: اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوکلئون در انرژی‌های متوسط [۲].

(۷) برهم کنش نوکلئون-نوکلئون می‌تواند به تکانه یا سرعت نسبی نوکلئون‌ها هم بستگی داشته باشد. نیروهای وابسته به سرعت یا تکانه را نمی‌توان با پتانسیل نرده‌ای نشان داد، اما با استفاده از جملات درجه‌ی اول p ، درجه‌ی دوم p ، و غیره، که هر کدام از آن‌ها با یک پتانسیل مشخصه‌ی $V(r)$ متناظرند، می‌توان آن‌ها را به طرز قابل قبولی در نظر گرفت. تحت تأثیر عملگر پاریته داریم $p \rightarrow -p$ ، و در اثر عملگر برگشت زمان هم داریم $T \rightarrow -T$. پس هر جمله‌ای که فقط شامل توان‌های درجه اول p

باشد غیر قابل قبول است، زیرا در این صورت ناوردایی‌های پاریته و برگشت زمان هر دو نقض خواهند شد. جملاتی که به صورت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ یا $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ باشند، نسبت به پاریته ناوردا هستند ولی ناوردایی برگشت زمان را نقض می‌کنند. یکی از صورت‌های قابل قبول این جمله که شامل توان‌های درجه‌ی اول $\mathbf{p}$ می‌شوند و نسبت به پاریته و برگشت زمان هر دو ناورداست، $S, V(\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ است که در آن $S = s_1 + s_2$ اسپین کل دو نوکلئون مورد بررسی است [۲].

۲-۳ نیروهای بنیادی

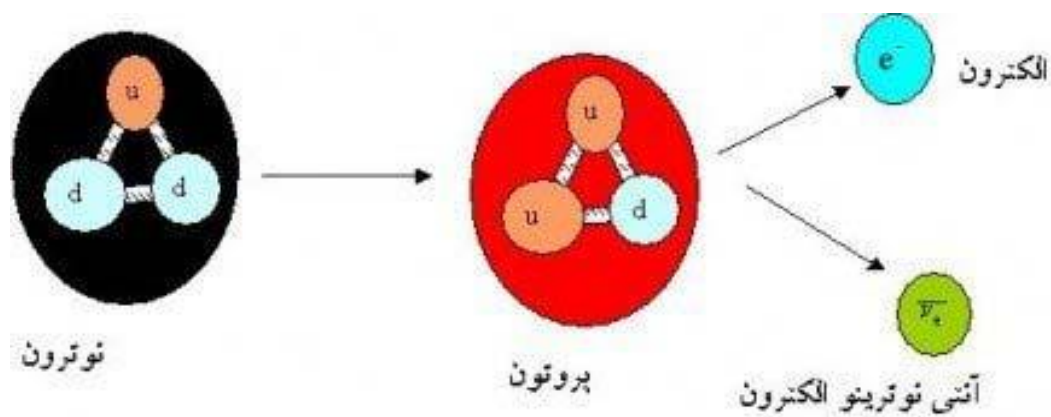
بین ذرات بنیادی چهار نیرو عمل می‌کنند که آنها را نیروهای بنیادی یا اولیه می‌نامند. نیروی گرانش ضعیف‌ترین این نیروها در ابعاد هسته می‌باشد. نیروی الکترومغناطیسی که در ترکیب با نیروی هسته‌ای ضعیف در گستره انرژی‌های بالا حدود ۱۰۰ گیگا الکترون ولت به نیروی الکتروضعیف معروف است. نیروی هسته‌ای ضعیف مسئول واپاشی‌های هسته‌ای بویژه واپاشی بتا می‌باشد و در ترکیب با کرومودینامیک کوانتومی الکتروقوی گویند. نیروی هسته‌ای قوی عامل ثابت و پایدار نگهداشتن کوارک‌ها و ذرات تشکیل شده از آنها درون هسته بوده و مانعی برای فروپاشی هسته در اثر نیروی دافعه کولنی می‌باشد.



شکل ۲-۲ ساختار اتم

۲-۳-۱ نیروی هسته ای قوی

نیروی هسته ای قوی که نیروی رنگ نیز نامیده می‌شود، از جدا شدن بیش از حد کوارک‌های داخل هسته از یکدیگر و یا حتی از پرت شدن آنها به خارج جلوگیری می‌کند. نیروی هسته ای قوی ، از طریق ذرات مبادله کننده یا به اصطلاح گلوئون‌ها، که بین کوارک‌ها در پرواز هستند، انتقال می‌یابد. این نیرو مانند چسب، پیوستگی بین کوارک‌ها را تضمین می‌کند. نیروی هسته‌ای که پروتون‌ها و نوترون‌ها را در هسته اتم به هم پیوسته نگاه می‌دارد، در واقع نیروی بنیادی نیست، بلکه نیرویی است که از نیروی رنگ کوارک‌ها بدست می‌آید.



شکل ۲-۳ نیروی بین کوارک‌ها

۲-۳-۲ نیروی الکترومغناطیسی

این نیرو، وقتی که صحبت از بارهای الکتریکی به میان می‌آید، ظاهر می‌شود. یک ذره دارای بار الکتریکی مثبت، بوسیله یک ذره مثبت دیگر، دفع و به سوی یک ذره دارای بار الکتریکی منفی جذب می‌شود این نیرو توسط فوتون‌ها یا ذرات نوری مبادله می‌شود و در نتیجه این ذرات نوری که بین ذرات باردار مبادله می‌شود ، به یکدیگر متصل می‌شوند.

۲-۳-۳ برهمکنش ضعیف هسته‌ای

بسیاری از ذرات، نسبت به هیچ یک از دو نیروی یاد شده در بالا یعنی نیروی قوی کوارک و نیروی الکترومغناطیسی واکنش نشان نمی‌دهند. از آن میان ذراتی هستند که فاقد بار الکتریکی و رنگ هستند. برای این گونه ذرات یک نیروی بنیادی دیگر وجود دارد. که در فاصله‌های خیلی کم خود را نشان می‌دهند و روی همه ذرات تاثیر می‌گذارند.

۲-۳-۴ نیروی جاذبه یا گرانش

این نیرو تمام ذراتی را که دارای جرم هستند جذب می‌کند و یک نیروی جاذبه‌ای می‌باشد، ولی در مقایسه با سه نیروی قبلی بسیار ضعیف است به حدی که می‌توان آن را نادیده گرفت.

۲-۴ مدل نیروی تبادل

دلایل تأیید حضور نیروی تبادل در هسته عبارتند از:

۱- خاصیت اشباع نیروی هسته‌ای

۲- مطالعه پراکندگی np در انرژی‌های بالا

با استفاده از نیروی تبادل می‌توان خصوصیت اشباع نیروهای هسته‌ای و وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی np را توضیح داد؛ درمورد اول می‌توانیم بگوییم برای آنکه نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون‌ها وجود داشته باشد باید بین آن‌ها «چیزی» رد و بدل شود و درمورد دوم می‌گوییم که بین نوکلئون‌ها «چیزی» مبادله می‌شود که عملاً تغییر خصوصیت آن‌ها را می‌دهد. یک دلیل پیشرفت بزرگ فیزیک نظری در قرن نوزدهم را باید در معرفی مفهوم میدان دانست. طبق این نظر هر جسمی در فضا، یک میدان نیرو (که نمونه‌های آن میدان‌های الکترومغناطیس و گرانش هستند) ایجاد می‌کند و

برهم کنش جسم دوم نه مستقیماً با جسم اول بلکه فقط از طریق همین میدان صورت می‌گیرد. در مورد میدان الکترومغناطیسی چگونگی انتقال میدان در فضا توسط ماکسول نشان داده شد. اگر پیدایش مکانیک کوانتومی را عمده‌ترین تحول قرن بیستم بدانیم که با توجه به این تحول، هر گونه تبادل انرژی لزوماً به صورت بسته‌ها یا مضرب‌هایی از یک مقدار گسسته یا کوانتوم انرژی است. میدان کلاسیک کمیتی پیوسته و یکنواخت است و چنانچه بخواهیم نظریه کوانتومی میدان را با نظریه کلاسیک میدان سازگار کنیم باید میدان را به صورت کوانتومی در آوریم؛ یعنی بنابر نظریه کوانتومی میدان، جسم اول میدان کلاسیک در فضای اطرافش بوجود نمی‌آورد بلکه از خود کوانتوم میدان گسیل می‌کند در این صورت جسم دوم کوانتوم‌های میدان را می‌تواند جذب کند (و به سمت جسم اول باز پس فرستد). پس این دو جسم به طور مستقیم با کوانتوم‌های میدان مبادله شده و به طور غیر مستقیم با یکدیگر برهمکنش دارند. طبیعی است که می‌توان آن چیزی را که در برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون مبادله می‌شود را کوانتوم میدان هسته‌ای نامید. واضح است که برای تبدیل یک نوترون با اسپین $1/2$ به یک پروتون با اسپین $1/2$ ذره مبادله شده باید دارای اسپین درست (صفر یا یک) و بار الکتریکی باشد. همچنین اگر بخواهیم همان مفهوم نیروی تبادل را برای برهمکنش nn هم به کار ببریم، ذره مبادله شونده نوع بدون بار نیز باید وجود داشته باشد. با استفاده از برد نیروی هسته‌ای که در عمل مشاهده شده است می‌توان جرم ذره تبدالی را بدست آورد. فرض کنید که نوکلئون (که آن را با N نشان می‌دهیم) با ذره‌ی X برهم کنش انجام می‌دهد.



یک نوکلئون چگونه می‌تواند یک ذره با انرژی جرمی $m_X c^2$ از خود گسیل کند و بدون نقض پایستگی انرژی همچنان به صورت نوکلئون باقی بماند؟ چنین عملی ممکن نیست مگر اینکه گسیل

و جذب مجدد نوکلئون در چنان فاصله زمانی کوتاه Δt صورت بگیرد که ما از نقض پایستگی انرژی مطلع نشویم. چون اصل عدم قطعیت توانایی ما را در اندازه‌گیری انرژی (و در نتیجه در تعیین پایستگی انرژی) محدود می‌کند. اگر $\Delta t < \hbar / (m_x c^2)$ باشد ما از نقض پایستگی انرژی به میزان $\Delta E = m_x c^2$ مطلع نخواهیم شد. بیشینه برد نیرو را بیشینه فاصله‌ای که ذره X می‌تواند در زمان Δt طی کند، تعیین می‌کند. اگر سرعت ذره را از مرتبه c بگیریم، حداکثر برد ذره (R) چنین می‌شود:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_x c^2} \quad (3-2)$$

که در آن به جای $\hbar c$ از تقریب ساده‌ای استفاده شده است. معادله (3-2) نشان از وجود رابطه‌ای مفید بین انرژی جرمی ذرات مبادله شونده و برد نیروی تبادل است. روشن است چنانچه برد نیروی هسته‌ای در حدود 1 fm باشد انرژی جرمی ذره تبدالی بایستی در حدود 200 MeV شود. ذرات مجازی^۱ به ذراتی گفته می‌شود که فقط برای لحظاتی زودگذر دوام می‌آورند و باعث نقض قانون پایستگی انرژی و تکانه می‌شوند (در نوکلئون‌های جذب کننده و گسیل کننده پس زنی دیده نمی‌شود). خود این ذرات را در حین تبادل نمی‌توان مشاهده کرد در صورتی که می‌توان نیروی حاصل از تبادل ذرات مجازی را مشاهده کرد (ذرات مجازی مبادله شونده را می‌توان همانند ذرات معمولی در نظر گرفت. بنا بر نظریه میدان، برهمکنش کولنی بین بارهای الکتریکی را می‌توان به صورت تبادل فوتون‌های مجازی که خواصی مشابه فوتون‌های حقیقی و معمولی دارند در نظر گرفت). ذرات تبدالی حامل نیروی هسته‌ای را « مزون »^۲ می‌نامند (واژه « مزو » یک کلمه یونانی و

¹ Virtual Particles

² Meson

به معنای میانه است که به جرم متوسط این ذرات که از الکترون بیشتر و از پروتون کمتر است اشاره

دارد). سبک‌ترین مزون، مزون π یا پیون^۱ نامیده می‌شود،

اجزای برهم کنش سیستم دو نوکلئونی عبارتند از:

۱- بخش بلند برد (از ۰/۵ تا ۱/۵ فرمی):

پتانسیل تبادل تک - پیون (OPEP)، بلند بردترین قسمت برهمکنش نوکلئون - نوکلئون به واسطه

جرم کوچک پیون است. برهمکنش نوکلئون - نوکلئون به صورت زیر است [۱۱]:

$$V_{\text{OPEP}} = g^2 (\tau_1 \cdot \tau_2) [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla})] f(r) \quad (4-2)$$

که در آن g ثابت جفت شدگی پیون - نوکلئون و $f(r)$ به شکل معادله یوکاوا زیر است:

$$f(r) = \frac{e^{-(r/\rho_\pi)}}{r} \quad (5-2)$$

برد ρ_π که با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$\rho_\pi = \hbar / (m_\pi c) = 1.414 \text{ fm} \quad (6-2)$$

رابطه (۴-۲) را می‌شود بسط داد و برحسب جملات عملگرهای مرکزی و اسپین-تانسوری نوشت [۱۲ و ۱۳]:

$$V_{\text{OPEP}} = \frac{g^2}{3} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left\{ s_{12} \left[\frac{3}{r^3} + \frac{3}{\rho_\pi r} + \frac{1}{\rho_\pi^2} \right] f(r) + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}{\rho_\pi^2} f(r) - 4\pi (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r) \right\} \quad (7-2)$$

پتانسیل فوق با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پیون‌های باردار و خنثی به خوبی برای $p-p$ ،

$n-p$ و $n-n$ به صورت مناسب‌تری ارائه شده است.

۲- بخش متوسط برد (از ۰/۵ تا ۱ فرمی):

این تبادل به صورت دو پیون (دو پیون و مزون‌های سنگین) صورت می‌گیرد. زیرا با دو پیون جرم

ذره تبدلی دو برابر شده و برد نصف می‌شود.

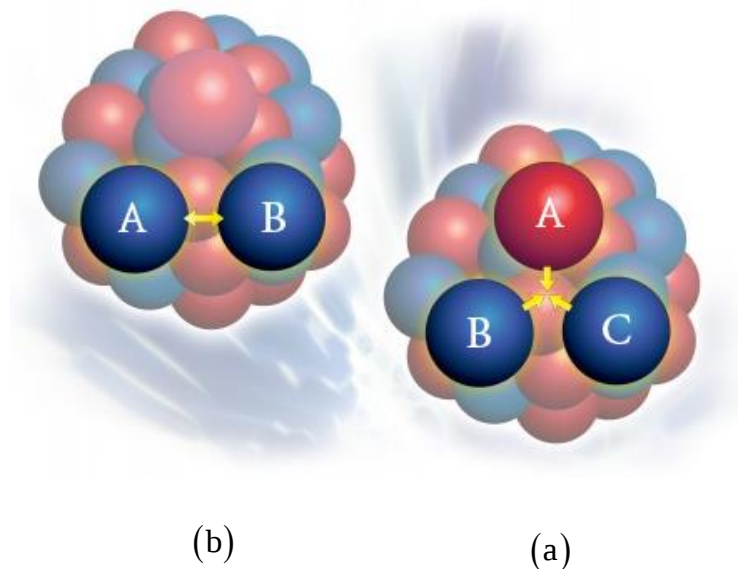
³ Pion

۳- بخش کوتاه برد (از ۰/۲۵ تا ۰/۵ فرمی):

باید سه نوع پيون با بارهای الکتریکی $+e$ ، صفر و $-e$ وجود داشته باشد تا انواع تبادل‌های لازم در سیستم دو نوکلئونی امکان‌پذیر باشد. اسپین پيون‌ها صفر است و انرژی سکون پيون‌ها معادل با 139.6 MeV (برای $\pi^\pm$) و 135 MeV (برای π^0) است.

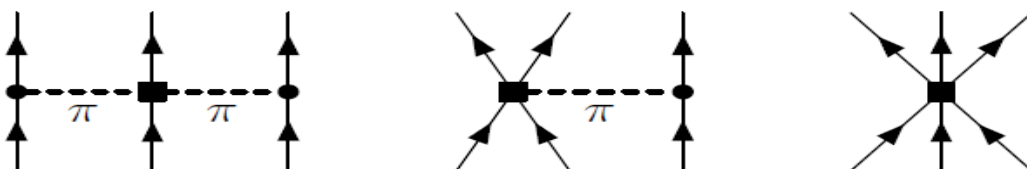
۲-۵ نیروهای چند جسمی

همانطور که می‌دانیم نیروی هسته‌ای، نیروی دو جسمی است. شکل (۲-۴) نیز مشاهده می‌شود که نیروی دو جسمی F_{AB} میان دو نوکلئون A و B وجود دارد. بنابراین برهم کنش‌های دو جسمی به طور طبیعی در زمینه‌ی تئوری نظریه تبادل مزون و در سطح بنیادی‌تر از QCD به وجود می‌آیند [۱۴]. چنانچه نوکلئون‌های A ، B و C مطابق شکل (۲-۴) به هم نزدیک باشند، نیروی اعمال شده بر A ، $F_{AB} + F_{AC}$ است که اگر F_{AB} نیروی میان A و B بود و اگر B نبود نیروی F_{AC} میان A و C می‌شد [۱].



شکل (۲-۴) نیروهای چند جسمی: (a) نیروی سه جسمی (b) نیروی دو جسمی

با در نظر گرفتن مدل نیروی تبادل می‌توان بیان کرد که نیروی تبادل مزونی فقط میان جفت‌ها عمل می‌کند؛ اما تبادل‌های دیگری نیز وجود دارند؛ برای مثال هنگامی که دو نوکلئون وجود دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هرگاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول وجود داشته باشند دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این اتفاق به «نیروی سه جسمی» منجر می‌شود. که به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی و پنج جسمی و غیره که به طور کلی نیروی چند جسمی نامیده می‌شوند را نیز پیش بینی می‌کند. در فیزیک ذرات، هادرون‌ها که از برهم-کنش ما بین سه کوارک، تشکیل می‌شوند، را می‌توان با مدل کوارکی که هم‌ارز نیروی سه جسمی می‌باشد توصیف کرد. بنابراین نیروی سه جسمی مربوط به بخش هادرون (باریون) است. مهم‌ترین جمله در پتانسیل سه نوکلئونی که احتمال برد بیشتری دارد به فرایند شناخته شده‌ای مانند (TPE-3NP)^۱ مربوط است. یک پیون که به وسیله‌ی یکی از نوکلئون‌ها تابش شده است، قبل از جذب شدن به وسیله‌ی سومین نوکلئون، توسط نوکلئون دوم پراکنده می‌شود [۱۵]. موفقیت‌های متعددی، مدل پدیده شناختی در نیروی هسته‌ای داشته است، که چندین مدل پدیده شناختی نیروی سه جسمی حاصل از سهم تبادل دو پیون وجود دارد (در شکل (۵-۲) تبادل دو پیون نشان داده شده نمودار فایمن نیروی سه جسمی) [۱۶].



شکل (۵-۲) نمودار فایمن نیروی سه جسمی [۱۶].

¹ Two-pion exchange three-nucleon potential

روش دیگر، مطالعه سیستم‌های سه نوکلئونی است که آیا می‌توان خصوصیات نیروی سه جسمی را از نیروی دو جسمی محاسبه کرد یا نه؟ جواب منفی است. سیستم‌های سه نوکلئونی را می‌توان به صورت حالت‌های مقید نظیر هسته‌های ^3H و ^3He یا توسط پراکندگی نوترون یا پروتون از دوترون مطالعه کرد که در این زمینه اطلاعات زیادی موجود است. مسئله سه جسم در مکانیک کلاسیک نیز هنوز دقیقاً حل نشده است به همین دلیل تجزیه و تحلیل این اطلاعات بسیار مشکل است. به هر حال تلاش‌های زیادی صرف محاسبه انرژی بستگی ^3H (تریتون) شده است که مقدار تجربی آن 8.48 MeV است [۱۷ و ۱۸]. نتایج نشان می‌دهند که انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم برابر 7 MeV است و در نتیجه حدود 1.5 MeV از انرژی بستگی آن ناشی از نیروی سه جسمی است. این نتیجه با تخمین‌هایی که از روش‌های دیگر بدست آمده است تفاوت دارد. پس می‌توان نتیجه گرفت که اهمیت نیروهای سه جسمی در هسته در حدود ۲۰ درصد اهمیت نیروهای دو جسمی است. در هسته‌های پیچیده‌تر این تخمین در حدود ۱۵ درصد است.

۲-۶ پتانسیل هسته‌ای

۲-۶-۱ پتانسیل وود-ساکسون

یک انتخاب ساده به روش پدیده‌شناختی برای پتانسیل تک جسمی، انتخاب پتانسیل وود-ساکسون است. در پتانسیل وود-ساکسون هرچه به سمت انرژی بالاتر می‌رویم فاصله ترازهای انرژی بیشتر می‌شود. در این پتانسیل فاصله ترازها با هم برابر نیست. همچنین این پتانسیل اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰ را بدرستی نتیجه می‌دهد ولی برای سایر اعداد جادویی درست نیست. پتانسیل وود-ساکسون حاصل جمع یک پتانسیل مرکزی مستقل از اسپین، پتانسیل اسپین-مدار و پتانسیل کولنی می‌باشد:

$$V(r) = V_0(r) + V_{so}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} + V_c(r) \quad (2-8)$$

پتانسیل مرکزی مستقل از اسپین است؛

$$V_0(r) = V_0 f_0(r) \quad (9-2)$$

که $f_0(r)$ تابع توزیع فرمی است.

$$f_0(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r - R_0)/a_0]} \quad (10-2)$$

V_{so} پتانسیل اسپین-مدار است:

$$V_{so}(r) = V_{so} \frac{1}{r} \frac{df_{so}(r)}{dr} \quad (11-2)$$

$f_{so}(r)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$f_{so}(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r - R_{so})/a_{so}]} \quad (12-2)$$

۲-۶-۲ پتانسیل نوسانگر هماهنگ

پتانسیل نوسانگر هماهنگ به شکل زیر بیان می شود.

$$U_0^{HO}(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (13-2)$$

ω فرکانس نوسانگر و m جرم نوکلئون است. مهم ترین خواص تحلیلی پتانسیل نوسانگر هماهنگ

عبارتست از جداپذیر بودن هامیلتونی نوسانگر هماهنگ سیستم چندجسمی، که به صورت جمع دو

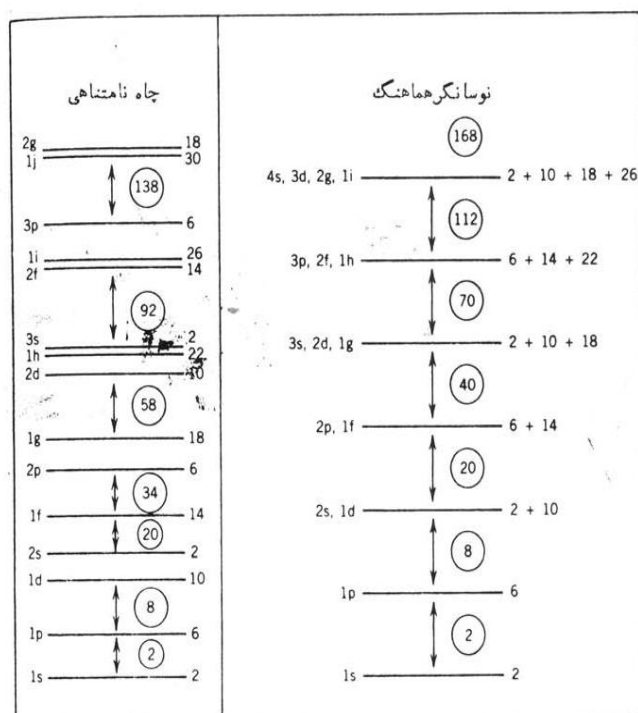
جمله داخلی و مرکز جرم، است می باشد. ترازهای انرژی تک ذره ای به صورت زیر نشان داده می

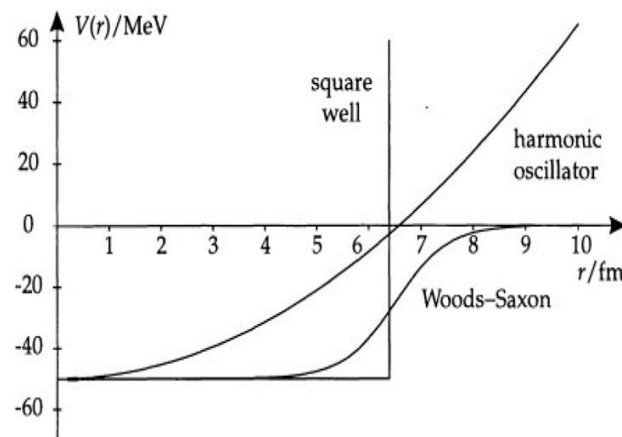
شوند:

$$E = (N + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (۱۴-۲)$$

N عدد کوانتومی پوسته اصلی نوسانگر هماهنگ است.

$$N = 2n_r + l \quad (۱۵-۲)$$





شکل ۲-۸: نمودار پتانسیل‌های مدل لایه‌ای، نوسانگر هماهنگ، وود-ساکسون، چاه مربعی برای ^{208}Pb .

۷-۲ برهم کنش اسپین-مدار

ساده‌ترین بیان ریاضی برای نیروهای برهم کنشی اسپین-مدار، با یک پتانسیل به شکل $V(r)s.l$ داده شده است، که اولین بار توسط توماس و فرنکل ارائه شد. این از همان نوعی است که در اتم روبه‌رو می‌شویم، با این تفاوت که عامل شعاعی $V(r)$ ممکن است متفاوت باشد. در فیزیک هسته‌ای برهم کنش اسپین-مدار تماماً از برهم کنش نوکلئون-نوکلئون ناشی می‌شود. در مورد اتم این عامل منحصر به فرد که توسط نظریه‌ی الکتروستاتیک از نیروهای بین ذرات باردار در حال حرکت تعیین می‌شود. قدرت برهم کنش اسپین-مدار به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شکاف‌های لازم در مدل تولید شوند [۱۹].

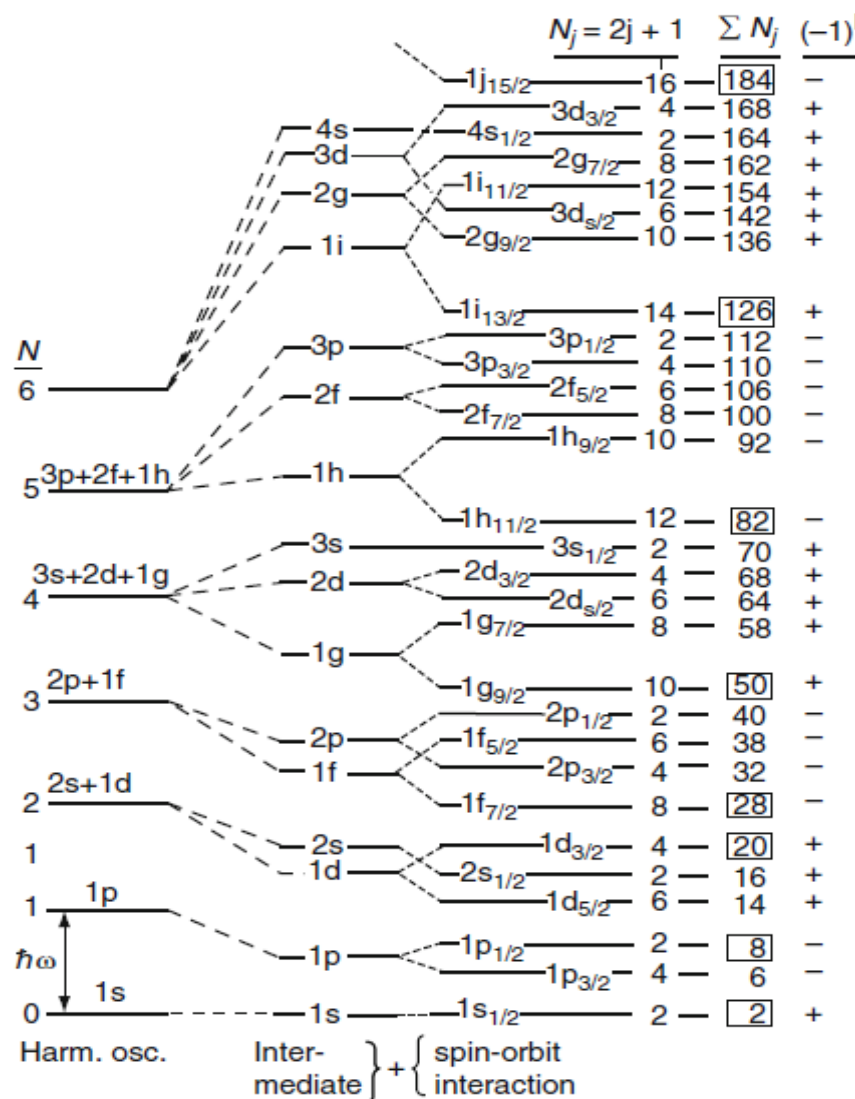
$$2\vec{s} \cdot \vec{l} = \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 = \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad j = l \pm \frac{1}{2} \quad (۱۶-۲)$$

که برای $j = l + \frac{1}{2}$ برابر $1\hbar^2$ و برای $j = l - \frac{1}{2}$ برابر $-\hbar^2$ است. در نتیجه فاصله‌ی بین دو تراز

$j = l + \frac{1}{2}$ و $j = l - \frac{1}{2}$ متناسب با $2l+1$ می‌باشد که ضریب تناسب بستگی به تابع شعاعی $V(r)$ دارد.

با استفاده از روش هارتری-فوک می‌توان میانگین پتانسیل را با شروع از برهم کنش مؤثر نوکلئون-نوکلئون محاسبه کرد. محاسبات هارتری-فوک بر اساس مدل لایه‌ای هسته‌ای استوار است.

در شکل ۹-۲ طرح تقریبی ترازهای پروتون نشان داده شده است. ستون اول انرژی ترازهای نوسانگر هماهنگ، ستون دوم درونیابی طرح ترازها بین چاه مربعی و نوسانگر هماهنگ، ستون سوم جداسازی ترازها بعد از اعمال برهم کنش اسپین-مدار است [۲۰].



شکل ۹-۲ طرح تقریبی برای ترازهای پروتون [۲۰].

فصل سوم

طیف انرژی هسته‌های خاص

۳-۱ مقدمه

مدل خوشه‌ای در آغاز به عنوان مکملی در بررسی مدل پوسته‌ای برای هسته‌های خیلی سبک مورد استفاده قرار گرفت، ولی در سال‌های اخیر، زمینه‌های مختلف مدل خوشه‌ای به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است و در خصوص حالت‌های شبه مولکولی داده‌های زیادی جمع‌آوری شده است به طوری که به عنوان مدلی مهم در بررسی ساختار هسته، برای نواحی انرژی‌های نسبتاً بالای برانگیختگی و همچنین نواحی وسیعی از عدد جرمی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. خوشه آلفا به علت ثبات و پایداری بسیار بالای آن در بین وجود خوشه‌ها و موقعیت فضایی آنها نسبت به یکدیگر، از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. بر اساس مدل لایه‌ای، دو نوترون و دو پروتون این هسته، تراز $1s_{1/2}$ را کاملاً پر کرده و این ذره دارای دو عدد جادویی بوده که بسیار پایدار است. ساختار خوشه‌ای هسته‌های سبک در قالب‌های مختلف از جمله مدل خوشه‌ای جبری (ACM)^۱ برای هسته‌های متشکل از n خوشه آلفا و مدل لایه‌ای خوشه‌ای (CSM)^۲ برای هسته‌های متشکل از n خوشه آلفا به علاوه نوکلئون‌های اضافی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این فصل به مرور کارهای انجام شده در محاسبه طیف انرژی هسته‌های خاص با مدل‌های ساختاری می‌پردازیم. این هسته‌های خاص دارای یک عدد جادویی در ارتباط با تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها می‌باشند.

۳-۲ معرفی پتانسیل‌های پیشنهادی بین ذرات و خوشه‌ها

همانطور که می‌دانیم، حل دقیق معادلات برای سیستم‌های چند جسمی به دلایلی مانند نیروهای تانسوری و جفت شدگی بین معادلات مربوطه بسیار پیچیده و دشوار است. بنابراین، روش‌هایی از قبیل مدل‌سازی باید به کار گرفته شود تا بتوان توضیح مناسبی برای حرکت نوکلئون‌ها

¹ Algebraic Cluster Model

² Cluster Shell Model

در هسته بیان کرد. معادله غیرنسبیتی شرودینگر و معادلات نسبیتی کلاین-گوردن و دیراک به عنوان ابزارهای مفیدی برای مطالعه‌ی اتم‌ها، هسته‌ها، مولکول‌ها و رفتارهای طیفی آنها شناخته شده‌اند. روش‌های مختلفی برای حل این معادلات با پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی استفاده شده است. برخی از این روش‌ها عبارتند از مکانیک کوانتومی ابرتقارن [۲۱ و ۲۲]، انتگرال مسیر [۲۳ و ۲۴]، روش فاکتورگیری [۲۵ و ۲۶]. در سال‌های اخیر، استقبال زیادی از حل سیستم‌های مکانیک کوانتومی در چارچوب روش پارامتری Nikifarov-Uvarof (PNU) شده است [۲۱-۲۶]. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم استفاده می‌شود. از اینرو، در حل معادلات موج شرودینگر، دیراک، کلاین-گوردن و DKP^1 در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است [۲۷ و ۲۸].

مطالعه هسته‌ها تحت شرایط حدی همواره ملزم به فهم نیروهای هسته‌ای بوده است. الاسر^۲ در سال ۱۹۳۴ متوجه ساختار پایدار ویژه‌ای در برخی از هسته‌ها شد که هسته‌های مربوطه شامل تعداد خاصی از نوترون‌ها و پروتون‌ها بودند [۲۹]. در مقایسه با الکترون‌های اتم، او این اعداد را با یک پوسته بسته در مدلی که نوکلئون‌های غیرتعاملی که سطح انرژی اشغال شده توسط یک چاه پتانسیل را اشغال کرده‌اند با استفاده از مدل‌های هسته‌ای و پتانسیل اسپین-مدار وابسته به ایزواسپین مرتبط کرد. کیجون زیت^۳ نشان داد که در محاسبات سیستماتیک خصوصیات حالت پایه هسته با تعداد پروتون $Z=8-20$ انرژی‌های بستگی محاسبه شده در تطابق خوبی با داده‌های تجربی هستند [۳۱ و ۳۰].

¹ Duffin-Kemmer-Petiau

³Elaser

³Zeet

فهم سیر تکاملی ساختار لایه‌ای از پایداری هسته‌های غنی از نوترون نشان از راهکار چالش برانگیز ساختار هسته‌ای است. با یک پوسته پروتون محصور شده، ایزوتوپ‌های ^{17}O , ^{18}O , ^{19}O و ^{20}O یک منطقه ایده‌آل برای بررسی ساختار لایه‌ای و تکامل هسته‌های با جرم میانی از نیروهای هسته‌ای را فراهم می‌کنند [۳۲ و ۳۳]. این ایزوتوپ‌ها دارای عدد دو جادویی با ۱، ۲، ۳ و ۴ نوترون خارج از پوسته بسته هستند. به عنوان مثال، هسته‌های ^{17}O و ^{19}O می‌توانند به عنوان یک هسته دوجادویی با نوکلئون‌های ظرفیت اضافی در تراز $1d_{5/2}$ مدل شوند. ($^{17}\text{O} = n + (n = z = 8)$ و $^{19}\text{O} = 3n + (n = z = 8)$)

اسپین و پاریتت حالت پایه ایزوتوپ‌های ^{17}O و ^{19}O ، $J^\pi = 5/2^+$ می‌باشد، که به اسپین و پاریتت تراز که نوکلئون ظرفیت قرار دارد مرتبط است [۳۴]. ما از مدل لایه‌ای غیر نسبیتی برای محاسبه ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های $^{17-20}\text{O}$ استفاده می‌کنیم. از آنجا که این ایزوتوپ‌ها دارای تعدادی نوکلئون خارج از پوسته بسته هستند، معادله شرودینگر D بعدی را برای بررسی آنها در مدل لایه‌ای غیر نسبیتی بکار گرفته‌ایم. ما پتانسیل اصلاح شده هولسن^۱ بعلاوه یوکاوا^۲ را بین هسته و نوکلئون‌های ظرفیت در نظر گرفتیم، زیرا این پتانسیل‌ها، پتانسیل هسته‌ای مهمی برای توصیف برهمکنش بین تک نوکلئون و کل هسته هستند.

یکی از اولین پتانسیل‌هایی که برای برهم کنش بین ذرات آلفا در بررسی ایزوتوپ آلفا-مزدوج ^8Be به صورت دو خوشه آلفا توسط افضل^۳ و همکارانش پیشنهاد شد، ترکیبی از یک چاه پتانسیل جاذب، شبیه پتانسیل وود-ساکسون^۴، و یک جمله دافعه کولنی بود. پس از آن، علی و بودمر^۱، پتانسیلی

¹ Hulthen

² Yukawa

³ Afzal

⁴ Wood-Saxon

گوسی و دو جمله‌ای، شامل جمله جاذبه و دافعه را بین خوشه‌های آلفا مطرح کردند. پتانسیلی که اخیراً در مدل پدیده شناختی مورد استفاده قرار گرفته است، پتانسیل تغییر یافته وود- ساکسون بوده که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(r) = -V_0 \left[\frac{x}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} + \frac{1-x}{\left(1 + \exp\left(\frac{r-R}{3a}\right)\right)^3} \right] + \frac{V_1}{r} \quad (1-3)$$

که در آن V_0 عمق پتانسیل، R شعاع خوشه آلفا و α برد پتانسیل است. پارامتر x ، نیز به عنوان پارامتر اختلاط^۲ نامگذاری شده است. اما، پتانسیل مینگ روزن^۳ موفقیت خوبی در توصیف برهم کنش بین دو اتم در مولکول‌های دو اتمی ارائه می‌دهد. در فیزیک هسته‌ای نیز برای بررسی ترازهای مقید و ویژگی‌های پراکندگی به کار می‌رود. بنابراین به نظر می‌آید بتوان از آن به عنوان پتانسیل برهمکنش بین هسته‌های شبه مولکولی استفاده کرد. شکل عمومی پتانسیل $M-R$ به صورت زیر است:

$$V(r) = \frac{-A\hbar^2}{2\mu b^2} \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} + \frac{\alpha(\alpha-1)\hbar^2}{2\mu b} \left[\frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} \right]^2 \quad (2-3)$$

در این رابطه کمیت‌های A و μ دو کمیت بدون بعد و b یک کمیت با بعد طول است. بر همین اساس با توجه به سیستم چند ذره‌ای در ایزوتوپ‌های آلفا- مزدوج پتانسیل ذیل، برای برهمکنش بین خوشه‌ها پیشنهاد می‌شود:

$$V_{M.}(x) = -\frac{Ce^{-x/b} + De^{-2x/b}}{(1 - e^{-x/b})^2} + \frac{k}{x} \quad (3-3)$$

¹ Ali-Bodhmer

⁶ The mixing parameter

³ Manning-Rosen

کمیت C در این رابطه به عنوان عمق چاه پتانسیل دافعه و کمیت‌های D و k به ترتیب معرف قدرت مؤلفه جاذبه و دافعه کولنی هستند. برای حل معادله شرودینگر با پتانسیل های معرفی شده، از روش های تحلیلی استفاده می کنیم، از جمله روش NU و روش ابرتقارن. برای آشنایی با روش NU به معرفی آن می پردازیم .

۳-۳ بررسی روش NU

روش (NU) بر اساس کاهش مرتبه دوم که معادله دیفرانسیل به یک معادله تعمیم یافته از نوع فوق هندسی است. این ابزاری قدرتمند ریاضی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می باشد.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\Psi''_{n,\ell}(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi'_{n,\ell}(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_{n,\ell}(s) = 0 \quad (4-3)$$

$\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله ای حداکثر از درجه دوم هستند، و $\tilde{\tau}(s)$ یک چندجمله ای درجه اول، همچنین، n و l به ترتیب عدد کوانتومی شعاعی و عدد کوانتومی زاویه ای هستند. استفاده از روش NU می تواند برای بررسی تحلیلی مسائلی که حل دقیق آنها پیچیده و گاه غیرممکن است، مناسب تر باشد.

$$\Psi_n(s) = \varphi_n(s) y_n(s) \quad (5-3)$$

با جایگذاری ۵-۳ در ۴-۳ داریم:

$$\sigma(s) y''_n(s) + \tau(s) y'_n(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (6-3)$$

که در آن

$$\begin{cases} \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \\ \lambda = K + \pi'(s) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7-3)$$

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (8-3)$$

در این معادله B_n ثابت نرمالیزاسیون است و $\rho(s)$ یک تابع وزن است که شرایط زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (9-3)$$

$\pi(s)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (10-3)$$

عبارت زیر رادیکال در معادله (۱۰-۳) باید به عنوان چند جمله‌ای مرتبه اول باشد. به این ترتیب، $\Delta = b^2 - 4ac$ باید برابر با صفر باشد. در چنین مواردی معادله‌ای برای K به دست می‌آید که مقادیر آن در معادله (۱۰-۳) جایگزین می‌شود. در مقایسه با معادله (۷-۳) ویژه مقادیر انرژی بدست می‌آید.

ما یک میانبر برای این روش ارائه می‌دهیم. بنابراین، در ابتدا فرم کلی معادله شرودینگر را می‌نویسیم. رابطه (۴-۳) را می‌توان به فرم کلی زیر نوشت [۳۵ و ۳۶]

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 s}{s(1 - \varepsilon_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{(-\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0)}{s^2(1 - \varepsilon_3 s)^2} \right] \Psi_{n,\ell}(s) = 0 \quad (11-3)$$

برای معادله شرودینگر، در حضور پتانسیل‌هایی که می‌توانند به صورت فوق نوشته شوند، معادله ویژه مقادیر انرژی و تابع موج از روابط زیر بدست می‌آید:

$$n\varepsilon_2 - (2n+1)\varepsilon_5 + (2n+1)(\sqrt{\varepsilon_9} + \varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_8}) + n(n-1)\varepsilon_3 + \varepsilon_7 + 2\varepsilon_3\varepsilon_8 + 2\sqrt{\varepsilon_8\varepsilon_9} = 0, \quad (12-3)$$

$$\Psi_{n,\ell}(s) = N_{n,\ell} s^{\varepsilon_{12}} (1 - \varepsilon_3 s)^{\varepsilon_{13}} P_n^{(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{16})}(1 - 2\varepsilon_3 s) \quad (3-13)$$

در این رابطه $\Psi(s)$ تابع موج و ε_i ضرایب ثابت هستند که با توجه به پارامترهای اولیه موجود در معادله زیر به دست آمده است. همچنین، n عدد کوانتومی سیستم، $N_{n,l}$ ضریب بهنجارش و $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ چند جمله‌ای ژاکوبین هستند.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_1), \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3),$$

$$\varepsilon_6 = \varepsilon_5^2 + \chi_2, \quad \varepsilon_7 = 2\varepsilon_4\varepsilon_5 - \chi_1,$$

$$\varepsilon_8 = \varepsilon_4^2 + \chi_0, \quad \varepsilon_9 = \varepsilon_3(\varepsilon_7 + \varepsilon_3\varepsilon_8) + \varepsilon_6,$$

$$\varepsilon_{10} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_4 + 2\sqrt{\varepsilon_8} - 1, \quad \varepsilon_{11} = 1 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_4 + \frac{2}{\varepsilon_3}\sqrt{\varepsilon_9} - 1, \varepsilon_3 \neq 0,$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_4 + \sqrt{\varepsilon_8} > 0, \quad \varepsilon_{13} = -\varepsilon_4 + \frac{1}{\varepsilon_3}(\sqrt{\varepsilon_9} - \varepsilon_5) > 0, \varepsilon_3 \neq 0 \quad (14-3)$$

روش پارامتری NU می‌تواند معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را با شرایط ذکر شده حل نماید. ما با مطالعه معادله دیراک، کلاین گوردون و شرودینگر و دیگر معادلات مشابه با کمک این روش برای برخی از پتانسیل‌های خاص معادله ویژه مقداری و تابع موج آنها را بدست آوردیم. با این حال، این روش فقط برای بعضی از پتانسیل‌ها قابل حل است [۳۷ و ۳۸].

۴-۳ معادله کلاین گوردن (D + 1) بعدی

معادله کلاین گوردن در حضور پتانسیل اسکالر و بردار S (r) و V (r) می باشد که $r = |r|$

ذره با اسپین صفر (مانند ذره α) را توصیف می کند، شکل کلی معادله بصورت زیر است [۳۹]:

$$\nabla_D^2 \Psi_{\ell_1 \dots \ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}-1}(r) + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left\{ [E_{n,\ell} - V(r)]^2 - [Mc^2 + S(r)]^2 \right\} \Psi_{\ell_1 \dots \ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}-1}(r) = 0 \quad (۱۵-۳)$$

برای حل معادله لازم است از مختصات ژاکوبی استفاده شود.

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(r_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_j \right), i=1, \dots, N-1 \quad (۱۶-۳)$$

که بر اساس رابطه (۱۶-۳) می توانیم X، فوق شعاع را به صورت زیر تعریف کنیم

$$x^2 = \sum_{i=1}^{N-1} (\zeta_i^2) = \sum_{i=1}^{N-1} (r_i - R)^2 = \frac{2}{N-1} \sum_{k;\ell} r_{k\ell}^2 \quad (۱۷-۳)$$

$$R = \frac{1}{N} \sum_i r_i$$

سیستم های چند ذره ای در چارچوب مرکزجرم از نظر ریاضی بصورت ۳N-۳ بعدی تعریف

می شوند [۴۰]. درضمن در مختصات ژاکوبی D بعدی X، یک بردار شعاعی است. مختصات D بعدی

فوق کروی برای N ذره یکسان توسط عملگر لاپلاس بصورت زیر بیان می شود [۴۱]:

$$-\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\zeta_i}^2 = -\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_x^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2} \right) \quad (۱۸-۳)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم :

$$\psi_{n\ell m}(x, \Omega_D) = U_{n\ell}(x) Y_{\ell}^m(\Omega_D) \quad (۱۹-۳)$$

معادله (۱۹-۳) دو معادله مجزا را بیان می کند که بیانگر هارمونیک های فوق کروی می باشد.

$$L^2(\Omega)Y_\ell^m(\Omega_D) = \ell(\ell + D - 2)Y_\ell^m(\Omega_D) \quad (20-3)$$

شایان ذکر است که پتانسیل اسکالر و برداری یکسان لحاظ شده‌اند. $V(x) = S(x)$ بنابراین با در نظر گرفتن مختصات معادله مستقل از زمان D بعدی فوق شعاعی شرودینگر بصورت زیر داریم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell + D - 2)}{x^2} + \frac{(E^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - 2 \frac{(E + M c^2)}{\hbar^2 c^2} V(x) \right\} U_{n\ell}(x) = 0 \quad (21-3)$$

برای حل معادله فوق، لازم است پتانسیل مناسبی چون پتانسیل هلمن که شامل جمله کولنی و یک جمله کوتاه برد است در نظر گرفته شود:

$$V(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-\alpha x} \quad (22-3)$$

در معادله بالا، a و b پارامترهای حقیقی بوده و α نیز برد پتانسیل می‌باشد. شایان ذکر است معادله (21-3) در صورتی قابل حل است و جوابی دقیق دارد که $l=0$ باشد. برای حل تحلیلی معادله مزبور نیز از تقریب تعمیم یافته $pekeris$ استفاده شده است، این تقریب برای توابع نمایی $e^{-\alpha x}$ ها کاربردی می‌باشد.

$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{\alpha^2}{(e^{-\alpha x} - 1)^2} \quad (23-3)$$

بنابراین معادله (21-3) بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$U_{n,\ell}''(x) + \frac{(D-1)}{x} U_{n,\ell}'(x) + \frac{1}{x^2} [-\eta_2 s^2 + \eta_1 s - \eta_0] U_{n,\ell}(x) = 0 \quad (24-3)$$

پارامترهای η_2 ، η_1 و η_0 به صورت زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= 2\beta b + \ell(\ell + D - 2) \\ \eta_1 &= 2\beta[a + b\alpha], \quad \gamma = \frac{(E^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2}, \quad \beta = \frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} \\ \eta_2 &= [2\beta\alpha^2 b - \gamma]\end{aligned}\quad (25-3)$$

لذا با استفاده از روش حل معادلات دیفرانسیل متعامد فوق هندسی N ، معادله انرژی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$(2n+1)\sqrt{\eta_2} - \eta_1 + 2\sqrt{\eta_2 \left[\frac{(2-D)^2}{4} + \eta_0 \right]} = 0 \quad (26-3)$$

با جایگذاری ۲۵-۳ در ۲۶-۳ داریم :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} [2\alpha^2 b - (E - Mc^2)]} \left\{ \frac{(2n+1) + 2\sqrt{\frac{(2-D)^2}{4} + 2b \frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} + \ell(\ell + D - 2)}}{2\sqrt{\frac{(2-D)^2}{4} + \eta_0}} \right\} \\ - [2a + 2\alpha b] \frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} = 0\end{aligned}\quad (27-3)$$

معادله تابع موج فوق شعاعی نیز برابر است با :

$$U_{n,\ell}(x) = N x^{\frac{(2-D)}{2} + \sqrt{\frac{(2-D)^2}{4} + \eta_0}} e^{-\sqrt{\eta_2} x} L_n^{2\sqrt{\frac{(2-D)^2}{4} + \eta_0}}(2\sqrt{\eta_2} x) \quad (28-3)$$

۳-۵ ویژه مقادیر انرژی و توابع موج

رفتار نیروهای چندجسمی به سادگی توسط فرمول‌بندی هارمونیک فوق کروی مطرح می‌شود. برای سیستم N ذره‌ای بعد از صرف نظر کردن از مختصات مرکز جرم یک معادله $D=3N-3$ بعدی می‌شود. هرگاه ذرات مورد بررسی نوکلئون‌ها باشند می‌توان از اختلاف جرم بین پروتون‌ها و نوترون‌ها چشم‌پوشی کرد. برای چنین سیستمی می‌توان N بردار ژاکوبی تعریف کرد، عنصر حجم در این مختصات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\prod_{i=1}^N dr_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\xi_j = dx \quad (29-3)$$

در روش فوق کروی، یک نقطه در پیکربندی $D = 3N - 3$ بعدی فضا بر روی یک ابررسانای بزرگ (D-1) بعدی فوق کروی با شعاع x نشان داده می‌شود، این متغیر x فوق شعاع نامیده می‌شود. فرض می‌شود پتانسیل $V(x)$ به فوق شعاع x وابسته است. پتانسیل $V(x)$ یک پتانسیل فوق مرکزی است که برای هر چرخش در فضای D یکسان است. معادله شرودینگر D بعدی به شرح زیر است:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{(D-1)}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E_{n,\ell} - V(x) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\ell(\ell + D - 2)}{x^2} \right) \right] R = 0, \quad (30-3)$$

که در این فرمول، $D = 3N - 3$ و μ جرم کاهش یافته سیستم N ذره‌ای است. در این مطالعه ما پتانسیل بهبود یافته هولسن بعلاوه یوکاوا را در نظر می‌گیریم [41-42]:

$$V(x) = -\frac{v_0 \alpha e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} + v_1 \frac{e^{-\alpha x}}{x^2}, \quad (31-3)$$

که در اینجا پارامترهای v_0 و v_1 پارامترهای اصلی هستند، این پارامترهای نیرو هستند، و پارامتر α مربوط به محدوده پتانسیل است. با استفاده از تغییر متغیرهای $U(x) = x^{\frac{D-1}{2}} R(x)$ ، $\lambda = \ell + \frac{D-3}{2}$ با استفاده از تغییر متغیرهای جایگذاری پتانسیل در معادله شرودینگر داریم:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E_{n,\ell} + \frac{v_0 \alpha e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} - v_1 \frac{e^{-\alpha x}}{x^2} - \frac{\hbar^2 \lambda(\lambda + 1)}{2\mu x^2} \right] U(x) = 0. \quad (32-3)$$

معادله (32-3) می‌تواند بطور دقیق برای $\lambda = 0, -1$ حل شود. ما تقریبی را که توسط گرین^۱ و آلدريج^۲ مطرح شده برای حل تحلیلی معادله (32-3) بکار می‌بریم [43]. این تقریب برای $\alpha x \ll 1$

¹ Greene
² Aldrich

معتبر است. ویژگی اصلی این روش حل، جایگزینی عبارت گریز از مرکز توسط یک تقریب که می‌تواند یک معادله، فوق هندسی نرمال را بدست دهد [۴۴].

$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} \quad (33-3)$$

با استفاده از تغییر متغیر $s = \exp(-\alpha x)$ ، معادله (۳۲-۳) به صورت زیر ساده می‌شود [۴۵ و ۴۶]:

$$U''_{n,\ell}(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)} U'_{n,\ell}(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} [-\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0] U_{n,\ell}(s) = 0, \quad (34-3)$$

که پارامترهای χ_0 و χ_2 ، χ_1 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} [v_1 \alpha^2 + v_0 \alpha - E_{n,\ell}] \\ \chi_1 &= \frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} (v_0 \alpha - 2E_{n,\ell}) - \lambda(\lambda + 1) \\ \chi_0 &= -\frac{2\mu E_{n,\ell}}{\hbar^2 \alpha^2} \end{aligned} \quad (35-3)$$

حال با مقایسه معادله (۳۴-۳) و (۱۱-۳)، ضرایب ε_i ($i = 1, 2, 3$) به صورت زیر می‌باشد

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 \quad (36-3)$$

ضرایب ε_i ($i = 4, 5 \dots 13$) نیز بر اساس معادله (۱۴-۳) به دست آمده است که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= 1, & \varepsilon_4 &= 0, & \varepsilon_5 &= -\frac{1}{2}, & \varepsilon_6 &= \chi_2 + \frac{1}{4} \\ \varepsilon_7 &= -\chi_1, & \varepsilon_8 &= \chi_0, & \varepsilon_9 &= \chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}, & \varepsilon_{10} &= 2\sqrt{\chi_0} \\ \varepsilon_{11} &= 2\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}, & \varepsilon_{12} &= \sqrt{\chi_0}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} + \sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (37-3)$$

با استفاده از روش PNU، معادله انرژی بدست می‌آید:

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) +$$

$$2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (38-3)$$

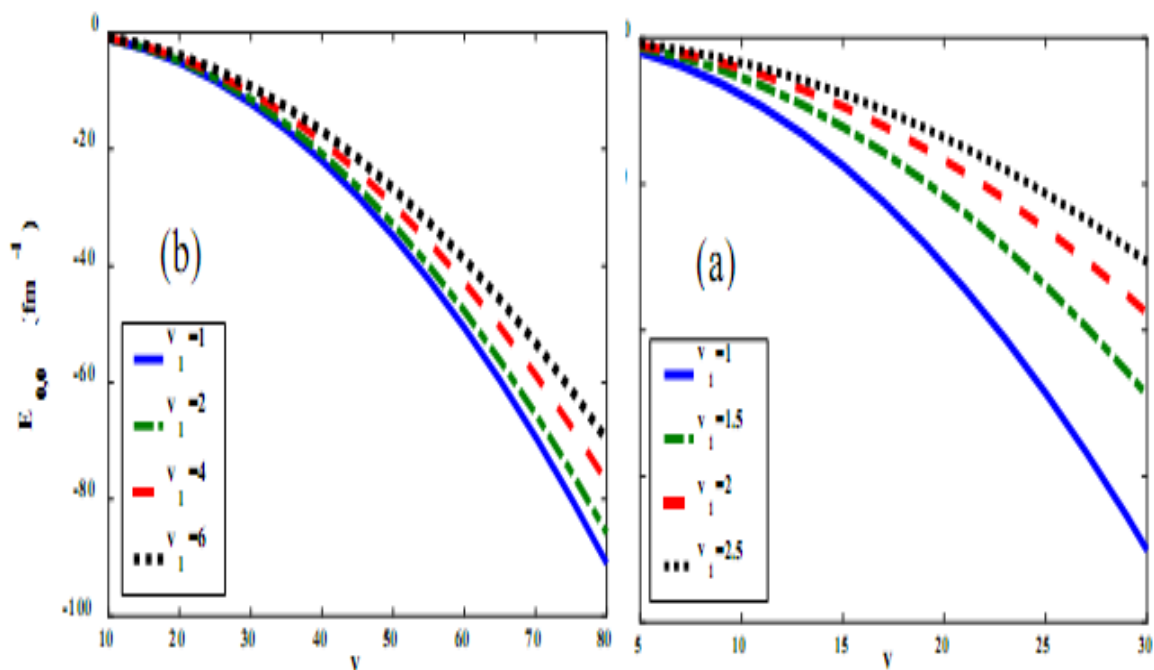
معادله انرژی به صورت زیر بیان می شود:

$$E_{n,\ell} = - \frac{\hbar^2 \alpha^2 \left\{ \left[\frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} v_0 \alpha - \lambda(\lambda+1) - \frac{1}{4} \right] - (2n+1) \left[\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} v_1 \alpha^2 + \lambda(\lambda+1) + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(2n+1) \right] \right\}^2}{2\mu \left\{ (2n+1) + 2\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} v_1 \alpha^2 + \lambda(\lambda+1) + \frac{1}{4}} \right\}^2} \quad (39-3)$$

تابع موج از رابطه زیر بدست می آید:

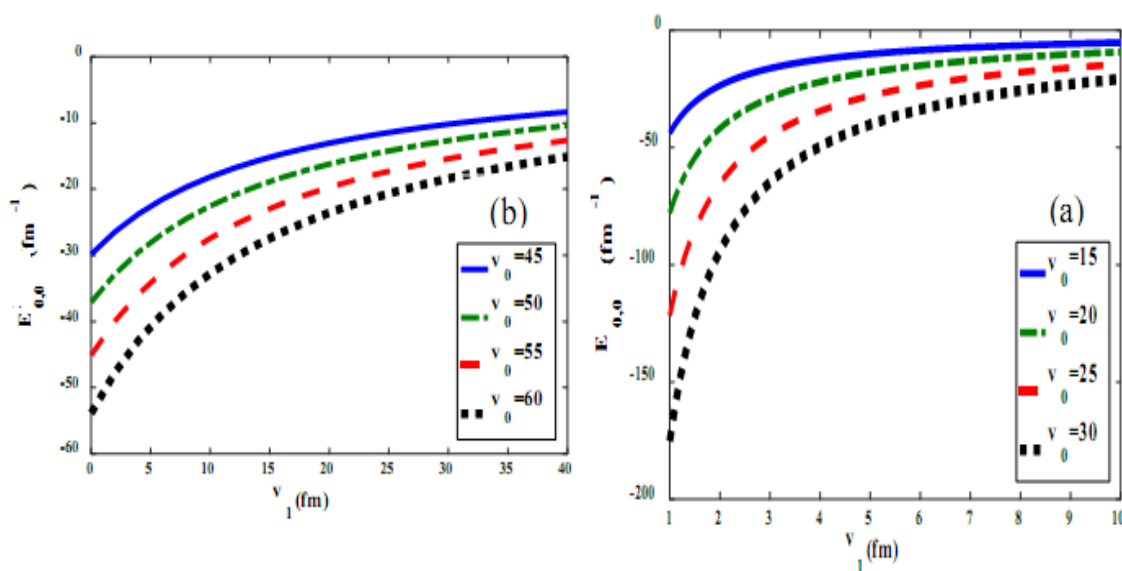
$$R_{n,\ell}(x) = N_{n,\ell} x^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)} (e^{-\alpha x})^{(\sqrt{\chi_0})} (1 - e^{-\alpha x})^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_2 - \chi_1 + \chi_0}\right)} P_n^{\left(2\sqrt{\chi_0}, 2\sqrt{\frac{1}{4} + \chi_2 - \chi_1 + \chi_0}\right)} (1 - e^{-\alpha x}), \quad (40-3)$$

با توجه به معادله (39-3)، ویژه مقادیر انرژی به مؤلفه های پتانسیل فوق مرکزی بستگی دارد. ما محاسبات را برای حالت پایه سیستم های دو و سه جسمی انجام دادیم. با ثابت نگهداشتن پارامترهای $m=8\text{fm}^{-1}$, $\alpha=0.08\text{fm}^{-1}$ به شرطی که $\hbar=c=1$ در واحدهای طبیعی ما وابستگی ترازهای انرژی سیستم های دو و سه جسمی را به پارامتر v_0 بررسی کردیم، همچنین انجام محاسبات برای چندین مقدار v_1 ، در شکل 3-1-a به ترتیب. این پارامترها رفتار خوبی از مقادیر انرژی برای یک v_1 خاص ترازهای انرژی چند جسمی بدست می دهد، که با افزایش v_0 کاهش می یابد، همانطور که باید باشد. به همین ترتیب، انرژی بستگی دو و سه نوکلئونی به پارامتر v_1 در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است در شکل 3-2-a. می توان دید که برای یک v_0 خاص، با افزایش v_1 انرژی بستگی افزایش می یابد.



شکل ۳-۱: انرژی بستگی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب پارامتر v_0 با مقادیر مختلف v_1 برای مقدار

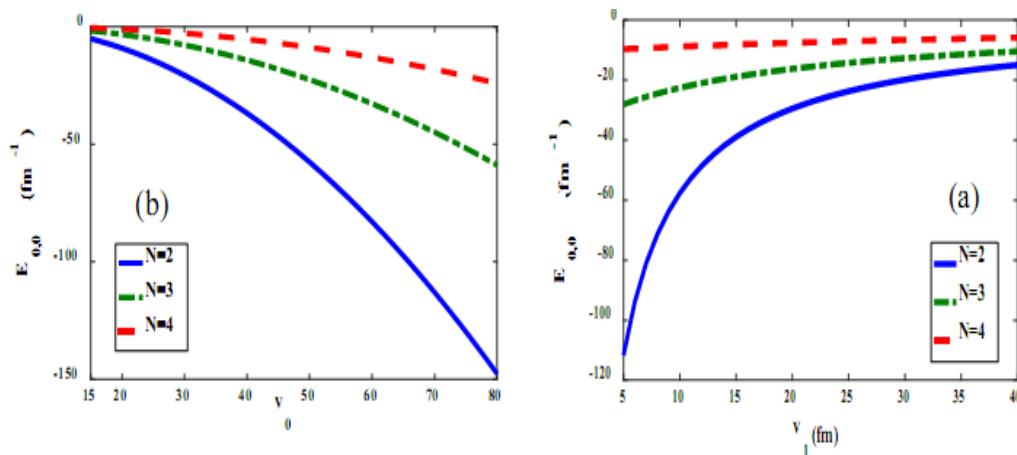
ثابت $\alpha = 0.08 \text{ fm}^{-1}$ ، $m = 8 \text{ fm}^{-1}$ و $\hbar = c = 1$ ، برای سیستم‌های دو جسمی (a)، سه جسمی (b)



شکل ۳-۲: تغییر انرژی بستگی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب پارامتر v_1 با مقادیر مختلف v_0 برای

مقدار ثابت $\alpha = 0.08 \text{ fm}^{-1}$ ، $m = 8 \text{ fm}^{-1}$ و $\hbar = c = 1$ ، برای سیستم‌های دو جسمی (a)، سه جسمی (b)

با توجه به معادله (۳-۴۲) انرژی بستگی سیستم‌های ۲، ۳ و ۴ جرمی را نیز می‌توان مقایسه کرد. این مقایسه در شکل ۳-۳ برای مقادیر مختلف پتانسیل با پارامترهای V_0 و V_1 نشان داده شده است.



شکل ۳-۳: مقایسه بین انرژی بستگی حالت پایه معادله شرودینگر برای سیستم‌های دو جرمی، سه جرمی و چهار جرمی بر حسب مقادیر مختلف V_1 (a) و V_0 (b) برای مقدار ثابت $\alpha = 0.08 \text{ fm}^{-1}$ ، $m = 8 \text{ fm}^{-1}$ و $\hbar = c = 1$

در نهایت، به عنوان کاربردی از این استدلال، ما حالت پایه انرژی را با استفاده از معادله (۳-۴۲) برای بعضی از ایزوتوپ‌های اکسیژن به دست آوردیم. ما تراز انرژی این ایزوتوپ‌ها را در مدل لایه‌ای غیرنسبیتی بررسی کرده‌ایم. این ایزوتوپ‌ها می‌توانند به صورت یک پوسته بسته دوجادویی ^{16}O با نوکلئون اضافی (ظرفیت) در تراز $1d_{5/2}$ مدل شوند. مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج تجربی و سایر کارهای انجام شده در جدول (۳-۱) نشان داده شده است. پارامترها را به صورت $\alpha = 0.014 \text{ fm}^{-1}$ ، $n=1$ ، $l=2$ در $(1d_{5/2})$ و $N=2,3,\dots$ در معادله (۳-۴۲) برای هسته‌های ^{17}O ، ^{18}O ، ^{19}O و ^{20}O در مدل ریاضی پیشنهادی در نظر گرفتیم.

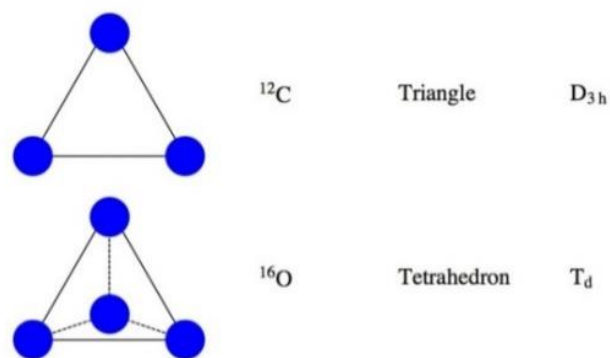
جدول ۳-۱ ویژگیه مقادیر انرژی حالت پایه برای برخی ایزوتوپ‌های اکسیژن

Oxygen Isotopes	Potential parameters		$E_{n,l}$ (MeV)		
	v_0 (MeV.fm)	v_1 (MeV.fm ²)	Our	Other	Exp[26]
¹⁷ O	۸۲/۴۲۳۵	۳/۲۱۸۳	-۱۳۲/۱۴۲۳	-۱۳۲/۸۸۰ [۱۱]	-۱۳۱/۷۶۲۴
¹⁸ O	۹۴/۴۳۰۱	۰/۵۳۸۷	-۱۴۰/۱۹۹۳	-۱۳۹/۹۰۹ [۲۵]	-۱۳۹/۸۰۸۷
¹⁹ O	۲۰۶/۴۵۶۶	۴/۱۰۲۲	-۱۴۵/۰۰۴۵	-۱۴۶/۸۷۰ [۱۱]	-۱۴۳/۷۶۰۰
²⁰ O	۱۵۳/۵۰۸۲	۲/۱۰۹۳	-۱۵۲/۲۰۳۳	-۱۵۲/۳۰۰ [۲۵]	-۱۵۱/۳۷۱۴

با توجه به شکل ۳-۱ تا ۳-۳، پارامتر v_1 کوچکتر از v_0 است و با توجه به این که مقدار انرژی بستگی برای هر ایزوتوپ متفاوت است، منطقی است که مقادیر پارامترهای پتانسیل برای هر ایزوتوپ متفاوت هستند. این مقادیر با توجه به مقادیر تجربی و فرایند حل برای ایزوتوپ های اکسیژن محاسبه می‌شوند.

۳-۶ محاسبه انرژی ایزوتوپ ¹²C و ¹⁶O

هسته ¹⁶O یک مورد آزمایشی برای بررسی مدل های ساختاری لایه ای و خوشه ای می باشد [۴۷-۴۸]. نتایج تجربی و تئوری مؤید یک ساختار چهارضلعی برای حالت پایه و برانگیخته این هسته بوده است [۴۹-۵۱]. تحقیقات مشابهی بر روی ¹²C انجام گرفته است که تأیید کننده ساختاری سه وجهی برای این هسته می‌باشد [۵۰ و ۵۲]. در شکل ۳-۴ ساختارهای خوشه‌ای مشاهده شده برای این دو ایزوتوپ نشان داده شده است.



شکل ۳-۴ ساختار خوشه‌ای ایزوتوپ‌های ^{12}C و ^{16}O

با استفاده از پتانسیل مربوط به رابطه (۳-۳) و حل دقیق معادله به روش NU جوابهای مربوط به دو ایزوتوپ ^{16}O و ^{12}C را در جداول زیر مشخص نموده‌ایم.

جدول ۳-۲: مقایسه ترازهای انرژی محاسبه شده ایزوتوپ ^{12}C با نتایج تجربی

تراز	$E_{\text{cal.}}(\text{MeV})$	$E_{\text{exp.}}(\text{MeV})$
تراز حالت پایه	-۹۲/۶۱	-۹۲/۱۶
اولین تراز برانگیخته	-۸۸/۰۱	-۸۷/۷۲

پس از تعیین ضرایب از طریق برازش کردن بر روی سیستم خوشه شده، نتایج محاسبه شده برای حالت پایه و اولین تراز برانگیخته ایزوتوپ ^{16}O در جدول ۳-۳ نشان داده شده است.

جدول ۳-۳: مقایسه ترازهای انرژی محاسبه شده ایزوتوپ ^{16}O با نتایج تجربی

تراز	$E_{\text{cal.}}(\text{MeV})$	$E_{\text{exp.}}(\text{MeV})$
تراز حالت پایه	-۱۲۷/۸۹	-۱۲۷/۶۲
اولین تراز برانگیخته	-۱۲۱/۸۴	-۱۲۱/۵۷

۷-۳ حل معادله شرودینگر با پتانسیل شبه هلمن:

برای برهم کنش بین ذرات، ما پتانسیل شبه هلمن را انتخاب نمودیم

$$V(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-\alpha x} \quad (۴۱-۳)$$

این پتانسیل از دو جمله تشکیل شده است: پتانسیل شبه یوکاوا که همانند یوکاوا تابع نمایی از فاصله است و پتانسیل شبه کولنی که بستگی ساده ای به فاصله دارد. همچنین برای درکی بهتر از پتانسیل معرفی شده شکلی از آن را با پارامترهای اختیاری رسم کرده ایم.

قسمت شعاعی معادله شرودینگر با قرار دادن پتانسیل شبه هلمن به صورت رابطه زیر بیان می شود

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \left(-\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-\alpha x} \right) - \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu x^2} \right] R = 0 \quad (۴۲-۳)$$

برای ^{12}C می دانیم این هسته شامل ۶ پروتون و ۶ نوترون می باشد که تا تراز $1p$ پر می شوند برای بررسی انرژی حالت پایه ایزوتوپ های زوج-زوج یک هسته در نظر می گیریم که این هسته می بایستی هم عدد پروتونی و هم عدد نوترونی جادویی داشته باشد. برای ایزوتوپهای زوج-زوج هلیوم را به عنوان هسته با پوسته بسته انتخاب می کنیم. برای ^{12}C هشت نوکلئون ظرفیتی باقیمانده را برای محاسبه انرژی حالت پایه استفاده می کنیم و سیستم مورد مطالعه ماه ۸ ذره ای خواهد بود و با توجه به رابطه $D = 3N - 3$ برای این هسته $D = 2l$ و به همین صورت برای ^{16}O نیز ۱۲ نوکلئون ظرفیتی در نظر می گیریم و $D = 2l$ می شود البته ما معادله شرودینگر را در حالت کلی و در D بعد حل می کنیم تا بتوان برای دیگر ایزوتوپ های زوج-زوج تعمیم دهیم

اگر پتانسیل (۴۲-۳) بسط داده شده را در معادله شرودینگر قرار دهیم به رابطه ی زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E x^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} x (-a - \alpha b) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(b + \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu} \right) \right) = 0 \quad (43-3)$$

برای حل معادله بالا ما از تغییر متغیر زیر را استفاده می کنیم:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + \alpha a) = -\varepsilon^2$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (a - \alpha b) = \beta \quad (44-3)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(b + \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu} \right) = \gamma$$

در این صورت معادله (43-3) به شکل (45-3) تبدیل می شود:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} (-\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma) R = 0 \quad (45-3)$$

با مقایسه با روش NU

$$\tilde{\tau} = D - 1, \quad \sigma = x, \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma \quad (46-3)$$

معادله انرژی به صورت زیر بدست می آید:

$$E_n = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(a - \alpha b)^2}{\left[\sqrt{\frac{8\mu}{\hbar^2} b + 4l(l+D-2) + (2-D)^2 - (2n-1)} \right]^2} \quad (47-3)$$

در این کار ما ترازهای انرژی را برای ایزوتوپ های کربن و اکسیژن بدست آوردیم. در توصیف

غیرنسبیتی از معادله شرودینگر با پتانسیل برهم کنشی شبه هلمن با استفاده از روش تحلیل NU برای

بررسی آنها استفاده کردیم و ویژه مقادیر انرژی را با توجه به رابطه (47-3) بدست آوردیم که نتایج

حاصل از آن در جدول زیر ذکر شده است. با توجه به توافق بدست آمده بین مقادیر محاسبه شده و

مقادیر تجربی می‌توان گفت که روش پیشنهادی ما در بررسی اصلاحات مربوط به مشاهدات و توصیف خواص سیستم های چندجسمی هسته‌ای، به عنوان یک روش ساده مفید باشد.

جدول ۳-۴. انرژی حالت پایه برای ایزوتوپ های ^{12}C و ^{16}O

ایزوتوپ	تراز	$E \text{ (MeV)}$	
		Our	Exp [۱۰،۱۱]
^{12}C	تراز حالت پایه	-۹۲.۷۲	-۹۲.۱۶
^{16}O	تراز حالت پایه	-۱۲۷.۶۲	-۱۲۷.۸۹

۳-۸ محاسبه انرژی حالت پایه در مدل لایه ای و مدل خوشه ای

گشتاورهای چار قطبی الکتریکی و دو قطبی مغناطیسی را می‌توان با استفاده از یک روش تجربی تعیین کرد که مبتنی بر روش تشدید مغناطیسی هسته ای است. در فیزیک هسته ای، مطالعه ایزوتوپ ها و محاسبه خصوصیات استاتیکی در مدل های مختلف هدف اصلی است. مهمترین مدلها در فیزیک هسته ای مدل‌های پوسته ای و خوشه ای هستند. ساختار خوشه در هسته به این معنی است که هسته به عنوان ترکیبی از خوشه رفتار می‌کند، و خوشه به معنای زیرساخت هایی با موقعیت مکانی خاص است که از نوکلئون ها با همبستگی های قوی تشکیل شده است. از نظر تئوری، انرژی ایزوتوپ های لیتیوم در بسیاری از موارد مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. فورسن و همکارانش شعاع باری و گشتاور چارقطبی الکتریکی را برای $A \leq 11$ در ایزوتوپ های لیتیوم و بریلیوم بررسی کردند.

آنها نتایج خود را در دو برهم کنش نوکلئون_ نوکلئون مختلف بررسی کردند:

(۱) برهم کنش CD-Bonn 2000 (CDB2k) که وابسته به بار برهمکنش نوکلئون_ نوکلئون بر پایه‌ی

تبادل یک پیونی است [۵۵].

(۲) INOY IS-M یک برهمکنش پدیدار شناختی است که در امواج جزئی معرفی می‌شود تا انرژی

بستگی را به درستی توصیف کند [۵۶].

توصیف یک مدل مناسب سازگار با تجربه در گرایش‌های مختلف فیزیک برای حل مسائل بسیاری مفید است. در فیزیک هسته‌ای، به دلیل پیچیدگی‌های پتانسیل، باید مدلی در نظر گرفته شود که بر این پیچیدگی‌ها غلبه کند. در مدل‌های مختلف هسته‌ای، مدل خوشه‌ای و مدل لایه‌ای پاسخ‌های قابل توجهی برای هسته‌ها، به ویژه هسته‌های سبک دارند. از آنجا که تابع موج حاوی مقادیر زیادی از اطلاعات لازم برای تشریح سیستم کوانتومی است، بنابراین حل معادلاتی مانند معادله شرودینگر در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی بسیار مهم است. ایزوتوپ‌های لیتیوم به دلیل نتایج تجربی غنی در ویژگی‌های استاتیکی مورد توجه بسیاری قرار گرفته‌اند. مطالعات اخیر برخی از خصوصیات استاتیکی ایزوتوپ‌های لیتیوم مانند شعاع بار، طیف انرژی و گشتاور چار قطبی الکتریکی را مورد بررسی قرار داده‌اند که تصویر خوبی از ساختار هسته‌ای آنها ارائه می‌دهد.

در این بخش ما دو ایزوتوپ پایدار از ایزوتوپ‌های لیتیوم 6Li و 7Li را در دو روش مورد بررسی قرار داده‌ایم:

(۱) مدل لایه‌ای: در مدل لایه‌ای، ترازهای انرژی هسته به عنوان لایه‌ها و زیر لایه‌هایی در نظر گرفته می‌شود که هسته‌ها در آنها تعریف شده‌اند. در مدل لایه‌ای، با استفاده از اصل طرد پائولی، ساختار هسته بر اساس سطح انرژی بیان می‌شود، که در پیش بینی در اعداد جادویی موفقیت آمیز بوده است.

شواهد مربوط به اعتبار مدل لایه‌ای از مشاهدات تجربی مانند انرژی بستگی، اسپین و ... حاصل می‌شود. در این مدل هسته‌های ${}^6\text{Li}$ و ${}^7\text{Li}$ را به صورت یک هسته با پوسته بسته (${}^4\text{He}$) و تعدادی نوکلئون در نظر می‌گیریم. نوکلئون‌های بیرون پوسته بسته را به صورت یک سیستم دو و سه ذره‌ای فرض کرده ایم.

(۲) مدل خوشه‌ای: مدل خوشه‌ای یکی از بهترین روش‌ها برای توصیف سیستم‌های چند ذره‌ای در مدل‌های هسته‌ای است. مطالعه خصوصیات سیستم‌های چند ذره‌ای به دلیل داشتن درجه آزادی بالا پیچیده و دشوار است، بنابراین مدل خوشه‌ای یکی از راه حل‌های مفید برای حل این مشکل است، ما به جای بررسی ذرات منفرد، برهم کنش بین خوشه‌ها را در نظر می‌گیریم. طبق مدل خوشه‌ای، هسته ترکیبی از زیر سیستم‌ها با موقعیت مکانی خاص متشکل از نوکلئون‌های کاملاً همبسته است. یکی از مهمترین خوشه‌ها خوشه آلفا است. در مدل خوشه‌ای ${}^6\text{Li}$ را به صورت یک ذره ی آلفا (شامل دو پروتون و دو نوترون است) و دوترون ($\alpha + {}^2\text{H}$) و ${}^7\text{Li}$ را به صورت یک ذره‌ی آلفا و تریتون ($\alpha + {}^3\text{H}$) به عنوان یک سیستم دو ذره‌ای در نظر گرفته ایم.

با انتخاب پتانسیل مناسب در مدل خوشه‌ای و لایه‌ای، انرژی بستگی حالت پایه و تابع موج و در نهایت گشتاور چار قطبی الکتریکی ایزوتوپ‌های لیتیم با حل معادله غیرنسبیتی (شرودینگر) بررسی کردیم. در مدل خوشه‌ای که اخیراً مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، نوکلئون‌ها به عنوان خوشه‌هایی در نظر گرفته شده اند که از پیچیدگی سیستم‌های چند ذره‌ای می‌کاهند.

برای محاسبه گشتاور چار قطبی الکتریکی ما به تابع موج سیستم نیاز داریم. بنابراین ما از معادله شرودینگر استفاده می‌کنیم و آن را برای این مدل‌ها حل کرده و سپس انرژی حالت پایه و تابع موج

را بدست می آوریم. نتایج گشتاور چارقطبی بدست آمده از دو مدل مورد نظر را با نتایج کارهای دیگران و داده های تجربی مقایسه می کنیم که از همخوانی خوبی برخوردار هستند.

۳-۸- معادله شرودینگر در مدل خوشه ای

برای بررسی هسته ها از دو دیدگاه استفاده می شود: نسبیتی و غیر نسبیتی، هر یک از آنها از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. در این کار ما از یک سیستم غیر نسبیتی استفاده می کنیم. در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، معادله شرودینگر به شرح زیر است:

$$H\psi = E\psi, \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right\} \psi_{n,l}(r) = E_{n,l} \psi_{n,l}(r) \quad (3-48)$$

که در آن H و E به ترتیب هامیلتونی و انرژی سیستم هستند.

برای یک سیستم دوخوشه ای، معادله شرودینگر برای پتانسیل مرکزی $V(r)$ به فرم زیر است

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi_{n,l}(r) + (V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}) \psi_{n,l}(r) = E_{n,l} \psi_{n,l}(r) \quad (3-49)$$

اولین قدم در مطالعه خواص هسته ها در مدل لایه ای و خوشه ای انتخاب یک پتانسیل مناسب است

[۵۲، ۵۳]. به همین دلیل، در ساختار خوشه ای، پتانسیل برهم کنش پدیدارشناختی بین خوشه آلفا در

نظر گرفته شده است

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} + \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} \quad (3-50)$$

پتانسیل یوکاوا یکی از مهمترین پتانسیل‌هایی است که توسط بسیاری از محققان فیزیک و شیمی فیزیک مورد بررسی قرار گرفته است [۵۳و۵۴]. در این کار ما از پتانسیل درجه دوم معکوس یوکاوا استفاده می‌کنیم و به دلیل اشباع نیروی هسته‌ای در فواصل کوتاه، یک جمله دافعه به پتانسیل به عنوان برهمکنش بین ذرات و خوشه‌ها اضافه می‌شود. پارامتر V_0 توصیف عمق چاه پتانسیل است، α نشان دهنده دامنه پتانسیل است و b پارامتر قابل تنظیم است.

با جایگزاری معادله (۳-۵۰) در (۳-۴۹)، قسمت شعاعی معادله شرودینگر به صورت زیر می‌شود

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} - \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} \right] R = 0 \quad (۳-۵۱)$$

با ساده سازی، معادله‌ی (۳-۵۱) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} \left[-\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma \right] R = 0, \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E & \varepsilon > 0 \\ l(l+1) + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + b) = \gamma \\ \frac{2\mu}{\hbar^2} (\alpha b + 2V_0 \alpha) = -\beta \end{cases} \quad (۳-۵۲)$$

از معادله (۳-۵۲) می‌توان دریافت که این معادله دارای جمله‌های مربع نمایی و معکوس مربع شعاعی است، که به صورت تحلیلی حل نمی‌شوند، بنابراین ما از روش NU استفاده می‌کنیم، که در فصل قبلی آن را توضیح داده‌ایم.

۳-۸-۲ روش محاسبه و نتایج

با بهره‌گیری از روش NU و مقایسه روابط (۳-۵۲) و (۳-۴) داریم

$$\tilde{\tau}=2, \sigma=r, \sigma^2=r^2, \tilde{\sigma}=-\varepsilon^2 r^2-\beta r-\gamma \quad (53-3)$$

با جایگزاری رابطه بالا در رابطه (۷-۳) و در نظر گرفتن روش NU، $\pi(s)$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\pi(s)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2 \varepsilon r \pm \sqrt{1+4 \gamma}) \quad (54-3)$$

با توجه به رابطه‌ی $\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2 \pi(s)$ و مشتق منفی آن، فرم مناسب برای این پارامتر به صورت زیر بدست می‌آید

$$\tau=1-(2 \varepsilon r-\sqrt{1+4 \gamma}) \quad (55-3)$$

در نهایت با در نظر گرفتن روابط (۷-۳) و (۵۲-۳) معادله ویژه مقادیر انرژی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E=-\frac{2 \mu}{\hbar^2} \frac{(\alpha b+2 V_0 \alpha)^2}{\left[2 n+1+\sqrt{1+4 l(l+1)+\frac{2 \mu}{\hbar^2}\left(V_0+b\right)}\right]^2} \quad (56-3)$$

با استفاده از $\psi(s)=\varphi(s) y(s)$ ، و با توجه به معادلات (۵۲-۳)، تابع موج معادله شرودینگر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\psi=B_n r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{1+4 \gamma}} \exp (-\varepsilon r) L_n^{\sqrt{1+4 \gamma}}(2 \varepsilon r) \quad (57-3)$$

که در رابطه ی بالا B_n ثابت بهنجارش است. پارامترهای پتانسیل با استفاده از برازش کردن انرژی حالت پایه بدست می آید که در اینجا پارامترهای انتخاب شده برای 6Li در حالت n و l برابر ۱ به صورت زیر است:

$$V_0 = 42.3 \text{ MeV}, \quad b = 1.7 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.00125 \text{ fm}^{-1}$$

و برای 7Li این مقادیر به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$V_0 = 35 \text{ MeV}, \quad b = 1.15 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.00158 \text{ fm}^{-1}$$

مقادیر انرژی حالت پایه برای این دو ایزوتوپ در جدول (۳-۵) نشان داده شده است.

۳-۸-۳ معادله شرودینگر در مدل لایه ای

مطالعه برهم کنش نوکلئون_ نوکلئون برای یافتن بسیاری از خواص مهم سیستم های چند هسته ای بسیار مفید است. در این بخش با در نظر گرفتن یک هسته به عنوان پوسته بسته، معادله (۳-۵۱) را برای برهم کنش بین نوکلئون ها انتخاب می کنیم. برای مطالعه طیف انرژی و تابع موج برای سیستم N-ذره ای، ما از معادله شرودینگر مستقل از زمان استفاده می کنیم [۵۹ و ۵۷] که به شرح زیر است

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} - \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+D-2)}{r^2} \right] R = 0 \quad (58-3)$$

که $R(r)$ تابع موج قسمت شعاعی هستند. در معادله بالا $D = 3N - 3$ و μ جرم کاهش یافته است.

E نشان دهنده انرژی سیستم است. برای حل معادله فوق، ما داریم

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} E r^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 + \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 (2\alpha r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} b + \frac{2\mu}{\hbar^2} b \alpha r - l(l+D-2) \right] R = 0 \quad (59-3)$$

با ساده سازی معادله بالا داریم

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} [-\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma] R = 0, \quad \begin{cases} \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + b) + l(l+D-2) = \gamma \\ \frac{2\mu}{\hbar^2} (2\alpha V_0 + b\alpha) = -\beta \\ \frac{2\mu}{\hbar^2} E = -\varepsilon^2 \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (60-3)$$

برای بسیاری از انواع برهم کنش ها حل دقیق معادله شرودینگر وجود ندارد. بنابراین، همانطور که قبلا ذکر شد برای حل اینگونه معادلات از انواع روش های مختلف مانند روش ابر متقارن [۶۰ و ۶۱] و روش NU [۵۸] استفاده شده است.

$$\tilde{\tau} = D-1, \quad \sigma = r, \quad \sigma^2 = r^2, \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma \quad (61-3)$$

با بهره گیری از روش NU برای $\pi(s)$ و تحلیل روابط داریم

$$\pi(s) = \frac{2-D}{2} \pm \frac{1}{2} (2\varepsilon r \pm \sqrt{(2-D)^2 + 4\gamma}) \quad (62-3)$$

$$\tau = 1 - (2\varepsilon r - \sqrt{(2-D)^2 + 4\gamma}) \quad (63-3)$$

همانطور که قبلا ذکر شد، ما می توانیم از معادله انرژی استفاده کنیم. بنابراین انرژی حالت پایه به صورت زیر بدست می آید:

$$E = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(2V_0\alpha + b\alpha)^2}{\left[2n+1 + \sqrt{(2-D)^2 + 4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + b) + l(l+D-2)\right)} \right]^2} \quad (64-3)$$

با دستیابی به این معادله مهم، می‌توانیم انرژی را برای ایزوتوپ‌های ${}^6\text{Li}$ و ${}^7\text{Li}$ در حالت پایه‌اشان با اختصاص مقادیر مناسب به ضرایب پتانسیل محاسبه کنیم. شایان ذکر است که در مدل لایه ای، نوکلئون‌ها به عنوان یک سیستم دو و سه ذره نیز در نظر گرفته شده است.

پارامترهای پتانسیل با استفاده از برازش کردن انرژی حالت پایه بدست می‌آیند، که در اینجا پارامترهای انتخاب شده برای ${}^6\text{Li}$ در حالت n و l برابر ۱ به صورت زیر است:

$$V_0 = 80 \text{ MeV}, \quad b = 100 \text{ MeV}, \quad \alpha = 1.12 \text{ fm}^{-1}$$

و برای ${}^7\text{Li}$ این مقادیر به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$V_0 = 40 \text{ MeV}, \quad b = 1 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.00158 \text{ fm}^{-1}$$

و تابع موج حالت پایه به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\psi = B_n r^{\frac{1}{2}((2-D)+\sqrt{(2-D)^2+4\gamma})} \exp(-\epsilon r) L_n^{\sqrt{(2-D)^2+4\gamma}}(2\epsilon r), \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 + b) + l(l + D - 2) \quad (۶۵-۳)$$

نتایج انرژی حالت پایه در جدول (۳-۳) نشان داده شده است. توجه داریم که دو روش مورد استفاده در این مطالعه مدل لایه ای و مدل خوشه ای است. نتایج به دست آمده از مدل خوشه ای با نتایج تجربی سازگارتر است، اگرچه اختلاف بین این دو مدل بسیار کم است.

از آنجا که هسته در حالت پایه دارای اسپین $3/2^-$ ، $J^\pi = 1^+$ است، بنابراین نمی‌توان از اثر جفت شدن اسپین در مدارهای $L = 1$ چشم‌پوشی کرد. بنابراین، با استفاده از معادله (۳-۶۶)، اثر جفت

شدگی اسپین-مدار بر روی ترازهای انرژی به عنوان یک عامل اختلال مرتبه اول محاسبه می شود. نتایج محاسبه در جدول (۳-۵) نشان داده شده است.

$$E_n^{(1)} = \langle n | V_{LS}(r) \vec{L} \vec{S} | n \rangle$$

$$= \int \psi^*(r) \frac{\hbar^2}{2m_0^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} \vec{S} \psi(r) r^2 dr$$

(۳-۶۷)

جدول ۳-۵: مقایسه انرژی بستگی با نتایج تجربی و کارهای دیگران

Isotope	J^π	$E (MeV)$						
		Shell model Exp[۷۷]	L.S	Cluster model	L.S	CDB2k [۷۶]	INOY [۷۶]	
6Li	1^+	۳۱/۶۸۳۳	۳۱/۹۰	۳۱/۷۲۹۶	۳۱/۸۳۰۱	۲۹/۰۴ (۴۱)	۳۲/۳۳ (۱۹)	۳۱/۹۹
7Li	$3/2^-$	۳۹/۶۴۳۹	۳۹/۶۸۵۷	۳۹/۱۲۴۱	۳۹/۱۷۴۱	۳۵/۵۶ (۲۳)	۳۹/۶۲ (۴۰)	۳۹/۲۴

۳-۹ بحث و نتیجه گیری

در این کار، ما به بررسی سیستم مقید چند جسمی غیرنسبیتی با ارائه روش تحلیلی معادله D بعدی شرویدینگر با استفاده از مختصات ژاکوبی و پتانسیل تعمیم یافته هولسن بعلاوه یوکاوا پرداختیم. با بکارگیری روش پارامتری NU، تابع موج فوق شعاعی، توابع فوق هندسی و معادله انرژی را بدست آوردیم. همچنین وابستگی انرژی بستگی سیستم های دو و سه جسمی به پارامترهای پتانسیل پیشنهادی را نیز بررسی کردیم. سرانجام، انرژی حالت پایه برخی ایزوتوپ های اکسیژن را بدست آوردیم. مشهود است که رویکرد پیشنهادی ما در بررسی سیستم غیرنسبیتی و فهم ویژگی های سیستم های هسته ای چندجسمی در عین سادگی مفید و کارآمد است.

مراجع

[^۱] برون ب ال ، مهمان دوست خواجه داد ع ،(۱۳۹۱) "مباحثی در فیزیک ساختار هسته ای"، انتشارات مرنیز ،

مشهد.

[^۲] کرین ک اس ، ترجمه میرفخرایی ن و مدرس م ،(۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته ای"، جلد اول ، چاپ اول،

مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

[^۳] کرین ک اس ، میرفخرایی ن و مدرس م ،(۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته ای"، جلد دوم ، چاپ اول، مرکز نشر

دانشگاهی، تهران.

[^۴] H.Frauenfelder and, E.M.Henley, "Subatomic Physics" Prentice Hall, ISBN 0138594309.(1991)

[^۵] N. D. Cook, Models of the Atomic Nucleus, ISBN -10 : 3642147364 (۲۰۱۰).

[^۶] W. E. Meyerhof, Elements of nuclear physics, ISBN ۹۶۴-۵۷۸۲-۰۷-۴ (۱۹۲۲).

[^۷] P. Goldhammer, Reviews of Modern Physics ۳۵, ۴۰ (۱۹۶۳).

[^۸] Freer ,M. ,Horiuchi,H. ,Kanada-En yo,Y. ,Lee,D. ,and MeiBner,U,G.,(2018) ,

"Microscopic clustering in light nuclei", Rev Mod Phys, vol. 90, no.3, 035004

[^۹] Rutherford ,E. ,(19۱۲) , "The scattering of a and B particles by matter and the structure of the atom", Philos. Mag. , vol.92, no.4, pp.379-398

[^{۱۰}] Ebran, J.P. ,Khan,E. ,Niksic,T. ,and Vretenar,D. ,(2014) , "Crystal ,cluster and quantum liquid nuclear states " , JPCS569,012006

[^{۱۱}] Griffiths D. J . (1984), "Introduction to Elementary Particles", John Wiley & Sons, Inc, pp. 27 .

[^{۱۲}] Naghdi M.(2014) "Nucleon-Nucleon Interaction" Phys. Part. Nucl. 5, 924.

[^{۱۳}] Taketani M. Machida S. and Ohanuma S, (1952) "The meson theory of nuclear

[^{۱۴}] Doleschall P., Borbely I. Papp Z. and Plessas W, (2003) "interaction and threenucleon bound states" Phys. Rev. C 67, 064005

[^{۱۵}] Naghdi M.(2014) "Nucleon-Nucleon Interaction" Phys. Part. Nucl. 5, 924.

[^{۱۶}] Kalantar-Nayestanaki N. Epelbaum E. Messchendorp J. G. and Nogga A. (2012) "Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems" Reports on Progress in Physics., 75, 016301

- [15] Honma, M. Otsuka, T. Brown B. A. and Mizusaki T. (2002) "Effective interaction for pf-shell nuclei" Phys. Rev. C 65., 061301.
- [16] Doma S. B. (2002) "Ground State Characteristics of the Light Nuclei with $A \leq 6$ on the Basis of the Translation Invariant Shell Model by Using Nucleon-Nucleon Interactions" High Energy Physics and Nuclear Physics., 26, 9, pp. 941-948
- [17] Mayer. G. M, Hans. J, and Jensen. D, (1955) "Elementary Theory of Nuclear Shell Structure", John Wiley. New York.
- [18] Vertes. A, Nagy. S, Klencsar. Z, Lovas. G. R, and Rosch. F, (2011) "Handbook of Nuclear Chemistry", Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- [19] F. Yasuk, A. Durmus, I. Boztosun. "Exact analytical solution to the relativistic Klein-Gordon equation with noncentral equal scalar and vector potentials" J. Math. Phys., 47 082302 (2006).
- [20] F. Cooper, J. Ginocchio A. Khare, "Derivation of the S matrix using Supersymmetry" Phys. Lett. A, 129 145 (1988).
- [21] R. Dutt, A. Khare and U.P. Sukhatme, "Supersymmetry and shape invariance and Exactly solvable potentials", Am. J. Phys., 56 163 (1988)
- [22] H. F. Jones, R. J. Rivers, "Which Green Function does the path integral for quasi hermitian Hamiltonians represent" Phys. Lett. A, 373 3304 (2009).
- [23] S. Sakoda, "Exactness in the path integral of the Coulomb potential in one dimension" Mod. Phys. Lett. A, 23 3057 (2008).
- [24] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, "Supersymmetry and quantum mechanics" Phys. Rep., 251 267 (1995).
- [25] H. Eğrifes, D. Demirhan and F. Büyükkılıç, "Exact Solutions of the Schrödinger Equation for Two Deformed Hyperbolic Molecular Potentials" Phys. Scr., 60 195 (1999).
- [26] O. Ye, S. Silta, "PT/non-PT symmetric and non-Hermitian Pöschl–Teller-like solvable potentials via Nikiforov–Uvarov method", Phys. Scr., 75 41 (2007).
- [27] W. M. Elsasser, "Application of Pauli's principle to nuclei - III." J. Phys. Radium, 5, 635 (1934).
- [28] M. Goeppert-Mayer, "On Closed Shells in Nuclei" Phys. Rev. 74, 235 (1948)
- [29] Q. Zhi, Z. Ren, "Systematic studies on the exotic properties of isotopes from oxygen to calcium" Nucl. Phys. A, 794 10 (2007).

- [۳۲] T. Baumann, A. Spyrou and M. Thoennessen, “Nuclear structure experiments along the neutron drip line” *Rep. Prog. Phys.*, 75 036301 (2012)
- [۳۳] O. Sorlin and M. G. Porquet, “Nuclear magic numbers: New features far from stability” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 61 602 (2008)
- [۳۴] B. L. Cohen, *Concepts of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, NewYork, NY, USA (1971).
- [۳۵] M. Mousavi and M. Shojaei, “Calculation of energy and charge radius for doubly-magic nuclei of ^{41}Ca and ^{41}Sc with extra nucleon” *Chin. J. Phys.*, 54 750 (2016).
- [۳۶] Z. Wang and Z. W. Long and C. Y. Long and J. Teng, “Exact solutions of the Schrödinger equation with a coulomb ring-shaped potential in the cosmic string spacetime”, *Phys. Scr.*, 90 055201 (2015).
- [۳۷] B. I. Ita and A. I. Ikeuba, “Solutions to the Schrödinger Equation with Inversely Quadratic Yukawa Plus Inversely Quadratic Hellmann Potential Using Nikiforov-Uvarov Method” *J. At. Mol. Phys.*, 2013 582610 (2013).
- [۳۸] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, “Special functions of Mathematical physics”, Brikhauser, Basel (1988).
- [۳۹] A. A. Rajabi; Exact Analytical solution of the Schrodinger equation for an N-identical body- force system; *Few-Body Systems*, 37 197 (2005).
- [۴۰] A. Niknam, A. A. Rajabi and M. Solaimani, “Solutions of D-dimensional Schrodinger equation for Woods–Saxon potential with spin-orbit, Coulomb and centrifugal terms through a new hybrid numerical fitting Nikiforov–Uvarov method” *J Theor Appl Phys*, 10 53 (2016).
- [۴۱] M. Farrokh, M. R. Shojaeia and A. A. Rajabi “Klein-Gordon equation with Hulth'en potential and position-dependent mass” *Eur. Phys. J. Plus*, 128 14 (2013).
- [۴۲] M. Hamzavi, S. M. Ikhdair, and B. I. Ita, “Approximate spin and pseudospin solutions to the Dirac equation for the inversely quadratic Yukawa potential and tensor interaction,” *Phys. Scr.*, 85 045009 (2012).
- [۴۳] R. L. Greene and C. Aldrich, “Variational wave functions for a screened Coulomb potential” *Phys. Rev. A*, 14 2363 (1976).
- [۴۴] C. S. Jia, T. Chen and L. G. Cui, “Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the generalized Pöschl–Teller potential including the pseudo-centrifugal term” *Phys. Lett. A*, 373 1621 (2009).

- [٤٥] I. Angeli, K. P. Marinova, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 99 69 (2013).
- [٤٦] G. Audi, A. H. Wapstra and C. Thibault, "The Nubase evaluation of nuclear and decay properties" Nucl. Phys. A, 729 3 (2003).
- [٤٧] K. D. Launey, T. Dytrych and J. P. Draayer, Progr In Part and Nucl. Phys. 89 (2016), 101
- [٤٨] Y. Funaki, "Container" evolution for cluster structures in ^{16}O Phys. Rev C 97 (2018), 021304(R)
- [٤٩] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck and G. Röpke, Phys.Rev. Lett. 87 (2001), 192501
- [٥٠] M. Freer, H. Horiuchi, Y Kanada-En'yo, D. Lee and U.-G. Meissner, Rev. Mod. Phys. 90 (2018), 03500
- [٥١] R. Bijker and F. Iachello, *Nucl. Phys A* 957 (2017), 154
- [٥٢] Z. Binesh, M. R. Shojaei and B. Azadegan," Mirror nuclei of ^9B and ^9Be in the shell model and cluster model", Can. J. Phys, 10, (2018).
- [٥٣] H. Yukawa, Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. "On the Interaction of Elementary Particles I", 17, 48, (1935).
- [٥٤] H. Hamzavi, S. M. Ikhdair, B. I. Ita, " Approximate spin and pseudospin solutions to the Dirac equation for the inversely quadratic Yukawa potential and tensor interaction", Physica Scripta, (2012).
- [٥٥] R. Machleidt, "High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential " Phys. Rev. C 63, 024001, (2001).
- [٥٦] P. Doleschall, "Influence of the short range nonlocal nucleon-nucleon interaction on the elastic n–d scattering: Below 30MeV" Phys. Rev. C 69, 054001 (2004).
- [٥٧] A. A. Rajabi, "Exact Analytical Solution of the Schrödinger Equation for an N-Identical Body-Force System", 37, (2005).
- [٥٨] A. F. Nikiforov, and V. B. Uvarov, "Special Function of Mathematical Physics"(1988).
- [٥٩] U. A. Deta, A. Suparmi and C. Cari, Adv. Studies Theor. Phys. 7 647 (2013).

[۶۰] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, 267 (1995).

[۶۱] H. Feizi, A. A. Rajabi, and M.R. Shojaei, Acta Physica Polonica B, 42, 2143, (2011).

Abstract

Structural models are widely used in the study and identification of isotopes. Two-layer and cluster models are among the efficient and popular models in studying the static properties of nuclei, including determining the base state energy and their load radiuIn In this paper, we have studied the isotope cluster model using a closed ^{16}O shell. We consider ^{17}O with an additional neutron and a ^{16}O shell, as well as ^{18}O and ^{19}O using Jacobian coordinates and calculating the dependence energy of these isotopes. Also, using alpha clusters, we have studied the isotopes ^6Li and ^7Li in a two-particle system and calculated the dependence energy of these isotope. Then, using alpha clusters, we examined the isotopes and in a two-particle system and calculated the dependence energy of these isotopes. In the model, we consider a cluster as ^6Li an alpha particle (including two protons and two neutrons) and a deuteron ($\alpha + ^2\text{H}$) and as ^7Li an alpha and triton particle ($\alpha + ^3\text{H}$) as a two-particle system. Therefore, considering the layered and cluster model, we solved Schrodinger equation in the presence of Hellmann-like potential using NU analytical method and calculated the specific values of ground state energy and ground state wave functions for the above isotopes

Keywords: Cluster models; Layered model; Alpha cluster; Deuteron; Triton; Hellmann potential



Shahrood University of Technology

Kharazmi International Campus

Ph.D. Thesis in Nuclear Physics

Structural models for calculating the energy spectra of specific nuclei with magic N or Z

By: Jamshid Khosravi Bizhaem

Supervisor:

Dr. Mohammad Reza Shojaei

Advisor:

Dr. Seyed Iman Hosseini

February 2021