

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک هسته‌ای

بررسی تحول زمانی حالت همدوس با نوسانگر هماهنگ میرای دو بعدی برای ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی

نگارنده: فائزه محمدی

استاد راهنما

دکتر حسن حسن آبادی

تیر ۱۳۹۹

تقدیم به پدر و مادرم

وَلَوْ أَنَّ قُرْآنًا سُيِّرَتْ بِهِ الْجِبَالُ أَوْ قُطِّعَتْ بِهِ الْأَرْضُ أَوْ كُلِّمَ بِهِ الْمَوْتَىٰ بَلْ لِلَّهِ الْأَمْرُ جَمِيعًا ۚ فَلَمْ يَيْئَسِ الَّذِينَ آمَنُوا أَن لَّوْ يَشَاءُ اللَّهُ لَهْدَى النَّاسَ جَمِيعًا

سپاس‌گزاری...

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت آثار قدرت او بر چهره روز روشن، و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود به پاس قلب های بزرگ که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید برخود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی یار و پشتیبانم بودند و از زحمات و تلاش های بیدریغ استاد فریهخته و گرانقدر جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی کمال سپاس‌گزاری را داشته باشم چرا که بدون رهنمودهای ایشان به پایان رساندن این پایان نامه بسیار مشکل می‌نمود.

فائزه محمدی

تیر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **فائزه محمدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **فیزیک و مهندسی هسته‌ای** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی تحول زمانی حالت همدوس با نوسانگر هماهنگ میرای دو بعدی برای ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی**، تحت راهنمایی **حسن حسن آبادی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فائزه محمدی

تیر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

با استفاده از خواص گروه $su(1,1)$ و در نظر گرفتن یک سیستم کوانتومی همدوس برای نوسانگر میرای دو بعدی علاوه بر تعیین حالت‌های کوانتومی مربوط به حالت همدوس و تعیین انرژی و همچنین تعیین شرایط میرایی و فوق میرایی برای سیستم، با استفاده از روش لوییس - رزنفیلد (Lewis-Riesenfeld) تحول زمانی آنها را محاسبه می‌نماییم. برای این منظور، ابتدا هامیلتونی چنین سیستمی را نوشته و با استفاده از مجموعه معادلات هامیلتونی و ژاکوبی معادله حرکت جسم را بدست می‌آوریم؛ سپس با استفاده از جبر هایزنبرگ به کوانتیزه کردن چنین سیستمی می‌پردازیم و برای این چنین سیستمی حالت های همدوس را حساب می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که با عملگر تحول زمانی نمی‌توان تحول زمانی سیستم را محاسبه کرد و به سراغ معادلات لوییس - رزنفیلد می‌رویم و تحول زمانی این سیستم را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: سیستم کوانتومی همدوس، لوییس رزنفیلد، تحول زمانی، سیستم کوانتیزه

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ حالت همدوس
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ گروه $SU(1,1)$
۴	۳.۱ معرفی سیستم کوانتومی همدوس
۶	۴.۱ خواص حالت همدوس
۹	۲ روش لوییس رزنفیلد
۹	۱.۲ مقدمه
۱۲	۲.۲ محاسبه تحول زمانی نوسانگر هماهنگ
۱۵	۳ لاگرانژی سیستم نوسانگر
۱۵	۱.۳ مقدمه
۱۶	۲.۳ محاسبه لاگرانژی برای نوسانگر میرا
۱۹	۴ تعیین عملگر ناوردای پویا برای نوسانگر دو بعدی
۱۹	۱.۴ مقدمه
۲۱	۲.۴ معرفی جبر عملگری
۲۴	۳.۴ محاسبه مقادیر چشم داشتی برای نوسانگر هماهنگ
۲۷	۵ حالت های همدوس تعمیم یافته
۲۷	۱.۵ حالت همدوس در جبر هایزنبرگ تعمیم یافته
۲۷	۱.۱.۵ جبر هایزنبرگ تعمیم یافته
۲۹	۲.۱.۵ تشکیل حالت همدوس

۳۲	خواص غیر کلاسیکی	۳.۱.۵
۳۳	حالت همدوس زوج و فرد تعمیم یافته	۲.۵
۳۶	حالت همدوس تغییر شکل یافته براساس جبر سالیس	۳.۵
۳۷	تعریف جبر تغییر شکل یافته براساس تابع نمایی تغییر شکل یافته	۱.۳.۵
۳۸	تعمیم یافته تشکیل حالت همدوس تغییر شکل یافته	۲.۳.۵
۳۹	خواص غیر کلاسیکی حالت های همدوس تغییر شکل یافته	۳.۳.۵
۴۲	تعمیم یافته حالت های همدوس زوج و فرد تغییر شکل یافته	۴.۳.۵
۴۵	خواص غیر کلاسیکی برای حالت همدوس زوج و فرد تعمیم یافته	۵.۳.۵
۴۸	حالت همدوس تغییر شکل یافته در جبر ویگنر دایره واحد	۴.۵
۴۹	جبر ویگنر تغییر شکل یافته	۱.۴.۵
۵۰	حالت همدوس روی دایره	۲.۴.۵
۵۴	حالت همدوس φ تغییر شکل یافته	۵.۵
۵۵	ساختار جبر φ تغییر شکل یافته	۱.۵.۵
۵۷	ابر تقارن در جبر φ تعمیم یافته	۲.۵.۵
۵۷	تابع ساختار تغییر شکل یافته φ	۳.۵.۵
۶۳	خواص غیر کلاسیکی	۴.۵.۵
۶۵	بررسی بسته موج تغییر شکل یافته در پتانسیل پله ای و دلتا با کوانتوم	
۶۸	دفورم	
۷۰	بسته موج در فرمالیزم تغییر شکل یافته	۱.۶.۵
۷۳	پله پتانسیل	۲.۶.۵
۷۵	چاه پتانسیل دوگان	۳.۶.۵
۷۷	بررسی برهم نهی های حالت های همدوس	۷.۵
۷۸	درهمتنیدگی حالت های همدوس قطع شده	۱.۷.۵
۸۰	خواص غیر کلاسیکی	۲.۷.۵

۶ نتیجه گیری و پیشنهادات ۸۵

مراجع ۸۷

فهرست تصاویر

۴۰		رسم P_n بر حسب n برای $q \leq 0$	۱.۵
۴۰		رسم P_n بر حسب n برای $q > 0$	۲.۵
۴۱		رسم Q بر حسب x برای $q \leq 0$	۳.۵
۴۲		رسم Q بر حسب x برای $q > 0$	۴.۵
۴۴		رسم P_n بر حسب x برای $q \leq 0$	۵.۵
۴۴		رسم P_n بر حسب x برای $q > 0$	۶.۵
۴۵		رسم P_n بر حسب x برای $q \leq 0$	۷.۵
۴۵		رسم P_n بر حسب x برای $q > 0$	۸.۵
۴۶		رسم Q بر حسب x برای $q \leq 0$	۹.۵
۴۶		رسم Q بر حسب x برای $q > 0$	۱۰.۵
۴۷		رسم Q بر حسب x برای $q \leq 0$	۱۱.۵
۴۷		رسم Q بر حسب x برای $q > 0$	۱۲.۵
۶۶		رسم Q_p بر حسب x	۱۳.۵
۶۸		رسم Q_p بر حسب x	۱۴.۵
۸۱		رسم تابع توزیع فوتونی بر حسب n	۱۵.۵
۸۱		رسم تابع توزیع فوتونی $P_{n_1, n_2}^{(1)}$ بر حسب n	۱۶.۵
۸۳		رسم تابع توزیع فوتونی $P_{n_1, n_2}^{(2)}$ بر حسب n	۱۷.۵
۸۳		رسم $Q_i^{1, M}$ بر حسب n	۱۸.۵
۸۳		رسم $Q_i^{2, M}$ بر حسب x	۱۹.۵

فهرست جداول

۳۵		مقادیر p_n^+ برای n های مختلف	۱.۵
۳۵		مقادیر p_n^- برای n های مختلف	۲.۵

فصل ۱

حالت همدوس

۱.۱ مقدمه

حالت‌های همدوس اولین بار توسط گلوبر [۱]، کشف و بررسی شد. حالت‌های همدوس در واقع حالت‌های کوانتومی هستند که در حالت خاص خواص کلاسیکی از خود بروز می‌دهند. از این رو از اهمیت خاصی برخوردارند. حالت‌های همدوس در اپتیک کوانتومی و مخابرات و اطلاعات کوانتومی کاربردهای زیادی دارند [۲]. در این جا ابتدا به بیان گروه $SU(1,1)$ می‌پردازیم زیرا در فصل چهارم حالت کوانتومی همدوس را بر مبنای این گروه معرفی می‌کنیم و همچنین حالت همدوس و خواص آن با مدل نوسانگر هماهنگ را بیان می‌کنیم [۳].

۲.۱ گروه $SU(1,1)$

هر مجموعه‌ای که چهارخاصیت؛ شرکت‌پذیری و وجود عضو وارون و وجود عضو یکه و خاصیت بستاری را دارا باشد یک گروه می‌نامیم. مثلاً گروه اعداد حقیقی، گروه ماتریس‌ها با یک دترمینان مشخص، گروه جایگشت اعداد یک مجموعه و... .

مولد گروه: مجموعه از عناصر گروه که با ضرب توان‌های مثبت و منفی آن‌ها می‌توان تمام گروه را تولید کرد مولد گروه نامیده می‌شود.

گروه لی: گروه‌های لی گروه‌هایی پیوسته هستند که عناصر گروه با تعداد پارامترهای محدود و گسسته مشخص می‌شوند و تعداد این پارامترها بعد گروه نامیده می‌شوند. به طور مثال خمینه گروه $U(1)$ یک گروه لی است که پارامتر θ مشخص می‌شود و نسبت به ضرب و وارون بسته است.

$$g = e^{i\theta} \quad g(\theta)g(\theta)' = g(\theta + \theta') \quad g^{-1}(\theta) = g(-\theta) \quad (1.1)$$

تعریف گروه $SU(1, 1)$: گروه شبه یونیتاری $SU(1, 1)$ ماتریس‌های دودردو هستند که متریک

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

را حفظ می‌کنند و داری این خواص هستند.

$$\det u = 1 \quad (3.1)$$

$$u^\dagger g u = g$$

اگر u را مطابق زیر در نظر بگیریم

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

برای تولید مولدهای گروه دنبال قید می‌گردیم

$$u^\dagger g u g = I \quad (5.1)$$

$$u^\dagger g = \begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

در مورد این گروه می‌توان نوشت

$$u g^\dagger = (u g)^{-1} \quad (7.1)$$

$$(u g)^{-1} = - \begin{pmatrix} -d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

اگر $u^\dagger$ را $u^\dagger = - \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$ به این شکل در نظر بگیریم طبق روابط (۷.۱)، (۲.۱) مقادیر

c و d به این صورت بدست می‌آید $a^* = d$ و $c = b^*$ و خواهیم داشت $u^{-1} g = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}$ و از

طرفی داریم $|a|^2 - |b|^2 = 1$ سپس برای یافتن مولدهای گروه از تبدیلات بی‌نهایت کوچک $g = I + a \in SU(1,1)$ استفاده می‌کنیم با انتخاب $a = \cosh$ و $b = \sinh$ ماتریس c با درآیه‌های کوچک مطابق زیر بدست می‌آید

$$c = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \sinh \theta e^{i\psi} \\ \sinh \theta e^{i\psi} & \cosh \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

مولد های این گروه به این صورت خواهند بود.

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ k_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ k_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.1)$$

جبر لی مطابق باگروه $SU(1,1)$ با این مولد های زیر اسپین شده است.

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{4i} ((a^\dagger)^2 + a^2) \\ k_y &= \frac{1}{4} ((a^\dagger)^2 - a^2) \\ k_0 &= \frac{1}{4i} (a^\dagger a + a a^\dagger) \end{aligned} \quad (11.1)$$

که روابط جابه‌جایی مولدهای این گروه به این صورت می‌باشد

$$\begin{aligned} [k_x, k_y] &= -k_0 \\ [k_0, k_x] &= k_y \\ [k_y, k_0] &= k_x \end{aligned} \quad (12.1)$$

عملگر های پایین آورنده و بالا برنده به این صورت هستند

$$k_+ = \frac{a^2}{2i} \quad k_- = \frac{a^{2\dagger}}{2i} \quad k_\pm = k_1 \pm ik_2 \quad (13.1)$$

کافیست بتوانیم عملگر کازمیر را بیابیم در این صورت می‌توان انرژی را محاسبه کرد پس با استفاده از گروه $SU(1,1)$ در نهایت عملگر کازمیر را برای یافتن انرژی یافت

$$C = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 - \frac{1}{2} (k_+ k_- + k_- k_+) \quad (14.1)$$

۳.۱ معرفی سیستم کوانتومی همدوس

ابتدا به بررسی هامیلتونی نوسانگر هماهنگ می‌پردازیم [۲۰]، سپس حالت همدوس را معرفی می‌کنیم و خواص حالت همدوس را محاسبه می‌کنیم و مقادیر چشم‌داشتی را برای مولفه های x و p بیان می‌کنیم هامیلتونی برای پتانسیل هماهنگ کوانتومی به این شکل است

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.1)$$

$$H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2] \quad (2.1)$$

بعد از کوانتیزه کردن میدان با تبدیلات کانونیک خواهیم داشت

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x) \quad (3.1)$$

روابط جا به جایی بین a و $a^\dagger$ به این صورت است

$$[a, a^\dagger] = \frac{i}{\hbar}[p, x] = 1 \quad (4.1)$$

و مولفه های x و p میدان با توجه به رابطه (۳.۱) داریم

$$x = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$p = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (5.1)$$

هامیلتونی بر حسب عملگرهای خلق و فنا به این صورت خواهد بود

$$H = \hbar(a a^\dagger - \frac{1}{2})$$

$$[H, a] = \hbar\omega[a^\dagger, a] = -\hbar\omega a$$

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger[a, a^\dagger]$$

$$(6.1)$$

اثر عملگر $a^\dagger$ به این صورت است

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (7.1)$$

می‌توان $|n\rangle$ ام را این گونه تعریف کرد

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle \quad (8.1)$$

میدان های تابشی معمولاً با سه نوع پایه کت ها یا حالت های عددی و حالت های همدوس و حالت های فشرده بیان می شوند لذا می توان $|\alpha\rangle$ را به صورت مجموعه ای از توابع موج در نظر گرفت از این رو خواص آماری در حالت همدوس اهمیت ویژه ای دارد

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (9.1)$$

$$a \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (10.1)$$

رابطه (۱۰.۱) را در $\langle m|$ ضرب می کنیم داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} \langle m|n-1\rangle &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle m|n\rangle \Rightarrow c_{m+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{m+1}} c_m \\ c_m &= \frac{\alpha}{\sqrt{m}} c_{m-1} \\ c_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} N(\alpha) \\ c_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} N(\alpha) \\ c_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} N(\alpha) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (11.1)$$

بنابراین $|\alpha\rangle$ را به این صورت معرفی می کنیم N مقدار بهنجارش می باشد

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} N(\alpha) \rightarrow |\alpha\rangle = N(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (12.1)$$

حالت های همدوس نرمال هستند بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\alpha\rangle &= 1 = |N(\alpha)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \alpha^n}{n! m!} \langle m|n\rangle \\ &= |N(\alpha)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \rightarrow |N(\alpha)|^2 \exp(|\alpha|^2) = 1 \\ |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (13.1)$$

در این جا طبق فرض اولیه به تابع موج گوسی رسیدیم یک روش دیگر برای بیان حالت همدوس این است که تابع موج را بسته موج گوسی فرض کنیم اما همواره نرمالیزاسیون توابع موج آسان نیست تابع موجی که در فضا جای گزیده است^۱ قابل نرمال کردن است چنانچه نتوانیم^۱ معمولاً بسته های موج گوسی نسبت به زمان بدون تحول هستند و برای کار ما مناسب نیستند

بهنجارش انجام دهیم سراغ روش های دیگری می‌رویم که در فصل بعد خواهیم گفت علاوه بر تعاریف بالا حالت همدوس را می‌توان با عملگر D نیز تعریف کرد

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \\ \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle &\xrightarrow{\text{بیکر هاسدوف}} e^x + e^y = e^{-\frac{1}{2}[x,y]} e^x e^y \\ D &= e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a} \\ &= e^{\alpha a^\dagger} e^{-\bar{\alpha} a} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) |0\rangle = D(\alpha) |0\rangle \end{aligned} \quad (14.1)$$

در واقع در این تعریف حالت همدوس از اثر دادن عملگر خلاء روی حالت پایه بدست می‌آوریم

۴.۱ خواص حالت همدوس

حالت های همدوس خواصی دارند از جمله این که :

- رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ را کمینه می‌کند
- حالت های همدوس کامل هستند
- حالت های همدوس متعامد نیستند

مولفه های x و p میدان را برحسب مولفه‌های a و $a^\dagger$ می‌توان به این شکل نوشت

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle \alpha | a - a^\dagger | \alpha \rangle = \alpha - \bar{\alpha} \\ \langle x \rangle &= \langle \alpha | a + a^\dagger | \alpha \rangle = \alpha + \bar{\alpha} \\ \langle \alpha | (a + a^\dagger)^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | aa | \alpha \rangle + \langle \alpha | a^\dagger a^\dagger | \alpha \rangle + \langle \alpha | [a, a^\dagger] | \alpha \rangle + 2 \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \\ &= \alpha + \bar{\alpha}^2 + 1 + 2\bar{\alpha} = (\bar{\alpha} + \alpha)^2 + 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

از رابطه $\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2$ برای اثبات رابطه (۱.۱) استفاده کردیم و با محاسبه σ_x و σ_p برای حالت همدوس مشاهده می‌شود که کمینه عدم قطعیت نامساوی هایزنبرگ را بدست آوردیم

$$\begin{aligned} (\sigma_x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2mw} \\ &= (\sigma_p)^2 \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar mw}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(\sigma_x)^2 (\sigma_p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

که این مقدار تساوی و حداقل مقدار عدم قطعیت است حالت همدوس الزاما متعامد نیست مثلا می توان حالت زیر را در نظر گرفت

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ |\beta\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \\ \langle\alpha|\beta\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\bar{\alpha}\beta} \\ |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 &= e^{-|\alpha-\beta|^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

حالت های همدوس کامل هستند

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \int \alpha e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |n\rangle \langle m| \quad (4.1)$$

با انجام این تغییر متغیر $\alpha = re^{i\phi}$ و $d^2\alpha = r dr d\phi$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n|n\rangle}{n!} \pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} r^{2n} dr$$

با تغییر متغیر $x = r^2$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} x^n dx = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1\pi$$

داریم

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha| = 1 \quad (5.1)$$

چنانچه مقدار چشم داشتی x و p برای نوسانگر هماهنگ کلاسیکی محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}) = \langle\alpha| \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle x \rangle_\alpha \\ I(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}i}(\alpha - \bar{\alpha}) = \langle\alpha| \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i} |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \langle p \rangle_\alpha \end{aligned} \quad (6.1)$$

با توجه به این روابط

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(\alpha(t)) &= \omega I(\alpha(t)) \\ \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) &= -\omega R(\alpha(t)) \end{aligned}$$

مشتقات زمانی آن ها را بدست آوریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(\alpha(t)) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dt} R(\alpha(t)) = \frac{p(t)}{m} = mv(t) \\ \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) = -mw x(t) \end{aligned}$$

حال طبق فرمول اهرنفتست مقادیر چشم‌داشتی px برای نوسانگر هماهنگ کوانتومی محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[p, \frac{1}{2m} (p^2 + (mwx)^2) \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[p, \frac{mw^2 x^2}{2} \right] \right\rangle = -mw^2 \langle x \rangle \\ \frac{d}{dx} \langle p \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[x, \frac{1}{2m} (p^2 + (mwx)^2) \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle \end{aligned} \quad (7.1)$$

مشاهده می‌کنیم محاسبه مقادیر چشم‌داشتی برای مکان و تکانه با استفاده از حالت همدوس به معادلات حرکت کلاسیکی نوسانگر ساده منجر می‌شوند به همین دلیل می‌توان به حالت همدوس به عنوان حد کلاسیکی حالت‌های کوانتومی نگاه کرد

فصل ۲

روش لوییس رزنفیلد

۱.۲ مقدمه

بنا به آنچه گفته شد می‌توان بسته موج مورد بررسی را گوسی فرض کرد در این حالت برای بررسی تحول زمانی می‌توان از عملگر تحول زمانی استفاده کرد اگر کت همدوس در لحظه $t = 0$ این گونه باشد

$$|\alpha(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(0)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-i(t-t_0)\frac{H}{\hbar}} \psi(t_0) \\ |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\alpha(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it\frac{H}{\hbar}} \frac{\alpha(0)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (1.2)$$

با توجه به ویژه مقادیر انرژی خواهیم داشت $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{it\omega}{2}} e^{-\frac{|\alpha(0)|^2}{2}} e^{\alpha(0)a^\dagger e^{-it\omega}} |0\rangle \\ |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{it\omega}{2}} (e^{-i\omega t} |0\rangle) \end{aligned} \quad (2.2)$$

بنابراین حالت همدوس با گذشت زمان همدوس باقی مانده و تنها ضریب ثابتی افزوده شده است چنانچه موج قابل نرمال شدن نباشد و یا مثلاً شکل گوسی نداشته باشد می‌توان از تبدیل فوریه استفاده کرد و با بردن موج در فضای فوریه و نوشتن تبدیل فوریه مشکل نرمالیزاسیون

را حل کرد. اما روش دیگر بررسی تحول زمانی روش لوییس رزنفیلد برای تحول حالت است در این جا اپراتور هرمیتی خطی و ناوردای نام ناوردای پویای I را معرفی می کنیم ویژه توابع ناوردای پویا در معادله نیومن صدق می کنند حقیقی اند تحول عملگر ناوردای پویا I در تحول زمانی هایزنبرگ به این شکل است

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] \quad (3.2)$$

با توجه به این رابطه با کمی ساده سازی داریم

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\psi\rangle = HI |\psi\rangle \quad (4.2)$$

یعنی ویژه توابعی I وجود دارند که ویژه توابع H نیز هستند و در معادله شرودینگر نیز صدق می کنند

$$I |\lambda, k\rangle = \lambda |\lambda, k\rangle \quad (5.2)$$

λ ویژه مقدار است و k عدد کوانتومی است از آنجایی که I هرمیتی است می توان هر کت دلخواه را با ویژه مقادیر عملگر هرمیتی بسط داد

$$|\psi\rangle = \sum c_{\lambda,k} e^{i\alpha_{\lambda,k}(t)} |\lambda, k, t\rangle \quad ; \quad \hbar \frac{d\alpha_{\lambda,k}(t)}{dt} = \langle \lambda, k | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \lambda, k \rangle \quad (6.2)$$

که $\alpha_{\lambda,k}(t)$ عامل فازی می باشد روند کار به این صورت است که ابتدا هامیلتونی سیستم مورد نظر را تا حد امکان ساده می کنیم سپس با I پیشنهادی و تحول زمانی هایزنبرگ ضرایب مجهول I را می یابیم با فرم کلی ناوردای پویا معادله ویژه مقداری آن را می یابیم و H را می یابیم و با توجه به رابطه (۶.۲) تحول زمانی یافته را محاسبه می نماییم برای مثال اگر P تکانه و ω سرعت زاویه ای باشد هامیلتونی به این شکل است

$$H = \frac{1}{2M}(P^2 + \Omega^2(t)q^2) \quad (7.2)$$

و فرم عملگر ناوردای خطی ما به این شکل باشد

$$I(t) = \frac{1}{2}(\alpha(t)q^2 + \beta(t)P^2 + \gamma(t)q, p) \quad (8.2)$$

با جایگذاری (۷.۲) و (۸.۲) در رابطه (۳.۲) و ساده سازی داریم

$$(9.2)$$

$$I(t) = \frac{1}{2} \left((\alpha(t) - \frac{\Omega^2(t)}{M} \gamma(t)) q^2 + (\beta(t) + \frac{\gamma(t)}{M}) P^2 + (\gamma(t) + \frac{\alpha(t)}{M} - \frac{\Omega^2(t)\beta(t)}{M}) \{q, p\} \right) = 0$$

با ساده سازی از دستگاه معادلات کوپل شده زیر برای حل استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{\Omega^2(t)}{2M} \gamma(t) \\ \beta(t) &= -\frac{\gamma(t)}{M} \\ \gamma(t) &= -\frac{\alpha(t)}{M} + \frac{\Omega^2(t)\beta(t)}{m} \end{aligned} \quad (10.2)$$

از تابع واسطه $\beta(t) = \sigma(t)^2$ استفاده می‌کنیم با جای گذاری در رابطه دوم (۱۰.۲) داریم

$$\gamma(t) = -M\sigma(t)\sigma'(t) \quad (11.2)$$

با رابطه سوم (۱۰.۲) و (۱۱.۲) داریم

$$\alpha(t) = M(\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma}\sigma + \Omega^2 + \sigma^2) \quad (12.2)$$

با داشتن $\gamma(t)$ ، $\alpha(t)$ و $\beta(t)$

$$\sigma(t) \frac{d}{dt} \left(M\ddot{\sigma}(t) + \Omega^2\sigma(t) \right) + \dot{\sigma}(t) + (M\ddot{\sigma}(t) + \Omega^2\sigma(t)) = 0 \quad (13.2)$$

با انتگرال گیری از معادله (۱۳.۲) قید حاکم بر تابع واسطه بدست می‌آید

$$M\ddot{\sigma} + \Omega^2\sigma = \frac{c}{\sigma^3} \quad (14.2)$$

در نهایت داریم

$$I(t) = \frac{1}{\dot{\sigma}} \left(\left(\frac{1}{\rho} q^2 + (\rho p - M\rho q)^2 \right) \cdot M\ddot{\rho} + \Omega^2\rho \right) = \frac{1}{\rho} \quad (15.2)$$

با توجه به ضرایب ناوردای پویا این گونه معرفی می‌کنیم حالا در ادامه I را بر حسب عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده باز نویسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(\frac{q}{p} + i(\rho p - M\dot{\rho}q) \right) \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(\frac{q}{p} - i(\rho p - M\dot{\rho}q) \right) \\ I &= \hbar(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (16.2)$$

$$[I, N] = [I, a^\dagger a] = 0 \quad (17.2)$$

پس برای ویژه کتها داریم

$$a^\dagger a |s\rangle = s |s\rangle, s = 0, 1, 2, \dots$$

عمل عملگرهای خلق و نابودی $|s\rangle$

$$a |s\rangle = \sqrt{s} |s-1\rangle \quad a^\dagger |s\rangle = \sqrt{s+1} |s+1\rangle \quad (18.2)$$

$$\gamma_s = (s + \frac{1}{2})\hbar \quad (19.2)$$

می‌خواهیم تحول زمانی ψ را بنویسم ابتدا باید ψ برحسب ویژه مقادیر I بنویسم پس باید هامیلتونی را با ناوردای پویا باز نویسی کنیم به p ، p^2 ، q ، q^2 نیاز داریم (۲۰.۲)

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{\hbar}{\rho}}(a + a^\dagger)\rho \\ p &= \sqrt{\frac{\hbar}{\rho}} \frac{1}{\rho} \left(M\dot{\rho}(a + a^\dagger) + i(a - a^\dagger) \right) \\ q^2 &= \frac{\hbar}{\rho} \left(a^{\dagger 2} + a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a \right) \rho^2 \\ p^2 &= \frac{\hbar}{\rho^2} \left(M\rho\dot{\rho}^2 (a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2) + 2iM\rho\dot{\rho}(a^2 - a^{\dagger 2}) + (aa^\dagger + a^\dagger a - a^{\dagger 2} - a^2) \right) \end{aligned}$$

هامیلتونی باز نویسی شده

$$\langle s|H(t)|s\rangle = \frac{\hbar}{4M} \left((M\dot{\rho})^2 + (\Omega)^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \langle s|a, a^\dagger|s\rangle \quad (21.2)$$

۲.۲ محاسبه تحول زمانی نوسانگر هماهنگ

برای محاسبه تحول زمانی نوسانگر هماهنگ از رابطه (۷.۲) استفاده می‌کنیم برای محاسبه مشتق $\frac{\partial}{\partial t}$ از روابط (۲۰.۲) مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |s-1\rangle a^\dagger \frac{\partial}{\partial t} |s-1\rangle = \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial t} |s\rangle \quad (1.2)$$

با ضرب در $\frac{\langle s|}{\sqrt{s}}$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \langle s| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |s-1\rangle + \langle s| \frac{a^\dagger}{\sqrt{s}} \frac{\partial}{\partial t} |s-1\rangle = \langle s| \frac{\partial}{\partial t} |s\rangle \quad (2.2)$$

اگر از رابطه (۱۶.۲) نسبت به زمان مشتق بگیریم و با رابطه بالا خواهیم داشت

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \langle s| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |s-1\rangle + \langle s-1| \frac{\partial}{\partial t} |s-1\rangle = \langle s| \frac{\partial}{\partial t} |s\rangle \quad (3.2)$$

با اثر دادن $a^\dagger$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{2\dot{\rho}}{\rho} + iM(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)a + iM(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)a^\dagger \right) \quad (4.2)$$

می‌دانیم عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ پاد هرمیتی است و تمام عناصر قطر اصلی آن موهومی محض هستند این جا می‌توان اعداد موهومی محض را به عنوان فاز تلقی کرد و حالت پایه را طور قرار دادی $|s\rangle$ در نظر گرفت و اعداد موهومی محض را فاز نسبی فرض کرد پس در نهایت داریم

$$\langle s| \frac{\partial}{\partial t} |s\rangle = \frac{M}{\rho} (\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \left(s + \frac{1}{2} \right) \quad (5.2)$$

با (۶.۲) در رابطه تحول زمانی خواهیم داشت

$$\frac{d\alpha_s(t)}{dt} = \frac{-1}{2M} \left((\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) + (M\dot{\rho})^2 + (\Omega(t)\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \left(s + \frac{1}{\rho} \right) = \frac{-1}{M} \left(s + \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{\rho^2} \quad (6.2)$$

پس تحول زمانی تابع محاسبه شد

$$\alpha_s(t) = \frac{-1}{M} \left(s + \frac{1}{\rho} \right) \int_0^t \frac{1}{\rho^2(t')} dt' \quad (7.2)$$

فصل ۳

لاگرانژی سیستم نوسانگر

۱.۳ مقدمه

می‌دانیم هامیلتونی بر حسب مختصات تعمیم یافته برابر است با

$$H = \sum p_k \dot{q}_k - L \quad (1.3)$$

که معادلات کانونیک هامیلتونی به این ترتیب هستند

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (2.3)$$

طبق قضیه نوتر (معادلات اوایلر لاگرانژ) چنانچه سیستمی تقارن داشته باشد حتماً یک مولفه آن ثابت حرکت خواهد بود

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_k} \right) = 0 \Rightarrow p_i = 0 \quad (3.3)$$

اگر لاگرانژی مستقل از مولفه باشد و یا به عبارتی نسبت به آن متقارن باشد مشتقات $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ نسبت به آن مولفه صفر است به طور مثال تقارن نسبت به ϕ باعث می‌شود سیستم نسبت به L تحت چرخش ناورد باشد اگر دورانی مانند $x' = R(\nu)x$ را در نظر بگیریم طبق تقارن نوتر داریم $L = L'$ و لاگرانژی تحت تبدیلات ناوردا می‌ماند به این ترتیب هامیلتونی و عملگر هرمیتی لوییس رزنفیلد I ناوردا خواهند ماند.

۲.۳ محاسبه لاگرانژی برای نوسانگر میرا

لاگرانژی سیستم را این گونه تعریف می کنیم

$$L(q, \dot{q}, t) = f^{-1}(t)W(q, \dot{q}) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\dot{q}m - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right) \quad (1.3)$$

که p تکانه خطی به صورت زیر تعریف می کنیم با جایگزینی در (۱.۳) خواهیم داشت

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}f^{-1}(t) \quad \dot{x} = \frac{p}{m}f^{-1}(t) \quad (2.3)$$

$$L(x, \dot{x}, t) = f^{-1}(t)\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2(t)x^2}{2}\right] \quad (3.3)$$

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = f^{-1}(t)\left[\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{m\omega^2(t)}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] \quad (4.3)$$

با جایگزینی رابطه (۲.۳) در (۱.۳) لاگرانژی سیستم به این صورت خواهد بود

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = f^{-1}(t)m\dot{x}_1 \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = f^{-1}(t)m\dot{x}_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

درمدل نوسانگر میرای دو بعدی دو نوسانگر بدون برهمکنش در دو بعد در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \eta(t)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \eta(t)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

ضریب میرایی $\eta = \gamma$ و ω_0 فرکانس اولیه نوسانگر است

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (7.3)$$

حرکت نوسانگر در دو بعد به این صورت $z = x_2 + ix_1$ در نظر بگیریم و در رابطه (۶.۳) جایگذاری کنیم داریم

$$\ddot{z} + \eta(t)\dot{z} + \omega^2(t)z = 0 \quad (8.3)$$

فرم کلی جواب معادله نوسانگر میرا $z = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$ جواب های کلاسیکی به این صورت خواهد بود

$$z(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\gamma t}[A_1 \exp\left(\frac{1}{2}\tau t\right) + A_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\tau t\right)] & \tau^2 = \gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}\gamma t}[A_1 \sin\left(\frac{1}{2}\tau t\right) + A_2 \cos\left(\frac{1}{2}\tau t\right)] & \tau^2 = 4\omega_0^2 - \gamma^2 > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}\gamma t}(A_1 + A_2) & \gamma^2 = 4\omega_0^2 \end{cases} \quad (9.3)$$

با در نظر گرفتن $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$ در معادله (۹.۳) داریم

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t} [B_1 J_1 \left(\frac{\omega_0}{\gamma} e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \right) + B_2 Y_1 \left(\frac{\omega_0}{\gamma} e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \right)] \quad (10.3)$$

که J_1 و Y_1 توابع بسل اول و دوم می باشند طبق مرجع [۴] داریم

$$z(t) = c_1 \cos \left(\frac{\omega_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma t}}{\gamma} \right) - c_2 \sin \left(\frac{\omega_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma t}}{\gamma} \right) \quad (11.3)$$

حالا هامیلتونی را محاسبه می کنیم با توجه به رابطه (۱.۳) هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود

$$H = \sum p_1 \dot{q}_1 - L = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 f^{-1}(t) + \frac{p^2}{2m} f^{-1}(t) \quad (12.3)$$

$$H = H_1 + H_2 = \frac{f(t)}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + f(t)^{-1} \frac{m \omega^2(t)}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (13.3)$$

$$f(t) = e^{-\gamma t}; f(t) = 1 \rightarrow \omega = \omega_0 \quad (14.3)$$

از این هامیلتونی در محاسبات فصل بعد بهره می بریم روابط جابه جایی بین x و p نیز به این صورت می باشد

$$[x_i, x_j] = 0, [p_i, p_j] = 0 \quad (15.3)$$

فصل ۴

تعیین عملگر ناوردای پویا برای نوسانگر دو بعدی

۱.۴ مقدمه

حال برای توصیف تحول زمانی از عملگر ناوردای پویای I کمک می‌گیریم در روش لوییس رزفیلد ابتدا I را به صورت فرضی با ضرایب مجهول در نظر می‌گیریم سپس ضرایب مجهول را می‌یابیم

$$I(t) = \alpha(t)J_+ + \beta(t)J_- + \delta(t)J_0 \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} J_+ = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ J_- = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \\ J_0 = \frac{1}{2}(x_1 p_1 + p_1 x_1 + x_2 p_2 + p_2 x_2) \end{cases} \quad (2.4)$$

و روابط جابه‌جایی به این شکل می‌باشد $[J_+ - J_-] = iJ_0$ و $[J_0 - J_{\pm}] = \pm 2iJ_{\pm}$ هامیلتونی بر حسب J_+ و J_- برابر است با

$$H(t) = \frac{f(t)}{m} \hat{J}_- + f^{-1}(t) m \omega^2(t) \hat{J}_+ \quad (3.4)$$

طبق فرمول هایزنبرگ داریم

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I(t), H(t)] = 0 \quad (4.4)$$

ضرایب مجهول را به شکل زیر در نظر می گیریم

$$\begin{cases} \dot{\alpha} - 2f^{-1}m\omega^2\delta = 0 \\ \dot{\beta} + \frac{2f}{m}\delta = 0 \\ \dot{\delta} + \frac{f}{m}\alpha - f^{-1}m\omega^2\beta = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

تابع واسطه $\beta(t) = \rho^2(t)$ را در نظر می گیریم با جایگذاری در رابطه دوم (۵.۴)

$$\delta(t) = -mf^{-1}\rho\dot{\rho} \quad (6.4)$$

با جایگذاری در معادله سوم رابطه (۶.۴) داریم

$$\alpha(t) = \frac{\nu^2}{\rho^2} + m^2 f^{-2} \rho^2 \quad (7.4)$$

پس فرم نهایی ناوردا پویا به این شکل خواهد بود

$$I(t) = \frac{1}{2} [(-mf^{-1}\dot{\rho}x_1 - \rho p_1)^2 + x_1^2 \frac{\nu^2}{\rho^2} + (mF^{-1}\dot{\rho}x_2 - \dot{\rho}p_2)^2 + x_2^2 \frac{\nu^2}{\rho^2}] \quad (8.4)$$

با کمی ساده سازی داریم

$$\ddot{\rho} + \eta\dot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{\nu^2 f^2}{m\rho^3} \quad (9.4)$$

معادله می باشد^۱ که در مرجع [۶] آمده است باید معادله ویژه مقادیری زیر را حل کنیم

$$\hat{I}\Phi(x_1, x_2, t) = E\Phi(x_1, x_2, t) \quad (10.4)$$

برای قطری کردن از تبدیل یونیتاری استفاده می کنیم

$$u = \exp(-\frac{imf^{-1}\dot{\rho}}{2\rho}(x_1^2 + x_2^2)); u^t u = uu^t = I \quad (11.4)$$

$$u\phi(x_1, x_2, t) = \phi^{I(x_1, x_2, t)} \quad (12.4)$$

$$I' = uIu^\dagger = \frac{1}{2}[\rho^2(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k^2}{\rho^2}(x_1^2 + x_2^2)] \quad (13.4)$$

¹Ermakov-pinney

۲.۴ معرفی جبر عملگری

برای یافتن طیف جواب معادله ۱.۴ باید a و $a^\dagger$ را تعریف کنیم

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(\frac{\nu}{\rho} x_1 + i\rho p_1 \right) \\ a'^{\dagger}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(\frac{\nu}{\rho} x_1 - i\rho p_1 \right) \\ a'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(\frac{\nu}{\rho} x_1 + i\rho p_2 \right) \\ a'^{\dagger}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(\frac{\nu}{\rho} x_1 - i\rho p_2 \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$[a'_1, a'^{\dagger}_1] = [a'_2, a'^{\dagger}_2] = I_2 \quad (2.4)$$

کت همدوس را به این شکل در نظر بگیریم

$$|\Phi'_{n_1, n_2}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (a'^{\dagger}_1)^{n_1} (a'^{\dagger}_2)^{n_2} |\Phi'_{0,0}(t)\rangle \quad (3.4)$$

$$\langle \Phi'_{n_1, n_2}(t) | \Phi'_{n_1, n_2}(t) \rangle = \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} \quad (4.4)$$

می‌توانیم حالت پایه را این گونه تعریف کنیم

$$\phi_{0,0}(x_1, x_2, t) = u^\dagger \langle x_1 | \phi'_0(t) \rangle \langle x_2 | \phi'_0(t) \rangle = \left(\frac{\nu}{\pi \rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[(imf^{-1} \frac{\dot{\rho}}{\rho}) \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) \right] \quad (5.4)$$

و با توجه به (۳.۴) کت n ام را این گونه تعریف کنیم

$$\phi_{n_1, n_2}(x_1, x_2, t) = u^\dagger \phi'_{n_1, n_2}(x_1, x_2, t) \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{2^{n_1+n_2} \pi n_1! n_2!} \right)^{\frac{1}{2}} H_{n_1} \left(x_1 \frac{\sqrt{\nu}}{\rho} \right) H_{n_2} \left(x_2 \frac{\sqrt{\nu}}{\rho} \right) \exp \left[(imf^{-1} \frac{\dot{\rho}}{\rho}) \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) \right] \quad (7.4)$$

H_1 و H_2 طبق [۴] چند جمله هرمیت می‌باشند و از روابط $a'^{\dagger}$ و a' می‌توان a و $a^\dagger$ را یافت

$$\begin{aligned} a_j^\dagger &= u^\dagger a'^{\dagger}_j u = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} (i \frac{\nu}{\rho} x_j - \rho p_j + m \dot{\rho} f^{-1} x_j) \\ a &= u^\dagger a'_j u = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} (i \frac{\nu}{\rho} x_j - \rho p_j + m \dot{\rho} f^{-1} x_j) \quad ; J = 1, 2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

بنابراین طیف I به این صورت خواهد بود

$$I(t) = u I u^\dagger = \nu (a_1^\dagger a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2^\dagger + i) \quad (9.4)$$

ونحوه اثر گذاری عملگر های بالا برنده و پایین برنده به این صورت است

$$\begin{aligned} a_j^\dagger |\phi_{nj}(t)\rangle &= \sqrt{n_j + 1} |\phi_{nj+1}(t)\rangle \\ a_j^\dagger |\phi_{nj}(t)\rangle &= \sqrt{n_j} |\phi_{nj-1}(t)\rangle \\ a_j^\dagger a_j^\dagger |\phi_{nj}(t)\rangle &= n_j |\phi_{nj}(t)\rangle; a_1^\dagger a_1 = n_1 \end{aligned} \quad (10.4)$$

پس ماتریس قطری شده ناوردای پویای I به این صورت است

$$I(t) |\phi_{nj}(t)\rangle = \nu(a_1^\dagger a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2^\dagger + 1) |\phi_{nj}(t)\rangle \quad (11.4)$$

برای بررسی تحول زمانی همان طور که در بخش اول گفتیم

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, x_2, t) = H \psi(x_1, x_2, t) \quad (12.4)$$

$$\psi(x_1, x_2, t) = e^{i\theta_{n_1, n_2}(t)} \phi'(x_1, x_2, t) \quad (13.4)$$

بخش زمانی را به این صورت محاسبه می کنیم

$$\theta_{n_1, n_2}(t) = \int_0^t \langle \phi_{n_1, n_2}(t') | i \frac{\partial}{\partial t'} - H(t') | \phi_{n_1, n_2}(t') \rangle \quad (14.4)$$

همان طور که گفتیم L_z پایسته است

$$L_z = x_1 p_2 - x_2 p_1 = i(a_1^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) \quad (15.4)$$

روابط جابه جایی این گونه خواهند بود

$$[L_z, I(t)] = 0 \quad [L_z, H(t)] = 0 \quad (16.4)$$

برای بررسی تحول زمانی کت n ام نمی توان به راحتی قطری کرد و از فرآیند در این جا از پایه های تکانه هلیسیتی کمک می گیریم

$$\begin{aligned} a'_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a'_1 \pm ia'_2) \\ a'^\dagger_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a'^\dagger_1 \mp ia'^\dagger_2) \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$[a'_\pm, a'^\dagger_\pm] = J \quad (18.4)$$

مثلا پایه هلیستی برای کت n ام این گونه تعریف می شود

$$|\Phi'_{n_+, n_-}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-!}} (a'^\dagger_+)^{n_+} (a'^\dagger_-)^{n_-} |\Phi'_{0,0}(t)\rangle \quad (19.4)$$

$$\langle \Phi'_{n_+, n_-}(t) | \Phi'_{n_+, n_-}(t) \rangle = \delta_{n_+ m_+} \delta_{m_- n_-} \quad (20.4)$$

را حالت پایه در نظر می‌گیریم برای یافتن ویژه توابع عملگر ناوردای I و تکانه زاویه L_z مختصات قطبی را در نظر می‌گیریم به طوری که $x_1 = r \cos \alpha$ و $x_2 = r \sin \alpha$ در دستگاه مختصات قطبی تبدیلات کانونی برابر است با

$$\begin{aligned} p_1 &= -i(\cos \alpha \partial_r - \frac{\sin \alpha}{r} \partial_\alpha) \\ p_2 &= -i(\sin \alpha \partial_r + \frac{\cos \alpha}{r} \partial_\alpha) \end{aligned} \quad (21.4)$$

روابط با تغییر مختصات

$$\begin{aligned} a'_\pm &= \frac{1}{r} e^{\mp i\alpha} \left[\left(\frac{\nu}{\rho} r - \rho \partial_r \right) \pm i \frac{\rho}{r} \partial_\alpha \right] \\ a'^\dagger_\pm &= \frac{1}{r} e^{\pm i\alpha} \left[\left(\frac{\nu}{\rho} r + \rho \partial_r \right) \mp i \frac{\rho}{r} \partial_\alpha \right] \end{aligned} \quad (22.4)$$

تبدیل یونیتاری را برای تابع موج می‌نویسیم

$$\Phi_{n_+, n_-}(x_1, x_2, t) = U^\dagger \Phi'_{n_+, n_-}(x_1, x_2, t) \quad (23.4)$$

ویژه توابع ناوردای پویا در مختصات جدید که در مرجع [۵] آمده است

$$\begin{aligned} \Phi_{n_+, n_-}(x_1, x_2, t) &= (-1)^n \frac{\nu^{1+|L|}}{\rho^{1+|L|} \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+1+|L|)}} r^{|L|} \\ &\quad e^{(im\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\nu}{\rho}) \frac{r^2}{2}} L_n^{|L|} \left(\frac{\nu}{\rho} r^2 \right) e^{iL\alpha} \end{aligned} \quad (24.4)$$

که داریم $n = \min(n_+, n_-) = \frac{1}{2}(n_+ + n_- - |L|)$ و $\Gamma(u)$ تابع گاما می‌باشد و $L_n^{|L|}$ توابع لاگر تعمیم یافته می‌باشند و $\ell = n_+ - n_-$ مانند مرحله قبل از تبدیل یکانی $a_\pm$ و $a_\pm^t$

$$\begin{aligned} a_\pm &= u^\dagger a'_\pm u = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[\left(i \frac{\nu}{\rho} + m \dot{\rho} f^{-1} \right) (x_1 \pm i x_2) - \rho (p_1 \pm i p_2) \right] \\ a_\pm^\dagger &= u^\dagger a'^\dagger_\pm u = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[\left(i \frac{\nu}{\rho} + m \dot{\rho} f^{-1} \right) (x_1 \mp i x_2) - \rho (p_1 \mp i p_2) \right] \end{aligned} \quad (25.4)$$

ناوردای پویا

$$I(t) = \nu(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + I) \quad (26.4)$$

و L_z به این صورت محاسبه می‌شود

$$I(t) = a_-^\dagger a_- - a_+^\dagger a_+ \quad (27.4)$$

پس در نهایت تحول زمانی به این صورت است

$$\begin{aligned}
 H(t) = & \frac{1}{2\nu} (mf^{-1}\dot{\rho} + \frac{f\nu}{m\rho} + m\omega^2 f^{-1}\rho^2)(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + I) \\
 & + (\frac{-mf^{-1}\dot{\rho}}{2\nu} + \frac{i\rho}{\rho} + \frac{f\nu}{2m\rho} - \frac{m\omega^2 f^{-1}\rho^2}{2\nu}) a_- a_+ \\
 & + (\frac{-mf^{-1}\dot{\rho}}{2\nu} - \frac{i\rho}{\rho} + \frac{f\nu}{2m\rho} - \frac{m\omega^2 f^{-1}\rho^2}{2\nu}) a_-^\dagger a_+^\dagger
 \end{aligned} \quad (28.4)$$

۳.۴ محاسبه مقادیر چشم داشتی برای نوسانگر هماهنگ

مقادیر چشم داشتی I و H و L_z را محاسبه می کنیم

$$E_{n_\pm} = \langle \Phi_{n_+, n_-}(t) | I(t) | \Phi_{n_+, n_-}(t) \rangle = \nu(n_+ + n_-) \quad (1.4)$$

$$L_{n_\pm} = \langle \Phi_{n_+, n_-}(t) | L_z | \Phi_{n_+, n_-}(t) \rangle = n_- n_+ \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n_\pm} = & \langle \Phi_{n_+, n_-}(t) | H(t) | \Phi_{n_+, n_-}(t) \rangle = \\
 & \frac{1}{2\nu} (mf\dot{\rho} + \frac{f\nu}{m\rho} + m\omega^2 f^{-1}\rho^2)(n_+ + n_-)
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

نحوه اثر گذاری عملگر ها داریم

$$\begin{aligned}
 a_\pm^\dagger | \Phi_{n_\pm, n_\mp}(t) \rangle &= \sqrt{n_\pm + 1} | \Phi_{n_\pm + 1, n_\mp}(t) \rangle \\
 a_\pm | \Phi_{n_\pm, n_\mp}(t) \rangle &= \sqrt{n_\pm} | \Phi_{n_\pm - 1, n_\mp}(t) \rangle
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$N = a_\pm^\dagger a_\pm | \Phi_{n_\pm - 1, n_\mp}(t) \rangle = n_\pm | \Phi_{n_\pm - 1, n_\mp}(t) \rangle \quad (5.4)$$

طبق رابطه (۶.۲) برای محاسبه رابطه فازی داریم

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \theta_{n_+, n_-}(t) &= \langle \phi_{n_+, n_-}(t) | i \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{n_+, n_-}(t) \rangle \\
 &= \langle \phi_{n_+, n_-}(t) | i \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{n_+, n_-}(t) \rangle - \langle \phi_{n_+, n_-}(t) | H(t) | \phi_{n_+, n_-}(t) \rangle
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

تحول زمانی را به این صورت در نظر می گیریم

$$(7.4)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{n_+, n_-}(t) | \frac{d}{dt} | \phi_{n_+, n_-}(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_+!} \sqrt{n_-!}} \langle \phi_{n_+, n_-}(t) | \frac{\partial}{\partial t} [(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}] | \phi_{00}(t) \rangle \\
 &= \langle \phi_{00}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{00}(t) \rangle + \frac{1}{\sqrt{n_+!} \sqrt{n_-!}} \langle \phi_{n_+, n_-}(t) | \frac{\partial}{\partial t} [(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}] | \phi_{00}(t) \rangle
 \end{aligned}$$

حاصل جمله اول به این صورت است

$$\langle \phi_{\circ\circ}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\circ\circ}(t) \rangle = \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) \quad (۸.۴)$$

و مقدار $[(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}]$ را به این صورت محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n_+!}\sqrt{n_-!}} \langle \phi_{n_+n_-}(t) | \frac{\partial}{\partial t} [(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}] | \phi_{\circ\circ}(t) \rangle \\ = \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) (n_+n_-) \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

را به این شیوه محاسبه می‌کنیم $\frac{\partial}{\partial t} a_-^\dagger$ و $\frac{\partial}{\partial t} a_+^\dagger$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_+^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[(mf^{-1}\eta\dot{\rho} + mf^{-1}\ddot{\rho} + i\nu\frac{\dot{\rho}}{\rho})(x_1 - ix_2) - \dot{\rho}(p_1 - ip_2) \right] \\ &= \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \eta\rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) a_+^\dagger + \left[\frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \eta\rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] a_- \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_-^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[(mf^{-1}\eta\dot{\rho} + mf^{-1}\ddot{\rho} + i\nu\frac{\dot{\rho}}{\rho})(x_1 + ix_2) - \dot{\rho}(p_1 + ip_2) \right] \\ &= \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \eta\rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) a_-^\dagger + \left[\frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \eta\rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] a_+ \end{aligned} \quad (۱۱.۴)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n_+,n_-}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{n_+,n_-}(t) \rangle &= \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} (\rho\ddot{\rho} + \eta\rho\dot{\rho} - \dot{\rho}^2) (n_+ + n_-1) \\ &= \frac{imf^{-1}}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{\nu^2 f^2}{m^2 \rho^2} - \omega^2 \rho^2 - \dot{\rho}^2 \right) (n_+ + n_-1) \end{aligned} \quad (۱۲.۴)$$

تابع فاز به این شکل خواهد بود

$$\theta_{n_+,n_-}(t) = \frac{-\nu}{\sqrt{m}} (n_+ + n_-1) \int_0^t \frac{f'(t')}{\rho^2(t')} dt' \quad (۱۳.۴)$$

که اثبات در مرجع [۷] آمده است در نهایت جواب معادله شرودینگر پس از تحول زمانی به این صورت می‌باشد

$$\begin{aligned} \Psi_{n,L}(x_1, x_2, t) &= -1^n \frac{\nu^{1+\frac{|\ell|}{2}}}{\rho^{1+|\ell|}\sqrt{pi}} \sqrt{\frac{n!}{\Gamma^2 n + |\ell| + 1}} r^{|\ell|} e^{(imf^{-1}\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\nu}{\rho^2})\frac{r^2}{2}} \\ &\quad L_u^{|\ell|} \left(\frac{\nu}{\rho^2} r^2 \right) e^{i\ell\alpha} e^{i\theta_{n,L}(t)} \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

طبق رابطه (۳.۴) داریم

$$E_m = \frac{m}{\sqrt{\nu}} \dot{x}_j^2 + \frac{m\omega^2(t)}{\sqrt{\nu}} x_j^2 = f(t)H(t) \quad (۱۵.۴)$$

فصل ۵

حالت های همدوس تعمیم یافته

۱.۵ حالت همدوس در جبر هایزنبرگ تعمیم یافته

۱.۱.۵ جبر هایزنبرگ تعمیم یافته

در جبر معمولی هایزنبرگ عملگر گام^۱ و عملگر عدد^۲ و روابط جابه جایی بین مولفه های میدان به این صورت است [۸]

(۱.۵)

$$a_1 a_1^t - a_1^t a_1 = 1 \quad N = a_1^t a_1 \quad a_1 = (a_1^t)^t \quad [N, a_1] = -a_1^t \quad [N, a_1] = a_1$$

درنمایش ماتریسی

$$a_1^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad a_1 |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad N |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.5)$$

به همین ترتیب در نمایش حالت K ام داریم

$$a_k = a_1 \sqrt{N - k + 1}_{k-1} \quad a_k^\dagger = a_1^\dagger \sqrt{N - k + 1}_{k-1} a_1^\dagger \quad (3.5)$$

¹step oprator

²number oprator

نماد پوانکاره رو معرفی می کنیم و روابط را باز نویسی داریم

$$\begin{aligned} a_n &= a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \quad n \geq 1 \\ a_k^\dagger &= \sqrt{N-k+2} |n+1\rangle \\ a_k &= \sqrt{N-k+1} |n-1\rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

$k=1$ همان جبر هایزنبرگ معمولی را نتیجه می دهد و با توجه به رابطه روابط جابه جایی به این شرح است

$$\begin{aligned} [a_k, a_k^\dagger] &= k(N-k+2)_{k-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ [N, a_k^\dagger] &= a_k^\dagger \\ [N, a_k] &= -a_k \end{aligned} \quad (5.5)$$

و نمایش ماتریس را مجدد می نویسیم

$$a_k |n\rangle \begin{cases} \sqrt{(N-k+1)_k} |n-1\rangle & n \geq k \\ 0 & n = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{cases} \quad (6.5)$$

$$a_k^\dagger |n\rangle \begin{cases} \sqrt{(N-k+2)_k} |n+1\rangle & n \geq k-1 \\ 0 & n = 0, 1, 2, \dots, k-2 \end{cases} \quad (7.5)$$

در واقع عملگر فقط می تواند روی حالت های $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |k-2\rangle$ اثر کند پس $k-1$ را مجزا بررسی می کنیم در واقع مانند این است که فضای هیلبرت را به صورت زیر تقسیم کنیم $H = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \dots \cup H_{K-2} \cup H'$ فضای H' شامل $k-2$ به بعد است یعنی $H' = |k-1\rangle, |k\rangle, |k+1\rangle, \dots$ می خواهیم در مورد جبر عملگری روابط (۷.۵) و حالت تعمیم یافته k ام صحبت کنیم به جای روابط هایزنبرگ از این جبر و روابط جابه جایی پیروی کنند

$$\begin{aligned} [a_k, a_k^\dagger] &= k(N_1 - k + 2)_{k-1} \\ [a_L, a_l^\dagger] &= k(N_1 - l + 2)_{l-1} \\ [N_1, a_k^\dagger] &= a_k^\dagger \quad [N_1, a_L^\dagger] = a_L^\dagger \\ [N_2, a_l] &= -a_l \quad [N_2, a_k] = -a_k \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{2}(N_2 - N_1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(N_2 + N_1) \quad J_+ = a_L^\dagger a_k \quad J_- = a_k^\dagger a_L \\ [\mathcal{L}, J_\pm] &= [\mathcal{L}, J_0] = 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

نوسانگر N_1 و N_2 دارای لاگرانژی $\mathcal{L}$ می باشند و به هم وابسته هستند که در جابه جایی شرکت می کند اگر دو ذره یک و دو مستقل و جدا را در نظر بگیریم که طبق روابط شوینگر عملگر j_0 و j_+ و j_- و C روابط کت آمیخته به این صورت خواهد بود

$$\begin{aligned} J_0 |n_1, n_2\rangle &= \frac{1}{2}(n_2 - n_1) |n_1, n_2\rangle \\ \mathcal{L} |n_1, n_2\rangle &= \frac{1}{2}(n_2 + n_1) |n_1, n_2\rangle \\ C |n_1, n_2\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} j_+ |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{(n_1 - l + 2)(n_1 - k + 1)_k} |n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \\ j_- |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{(n_1 - k + 2)(n_2 - l + 1)_l} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle \end{aligned}$$

اگر $n_1 \geq k - 1$ و $n_2 \geq k - 1$ داشته باشیم $n_1 + n_2 = 2j$ و $n_1 - n_2 = 2m$ در این شرایط خواهیم داشت

$$\begin{aligned} J_0 |jm\rangle &= m |jm\rangle \\ \mathcal{L} |jm\rangle &= j |jm\rangle \\ j_+ |jm\rangle &= \sqrt{(j + m - l + 2)_l(j - m - k + 1)_k} |jm + 1\rangle \\ j_- |jm\rangle &= \sqrt{(j + m - l + 1)_l(j - m - k + 2)_k} |jm - 1\rangle \\ -J + L - 1 &\leq m \leq J - k + 1 \end{aligned} \quad (11.5)$$

تعداد ابعاد به $2j - (K + 1) + 3$ مقدار می رسد نمایش برای چند جمله ای ها به این صورت خواهد بود

$$\begin{aligned} [J_-, J_+] &= [(l + k)J_0 + (l - k)\mathcal{L} + l - k](\mathcal{L} + J_0)_{k-1}(\mathcal{L} - J_0)_{l-1} \\ [J_0, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm} \end{aligned} \quad (12.5)$$

ابعاد جبر گفته شده و چند جمله ای های حاصل $l + k - 1$ خواهد بود

۲.۱.۵ تشکیل حالت همدوس

برای سه نوع جبر حالت همدوس حالت $k - 1$ را مورد بررسی قرار می دهیم حالت اول اگر $a_k \rightarrow b_k^\dagger$ و $a_k^\dagger \rightarrow B_k$ روابط به این شکل می باشد

$$B_k = a_k^\dagger F_1(C, N) \quad b_k = a_k \quad F_1(C, N) = \frac{N + 2 - k}{C - g(N)} = \frac{N + 2 - k}{a_k a_k^\dagger} \quad (13.5)$$

حالت دوم اگر روابط عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده به این شرح باشد

$$\begin{aligned} B_k &= a_k^\dagger \quad b_k = F_2(C, N) a_k \\ F_2(C, N) &= \frac{N + 2 - k}{C - g(N)} = \frac{N + 2 - k}{a_k a_k^\dagger} \end{aligned} \quad (14.5)$$

حالت سوم اگر

$$\begin{aligned} B_k &= a_k^\dagger \quad b_k = F_{\mathfrak{z}}(C, N) a_k \\ F_{\mathfrak{z}}(C, N) &= \sqrt{\frac{N + \mathfrak{z} - k}{C - g(N)}} = \sqrt{\frac{N + \mathfrak{z} - k}{a_k a_k^\dagger}} \end{aligned} \quad (15.5)$$

حال برای هر جبر کت همدوس را محاسبه می کنیم فرض می کنیم عملگر جابه جایی ما به این صورت باشد

$$D_1(z) = e^{zB_k - Z^* a_k} \quad (16.5)$$

$$b_k |z\rangle = z |z\rangle \quad (17.5)$$

با توجه به روابط (17.5) و (14.5) خواهیم داشت

$$|z\rangle = \sum_{n=k-1}^{\infty} c_n(z) |n\rangle \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} |Z\rangle &= c_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{(k)_n (k-1)_n (\mathfrak{z})_n (1)_n} \dots |n+k-1\rangle \\ |Z\rangle &= c_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{(k)_n (k-1)_n (\mathfrak{z})_n n!} \dots |n+k-1\rangle \end{aligned} \quad (19.5)$$

برای یافتن ضریب بهنجارش با توجه به رابطه (19.5) و $\langle z|z\rangle = 1$

$$n \rightarrow n - k + 1$$

$$\begin{aligned} |Z\rangle &= c_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{n-(k-1)}}{(k)_n (k-1)_n (\mathfrak{z})_n (1)_n} \dots |n\rangle \\ |Z\rangle &= c_{k-1}^{\mathfrak{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{\mathfrak{z}(n-(k-1))}}{(k)_n (k-1)_n (\mathfrak{z})_n n!} \dots \langle n|n\rangle = 1 \\ c_{k-1}^{-\mathfrak{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{\mathfrak{z}(n-(k-1))}}{(k)_n (k-1)_n (\mathfrak{z})_n n!} \dots = F_{k-1}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}; |z^{\mathfrak{z}}|) \end{aligned} \quad (20.5)$$

تابع F این گونه است

$${}_p \sum_q (a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n, \dots, (a_p)_n}{(b_1)_n, \dots, (b_q)_n} \frac{Z^n}{n!} \quad (21.5)$$

حالت همدوس z که در فضای $\hat{H}$ قرار دارد رابطه کاملیت را بنویسیم

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle \mu(|z|^{\mathfrak{z}}) \langle z| d^{\mathfrak{z}} z = I \quad (22.5)$$

با استفاده از (۲۰.۵) و (۲۲.۵) داریم

$$\sum \frac{Z^{2n}}{(n!)(k)_n(k-1)_n \dots (2)_n} |n\rangle \langle n| \int_0^\infty c_{k-1}^2 \mu(x) x^n dx = 1 \quad (23.5)$$

در اینجا $x = z^2$ نحوه محاسبه (۲۳.۵) در مرجع [۸] آمده است که $\mu(|z|^2)$ تابع وزن می باشد

$$\mu(x) = \frac{c_{k-1}^{-2}}{1!2! \dots (k-1)!} G_{2,k+2}^{k+1,1}(\circ, k; 2, 3, 4, k^\circ | x) \quad (24.5)$$

$$G_{p,q}^{m,n}(a_1, \dots, a_{n+1}, \dots, a_p; b_1, \dots, b_{n+1}, \dots, b_q; x) \quad (25.5)$$

این توابع $G - maeijer$ نام دارد

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^s G_{p,q}^{m,n}(a_1, \dots, a_{n+1}, \dots, a_p; b_1, \dots, b_{n+1}, \dots, b_q; x) dx \\ = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^p \Gamma(-b_j - s) \prod_{j=n+1}^q \Gamma(a_j + s + 1)} \end{aligned} \quad (26.5)$$

حالت دوم: اگر عملگر جابه جایی را به این شکل در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} D_2(z) &= e^{za_k^\dagger - Z^* b_k} \\ b_k |z\rangle &= z |z\rangle \\ |z\rangle &= \sum_{n=k-1}^\infty c_n(z) |n\rangle \end{aligned} \quad (27.5)$$

طبق رابطه (۳.۵)

$$|Z\rangle = c_{k-1} \sum_{n=0}^\infty \sqrt{\frac{(n+k-1)_n (n+k-1+1)_n (n+k-1+2) \dots n(1)}{n!}} |n+k-1\rangle \quad (28.5)$$

این نوع سری همگرا نمی شود و قابل نرمال شدن نیست بنابراین این کت حالت ، حالت همدوس نمی باشد

حالت سوم: نوع سوم جبر دفورم عملگر جابه جایی را اینگونه تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} D_3(z) &= e^{zb_k^\dagger - Z^* b_k} \\ b_k |z\rangle &= z |z\rangle \\ |z\rangle &= \sum_{n=k-1}^\infty c_n(z) |n\rangle \end{aligned} \quad (29.5)$$

طبق (۱۵.۵) حالت همدوس ما این گونه خواهد بود

$$\begin{aligned} |Z\rangle &= c_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(k)_{k-1}(k+1)_{k-1}(k+2)_{k-1}}}{\sqrt{n!}\sqrt{(k)_k}\sqrt{(k+1)_k}\sqrt{(k+2)_k}} z^n |n+k-1\rangle \\ |Z\rangle &= c_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n |n+k-1\rangle \end{aligned} \quad (30.5)$$

این حالت بسیار مشابه حالت همدوس برای نوسانگر هماهنگ ساده می باشد پس مانند رابطه کاملیت برای آن برقرار است با محاسبه ضریب بهنجارش داریم

$$c_{k-1}^{-2} z = e^{|z|^2} \quad (31.5)$$

۳.۱.۵ خواص غیر کلاسیکی

خواص (میدان مورد بررسی) می تواند خواص کلاسیکی یا غیر کلاسیکی باشد در این جا در مورد خواص آماری حالت همدوس صحبت کنیم چنانچه حالت همدوس ما از توزیع پواسون پیروی کند به خواص کلاسیکی نزدیکتر است حالت همدوس با جبر نوع اول از توزیع پواسون پیروی می کند در مورد دوم حالت همدوسی رخ نمی دهد در مورد سوم منجر به نام حالت همدوس ناجایگزیده گلوبر^۱ می شود در بررسی خواص فوتون ها از احتمال توزیع عدد فوتونی بهره می گیریم

$$P(n) = |\langle n+k-1|z\rangle|^2 = c_{k-1}^{-2} \frac{(z^2)^n}{(1)_n(2)_n \dots (k-1)_n} \quad (32.5)$$

پارامتر مندل میزان خروج از توزیع پواسون را نشان می دهد را مورد بررسی قرار می دهیم برای شمارش آمار فوتون ها از حالت $k-1$ شروع به شمارش می کنیم

$$Q = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle} - 1 \quad (33.5)$$

$Q = 0$ ، Q_- ، Q_+ در مورد اول مقدار چشم داشتی را محاسبه می کنیم

$$\langle z|N|z\rangle = |c_{k-1}^{-2}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)|z|^{2n}}{(n!)(2)_n(3)_n \dots (k)_n} \quad (34.5)$$

$$\langle z|N|z\rangle = \frac{|z|^2}{k!} \circ F_{k-1}(\cdot; 2, 3, \dots, K+1, ||z|^2) \circ F_{k-1}(\cdot; 2, 3, 4, \dots, K||z|^2) + k+1 \quad (35.5)$$

¹displace Glauber

$$\langle z|N^{\mathfrak{Y}}|z\rangle = |c_{k-1}^{-\mathfrak{Y}}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)^{\mathfrak{Y}} |z|^{\mathfrak{Y}n}}{(n!)(\mathfrak{Y})_n(\mathfrak{Y})_n \dots (k)_n} \quad (36.5)$$

$$\begin{aligned} \langle z|N|z\rangle &= \frac{|z|^{\mathfrak{F}}}{k!(k+1)!} \frac{{}_0F_{k-1}(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}, \dots, K+\mathfrak{Y}, ||z|^{\mathfrak{Y}})}{{}_0F_{k-1}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{F}, \dots, K||z|^{\mathfrak{Y}})} \\ &+ \frac{(\mathfrak{Y}k-1)|z|^{\mathfrak{Y}}}{k!} \frac{{}_0F_{k-1}(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}, \dots, K+\mathfrak{Y}, ||z|^{\mathfrak{Y}})}{{}_0F_{k-1}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{F}, \dots, K||z|^{\mathfrak{Y}})} + (k-1)^{\mathfrak{Y}} \end{aligned} \quad (37.5)$$

در نماد پیوانکاره داریم

$$(a)_{n+1} = a(a+1)_n \quad (38.5)$$

پارامتر مندل در $|z\rangle$ های کوچک به این صورت خواهد بود

$$Q = \frac{1}{k!} |z|^{\mathfrak{Y}} - 1 \quad (39.5)$$

۲.۵ حالت همدوس زوج و فرد تعمیم یافته

اگر حالت همدوس $|z\rangle = |z|e^{i\phi}$ و $|-z\rangle = |z|e^{i\phi+\pi}$ را در نظر بگیریم این حالت دارای اختلاف فاز π و دامنه یکسان است می توان گفت اگر این دو حالت به صورت متقارن ترکیب شوند حالت همدوس زوج تشکیل می دهند چنانچه ترکیب پاد متقارن باشد حالت همدوس فرد، است در این بخش می خواهیم حالت های همدوس زوج و یا فرد تعمیم یافته را بررسی کنیم اگر $|z\rangle$ و $|-z\rangle = |z|e^{i\phi+\pi}$ را با دامنه متفاوت μ در نظر بگیریم برهمه‌نی حالت های زوج و فرد را این گونه تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} |z\rangle_+ &= N_+ \left(|z\rangle + \mu(|z|, \theta) |ze^{i\theta}\rangle \right) \\ |z\rangle_- &= N_- \left(|z\rangle - \mu(|z|, \theta) |ze^{i\theta}\rangle \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

پس حالت همدوس $|z\rangle_{\pm}$ حالت همدوس جفت شده تعمیم یافته می نامیم $N_{\pm}$ مقدار نرمالیزاسیون است و $0 < \theta < \pi$ البته $|z\rangle$ و $|-z\rangle = |z|e^{i\phi}$ الزاما متعامد نیستند با توجه به روابط در حالت خاص $\theta = 0$ ، $|z\rangle_-$ وجود دارد و در حالت خاص $\theta = \pi$ و $\mu = 1$ است و $|z\rangle_-$ و $|z\rangle_+$ در این حالت متعامد هستند و داریم

$$\begin{aligned} +\langle z|z\rangle_- &= N_+N_- \left[1 - |\mu|^{\mathfrak{Y}} + \mu^* e^{|\mathfrak{Y}|(e^{i\theta}-1)} \right] = 0 \quad ; \quad \langle ze^{i\theta}|ze^{i\theta}\rangle = \exp(|z|^{\mathfrak{Y}}(e^{i\theta-\theta'}-1)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

بنابراین مقدار $\mu = e^{-i|Z|^{\mathfrak{Y}} \sin \theta}$ که در $\theta = \pi$ برابر یک خواهد بود از (۱.۵) داریم

$$|z\rangle_{\pm} = N_{\pm} \left(|z\rangle \pm e^{-i|Z|^{\mathfrak{Y}} \sin \theta} |ze^{i\theta}\rangle \right) \quad (3.5)$$

یا می توان به این فرم نمایش داد

$$|z\rangle_{\pm} = N_{\pm} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n \left(1 \pm e^{i(n\theta - |z|^2 \sin \theta)}\right)}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4.5)$$

که مقدار نرمالیزاسیون برابر است با

$$N_{\pm} = \frac{1}{2(1 \pm e^{|z|^2(\cos \theta - 1)})} \quad (5.5)$$

اثر عملگر های خلق و فنا را این گونه بیان می کنیم

$$\begin{aligned} a|z\rangle_{+} &= z \left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right) |z_{+}\rangle + z \left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right) \sqrt{\frac{1-e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}{1+e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}} |z_{-}\rangle \\ a|z\rangle_{-} &= z \left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right) |z_{-}\rangle + z \left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right) \sqrt{\frac{1+e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}{1-e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}} |z_{+}\rangle \end{aligned} \quad (6.5)$$

در حالت خاص گفته شده چنانچه $\theta = \pi$ باشد $|z\rangle_{\pm} \rightarrow |z\rangle_{\mp}$ تبدیل می شود اگر $0 < \theta < \pi$ انگاه $|z\rangle_{\pm} \rightarrow |z\rangle_{\pm}$ برای عملگر a^2 طبق بالا می توان نوشت

$$\begin{aligned} a^2|z\rangle_{+} &= z^2 \left(\frac{1+e^{2i\theta}}{2}\right) |z_{+}\rangle + z^2 \left(\frac{1-e^{2i\theta}}{2}\right) \sqrt{\frac{1-e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}{1+e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}} |z_{-}\rangle \\ a^2|z\rangle_{-} &= z^2 \left(\frac{1+e^{2i\theta}}{2}\right) |z_{-}\rangle + z^2 \left(\frac{1-e^{2i\theta}}{2}\right) \sqrt{\frac{1+e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}{1-e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}} |z_{+}\rangle \end{aligned} \quad (7.5)$$

مقادیر چشم داشتی برای a و $a^{\dagger}$ و a^2 برای حالت همدوس تعمیم یافته به این صورت است

$$\langle z_{\pm} | a^2 | z_{\mp} \rangle = z^2 \left(\frac{1+e^{2i\theta}}{2}\right) \quad (8.5)$$

$$\langle z_{\pm} | (a^{\dagger})^2 | z_{\pm} \rangle = \bar{z}^2 \left(\frac{1+e^{-2i\theta}}{2}\right) \quad (9.5)$$

$$\langle z_{\mp} | a^2 | z_{\pm} \rangle = z^2 \left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right) \sqrt{\frac{1 \mp e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}{1 \pm e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}} \quad (10.5)$$

$$\langle z_{\mp} | (a^{\dagger})^2 | z_{\pm} \rangle = \bar{z}^2 \left(\frac{1-e^{-2i\theta}}{2}\right) \sqrt{\frac{1 \pm e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}{1 \mp e^{|z|^2(\cos \theta - 1)}}} \quad (11.5)$$

آمار فوتون ها احتمال اینکه تعداد n فوتون در حالت همدوس جفت شده تعمیم یافته ظاهر شوند را با آمار فوتون ها بررسی می کنیم در واقع آمار فوتون ها بیان می کند چه تعداد از حالت های همدوس زوج و چه تعداد از حالت های همدوس فرد می باشند

$$P_n^{\pm} = |\langle n | z \rangle_{\pm}|^2 = \frac{|z|^{2n} e^{-|z|^2}}{n!} \left[\frac{1 \pm \cos(n\theta - |z|^2 \sin \theta)}{1 \pm e^{|z|^2 \cos(\theta - 1)}} \right] \quad (12.5)$$

جدول ۱.۵: مقادیر p_n^+ برای n های مختلف

n	حالت همدوس معمولی	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}$	$\theta = \frac{5\pi}{6}$	$\theta = \pi$
۰	۰/۱۳۵۳	۰/۱۱۸۱	۰/۰۸۳۱	۰/۰۶۹۶	۰/۱۰۸۲	۰/۲۶۵۸
۱	۰/۲۷۰۷	۰/۲۸۹۶	۰/۳۵۱۱	۰/۴۵۵۲	۰/۴۹۸۹	۰/۲۵۱۹
۲	۰/۲۷۰۷	۰/۳۰۶۵	۰/۳۸۲۹	۰/۳۳۷۶	۰/۰۵۸۱	۰/۱۴۳۱
۳	۰/۱۸۰۴	۰/۱۸۸۳	۰/۱۵۳۱	۰/۰۱۴۴	۰/۱۴۴۳	۰/۳۲۴۵
۴	۰/۰۹۰۲	۰/۰۷۴۶	۰/۰۱۴۹	۰/۰۴۶۴	۰/۱۶۶۳	۰/۰۰۰۱
۵	۰/۰۳۶۱	۰/۰۱۹۵	۰/۰۰۱۷	۰/۰۶۰۷	۰/۰۰۷۸	۰/۰۶۶۶
۶	۰/۰۱۲۰	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۷۴	۰/۰۱۵۰	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۵۴
۷	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۳۵
۸	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۲

جدول ۲.۵: مقادیر p_n^- برای n های مختلف

n	حالت همدوس معمولی	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}$	$\theta = \frac{5\pi}{6}$	$\theta = \pi$
۰	۰/۱۳۵۳	۰/۲۶۴۷	۰/۲۴۸۵	۰/۲۲۱۷	۰/۱۶۵۳	۰/۰۶۳۷
۱	۰/۲۷۰۷	۰/۱۲۸۲	۰/۰۹۶۶	۰/۰۲۸۴	۰/۰۱۸۵	۰/۲۹۰۴
۲	۰/۲۷۰۷	۰/۰۰۱۳	۰/۰۲۷۸	۰/۱۸۲۸	۰/۵۰۵۵	۰/۴۰۴۵
۳	۰/۱۸۰۴	۰/۱۲۱۷	۰/۲۳۹۶	۰/۳۹۸۵	۰/۲۲۰۴	۰/۰۲۹۳
۴	۰/۰۹۰۲	۰/۲۰۷۸	۰/۲۵۳۳	۰/۱۴۷۸	۰/۰۰۶۲	۰/۱۸۸۴
۵	۰/۰۳۶۱	۰/۱۶۰۸	۰/۱۱۰۵	۰/۰۰۳۸	۰/۰۶۷۴	۰/۰۰۴۱
۶	۰/۰۱۲۰	۰/۰۷۸۸	۰/۰۲۲۱	۰/۰۰۸۶	۰/۰۱۴۷	۰/۰۱۹۰
۷	۰/۰۰۳۴	۰/۰۲۷۶	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۳۴
۸	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۰۵

اگر $\theta = \pi$ برای حالت های همدوس زوج داریم جدول ۱.۵ مقادیر P_n در $|z|^2 = 2$ را برای حالت همدوس معمولی را نمایش می دهد و برای حالت های همدوس فرد داریم جدول ۲.۵ مقادیر P_n در $|z|^2 = 2$ را برای حالت همدوس معمولی را نمایش می دهد

$$P_n^e = \frac{2|z|^{2n}e^{-|z|^2}}{n!(1 + e^{-2|z|^2})} \quad (۱۳.۵)$$

برای حالت های همدوس فرد داریم

$$P_n^o = \frac{2|z|^{2n} e^{-|z|^2}}{n!(1 - e^{-2|z|^2})} \quad (14.5)$$

پارامتر مندل برای توابع همدوس زوج و فرد به این صورت بدست می آید [۹]

$$Q_{\pm} = \frac{\langle N^2 \rangle_{\pm} - \langle N \rangle_{\pm}^2}{\langle N \rangle_{\pm}} - 1 = \frac{\langle N(N-1)_{\pm} \rangle}{\langle N \rangle_{\pm}} - \langle N \rangle_{\pm} \quad (15.5)$$

$$N_{\pm} = \langle z|N|z \rangle_{\pm} \quad (16.5)$$

$$|z\rangle_{\pm} = N_{\pm} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n \left(1 \pm e^{i(n\theta - |z|^2 \sin \theta)}\right)}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$N_{\pm}^2 = \frac{1}{2\sqrt{1 \pm e^{|z|^2 (\cos \theta - 1)}}} \quad (17.5)$$

۳.۵ حالت همدوس تغییر شکل یافته براساس جبر سالیس

ابتدا به معرفی جبربوزونی دفورم یا تغییر شکل یافته بر اساس تابع نمایی تغییر شکل یافته در جبرسالیس می پردازیم سپس با این فرمالیزم به بررسی حالت همدوس تغییر شکل یافته و حالت همدوس زوج و فرد تغییر شکل یافته و خواص غیر کلاسیکی این نوع از حالت های همدوس می پردازیم اگر ساختار دفورم (تغییر شکل یافته) ^۱ ما این گونه باشد $f(n) = a^{\dagger}a$ درواقع

$$\begin{aligned} [a, a^{\dagger}] &= \phi(N) & [N, a] &= -a & [N, a^{\dagger}] &= a^{\dagger} \\ a^{\dagger}a &= N = f(n) & aa^{\dagger} &= F(N+1) \end{aligned} \quad (18.5)$$

بسته به تعریف ساختار تغییر شکل یافته $f(n)$ جبر تغییر شکل یافته متفاوتی ظاهر می شود مثلا اگر $f(n) = N = a^{\dagger}a$ نتیجه جبر تغییر شکل یافته معمولی خواهد بود یا برای $f(n) = N = Nq^{N-1}$ جبر متقارن تغییر شکل یافته را نتیجه می دهد $f(N) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$ و جبر تغییر شکل یافته تام دانکوف ^۲ را نتیجه می دهد برای تعمیم جبر دفورم می توان از تعمیم $f(N)$ و مشتقات آن استفاده کرد

$$a := D_x^F \quad a^{\dagger} := x \quad f(N) := x \frac{\partial}{\partial x} = x \partial_x \quad (19.5)$$

$$D_x^F x^n = F(N)x^{n-1} \quad (20.5)$$

¹deformation map

²Tomm Dancoff

تابع نمایی دفورم را نیز این گونه معرفی می کنیم

$$e_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{F(n)!} \quad (4.5)$$

که همان تابع نمایی متداول را نتیجه می دهد اما چنانچه تابع ساختار دفورم $f(N)$ متفاوت باشد مثلاً $f(N) = \frac{q^N - 1}{q - 1}$ تابع نمایی تغییر شکل یافته متناسب با آن خواهد بود اولین بار سالیس تابع نمایی تغییر شکل یافته را برای آنتروپی به کاربرد

$$e_q(x) = (1 + qx)^{\frac{1}{q}} \quad (5.5)$$

و با این تابع نمایی تعمیم یافته فاکتور بولتزمن دفورم و تغییر شکل یافته و آنتروپی دفورم را معرفی کرد را با این مشتق گیری برای بیان آنتروپی دفورم استفاده کرد

۱.۳.۵ تعریف جبر تغییر شکل یافته براساس تابع نمایی تغییر شکل یافته

می دانیم بسط تابع نمایی تغییر شکل یافته در جبر تسالیس به این صورت است

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} \quad (6.5)$$

از تابع ساختار دفورم صحبت کردیم و این که ساختار و الگوی رفتار چه باشد حالت q ام را نامبر می نامیم بنابراین داریم

$$f(N) = [x]_q = \frac{n}{1 - q(n - 1)} \quad (7.5)$$

به طور مثال اگر عدد n یک و دو و سه و ... باشد داریم

$$[0]_q = 0$$

$$[1]_q = 1$$

$$[2]_q = \frac{2}{1 - q}$$

$$[3]_q = \frac{3}{1 - 2q}$$

$$\vdots$$

$$[n]_q = \frac{N}{1 - q(N - 1)} = f(N) = a^t a$$

می دانیم که $N|n\rangle = n|n\rangle$ طبق عملگر ماتریسی برای عملگر های خلق و فنا داریم

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]_q}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]_q}|n+1\rangle \quad (8.5)$$

کت پایه را $|\circ\rangle = |\circ\rangle$ در نظر می گیریم برای n امین حالت داریم

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{[n]_q!} |\circ\rangle$$

$F(N)$ مثبت فرض می شود مقادیر q می تواند مثبت یا منفی باشد اگر $q \leq \circ$

$$[n]_q = \frac{N}{1 - |q|(N-1)} \quad (9.5)$$

با توجه به این که احتمال $f(N)$ ^۱ مثبت فرض می شود و $n = \circ, 1, 2, 3, \dots$ بنابراین با مشتقات ابعاد بی نهایت سر و کار داریم جبر تغییر شکل یافته ما اینگونه خواهد بود

$$[a, a^\dagger] = \frac{N+1}{1-qN} - \frac{N}{1-q(N-1)} \quad (10.5)$$

اگر

$$q > \circ$$

$$[n]_q = \frac{N}{1 - q(N-1)} \quad (11.5)$$

احتمال $f(N)$ با این شرط $n \leq 1 + \frac{1}{q}$ مثبت است حالتهای بزرگتر از q را با p نمایش می دهیم و مقدار n به این صورت است $p \dots q \dots n = \circ, 1, 2, 3, \dots$ مقدار p های مجاز را از رابطه براکت زیر محاسبه می کنیم

$$p = \begin{cases} \left[\frac{1}{q} \right] & \text{برای عدد صحیح } \frac{1}{q} \\ \left[\frac{1}{q+1} \right] & \text{برای } \frac{1}{q} \text{ غیر صحیح} \end{cases} \quad (12.5)$$

برای $|\circ\rangle = a^t |p\rangle$ چون از p کت بالاتری نداریم

$$[a, a^\dagger] = \frac{N+1}{1-qN} - \frac{N}{1-q(N-1)} \frac{p+1}{1-qp} |p\rangle\langle p| \quad (13.5)$$

۲.۳.۵ تعمیم یافته تشکیل حالت همدوس تغییر شکل یافته

یکی از تعریف های حالت همدوس ویژه حالت های عملگر فناست $a|z\rangle = z|z\rangle$ حالت همدوس تغییر شکل یافته را با جبر تغییر شکل یافته بررسی می کنیم اگر $q \leq \circ$ حالت همدوس نرمال شده در این جا به این صورت است:

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{e_q(x)}} \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle \quad x = z^2 \quad \circ \leq x \leq \frac{1}{|q|} \quad (14.5)$$

¹postive definite

اگر $q > 0$ به طور مشابه تعریف کت همدوس همان است فقط حدود تا p خواهد بود

$$|z, p\rangle = c_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle \quad x = z^2 \quad 0 \leq x < \infty \quad (15.5)$$

$$c_p = \frac{1}{\sqrt{e_p(x)}} \quad e_p(x) = \sum \frac{x^n}{[n]_q!}$$

اثر عملگر فنا روی این حالت داریم

$$|z, p\rangle = z \frac{c_p}{c_{p-1}} |z, p-1\rangle \quad (16.5)$$

در حالت خاص $p = \frac{1}{q}$ داریم :

$$e_p(x) = (1 + \frac{1}{p}x)^p$$

۳.۳.۵ خواص غیر کلاسیکی حالت های همدوس تغییر شکل یافته

تابع توزیع

می‌خواهیم تابع توزیع فوتونی (p_n) را محاسبه کنیم می‌توان این تابع را احتمال یافت شدن فوتون های همدوس در یک دسته فوتون‌ها که با پتانسیل نوسانگر هماهنگ نوسان دارند بیان کرد

اگر $q \leq 0$

احتمال یافتن n فوتون در حالت همدوس برابر است با

$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \left(\frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!e(x)_q}} \langle n|n\rangle \right)^2 = \frac{x^n}{[n]_q!e(x)_q} \quad (17.5)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

در شکل ۱.۵ تابع توزیع فوتونی P_n را بر حسب های n مختلف مشاهده می‌کنیم $x = 2$ و $q = 0$ با صورتی و $q = -0.1$ با قهوه‌ای و $q = -0.2$ با آبی نشان داده شده است

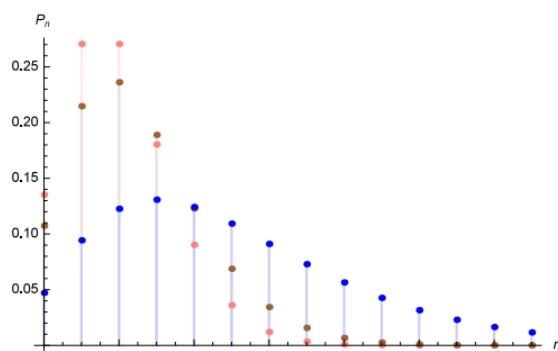
اگر $q > 0$

احتمال یافتن n فوتون در حالت همدوس برابر است با

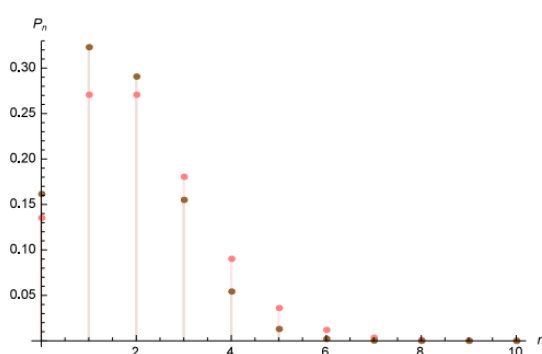
$$P_n = |\langle n|z, p\rangle|^2 = \frac{x^n}{[n]_q!e(x)_p} \quad (18.5)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, p$$

در شکل ۲.۵ تابع توزیع فوتونی P_n را بر حسب های n مختلف مشاهده می‌کنیم $x = 2$ و $q = 0$ با صورتی و $q = 0.1$ با قهوه‌ای و $q = 0.2$ یا (همان $p = 5$) با آبی نشان داده شده است



شکل ۱.۵: رسم P_n بر حسب n برای $q \leq 0$



شکل ۲.۵: رسم P_n بر حسب n برای $q > 0$

ساختارهای پواسونی

در بررسی های آماری پدیده هایی که از توزیع پواسون پیروی می کنند از کمیتی به نام پارمتر مندل استفاده می شود که میزان خروج از توزیع پواسون را بیان می کند که مقادیر مثبت یا منفی داشته باشد Q برابر است با

$$Q = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle} - 1 = \frac{\langle N(N-1) \rangle}{\langle N \rangle} - \langle N \rangle \quad (19.5)$$

اگر $q \leq 0$

$$\langle A \rangle = \langle z|A|z \rangle \quad (20.5)$$

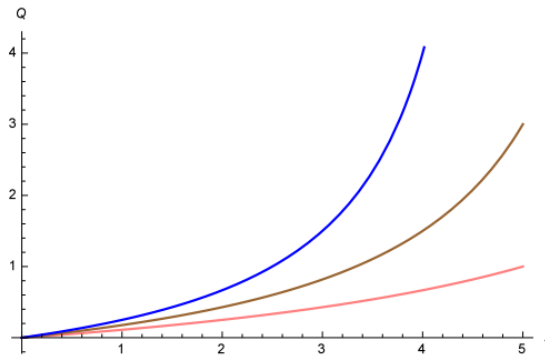
$$\langle N(N-1) \rangle = \frac{(1-q)x^2}{(1+qx)^2} \quad (21.5)$$

$$\langle z|N|z \rangle = \frac{x}{1+qx} \quad (22.5)$$

با توجه به روابط (۱۸.۵)(۱۹.۵)(۲۱.۵) داریم

$$Q = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle - 1} = \frac{|q|x}{1+qx} \geq 0 \quad (23.5)$$

شکل ۳.۵ پارامتر مندل را بر حسب مقادیر مختلف x نشان می‌دهد $q = -0.1$ با صورتی و $q = -0.2$ با قهوه‌ای و $q = -0.5$ با آبی نشان داده شده است اگر $q > 0$



شکل ۳.۵: رسم Q بر حسب x برای $q \leq 0$

و پارامتر مندل به این صورت بدست می‌آید

$$Q_p = \frac{\langle N^2 \rangle_p - \langle N \rangle_p^2}{\langle N \rangle_p} - 1 \quad (24.5)$$

$$\langle A \rangle_p = \langle z, p | A | z, p \rangle$$

$$\langle N(N-1) \rangle_p = \frac{1}{e_p(x)} x \partial_x (x \partial_x - 1) e_p(x) \quad (25.5)$$

$$\langle N \rangle_p = \frac{1}{e_p(x)} x \partial_x e_p(x) \quad (26.5)$$

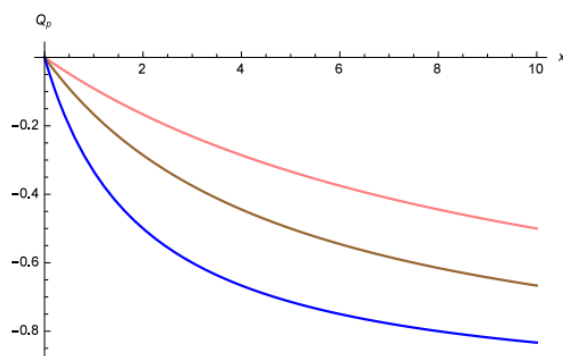
شکل ۴.۵ پارامتر مندل را بر حسب مقادیر مختلف x نشان می‌دهد $q = 0.1$ با صورتی و $q = 0.2$ با قهوه‌ای و $q = 0.5$ با آبی نشان داده شده است

اثر بانچینگ و آنتی بانچینگ

برای بررسی تاثیرات بانچینگ و آنتی بانچینگ^۱ از تابع همبستگی مرتبه دوم استفاده می‌کنیم به این صورت که

$$g^2(\circ) = \frac{\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} \quad (27.5)$$

¹bunching and anti-bunching



شکل ۴.۵: رسم Q_p بر حسب x برای $q > 0$

اگر $q \leq 0$

برای حالت همدوس $g_p^{(0)} = 0$ که همان تابع همدوس معمولی است

اگر $q > 0$

با این شرط تابع همدوسی مرتبه دوم

$$g_p^{(0)} = \frac{\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle_p}{\langle a^\dagger a \rangle_p^2} \quad (28.5)$$

برای حالت همدوس تغییر شکل یافته داریم

$$g_p^{(0)} = \frac{e_p(x)e_{p-2}(x)}{(e_{p-1}(x))^2} \quad (29.5)$$

۴.۳.۵ تعمیم یافته حالت های همدوس زوج و فرد تغییر شکل یافته

در این بخش در مورد خواص حالت های همدوس زوج و فرد تغییر شکل یافته بحث می کنیم

اگر $q \leq 0$

گفتیم حالت های همدوس زوج و فرد را به این صورت تعریف می کنیم

$$|z\rangle_{\pm} = c_{\pm}(|z\rangle \pm |z\rangle) \quad (30.5)$$

بهنجارش برای هر کدام به ترتیب این گونه خواهد بود

$$\begin{aligned} c_+^{-2} &= \frac{4}{e(x)_q} \cosh(x)_q & c_-^{-2} &= \frac{4}{e(x)_q} \sinh(x)_q \\ \cosh_q(x) &= \frac{1}{4}(e(x)_q + e(x)_q) & \sinh_q(x) &= \frac{1}{4}(e(x)_q - e(x)_q) \end{aligned} \quad (31.5)$$

از این رابطه استفاده کردیم که $\langle z|-z\rangle = \frac{e(-x)_q}{e(x)_q}$ بنابراین حالت های همدوس زوج و فرد همدوس به این صورت خواهد بود

$$|z\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{\cosh_q(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (1)^n) \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle \quad (32.5)$$

$$|z\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{\sinh_q(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (1)^n) \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle$$

اگر $q > 0$

$$|z, p\rangle_{\pm} = c_{\pm}(|z, p\rangle \pm |-z, p\rangle) \quad (33.5)$$

ضرب داخلی $\langle z, p|-z, p\rangle = \frac{e(-x)_p}{e(x)_p}$ و نرمالیزاسیون برای هر کدام به ترتیب خواهد بود

$$c_+^{-1} = \frac{1}{e(x)_p} \cosh(x)_p \quad c_-^{-1} = \frac{1}{e(x)_p} \sinh(x)_p \quad (34.5)$$

$$\cosh_p(x) = \frac{1}{2}(e(x)_p + e(x)_p) \quad \sinh_p(x) = \frac{1}{2}(e(x)_p - e(x)_p)$$

بنابراین حالت های همدوس زوج و فرد تغییر شکل یافته این گونه خواهد بود

$$|z, p\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{\cosh_p(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (1)^n) \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle \quad (35.5)$$

$$|z, p\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{\sinh_p(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (1)^n) \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle$$

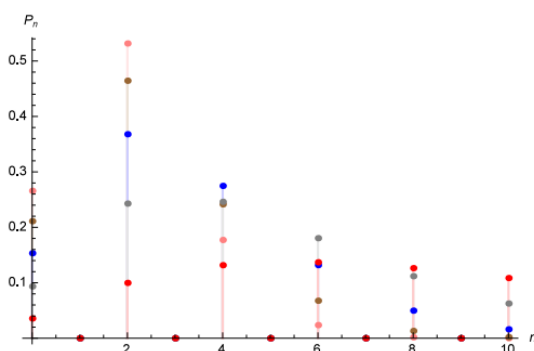
تابع توزیع فوتونی حالت های همدوس زوج و فرد تغییر شکل یافته

احتمال یافتن n فوتون در حالت همدوس دفورم زوج و فرد به این صورت است اگر $q \leq 0$

$$P_{n,+} = |\langle n|z\rangle_+|^2 = \begin{cases} (\cosh_q(x))^{-1} \frac{x^{\Upsilon_k}}{[\Upsilon_k]_q!} & (n = \Upsilon_k) \\ 0 & (n = \Upsilon_k + 1) \end{cases} \quad (36.5)$$

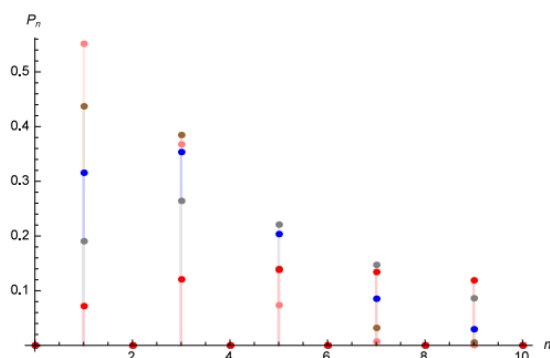
$$P_{n,-} = |\langle n|z\rangle_-|^2 = \begin{cases} 0 & (n = \Upsilon_k + 1) \\ (\sinh_q(x))^{-1} \frac{x^{\Upsilon_{k+1}}}{[\Upsilon_{k+1}]_q!} & (n = \Upsilon_k) \end{cases} \quad (37.5)$$

تابع توزیع فوتونی برای حالت همدوس تغییر شکل یافته نشان می دهد که احتمال یافتن تابع فوتونی فرد به صفر میل می کند و به طور مشابه تابع احتمال یافتن تابع فوتونی زوج به صفر میل می کند بنابراین تابع توزیع شدت نوسانی است در ۵.۵ شکل $P_{n,+}$ تابع توزیع فوتونی را بر حسب های n مختلف مشاهده می کنیم $x = 2$ و $q = 0$ با صورتی و $q = 0.1$ با قهوه ای و



شکل ۵.۵: رسم P_n بر حسب x برای $q = 0$

۶.۵ $P_{n,-}$ تابع توزیع فوتونی را بر حسب های n مختلف مشاهده می کنیم $x = 2$ و $q = 0$ با صورتی و $q = -0.1$ با قهوه ای و $q = -0.2$ با آبی و $q = -0.3$ با خاکستری و $q = -0.4$ با قرمز نشان داده شده است



شکل ۶.۵: رسم P_n بر حسب x برای $q > 0$

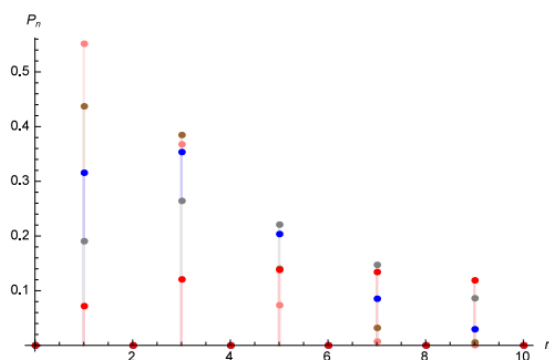
اگر $q > 0$

احتمال یافتن n فوتون در حالت همدوس تغییر شکل یافته زوج و فرد به این صورت است

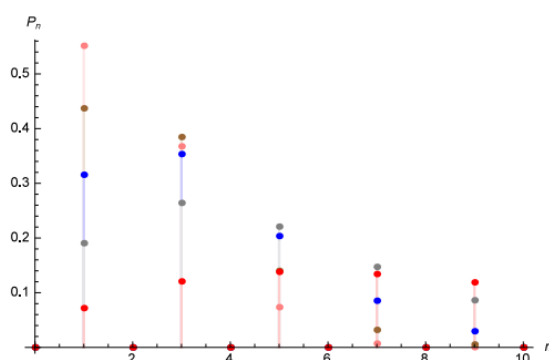
$$P_{n,+p} = |\langle n|z,p\rangle_+|^2 = \begin{cases} (\cosh_p(x))^{-1} \frac{x^{\lceil k \rceil}}{[\lceil k \rceil]_q!} & (n = 2k) \\ 0 & (n = 2k + 1) \end{cases} \quad (38.5)$$

$$P_{n,-p} = |\langle n|z,p\rangle_-|^2 = \begin{cases} 0 & (n = 2k + 1) \\ (\sinh_p(x))^{-1} \frac{x^{\lceil k+1 \rceil}}{[\lceil k+1 \rceil]_q!} & (n = 2k) \end{cases} \quad (39.5)$$

در شکل ۷.۵ $P_{n,+}$ تابع توزیع فوتونی را بر حسب های n مختلف مشاهده می کنیم $x = 2$ و $q = 0$ با صورتی و $q = 0.1$ با قهوه ای نشان داده شده است و در شکل ۸.۵ $P_{n,-}$ تابع توزیع فوتونی را بر حسب های n مختلف مشاهده می کنیم $x = 2$ و $q = 0$ با صورتی و $q = 0.1$ با قهوه ای نشان داده شده است



شکل ۷.۵: رسم P_n بر حسب x برای $q \leq 0$



شکل ۸.۵: رسم P_n بر حسب x برای $q > 0$

۵.۳.۵ خواص غیر کلاسیکی برای حالت همدوس زوج و فرد تعمیم یافته

ساختارهای فرو و فرا پواسونی

پارامتر مندل به p یا q بستگی دارد که به این صورت تعریف می شود اگر $q \leq 0$

$$Q_{\pm} = \frac{\langle N^2 \rangle_{\pm} - \langle N \rangle_{\pm}^2}{\langle N \rangle_{\pm}} - 1, \quad \langle A \rangle_{\pm} = \pm \langle z | A | z \rangle \pm \quad (40.5)$$

برای حالت های همدوس زوج و فرد تعمیم یافته مقدار چشم داشتی به این صورت خواهد بود

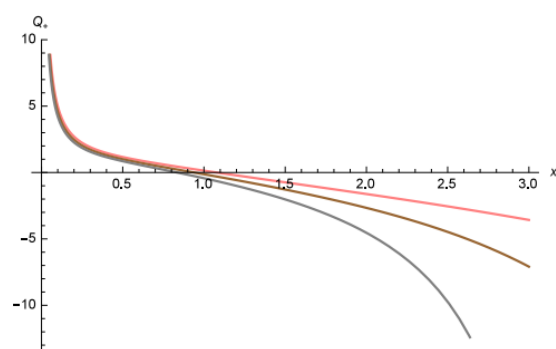
$$\langle N \rangle_p = \frac{x}{1 \pm \mu(x)} \left(\frac{1}{1 + qx} \pm \frac{\mu}{1 - qx} \right) \quad (41.5)$$

$$\langle N(N-1) \rangle_{\pm} = \frac{(1-q)x^2}{1 \pm \mu(x)} \left[\frac{1}{(1+qx)^2} \pm \frac{\mu}{(1-qx)^2} \right] \quad \mu(x) = \frac{e_p(-x)}{e_q(x)} \quad (42.5)$$

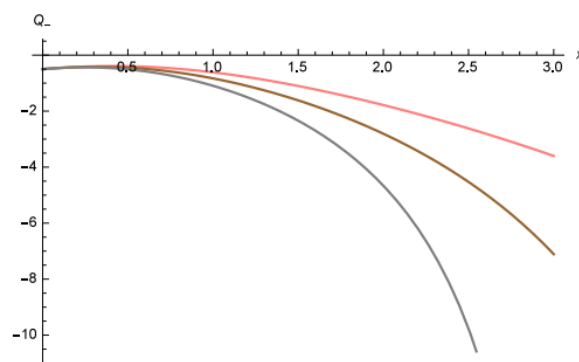
پارامتر مندل برای حالت همدوس تغییر شکل یافته با این رابطه بدست می آید

$$Q_{\pm} = (1-q)x \left[\frac{\frac{1}{(1+qx)^2} \pm \frac{\mu(x)}{(1-qx)^2}}{\frac{1}{(1+qx)} \mp \frac{\mu(x)}{1-qx}} \right] - \frac{x}{1 \pm \mu(x)} \left(\frac{1}{(1+qx)} \mp \frac{\mu(x)}{1-qx} \right) \quad (43.5)$$

شکل (۹.۵) پارامتر مندل Q_+ بر حسب x برای q های مختلف را نشان می دهد که $q = 0$ با صورتی و $q = -0.1$ با قهوه ای و $q = -0.2$ با خاکستری نشان داده شده است و شکل (۱۰.۵) پارامتر مندل Q_- بر حسب x برای q های مختلف را نشان می دهد که $q = 0$ با صورتی و $q = -0.1$ با قهوه ای و $q = -0.2$ با خاکستری مشخص شده است اگر $q > 0$



شکل ۹.۵: رسم Q_+ بر حسب x برای $q \leq 0$



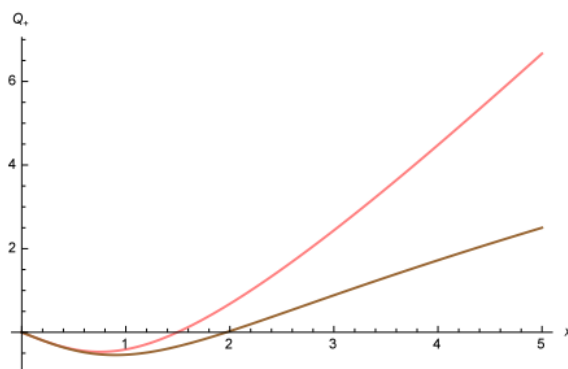
شکل ۱۰.۵: رسم Q_- بر حسب x برای $q > 0$

برای پارامتر مندل دوباره داریم

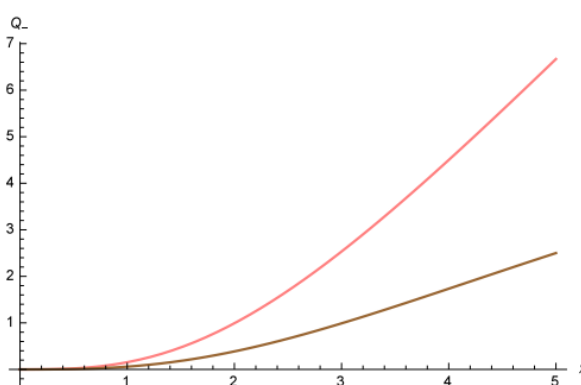
$$Q_p = \frac{\langle N^2 \rangle_{\pm} - \langle N \rangle_{\pm}^2}{\langle N \rangle_{\pm}} - 1 \quad (44.5)$$

$$\langle A \rangle_{\pm} = \pm \langle z, p | A | z, p \rangle \pm$$

شکل (۹.۵) پارامتر مندل Q_+ بر حسب x برای q های مختلف را نشان می دهد که $q = 0.1$ با صورتی و $q = 0.2$ با قهوه ای نشان داده شده است و شکل (۱۰.۵) پارامتر مندل Q_- بر حسب x



شکل ۱۱.۵: رسم Q بر حسب x برای $q \leq 0$



شکل ۱۲.۵: رسم Q بر حسب x برای $q > 0$

برای q های مختلف را نشان می دهد که $q = 0/1$ با صورتی و $q = 0/2$ با قهوه ای مشخص شده است مقدار چشم داشتی به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \langle N \rangle_{\pm} &= \frac{1}{\cosh_p(x)} x \partial_x \sinh_p(x) \\ \langle N(N-1) \rangle_{\pm} &= \frac{1}{\cosh_p(x)} x \partial_x (x \partial_x - 1) \sinh_p(x) \end{aligned} \quad (45.5)$$

اثر بانچینگ و آنتی بانچینگ

اگر $q \leq 0$

تابع همبستگی نوع دوم این گونه تعریف می شود

$$g^{\vee}(\circ)_{\pm} = \frac{\langle (a^{\dagger})^2 a^2 \rangle_{\pm}}{\langle a^{\dagger} a \rangle_{\pm}^2} \quad (46.5)$$

$$g_+^{\vee}(\circ) = \tanh_q^{\vee}(x) \quad g_-^{\vee}(\circ) = \coth_q^{\vee}(x) \quad (47.5)$$

اگر $q > 0$

برای حالت همدوس دفورم زوج و فرد اثر بانچینگ و آنتی بانچینگ این گونه تعریف می شود

$$g_{+,p}^{\gamma}(\circ) = \tanh_p^{\gamma}(x) \quad g_{-,p}^{\gamma}(\circ) = \coth_p^{\gamma}(x) \quad (48.5)$$

۴.۵ حالت همدوس تغییر شکل یافته در جبر ویگنر دایره واحد

مقدمه

ابتدا در مورد جبر ویگنر تغییر شکل یافته صحبت می کنیم سپس در مورد حالت های کوانتومی تغییر شکل یافته روی دایره بررسی می کنیم و به بررسی حالت ها کوانتومی روی دایره با پارینه می پردازیم سپس در مورد حالت همدوس بحث می کنیم برای ذره آزاد با جرم m روی دایره ای مانند S با شعاع a که در صفحه $x - y$ هامیلتونی آن به این صورت است

$$H = \frac{1}{2I} L_z^2 \quad (1.5)$$

L_z همان مولفه تکانه زاویه است I ممان لختی است. بر اساس قوانین کوانتومی روابط جابه جایی این گونه است

$$[\hat{\phi}, \hat{L}_z]$$

که $h = 1$ و $\hat{\phi} = \phi$ و $\hat{L}_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$ می باشد معادله وابسته به زمان شرودینگر روی دایره واحد به این صورت است

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi(\phi) &= E(\phi) \\ \phi = \frac{x}{a} \rightarrow \frac{-1}{2I} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) &= E(x) \quad E_n = \frac{n^2}{2I} \end{aligned} \quad (2.5)$$

در جبر معمولی $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ جابه جایی در جبر ویگنر این طوری تعریف می کنیم

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i(1 + 2\nu R)$$

ν پارامتر ویگنر و R پارینه می باشد اپراتور پارینه جبر ویگنر به این صورت است

$$R\hat{p} = -\hat{p}R \quad Rx = -\hat{x}R \quad R^2 = I$$

تکانه خطی

$$\hat{p} = \frac{1}{i} \left[\partial_x + \frac{\nu}{x} (1 - R) \right]$$

۱.۴.۵ جبر ویگنر تغییر شکل یافته

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{a}^2 + \dot{y}^2) \quad (3.5)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad x = a \cos \phi \quad y = a \sin \phi \rightarrow H = \frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2$$

برای نوشتن جابه‌جایی بین زاویه و اندازه حرکت زاویه ای عملگر پارایته متناسب با مختصات قطبی را معرفی می‌کنیم پارایته در حالت عادی $(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$$R = e^{\pi\partial_\phi} \quad RR^\dagger = I \quad R^\dagger\psi(\phi) = \psi(\phi - \pi)$$

هر نقطه در R روی دایره به نقطه $R^\dagger$ نگاشته می‌شود

$$[\hat{\phi}, \hat{L}_z] = i(1 + \nu R + \nu^* R) \quad (4.5)$$

$$\hat{\phi} = \phi \quad \hat{L}_z = \frac{1}{i}D_\phi$$

پارایته و $\hat{\phi}$ و $\hat{L}_z$ هرمیتی هستند

$$[\hat{\phi}, \hat{L}_z] = i(1 + \nu R + \nu^* R) \quad (5.5)$$

$$\hat{\phi} = \phi \quad \hat{L}_z = \frac{1}{i}D_\phi$$

$$D_\phi = \partial_\phi + \varepsilon_1 e^{\partial_\phi} + \varepsilon_2 e^{-\partial_\phi} \quad (6.5)$$

فرض می‌کنیم

$$\nu = \pi\varepsilon_1 \quad \nu^* = \pi\varepsilon_2$$

$$D_\phi = \partial_\phi + \frac{\nu}{\pi}e^{\partial_\phi} - \frac{\nu^*}{\pi}e^{-\partial_\phi} \quad (7.5)$$

اگر فرض کنیم تابع موج ما $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\nu}\pi}e^{in\phi}$ باشد

$$L_z\psi_n = \frac{1}{i}(D_\phi = \partial_\phi + \frac{\nu}{\pi}e^{\partial_\phi} - \frac{\nu^*}{\pi}e^{-\partial_\phi}) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\nu}\pi}e^{in\phi} \right\}$$

$$= \frac{\nu}{i\pi} \left(e^{\pi\partial_\phi} e^{in\phi} e^{\pi\partial_\phi in\phi - in\phi\partial_\phi} \right) - \frac{\nu^*}{i\pi} \left(e^{-\pi\partial_\phi} e^{in\phi} e^{in\pi + in\pi\partial_\phi} \right) \quad (8.5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu}\pi} \left(\frac{\nu}{i\pi} e^{in\phi} - \frac{\nu^*}{i\pi} e^{in\phi} \right)$$

$$L_z\psi_n = \left(n + \frac{(-1)^n(\nu - \nu^*)}{i\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{\nu}\pi} e^{in\phi} \quad (9.5)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم

$$\nu^* = -i\pi\mu \quad \nu = i\pi\mu \quad (۱۰.۵)$$

باشد در این صورت داریم

$$\begin{aligned} & [\hat{\phi}, \hat{L}_z] \\ &= \left[\phi \frac{1}{i} \left(\partial_\phi + i\mu e^{\pi\partial_\phi} + i\mu e^{-\pi\partial_\phi} \right) \right] - \left[\frac{1}{i} \left(\partial_\phi + i\mu e^{\pi\partial_\phi} + i\mu e^{-\pi\partial_\phi} \right) \phi \right] \\ &= \left[\phi \frac{1}{i} \partial_\phi + \phi i\mu e^{\pi\partial_\phi} - i\mu \phi e^{-\pi\partial_\phi} - \frac{1}{i} (i\mu e^{\pi\partial_\phi} - i\mu e^{-\pi\partial_\phi}) \phi \right] \\ &= [\hat{\phi}, \hat{L}_z] = i(1 + i\pi\mu R - i\pi\mu R^\dagger) \end{aligned} \quad (۱۱.۵)$$

با توجه به رابطه (۷.۵) می توان این گونه نوشت

$$L_z \psi_n = n + \frac{(-1)^n}{\pi} (i\pi\mu - -i\pi\mu) \psi_n = (n + 2\mu(-1)^n) \psi_n \quad (۱۲.۵)$$

با توجه به رابطه (۷.۵) داریم

$$\begin{aligned} D_\phi &= \partial_\phi i\mu \left(e^{\pi\partial_\phi} + e^{-\pi\partial_\phi} \right) \\ D_\phi^\dagger &= \partial_\phi^\dagger + 2i\mu \left(e^{\pi\partial_\phi} + e^{-\pi\partial_\phi} \right) \partial_\phi - 4\mu^2 \end{aligned} \quad (۱۳.۵)$$

حالا معادله شرودینگر دفورم را می نویسیم:

$$\frac{-1}{2ma^2} D_\phi^\dagger \psi_n = E_n \psi_n \quad (۱۴.۵)$$

انرژی را این گونه در نظر می گیریم:

$$E_n = \frac{-1}{2ma^2} (n^2 + 4\mu(-1)^n + 4\mu) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۱۵.۵)$$

$$\begin{cases} E_{2k} = \frac{-1}{2ma^2} ((2k)^2 + 4\mu(\mu + 1)), & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ زوج} \\ E_{2k+1} = \frac{-1}{2ma^2} ((2k+1)^2 + 4\mu(\mu + 1)), & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ فرد} \end{cases} \quad (۱۶.۵)$$

۲.۴.۵ حالت همدوس روی دایره

اگر فرض کنیم ذره روی دایره با شعاع R با اندازه حرکت L_z نوسان کند L_z تغییر شکل یافته به این شکل خواهد بود

$$L_z = l_z \mu (R + R^t) \nu \quad (۱۷.۵)$$

$$\nu = i\pi\mu \quad R = e^{i\pi l_z} \quad R^t = e^{-i\pi l_z}$$

$$[\hat{L}_z, \hat{R}] = [\hat{L}_z^t, \hat{R}^t] = 0$$

نمایش مکان در این حالت برای ذره روی دایره به صورت یونیتاری u فرض می‌شود:
 $U = e^{i\phi}$ و روابط جابه‌جایی برای جبر دفورم دایروی به این صورت خواهد بود

$$[\hat{L}_z, \hat{R}] = u \quad (18.5)$$

معادله ویژه مقداری تغییر شکل یافته

$$\begin{aligned} \hat{L}_z |j\rangle &= j |j\rangle \\ u |j\rangle &= |j+1\rangle \\ u^\dagger |j\rangle &= |j-1\rangle \end{aligned} \quad (19.5)$$

بنابراین ویژه مقادیر j می‌توانند صحیح یا نیمه صحیح باشند، روابط تعامد و کاملیت به این شکل خواهند بود

$$\begin{aligned} \langle \dagger | jk \rangle &= \delta_{jk} \\ (\sum_{j=0}^{\infty} |j\rangle \langle j|) &= I \end{aligned} \quad (20.5)$$

روابط پاد جابه‌جایی برای پاریته و مکان به این صورت است

$$\{R, u\} = 0 \quad \{R^\dagger, u\} = 0 \quad (21.5)$$

معادله ویژه مقداری برای پاریته :

$$R |j\rangle = e^{i\pi j} \quad R^\dagger |j\rangle = e^{-i\pi j} \quad (22.5)$$

معادله ویژه مقداری برای تکانه زاویه‌ای :

$$L_z |j\rangle = (j + 2\mu \cos j\pi |j\rangle) = (j + 2\mu(-1)^j) |j\rangle \quad (23.5)$$

حالا می‌خواهیم روابط جابه‌جایی مکان و اندازه حرکت زاویه را بنویسیم با کمک روابط (۷.۵) و (۱۷.۵) و (۱۲.۵) خواهیم داشت
 (۲۴.۵)

$$\begin{aligned} [L_z, u] &= \\ &= \left[\frac{1}{i} \partial_\phi + 2(R + R^\dagger)\mu e^{i\phi} - \frac{1}{i} e^{i\phi} \partial_\phi + 2(R + R^\dagger)\mu \right] \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} e^{i\phi} \psi(\phi) + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(\phi) e^{i\phi} + 2\mu \left(e^{\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} e^{i\phi} \psi(\phi) \right) + e^{\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} \psi(\phi) e^{i\phi} \\ &\quad + e^{-\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} e^{i\phi} \psi(\phi) + e^{-\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} \psi(\phi) e^{i\phi} - e^{i\phi} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi - 2 \left(e^{\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} + e^{-\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} \right) \mu \psi(\phi) \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} + 2\mu \left(e^{\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} + e^{-\pi \frac{\partial}{\partial \phi}} \right) \right] \psi(\phi) \end{aligned}$$

حالا می توانیم به بررسی حالت همدوس با کوانتوم دفورم یا تغییر شکل یافته بپردازیم ویژه حالت های حالت همدوس روی دایره به این صورت خواهد بود

$$Z|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle \quad Z = e^{i(\phi + iL_z)} \quad (25.5)$$

در کوانتوم^۱ می دانیم

$$e^{ia}|z\rangle = e^{iz}|z\rangle \quad (26.5)$$

تاثیر عملگر فنا $u = e^{i\phi}$ قابل مشاهده است عملگر فنا در فورم کلی عبارت است از $a = q + ip$ که $\hat{x}$ و $\hat{p}$ مشاهده پذیرها بودند در اینجا ما با $\hat{L}_z$ و $\hat{\phi}$ سروکار داریم

$$a = i\phi - L_z$$

پس برای بیان عملگر فنا مانند a بر حسب z به صورت زیر عمل می کنیم

$$e^{x+y} = \underbrace{e^x e^y}_{k=2} \prod_{k=2}^{\infty} \exp\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k!} (Ad_x)^{k-1} Y\right) \quad (27.5)$$

حاصل ضرب را از رابطه بیکر هاسدوف محاسبه می شود

$$e^x e^y = e^{y + [x,y] + \frac{1}{2!}[x[x,y]] + \frac{1}{3!}[x[x[x,y]]] + \dots} e^x \quad (28.5)$$

اگر فرض کنیم که:

$$\begin{aligned} [x, y] &= 1 + i\pi\mu S \\ [x[x, y]] &= -(-i\pi)^2 \mu T \\ [x[x[x, y]]] &= -(-i\pi)^3 \mu S \\ [x[x[x[x, y]]]] &= -(-i\pi)^4 \mu T \end{aligned} \quad (29.5)$$

$$\begin{aligned} &e^{-L_z} e^{[i\phi, -L_z] + \frac{1}{1!}[i\phi[i\phi, -L_z]] + \dots} e^{i\phi} \\ &= 1 + i\pi\mu S + \frac{1}{2!}\pi^2 \mu T + \frac{1}{3!}(-i)\pi^3 \mu S + \frac{-1}{4!}\pi^4 \mu T + -\mu T \\ &= -\mu T \left(1 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{-1}{4!}\pi^4\right) = -\mu T \cos \pi \quad (30.5) \\ &= i\mu S \left(\pi - \frac{-1}{3!}\pi^3\right) = i\mu S \sin \pi \\ &\rightarrow e^{-L_z + 1 + 2\mu T} u \end{aligned}$$

¹analogus

عبارت (۲۸.۵) را با رابطه زاسن هاوس^۱ محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} A \frac{\partial}{\partial x} y &= [x, y] = 1 + i\pi\mu S \\ (A \frac{\partial}{\partial x})^2 y &= [x[x, y]] = -(-i\pi)^2 \mu T \\ (A \frac{\partial}{\partial x})^3 y &= [x[x[x, y]]] = -(-i\pi)^3 \mu S \\ &\vdots \end{aligned} \quad (31.5)$$

$$\frac{1}{1!} + (1 + i\pi\mu S) + -\frac{1}{2!}\pi^2 \mu T + \frac{1}{3!}(-i)\pi^3 \mu S + \frac{-1}{4!}(-1)\pi^4 \mu T = e^{\frac{-1}{2}\mu T - \frac{\pi i}{2}S} \quad (32.5)$$

$$Z = e^{i\phi + -Lz} = e^{-Lz + 1 + 2\mu T} u e^{\frac{-1}{2}\mu T - \frac{\pi i}{2}S} \quad (33.5)$$

$$\begin{aligned} Z |j\rangle : \\ Z &= e^{-\mu T(R+R^\dagger)\nu + 1 + 2\mu T} u e^{-\frac{1}{2}\mu(R+R^\dagger) - \frac{\pi i}{2}(R-R^\dagger)} |j\rangle \\ &= e^{\frac{-1}{2}\mu T} u e^{\frac{-1}{2} + 2\mu \cos(\pi j) + \frac{1}{\pi} + 2\mu \sin(\pi j)} |j+1\rangle \\ &= e^{-(Lz+1) - 2\mu(-1)^j + 1 + \frac{-1}{2} + 4\mu(-1)^{j+1}} |j+1\rangle \end{aligned} \quad (34.5)$$

$$Z |j\rangle = e^{-j - \frac{1}{2} + 2\mu(-1)^j + 4\mu(-1)^{j+1}} |j+1\rangle \quad (35.5)$$

برای حالت های زوج فرد می توان نوشت:

$$\begin{cases} Z |2k\rangle = e^{-2k - 2\mu - \frac{1}{2}} |2k+1\rangle \\ Z |2k+1\rangle = e^{-2k + 2\mu - \frac{3}{2}} |2k+2\rangle \end{cases} \quad (36.5)$$

حال با داشتن عملگر فنا در جبر تغییر شکل یافته کت همدوس روی دایره تعریف می کنیم

$$|\xi\rangle = \xi^{-n} e^{-\frac{1}{2}n^2 + \mu(-1)^{n-1}} |n\rangle \quad (37.5)$$

در واقع ویژه مقادیر این کت توابع تتای ژاکوبی هستند ثابت نرمالزاسیون طبق مرجع [۱۱] برای این کت به این صورت است

$$N_o^{-2} = \nu_\pi \left(\frac{\pi i}{\pi} \ln |\xi| \right) + e^{-4} \nu_\pi \left(\frac{\pi i}{\pi} \ln |\xi| \right) \quad (38.5)$$

¹Zassenhaus formula

۵.۵ حالت همدوس φ تغییر شکل یافته

همان طور که در (۱.۳.۵) گفتیم آنچه معادل عملگر عدد فرض می شود ساختار تغییر شکل یافته ^۱ بنامیم و آن را با جبری متفاوت در نظر بگیریم حالت های همدوس دفورم متفاوتی ساخته می شود مثلاً می توان در جبر هایزنبرگ معمولی داریم

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad [N, a] = -a \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (1.5)$$

اولین جبر تغییر شکل یافته توسط ویگنر با عنوان جبر ویگنر به این صورت ارائه شد

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1 + 2\nu(-1)^N$$

و اریک وکن ^۲ جبر بوزونی تغییر شکل یافته را اینگونه در نظر گرفتند

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = 1$$

جبر دیگری توسط مکفارلین و بیدن ^۳ نیز با ساختار دفرمی زیر مطرح شد

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N}$$

ویا کامرف و کیشی و ادوکا ^۴ نیز این فورم را به کار بردند

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = q^N$$

ویگنر جبر تغییر شکل یافته خود را به این صورت

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = q^N 1 + 2\nu(-1)^N$$

مطرح کرد روبش و کچوری و گارلیک نیز ساختار دفورم زیر را مطرح کردند ^۵

$$[a, a^\dagger] = \frac{1+N}{1+qN} - \frac{N}{1+q(N-1)}$$

چنانچه بخواهیم حالت عامی برای حالت های تغییر شکل یافته در نظر بگیریم می توانیم فرم زیر را در نظر بگیریم $aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{\alpha N + \beta}$ و یا $aa^\dagger - q^\gamma a^\dagger a = q^{\alpha N + \beta}$ به این صورت نوشت اگر حالت عام (GBA) ^۶ این جمع بندی را ϕ دفورم بنامیم جابه جایی را با جبر تغییر شکل یافته این گونه معرفی می کنیم

$$[a, a^\dagger] = \phi(N+1) - \phi(N) \quad [N, a] = -a \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (2.5)$$

¹number operator

²Arik and Coon

³Biedenharn and Macfarlane

⁴Odaka, Kishi and Kamefuchi

⁵Rebesh, Kachurik and Gavrilik

⁶general deformed boson algebra

$$a^\dagger a = \phi(N) \quad a^\dagger a = \phi(N) \quad aa^\dagger = \phi(N+1) \quad (3.5)$$

مانند حالت q دفورم تابع ساختاردفورم $\phi(x)$ را معرفی می کنیم

$N = \phi(x)$ سپس درمورد جبر ϕ تغییر شکل یافته بوزونی صحبت می کنیم و انتگرال ها و مشتقات ϕ را بیان می کنیم تا در ساختن حالت همدوس از آن ها بهره ببریم ϕ تابع تحلیلی و مثبت است و داریم $\phi(1) = 1 \quad \phi(0) = 0$

۱.۵.۵ ساختار جبر φ تغییر شکل یافته

روابط جابه جایی و تابع ساختار به این صورت است

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad [N, a] = -a \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 1$$

$$a^\dagger a = \varphi(N) \quad ; \quad aa^\dagger = \varphi(1 + \varphi^{-1}(a^\dagger a)) \quad ; \quad aa^\dagger = 1 + a^\dagger a = 1 + \varphi(N) = \varphi(1 + N)$$

گفتیم $\varphi(N)$ تابعی مثبت است، $n = 0, 1, 2, 3$ در نمایش فوک عملگرهای نردبانی به این صورت است

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad a |n\rangle = \sqrt{\varphi(n)} |n-1\rangle \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{\varphi(n+1)} |n+1\rangle$$

در جبر معمولی از جمع و تفریق معمولی استفاده می کنیم حال می بایست جمع و تفریق برای جبر جدید تعریف کنیم

$$x \oplus y = \phi(\phi^{(-1)}(x) + \phi^{(-1)}(y)) = x + y \quad (4.5)$$

جمع از خاصیت جابه جایی به این صورت خواهد بود

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z \quad (5.5)$$

ϕ تفریق نیز به این صورت خواهد بود

$$x \ominus y = x \oplus (\ominus y) = x - y \quad (6.5)$$

$$x \oplus (\ominus x) = 0$$

$$\ominus x = \phi(-\phi^{(-1)}(x))$$

$$x \ominus y = x \oplus (\ominus y) = \phi(\phi^{(-1)}(x) - \phi^{(-1)}(y)) = \quad (7.5)$$

$$x \ominus y = x \oplus (\ominus y) = x - y$$

برای مشتق گیری در جبر جدید نسبت به x را این گونه تعریف می کنیم در واقع می توان قضیه به صورت زیر در نظر گرفت

$$D_x^\varphi x^n = \varphi(n)x^{(n-1)} \quad D_x^\varphi(1) = 0 \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\circ) &= \circ & \varphi(x) &= \sum c_k x^k = D_x^\varphi x^n \\ &= \frac{1}{x} \varphi(x\partial) x^n = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x\partial)^k x^n = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k n^k x^n = \varphi(n) x^{n-1} \\ D_x^\varphi &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x\partial)^k = \frac{1}{x\partial} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x\partial)^k \partial = \frac{1}{x\partial} \phi(1+x\partial) \partial\end{aligned}$$

مشتقات خطی هستند مشتق گیری به این صورت تعریف می شود

$$D_x^\varphi (aF(x) + bG(x)) = aD_x^\varphi F(x) + bD_x^\varphi G(x) \quad (9.5)$$

انتگرال تعمیم یافته در جبر جدید به این صورت خواهد بود

$$\int d_\varphi x (F(x)) = \frac{1}{\varphi(x\partial)} (xF(x)) = \int d \frac{1}{\varphi(1+x\partial)} (1+x\partial) F(x) \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned}\int d_\varphi x D_x^\varphi F(x) &= \frac{1}{\varphi(x\partial)} (xD_x^\varphi F(x)) = F(x) \\ D_x^\varphi \int d_\varphi x (F(x)) &= \frac{1}{x\partial} \varphi(1+x\partial) \partial \int d \frac{1}{\varphi(1+x\partial)} (1+x\partial) F(x) = F(x)\end{aligned}$$

تابع نمایی φ تغییر شکل یافته این گونه است

$$e_\varphi(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)!} x^n \quad D_x^\varphi e_\varphi(x) = e_\varphi(x) \quad (11.5)$$

که مقدار تابع و فاکتوریل آن این گونه است $1 = \circ! = \varphi(\circ) = \varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n-1)\varphi(n) = \varphi(n)!$ و در نتیجه کت همدوس مشابه آنچه گفته شد مجدداً این گونه خواهد بود

$$|n\rangle = e_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)!} x^n$$

تعریف ضرب دو تابع به این صورت خواهد بود

$$e_\varphi(x)e_\varphi(y) = e_\varphi((x+y)_\varphi) \quad (12.5)$$

$$e_\varphi((x+y)_\varphi) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)!} (x+y)_\varphi^n \quad (13.5)$$

$$(x+y)_\varphi^n = \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n+k} \quad (14.5)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{\varphi(n)!}{\varphi(k)!\varphi(n-k)!} \quad (15.5)$$

با توجه به (۱۱.۵) تابع نمایی و مشتق آن را با این نمایش معرفی می‌کنیم

$$e_{\varphi}(a : x) := [e_{\varphi}(x)]^{\natural} \quad D_x^{\varphi} e_{\varphi}(a : x) = a e_{\varphi}(a : x) \quad (16.5)$$

وتوابع φ هیپربولیک را نیز اینگونه تعریف می‌کنیم

$$\cosh_{\varphi}(a : x) = \frac{1}{\varphi}(e_{\varphi}(a : x) + e_{\varphi}(a : -x)) \quad (17.5)$$

$$\sinh_{\varphi}(a : x) = \frac{1}{\varphi}(e_{\varphi}(a : x) - e_{\varphi}(a : -x)) \quad (18.5)$$

مشتقات φ هیپربولیک به این صورت خواهد بود

$$D_x \cosh_{\varphi}(a : x) = a \sinh_{\varphi}(a : x) \quad (19.5)$$

$$D_x^{\varphi} \sinh_{\varphi}(a : x) = a \cosh_{\varphi}(a : x) \quad (20.5)$$

۲.۵.۵ ابر تقارن در جبر φ تعمیم یافته

ساده ترین حالت ابر تقارن برای بوزون های تغییر شکل یافته و فرمیون های معمولی به صورت این ابر بار هاست

$$Q_+ = \sqrt{\hbar\omega a} f^{\dagger} Q_- = \sqrt{\hbar\omega a^{\dagger}} f \quad (21.5)$$

a و $a^{\dagger}$ عملگر های نردبانی و f و $f^{\dagger}$ عملگر های گام برای فرمیون ها می باشد که از این رابطه تبعیت می کند

$$f, f^{\dagger} = 1 \quad f^{\natural} = (f^{\dagger})^{\natural} = 0 \quad (22.5)$$

$$Q_{\pm} = 0 \quad [Q_+, Q_-] = H \quad [H, Q_{\pm}] = 0 \quad H = \hbar\omega\varphi(N_{\varphi} + N_F) \quad (23.5)$$

N_F و N_{φ} اپراتورهای عدد می باشند و برای بوزون تغییر شکل یافته و فرمیون ها می باشد

$$\{Q_+, Q_-\} = \hbar\omega(\varphi(N_{\varphi} + 1) + N_F + (\varphi(N_{\varphi}(1 - N_F))) = \quad (24.5)$$

$$\hbar\omega[\varphi(N_{\varphi}) + (\varphi(N_{\varphi} + 1) - \varphi(N_{\varphi})N_F)] = \hbar\omega\varphi(N_{\varphi} + N_F) \quad (25.5)$$

۳.۵.۵ تابع ساختار تغییر شکل یافته φ

حالا می خواهیم درمورد حالت هایی که تابع ساختاری که در فضای فوک انتخاب می شود صحبت کنیم ۷ مورد را مورد مطالعه قرار می دهیم

مورد اول:

$$a^\dagger a = Naa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad [N, a] = -a \quad [N, a^\dagger]a^\dagger \quad aa^\dagger \ominus a^\dagger a = 1 \quad (26.5)$$

مورد دوم:

$$a^\dagger a = Naa^\dagger - qa^\dagger a = 1 \quad [N, a] = -a \quad [N, a^\dagger]a \quad aa^\dagger \ominus a^\dagger a = 1 \quad (27.5)$$

در فضاهای نامتناهی فوک برای عدد q خوش تعریف نیست و فقط $q > 0$ قابل قبول است

$$a^\dagger a = \frac{q^N - 1}{q - 1} \quad \varphi(x) = \frac{q^N - 1}{q - 1} \quad \varphi(x)^{-1} = \frac{1}{\ln q} \ln[1 + (q - 1)x] \quad (28.5)$$

جمع و تفریق برای این حالت این طوری خواهد بود

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + (q - 1)xy \\ x \ominus y &= \frac{x - y}{1 + (q - 1)y} \\ aa^\dagger \ominus a^\dagger a &= 1 \end{aligned} \quad (29.5)$$

برهان.

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= 1 \oplus a^\dagger a \\ &= 1 \oplus \varphi(N) \\ &= 1 + \varphi(N) + (q - 1)\varphi(N) \\ &= 1 + aa^\dagger + (q - 1)a^\dagger a \\ &= 1 + qa^\dagger a \\ &= aa^\dagger \ominus a^\dagger a = 1 \end{aligned}$$

□

مشتق در مورد دوم را به این صورت معرفی می کنیم:

$$D_x^\varphi = \frac{1}{(q - 1)_x} (T_q - 1); \quad T_q = q^{xd} \quad T_q F(x) = F(qx) \quad (30.5)$$

مشتقات لایبنیتز داریم:

$$D_x^\varphi (F(x)G(x)) = (D_x^\varphi F(x))G(x) + F(x)D_x^\varphi G(x)$$

$$\int d_\varphi x (F(x)) = (1 - q)(1 - T_q)^{-1} (xF(x)) = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n x F(q^n x) \quad (31.5)$$

تعریف تابع نمایی با این ساختار به این صورت خواهد شد:

$$e_q(qx) = (1 + (q - 1)x)e_\varphi(x) \quad (32.5)$$

مورد سوم:

$$a^\dagger a = Naq^\dagger - qa^\dagger a = q^N \quad [N, a] = -a \quad [N, a^\dagger]a^\dagger \quad (33.5)$$

این جبر در فضای فوک مثبت برای $q > 0$ های مثبت تعریف شد اگر p عددی مختلط باشد داریم

$$q = e^{\frac{\pi}{p+1}} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

انگاه در فضای فوک متناهی خواهیم داشت $\varphi(p+1) = 0$ و برای این جبر داریم:

$$a^\dagger a = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} \quad (34.5)$$

و تابع ساختاری به این صورت خواهد بود

$$\varphi(x) = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad (35.5)$$

$$\varphi(x)^{-1} = \frac{1}{\ln q} \ln \left[\frac{1}{q} ((q - q^{-1})x) + \sqrt{(q - q^{-1})^2 x^2 + 4} \right] \quad (36.5)$$

$$x \oplus y = \frac{1}{q} (y \sqrt{(q - q^{-1})^2 x^2 + 4} + x \sqrt{(q - q^{-1})^2 y^2 + 4}) \quad (37.5)$$

$$x \ominus y = \frac{1}{q} (y \sqrt{(q - q^{-1})^2 x^2 + 4} - x \sqrt{(q - q^{-1})^2 y^2 + 4}) \quad (38.5)$$

برهان.

$$\begin{aligned} aa^\dagger \ominus a^\dagger a &= 1aa^\dagger = 1 \oplus a^\dagger a = 1 \oplus \varphi(N) \\ &= \frac{1}{q} \sqrt{(q - q^{-1})^2 \varphi(N)^2 + 4} + \varphi(N)(q + q^{-1}) \\ &= \frac{1}{q} (qN + q^{-N} + 2qa^\dagger a - (q - q^{-1})a^\dagger a) \\ &= qa^\dagger a + \frac{1}{q} (qN + q^{-N} - (qN + q^{-N})) = qa^\dagger a + q^{-N} \end{aligned}$$

□

مشتق گیری به این صورت تعریف می شود

$$D_x^\varphi = \frac{1}{(q - q^{-1})x} (T_q - T_q^{-1}) \quad (39.5)$$

$$D_x^\varphi (F(x)G(x)) = (D_x^\varphi F(x))G(qx) + F(q^{-1}x)D_x^\varphi G(x)$$

$$\begin{aligned} \int d_\varphi x (F(x)) &= (q - q^{-1})(T_q - T_q^{-1})(xF(x)) \\ &= (q - q^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} q^{-2n-1} x F(q^{-2n-1}x) \end{aligned} \quad (40.5)$$

نمایی φ تغییر شکل یافته این گونه است

$$e_\varphi(qx) - e_\varphi(q^{-1}x) = (q - q^{-1})x e_\varphi(x)$$

مورد چهارم:

$$\begin{aligned} aa^\dagger - qa^\dagger a &= q^N & [N, a] &= -a & [N, a^\dagger]a^\dagger \\ a^\dagger a &= Nq^{N-1} & \varphi(x) &= xq^{x-1} & \varphi(x)^{-1} &= \frac{1}{\ln q} w(xq \ln q) \end{aligned} \quad (41.5)$$

تابع است که به این صورت تعریف می شود

$$x = ye^y \rightarrow y = w(x)$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xe^{w(qy \ln q)} + ye^{w(qx \ln q)} \\ x \ominus y &= e^{-\Upsilon w(qy \ln q)} (xe^{w(qy \ln q)} - ye^{w(qx \ln q)}); \end{aligned} \quad (42.5)$$

$$w(x) = \ln \frac{x}{w(x)}$$

$$\begin{aligned} ; aa^\dagger - a^\dagger a &= 1 & aa^\dagger &= 1 + a^\dagger a = 1 + \oplus \varphi(N) \\ e^{w(q \ln q) \varphi(N)} + \varphi(N) e^{w(q \ln q)} &= \\ e^{Nq \ln q} + qa^\dagger a &= q^N + qa^\dagger a w(q \ln q) = \ln q \end{aligned} \quad (43.5)$$

مشتق گیری به این صورت تعریف می شود

$$\begin{aligned} D_x^\varphi &= T_q \partial \\ D_x^\varphi (F(x)G(x)) &= (D_x^\varphi F(x))G(x) + F(qx)D_x^\varphi G(x) \\ \int d_\varphi x (F(x)) &= \int dx F(q^{-1}x) \end{aligned} \quad (44.5)$$

تابع نمایی در این جبر

$$\begin{aligned} T_q \partial e_\varphi(x) &= e_\varphi(x) \\ \partial e_\varphi(x) &= e_\varphi(q^{-1}x) \\ e_\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-\frac{1}{\Upsilon}} n(n-1)}{n!} x^n \end{aligned} \quad (45.5)$$

مورد پنجم:

$$[a, a^\dagger] = \frac{N+1}{1+qN} - \frac{N}{1+qN} \quad (46.5)$$

در فضای فوک زمانی مثبت است که $(q > 0)$ باشد

$$a^\dagger a = \frac{N}{1+q(N-1)}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{x}{1+q(x-1)} \\ \varphi(x)^{-1} &= \frac{(1-q)x}{(1-qx)}\end{aligned}\quad (47.5)$$

تفریق و جمع خواهیم داشت

$$\begin{aligned}x \oplus y &= \frac{x+y-\sqrt{qxy}}{1-q\sqrt{xy}} \\ x \ominus y &= \frac{x-y}{1-\sqrt{qy}-q\sqrt{xy}}\end{aligned}\quad (48.5)$$

$$\begin{aligned}aa^\dagger \ominus a^\dagger a &= 1 \\ &= 1 \rightarrow aa^\dagger + (\sqrt{q}-1)a^\dagger a = 1 + q\sqrt{a(a^\dagger)}\sqrt{a} \\ &= (1+qN)aa^\dagger - (1+q(N-1))a^\dagger a = 1\end{aligned}\quad (49.5)$$

مشتق گیری به این صورت تعریف می شود

$$\begin{aligned}D_x^\partial &= \frac{1}{x} \frac{x\partial}{1+q(x\partial-1)} = \frac{1}{1+q(x\partial)} \partial \\ \int d[\partial] x F(x) &= \int (1+qx\partial) F(X) dx\end{aligned}\quad (50.5)$$

تابع نمایی با این ساختار تغییر شکل یافته

$$e_\partial(x) = (1-qx)^{\frac{-1}{q}}$$

مورد ششم:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{x}{1+q} x(1+qx) \\ \varphi(x)^{-1} &= (1+q) \frac{-1+\sqrt{1+4qx}}{(\sqrt{q})}\end{aligned}\quad (51.5)$$

جمع و تفریق را این گونه نمایش می دهیم

$$\begin{aligned}x \oplus y &= \frac{1}{\sqrt{q}} (\sqrt{1+4qx} + \sqrt{1+4qy}) (\sqrt{q} + \sqrt{1+4qx} - 2) \\ x \ominus y &= \frac{1}{\sqrt{q}} (\sqrt{1+4qx} - \sqrt{1+4qy}) (\sqrt{q} + \sqrt{1+4qx} + 2) \\ aa^\dagger \ominus a^\dagger a &= 1\end{aligned}\quad (52.5)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 + \frac{\sqrt{q}}{1+q} N \quad (53.5)$$

برای حالت های $q > 0$ تعریف نرم به ازای تمامی n ها مثبت است و فضای فوک نامتناهی است زمانی که $q = \frac{-1}{p+1}$ باشد تعریف فضای نرم برای $n \leq p$ و $\varphi(p+1) = 0$ مثبت خواهد بود و در

این جا ابعاد فضای فوک متناهی خواهد بود
مشتق گیری و انتگرال گیری به این صورت تعریف می شود

$$D^{\partial_x} = \frac{1}{1+q} \partial (1 + qx\partial) = (1 + \frac{q}{1+q} x\partial) \partial \quad (54.5)$$

$$\int d_\varphi x F(x) = \int d_x \frac{1}{1 + \frac{q}{1+q} x\partial} F(x) \quad (55.5)$$

تابع نمایی نیز به این صورت خواهد بود

$$\partial e_\varphi(x) + \frac{q}{1+q} x \partial^2 e_\varphi(x) = e_\varphi(x)$$

مورد هفتم : اگر تابع ساختار دفورم ما به این شکل باشد

$$\varphi(x) = \frac{\tanh(qx)}{\tanh(q)} \quad (56.5)$$

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{q} \tanh^{-1}(x \tanh q) \quad (57.5)$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \frac{1}{q} \tanh \left(\tanh^{-1}(xq) + \tanh^{-1}(qy) \right) \\ x \ominus y &= \frac{1}{q} \tanh \left(\tanh^{-1}(xq) - \tanh^{-1}(qy) \right) \end{aligned} \quad (58.5)$$

$$aa^\dagger \ominus a^\dagger a = 1$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{\cosh q}{\cosh q(N+1) \cosh qN} \quad (59.5)$$

ابعاد فضای فوک نامتناهی است
مشتق و انتگرال به این صورت خواهد بود:

$$D^{\partial_x} = \frac{1}{x \tanh(q)} \tanh(qx\partial) = \frac{1}{x \tanh(q)} \left(\frac{T_{eq} - T_{e,-q}}{T_{eq} + T_{e,-q}} \right) \quad (60.5)$$

$$\begin{aligned} \int d_\partial x F(x) &= \tanh(q) \int \frac{1}{\tanh(q + qx\partial)} (1 + qx\partial) F(x) dx \\ &= (\tanh q) x F(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\gamma qx} x F(x e^{-\gamma qx}) \end{aligned} \quad (61.5)$$

تابع نمایی به این صورت خواهد بود

$$\tanh(qx\partial) e_\varphi(x) = \tanh(q) x e_\varphi(x) \quad (62.5)$$

۴.۵.۵ خواص غیر کلاسیکی

در فضای فوک نامتناهی حالت همدوس را ویژه مقادیر عملگر فنا در نظر می گیرند به بررسی حالت همدوس با جبر دفورم بوزونی می پردازیم

$$a|z\rangle = z|z\rangle$$

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{e_\varphi(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\varphi(n)!}} |n\rangle, \quad x = |z|^2 \quad (۶۳.۵)$$

رابطه کاملیت $\int |z\rangle \mu(x) \langle z| d_\varphi x = \frac{1}{\pi} I$

$\mu(x)$ تابع وزن می باشد

$$\int d_\varphi x F(x) = \int dx \frac{1}{1 + \frac{q}{q+1} x \partial} F(x) \quad (۶۴.۵)$$

$$\partial e_\varphi(x) + 1 + \frac{q}{q+1} x(\partial)^2 e_\varphi(x) = e_\varphi(x)$$

$$d_\varphi x e_\varphi(-x) x^n = \varphi(n)! \quad (۶۵.۵)$$

رابطه (۴۸.۵) زمانی برقرار است که $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ که در موارد یک و دو و هفت این گونه است

$$x \oplus y = \frac{1}{q} \tanh^{-1}(qx) + \tanh^{-1}(qy) \quad (۶۶.۵)$$

برهان.

$$\int_0^\infty d_\varphi x e_\varphi(-ax) = a^{-1} \quad a > 0 \quad \text{نوار مشتق گیری} \quad (۶۷.۵)$$

$$\int_0^\infty d_\varphi x e_\varphi(-ax) (-x)^n = a^{-n-1} \prod_{k=1}^n \varphi(-k) \quad a = 1 \quad (۶۸.۵)$$

□

پارامتر مندل

خواص غیر کلاسیکی حالت همدوس φ دفورم بحث می کنیم می خواهیم در مورد حالت همدوس φ دفورم دفورمیشن کوچک و x کوچک برای هفت حالت حساب کنیم برای مورد دو و سه و چهارم $q = 1 + \epsilon$ که ϵ کوچک است و در موارد پنجم و ششم و هفتم q کوچک است مورد اول

$Q = 0$ پس حالت همدوس پواسونی است

مورد دوم

$$\varphi(n) \approx n(1 + \frac{1}{3}(n-1)\epsilon) \quad (۶۹.۵)$$

برای ϵ کوچک و x کوچک خواهیم داشت $Q \approx -\frac{1}{3}\epsilon x$ اگر $\epsilon > 0$ باشد آمار فروپواسونی داریم و اگر $\epsilon < 0$ باشد آمار فراپواسونی داریم

مورد سوم

$$\varphi(n) \approx n(1 + \frac{1}{6}(n^2-1)\epsilon^2) \quad (۷۰.۵)$$

در x کوچک ها و در ϵ کوچک حالت همدوس از آمار فروپواسونی پیروی می کند

$$Q \approx -\frac{1}{6}\epsilon^2 x \quad (۷۱.۵)$$

مورد چهارم

$$\varphi(n) \approx n(1 + (n-1)\epsilon) \quad (۷۲.۵)$$

برای x کوچک و ϵ های کوچک داریم $Q \approx -\epsilon x$ در $\epsilon > 0$ از آمار فروپواسونی و در صورت $\epsilon < 0$ از آمار فراپواسونی پیروی می کند

مورد پنجم

$$\varphi(n) \approx n(1 - (n-1)q) \quad (۷۳.۵)$$

حالت همدوس برای x کوچک و q های کوچک $Q \approx qx$ به این صورت است اگر $q > 0$ از آمار فروپواسونی و در صورت $q < 0$ از آمار فراپواسونی پیروی می کند

مورد ششم

$\varphi(n) \approx n(1 + (n-1)\epsilon)$ تقریب برای x کوچک و q های کوچک به این صورت است

$$Q \approx -qx$$

اگر $q > 0$ از آمار فروپواسونی و در صورت $q < 0$ از آمار فراپواسونی پیروی می کند

مورد هفتم

$$\varphi(n) \approx n(1 - \frac{1}{3}(n^2-1)q^2) \quad (۷۴.۵)$$

در x کوچک و q های کوچک به این صورت است $Q \approx q^2 x$ حالت های همدوس از آمار فراپواسونی پیروی می کند

فضای فوک متناهی خواص غیر کلاسیکی حالت همدوس در موارد سوم که مقدار q برابر $q = e^{\frac{\pi i}{p+1}}$ و ششم که مقدار q برابر $q = \frac{-1}{p+1}$ بود را با فضای فوک متناهی مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن فضای فوک $p+1$ بعدی است حالت همدوس نرمال شده ما به این صورت بود

$$|z, p\rangle c_p \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{\sqrt{\varphi(n)!}} |n\rangle \quad c_p = [e_{\varphi,p}(x)]^{\frac{-1}{p}}, x = |z|^2 \geq 0 \quad e_{\varphi,p}(x) = \sum_{n=0}^p \frac{x^n}{\varphi(n)!} \quad (75.5)$$

حالت همدوس دفورم از این رابطه بدست می‌آید

$$a |z, p\rangle = z \frac{c_p}{c_{p-1}} |z, p-1\rangle \quad (76.5)$$

رابطه کاملیت به این صورت می‌باشد

$$\frac{1}{\varphi} \int |z, p\rangle \mu_p(x) \langle z, p| dx d\theta = I \quad z = ze^{i\theta}; \quad (77.5)$$

با روابط (77.5) و (75.5) داریم

$$c_p \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{\sqrt{\varphi(n)!}} |n\rangle \mu_p(x) c_p \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{\sqrt{\varphi(n)!}} |n\rangle dx d\theta = I$$

$$\int_0^\infty [e_p(x)]^{-1} \mu_p(x) x^n dx = \frac{1}{\pi} \varphi(n)! \quad (78.5)$$

$$; \mu_p(x) = \frac{1}{\pi} e_p(x) e^{-x} \sum_{k=0}^p (n+K)! a_k = \varphi(n)!$$

برای برخی از p ها ضریب a_k ممکن است ماتریس باشد

پارامتر مندل

پارامتر مندل در این حالت به p بستگی دارد

$$Q_p = \frac{(x\partial)^p e_{\varphi,p}(x)}{(x\partial) e_{\varphi,p}(x)} - x \partial_x \ln e_{\varphi,p}(x) \quad (79.5)$$

برای x های کوچک Q مشابه Q_1 خواهد بود و برای x های مانند Q_p به صفر نزدیک می‌شود

بانچینگ و آنتی بانچینگ

برای محاسبه بانچینگ و آنتی بانچینگ از تابع همبستگی مرتبه دوم به این صورت کمک می‌گیریم

$$g_p^{(2)}(0) = \frac{e_{\varphi,p}(x) e_{\varphi,p-2}(x)}{e_{\varphi,p-1}^2(x)} \quad (80.5)$$

$$q = e^{\frac{\pi i}{p+1}} \text{ حالت خاص}$$

تابع ساختار دفورم درمورد سوم زمانی که q این مقدار مشخص باشد به این صورت خواهد بود

$$\varphi(n) = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{p+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p+1}\right)} \quad (81.5)$$

و تابع نمایی به این صورت است

$$e_{\varphi,p}(x) = \sum_{n=0}^p \frac{(x \sin\left(\frac{\pi}{p+1}\right))^n}{\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)} \quad (82.5)$$

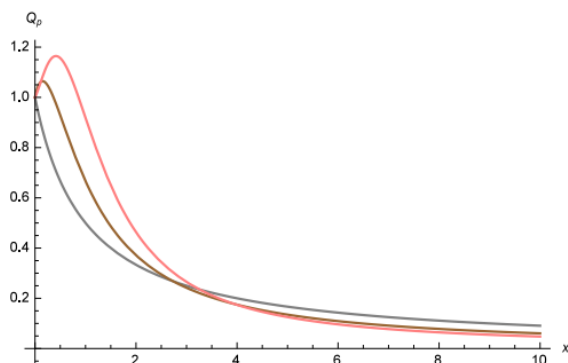
تابع نمایی برای p ها با شماره کمتر به این صورت است

$$\begin{aligned} e_1(x) &= 1 + x \\ e_2(x) &= 1 + x + x^2 \\ e_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (83.5)$$

و پارامتر مندل برای این مقادیر به این صورت خواهد بود

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{1+x} > 0 \\ Q_2(x) &= \frac{1+4x+x^2}{(1+2x)(1+x+x^2)} > 0 \\ Q_3(x) &= \frac{2(2+4\sqrt{2}x+10\sqrt{2}x^2+4\sqrt{2}x^3+x^4)}{(1+x)(2+2\sqrt{2}x^2)(2+2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}x^2)} > 0 \end{aligned} \quad (84.5)$$

در شکل ۱۳.۵ توزیع فرا پواسونی را نشان می دهد برای مقادیر $p=1$ و $p=2$ و $p=3$ را نشان



شکل ۱۳.۵: رسم Q_p بر حسب x

می دهد که به ترتیب با خاکستری و آبی و صورتی مشخص شده است تابع همبستگی مرتبه

دوم به این صورت است که نشان می‌دهد که اثر آنتی باچینگ داریم

$$\begin{aligned} g_1^{\vee}(\circ) &= \circ < 1 \\ g_2^{\vee}(\circ) &= \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2} < 1 \\ g_3^{\vee}(\circ) &= \frac{1+x(1+x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{2}})}{(1+x+x^2)^2} < 1 \end{aligned} \quad (۸۵.۵)$$

در حالت خاص $q = \frac{-1}{p+1}$

$$\varphi(n) = \frac{n}{p}(p+1-n) \quad (۸۶.۵)$$

در مورد ششم در مقدار مشخص بالا تابع نمایی ما اینگونه خواهد بود

$$\begin{aligned} e_{\varphi,p}(x) &= {}_{\circ}F^{(p)}_1(-; -p; -px) \\ {}_{\circ}F^{(p)}_1(a; t) &= \sum_{n=\circ}^p \frac{1}{n!(a)_n} t^n \end{aligned} \quad (۸۷.۵)$$

در p های کوچک تابع نمایی اینگونه است

$$\begin{aligned} e_1(x) &= 1+x \\ e_2(x) &= 1+x+x^2 \\ e_3(x) &= 1+x+\frac{3x^2}{4}+\frac{3x^3}{4} \end{aligned} \quad (۸۸.۵)$$

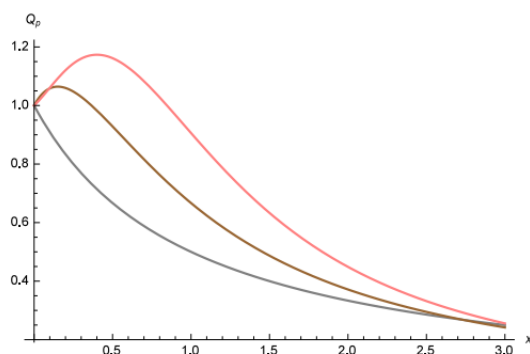
پارامتر مندل را برای $p = \circ, 1, 2, 3$ مجدد محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{1+x} > \circ \\ Q_2(x)C &= \frac{1+4x+x^2}{(1+2x)(1+x+x^2)} > \circ \\ Q_3(x) &= \frac{16+48x+12\circ X 62+48X^2+9x^4}{(4+6x+9x^2)(4+4x+3X^2+3x^3)} > \circ \end{aligned} \quad (۸۹.۵)$$

در شکل ۱۴.۵ توزیع فرا پواسونی را نشان می‌دهد که $p = 1$ و $p = 2$ و $p = 3$ را نشان می‌دهد که به ترتیب با خاکستری و آبی و صورتی مشخص شده است تابع همبستگی مرتبه دوم برای $p = \circ, 1, 2, 3$ اینگونه است

$$\begin{aligned} g_1^{\vee}(\circ) &= \circ < 1 \\ g_2^{\vee}(\circ) &= \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2} < 1 \\ g_3^{\vee}(\circ) &= \frac{1+x(1+x+\frac{3x^2}{4}+\frac{3x^3}{4})}{(1+x+x^2)^2} < 1 \end{aligned} \quad (۹۰.۵)$$

که نشان می‌دهد اثر آنتی باچینگ داریم



شکل ۱۴.۵: رسم Q_p بر حسب x

۶.۵ بررسی بسته موج تغییر شکل یافته در پتانسیل پله ای و دلتا با کوانتوم دفورم

مشتقات جکسون [۱۸] این گونه معرفی می شوند

$$\partial_x^q F(x) = \frac{F(q-1)x - F(x)}{qx}$$

در مشتقات جکسون پارامتر تغییر شکل q بدون بعد می باشد مشتقات جکسون روی چند جمله ها به این ترتیب عمل می کنند $\partial_x^q x^n = [n]_q x^{n-1}$ و عدد جکسون یا q نامبر به این صورت تعریف می شود

$$[n]_q = \frac{(q+1)^n - 1}{q} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} q^{k-1}$$

به طور مثال داریم

$$[n]_q = \frac{(q+1)^n - 1}{q} \quad [n]_1 = \frac{(+1)^1 - 1}{q} \quad [n]_2 = \frac{(+1)^2 - 1}{q}$$

$$[n]_3 = \frac{(+1)^3 - 1}{q} \quad \dots$$

اگر $q > 0$ این گونه خواهد شد: $[\infty]_q = \infty$ $[-\infty]_q = \frac{-1}{q}$ اگر $q < 0$ آنگاه q نامبر در بی نهایت وجود ندارد در واقع هنگامی که محاسبات q تغییر شکل یافته را بر مکانیک کوانتومی تطبیق می دهیم می بینیم که مطالعه q های کوچک سودمندتر است توجه خود را به این بازه معطوف می کنیم $[-1 < q < +1]$ تعریف انتگرال را می توان این گونه ارائه داد از معادلات برنولی به این قواعد می رسیم داریم

$$\int d_q x G(x) = \int \frac{dx}{1+qx} G(x)$$

تابع نمایی در فرمالیزم q دفورم این گونه تعریف می شود

$$\begin{aligned} E_q(x) &= (1 + qx)^{\frac{1}{q}} \\ D_x E_q(x) &= E_q(x) \\ E_q(x \oplus y) &= E_q(x) E_q(y) \quad x, y \in R_q \end{aligned} \quad (1.5)$$

که در مرجع [۱۷] آمده است طبق مرجع [۱۹] می توان توابع سینوس و کوسینوس را اینگونه تعریف کرد برخی خواص آنها در مرجع [۱۹] آمده است

$$\begin{aligned} C_q(a : x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [E_q(x)^{ia} + E_q(x)^{-ia}] = \cos\left[\frac{a}{q} \ln(1 + qx)\right] \\ S_q(a : x) &= \frac{1}{\sqrt{2}i} [E_q(x)^{ia} - E_q(x)^{-ia}] = \sin\left[\frac{a}{q} \ln(1 + qx)\right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

کوانتوم تغییر شکل یافته برای معادله شرودینگر وابسته به زمان به این شکل است

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= H \psi(x, t) \\ H &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad ; p = i\hbar D_x \end{aligned} \quad (3.5)$$

معادله شرودینگر تغییر شکل یافته در مرجع [۱۹] آمده است با معرفی اندازه حرکت تغییر شکل یافته به این صورت معرفی می کنیم:

$$Hu(x) = \left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)u(x) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} D_x^2 + V(x)\right]u(x) = Eu(x) \quad (4.5)$$

که تابع موج به این صورت می باشد $\psi(x, t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$ اگر باشد $0 < q < 1$ نگاه x را بین این بازه خواهیم گرفت $-\frac{1}{q} \leq x < 0$ اگر باشد نگاه x را بین این بازه خواهیم گرفت $0 < \frac{-1}{q} \leq x$ تابع احتمال را با $|\psi|^2$ تعریف می کنیم که در مرجع [۱۹] آمده است

$$\int_{R_q} \psi(x) dx = 1 \quad (5.5)$$

تابع شار احتمال یا چگالی احتمال مطابق مرجع [۱۶] به این صورت است

$$J = \frac{\hbar}{mi} [\psi^* D \psi - \psi D \psi^*] \quad (6.5)$$

برای بررسی مقدار انتظاری مشاهده پذیر A به این صورت تعریف می کنیم:

$$\langle A \rangle = \int_{R_q} dx \psi^*(x) A \psi(x) \quad (7.5)$$

طبق قضیه اهرنفتست می توان نوشت

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle \quad (8.5)$$

هامیلتونی تغییر شکل یافته

$$H = \frac{-\hbar^2 D_x^2}{2m} + V(x) \quad (9.5)$$

کروشه جابه جایی مکان و اندازه حرکت

$$[x, p] = i\hbar[1 + qx] \quad (10.5)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left[x, \frac{-\hbar^2 D_x^2}{2m} \right] + \frac{1}{i\hbar} [x, V(x)] \frac{1}{i\hbar} \frac{-\hbar^2}{2m} [x, D_x^2] \\ [x, \frac{p^2}{2m}] &= \frac{1}{2m} [x, p^2] = \frac{p}{m} i\hbar[1 + qx] \\ \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [x, D_x^2] = \frac{1}{i\hbar} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{p}{m} i\hbar[1 + qx] \frac{\hat{p}}{m} \\ \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \left\langle \frac{\hat{p}}{m} \right\rangle + \frac{q}{m} \langle xp + px \rangle = \left\langle (1 + qx) \frac{p}{m} \right\rangle + \frac{-i\hbar q}{2m} (1 + q\langle x \rangle) \end{aligned}$$

□

حالا قضیه اهرنفت را برای تکانه حرکت می نویسیم

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -(1 + q\hat{x}) \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle \quad (11.5)$$

برای متغیرهای کلاسیکی مانند x و p بعنوان متغیری برای A می توان نوشت

$$\frac{d\langle A(x, p) \rangle}{dt} = \{A(x, p), H(x, p)\}_q \quad (12.5)$$

کروشه های پواسون در حالت q دفورم به این صورت تعریف می شوند

$$\{A(x, p), B(x, p)\}_q = (1 + qx) \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (13.5)$$

به طور خلاصه می توان این گونه نوشت:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (1 + qx) \frac{p}{m} \frac{\partial p}{\partial t} = -(1 + qx) \frac{\partial V}{\partial x} \quad (14.5)$$

۱.۶.۵ بسته موج در فرمالیزم تغییر شکل یافته

در غیاب پتانسیل خارجی معادله وابسته به زمان شرودینگر را برای بسته موج دفورم شده در ابعاد ۱+۱ می نویسیم

$$D_x^2 \psi(x, t) - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi(x, t) = 0 \quad (15.5)$$

معادله موج منتقل شونده به این صورت است

$$\psi(x, t) = A[e_q(x)]^{ik} e^{-i\omega t} = A e^{i \frac{k}{q} \ln(1+qx) - \omega t} \quad (16.5)$$

دامنه می باشد و از معادله شرودینگر دفورم وابسته به زمان می توان انرژی را به این صورت بدست آورد

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (17.5)$$

سرعت فاز از این رابطه بدست می آید

$$\frac{k}{q} \ln(1+qx) - \omega t = \text{const} \quad \nu_{ph} = \frac{\omega}{k} (1+qx) \quad (18.5)$$

بنابراین سرعت فاز به مکان وابسته است اما تکانه حرکت فاز این طور نیست رابطه تکانه فاز به این صورت است $p_{ph} = \frac{m\omega}{k}$ موج دفورم منتقل شده دارای دوره تناوب T می باشد اگر طول موج تغییر شکل یافته را می توان این گونه تعریف کرد $\psi(x, T+t) = \psi(x, t)$

$$\psi(x \oplus \lambda_q, t) = \psi(x, t) \quad \omega t = 2\pi \quad \lambda_q = \frac{e^{\frac{2\pi q}{k}} - 1}{q} \quad x + \frac{e^{\frac{2\pi q}{k}} - 1}{q}$$

برای توزیع های متقارن فرض می کنیم موج در این بازه باشد در واقع x در این بازه باشد $[\frac{-1}{q}, \frac{1}{q}]$ برای بسته های موج شاید بهتر است بگوییم ساختارها زیر حد متوسط موج که دیگر برهم نهی کامل نیست چنانچه موج در غیر این فاصله باشد خواهیم داشت

$$\begin{cases} x \in [\frac{-1}{q}, \infty) & ; (0 < q < 1) \\ x \in (-\infty, \frac{1}{q}] & ; (-1 < q < 0) \end{cases}$$

برای ساختن یک بسته موج جایگزیده در فضا باید تمامی عدد موج ها را با هم جمع کنیم که نیازمند استفاده از تبدیل فوریه برای تابع موج است

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk [e_q(x)]^{-ik} g(k)$$

تبدیل فوریه بسته موج به این صورت خواهد بود

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\frac{1}{q}}^{-\frac{1}{q}} dx u(x) [e_q(x)]^{ik} \quad (19.5)$$

حدود k در نوشتن تبدیل فوریه به این صورت خواهد بود فرض می کنیم که تغییرات k کوچک باشد

$$K_0 - \frac{1}{q} \Delta k \leq k \leq K_0 + \frac{1}{q} \Delta k$$

پس می توان بسط تیلور را برای آن نوشت این گونه نوشت

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk_0} \right) \quad (20.5)$$

پس بسته موج تغییر شکل یافته این گونه بود

$$\psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} [e_q(x)]^{ik} e^{-i\omega t} \quad (21.5)$$

می‌خواهیم بررسی تحول زمانی بسته موج را بررسی کنیم دو روش خطی و مربعی برای بررسی تحول زمانی بسته موج وجود دارد که روش خطی را استفاده می‌کنیم

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \frac{1}{q}\Delta k}^{k_0 + \frac{1}{q}\Delta k} [e_q(x)]^{ik} e^{i[w_0(k_0) + (k - k_0)(\frac{d\omega}{dk_0})t]} \quad (22.5)$$

تغییر متغیر انجام می‌دهیم $k' - k_0 = k$

$$\frac{A}{\sqrt{\pi}} [e_q(x)]^{ik_0} e^{-i\omega_0(k_0)t} \int dk' [e_q(x)]^{ik'} \frac{1}{q} [\ln(1+qx) - (\frac{d\omega}{dk_0})t] \quad (23.5)$$

$$\frac{e^{ik' \frac{1}{q} [\ln(1+qx) - (\frac{d\omega}{dk_0})t]}}{i [\ln(1+qx) - (\frac{d\omega}{dk_0})t]} \Big|_{k_0 - \frac{1}{q}\Delta k}^{k_0 + \frac{1}{q}\Delta k} \quad (24.5)$$

طبق تعریف توابع سینوس تغییر شکل یافته در فورمالیزم q خواهیم داشت

$$\frac{A}{\sqrt{\pi}} [e_q(x)]^{ik_0} e^{-i\omega t} \frac{\sin[\frac{\Delta k}{q} (\ln(1+qx) - (\frac{d\omega}{dk_0})t)]}{\ln(1+qx) - (\frac{d\omega}{dk_0})t} \quad (25.5)$$

برای مثال اگر بسته موجی به این صورت داشته باشیم

$$u(x) = \begin{cases} 0 & (\frac{-1}{q} < -a) \\ c(1+qx)^{\frac{1}{q}} & (-a < x < a) \\ 0 & (a < x < \frac{1}{|q|}) \end{cases} \quad (26.5)$$

c از بهنجارش بدست می‌آید

$$c = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (1+qx)^{\frac{1}{q}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (27.5)$$

می‌خواهیم تغییرات Δx را بررسی کنیم

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad ; \quad (28.5)$$

عدم قطعیت افزایش می‌آید طبق قضیه پارسوال چنانچه تابع چگالی احتمال در فضای مکان قایل محاسبه نباشد می‌توان تابع چگالی احتمال را در فضای تکانه محاسبه کنیم طبق (۱۹.۵)

و (۲۷.۵)

$$[e_q(x)]^{ik} = (1+qx)^{\frac{q}{k}} = [e_q(x)]$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\frac{1}{k} + 1} \right) (1+qa)^{\frac{ik}{q} + 1} - (1-qa)^{\frac{ik}{q} + 1} \quad (29.5)$$

$$g(k)^2 = \frac{1}{2\pi a^2 (q^2 - k^2)} \left[1 + \frac{1}{2} q^2 a^2 - (1 - q^2 a^2) \cos\left(\frac{1}{q} k \ln\left(\frac{1-qa}{1+qa}\right)\right) \frac{ik}{q} \right] \quad (30.5)$$

۲.۶.۵ پله پتانسیل

اگر پله پتانسیلی به این شکل داشته باشیم

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ v_0 & (x > 0) \end{cases} \quad (31.5)$$

معادله شرودینگر در فرمالیزم تغییر شکل یافته می باشد

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} D_x^2 \Phi_I &= E \Phi_I \\ \frac{-\hbar^2}{2m} D_x^2 \Phi_{II} &= (E - v_0) \Phi_{II} \end{aligned} \quad (32.5)$$

اگر $E > V_0$ باشد جواب هادر دو طرف پله پتانسیل به این صورت خواهند بود

$$\begin{aligned} \Phi_I &= [e_q(x)]^{ik_0} + R[e_q(x)]^{-ik_0} \\ \Phi_{II} &= [e_q(x)]^{ik_0} \end{aligned}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad k = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad (33.5)$$

مشتق تغییر شکل یافته طبق مراجع عبارت است

$$\begin{aligned} D_x E_q(x) &= E_q(x) \\ D_x E_q(x)^{ik} &= ik E_q(x) \end{aligned} \quad (34.5)$$

برای یافتن R و T از برابری مقدار مشتق و مقدار تابع در مرز بهره می گیریم

$$[E_q(x)]^{ik_0} + R[E_q(x)]^{-ik_0} = [E_q(x)]^{ik_0} \rightarrow 1 + R = T \quad (35.5)$$

$$ik_0 [E_q(x)]^{ik_0} - ik_0 R[E_q(x)]^{-ik_0} = ikT[E_q(x)]^{ik} \rightarrow ik_0(1 - R) = ikT$$

خواهیم داشت

$$T = \left(\frac{2k}{k_0 + k} \right) \quad R = \left(\frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right) \quad (36.5)$$

ضرایب را در جواب ها جایگزین می کنیم

$$\begin{aligned} \Phi_I &= [e_q(x)]^{ik_0} + \left(\frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right) [e_q(x)]^{-ik_0} \\ \Phi_{II} &= \left(\frac{2k}{k_0 + k} \right) [e_q(x)]^{ik_0} \end{aligned}$$

چگالی جریان یا شار را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} J &= \frac{\hbar}{im} ([\psi^* D\psi - D\psi^* \psi]) = \\ \frac{\hbar}{im} [E_q(x)]^{-ik_0} ik_0 [E_q(x)]^{ik_0} - [-ik_0 [E_q(x)]^{-ik_0}] [E_q(x)]^{ik} &= \frac{\hbar}{im} k_0 \end{aligned} \quad (37.5)$$

شار بازتابی به این صورت خواهد بود

(۳۸.۵)

$$\frac{\hbar}{2im} [RE_q(x)]^{-ik_0} [ik_0 R[E_q(x)]^{ik_0}] - [-ik_0 R[E_q(x)]^{-ik_0}] [RE_q(x)]^{ik}] = -\frac{\hbar}{2} k_0 R^2$$

$$J_{tr} = |T|^2 \frac{k}{m} \quad (۳۹.۵)$$

ضریب عبور و بازتاب این طور معرفی می شوند

$$t = \left| \frac{J_{tr}}{J_{in}} \right| = \frac{k_0}{k} |T|^2 \quad (۴۰.۵)$$

$$r = \frac{J_{ref}}{J_{in}} = -R^2$$

با توجه به روابط (۳۶.۵) و (۴۰.۵) داریم

$$r = \left(\frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right)^2 \quad t = \left(\frac{2k_0 k}{(k_0 + k)^2} \right)^2 \quad r + t = 1 \quad (۴۱.۵)$$

اگر $E < V_0$ باشد

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \rightarrow -k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (۴۲.۵)$$

زیر رادیکال منفی جواب موهومی می باشد فرم کلی این جواب ها به صورت می باشد فرم کلی معادله شرودینگر دفورم به این شکل خواهد بود

$$V(x) = \begin{cases} D_x^2 \psi - k^2 \psi = 0 & (x > 0) \\ D_x^2 \psi - k_0^2 \psi = 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (۴۳.۵)$$

جواب به این صورت است

$$\Phi_I = [e_q(x)]^{ik_0} + \left(\frac{k_0 - ik}{k_0 + ik} \right) [e_q(x)]^{-ik_0} \quad (۴۴.۵)$$

$$\Phi_{II} = \left(\frac{2k_0}{k_0 + ik} \right) [e_q(x)]^{-k}$$

$$p = |\Phi_{II}|^2 = \left(\frac{2k_0}{(k_0 + ik)^2} \right)^2 [e_q(x)]^{-2k} \neq 0 \quad (۴۵.۵)$$

طبق رابطه $t + r = 1$ که t ضریب عبور و صفر است اما احتمال عبور صفر نیست زیرا اگر احتمال را برای جواب دوم بدست آوریم مشاهده می کنیم که برابر صفر نیست

۳.۶.۵ چاه پتانسیل دوگان

اگر چاه پتانسیل به صورت زیر باشد

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq \pm a) \\ -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)] & (x = \pm a) \end{cases} \quad (۴۶.۵)$$

$$k_o = \sqrt{\frac{\Upsilon m E}{\hbar \Upsilon}} k = \sqrt{\frac{\Upsilon m (E - V_o)}{\hbar \Upsilon}} \quad (۴۷.۵)$$

تابع جواب معادله شرودینگر اگر چاه زوج مطالعه کنیم به این صورت است

$$\psi(x) = \begin{cases} \Phi_I = A[E_q(x)]^k & (x < -a) \\ \Phi_{II} = B[E_q(x)^{ik_o} + E_q(x)^{ik_o}] & (-a < x < a) \\ \Phi_{II} = A[E_q(x)]^{-k} & (a < x) \end{cases} \quad (۴۸.۵)$$

حالا شرایط مرزی را می نویسیم

$$\frac{B}{\Upsilon} [+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}] = AE_q(x)^{-k} \Rightarrow x = a \quad (۴۹.۵)$$

$$D_x \psi_+ + \frac{\Upsilon m [\delta]}{\hbar \Upsilon} [(x+a) + \delta(x-a)] \psi_+ = \frac{-\Upsilon m}{\hbar \Upsilon} E \psi$$

$$\frac{B}{\Upsilon} [+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}] = A \left(\frac{\Upsilon m \alpha}{k \hbar \Upsilon} - 1 \right) [E_q(x)]^{-k} \quad (۵۰.۵)$$

با تقسیم روابط خواهیم داشت

$$\left(\frac{\Upsilon m \alpha}{k \hbar \Upsilon} - 1 \right) = \frac{[+E_q(x)^k - E_q(x)^{-k}]}{[+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}]} \quad (۵۱.۵)$$

$$\tanh ka = \frac{[+E_q(x)^k - E_q(x)^{-k}]}{[+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}]} \quad (۵۲.۵)$$

$$\frac{\Upsilon m \alpha a}{\hbar \Upsilon} = \gamma \quad ka = y$$

جواب غیر جبری و ترسیمی است فرض می کنیم در نقطه $y = y_o$ هم را قطع کنند اگر $y = y_o$ از اینکه طبق شکل $1 < \frac{\gamma}{y} - 1 < 1$ و اینکه تانزانت مقدار مثبت دارد استفاده می کنیم تا برای یافتن جواب بازه محدودتری پیدا کنیم

$$\tanh y > 0 \Rightarrow \gamma > y \frac{\gamma}{y} - 1 < 1 \Rightarrow \gamma < 2y \Rightarrow \frac{\gamma}{2} < y_o < \gamma \quad (۵۳.۵)$$

جواب بایست در این محدوده باشد با توجه به رابطه بالا می توان نوشت

$$\left(\frac{m\alpha a}{\hbar^{\Upsilon}}\right)^{\Upsilon} < y_{\circ}^{\Upsilon} < \left(\frac{\Upsilon m\alpha a}{\hbar^{\Upsilon}}\right)^{\Upsilon} \quad (\Delta\mathfrak{F}.\Delta)$$

برای یافتن بازه انرژی می‌توانیم این‌گونه بنویسیم $y_0 = k_0 a \Rightarrow E = \frac{y_0^2 \hbar^2}{2ma^2}$ داریم $\frac{2m\alpha a}{\hbar^2} = \frac{2mv_0 a}{\hbar^2} \rightarrow E = V_0$ آن یک جواب حتما $y_0 = \gamma$ است پس $\frac{y_0^2 \hbar^2}{2ma^2} < \frac{y_0^2 \hbar^2}{2ma^2} < \frac{2mv_0^2}{\hbar^2}$ که همان انرژی حالت پایه است

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

برای جابجایی فرد خواهیم داشت

$$\psi_-(x) = \begin{cases} \Phi_I = A[E_q(x)]^k & (x < -a) \\ \Phi_{II} = B[E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}] & (-a < x < a) \\ \Phi_{II} = -A[E_q(x)]^{-k} & (a < x) \end{cases} \quad (\Delta\Delta.\Delta)$$

$$\frac{B}{\mathfrak{F}}[+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}] = A[E_q(x)]^{-k} \Rightarrow x = a \quad (56.5)$$

$$-\frac{B}{\mathfrak{V}}[+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}] = A\left(\frac{\mathfrak{V}m\alpha}{k\hbar\mathfrak{V}} - \mathfrak{V}\right)[E_q(x)]^{-k} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{V}.\mathfrak{A})$$

$$\left(\frac{\Upsilon m\alpha}{k\hbar\Upsilon} - 1\right) = \frac{[+E_q(x)^k - E_q(x)^{-k}]}{[+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}]} \quad (58.5)$$

جواب ها غیر جبری و ترسیمی هستند که جواب تقاطع دو نمودار تانژانت و خط راست است

$$\left(\frac{\Upsilon m \alpha}{k \hbar \Upsilon} - 1\right) = \coth y \quad \frac{\gamma}{y} - 1 = \coth Ka \rightarrow \tanh y = \left(\frac{\gamma}{y} - 1\right)^{-1} \quad (59.5)$$

$$\left[\left(\frac{\gamma}{y} - 1 \right)^{-1} \right]' < [\tanh y]' \Rightarrow \gamma < 1 \Rightarrow \frac{\hbar \Upsilon}{\Upsilon_{ma}} < v. \quad (60.5)$$

انرژی ذره بیشتر از چاه است و جواب نداریم اگر نمودار تانژانت و خط ثابت را رسم کنیم و محل تقاطع k را بیابیم می‌توانیم انرژی را به ازای مقادیر مختلف رسم کنیم

$$\tanh ka = \frac{[+E_q(x)^k - E_q(x)^{-k}]}{[+E_q(x)^k + E_q(x)^{-k}]} \quad (91.5)$$

$$E = \frac{k^{\Upsilon} \hbar^{\Upsilon}}{\Upsilon_m} \xrightarrow{\hbar, m=1} E = \frac{k^{\Upsilon}}{\Upsilon}$$

۷.۵ بررسی برهم نهی های حالت های همدوس

حالت همدوس معمولی را می توان حاصل برهم نهی تعداد بی شماری از حالت های فوک فرض کرد برای دو حالت همدوس دو مد نوسانی در نظر می گیریم برای این دو نوسانگر برهم نهی را می نویسیم از ساختار کوشی بل استفاده می کنیم ساختاری که نوسانگر های جفت شده در هم تنیدگی آن ها را بررسی می کند زمانی که فضای فوک را محدود می کنیم تابع نمایی که با آن حالت همدوس را تعریف کردیم محدودتر می شود از این جهت به این حالت، حالت همدوس قطع شده گفته می شود ابعاد فضای فوک تا m بعد به این صورت فرض می شود $F_M = |\circ\rangle, |1\rangle, \dots, |M\rangle$ روابط جابه جایی و اپراتور N به این صورت است

$$[a, a^\dagger] = 1 - (M + 1) |m\rangle\langle m| \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad [N, a] = -a \quad (1.5)$$

$$N |n\rangle = |n\rangle \quad n = \circ, 1, 2, \dots, M \quad (2.5)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1 - (M+1)\delta_{nm}} |n+1\rangle \quad (3.5)$$

نمایش کت همدوس قطع شده نرمال شده به این صورت است

$$|z, m\rangle = c_M \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} |n\rangle \quad M = 1, 2, \dots \quad c_M e_M(x) = 1 \rightarrow c_m = \frac{1}{e_M} \quad (4.5)$$

$$c_M \frac{Z^n}{n!} \langle n|n\rangle = 1 \quad z^\dagger = x \quad \frac{x^n}{n!} = e^x = e_q(x) \quad (5.5)$$

همان تابع نمایی دفورم است حال تابع نمایی در فضای هیلبرت متناهی است

$$e_M(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} = \frac{1}{M!} \int_{\circ}^{\infty} e^{-t} (x+t)^M dt \quad (6.5)$$

$$e_M(\circ) = 1 \quad e_M(\infty) = \infty \quad \frac{\partial}{\partial x} e_M(x) = e_{M-1}(x) \quad (7.5)$$

$$e_M(x) \approx \frac{x^n}{n!} \left(1 + \frac{M}{x}\right) \quad e_M(x) \approx 1 + x \quad (8.5)$$

$$a |z, M\rangle = Z \frac{c_M}{C_{M-1}} |z, M-1\rangle \quad (9.5)$$

۱.۷.۵ درهمتنیدگی حالت های همدوس قطع شده

درهمتنیدگی دو حالت همدوس قطع شده را با حالت های کوشی بل بررسی می کنیم

$$\begin{aligned} |\psi_1, M\rangle &= h_{1,M} [|z, M\rangle_1 |-z, M\rangle_2 + |-z, M\rangle_1 |z, M\rangle_2] \\ |\psi_2, M\rangle &= h_{2,M} [|z, M\rangle_1 |-z, M\rangle_2 - |-z, M\rangle_1 |z, M\rangle_2] \\ |\psi_3, M\rangle &= h_{3,M} [|z, M\rangle_1 |z, M\rangle_2 - |-z, M\rangle_1 |-z, M\rangle_2] \\ |\psi_4, M\rangle &= h_{4,M} [|z, M\rangle_1 |z, M\rangle_2 + |-z, M\rangle_1 |-z, M\rangle_2] \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} h_{1,M}^{-2} &= h_{4,M}^{-2} = 2[1 + \mu_m] \\ h_{2,M}^{-2} &= h_{3,M}^{-2} = 2[1 - \mu_m] \end{aligned} \quad (11.5)$$

ضرب داخلی را این گونه تعرف می کنیم

$$\langle Z, M | -Z, M \rangle = \langle -Z, M | +Z, M \rangle = \frac{e_M(-x)}{e_M(x)} = \mu_M(x) \quad (12.5)$$

اثر عملگر فنا و ویژه مقادیر آن داریم

$$a |Z, M\rangle = Z \frac{c_M}{C_{M-1}} |z, M-1\rangle \quad (13.5)$$

می دانیم برخی حالت های کوشی بل $\langle Z, M | Z, M \rangle$ متعامد نیستند و $|z|^2 \rightarrow \infty$ و $M \rightarrow \infty$ چنانچه متعامد خواهند شد رفتار $\mu_M(x)$ در بی نهایت این گونه است

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 1 \\ (-1)^M (1 - \frac{2M}{x}) & x \geq 1 \end{cases} \quad (14.5)$$

مثالی از پایه های متعامد به این شرح هست

$$\begin{aligned} |\pm, M\rangle_i &= \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} (|z, M\rangle_i + |-z, M\rangle_i) \quad N_{\pm} = 2(1 \pm \mu_m) \\ |+, M\rangle_i &= \frac{1}{\sqrt{N_+}} (|z, M\rangle_i + |-z, M\rangle_i) \\ |-, M\rangle_i &= \frac{1}{\sqrt{N_-}} (|z, M\rangle_i - |-z, M\rangle_i) \end{aligned} \quad (15.5)$$

بنابراین چهار حالت ما به این صورت خواهد شد

(16.5)

$$\begin{aligned} |\psi_1, M\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2(1 + \mu_M)}} [(1 + \mu_M) |+, M\rangle_1 |+, M\rangle_2 - (1 - \mu_M) |-, M\rangle_1 |-, M\rangle_2] \\ |\psi_2, M\rangle &= |\psi_1, M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|-, M\rangle_1 |+, M\rangle_2 - |+, M\rangle_1 |-, M\rangle_2] \\ |\psi_3, M\rangle &= |\psi_1, M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|-, M\rangle_1 |+, M\rangle_2 + |+, M\rangle_1 |-, M\rangle_2] \\ |\psi_4, M\rangle &= |\psi_1, M\rangle = \sqrt{\frac{1}{2(1 + \mu_M)}} [(1 + \mu_M) |+, M\rangle_1 |+, M\rangle_2 + (1 - \mu_M) |-, M\rangle_1 |-, M\rangle_2] \end{aligned}$$

در حالت های حدی $M \rightarrow \infty$ و $|z|^2 \rightarrow \infty$ حالت های کوشی بل به حالت های بل تبدیل می شود اپراتور چگالی ρ به این صورت خواهد بود

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} &= \text{tr}_2 |\psi_1, M\rangle \langle \psi_1, M| \\ &= \left(\frac{1}{2(1+\mu_M^2)}\right)^2 [(1+\mu_M)^2 |+, M\rangle \langle +, M| + (1-\mu_M)^2 |-, M\rangle \langle -, M|] \\ \rho^{(2)} &= \text{tr}_2 |\psi_2, M\rangle \langle \psi_2, M| = \frac{1}{4} [|+, M\rangle \langle +, M| + |-, M\rangle \langle -, M|] \\ \rho^{(3)} &= \text{tr}_2 |\psi_3, M\rangle \langle \psi_3, M| = \frac{1}{4} [|+, M\rangle \langle +, M| + |-, M\rangle \langle -, M|] \\ \rho^{(4)} &= \text{tr}_2 |\psi_4, M\rangle \langle \psi_4, M| \\ &= \left(\frac{1}{2(1+\mu_M^2)}\right)^2 [(1+\mu_M)^2 |+, M\rangle \langle +, M| + (1-\mu_M)^2 |-, M\rangle \langle -, M|]\end{aligned}\tag{۱۷.۵}$$

و با یافتن ویژه مقادیر می توان در حل مسائل از آن ها بهره برد به طور مثال ویژه مقادیر به این صورت محاسبه می کنیم

$$\lambda_1^{1,4} = \frac{(1+\mu_M^2)^2}{2(1+\mu_M^2)} \quad \lambda_2^{1,4} = \frac{(1-\mu_M^2)^2}{2(1+\mu_M^2)}\tag{۱۸.۵}$$

در $|\psi_2, M\rangle$ و $|\psi_3, M\rangle$ اپراتورهای چگالی کاهش می یابند و ویژه مقادیر برای هر دو کت یکی خواهد بود

$$\lambda_1^{2,3} = \lambda_2^{2,3} = \frac{1}{4}\tag{۱۹.۵}$$

با داشتن ویژه مقادیر می توان آنتروپی وان-نیومن را حساب کرد

$$\begin{aligned}E_M^{(a)} &= - \sum_{m=1,2} \lambda_n^{(a)} \log_2(\lambda_n^{(a)}) \\ E_M^{(1,4)} &= \frac{(1+\mu_M^2)^2}{2(1+\mu_M^2)} \log_2\left(\frac{(1+\mu_M^2)^2}{2(1+\mu_M^2)}\right) - \frac{(1-\mu_M^2)^2}{2(1+\mu_M^2)} \log_2\left(\frac{(1-\mu_M^2)^2}{2(1+\mu_M^2)}\right)\end{aligned}\tag{۲۰.۵}$$

حالت های $|\psi_2, M\rangle$ و $|\psi_3, M\rangle$ حالت های درهم تنیده می باشند

۲.۷.۵ خواص غیر کلاسیکی

تابع توزیع فوتونی

تابع توزیع فوتونی را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} P_{n_1, n_2}^{(1)} &= |\langle n_1, n_2 | |\psi_1, M\rangle|^2 = \frac{[e(x)_m]^{-2} x^{n_1+n_2}}{n_1! n_2! (\lambda + \mu_M^2)} (\lambda + (-1)^{n_1+n_2}) \\ P_{n_1, n_2}^{(2)} &= |\langle n_1, n_2 | |\psi_2, M\rangle|^2 = \frac{[e(x)_m]^{-2} x^{n_1+n_2}}{n_1! n_2! (\lambda - \mu_M^2)} (\lambda - (-1)^{n_1+n_2}) \\ P_{n_1, n_2}^{(3)} &= |\langle n_1, n_2 | |\psi_3, M\rangle|^2 = \frac{[e(x)_m]^{-2} x^{n_1+n_2}}{n_1! n_2! (\lambda - \mu_M^2)} (\lambda - (-1)^{n_1+n_2}) \\ P_{n_1, n_2}^{(4)} &= |\langle n_1, n_2 | |\psi_4, M\rangle|^2 = \frac{[e(x)_m]^{-2} x^{n_1+n_2}}{n_1! n_2! (\lambda + \mu_M^2)} (\lambda + (-1)^{n_1+n_2}) \end{aligned} \quad (21.5)$$

$|n_1\rangle$ و $|n_2\rangle$ پایه های فضای فوک می باشند

$$P_{n_1, n_2}^{(4)} = P_{n_1, n_2}^{(1)} \quad P_{n_1, n_2}^{(3)} = P_{n_1, n_2}^{(2)} \quad N_1 |n_1\rangle = n_1 |n_1\rangle \quad N_2 |n_2\rangle = n_2 |n_2\rangle \quad (22.5)$$

$$P_{n_1, n_2}^{(1)} = P_{n_1, n_2}^{(4)} = \begin{cases} \frac{2[e(x)_m]^{-2} x^{n_1+n_2}}{n_1! n_2! (\lambda + \mu_M^2)} & n_1 + n_2 \in Z_+ \\ 0 & n_1 + n_2 \in Z_- \end{cases} \quad (23.5)$$

$$P_{n_1, n_2}^{(2)} = P_{n_1, n_2}^{(3)} \approx \begin{cases} 1 & n_1 = 1, n_2 = 0 \text{ یا } n_1 = 0, n_2 = 1 \\ 0 & \text{بقیه مقادیر} \end{cases} \quad (24.5)$$

برای مقادیر بزرگ x به این صورت خواهد بود

$$P_{n_1, n_2}^{(1)} = P_{n_1, n_2}^{(4)} \approx \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = M \\ 0 & \text{بقیه مقادیر} \end{cases} \quad (25.5)$$

$$P_{n_1, n_2}^{(2)} = P_{n_1, n_2}^{(3)} \approx \begin{cases} 1 & n_1 = M, n_2 = M-1 \text{ یا } n_1 = M-1, n_2 = M \\ 0 & \text{بقیه مقادیر} \end{cases} \quad (26.5)$$

حالا تابع احتمال فوتون ها را به ازای مقادیر مختلف M محاسبه می کنیم اگر $M = 1$ باشد

$$e(x)_1 = 1 + x \quad \mu(x)_1 = \frac{1-x}{1+x} \quad (27.5)$$

بنابراین مقدار P_n برای کتهای $|\psi_1, M\rangle$ و $|\psi_2, M\rangle$ و $|\psi_3, M\rangle$ و $|\psi_4, M\rangle$ برابر است با

$$P_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{1+x^2} \quad P_{1,1}^{(1)} = \frac{x^2}{1+x^2} \quad (28.5)$$

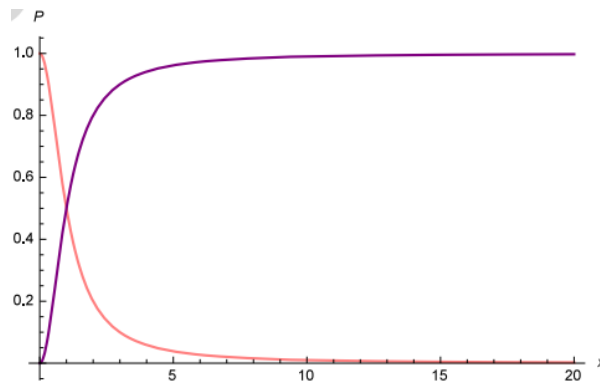
$$P_{n_0, n_0}^{(1)} = P_{n_1, n_1}^{(1)} = \frac{1}{2} \quad (29.5)$$

که تابع احتمال فوتون ها مقداری ثابت شد. در شکل ۱۵.۵ تابع $P_{n_1, n_2}^{(1)}$ بر حسب x را رسم کردیم تابع توزیع برای $(n_1, n_2) = (0, 0)$ باریک صورتی و در حالت $(n_1, n_2) = (1, 1)$ با رنگ بنفش مشخص شده است

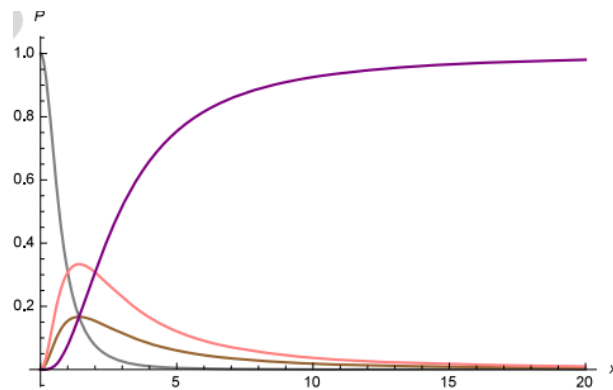
$$P_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{1 + 2x^2 + \frac{1}{2}x^4}$$

$$P_{0,2}^{(1)} = P_{2,0}^{(1)} = \frac{x^2}{2(1 + 2x^2 + \frac{1}{2}x^4)} \quad (30.5)$$

در شکل ۱۶.۵ تابع $P_{n_1, n_2}^{(1)}$ بر حسب x را رسم کردیم تابع توزیع برای $(n_1, n_2) = (0, 2)$ و $(2, 0)$ با



شکل ۱۵.۵: رسم تابع توزیع فوتونی بر حسب n



شکل ۱۶.۵: رسم تابع توزیع فوتونی $P_{n_1, n_2}^{(1)}$ بر حسب n

قهوه ای و در حالت $(n_1, n_2) = (1, 1)$ با صورتی $(n_1, n_2) = (2, 2)$ با بنفش و در $(n_1, n_2) = (0, 0)$ با خاکستری مشخص شده است اگر $M = 2$ باشد داریم

$$e(x)_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \mu(x)_2 = \frac{1 - x + \frac{x^2}{2}}{1 + x + \frac{x^2}{2}} \quad (31.5)$$

مقادیر p_n برای $|\psi_1, M\rangle$ و $|\psi_2, M\rangle$ و $|\psi_3, M\rangle$ و $|\psi_4, M\rangle$ برابر است با

$$\begin{aligned} P_{\circ,1}^{(2)} &= P_{1,\circ}^{(2)} = \frac{1}{2+x^2} \\ P_{1,2}^{(2)} &= P_{2,1}^{(2)} = \frac{x^2}{2(2+x^2)} \end{aligned} \quad (32.5)$$

در شکل ۱۷.۵ تابع $P_{n_1, n_2}^{(2)}$ بر حسب x را رسم کردیم تابع توزیع برای $(n_1, n_2) = (\circ, 1)(1, \circ)$ با صورتی و در حالت $(n_1, n_2) = (1, 2)(2, 1)$ با قهوه‌ای مشخص شده است

پارامتر مندل

بررسی برای آمار فروپواسونی دو مد برهمنه‌ی همدوس باید پارامتر مندل را برای هر مد محاسبه کنیم اگر مقدار $Q_i^{j,M} = \circ$ باشد توزیع پواسونی است و در توزیع فراپواسونی $Q_i^{j,M} > \circ$ و در توزیع فرو پواسونی $Q_i^{j,M} < \circ$ می‌باشد برای محاسبه پارامتر مندل ابتدا مقدار چشمداشتی N_i محاسبه می‌کنیم

$$Q_i^{j,M} = \frac{\langle \psi_j, M | N_i(N_i - 1) | \psi_j, M \rangle - \langle \psi_j, M | N_i | \psi_j, M \rangle^2}{\langle \psi_j, M | \psi_j, M \rangle} \quad (33.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_1, M | N_i | \psi_1, M \rangle &= \langle \psi_4, M | N_i | \psi_4, M \rangle \\ &= x \frac{e(x)_m e(x)_{m-1} - e(-x)_m e(-x)_{m-1}}{e(x)_m^2 + e(-x)_m^2} \end{aligned} \quad (34.5)$$

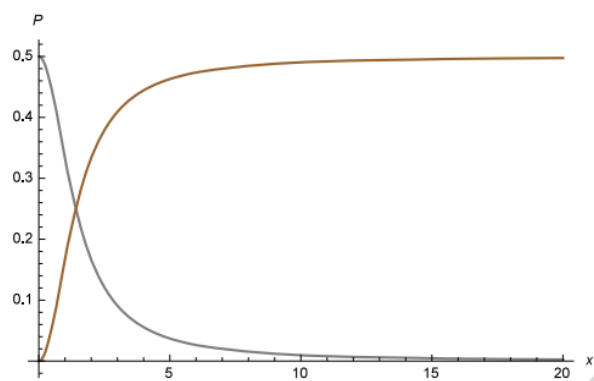
$$\begin{aligned} \langle \psi_2, M | N_i | \psi_2, M \rangle &= \langle \psi_3, M | N_i | \psi_3, M \rangle \\ &= x \frac{e(x)_m e(x)_{m-1} + e(-x)_m e(-x)_{m-1}}{e(x)_m^2 - e(-x)_m^2} \end{aligned} \quad (35.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_1, M | N_i(N_i - 1) | \psi_1, M \rangle &= \langle \psi_4, M | N_i(N_i - 1) | \psi_4, M \rangle \\ &= x^2 \frac{e(x)_m e(x)_{m-2} + e(-x)_m e(-x)_{m-2}}{e(x)_m^2 + e(-x)_m^2} \end{aligned} \quad (36.5)$$

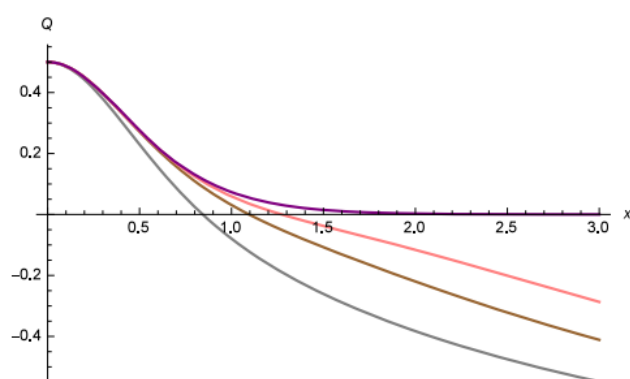
$$\begin{aligned} \langle \psi_2, M | N_i(N_i - 1) | \psi_2, M \rangle &= \langle \psi_3, M | N_i(N_i - 1) | \psi_3, M \rangle \\ &= x^2 \frac{e(x)_m e(x)_{m-2} - e(-x)_m e(-x)_{m-2}}{e(x)_m^2 - e(-x)_m^2} \end{aligned} \quad (37.5)$$

$|\psi_4, M\rangle$ و $|\psi_1, M\rangle$ از آمار فراپواسونی و $|\psi_3, M\rangle$ و $|\psi_2, M\rangle$ از آمار فروپواسونی پیروی می‌کند شکل های ۱۹.۵ و ۱۸.۵ رسم پارامتر مندل بر حسب x را در m های متفاوت نشان می‌دهد $M = 5$ با صورتی و $M = 3$ با خاکستری $M = 4$ با قهوه‌ای $M = \infty$ با بنفش مشخص شده است. برای چهار حالت کوشی-بل پارامتر مندل به این صورت نوشته می‌شود

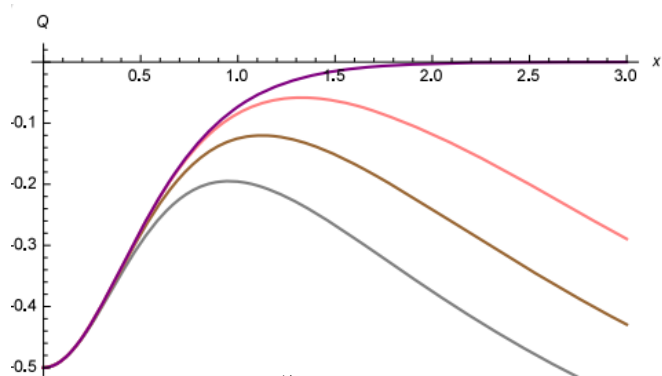
$$\begin{aligned} Q_i^{1,M} &= Q_i^{4,M} = \\ &= x \left[\frac{e(x)_m e(x)_{m-2} + e(-x)_m e(-x)_{m-2}}{e(x)_m e(x)_{m-1} - e(-x)_m e(-x)_{m-1}} - \frac{e(x)_m e(x)_{m-1} - e(x)_{m-1} e(-x)_m}{e(x)_m^2 e(-x)_m^2} \right] \end{aligned} \quad (38.5)$$



شکل ۱۷.۵: رسم تابع توزیع فوتونی $P_{n_1, n_2}^{(2)}$ بر حسب n



شکل ۱۸.۵: رسم $Q_i^{1,M}$ بر حسب n



شکل ۱۹.۵: رسم $Q_i^{2,M}$ بر حسب x

فصل ۶

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه به معرفی حالت‌های همدوس پرداختیم تحول زمانی حالت همدوس را با روش لویی‌س رزنفلید معرفی کرده و با یافتن لاگرانژی سیستم و هامیلتونی سیستم تحول زمانی را برای دو بعد محاسبه کردیم که بررسی موارد فوق برای حالت‌های همدوس تغییر شکل یافته به این شرح است ابتدا به معرفی مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته پرداختیم و مثال‌هایی از قبیل چاه پتانسیل و مسئله پله پتانسیل در کوانتوم تغییر شکل یافته را مورد مطالعه قرار دادیم و به بررسی چاه پتانسیل دلتای دوگان پرداختیم و انرژی آن را در حالت تغییر شکل یافته محاسبه کردیم همچنین در فضای ϕ تغییر شکل یافته به معرفی مشتقات و توابع نمایی و توابع هیپربولیک و برخی خواص دیگر پرداختیم به معرفی جبر ویگنر تغییر شکل یافته روی دایره پرداختیم و پاریده و هامیلتونی را برای جبر دایروی بیان کردیم حالت همدوس برای جبر ویگنر تغییر شکل یافته را بیان کردیم و جبر هایزنبرگ تعمیم یافته را مورد بررسی قرار دادیم حالت همدوس را برای حالت خاصه $k-1$ نوشتیم و حالت‌هایی که قابل بهنجارش بودن را به لحاظ فیزیکی پذیرفتیم و خواص آماری آنها را محاسبه کردیم .

تابع نمایی در جبرسالیس را و جبر بوزونی تغییر شکل یافته در فرمالیزم q مطرح کردیم نشان دادیم برای $q \leq 0$ طیف عدم قطعیت داریم در حالی که در $q > 0$ طیف قطعیت داریم حالت همدوس تغییر شکل یافته با این جبر را مطرح کردیم و خاص غیر کلاسیکی آن را بررسی کردیم .

مراجع

- [1] J. Glauber. The Quantum Theory of Optical Coherence, Phys. Rev. Lett. 10,84 (1963)
- [2] A. Perelomov. Generalized Coherent States and Their Applications, Springer. Berlin.(1986)
- [3] P. Leach. On a generalization of the Lewis invariant for the time-dependent harmonic oscillator, SIAM J. APPL. MATH 34, 3 (1978)
- [4] G. B. Arfken and H. J. Weber. Mathematical methods for physicists,(1999)
- [5] R. Friedberg and T. Lee. A Soluble Gauge Model with Gribov-Type Copies Ann, Phys. 246, 381-445 (1996)
- [6] E.Pinney(1950),” The Nonlinear Differential Equation”,Amer. Math. Soc , 1, 681(1950)
- [7] I. Pedrosa,” Canonical Transformations and Exact Invariants for Dissipative Systems”, J.Math. Phys, 28, 2662 (1987)
- [8] W. S Chung and H. Hassanabadi,” Coherent States of the Generalized Heisenberg Algebra with $k-1$ Isolated States”, Springer-Verlag GmbH Austria, 28, 2662(2019)
- [9] W.S Chung and H. Hassanabadi,” Generalized pair Coherent States and Non-classical Properties”, Eur. Phys. J. Plus ,134, 394 (2019)
- [10] W.S Chung and H. Hassanabadi,” q -Deformed Coherent States for q -Deformed Photon Based on Tsallis’s q -Deformed Exponential Function”, Phscer ,108432.R1(2019)
- [11] W.S Chung and H. Hassanabadi,” Wigner Algebra in a Unit Circle and Deformed Coherent States”, Phscer,108432.R1(2019)

- [12] W.S Chung and H. Hassanabadi," q -Deformed Boson Algebra Based on q -Deformed Addition and Non-classical Properties of q -Deformed Coherent States", Phsccer,109254.R1(2019)
- [13] W.S Chung and H. Hassanabadi," q -Deformed Wave Packet, Rectangular Potentials and Delta Potentials in the q -Deformed Quantum Mechanics Based on the q -Addition", Phsccer,109234.R1(2019)
- [14] W.S Chung and H. Hassanabadi," Two Mode Superposition of Truncated Coherent 2 States: Entanglement and Non-Classical Properties", International Journal of Theoretical Physics ,109234.R1(2020)
- [15] D. Popov: Barut-Girardello Coherent States of the Pseudoharmonic Oscillator J. Phys. A Math. Gen. 34, 1-14 (2001)
- [16] A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B 365, 202 (1996)
- [17] E. Borges, Physica A 340 (2004) 95.
- [18] F. Jackson, Mess.Math. 38 , 57 (1909)
- [19] W.S Chung and H. Hassanabadi," q -deformed quantum mechanics based on the q -addition", arXiv:
- [20] V.Moniek , Coherent State in Quantum Mechanics,Bachelor Thesis,(2011)

Aabstract

By using of the properties of $SU(1,1)$ group, and considering a coherent quantum system for a two dimensional damping harmonic oscillator, we determine the energy of the systems, eigen states of the coherent states and also we determine the conditions of the damping and ultra-damping and by using of the Lewis-Riesenfeld method, we calculate the time evolution of the system. For this purpose, in the first, we write the Hamiltonian of the system and by using the Hamilton-Jacobi equation, we obtain the equation of the particle and then by using Heisenberg algebra we quantize the system and we obtain the coherent states of such system. We see that for such a system, we cannot determine the time evolution by time evolution operator and we have to use the Lewis-Riesenfeld method for determining the time evolution.

keywords : coherent states, damping harmonic oscillator,the Lewis-Riesenfeld method, time evolution operator,properties of $SU(1,1)$ group.



Faculty of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in Numerical Analysis

Time Evolution of Coherent States for Two Dimensions Damped Harmonic Oscillator in the Non-Relativistic and Relativistic Cases

By: faeze mohamadi

Supervisor:
Hassan Hassanabadi

June 2020