

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
مَنْ مَرَّ بِهَذَا
مَسْجِدٍ مِنْ مَسْجِدَاتِ
بَنِي إِسْرَائِيلَ
وَمَرَّ بِهَذَا
مَسْجِدٍ مِنْ مَسْجِدَاتِ
بَنِي إِسْرَائِيلَ
وَمَرَّ بِهَذَا
مَسْجِدٍ مِنْ مَسْجِدَاتِ
بَنِي إِسْرَائِيلَ



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای
رساله دکتری فیزیک هسته‌ای

بررسی هسته‌ها با در نظر گرفتن تغییر شکل ثابت و پویا

نگارنده: هادی سبحانی

استادان راهنما:

دکتر حسن حسن‌آبادی

دکتر دنیس بوناتسوس

شهریور ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **هادی سبحانی** دانشجوی دکتری فیزیک هسته‌ای از دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی هسته‌ها با در نظر گرفتن تغییر شکل ثابت و پویا، تحت راهنمایی حسن حسن‌آبادی و دنیس بوناتسوس** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هادی سبحانی

شهریور ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله اثرات در نظر گرفتن تغییر شکل بر روی هسته مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در قسمت اول این رساله این تغییر شکل‌ها به صورت ثابت فرض می‌شوند. با این فرض هامیلتونی نیلسون را مورد بررسی قرار می‌دهیم و مباحثی در آن مطرح می‌گردد. سپس مدل (۳) proxy-SU معرفی شده و ویژگی‌های آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین اثرگذاری تغییر شکل بر روی اعداد جادویی نیز مورد مطالعه واقع می‌شود. علاوه بر این با استفاده از قابلیت‌های مدل (۳) proxy-SU یک فرمول نیمه تجربی برای نیمه عمر واپاشی آلفا پیشنهاد می‌شود که حاوی اطلاعات تغییر شکل هسته می‌باشد. پس از آن حرکت لنگشی هسته معرفی و بررسی می‌شود.

در قسمت دوم با لحاظ کردن نوسانات و دوران‌ها وارد فاز تغییر شکل‌های پویا می‌شویم که به کمک آن هسته‌های زوج و فرد را به صورت جداگانه و در موقعیت‌های متفاوت مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت با معرفی مفهوم ذره مستقل کنترل شده امکانی را فراهم می‌کنیم که هسته‌های فرد را راحت‌تر مورد بررسی قرار دهیم.

کلمات کلیدی: تغییر شکل‌های هسته‌ای، ترازهای نیلسون، مدل (۳) proxy-SU، هامیلتونی بوهر.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- Dennis Bonatsos, Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (9) 710 (2020) .
- Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi, Dennis Bonatsos, Feng Pan, Jerry P Draayer, *Nucl. Phys. A*, **1002** 121956 (2020).
- Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi, Dennis Bonatsos, Feng Pan, Sai Cui, Ziwei Feng, Jerry P Draayer, *Eur. Phys. J. A*, **56** 29 (2020).
- Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi *Nucl. Phys. A*, **992** 121621 (2019).
- Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi *Nucl. Phys. A*, **989** 135 (2019).
- Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi *Nucl. Phys. A*, **986** 223 (2019).
- Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi *Nucl. Phys. A*, **983** 229 (2019).

فهرست مطالب

س	۱	مقدمه
۱	اول	تغییر شکل‌های ثابت
۲	۲	مقدمه‌ای بر تغییر شکل ثابت هسته
۳	۱.۲	چگونگی اثر گذاری تغییر شکل در انرژی
۷	۲.۲	هسته تغییر شکل یافته : ترازهای نیلسون
۹	۱.۲.۲	رفتار اختلالی برای تغییر شکل‌های کوچک
۱۰	۲.۲.۲	تغییر شکل‌های زیاد: تابع موج‌های مجانبی و حدی
۱۳	۳.۲.۲	ناحیه میانی
۱۵	۴.۲.۲	شرط پایستگی حجم
۱۵	۳.۲	تقارن $proxy-SU(3)$
۲۵	۳	محاسباتی جدید برای ترازهای نیلسون
۳۰	۱.۳	بررسی مجدد مسئله ترازهای نیلسون
۳۱	۲.۳	توابع موج مجانبی با روش‌های عملگری
۳۷	۱.۲.۳	تعیین اعداد کوانتومی ترازهای نیلسون در مختصات استوانه‌ای
۴۳	۴	مدل $proxy-SU(3)$ در ناحیه تغییر شکل‌های متوسط
۴۹	۵	بسط مدارهای نیلسون در پایه کروی
۵۰	۱.۵	تابع موج در پیکربندی فضایی
۵۱	۲.۵	پایه‌هایی معادل
۵۲	۳.۵	مثالی از بسط بردار نیلسون
۵۳	۴.۵	مثال‌های بیشتر
۵۵	۶	مبثی بر اعداد جادویی در مدل $proxy-SU(3)$

۵۹	۷	بررسی واپاشی آلفا به کمک مدل (۳) proxy-SU
۵۹	۱.۷	اعداد کوانتومی الیوت و پارامترهای تغییر شکل هسته
۶۱	۲.۷	فرمول نیمه تجربی نیمه عمر واپاشی آلفا
۶۳	۱.۲.۷	فرمول چی
۶۳	۲.۲.۷	فرمول آرکاوای-پوانارو
۶۳	۳.۲.۷	فرمول نیمه تجربی نیمه عمر واپاشی آلفا به کمک مدل (۳) proxy-SU
۷۳	۸	حرکت تابدار
۷۴	۱.۸	چارچوب نظری
۷۴	۱.۱.۸	مدل دوران کننده سه محوری
۷۵	۲.۱.۸	عبارت های تحلیلی تقریبی
۷۷	۲.۸	بحث و نتیجه گیری بر اساس محاسبات عددی
۷۹	۳.۸	احتمال گذار چهار قطبی
۸۱		دوم تغییر شکل های پویا
۸۳	۹	مقدمه ای بر هامیلتونی بوهر، تغییر شکل های پویا
۸۳	۱.۹	تغییر شکل های سطح هسته
۸۳	۱.۱.۹	پارامتری سازی عمومی
۸۵	۲.۱.۹	انواع تغییر شکل های چند قطبی
۸۶	۳.۱.۹	تغییر شکل های چهار قطبی
۹۲	۴.۱.۹	γ مدل ناپایدار: E(5)
۹۳	۵.۱.۹	مدل X(5)
۹۷	۱۰	پتانسیل دکاتیک در مدل γ ناپایدار
۹۷	۱.۱۰	بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی
۹۹	۲.۱۰	نتایج عددی
۱۰۷	۱۱	پتانسیل کیلینگ بک در مدل γ ناپایدار
۱۰۷	۱.۱۱	بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی
۱۰۸	۱.۱.۱۱	روش پیشنهادی بٹ
۱۱۰	۲.۱۱	نتایج محاسبات عددی
۱۱۵	۱۲	برهمکنش دکاتیک در مدل X(5)
۱۱۶	۱.۱۲	بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت γ
۱۱۶	۲.۱۲	بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت β

۱۱۷	محاسبات عددی و مقایسه با دیگر مدل‌ها
۱۲۵	۱۳ پتانسیل کسری در مدل دقیق جداشدنی $X(5)$ از هامیلتونی بوهر
۱۲۶	۱.۱۳ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت γ
۱۲۶	۲.۱۳ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت β
۱۲۷	۳.۱۳ محاسبات عددی برای پتانسیل کسری
۱۳۱	۱۴ برهمکنش ایزوتونیک در بررسی هسته‌های سه‌محوری
۱۳۲	۱.۱۴ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت β
۱۳۳	۲.۱۴ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت γ
۱۳۴	۳.۱۴ نتایج محاسبات عددی برای پتانسیل ایزوتونیک
۱۴۱	۱۵ پتانسیل سکستیک در بررسی رفتار هسته‌های A فرد γ ناپایدار
۱۴۲	۱.۱۵ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی
۱۴۳	۲.۱۵ بکارگیری نتایج برای هسته‌های Ir
۱۵۱	۱۶ ذره مستقل کنترل شده
۱۵۳	۱.۱۶ مبحثی در باب بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی
۱۵۷	۲.۱۶ ذره مستقل کنترل شده برای هسته‌های سه‌محوری
۱۵۸	۱.۲.۱۶ بازتولید اطلاعات تجربی
۱۶۱	۳.۱۶ مطالعه‌ای بیشتر بر هسته‌های سه‌محوری به کمک ذره مستقل کنترل شده
۱۶۵	۱۷ پدیده پاریده دوگانه و مدل ذره مستقل کنترل شده
۱۶۸	۱.۱۷ محاسبات تحلیلی مربوط به تابع موج و طیف انرژی
۱۶۹	۲.۱۷ بازتولید اطلاعات ساختار پاریده دوگانه
۱۷۱	۱۸ نتیجه‌گیری
۱۷۳	مراجع

فصل ۱

مقدمه

حالت پایه برخی از هسته‌ها با میدان‌ها متوسط کروی توصیف می‌شوند در حالیکه برای دیگر هسته‌ها بایستی میدان‌های میانگین تغییر شکل یافته باشند. حضور شکل غیر کروی در هسته‌ها نشان از شکست تقارن دارد. طیف انرژی‌های کم^۱ بسیاری از هسته‌ها با استفاده حرکت ذره مستقل در برهمکنش میدان متوسط که دارای تقارن کروی است می‌تواند توجیح شود، ولی برای بسیاری از هسته‌های دیگر، استفاده از میدان متوسط کروی کارساز نبوده و بایستی انحراف از حالت کروی در این میدان متوسط در نظر گرفت [۱-۶]. شکل ۱.۱ نواحی مختلف ذرات نوترونی و پروتونی که انحراف از تقارن کروی آن‌ها به صورت آزمایشگاهی [۲۲] مشاهده شده است را نشان می‌دهد.

وجود تغییر شکل در هسته‌ها را می‌توان به کمک چند پدیده فیزیکی پی برد [۱-۶]

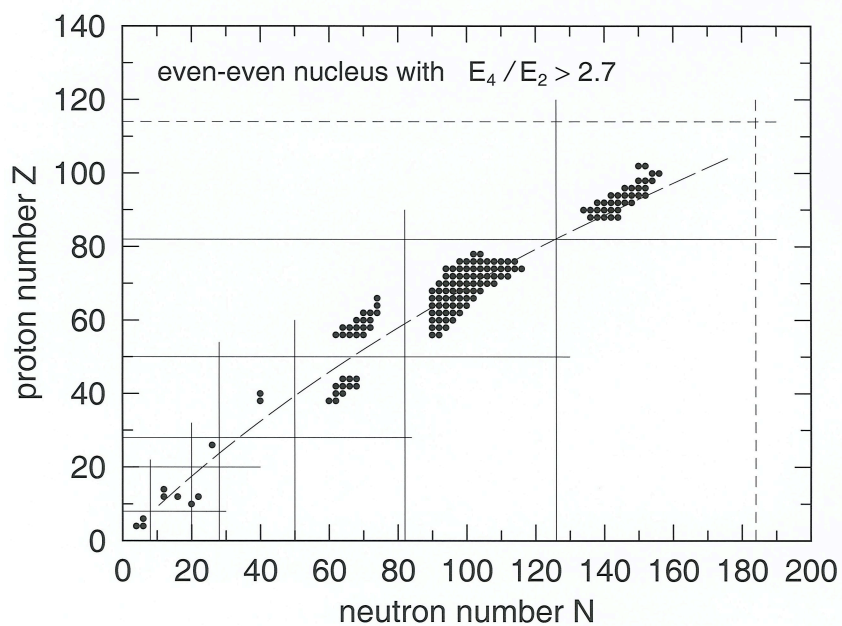
- چهارقطبی الکتریکی^۲ و نرخ گذارهای چهارقطبی الکترومغناطیسی^۳ که مرتبه بزرگی آن‌ها از تخمین مکانیک کوانتومی آن‌ها از گذارهای کوانتومی تک ذره بیشتر است.
- طیف انرژی‌های کم که شامل دنباله ای از ترازهای برانگیخته با تکانه زاویه ای های متوالی کوانتیده با وابستگی $J(J+1)$. این طیف به نوار طیف دورانی شناخته می‌شود.
- علاوه بر برانگیختگی‌ها دورانی، طیف انرژی‌های کم برانگیختگی‌هایی را نشان بدهد که این گونه تفسیر شود که ذره در پتانسیل بیضوی^۴ گونه در حرکت باشد.

¹Low energy spectra

²Electric quadrupole

³Electromagnetic quadrupole transitions rates

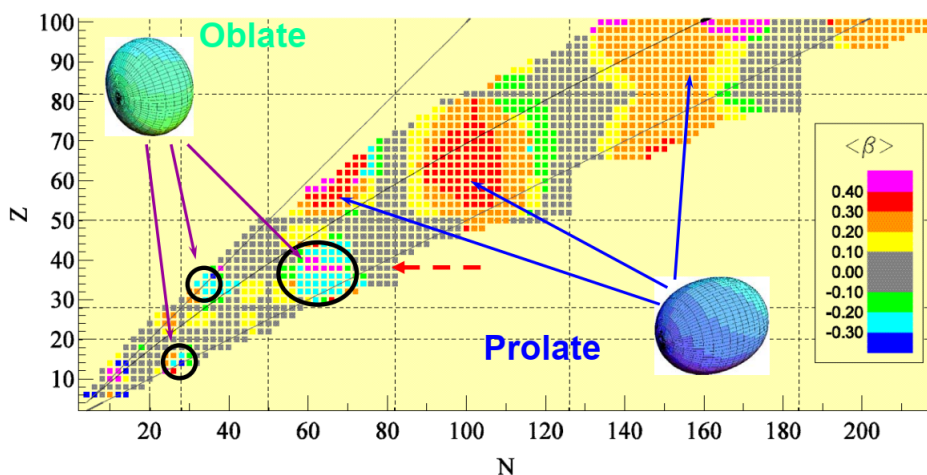
⁴Spheroidal potential



شکل ۱.۱: شواهد آزمایشگاهی برای تغییر شکل هسته‌ها.

وجود تغییر شکل یک شرط لازم برای دوران‌های جمعی^۵ یک سیستم کوانتومی است زیرا برای دوران نیاز به جهت گیری سیستم کوانتومی هست و این جهت گیری با یک تغییر شکل ممکن می‌شود [۶-۱۰]. در شکل ۲.۱ یک شمایی از محاسبات نظری درباره تغییر شکل هسته‌ها را نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان دید که محاسبات نظری چگونه تغییر و تحول شکل هسته‌ها را پیش بینی کرده است. آن چه که در این شکل مشهود است این است که حالت کشیده محتمل تر است از حالت پخت. این وضعیت‌ها در فصل‌های آتی به تفصیل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

⁵Collective rotations



شکل ۲.۱: محاسبات نظری در مورد تغییر شکل هسته‌ها.

بخش اول

تغییر شکل‌های ثابت

فصل ۲

مقدمه‌ای بر تغییر شکل ثابت هسته

۱.۲ چگونگی اثر گذاری تغییر شکل در انرژی

برای نشان دادن چگونگی اثر گذاری تغییر شکل سیستم بر روی ترازهای انرژی، یک مثال مکانیک کوانتومی [۱۱-۱۴] را در غیاب و حضور تغییر شکل بررسی می‌کنیم. ذره‌ای در یک چاه پتانسیل سه بعدی در دستگاه دکارتی در نظر می‌گیریم. برهمکنشی چنین سیستمی به صورت

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_x; \\ \infty, & x > L_x, \\ 0, & 0 \leq y \leq L_y; \\ \infty, & y > L_y, \\ 0, & 0 \leq z \leq L_z; \\ \infty, & z > L_z. \end{cases} \quad (1.2)$$

می‌باشد. تابع موج و انرژی این مسئله شناخته شده به صورت زیر بدست می‌آید

$$\psi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right), \quad (2.2)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right), \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

که در آن A ثابت بهنجارش و m جرم می‌باشند. می‌توان این مسئله را با فرض

$$L_x = L_y = L_z = L, \quad (4.2)$$

جدول ۱.۲: حالات تبهگن و غیر تبهگن متناظر برای چند حالت به همراه مرتبه تبهگنی آنها در این جدول آورده شده است. در این جدول از $E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4mL^2}$ استفاده شده است.

انرژی	تبهگنی	اعداد کوانتومی (n_x, n_y, n_z)
$3E_0$	۱	$(1, 1, 1)$
$6E_0$	۳	$(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$
$9E_0$	۳	$(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)$
$11E_0$	۳	$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)$
$12E_0$	۱	$(2, 2, 2)$

تبدیل به یک حالت متقارن کرد. در این صورت انرژی سیستم شکل ساده‌تری بدست خواهد آورد

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (5.2)$$

در این وضعیت به وضوح دیده می‌شود که سیستم دچار تبهگنی می‌شود. در جدول ۱.۲ چندین مورد از حالات تبهگن و غیر تبهگن آورده شده است. همانطور که از جدول ۱.۲ دریافت می‌شود، حالات تبهگن در یک انرژی قرار گرفته اند. حال اگر تقارن سیستم را بشکنیم، اولین نتیجه‌ای که دریافت می‌شود این است که تبهگنی حالات دچار تغییر و تحول می‌شود. برای نشان دادن این امر فرض می‌کنیم که طول سیستم در یک راستا متفاوت و در دیگر راستاها هم‌اندازه می‌کنیم یعنی

$$L_z \neq L_x = L_y. \quad (6.2)$$

با این فرض حالت کشیده به صورت

$$L_z > L_x = L_y, \quad (7.2)$$

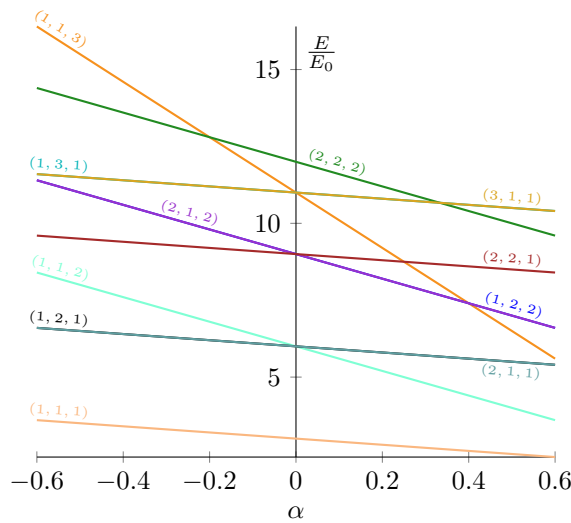
حالت پخت به صورت

$$L_z < L_x = L_y, \quad (8.2)$$

برای سیستم تعریف می‌شود. برای بررسی نحوه تغییر و تحول ترازهای انرژی در اثر در نظر گرفتن تغییر شکل، فرض می‌کنیم

$$L_x = L_y = L, \quad (9.2)$$

$$\left(\frac{L}{L_z}\right)^2 = 1 - \alpha \quad (10.2)$$



شکل ۱۰۲: در این شکل نحوه تغییر ترازهای انرژی به صورت تابعی از پارامتر تغییر شکل نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود پارامتر تغییر شکل باعث تغییر در اندازه و تبگه‌نی انرژی می‌شود.

که در آن α پارامتر تغییر شکل می‌باشد. با لحاظ کردن این فرض در سیستم، می‌توان انرژی سیستم را این چنین بدست آورد

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad (11.2)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_0 \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 \right), \quad (12.2)$$

$$= E_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 (1 - \alpha)). \quad (13.2)$$

از رابطه (۱۳.۲) دریافت می‌شود که پارامتر تغییر شکل ثابت به صورت یک پارامتر آزاد در انرژی سیستم اثر گذار خواهد بود. همچنین می‌توان انرژی سیستم را متشکل از دو قسمت متقارن و تغییر شکل بدست آورد

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_s + E_d \quad (14.2)$$

$$E_s = E_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (15.2)$$

$$E_d = -E_0 \alpha n_z^2. \quad (16.2)$$

$$(17.2)$$

بدیهی است که در حالت $\alpha = 0$ انرژی حالت متقارن دوباره بدست می‌آید. برای دریافتن نحوه اثرگذاری پارامتر تغییر شکل بر روی ترازهای انرژی، ترازهای انرژی جدول ۱۰۲ بر حسب تغییر پارامتر α در شکل ۱۰۲ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۱۰۲ دیده می‌شود حضور تغییر شکل علاوه بر تغییر میزان انرژی حالت، تبگه‌نی سیستم را دچار تغییر و تحول می‌کند. نکته ای درباره بازه تغییر شکل وجود دارد که اندازه آن نباید بزرگتر از ابعاد سیستم باشد. اما در فیزیک هسته ای قید تراکم ناپذیری هسته وجود دارد که بر اساس آن حجم هسته بایستی ثابت بماند. اما

در شکل ۱.۲ این نکته لحاظ نشده است. برای در نظر گرفتن این قید باید حجم سیستم

$$V_{x,y,z} = L_x L_y L_z, \quad (18.2)$$

در حالت متقارن ثابت بماند

$$V = L^3. \quad (19.2)$$

حال با در نظر گرفتن این قید بررسی می‌کنیم که انرژی سیستم چگونه تغییر می‌کند. با تعریف

$$L_{\parallel} = L_z, \quad (20.2)$$

$$L_{\perp} = L_x = L_y. \quad (21.2)$$

قید پایستگی حجم را با تعاریف فوق بازنویسی می‌کنیم

$$V_{x,y,z} = L_x L_y L_z = L_{\perp}^2 L_{\parallel} = L^3. \quad (22.2)$$

از آنجایی که

$$\frac{L}{L_z} = \frac{L}{L_{\parallel}} = \sqrt{1 - \alpha}, \quad (23.2)$$

بنابراین داریم

$$\left(\frac{L_{\perp}}{L}\right)^2 = \frac{L}{L_{\parallel}} = \sqrt{1 - \alpha}. \quad (24.2)$$

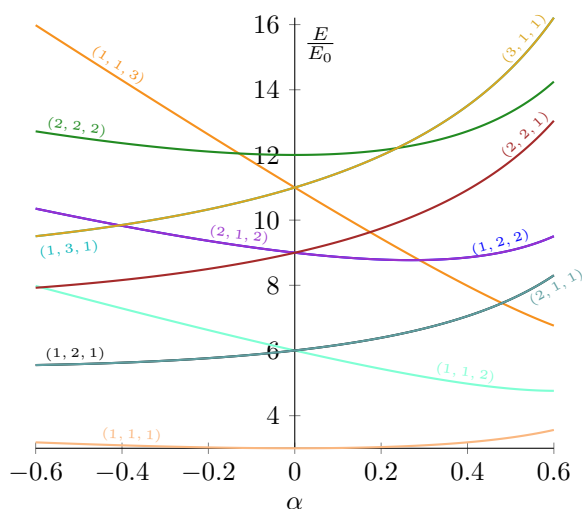
حال می‌توان انرژی سیستم در حضور تغییر شکل با در نظر گرفتن پایستگی حجم بازنویسی کنیم

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_0 \left(\left(n_x \frac{L}{L_{\perp}} \right)^2 + n_y \left(\frac{L}{L_{\perp}} \right)^2 + n_z \left(\frac{L}{L_{\parallel}} \right)^2 \right) \quad (25.2)$$

$$= E_0 \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{\sqrt{1 - \alpha}} + n_z^2 (1 - \alpha) \right). \quad (26.2)$$

همانطور که از رابطه (۲۵.۲) دریافت می‌شود، با در نظر گرفتن قید پایستگی حجم، دیگر ارتباط خطی میان انرژی تراز و پارامتر تغییر شکل وجود نخواهد داشت و تبدیل به یک ارتباط غیرخطی می‌شود. در شکل ۲.۲ تحول ترازهای انرژی جدول ۱.۲ به صورت تابعی از پارامتر تغییر شکل با در نظر گرفتن قید پایستگی حجم به تصویر کشیده شده‌اند. در این شکل مشاهده می‌شود که علاوه تغییر در تبهگنی ترازها، رفتار غیرخطی تراز انرژی نسبت پارامتر تغییر شکل وجود دارد.

در این مثال ساده از مکانیک کوانتومی ما اثر تغییر شکل و قید پایستگی حجم را نشان دادیم. این مثال یک مقدمه‌ای بود بر کاری که توسط آقای نیلسون به انجام رسید.



شکل ۲.۲: در این شکل تحول ترازهای انرژی جدول ۱.۲ به صورت تابعی از پارامتر تغییر شکل با در نظر گرفتن قید پایستگی حجم به تصویر کشیده شده است. رفتار غیرخطی در این شکل ناشی از در نظر گرفتن قید پایستگی حجم سیستم می‌باشد.

جدول ۲.۲: لیست مقادیر پارامترهای μ و κ در نواحی مختلف.

μ	κ	ناحیه
۰	۰/۰۸	$N, Z < 50$
۰/۶۰۲	۰/۰۶۳۵	$50 < Z < 82$
۰/۴۲۲	۰/۰۶۳۵	$82 < N < 126$
۰/۶۵۲	۰/۰۵۷۵	$82 < Z < 126$
۰/۳۲۴	۰/۰۶۳۵	$126 < N$

۲.۲ هسته تغییر شکل یافته : ترازهای نیلسون

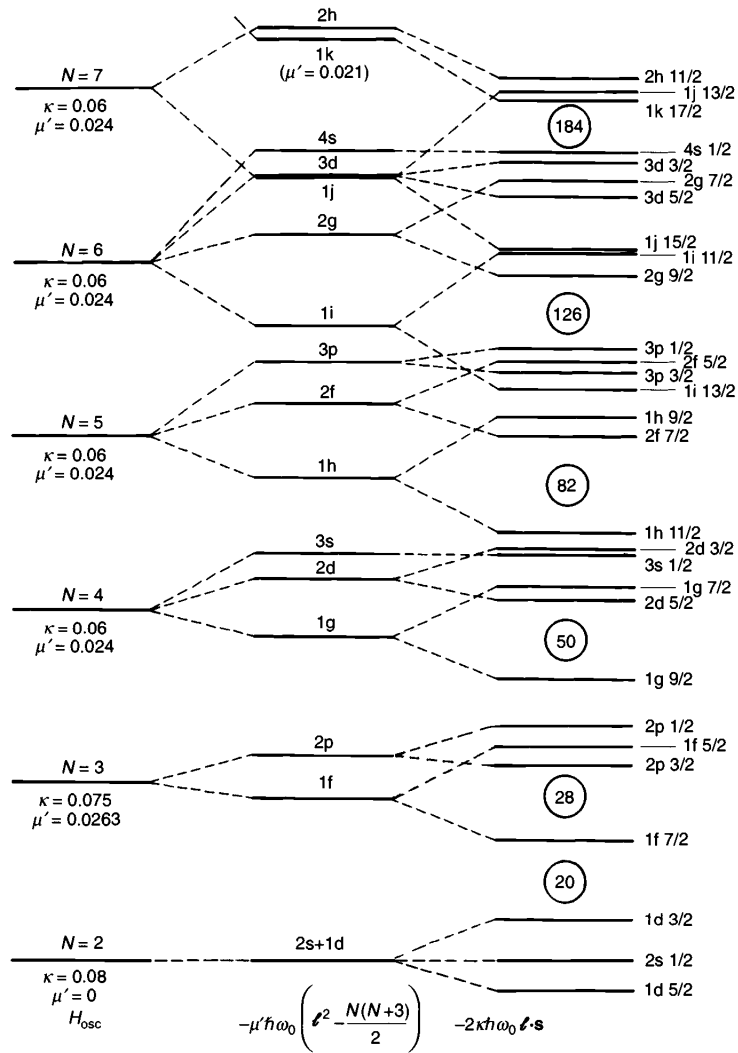
نیلسون با در نظر گرفتن یک نوسانگر هارمونیک اصلاح شده نشان داد که ترازهای هسته ای می‌توانند تحت تاثیر تغییر شکل هسته قرار گیرند. در ادامه به محاسباتی که توسط آقای نیلسون ارائه شد می‌پردازیم.

هامیلتونی مورد نیاز در این قسمت به صورت زیر در نظر بگیرید [۶-۱]

$$H_{\text{sph}} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 - C \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} - D (\mathbf{L}^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle_N). \quad (1.2)$$

در این هامیلتونی مقدار $\langle \mathbf{L}^2 \rangle_N = N(N+3)/2$ در هر پوسته ثابت فرض می‌شود. علت حضور این جمله در هامیلتونی به خاطر مطمئن شدن برای قید پایستگی حجم هسته می‌باشد. زیرا این جمله می‌تواند اثر افزایش طول شعاع ناشی از \mathbf{L}^2 را در هر پوسته خنثی می‌کند. این اثر این جملات در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. همچنین پارامترهای $D = \kappa \mu \hbar \omega_0$ و $C = 2\kappa \hbar \omega_0$ می‌باشند که مقادیر آنها در جدول ۲.۲ در نواحی مختلف آورده شده است.

برای ایجاد تغییر شکل، مشابه مسئله‌ای که بررسی شد، بایستی اجازه دهیم که پتانسیل در یک راستا (مثلا راستای



شکل ۳.۲: در این شکل اثر جملات مختلف در هامیلتونی ۱.۲ به تصویر کشیده شده‌اند.

(z) نسبت به دیگر راستاها متفاوت عمل کند. در این صورت هامیلتونی تک ذره مفروض را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$H = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{M}{2} (\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2) - CL \cdot s - D (L^2 - \langle L^2 \rangle_N). \quad (2.2)$$

ناهمسانگردی در این جا با تفاوت فرکانس نوسان در راستاها متناظر است. فرکانس نوسان‌ها را به صورت تابعی از تغییر شکل در نظر گرفته می‌شود

$$\omega_z = \omega_0(\varepsilon) \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon \right) \quad (3.2)$$

$$\omega_{\perp} = \omega_0(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon \right) \quad (4.2)$$

که در آن $\omega_0(\varepsilon)$ وابستگی ناچیزی به پارامتر تغییر شکل ε دارد. از طرفی می‌توان پارامتر تغییر شکل را بر حسب فرکانس نوسان‌ها در هر راستا بدست آورد

$$\varepsilon = \frac{\omega_{\perp} - \omega_z}{\omega_0}, \quad (5.2)$$

که حالت کشیده متناظر است با $\varepsilon > 0$ و حالت پخت نیز برابر است با $\varepsilon < 0$. توجه شود که این پارامتر تغییر شکل با δ نیز نمایش داده می‌شود.

۱.۲.۲ رفتار اختلالی برای تغییر شکل‌های کوچک

در ابتدا اختلال‌های ناچیز را برای هسته در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن مقادیر کوچک برای ε توان جملات شامل پارامتر تغییر شکل را بسط داد. لذا در این حالت هامیلتونی را می‌توان متشکل از یک قسمت پوسته کروی و قسمت اختلالی بدست آورد

$$H = H_0 + \varepsilon h' + O(\varepsilon^2) + \dots, \quad (6.2)$$

$$\varepsilon h' = \varepsilon \frac{M}{2} \omega_0^2 \frac{2}{3} (x^2 + y^2 - 2z^2) = -\frac{M}{2} \omega_0^2 \frac{4}{3} \varepsilon r^2 P_2(\cos \theta). \quad (7.2)$$

ویژه توابع قسمت کروی به صورت

$$\phi(Nlsj\Omega) = R_{Nl}(r) \sum_{\Lambda\Sigma} Y_{l\Lambda} \chi_{s,\Sigma} \quad (8.2)$$

که ثابت‌های حرکت عبارتند از تکانه زاویه‌ای کل J^2 ، مولفه z تکانه زاویه‌ای کل Ω ، تکانه اوربیتالی L^2 و اسپینی s^2 . تصاویر تکانه‌های اوربیتالی و اسپینی به ترتیب با Λ و Σ نشان داده شده‌اند.

در هر حالت j کروی، تبهگنی از مرتبه $2j + 1$ وجود دارد. این تبهگنی توسط اولین مرتبه اختلالی h' از بین می‌رود

$$\langle Nlsj\Omega | \varepsilon h' | Nlsj\Omega \rangle = \frac{1}{6} \varepsilon M \omega_0^2 \langle r^2 \rangle \frac{2\Omega^2 - j(j+1)}{j(j+1)}. \quad (9.2)$$

۲.۲.۲ تغییر شکل‌های زیاد: تابع موج‌های مجانبی و حدی

در قسمت قبل، تغییر شکل را به اندازه ای کوچک فرض کردیم که اثر ناشی از آن را به صورت یک اختلالی در نظر بگیریم. مقادیر متناظر با چنین تغییر شکلی برابر با $\varepsilon \simeq 0.1$ می‌باشد. تغییر شکل‌های متوسط به ازای $0.2 - 0.3 \simeq \varepsilon$ رخ می‌دهند و دیگر مقادیر تغییر شکل به عنوان تغییر شکل‌های زیاد در نظر گرفته می‌شود. در این قسمت فرض می‌شود که هسته دچار تغییر شکل زیاد شده است. در این وضعیت هامیلتونی سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$H = H_{\text{osc}} + H' \quad (10.2)$$

$$H_{\text{osc}} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{M}{2} (\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2). \quad (11.2)$$

مناسب‌تر است که برای بررسی این سیستم، مختصات کشیده‌ای به صورت زیر تعریف کنیم

$$\xi = x \sqrt{\frac{M\omega_{\perp}}{\hbar}}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{M\omega_{\perp}}{\hbar}}, \quad \zeta = z \sqrt{\frac{M\omega_z}{\hbar}}. \quad (12.2)$$

بنابراین هامیلتونی (۱۱.۲) را می‌توان بر حسب مختصات کشیده به صورت ساده‌تری بازنویسی کرد

$$H_{\text{osc}} = \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(-\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + (\xi^2 + \eta^2) \right) + \frac{\hbar\omega_z}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right). \quad (13.2)$$

در مورد هسته کروی، قسمت دوم هامیلتونی (۱۰.۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$H'_{\text{sph}} = -2\kappa\hbar\omega_0 \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} - \mu'\hbar\omega_0 (\mathbf{L}^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle_N), \quad (14.2)$$

$$\mu' = \kappa\mu, \quad (15.2)$$

اما در حالت استفاده از مختصات کشیده شده بایستی از اوربیتال کشیده‌شده استفاده شود به عنوان مثال

$$(L_t)_x = -i\hbar \left(\eta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad (16.2)$$

که منجر به این نکته می‌شود که قسمت دوم هامیلتونی (۱۰.۲) به صورت زیر تعمیم داده شود

$$-2\kappa\hbar\omega_0 \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} - \mu'\hbar\omega_0 (\mathbf{L}^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle_N). \quad (17.2)$$

تفاوت میان این دو حالت برای قسمت دوم هامیلتونی (۱۰.۲) در داشتن و یا نداشتن عناصر غیر قطری در هامیلتونی می‌باشد.

قسمت اول هامیلتونی (۱۰.۲) را در نظر بگیرید. این قسمت دارای تقارن استوانه‌ای است. لذا این هامیلتونی را

با در نظر گرفتن تبدیلات مربوطه به مختصات استوانه‌ای (ρ, φ, ζ) بازنویسی کنیم که در آن

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \varphi, \\ \eta = \rho \sin \varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\xi} \right). \end{cases} \quad (18.2)$$

بنابراین معادله شرودینگر متناظر با چنین سیستمی به صورت

$$\left(\frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \right) + \frac{\hbar\omega_z}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) - E \right) \psi = 0, \quad (19.2)$$

می‌باشد. با فرض تابع موج سیستم به صورت

$$\psi(\rho, \zeta, \varphi) = U(\rho)Z(\zeta)\phi(\varphi), \quad (20.2)$$

برای قسمت φ داریم

$$-\frac{d^2\phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \Lambda^2\phi(\varphi), \quad (21.2)$$

که دارای جواب

$$\phi(\varphi) = e^{i\Lambda\varphi}, \quad (22.2)$$

می‌باشد. این جواب متناظر است با این حقیقت که $[L_z, H] = 0$ و $L_z = \Lambda$ یک ثابت حرکت است. معادله دیفرانسیل قسمت ζ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\hbar\omega_z \left(-\frac{d}{d\zeta^2} + \zeta^2 \right) Z(\zeta) = E_z Z(\zeta), \quad (23.2)$$

که دارای جواب های نوسانگر هماهنگ یک بعدی می‌باشد با انرژی $E_z = \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right)$. در نهایت با فرض $E = E_{\perp} + E_z$ معادله دیفرانسیل قسمت شعاعی را به صورت

$$\frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} + \frac{\Lambda^2}{\rho^2} + \rho^2 \right) U(\rho) = E_{\perp} U(\rho), \quad (24.2)$$

و یا

$$\frac{d^2 U(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{2E_{\perp}}{\hbar\omega_{\perp}} - \frac{\Lambda^2}{\rho^2} - \rho^2 \right) U(\rho) = 0, \quad (25.2)$$

می‌باشد. این معادله دیفرانسیل با در نظر گرفتن جواب آن به صورت

$$U(\rho) = \rho^{|\Lambda|} e^{-\rho^2/2} W(\rho) \quad (26.2)$$

تبدیل به معادله دیفرانسیل زیر می‌شود

$$\frac{d^2 W(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2|\Lambda| + 1}{\rho} - 2\rho \right) \frac{dW(\rho)}{d\rho} - 2 \left(|\Lambda| + 1 - \frac{E_{\perp}}{\hbar\omega_{\perp}} \right) W(\rho) = 0. \quad (27.2)$$

اگر در این معادله دیفرانسیل از تغییر متغیر

$$z = \rho^2 \quad (28.2)$$

استفاده کنیم، می‌توان به معادله دیفرانسیل فوق هندسی هموار^۱ رسید

$$z \frac{d^2 W(z)}{dz^2} + (|\Lambda| + 1 - z) \frac{dW(z)}{dz} - \frac{1}{2} \left(|\Lambda| + 1 - \frac{E_{\perp}}{\hbar\omega_{\perp}} \right) W(z) = 0. \quad (29.2)$$

¹Confluent hypergeometric differential equation

جواب این معادله دیفرانسیل را می‌توان بر حسب توابع فوق هندسی هموار بدست آورد

$$W(z) = F\left(\frac{1}{2}\left(|\Lambda| + 1 - \frac{E_{\perp}}{\hbar\omega_{\perp}}\right), |\Lambda| + 1; z\right), \quad (30.2)$$

که دارای رابطه ویژه مقداری

$$\frac{1}{2}\left(|\Lambda| + 1 - \frac{E_{\perp}}{\hbar\omega_{\perp}}\right) = -n_{\rho}, \quad n_{\rho} = 0, 1, 2, \dots \quad (31.2)$$

عدد کوانتومی n_{ρ} تعداد گره های شعاعی می‌باشد. با تعریف

$$n_{\perp} = n_x + n_y = 2n_{\rho} + |\Lambda|, \quad (32.2)$$

می‌توان دریافت که

$$|\Lambda| = n_{\perp}, n_{\perp} - 2, n_{\perp} - 4, \dots, 0, 1. \quad (33.2)$$

بنابراین تابع موج نهایی و انرژی سیستم نوسانگر تغییر شکل یافته به صورت زیر می‌باشد

$$\psi_{n_z, n_{\perp}, \Lambda}(\rho, \varphi, \zeta) = N_c e^{-\zeta^2/2} H_{n_z}(\zeta) \rho^{|\Lambda|} e^{-\rho^2/2} F\left(-\frac{n_{\perp} - \Lambda}{2}, |\Lambda| + 1; \rho^2\right) e^{i\Lambda\varphi}, \quad (34.2)$$

$$E_{n_z, n_{\perp}} = \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} + \hbar\omega_{\perp} (n_{\perp} + 1)\right), \quad (35.2)$$

$$= \hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{3}(n_{\perp} - 2n_z)\right), \quad (36.2)$$

$$N = n_{\perp} + n_z. \quad (37.2)$$

که منظور از N_c ثابت بهنجارش می‌باشد. بدیهی است که هر پوسته $N = n_{\perp} + n_z$ به $N + 1$ تراز متناظر با $n_{\perp} = 0, 1, \dots, N$ تراز شکافته می‌شود. هر تراز از تبهگنی مرتبه $2(n_{\perp} + 1)$ برخوردار است زیرا اسپین دارای دو مقدار $\Sigma = \pm \frac{1}{2}$ می‌باشد و همچنین $n_{\perp} + 1$ مقدار مختلف Λ برای هر n_{\perp} (به عنوان مثال $\Lambda = 2, 0, -2$ برای $n_{\perp} = 2$).

اما برای قیمت دوم هامیلتونی از اولین مرتبه اختلال برای محاسبه مقادیر $\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$ و \mathbf{L}^2 استفاده می‌کنیم. برای رفتار اختلالی فقط به عناصر قطری نیاز داریم

$$\langle Nn_z\Lambda\Sigma | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | Nn_z\Lambda\Sigma \rangle = \Lambda\Sigma, \quad (38.2)$$

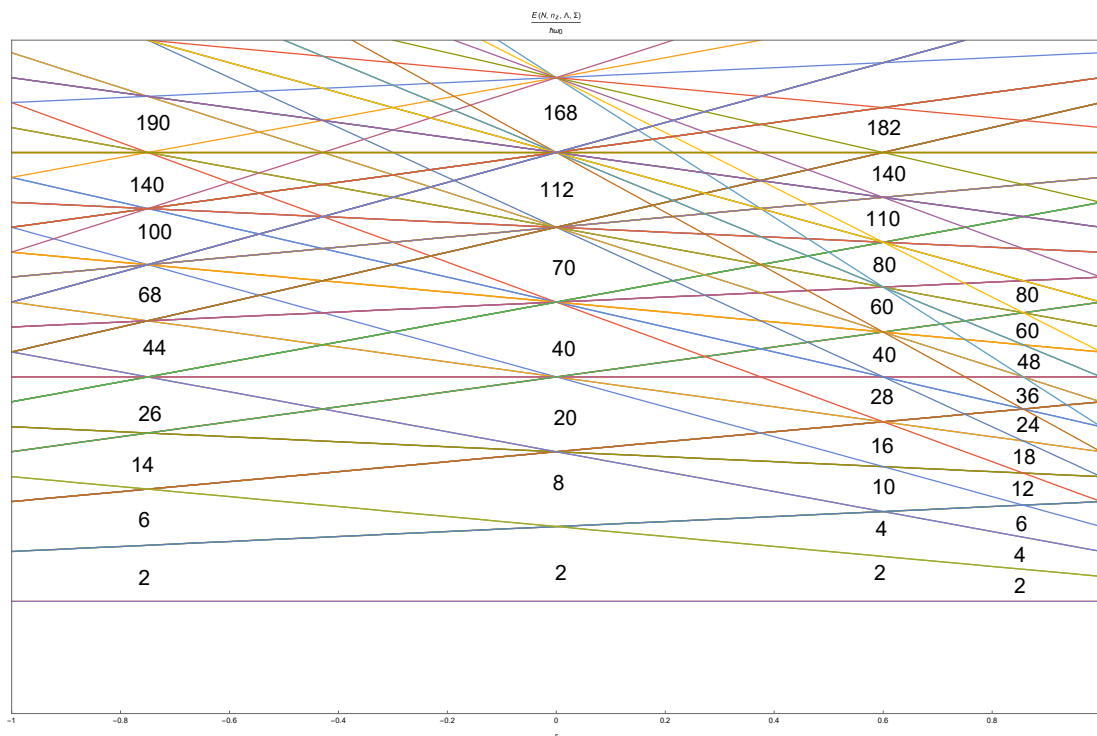
$$\langle Nn_z\Lambda\Sigma | \mathbf{L}^2 | Nn_z\Lambda\Sigma \rangle = \Lambda^2 + 2n_{\perp}n_z + 2n_z + n_{\perp}. \quad (39.2)$$

پس بنابراین عناصر قطری هامیلتونی کل به صورت زیر می‌باشد

$$\langle Nn_z\Lambda\Sigma | H_{\text{osc}} - 2\kappa\hbar\omega_0 \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} - \mu'\hbar\omega_0 (\mathbf{L}^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle_N) | Nn_z\Lambda\Sigma \rangle \quad (40.2)$$

$$\hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{2}\right) + \frac{\varepsilon\hbar\omega_0}{3} (N - 3n_z) - 2\kappa\hbar\omega_0 \Lambda\Sigma \quad (41.2)$$

$$- \mu'\hbar\omega_0 \left(\Lambda^2 + 2n_{\perp}n_z + 2n_z + n_{\perp} - \frac{N(N+3)}{2}\right). \quad (42.2)$$



شکل ۴.۲: اثر تغییر شکل بر روی ترازهای سیستم. دیده می‌شود که اعداد جادویی به ازای مقادیر خاصی از تغییر شکل بازیابی و دچار تغییر و تحول می‌شوند.

شکل ۴.۲ چگونگی اثر گذاری تغییر شکل بر روی ترازهای انرژی را نشان می‌دهد. در این شکل از اثر عناصر غیر قطری در قبال عناصر قطری صرف نظر شده است به همین دلیل این رفتار را رفتار حادی و یا مجانبی نامیده شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، تغییر شکل باعث می‌شود که در ازای تغییر شکل‌های خاصی اعداد جادویی از دست می‌دهیم و در برخی مقادیر دوباره این مقادیر بازیابی می‌شوند البته تضمینی در ثبات آن‌ها وجود ندارد یعنی ممکن است عدد جادویی مقدار دیگری به خود بگیرد.

۳.۲.۲ ناحیه میانی

در ناحیه میانی، تغییر شکل نه خیلی زیاد است و نه خیلی کم. لذا نه می‌توان از بسط تقریبی استفاده کرد و نه از حالت مجانبی. برای بررسی این حالت نیاز به در نظر گرفتن یک حالت عمومی داریم که در آن از مجموعه پایه‌های کامل ϕ_ν استفاده می‌شود. هر تابع موجی که از حل معادله شرودینگر

$$H\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha \quad (۴۳.۲)$$

بدست می‌آید، می‌تواند بر حسب توابع پایه ϕ_ν بسط داده شود

$$\psi_\alpha = \sum_\nu S_{\alpha\nu}\phi_\nu. \quad (۴۴.۲)$$

با قراردادن این بسط در معادله شرودینگر داریم

$$\sum_{\nu} S_{\alpha\nu} H \phi_{\nu} = E_{\alpha} \sum_{\nu} S_{\alpha\nu} \phi_{\nu} \quad (45.2)$$

با ضرب دو طرف معادله فوق در ϕ_{μ}^* و انتگرال‌گیری از آن داریم

$$\sum_{\nu} S_{\alpha\nu} \int \phi_{\mu}^* H \phi_{\nu} d\tau = E_{\alpha} \sum_{\nu} S_{\alpha\nu} \delta_{\mu\nu}. \quad (46.2)$$

با تعریف

$$\int \phi_{\mu}^* H \phi_{\nu} d\tau = \langle \mu | H | \nu \rangle = H_{\mu\nu}, \quad (47.2)$$

ما یک مجموعه معادله برای هر μ خواهیم داشت

$$\sum_{\nu} (H_{\mu\nu} - E_{\alpha} \delta_{\mu\nu}) = 0. \quad (48.2)$$

شرطی که به ازای آن این دستگاه دارای جواب خواهد بود این است که دترمینان آن صفر شود

$$\det (H_{\mu\nu} - E_{\alpha} \delta_{\mu\nu}) = 0. \quad (49.2)$$

پس بنابراین مسئله متشکل از دو قسمت است. در ابتدا بایستی عناصر ماتریسی $H_{\mu\nu} = \int \phi_{\mu}^* H \phi_{\nu} d\tau$ محاسبه شوند و سپس ماتریس بدست آمده قطری شود. اگر مجموعه معادلات به صورت

$$E_{\alpha} S_{\alpha\mu} = \sum_{\nu} S_{\alpha\nu} H_{\mu\nu} \quad (50.2)$$

یا در فرم ماتریسی

$$\mathbf{E} \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{H} \quad (51.2)$$

نوشته شوند، \mathbf{E} یک ماتریس قطری

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (52.2)$$

می‌باشد که ویژه مقادیر آن از

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} \mathbf{H} \mathbf{S}^{-1} \quad (53.2)$$

بدست می‌آیند و ویژه بردارهای آن سطرهای ماتریس تبدیل \mathbf{S} ، می‌باشد.

۴.۲.۲ شرط پایستگی حجم

برای مشخص کردن حالت تعادل تغییر شکل، پایستگی حجم یک شرط کلیدی و مهم است. این شرط بر اساس یک واقعیت تجربی که ماده هسته ای تراکم ناپذیر است و حجم هسته متناسب است با عدد جرمی A برای یک نوسانگر هماهنگ ساده شرط پایستگی حجم ایجاب می‌کند که

$$V_{osc} = \frac{M}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{1/\omega_{\perp}^2} + \frac{z^2}{1/\omega_z^2} \right) = \text{ثابت}, \quad (54.2)$$

معادله فوق یک بیضوی است. لذا حجم بیضوی باید ثابت بماند. نیم قطرهای این بیضوی متناسب است با ω_{\perp}^{-1} و ω_z^{-1} و حجم محصور نیز با $\omega_{\perp}^{-2}\omega_z^{-1}$. بنابراین

$$\omega_{\perp}^2\omega_z = \text{ثابت} = (\omega_0(\varepsilon = 0))^3 = (\omega_0^*)^3. \quad (55.2)$$

این قید با استفاده از تعاریف ω_z و ω_{\perp} بدست می‌آوریم

$$\omega_0(\varepsilon) = \omega_0^* \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{2\varepsilon^3}{27} \right)^{-1/3} = \omega_0^* \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{9} + \dots \right). \quad (56.2)$$

در شکل ۵.۲ نمونه ای از محاسبات انرژی ترازها با در نظر گرفتن قید پایستگی حجم آورده شده است.

۳.۲ تقارن proxy-SU(3)

این مدل [۱۵] الهام‌گرفته از مدل شبه SU(3)^۲ [۱۸-۲۲] می‌باشد. این مدل بر اساس که جایگذاری متفاوت چند جفت ترازهای نیلسون $K[Nn_z\Lambda]$ که با ترازهایی که تفاوت اعداد کوانتومی آن‌ها [۱۱۰]^۰ باشد، همپوشانی فضایی زیادی داشته باشند و تصویر تکانه زاویه‌ای یکسانی داشته باشند، بنا نهاده می‌شود. این مدل منجر به تقارن پوسته‌ای نوسانگر می‌شود. این مدل به خوبی می‌تواند ترازهای نیلسون را بازسازی کند.

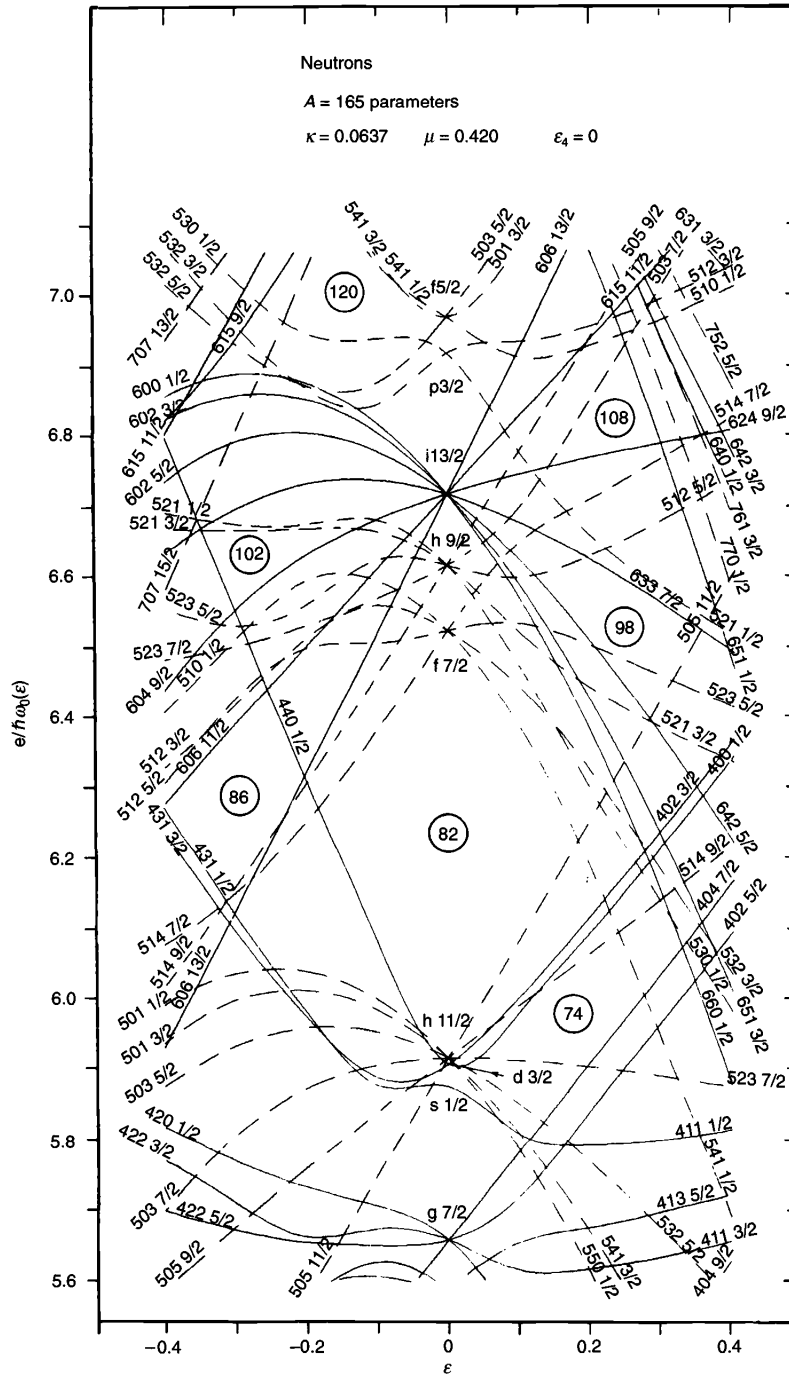
مدل نیلسون علی‌رغم سادگی، موفقیت‌های خوبی در توصیف خواص هسته‌های سنگین داشته است. برای تغییر شکل‌های زیاد تابع موج آن به یک رفتار مجانبی می‌رسد که در آن اعداد کوانتومی، اعداد کوانتومی خوب باقی می‌مانند و تغییر نمی‌کنند. آن‌ها حتی در تغییر شکل‌های زیاد نیز اعداد کوانتومی خوب باقی می‌مانند. در مدل proxy-SU(3) از همپوشانی زیاد ترازهایی که در آن‌ها

$$\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110] \quad (1.2)$$

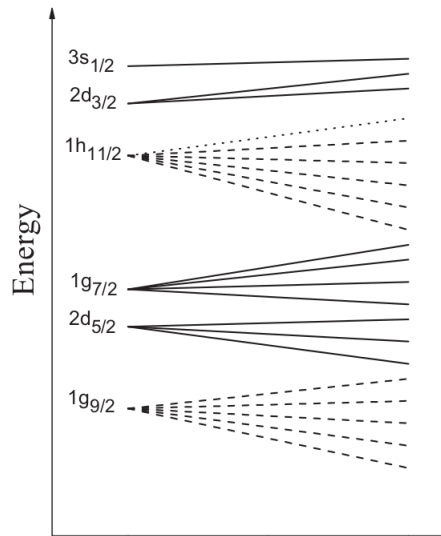
باشد استفاده می‌شود. این مدل را با مثالی شرح می‌دهیم. ما پوسته اصلی ۸۲-۵۰ را در نظر می‌گیریم و گام به گام این مدل را بحث می‌کنیم.

۱. پوسته اصلی ۸۲-۵۰ از اوربیتال‌های $1g_{7/2}$ و $3s_{1/2}$, $2d_{3/2}$, $2d_{5/2}$ تشکیل شده است. این اوربیتال‌ها در شکل ۶.۲ به صورت خط‌های پر نشان داده شده‌اند. این اوربیتال‌ها تکه‌هایی از پوسته کامل sdg می‌باشند که

^۲Pseudo-SU(3)



شکل ۵.۲: نمونه ای از محاسبات ترازهای انرژی هسته تغییر شکل یافته با در نظر گرفتن قید پایستگی حجم.



شکل ۶.۲: در این شکل توصیفی کلی از مدل proxy-SU(3) به تصویر کشیده شده است. برای اطلاعات بیشتر، متن مربوطه مطالعه شود.

برهمکنش اسپین-مدار اوربیتال $1g_{9/2}$ را در پوسته $50-28$ قرار داده است. علاوه بر این، این پوسته شامل اوربیتال $1h_{11/2}$ می‌باشند که از پوسته pfh توسط نیروی اسپین-مدار پایین آورده شده‌اند. این اوربیتال در شکل ۶.۲ به صورت نقطه-خط نشان داده شده‌اند.

۲. اوربیتال $1g_{9/2}$ شامل اوربیتال‌های نیلسون $[404]_{9/2}$, $[413]_{7/2}$, $[422]_{5/2}$, $[431]_{3/2}$, $[440]_{1/2}$ می‌باشد. توجه کنید این اوربیتال‌هایی هستند که در آن‌ها شرط $[110]$ از اوربیتال‌های نیلسون $1h_{11/2}$ که عبارتند از $[512]_{9/2}$, $[523]_{7/2}$, $[532]_{5/2}$, $[541]_{3/2}$, $[550]_{1/2}$ رعایت می‌شود که ترتیب آن‌ها دقیقاً رعایت شده است. این اوربیتال‌ها دقیقاً مقدار یکسانی را برای تصویر تکانه زاویه‌ای مداری، اسپینی و تکانه زاویه‌ای کل به اشتراک می‌گذارند. بنابراین اوربیتال‌ها در چنین جفت‌هایی انتظار می‌رود رفتار یکسانی را بخاطر ویژگی‌های مرتبط با تصویر تکانه زاویه‌ای از خود نشان دهند. این نکته با محاسبه همپوشانی اوربیتال‌ها در مرجع‌های [۲۴، ۲۳] اثبات شده است.

ممکن است که ایده جایگزینی اوربیتال‌های $1h_{11/2}$ (گروه بالایی خط تیره‌ها در شکل ۶.۲) به جز اوربیتال $[505]_{11/2}$ (خط نقطه‌ای در شکل ۶.۲) در پوسته $82-50$ با همتایان $1g_{9/2}$ (گروه پایینی خطوط تیره در شکل ۶.۲) در ذهن شکل بگیرد. این مطلب بایستی به صورت عددی بررسی شود تا دقت این تقریب بدست آید. البته باید توجه کرد که در جایگزینی اعداد کوانتومی N و n_z هر کدام بایستی یک واحد تغییر کنند در حالیکه پارامتر نیز تغییر علامت می‌دهد. این تغییرات قطعاً بر روی قواعد گزینش مربوط به عناصر ماتریسی مربوطه اثر گذار خواهد بود.

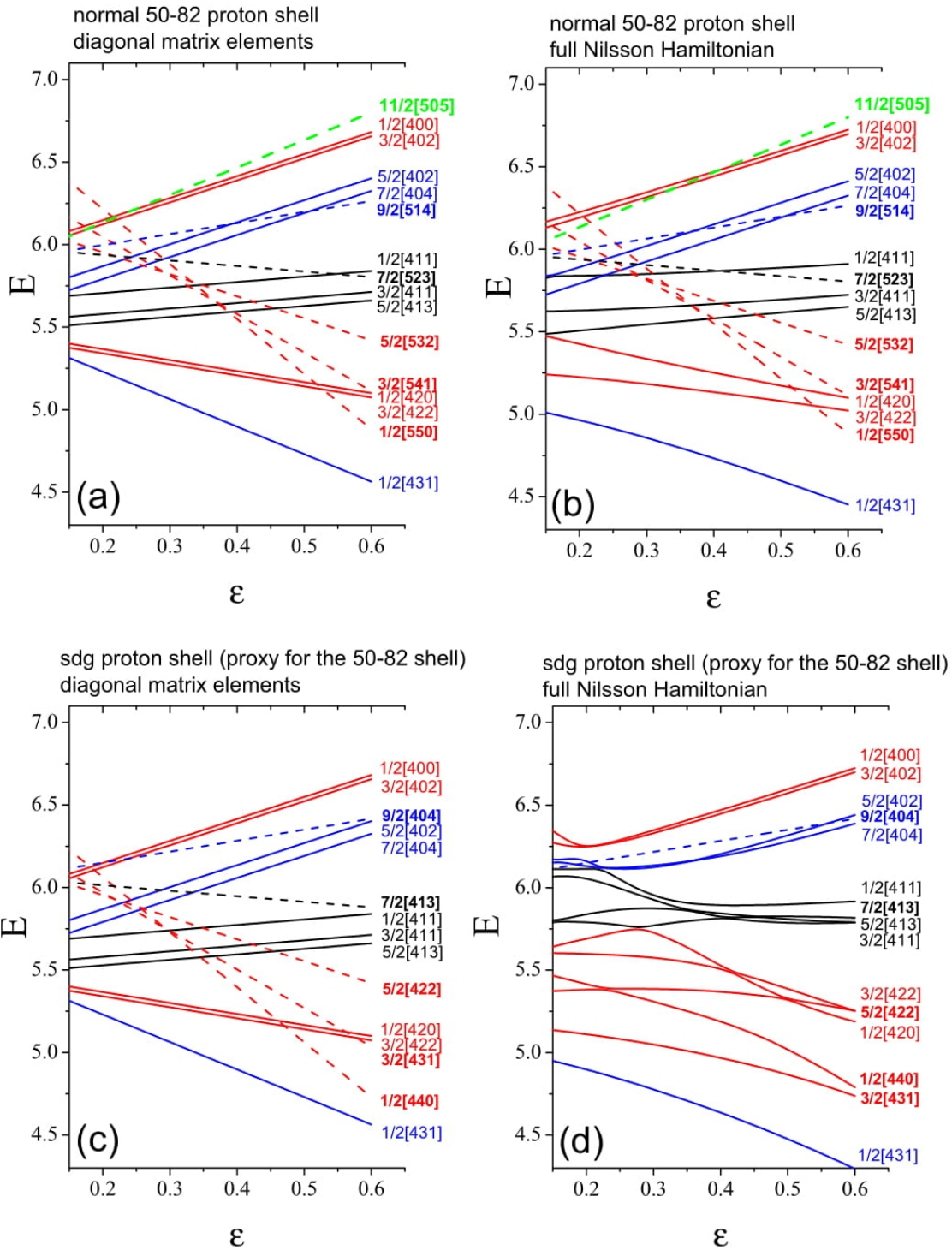
۳. توجه شود که مدار $[505]_{11/2}$ از $1h_{11/2}$ مستثنی شده است زیرا همتایی در $1g_{9/2}$ ندارد. این اوربیتال تنها در این تقریب از قلم افتاده است. پی بردن به این نکته مهم است که این مدار نقش کوچکی در تحول ساختاری هسته‌های سنگین بازی می‌کند به خاطر این که این مدار در لایه بسیار فوقانی پوسته $82-50$ در ترازهای نیلسون قرار می‌گیرد و لذا تاثیرش انتظار می‌رود که کمینه باشد. علاوه بر این، این مدار فقط در هسته‌های نزدیک

پوسته بسته ۸۲ که به خوبی تغییر شکل یافته نیستند نقش ایفا می‌کند. ملاحظات مشابهی در مورد اوربیتال معادل در پوسته دیگر مانند مدار [۶۰۶] ۱۳/۲ در پوسته ۱۲۶-۸۲ برقرار است.

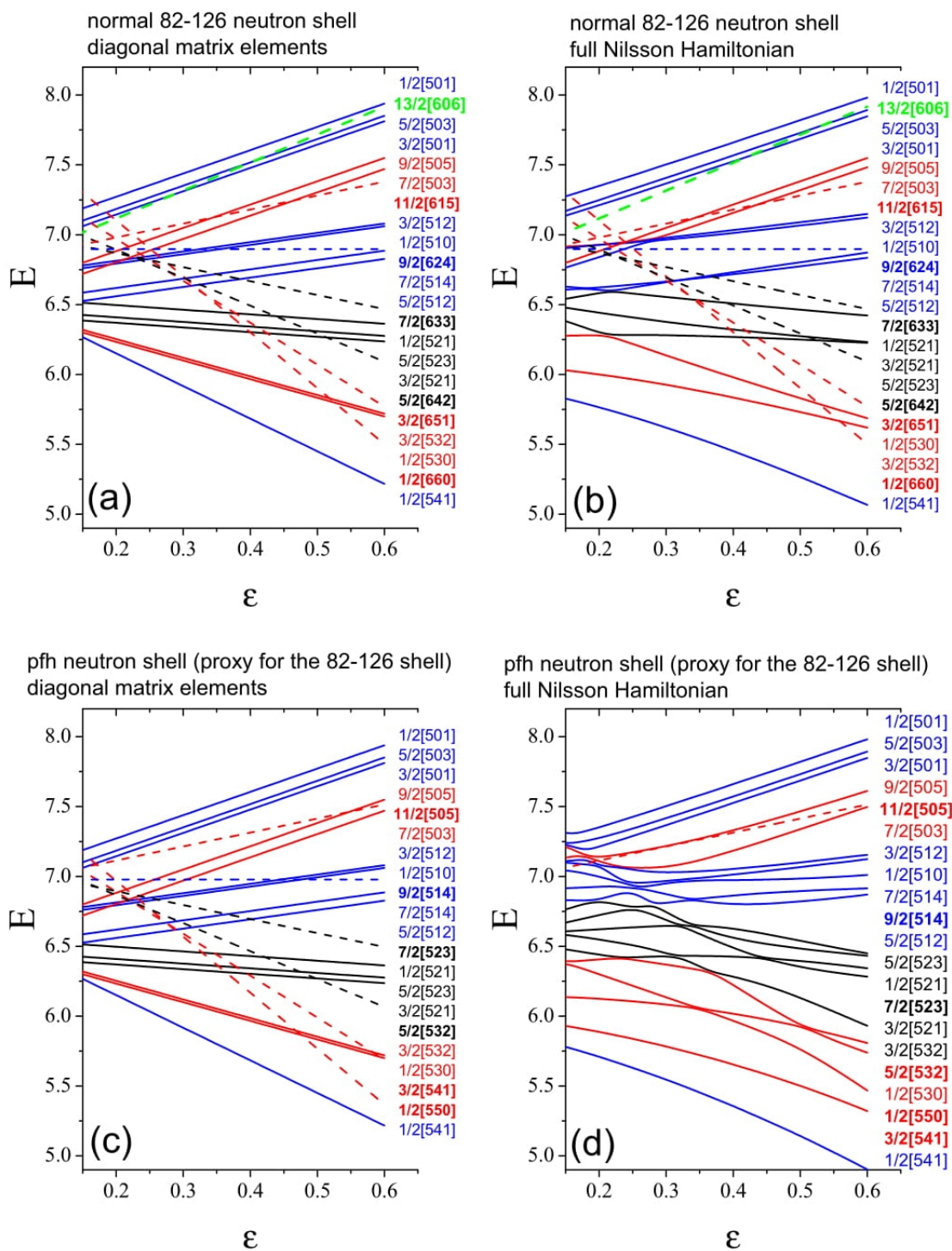
۴. بعد از این دو تقریبی که در نظر گرفته شده است، ما با یک مجموعه‌ای از اوربیتال‌ها سر و کار داریم که در پوسته sdg دقیقاً مانند هم هستند.

۵. رویه مشابهی می‌تواند برای پوسته‌های ۱۸۴-۱۲۶، ۱۲۶-۸۲، ۵۰-۲۸ اتخاذ گردد.

در ادامه تاثیر چنین مدلی را بر روی عناصر ماتریسی $L \cdot s, L^2$ و هامیلتونی در پوسته ۸۲-۵۰ محاسبه و تفاوت آن‌ها مقایسه شده است. در جداول ۳.۲، ۴.۲ و ۳.۲ عناصر ماتریسی ترازهای نیلسون برای مدل نیلسون و مدل proxy-SU(3) محاسبه و مقایسه شده‌اند. قسمت بالای جداول مربوط به نتایج مدل نیلسون و قسمت پایین مربوط به مدل proxy-SU(3) می‌باشد. تفاوت‌ها در این جداول به صورت درشت نمایان شده‌اند. همچنین تحول ترازهای پروتونی و نوترونی در پوسته‌های ۸۲-۵۰ و ۱۲۶-۸۲ در شکل‌های ۷.۲ و ۸.۲ آورده شده است.



شکل ۷.۲: تحول ترازهای انرژی پروتونی در پوسته ۸۲-۵۰.



شکل ۸.۲: تحول ترازهای انرژی نوترونی در پوسته ۱۲۶-۸۲.

فصل ۳

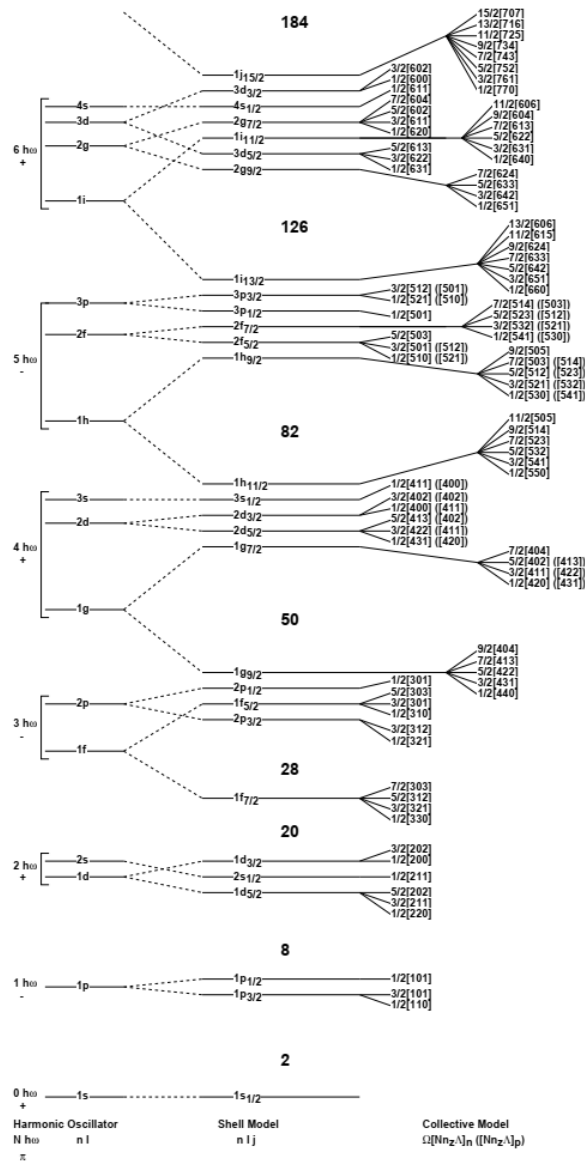
محاسباتی جدید برای ترازهای نیلسون

اگرچه ترازهای نیلسون یک مسئله شناخته شده است، اما در خلال محاسبات به یک مورد غیر قابل انتظار برخورد کردیم که در ادامه آن را شرح می دهیم. در واقع بنا بر هدفی که داشتیم بایستی در ابتدا ترازهای نیلسون را در مختصات استوانه ای رسم کنیم. در قسمت قبل توضیح داده شده عوامل موثر در هامیلتونی نیلسون منجر به چه روابطی می شود. بنابراین انتظار داریم که با در نظر گرفتن اطلاعات مناسب هر تراز بتوانیم ترازهای نیلسون را رسم کنیم. اطلاعات مربوط به اعداد کوانتومی ترازهای نیلسون را می توان در شکل ۱.۳ برای پروتون ها و نوترون ها دریافت. این شکل از کتاب جدول ایزوتوپ ها [۲۵] گرفته شده است. اعدادی که در پرانتز مشاهده می شود بر اساس نمادگذاری $\Omega [Nn_z\Lambda]$ می باشد که منظور از Ω تصویر تکانه زاویه ای کل، N شماره پوسته اصلی، n_z تعداد واحدهای نوسانی در راستای z و Λ نیز مولفه سوم تکانه زاویه ای مداری می باشد.

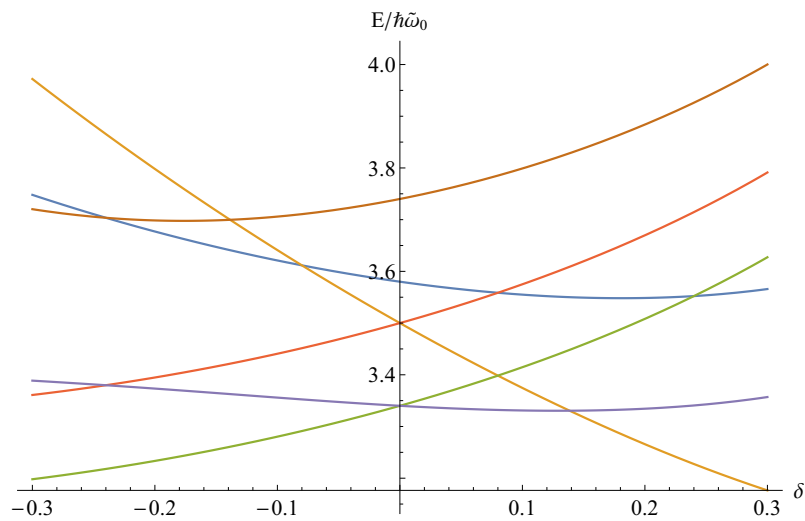
حال می خواهیم ترازهای نیلسون منتسب به $N = 2$ را رسم کنیم. با توجه به اعداد کوانتومی ترازهای مختلف و همچنین روابطی که برای جملات مختلف در هامیلتونی نیلسون در مختصات استوانه ای بدست آورده شد، می توان هامیلتونی این پوسته اصلی را تشکیل داد. پس از انجام محاسبات هامیلتونی زیر بدست می آید

$$H_{\text{tot}}^{\text{other}} = \begin{pmatrix} \frac{620074 - 0.57735\delta}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{23094(\delta-2.625)}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{591361 - 0.57735\delta}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} & 0 & 0 & \frac{0.277128}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11527\delta + 57850}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11527(\delta+5.25)}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.277128}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} & 0 & 0 & \frac{11527\delta + 62393}{\sqrt{-(2\delta+3)^2(4\delta-3)}} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

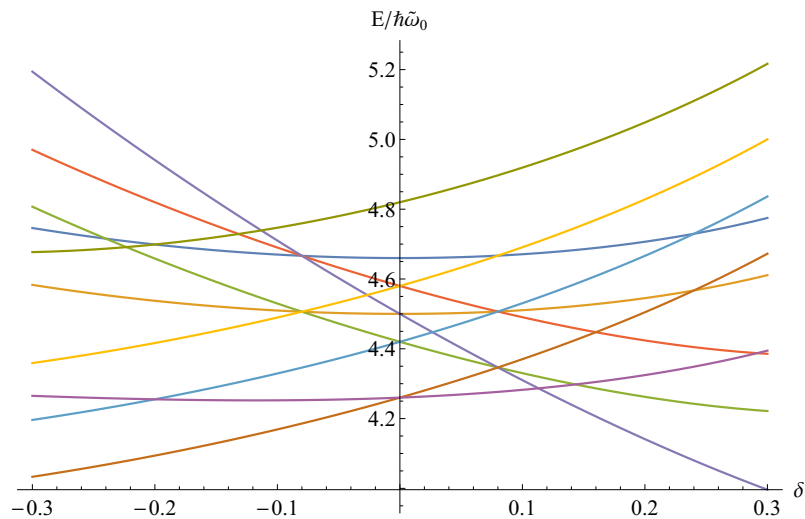
وجود عناصر غیرقطری ایجاب می کند که برای بدست آوردن انرژی های ترازهای مختلف، این هامیلتونی به صورت تابعی از پارامتر تغییر شکل بایستی قطری شود. نتیجه این فرآیند در شکل ۳.۳ دیده می شود. به وضوح دیده می شود



شکل ۱.۳: اعداد کوانتومی مجانبی ترازهای نیلسون برگرفته از کتاب جدول ایزوتوپها [۲۵].



شکل ۲.۳: ترازهای بدست آمده از فرآیند قطری سازی هامیلتونی (۱.۳) به صورت تابعی از تغییر شکل δ .

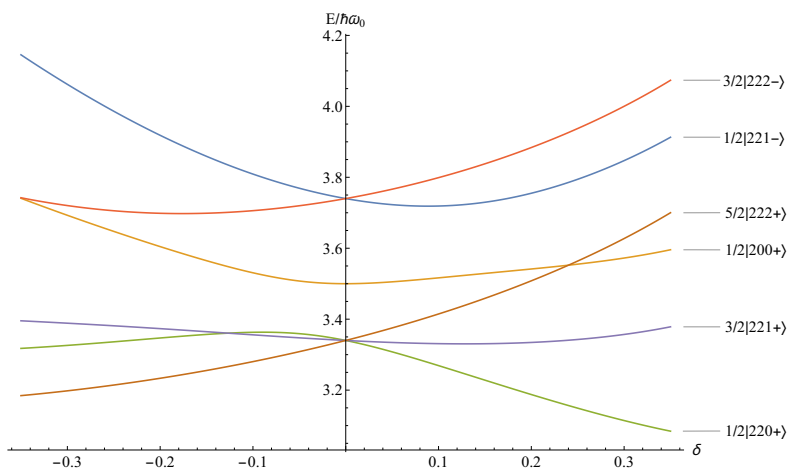


شکل ۳.۳: مشابه شکل ۲.۳ ولی برای $N = 3$.

که این نتایج به هیچ عنوان با ترازهای نیلسون همخوانی ندارد. همین فرآیند را دوباره برای $N = 3$ تکرار کردیم و به هامیلتونی زیر رسیدیم

$$H_{tot}^{other} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{3}\delta(1-\delta)}{\sqrt{-(1+\delta)(1-\delta)}} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

برای این لایه اصلی نیز پس از قطری سازی هامیلتونی به صورت تابعی از پارامتر تغییر شکل نتوانستیم که به ترازهای نیلسون دسترسی پیدا کنیم. حاصل این کار در شکل ۲.۳ دیده می شود
 طبیعی است که در ابتدا اشکال این فرآیند را متوجه محاسبات خود کنیم. لذا تصمیم گرفتیم که این ترازها را در مختصات کروی رسم کنیم. در واقع، آقای نیلسون نیز در ابتدا این مسئله را در مختصات کروی بررسی کرده بود. برای



شکل ۴.۳: ترازهای نیلسون با استفاده از مختصات کروی برای $N = 2$.

این منظور بایستی هامیلتونی به صورت عوامل قطری، H_d ، و غیرقطری، H'_ε ، تفکیک شود. این عوامل دارای عناصر ماتریسی زیر هستند [۲]

$$\begin{aligned} \langle N L \Lambda \Sigma | H_d | N L \Lambda \Sigma \rangle &= \hbar \omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right) \\ &\quad - 2\kappa \hbar \omega_0 \Lambda \Sigma - \mu' \hbar \omega_0 \left(L(L+1) - \frac{N(N+3)}{2} \right). \end{aligned}$$

برای جمله $\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$ ، توجه داریم که $L_z s_z = \frac{1}{2} (L_+ s_- + L_- s_+) + L_z s_z$ و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \langle N L \Lambda + 1 \Sigma - 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | N L \Lambda \Sigma \rangle &= \frac{1}{2} [(L - \Lambda)(L + \Lambda + 1)]^{1/2}, \\ \langle N L \Lambda - 1 \Sigma + 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | N L \Lambda \Sigma \rangle &= \frac{1}{2} [(L + \Lambda)(L - \Lambda + 1)]^{1/2}. \end{aligned}$$

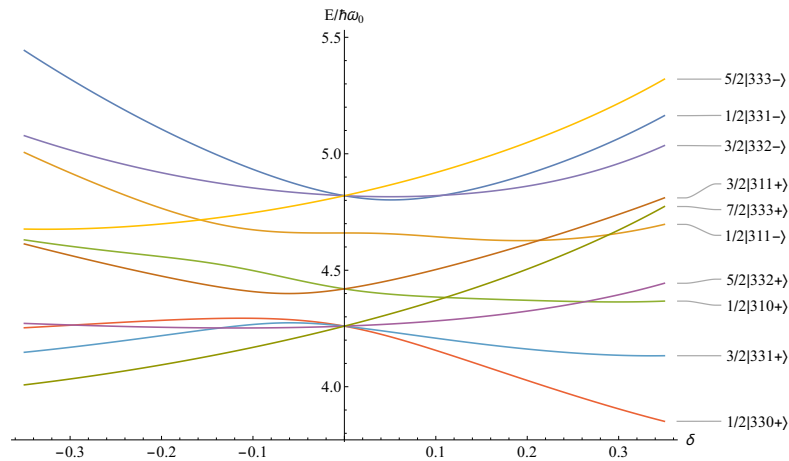
با توجه به اینکه H'_ε می‌تواند به صورت $H'_\varepsilon = -\hbar \omega_0 \varepsilon \frac{2}{3} (\pi/5)^{1/2} \rho^2 Y_2$ نوشته شود داریم

$$\begin{aligned} \langle N L' \Lambda' \Sigma' | H'_\varepsilon | N L \Lambda \Sigma \rangle &= \langle N L' \Lambda' \Sigma' | H'_\varepsilon | N L \Lambda \Sigma \rangle, \\ &= -\frac{2}{3} \varepsilon \hbar \omega_0 \delta_{\Lambda \Lambda'} \delta_{\Sigma \Sigma'} \int R_{NL'} R_{NL} \rho^2 d\rho \cdot \left(\frac{2L+1}{2L'+1} \right)^{1/2} C_{\Lambda \Lambda'}^{L' L} C_{\Sigma \Sigma'}^{L' L}, \end{aligned}$$

که در آن $\rho = \left(\frac{M \omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} r$ ویژه‌توابع نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی می‌باشد.

هامیلتونی مورد نظر را برای این دو پوسته می‌توان محاسبه کرد و نتایج را از فرآیند قطری‌سازی بدست آورد که در شکل‌های ۴.۳ و ۵.۳ توصیف شده است. این شکل‌ها بیان می‌کند که نوع محاسبات و فرآیند اصلی برای محاسبه عناصر ماتریسی هامیلتونی نیلسون درست بوده است. اما همان‌طور که دیده شد در مختصات استوانه‌ای این ترازها با توجه به اعداد کوانتومی‌ای که در شکل ۱.۳ بیان شد بدست نمی‌آید. بدیهی است که علت این تفاوت در نظر گرفته نشدن یک عامل در خلال محاسبات می‌باشد.

همان‌طور که دیده شد، درستی نحوه محاسبات ما با رسم کردن ترازهای نیلسون در مختصات کروی نشان داده شد و پس از آن ما به درستی اعداد کوانتومی بیان‌شده در مختصات استوانه‌ای، صرف نظر از معروف بودن از اعداد، شک کردیم همچنین شواهد دیگری نیز وجود دارد که شک ما را بر نادرستی این اعداد دو چندان می‌کند از جمله این شواهد می‌توان به موارد زیر اشاره کرد



شکل ۵.۳: مشابه شکل ۴.۳ ولی برای $N = 3$.

- تراز $2s_{1/2}$ را در نظر بگیرید. این تراز با اعداد $[221]_{1/2}$ در مختصات استوانه‌ای معرفی می‌شود. یعنی

$$\Omega = 1/2, \quad N = 2, \quad n_z = 2, \quad \Lambda = 1. \quad (3.3)$$

همان‌طور که دیده می‌شود برای این تراز مولفه تکانه زاویه‌ای مداری‌ای که در نظر گرفته شده است $\Lambda = 1$ است در حالیکه تراز s منتسب به $L = 0$ می‌باشد و بیشینه مقدار مولفه آن می‌تواند ۰ باشد نه ۱. علاوه بر این می‌تواند دید که این اتفاق برای لایه‌های اصلی دیگر نیز رخ می‌دهد.

- تراز $1d$ را فرض کنید. این تراز پس از شکافتگی به زیرلایه‌های $1d_{3/2}$ و $1d_{5/2}$ شکافته می‌شود. بر اساس شکل ۱.۳ برای $1d_{3/2}$ داریم

$$1d_{3/2} = \begin{cases} 1/2 [200] \\ 3/2 [202] \end{cases}. \quad (4.3)$$

همان‌طور که دیده می‌شود این زیر لایه به دلیل جهت‌گیری رو به پایین اسپین تشکیل شده است در حالیکه برای بدست آوردن تصویر تکانه زاویه‌ای کل بایستی یک‌بار تصویر رو به بالا و بار دیگر تصویر رو به پایین اسپین را در نظر گرفت تا بتوان تصویر تکانه زاویه‌ای کل را تولید کرد. این در حالیست که برای زیر لایه دیگر از همین زیرلایه داریم

$$1d_{5/2} = \begin{cases} 1/2 [220] \\ 3/2 [211] \\ 5/2 [202] \end{cases}. \quad (5.3)$$

این مطلب یعنی اینکه در این زیرلایه که به دلیل جهت‌گیری رو به بالا اسپین پدید آمده‌است، برای بدست آوردن تصویرهای تکانه زاویه‌ای کل، بایستی در تمام موارد، تصویر رو به بالا را در نظر گرفت.

- مورد دیگر نیز در زیرلایه $2p_{3/2}$ دیده می‌شود که برای محاسبه تصویر تکانه زاویه‌ای جهت‌گیری‌های اسپینی متفاوتی را بایستی در نظر گرفت.

• به‌عنوان آخرین مورد از این شواهد می‌توان به زیرلایه $1h_{q/2}$ اشاره کرد که در هر دو مورد نوترونی و پروتونی، یکی از مولفه‌های مجاز برای Λ از قلم افتاده است ($\Lambda = 4$ برای نوترون‌ها و $\Lambda = 0$ برای پروتون‌ها).

موارد فوق بیان‌گر شواهدی است که وجود برخی تناقض‌ها را بیان می‌کند. در حالیکه برای مختصات کروی چنین مواردی وجود ندارد و ترازهای نیلسون به آسانی بدست می‌آید بدون آنکه با چنین تناقضاتی روبرو شویم. در ادامه قصد داریم که از ابتدا اقدام به حل مسئله هامیلتونی نیلسون کنیم و عوامل موثر را قدم به قدم در نظر بگیریم تا بتوانیم به سازوکاری دست پیدا کنیم که موفق شویم که ترازهای نیلسون را بدون داشتن مواردی تناقضی رسم کنیم.

۱.۳ بررسی مجدد مسئله ترازهای نیلسون

در این قسمت قصد داریم که مسئله ترازهای نیلسون را مجدد بررسی کنیم. البته به دلیل اینکه مفاهیم و محاسبات اصلی آن در کتب مکانیک کوانتومی با جزئیات وجود دارد، از بیان کردن جزئیات محاسبات به منظور خلاصه‌تر کردن آن‌ها، خودداری می‌کنیم.

هنگامیکه یک سیستم فیزیک در نظر گرفته می‌شود، ما بایستی با بکارگیری ابزارهای ریاضی شرح حال آن سیستم را بیان کنیم. همچنین این اتفاق بایستی مستقل از ابزار ریاضی نیز باشد. یعنی این که ما با هر ابزار ریاضی‌ای که بکار می‌گیریم تا آن سیستم را بیان کنیم، بایستی در نهایت به یک نتیجه دسترسی پیدا کنیم. در واقع به‌عنوان نتیجه‌ای از این عبارت باید گفت که برای موردی که قرار است در ادامه بررسی شود، برای بررسی یک نوسانگر سه‌بعدی نتیجه نهایی بررسی نبایستی وابسته به دستگاه مختصاتی باشد که در نظر گرفته شده است.

بنابر مسئله ترازهای نیلسون نیاز داریم که یک نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی را در نظر بگیریم

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(\rho^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2, \quad (1.3)$$

که در آن در پتانسیل به ترتیب در دستگاه مختصات‌های مختلف دکارتی، استوانه‌ای و کروی بازنویسی شده است. انرژی این نوسانگر در دستگاه‌های مختصات مختلف عبارتست از

$$E_{\text{Cart.}} = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right), \quad (2.3)$$

$$E_{\text{Cyl.}} = \hbar\omega \left(2n_\rho + n_z + \Lambda + \frac{3}{2} \right), \quad (3.3)$$

$$E_{\text{Sph.}} = \hbar\omega \left(2n_r + L + \frac{3}{2} \right), \quad (4.3)$$

همچنین تابع موج این سیستم در مختصات دکارتی به کمک توابع هرمیت بیان می‌شود

$$\phi_n(\xi) = N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi), \quad N_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^n}}, \quad \xi = x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \quad (5.3)$$

از آنجاییکه در مختصات دکارتی در هر راستا یک نوع معادله دیفرانسیلی بر متغیرها حاکم است، تابع موج نیز به کمک حاصل ضرب آن‌ها بیان می‌شود

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = \phi_{n_x}(x) \phi_{n_y}(y) \phi_{n_z}(z). \quad (6.3)$$

تابع موج این سیستم در مختصات استوانه‌ای عبارتست از

$$\psi_{n_z, n_\rho, \Lambda} = N_c \exp \left[-\frac{k^2}{2} (z^2 + \rho^2) \right] H_{n_z}(kz) \rho^{|\Lambda|} L_{n_\rho}^{|\Lambda|}(k\rho^2) e^{i\Lambda\phi}. \quad (7.3)$$

در آخر تابع موج این سیستم در مختصات کروی با

$$\psi_{n_r, L, \Lambda} = N_c r^L \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2 \right] {}_1F_1 \left(-n_r, L + \frac{3}{2}, \frac{m\omega}{\hbar} r^2 \right) Y_{L\Lambda}(\theta, \varphi), \quad (8.3)$$

بیان می‌شود.

حال هامیلتونی ترازهای نیلسون به کمک هامیلتونی نوسانگر تصحیح‌شده بیان می‌شود

$$H = H_{\text{osc}} + H', \quad (9.3)$$

که در آن H_{osc} هامیلتونی نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی می‌باشد و H' حاوی جملات تصحیحی می‌باشد

$$H' = -2\kappa\hbar\omega \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} - \mu\kappa\hbar\omega \cdot (\mathbf{L}^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle_N). \quad (10.3)$$

نکته حائز اهمیت در این‌جا این است که این هامیلتونی حالت تعمیم‌یافته‌ای از هامیلتونی نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی می‌باشد. لذا معقول است که انتظار داشته باشیم که استدلال‌ها و نتایج حاصل از این هامیلتونی در حالت‌های حدی (حالت بدون تغییر شکل) به نتایج شناخته شده برسد.

برای تعیین عناصر ماتریسی جمله اسپین-مداری نیاز به یک مجموعه‌ای از محاسبات داریم تا بتوانیم عناصر ماتریسی آن را بر حسب مختصات مجانبی بدست بیاوریم

۲.۳ توابع موج مجانبی با روش‌های عملگری

ما قبلاً تابع موج نوسانگر هماهنگ تغییر شکل یافته با تقارن محوری را به وسیله حل معادله شرودینگر بدست آورده‌ایم. حالا ما از روش عملگری استفاده می‌کنیم تا توابع موجی که با ثابت‌های حرکت N ، n_z و Λ مشخص می‌شوند را تولید کنیم.

از مطالعه نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی، روش عملگری به‌خوبی شناخته می‌شود. در این‌جا ما برخی از مطالب لازم را به‌صورت خلاصه بیان می‌کنیم. می‌توان بر حسب مختصات کشیده‌شده، $\xi = x \cdot (M\omega_x/\hbar)^{1/2}$ و غیره، نوشت

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{i}{\hbar} p_\xi \right),$$

$$a_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{i}{\hbar} p_\xi \right),$$

که a_x^+ الحاقی هرمیتی^۱ a_x می‌باشد. به‌صورت برعکس داریم

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + a_x^+),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - a_x^+).$$

¹Hermitian adjoint

تعاریف مشابهی برای a_y و a_z برقرار می‌باشد. به‌آسانی می‌توان تایید کرد که عملگرهای a_x روابط جابجایی

$$[a_x, a_x^+] = 1,$$

را برآورده می‌کنند. با بیان

$$H_x = \frac{1}{2} \hbar \omega_x \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \right),$$

بر حسب a_x و a_x^+ بدست می‌آوریم

$$H_x = \hbar \omega_x \left(a_x^+ a_x + \frac{1}{2} \right).$$

بنابراین H_x با $a_x^+ a_x$ جابجا می‌شود که یعنی این دو عملگر را می‌توان فرض کرد که ویژه‌بردارهای یکسانی دارند. ویژه‌بردارهای ψ_k و ویژه‌مقادیر λ_k را معرفی می‌کنیم

$$a_x^+ a_x \psi_k = \lambda_k \psi_k.$$

ضرب اسکالر با ψ_k منجر می‌شود به

$$\langle \psi_k | a_x^+ a_x \psi_k \rangle = \langle a_x \psi_k | a_x \psi_k \rangle = \lambda_k \langle \psi_k | \psi_k \rangle.$$

از آنجایی که $\langle a_x \psi_k | a_x \psi_k \rangle$ و $\langle \psi_k | \psi_k \rangle$ نامنفی می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که

$$\lambda_k \geq 0.$$

علاوه بر این از روابط جابجایی می‌رسیم به

$$(a_x^+ a_x) a_x^+ \psi_k = a_x^+ (a_x^+ a_x + 1) \psi_k = (\lambda_k + 1) a_x^+ \psi_k,$$

که یعنی این که $a_x^+ \psi_k$ نیز ویژه‌بردار $a_x^+ a_x$ ، با ویژه‌بردار متناظر $\lambda_k + 1$ می‌باشد. می‌توان به‌طریق مشابه نشان داد که $a_x \psi_k$ یک ویژه‌بردار با ویژه‌مقدار $\lambda_k - 1$ می‌باشد. بنابراین عملگر a_x^+ عملگر بالا برنده^۲ نامیده می‌شود در حالی که a_x یک عملگر پایین برنده^۳ می‌باشد. از آنجایی که $\lambda_k \geq 0$ است، باید یک پایین‌ترین مقدار برای λ_k وجود داشته باشد

$$a_x^+ a_x \psi_0 = \lambda_0 \psi_0.$$

این ویژه‌مقدار نمی‌تواند کوچک‌تر شود و در نتیجه

$$a_x \psi_0 = 0.$$

این منجر می‌شود به

$$\lambda_0 = 0,$$

^۲raising operator

^۳lowering operator

و در نتیجه $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$ و غیره، یعنی

$$a_x^+ a_x \psi_n \equiv a_x^+ a_x |n_x\rangle = n_x |n_x\rangle.$$

پس ما برای هامیلتونی این نوسانگر داریم

$$H_x |n_x\rangle = \hbar\omega_x \left(a_x^+ a_x + \frac{1}{2} \right) |n_x\rangle = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) |n_x\rangle.$$

از این ویژه‌مقدار، n_x ، عملگر $a_x^+ a_x$ به‌عنوان تعداد واحدهای نوسانگر یاد می‌شود. این مطلب این توجیه را فراهم می‌کند که $a_x^+ a_x$ به‌عنوان یک عملگر تعداد^۴، \mathcal{N}_x ، نسبت به واحدهای نوسانگر x تعیین شود. البته ویژه‌بردار ψ_0 کوانتومی حالت پایه بدون واحد نوسانگر می‌باشد^۵

$$\psi_0 = |0\rangle = \pi^{-1/4} e^{-\xi^2/2}.$$

حال حالت تک‌واحدی^۶ به‌راحتی محاسبه می‌شود

$$a_x^+ |0\rangle = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{-\xi^2/2} = \pi^{-1/4} \sqrt{2} \cdot \xi e^{-\xi^2/2}.$$

به‌صورت عام، حالت بهنجارشده با n_x واحد نوسانگر می‌توان به‌صورت

$$|n_x\rangle = \frac{1}{(n_x!)^{1/2}} (a_x^+)^{n_x} |0\rangle$$

نوشته شود. ثابت بهنجارش از روابط جابجایی بدست می‌آید. این روابط منجر می‌شود به (تمرین ۷.۸ را ببینید)

$$a_x^+ |n_x\rangle = (n_x + 1)^{1/2} |n_x + 1\rangle,$$

$$a_x |n_x\rangle = \sqrt{n_x} |n_x - 1\rangle.$$

بعد از این ملاحظات کلی در یک بعد، به نوسانگر سه‌بعدی با تقارن استوانه‌ای برمی‌گردیم. به‌منظور بهره‌مندی از این تقارن میان x و y [عملگرهای زیر را] تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{R}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^+ + ia_y^+),$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ia_y),$$

$$\mathbf{S}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^+ - ia_y^+),$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ia_y).$$

می‌توان [برای این عملگرها] این قاعده‌های جابجایی را تحقیق کرد

$$[\mathbf{R}, \mathbf{R}^+] = [\mathbf{S}, \mathbf{S}^+] = 1,$$

⁴number operator

^۵ یعنی دارای ویژه‌مقدار $n_x = 0$ می‌باشد.

^۶one-quantum

درحالیکه راو بط جابجایی دیگری وجود ندارد. در نتیجه مشخص است که می‌توان ویژه‌توابع را با کمک عملگرهای \mathbf{R}^+ و \mathbf{S}^+ مشابه با آنچه که در مورد a^+ انجام شد، ساخت.

عملگرهای \mathbf{R}^+ و \mathbf{S}^+ عدد کوانتومی n_{\perp} را یک واحد افزایش می‌دهند در حالیکه \mathbf{R}^- و \mathbf{S}^- آن را یک واحد کاهش می‌دهند. این مطلب متناظر با این حقیقت است که عملگر تعداد نسبت به واحدهای کوانتومی عمود بر محور z می‌تواند [به‌صورت زیر] نوشته شود

$$\mathcal{N}_{\perp} = a_x^+ a_x + a_y^+ a_y = \mathbf{R}^+ \mathbf{R} + \mathbf{S}^+ \mathbf{S}.$$

بر حسب این عملگرهای جدید، هامیلتونی نوسانگر هماهنگ با تقارن استوانه‌ای می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} H_{\text{cyl. osc}} &= \hbar\omega_z \left(a_z^+ a_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{\perp} (a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1) \\ &= \hbar\omega_z \left(\mathcal{N}_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{\perp} (\mathcal{N}_{\perp} + 1) \\ &= \hbar\omega_z \left(\mathcal{N}_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{\perp} (\mathbf{R}^+ \mathbf{R} + \mathbf{S}^+ \mathbf{S} + 1). \end{aligned}$$

از طریق معادله شرودینگر می‌توانیم یک جواب برای این هامیلتونی پیدا کنیم، که علاوه بر داشتن یک عدد کوانتومی Λ خوب، جوابی از نوع

$$\psi = Z(\zeta)U(\rho)\phi(\varphi) = |n_z\rangle |n_{\perp}\Lambda\rangle,$$

داشته باشد. با استفاده از این عملگرها به‌طور معادل می‌توانیم جوابی به‌صورت

$$\psi = |n_z r s\rangle = \frac{1}{(n_z! r! s!)^{1/2}} (a_z^+)^{n_z} (\mathbf{R}^+)^r (\mathbf{S}^+)^s |0\rangle,$$

بنویسیم. به‌راحتی دیده می‌شود که

$$H_{\text{cyl. osc}} |n_z r s\rangle = \left[\left(n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_z + (n_{\perp} + 1) \hbar\omega_{\perp} \right] |n_z r s\rangle,$$

که در آن

$$n_{\perp} = r + s,$$

می‌باشد. قدم بعدی بیان کردن L_z بر حسب عملگرهای \mathbf{R} و \mathbf{S} می‌باشد. ما بایستی از نمادگذاری ساده‌شده L_x و غیره به‌جای $(L_t)_x$ و غیره، استفاده کنیم و علاوه بر این، فرض کنیم که تکانه زاویه‌ای بر حسب واحد \hbar بیان می‌شود (پس قرار می‌دهیم $\hbar = 1$)

$$L_z = \frac{1}{i} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{i} (a_x^+ a_y - a_y^+ a_x) = (\mathbf{R}^+ \mathbf{R} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S}).$$

بنابراین

$$\Lambda = r - s.$$

در این جا $|n_z r s\rangle$ یک ویژه تابعی است که با هر دو L_z و $H_{\text{cyl. osc}}$ جابجا می‌شود.

عملگرهای \mathbf{R}^+ و \mathbf{S} عدد کوانتومی $L_z = \Lambda$ را یک واحد افزایش می‌دهند در حالیکه \mathbf{R} و \mathbf{S}^+ عدد کوانتومی Λ را یک واحد پایین می‌آورند. این مطلب متناظر با قواعد جابجایی

$$[L_z, \mathbf{R}^+] = \mathbf{R}^+, \quad [L_z, \mathbf{S}] = \mathbf{S}, \quad [L_z, \mathbf{R}] = -\mathbf{R}, \quad [L_z, \mathbf{S}^+] = -\mathbf{S}^+,$$

می‌باشد که اگر L_z بر حسب عملگرهای \mathbf{R} و \mathbf{S} بیان شود به آسانی می‌تواند اثبات شود.

برای عملگرهای L_x و L_y بدست می‌آوریم

$$iL_x = a_y^+ a_z - a_z^+ a_y = \frac{-i}{\sqrt{2}} [a_z^+ (\mathbf{R} - \mathbf{S}) + a_z (\mathbf{R}^+ - \mathbf{S}^+)],$$

$$iL_y = a_z^+ a_x - a_x^+ a_z = \frac{-i}{\sqrt{2}} [a_z (\mathbf{R}^+ + \mathbf{S}^+) - a_z^+ (\mathbf{R} + \mathbf{S})],$$

و علاوه بر این

$$L_+ = \sqrt{2} (a_z^+ \mathbf{S} - a_z \mathbf{R}^+),$$

$$L_- = \sqrt{2} (a_z \mathbf{S}^+ - a_z^+ \mathbf{R}),$$

که عبارت‌های اخیر بعداً مفید خواهند بود.

با شروع از توابع موج $|n_z, n_\perp = r + s, \Lambda = r - s\rangle$ ، با استفاده از اثرگذاری عملگر \mathbf{R}^+ می‌توانیم تابع موجی

با $n_\perp \rightarrow n_\perp + 1$ و $\Lambda \rightarrow \Lambda + 1$ یا $|n_z, n_\perp + 1, \Lambda + 1\rangle$ تولید کنیم. ما از $[H_{\text{cyl. osc}}, \mathbf{R}^+] = \hbar\omega_\perp \mathbf{R}^+$ استفاده می‌کنیم تا بدست آوریم

$$\begin{aligned} H_{\text{cyl. osc}} \{\mathbf{R}^+ |n_z r s\rangle\} &= \mathbf{R}^+ (H_{\text{cyl. osc}} + \hbar\omega_\perp) |n_z r s\rangle, \\ &= \left[\left(n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_z + (r + s + 2) \hbar\omega_\perp \right] \{\mathbf{R}^+ |n_z r s\rangle\}. \end{aligned}$$

به‌طریق مشابه

$$\begin{aligned} L_z \{\mathbf{R}^+ |n_z r s\rangle\} &= \mathbf{R}^+ (L_z + 1) |n_z r s\rangle = \mathbf{R}^+ (r - s + 1) |n_z r s\rangle, \\ &= (\Lambda + 1) \{\mathbf{R}^+ |n_z r s\rangle\}. \end{aligned}$$

به‌طور معادل، ما می‌توانیم از این واقعیت که

$$\mathbf{R}^+ |n_z r s\rangle = (r + 1)^{1/2} |n_z r + 1 s\rangle,$$

و این روابط

$$n_\perp = r + s, \quad \Lambda = r - s,$$

بهره برداری کنیم.

با گنجایش اسپین، تابع موج کل به‌صورت زیر می‌شود

$$\psi = |n_z r s\rangle |\Sigma\rangle.$$

حالا در موقعیتی قرار داریم تا عناصر ماتریسی $L_t \cdot s$ و L_t^\dagger را در نمایش مجانبی محاسبه کنیم. بگذارید تا با $L_t \cdot s$ شروع کنیم. از بسط

$$L_t \cdot s = (L_t)_z + s_z + \frac{1}{\sqrt{2}} ((L_t)_+ s_- + (L_t)_- s_+),$$

و با ساده‌سازی نمادگذاری‌ها با از قلم انداختن t همانند آنچه که قبلاً انجام شد، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} = (\mathbf{R}^+ \mathbf{R} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S}) s_z - \frac{1}{\sqrt{2}} (a_z \mathbf{R}^+ - a_z^+ \mathbf{S}) s_- - \frac{1}{\sqrt{2}} (a_z^+ \mathbf{R} - a_z \mathbf{S}^+) s_+.$$

جمله اول ویژه‌عمگنر $|n_z r s \Sigma\rangle$ می‌باشد

$$L_z s_z |n_z r s \Sigma\rangle = (r - s) \Sigma |n_z r s \Sigma\rangle = \Lambda \Sigma |n_z r s \Sigma\rangle,$$

و

$$\langle n_z r s \Sigma | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | n_z r s \Sigma \rangle = \Lambda \Sigma.$$

دو جمله بعدی $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{s})$ عناصر غیر قطری جفت‌شده با قواعد گزینش

$$\Delta \Sigma = -1, \quad \Delta \Lambda = 1, \quad \Delta n_z = -\Delta n_\perp = \pm 1,$$

و

$$\Delta \Sigma = 1, \quad \Delta \Lambda = -1, \quad \Delta n_z = -\Delta n_\perp = \pm 1,$$

را تولید می‌کند. برای مثال، برای این عناصر ماتریسی بدست می‌آوریم

$$\langle n_z - 1 r + 1 s \Sigma - 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | n_z r s \Sigma \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [n_z (r + 1)]^{1/2},$$

و سپس

$$\langle n_z - 1 n_\perp + 1 \Lambda + 1 \Sigma - 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [n_z (n_\perp + \Lambda + 2)]^{1/2}.$$

به‌طریق مشابه، دیگر عناصر ماتریسی به‌صورت زیر بدست می‌آیند

$$\langle n_z + 1 n_\perp - 1 \Lambda + 1 \Sigma - 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(n_z + 1) (n_\perp - \Lambda)]^{1/2},$$

$$\langle n_z + 1 n_\perp - 1 \Lambda - 1 \Sigma + 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [(n_z + 1) (n_\perp + \Lambda)]^{1/2},$$

$$\langle n_z - 1 n_\perp + 1 \Lambda - 1 \Sigma + 1 | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [n_z (n_\perp - \Lambda + 2)]^{1/2}.$$

از آن عبارت‌ها برای L_+ و L_- به‌راحتی می‌توان یک عبارت برای $L_\perp^\dagger = L_x^\dagger + L_y^\dagger$ پیدا کرد

$$L_\perp^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_+ L_- + L_- L_+) = 2 a_z^+ a_z (\mathbf{R}^+ \mathbf{R} + \mathbf{S}^+ \mathbf{S} + 1) + \mathbf{R}^+ \mathbf{R} + \mathbf{S}^+ \mathbf{S} - 2 (a_z^+)^2 \mathbf{R} \mathbf{S} - 2 (a_z)^2 \mathbf{R}^+ \mathbf{S}^+.$$

سه جمله ابتدایی یک ویژه عملگر $|n_z r s\rangle$ با ویژه مقدار $n_\perp + 1 + 2n_z$ می‌باشد در حالیکه دو جمله آخر قواعد گزینش $\Delta n_z = -\Delta n_\perp = \pm 2$ ، $\Delta N = 0$ ، $\Delta \Lambda = 0$ را دارند

$$\langle n_z + 2r - 1s - 1 | L_\perp^\dagger | n_z r s \rangle = -2 [(n_z + 2)(n_z + 1) \cdot r \cdot s]^{1/2},$$

و

$$\langle n_z - 2r + 1s + 1 | L_\perp^\dagger | n_z r s \rangle = -2 [(n_z - 1)n_z(r + 1)(s + 1)]^{1/2}.$$

بنابراین با $L^\dagger = L_\perp^\dagger + L_z^\dagger$ [داریم]

$$\langle n_z n_\perp \Lambda \Sigma | L^\dagger | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = 2n_z(n_\perp + 1) + n_\perp + \Lambda^2,$$

$$\langle n_z + 2n_\perp - 2\Lambda \Sigma | L^\dagger | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = -[(n_z + 2)(n_z + 1)(n_\perp + \Lambda)(n_\perp - \Lambda)]^{1/2},$$

$$\langle n_z - 2n_\perp + 2\Lambda \Sigma | L^\dagger | n_z n_\perp \Lambda \Sigma \rangle = -[(n_z - 1)n_z(n_\perp + \Lambda + 2)(n_\perp - \Lambda + 2)]^{1/2}.$$

۱.۲.۳ تعیین اعداد کوانتومی ترازهای نیلسون در مختصات استوانه‌ای

ما توانسته بودیم که ترازهای نیلسون را در مختصات کروی رسم کنیم. اگر بتوان ارتباطی میان اعداد کوانتومی در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی بیابیم می‌توانیم اعداد کوانتومی مناسب را پیدا کنیم، سپس اقدام به رسم ترازهای نیلسون در مختصات استوانه‌ای کنیم. تنها راهی که می‌توان ارتباطی میان اعداد کوانتومی دستگاه‌های مختصات مختلف یافت این است که انرژی این سیستم فیزیکی در دستگاه‌های مختلف را با هم برابر قرار دهیم

$$E_{\text{Cart.}} = E_{\text{Cyl.}} = E_{\text{Sph.}}, \quad (1.3)$$

که این مطلب منجر می‌شود به

$$n_x + n_y + n_z = 2n_\rho + n_z + \Lambda = 2n_r + L = N, \quad (2.3)$$

که به راحتی از این معادله می‌توان قیدی را که در قسمت قبل بدست آورده شد، دوباره بدست آورد

$$n_x + n_y = n_\perp = 2n_\rho + \Lambda. \quad (3.3)$$

اگر به طور خاص بر روی دستگاه مختصات‌های کروی و استوانه‌ای تمرکز کنیم داریم

$$2n_\rho + n_z + \Lambda = 2n_r + L. \quad (4.3)$$

که در آن منظور از $n_i (i = x, y, z, \rho, r)$ تعداد واحدها در راستاهای مختلف می‌باشد. معادله (۴.۳) را نمی‌توان در حالت عادی حل کرد، زیرا تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر می‌باشد. اما می‌توان با یک فرض منطقی این کار را انجام داد. فرض می‌کنیم که اعداد کوانتومی‌ای که ضریب یکسان دارند، با هم شمرده شوند. با استفاده از این فرض به دو رابطه می‌رسیم

$$n_r = n_\rho, \quad L = \Lambda + n_z. \quad (5.3)$$

جدول ۱.۳: تعیین اعداد کوانتومی n_r و L در هر پوسته اصلی N .

N	۰	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۴	۵	۵	۵	۶	۶	۶	۶	۷	۷	۷	۷
n_r	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳
L	۰	۱	۲	۰	۳	۱	۴	۲	۰	۵	۳	۱	۶	۴	۲	۰	۷	۵	۳	۱

این روابط به ما کمک می‌کند ترازهای کروی را به ترازهای استوانه‌ای تبدیل کنیم. توجه شود که تا الآن هیچ چیزی اثبات نشده است. اگر این استدلال‌ها منجر به ترازهای نیلسون شود، می‌توان به درستی آن اطمینان کرد.

حال برای این که بتوانیم ترازهای استوانه‌ای را بدست آوریم، بایستی این فرآیند را قاعده‌مند کنیم تا نسبت دادن اعداد کوانتومی هر تراز منطقی باشد. برای بدست آوردن اعداد کوانتومی استوانه‌ای ترازهای نیلسون قدم‌های زیر را بر می‌داریم

۱. تعیین مقادیر n_r و L . برای این قسمت، ساده‌ترین راه استفاده از ارتباط میان مختصات دکارتی و کروی می‌باشد. همان‌طور که مشخص است، یک نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی دکارتی، با افزایش واحدهای نوسانی در راستاهای مختلف، حالت‌های مختلف برانگیختگی نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی تجربه می‌شود. از معادله (۲.۳) دیده می‌شود که این کار باعث می‌شود که مقادیر $N = 0, 1, 2, \dots$ بدست آید. از طرفی داریم $N = 2n_r + L$. بنابراین این معادله به‌ازای مقادیر مختلفی از N برای اعداد کوانتومی n_r و L بایستی حل شود. لذا بایستی به‌ازای هر مورد، ترکیبی را میان این دو عدد کوانتومی ارائه کرد تا تساوی برقرار شود. در جدول ۱.۳ مقادیر مختلف برای این اعداد کوانتومی جدول‌بندی شده است.

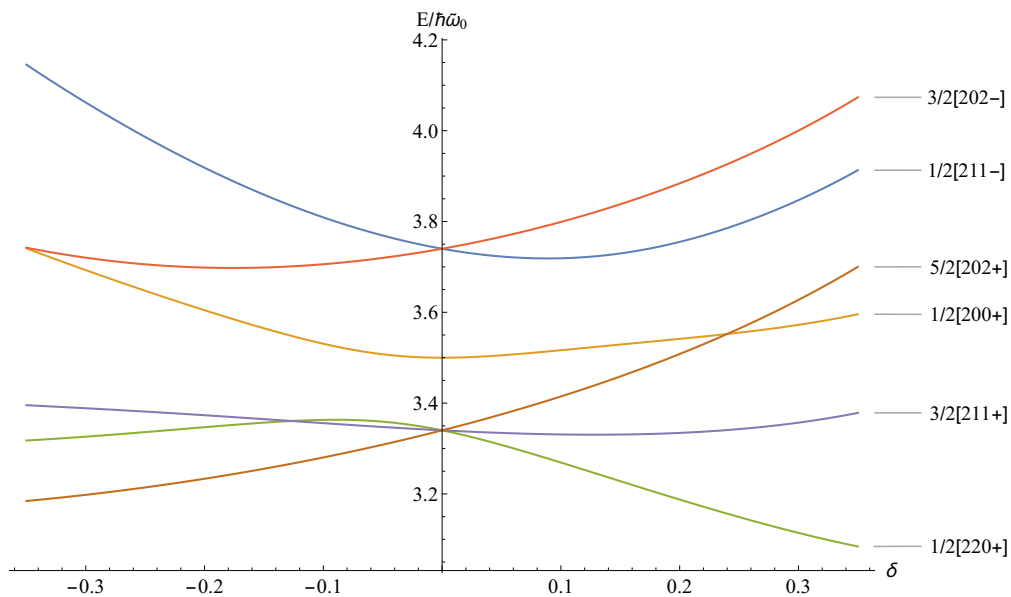
۲. تعیین اعداد کوانتومی Λ ، n_z ، n_p و Σ . با استفاده از معادلات (۵.۳) و $\Omega = \Lambda + \Sigma$ می‌توان بقیه اعداد کوانتومی را بر اساس جدول ۱.۳ تعیین کرد. اما قبل از این کار بایستی چند نکته را لحاظ کرد. نکته اول این است که اگر چه که برای مولفه سوم تکانه زاویه‌ای داریم $-L \leq \Lambda \leq L$ ، اما در این جا دامنه این عدد کوانتومی فقط شامل مقادیر مثبت خواهد بود. علت این قید این است که در تابع موج نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، این عدد کوانتومی در توان شعاع قرار گرفته است ($\psi \propto \rho^{|\Lambda|}$). برای اینکه این تابع موج فیزیکی باقی بماند، فقط مقادیر مثبت این عدد کوانتومی برای این تابع موج مجاز می‌باشد. نکته بعدی تمرکز بر مقدار تصویر تکانه زاویه‌ای کل دارد. این مقدار همواره به‌عنوان یک کمیت مثبت در مدل پوسته‌ای در نظر گرفته شده و شواهد آزمایشگاهی (مثل اعداد جادویی) درستی این امر را تایید می‌کند. بنابراین برای داشتن یک مقدار همواره مثبت برای تصویر تکانه زاویه‌ای کل بایستی این قاعده را لحاظ کنیم که هر گاه جهت رو به بالای اسپین در نظر گرفته شود، Λ می‌تواند از صفر شروع شود و هر گاه جهت رو به پایین اسپین در نظر گرفته شود Λ بایستی از یک شروع شود.

نتیجه این دو گام برای چند لایه اصلی در جدول ۲.۳ جمع‌آوری شده است.

حال با استفاده از اعداد کوانتومی جدید اقدام به تشکیل هامیلتونی ترازهای نیلسون در پوسته‌های مختلف می‌کنیم

جدول ۲.۳: اعداد کوانتومی ترازهای نیلسون در مختصات استوانه‌ای که بر اساس استدلال جدید و قاعده (۵.۳) برای چند لایه اصلی محاسبه شده است.

Ω	N	n_z	Λ	Σ	n_ρ	زیرپوسته
$1/2$	0	0	0	$1/2$	0	$1s_{1/2}$
$1/2$	1	1	0	$1/2$	0	$1p_{3/2}$
$3/2$	1	0	1	$1/2$	0	$1p_{3/2}$
$1/2$	1	0	1	$-1/2$	0	$1p_{1/2}$
$1/2$	2	0	0	$1/2$	1	$2s_{1/2}$
$1/2$	2	2	0	$1/2$	0	$1d_{5/2}$
$3/2$	2	1	1	$1/2$	0	$1d_{5/2}$
$5/2$	2	0	2	$1/2$	0	$1d_{5/2}$
$1/2$	2	1	1	$-1/2$	0	$1d_{3/2}$
$3/2$	2	0	2	$-1/2$	0	$1d_{3/2}$
$1/2$	3	3	0	$1/2$	0	$1f_{7/2}$
$3/2$	3	2	1	$1/2$	0	$1f_{7/2}$
$5/2$	3	1	2	$1/2$	0	$1f_{7/2}$
$7/2$	3	0	3	$1/2$	0	$1f_{7/2}$
$1/2$	3	2	1	$-1/2$	0	$1f_{5/2}$
$3/2$	3	1	2	$-1/2$	0	$1f_{5/2}$
$5/2$	3	0	3	$-1/2$	0	$1f_{5/2}$
$1/2$	3	1	0	$1/2$	1	$2p_{3/2}$
$3/2$	3	0	1	$1/2$	1	$2p_{3/2}$
$1/2$	3	0	1	$-1/2$	1	$2p_{1/2}$



شکل ۶.۳: ترازهای نیلسون متناظر با $N = 2$ ، با استفاده از پیش‌بینی‌های قاعده بیان‌شده در معادله (۵.۳).

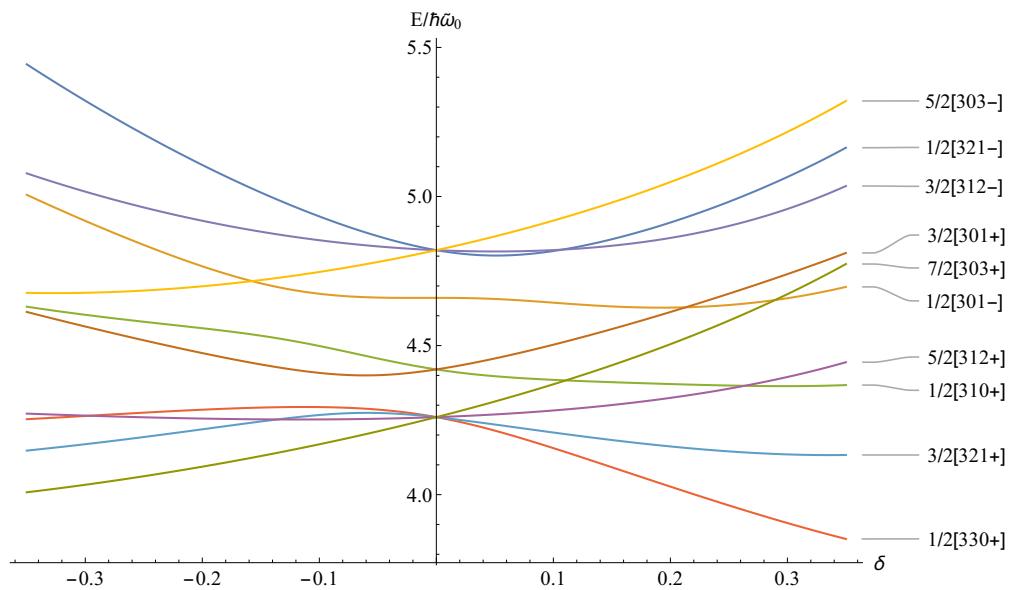
تا صحت و سقم این استدلال را بررسی کنیم. با تشکیل هامیلتونی پوسته‌های $N = 2$ و $N = 3$ داریم

$$H_{\text{tot}}^{\text{ours}} (N = 2) = \begin{pmatrix} \frac{1152\delta + 520}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{73+2\delta-2620}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5417\delta - 57720}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1107\delta + 5740}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 & 0 \\ -\frac{15059}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & \frac{-77713}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 & 0 & \frac{62+7\delta-57720}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-77713}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} & 0 & 0 & \frac{1107\delta + 5740}{\sqrt{-(\delta+3)(\delta-3)}} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$H_{\text{tot}}^{\text{ours}} (N = 3) = \begin{pmatrix} \frac{27715\delta - 70}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2329 - 1077\delta}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5031}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1771 - 57720\delta}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1107\delta - 1077}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{77713}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & \frac{77713}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{62+7\delta-57720}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{77713}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1107\delta - 1077}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1107\delta - 1077}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2329 - 1077\delta}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27715\delta - 70}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27715\delta - 70}{\sqrt{-(\delta+7)(\delta-7)}} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

حال انرژی‌های ترازهای مختلف را پس از قطری‌سازی این هامیلتونی‌ها محاسبه و رسم می‌کنیم. نتیجه این محاسبات در شکل‌های ۶.۳ و ۷.۳ توصیف شده است که در تطابق کامل با موارد کروی می‌باشد.

اما سوالی که بایستی در انتهای این محاسبات به آن پاسخ داده شود این است که چرا در مرحله اول و با استفاده از شکل ۱.۳ ما قادر به بدست آوردن ترازهای نیلسون نبودیم؟ پاسخ این سوال با مقایسه هامیلتونی‌های بدست‌آمده در این دو روش بدست می‌آید. با مقایسه معادلات (۱.۳) و (۲.۳) با معادلات (۶.۳) و (۷.۳) می‌توان دریافت که هامیلتونی‌هایی که بر اساس استدلال‌های ما بدست آمده است حاوی عناصر غیرقطری بیشتری می‌باشد. علت این تفاوت رعایت کردن قید (۳.۳) در خلال محاسبات می‌باشد. اگر ما در محاسبات از این قید صرف نظر کنیم می‌توانیم با استفاده از اعداد کوانتومی مطرح‌شده در شکل ۱.۳ به ترازهای نیلسون دست‌یافت. در واقع این قید خودش را در قواعد گزینش مربوط به n_{\perp} نشان می‌دهد. به‌عنوان مثالی از این مورد تراز $2s_{1/2}$ را در نظر بگیرد. اگر بخواهیم با



شکل ۷.۳: مشابه شکل ۶.۳ ولی برای $N = 3$.

توجه با شکل ۱.۳ این تراز را مورد بررسی قرار دهیم، برای عدد کوانتومی n_{\perp} دو مقدار متفاوت بدست می‌آوریم

$$n_{\perp} = N - n_z = 2 - 2 = 0, \quad (8.3)$$

$$n_{\perp} = 2n_{\rho} + \Lambda = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad (9.3)$$

این در حالیست که با استدلال ارائه‌شده توسط ما برای همین تراز داریم

$$n_{\perp} = N - n_z = 2 - 0 = 2, \quad (10.3)$$

$$n_{\perp} = 2n_{\rho} + \Lambda = 2 \times 1 + 0 = 2. \quad (11.3)$$

همان‌طور که دیده می‌شود استدلال ما می‌تواند قید را لحاظ نکند در حالیکه اعداد کوانتومی بیان‌شده در شکل ۱.۳ این قید را رعایت نمی‌کند و همین امر باعث می‌شود که اگر این قید در محاسبات لحاظ شود، به ترازهای نیلسون در مختصات استوانه‌ای دسترسی پیدا نکنیم.

نکته مهم دیگر این است نحوه عددگذاری ترازهای نیلسون به کمک استدلال ما، قید دیگری در خلال محاسبات بدست آمد را هم رعایت می‌کند. این قید عبارت است از ثابت حرکت بودن Λ . در واقع موارد تناقضی‌ای که در قبل بیان شد، مواردی بودند که در آنها امکان نقض این اتفاق وجود داشت اما در نحوه عددگذاری ما این قید نیز رعایت می‌شود.

فصل ۴

مدل (۳) proxy-SU در ناحیه تغییر شکل‌های متوسط

در این قسمت قصد داریم با استفاده از مطالبی که در قسمت‌های قبل بحث شد، مدل (۳) proxy-SU را برای ناحیه تغییر شکل‌های متوسط بررسی کنیم و رفتار آن‌ها را بر حسب پارامتر تغییر شکل تعیین کنیم. ما در قسمت [عددگذاری متفاوت ترازهای نیلسون] نشان دادیم که می‌توان یک فرآیند متفاوتی را برای عددگذاری ترازهای نیلسون را ارائه داد. برای این قسمت قصد داریم که از آن نتایج برای این تغییر شکل‌های متوسط استفاده کنیم. اما ممکن است که در این‌جا این سوال پیش آید که آیا این روش متفاوت در عددگذاری در نتایج مدل (۳) proxy-SU تغییر ایجاد می‌کند؟ و نتیجه هر چه باشد، علت آن چیست؟

برای بررسی پاسخ این سوال اقدام می‌کنیم که هامیلتونی را بر اساس روش جدید عددگذاری که بیان کردیم، بدست آوریم. بنابراین در این قسمت با استفاده از عدد کوانتومی مجانبی جدید که در قسمت‌های قبلی بحث کردیم هامیلتونی مدل (۳) proxy-SU را دوباره می‌سازیم. برای این‌که تفاوت بیان‌شده در قسمت قبل به صورت مشهودتری مشخص گردد، در جدول ۱.۴ برای لایه‌های $N = 3, 4$ عددگذاری‌های متفاوت را برای زیر پوسته‌های متفاوت فهرست کرده‌ایم. این جدول به دو قسمت تقسیم شده است که هر قسمت متعلق به یک پوسته اصلی نوسانگر می‌باشد. در هر قسمت زیرپوسته‌های ممکن در لایه اصلی به همراه عددگذاری مجانبی آن‌ها بیان شده است. در ستون 'قاعده' عددگذاری‌هایی بیان‌شده‌اند که در قسمت قبل ما آن‌ها را بنا کرده بودیم و در ستون 'دیگر' عددگذاری ترازها بر اساس روش متفاوتی بیان شده است که در آن قاعده بیان‌شده برقرار نیست. توجه شود که این عددگذاری‌ها مربوط به پوسته‌های نوترونی است. بیان کردن این نکته در اینجا می‌تواند مفید باشد که در روش قاعده تفاوتی در عددگذاری

جدول ۱.۴: مقایسه‌ای میان عددگذاری ترازهای متفاوت در زیر لایه‌های $N = 3, 4$ با استفاده از قاعده بدست آمده در قسمت‌های قبلی و روش مرسوم که در اینجا 'دیگر' نامیده شده است. ترازهایی که دارای عددگذاری متفاوتی هستند، ضخیم‌تر نشان داده شده‌اند.

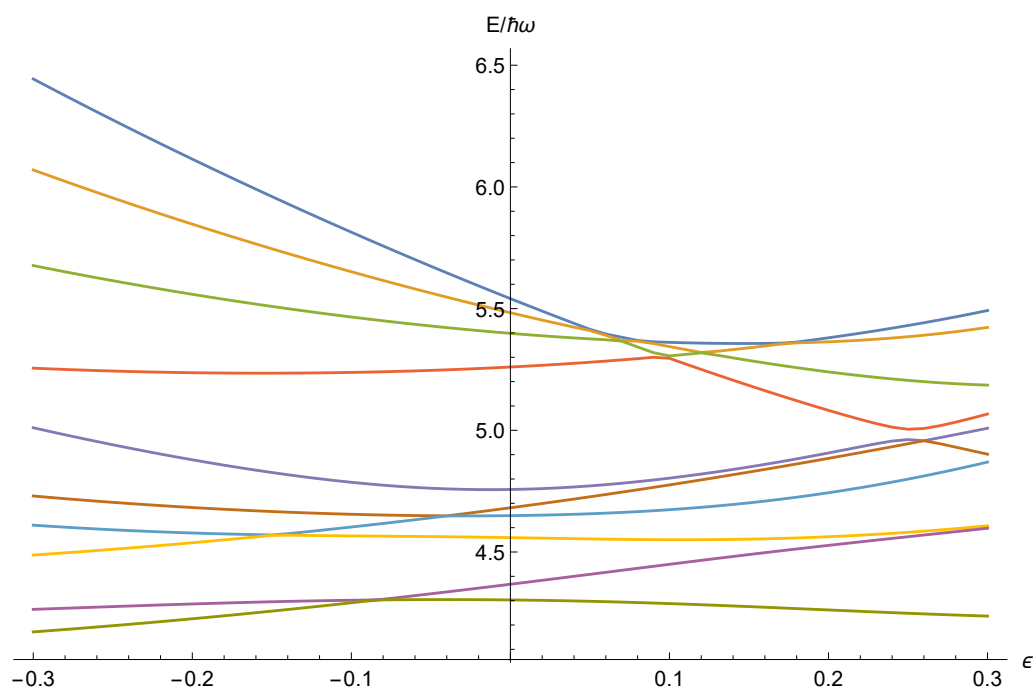
$N = 4$			$N = 3$		
دیگر	قاعده	زیرپوسته	دیگر	قاعده	زیرپوسته
$1/2[411]$	$1/2[400]$	$3s_{1/2}$	$1/2[301]$	$1/2[301]$	$2p_{1/2}$
$1/2[400]$	$1/2[411]$	$2d_{3/2}$	$1/2[321]$	$1/2[310]$	$2p_{3/2}$
$1/3[402]$	$1/3[402]$	$2d_{3/2}$	$3/2[312]$	$3/2[301]$	$2p_{3/2}$
$1/2[431]$	$1/2[420]$	$2d_{5/2}$	$1/2[310]$	$1/2[321]$	$1f_{5/2}$
$3/2[422]$	$3/2[411]$	$2d_{5/2}$	$3/2[301]$	$3/2[312]$	$1f_{5/2}$
$5/2[413]$	$5/2[402]$	$2d_{5/2}$	$5/2[303]$	$5/2[303]$	$1f_{5/2}$
$1/2[420]$	$1/2[431]$	$1g_{7/2}$	$1/2[330]$	$1/2[330]$	$1f_{7/2}$
$3/2[411]$	$3/2[422]$	$1g_{7/2}$	$3/2[321]$	$3/2[321]$	$1f_{7/2}$
$5/2[402]$	$5/2[413]$	$1g_{7/2}$	$5/2[312]$	$5/2[312]$	$1f_{7/2}$
$7/2[404]$	$7/2[404]$	$1g_{7/2}$	$7/2[303]$	$7/2[303]$	$1f_{7/2}$
$1/2[440]$	$1/2[440]$	$1g_{9/2}$			
$3/2[431]$	$3/2[431]$	$1g_{9/2}$			
$5/2[422]$	$5/2[422]$	$1g_{9/2}$			
$7/2[413]$	$7/2[413]$	$1g_{9/2}$			
$9/2[404]$	$9/2[404]$	$1g_{9/2}$			

ترازها میان نوترون‌ها و پروتون‌ها وجود ندارد و تفاوت آن‌ها در استفاده از پارامترهای متفاوت بیان می‌شود در حالیکه در روش دیگر عددگذاری ترازها بعضاً متفاوت خواهد بود. در جدول ۱.۴ همچنین ترازهایی وجود دارد که آن‌ها ضخیم‌تر نوشته شده‌اند. آن‌ها ترازهایی هستند که در دو روش، دو شکل متفاوت از عددگذاری را تجربه می‌کنند.

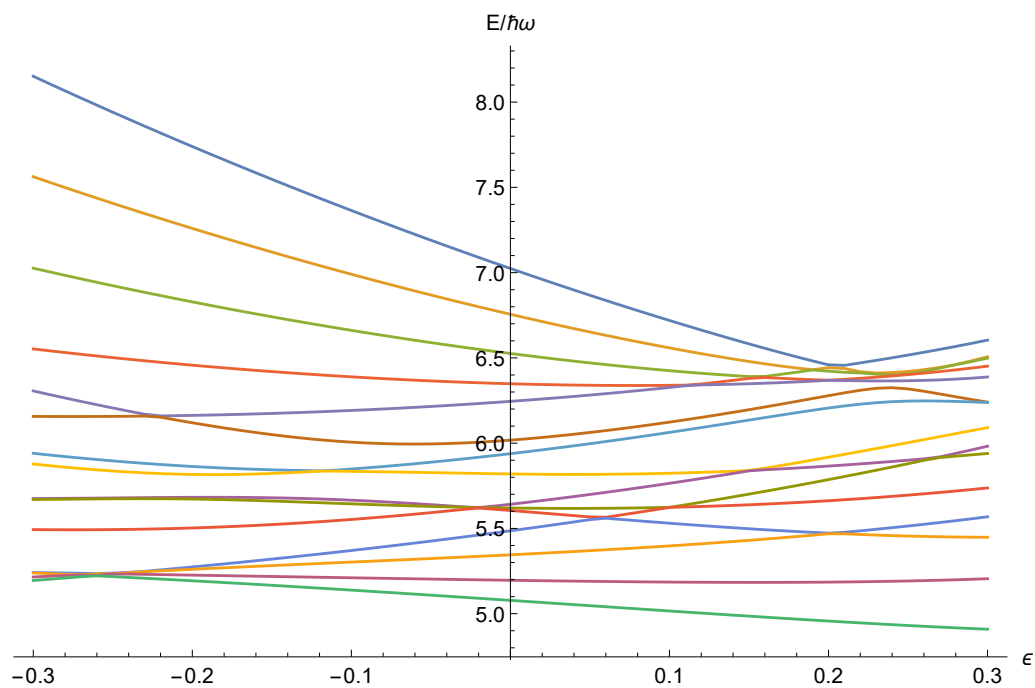
حال با استفاده از توضیحات که درباره مدل proxy-SU(۳) در قسمت مربوط بیان شد، اقدام به تشکیل هامیلتونی

این مدل برای این دو پوسته به‌عنوان مثال می‌کنیم. بنابراین برای این دو مورد داریم

$$H_{\text{proxy-SU}(3)}^{28-50} = \begin{pmatrix} \epsilon + 4.58 & 0.16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & 4.5 & 0 & -0.16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon + 4.42 & 0 & -0.112127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.16 & 0 & 4.58 - 1.0\epsilon & 0 & 0 & 0.195959 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.112127 & 0 & 4.66 & 0 & 0 & 0.226274 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon + 4.74 & 0 & 0 & 0.195959 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.195959 & 0 & 0 & 5.5 - 2.0\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.226274 & 0 & 0 & 5.42 - 1.0\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.195959 & 0 & 0 & 5.34 - 0.67\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13\epsilon + 5.26 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$



شکل ۳.۴: بررسی رفتار مدل proxy-SU(۳) در ناحیه تغییر شکل‌های متوسط در لایه $50^\circ-28^\circ$.



شکل ۴.۴: همانند شکل ۳.۴ ولی برای پوسته $82^\circ-50^\circ$.

فصل ۵

بسط مدارهای نیلسون در پایه کروی

هامیلتونی نیلسون بر اساس نوسانگر هماهنگ با تقارن استوانه‌ای می‌باشد که به آن یک جمله برهمکنش اسپین-مداری و یک جمله مربع تکانه زاویه‌ای اضافه شده است

$$H = H_0 - C\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} - D(\mathbf{L}^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle_N), \quad (1.5)$$

که در آن \mathbf{L} تکانه زاویه‌ای مداری، \mathbf{s} اسپین، C و D پارامتر هستند و

$$\langle \mathbf{L}^2 \rangle_N = \frac{1}{4}N(N+3), \quad (2.5)$$

میانگین مربعی تکانه زاویه‌ای مداری در N امین پوسته نوسانگر می‌باشد و منظور از H_0 هامیلتونی

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + \frac{M}{4}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (3.5)$$

می‌باشد که در آن x, y, z مختصه‌های سیستم متصل به هسته می‌باشد. جرم هسته با M بیان شده و فرکانس‌های نوسانگر هماهنگ در راستاهای مختلف با $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ نمایش داده شده‌اند.

هامیلتونی H_0 به دو قسمت جداسازی می‌شود

$$H_0 = \bar{H}_0 + H_\epsilon, \quad (4.5)$$

که در آن قسمت‌های مختلف عبارتند از

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{4}\hbar\omega_0(-\nabla^2 + r^2), \quad (5.5)$$

$$H_\epsilon = -\epsilon\hbar\omega_0\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}r^2Y_{20}. \quad (6.5)$$

پارامتر تغییر شکل ϵ در مورد تقارن استوانه‌ای به صورت

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\epsilon\right), \quad \omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\epsilon\right), \quad (7.5)$$

تعریف می‌شود که با کمیت β از هامیلتونی بوهر به صورت

$$\epsilon \simeq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \simeq 0.85\beta, \quad (8.5)$$

در ارتباط می‌باشد. پارامترهای C و D به صورت

$$C = 2\kappa\hbar\omega_0, \quad D = \kappa\mu\hbar\omega_0. \quad (9.5)$$

بیان می‌شوند.

ویژه‌توابع هامیلتونی نیروی مرکزی \bar{H} می‌تواند بر حسب $|NLL\Lambda\Sigma\rangle$ که در آن N عدد کوانتومی اصلی، L عدد کوانتومی مداری، Λ تصویر تکانه زاویه‌ای مداری بر روی محور z و Σ تصویر اسپین بر روی محور z می‌باشد. بقیه جملات هامیلتونی با عبارات L_z ، L^2 ، s_z ، L_z ، L^2 جابجا نمی‌شود و علاوه بر این حالت‌هایی را که در آن مقدار N به اندازه دو واحد تغییر می‌کند را به همدیگر مرتبط می‌کند. می‌توان تقریبی را معرفی کرد که در آن از عناصر غیرقطری N صرف نظر کرد زیرا آن‌ها حالت‌هایی را به یکدیگر مرتبط می‌کند که به اندازه $2\hbar\omega$ تفاوت دارند. همچنین بایستی توجه کرد که $j_z = L_z + s_z$ با تمام هامیلتونی جابجا می‌شود، بنابراین تصویر تکانه زاویه‌ای کل بر روی محور z ، $\Omega = \Lambda + \Sigma$ می‌تواند برای برچسب‌گذاری حالت‌ها مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین ویژه‌حالت‌های هامیلتونی کل می‌تواند به صورت

$$\chi_{N\Omega} = \sum_{L\Lambda} a_{L\Lambda}^{\Omega} |NLL\Lambda\Sigma\rangle, \quad (10.5)$$

بسط داد شود [۳۶]. ضرایب $a_{L\Lambda}^{\Omega}$ برای مقادیر مختلف پارامتر

$$\eta = \frac{2\hbar\omega_0}{C}\epsilon, \quad (11.5)$$

در جدول I مرجع [۳۲] جدول‌بندی شده است.

در مرجع [۳۲] مدارهای مختلف مدارهای مختلف با اعدادی از ۱ تا ۷۴ برچسب‌گذاری شده است. با این حال، مطلوب‌تر است که از نماد $K [Nn_z\Lambda]$ برای مدارهای نیلسون استفاده شود که در آن منظور از n_z تعداد واحدهای نوسانی در راستای محور z و K تصویر تکانه زاویه‌ای کل می‌باشد (برای هسته‌های زوج-زوج معمولاً داریم $\Omega = K$) و بقیه نمادهای همانند قبل می‌باشد. در تغییر شکل‌های بزرگ N و Λ اعداد کوانتومی خوبی هستند و از برهمکنش $L \cdot s$ و جمله L^2 می‌توان صرف نظر کرد.

۱.۵ تابع موج در پیکربندی فضایی

تابع موج کامل متناظر با بردارهای $|NLL\Lambda\Sigma\rangle$ عبارتست از

$$\Psi_{NLL\Lambda\Sigma} = R_{nL} Y_{L\Lambda} f_{s\Sigma}, \quad (1.5)$$

می‌باشد که در آن توابع هماهنگ‌های کروی، $f_{s\Sigma}$ اسپینورهای $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ به ترتیب برای اسپین‌های بالا و پایین و R_{nL} تابع موج شعاعی نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی در مختصات کروی

$$R_{nL}(r) = \sqrt{\frac{\Upsilon(n!)}{\Gamma(n+L+\frac{3}{4})}} e^{-r^2/2} r^L L_n^{L+1/2}(r^2), \quad (2.5)$$

که در آن Γ نماد تابع گاما، $L_n^{L+1/2}(r^2)$ چندجمله‌ای‌های لاگر و $N = 2n + L$ می‌باشد. این توابع موج می‌تواند به توابع موجی که در معادله (۸) از مرجع [۳۸] بیان شده‌اند مرتبط شوند. این ارتباط از طریق ارتباط میان توابع فوق‌هندسی هموار^۱ و چندجمله‌ای‌های لاگر می‌باشد

$${}_1F_1(-n; m+1; z) = \frac{n!m!}{(n+m)!} L_n^{(m)}(z), \quad (3.5)$$

که منجر به رابطه

$${}_1F_1\left(-n; L + \frac{3}{4}; r^2\right) = \frac{n!(L + \frac{1}{4})!}{(n+L + \frac{1}{4})!} L_n^{L+1/2}(r^2) \quad (4.5)$$

می‌شود.

۲.۵ پایه‌هایی معادل

بردارهای نیسلون که در معادله (۱۰.۵) استفاده شده است می‌تواند به راحتی بر حسب تکانه زاویه‌ای کل بسط داده شود

$$|NL\Lambda\Sigma\rangle = \sum_j \left(L\Lambda \frac{1}{4}\Sigma \middle| j\Omega \right) |NLj\Omega\rangle, \quad (1.5)$$

که پرانتز ظاهر شده در سمت راست معادله فوق ضریب کلبش-گردن می‌باشد.

سپس بسط معادله (۱۰.۵) می‌تواند به صورت

$$\chi_{N\Omega} = \sum_{L\Lambda} \sum_j a_{L\Lambda}^{\Omega} \left(L\Lambda \frac{1}{4}\Sigma \middle| j\Omega \right) |NLj\Omega\rangle, \quad (2.5)$$

نوشته شود. در واقع جمع بر روی L می‌تواند در نظر گرفته نشود. دلیل این مطلب بدین شرح است که همان‌طور که از معادله (۱.۵) دیده می‌شود، پاریته بردارها در سمت راست معادله (۱۰.۵) به واسطه توابع هماهنگ کروی تعیین می‌گردد. در نتیجه، تنها مقادیر مثبت یا منفی L می‌تواند در این بسط رخ دهد.

همچنین بسط معادله (۱.۵) می‌تواند به راحتی معکوس شود

$$|NLj\Omega\rangle = \sum_{\Sigma} \left(L\Lambda \frac{1}{4}\Sigma \middle| j\Omega \right) |NL\Lambda\Sigma\rangle, \quad (3.5)$$

که در آن جمع بر روی Λ قرار ندارد زیرا $\Omega = \Lambda + \Sigma$.

¹confluent hypergeometric functions

۳.۵ مثالی از بسط بردار نیلسون

در این قسمت می‌خواهیم مثالی را در باب چگونگی بسط یک بردار نیلسون با استفاده از مطالب بیان‌شده را تشریح کنیم. نتایج گزارش‌شده در ادامه بر اساس محاسبات استاندارد نیلسون برای $\epsilon = 0.22$ می‌باشد که در پوسته $82-50$ پروتونی با مقادیر $K_i = 0.637$ و $\mu = 0.60$ ، و در پوسته نوترونی $126-82$ با مقادیر $K_i = 0.637$ و $\mu = 0.42$ انجام‌شده است. برای تراز پروتونی 541 در پایه‌های $|NLL\Sigma\rangle$ بسط حاصل عبارتست از

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} [541] \right\rangle = & 0.371 \left| 511 \frac{1}{2} \right\rangle + 0.2321 \left| 531 \frac{1}{2} \right\rangle + 0.1129 \left| 532 - \frac{1}{2} \right\rangle \\ & + 0.8070 \left| 551 \frac{1}{2} \right\rangle + 0.5298 \left| 552 - \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

بسط در پایه‌های $|NLL\Sigma\rangle$ که برای همتای $[110]$ این تراز بدست می‌آید، تراز 651 نوترونی، عبارتست از

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} [651] \right\rangle = & 0.681 \left| 621 \frac{1}{2} \right\rangle + 0.229 \left| 622 - \frac{1}{2} \right\rangle + 0.2806 \left| 641 \frac{1}{2} \right\rangle \\ & - 0.1644 \left| 642 - \frac{1}{2} \right\rangle + 0.7981 \left| 661 \frac{1}{2} \right\rangle + 0.5458 \left| 662 - \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

بایستی توجه کرد که همتای $[110]$ در نمادگذاری مرسوم نیلسون به همتای $[1100]$ در پایه‌های $|NLL\Sigma\rangle$ ترجمه و تفسیر می‌شود. سپس شباهت میان این دو بسط مشخص می‌گردد. در واقع جملاتی که همتای $[1100]$ هستند، ضرایب بسیار مشابهی دارند. دومین جمله در سمت راست معادله (۲.۵)، که هیچ همتایی در معادله (۱.۵) ندارد، کوچک‌ترین ضریب را در معادله (۲.۵) دارد.

با نگاه‌کردن به بسط مدار مشابه در پایه‌های $|NLj\Omega\rangle$ این شباهت برجسته‌تر می‌شود

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} [541] \right\rangle = & 0.371 \left| 51 \frac{33}{2} \right\rangle - 0.286 \left| 53 \frac{53}{2} \right\rangle + 0.2565 \left| 53 \frac{73}{2} \right\rangle \\ & - 0.640 \left| 55 \frac{93}{2} \right\rangle + 0.9633 \left| 55 \frac{113}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} [651] \right\rangle = & -0.100 \left| 62 \frac{33}{2} \right\rangle + 0.071 \left| 62 \frac{53}{2} \right\rangle - 0.278 \left| 64 \frac{73}{2} \right\rangle \\ & + 0.3240 \left| 64 \frac{93}{2} \right\rangle - 0.469 \left| 66 \frac{113}{2} \right\rangle + 0.9418 \left| 66 \frac{133}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.5)$$

بایستی توجه کرد همتای $[110]$ در نمادگذاری مرسوم نیلسون $\Omega [Nn_z\Lambda]$ به همتای $[1110]$ در پایه‌های $|NLj\Omega\rangle$ ترجمه می‌شود. سپس تشابه میان این دو بسط مشخص می‌شود. جملاتی که همتای $[1110]$ هستند ضرایب بسیار مشابهی دارند. اولین جمله در سمت راست معادله (۴.۵)، که هیچ همتایی در معادله (۳.۵) ندارد، کوچک‌ترین ضریب را در معادله (۴.۵) دارد. مهم‌تر از همه، آخرین جمله در هر بسط به‌وضوح جمله غالب می‌باشد.

بررسی این مطلب جالب خواهد بود که آیا اعتبار این ویژگی در دیگر مقادیر تغییر شکل برقرار می‌باشد. در جدول ۱.۵ ضرایب برای دو مقدار تغییر شکل دیگر، 0.5 و 0.3 گزارش شده است. مشخص است که غلبه آخرین جمله در هر بسط مستقل از تغییر شکل می‌باشد.

جدول ۱.۵: بسط‌های نیلسون مدارهای $\Omega [Nn_z \Lambda]$ در پایه‌های مدل پوسته‌ای $|NLj\Omega\rangle$ برای سه مقدار متفاوت تغییر شکل ϵ . مدارهای نیلسون نشان داده‌شده دارای بیشترین میزان تکانه زاویه ای j در پوسته خود هستند. وجود یک ویژه‌بردار غالب مدل پوسته‌ای در تمامی تغییر شکل‌های مشهود می‌باشد.

$\frac{3}{4} [541]$						
$ NLj\Omega\rangle$	$ 51\frac{3}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 53\frac{5}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 53\frac{7}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 55\frac{9}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 55\frac{11}{4}\frac{3}{4}\rangle$	
ϵ						
۰/۰۵	۰/۰۰۲۵	-۰/۰۰۱۵	۰/۰۶۴۱	-۰/۰۱۲۲	۰/۰۹۹۷۹	
۰/۲۲	۰/۰۳۷۱	-۰/۰۲۸۶	۰/۲۵۶۵	-۰/۰۶۴۰	۰/۰۹۶۳۳	
۰/۳۰	۰/۰۶۰۱	-۰/۰۵۰۶	۰/۳۲۸۷	-۰/۰۹۲۲	۰/۰۹۳۶۶	
$\frac{3}{4} [651]$						
$ NLj\Omega\rangle$	$ 62\frac{3}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 62\frac{5}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 64\frac{7}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 64\frac{9}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 66\frac{11}{4}\frac{3}{4}\rangle$	$ 66\frac{13}{4}\frac{3}{4}\rangle$
ϵ						
۰/۰۵	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۴۶	-۰/۰۰۱۳	۰/۰۸۲۱	-۰/۰۰۸۶	۰/۰۹۹۶۶
۰/۲۲	-۰/۰۱۰۰	۰/۰۷۱۱	-۰/۰۲۷۸	۰/۳۲۴۰	-۰/۰۴۶۹	۰/۰۹۴۱۸
۰/۳۰	-۰/۰۲۰۷	۰/۱۱۴۹	-۰/۰۵۰۹	۰/۴۰۹۱	-۰/۰۶۸۷	۰/۰۹۰۱۰

۴.۵ مثال‌های بیشتر

در این قسمت بسط‌های تمامی مدارهای پوسته پروتونی ۸۲-۵۰ و پوسته نوترونی ۱۲۶-۸۲ در پایه‌های $|NLj\Omega\rangle$ برای تغییر شکل $\epsilon = ۰/۲۲$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۲.۵ فهرست جفت مدارهایی را آورده‌ایم که برای آن‌ها جملات غالب با ضرایبی بالاتر از ۰/۸ برای هر دو آن‌ها بیان شده است. جملات غالب به همراه ضرایب آن‌ها در این جدول بیان شده است. می‌بینیم که تمامی جفت‌ها در قسمت بالایی این جدول به واسطه مدارهایی تشکیل شده است که بالاترین j را دارد که آن‌ها به دلیل برهمکنش اسپین-مداری به پوسته زیرین کشیده می‌شود.

به بیان دیگر، از طرفی به دلیل اینکه تقارن $SU(3)$ می‌شکند و مجموعه مشخصی از مدارها از یک پوسته نوسانگر به پوسته دیگر کشیده می‌شوند، خوش‌شانس نیستیم. اما از طرف دیگر خوش‌شانس هستیم که آن مجموعه مدارهایی که از یک پوسته نوسانگر به پوسته دیگر عبور می‌کنند دارای ساده‌ترین ساختار ممکن در مدل پوسته‌ای هستند که متناظر با تقریب خیلی خوب یک تک‌ویژه‌بردار در پایه‌های مدل پوسته‌ای می‌باشد. علاوه بر این، مدارهای متعلق به یک پوسته معین و مدارهای متجاوز همان پوسته، هم‌تاهای (1110) هستند. علاوه بر این، این ساده‌سازی برای تمامی مقادیر تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ رخ می‌دهد.

به بیان دیگر، برهمکنش اسپین-مداری با فشار آوردن بر مدارهایی که دارای بیشترین ویژه‌مقدار تکانه زاویه‌ای کل در هر پوسته هستند و انتقال آن‌ها به لایه زیرین، تقارن $SU(3)$ نوسانگر هماهنگ را می‌شکند. با همین رویه، پوسته مورد بحث توسط مدارهایی از پوسته بالایی مورد تجاوز قرار می‌گیرند. در نمادگذاری نیلسون می‌دانیم که این مجموعه از مدارهای مرزی جفت مدارهایی با اختلاف اعداد کوانتومی $[110]$ هستند ویژه‌مقادیر تکانه زاویه‌ای مداری، اسپینی

جدول ۲.۵: مدارهای نیلسون $\Omega [Nn_z\Lambda]$ به همراه ویژه‌بردارهای موثر که در بسط آن‌ها در پایه‌های $|NLj\Omega\rangle$ ظاهر شده‌اند، به همراه ضرایب مرتبط به‌زای $\epsilon = 0.22$ در این جدول بیان شده است.

$\Omega [Nn_z\Lambda]$	$ NLj\Omega\rangle$	$\Omega [nn_z\Lambda]$	$ NLj\Omega\rangle$
$\frac{1}{2} [55^0]$	0.9519	$\frac{1}{2} [66^0]$	0.9270
$\frac{3}{2} [541]$	0.9633	$\frac{3}{2} [651]$	0.9418
$\frac{5}{2} [532]$	0.9777	$\frac{5}{2} [642]$	0.9610
$\frac{7}{2} [523]$	0.9898	$\frac{7}{2} [633]$	0.9783
$\frac{9}{2} [514]$	0.9974	$\frac{9}{2} [624]$	0.9911
$\frac{11}{2} [505]$	1.0000	$\frac{11}{2} [615]$	0.9983
$\frac{7}{2} [404]$	0.9958	$\frac{7}{2} [514]$	0.9382

و کل یکسان دارند و فقط یک واحد نوسانی در راستای z و بنابراین یک واحد در N تفاوت دارند. این جفت‌مدار در مدل پوسته‌ای ساختار بسیار ساده‌ای دارند که هر یک متناظر با یک ویژه‌بردار منفرد می‌باشد. بنابراین در پایه‌های مدل پوسته‌ای این جفت‌های متناظر با $|1110\rangle$ هستند.

فصل ۶

مبحثی بر اعداد جادویی در مدل

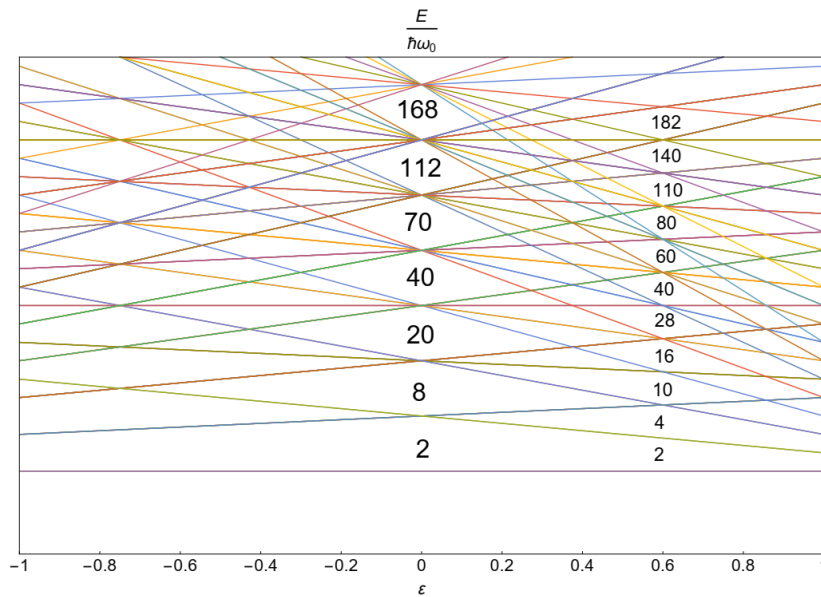
proxy-SU(۳)

مشخص است که نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی در حالت بدون تغییر شکل دارای اعداد جادویی $۲, ۸, ۲۰, ۴۰, ۷۰, \dots$ می‌باشد. اما با افزایش مقدار تغییر شکل تغییری در اعداد جادویی پدید می‌آید و مجموعه مشخص و معلوم آن در $\varepsilon = 0.6$ بدست می‌آید. این مطلب متناظر با شکل کشیده با نسبت محوری $1:2$ $\omega_{\perp}/\omega_z = 2$ می‌باشد که منجر به اعداد جادویی $۲, ۴, ۱۰, ۱۶, ۲۸, ۴۰, ۶۰, ۸۰, ۱۱۰$ می‌شود. این مطلب در شکل ۱.۶ به تصویر کشیده شده است.

در هسته اتم‌ها اعداد جادویی نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی کاملاً توسط برهمکنش اسپین-مداری دستخوش تغییر می‌شود. در مقدار صفر از تغییر شکل اعداد جادویی شناخته‌شده عبارتند از $۲, ۸, ۲۰, ۲۸, ۵۰, ۸۵, \dots$ همانند مورد نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی انتظار می‌رود که با افزایش مقدار تغییر شکل، این اعداد جادویی نیز تغییر کند. در ادامه سعی بر این داریم که این تغییر را بررسی کنیم.

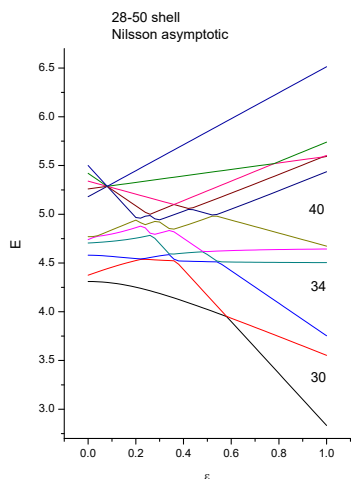
برای مدل پوسته‌ای و مدل proxy-SU(۳) از هامیلتونی نیلسون به همراه تابع موج مجانبی^۱ استفاده می‌شود. این محاسبات همانند محاسبات قسمت مدل proxy-SU(۳) می‌باشد که تا مقدار تغییر شکل $\varepsilon = 1$ گسترش داده شده‌اند. در شکل‌های ۲.۶ و ۳.۶ نتایج عددی برای پوسته‌های $۵۰-۲۸$ و $۸۲-۵۰$ نشان داده شده است. قسمت بالایی این تصاویر متناظر با مدل پوسته‌ای رایج می‌باشد که شامل برهمکنش اسپین-مداری می‌باشد در حالیکه قسمت پایینی این تصاویر متناظر با مورد نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی بدون حضور برهمکنش اسپین مدار می‌باشد. بدیهی است که

¹asymptotic wave function

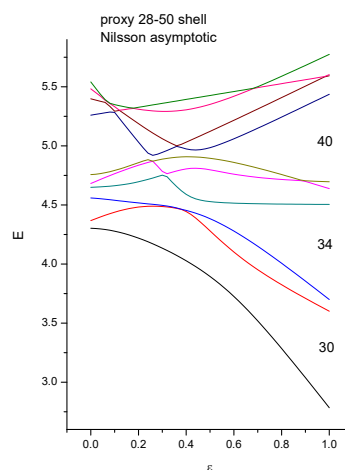


شکل ۱.۶: ترازهای نیلسون در تغییر شکل های زیاد.

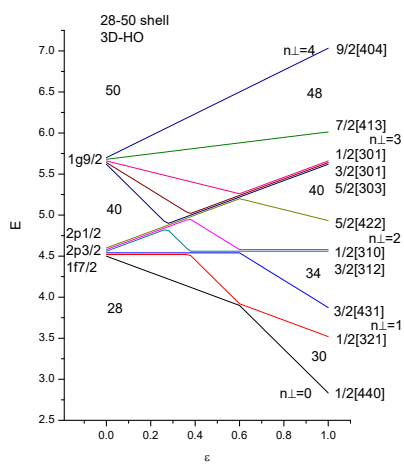
در تغییر شکل های زیاد فاصله انرژی مشابهی میان مدارها در هر دو مورد رخ می دهد. محاسبات مشابهی نیز برای مورد مدل proxy-SU(۳) می تواند انجام شود که در قسمت سمت راست این تصاویر نشان داده شده اند که نشان دهنده میزان خوب بودن این تقریب می باشد. بگذارید به عنوان مثال شکل ۲.۶ را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار دهیم. در این تصویر نتایج محاسبات برای پوسته ۵۰-۲۸ ارائه شده است. قسمت (آ) نتایج عددی را برای مدل پوسته ای معمولی را در چارچوب نیلسون نشان می دهد. با افزایش تغییر شکل فاصله های پوسته ای ۲ برای اعداد ۴۰، ۳۴ و ۳۰ پدید می آید. فاصله های مشابهی در قسمت (ج) ظاهر می شود که در آن محاسبات برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی با صرف نظر کردن از برهمکنش اسپین-مداری انجام شده است. توجه کنید که عدد ۴۰، همان عدد جادویی ای است که برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی با مقدار تغییر شکل صفر بدست آمده بود. همان طور که در قسمت های (ب) و (د) شکل ۲.۶ نشان داده شده است، نتایج مشابهی می تواند با استفاده از مدل proxy-SU(۳) بدست آید. فرآیند مشابهی در شکل ۳.۶ طی شده است ولی برای مورد ۸۲-۵۰ دیده می شود که نتایج مشابهی برای این مورد حاصل می شود. فاصله های پدید آمده در این مورد عبارتند از ۷۰ و ۵۶، ۶۲. توجه شود که عدد ۷۰ همان عدد جادویی ای است که برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی با مقدار تغییر شکل صفر بدست آمده بود.



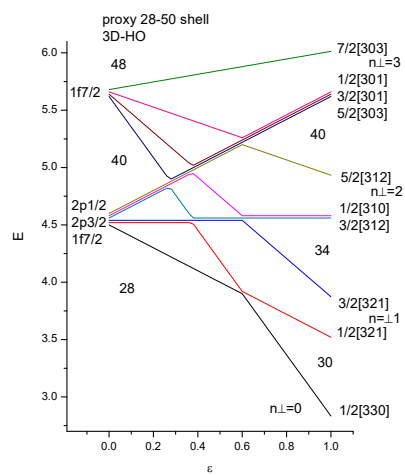
(ا)



(ب)

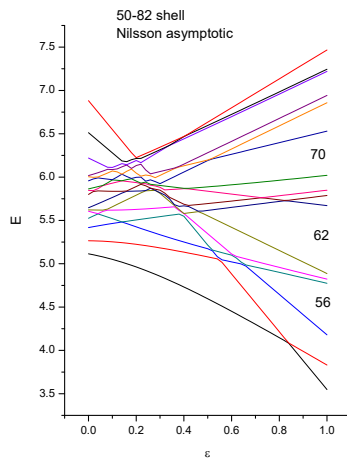


(ج)

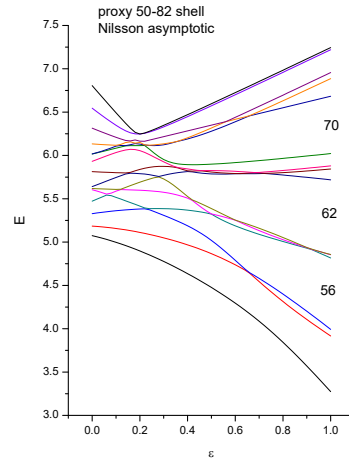


(د)

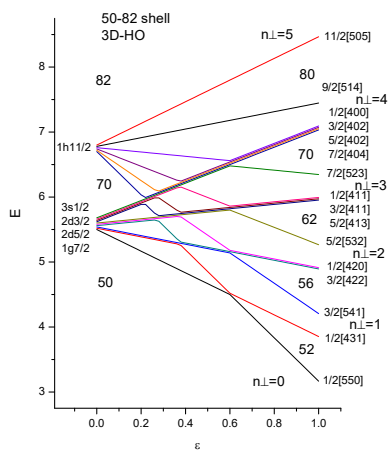
شکل ۲.۶: نتایج محاسبات عددی برای بررسی اعداد جادویی جدید تحت تاثیر مقادیر غیر صفر از تغییر شکل برای پوسته ۲۸-۵۰.



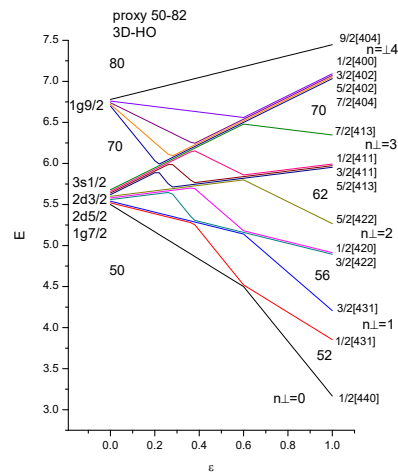
(ا)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۳.۶: مشابه شکل ۲.۶ اما برای پوسته ۸۲-۵۰.

فصل ۷

بررسی واپاشی آلفا به کمک مدل

proxy-SU(۳)

در این قسمت قصد داریم که با بکارگیری مدل proxy-SU(۳)، واپاشی آلفا را برای تعدادی از هسته‌های زوج-زوج بررسی کنیم. این بررسی به صورت ارائه یک فرمول نیمه تجربی برای تمامی ایزوتوپ‌های در نظر گرفته شده می‌باشد. از جمله مهم‌ترین وجه این مطالعه، عام بودن این فرمول می‌باشد که فارغ از این مطلب است که کدام ایزوتوپ به کدام پوسته هسته‌ای تعلق دارد. همچنین به منظور مقایسه نتایج بدست آمده، این فرمول نیمه تجربی با دو فرمول نیمه تجربی دیگر مقایسه می‌شود. ما برای فرمول نیمه تجربی‌ای که قرار است برای نیمه عمر واپاشی آلفا ارائه دهیم، نیاز به محاسبه پارامترهای تغییر شکل هسته به کمک مدل proxy-SU(۳) داریم. بنابراین در ادامه در ابتدا چگونگی محاسبه این پارامترها را برای هسته‌ها معرفی می‌شود سپس به فرمول‌های نیمه تجربی می‌پردازیم.

۱.۷ اعداد کوانتومی لیوت و پارامترهای تغییر شکل هسته

یکی از دستاوردهای مدل proxy-SU(۳) این است که با ارائه یک رویه جانمایی ترازها، پوسته‌هایی را فراهم می‌کند که تماماً به یک لایه اصلی نوسانگر تعلق دارند. در چنین حالتی می‌توانیم از اعداد کوانتومی لیوت^۱ و جبر SU(۳) استفاده کرد. امروزه فیزیکدانان با مدل پوسته‌ای هسته‌ای آشنا هستند، اما تعداد کمی از آن‌ها درگیر تقارن SU(۳) لیوت هستند. خلاصه این تقارن منجر به تحقق مدل پوسته‌ای می‌شود. در حالیکه مدل پوسته‌ای حالت‌های تک‌ذره‌ای

¹Elliott quantum numbers

را بررسی می‌کند، تقارن SU(۳) الیوت به ما می‌آموزد که چگونه نوکلئون‌های ظرفیت را با هم مرتبط کنیم تا حالت‌های هسته‌ای رفتار جمعی را بدست آوریم. در مدل SU(۳) الیوت محاسبات هر مشاهده‌پذیر بر اساس اعداد کوانتومی الیوت (λ, μ) می‌باشد. [۱۶، ۱۷] سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر^۲ خواص حالت پایه هسته را بیان می‌کند. برای محاسبه سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر روش ساده‌ای در اینجا بیان می‌شود که اساس بقیه محاسبات در ادامه این قسمت خواهد شد. برای محاسبه سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر گام‌های زیر را بایستی دنبال کرد

۱. حالت‌های کارتری $|n_x, n_y, n_z\rangle$ بردارهای یک جبر $U\left(\frac{(N+1)(N+2)}{2}\right)$ هستند. مدارهای نوسانگر هماهنگ همسانگر سه‌بعدی تبهگن به‌صورت زیر مرتب می‌شوند

$$|n_x, n_y, n_z\rangle = |n, 0, 0\rangle, |n-1, 1, 0\rangle, |n-1, 0, 1\rangle, \dots |0, 0, n\rangle. \quad (1.7)$$

به‌عنوان مثال برای $N = 2$ تعداد $\frac{(N+1)(N+2)}{2} = 6$ مدار وجود دارد. ابتدا بایستی مدارهای را به‌صورت زیر مرتب کرد

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |2, 0, 0\rangle, & |2\rangle &= |1, 1, 0\rangle, & |3\rangle &= |1, 0, 1\rangle, & |4\rangle &= |0, 2, 0\rangle, \\ |5\rangle &= |0, 1, 1\rangle, & |6\rangle &= |0, 0, 2\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

۲. سپس در هر یک از مدارهای $|n_x, n_y, n_z\rangle$ حداکثر دو نوترون و یا پروتون قرار می‌گیرد بایستی توجه کرد که ترتیب قرار گرفتن این نوکلئون‌ها همانند ترتیب مدارهای تبهگنی است که در بالا اشاره شد. برای مثال ${}^{19}\text{Mg}^{13}$ دارای $11 = 8 - 19$ نوترون در لایه $2-8$ می‌باشد. بنابراین در هر یک از مدارهای $|5\rangle, \dots, |1\rangle$ دو نوترون قرار می‌گیرد در حالیکه آخرین مدار را تنها نوترون باقی مانده مدار $|6\rangle$ اشغال می‌کند.

۳. پس از آن مجموع واحدهای کوانتومی در هر محور کارتری به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{Z_{\text{val}}, N_{\text{val}}} n_{z_i}, \quad \sum_{i=1}^{Z_{\text{val}}, N_{\text{val}}} n_{x_i}, \quad \sum_{i=1}^{Z_{\text{val}}, N_{\text{val}}} n_{y_i}. \quad (3.7)$$

محاسبه می‌شود. بنابراین برای ۱۱ نوترون در $U(6)$ ترتیب منجر به $8, 8, 6$ می‌شود.

۴. نتایج بدست آمده را به‌صورت کاهش‌ناپذیر مرتب می‌کنیم که در واقع این اعداد، اعداد کوانتومی $[f_1, f_2, f_3]$ جبر $U(3)$ هستند. برای مثال حاضر داریم $[f_1, f_2, f_3] = [8, 8, 6]$.

۵. در نهایت λ و μ عبارتند از

$$\lambda = f_1 - f_2, \quad \mu = f_2 - f_3, \quad (4.7)$$

که منجر به $(\lambda, \mu) = (0, 2)$ برای ۱۱ ذره در $U(6)$ می‌شود.

در بالا چگونگی محاسبه سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر را برای نوترون‌ها در یک مثال گویا توضیح دادیم. بگذارید که آن‌ها را با (λ_n, μ_n) نمایش دهیم. اگر همان گام‌ها را برای پرتون‌های یک هسته برداریم به (λ_p, μ_p)

²highest weight irreducible representation

می‌رسیم. در نهایت سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر برای یک هسته عبارتست از

$$\lambda = \lambda_n + \lambda_p, \quad (5.7)$$

$$\mu = \mu_n + \mu_p. \quad (6.7)$$

از طرفی جبر $SU(3)$ دارای دو عملگر کازیمیر^۳ مرتبه دوم و سوم زیر می‌باشد

$$C_2 = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu), \quad (7.7)$$

$$C_3 = \frac{2}{9}(\lambda^3 - \mu^3) + \frac{1}{3}\lambda\mu(\lambda - \mu) + (\lambda + 2)(2\lambda + \mu). \quad (8.7)$$

عملگر کازیمیر با تمامی مولدهای جبر جابجا می‌شود. سپس پارامترهای تغییر شکل بر حسب عملگر کازیمیر C_2 و سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر (λ, μ) محاسبه می‌شوند

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5(A\bar{r}^2)^2} (C_2 + 3), \quad (9.7)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}(\mu + 1)}{2\lambda + \mu + 3} \right), \quad (10.7)$$

که در آن A عدد جرمی و شعاع مربعی میانگین بدون بعد $\bar{r}^2 = 0.87^2 A^{1/3}$ می‌باشد. البته می‌توان کمیت β^2 را در ضریب مقیاسی $(A/S)^2$ ضرب کرد که منظور S برآوردی از نوترون‌ها و پروتون‌های پوسته ظرفیت است. بنابراین داریم

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5(S\bar{r}^2)^2} (C_2 + 3) \quad (11.7)$$

در جدول ۱۰.۷ مقادیر مختلف برای سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر در پوسته‌های مختلف محاسبه به ازای تعداد نوکلئون‌های ظرفیت M فهرست شده است.

۲.۷ فرمول نیمه تجربی نیمه عمر واپاشی آلفا

در این قسمت قصد داریم که در ابتدا دو تا از فرمول‌های نیمه‌تجربی ارائه شده برای نیمه عمر واپاشی آلفا را معرفی کنیم. پس از آن فرمول خود را ارائه کنیم. در اینجا لازم می‌بینیم که دو مطلب را توضیح دهیم. مطلب اول آن است که در برخی از فرمول‌های نیمه‌تجربی چند مجموعه از ثابت‌ها را برای ایزوتوپ‌های مختلف معرفی می‌کنند. علت این امر این است که گنجانیدن اثرات پوسته‌ای و یا وضعیت زوج یا فرد بودن هسته مادر در فرمول کاری دشوار بوده و برای دوری از این دشواری، به ازای پوسته‌های مختلف و یا برای انواع مختلف هسته‌ها، مجموعه‌ای از ثابت‌ها معرفی می‌شود. در اینجا قرار است که ما با در نظر گرفتن عوامل موثر فرمولی را ارائه دهیم که در آن فقط یک مجموعه از پارامترهای ثابت معرفی شود.

مطلب دوم این است که در این قسمت به غیر از فرمولی که خودمان ارائه می‌دهیم از دو فرمول معرفی شده در بحث فرمول‌های نیمه‌تجربی آلفا یاد می‌شود و نتایج با آن‌ها مقایسه می‌شود. برای اینکه این قیاس، یک قیاس عادلانه‌ای

³Casimir operators

جدول ۱.۷: فهرست اعداد کوانتومی الیوت در مدل proxy-SU(۳). هر ستون نمایانگر سنگین‌وزن‌ترین نمایش کاهش‌ناپذیر برای $U\left(\frac{(N+2)(N+3)}{4}\right)$ در هر پوسته اصلی N می‌باشد.

	۲۸-۵۰	۵۰-۸۲	۸۲-۱۲۶	۱۲۶-۱۸۴	۱۸۴-۲۵۸
M	U(۱۰)	U(۱۵)	U(۲۱)	U(۲۸)	U(۳۶)
۰	(۰, ۰)	(۰, ۰)	(۰, ۰)	(۰, ۰)	(۰, ۰)
۲	(۶, ۰)	(۸, ۰)	(۱۰, ۰)	(۱۲, ۰)	(۱۴, ۰)
۴	(۸, ۲)	(۱۲, ۲)	(۱۶, ۲)	(۲۰, ۲)	(۲۴, ۲)
۶	(۱۲, ۰)	(۱۸, ۰)	(۲۴, ۰)	(۳۰, ۰)	(۳۶, ۰)
۸	(۱۰, ۴)	(۱۸, ۴)	(۲۶, ۴)	(۳۴, ۴)	(۴۲, ۴)
۱۰	(۱۰, ۴)	(۲۰, ۴)	(۳۰, ۴)	(۴۰, ۴)	(۵۰, ۴)
۱۲	(۱۲, ۰)	(۲۴, ۰)	(۳۶, ۰)	(۴۸, ۰)	(۶۰, ۰)
۱۴	(۶, ۶)	(۲۰, ۶)	(۳۴, ۶)	(۴۸, ۶)	(۶۲, ۶)
۱۶	(۲, ۸)	(۱۸, ۸)	(۳۴, ۸)	(۵۰, ۸)	(۶۶, ۸)
۱۸	(۰, ۶)	(۱۸, ۶)	(۳۶, ۶)	(۵۴, ۶)	(۷۲, ۶)
۲۰	(۰, ۰)	(۲۰, ۰)	(۴۰, ۰)	(۶۰, ۰)	(۸۰, ۰)
۲۲	(۰, ۰)	(۱۲, ۸)	(۳۴, ۸)	(۵۶, ۸)	(۷۸, ۸)
۲۴		(۶, ۱۲)	(۳۰, ۱۲)	(۵۴, ۱۲)	(۷۸, ۱۲)
۲۶		(۲, ۱۲)	(۲۸, ۱۲)	(۵۴, ۱۲)	(۸۰, ۱۲)
۲۸		(۰, ۸)	(۲۸, ۸)	(۵۶, ۸)	(۸۴, ۸)
۳۰		(۰, ۰)	(۳۰, ۰)	(۶۰, ۰)	(۹۰, ۰)
۳۲		(۰, ۰)	(۲۰, ۱۰)	(۵۲, ۱۰)	(۸۴, ۱۰)
۳۴			(۱۲, ۱۶)	(۴۶, ۱۶)	(۸۰, ۱۶)
۳۶			(۶, ۱۸)	(۴۲, ۱۸)	(۷۸, ۱۸)
۳۸			(۲, ۱۶)	(۴۰, ۱۶)	(۷۸, ۱۶)
۴۰			(۰, ۱۰)	(۴۰, ۱۰)	(۸۰, ۱۰)
۴۲			(۰, ۰)	(۴۲, ۰)	(۸۴, ۰)
۴۴				(۳۰, ۱۲)	(۷۴, ۱۲)
۴۶				(۲۰, ۲۰)	(۶۶, ۲۰)
۴۸				(۱۲, ۲۴)	(۶۰, ۲۴)
۵۰				(۶, ۲۴)	(۵۶, ۲۴)
۵۲				(۲, ۲۰)	(۵۴, ۲۰)
۵۴				(۰, ۱۲)	(۵۴, ۱۲)
۵۶				(۰, ۰)	(۵۶, ۰)
۵۸				(۰, ۰)	

بشود، فرآیند برازش را دوباره برای هر یک از این فرمول‌ها انجام می‌دهیم و پس از آن اقدام به مقایسه می‌کنیم. در واقع پس از این کار ما سه فرمول داریم که بر روی دامنه مشترکی از ایزوتوپ‌ها فرآیند برازش آن‌ها انجام شده می‌شود. حال پس از این توضیحات ابتدا فرمول‌ها معرفی می‌شوند و نتایج آن‌ها بررسی می‌گردد.

۱.۲.۷ فرمول چی

این فرمول نیمه تجربی توسط آقای چی^۴ و همکاران ایشان ارائه شده است [۲۶]

$$\log_{10} T_{1/2}^{Qi} = aZ_{\alpha}Z_d\sqrt{A/Q_{\alpha}} + b\sqrt{Z_{\alpha}Z_d(A_d^{1/3} + A_{\alpha}^{1/3})} + c, \quad (1.7)$$

که در آن پارامترهای ثابت آن a, b, c هستند، بار الکتریکی هسته دختر و ذره آلفا به ترتیب با Z_{α} و Z_d نشان داده شده‌اند. انرژی جنبشی آزاد شده در این فرآیند با Q_{α} بیان شده و پارامتر A در این فرمول عبارتست از

$$A = \frac{A_d A_{\alpha}}{A_d + A_{\alpha}}, \quad (2.7)$$

در که آن عدد جرمی هسته‌های دختر و ذره آلفا با A_d و A_{α} نمادگذاری شده‌اند.

۲.۲.۷ فرمول آرکاوای-پوانارو

آقایان آرکاوای^۵ و پوانارو^۶ برای ارائه این فرمول از فرمول آقای رویر^۷ برای نیمه عمر واپاشی آلفا الهام گرفتند که در آن جمله عدم تقارنی اضافه گردیده است. در واقع اثر این جمله عدم تقارنی $I = (N - Z) / A$ به صورت [۲۷]

$$\log_{10} T_{1/2}^{AP} = a + bA^{1/6}\sqrt{Z} + c\frac{Z}{\sqrt{Q_{\alpha}}} + dI + eI^2, \quad (3.7)$$

در نظر گرفته شده است که در آن بار الکتریکی و عدد جرمی هسته مادر با Z و A نشان داده شده است و پارامترهای ثابت این فرمول عبارتند از a, b, c, d, e . یادآوری می‌شود که این فرمول برای دسته‌های مختلف از هسته‌ها همچون زوج-زوج و زوج-فرد مجموعه‌های متفاوتی از ثابت‌ها را دارد، اما در این جا قرار است که در فرآیند برازش فقط یک مجموعه برای آن‌ها دوباره تعیین شود.

۳.۲.۷ فرمول نیمه تجربی نیمه عمر واپاشی آلفا به کمک مدل (۳) proxy-SU

در اینجا ما فرمول نیمه تجربی جدیدی را برای نیمه عمر واپاشی آلفا ارائه می‌دهیم که در آن علاوه بر جمله‌های مرسوم، پارامترهای تعیین کننده میزان و چگونگی تغییر شکل هسته مادر را به کمک مدل (۳) proxy-SU را هم در آن گنجانده‌ایم. بنابراین فرمول ما به صورت

$$\log_{10} T_{1/2} = aZ_p + bA_p + cQ_{\alpha}^{-1/2} + dI_d + eI_p + f\frac{A_d A_{\alpha}}{A_d + A_{\alpha}} + g(A_d^{1/3} + A_{\alpha}^{1/3}) + h|\beta_p| + i\gamma_p + j, \quad (4.7)$$

⁴Qi

⁵Akrawy

⁶Poenuar

⁷Royer

جدول ۲.۷: فهرست پارامترهای ثابت فرمول‌هایی که در این قسمت بیان شده به همراه مقدار σ^2 آن‌ها.

پارامترهای ثابت	proxy-SU(۳)	AP	Qi
a	۰/۰۸۰۶۳۵۶۵۳	-۳۳/۰۴۵۶۰۵۰۸۳	۱۲/۹۳۲۸۶۲۲۷۶
b	-۰/۰۵۴۴۳۵۹۳۹۴	-۰/۰۸۹۴۳۴۸۶۳۲	-۰/۰۴۱۶۱۷۷۰۹۶
c	۱۳۳/۴۰۴۲۳۸۰۶۳	۵۲/۱۰۰۵۸۷۲۸۷	-۲۲/۳۲۸۹۱۰۱۳۴
d	-۱۰/۸۷۶/۴۸۵۲۳۶۰۳۵	۴۹/۶۸۶۳۷۹۰۸	
e	۱۱۰/۵۳/۰۸۱۱۸۲۶۲۰	-۴۹/۵۳۹۳۰۶۰۳۷	
f	۱۵۶/۳۲۹۲۰۶۱۷۳		
g	۴۹/۵۵۸۳۶۰۶۰۵		
h	-۰/۰۸۱۲۳۰۵۱۴۴		
i	-۰/۰۱۹۸۷۹۶۱۳۵		
j	-۹۲۱/۰۳۷۹۴۲۰۶۲		
σ^2	۰/۰۹۰۴۲۶۵۰۵	۰/۰۳۳۷۴۰۵۱۰۰	۰/۰۲۴۲۵۱۲۷۷۷

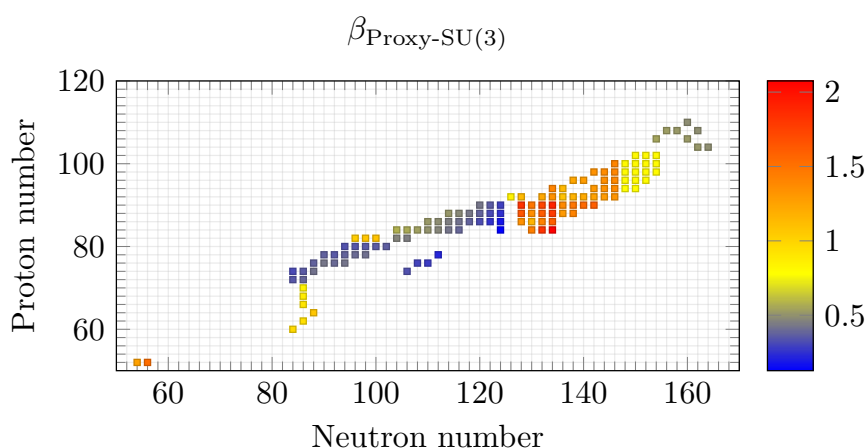
می‌باشد که در آن پارامترهای ثابت عبارتند از $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$. در این فرمول عوامل مرتبط با هسته مادر، دختر و ذره آلفا به ترتیب با زیروندهای d, p و α مشخص شده‌اند.

برای این کار مجموعه‌ای از ۱۳۰ ایزوتوپ زوج-زوج در نظر گرفته شده است که قرار است هر هریک از این فرمول‌های بیان‌شده بر روی این مجموعه فرآیند برازش را بر روی این مجموعه تجربه کنند. مبنای بدست آوردن پارامترهای آزاد در اینجا کمینه کردن مقدار

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\log_{10} T_{1/2}^{\text{theo.}} - \log_{10} T_{1/2}^{\text{exp.}})^2}{N - N^*}, \quad (۵.۷)$$

می‌باشد که منظور از theo. مقادیر پیش‌بینی شده از فرمول‌های بیان‌شده، exp. مقادیر تجربی متناظر و به منظور کم کردن اثر تعداد جملات مقدار N^* از کل تعداد ایزوتوپ‌ها که با N نشان داده شده است، کسر می‌گردد. در جدول ۲.۷ نتایج برازش فرمول‌های بیان‌شده به همراه مقدار σ^2 آن‌ها بیان شده است. با بررسی فرمول‌های مختلف و نتایج گزارش شده در این جدول چند نکته حائز اهمیت را می‌توان برداشت کرد. اولین نکته این است که لزوماً اگر تعداد جملات یک فرمول نیمه‌تجربی افزایش یابد منجر به نتایج بهتر نمی‌شود. دلیل این نکته از مقایسه فرمول‌های Qi و AP بدست می‌آید. همان‌طور که دیده می‌شود فرمول AP اگرچه که دارای تعداد جملات بیشتری از فرمول Qi می‌باشد، اما مقدار σ_{AP}^2 بیشتر از مقدار σ_{Qi}^2 می‌باشد. نکته دوم این است که فرمولی که ما به کمک مدل proxy-SU(۳) کردیم از دقت قابل توجهی برخوردار است. علت این امر این است که جملاتی که در این فرمول در نظر گرفته شده‌اند، تماماً جملات موثر هستند یعنی این که کمک می‌کنند تا دقت این فرمول افزایش یابد.

در انتهای این قسمت جدولی وجود دارد که در آن تمام جزئیات نتایج حاصل از هر سه فرمول و پارامترهای مورد نیاز برای استفاده از آن‌ها فهرست شده است. اما بررسی آماری‌ای از این نتایج در این جا مناسب خواهد بود. در شکل ۱.۷ تصویری از میزان تغییر شکل برای هسته‌های در نظر گرفته‌شده به تصویر کشیده شده است. نتایج



شکل ۱.۷: مقادیر تغییر شکل β برای هسته مادر که به کمک مدل proxy-SU(۳) انجام شده است.

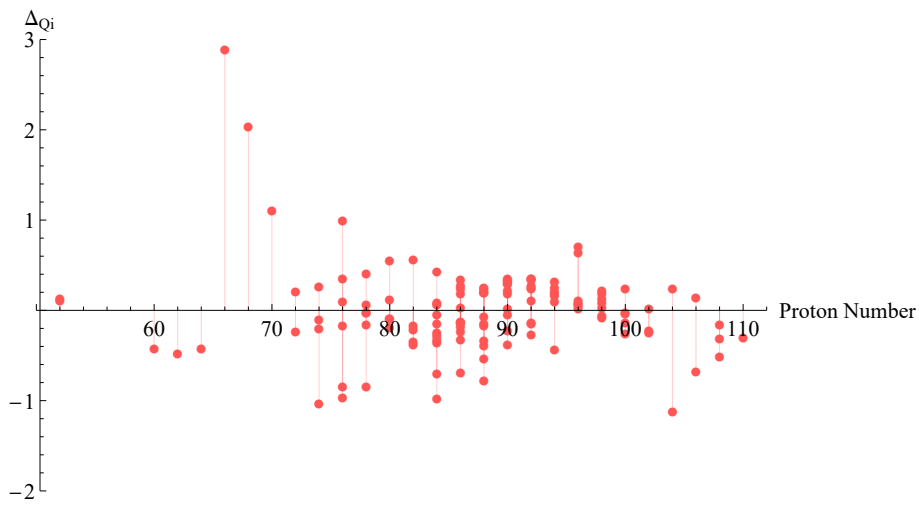
حاصل از پیش‌بینی‌های مدل proxy-SU(۳) می‌باشد که در قسمت‌های ابتدایی این قسمت توضیح آن‌ها کاملاً بیان شده است. در این شکل محور افقی بیان‌گر تعداد نوترون‌ها، محور عمودی بیان‌گر تعداد پروتون‌ها می‌باشد. در این صفحه مربع‌های رنگی‌ای وجود دارد که طیف رنگ آن‌ها معرف میزان تغییر شکل پیش‌بینی‌شده برای هسته مورد نظر می‌باشد. در کنار این نمودار توصیف این طیف رنگی نیز آورده شده است.

مطلب دیگر که حائز اهمیت می‌باشد، بررسی میزان خطای $\Delta T = \log T_{1/2}^{\text{theo.}} - \log T_{1/2}^{\text{exp.}}$ می‌باشد. در شکل‌های ۲.۷، ۳.۷ و ۴.۷ به ترتیب نمودار این خطا برای فرمول‌های AP، Qi و فرمولی که ما به کمک مدل proxy-SU(۳) ارائه کرده‌ایم به تصویر کشیده شده است. در این تصاویر محور افقی معرف تعداد پروتون‌های هسته مادر می‌باشد و ایزوتوپ‌های یک هسته معین در خطی به موازات محور عمودی به صورت نقاط توپر نشان داده شده‌اند. محور عمودی نیز بیان‌گر میزان خطا می‌باشد. به منظور اینکه فرآیند مقایسه میان این سه فرمول راحت‌تر شود، سعی شده است که این نمودارها از مقیاس عمودی یکسانی برخوردار باشد. همان‌طور که دیده می‌شود خطای فرمولی که توسط مدل proxy-SU(۳) ارائه شده است بسیار کمتر از دو فرمول دیگر می‌باشد. به عبارت دیگر نقاط مشخص شده در شکل ۴.۷ پیرامون محور افقی متمرکزتر از نقاط مشخص شده در شکل‌های ۲.۷ و ۳.۷ می‌باشد.

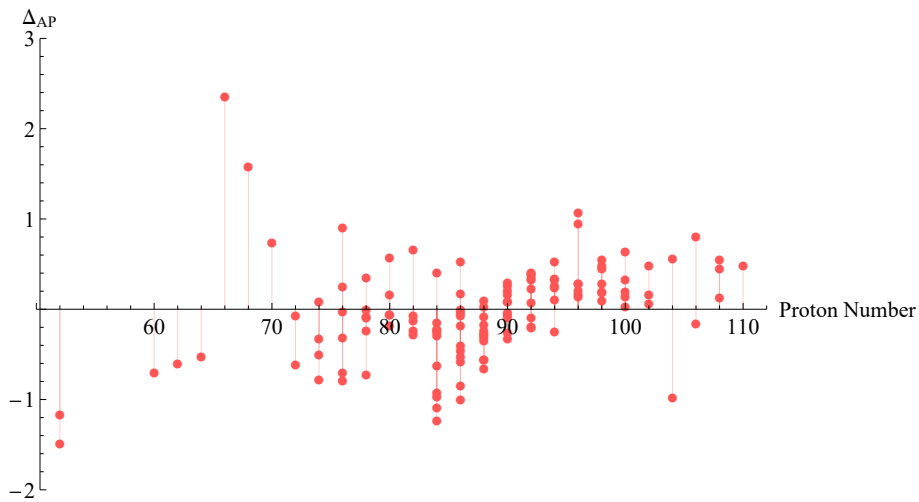
همچنین می‌توان از منظری دیگر به میزان خطا توجه کرد که قدری کمی‌تر باشد. اگر 10° را به میزان خطا برسانیم، می‌توانیم خطا را به ثانیه بدست آوریم. بنابراین در شکل‌های ۵.۷، ۶.۷ و ۷.۷ پیشینه‌نمایی^۸ از خطا به ترتیب برای فرمول‌های AP، Qi و فرمولی که ما به کمک مدل proxy-SU(۳) ارائه کرده‌ایم به تصویر کشیده شده است. ارتفاع هر ستون بیان‌گر تعداد ایزوتوپ‌ها و عرض این ستون‌ها بیان بازه زمانی خطا می‌باشد. به عنوان مثال در شکل ۶.۷ اولین ستون که در واقع بزرگ‌ترین ستون آن می‌باشد نمایان‌گر ۶۶ ایزوتوپ می‌باشد که خطای پیش‌بینی برای آن‌ها در بازه [۰, ۱] ثانیه می‌باشد.

در نهایت به منظور به پایان رساندن این قسمت جزئیات کامل فرمول‌ها و ایزوتوپ‌های در نظر گرفته شده در جدولی در انتهای این قسمت بیان شده است.

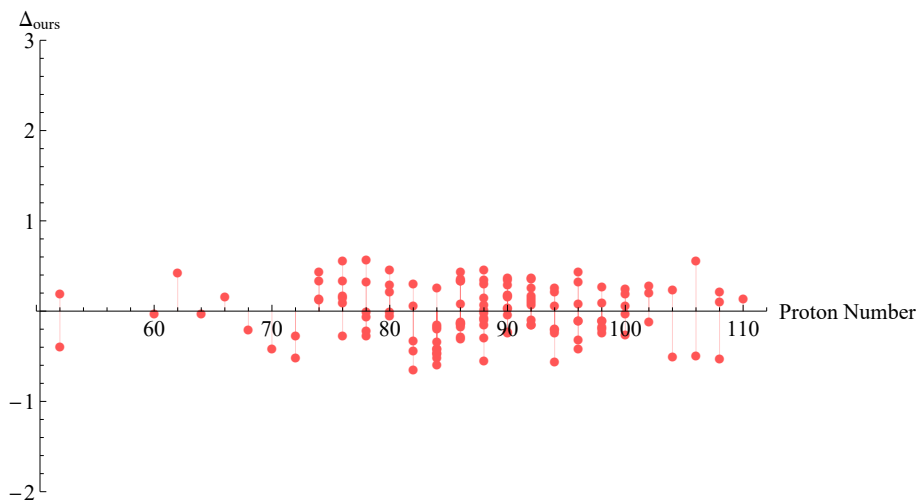
^۸histogram



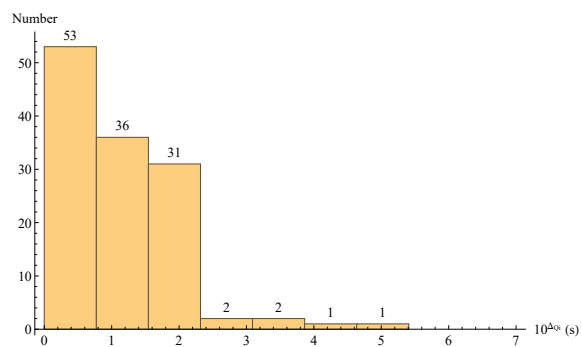
شکل ۲.۷: نمودار خطای فرمول Q_i بر حسب عدد اتمی.



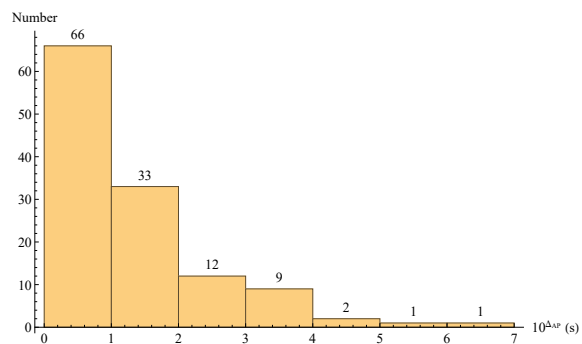
شکل ۳.۷: نمودار خطای فرمول AP بر حسب عدد اتمی.



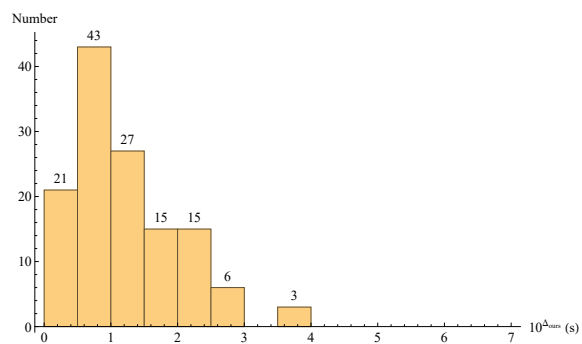
شکل ۴.۷: نمودار خطای فرمولی که توسط مدل proxy-SU(۳) ارائه کرده‌ایم بر حسب عدد اتمی.



شکل ۵.۷: پیشینه‌نمای خطای فرمول Q_i بر حسب ثانیه.



شکل ۶.۷: پیشینه‌نمای خطای فرمول AP بر حسب ثانیه.



شکل ۷.۷: پیشینه‌نمای خطای فرمولی که توسط مدل (۳) proxy-SU بیان کرده‌ایم بر حسب ثانیه.

نتایج و اطلاعات فرمول‌های نیمه‌تجربی بیان‌شده به کمک مدل‌های proxy-SU(۳)، AP و Qi.

Z_p	N_p	$m_p(\text{amu})$	$m_d(\text{amu})$	$m_\alpha(\text{amu})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$ \beta_p $	γ_p	$\log T^{\text{Exp.}}$	$\log T^{\text{Ours}}$	$\log T^{\text{AP}}$	$\log T^{\text{Qi}}$	Δ_{Ours}	Δ_{AP}	Δ_{Qi}
۴	۴	۸,۰۰۵۳۰۵۱۰۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۰,۰۹۱۸۴۰۴۰۳	۱,۴۵۷۷۱۳۸۶۵	۰,۱۵۶۱۷۶۸۷۱	-۱۶,۰۸۶۲۹۵۸۳	-۱۶,۰۸۶۶۹۹۹۱	-۱۳,۸۲۸۸۴۰۰۴	-۱۶,۷۹۲۲۸۴۰۵	۰,۰۰۰۴۰۴۰۸۲	۲,۲۵۷۸۵۹۸۷۲	-۰,۷۰۵۵۸۴۱۳۲
۵۲	۵۴	۱۰۵۹۳۷۵۰۴۲	۱۰,۱۹۳۰۲۹۵۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴,۲۹۰۱۴۵۰۵۹	۱,۲۵۲۹۹۱۶۱۶	۰,۱۱۴۹۶۰۹۲۱	-۳,۹۵۴۳۷۰۷۵۳	-۴,۱۵۴۹۰۱۹۶	-۵,۶۳۶۷۲۳۵۲۶	-۴,۰۱۹۳۵۲۴۱۳	۰,۲۰۰۵۳۱۲۰۷	-۱,۴۸۱۸۲۱۵۶۶	۰,۱۳۵۵۴۹۵۴۷
۵۲	۵۶	۱۰۷۹۲۹۴۴۴۶	۱۰,۳۹۲۳۱۴۳۲	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۳,۴۴۴۷۷۷۶۳۵	۱,۵۱۲۶۲۵۶۴۴	۰,۰۳۱۴۸۱۴۲۹	-۰,۰۶۴۲۸۲۹۲۵	۰,۳۲۲۲۱۹۲۹۵	-۰,۸۴۳۳۳۳۳۵۲	۰,۴۳۲۱۳۹۷۸۶	-۰,۳۸۶۵۰۲۲۲	-۱,۱۶۵۶۵۳۶۴۷	۰,۱۰۹۹۲۰۴۹۲
۶۰	۸۴	۱۴۳۹۱۰۰۸۷۳	۱۳,۹۰۵۴۳۸۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۱,۹۰۵۱۹۸۲۳۴	۰,۹۶۴۱۴۴۳۲	۰,۱۲۸۵۴۴۷۹۷	۲۲,۸۴۰۴۶۷۸۸	۲۲,۸۵۹۱۳۸۳	۲۲,۱۶۴۴۰۶۶	۲۲,۴۳۴۰۰۰۹۴	-۰,۰۱۸۶۷۰۴۱۹	-۰,۰۶۹۴۷۳۱۷۰۱	-۰,۴۲۵۱۳۷۳۵۷
۶۲	۸۶	۱۴۷۹۱۴۸۲۲۷	۱۴,۳۹۱۰۰۸۷۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۱,۹۸۶۰۸۱۷۴۹	۰,۹۳۶۶۷۱۳۷۸	۰,۰۶۱۰۵۵۲۲۶	۲۳,۷۷۲۹۳۴۵۱	۲۳,۳۴۲۴۲۲۶۸	۲۲,۷۴۴۱۷۵۱۷	۲۲,۸۶۸۲۳۵۷	۰,۴۳۰۵۱۱۸۲۵	-۰,۰۵۹۸۲۴۷۵۱	-۰,۴۷۴۱۸۶۹۷۷
۶۴	۸۸	۱۵۱۹۱۹۷۹۱	۱۴,۷۹۱۴۸۲۲۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۲,۲۰۳۰۴۷۲۶۹	۱,۰۶۵۷۰۲۰۴۳	۰,۱۲۴۳۴۸۴۵۴	۲۱,۵۱۰۲۴۵۰۴	۲۱,۵۳۲۷۵۴۳۸	۲۱,۰۱۶۴۳۳۶۶	۲۱,۱۱۵۲۶۲۹	-۰,۰۲۲۵۰۹۳۴	-۰,۰۵۱۶۳۲۰۷۱۵	-۰,۴۱۷۴۹۱۴۷۵
۶۶	۸۶	۱۵۱۹۲۴۷۱۸۳	۱۴,۷۹۱۸۱۱۴۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۳,۷۲۶۴۶۳۳۸	۰,۹۰۷۱۴۴۰۵۲	۰,۲۳۱۰۱۷۳۸۲	۴,۰۹۵۵۸۳۵۱۹	۳,۹۳۲۹۸۰۸۲۲	۶,۲۹۵۳۷۷۴۶۲	۶,۸۲۰۴۸۷۸۶۱	۰,۱۶۲۶۰۲۶۹۷	۲,۳۶۲۳۹۶۶۴	۲,۸۸۷۵۰۷۰۳۹
۶۸	۸۶	۱۵۳۹۳۲۷۸۳۱	۱۴,۹۰۲۵۵۸۵۲	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴,۲۷۹۸۸۳۷۱۷	۰,۸۷۴۰۳۱۰۳۴	۰,۱۹۴۸۱۹۴۷۴	۲,۱۵۱۷۳۲۰۳۹	۲,۳۵۰۶۲۵۵۵۳	۳,۹۳۸۴۹۹۴۹۴	۴,۳۸۵۴۳۳۹۰۱	-۰,۱۹۸۸۹۳۵۱۵	۱,۵۸۷۸۷۳۹۴	۲,۰۳۴۸۰۸۳۴۸
۷۰	۸۶	۱۵۵۹۴۲۸۱۸۲	۱۵,۱۹۳۵۰۵۰۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴,۸۱۰۷۶۹۳۴۴	۰,۸۳۴۰۹۳۴۹۸	۰,۰۶۷۳۸۰۳۴۲	۱,۰۰۹۲۳۲۹۰۶	۱,۴۱۶۶۴۰۵۰۷	۲,۱۶۳۳۴۶۷۵۲	۲,۵۲۱۱۰۴۳۰۳	-۰,۰۴۰۷۴۰۷۶۰۱	۰,۷۴۶۷۰۶۲۴۴	۱,۱۰۴۴۶۳۷۹۵
۷۲	۸۴	۱۵۵۹۵۹۳۶۴	۱۵,۱۹۵۰۲۸۸۹	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۰۲۸۴۹۳۲۳۸	۰,۳۴۷۵۳۶۹۱۵	۰,۲۷۶۱۸۳۲۵۷	-۲,۱۵۳۸۵۳۵۲۹	-۱,۶۳۸۲۷۲۱۶۴	-۲,۲۵۰۱۱۸۰۸۹	-۱,۸۷۲۷۶۲۸۹۳	-۰,۰۵۱۵۵۸۱۳۶۵	-۰,۰۶۱۱۸۴۵۹۲۵	-۰,۲۳۴۴۹۰۷۲۹
۷۲	۸۶	۱۵۷۹۵۴۷۹۹۴	۱۵,۳۹۴۶۳۹۳۹	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۴۰۴۷۰۱۳	۰,۳۸۵۱۸۳۶۰۵	۰,۲۶۹۴۱۰۹۲۳	۰,۱۸۴۴۱۹۴۵۷	۰,۴۵۴۸۴۴۸۶	۰,۳۸۶۶۷۸۹۴۶	۰,۶۷۲۲۳۸۷۲۵	-۰,۰۲۷۰۴۲۵۴۰۳	-۰,۰۶۸۱۶۵۹۱۴	۰,۲۱۷۳۹۳۸۶۵
۷۴	۸۴	۱۵۷۹۷۴۵۶۲	۱۵,۳۹۶۴۸۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۶۱۲۴۴۱۴۳۸	۰,۳۱۵۴۸۶۳۹۷	۰,۴۴۶۷۷۰۲۶۱	-۲,۴۵۶۰۹۷۱۷۹	-۲,۹۰۳۰۸۹۹۸۷	-۳,۴۰۵۹۱۸۷۳۲	-۳,۱۰۰۶۱۱۵۷۲	۰,۴۴۶۹۹۲۸۰۸	-۰,۰۵۰۲۸۲۸۷۴۵	-۰,۱۹۷۵۲۱۵۸۵
۷۴	۸۶	۱۵۹۹۶۸۴۷۸۸	۱۵,۵۹۵۹۳۶۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۰۶۵۴۴۹۳۴۴	۰,۳۵۵۲۸۰۲۸۶	۰,۴۰۲۶۴۴۶۷۱	-۰,۹۰۵۱۶۰۸۵۳	-۱,۰۴۵۷۵۷۴۹۱	-۱,۳۷۳۰۲۳۵۴۳	-۱,۱۴۴۶۱۱۶۰۲	۰,۱۴۰۵۹۶۶۳۷	-۰,۰۳۲۷۲۶۶۰۵۲	-۰,۰۹۸۸۵۴۱۱۱
۷۴	۸۸	۱۶۱۹۶۳۴۹۷۴	۱۵,۷۹۵۴۷۹۹۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۶۷۷۲۶۸۶۴۷	۰,۴۱۷۸۷۳۶۵۹	۰,۲۹۱۶۶۰۵۸	۰,۲۶۳۷۸۹۱۳۵	۰,۱۳۳۵۳۸۹۰۸	۰,۲۱۹۶۷۸۰۱۳	۰,۴۰۳۹۸۱۴۵۹	۰,۱۳۰۲۵۰۲۲۶	۰,۰۸۶۱۳۹۱۰۵	۰,۲۷۰۴۴۲۵۵۱
۷۴	۱۰۶	۱۷۹۹۴۶۷۰۴۵	۱۷,۵۹۴۱۴۰۸۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۲,۵۰۸۱۱۷۲۴۷	۰,۳۳۴۰۳۳۲۶۶	۰,۴۱۲۳۱۵۲۲۹	۲۶,۰۹۴۹۸۸۸۳	۲۵,۷۵۴۰۷۹۱۱	۲۴,۹۷۴۹۰۶۶۹	۲۴,۷۲۶۵۵۱۰۴	۰,۳۴۰۹۰۹۷۲۲	-۰,۰۷۷۹۱۷۲۴۲۳	-۱,۰۲۷۵۲۸۰۷۱
۷۶	۸۸	۱۶۳۹۷۸۰۳۵۶	۱۵,۹۹۶۸۴۷۸۸	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۴۷۷۲۲۹۴۴۹	۰,۳۷۵۶۴۶۰۷۹	۰,۳۲۴۲۱۱۱۳۳	-۱,۳۳۲۸۱۵۵۵۴	-۱,۶۷۷۷۸۰۷۰۵	-۱,۹۸۸۹۱۶۷۱	-۱,۸۳۹۹۷۸۸۰۳	۰,۳۴۴۹۶۵۱۵۱	-۰,۰۳۱۱۱۳۶۰۰۵	-۰,۱۶۲۱۹۸۰۹۸
۷۶	۹۰	۱۶۵۹۷۲۶۹۰۸	۱۶,۱۹۶۳۴۹۷۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۱۳۸۶۲۳۸۱۲	۰,۴۲۶۴۸۳۴۲۲	۰,۳۷۴۱۰۹۲۶	-۰,۵۲۷۵۹۷۵۷۳	-۰,۷۰۱۱۴۶۹۲۴	-۰,۷۱۸۷۲۷۴۸۶	-۰,۰۶۰۰۸۲۲۳۸۲	۰,۱۷۳۵۴۹۳۵	-۰,۰۱۷۵۸۰۵۶۲	۰,۱۰۰۳۲۴۵۴۲
۷۶	۹۲	۱۶۷۹۶۷۸۰۳۷	۱۶,۳۹۵۸۹۵۴۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۸۱۸۱۵۲۵۰۶	۰,۳۹۷۹۷۰۸۶۴	۰,۳۴۰۹۰۶۷۳	۰,۴۷۲۵۵۰۰۱۳	۰,۳۲۲۲۱۹۲۹۵	۰,۵۷۵۱۳۷۶۷۲	۰,۶۷۱۹۶۵۵۴۸	۰,۱۵۰۳۳۰۷۱۸	۰,۲۵۲۹۱۸۳۷۷	۰,۳۴۹۷۴۶۲۵۴
۷۶	۹۴	۱۶۹۹۶۳۵۷۷	۱۶,۵۹۵۵۰۲۷۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۵۳۹۱۵۰۳۹۶	۰,۴۲۱۹۵۳۱۰۷	۰,۲۴۲۵۶۳۸۷۴	۱,۴۲۷۵۲۱۰۷۵	۰,۸۶۷۴۶۷۴۸۸	۱,۷۷۷۱۱۱۲۶	۱,۸۶۷۲۰۷۵۲۱	۰,۵۶۰۰۵۳۵۸۷	۰,۹۰۹۶۴۳۷۷۲	۰,۹۹۹۷۴۰۰۳۳
۷۶	۱۰۸	۱۸۳۹۵۲۴۸۹۱	۱۷,۹۹۴۶۷۰۴۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۲,۹۶۳۴۱۶۷۶۷	۰,۲۹۸۲۲۱۴۶۱	۰,۴۶۱۸۱۸۵۳۹	۲۰,۹۷۵۹۱۳۶	۲۱,۲۴۶۹۹۴۶۳	۲۰,۴۶۳۴۱۲۱۶	۲۰,۲۸۷۶۰۳۴۸	-۰,۰۲۷۱۰۸۱۰۳۱	-۰,۰۷۸۳۵۸۲۴۷۱	-۰,۹۵۹۳۹۱۱۵۵
۷۶	۱۱۰	۱۸۵۹۵۳۸۳۸۲	۱۸,۱۹۴۸۲۰۴۲	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۲,۸۲۳۱۲۴۴۰۸	۰,۲۷۷۰۸۹۶۶۹	۰,۴۱۳۰۲۲۷۶۶	۲۲,۹۰۲۱۶۶۵۴	۲۲,۷۹۹۳۴۰۵۵	۲۲,۱۰۲۵۴۷۳۱	۲۱,۹۶۱۴۵۹۵۱	۰,۱۰۲۸۲۵۹۹۱	-۰,۰۶۹۶۷۹۳۲۴	-۰,۰۸۳۷۸۸۱۰۴
۷۸	۹۰	۱۶۷۹۸۸۱۵۰۷	۱۶,۳۹۷۸۰۳۵۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۹۹۷۲۳۵۲۲۲	۰,۳۷۲۶۴۰۷۸۲	۰,۳۲۴۲۱۱۱۳۳	-۲,۱۰۵۳۴۷۴۴۳	-۲,۶۷۷۷۸۰۷۰۵	-۲,۹۱۵۶۵۶۰۵۹	-۲,۸۳۳۲۵۵۹۳۷	۰,۵۷۲۴۳۳۲۶۲	-۰,۰۲۳۷۸۷۵۳۵۴	-۰,۱۵۵۴۷۵۲۳۲
۷۸	۹۲	۱۶۹۹۸۲۴۹۵۳	۱۶,۵۹۷۲۶۹۰۸	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۷۰۷۹۵۳۱۴	۰,۳۵۲۴۶۸۴۴۱	۰,۲۹۱۶۶۰۵۸	-۱,۵۲۷۴۲۶۴۷۸	-۱,۸۶۰۱۲۰۹۱۴	-۱,۹۴۴۷۴۵۰۵۳	-۱,۸۸۱۸۲۱۴۰۵	۰,۳۳۲۶۹۴۴۳۶	-۰,۰۸۴۶۲۴۱۳۹	-۰,۰۲۱۷۰۰۴۹۲
۷۸	۹۴	۱۷۱۹۷۷۳۴۷۱	۱۶,۷۹۶۷۸۰۳۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۴۶۴۷۵۳۰۱۴	۰,۳۷۸۶۴۴۵۰۳	۰,۱۸۵۶۵۰۰۵	-۱,۰۱۷۸۱۴۴۷۹	-۱,۰۱۷۷۲۸۷۶۷	-۱,۰۹۶۰۱۶۹۸۶	-۱,۰۳۶۶۷۸۲۲۴	-۸,۵۷۱۱۸E-۰۵	-۰,۰۷۸۲۸۸۲۱۹	-۰,۰۱۸۹۴۹۴۵۷
۷۸	۹۶	۱۷۳۹۷۲۸۱۸۸	۱۶,۹۹۶۳۵۷۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۱۸۳۷۱۰۹۳۱	۰,۳۹۶۹۷۷۵۳۹	۰,۲۹۶۶۳۷۶۹۷	-۰,۲۵۹۹۳۹۵۹۹	-۰,۰۵۱۰۹۸۲۳۹	-۰,۰۴۵۸۲۱۶۵۶	۰,۰۱۰۸۹۲۵۸۴	-۰,۰۲۰۸۸۴۱۳۶	۰,۰۰۵۲۷۶۵۸۳	۰,۰۶۱۹۹۰۸۲۳
۷۸	۹۸	۱۷۵۹۶۸۹۴۴۶	۱۷,۱۹۶۰۰۲۳۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۸۸۵۲۴۱۵۲۱	۰,۴۰۸۶۶۳۸۳۱	۰,۳۲۶۳۴۵۵۱۲	۰,۷۴۵۲۶۵۴۱۶	۰,۸۰۱۴۰۳۷۱	۱,۱۵۳۸۹۱۳۹۶	۱,۲۱۰۶۰۴۱۶	-۰,۰۵۶۱۳۸۲۹۴	۰,۳۵۲۴۸۷۶۸۶	۰,۴۰۹۲۰۰۴۵
۷۸	۱۱۲	۱۸۹۹۵۹۹۳۱۷	۱۸,۵۹۵۳۸۳۸۲	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۳,۲۵۱۱۴۱۳۹	۰,۲۲۰۶۹۷۳۱۵	۰,۲۱۶۱۲۶۵۱۱	۱۹,۰۴۶۱۸۳۱۶	۱۹,۳۱۱۷۵۳۸۶	۱۸,۵۹۰۶۹۹۶۶	۱۸,۴۶۹۲۵۴۶۸	-۰,۰۲۶۵۵۷۰۶۹۷	-۰,۰۷۲۱۰۵۴۲۰۶	-۰,۰۸۴۲۴۹۹۱۷۷
۸۰	۹۴	۱۷۳۹۹۲۸۶۳۷	۱۶,۹۹۸۲۴۹۵۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۲۳۳۱۹۴۸۴۲	۰,۳۳۵۰۶۵۲۸۴	۰,۰۲۳۰۸۹۹۰۶	-۲,۲۱۴۸۵۵۳۳۶	-۲,۶۷۷۷۸۰۷۰۵	-۲,۸۵۹۱۰۷۰۲۳	-۲,۸۶۶۲۲۷۱۰۸	۰,۴۶۲۹۲۵۳۶۹	-۰,۰۱۸۱۳۲۶۳۱۸	-۰,۰۱۸۸۴۴۶۴۰۳
۸۰	۹۶	۱۷۵۹۸۷۳۵۴۶	۱۷,۱۹۷۷۳۴۷۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۸۹۶۹۶۸۲۴۱	۰,۳۴۶۸۲۲۱۲۸	۰,۱۵۶۱۷۶۸۷۱	-۱,۴۶۷۴۶۳۳۰۷	-۱,۶۹۲۵۰۳۹۶۲	-۱,۷۵۱۶۰۱۳۳۵	-۱,۷۷۵۶۳۵۵۵	۰,۲۲۵۰۴۰۶۵۵	-۰,۰۵۹۰۹۷۳۷۳	-۰,۰۸۳۱۳۱۵۸۸

ادامه...

Z_p	N_p	$m_p(\text{amu})$	$m_d(\text{amu})$	$m_\alpha(\text{amu})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$ \beta_p $	γ_p	$\log T^{\text{Exp.}}$	$\log T^{\text{Ours}}$	$\log T^{\text{AP}}$	$\log T^{\text{Qi}}$	Δ_{Ours}	Δ_{AP}	Δ_{Qi}
۸۰	۹۸	۱۷۷۹۸۲۴۸۳۱	۱۷۳۹۷۲۸۱۸۸	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۵۷۷۳۹۴۸۹۶	۰,۳۵۶۹۳۰۴۸۴	۰,۱۹۴۸۱۹۴۷۴	-۰,۶۱۴۶۸۵۳۹	-۰,۵۷۰۲۴۷۷۲	-۰,۶۲۸۹۱۰۱۰۶	-۰,۶۶۱۰۰۸۱۱۳	-۰,۰۴۴۳۷۶۷	-۰,۰۵۸۶۶۲۳۸۶	-۰,۰۹۰۷۶۰۳۹۳
۸۰	۱۰۰	۱۷۹,۹۷۸۲۶۶۴	۱۷۵,۹۶۸۹۴۴۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۲۵۸۲۶۱۲۱۶	۰,۳۶۱۶۹۳۸۸۳	۰,۱۴۸۵۸۰۳۰۳	۰,۴۰۶۰۷۹۹۷۱	۰,۴۱۱۶۱۹۷۰۶	۰,۵۷۴۴۰۷۸۴۶	۰,۵۳۹۶۶۳۵۸۹	-۰,۰۰۵۵۳۹۷۳۵	۰,۱۶۲۷۸۸۱۴	۰,۱۲۸۰۴۳۸۸۳
۸۰	۱۰۲	۱۸۱,۹۷۴۶۹	۱۷۷,۹۶۵۶۴۸۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۹۹۶۹۴۷۲۵۲	۰,۳۶۵۲۷۳۰۶۱	۰,۰۲۰۸۶۵۰۵۴	۱,۳۳۶۱۸۲۳۴	۱,۰۳۴۶۲۸۴۵۷	۱,۶۱۱۲۹۷۴۳۸	۱,۵۸۹۲۷۹۰۲۴	۰,۳۰۱۵۵۳۸۸۴	۰,۵۷۶۶۶۸۹۸۱	۰,۵۵۴۶۵۰۵۶۷
۸۲	۹۶	۱۷۸,۰۰۳۸۳۰۲	۱۷۳,۹۹۲۸۶۳۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۷۹۰۳۱۲۲۸	۱,۰۳۶۵۵۴۸۱۹	۰,۱۵۶۱۷۶۸۷۱	-۳,۵۶۸۱۱۱۹۷۹	-۳,۶۳۸۲۷۲۱۶۴	-۳,۷۶۵۵۴۸۴۵۱	-۳,۸۴۴۰۰۰۴۶۳	۰,۰۷۰۱۶۰۱۸۵	-۰,۱۲۷۲۷۶۲۸۷	-۰,۲۰۵۷۲۸۲۹۹
۸۲	۹۸	۱۷۹,۹۷۹۷۹۱۸۲	۱۷۵,۹۶۸۹۴۴۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۴۱۵۰۱۰۴۲۴	۱,۰۶۶۸۱۰۷۷۸	۰,۱۹۴۸۱۹۴۷۴	-۲,۷۸۱۵۴۳۳۷۳	-۲,۳۴۶۷۸۷۴۸۶	-۲,۶۲۵۶۲۷۴۹۶	-۲,۷۲۴۱۷۱۹۵۵	-۰,۴۳۴۷۵۵۸۸۷	-۰,۲۷۸۸۴۰۰۱	-۰,۳۷۷۳۸۴۴۶۸
۸۲	۱۰۰	۱۸۱,۹۹۲۶۷۱۸	۱۷۷,۹۸۲۴۸۳۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۰۶۵۷۹۸۷۹۲	۱,۰۸۱۰۹۲۳۴۲	۰,۱۴۸۵۸۰۳۰۳	-۱,۹۰۸۰۳۳۳۷۵	-۱,۲۵۹۶۳۷۳۱۱	-۱,۴۹۳۲۹۹۹۰۶	-۱,۶۰۲۴۳۰۲۷۸	-۰,۶۴۸۳۹۶۰۶۵	-۰,۲۳۳۶۶۲۵۹۶	-۰,۳۴۲۷۹۲۹۶۸
۸۲	۱۰۴	۱۸۵,۹۸۴۲۳۸۹	۱۸۱,۹۷۴۶۹	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۴۶۹۹۰۵۱۰۹	۰,۴۶۱۶۵۶۱۶۴	۰,۱۹۴۸۱۹۴۷۴	۰,۳۵۸۲۲۳۳۷۲	۰,۶۸۳۰۴۷۰۳۸	۰,۶۱۳۵۳۳۹۰۵	۰,۵۱۴۹۹۷۰۳۴	-۰,۳۲۴۸۲۳۶۶۶	-۰,۰۶۹۵۱۳۱۳۳	-۰,۱۶۸۰۵۰۰۰۴
۸۲	۱۰۶	۱۸۷,۹۸۰۸۷۴۳	۱۸۳,۹۷۱۷۱۳۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۱۰۸۷۷۰۳۵	۰,۴۴۷۳۵۲۵۴	۰,۲۹۱۶۶۰۵۸	۱,۷۰۳۸۸۵۸۶۶	۱,۳۹۹۶۷۳۷۲۱	۲,۰۵۸۷۵۰۰۲۱	۱,۹۶۰۶۴۸۱۶۵	۰,۳۰۴۲۱۲۱۴۵	۰,۶۵۹۰۷۶۲۹۹	۰,۵۶۰۹۷۴۴۴۳
۸۴	۱۰۴	۱۸۷,۹۹۹۹۴۲۲	۱۸۳,۹۸۸۱۴۲۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸,۰۸۲۰۶۸۴۱۱	۰,۵۷۲۵۳۵۱۹۲	۰,۱۵۶۱۷۶۸۷۱	-۳,۹۸۵۷۷۲۷۱۵	-۳,۳۹۷۹۴۰۰۰۹	-۴,۰۱۵۴۶۱۷۷	-۴,۰۹۱۶۵۷۳۴۴	-۰,۵۸۷۸۳۲۷۰۶	-۰,۶۱۷۵۲۱۷۶۱	-۰,۶۹۳۷۱۷۳۳۵
۸۴	۱۰۶	۱۸۹,۹۹۵۱۰۱۲	۱۸۵,۹۸۴۲۳۸۹	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۶۹۳۱۹۸۴۰۸	۰,۵۵۵۷۸۷۷۰۳	۰,۲۳۲۷۲۲۹۹۴	-۳,۰۱۵۶۷۹۵۸۹	-۲,۶۰۹۰۶۴۸۹۳	-۲,۸۹۱۶۱۴۸۷۲	-۲,۹۶۴۲۲۰۵۲	-۰,۴۰۶۶۱۴۶۹۶	-۰,۲۸۲۵۴۹۹۷۹	-۰,۳۵۵۱۵۵۶۲۷
۸۴	۱۰۸	۱۹۱,۹۹۱۳۳۵۱	۱۸۷,۹۸۰۸۷۴۳	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۳۱۹۲۶۹۵۷۵	۰,۵۳۱۷۹۷۲۲۳	۰,۲۴۲۵۶۳۸۷۴	-۱,۹۴۲۸۹۵۹۵۹	-۱,۴۷۸۸۶۱۹۱۶	-۱,۷۳۱۳۶۲۶۴۸	-۱,۷۹۴۵۹۳۲۰۵	-۰,۴۶۴۰۳۴۰۴۳	-۰,۲۵۲۵۰۰۷۳۲	-۰,۳۱۵۷۳۱۲۸۸
۸۴	۱۱۰	۱۹۳,۹۸۸۱۸۵۶	۱۸۹,۹۷۸۰۸۱۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۹۸۶۹۸۵۰۵۸	۰,۴۹۹۶۶۸۵۲۳	۰,۱۷۷۲۹۶۳۰۱	-۰,۸۶۴۱۵۴۴۷۱	-۰,۴۰۶۷۱۳۹۳۳	-۰,۶۳۴۰۲۷۶۳۴	-۰,۶۷۸۵۰۸۴۵	-۰,۴۵۷۴۴۰۵۳۸	-۰,۲۲۷۳۱۳۷۰۱	-۰,۲۷۱۷۹۴۵۱۷
۸۴	۱۱۲	۱۹۵,۹۸۵۵۳۴۶	۱۹۱,۹۷۵۷۸۵۲	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۶۵۶۶۰۲۶۵۳	۰,۴۶۷۷۲۳۰۰۱	۰,۰۲۰۸۶۵۰۵۴	۰,۳۴۷۰۶۰۰۹۸	۰,۷۶۳۴۲۷۹۹۴	۰,۵۳۸۴۹۹۸۵	۰,۵۱۶۰۶۰۱۸	-۰,۴۱۶۳۶۷۸۹۶	-۰,۲۲۴۹۳۳۰۰۸	-۰,۲۴۷۳۶۷۸۱۳
۸۴	۱۱۴	۱۹۷,۹۸۳۳۸۸۶	۱۹۳,۹۷۴۰۱۲۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۳۰۹۲۸۲۸۸۶	۰,۴۲۳۶۲۲۳۱۹	۰,۲۵۵۲۹۸۸۵۳	۱,۶۹۰۹۴۰۸۲۴	۲,۰۲۵۳۰۵۸۶۵	۱,۸۷۸۴۵۸۹۸۶	۱,۸۷۷۲۳۱۸۱۱	-۰,۳۳۴۳۶۵۰۴۲	-۰,۱۴۶۸۴۶۸۸	-۰,۱۴۸۰۷۴۰۵۴
۸۴	۱۱۶	۱۹۹,۹۸۱۷۹۸۶	۱۹۵,۹۷۲۷۷۴۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۹۸۱۳۴۹۳۷۹	۰,۳۸۹۱۶۵۷۳۸	۰,۴۳۷۲۱۱۷۷۲	۳,۱۰۱۱۱۰۱۳۹	۲,۸۳۸۸۴۹۰۹۱	۳,۲۴۶۷۲۰۵۱۷	۳,۲۷۱۱۵۲۹۷۲	۰,۲۶۲۲۶۱۰۴۹	۰,۴۰۷۸۷۱۴۲۷	۰,۴۳۲۳۰۳۸۸۱
۸۴	۱۲۴	۲۰۷,۹۸۱۲۴۵۷	۲۰۳,۹۷۳۰۴۳۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵,۲۱۵۳۰۵۲۱۷	۰,۱۲۷۴۰۰۰۱۸	۰,۰۷۵۱۶۴۶۸۳	۷,۴۵۳۲۹۶۸۵	۷,۹۶۰۹۰۴۹۸۸	۶,۷۲۶۹۹۰۲۸۶	۶,۹۸۲۹۵۳۴۳	-۰,۵۰۷۶۰۸۱۳۸	-۱,۲۳۳۹۱۴۷۰۲	-۰,۹۷۷۹۵۱۵۵۸
۸۴	۱۳۰	۲۱۳,۹۹۵۲۰۱۴	۲۰۹,۹۸۴۱۸۸۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۸۳۳۴۶۵۶۱۷	۱,۴۲۷۰۹۶۹۵۳	۰,۰۷۹۷۷۱۱۶۸	-۳,۹۷۱۸۷۴۱۸۲	-۳,۷۸۴۳۶۲۴۳۷	-۴,۸۶۵۹۲۵۸۵۴	-۳,۸۲۸۶۹۴۳۱۷	-۰,۱۸۷۵۱۱۷۴۶	-۱,۰۸۱۵۶۳۴۱۷	-۰,۰۴۴۳۱۸۸
۸۴	۱۳۲	۲۱۶,۰۰۱۹۱۵	۲۱۱,۹۹۱۸۹۷۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۹۰۶۳۲۰۴۴۴	۱,۸۱۱۲۶۸۴۶۵	۰,۰۲۰۸۶۵۰۵۴	-۱,۰۰۹۸۱۵۹۰۷	-۰,۸۳۸۶۳۱۹۹۸	-۱,۸۰۳۷۷۹۳۹۲	-۰,۷۷۶۴۲۵۰۶۸	-۰,۱۷۱۸۳۹۰۹	-۰,۹۶۵۱۴۷۳۹۴	۰,۰۶۲۲۰۶۹۳
۸۴	۱۳۴	۲۱۸,۰۰۸۹۷۳	۲۱۳,۹۹۹۸۰۵۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۱۱۴۶۷۷۸۸۷	۲,۰۷۴۸۹۷۴۶۶	۰,۰۹۰۹۰۹۲۹۸	۲,۱۲۷۶۹۱۴۴۳	۲,۲۶۹۲۳۲۶۶۴	۱,۳۴۶۴۲۰۶۴۵	۲,۳۶۳۶۹۷۶۹۶	-۰,۱۴۱۵۴۱۲۲۱	-۰,۹۲۲۸۱۲۰۱۸	۰,۰۹۴۴۶۵۰۳۲
۸۶	۱۱۰	۱۹۶,۰۰۲۱۱۵۲	۱۹۱,۹۹۱۳۳۵۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۶۱۶۶۶۱۲۴۶	۰,۵۱۴۷۲۷۹۶۹	۰,۱۸۶۴۴۸۲۳	-۱,۹۱۰۸۴۵۷۳۱	-۲,۳۵۵۶۷۳۲۴	-۱,۸۲۸۹۸۸۸۸۸	-۲,۰۰۹۸۰۹۲۶۸	۰,۴۴۵۷۰۱۵۹۳	۰,۵۲۷۵۵۸۴۳۶	۰,۳۴۶۷۳۸۰۵۶
۸۶	۱۱۲	۱۹۷,۹۹۸۶۷۸۷	۱۹۳,۹۸۸۱۸۵۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۳۴۹۳۰۶۵۴۱	۰,۴۸۴۸۲۸۱۵۳	۰,۰۵۳۵۱۷۴۳	-۱,۰۹۵۷۲۴۸۰۲	-۱,۱۸۷۰۸۶۶۴۳	-۱,۰۰۴۷۱۸۵۳۹	-۱,۱۵۸۴۷۱۸۷۷	۰,۰۹۱۳۶۱۸۴۱	۰,۱۸۲۳۶۸۱۰۵	۰,۰۲۸۶۱۴۷۶۷
۸۶	۱۱۴	۱۹۹,۹۹۵۶۹۹۳	۱۹۵,۹۸۵۵۳۴۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۰۴۳۴۶۲۴۹	۰,۴۴۷۰۳۰۴۲۸	۰,۲۵۳۲۵۵۱۳۸	-۰,۱۲۱۲۳۱۳۲۱	۰,۰۱۲۸۳۷۲۲۵	۰,۰۱۰۸۰۰۱۳۶	-۰,۱۱۷۳۸۲۷۸	-۰,۱۳۴۰۶۸۵۴۶	-۰,۰۰۲۰۳۷۰۸۸	-۰,۱۳۰۲۲۰۰۰۵
۸۶	۱۱۶	۲۰۱,۹۹۳۲۶۳۵	۱۹۷,۹۸۳۳۸۸۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۷۷۳۴۷۴۴۵	۰,۴۱۵۱۶۳۷۴۹	۰,۴۰۳۸۹۲۵۴۶	۰,۸۲۴۳۱۴۸۳۸	۰,۹۹۱۲۲۶۰۷۶	۰,۹۵۱۷۵۱۲۶۲	۰,۸۵۷۸۹۱۰۴۶	-۰,۱۶۶۹۱۱۲۳۷	-۰,۰۳۹۴۷۴۸۱۴	-۰,۱۳۳۳۳۵۰۳
۸۶	۱۱۸	۲۰۳,۹۹۱۴۲۸۷	۱۹۹,۹۸۱۷۹۸۶	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۵۴۵۵۰۰۵۳۱	۰,۳۷۶۷۳۴۱۶۶	۰,۴۹۷۳۶۱۶۰۴	۱,۷۰۸۵۴۶۴۳۲	۱,۸۴۶۳۳۷۱۱۲	۱,۷۷۳۸۷۹۹۸۶	۱,۷۲۴۴۶۰۹۹۳	-۰,۱۳۷۷۹۰۶۸	-۰,۰۷۲۴۵۷۱۲۶	-۰,۱۲۱۸۷۶۱۱۹
۸۶	۱۲۰	۲۰۵,۹۹۰۲۱۴۱	۲۰۱,۹۸۰۷۵۷۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۳۸۳۸۱۸۲۶۷	۰,۳۲۴۱۹۳۳۳۲	۰,۵۲۳۵۹۸۷۷۶	۲,۴۱۵۷۷۵۸۸۵	۲,۵۳۱۴۷۸۹۱۷	۲,۳۴۸۱۹۷۲۷	۲,۳۵۸۰۶۹۳۴۸	-۰,۱۱۵۷۰۳۰۳۲	-۰,۱۸۳۲۸۱۶۴۷	-۰,۱۷۳۴۰۹۵۶۹
۸۶	۱۲۲	۲۰۷,۹۸۹۶۴۲۵	۲۰۳,۹۸۰۳۱۸۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۲۶۰۶۶۱۶۷۷	۰,۲۵۵۸۷۳۹۲۶	۰,۴۴۶۷۷۰۲۶۱	۳,۰۴۲۰۱۲۸۸۵	۳,۱۶۴۶۵۰۲۱۶	۲,۷۷۰۰۳۳۱۶۲	۲,۸۴۹۸۸۱۱۴۸	-۰,۱۲۲۶۳۷۳۳۱	-۰,۳۹۴۶۱۷۰۵۴	-۰,۳۱۴۷۶۹۰۶۸
۸۶	۱۲۴	۲۰۹,۹۸۹۶۹۶۲	۲۰۵,۹۸۰۴۸۱۱	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۱۵۸۹۱۲۶۸۹	۰,۱۸۲۸۵۹۹۹۲۶	۰,۱۳۹۵۲۴۰۷۶	۳,۶۶۲۹۹۵۰۹۸	۳,۹۴۵۹۲۵۹۶۱	۳,۱۰۴۶۶۹۵۶۷	۳,۲۶۲۲۵۴۹۶۳	-۰,۲۸۲۹۳۰۸۶۳	-۰,۸۴۱۲۵۶۳۹۴	-۰,۶۸۳۶۷۰۹۹۸
۸۶	۱۲۸	۲۱۳,۹۹۵۳۶۲۶	۲۰۹,۹۸۲۸۷۳۷	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۹,۲۰۸۴۰۵۲۶	۱,۳۳۹۸۵۱۴۲۳	۰,۰۸۴۹۷۷۶۸۷	-۶,۸۷۱۵۰۹۷۷۴	-۶,۵۶۸۶۳۶۲۳۶	-۷,۵۷۰۱۶۲۱۷۹	-۶,۷۹۹۶۹۲۱۱۶	-۰,۳۰۲۸۷۳۵۳۸	-۱,۰۰۱۵۲۵۹۴۳	-۰,۲۳۱۰۵۵۸۸
۸۶	۱۳۰	۲۱۶,۰۰۰۲۷۴۴	۲۱۱,۹۸۸۸۸۶۸	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸,۲۰۰۰۸۱۲۸۹	۱,۱۵۵۹۵۲۵۱۲	۰,۱۰۹۱۸۷۴۸۲	-۳,۹۸۰۱۰۳۶۶۵	-۴,۳۴۶۷۸۷۴۸۶	-۴,۹۲۴۵۴۸۱۸۶	-۴,۱۵۶۶۲۹۴۴۴	۰,۳۶۶۶۸۳۸۲۱	-۰,۵۷۷۷۶۰۷	۰,۱۹۰۱۵۸۰۴۳
۸۶	۱۳۲	۲۱۸,۰۰۵۶۰۱۳	۲۱۳,۹۹۵۲۰۱۴	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷,۲۶۲۵۳۶۹۱۳	۱,۴۰۸۵۷۰۷۰۳	۰,۰۵۳۵۱۷۴۳	-۱,۱۱۹۰۰۴۴۵۷	-۱,۴۵۵۹۳۱۹۵۶	-۱,۹۷۲۶۷۷۷۲۱	-۱,۲۱۵۶۳۴۶۱۱	۰,۳۳۶۹۲۷۴۹۸	-۰,۵۱۶۷۴۵۷۶۵	۰,۲۴۰۲۹۷۳۴۴
۸۶	۱۳۴	۲۲۰,۰۱۱۳۹۴	۲۱۶,۰۰۱۹۱۵	۴,۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶,۴۰۴۶۶۷۹۰۴	۱,۵۸۵۴۷۴۷۵۹	۰,۱۱۰۷۷۷۲۴۷	۲,۰۹۲۳۹۶۲۴۴	۱,۷۴۵۰۷۴۷۹۲	۱,۲۹۰۰۱۴۹۲۸	۲,۰۲۷۵۱۷۸۳۱	۰,۳۴۷۳۲۱۴۵۳	-۰,۴۵۵۰۵۹۸۶۳	۰,۲۸۲۴۴۳۰۴

ادامه دارد...

ادامه...

Z_p	N_p	$m_p(\text{amu})$	$m_d(\text{amu})$	$m_\alpha(\text{amu})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$ \beta_p $	γ_p	$\log T^{\text{Exp.}}$	$\log T^{\text{Ours}}$	$\log T^{\text{AP}}$	$\log T^{\text{Qi}}$	Δ_{Ours}	Δ_{AP}	Δ_{Qi}
88	114	2020098907	1979986787	4002603254	8019019286	0.509580344	0.18644823	-2.342509735	-1.795880017	-2.349684312	-2.573336773	-0.546629717	-0.552804295	-0.777256756
88	116	2040064997	1999956993	4002603254	7625564992	0.472645235	0.312937907	-1.234093647	-1.22184875	-1.182376696	-1.390150049	-0.1224498	0.38472054	-0.1683013
88	118	2060038273	2019932635	4002603254	741518275	0.430645778	0.385911443	-0.538347817	-0.619788758	-0.518280465	-0.682892274	0.81440941	0.101508293	-0.063103516
88	120	2080018399	2039914287	4002603254	727305721	0.377382184	0.393128196	-0.29336858	0.113943352	-0.114514001	-0.221535587	-0.14328021	-0.228457353	-0.335478939
88	122	210000495	2059902141	4002603254	7151659281	0.312765396	0.302736391	0.475030687	0.568201724	0.221253969	0.179322057	-0.093171037	-0.346947755	-0.388879667
88	124	2119997945	2079896425	4002603254	7031640896	0.248956879	0.33948732	1.043316493	1.113943352	0.559002359	0.586612451	-0.07062686	-0.554940993	-0.527330901
88	128	216003533	2119907035	4002603254	9525695513	1.636678416	0.023089906	-7.025187341	-6.739928612	-7.398820786	-6.885769978	-0.285258729	-0.688892174	-0.145841365
88	130	2180071402	2139953626	4002603254	8545921843	1.350655081	0.055814575	-4.289321193	-4.598599459	-4.913396184	-4.402509159	0.309278266	-0.314796725	0.1960903
88	132	2200110284	2160002744	4002603254	7592386504	1.604864858	0.015602795	-1.590257374	-1.747146969	-2.028719833	-1.531551483	0.156889595	-0.281572864	0.215595486
88	134	2220153745	2180056013	4002603254	6678832765	1.777180156	0.070292567	1.596638339	1.579783597	1.313925807	1.783419221	0.168547742	-0.26585779	0.203635624
88	136	2240202118	220011394	4002603254	578885142	1.295950646	0.064062249	5.962419549	5.496647625	5.328833255	5.748355629	0.465771925	-0.167814369	0.251708005
88	138	2260254098	2220175777	4002603254	4870626237	1.40418261	0.011782113	11.04681885	10.69897	10.61783457	10.94199132	0.347848846	-0.81135431	0.243021311
90	120	2100150753	2060038273	4002603254	8052598725	0.425648973	0.431484154	-1.695320228	-2.045757491	-1.778528493	-2.022105761	0.350437263	0.267218998	0.023651729
90	122	2120129803	2080018399	4002603254	7952254431	0.359702425	0.360113803	-1.337325622	-1.522878745	-1.560260445	-1.742384721	0.185553123	-0.0373817	-0.219505976
90	124	2140114998	210000495	4002603254	7825984787	0.290018174	0.145743209	-0.840247475	-1	-1.252404292	-1.371790296	0.159752525	-0.252404292	-0.371790296
90	128	2180132845	2140001079	4002603254	984901626	1.81511993	0.103964216	-7.150872529	-6.931814138	-7.250891407	-6.979766518	-0.219058391	-0.319077269	-0.047952379
90	130	2200157478	216003533	4002603254	8953032367	1.470587373	0.119471439	-4.719772779	-5.013228266	-5.069794572	-4.795182706	0.293455487	-0.056566306	0.21804556
90	132	2220184681	2180071402	4002603254	812694967	1.719675541	0.072647172	-2.606397593	-2.650334016	-2.742506764	-2.465999413	0.43936423	-0.092172748	0.184339886
90	134	2240214669	220011394	4002603254	7298497252	1.89573974	0.11843892	-0.062706025	-0.091514981	-0.03341264	0.263218812	0.028808956	0.088173717	0.354733793
90	136	2260249031	2220153745	4002603254	645083502	1.373970302	0.108581446	3.633347392	3.263399331	3.354880889	3.591672815	0.369948061	0.091481557	0.328273484
90	138	2280287411	2240202118	4002603254	5520083638	1.478458583	0.055814575	7.954596037	7.780203629	7.945940198	8.109927973	0.174392408	0.165736569	0.329724344
90	140	2300331338	2260254098	4002603254	4769964303	1.539508323	0.117791061	12.3467613	12.37639444	12.58533192	12.6781174	-0.029633146	0.208937481	0.301722957
90	142	2320380553	2280310703	4002603254	408160211	1.59555402	0.134022064	17.41220071	17.64493464	17.94310557	17.94093336	-0.232733937	0.298170929	0.295998717
92	126	2180235357	2140114998	4002603254	8786456963	0.839674015	0.128544797	-3.215211093	-3.292429824	-3.384940714	-3.55675515	0.077218731	-0.09251089	-0.264325326
92	128	220024723	2160110621	4002603254	1030012033	1.132700386	0.094881871	-6.845451108	-7.22184875	-7.406520466	-7.352015405	0.376397642	-0.184671716	-0.130166655
92	132	2240276048	2200153745	4002603254	8619826602	1.219478183	0.068085574	-2.906352349	-3.045757491	-3.250639733	-3.189558778	0.139405142	-0.204882243	-0.143801288
92	134	2260293387	2220184681	4002603254	7700968002	1.335995323	0.111680533	-0.284021595	-0.455931956	-0.383924754	-0.343039488	0.17191036	0.072007202	0.112892468
92	136	228031374	2240214669	4002603254	680350117	1.08427848	0.102870405	3.100793708	2.740362689	2.977452339	2.983491457	0.360431018	0.23708965	0.243128767
92	138	2300339398	2260249031	4002603254	599273224	1.16251158	0.053080485	6.517031602	6.255272505	6.651193676	6.614396122	0.261759097	0.395921171	0.359123617
92	140	2320371562	2280287411	4002603254	5133631536	1.207739773	0.112263029	9.441731599	9.336459734	9.743754668	9.688852447	0.105271865	0.406915734	0.352292713
92	142	2340409521	2300331338	4002603254	4857734256	1.249410292	0.127963572	12.74080526	12.8888581	13.23195356	13.14799443	-0.148052844	0.343095458	0.259136324

ادامه دارد...

ادامه...

Z_p	N_p	$m_p(\text{amu})$	$m_d(\text{amu})$	$m_\alpha(\text{amu})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$ \beta_p $	γ_p	$\log T^{\text{Exp.}}$	$\log T^{\text{Ours}}$	$\log T^{\text{AP}}$	$\log T^{\text{Qi}}$	Δ_{Ours}	Δ_{AP}	Δ_{Qi}
۹۲	۱۴۴	۲۳۶٫۰۴۵۵۶۸	۲۳۲٫۰۳۸۰۵۵۳	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴٫۵۷۳۱۰۳۲۲۵	۱٫۲۸۵۱۱۱۷۸۹	۰٫۱۰۴۸۷۶۵۴۱	۱۴٫۷۲۶۶۳۰۹۱	۱۴٫۸۶۸۳۹۳۵	۱۵٫۱۹۹۴۵۳۶۹	۱۵٫۱۴۵۳۶۷۰۹	-۰٫۱۴۱۷۶۲۵۸۹	۰٫۳۳۱۰۶۰۱۹۲	۰٫۲۷۶۹۷۳۵۹۱
۹۲	۱۴۶	۲۳۸٫۰۵۰۷۸۸۲	۲۳۴٫۰۴۳۶۰۱۲	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴٫۲۶۹۷۴۹۰۵۹	۱٫۳۱۸۱۱۹۲۵۴	۰٫۰۴۶۲۷۸۴۵۲	۱۷٫۰۵۴۴۴۸۸۸	۱۷٫۱۴۹۲۱۹۱۱	۱۷٫۵۳۱۵۲۴۷۲	۱۷٫۴۹۶۵۰۰۰۹	-۰٫۰۹۴۷۷۰۲۳۱	۰٫۳۸۲۳۰۵۶۰۸	۰٫۳۴۷۲۸۰۹۷۸
۹۴	۱۳۴	۲۲۸٫۰۳۸۷۴۲۳	۲۲۴٫۰۲۷۶۰۴۸	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۹۴۹۶۴۸۱۰۹	۱٫۴۰۲۳۹۴۹۵۵	۰٫۰۵۸۸۴۵۲۷۶	-۰٫۵۰۸۷۱۵۲۶۳	۰٫۴۱۳۹۲۶۸۵	-۰٫۲۰۲۰۲۰۲۹۵	-۰٫۳۹۴۸۰۳۵۳۳	-۰٫۵۵۰۱۰۷۹۴۸	-۰٫۲۴۳۴۱۲۹۸۱	-۰٫۴۳۶۱۹۶۲۱۸
۹۴	۱۳۶	۲۳۰٫۰۳۹۶۴۹۹	۲۲۶٫۰۲۹۳۳۸۷	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۱۷۹۸۹۲۸۷۴	۱٫۱۳۴۰۶۴۹۹۹	۰٫۰۵۴۴۱۳۲۴۱	۲٫۲۶۹۱۳۳۸۹۶	۲٫۰۰۸۶۰۰۱۷۲	۲٫۵۴۴۵۳۰۹۵	۲٫۳۳۴۵۰۸۷۶۷	۰٫۲۶۰۵۳۳۷۲۴	۰٫۵۳۵۹۳۰۷۷۸	۰٫۳۳۵۹۰۸۵۹۵
۹۴	۱۴۲	۲۳۶٫۰۴۶۰۵۸	۲۳۲٫۰۳۷۱۵۶۲	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵٫۸۶۷۰۷۰۸۶۱	۱٫۲۹۶۸۵۲۴۴۶	۰٫۰۸۴۹۷۷۶۸۷	۷٫۷۶۰۴۴۰۵۷۳	۷٫۹۵۴۸۶۸۸۳۱	۸٫۲۹۸۳۶۷۱۷۲	۸٫۱۴۸۵۸۴۲۱۴	-۰٫۱۹۴۴۲۸۲۵۸	۰٫۳۴۳۴۹۸۳۴	۰٫۱۹۳۷۱۵۳۸۳
۹۴	۱۴۴	۲۳۸٫۰۴۹۵۵۹۹	۲۳۴٫۰۴۰۹۵۲۱	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵٫۵۹۳۲۰۵۹۴۲	۱٫۳۳۳۵۲۵۸۸۱	۰٫۰۶۴۰۶۲۲۴۹	۹٫۲۰۳۴۹۹۱۹۸	۹٫۴۴۲۴۷۹۷۶۹	۹٫۷۱۰۸۲۳۳۲۵	۹٫۶۰۵۷۰۴۸۸	-۰٫۲۳۸۹۸۰۵۷۱	۰٫۲۶۸۳۴۳۵۵۶	۰٫۱۶۳۲۲۵۱۱۱
۹۴	۱۴۶	۲۴۰٫۰۵۳۸۱۳۵	۲۳۶٫۰۴۵۵۶۸	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵٫۲۵۵۷۵۶۲۹	۱٫۳۶۹۲۶۷۱۲۹	۰٫۰۰۸۸۸۲۰۷۸	۱۱٫۱۱۴۵۵۸۹۳	۱۱٫۳۱۵۷۷۶۶۴	۱۱٫۶۴۳۷۹۰۹۲	۱۱٫۵۶۷۱۳۱۵۲	-۰٫۲۰۱۲۱۷۷۱۱	۰٫۳۲۸۰۱۴۲۷۷	۰٫۲۵۱۳۵۴۸۷۴
۹۴	۱۴۸	۲۴۲٫۰۵۸۷۴۲۶	۲۳۸٫۰۵۰۷۸۸۲	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴٫۹۸۴۵۲۸۴۳۱	۰٫۸۲۷۳۵۲۶۲	۰٫۰۷۹۷۷۱۱۶۸	۱۳٫۲۹۴۷۳۷۴۴	۱۳٫۰۷۱۸۸۲۰۱	۱۳٫۳۱۸۵۴۰۱۵	۱۳٫۲۸۲۳۱۹۷۷	۰٫۲۲۲۸۵۵۴۲۸	۰٫۲۴۶۶۵۸۱۴	۰٫۲۱۰۴۳۷۷۶۴
۹۴	۱۵۰	۲۴۴٫۰۶۴۲۰۳۹	۲۴۰٫۰۵۶۵۹۲	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۴٫۶۶۵۵۴۲۸۵۹	۰٫۸۳۲۷۸۶۸	۰٫۱۱۴۹۶۰۹۲۱	۱۵٫۴۶۰۱۹۷۹۲	۱۵٫۳۹۷۹۴۰۰۱	۱۵٫۵۰۹۸۶۵۴۴	۱۵٫۴۹۷۷۹۶۰۱	۰٫۰۶۲۲۵۷۹۱۴	۰٫۱۱۱۹۲۵۴۳۱	۰٫۰۹۹۸۵۶۰۰۲
۹۶	۱۳۸	۲۳۴٫۰۵۰۱۵۹۸	۲۳۰٫۰۳۹۶۴۹۹	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۳۶۵۰۴۶۹۳۲	۱٫۲۲۸۰۳۷۴۳۶	۰٫۰۶۹۹۶۸۵۷۷	۲٫۱۵۰۷۵۳۱۰۷	۱٫۷۰۷۵۷۰۱۷۶	۲٫۷۷۸۶۹۵۴۶۳	۲٫۴۲۱۰۴۱۳۲۱	۰٫۴۴۳۱۸۲۹۳۱	۱٫۰۷۱۱۲۵۲۸۷	۰٫۷۱۳۴۷۱۱۴۵
۹۶	۱۴۰	۲۳۶٫۰۵۱۴۱۳	۲۳۲٫۰۴۱۱۸۷۱	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۱۰۰۴۵۴۱۰۷	۱٫۲۷۳۸۸۹۲۵۱	۰٫۱۲۵۱۳۴۱۴۳	۳٫۱۰۶۱۸۳۱۰۶	۲٫۷۷۸۱۵۱۲۵	۳٫۷۳۳۹۹۲۲۱۷	۳٫۴۲۵۶۴۵۰۳۸	۰٫۳۲۸۰۳۱۸۵۶	۰٫۹۵۵۸۴۰۹۶۷	۰٫۶۴۷۴۹۳۷۸۸
۹۶	۱۴۴	۲۴۰٫۰۵۵۵۲۹۵	۲۳۶٫۰۴۶۰۵۸	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶٫۳۹۷۸۰۱۸۶	۱٫۳۵۰۴۱۳۷۹۱	۰٫۱۱۷۳۴۶۶۶۱	۵٫۹۴۹۹۹۳۱۴۷	۶٫۳۶۱۷۲۷۸۳۶	۶٫۶۵۳۳۹۱۴۱۴	۶٫۴۱۶۷۶۲۶۷۵	-۰٫۴۱۱۷۳۴۶۸۹	۰٫۲۹۱۶۶۳۵۷۸	۰٫۰۵۵۰۳۴۸۳۹
۹۶	۱۴۶	۲۴۲٫۰۵۸۸۳۵۸	۲۳۸٫۰۴۹۵۵۹۹	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶٫۲۱۵۵۵۹۶۵۳	۱٫۳۸۲۰۴۵۱۹	۰٫۰۶۱۴۶۷۴۲۲	۶٫۸۳۱۹۶۱۲۵۳	۷٫۱۴۸۲۹۴۰۹۷	۷٫۴۳۲۹۱۵۷۰۵	۷٫۲۶۰۹۱۹۱۴۶	-۰٫۳۱۶۳۳۲۸۴۵	۰٫۲۸۴۶۲۱۶۰۸	۰٫۱۱۲۶۲۵۰۴۹
۹۶	۱۴۸	۲۴۴٫۰۶۲۷۵۲۶	۲۴۰٫۰۵۳۸۱۳۵	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵٫۹۰۱۷۴۲۰۱۲	۰٫۷۹۲۸۹۵۷۷۱	۰٫۱۳۱۱۲۵۳۲	۸٫۸۳۹۰۹۵۴۹	۸٫۷۵۶۶۳۶۱۰۸	۸٫۹۶۴۸۵۹۳۳۹	۸٫۸۳۳۱۸۶۱۳۳	۰٫۰۸۲۴۵۹۳۸۲	۰٫۲۰۸۲۳۳۲۳۱	۰٫۰۷۶۵۵۰۰۲۵
۹۶	۱۵۰	۲۴۶٫۰۶۷۲۲۳۷	۲۴۲٫۰۵۸۷۴۲۶	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵٫۴۷۵۱۳۴۳۸	۰٫۷۹۴۸۱۶۱۳۵	۰٫۱۶۵۵۲۲۱۹۷	۱۱٫۰۷۶۶۱۲۰۵	۱۱٫۱۷۶۰۹۱۲۶	۱۱٫۳۱۸۶۱۳۶۱	۱۱٫۲۰۰۴۶۳۳۱	-۰٫۰۹۹۴۷۹۲۰۹	۰٫۱۴۲۵۲۲۳۵۴	۰٫۰۲۴۳۷۲۰۵۲
۹۶	۱۵۲	۲۴۸٫۰۷۲۳۴۸۵	۲۴۴٫۰۶۴۲۰۳۹	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۵٫۱۶۱۷۳۳۱۱۶	۰٫۷۹۲۶۷۳۷۶۳	۰٫۱۶۵۵۲۲۱۹۷	۱۲٫۹۳۸۰۹۷۳	۱۳٫۰۴۱۳۹۲۶۹	۱۳٫۲۰۳۲۳۳۹۶	۱۳٫۱۱۷۸۲۲۶۷	-۰٫۱۰۳۲۹۵۳۸۵	۰٫۱۶۱۸۴۱۲۷۳	۰٫۰۷۶۴۲۹۹۸۷
۹۸	۱۴۲	۲۴۰٫۰۶۲۳۰۲	۲۳۶٫۰۵۱۴۱۳	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۷۱۸۱۲۵۱۹۶	۱٫۳۲۹۲۱۷۹۷	۰٫۱۵۶۱۷۶۸۷۱	۱۵٫۲۷۳۰۳۹۵۱	۱۷٫۶۰۴۲۲۴۸۳	۲٫۲۴۴۹۹۷۳۳۷	۱٫۸۵۰۱۶۴۸۶۶	-۰٫۲۳۳۱۱۸۵۳۲	۰٫۴۸۴۵۷۴۸۵۴	۰٫۰۸۹۷۴۲۳۸۲
۹۸	۱۴۴	۲۴۲٫۰۶۳۷۰۱۶	۲۳۸٫۰۵۳۰۲۸۷	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۵۱۶۷۸۷۳۵۶	۱٫۳۶۳۶۱۶۱۴۴	۰٫۱۳۳۸۱۰۹۴۱	۲٫۲۴۴۹۲۱۰۲۶	۲٫۳۴۶۳۵۲۹۷۴	۲٫۸۹۸۹۰۷۷۳۸	۲٫۵۶۴۴۵۶۴۵۸	-۰٫۱۰۱۴۳۱۹۴۹	۰٫۵۵۲۵۵۴۷۶۴	۰٫۲۱۸۱۰۳۴۸۳
۹۸	۱۴۶	۲۴۴٫۰۶۶۰۰۰۷	۲۴۰٫۰۵۵۵۲۹۵	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۳۲۸۹۰۰۲۹۵	۱٫۳۹۳۸۷۸۹۰۱	۰٫۰۷۸۱۷۴۳۱۹	۲٫۹۶۳۵۴۰۱۱	۳٫۰۶۵۹۵۲۹۸	۳٫۵۲۴۴۲۴۱۴۴	۳٫۲۵۴۲۶۸۱۶۱	-۰٫۱۰۲۴۱۲۸۷	۰٫۴۵۸۴۷۱۱۶۴	۰٫۱۸۸۳۱۵۱۸
۹۸	۱۴۸	۲۴۶٫۰۶۸۸۰۵۳	۲۴۲٫۰۵۸۸۳۵۸	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶٫۸۶۱۶۰۲۱۹۷	۰٫۸۰۰۵۳۳۷۳۹	۰٫۱۴۶۸۹۸۲۹۴	۵٫۲۰۳۹۰۵۰۵۶	۵٫۱۰۸۹۷۰۷۱۷	۵٫۳۹۴۷۹۵۴۸۶	۵٫۱۴۷۷۳۹۰۹	۰٫۰۹۴۹۳۴۳۳۹	۰٫۲۸۵۸۲۴۷۶۹	۰٫۰۳۸۷۶۸۳۷۳
۹۸	۱۵۰	۲۴۸٫۰۷۲۱۸۴۹	۲۴۴٫۰۶۲۷۵۲۶	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶٫۳۶۱۲۰۱۵۸۵	۰٫۸۰۲۸۶۱۴۷	۰٫۱۸۰۷۸۳۶۳۸	۷٫۲۹۰۷۳۶۸۵۲	۷٫۴۵۹۶۰۹۵۸۱	۷٫۶۴۳۸۶۲۳۳۴	۷٫۴۰۹۲۹۶۰۸۷	-۰٫۱۶۸۸۱۷۲۷۲۹	۰٫۱۸۴۲۵۲۷۵۴	-۰٫۰۵۰۳۱۳۴۹۴
۹۸	۱۵۲	۲۵۰٫۰۷۶۴۰۶۱	۲۴۶٫۰۶۷۲۲۳۷	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶٫۱۲۸۴۴۰۷۱۶	۰٫۸۰۰۷۱۴۷۷۱	۰٫۱۸۰۷۸۳۶۳۸	۸٫۴۲۵۶۸۵۳۰۳	۸٫۶۱۵۴۱۴۳۵۱	۸٫۷۱۶۵۹۳۹۳۸	۸٫۵۳۸۴۹۷۶۹	-۰٫۱۸۹۷۲۹۰۴۸	۰٫۱۰۱۱۷۹۵۸۷	-۰٫۰۷۶۹۱۶۶۶
۹۸	۱۵۴	۲۵۲٫۰۸۱۶۲۵۸	۲۴۸٫۰۷۲۳۴۸۵	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۶٫۲۱۶۸۷۱۱۹۷	۰٫۷۹۴۱۲۹۱۹۵	۰٫۱۴۶۸۹۸۲۹۴	۸٫۱۹۸۴۲۱۷۴۹	۷٫۹۲۱۲۳۲۲۸۳	۸٫۱۱۷۳۷۳۳۶۱	۸٫۰۵۶۷۵۰۳۶۶	۰٫۲۷۷۱۸۹۴۶۵	۰٫۱۹۶۱۴۱۰۷۷	۰٫۱۳۵۵۱۸۰۸۲
۱۰۰	۱۴۶	۲۴۶٫۰۷۵۲۹۹	۲۴۲٫۰۶۳۷۰۱۶	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸٫۳۷۸۰۶۱۹۰۹	۱٫۴۰۲۳۱۸۰۹۲	۰٫۰۶۰۲۴۷۱۷۸	۰٫۱۰۶۳۱۹۴۰۵	۰٫۴۱۳۹۲۶۸۵	۰٫۶۸۴۹۴۳۳۶۵	۰٫۲۸۷۲۳۴۶۴۴	۰٫۰۶۴۹۲۶۷۲	۰٫۶۴۳۵۵۰۶۸	۰٫۲۴۵۸۴۱۹۵۹
۱۰۰	۱۴۸	۲۴۸٫۰۷۷۱۹۴۷	۲۴۴٫۰۶۶۰۰۰۷	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸٫۰۰۲۲۵۴۲۵۱	۰٫۸۰۴۳۵۱۰۸۳	۰٫۱۲۸۵۴۴۷۹۷	۱٫۷۵۴۳۶۸۶۴۸	۱٫۵۵۶۳۰۲۵۰۱	۱٫۸۸۴۸۹۲۳۹۱	۱٫۵۲۸۵۷۵۸۳۹	۰٫۱۹۸۰۶۶۱۴۸	۰٫۳۲۸۵۸۹۸۹۱	-۰٫۰۲۷۷۲۶۶۶۱
۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰٫۰۷۹۵۲۱۳	۲۴۶٫۰۶۸۸۰۵۳	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۵۵۶۹۳۴۷۶۲	۰٫۸۰۶۱۷۴۶۰۸	۰٫۱۶۲۲۸۶۳۲۲	۳٫۲۳۰۴۹۱۱۸۱	۳٫۲۵۵۲۷۲۵۰۵	۳٫۴۵۲۹۳۸۴۶۱	۳٫۱۲۸۰۰۰۴۸۶	-۰٫۰۲۴۷۸۱۳۲۴	۰٫۱۹۷۶۶۵۹۵۶	-۰٫۱۲۷۲۷۲۰۱۹
۱۰۰	۱۵۲	۲۵۲٫۰۸۲۴۶۶۹	۲۴۸٫۰۷۲۱۸۴۹	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۱۵۲۷۰۲۵۵۵	۰٫۸۰۴۰۳۶۲۰۴	۰٫۱۶۲۲۸۶۳۲۲	۴٫۷۰۷۲۸۰۱۸۸	۴٫۹۶۰۹۴۶۱۹۶	۴٫۹۹۷۰۰۲۱۸۱	۴٫۷۰۶۹۴۱۷۶۸	-۰٫۲۵۳۶۶۰۰۷	۰٫۰۳۶۰۵۵۹۸۶	-۰٫۲۵۴۰۰۴۴۲۸
۱۰۰	۱۵۴	۲۵۴٫۰۸۶۸۵۴۲	۲۵۰٫۰۷۶۴۰۶۱	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷٫۳۰۷۴۷۹۶۵۱	۰٫۷۹۷۹۶۷۰۷۵	۰٫۱۲۸۵۴۴۷۹۷	۴٫۳۱۷۶۹۸۱۶۸	۴٫۰۶۶۸۴۷۵۱۱	۴٫۲۱۲۸۱۱۷۶۲	۴٫۰۴۰۷۸۰۱۹۷	۰٫۲۵۰۸۵۰۶۵۷	۰٫۱۴۵۹۶۴۲۵۱	-۰٫۰۲۶۰۶۷۳۱۴
۱۰۲	۱۵۰	۲۵۲٫۰۸۸۹۷۶۵	۲۴۸٫۰۷۷۱۹۴۷	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸٫۵۴۹۷۶۹۸۴۶	۰٫۸۰۶۲۸۱۳۶۲	۰٫۱۱۰۴۶۷۹۵۳	۰٫۶۰۱۴۴۷۸۱۵	۰٫۳۸۷۳۸۹۸۲۶	۰٫۸۷۵۹۲۵۷۸۱	۰٫۴۱۲۶۱۹۲۸۲	۰٫۲۱۴۰۵۷۹۸۹	۰٫۴۸۸۵۳۵۹۵۴	۰٫۰۲۵۲۲۹۴۵۶
۱۰۲	۱۵۲	۲۵۴٫۰۹۰۹۵۵۳	۲۵۰٫۰۷۹۵۲۱۳	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸٫۲۲۵۷۷۹۳۵۴	۰٫۸۰۴۱۵۹۵۶	۰٫۱۱۰۴۶۷۹۵۳	۱٫۶۰۰۹۰۰۷۰۲	۱٫۷۰۷۵۷۰۱۷۶	۱٫۸۷۶۲۱۱۷۹۶	۱٫۴۶۱۴۸۵۷۸	-۰٫۱۰۶۶۶۹۴۷۴	۰٫۱۶۸۶۴۱۶۲	-۰٫۲۴۶۰۸۴۳۹۶
۱۰۲	۱۵۴	۲۵۶٫۰۹۴۲۸۲۷	۲۵۲٫۰۸۲۴۶۶۹	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸٫۵۸۱۴۴۴۳۷۸	۰٫۷۹۹۵۱۷۹۶۸	۰٫۰۷۶۶۴۰۰۲۳	۰٫۷۵۲۵۱۲۹۰۴	۰٫۴۶۳۸۹۲۹۸۹	۰٫۵۲۶۳۲۴۷۲۵	۰٫۲۴۳۱۰۱۵۶۴	۰٫۲۸۸۶۱۹۹۱۵	۰٫۰۶۲۴۳۱۷۳۶	-۰٫۲۲۰۷۹۱۴۲۵

ادامه دارد...

ادامه...

Z_p	N_p	$m_p(\text{amu})$	$m_d(\text{amu})$	$m_\alpha(\text{amu})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$ \beta_p $	γ_p	$\log T^{\text{Exp.}}$	$\log T^{\text{Ours}}$	$\log T^{\text{AP}}$	$\log T^{\text{Qi}}$	Δ_{Ours}	Δ_{AP}	Δ_{Qi}
۱۰۴	۱۶۲	۲۶۶/۱۱۷۹۵۶	۲۶۲/۱۰۷۳۰۱	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۷/۵۰۰۱۵۵۵۲۵	۰/۵۰۷۳۶۱۴۴۷	۰/۲۵۲۸۴۲۷۴۵	۴/۷۹۴۷۷۶۹۵۸	۴/۵۵۶۳۰۲۵۰۱	۵/۱۱۹۷۷۶۵۸۱	۴/۷۹۷۳۱۵۰۴۷	۰/۲۳۸۴۷۴۴۵۷	۰/۵۶۳۴۷۴۰۸	۰/۲۴۱۰۱۲۵۴۷
۱۰۴	۱۶۴	۲۶۸/۱۲۳۶۴۴	۲۶۴/۱۱۲۳۴۵	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸/۱۰۰۰۰۳۷۸۶۷	۰/۴۸۸۰۴۹۱۸۸	۰/۲۴۲۵۶۳۸۷۴	۳/۱۰۳۵۱۳۰۶۴	۳/۶۰۲۰۵۹۹۹۱	۲/۶۳۰۲۴۶۱۴۶	۲/۴۸۲۱۵۸۴۸۹	-۰/۴۹۸۵۴۶۹۲۷	-۰/۹۷۱۸۱۳۸۴۵	-۱/۱۱۹۹۰۱۵۰۲
۱۰۶	۱۵۴	۲۶۰/۱۱۴۴۲۲۱	۲۵۶/۱۰۱۱۶۶۲	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۹/۹۲۲۸۵۷۶۷۸	۰/۵۴۲۴۶۳۳۴	۰/۱۸۴۴۰۹۳۲۶	-۱/۸۸۲۱۳۵۸۹۶	-۲/۴۴۳۶۹۷۴۹۹	-۱/۶۳۸۱۶۲۶۲۳	-۲/۲۹۴۸۰۹	۰/۵۶۱۵۶۱۶۰۳	۰/۸۰۵۵۳۴۸۷۶	۰/۱۴۸۸۸۸۵
۱۰۶	۱۶۰	۲۶۶/۱۲۲۰۶۵	۲۶۲/۱۰۹۹۲۵	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۸/۸۸۳۴۲۴۵۹۱	۰/۵۱۵۰۲۶۹۰۹	۰/۲۶۷۸۸۰۸۴۴	۰/۸۳۵۳۶۰۶۴۷	۱/۳۲۲۲۱۹۲۹۵	۱/۱۶۲۵۱۷۵۰۱	۰/۶۵۱۳۷۰۱۱۷	-۰/۴۸۶۸۵۸۶۴۸	-۰/۱۵۹۷۰۱۷۹۴	-۰/۶۷۰۸۴۹۱۷۸
۱۰۸	۱۵۶	۲۶۴/۱۲۸۳۹۴۹	۲۶۰/۱۱۴۴۲۲۱	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۱۰/۵۹۰۶۸۰۴۲	۰/۵۲۳۲۷۴۱۶۶	۰/۱۱۷۳۴۶۶۶۱	-۲/۹۹۳۳۵۷۷۵۱	-۳/۰۹۶۹۱۰۰۱۳	-۲/۶۴۳۶۵۹۸۸۹	-۳/۴۰۳۶۷۴۷۹۳	۰/۱۰۳۵۵۲۲۶۲	۰/۴۵۳۲۵۰۱۲۴	-۰/۳۰۶۷۶۴۷۸
۱۰۸	۱۵۸	۲۶۶/۱۳۰۰۹۷	۲۶۲/۱۱۶۳۹۸	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۱۰/۳۳۵۶۲۴۲۴	۰/۵۱۳۵۹۴۷۶۴	۰/۲۱۲۰۹۷۳۳۷	-۲/۴۱۳۰۲۸۰۹۸	-۲/۶۳۸۲۷۲۱۶۴	-۲/۰۸۴۷۷۱۶۳۷	-۲/۷۸۸۷۰۵۰۹۴	۰/۲۲۵۲۴۴۰۶۶	۰/۵۵۳۵۰۰۵۲۷	-۰/۱۵۰۴۳۲۹۳
۱۰۸	۱۶۲	۲۷۰/۱۳۴۶۵	۲۶۶/۱۲۲۰۶۵	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۹/۲۹۷۹۳۹۵۶۳	۰/۴۸۹۱۷۲۳۹۶	۰/۳۰۰۹۴۰۹۰۲	۰/۰۳۷۲۲۵۶۶۲	۰/۵۵۶۳۰۲۵۰۱	۰/۶۹۱۹۵۷۸۸۴	۰/۰۵۳۱۱۶۹۹۵	-۰/۵۱۹۰۷۶۸۳۸	۰/۱۳۵۶۵۵۳۸۳	-۰/۵۰۳۱۸۵۵۰۶
۱۱۰	۱۶۰	۲۷۰/۱۴۴۷۲	۲۶۶/۱۳۰۰۹۷	۴/۰۰۲۶۰۳۲۵۴	۱۱/۱۹۶۳۲۴۹۹	۰/۴۸۶۸۴۱۱۴	۰/۲۴۲۵۶۳۸۷۴	-۳/۸۶۲۳۲۳۷۷۳	-۴	-۳/۵۰۸۲۸۵۰۵۴	-۴/۳۰۳۱۶۳۱۲۶	۰/۱۳۷۶۷۶۲۲۷	۰/۴۹۱۷۱۴۹۴۶	-۰/۳۰۳۱۶۳۱۲۶

فصل ۸

حرکت تابدار

بیش از چهل سال پیش زمانی که بوهر و موتلسون حالت‌های دوران را برای یک هسته سه‌محوری را با استفاده از یک دوار سه‌محوری مطالعه کردند مفهوم حرکت تابدار طرح کردند. در آن کار پیشگام آن‌ها اشاره کردند که تکانه زاویه‌ای دورانی برای یک هسته سه‌محوری هم‌راستا با هیچ‌یک از محورهای متصل به جسم نیست، ولی در عوض این اتفاق پیش می‌رود و پیرامون محوری با بیش‌ترین گشتاور لختی تاب می‌خورد. حالت‌های تابدار^۱ ناشی از دوران یک هسته سه‌محوری پیرامون محوری با بیش‌ترین گشتاور لختی می‌تواند به‌صورت مکانیک کوانتومی با دوران پیرامون دو محور مختل شود به این دلیل که از دست دادن تقارن محوری برای یک هسته سه‌محوری منجر به گشتاور لختی‌های متفاوت نسبت به هر محور می‌شود و همین باعث می‌شود که دوران پیرامون هر محور را ممکن سازد. بنابراین حرکت تابدار به‌عنوان یک مشخصه خاص از یک هسته تغییر شکل یافته در نظر گرفته می‌شود.

طیف انرژی متناظر با نوارهای حالت‌های تابدار، دنباله‌ای از نوارهای دورانی $\Delta I = 2$ می‌باشد که بر اساس فونون‌های برانگیختگی تابدار بنا شده است [۴]. این نوع نوارها اولین بار در هسته A -فرد ^{163}Lu مشاهده شد و به سرعت پس از آن در ناحیه هسته‌های به‌شدت تغییر شکل یافته سه‌محوری پیرامون $N = 94$ در $^{161,163,165,167}\text{Lu}$ و ^{167}Ta [۳۴] شناسایی شد. بهترین مثال شناسایی شده تا الآن برای چنین حالت‌هایی ^{112}Ru می‌باشد.

از منظر نظری، حرکت تابدار به واسطه مدل دوران‌کننده سه‌محوری [۴] و مدل ذره-دوران‌کننده مورد بررسی قرار گرفته شده است که هر دو این‌ها مدل‌های کوانتومی‌ای هستند و به‌صورت دقیق حل‌پذیرند. از جمله معروف‌ترین تقریب‌هایی که برای مطالعه این نوع از حالات انجام شده است می‌توان به فرمول تقریبی نوسانگر [۴، ۳۵] و فرمول هولستین-پریماکوف [۳۶-۳۸] اشاره کرد که طیف انرژی و احتمال‌های گذار حرکت تابدار را توصیف می‌کنند.

¹wobbling mode

۱.۸ چارچوب نظری

در این قسمت با بیان مدل نظری دوران‌کننده سه‌محوری و فرمول‌های تقریبی نوسانگر و هولستین-پریماکوف، می‌خواهیم به بررسی برخی از ویژگی‌های حالت تابدار بپردازیم.

۱.۱.۸ مدل دوران‌کننده سه‌محوری

مدل دوران‌کننده سه‌محوری در ابتدا برای توصیف هسته سه‌محوری دوران‌کننده توسط دیویدو و فیلیپو [۳۹] معرفی شد با این فرض که هسته یک کمینه پتانسیل خوش‌تعریف در یک مقدار غیر صفر پارامتر تغییر شکل سه‌محوری γ دارد. به دلیل ناهمسانگردی یک دوران‌کننده سه‌محوری، این هسته می‌تواند پیرامون هر یک از محوره‌های اصلی دوران کند. این مطلب متناظر است با هامیلتونی زیر

$$\hat{H} = A_1 \hat{I}_1^2 + A_2 \hat{I}_2^2 + A_3 \hat{I}_3^2, \quad (1.8)$$

که در آن A_k با گشتاورهای لختی سه محور اصلی به صورت $A_k = \frac{\hbar^2}{J_k}$ ، $k = 1, 2, 3$ ، در ارتباط می‌باشد. هامیلتونی (۱.۸) تحت دوران 180° پیرامون محوره‌های اصلی ناوردا می‌باشد. بنابراین حالت‌های پایه می‌تواند به صورت

$$|IMK\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{K^0})}} [|IMK\rangle + (-1)^I |IM - K\rangle], \quad (K \geq 0), \quad (2.8)$$

انتخاب شود که در آن $|IMK\rangle$ تابع D ویگنر می‌باشد و α بیانگر دیگر اعداد کوانتومی است. تصویرهای تکانه زاویه‌ای بر روی چارچوب اصلی و محور z آزمایشگاه به ترتیب با K و M نمایش داده شده است. به دلیل اینکه انرژی حالت‌ها بی‌ارتباط با M است، در ادامه از این نمادگذاری صرف نظر می‌شود.

هامیلتونی دوران‌کننده سه‌محوری را می‌توان به صورت

$$\hat{H} = \left[\frac{1}{4} (A_1 + A_2) (\hat{I}_+^2 - \hat{I}_-^2) + A_3 \hat{I}_3^2 \right] + \frac{1}{4} (A_1 - A_2) (\hat{I}_+^2 + \hat{I}_-^2), \quad (3.8)$$

بازنویسی کرد که در آن از عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده $\hat{I}_\pm = \hat{I}_1 \pm i\hat{I}_2$ استفاده شده است. اولین جمله در این هامیلتونی قطری است در حالیکه دومین جمله شامل جملات غیر-قطری است. عناصر قطری \hat{H} عبارتند از

$$\langle IK | \hat{H} | IK \rangle = \frac{1}{4} (A_1 + A_2) [I(I+1) - K^2] + A_3 K^2. \quad (4.8)$$

دومین جمله در معادله (۳.۸) ترکیب حالت‌های مختلف را با $\Delta K = \pm 2$ ایجاد می‌کند و عناصر ماتریسی متناظر با آن عبارتست از

$$\langle IK | \hat{H} | IK \pm 2 \rangle = \frac{1}{4} (A_1 - A_2) \sqrt{(I \mp K)(I \pm K + 1)(I \mp K - 1)(I \pm K + 2)}. \quad (5.8)$$

ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های برای یک اسپین مشخص I می‌تواند با حل معادله ویژه‌مقداری بدست آید.

احتمال گذار چهارقطبی الکتریکی کاهش یافته به صورت

$$B(E\gamma; I \rightarrow I') = \sum_{\mu K K'} \left| \langle I' K' | \hat{M}_{\nu\mu}^E | I K \rangle \right|^2, \quad (6.8)$$

تعریف می شود که در آن منظور عملگر گذار چهارقطبی عبارتست از

$$\hat{M}_{\nu\mu}^E = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \hat{Q}_{\nu\mu}, \quad (7.8)$$

که عملگر تانسوری چهارقطبی الکتریکی آزمایشگاه $\hat{Q}_{\nu\mu}$ منتسب به تابع D ویگنر می باشد

$$\hat{Q}_{\nu\mu} = D_{\mu^*}^{\nu^*} \hat{Q}'_{\nu^*} + (D_{\mu^*}^{\nu^*} + D_{\mu-\nu^*}^{\nu^*}) \hat{Q}'_{\nu^*} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^{\nu^*} \hat{Q}'_{\nu^*}. \quad (8.8)$$

عملگر تانسوری چهارقطبی اصلی توسط تکانه چهار قطبی اصلی Q و پارامتر تغییر شکل سهم محوری γ به صورت

$$Q'_{\nu^*} = Q \cos \gamma, \quad Q'_{\nu^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \sin \gamma, \quad (9.8)$$

توصیف می شود.

با استفاده از جواب های دوران کننده سه محوری می تواند هندسه تکانه زاویه ای را بررسی کرد. مقدار چشم داشتی مولفه های تکانه زاویه ای مربع شده برای کل هسته به صورت $I_k = \sqrt{\langle \hat{I}_k^2 \rangle}$ ، $(k = 1, 2, 3)$ ، محاسبه می شود. از تکانه زاویه ای های بدست آمده، جهت گیری تکانه زاویه ای کل که توسط زاویه قطبی θ و زاویه سمتی φ مشخص می شود، می تواند استخراج گردد

$$I_3 = J \sin \theta \cos \varphi, \quad I_2 = J \sin \theta \sin \varphi, \quad I_1 = J \cos \theta. \quad (10.8)$$

به عبارت دیگر داریم

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{I_3}{J} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_2}{I_1} \right), \quad (11.8)$$

که در آن J طول تکانه زاویه ای کل $J = \sqrt{I(I+1)}$ می باشد.

۲.۱.۸ عبارتهای تحلیلی تقریبی

به منظور یافتن عبارتهای تحلیلی برای برانگیختگی های تابدار، بوهر و موتلسون تقریب نوسانگر را برای عملگرهای تکانه زاویه ای معرفی کردند [۴]. با در نظر گرفتن محور شماره ۳ به عنوان محوری که دارای بیشترین گشتاور لختی است، در تقریب نوسانگر، سومین مولفه تکانه زاویه ای \hat{I}_3 به صورت یک مقدار ثابت I تقریب زده می شود و عملگرهای بالابرنده و پایین برنده بر حسب عملگرهای بوزونی خلق و فنا بیان می شود

$$\hat{I}_+ = \sqrt{2I} \hat{a}^\dagger, \quad \hat{I}_- = \sqrt{2I} \hat{a}, \quad (12.8)$$

به همراه ویژگی $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \approx 1$. با این فرض، طیف انرژی می تواند به صورت حاصل جمع دو قسمت نوشته شود

$$E(n, I) = A_3 I(I+1) + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (13.8)$$

قسمت اول انرژی دورانی نسبت به محور دوران با اسپین I می‌باشد و قسمت دوم یک انرژی نوسانگر هماهنگ است، به عبارت دیگر انرژی تاب‌خوردگی با تعداد فونون‌های تاب‌دهنده n می‌باشد. تعداد فونون‌های تاب‌دهنده n در واقع حرکت تابدار محورها را نسبت به جهت‌گیری I را مشخص می‌کند و فرکانس تاب‌خوردگی $\hbar\omega$ با استقاده از گشتاور لختی تعیین می‌شود

$$\hbar\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} I = 2I \sqrt{(A_2 - A_3)(A_1 - A_3)}, \quad (14.8)$$

که در آن

$$\alpha = A_2 + A_1 - 2A_3, \quad \beta = A_2 - A_1. \quad (15.8)$$

در تقریب نوسانگر هماهنگ، احتمال گذار B(E2) دورن‌نواری به صورت

$$B(E2; n, I \rightarrow n, I - 2) \approx \frac{5}{16\pi} Q_{22}^2, \quad (16.8)$$

و احتمال گذار میان‌نواری B(E2) نیز به صورت

$$B(E2; n, I \rightarrow n + 1, I - 1) = \frac{5}{16\pi} \frac{n+1}{I} \left(\sqrt{3} Q'_{20} y + \sqrt{2} Q'_{22} x \right)^2, \quad (17.8)$$

$$B(E2; n, I \rightarrow n - 1, I - 1) = \frac{5}{16\pi} \frac{n}{I} \left(\sqrt{3} Q'_{20} x + \sqrt{2} Q'_{22} y \right)^2, \quad (18.8)$$

بیان می‌شود که در آن ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \pm 1 \right)}. \quad (19.8)$$

توجه شود که تعاریف تکانه‌های چهارقطبی اصلی Q'_{20} و Q'_{22} همانند معادله (۹.۸) می‌باشد.

در روش تقریب نوسانگر، تکانه‌های زاویه‌ای توسط عملگرهای بوزونی بسط داده می‌شود. در تقریب هولتین-

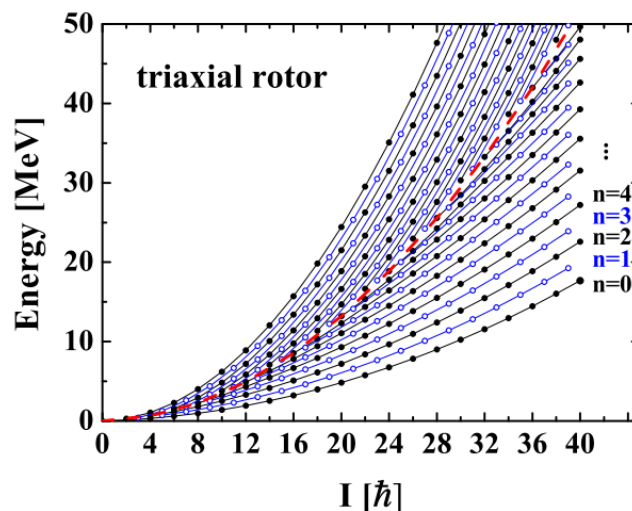
پریماکوف تکانه‌های زاویه‌ای بر حسب عملگرهای خلق و فنا بوزونی به صورت زیر بسط داده می‌شود

$$\begin{aligned} \hat{I}_3 &= I - \hat{n}, \\ \hat{I}_+ &= \hat{a}^\dagger \sqrt{2I} \sqrt{1 - \frac{\hat{n}}{2I}}, \\ \hat{I}_- &= \sqrt{2I} \sqrt{1 - \frac{\hat{n}}{2I}} \hat{a}, \end{aligned} \quad (20.8)$$

به همراه $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ هنگامیکه $I \gg 1$ و \hat{n} کوچک باشد، عبارت $\sqrt{1 - \frac{\hat{n}}{2I}}$ می‌تواند به صورت دنباله تیلور نسبت به

$\hat{n} = 0$ بسط داده شود. بنابراین داریم

$$E(n, I) = A_3 I (I + 1) + \left(I \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\alpha}{2} n^2. \quad (21.8)$$



شکل ۱.۸: طیف انرژی دوران‌کننده سه‌محوری به‌عنوان تابعی از I . نقاط توپر متعلق به حالت‌های $\alpha' = 0^\circ$ و نقاط توخالی متعلق به حالت‌های $\alpha' = 1^\circ$ می‌باشد.

۲.۸ بحث و نتیجه‌گیری بر اساس محاسبات عددی

در ادامه محاسبات عددی برای حرکت تابدار یک دوران‌کننده با $A_1 = 2A_2 = 6A_3 = 0.06 \text{ MeV}/\hbar^2$ انجام می‌شود. مقادیر گشتاورهای لختی محورها عبارتند از $\mathcal{J}_1 = 8.33\hbar^2/\text{MeV}$ ، $\mathcal{J}_2 = 16.66\hbar^2/\text{MeV}$ و $\mathcal{J}_3 = 50.00\hbar^2/\text{MeV}$. بنابراین بزرگترین و کوچکترین گشتاورهای لختی به‌ترتیب متناسب به محورهای شماره ۳ و شماره ۱ می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که پارامتر تغییر شکل سه‌محوری $\gamma = 30^\circ$ باشد.

در شکل ۱ طیف انرژی به‌صورت تابعی از اسپین I برای دوران‌کننده سه‌محوری نشان داده شده است. عدد کوانتومی تقریبی ($n = 0, 1, 2, \dots$) به‌منظور برچسب زدن به حالت‌های انرژی بر اساس انرژی آن‌ها معرفی شده است. همچنین انرژی هر حالت با $E(n, I)$ مشخص شده است. از آنجایی که دوران‌کننده سه‌محوری نسبت به دوران 180° ناورداست، بنابراین طیف انرژی محدود به حالت‌هایی با $(-1)^I = (-1)^n$ می‌باشد. بنابراین $I/2 + 1$ اسپین‌های زوج ($\alpha' = 0^\circ$) و $(I - 1)/2$ اسپین‌های فرد ($\alpha' = 1^\circ$) داریم.

طیف انرژی بدست آمده می‌تواند به دو دسته تقسیم شود. یک دسته از آن‌ها متناظر با خطوطی است که حالت‌های n یکسان برای n های کوچک می‌باشد. در این دسته فاصله انرژی میان خطوط همسایه با افزایش اسپین هم‌اندازه‌تر می‌شود. دسته دیگری که وجود دارد متناظر با حالت‌هایی که با $I - n$ یکسان برای n های بزرگ می‌باشد که رفتار آن‌ها با دسته اول متفاوت می‌باشد.

به‌منظور بررسی فرمول‌های تقریب نوسانگر و تقریب هولتین-پریماکوف طیف انرژی و انرژی تاب‌خوردگی را به‌عنوان تابعی از اسپین برای چهار مورد از پایین‌ترین نوارهای بدست آمده با پاسخ‌های دقیق مدل دوران‌کننده سه‌محوری در شکل ۲.۸ مقایسه شده است. انرژی‌های تاب‌خوردگی، که به‌صورت تفاوت میان حالت‌های برانگیخته و حالت‌های آغازین^۲ تعریف می‌شود، از طیف انرژی بدست‌آمده برای اسپین مشخص I استخراج می‌شود. این رابطه برای مقادیر

^۲yrast

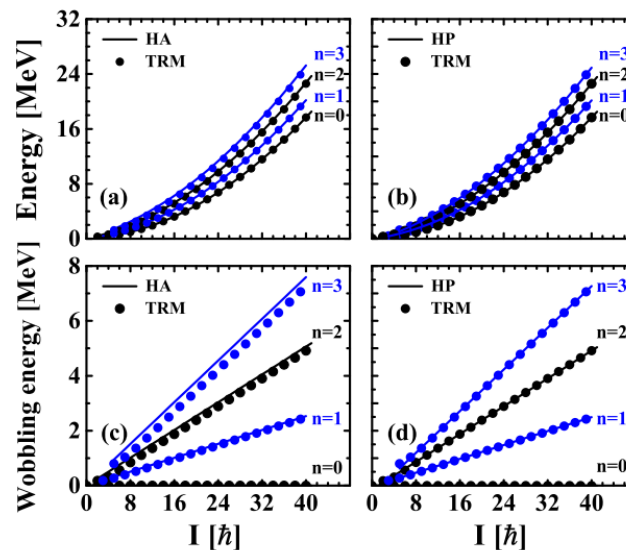
زوج برابر با

$$E_{\text{wob}} = E(n, I) - E(0, I), \quad (1.8)$$

و برای مقادیر فرد از طریق

$$E_{\text{wob}} = E(n, I) - \frac{1}{2} [E(0, I - 1) + E(0, I + 1)],$$

محاسبه می‌شود.



شکل ۲.۸: طیف انرژی و انرژی‌های تاب‌خوردگی برای چهار مورد از پایین‌ترین نوارهای تاب‌خوردگی که توسط مدل دوران‌کننده سه‌محوری محاسبه شده و با تقریب نوسانگر (a,c) و تقریب هولتین-پریماکوف (b,d) مقایسه شده است.

می‌توان دید که انرژی‌های تاب‌خوردگی بدست آمده از هر طریق نشان می‌دهد که در هر سه روش، تمام این انرژی‌ها با افزایش مقدار اسپین، افزایش می‌یابد. این رفتار می‌تواند به صورت ریزمقیاس بدین صورت درک شود که سختی^۳ پتانسیل رفتار جمعی با اسپین افزایش می‌یابد [۳۹]. هر دو روش‌های تقریب نوسانگر و تقریب هولتین-پریماکوف می‌تواند نتایج مدل دوران‌کننده سه‌محوری را برای طیف انرژی و انرژی تاب‌خوردگی را برای نوارهای تاب‌خوردگی n کوچک بازتولید کند. اما با افزایش n ، تقریب هولتین-پریماکوف کم‌کم از نتایج مدل دوران‌کننده سه‌محوری منحرف می‌شود. برای مثال نتایج تقریب نوسانگر از نتایج مدل دوران‌کننده سه‌محوری برای نوار تاب‌خوردگی $n = 2$ تقریباً 150 MeV بیشتر است و برای نوار تاب‌خوردگی $n = 3$ این تفاوت به 350 MeV می‌رسد. این مطلب نشان می‌دهد که اگر n زیاد شود، حرکت تابدار دیگر ماهیت هماهنگ ندارد و ناهماهنگی حرکت تابدار شروع به ایفای نقش می‌کند. [۲۸، ۴۰، ۴۱] این رخداد ناهماهنگی می‌تواند با در نظر گرفتن جملاتی با درجه بالاتر در بسط تکانه زاویه‌ای لحاظ شود، همان‌طور که فرمول تقریب هولتین-پریماکوف جواب‌های دقیق را به خوبی بازتولید کرده است. تفاوت میان نتایج تقریب هولتین-پریماکوف و مدل دوران‌کننده سه‌محوری حتی برای نوار تاب‌خوردگی $n = 3$ ^۴ کمتر از 30 keV می‌باشد.

³stiffness

⁴wobbling band

به منظور بررسی کمی اثرات جملات با درجات بالاتر، تفاوت‌های انرژی میان تقریب نوسانگر و تقریب هولتین-پریماکوف به صورت

$$E_{\text{HA}}(n, I) - E_{\text{HP}}(n, I) = \frac{\alpha^2}{\gamma} n^2 - \left(\frac{1}{\gamma} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\alpha}{\gamma} \right) \left(n + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (2.8)$$

محاسبه می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود این تفاوت به عدد فونونی تاب‌خوردگی وابستگی دارد ولی مستقل از تکانه زاویه‌ای می‌باشد. بدیهی است که با افزایش n تفاوت میان این روش بیشتر می‌شود و جملات با درجات بالاتر اهمیت بیشتر پیدا می‌کند. بنابراین حرکت تابدار از رفتار یک ارتعاش‌کننده هماهنگ فاصله می‌گیرد.

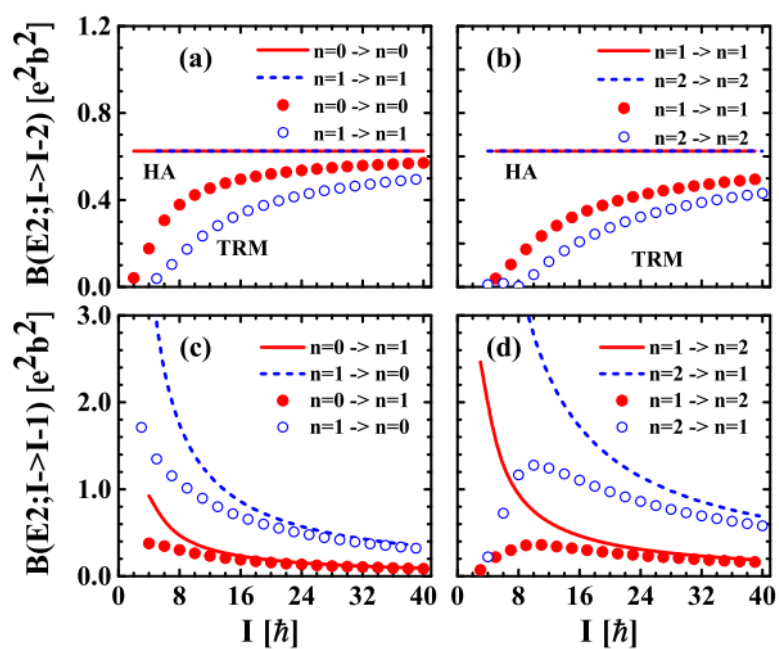
۳.۸ احتمال گذار چهارقطبی

در شکل ۳.۸ مقادیر $B(E2)$ درون‌نواری^۵ و میان‌نوری^۶ برای نوارهای $n = 0, 1, 2$ نشان داده شده است که توسط مدل دوران‌کننده سه‌محوری محاسبه شده و با تقریب نوسانگر مقایسه شده است. برای مقادیر $B(E2)$ درون‌نواری، نتایج تقریب نوسانگر که با معادله (۱۶.۸) بیان می‌شود، مقادیری ثابت هستند که مستقل از تعداد فونون تاب‌خوردگی n و اسپین I می‌باشد. با این حال، همان‌طور که در شکل ۳.۸ نشان داده شده است، نتایج مدل دوران‌کننده سه‌محوری نه تنها به مقدار اسپین بستگی دارد، بلکه به تعداد فونون تاب‌خوردگی نیز بستگی دارد. برای هر نوار تاب‌خوردگی n ، مقادیر $B(E2)$ درون‌نواری به آرامی با افزایش اسپین، افزایش می‌یابد و در نهایت در اسپین‌های بالا به نتایج تقریب نوسانگر نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تقریب نوسانگر تقریبی خوب در مقادیر اسپینی بالا و n پایین می‌باشد.

برای مقادیر $B(E2)$ میان‌نواری، نتایج تقریب نوسانگر به‌ازای یک n مشخص، یک رفتار کاهشی با نسبت به اسپین نشان می‌دهد و به‌ازای یک اسپین مشخص، نسبت به n ، رفتاری افزایشی دارد این مطلب توسط ضریب n/I فرمول‌های تقریب نوسانگر (۱۷.۸) و (۱۸.۸) تعیین می‌شود. علاوه بر این دیده می‌شود که مقادیر $B(E2; n, I \rightarrow n+1, I-1)$ کمتر از مقادیر $B(E2; n+1, I \rightarrow n, I-1)$ می‌باشد زیرا جملات در براکت در معادله (۱۷.۸) کوچک‌تر از جملات درون براکت معادله (۱۸.۸) می‌باشد. برای مدل دوران‌کننده سه‌محوری در ناحیه اسپین‌های بالا، با افزایش اسپین یک رفتار کاهشی نیز دیده می‌شود. در حالیکه در ناحیه اسپین پایین، برخلاف نتایج تقریب نوسانگر، یک رفتار افزایشی برای گذارهای میان‌نوری $n=1$ و $n=2$ دیده می‌شود. برای مثال مقادیر $B(E2; 2, I \rightarrow 1, I-1)$ به سرعت در $I \leq 10\hbar$ ، با مقدار اسپین افزایش می‌یابد.

⁵intranband

⁶interband



شکل ۳.۸: مقادیر $B(E2)$ دوران‌نواری و میان‌نواری برای $n = 0, 1$ (a, c) و $n = 1, 2$ (b, d) که توسط مدل دوران‌کننده سه‌محوری محاسبه شده و با تقریب نوسانگر مقایسه شده است.

بخش دوم

تغییر شکل‌های پویا

فصل ۹

مقدمه‌ای بر هامیلتونی بوهر، تغییر شکل‌های

پویا

در فصل گذشته تغییر شکل‌های ثابت را برای هسته کردیم و دیدیم که چطور این گونه تغییر شکل‌ها می‌تواند بر روی حالات هسته اثر گذار باشد. اما برای حالتی که تغییر شکل‌های هسته را پویا فرض کنیم دیگر نمی‌توان به آن سادگی آن‌ها را بررسی کرد زیرا با گذر زمان تغییر می‌کنند. در این فصل در دو قسمت برای هسته‌های زوج-زوج و زوج-فرد (یا فرد-زوج) به تشریح این نوع تغییر شکل‌ها می‌پردازیم. در ابتدا این نکته یادآوری می‌شود که نماد گذاری‌های استفاده شده در این فصل، منحصر همین فصل می‌باشد و ارتباطی با فصل قبل ندارد.

۱.۹ تغییر شکل‌های سطح هسته

۱.۱.۹ پارامتری سازی عمومی

طیف برانگیختگی هسته‌های زوج-زوج تا محدوده انرژی 2 Mev مشخصه‌ها و ساختار هسته که به عنوان نوسان‌ها و دوران‌های هسته تعبیر می‌شوند توسط بوهر^۱ و موتلسون^۲ بنا نهاده شد و سپس توسط فاسرلر^۳ و گرینر^۴ تکمیل

¹Bohr

²Mottelson

³Faessler

⁴Greiner

شد. سطح متحرک هسته را می‌توان به صورت عام بر حسب هماهنگ‌های کروی به کمک پارامترهای شکل وابسته به زمان بسط داد [۶-۱]

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right), \quad (1.9)$$

که $R(\theta, \phi, t)$ شعاع هسته در جهت (θ, ϕ) در زمان t ، R_0 شعاع هسته کروی است که با حذف $\alpha_{\lambda\mu}$ بدست می‌آید. همچنین بازه جمع به ازای $\lambda = 0, 1, \dots, \infty$ و $\mu = -\lambda, \dots, \lambda$ می‌باشد. دامنه‌های وابسته به زمان $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ نوسان‌های هسته را شرح می‌دهند که به عنوان مختصات جمعی اطلاق می‌شوند.

برای تکمیل فرمول بندی مدل جمعی یک هامیلتونی وابسته به $\alpha_{\lambda\mu}$ و تکانه منتسب به آن، بایستی فراهم شود. قبل از انجام این کار، می‌خواهیم مقداری درباره $\alpha_{\lambda\mu}$ بحث کنیم.

از معادله (۱.۹) به راحتی چند ویژگی برای ضرایب $\alpha_{\lambda\mu}$ بدست می‌آید

۱. **همیوگ مختلط**^۵: شعاع هسته باید حقیقی باشد لذا باید داشته باشیم

$$R(\theta, \phi, t) = R^*(\theta, \phi, t). \quad (2.9)$$

اگر این ویژگی در معادله (۱.۹) لحاظ شود و همچنین از ویژگی هماهنگ‌های کروی که

$$Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) = (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu}(\theta, \phi), \quad (3.9)$$

استفاده شود، براحتی بدست می‌آید که ضرایب دارای ویژگی

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu}. \quad (4.9)$$

۲. **ماهیت تانسور کروی**^۶: رفتار $\alpha_{\lambda\mu}$ تحت دوران، از ناوردایی تابع $R(\theta, \phi)$ پیروی می‌کند و بایستی تحت

دوران یک اسکالر^۷ بماند. در نگاه اول ممکن است که این مطلب کمی تعجب برانگیز به نظر برسد، زیرا شکل هسته تحت دوران ناوردا نیست. برای شرح این مطلب بایستی بررسی کنیم که سیستم تحت دوران دچار چه اتفاقاتی می‌شود. شکل هسته اصلی (تغییر شکل نیافته) توسط تابع $R(\theta, \phi)$ توصیف می‌شود. یک دوران مختصات (θ, ϕ) را به مختصات (θ', ϕ') می‌برد و ما باید شکل هسته را به کمک تابع جدید $R'(\theta', \phi')$ توصیف کنیم که ایجاب می‌کند

$$R'(\theta', \phi') = R(\theta, \phi). \quad (5.9)$$

این ایده تعریف ناوردایی شعاع هسته را می‌طلبد که سطح $R'(\theta', \phi')$ فرم تابعی یکسانی دارد ولی با پارامترهای دوران یافته $\alpha'_{\lambda\mu}$. این‌ها می‌توانند تعیین بشوند از

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha'_{\lambda\mu} Y'_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi), \quad (6.9)$$

⁵Complex conjugate

⁶Spherical tensor character

⁷scalar

که $Y'_{\lambda\mu}$ از $Y_{\lambda\mu}$ به کمک ماتریس های دوران بدست می آید. به سادگی می توان در این جا چگونگی تبدیل $\alpha_{\lambda\mu}$ را دید. به دلیل آن که جمع بر روی μ می تواند بر اساس جفت شدگی به تکانه زاویه ای صفر بسط داده شود داریم [۶، ۴، ۳]

$$\sum_{\mu} \alpha'_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu} Y_{\lambda\mu} \quad (7.9)$$

$$= (-1)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} \sum_{\mu} \frac{(1-)^{\lambda-\mu}}{\sqrt{2\lambda+1}} \alpha_{\lambda-\mu} Y_{\lambda\mu} \quad (8.9)$$

$$= (-1)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} \sum_{\mu\mu'} (\lambda\lambda^0 | \mu\mu'^0) \alpha_{\lambda\mu'} Y_{\lambda\mu}, \quad (9.9)$$

که $(\lambda\lambda^0 | \mu\mu'^0)$ ضریب کلبش-گردن می باشد. ناوردایی مورد نظر در تعریف (۱.۹) قابل دستیابی است اگر $\alpha_{\lambda\mu}, \mu = -\lambda, \dots, \lambda$ مانند یک تانسور کروی با تکانه زاویه ای λ تبدیل شود. به عبارت دقیق تر

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu} D_{\mu\mu'}^{(\lambda)} \alpha_{\lambda\mu'}. \quad (10.9)$$

۳. **پارایته**: مباحث مشابهی برای تبدیل پارایته برقرار است. اگر هماهنگ های کروی منعکس شوند، تانسور $\alpha_{\lambda\mu}$ نیز باید تغییر علامت مشابهی را متحمل شود تا ناوردایی شعاع سطح برقرار بماند. لذا مانند هماهنگ های کروی، پارایته $\alpha_{\lambda\mu}$ نیز به صورت $(-1)^{\lambda}$ می باشد.

۲.۱.۹ انواع تغییر شکل های چند قطبی

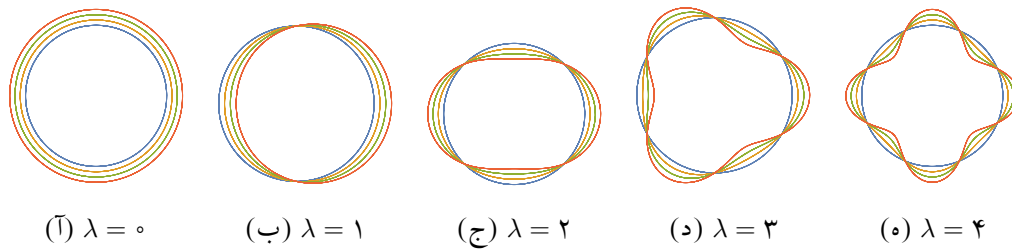
معادله (۱.۹) هر توزیعی را برای سطح هسته میسر می کند. در این قسمت می خواهیم تعبیر فیزیکی چند مرتبه از تغییر شکل و کاربرد های آن ها را مورد بررسی قرار دهیم [۶-۱].

۱. حالت تک قطبی. $\lambda = 0$ هماهنگ کروی $Y_{00}(\Omega)$ یک ثابت است. بنابراین، مقدار ناصفر α_{00} متناظر است با یک تغییر در شعاع کره. برانگیختگی های وابسته به چنین حالتی را حالت تنفسی هسته می نامند. به دلیل این که تراکم ماده هسته ای نیاز به انرژی زیادی دارد، لذا در نظر گرفتن چنین حالتی نیازمند انرژی های زیاد می باشد و برای انرژی های پایین بعید است که در نظر گرفته شود.

۲. تغییر شکل دو قطبی $\lambda = 1$ برای پایین ترین مرتبه، در واقع متناظر با تغییر شکل هسته نیست ولی در عوض متناظر با جابجایی مرکز جرم هسته است. بنابراین پایین ترین مرتبه $\lambda = 1$ متناظر است با انتقال هسته لذا بایستی از آن در برانگیختگی های هسته ای صرف نظر شود.

۳. تغییر شکل چهار قطبی: حالت $\lambda = 2$ منشا مهم ترین برانگیختگی های جمعی هسته می باشد. لذا بحث تکمیلی در ادامه آورده خواهد شد.

۴. تغییر شکل هشت قطبی، $\lambda = 3$. این نوع تغییر شکل حالت های اختصاصی برای هسته هایی است که دارای نوار برانگیختگی با پارایته منفی می باشند. یک شکل با تغییر شکل هشت قطبی شبیه به یک گلابی است.



شکل ۱.۹: شرح کیفی مراتب مختلف تغییر شکل. این اشکال به ترتیب از چپ به راست به ازای مقادیر $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ می باشند.

۵. تغییر شکل شانزده قطبی $\lambda = 4$. این بیشترین تکانه زاویه ای است برای فیزیک هسته ای حائز اهمیت بوده است. در حالیکه شواهدی برای برانگیختگی های خالص شانزده قطبی وجود ندارد، به نظر می رسد که این نقش مهمی را به عنوان ترکیبی با برانگیختگی های چهار قطبی در حالت پایه هسته های سنگین، ایفا می کند.

۶. حالت های تکانه زاویه ای بالاتر عملاً مهم نیستند. این نکته بایستی یادآوری بشود که اگر چه محدودیتی برای λ وجود ندارد اگرچه به دلیل این که برآمدگی های سطح هسته که با $Y_{\lambda\mu}$ توصیف می شود، با افزایش λ کاهش می یابد.

در تصویر ۱.۹ به صورت کیفی حالت های مختلف برانگیختگی که شرح آن ها داده شد، به تصویر کشیده شده اند.

۳.۱.۹ تغییر شکل های چهار قطبی

همانطور که در بالا اشاره شد، این تغییر شکل ها مهم ترین درجه آزادی لرزشی هسته می باشند. در این قسمت تمرکز بیشتر و خاصی بر روی تغییر شکل چهار قطبی خواهیم داشت. در تغییر شکل چهار قطبی سطح هسته به صورت [۶-۱]

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{\nu\mu}^* Y_{\nu\mu}(\theta, \phi) \right). \quad (11.9)$$

توجه کنید جمله پایسته نگهدارنده حجم α_{00} می تواند به راحتی از حذف شود. پارامتر های $\alpha_{\nu\mu}$ مستقل نیستند زیرا در قسمت قبل در خواص این پارامتر های بدست آوردیم که $\alpha_{\nu\mu} = (-1)^\mu \alpha_{\nu-\mu}^*$ به طوریکه $\alpha_{\nu 0}$ حقیقی است و ما با پنج درجه آزادی مستقل سر و کار داریم: α_{00} و قسمت های حقیقی و موهومی α_{21} و α_{22} .

برای بررسی فرم واقعی هسته، بهتر است آن را در مختصات دکارتی با بازنویسی هارمونیک های کروی بر حسب مولفه های دکارتی بردارهای یکه جهت (θ, ϕ) بررسی کنیم

$$\xi = \sin \theta \cos \phi, \quad \eta = \sin \theta \sin \phi, \quad \zeta = \cos \theta, \quad (12.9)$$

که شرط $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ را رعایت می کنید. با استفاده از این مختصات داریم

$$Y_{\zeta^0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2), \quad (13.9)$$

$$Y_{\zeta^{\pm 1}}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\xi\zeta \pm i\eta\zeta), \quad (14.9)$$

$$Y_{\zeta^{\pm 2}}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (\xi^2 - \eta^2 \pm 2i\xi\eta). \quad (15.9)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله (۱۱.۹) داریم

$$R(\xi, \eta, \zeta) = R_0 (1 + \alpha_{\xi\xi}\xi^2 + \alpha_{\eta\eta}\eta^2 + \alpha_{\zeta\zeta}\zeta^2 + 2\alpha_{\xi\eta}\xi\eta + 2\alpha_{\xi\zeta}\xi\zeta + 2\alpha_{\eta\zeta}\eta\zeta), \quad (16.9)$$

که مولفه های دکارتی تغییر شکل با مولفه های کروی به صورت زیر در ارتباط هستند

$$\alpha_{\zeta^{\pm 2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \pm 2i\alpha_{\xi\eta}), \quad (17.9)$$

$$\alpha_{\zeta^{\pm 1}} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{\xi\zeta} \pm i\alpha_{\eta\zeta}), \quad (18.9)$$

$$\alpha_{\zeta^0} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{1}{\sqrt{6}} (2\alpha_{\zeta\zeta} - \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta}). \quad (19.9)$$

در مقایسه به مولفه های کروی، گویا شش مولفه دکارتی مستقل وجود دارد که البته همگی حقیقی هستند. ولی تابع $R(\theta, \phi)$ شرط

$$\int R(\Omega) d\Omega = 4\pi R_0, \quad (20.9)$$

را رعایت می کند، زیرا انتگرال بر روی $Y_{\zeta\mu}(\Omega)$ ناپدید خواهد شد. به دلیل تقارن مولفه های ترکیبی هیچ دخالتی انجام نمی دهند اما مولفه های قطری باید برسند به

$$\int \xi^2 d\Omega = \int \eta^2 d\Omega = \int \zeta^2 d\Omega \equiv a \quad (21.9)$$

که a یک ثابت است. لذا داریم

$$\int R(\Omega) = d\Omega = 4\pi R_0 + a(\alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta} + \alpha_{\zeta\zeta}), \quad (22.9)$$

بنابراین مولفه های دکارتی باید شرط

$$\alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta} + \alpha_{\zeta\zeta} = 0, \quad (23.9)$$

را رعایت کنند. از آنجایی که مولفه های دکارتی مستقیما مرتبط هستند با کشیدگی و یا فشردگی در جهت های مشخص، لذا می توان دریافت که

- α_{ζ^0} کشیدگی در راستای محور z نسبت به محورهای x و y را توصیف می کند.
- $\alpha_{\zeta^{\pm 2}}$ طول نسبی محور x را در قیاس با محور y (قسمت حقیقی) و تغییر شکل مورب در صفحه xy را توصیف می کند.

• $\alpha_{\pm 1}$ به تغییر شکل مورب محور z اشاره دارد.

مشکلی که در مواجهه با این پارامترهای وجود دارد این است که محورهای تقارنی هسته (در صورت وجود) می‌توانند هر جهت گیری در فضا داشته باشند لذا در آن صورت جهت گیری آن‌ها ترکیبی از $Y_{2\mu}$ می‌باشد. هندسه این چنین وضعیتی زمانی واضح تر می‌شود که جهت گیری‌ها بر اساس سیستم محورهای اصلی^۸ تفکیک شود. اگر ما این چارچوب مختصات مختصات جدید را با کمیت‌های پرایم دار نشان دهیم، تانسور تغییر شکل دکارتی باید قطری باشد به طوری که

$$R(\xi', \eta', \zeta') = R_0 \cdot (1 + \alpha'_{\xi\xi} \xi'^2 + \alpha'_{\eta\eta} \eta'^2 + \alpha'_{\zeta\zeta} \zeta'^2), \quad (24.9)$$

و شرط $\alpha'_{\xi\eta} = \alpha'_{\xi\zeta} = \alpha'_{\eta\zeta} = 0$ باعث می‌شود که مولفه‌های کروی به صورت

$$\alpha'_{\pm 1} = 0, \quad (25.9)$$

$$\alpha'_{\pm 2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) \equiv a_2, \quad (26.9)$$

$$\alpha'_{\pm 0} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{1}{\sqrt{6}} (2\alpha'_{\zeta\zeta} - \alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) \equiv a_0. \quad (27.9)$$

درآیند. هنوز هم پنج پارامتر حقیقی مستقل وجود دارد ولی با مشخصه‌های هندسی واضح تر:

• a_0 اشاره به کشیدگی محور z' نسبت به محورهای x' و y' دارد.

• a_2 تفاوت طول میان محورهای x' و y' را تعیین می‌کند

• سه زاویه اویلر^۹، که جهت گیری چارچوب محورهای اصلی (پرایم دار) (x', y', z') نسبت به چارچوب ثابت نگه داشته شده آزمایشگاه (x, y, z) .

مزیت استفاده از چارچوب محورهای اصلی این است که دوران‌ها و لرزش‌ها به تمامی مجزا هستند. یک تغییر در زاویه اویلر اشاره به دوران محض هسته بدون هیچ تغییری در شکل هسته (که فقط با a_0 و a_2 تعیین می‌شود) می‌باشد. توجه کنید که $a_2 = 0$ شکلی را توصیف می‌کند که در آن طول محورها در جهت‌های x و y یکسان است با محور تقارن پیرامون محور z .

پارامترهای دیگری وجود دارد که توسط بوهر^{۱۰} معرفی شد. این پارامترها شبیه مختصات قطبی در فضای (a_0, a_2) هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{4}} \beta \sin \gamma. \quad (28.9)$$

عامل $\frac{1}{\sqrt{4}}$ به گونه‌ای انتخاب شده است که

$$\sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \sum_{\mu} |\alpha'_{2\mu}|^2 = a_0^2 + 2a_2^2 = \beta. \quad (29.9)$$

^۸ این‌ها محورهایی هستند که در آن‌ها تانسور گشتاور لختی سیستم در آن محورها فقط دارای مولفه قطری است.

^۹Euler angles

^{۱۰}Bohr

این جمع خاص بر روی مولفه های $\alpha_{\nu\mu}$ نسبت به دوران ناورداست

$$\sum_{\mu} |\alpha_{\nu\mu}|^2 = \sum_{\mu} = (-1)^{\mu} \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu-\mu} = \sqrt{5} \sum_{\mu\mu'} (22^{\circ} | \mu\mu') \alpha_{\mu} \alpha'_{\mu} = \sqrt{5} [\alpha_{\nu} \times \alpha_{\nu}]^{\circ}, \quad (30.9)$$

لذا مقدار آن در مختصات اصلی و آزمایشگاه نیز یکسان است.

برای مشاهده شکل هسته در چارچوب مختصات اصلی بر حسب پارامتر های β و γ بایستی مولفه های دکارتی را بر حسب β و γ شوند. با توجه به شرطی که برای مولفه های دکارتی بدست آوردیم در معادله (۲۳.۹) ، لذا در مختصات اصلی داریم

$$\alpha'_{\zeta\zeta} = -\alpha'_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \quad (31.9)$$

که با جایگذاری آن در معادله (۲۷.۹) داریم

$$\alpha'_{\zeta\zeta} = \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{15}{8\pi} a_0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \gamma, \quad (32.9)$$

همچنین اگر در معادله (۲۶.۹) معادله (۳۱.۹) استفاده شود داریم

$$\alpha'_{\xi\xi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \left(a_{\nu} - \frac{a_0}{\sqrt{6}} \right) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma \right) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (33.9)$$

و به طریق مشابه داریم

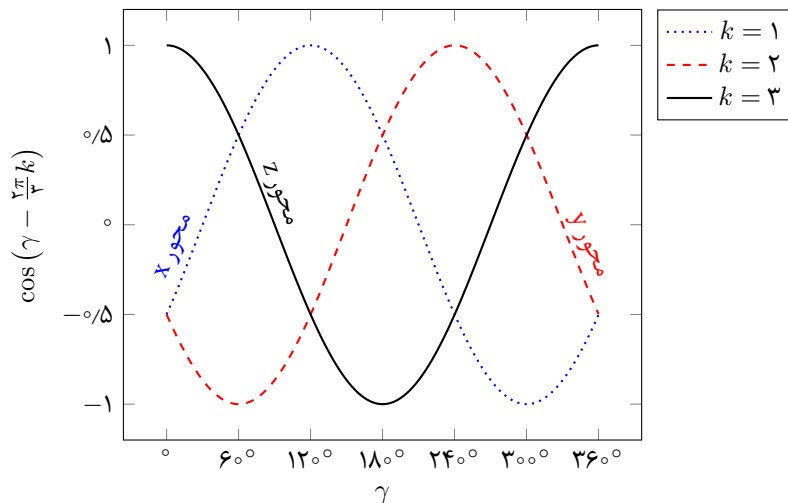
$$\alpha'_{\eta\eta} = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma + \frac{1}{2} \cos \gamma \right) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left(\gamma - \frac{4\pi}{3} \right). \quad (34.9)$$

مولفه های تغییر شکل دکارتی اشاره به کشیدگی محور های هسته در آن جهت ها داشتند. با استفاده از نماد گذاری جدید δR_k که $k = 1, 2, 3$ برای این مختصات دکارتی در چارچوب مختصات اصلی داریم

$$\delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right), \quad (35.9)$$

که در آن مقادیر ۱، ۲، ۳ برای k به ترتیب متناظر است با محور های x', y', z' شکل ۲.۹ می تواند درک از نوسان های سه محور را بر حسب γ راحت کند. در $\gamma = 0^{\circ}$ هسته در راستای محور z' کشیده شده است اما محور های x' و y' هم اندازه هستند. این نوع تقارن محوری هسته یادآور یک سیگار است و کشیده نامیده می شود. همزمان با افزایش γ محور x' افزایش می یابد و در حالیکه y' و z' کاهش می یابند وارد ناحیه ای می شوند که هر سه محور طول های غیر یکسانی دارند. به این شکل و ناحیه سه محوری^{۱۱} گفته می شود. این رویه ادامه دارد تا دوباره تقارن محوری در $\gamma = 60^{\circ}$ حاصل شود. اما در این حالت طول محور های z' و x' یکسان است و y' محور تقارن. نکته دیگر در این وضعیت این است که دو محور یکسان در این حالت از محور تقارن بزرگتر هستند. در این حالت هسته شبیه به یک کلوچه است و پخت نامیده می شود. همان طور که از شکل بدست می آید این الگو هر 60° درجه تکرار می شود در حالیکه محور های جایشگت انجام داده اند و عوض شده اند. مشکلی که در این جا پدید می آید این است شکل های هسته ای مشخص در صفحه تکرار می شوند. برای مثال تقارن محوری کشیده در زاویه های 60° ، 180° و 300°

¹¹Triaxial



شکل ۲.۹: تصویر تابع $\cos(\gamma - \frac{2\pi k}{3})$ برای $k = 1, 2, 3$ که متناظر با افزایش طول محورها در جهت x, y, z می‌باشد.

یکسان است و تنها نامگذاری محورها در آن متفاوت است و یا این که شکل سه محوری شش بار در صفحه تکرار شده است. این مطلب را به صورت بهتری در تصویر ۳.۹ نشان داده ایم. به دلیل آنکه جهت گیری محورها متفاوت است زوایای اوایلر متناسب به آن‌ها نیز متفاوت است. در نتیجه شکل‌های فیزیکی یکسان (شامل جهت گیری آن‌ها در فضا) می‌توانند به کمک مجموعه‌های متفاوتی از پارامترهای (β, γ) و زایه‌های اوایلر نشان داده شوند.

دیدیم که چطور می‌توان تغییر شکل‌های هسته را یا با مختصات آزمایشگاه به کمک تانسور کروی $\alpha_{\lambda\mu}$ یا به طور مشابه با در نظر گرفتن تغییر شکل هسته در دستگاه اصلی به کمک پارامترهای (a_0, a_2) یا (β, γ) و زاویه‌های اوایلر که جهت گیری نسبت به مختصات ثابت نگه داشته شده آزمایشگاه را تعیین می‌کند، تغییر شکل‌های هسته را مورد بررسی قرار داد. در هر دو مورد تقارن دورانی بایستی لحاظ گردد.

در دستگاه آزمایشگاه انرژی جنبشی و پتانسیل هسته بایستی تابع $\alpha_{\lambda\mu}$ و سرعت^{۱۲} های $\alpha_{\lambda\mu}$ باشد. آن‌ها بایستی نسبت به دوران ناوردا باشند. به عنوان مثال، یک پتانسیل با وابستگی به تغییر شکل می‌تواند شامل هایی از $\alpha_{\lambda\mu}$ که به تکانه زاویه‌ای صفر جفت شده است باشد

$$V(\alpha_{\lambda,\mu}) = C [\alpha_2 \times \alpha_2]^\circ + D [\alpha_2 \times [\alpha_2 \times \alpha_2]^2]^\circ + \dots, \quad (36.9)$$

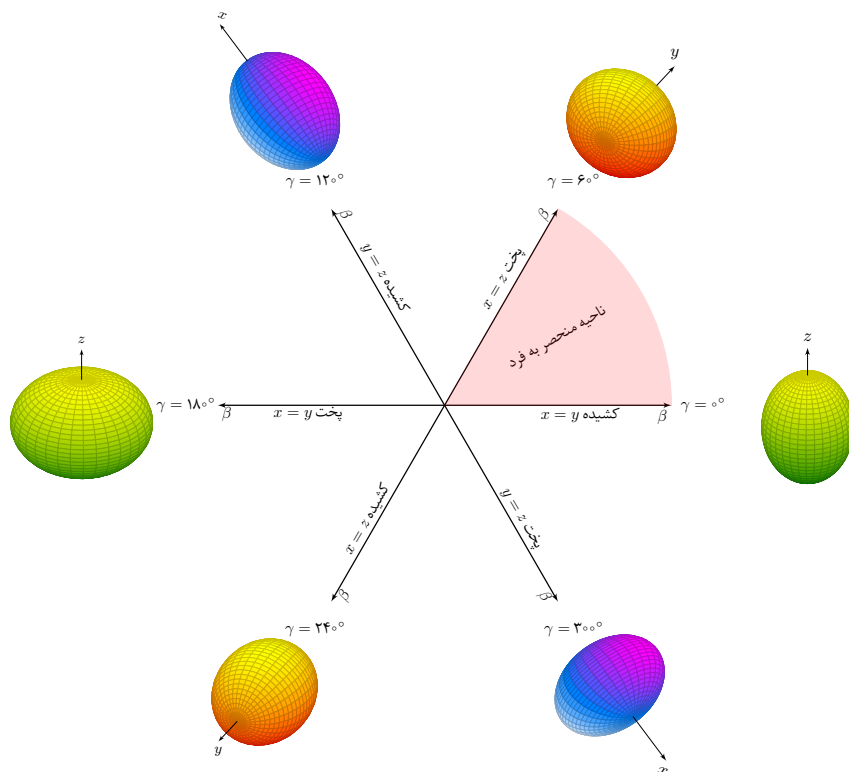
و همچنین توابع پیچیده تری از اسکالرها مانند

$$\sqrt{[\alpha_2 \times \alpha_2]^\circ} \sim \beta. \quad (37.9)$$

انرژی پتانسیل نیز بایستی به طریق مشابه ساخته شود. تابع موج نیز باید به صورت تابعی از تکانه زاویه‌ای خوب باشد $\psi_{IM}(\alpha_{\lambda,\mu})$.

در دستگاه مختصات اصلی، که در برخی موارد از آن به عنوان دستگاه ذاتی یاد می‌شود، اطمینان از ناوردایی دورانی راحت‌تر است زیرا در این صورت انرژی بایستی مستقل از زاویه‌های اوایلر باشد. مشتقات زمانی این زاویه‌ها می‌تواند در انرژی جنبشی دورانی ظاهر شود. انرژی تغییر شکل منحصر به β و γ بستگی دارد. بنابراین نتیجه می‌

^{۱۲} منظور تغییرات زمانی است.



شکل ۳.۹: صفحه (β, γ) به شش قسمت مساوی و متقارن تقسیم شده است. بخش 0° تا 60° شامل تمام شکل های هسته به صورت منحصر به فرد می باشد و در باقی قسمت ها این اشکال تکرار می شوند.

گیریم که انرژی به صورت زیر توصیف شود

$$T(\beta, \gamma, \theta_i) + V(\beta, \gamma), \quad i = 1, 2, 3, \quad (38.9)$$

که منظور از θ_i زاویه‌های اویلر هستند. آقای بوهر شکل هامیلتونی جمعی هسته را به کمک متغیرهای β و γ به صورت زیر بدست آورد [۴]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{2J_k}, \quad (39.9)$$

$$J_k = 2B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right). \quad (40.9)$$

که در آن پارامتر جرم با B و تصویر تکانه زاویه‌ای کل در دستگاه مختصات ذاتی با Q نمایش داده شده است. در این قسمت به طور خلاصه و مفید به بررسی‌های مختلف هامیلتونی بوهر به منظور توجیح حالات برانگیخته و گذارهای هسته‌ای می‌پردازیم. با توجه به این که چه فرضی در مسئله حاکم شود و متغیرها چگونه از هم تفکیک گردند، مدل‌های مختلف بدست می‌آیند و هر کدام از قابلیت‌های منحصر به فرد برخوردار خواهد بود.

۴.۱.۹ مدل ناپایدار: E(5)

در سال ۲۰۰۰ [۴۳] آقای یاکلو^{۱۳} به کمک مفهوم تقارن‌های پویا^{۱۴} که در آن هامیلتونی سیستم به کمک عملگرهای کازیمیر^{۱۵} گروه‌های مختلف نوشته می‌شود، اقدام به بررسی هامیلتونی بوهر کرد. با در نظر گرفتن یک برهمکنش به صورت یک چاه پتانسیل بی‌نهایت و تابع موج به صورت $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta)\Phi(\gamma, \theta_i)$ هامیلتونی بوهر را به دو معادله زیر تفکیک می‌شود

$$\left(-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{2} \sum_k \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} \right) \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i), \quad (41.9)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + U(\beta) \right) f(\beta) = E f(\beta), \quad (42.9)$$

$$\Lambda = \tau(\tau + 3). \quad (43.9)$$

مرسوم است که برای سهولت از انرژی و پتانسیل کاهیده که به صورت زیر هستند

$$\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E \quad (44.9)$$

$$u(\beta) = \frac{2B}{\hbar^2} U(\beta) \quad (45.9)$$

استفاده شود. با در نظر گرفتن چاه پتانسیل نامتناهی برای پتانسیل به صورت

$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_w \\ \infty, & \beta \geq \beta_w, \end{cases} \quad (46.9)$$

¹³Iachello

¹⁴Dynamic symmetries

¹⁵Casimir operators

و در نظر گرفتن تابع $\phi(\beta) = \beta^{3/2} f(\beta)$ می توان معادله (۴۲.۹) را به صورت زیر تبدیل کرد

$$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\phi(z)}{dz} + \left(1 - \frac{(\tau + \frac{3}{4})^2}{z^2} \right) \phi(z) = 0, \quad z = \beta k = \beta \sqrt{\varepsilon}. \quad (47.9)$$

معادله فوق، معادله دیفرانسیل بسل می باشد لذا جواب های آن را می توان بر حسب توابع بسل بدست آورد

$$\phi(\beta)_{\xi, \tau} = c_{\xi, \tau} J_{\tau + \frac{3}{4}}(k_{\xi, \tau}), \quad (48.9)$$

$$f(\beta) = c_{\xi, \tau} \beta^{-3/2} J_{\tau + \frac{3}{4}}(k_{\xi, \tau}), \quad (49.9)$$

$$E_{\xi, \tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{\xi, \tau}^2, \quad k_{\xi, \tau} = \frac{x_{\xi, \tau}}{\beta_w}, \quad (50.9)$$

که $J_{\tau + \frac{3}{4}}(k_{\xi, \tau})$ توابع بسل مرتبه $\tau + \frac{3}{4}$ ام می باشد. ثابت بهنجارش با $c_{\xi, \tau}$ نمایش داده شده است و ξ امین صفر تابع $J_{\tau + \frac{3}{4}}(z)$ نیز با $x_{\xi, \tau}$ نشان داده شده است.

برای محاسبه گذار الکترومغناطیسی E2 نیاز به عناصر ماتریسی عملگر

$$T^{E2} = t\alpha_{2\mu} \quad (51.9)$$

$$\alpha_{2\mu} = \beta \left(D_{\mu, 0}^{(2)} \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu, 2}^{(2)} + D_{\mu, -2}^{(2)} \right) \sin \gamma \right) \quad (52.9)$$

داریم که در نهایت به کمک

$$I_{\xi, \tau, \xi', \tau'} = \int_0^\infty \beta f_{\xi, \tau}(\beta) f_{\xi', \tau'}(\beta) \beta^4 d\beta \quad (53.9)$$

محاسبه می شوند. نتایج عددی این محاسبات در شکل ۴.۹ آورده شده است در همان سال آقایان کاستن^{۱۶} و زامفیر^{۱۷} در مقاله ای ایزوتوپ ^{۱۳۴}Ba را به عنوان کاندید آزمایشگاهی برای مدل $E(5)$ معرفی کردند.

۵.۱.۹ مدل X(5)

در این بررسی فرض می شود که برهمکنش در معادله (۳۹.۹) دارای کمینه مقدار در $\gamma = 0^\circ$ باشد و تابع موج آن نیز به صورت $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \phi_K^L(\beta, \gamma) D_{M, K}^L(\theta_i)$ باشد که منظور از $D_{M, K}^L(\theta_i)$ توابع ویگنر زاویه های اوپلر می باشند. با توجه به حضور کمینه مقدار پیرامون $\gamma = 0^\circ$ می توان آخرین جمله معادله (۳۹.۹) را این گونه بازنویسی کرد [۴۸]

$$\sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{\pi}{3}k)} \approx \frac{4}{3} \left(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right) \quad (54.9)$$

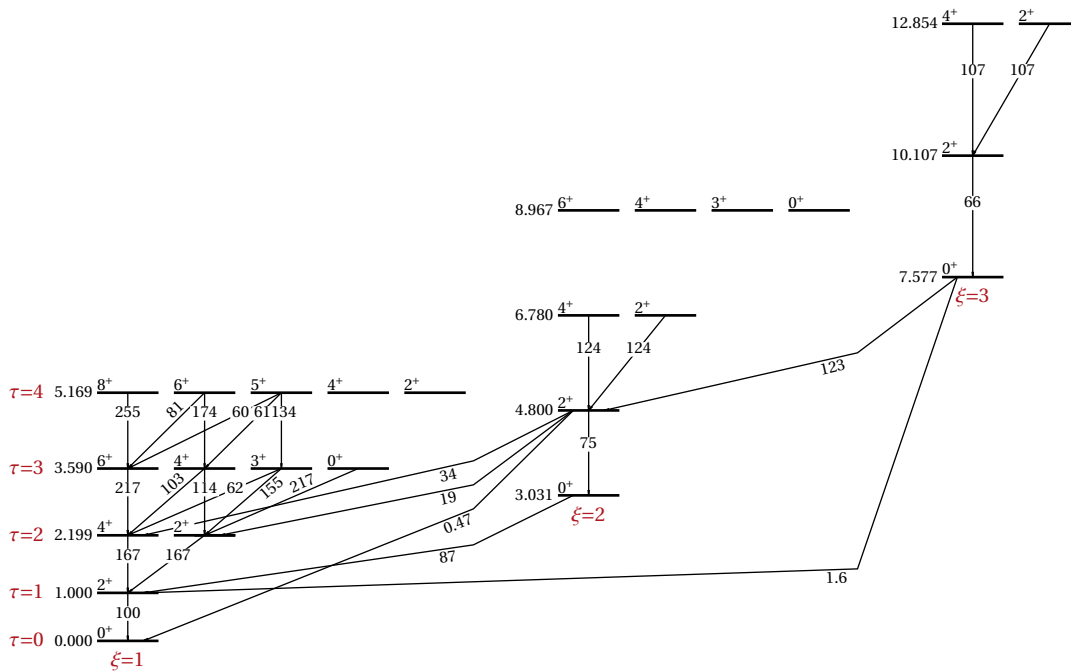
با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل کاهیده به صورت

$$\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma \quad (55.9)$$

$$u(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma), \quad (56.9)$$

¹⁶Casten

¹⁷Zamfir



شکل ۴.۹: نرخ انرژی و گذارهای محاسبه شده به کمک نتایج E(5).

می توان معادلات را به صورت تقریبی به صورت زیر تفکیک کرد

$$\left(-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + u(\beta) \right) \xi_L(\beta) = \varepsilon_\beta \xi_L(\beta), \quad (57.9)$$

$$\left(-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^3 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4 \langle \beta^2 \rangle} \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right) = \eta_K(\gamma) = \varepsilon_\gamma \eta_K, \quad (58.9)$$

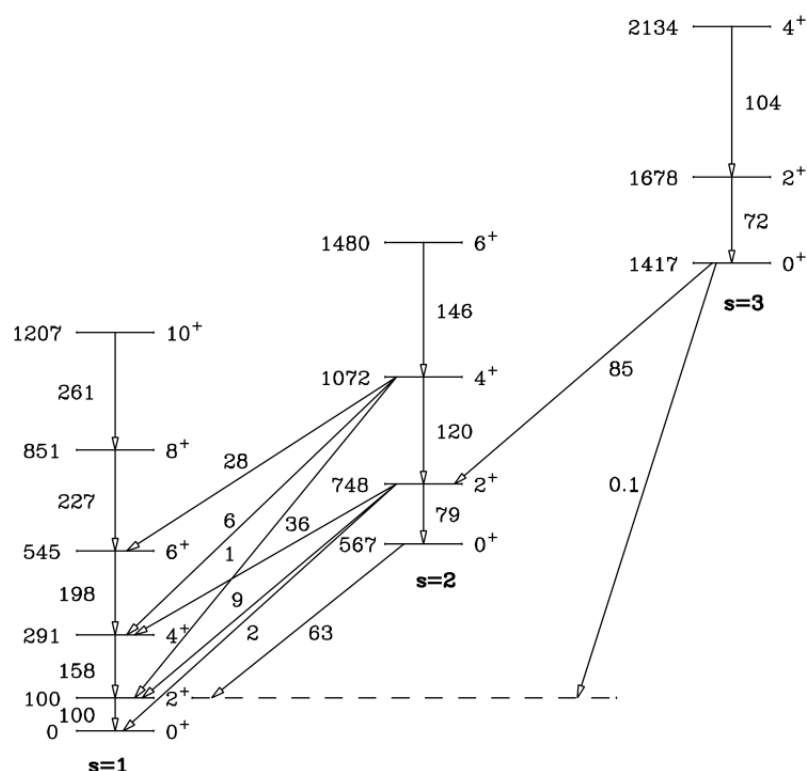
که در آن $\langle \beta^2 \rangle$ میانگین β^2 پیرامون $\xi(\beta)$ می باشد. با در نظر گرفتن چاه پتانسیل نامتناهی برای قسمت β ویژه تابع و انرژی آن به صورت زیر بدست می آید

$$\xi_{s,L} = c_{s,L} \beta^{3/2} J_\nu(k_{s,L} \beta) \quad (59.9)$$

$$\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} \right)^{1/2} \quad (60.9)$$

$$\varepsilon_\beta = (k_{s,L})^2, \quad (61.9)$$

$$k_{s,L} = \frac{x_{s,L}}{\beta_w} \quad (62.9)$$



شکل ۵.۹: نرخ های انرژی و گذار های الکترومغناطیسی E2 بدست آمده از مدل X(5).

که $s, x_{s,L}$ امین صفر تابع بسل J_ν می باشد. همچنین برای قسمت γ با فرض یک نوسانگر هارمونیک می توان ویژه توابع و انرژی آن قسمت را به صورت زیر بدست آورد

$$\tilde{\varepsilon}_\gamma = \frac{3a}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} (n_\gamma + 1) \quad (63.9)$$

$$n_\gamma, K = \begin{cases} n_\gamma = 0, & K = 0, \\ n_\gamma = 1, & K = \pm 2, \\ n_\gamma = 2, & K = 0, \pm 4, \end{cases} \quad (64.9)$$

$$\eta_{n_\gamma, K}(\gamma) = c_{n, K} \gamma^{|K|/2} e^{-2a\gamma^2/2} L_n^{|K|} (2a\gamma^2) \quad (65.9)$$

$$n = \left(\frac{n_\gamma - |K|}{2} \right), \quad (66.9)$$

که منظور از L_n توابع لژاندر هستند. این جواب ها مناسب هسته هایی هستند که در گذار فازی میان گروهی به صورت محوری تغییر شکل یافته مناسب است. در شکل ۵.۹ نتایج بدست آمده از این بررسی برای نرخ های انرژی و گذار های هسته به تصویر کشیده شده است.

فصل ۱۰

پتانسیل دکاتیک در مدل γ ناپایدار

۱.۱۰ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی

برای این قسمت قرار است که پتانسیل دکاتیک^۱ برای قسمت β معادله دیفرانسیل شرودینگر گونه هامیلتونی بوهر

$$\frac{d^2 \Phi(\beta)}{d\beta^2} + \left(\varepsilon - \frac{\Lambda + 2}{\beta^2} - v(\beta) \right) \Phi(\beta) = 0. \quad (1.10)$$

در نظر گرفته شود. این پتانسیل به صورت

$$v(\beta) = \frac{\kappa^2}{\beta^2} + a\beta^2 + b\beta^4 + c\beta^6 + d\beta^8 + f\beta^{10} \quad (2.10)$$

می باشد که در آن ۶ پارامتر آزاد κ, a, b, c, d, f بایستی مقادیر حقیقی به خود بگیرند. با لحاظ کردن این پتانسیل در معادله (۱.۱۰) داریم

$$\frac{d^2 \Phi(\beta)}{d\beta^2} + \left(\varepsilon - \frac{P}{\beta^2} - a\beta^2 - b\beta^4 - c\beta^6 - d\beta^8 - f\beta^{10} \right) \Phi(\beta) = 0, \quad (3.10)$$

که در آن $P = \tau(\tau + 3) + \kappa^2 + 2$ می باشد. برای حل این معادله ابتدا جواب را به صورت

$$\Phi(x) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{x}} \quad (4.10)$$

پیشنهاد می کنیم. با این کار به معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \left(\frac{\varepsilon}{x} + \frac{3}{16} - \frac{P}{x^2} - \frac{a}{4} - \frac{b}{4}x - \frac{c}{4}x^2 - \frac{d}{4}x^3 - \frac{f}{4}x^4 \right) \phi(x) = 0, \quad (5.10)$$

¹Decatic

می‌رسیم. اگر برای این معادله دیفرانسیل جواب‌ها را به صورت

$$\phi(x) = x^{A_0} \exp [A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3] F(x), \quad (6.10)$$

فرض کنیم می‌توانیم به جواب‌های فیزیکی برای سیستم مورد نظر دستیافت که در آن پارامترها عبارتند از

$$A_0 = \frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{1 + 4P} \right), \quad A_1 = \frac{d^2 - 4cf}{16f^{3/2}}, \quad A_2 = \frac{-d}{8\sqrt{f}}, \quad A_3 = \frac{-\sqrt{f}}{6}. \quad (7.10)$$

در نهایت معادله دیفرانسیل نهایی شکل

$$xF'''(x) + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3) F'(x) + (C_0 + C_1 x + C_2 x^2) F(x) = 0, \quad (8.10)$$

را به خود می‌گیرد که برای ساده‌سازی پارامترهای جدید

$$\begin{aligned} B_0 &= 2A_0, & B_1 &= 2A_1, & B_2 &= 4A_2, & B_3 &= 6A_3 \\ C_0 &= \frac{\varepsilon}{4} + 2A_0 A_1, \\ C_1 &= -\frac{a}{4} + A_1^2 + 2A_2 + 4A_0 A_2, \\ C_2 &= -\frac{b}{4} + 4A_1 A_2 + 6A_3 + 6A_0 A_3, \end{aligned} \quad (9.10)$$

معرفی شده‌اند. برای یافتن جواب‌های این معادله دیفرانسیل می‌توان از روش فروبونیوس استفاده کرد. در این روش شکل دنباله‌ای جواب^۲ را برای معادله دیفرانسیل در نظر گرفته و پس از بدست آوردن روابط میان ضرایب بسط اقدام به یافتن انرژی و تابع موج نهایی می‌کنیم. با قرار دادن شکل دنباله‌ای جواب به صورت

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n, \quad (10.10)$$

رابطه بازگشتی زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} (n+1)B_0 g_{n+1} + (C_0 + nB_1)g_n \\ + (C_1 + n(n+1) + (n-1)B_2)g_{n-1} + (C_2 + (n-2)B_3)g_{n-2} = 0, \end{aligned} \quad (11.10)$$

که در رابطه فوق به ازای $k \leq -1$ شرط مرزی $g_k = 0$ را داریم. این دنباله بایستی به ازای جملات مشخص بریده شود. به منظور قابل حل بودن این روش قیدهایی بدست می‌آید که دو مورد از این قیود بر روی ضرایب پتانسیل اعمال می‌شود

$$a = a_{m,\tau} = 4(A_1^2 + 2(2m+1)A_2 + 4A_0 A_2), \quad (12.10)$$

$$b = b_{m,\tau} = 8(2A_1 A_2 + 3(m+1)A_3 + 3A_0 A_3), \quad (13.10)$$

و آخرین قید منجر به یافتن انرژی می‌شود

$$\varepsilon_{m,\tau} = -8(m + A_0) A_1. \quad (14.10)$$

حال با یافتن صورت انرژی و روابط حاکم بر ضرایب بسط تابع موج می‌توان اقدام به بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی برخی از ایزوتوپ‌ها نمود.

²series form of the solution

جدول ۱.۱۰: مقایسه میان بازتولید اطلاعات مدل E(5) توسط پتانسیل دکاتیک و سکستیک.

	E(5)	Decatic	Sextic
0_g	0/00	0/00	0/00
2_g	1/00	1/00	1/00
4_g	2/2	2/23	2/48
6_g	3/59	3/58	3/57
2_γ	2/2	2/23	2/48
3_γ	3/59	3/58	3/57
4_γ	3/59	3/58	3/57
0_β	3/03	3/17	2/76
2_β	4/8	4/17	3/95

۲.۱۰ نتایج عددی

در این قسمت قبل از اینکه بخواهیم سراغ بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی برخی از ایزوتوپ‌ها برویم، آموزنده است که اطلاعات مربوط به مدل E(5) را به کمک این پتانسیل بازتولید کرده و با پتانسیل سکستیک^۳ مقایسه کنیم. در ابتدا نسبت‌های انرژی این مدل را می‌خواهیم بازتولید کنیم که این نسبت‌ها عبارتست از

$$R(m, \tau) = \frac{\varepsilon(m, \tau) - \varepsilon(0, 0)}{\varepsilon(0, 1) - \varepsilon(0, 0)}. \quad (1.10)$$

مینای انجام محاسبات عددی کمینه کردن پارامتر

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \left(R_i^{\text{Theor}} - R_i^{\text{E}(5)} \right)^2}{N - N^*}, \quad (2.10)$$

می‌باشد که منظور از اطلاعات نظری و مدل E(5) (و یا به‌طور عام اطلاعات تجربی) به‌ترتیب با Theor و E(5) داده شده است. همچنین به‌منظور کاهش اثرات پارامترهای آزاد تعداد این پارامترها که با N^* نشان داده شده است از تعداد کل ترازها کسر می‌گردد. در جدول ۲.۱۰ مقایسه‌ای از نتایج عددی بازتولید اطلاعات مدل E(5) توسط دو پتانسیل دکاتیک و سکستیک آورده شده است. به‌منظور بررسی دقت این محاسبات پارامترهای χ^2 آن‌ها محاسبه شده است که در آن $\chi_{\text{Decatic}}^2 = 0/04$ و $\chi_{\text{Sextic}}^2 = 0/11$ می‌باشد. برای این قسمت مقدار $\kappa = 1/62$ در نظر گرفته شده است. بایستی این نکته را در نظر گرفت که به دلیل شکل ریاضی فرمول نسبت‌های انرژی تنها قادر به استفاده کردن از یک پارامتر در پتانسیل دکاتیک را به‌منظور بازتولید اطلاعات انرژی داشتیم. بنابراین برای این قسمت داریم $N_{\text{Decatic}}^* = 1$ در حالیکه برای پتانسیل سکستیک $N_{\text{Sextic}}^* = 2$ می‌باشد.

³Sextic

همچنین برای محاسبه گذارهای B(E2) با استفاده از عملگر گذار چهارقطبی

$$T_{\mu}^{(E2)} = t \beta Q_{\mu},$$

$$Q_{\mu} = D_{\mu_0}^{\nu}(\vartheta_i) \cos(\gamma) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu_2}^{\nu}(\vartheta_i) + D_{\mu_{-2}}^{\nu}(\vartheta_i) \right) \sin(\gamma), \quad (3.10)$$

داریم

$$B(E2; m\tau L \rightarrow m'\tau' L') = \frac{1}{2L+1} \left| \langle m'\tau' L' | T^{(E2)} | m\tau L \rangle \right|^2,$$

$$= [t(\tau', L'; 1, 2 || \tau, L) A(\tau, \tau') I(m\tau; m'\tau')]^2, \quad (4.10)$$

که در آن

$$A(\tau, \tau') = \sqrt{\frac{\tau}{2\tau+3}} \delta_{\tau, \tau'+1} + \sqrt{\frac{\tau+3}{2\tau+3}} \delta_{\tau, \tau'-1}, \quad (5.10)$$

$$I(m\tau; m'\tau') = \int_0^{\infty} \xi_{m\tau}(\beta) \beta \xi_{m'\tau'}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (6.10)$$

و منظور از $(\tau', L'; 1, 2 || \tau, L)$ ضرایب کلبش-گردن در فضای SO(5) می‌باشد. با در نظر گرفتن مقادیر $c = 37$ ، $d = -1$ ، $f = 1$ می‌توان این گذارهای چهارقطبی را برای پتانسیل دکاتیک محاسبه کرد. در جدول ۲.۱۰ برخی از گذارهای چهارقطبی مدل E(5) توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک بازتولید و مقایسه شده‌اند. همانند قسمت نسبت‌های انرژی، بازتولید اطلاعات مربوط به گذارهای چهارقطبی مدل E(5) توسط مدل دکاتیک با دقت بهتری انجام شده است.

حال زمان آن رسیده است که اطلاعات آزمایشگاهی برخی از ایزوتوپ‌ها را به کمک این پتانسیل بازتولید کرد. برای این قسمت دو مجموعه از ایزوتوپ‌ها در نظر گرفته شده است. در مجموعه ابتدائی ایزوتوپ‌های ^{104}Ru ، ^{102}Pd ، ^{134}Ba و ^{116}Cd ، ^{114}Cd ، ^{108}Pd را در نظر گرفته‌ایم. در مجموعه بعدی نیز مجموعه‌ای از ایزوتوپ‌های عنصر Xe در نظر گرفته شده است. در جدول ۳.۱۰ نسبت‌های انرژی مجموعه اول بازتولید شده است. در جدول ۴.۱۰ مقایسه‌ای میان مدل پیش‌رو و نتایج محاسبات دیگر مدل‌های صورت گرفته بر روی این مجموعه از ایزوتوپ‌ها انجام گرفته است.

جدول ۲.۱۰: بازتولید گذارهای چهارقطبی مدل E(5) توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک.

$B(E2; L_i \rightarrow L_f)$	E(5)	Decatic	Sextic
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۶۵	۱/۸۹
$6_g \rightarrow 4_g$	۲/۲۳	۲/۲۴	۲/۵۶
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۶۵	۱/۸۹
$4_\gamma \rightarrow 4_g$	۱/۰۶	۱/۰۷	۱/۲۲
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۶۴	۰/۶۴	۰/۷۳
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۱/۳۳	۱/۳۴	۱/۰۷
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۸۰	۰/۸۲	۱/۶۳
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۷۷
$2_\beta \rightarrow 2_\gamma$	۰/۲۷	۰/۲۸	۰/۳۰
$\chi^2_{B(E2)}$		۰/۰۰۰۱	۰/۱۲۰۹

جدول ۳.۱۰: بازتولید و مقایسه نسبت‌های انرژی توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک برای مجموعه اول از ایزوتوپ‌های ^{102}Pd ، ^{104}Ru ، ^{108}Pd ، ^{114}Cd ، ^{116}Cd و ^{134}Ba .

	^{102}Pd			^{104}Ru			^{108}Pd			^{114}Cd			^{116}Cd			^{134}Ba		
	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic
0_g	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
2_g	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
4_g	۲/۱۸	۲/۲۹	۲/۴۸	۲/۲۳	۲/۴۸	۲/۶۶	۲/۱۳	۲/۴۲	۲/۳۰	۲/۰۰	۲/۳	۲/۰۱	۲/۱۵	۲/۳۷	۲/۴۰	۲/۱۲	۲/۳۲	۲/۲۳
6_g	۳/۴۶	۳/۷۹	۳/۵۷	۳/۵۸	۴/۳۵	۳/۸۰	۳/۳۲	۴/۰۸	۳/۳۷	۳/۰۰	۳/۵۶	۳/۰۱	۳/۳۶	۳/۹۵	۳/۴۹	۳/۳۰	۳/۶۶	۳/۲۸
2_γ	۲/۱۸	۲/۷۶	۲/۴۸	۲/۲۳	۲/۴۹	۲/۶۶	۲/۱۳	۲/۱۵	۲/۳	۲/۰۰	۲/۱۷	۲/۰۱	۲/۱۵	۲/۳۶	۲/۴۰	۲/۱۲	۱/۹۳	۲/۲۳
3_γ	۳/۴۶	۳/۷۹	۳/۵۷	۳/۵۸	۳/۴۷	۳/۸۰	۳/۳۲	۳/۰۸	۳/۳۷	۳/۰۰	۳/۳۴	۳/۰۱	۳/۳۶	۳/۷۳	۳/۴۹	۳/۳۰	۲/۷۲	۳/۲۸
4_γ	۳/۴۶	۳/۸۴	۳/۵۷	۳/۵۸	۴/۲۰	۳/۸۰	۳/۳۲	۳/۷۴	۳/۳۷	۳/۰۰	۳/۴۶	۳/۰۱	۳/۳۶	۳/۹۸	۳/۴۹	۳/۳۰	۳/۲۶	۳/۲۸
0_β	۲/۸۶	۲/۸۶	۲/۷۶	۳/۱۷	۲/۷۶	۳/۰۶	۲/۵۶	۲/۴۳	۲/۴۸	۲/۰۰	۲/۰۳	۲/۰۱	۲/۶۴	۲/۵۰	۲/۶۴	۲/۵۱	۲/۹۱	۲/۳۷
2_β	۳/۸۶	۳/۴۹	۳/۹۵	۴/۱۷	۴/۲۳	۴/۳۳	۳/۵۶	۳/۳۲	۳/۶۱	۳/۰۰	۲/۱۷	۳/۰۲	۳/۶۴	۳/۲۰	۳/۸۱	۳/۵۱	۳/۳۶	۳/۴۷
K	۱/۴۲			۱/۵۶			۱/۲۵			۰/۰۱			۱/۳۰			۱/۲۲		

جدول ۴.۱۰: مقادیر χ^2 نسبت‌های انرژی $R(m, \tau)$ مربوط به ایزوتوپ‌های ^{102}Pd ، ^{104}Ru ، ^{108}Pd ، ^{114}Cd ، ^{116}Cd و ^{134}Ba که توسط مدل‌های مختلف بازتولید شده است. [۴۹].

	^{102}Pd	^{104}Ru	^{108}Pd	^{114}Cd	^{116}Cd	^{134}Ba
χ_{Decatic}^2	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۱۲	۰/۱۸	۰/۱۵	۰/۰۹
χ_{Sextic}^2	۰/۰۷	۰/۱۰	۰/۱۲	۰/۲۱	۰/۱۳	۰/۱۲
χ_{EXT}^2	۰/۲۰	۰/۲۸	۰/۲۰	۰/۱۹	۰/۲۶	۰/۲۱
χ_{CQ}^2	۰/۲۰	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۳۱	۰/۲۳	۰/۲۴
χ_{E5}^2	۰/۲۰	۰/۱۶	۰/۲۳	۰/۳۶	۰/۲۴	۰/۲۴

جدول ۵.۱۰: مقادیر عددی لازم برای ایزوتوپ‌های مجموعه اول به منظور محاسبه گذارهای چهار قطبی B(E2).

	^{102}Pd	^{104}Ru	^{108}Pd	^{114}Cd	^{116}Cd	^{134}Ba
f	۱	۱	۱	۱	۱	۱
c	۳۶	۳۶	۳۵	۳۸	۳۸	۳۵
d	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱

جدول ۶.۱۰: مقادیر نرخ $R(E2; L_i \rightarrow L_f) = B(E2; L_i \rightarrow L_f)/B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)$ برای ایزوتوپ‌های ^{104}Ru ، ^{102}Pd و ^{108}Pd که توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک بازتولید و با مقادیر آزمایشگاهی موجود [۲۲] مقایسه شده است.

B(E2; $L_i \rightarrow L_f$)	E(5)	^{102}Pd			^{104}Ru			^{108}Pd		
		Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۷۲	۱/۹۱	۱/۵۶	۱/۶۷	۱/۸۸	۱/۴۳	۱/۷۹	۱/۹۴	۱/۵۱
$6_g \rightarrow 4_g$	۲/۲۳	۲/۴	۲/۶۲	—	۲/۲۹	۲/۵۵	—	۲/۵۵	۲/۷۲	۲/۱۲
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۷۲	۱/۹۱	۰/۴۶	۱/۶۷	۱/۸۸	۰/۹۵	۱/۷۹	۱/۹۴	۱/۵۱
$4_\gamma \rightarrow 4_g$	۱/۰۶	۱/۱۴	۱/۲۵	—	۱/۰۹	۱/۲۱	—	۱/۲۱	۱/۲۹	۰/۶۰
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۶۴	۰/۶۹	۰/۷۵	—	۰/۶۵	۰/۷۳	—	۰/۷۳	۰/۷۸	—
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۱/۳۳	۱/۳۶	۱/۱۱	—	۱/۳۵	۱/۰۶	—	۱/۳۸	۱/۱۸	۰/۶۹
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۸۰	۱/۰۵	۱/۶۹	—	۰/۸۸	۱/۶۲	۰/۴۳	۱/۲۸	۱/۷۹	۱/۰۳
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۰	۰/۰۰	—
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۵۰	۰/۶۳	۰/۸۱	—	۰/۵۴	۰/۷۷	—	۰/۷۴	۰/۸۸	—
$2_\beta \rightarrow 2_\gamma$	۰/۲۷	۰/۳۵	۰/۳۴	—	۰/۳۰	۰/۳۰	—	۰/۴۱	۰/۳۹	—

جدول ۷.۱۰: مشابه جدول ۶.۱۰ ولی برای ایزوتوپ‌های ^{114}Cd ، ^{116}Cd و ^{134}Ba .

B(E2; $L_i \rightarrow L_f$)	E(5)	^{114}Cd			^{116}Cd			^{134}Ba		
		Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۲/۰۰	۱/۹۹	۱/۹۹	۱/۷۷	۱/۹۲	۱/۶۷	۱/۸۰	۱/۹۱	۱/۵۸
$6_g \rightarrow 4_g$	۲/۲۳	۳/۰۰	۲/۹۲	۳/۸۳	۲/۵۱	۲/۶۷	۳/۲۸	۲/۵۸	۲/۶۲	—
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۲/۰۰	۱/۹۹	۰/۷۱	۱/۷۷	۱/۹۲	۰/۷۵	۱/۸۰	۱/۹۱	۲/۲۱
$4_\gamma \rightarrow 4_g$	۱/۰۶	۱/۴۳	۱/۳۹	—	۱/۱۹	۱/۲۷	—	۱/۲۳	۱/۲۵	—
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۶۴	۰/۸۶	۰/۸۴	—	۰/۷۲	۰/۷۶	—	۰/۷۴	۰/۷۵	—
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۱/۳۳	۱/۴۱	۱/۳۴	۲/۰۹	۱/۳۸	۱/۱۵	—	۱/۳۹	۱/۱۱	—
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۸۰	۲/۰۳	۱/۹۵	۰/۸۸	۱/۲۱	۱/۷۴	۰/۰۲	۱/۳۲	۱/۶۹	۰/۴۲
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۰	۰/۰۰	—
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۵۰	۱/۰۵	۰/۹۹	—	۰/۷۰	۰/۸۴	—	۰/۷۶	۰/۸۱	—
$2_\beta \rightarrow 2_\gamma$	۰/۲۷	۰/۵۸	۰/۵۲	—	۰/۳۹	۰/۳۶	—	۰/۴۲	۰/۳۴	—

جدول ۸.۱۰: مقادیر χ^2 برای گذارهای چهارقطبی محاسبه و برازش شده توسط مدل‌های مختلف برای ایزوتوپ‌های ^{102}Pd ، ^{104}Ru ، ^{108}Pd ، ^{114}Cd ، ^{116}Cd ، ^{134}Ba .

	^{102}Pd	^{104}Ru	^{108}Pd	^{114}Cd	^{116}Cd	^{134}Ba
$\chi^2_{B(E2), \text{Decatic}}$	۱/۶۱	۰/۳۹	۰/۲۵	۱/۰۳	۱/۰۲	۰/۵۱
$\chi^2_{B(E2), \text{Sextic}}$	۲/۳۳	۱/۲۴	۰/۴۰	۱/۰۴	۱/۵۹	۰/۹۱
$\chi^2_{B(E2), E5}$	۰/۴۷	۰/۱۷	۰/۱۰	۰/۶۹	۰/۵۰	۰/۱۱

جدول ۹.۱۰: بازتولید مجموعه دوم از ایزوتوپ‌های زوج $\text{Xe}^{118-128}$ توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک.

	^{118}Xe			^{120}Xe			^{122}Xe			^{124}Xe			^{126}Xe			^{128}Xe		
	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic	Decatic	Exp.	Sextic
0_g	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
2_g	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
4_g	۲/۲۰	۲/۴۰	۲/۵۷	۲/۲۳	۲/۴۷	۲/۶۹	۲/۳۹	۲/۵۰	۲/۸۲	۲/۲۸	۲/۴۸	۲/۸۰	۲/۲۶	۲/۴۲	۲/۶۶	۲/۲۶	۲/۲۳	۲/۶۴
6_g	۳/۵۰	۴/۱۴	۳/۶۸	۳/۵۷	۴/۳۳	۳/۸۳	۴/۱۰	۴/۴۳	۳/۹۸	۳/۷۴	۴/۳۷	۳/۹۶	۳/۶۶	۴/۲۱	۳/۸	۳/۶۸	۳/۹۲	۳/۷۷
2_γ	۲/۲۰	۲/۷۵	۲/۵۷	۲/۲۳	۲/۷۲	۲/۶۹	۲/۳۹	۲/۵۵	۲/۸۲	۲/۲۸	۲/۳۹	۲/۸۰	۲/۲۶	۲/۲۶	۲/۶۶	۲/۲۶	۲/۱۹	۲/۶۴
3_γ	۳/۵۰	۴/۰۵	۳/۶۸	۳/۵۷	۴/۹۴	۳/۸۳	۴/۱	۴/۶۷	۳/۹۸	۳/۷۴	۴/۵۲	۳/۹۶	۳/۶۶	۴/۳۹	۳/۸۰	۳/۶۸	۳/۲۳	۳/۷۷
4_γ	۳/۵۰	۴/۲۷	۳/۶۸	۳/۵۷	۴/۳۴	۳/۸۳	۴/۱	۴/۲۳	۳/۹۸	۳/۷۴	۴/۰۶	۳/۹۶	۳/۶۶	۴/۸۳	۳/۸۰	۳/۶۸	۳/۶۲	۳/۷۷
0_β	۲/۹۵	۲/۴۶	۲/۹۱	۳/۱۵	۲/۸۲	۳/۱۱	—	—	—	۳/۶۸	۳/۵۸	۳/۲۹	۳/۴	۳/۳۸	۳/۰۶	۳/۴۸	۳/۵۷	۳/۰۲
2_β	۳/۹۵	۳/۶۴	۴/۱۴	۴/۱۵	۳/۹۵	۴/۳۸	—	—	—	۴/۶۸	۴/۶	۴/۶۱	۴/۴	۴/۳۲	۴/۳۳	۴/۴۸	۴/۵۱	۴/۲۸
κ	۱/۴۶			۱/۵۵			۲/۲۹			۱/۷۵			۱/۶۵			۱/۶۸		

جدول ۱۰.۱۰: مقادیر عددی پارامترهای مختلف در پتانسیل دکاتیک برای محاسبه گذارهای چهارقطبی ایزوتوپ‌های ^{118}Xe – ^{128}Xe .

	^{118}Xe	^{120}Xe	^{122}Xe	^{124}Xe	^{126}Xe	^{128}Xe
<i>f</i>	۱	۱	۱	۱	۱	۱
<i>c</i>	۳۶	۳۶	۴۲	۳۷	۳۷	۳۷
<i>d</i>	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱

جدول ۱۱.۱۰: نرخ‌های گذار چهارقطبی $B(E2)$ ، $R(E2; L_i \rightarrow L_f) = B(E2; L_i \rightarrow L_f)/B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)$ ، متعلق به ایزوتوپ‌های ^{118}Xe ، ^{120}Xe و ^{122}Xe که توسط مدل‌های متفاوت محاسبه شده است.

$B(E2; L_i \rightarrow L_f)$	E(5)	^{118}Xe			^{120}Xe			^{122}Xe		
		Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۷۰	۱/۸۹	۱/۱۷	۱/۶۷	۱/۸۸	۱/۴۳	۱/۵۲	۱/۸۶	۱/۱۶
$6_g \rightarrow 4_g$	۲/۲۳	۲/۳۷	۲/۵۸	۱/۵۲	۲/۳۰	۲/۵۳	۱/۴۱	۱/۹۱	۲/۴۹	۱/۱۷
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۷۰	۱/۸۹	۰/۸۵	۱/۶۷	۱/۸۸	—	۱/۵۲	۱/۸۶	—
$4_\gamma \rightarrow 4_g$	۱/۰۶	۱/۱۳	۱/۲۳	۰/۵۹	۱/۰۹	۱/۲۱	—	۰/۹۱	۱/۱۹	—
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۶۴	۰/۶۸	۰/۷۴	—	۰/۶۶	۰/۷۲	—	۰/۵۴	۰/۷۱	—
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۱/۳۳	۱/۳۶	۱/۰۸	—	۱/۳۵	۱/۰۵	—	۱/۲۳	۱/۰۲	—
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۸۰	۱/۰۰	۱/۶۵	—	۰/۸۹	۱/۶	—	۰/۳۷	۱/۵۵	—
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۲	۰/۰۰	—
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۵۰	۰/۶۰	۰/۷۹	—	۰/۵۴	۰/۷۶	—	۰/۲۳	۰/۷۳	—
$2_\beta \rightarrow 2_\gamma$	۰/۲۷	۰/۳۳	۰/۳۲	—	۰/۳۰	۰/۲۹	—	۰/۱۳	۰/۲۷	—

جدول ۱۲.۱۰: مشابه جدول ۱۱.۱۰ ولی برای ایزوتوپ‌های ^{124}Xe ، ^{126}Xe و ^{128}Xe .

B(E2; $L_i \rightarrow L_f$)	E(5)	^{124}Xe			^{126}Xe			^{128}Xe		
		Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.	Decatic	Sextic	Exp.
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۶۲	۱/۸۷	۱/۱۷	۱/۶۴	۱/۸۸	—	۱/۶۳	۱/۸۸	۱/۲۹
$6_g \rightarrow 4_g$	۲/۲۳	۲/۱۵	۲/۵۰	—	۲/۲۲	۲/۵۴	—	۲/۲۰	۲/۵۵	۱/۲۷
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۶۵	۱/۶۲	۱/۸۷	۰/۵۵	۱/۶۴	۱/۸۸	—	۱/۶۳	۱/۸۸	۱/۱۹
$4_\gamma \rightarrow 4_g$	۱/۰۶	۱/۰۳	۱/۱۹	۰/۵۹	۱/۰۶	۱/۲۱	—	۱/۰۵	۱/۲۱	۰/۵۸
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۶۴	۰/۶۲	۰/۷۱	—	۰/۶۳	۰/۷۳	—	۰/۶۳	۰/۷۳	۱/۵۰
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۱/۳۳	۱/۳۱	۱/۰۳	—	۱/۳۳	۱/۰۶	—	۱/۳۳	۱/۰۶	—
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۸۰	۰/۶۹	۱/۵۶	—	۰/۷۹	۱/۶۱	—	۰/۷۶	۱/۶۲	—
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۰	—	۰/۰۰	۰/۰۰	—	۰/۰۱	۰/۰۰	—
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۵۰	۰/۴۳	۰/۷۳	—	۰/۴۹	۰/۷۶	—	۰/۴۷	۰/۷۷	—
$2_\beta \rightarrow 2_\gamma$	۰/۲۷	۰/۲۴	۰/۲۷	—	۰/۲۷	۰/۳۰	—	۰/۲۶	۰/۳۰	—

جدول ۱۳.۱۰: مقادیر χ^2 برای نسبت‌های انرژی و گذارهای چهارقطبی B(E2) که توسط مدل‌های مختلف ارائه شده است.

	^{118}Xe	^{120}Xe	^{122}Xe	^{124}Xe	^{126}Xe	^{128}Xe	$\overline{\chi^2}$
χ_{Decatic}^2	۰/۲۵	۰/۲۲	۰/۰۶	۰/۰۸	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۱۱۶
χ_{Sextic}^2	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۱۱	۰/۱۰	۰/۰۹	۰/۱۴	۰/۱۲۲
χ_{E5}^2	۰/۵۷	۰/۵۴	۰/۵۷	۰/۴۳	۰/۳۸	۰/۲۵	۰/۴۵۰
$\chi_{\text{B(E2), Decatic}}^2$	۰/۵۰	۰/۴۲	۰/۲۳	۰/۵۱	—	۰/۷۳*	۰/۴۷۷
$\chi_{\text{B(E2), Sextic}}^2$	۱/۰۴	۱/۴۶	۲/۲۳	۱/۳۰	—	۰/۸۶	۱/۳۷۸
$\chi_{\text{B(E2), E5}}^2$	۰/۳۲	۰/۲۴	۰/۴۵	۰/۴۱	—	۰/۳۷	۰/۳۶۰

فصل ۱۱

پتانسیل کیلینگ‌بک در مدل γ ناپایدار

برای این قسمت می‌خواهیم به‌گونه‌ای از هامیلتونی بوهر γ ناپایدار استفاده کنیم که تبهگنی آن را از بین ببریم. برای این منظور فرض می‌کنیم که پتانسیل به‌صورت

$$v(\beta, L) = \frac{\gamma B}{\hbar^2} V(\beta, L) = g(\beta) \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \frac{a^4}{\beta^2} + \frac{b^4}{\beta} + c\beta + d\beta^2, \quad (1.11)$$

نوشته شود که عملگر کازیمیر $SO(3)$ دخیل در برهمکنش شده است، چهار جمله آخر نیز برهمکنش کیلینگ‌بک^۱ نام دارد و پارامترهای آزاد عبارتند از a, b, c, d .

۱.۱۱ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی

با فرض $g(\beta) = \frac{\eta}{\beta^2}$ ، تابع موج قسمت β این هامیلتونی به‌صورت $f(\beta) = \frac{u(\beta)}{\beta^2}$ داریم

$$\frac{d^2 u(\beta)}{d\beta^2} + \left(\varepsilon - \frac{Z(\tau, L)}{\beta^2} - \frac{b^4}{\beta} - c\beta - d\beta^2 \right) u(\beta) = 0, \quad (1.11)$$

$$Z(\tau, L) = \tau(\tau + 3) + a^4 + \gamma + \eta L(L + 1), \quad (2.11)$$

¹Killingbeck

که در آن η یک پارامتر آزاد است. با پیشنهاد جواب این معادله دیفرانسیلی در قالب

$$u(\beta) = \beta^A \exp(B(\beta + D\beta)) h(\beta), \quad (3.11)$$

$$A = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)}, \quad (4.11)$$

$$B = -\frac{c}{2\sqrt{d}}, \quad (5.11)$$

$$D = -\frac{\sqrt{d}}{2} \quad (6.11)$$

به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} & \frac{d^\gamma h(\beta)}{d\beta^\gamma} + \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)}}{\beta} - \frac{c}{\sqrt{d}} - 2\sqrt{d}\beta \right) \frac{dh(\beta)}{d\beta} \\ & + \left(-\frac{\frac{c}{2\sqrt{d}} (1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)}) + b^\gamma}{\beta} + \varepsilon + \frac{c^\gamma}{4d} - \sqrt{d} (2 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)}) \right) h(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل می‌خواهیم از روش پیشنهادی ب^۲ استفاده کنیم.

۱.۱.۱۱ روش پیشنهادی ب^۲

برای استفاده از این روش فرض می‌شود که معادله دیفرانسیلی به صورت

$$\left(X(z) \frac{d^\gamma}{dz^\gamma} + Y(z) \frac{d}{dz} + Z(z) \right) S(z) = 0, \quad (8.11)$$

داشته باشیم که در آن ضرایب به صورت عام دارای شکل

$$X(z) = \sum_{k=0}^{k=4} a_k z^k, \quad (9.11)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{k=3} b_k z^k, \quad (10.11)$$

$$Z(z) = \sum_{k=0}^{k=2} c_k z^k, \quad (11.11)$$

باشند. در این صورت جواب‌های این معادله دیفرانسیل به صورت

$$S(z) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ \prod_{i=1}^n (z - z_i) & n \neq 0 \end{cases}, \quad (12.11)$$

²Beth ansatz

خواهد بود که در آن z_i ریشه‌هایی است که به کمک قیود

$$c_2 = -n(n-1)a_4 - nb_3, \quad (13.11)$$

$$c_1 = -(\gamma(n-1)a_4 + b_3) \sum_{i=1}^n z_i - n(n-1)a_3 - nb_2, \quad (14.11)$$

$$c_0 = -(\gamma(n-1)a_4 + b_3) \sum_{i=1}^n z_i^2 - \gamma a_4 \sum_{i<j}^n z_i z_j - (\gamma(n-1)a_3 + b_2) \sum_{i=1}^n z_i - n(n-1)a_2 - nb_1, \quad (15.11)$$

و معادله

$$\sum_{j \neq i}^n \frac{\gamma}{z_i - z_j} + \frac{b_3 z_i^2 + b_2 z_i + b_1 z_i + b_0}{a_4 z_i^2 + a_3 z_i + a_2 z_i + a_1 z_i + a_0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16.11)$$

محاسبه می‌شود.

حال برای استفاده از این روش معادله دیفرانسیل خود را بازنویسی می‌کنیم

$$\beta h''(\beta) + h'(\beta) \left(1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} - \frac{c}{\sqrt{d}} \beta - \gamma \sqrt{d} \beta^2 \right) h(\beta) \left(\beta \left(\varepsilon + \frac{c^2}{4d} - \sqrt{d} \left(\gamma + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) - \left(b^4 + \frac{c}{2\sqrt{d}} \left(1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) \right) \right) \right) = 0. \quad (17.11)$$

لذا با توجه به توضیحات ارائه‌شده جواب را بایستی به‌ازای n تعداد گره‌های مختلف در راستای β بدست آورد.

در حالت $n = 0$ برای جواب معادله دیفرانسیل داریم $h(\beta) = 1$ که به‌همراه خود دو قید دارد

$$- \left(b^4 + \frac{c}{2\sqrt{d}} \left(1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) \right) = 0, \quad (18.11)$$

$$\varepsilon + \frac{c^2}{4d} - \sqrt{d} \left(\gamma + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) = 0, \quad (19.11)$$

که به عبارت دیگر می‌توان به انرژی و یک قید بر روی ضریب پتانسیل دسترسی پیدا کرد

$$\varepsilon = \sqrt{d} \left(\gamma + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) - \frac{c^2}{4d}, \quad (20.11)$$

$$c(\tau, L) = \frac{-2b^4 \sqrt{d}}{1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)}}. \quad (21.11)$$

اما برای حالت $n = 1$ محاسبه انرژی و تابع موج کمی پیچیده‌تر می‌شود. در ابتدا با استفاده از قیود بیان‌شده

بدست می‌آوریم

$$\varepsilon + \frac{c^2}{4d} - \sqrt{d} \left(\gamma + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) = 2\sqrt{d}, \quad (22.11)$$

$$- \left(b^4 + \frac{c}{2\sqrt{d}} \left(1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) \right) = 2\sqrt{d} \sum_{i=1}^{n=1} \beta_i + \frac{c}{\sqrt{d}}, \quad (23.11)$$

که این مطلب یعنی می‌توان صورت انرژی را برای این حالت به صورت

$$\varepsilon = \sqrt{d} \left(4 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right) - \frac{c^2}{4d}, \quad (24.11)$$

یافت. حال بایستی ریشه معادله بٹ

$$-2\sqrt{d}\beta_1^2 - \frac{c}{\sqrt{d}}\beta_1 + 1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} = 0, \quad (25.11)$$

را محاسبه کرد. این معادله دارای ریشه‌های

$$\beta_1^\pm = \frac{\frac{c}{\sqrt{d}} \pm \sqrt{\frac{c^2}{d} + 4(2\sqrt{d}) \left(1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right)}}{-4\sqrt{d}}, \quad (26.11)$$

$$\sum \beta_1^\pm = \frac{-c}{2d} \quad (27.11)$$

می‌باشد. در نهایت جواب این قسمت از تابع موج به ازای $n = 1$ عبارتست از

$$h(\beta) = (\beta - \beta_1^-), \quad (28.11)$$

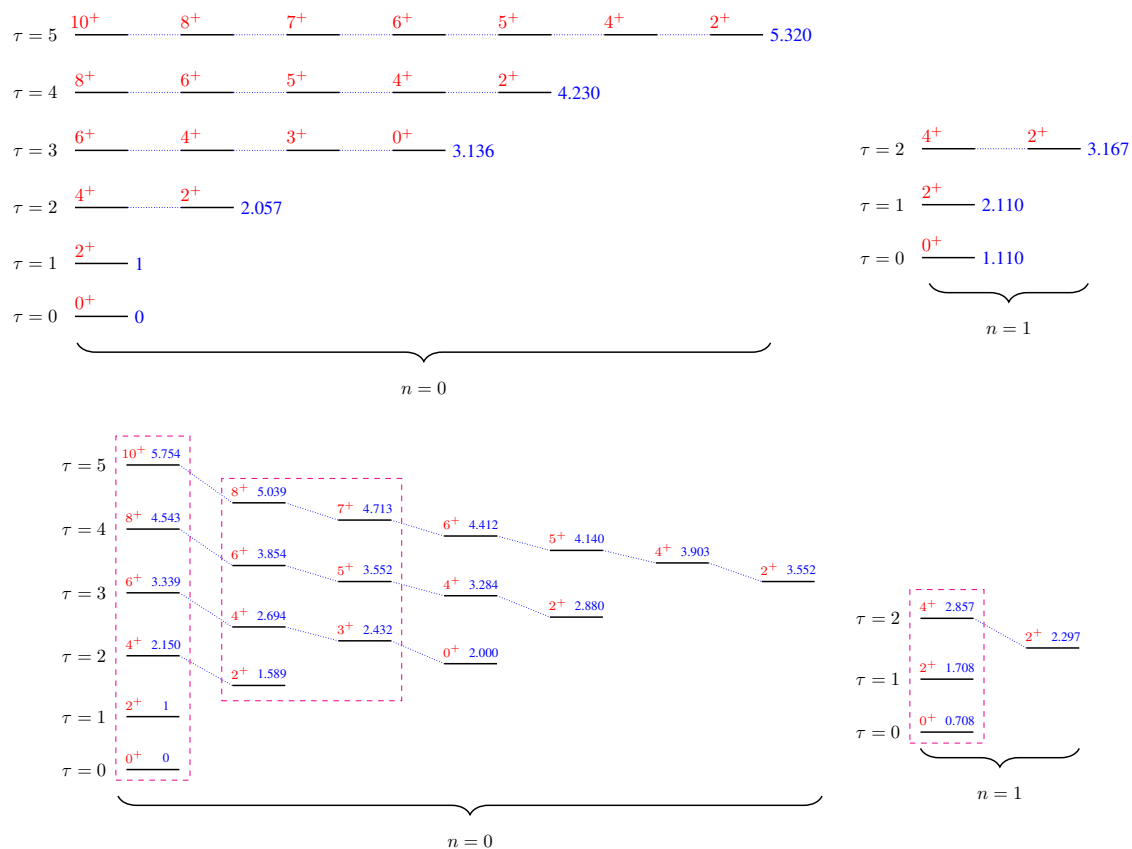
$$\beta_1^- = \frac{-\frac{c(\tau, L)}{\sqrt{d}} + \sqrt{\frac{c(\tau, L)^2}{d} + 4(2\sqrt{d}) \left(1 + \sqrt{1 + 4Z(\tau, L)} \right)}}{4\sqrt{d}}. \quad (29.11)$$

حال با استفاده از نتایج بدست‌آمده می‌توان اقدام به محاسبات عددی به منظور بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی برخی از ایزوتوپ‌ها کرد.

۲.۱۱ نتایج محاسبات عددی

در ابتدای این قسمت بایستی به صورت کمی نشان داد که شکل پتانسیل معرفی شده در ابتدای این قسمت چگونه می‌تواند تبهگنی موجود در مدل γ ناپایدار را از بین ببرد. بدین منظور مثالی در قالب یک شکل بیان شده است. در این شکل نسبت‌های انرژی که به اولین حالت برانگیخته خود بهنجار شده‌اند به همراه اعداد کوانتومی مربوط و مقادیر آن‌ها رسم شده است. در این شکل پارامترهای فرض شده عبارتند از $a = 1, b = 1, d = 1$ ، در حالیکه در قسمت بالایی $\eta = 0.5$ و در قسمت پایینی $\eta = 0.5$ فرض شده است. همان‌طور که دیده می‌شود در قسمت بالایی که اثر جمله وابسته به تکانه زاویه‌ای در نظر گرفته نشده بود، تبهگنی میان ترازها برقرار می‌باشد در حالیکه وقتی اثر این جمله در محاسبات نسبت‌های انرژی در نظر گرفته می‌شود خطوط وصل‌کنند میان ترازهای تبهگن دچار شیب می‌شود. این یعنی اینکه تبهگنی میان این ترازها از بین رفته است. به منظور سهولت در شناسایی ترازها در جدول ۱.۱۱ اعداد کوانتومی ترازهایی که در این شکل مورد استفاده قرار گرفته‌اند فهرست شده است.

حال که تبهگنی میان ترازها شکسته شده است به راحتی می‌توان نوارهای برانگیختگی مختلف را از همدیگر تمیز داد. به همین منظور در شکل ۱.۱۱ ترازهایی که متعلق به نوارهای یکسان هستند درون کادر قرار گرفته‌اند. پس از شناسایی این ترازها می‌توان با بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی برخی از ایزوتوپ‌ها نتایج بدست آمده در این قسمت را در معرض آزمایش قرار داد.



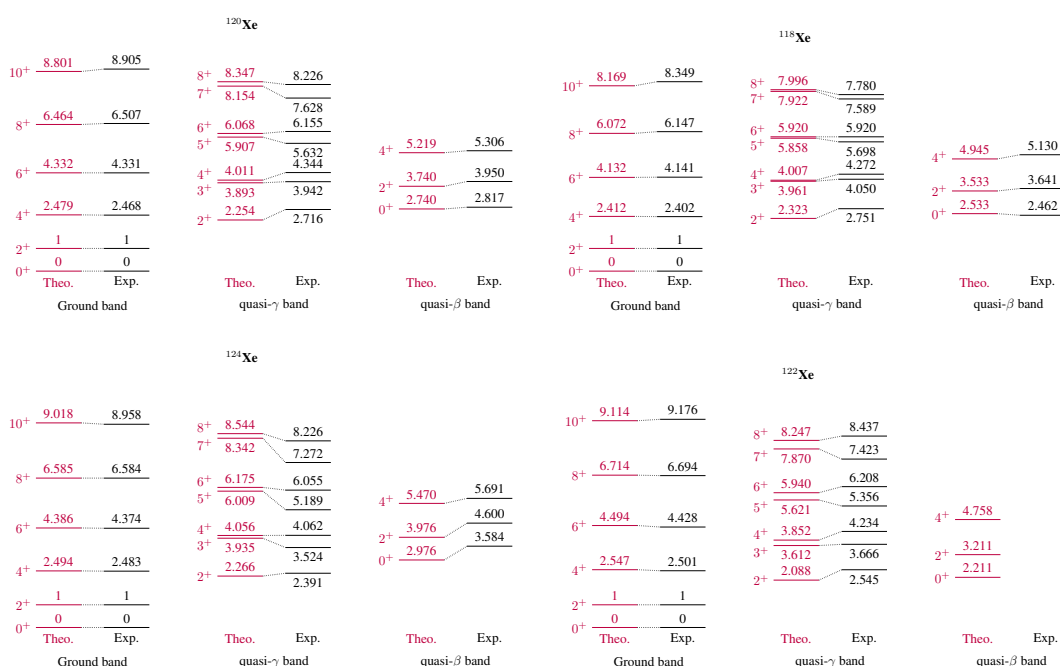
شکل ۱.۱۱: توصیفی از چگونگی از بین بردن تبهگنی میان ترازهای در مدل γ ناپایدار.

جدول ۱.۱۱: اعداد کوانتومی استفاده شده در شکل ۱.۱۱.

L_{band}	0_g	2_g	4_g	6_g	8_g	10_g	2_γ	3_γ	4_γ	5_γ	6_γ	7_γ	8_γ	0_β	2_β	4_β
n_β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
τ	0	1	2	3	4	5	2	3	3	4	4	5	5	0	1	2

جدول ۲.۱۱: فهرست پارامترهای استفاده‌شده در محاسبات عددی مربوط به ایزوتوپ‌های $^{118-124}\text{Xe}$.

ایزوتوپ	a	b	η	σ
^{118}Xe	۲,۵۸	۲,۱۹	۰,۰۳	۰,۱۸۹
^{120}Xe	۲,۷۱	۲,۱۹	۰,۰۸	۰,۲۲۷
^{122}Xe	۲,۸۸	۲,۵۰	۰,۱۹	۰,۲۴۹
^{124}Xe	۲,۸۱	۲,۲۲	۰,۰۸	۰,۴۴۲



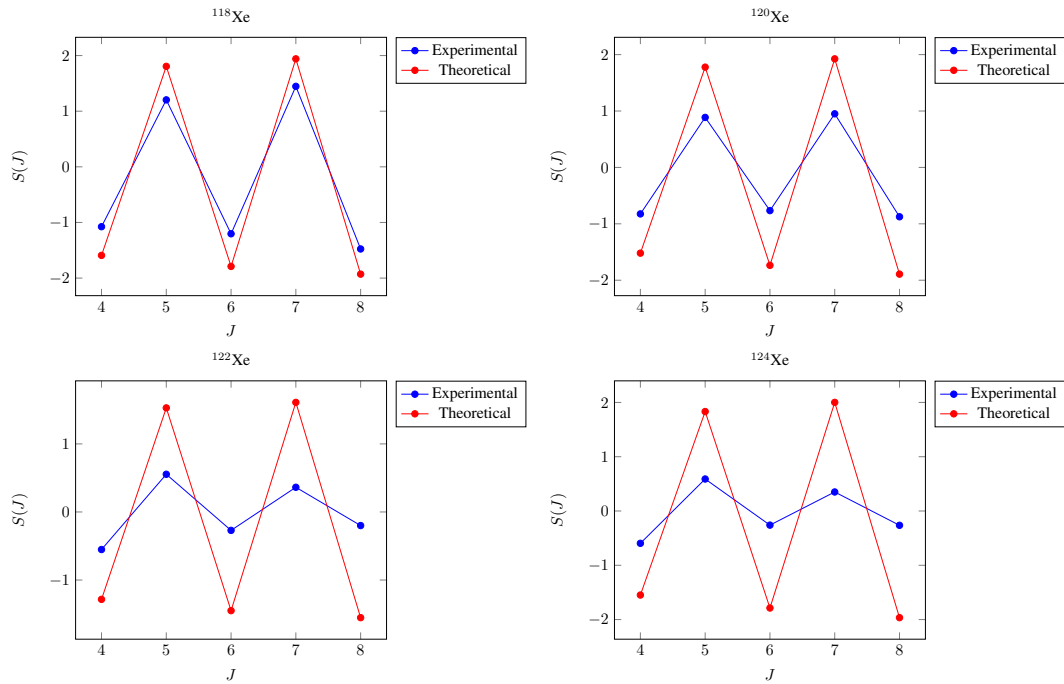
شکل ۲.۱۱: شمایی از بازتولید نسبت‌های انرژی ایزوتوپ‌های $^{118-124}\text{Xe}$ توسط مدل ارائه‌شده در این قسمت.

در این قسمت معیار برازش کمیته کردن پارامتر

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{E_i^{Exp.}}{E_{\gamma+}^{Exp.}} - \frac{E_i^{Theo.}}{E_{\gamma+}^{Theo.}} \right)^2}, \quad (1.11)$$

می‌باشد. فرآیند برازش در این قسمت برای ایزوتوپ‌های $^{118-124}\text{Xe}$ انجام می‌گیرد. نتیجه این فرآیند به همراه پارامتر انحراف آن‌ها در جدول

در شکل ۲.۱۱ نتایج مربوط به بازتولید نسبت‌های انرژی ایزوتوپ‌های $^{118-124}\text{Xe}$ به تصویر کشیده شده است. این تصویر شامل چهار قسمت جداگانه می‌باشد که در هر قسمت از سه نوار برانگیختگی برای مقادیر تجربی و پیش‌بینی‌های نظری تشکیل شده است. به منظور تسهیل در میزان انحراف‌های حالت‌های پیش‌بینی‌شده توسط خطوط نقطه‌چین به یکدیگر وصل شده‌اند.

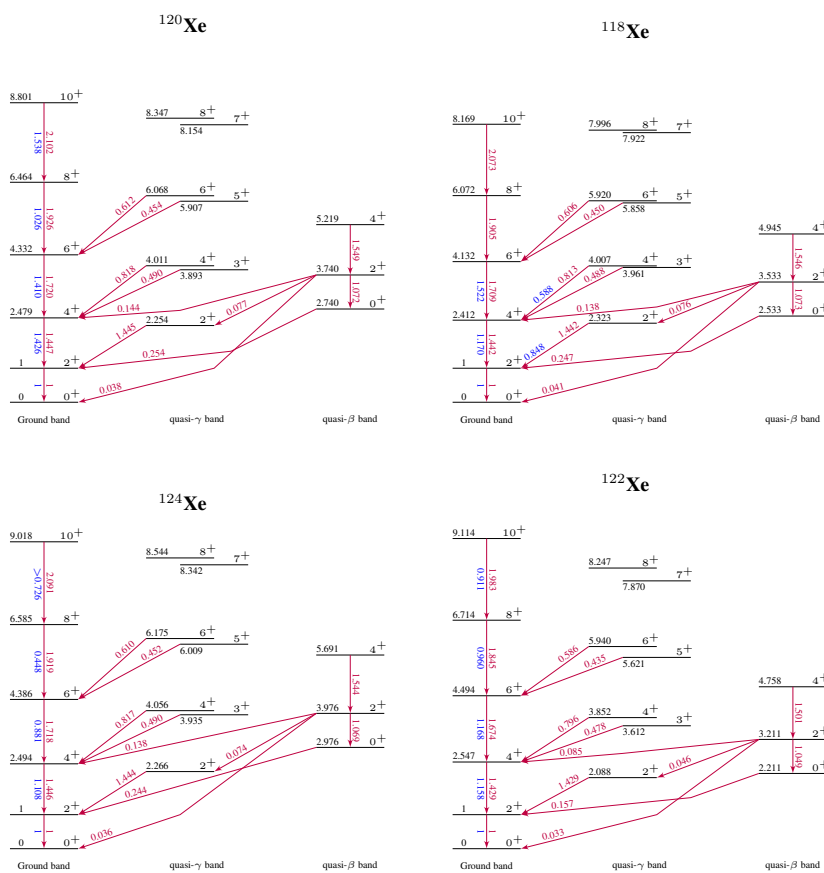


شکل ۳.۱۱: بررسی رفتار تناوبی پیش‌بینی شده ایزوتوپ‌های $^{118-124}\text{Xe}$ توسط برهمکنش کیلینگ‌بک.

کمیت دیگری که محاسبه آن بیان‌گر رفتار هسته می‌باشد رفتار تناوبی γ حالت‌های برانگیخته در نوار برانگیختگی γ می‌باشد. این کمیت به صورت

$$S(J) = \frac{(E(J_{\gamma}^{+}) - E(J-1)_{\gamma}^{+}) - (E(J-1)_{\gamma}^{+} - E(J-2)_{\gamma}^{+})}{E(2_{g}^{+})} \quad (2.11)$$

به‌عنوان تابعی از تکانه زاویه‌ای حالت برانگیخته در نوار برانگیختگی γ قابل محاسبه می‌باشد. در شکل ۳.۱۱ این رفتار تناوبی محاسبه و با مقادیر تجربی مقایسه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود پیش‌بینی‌های نظری برای این ایزوتوپ‌ها در توافق با رفتارهایی است که به‌صورت تجربی بدست می‌آید. همچنین دیده می‌شود که این ایزوتوپ‌ها انتخاب‌های مناسبی برای این مدل می‌باشند زیرا رفتارهای این ایزوتوپ‌ها به‌خوبی توسط این برهمکنش بازتولید می‌شود. اگر ایزوتوپ برای مدل انتخاب شده مناسب نباشد قطعاً مقادیر تجربی و نظری با هم اختلاف فاز (علامت) خواند داشت و آهنگ تغییرات آن‌ها نامنظم خواهد بود. همان‌طور که دیده می‌شود اگرچه که در تمامی این موارد رفتارها با پیش‌بینی‌های تجربی توافق دارد، ولی بهترین توافق در این رفتارشناسی متعلق به ^{118}Xe می‌باشد. به‌عنوان آخرین کمیت قابل محاسبه در این قسمت گذارهای $B(E2)$ برای ایزوتوپ‌های در نظر گرفته شده می‌باشد. به‌دلیل اینکه نحوه محاسبه این مقادیر همانند قسمت قبل می‌باشد، از بیان کردن جزئیات فرمول‌ها و روابط خودداری می‌کنیم. نتایج پیش‌بینی‌های نظری برای ایزوتوپ‌های در نظر گرفته شده در این قسمت به‌صورت شماتیک در شکل ۴.۱۱ به‌تصویر کشیده شده است. این تصویر همانند تصویرهای قبل در این قسمت از چهار قسمت تشکیل شده است که هر قسمت متعلق به یک ایزوتوپ می‌باشد. گذارهای چهارقطبی با فلش‌هایی که حالات اولیه و نهایی را به هم مرتبط می‌کند رسم شده‌اند. همچنین مقادیر تجربی با رنگ آبی و مقادیر نظری با فلش نوشته شده‌اند. در این شکل نیز توافق خوبی میان پیش‌بینی‌های نظری و مقادیر گزارش شده در اطلاعات آزمایشگاهی به چشم می‌خورد.



شکل ۴.۱۱: گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ محاسبه شده توسط برهمکنش کیلینگ بک.

فصل ۱۲

برهمکنش دکاتیک در مدل X(5)

در این قسمت می‌خواهیم برهمکنش دکاتیک را که در فصل ۱۰ بررسی شد برای مدل X(5) بررسی گردد. تفاوت اساسی میان این مدل و مدل فصل ۱۰ در تقریبی است که در جمله دورانی در هامیلتونی بوهر در نظر گرفته می‌شود. این تقریب و همچنین در نظر گرفتن یک شکل تقریباً حداثی برای پتانسیل کل سیستم، منجر معادله‌های دیفرانسیلی

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi(\beta) = \varepsilon_\beta \xi(\beta), \quad (1.12)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4 \langle \beta^2 \rangle} K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \varepsilon_\gamma \eta(\gamma), \quad (2.12)$$

می‌شود که در آن $\frac{\gamma BE}{\hbar^2} = \varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$ انرژی کاهیده و پتانسیل‌های کاهیده نیز به صورت $\frac{\gamma B}{\hbar^2} V(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$ در فرآیند بدست آوردن این معادلات لحاظ شده‌اند. کمیت $\langle \beta^2 \rangle$ به دلیل فرآیند جداسازی تقریبی در معادله دیفرانسیل قسمت γ لحاظ شده است تا اثر این جداسازی تقریبی را پوشش دهد. در بررسی‌های مرسوم این کمیت معمولاً به عنوان یک ثابت و یا پارامتر آزاد در نظر گرفته می‌شود اما در این جا مقدار دقیق آن را می‌خواهیم در محاسبات لحاظ کنیم. این مقدار به صورت

$$\langle \beta^2 \rangle = \int \beta^2 |\xi(\beta)|^2 \beta^4 d\beta, \quad (3.12)$$

محاسبه خواهد.

۱.۱۲ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت γ

با در نظر گرفتن پتانسیل قسمت γ به صورت $v(\gamma) = (3a_\gamma/2)^2 \gamma^2$ داریم

$$\frac{d^2 \eta(\gamma)}{d\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\eta(\gamma)}{d\gamma} + \left(-\frac{(K/2)^2}{\gamma^2} - \langle \beta^2 \rangle \left(\frac{3a_\gamma}{2} \right)^2 \gamma^2 + \langle \beta^2 \rangle \tilde{\varepsilon}_\gamma \right) \eta(\gamma) = 0, \quad (1.12)$$

که در آن $\tilde{\varepsilon}_\gamma = \varepsilon_\gamma + \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{4}{3}$ می‌باشد. جواب‌های این قسمت می‌تواند با کمک چندجمله‌ای‌های لاگر محاسبه شود. بنابراین تابع موج این قسمت و ویژه‌مقدار آن عبارتست از

$$\eta_{n_\gamma, K}(\gamma) = C_{n_\gamma, K} \gamma^{|K/2|} \exp \left[-\frac{3a_\gamma}{2} \langle \beta^2 \rangle \frac{\gamma^2}{2} \right] L_n^{|K/2|} \left(\frac{3a_\gamma}{2} \langle \beta^2 \rangle \gamma^2 \right), \quad (2.12)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\gamma = \frac{3a_\gamma}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} (1 + |K/2| + 2n), \quad (3.12)$$

که چندجمله‌ای‌های لاگر با L نمایش داده شده است که با مرتبه $n = 0, 1, 2, \dots$ می‌باشد و عدد کوانتومی n_γ با مرتبه لاگر به صورت

$$n_\gamma = 2n + |K/2|, \quad (4.12)$$

در ارتباط می‌باشد. بنابراین ویژه‌مقدار این قسمت عبارتست از

$$\varepsilon_\gamma = \frac{3a_\gamma}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} (n_\gamma + 1) - \frac{4}{3} \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle}. \quad (5.12)$$

۲.۱۲ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت β

با در نظر گرفتن پتانسیل دکاتیک

$$u(\beta) = \frac{\kappa^4}{\beta^2} + a\beta^2 + b\beta^4 + c\beta^6 + d\beta^8 + f\beta^{10}, \quad (1.12)$$

برای قسمت β به معادله

$$\frac{d^2 \Phi(\beta)}{d\beta^2} + \left(\varepsilon_\beta - \frac{P}{\beta^2} - a\beta^2 - b\beta^4 - c\beta^6 - d\beta^8 - f\beta^{10} \right) \Phi(\beta) = 0, \quad (2.12)$$

که در آن $\Phi(\beta) = \frac{\Phi(\beta)}{\beta^2}$ و $P = \frac{L(L+1)}{3} + \kappa^4 + 2$. به دلیل اینکه رویه حل این معادله شبیه به معادله (۳.۱۰) می‌باشد از بیان کردن دوباره جزئیات خودداری می‌کنیم. بنابراین با دنبال کردن رویه حل ویژه‌مقدار نهایی این سیستم عبارتست از

$$\varepsilon_{m_\beta n_\gamma L K} = -\lambda (m_\beta + A_0) A_1 + \frac{3a_\gamma}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} (n_\gamma + 1) - \frac{4}{3} \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle}. \quad (3.12)$$

حال پس از تعیین شدن ویژه‌مقدار و ویژه‌تابع می‌توان محاسبات عددی‌ای به منظور آزمایش توانایی این مدل انجام داد.

۳.۱۲ محاسبات عددی و مقایسه با دیگر مدل‌ها

در اینجا نیز می‌خواهیم نتایج عددی حاصل از پتانسیل دکاتیک را با پتانسیل سکستیک و اصل مدل $X(5)$ مقایسه کنیم. برای سهولت در این فرآیند از یک فرم ساده‌شده برای برهمکنش سکستیک استفاده می‌کنیم. در ادامه مختصری درباره این فرآیند توضیح داده می‌شود ولی فرآیند تکمیلی‌تر در قسمت هسته‌های فرد به تمامی توضیح داده خواهد شد و مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

پتانسیل سکستیک عبارتست از

$$v(\beta) = \frac{(2s - 1/2)(2s - 3/2)}{\beta^2} + [b_s^2 - 4a_s(s + 1/2 + M)]\beta^2 + 2a_s b_s \beta^4 + a_s^2 \beta^6, \quad (1.12)$$

اگر صرفاً $M = 1$ در این برهمکنش لحاظ شود، با استفاده از روش شبه‌دقیق^۱ دو جواب برای معادله شرودینگر گونه متناظر با این برهمکنش بدست می‌آید. بنابراین ویژه‌تابع این برهمکنش را می‌توان به صورت

$$\Phi_{m_\beta}^{M=1}(\beta) = \left(1 - \frac{\lambda_{m_\beta, L}}{\lambda_s} \beta^2\right) (\beta^2)^{s-1/4} \exp\left(-\frac{a_s}{4} \beta^4 - \frac{b_s}{2} \beta^2\right), \quad (2.12)$$

نوشت که انرژی آن برای حالت پایه برابر با $E_{m_\beta=0}^{(M=1)} = 4b_s s + \lambda_-(s)$ و برای اولین حالت برانگیخته برابر با $E_{m_\beta=1}^{(M=1)} = 4b_s s + \lambda_+(s)$ می‌باشد و پارامتر λ ریشه معادله $\lambda^2 - 4b_s \lambda - 32a_s s = 0$ می‌باشد. پارامترهای آزاد این پتانسیل نیز a_s و b_s هستند. همچنین پارامتر s از رابطه

$$s(L) = \frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{1 + 4W(L)}\right) \quad (3.12)$$

بدست می‌آید که در آن $W(L) = L(L+1)/3 + 2$ می‌باشد.

در ابتدای فرآیند انجام محاسبات عددی سعی بر این داریم که اطلاعات مربوط مدل $X(5)$ را توسط این دو مدل بازتولید کنیم. در جدول ۱.۱۲ نسبت‌های انرژی

$$R(m_\beta, L) = \frac{\varepsilon(m_\beta, n_\gamma = 0, L, K = 0) - \varepsilon(0, 0, 0, 0)}{\varepsilon(0, 0, 2, 0) - \varepsilon(0, 0, 0, 0)} \quad (4.12)$$

منتسب به مدل $X(5)$ را به کمک پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک بازتولید کرده‌ایم و پارامترهای استفاده‌شده در آن به همراه میزان خطای محاسبات در آن لحاظ شده است.

در گام بعدی می‌خواهیم گذارهای چهارقطبی منتسب به این مدل را با کمک پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک بازتولید کنیم. با در نظر گرفتن عملگر گذار چهارقطبی (۳.۱۰) می‌توان عناصر ماتریسی کاهش‌یافته این عملگر را به کمک قضیه ویگنر-اکارت^۲

$$\langle L_f M_f K_f | T_\mu^{(E2)} | L_i M_i K_i \rangle = \frac{(L_i, M_i; \nu, \mu | L_f, M_f)}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_f K_f | | T^{(E2)} | | L_i K_i \rangle, \quad (5.12)$$

محاسبه کرد. بر این اساس گذارهای چهارقطبی به کمک

$$B(E2; i \rightarrow f) = \frac{5}{16\pi} t^2(L_i, K_i; \nu, K_f - K_i | L_f, K_f)^2 I(i \rightarrow f)^2 G(i \rightarrow f)^2, \quad (6.12)$$

¹quasi-exact

²Wigner-Eckart theorem

جدول ۱۰۱۲: برخی از حالت‌های برانگیخته کم‌انرژی مدل X(5) که توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک بازتولید شده‌اند.

$R(m_\beta, L)$	X(5)	Decatic	Sextic
0_g	0/00	0/00	0/00
2_g	1/00	1/00	1/00
4_g	2/90	3/03	2/67
6_g	5/40	5/68	4/58
8_g	8/50	8/69	6/60
10_g	12/00	11/91	8/69
0_β	5/60	6/36	6/36
2_β	7/50	7/36	7/75
4_β	10/70	9/39	10/00
χ^2		0/30	2/36
		$\kappa = 1/62$	$a_s = 0/28$
		$c = 159$	$b_s = 1/50$
		$d = f = 1$	

محاسبه می‌شوند که در این فرمول ضرایب کلبش-گردن با $(L_i, K_i; 2, K_f - K_i | L_f, K_f)$ نشان داده شده‌اند و انتگرال‌گیری‌های دورن فرمول عبارتند از

$$I(i \rightarrow f) = \int \xi_i(\beta) \beta \xi_f(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (7.12)$$

$$G(i \rightarrow f) = \int \sin(\gamma) \eta_i(\gamma) \eta_f(\gamma) |\sin(3\gamma)| d\gamma. \quad (8.12)$$

با استفاده از این روابط حال می‌توان اقدام با محاسبه گذارهای چهارقطبی B(E2) کرد. در جدول ۲.۱۲ این محاسبات برای برخی از گذارها برای هر دو مدل به منظور بازتولید اطلاعات مدل X(5) انجام شده و با هم مقایسه شده‌اند.

در این محاسبات نشان داده شد که چگونه پتانسیل دکاتیک می‌تواند برای بازتولید اطلاعات مدل X(5) انعطاف بیشتری از خود نشان دهد و با دقت بیشتری این اطلاعات را بازتولید کند. این توانایی منحصر به این‌جا نمی‌شود و هم چنین می‌توان دید که در بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی ایزوتوپ‌ها نیز پتانسیل دکاتیک از توانایی قابل توجهی برخوردار می‌باشد. برای نشان این مطلب در اطلاعات مربوط به ایزوتوپ‌های ^{150}Nd ، ^{156}Dy ، ^{164}Yb ، ^{168}Hf ، ^{174}Yb ، ^{176}Os بازتولید و مقایسه شده است. در جدول‌های ۳.۱۲ و ۴.۱۲ اطلاعات نسبت‌های برخی از حالت‌های برانگیخته کم‌انرژی این ایزوتوپ‌ها بازتولید و فهرست شده است. همچنین پارامترهای استفاده در این محاسبات به همراه دقت آن‌ها در قسمت پایینی این جدول‌ها بیان شده است.

در پایان این قسمت نیز محاسبات مربوط به گذارهای چهارقطبی B(E2) برای این ایزوتوپ‌ها توسط این پتانسیل‌ها

جدول ۲.۱۲: بازتولید برخی از گذارهای چهارقطبی ($E2; 2_g^+ \rightarrow 0_g^+$) $R(E2; L_i \rightarrow L_f) = B(E2; i \rightarrow f) / B(E2; 2_g^+ \rightarrow 0_g^+)$ توسط پتانسیل‌های دکاتیک و سکستیک.

$R(E2; L_i \rightarrow L_f)$	X(5)	Decatic	Sextic
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۶۰	۱/۵۷	۱/۷۱
$6_g \rightarrow 4_g$	۱/۹۸	۲/۰۰	۲/۳۴
$8_g \rightarrow 6_g$	۲/۲۸	۲/۴۴	۲/۹۴
$10_g \rightarrow 8_g$	۲/۵۱	۲/۹۲	۳/۵۱
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۰/۸۰	۱/۳۸	۱/۱۵
$4_\beta \rightarrow 2_\beta$	۱/۲۰	۲/۰۵	۱/۷۶
$4_\beta \rightarrow 6_g$	۰/۲۸	۰/۵۰	۰/۶۷
$4_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۰۶	۰/۰۸	۰/۰۹
$4_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۰
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۳۷	۰/۴۵	۰/۷۳
$2_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱۱
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۱
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۶۲	۰/۵۵	۱/۰۰
$\chi_{B(E2)}^2$		۰/۱۳	۰/۲۰

جدول ۳.۱۲: بازتولید نسبت‌های انرژی برخی از حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ‌های ^{15}Nd ، ^{156}Dy ، ^{164}Yb که توسط پتانسیل‌های دکاتیک، سکستیک و مدل X(5) بازتولید شده‌اند.

	^{15}Nd				^{156}Dy				^{164}Yb			
	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.
0_g	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
2_g	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
4_g	۳/۰۶	۳/۰۸	۳/۱۰	۲/۹۳	۳/۰۶	۳/۰۱	۳/۰۱	۲/۹۳	۳/۱۴	۳/۱۸	۳/۲۵	۳/۱۳
6_g	۵/۹۲	۵/۸۵	۵/۸۶	۵/۵۳	۵/۹۲	۵/۶۱	۵/۶۰	۵/۵۹	۶/۱۸	۶/۲۸	۶/۳۹	۶/۱۶
8_g	۹/۴۷	۹/۰۲	۸/۹۹	۸/۶۸	۹/۴۷	۸/۵۵	۸/۴۹	۸/۸۲	۹/۹۸	۱۰/۰۴	۱۰/۱۲	۹/۹۲
10_g	۱۳/۶۳	۱۲/۴۵	۱۲/۳۴	۱۲/۲۸	۱۳/۶۳	۱۱/۶۸	۱۱/۵۷	۱۲/۵۲	۱۴/۴۶	۱۴/۲۶	۱۴/۲۸	۱۴/۲۲
12_g	۱۸/۳۷	۱۶/۰۴	۱۵/۸۴	۱۶/۲۷					۱۹/۵۹	۱۸/۸۱	۱۸/۷۴	۱۸/۸۹
14_g	۲۳/۶۸	۱۹/۷۵	۱۹/۴۳	۲۰/۵۹					۲۵/۳۴	۲۳/۶۰	۲۳/۴۵	۲۳/۵۱
2_7	۴/۴۵	۸/۹۳	۹/۱۰	۸/۱۶	۴/۴۵	۷/۱۸	۷/۴۰	۶/۴۶	۶/۵۰	۷/۲۳	۷/۲۹	۷/۰۱
3_7	۵/۲۸	۹/۴۹	۹/۵۷	۹/۲۲	۵/۲۸	۷/۷۸	۷/۹۴	۷/۴۲	۷/۳۰	۸/۱۰	۸/۱۵	۸/۱۴
4_7	۶/۳۵	۱۰/۲۸	۱۰/۲۹	۱۰/۳۹	۶/۳۵	۸/۵۸	۸/۶۹	۸/۴۸	۸/۳۶	۹/۲۰	۹/۲۸	۹/۲۸
5_7					۷/۶۲	۹/۵۵	۹/۶۳	۹/۶۹	۹/۶۷	۱۰/۵۳	۱۰/۶۴	۱۰/۹۳
6_7					۹/۰۹	۱۰/۶۶	۱۰/۷۱	۱۱/۰۷				
7_7					۱۰/۷۳	۱۱/۸۸	۱۱/۸۹	۱۲/۵۵				
0_β	۶/۹۴	۵/۱۹	۴/۵۸	۵/۱۹	۶/۹۴	۴/۷۱	۴/۲۸	۴/۹۰				
2_β	۹/۰۱	۶/۵۱	۶/۱۳	۶/۵۳	۹/۰۱	۶/۰۲	۵/۷۰	۶/۰۱				
4_β	۱۲/۷۶	۹/۰۱	۸/۸۰	۸/۷۴	۱۲/۷۶	۸/۴۰	۷/۸۵	۷/۹۰				
6_β	۱۷/۵۰	۱۲/۱۰	۱۱/۹۵	۱۱/۸۳	۱۷/۵۰	۱۱/۲۷	۱۱/۰۳	۱۰/۴۳				
a_7	۱/۰۰	۱۳/۰۰	۱۱/۰۰		۱/۰۰	۱۱/۰۰	۱۱/۰۰		۱/۰۰	۶/۰۰	۲/۰۰	
β_w	۵/۰۰				۵/۰۰				۷/۰۰			
κ		۱/۱۵				۰/۹۹				۱/۹۹		
c		۳۹/۰۰				۳۷/۰۰				۱۷/۰۰		
a_s			۰/۴۷				۰/۱۴				۹/۲۲	
b_s			۱۳/۷۰				۱۷/۳۶				۳/۰۹	
χ^2	۹/۲۰	۰/۱۵	۰/۲۸		۸/۰۸	۰/۲۴	۰/۲۸		۰/۷۳	۰/۰۳	۰/۰۳	

جدول ۴.۱۲: مشابه جدول ۳.۱۲، اما برای ایزوتوپ‌های ^{168}Hf ، ^{174}Yb ، ^{176}Os .

	^{168}Hf				^{174}Yb				^{176}Os			
	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.
0_g	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰	۰/۰۰
2_g	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱	۱/۰۰
4_g	۳/۱۴	۳/۱۶	۳/۰۹	۳/۱۱	۳/۸۰	۳/۳۰	۳/۶۶	۳/۳۱	۳/۱۰	۳/۰۲	۳/۰۳	۲/۹۳
6_g	۶/۱۸	۶/۲۰	۵/۸۴	۶/۱۰	۸/۲۶	۶/۸۰	۷/۵۴	۶/۸۸	۶/۰۵	۵/۶۵	۵/۶۴	۵/۵۰
8_g	۹/۹۸	۹/۸۴	۸/۹۵	۹/۷۸	۱۴/۱۱	۱۱/۴۰	۱۲/۱۸	۱۱/۶۴	۹/۷۱	۸/۶۲	۸/۵۸	۸/۵۷
10_g	۱۴/۴۶	۱۳/۹۰	۱۲/۲۸	۱۳/۹۹	۲۱/۱۹	۱۶/۹۷	۱۷/۲۹	۱۷/۴۷	۱۴/۰۳	۱۱/۷۹	۱۱/۷۱	۱۲/۱۰
12_g	۱۹/۵۹	۱۸/۲۴	۱۵/۷۵	۱۸/۵۸	۲۹/۳۹	۲۳/۳۸	۲۲/۷۲	۲۴/۳۴	۱۸/۹۶	۱۵/۱۰	۱۴/۹۶	۱۶/۰۵
14_g	۲۵/۳۴	۲۲/۸۰	۱۹/۳۳	۲۳/۰۳								
2_γ	۶/۵۰	۷/۱۰	۹/۳۷	۷/۰۶	۲۲/۹۷	۲۱/۵۴	۲۲/۶۲	۲۱/۳۷	۵/۴۳	۷/۴۸	۷/۶۸	۶/۳۹
3_γ	۷/۳۰	۷/۹۳	۹/۸۷	۸/۳۱	۲۳/۵۲	۲۲/۴۳	۲۲/۷۶	۲۲/۳۵	۶/۲۵	۸/۰۷	۸/۲۱	۷/۶۸
4_γ	۸/۳۶	۹/۰۰	۱۰/۶۲	۹/۳۵	۲۴/۵۹	۲۳/۶۱	۲۳/۳۶	۲۳/۶۱	۷/۳۱	۸/۸۶	۸/۹۶	۹/۰۶
5_γ	۹/۶۷	۱۰/۲۷	۱۱/۵۷	۱۱/۱۷	۲۶/۱۵	۲۵/۰۶	۲۴/۳۷	۲۵/۱۹	۸/۶۰	۹/۸۳	۹/۸۹	۱۰/۴۳
6_γ	۱۱/۱۹	۱۱/۷۲	۱۲/۶۹	۱۲/۵۰								
0_β	۷/۶۲	۸/۳۰	۶/۶۷	۷/۵۹	۱۳/۰۷	۱۹/۲۹	۱۶/۶۲	۱۹/۴۵	۷/۲۷	۴/۷۴	۴/۲۹	۴/۴۵
2_β	۹/۸۲	۹/۳۷	۸/۴۲	۸/۵۳	۱۶/۳۸	۲۰/۳۳	۱۹/۷۵	۲۰/۴۱	۹/۴۰	۶/۰۷	۵/۷۳	۵/۵۰
4_β					۲۲/۵۲	۲۲/۷۰	۲۵/۱۲	۲۲/۴۳				
a_γ	۱/۰۰	۹/۰۰	۸/۰۰		۱/۰۰	۱۹/۰۰	۱۰/۰۰		۱/۰۰	۱۱/۰۰	۸/۰۰	
β_w	۷/۰۰				۱۶/۰۰				۶/۰۰			
κ		۱/۸۸				۳/۰۰				۰/۹۹		
c		۳۵/۰۰				۳۸/۰۰				۳۵/۰۰		
a_s			۲/۵۰				۶/۴۰				۰/۰۱	
b_s			۷/۸۰				۶/۷۹				۸/۷۶	
χ^2	۱/۱۲	۰/۲۶	۲/۹۸		۹/۲۰	۰/۱۳	۱/۹۶		۴/۲۲	۰/۳۲	۰/۳۷	

جدول ۵.۱۲: محاسبه گذارهای چهارقطبی ایزوتوپ‌های منتسب به جدول ۳.۱۲ توسط مدل‌های دکاتیک، سکستیک و X(5).

	^{150}Nd				^{156}Dy				^{164}Yb			
	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۵۵	۱/۵۶	۱/۶۲	۱/۵۶	۱/۵۵	۱/۵۹	۱/۶۳	۱/۶۳	۱/۵۴	۱/۴۸	۱/۵۹	۱/۶۰
$6_g \rightarrow 4_g$	۱/۸۶	۱/۹۶	۲/۱۱	۱/۸۰	۱/۸۶	۲/۰۳	۲/۱۳	۱/۷۶	۱/۸۴	۱/۷۱	۱/۹۹	۱/۷۰
$8_g \rightarrow 6_g$	۲/۰۸	۲/۳۳	۲/۵۶	۱/۸۶	۲/۰۸	۲/۴۴	۲/۵۹	۱/۸۷	۲/۰۵	۱/۹۱	۲/۳۲	۱/۹۸
$10_g \rightarrow 8_g$	۲/۲۴	۲/۶۸	۲/۹۷	۱/۸۳	۲/۲۴	۲/۸۲	۳/۰۱	۲/۰۷	۲/۲۰	۲/۰۹	۲/۶۱	۱/۸۵
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۰/۸۲	۱/۲۱	۱/۲۵	۱/۳۸	۰/۸۲	۱/۲۳	۱/۲۷		۰/۸۲	۰/۹۷	۰/۸۷	
$4_\beta \rightarrow 2_\beta$	۱/۲۲	۱/۷۴	۱/۸۲	۱/۸۶	۱/۲۲	۱/۷۷	۲/۰۴		۱/۲۲	۱/۳۷	۱/۳۳	
$4_\beta \rightarrow 6_g$	۰/۲۷	۰/۵۴	۰/۷۳	۰/۰۸	۰/۲۷	۰/۵۹	۰/۸۲	۰/۰۸	۰/۲۷	۰/۰۰	۰/۳۹	
$4_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۱۰		۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۱۱	۰/۰۹	۰/۰۶	۰/۰۲	۰/۰۶	
$4_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۶	۰/۰۰	
$2_\beta \rightarrow 4_g$	۰/۳۶	۰/۵۷	۰/۸۰	۰/۱۶	۰/۳۶	۰/۶۴	۰/۸۱		۰/۳۶	۰/۰۰	۰/۴۶	
$2_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱۲	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱۲		۰/۰۸	۰/۰۰	۰/۰۸	
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۱		۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۱	
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۶۳	۰/۷۳	۱/۰۸	۰/۳۷	۰/۶۳	۰/۸۳	۱/۰۹		۰/۶۳	۰/۰۰	۰/۶۸	
$4_\gamma \rightarrow 2_\gamma$	۱/۳۳	۱/۴۰	۱/۴۵	۱/۲۰	۱/۳۳	۱/۴۱	۱/۴۴		۱/۳۶	۱/۳۱	۱/۲۵	
$4_\gamma \rightarrow 2_g$	۰/۸۱	۰/۸۵	۰/۸۹	۰/۰۰	۰/۸۱	۰/۸۶	۰/۸۹		۰/۸۱	۰/۷۸	۰/۸۱	
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۹۸	۱/۰۲	۱/۰۹		۰/۹۸	۱/۰۵	۱/۰۹		۰/۹۸	۰/۹۳	۱/۰۱	
$3_\gamma \rightarrow 2_g$	۲/۳۹	۲/۴۹	۲/۶۱		۲/۳۹	۲/۵۳	۲/۶۱		۲/۴۰	۲/۲۹	۲/۳۸	
$2_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۰۱	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۰۹	
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۸۵	۱/۹۰	۱/۹۷		۱/۸۵	۱/۹۲	۱/۹۷	۰/۰۶	۱/۸۶	۱/۸۰	۱/۸۴	
$2_\gamma \rightarrow 0_g$	۱/۲۵	۱/۲۸	۱/۲۹	۰/۰۳	۱/۲۵	۱/۲۸	۱/۲۹	۰/۰۵	۱/۲۶	۱/۲۵	۱/۲۱	
$\chi^2_{B(E2)}$	۰/۲۲	۰/۲۸	۰/۴۱		۰/۵۳	۰/۷۷	۰/۹۱		۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۳۹	

انجام شده و با مقادیر در دسترس تجربی مقایسه گردیده است. این اطلاعات در جدول‌های ۵.۱۲ و ۶.۱۲ فهرست شده است.

جدول ۱۲.۶: محاسبه گذارهای قطبی ایزوتوپ‌های منتسب به جدول ۴.۱۲ توسط مدل‌های دکاتیک، سکستیک و X(5).

	^{۱۶۸} Hf				^{۱۷۴} Yb				^{۱۷۶} Os			
	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.	X(5)	Decatic	Sextic	Exp.
$2_g \rightarrow 0_g$	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
$4_g \rightarrow 2_g$	۱/۵۴	۱/۴۹	۱/۶۱	۱/۵۸	۱/۵۳	۱/۴۴	۱/۵۸	۱/۳۹	۱/۵۴	۱/۵۹	۱/۶۳	۱/۶۳
$6_g \rightarrow 4_g$	۱/۸۴	۱/۷۵	۲/۰۷	۱/۸۵	۱/۸۱	۱/۶۱	۱/۹۸	۱/۸۴	۱/۸۴	۲/۰۳	۲/۱۳	۲/۱۳
$8_g \rightarrow 6_g$	۲/۰۵	۱/۹۷	۲/۴۷	۲/۲۷	۲/۰۰	۱/۷۲	۲/۳۱	۱/۹۳	۲/۰۶	۲/۴۳	۲/۵۹	۲/۵۹
$10_g \rightarrow 8_g$	۲/۲۰	۲/۱۹	۲/۸۲	۲/۴۰	۲/۱۵	۱/۸۱	۲/۵۹	۱/۶۷	۲/۲۲	۲/۸۱	۳/۰۱	۳/۰۱
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۰/۸۲	۱/۱۳	۱/۱۳		۰/۸۳	۱/۰۱	۱/۰۰		۰/۸۲	۱/۲۳	۱/۲۷	۱/۲۷
$4_\beta \rightarrow 2_\beta$	۱/۲۲	۱/۶۲	۱/۶۴		۱/۲۲	۱/۴۵	۱/۴۶		۱/۲۲	۱/۷۶	۱/۸۵	۱/۸۵
$2_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۰۸	۰/۰۴	۰/۱۱		۰/۰۸	۰/۰۰	۰/۱۰		۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱۲	۰/۱۲
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۱		۰/۰۲	۰/۰۰	۰/۰۱		۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
$0_\beta \rightarrow 2_g$	۰/۶۳	۰/۲۸	۱/۰۲		۰/۶۳	۰/۰۲	۰/۹۰		۰/۶۳	۰/۸۳	۱/۰۹	۱/۰۹
$4_\gamma \rightarrow 4_g$	۲/۵۰	۲/۳۸	۲/۸۴		۲/۵۰	۲/۲۵	۲/۷۳		۲/۵۰	۲/۷۸	۲/۹۲	۲/۹۲
$4_\gamma \rightarrow 2_g$	۰/۸۱	۰/۷۹	۰/۸۸		۰/۸۲	۰/۷۶	۰/۸۶		۰/۸۱	۰/۸۶	۰/۸۹	۰/۸۹
$3_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۹۸	۰/۹۴	۱/۰۷		۰/۹۸	۰/۹۱	۱/۰۴		۰/۹۸	۱/۰۵	۱/۰۹	۱/۰۹
$3_\gamma \rightarrow 2_g$	۲/۴۰	۲/۳۲	۲/۵۷		۲/۴۲	۲/۲۷	۲/۵۳		۲/۴۰	۲/۵۳	۲/۶۱	۲/۶۱
$2_\gamma \rightarrow 4_g$	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۱۰		۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۰۹		۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۱۰
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	۱/۸۶	۱/۸۱	۱/۹۵		۱/۸۸	۱/۸۱	۱/۹۳	۰/۰۱	۱/۸۶	۱/۹۲	۱/۹۷	۱/۹۷
$2_\gamma \rightarrow 0_g$	۱/۲۶	۱/۲۶	۱/۲۹		۱/۲۹	۱/۲۷	۱/۲۹		۱/۲۶	۱/۲۸	۱/۲۹	۱/۲۹
$4_\gamma \rightarrow 4_\beta$	۰/۱۰	۰/۰۶	۰/۱۴		۰/۱۰	۰/۰۰	۰/۱۳		۰/۱۰	۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۱۵
$4_\gamma \rightarrow 2_\beta$	۰/۱۱	۰/۰۶	۰/۲۰		۰/۱۱	۰/۰۰	۰/۱۸		۰/۱۱	۰/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۲
$3_\gamma \rightarrow 4_\beta$	۰/۰۲	۰/۰۰	۰/۰۱		۰/۰۲	۰/۰۰	۰/۰۱		۰/۰۲	۰/۰۰	۰/۰۲	۰/۰۲
$3_\gamma \rightarrow 2_\beta$	۰/۲۲	۰/۱۱	۰/۳۴		۰/۲۲	۰/۰۰	۰/۳۱		۰/۲۲	۰/۲۸	۰/۳۶	۰/۳۶
$2_\gamma \rightarrow 4_\beta$	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰		۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰		۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
$2_\gamma \rightarrow 2_\beta$	۰/۱۱	۰/۰۵	۰/۱۳		۰/۱۱	۰/۰۰	۰/۱۲		۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۱۳	۰/۱۳
$2_\gamma \rightarrow 0_\beta$	۰/۱۶	۰/۰۷	۰/۲۴		۰/۱۷	۰/۰۰	۰/۲۲		۰/۱۶	۰/۱۹	۰/۲۵	۰/۲۵
$\chi^2_{B(E2)}$	۰/۰۳	۰/۰۸	۰/۱۳		۰/۹۴	۱/۱۲	۱/۵۸					

فصل ۱۳

پتانسیل کسری در مدل دقیق جداشدنی (5) X از هامیلتونی بوهر

در این قسمت قصد داریم که پتانسیلی را در هامیلتونی بوهر بکار ببریم که متفاوت از حالت معمول می باشد. معمولاً پتانسیل های چند جمله ای دارای توان های صحیحی از متغیرها می باشد اما در اینجا ما پتانسیلی را در نظر می گیریم که دارای توان های کسری می باشد. به منظور بکارگیری این شکل از پتانسیل، شکل دقیق جداشدنی هامیلتونی بوهر را در نظر می گیریم. برای این منظور بایستی پتانسیل و انرژی کاهیده به شکل

$$v(\beta, \gamma) = \frac{2B}{\hbar^2} V(\beta, \gamma) = u_1(\beta) + \frac{u_2(\gamma)}{\beta^2} \quad (1.13)$$

$$\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E. \quad (2.13)$$

باشد. با این شکل از پتانسیل و بسط جمله دورانی پیرامون $\gamma \approx 0^\circ$ معادلات دقیقاً جدا به صورت

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{d}{d\beta} \beta^4 \frac{d}{d\beta} + \frac{L(L+1)}{\beta^2} + \lambda + u_1(\beta) \right] \xi(\beta) = \varepsilon \xi(\beta), \quad (3.13)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin^3(\gamma)} \frac{d}{d\gamma} \sin^3(\gamma) \frac{d}{d\gamma} + \frac{K^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2(\gamma)} - \frac{4}{3} \right) + u_2(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (4.13)$$

می شوند.

۱.۱۳ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت γ

مرسوم است که برای قسمت γ یک برهمکنش نوسانی به شکل $u_2(\gamma) = (3\kappa)^2 \gamma^2$ لحاظ شود. همچنین با در نظر گرفتن $\gamma \approx 0^\circ$ معادله دیفرانسیل این قسمت تبدیل می شود به

$$\left[-\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} \gamma \frac{d}{d\gamma} + \frac{K^2}{4\gamma} + (3\kappa)^2 \gamma^2 \right] \eta(\gamma) = \epsilon_\gamma \eta(\gamma), \quad (1.13)$$

که در آن $\epsilon_\gamma = \lambda + \frac{K^2}{3}$ می باشد. جواب های این قسمت را می توان به کمک چندجمله ای های لاگر بدست آورد

$$\eta_{n_\gamma, K} = C_{n_\gamma, K} \exp\left(-\frac{3\kappa}{2} \gamma^2\right) \gamma^{|K/2|} L_{\tilde{n}}^{|K/2|}(3\kappa \gamma^2), \quad (2.13)$$

$$\tilde{n} = \frac{n_\gamma - |K/2|}{2}, \quad (3.13)$$

$$\epsilon_\gamma = 6\kappa(n_\gamma + 1). \quad (4.13)$$

۲.۱۳ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت β

اما برای قسمت β تابع موج پتانسیل کسری زیر را می خواهیم در نظر بگیریم

$$u_1(\beta) = \frac{a^4}{\beta^2} + \frac{b}{\beta^{4/3}} + \frac{c}{\beta^{2/3}} + d\beta^{2/3}, \quad (1.13)$$

در آن علاوه بر جمله گریز از مرکز، جملات کسری نیز شامل این برهمکنش شده اند. تمامی این جملات دارای پارامترهای آزاد حقیقی می باشند. با فرض $\xi(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\beta^2}$ می توان معادله دیفرانسیل مربوط به این قسمت را ساده تر کرد

$$\frac{d^2 \phi(\beta)}{d\beta^2} + \left[\epsilon - \frac{W(n_\gamma, L, K)}{\beta^2} - \frac{b}{\beta^{4/3}} - \frac{c}{\beta^{2/3}} - d\beta^{2/3} \right] \phi(\beta) = 0, \quad (2.13)$$

$$W(n_\gamma, L, K) = \frac{L(L+1)}{3} + 2 + \lambda(n_\gamma, K) + a^4. \quad (3.13)$$

برای ادامه رویه حل این معادله از تغییر متغیر $z = \beta^{2/3}$ استفاده می کنیم. این تغییر متغیر معادله را به

$$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} - \frac{1}{2z} \frac{d\phi(z)}{dz} + \left(-\frac{9W(n_\gamma, L, K)}{4z^2} - \frac{9b}{4z} - \frac{9c}{4} + \frac{9\epsilon(n_\beta, n_\gamma, L, K)}{4} z - \frac{9d}{4} z^2 \right) \phi(z) = 0, \quad (4.13)$$

تبدیل می کند. جواب این معادله را به صورت $\phi(z) = z^{1/4} f(z)$ پیشنهاد می کنیم که باعث از بین رفتن مشتق اول در این معادله می شود

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left(-\frac{9W(n_\gamma, L, K)}{4z^2} + \frac{5}{16} - \frac{9b}{4z} - \frac{9c}{4} + \frac{9\epsilon(n_\beta, n_\gamma, L, K)}{4} z - \frac{9d}{4} z^2 \right) f(z) = 0. \quad (5.13)$$

حال جواب را به گونه ای پیشنهاد می کنیم که شرایط فیزیکی مسئله را دربر گیرد یعنی

$$f(z) = z^{A_0} \exp(A_1 z + A_2 z^2) F(z), \quad (6.13)$$

که در آن پارامترها عبارتند از

$$A_0 = \frac{2 + 3\sqrt{1 + 4W(n_\gamma, L, K)}}{4}, \quad (7.13)$$

$$A_1 = \frac{3}{4d}\varepsilon(n_\beta, n_\gamma, L, K), \quad (8.13)$$

$$A_2 = -\frac{3\sqrt{d}}{4}. \quad (9.13)$$

در نهایت برای قسمت آخر جواب به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$z \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + (2A_0 + 2A_1 z + 4A_2 z^2) \frac{dF(z)}{dz} + \left[2A_0 A_1 - \frac{9}{4}b + z \left(A_1^2 + 2A_1(1 + 2A_0) - \frac{9}{4}c \right) \right] F(z) = 0. \quad (10.13)$$

این معادله را می‌توان با استفاده از روش حدسی بث حل کرد. پس از استفاده از این روش می‌توان جواب معادله دیفرانسیل را به ازای حالت‌های برانگیختگی محدود به صورت زیر بدست آورد

$$F(z) = \begin{cases} 1, & n_\beta = 0, \\ z - z_1, & n_\beta = 1, \end{cases} \quad (11.13)$$

در که در آن منظور از z_1

$$z_1 = \frac{3\varepsilon + \sqrt{3}\sqrt{16d^{3/2} + 24d^{3/2}\sqrt{1 + 4W(n_\gamma, L, K)} + 3\varepsilon^2}}{12d}. \quad (12.13)$$

می‌باشد. سپس انرژی این سیستم به صورت

$$\varepsilon(n_\beta, n_\gamma, L, K) = - \begin{cases} 2\sqrt{cd + \frac{d^{3/2}}{3} (4 + 3\sqrt{1 + 4W(n_\gamma, L, K)})}, & n_\beta = 0, \\ 2\sqrt{cd + \frac{d^{3/2}}{3} (8 + 3\sqrt{1 + 4W(n_\gamma, L, K)})}, & n_\beta = 1, \end{cases} \quad (13.13)$$

بدست می‌آید که به دنبال خود قید زیرا دارد

$$b(n_\beta, n_\gamma, L, K) = \frac{2 + 3\sqrt{1 + 4W(n_\gamma, L, K)}}{6\sqrt{d}} \varepsilon(n_\beta, n_\gamma, L, K). \quad (14.13)$$

حال می‌توان با استفاده از نتایج بدست آمده اقدام به انجام محاسبات عددی برای این کار کرد.

۳.۱۳ محاسبات عددی برای پتانسیل کسری

برای آزمون نتایج بدست آمده در این قسمت ایزوتوپ‌های $Er^{162-168}$ را در نظر می‌گیریم. در ابتدا برای یافتن مقادیر عددی مناسب در رابطه انرژی و تابع موج اقدام به بازتولید نسبت‌های انرژی

$$R = \frac{E(n_\beta, n_\gamma, L, K) - E(0, 0, 0, 0)}{E(0, 0, 2, 0) - E(0, 0, 0, 0)}. \quad (1.13)$$

جدول ۱.۱۳: فهرست پارامترهای بدست آمده در فرآیند برازش نسبت های انرژی به تفکیک ایزوتوپ ها.

ایزوتوپ	a	κ	σ
^{162}Er	۳,۸۷	۲,۸۶	۰,۵۴۵
^{164}Er	۴,۳۵	۳,۰۰	۰,۴۹۶
^{166}Er	۵,۱۱	۳,۰۳	۰,۵۱۴
^{168}Er	۴,۶۲	۳,۳۱	۰,۳۸۱

می کنیم. همچنین بایستی توجه کرد که اگرچه ما توانستیم با اعمال تغییر متغیر مناسب از سختی برخورد با توان های کسری دوری کنیم، اما در محاسبات عددی گذارها و کار با تابع موج بایستی این نکته را در نظر داشت که این توابع دارای آرگومان های کسری هستند. مبنای انجام محاسبات عددی به منظور یافتن مقادیر مناسب برای ضرابی پتانسیل کمینه کردن پارامتر

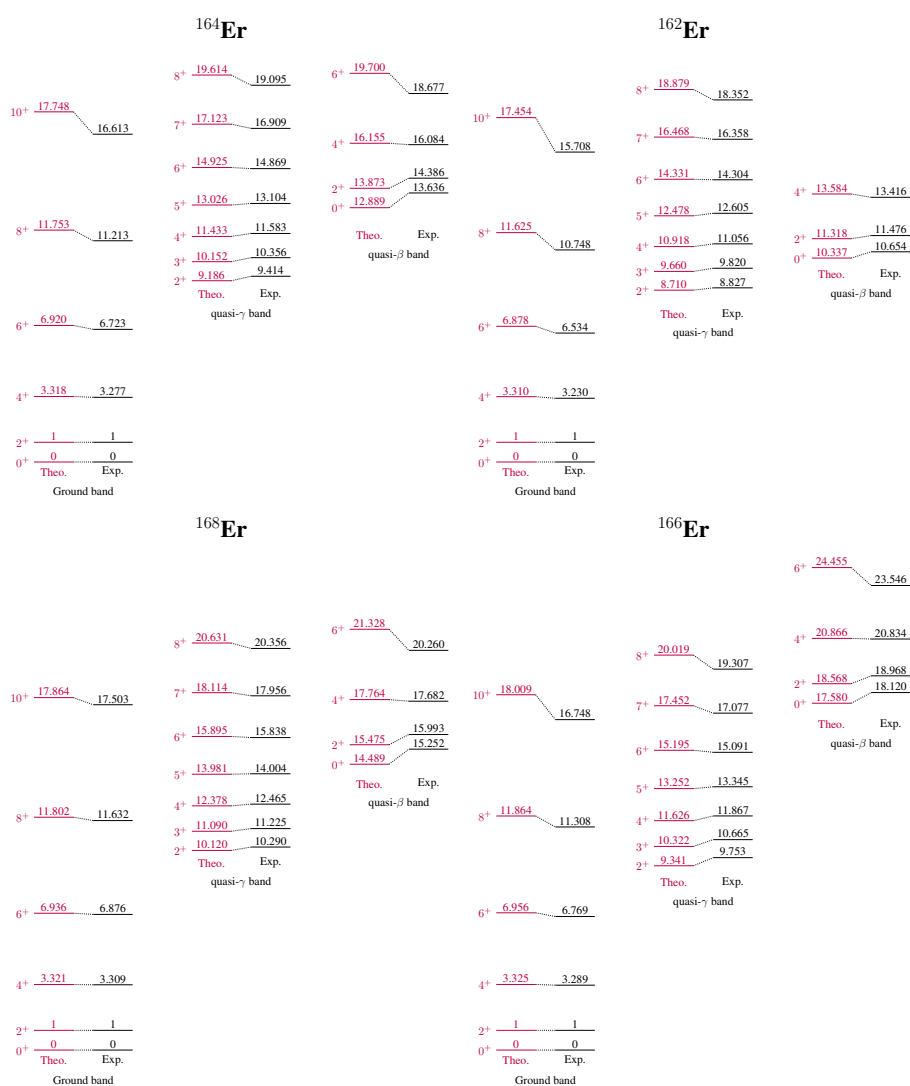
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i^{Exp.} - R_i^{Theo.})^2}, \quad (2.13)$$

می باشد. به منظور سهولت می توان $c = d = 1$ در نظر گرفت که از کلیات مسئله نخواهد کاست. پس از انجام فرآیند برازش نسبت های انرژی پارامترهای مناسب برای هر ایزوتوپ بدست می آید که نتیجه حاصل برای هر یک از این ایزوتوپ ها در جدول ۱.۱۳ فهرست شده است.

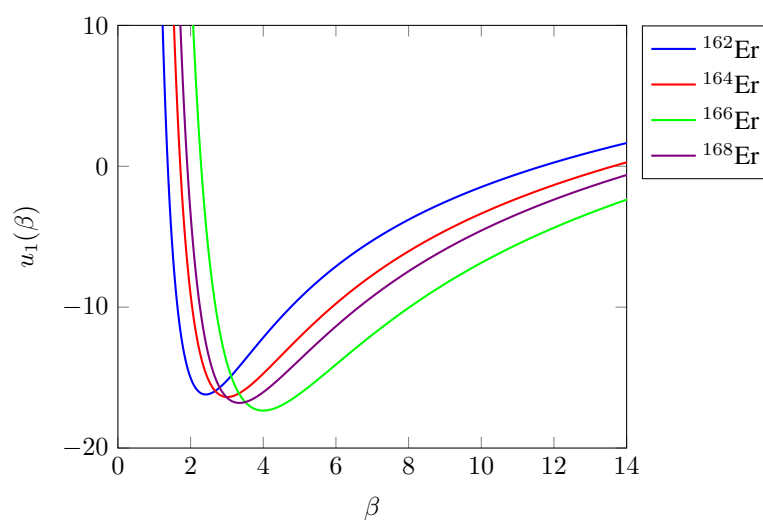
در شکل ۱.۱۳ تصویری از نتایج مربوط به بازتولید نسبت های انرژی ایزوتوپ های در نظر گرفته شده برای این قسمت قرار دارد. این تصویر به تفکیک حاوی اطلاعات هر ایزوتوپ به صورت جداگانه می باشد که به کمک جدول ۱.۱۳ بازتولید شده اند.

حال می توان با استفاده از روابط بیان شده در فصل ۱۲ و همچنین استفاده از نتایج تحلیلی و عددی این قسمت اقدام به محاسبه گذارهای چهار قطبی $B(E2)$ برای ایزوتوپ های Er که در اینجا در نظر گرفته شده اند کرد. در جدول ۲.۱۳ نتایج عددی مربوط به برخی گذارهای چهار قطبی $B(E2)$ به تفکیک ایزوتوپ فهرست شده است. در این جدول اطلاعات تجربی گزارش شده از گذارهای در دسترس درون پراوتز قرار گرفته است تا امکان مقایسه را برای خوانند فراهم کند. توافق خوبی میان پیش بینی های نظری و اطلاعات گزارش شده تجربی برقرار می باشد.

اما قبل از اینکه بخواهیم این قسمت را به اتمام برسانیم، جالب است ببینیم که این پتانسیل دارای چه شکلی برای این ایزوتوپ ها می باشد. در شکل ۲.۱۳ با استفاده از پارامترهای بدست آمده در فرآیند برازش شکل پتانسیل کسری در نظر گرفته شده برای هر ایزوتوپ رسم شده است. همان طور که دیده می شود این پتانسیل دارای یک کمینه می باشد و در نهایت به سمت بی نهایت میل می کند. مقدار این کمینه با توجه به ایزوتوپ مورد نظر تغییر می کند ولی رفتار کلی تغییر نمی کند.



شکل ۱.۱۳: بازتولید اطلاعات مربوط به نسبت‌های انرژی در ایزوتوپ‌های Er به کمک پتانسیل کسری.



شکل ۲.۱۳: شکل پتانسیل کسری برای ایزوتوپ‌های Er که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند.

جدول ۲.۱۳: محاسبه گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ برای ایزوتوپ‌های Er که توسط نتایج پتانسیل کسری پیش‌بینی شده است. مقادیر تجربی در پرانتز قرار داده شده‌اند.

$L_i \rightarrow L_f$	^{162}Er	^{164}Er	^{166}Er	^{168}Er
$1^0_g \rightarrow 8_g$	۱,۸۲۹	۱,۷۸۲	۱,۷۴۲(۱,۷۹۷)	۱,۷۶۴
$8_g \rightarrow 6_g$	۱,۷۳۰	۱,۷۰۱(۱,۶۶۵)	۱,۶۷۷(۱,۷۱۹)	۱,۶۹۱(۱,۶۶۲)
$6_g \rightarrow 4_g$	۱,۶۱۵	۱,۶۰۰	۱,۵۸۸(۱,۷۰۵)	۱,۵۹۵(۱,۶۹۱)
$4_g \rightarrow 2_g$	۱,۴۴۲(۱,۲۶۲)	۱,۴۳۷	۱,۴۳۳(۱,۴۳۸)	۱,۴۳۶(۱,۴۹۸)
$2_g \rightarrow 0_g$	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
$8_7 \rightarrow 7_7$	۰,۹۹۵	۰,۹۶۸	۰,۹۴۰	۰,۹۶۲
$8_7 \rightarrow 6_7$	۳,۳۳۷	۳,۲۵۱	۳,۱۶۵(۱,۱۵۲)	۳,۲۳۵
$7_7 \rightarrow 6_7$	۱,۲۵۳	۱,۲۲۳	۱,۱۹۳	۱,۲۱۸
$7_7 \rightarrow 5_7$	۳,۰۶۷	۲,۹۹۹	۲,۹۳۰(۱,۰۱۴)	۲,۹۸۹
$6_7 \rightarrow 5_7$	۱,۶۲۷	۱,۵۹۳	۱,۵۵۹	۱,۵۸۹(۰,۷۰۴)
$6_7 \rightarrow 4_7$	۲,۷۰۴	۲,۶۵۳	۲,۶۰۰(۱,۰۳۷)	۲,۶۴۸(۰,۹۴۸)
$5_7 \rightarrow 4_7$	۲,۱۸۷	۲,۱۴۹	۲,۱۰۹(۰,۰۴۱)	۲,۱۴۶(۱,۵۹۶)
$5_7 \rightarrow 3_7$	۲,۱۷۹	۲,۱۴۳	۲,۱۰۶	۲,۱۴۱
$4_7 \rightarrow 3_7$	۳,۰۳۱	۲,۹۸۶	۲,۹۳۷(۱,۷۰۵)	۲,۹۸۵(۲,۳۷۱)
$4_7 \rightarrow 2_7$	۱,۳۴۹	۱,۳۳۰	۱,۳۱۰(۰,۶۳۶)	۱,۳۳۰(۰,۴۳۲)
$3_7 \rightarrow 2_7$	۴,۰۳۴	۳,۹۸۲	۳,۹۲۴	۳,۹۸۴(۱,۴۵۵)
$4_\beta \rightarrow 2_\beta$	۱,۷۷۴	۱,۷۰۸	۱,۶۳۵	۱,۶۷۸
$2_\beta \rightarrow 0_\beta$	۱,۲۳۲	۱,۱۸۹	۱,۱۴۱	۱,۱۶۹
$8_7 \rightarrow 8_g$	۲,۴۹۵	۲,۴۳۳	۲,۳۷۶(۰,۰۳۹)	۲,۴۱۴
$8_7 \rightarrow 6_g$	۰,۵۸۷	۰,۵۷۶	۰,۵۶۵(۰,۰۰۲)	۰,۵۷۳
$7_7 \rightarrow 8_g$	۱,۳۴۸	۱,۳۱۶	۱,۲۸۷(۰,۰۳۷)	۱,۳۰۶
$7_7 \rightarrow 6_g$	۱,۹۸۷	۱,۹۵۲	۱,۹۱۹(۰,۰۱۶)	۱,۹۴۲
$6_7 \rightarrow 6_g$	۲,۳۹۹	۲,۳۵۹	۲,۳۲۱(۰,۰۴۶)	۲,۳۴۸
$6_7 \rightarrow 4_g$	۰,۶۳۷	۰,۶۳۰	۰,۶۲۲(۰,۰۰۴)	۰,۶۲۸(۰,۰۰۴)
$5_7 \rightarrow 6_g$	۱,۱۹۵	۱,۱۷۶	۱,۱۵۹	۱,۱۷۲
$5_7 \rightarrow 4_g$	۲,۰۶۳	۲,۰۴۱	۲,۰۱۹	۲,۰۳۶
$4_7 \rightarrow 4_g$	۲,۲۶۷	۲,۲۴۵	۲,۲۲۲(۰,۰۵۱)	۲,۲۴۰(۰,۰۴۰)
$4_7 \rightarrow 2_g$	۰,۷۶۳	۰,۷۵۸	۰,۷۵۲(۰,۰۰۹)	۰,۷۵۷(۰,۰۰۸)
$3_7 \rightarrow 4_g$	۰,۹۲۱	۰,۹۱۳	۰,۹۰۴(۰,۰۲۲)	۰,۹۱۱(۰,۰۲۲)
$3_7 \rightarrow 2_g$	۲,۲۸۳	۲,۲۷۰	۲,۲۵۴	۲,۲۶۹(۰,۰۳۵)
$2_7 \rightarrow 4_g$	۰,۰۹۲(۰,۰۰۹)	۰,۰۹۱(۰,۰۰۸)	۰,۰۹۰(۰,۰۰۴)	۰,۰۹۱(۰,۰۰۳)
$2_7 \rightarrow 0_g$	۱,۲۷۲(۰,۰۳۲)	۱,۲۶۶(۰,۰۲۶)	۱,۲۶۰(۰,۰۲۴)	۱,۲۶۷(۰,۰۲۲)
$4_\beta \rightarrow 4_g$	۰,۲۶۱	۰,۲۱۴	۰,۱۶۱	۰,۱۹۲
$4_\beta \rightarrow 2_g$	۰,۲۶۴	۰,۲۲۰	۰,۱۶۹	۰,۱۹۹
$2_\beta \rightarrow 2_g$	۰,۲۸۶	۰,۲۳۵	۰,۱۷۶	۰,۲۱۱
$2_\beta \rightarrow 0_g$	۰,۱۹۳(۰,۰۰۸)	۰,۱۶۰	۰,۱۲۱(۰,۰۰۳)	۰,۱۴۴(۰,۰۰۲)

فصل ۱۴

برهمکنش ایزوتونیک در بررسی هسته‌های سه‌محوری

هسته‌های سه‌محوری را می‌توان به کمک هامیلتونی بوهر با این شرط و تقریب بررسی کرد که جمله دورانی را پیرامون $\gamma = 30^\circ$ بسط داد. زیرا این مقدار متناظر با بیشینه حالت سه‌محوری بر اساس پارامترهای رفتار جمعی می‌باشد. برای این بررسی پتانسیل کاهیده را به صورت تقریباً جداشدنی

$$\frac{2B}{\hbar^2} E = \varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma, \quad (1.14)$$

$$\frac{2B}{\hbar^2} V(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma), \quad (2.14)$$

در نظر می‌گیریم که منجر به معادلات دیفرانسیلی

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{d}{d\beta} \beta^4 \frac{d}{d\beta} + \frac{L(L+1) - \frac{3}{4}a^2}{\beta^2} + u(\beta) \right] \xi(\beta) = \varepsilon_\beta \xi(\beta), \quad (3.14)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin(3\gamma)} \frac{d}{d\gamma} \sin(3\gamma) \frac{d}{d\gamma} + v(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \varepsilon_\gamma \eta(\gamma), \quad (4.14)$$

برای متغیرهای رفتار جمعی می‌شود.

۱.۱۴ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت β

در اینجا می‌خواهیم نوع خاصی از پتانسیل را که معروف به پتانسیل ایزوتونیک^۱

$$u(\beta) = \frac{d^4}{\beta^2} + w^2\beta^2 + 2g \frac{\beta^2 - a^2}{(\beta^2 + a^2)^2}, \quad (1.14)$$

است را برای قسمت β در معادله دیفرانسیل در نظر بگیریم. با فرض $\xi(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\beta^2}$ به معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi(\beta)}{d\beta^2} + \left(\varepsilon_\beta - \frac{P}{\beta^2} - w^2\beta^2 - 2g \frac{\beta^2 - a^2}{(\beta^2 + a^2)^2} \right) \phi(\beta) = 0, \quad (2.14)$$

می‌رسیم که در آن

$$P = d^4 + L(L+1) - \frac{3}{4}\alpha^2 + 2. \quad (3.14)$$

برای بدست آوردن جواب این قسمت از تابع موج فرض می‌کنیم که این جواب دارای شکل

$$\phi(\beta) = \beta^A (\beta^2 + a^2)^C e^{B\beta^2} G(\beta), \quad (4.14)$$

باشد که در آن پارامترهای

$$A = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + 4P} \right), \quad (5.14)$$

$$B = -\frac{w}{4}, \quad (6.14)$$

$$C = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + 4g} \right), \quad (7.14)$$

استفاده شده است. با این انتخاب برای قسمت آخر از این شکل پیشنهادی معادله دیفرانسیل

$$\begin{aligned} \frac{d^2G(\beta)}{d\beta^2} + \left(\frac{2A}{\beta} + 4B\beta + \frac{4C\beta}{\beta^2 + a^2} \right) \frac{dG(\beta)}{d\beta} \\ \left(\varepsilon_\beta + 2B(1 + 2A) + \frac{2C(1 + 2A + 4B\beta^2) + 2g}{\beta^2 + a^2} \right) G(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

را بدست می‌آوریم. اگر از تغییر متغیر $z = -\beta^2/a^2$ استفاده کنیم، می‌توان این شکل از معادله دیفرانسیلی را به یکی از معادله دیفرانسیل‌های شناخته‌شده تبدیل کرد

$$\frac{d^2G(z)}{dz^2} + \left(\alpha' + \frac{\beta' + 1}{z} + \frac{\gamma' + 1}{z - 1} \right) \frac{dG(z)}{dz} + \left(\frac{\mu'}{z} + \frac{\nu'}{z - 1} \right) G(z) = 0, \quad (9.14)$$

¹isotonic

که این معادله دیفرانسیل هیون هموار^۲ می باشد که پارامترهای آن عبارتست از

$$\alpha' = -2a^2 B, \quad (10.14)$$

$$\beta' = A - \frac{1}{4}, \quad (11.14)$$

$$\gamma' = 2C - 1, \quad (12.14)$$

$$\mu' = \frac{-1}{4} [2C(1+2A) + 2g + a^2(\varepsilon_\beta + 2B(1+2A))], \quad (13.14)$$

$$\nu' = \frac{1}{4} [C(1+2A-4Ba^2) + g]. \quad (14.14)$$

برای بدست آوردن رابطه ویژه مقدری و همچنین شکل نهایی جواب این معادله دیفرانسیل، آن را بایستی به صورت دنباله ای در نظر گرفت و از روش فروبینیوس استفاده کرد. بنابراین با فرض $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ می توان به رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2-\alpha'+\beta'+\gamma')-\mu'}{(n+2)(n+2+\beta')}c_{n+1} + \frac{\alpha'n+\mu'+\nu'}{(n+2)(n+2+\beta')}c_n, \quad (15.14)$$

دست یافت. با برش مناسب این دنباله به منظور دست یافتن به رابطه ویژه مقدری داریم

$$\alpha'n = -(\mu' + \nu'), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.14)$$

$$c_{n+1} = 0. \quad (17.14)$$

این کار منجر به یک رابطه انرژی و یک رابطه قیدی برای یکی از ضرایب پتانسیل می شود

$$\varepsilon_\beta = \omega \left(4 + 2\sqrt{1+4g} + 4n_\beta + \sqrt{1+4P} \right), \quad (18.14)$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{(1-\sqrt{4g+1})n_\beta(2n_\beta+\sqrt{4P+1})-g(\sqrt{4g+1}+\lambda n_\beta+2\sqrt{4P+1}+3)}}{2\sqrt{g\omega}}. \quad (19.14)$$

۲.۱۴ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی برای قسمت γ

پس از بدست آوردن اطلاعات مربوط به قسمت β ، به قسمت γ تابع موج می پردازیم. برای این قسمت معمولاً نوسانگر هماهنگی فرض می شود که در $\gamma = 30^\circ$ دارای کمینه باشد

$$v(\gamma) = \frac{c}{4} \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{c}{4} \tilde{\gamma}^2, \quad \tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}. \quad (1.14)$$

با چنین فرضی می توان از عبارت $\cos(3\gamma)$ در معادله دیفرانسیل صرف نظر کرد. لذا شکل نهایی معادله دیفرانسیل این قسمت عبارتست از

$$\left[\frac{d^2}{d\tilde{\gamma}^2} + \frac{c}{4} \langle \beta^2 \rangle \tilde{\gamma}^2 \right] \eta(\tilde{\gamma}) = \varepsilon_\gamma \eta(\tilde{\gamma}) \quad (2.14)$$

²confluent Heun differential equation

که می‌توان بر حسب توابع هرمیت به ویژه توابع آن دست یافت

$$\eta(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi} n_{\tilde{\gamma}}!}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}(b\tilde{\gamma}) e^{-b^2 \tilde{\gamma}^2 / 2}, \quad (3.14)$$

$$b = \left(\frac{c \langle \beta^2 \rangle}{2} \right)^{1/4}. \quad (4.14)$$

همچنین ویژه‌مقدار این قسمت نیز به صورت

$$\varepsilon_{\gamma} = \sqrt{\frac{2c}{\langle \beta^2 \rangle}} \left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} \right), \quad n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.14)$$

می‌باشد.

حال نوبت آزمودن این نتایج به کمک بازتولید اطلاعات ایزوتوپ‌ها و مدل $Z(5)$ می‌باشد.

۳.۱۴ نتایج محاسبات عددی برای پتانسیل ایزوتونیک

در این قسمت همانند روال قسمت‌های قبل در ابتدا می‌خواهیم با استفاده از نتایج تحلیلی بدست‌آمده، اطلاعات مرتبط به مدل $Z(5)$ را بازتولید کرده سپس به بازتولید اطلاعاتی از ایزوتوپ‌های مناسب بپردازیم. نسبت‌های انرژی‌ای که در اینجا قرار است آن‌ها را مورد بررسی قرار دهیم به صورت

$$R(n_{\beta}, L, \alpha) = \frac{\varepsilon(n_{\beta}, L, \alpha) - \varepsilon(0, 0, 0)}{\varepsilon(0, 2, 0) - \varepsilon(0, 0, 0)}, \quad (1.14)$$

تعریف می‌شوند که در آن α تصویر تکانه زاویه‌ای بر روی محور شماره ۱ دستگاه اصلی متصل به جسم می‌باشد. همچنین اطلاعات مربوط به گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ برای این مدل نیز با فرض $\gamma \approx 30^\circ$ و با استفاده از قضیه ویگنر-اکارت به

$$B(E2; L_i \alpha_i \rightarrow L_f \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\alpha_i, 0})(1 + \delta_{\alpha_f, 0})} [(L_i 2 L_f | \alpha_i 2 \alpha_f) + (L_i 2 L_f | \alpha_i - 2 \alpha_f) + (-1)^{L_i} (L_i 2 L_f | -\alpha_i 2 \alpha_f)]^2 \times I_{\beta}^2(n_{\beta_i}, L_i, \alpha_i, n_{\beta_f}, L_f, \alpha_f). \quad (2.14)$$

تقلیل می‌یابد.

در جدول ۱.۱۴ اطلاعات مربوط به برخی از حالت‌های برانگیخته پیش‌بینی شده توسط مدل $Z(5)$ به کمک نتایج تحلیلی بدست‌آمده به وسیله پتانسیل ایزوتونیک با همراه پارامترهای استفاده‌شده و میزان خطای آن اشاره شده است. با در نظر گرفتن $g = 2$ و $\omega = 6.37$ اطلاعات مربوط به گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ که توسط مدل $Z(5)$ گزارش شده بود را می‌توان با دقت خوبی بازتولید کرد. جزئیات محاسبات مربوط به این نوع از گذارها در جدول اما از جمله معروف‌ترین ایزوتوپ‌هایی که می‌توان رفتار آن‌ها را با این نوع بررسی از هامیلتونی بوهر مورد مطالعه قرار داد پلاتینیوم می‌باشد. در اینجا ایزوتوپ‌های $^{192-196}\text{Pt}$ را در نظر گرفته‌ایم. در جدول ۳.۱۴ برخی از نسبت‌های

جدول ۱.۱۴: بازتولید اطلاعات مربوط به نسبت‌های انرژی مدل $Z(5)$ توسط نتایج تحلیلی مربوط به برهمکنش ایزوتونیک.

States	Z(5)	Theo.
0_g	0/000	0/000
2_g	1/000	1/000
4_g	2350	2429
6_g	2984	4120
8_g	5877	5969
10_g	8019	7916
2_γ	1837	1886
3_γ	2597	2689
4_γ	4420	4557
5_γ	4634	4769
6_γ	7063	7065
7_γ	6869	6888
8_γ	9864	9486
0_β	2913	4412
2_β	5697	5412
d		1641
χ^2		0/040

جدول ۲.۱۴: بازتولید اطلاعات مربوط به گذارهای چهارقطبی B(E2) که توسط مدل Z(5) گزارش شده بود به کمک نتایج تحلیلی بدست‌آمده در این قسمت.

n_{β_i}	L_i	n_{w_i}	n_{β_f}	L_f	n_{w_f}	Theo.	Z(5)
۰	۲	۰	۰	۰	۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰	۴	۰	۰	۲	۰	۱/۳۹۸	۱/۵۹۰
۰	۶	۰	۰	۴	۰	۱/۸۶۳	۲/۲۰۳
۰	۸	۰	۰	۶	۰	۲/۴۰۸	۲/۶۳۵
۰	۱۰	۰	۰	۸	۰	۳/۲۹۸	۲/۹۶۷
۰	۲	۲	۰	۲	۰	۱/۴۴۸	۱/۶۲۰
۰	۳	۱	۰	۴	۰	۱/۰۸۵	۱/۲۴۳
۰	۳	۱	۰	۲	۲	۱/۸۸۰	۲/۱۷۱
۰	۴	۲	۰	۴	۰	۰/۲۸۹	۰/۳۴۸
۰	۴	۲	۰	۲	۲	۰/۵۹۴	۰/۷۳۶
۰	۵	۱	۰	۶	۰	۰/۹۱۳	۰/۹۷۲
۰	۵	۱	۰	۳	۱	۱/۰۳۵	۱/۲۳۵
۰	۵	۱	۰	۴	۲	۱/۲۸۱	۱/۳۱۳
۰	۶	۲	۰	۶	۰	۰/۱۷۲	۰/۱۹۸
۰	۶	۲	۰	۴	۲	۰/۹۵۳	۱/۰۳۱
۱	۰	۰	۰	۲	۰	۱/۰۸۵	۰/۷۵۰
۱	۲	۰	۰	۰	۰	۰/۱۲۱	۰/۰۱۱
۱	۲	۰	۰	۴	۰	۰/۵۶۱	۰/۳۲۸
۱	۲	۰	۰	۲	۲	۰/۲۷۲	۰/۱۴۴

جدول ۳.۱۴: بازتولید اطلاعات نسبت‌های انرژی ایزوتوپ‌های ^{192}Pt - ^{196}Pt به کمک نتایج حاصل از پتانسیل ایزوتونیک.

States	Z(5)	^{192}Pt		^{194}Pt		^{196}Pt	
		Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.
0_g	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
2_g	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
4_g	2/350	2/384	2/479	2/399	2/470	2/357	2/465
6_g	3/984	3/981	4/314	4/026	4/298	3/903	4/290
8_g	5/877	5/700	6/377	5/787	6/392	5/552	6/333
10_g	8/019	7/491	8/624	7/628	8/672	7/262	8/558
2_γ	1/837	1/862	1/935	1/870	1/894	1/848	1/936
3_γ	2/597	3/163	2/910	3/191	2/809	3/113	2/852
4_γ	4/420	3/608	3/795	3/646	3/743	3/544	3/636
5_γ	4/634	5/567	4/682	5/651	4/563	5/425	4/526
6_γ	7/063	5/567	5/905	—	—	5/425	5/644
7_γ	6/869	7/828	6/677	—	—	—	—
8_γ	9/864	7/529	8/186	—	—	—	—
0_β	3/913	3/941	3/776	4/085	3/858	3/710	3/192
2_β	5/697	4/941	4/547	5/085	4/603	4/710	3/828
d		1/499		1/545		1/420	
χ^2		0/343		0/287		0/370	

انرژی این ایزوتوپ‌ها را با کمک نتایج تحلیلی بدست‌آمده در ابتدای این قسمت فهرست شده است. پارامترهای استفاده‌شده برای هر ایزوتوپ به همراه میزان پارامتر خطای برای هر کدام از آن‌ها در این جدول اشاره شده است. همچنین می‌توان با فرض $g = 2$ برای تمامی این ایزوتوپ‌ها و مقدار $\omega = 5$ برای $^{194-196}\text{Pt}$ و $\omega = 6$ برای ^{192}Pt اقدام به محاسبه برخی از گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ منتسب به این ایزوتوپ‌ها کرد. مجموعه‌ای از این گذارها برای ایزوتوپ‌های مختلف پلاتینیوم در جدول ۴.۱۴ فهرست شده است.

در انتهای این قسمت نیز به‌منظور ایجاد امکان مقایسه میان پیش‌بینی‌های نظری و اطلاعات گزارش‌شده تجربی برای گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ ایزوتوپ‌های پلاتینیوم، جدول ۵.۱۴ فراهم شده است. در این جدول گذارهایی که اطلاعات تجربی آن‌ها برای ایزوتوپ‌های مختلف پلاتینیوم در دسترس بود، در کنار پیش‌بینی‌های نظری آن‌ها که توسط نتایج تحلیلی بدست‌آمده از برهمکنش ایزوتونیک حاصل شده، جمع‌آوری شده است که نشان دهنده میزان توافق خوب میان این اطلاعات می‌باشد.

جدول ۴.۱۴: پیش‌بینی‌های نظری مربوط به گذارهای چهارقطبی B(E2) برای ایزوتوپ‌های پلاتینیوم با استفاده از نتایج مربوط به پتانسیل ایزوتونیک.

n_{β_i}	L_i	n_{w_i}	n_{β_f}	L_f	n_{w_f}	۱۹۲Pt	۱۹۴Pt	۱۹۶Pt
۰	۲	۰	۰	۰	۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۰	۴	۰	۰	۲	۰	۱,۳۹۹	۱,۵۴۳	۱,۵۱۹
۰	۶	۰	۰	۴	۰	۱,۸۹۶	۲,۳۸۶	۲,۳۲۳
۰	۸	۰	۰	۶	۰	۲,۵۲۹	۳,۶۹۸	۳,۵۸۱
۰	۱۰	۰	۰	۸	۰	۳,۶۱۰	۶,۱۹۴	۵,۹۸۵
۰	۲	۲	۰	۲	۰	۱,۴۵۳	۱,۶۰۲	۱,۵۸۱
۰	۳	۱	۰	۴	۰	۱,۱۰۸	۱,۳۹۳	۱,۳۶۱
۰	۳	۱	۰	۲	۲	۱,۹۰۵	۲,۲۷۹	۲,۲۳۳
۰	۴	۲	۰	۴	۰	۰,۲۹۴	۰,۳۷۰	۰,۳۵۹
۰	۴	۲	۰	۲	۲	۰,۵۹۴	۰,۷۱۴	۰,۶۹۳
۰	۵	۱	۰	۶	۰	۰,۹۶۲	۱,۴۰۵	۱,۳۶۴
۰	۵	۱	۰	۳	۱	۱,۰۵۵	۱,۳۶۱	۱,۳۲۱
۰	۵	۱	۰	۴	۲	۱,۳۶۲	۲,۰۶۷	۲,۰۰۴
۰	۶	۲	۰	۶	۰	۰,۱۷۹	۰,۲۶۳	۰,۲۵۴
۰	۶	۲	۰	۴	۲	۱,۰۰۸	۱,۵۳۲	۱,۴۸۰
۱	۰	۰	۰	۲	۰	۱,۲۶۷	۱,۳۳۱	۱,۴۹۰
۱	۲	۰	۰	۰	۰	۰,۱۳۲	۰,۱۲۹	۰,۱۳۸
۱	۲	۰	۰	۴	۰	۰,۶۵۱	۰,۷۸۷	۰,۸۵۲
۱	۲	۰	۰	۲	۲	۰,۳۱۱	۰,۳۵۸	۰,۳۸۷

جدول ۱۴.۵: مقایسه میان اطلاعات نظری و تجربی برای گذارهای چهارقطبی B(E2) ایزوتوپ‌های پلاتینیوم.

Initial states			Final states			^{۱۹۲} Pt		^{۱۹۴} Pt		^{۱۹۶} Pt	
n_{β_i}	L_i	n_{w_i}	n_{β_f}	L_f	n_{w_f}	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.
۰	۴	۰	۰	۲	۰	۱,۳۹۹	۱,۵۵۹	۱,۵۴۳	۱,۷۲۴	۱,۵۱۹	۱,۴۷۶
۰	۴	۲	۰	۲	۲	—	—	۰,۷۱۴	۰,۴۴۶	۰,۶۹۳	۰,۷۱۵
۰	۶	۲	۰	۴	۲	—	—	—	—	۱,۴۸۰	۱,۲۰۸
۰	۳	۱	۰	۲	۲	۱,۹۰۵	۱,۷۸۶	—	—	—	—
۰	۲	۲	۰	۰	۰	۰,۰۰۰	۰,۰۰۹	۰,۰۰۰	۰,۰۰۶	۰,۰۰۰	۰,۰۰۰
۰	۲	۲	۰	۲	۰	۱,۴۵۳	۱,۹۰۹	۱,۶۰۲	۱,۸۰۵	—	—
۰	۴	۲	۰	۲	۰	—	—	۰,۰۰۰	۰,۰۰۴	۰,۰۰۰	۰,۰۱۴
۰	۴	۲	۰	۴	۰	—	—	۰,۳۷۰	۰,۴۰۶	—	—
۰	۶	۲	۰	۴	۰	—	—	—	—	۰,۰۰۰	۰,۰۱۲
χ^2						۰,۰۸۲		۰,۰۲۹		۰,۰۱۵	

فصل ۱۵

پتانسیل سکستیک در بررسی رفتار هسته‌های A فرد γ ناپایدار

در این قسمت می‌خواهیم با در نظر گرفتن یک ذره منفرد که دارای $J = 3/2$ می‌باشد اقدام به بررسی هسته‌های A فرد کنیم و رفتار جمعی آن‌ها را بررسی کنیم. در این موقعین فرض می‌شود که سیستم متشکل از چند دو قسمت می‌باشد. هر قسمت دارای رفتار خود است در حالیه می‌توانند با هم نیز برهمکنش داشته باشند. بنابراین فرض می‌شود که هامیلتونی کل سیستم به صورت

$$\hat{H} = \hat{H}_C + \hat{H}_F + kg(\beta)V_{CF} + k'g(\beta)\hat{J} \cdot \hat{J}, \quad (1.15)$$

نوشته شود که جمله آخر به منظور از بین بردن تبهگنی وارد این بحث شده است و k و k' پارامترهای آزاد برای این سیستم هستند. قسمت مربوط به مغز هسته توسط هامیلتونی بوهر توصیف می‌شود

$$\hat{H}_C = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin^2(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^2(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\hat{Q}_{\kappa}^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi\kappa}{3}\right)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (2.15)$$

و قسمت‌های دیگر نیز شامل برهمکنش‌های میان خود و اجزای این سیستم می‌باشد. با فرض $\Psi = F(\beta)\Phi(\gamma, \theta_i, \eta)$ که در آن درجه آزادی ذره با η نمایش داده شده است می‌توان قسمت فضایی را به صورت

$$\Phi(\gamma, \theta_i, \eta) = \sum_{L, M_L, m_j} \left\langle \begin{matrix} (\tau, 0) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ L & 3/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\tau, \frac{1}{2}) \\ J \end{matrix} \right\rangle \langle L M_L 3/2 m_j | J M_J \rangle \phi(\gamma, \theta_i) \chi_{3/2, m_j}(\eta), \quad (3.15)$$

نوشت که برآورده‌کننده معادله دیفرانسیل

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\hat{Q}_{\kappa}^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi\kappa}{3})} \right] \phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \phi(\gamma, \theta_i) \quad (4.15)$$

می‌باشد که در آن $\Lambda = \tau(\tau + 3)$ می‌باشد.

۱.۱۵ بدست آوردن تابع موج و طیف انرژی

با در نظر گرفتن یک جفت‌شدگی اسپین-مداری به‌عنوان برهمکنش میان ذره و مغز هسته به صورت $\hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma}$ می‌توان برای قسمت β تابع موج این سیستم معادله دیفرانسیل

$$\varphi''(\beta) + \left[\varepsilon - \frac{\Lambda}{\beta^2} - \frac{2B}{\hbar^2} g(\beta) \left(2k \langle \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \rangle + k' \langle \hat{J} \cdot \hat{J} \rangle \right) - v(\beta) \right] \varphi(\beta) = 0, \quad (1.15)$$

را بدست آورد که در آن از $\varphi(\beta) = \beta^2 F(\beta)$ ، $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ ، $v(\beta) = \frac{2B}{\hbar^2} V(\beta)$ استفاده شده است. همچنین برای قسمت مربوط به برهمکنش اسپین-مداری و از بین برنده تبهگنی داریم

$$\langle \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4} [\tau_1(\tau_1 + 3) - \tau(\tau + 3) - 7/4], \quad \langle \hat{J} \cdot \hat{J} \rangle = J(J + 1), \quad (2.15)$$

که در آن $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ می‌باشد. با فرض یک مقدار ثابت برای ضریب $g(\beta)$ این معادله دیفرانسیل را می‌توان به شکل ساده‌تری نوشت

$$\varphi''(\beta) + \left[\varepsilon' - \frac{\Lambda + 2}{\beta^2} - v(\beta) \right] \varphi(\beta) = 0, \quad (3.15)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - 2k \langle \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \rangle - k' J(J + 1). \quad (4.15)$$

با در نظر گرفتن پتانسیل سکستیک به‌عنوان برهمکنش این سیستم می‌خواهیم به بررسی چند هسته A فرد بپردازیم.

این پتانسیل در فصل ۱۲ معرفی شد. جواب‌های عام این مسئله دارای ساختار

$$\varphi_n(x) = P_n(x^2) (x^2)^{s-1/4} \exp\left(-\frac{a}{4}x^2 - \frac{b}{4}x^2\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (5.15)$$

می‌باشد که در آن P_n چندجمله‌ای‌هایی از درجه n می‌باشد. ویژه‌مقادیر متناسب به این سیستم نیز با توجه به M تعیین می‌شود همانند چیزی که در فصل ۱۲ بیان شد. به ازای هر مقدار M ما به $M + 1$ جواب دسترسی خواهیم داشت. به

همین دلیل است که به‌عنوان مثال برای $M = 1$ دو جواب برای سیستم بدست می‌آید که منتسب به حالت پایه و اولین حالت برانگیخته می‌باشد. ساده‌ترین جواب‌ها منتسب به پایین‌ترین مقادیر M هستند. برای $M = 0$ انرژی سیستم به صورت $E = 4bs$ می‌باشد و ویژه‌تابع متناسب با

$$\varphi_n^{(M=1)}(x) \propto (x^2)^{s-1/4} \exp\left(-\frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{2}x^2\right). \quad (6.15)$$

می‌باشد. برای حالت $M = 1$ نیز انرژی سیستم برابر با

$$E_n^{(M=1)} = 4bs + \lambda_{\pm}(s), \quad (7.15)$$

که در آن

$$\lambda_{\pm}(s) = \begin{cases} 2b - 2\sqrt{b^2 + \lambda as}, & n = 0, \\ 2b + 2\sqrt{b^2 + \lambda as}, & n = 1. \end{cases} \quad (8.15)$$

همچنین ویژه‌تابع این مورد نیز برابر با

$$\varphi_n^{(M=1)}(x) \propto \left(1 - \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda s} x^2\right) (x^2)^{s-1/4} \exp\left(-\frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{2}x^2\right). \quad (9.15)$$

می‌باشد.

حال با توجه به مشخص شدن این اطلاعات می‌خواهیم اقدام به انجام محاسبات عددی به منظور آزمون نتایج بدست آمده کنیم.

۲.۱۵ بکارگیری نتایج برای هسته‌های Ir

در این قسمت می‌خواهیم اطلاعات مربوط به برخی از ایزوتوپ‌های ایریدیوم را باز تولید کنیم. برای این منظور نسبت‌های انرژی

$$R_i = \frac{\varepsilon(n, \tau_1, J) - \varepsilon(0, 1/2, 3/2)}{\varepsilon(0, 3/2, 7/2) - \varepsilon(0, 1/2, 3/2)} \quad (10.15)$$

را مد نظر قرار می‌دهیم و با توجه به آن محاسبات نظری لازم را انجام می‌دهیم. حالت‌های برانگیخته در مدل با مجموعه‌ای از اعداد کوانتومی تعیین می‌شود که نسبت به حالت هسته زوج قدری پیچیده‌تر است. به‌منظور سهولت در بررسی این حالت‌ها در جدول ۱۰.۱۵ ارتباط میان اعداد کوانتومی J و τ_1 برای هر یک از این ترازها بیان شده است. همچنین محاسبات گذارهای چهارقطبی منتسب به چنین سیستم‌هایی از پیچیدگی خاصی برخوردار است. در این فصل این مطالب بیان می‌شود ولی برای سهولت در فصل‌های بعدی از شکل ساده‌تر این محاسبات استفاده خواهد شد. اما برای تکمیل مباحث در اینجا جزئیات محاسبات بیان می‌شود. عملگر گذار در حالت کلی برای یک هسته فرد به صورت

$$T_{\mu}^{(\lambda)} = T_{C, \mu}^{(\lambda)} + T_{F, \mu}^{(\lambda)}, \quad (20.15)$$

جدول ۱۰.۱۵: مقادیر مجاز J برای $\tau_1 \leq 7/2$.

τ_1	J
۱/۲	۳/۲
۳/۲	۷/۲ ۵/۲ ۱/۲
۵/۲	۱۱/۲ ۹/۲ ۷/۲ ۵/۲ ۳/۲
۷/۲	۱۵/۲ ۱۳/۲ ۱۱/۲ ۹/۲ ۷/۲ ۵/۲ ۳/۲

بیان می‌شود که در آن

$$T_{C,\mu}^{(\gamma)} = t_{\tau_1} \alpha_\mu + t_{\tau_2} (\alpha \times \alpha)_\mu^{(\gamma)}, \quad (3.15)$$

پارامترهای آزاد t_{τ_1} و t_{τ_2} هستند و با فرض $\lambda = 2$ این عملگر منتسب به گذارهای چهارقطبی خواهد شد. پارامتر α که در این روابط استفاده شد با استفاده از مختصات رفتار جمعی بیان می‌شود

$$\alpha_\mu = \beta \left[D_{\mu^\circ}^{(\gamma)}(\theta_i) \cos \gamma + \left(D_{\mu^{\frac{1}{2}}}^{(\gamma)}(\theta_i) + D_{\mu^{-\frac{1}{2}}}^{(\gamma)}(\theta_i) \right) \sin \gamma \right], \quad (4.15)$$

و همچنین برای قسمت فرمیونی این عملگر داریم

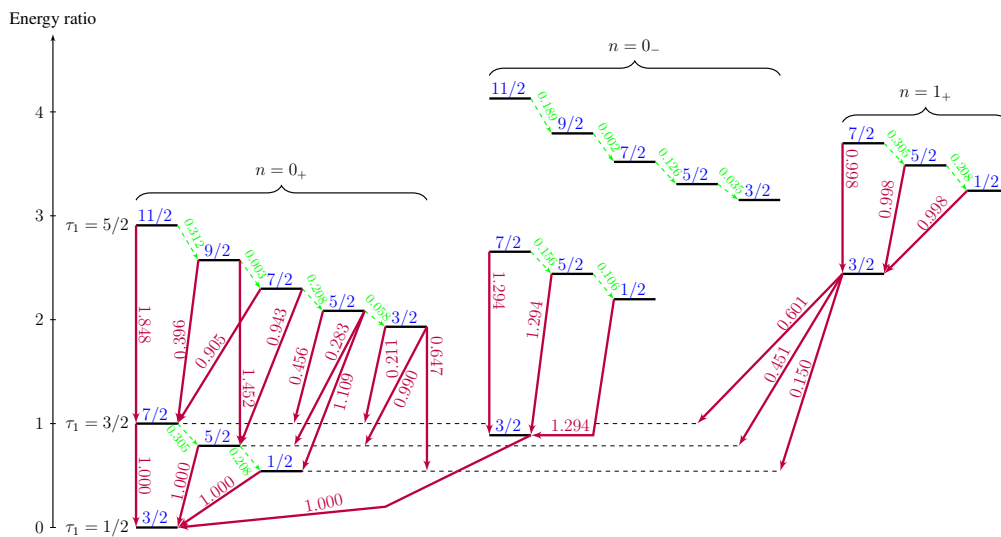
$$T_{F,\mu}^{(\gamma)} = t_{\tau_2} \left(a_j^\dagger \times \tilde{a}_j \right)_\mu^{(\gamma)}. \quad (5.15)$$

بدیهی است که قسمت عملگر مربوط به مغز هسته می‌تواند فقط بر روی مغز هسته اثرگذار باشد و عملگر فرمیونی گذار همین طور. بنابراین می‌توان عناصر ماتریسی کاهش یافته گذار چهارقطبی را به تفکیک بدست آورد

$$\begin{aligned} & \left\langle n' \tau' \tau'_1 J' \left\| T_C^{(\gamma)} \right\| n \tau \tau_1 J \right\rangle \\ &= \sum_{L', L} \left\langle \begin{array}{c} (\tau', \circ) \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ L' \quad \frac{3}{2} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\tau'_1, \frac{1}{2}) \\ J' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} (\tau, \circ) \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ L \quad \frac{3}{2} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\tau_1, \frac{1}{2}) \\ J \end{array} \right\rangle \right. \\ & \times (-1)^{L+J+3/2} (2J'+1)^{1/2} (2J+1)^{1/2} \left. \left\{ \begin{array}{ccc} L' & J' & \frac{3}{2} \\ J & L & 2 \end{array} \right\} \left\langle n' \tau' L' \left\| T_C^{(\gamma)} \right\| n \tau L \right\rangle, \right. \end{aligned} \quad (6.15)$$

که منظور از علامت آکولاد ضریب $z - 6$ ویگنر می‌باشد و در قسمت مربوط به هسته‌های زوج نحوه محاسبه $\left\langle n' \tau' L' \left\| T_C^{(\gamma)} \right\| n \tau L \right\rangle$ بیان شد و همچنین برای قسمت فرمیونی نیز داریم

$$\begin{aligned} & \left\langle n' \tau' \tau'_1 J' \left\| T_F^{(\gamma)} \right\| n \tau \tau_1 J \right\rangle \\ &= \sum_L \left\langle \begin{array}{c} (\tau, \circ) \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ L \quad \frac{3}{2} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\tau'_1, \frac{1}{2}) \\ J' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} (\tau, \circ) \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ L \quad \frac{3}{2} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\tau_1, \frac{1}{2}) \\ J \end{array} \right\rangle \right. \\ & \times (-1)^{L+J+3/2} (2J'+1)^{1/2} (2J+1)^{1/2} \left. \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & J' & L \\ J & \frac{3}{2} & 2 \end{array} \right\} \delta_{n',n} \delta_{\tau',\tau} \left\langle \frac{3}{2} \left\| T_F^{(\gamma)} \right\| \frac{3}{2} \right\rangle, \right. \end{aligned} \quad (7.15)$$



شکل ۱.۱۵: مثالی از چگونگی استفاده از بدست آوردن نسبت‌های انرژی و گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ با استفاده از $a = \xi = 0.25$ و $2, b = 4, k = -0.5, k' = 0.3$.

که در آن t_{22} $= -\sqrt{5} t_{21}$ $\left\langle \frac{3}{2} \left\| T_F^{(2)} \right\| \frac{3}{2} \right\rangle$ در نهایت گذار چهارقطبی $B(E2)$ از رابطه نهایی

$$B(E2; n\tau LJ \rightarrow n'\tau' L'J') = \frac{1}{2J+1} \left| \left\langle n'\tau' L'J' \left\| \left(T_C^{(2)} + T_F^{(2)} \right) \right\| n\tau LJ \right\rangle \right|^2 \quad (A.15)$$

محاسبه می‌شود. بایستی توجه داشت که می‌توان در اینجا از t_{22} صرف نظر کرد و همچنین به جای کار کردن با دو پارامتر t_{21} و t_{22} ، با نسبت این پارامتر به محاسبات عددی پرداخت یعنی $\xi = (t_{22}/t_{21})$.

به‌منظور بهره‌برداری از این روابط ما نیاز به ضرایب شبه‌نرده‌ای^۱ و ضرایب کلبش-گردن در فضای $SO(5)$ داریم که به ترتیب این مقادیر به ازای مقادیر مشخصی در جدول‌های ۲.۱۵ و ۳.۱۵ فهرست شده‌اند.

به‌منظور ارائه چگونگی استفاده از این روابط در یک مثال گویا نشان داده شده است. در این مثال پارامترهایی که استفاده شده‌اند عبارتند از $a = 2, b = 4, k = -0.5, k' = 0.3$ و $\xi = 0.25$. نتایج حاصل در شکل ۱.۱۵ به تصویر کشیده شده است. در این تصویر سه دسته از ترازهای برانگیخته وجود دارد که به کمک آکولادهایی نشان داده شده است که کدامیک از آن‌ها متعلق به کدام حالت برانگیختگی هستند. بایستی توجه شود که تمامی گذارهای محاسبه‌شده به اولین گذار $B(E2; 7/2_1 \rightarrow 3/2_1)$ بهنجار شده است.

حال می‌توان با استفاده از اطلاعات آزمایشگاهی منتسب به ایزوتوپ‌های ایریدویم اطلاعات آن‌ها را بازتولید کرد. در جدول ۴.۱۵ نتایج حاصل از فرآیند برآزش نتایج تحلیلی بر روی اطلاعات آزمایشگاهی هر یک از این ایزوتوپ‌ها به همراه پارامترهای استفاده‌شده و پارامتر میزان خطای محاسبات بیان شده است.

برای محاسبه گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ منتسب به این ایزوتوپ‌ها علاوه بر پارامترهایی که در جدول ۵.۱۵ بدست آمد نیازمند تعیین پارامتر ξ برای هر یک از این ایزوتوپ‌ها هستیم. اما این پارامتر فقط می‌تواند از طریق اطلاعات آزمایشگاهی منتسب به گذارهایی تعیین می‌شود که تغییر τ نداشته باشند. متأسفانه برای این قسمت از محاسبات دسترسی کافی به چنین برای تمامی ایزوتوپ‌ها ممکن نبود و فقط برای ^{191}Ir توانستیم که چنین اطلاعاتی

^۱isoscalar factor

جدول ۲.۱۵: ضرایب شبه‌نرده‌ای لازم برای محاسبه گذارهای چهارقطبی.

τ_1	J	L	τ	ISF	τ_1	J	L	τ	ISF
۰.۵	۱.۵	۰	۰	۱	۲.۵	۵.۵	۳	۴	-۰.۲۸۴۲۶۷۶۲۲
۰.۵	۱.۵	۱	۲	۱	۲.۵	۵.۵	۳	۶	۰.۹۵۸۷۴۴۹۷۱
۱.۵	۰.۵	۱	۲	۱	۳.۵	۱.۵	۳	۰	۰.۸۱۶۴۹۶۵۸۱
۱.۵	۰.۵	۲	۲	-۱	۳.۵	۱.۵	۳	۳	۰.۵۷۷۳۵۰۲۶۹
۱.۵	۲.۵	۱	۲	۱	۳.۵	۱.۵	۴	۲	۱
۱.۵	۲.۵	۲	۲	۰.۷۱۴۲۸۵۷۱۴	۳.۵	۲.۵	۳	۳	۰.۷۸۱۷۳۵۹۶
۱.۵	۲.۵	۲	۴	۰.۶۹۹۸۵۴۲۱۲	۳.۵	۲.۵	۳	۴	۰.۶۲۳۶۰۹۵۶۴
۱.۵	۳.۵	۱	۲	۱	۳.۵	۲.۵	۴	۲	۰.۳۹۴۷۷۱۰۱۷
۱.۵	۳.۵	۲	۲	-۰.۲۸۵۷۱۴۲۸۶	۳.۵	۲.۵	۴	۴	-۰.۹۱۸۷۷۹۵۴۱
۱.۵	۳.۵	۲	۴	۰.۹۵۸۳۱۴۸۴۷	۳.۵	۳.۵	۳	۳	۰.۷۸۱۷۳۵۹۶
۲.۵	۱.۵	۲	۲	۱	۳.۵	۳.۵	۳	۴	-۰.۶۲۳۶۰۹۵۶۴
۲.۵	۱.۵	۳	۰	۰.۵۷۷۳۵۰۲۶۹	۳.۵	۳.۵	۴	۲	-۰.۵۴۰۵۶۲۴۷۸
۲.۵	۱.۵	۳	۳	-۰.۸۱۶۴۹۶۵۸۱	۳.۵	۳.۵	۴	۴	-۰.۳۶۷۵۱۱۸۱۶
۲.۵	۲.۵	۲	۲	۰.۶۹۹۸۵۴۲۱۲	۳.۵	۳.۵	۴	۵	۰.۷۵۶۷۸۷۴۶۹
۲.۵	۲.۵	۲	۴	-۰.۷۱۴۲۸۵۷۱۴	۳.۵	۵.۵	۳	۴	۰.۹۵۸۷۴۴۹۷۱
۲.۵	۲.۵	۳	۳	-۰.۶۲۳۶۰۹۵۶۴	۳.۵	۵.۵	۳	۶	۰.۲۸۴۲۶۷۶۲۲
۲.۵	۲.۵	۳	۴	۰.۷۸۱۷۳۵۹۶	۳.۵	۵.۵	۴	۴	-۰.۳۰۴۲۴۰۰۱
۲.۵	۳.۵	۲	۲	۰.۹۵۸۳۱۴۸۴۷	۳.۵	۵.۵	۴	۵	۰.۴۰۴۵۱۹۹۱۷
۲.۵	۳.۵	۲	۴	۰.۲۸۵۷۱۴۲۸۶	۳.۵	۵.۵	۴	۶	۰.۸۶۲۴۳۹۳۶۲
۲.۵	۳.۵	۳	۳	۰.۶۲۳۶۰۹۵۶۴	۳.۵	۶.۵	۳	۶	۱
۲.۵	۳.۵	۳	۴	۰.۷۸۱۷۳۵۹۶	۳.۵	۶.۵	۴	۵	-۰.۳۶۰۳۷۴۹۸۵
۲.۵	۴.۵	۲	۴	۱	۳.۵	۶.۵	۴	۶	۰.۴۰۴۵۱۹۹۱۷
۲.۵	۴.۵	۳	۳	-۰.۳۴۹۶۰۲۹۴۹	۳.۵	۶.۵	۴	۸	۰.۸۴۰۵۳۱۶۸۱
۲.۵	۴.۵	۳	۴	۰.۴۹۷۴۶۸۳۳۸	۳.۵	۷.۵	۳	۶	۱
۲.۵	۴.۵	۳	۶	۰.۷۹۳۹۱۶۲۶۲	۳.۵	۷.۵	۴	۶	-۰.۲۶۹۶۷۹۹۴۵
۲.۵	۵.۵	۲	۴	۱	۳.۵	۷.۵	۴	۸	۰.۹۶۲۹۵۰۰۱۳

جدول ۳.۱۵: ضرایب کلبش-گردن در فضای SO(5).

τ_i	L_i	τ_f	L_f	CGC
۱	۲	۰	۰	۱
۲	۴	۱	۲	۱
۳	۶	۲	۴	۱
۴	۸	۳	۶	۱
۵	۸	۴	۶	۰٫۸۷۱۷۷۹۷۸۹
۵	۸	۴	۸	-۰٫۴۸۹۸۹۷۹۴۹
۵	۷	۴	۶	-۰٫۳۴۶۴۱۰۱۶۲
۵	۷	۴	۵	۰٫۸۲۸۰۷۸۶۷۱
۵	۷	۴	۸	-۰٫۴۴۰۷۷۸۵۳۲
۴	۶	۳	۶	-۰٫۵۶۴۰۷۶۰۷۵
۴	۶	۳	۴	۰٫۸۲۵۷۲۲۸۲۴
۴	۶	۳	۳	۰٫۸۲۵۷۲۲۸۲۴
۴	۵	۳	۴	-۰٫۴۸۸۵۰۴۲۱
۴	۵	۳	۳	۰٫۷۲۴۵۶۸۸۳۷
۴	۵	۳	۶	-۰٫۴۸۶۱۷۲۴۳۵
۳	۴	۲	۲	۰٫۷۲۳۷۴۶۸۶۴
۳	۴	۲	۴	-۰٫۶۹۰۰۶۵۵۵۹
۳	۳	۲	۲	-۰٫۸۴۵۱۵۴۲۵۵
۳	۳	۲	۴	-۰٫۵۳۴۵۲۲۴۸۴
۲	۲	۱	۲	-۱
۰	۰	۱	۲	۱
۱	۲	۲	۴	۰٫۸۰۱۷۸۳۷۲۶
۱	۲	۲	۲	-۰٫۵۹۷۶۱۴۳۰۵
۱	۲	۰	۰	۱

جدول ۱۵. ۴: نسبت‌های انرژی ایزوتوپ‌های $^{187}, ^{189}, ^{191}, ^{193}, ^{195}\text{Ir}$ که توسط مدل بحث‌شده در این قسمت برازش شده است.

States					^{187}Ir		^{189}Ir		^{191}Ir		^{193}Ir		^{195}Ir	
<i>M</i>	<i>n</i>	τ	τ_1	<i>J</i>	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.
۱	۰	۰	۱/۲	۳/۲	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰
۱	۰	۱	۳/۲	۱/۲	۰٫۲۴۲	۰٫۳۷۳	۰٫۳۷۳	۰٫۳۱۴	۰٫۲۹۷	۰٫۲۴۰	۰٫۲۵۷	۰٫۲۰۴	۰٫۲۰۲	۰٫۱۷۶
۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۰٫۶۴۶	۰٫۳۸۶	۰٫۷۰۸	۰٫۳۷۹	۰٫۶۷۲	۰٫۳۷۷	۰٫۶۵۳	۰٫۳۸۸	۰٫۶۲۷	۰٫۴۴۵
۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰
۰	۰	۲	۵/۲	۳/۲	۰٫۸۳۵	۰٫۶۶۵	۱٫۰۱۲	۰٫۵۸۸	۰٫۸۷۵	۰٫۵۲۱	۰٫۸۱۲	۰٫۵۰۳	۰٫۷۷۲	۰٫۷۲۷
۰	۰	۲	۵/۲	۵/۲	۱٫۰۸۷	۱٫۰۹۳	۱٫۲۲۱	۱٫۰۵۷	۱٫۱۰۹	۱٫۰۲۳	۱٫۰۶۰	۱٫۰۱۱	۱٫۰۳۸	۱٫۰۴۶
۰	۰	۲	۵/۲	۷/۲	۱٫۴۴۱	۱٫۶۵۳	۱٫۵۱۳	۱٫۵۴۷	۱٫۴۳۷	۱٫۴۶۹	۱٫۴۰۶	۱٫۴۴۳	۱٫۴۱۰	—
۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۱٫۸۹۵	۱٫۵۵۴	۱٫۸۸۹	۱٫۵۱۱	۱٫۸۵۹	۱٫۴۶۴	۱٫۸۵۲	۱٫۴۵۹	۱٫۸۸۹	—
۰	۰	۲	۵/۲	۱۱/۲	۲٫۴۵۱	۲٫۵۱۵	۲٫۳۴۹	۲٫۴۸۲	۲٫۳۷۵	۲٫۴۲۴	۲٫۳۹۶	۲٫۳۹۶	۲٫۴۷۵	—
۰	۰	۳	۷/۲	۵/۲	۱٫۴۹۱	—	۱٫۷۲۲	۲٫۱۴۴	۱٫۵۴۶	۱٫۷۱۳	۱٫۴۶۶	۱٫۵۶۳	۱٫۴۱۰	۱٫۴۷۷
۰	۰	۳	۷/۲	۷/۲	۱٫۸۴۵	—	۲٫۰۱۵	۲٫۵۰۶	۱٫۸۷۵	۱٫۹۹۹	۱٫۸۱۲	۱٫۷۳۶	۱٫۷۸۲	—
۰	۰	۳	۷/۲	۹/۲	۲٫۲۹۹	—	۲٫۳۹۱	—	۲٫۲۹۷	۲٫۳۶۵	۲٫۲۵۸	۲٫۳۴۵	۲٫۲۶۱	—
۰	۰	۳	۷/۲	۹/۲	۲٫۲۹۹	۲٫۴۱۵	۲٫۳۹۱	۲٫۳۹۳	۲٫۲۹۷	۲٫۴۰۴	۲٫۲۵۸	۲٫۴۹۴	۲٫۲۶۱	—
۰	۰	۳	۷/۲	۱۱/۲	۲٫۸۵۵	۳٫۱۴۸	۲٫۸۵۱	۲٫۹۹۳	۲٫۸۱۳	۲٫۸۸۸	۲٫۸۰۲	۲٫۸۲۱	۲٫۸۴۷	—
۰	۰	۳	۷/۲	۱۳/۲	۳٫۵۱۲	۳٫۱۶۸	۳٫۳۹۴	۳٫۰۵۶	۳٫۴۲۲	۲٫۹۲۴	۳٫۴۴۶	۲٫۸۹۵	۳٫۵۳۹	—
۰	۰	۳	۷/۲	۱۵/۲	۴٫۲۷۰	۴٫۴۳۵	۴٫۰۲۰	۴٫۳۱۴	۴٫۱۲۶	۴٫۱۳۲	۴٫۱۸۸	۴٫۰۸۱	۴٫۳۳۷	—
۱	۰	۱	۱/۲	۳/۲	۳٫۰۷۰	—	۱٫۷۷۳	۲٫۱۴۴	۱٫۲۲۲	۱٫۷۱۳	۱٫۱۱۸	۱٫۲۸۸	۰٫۶۳۲	۰٫۵۹۳
۰	۰	۲	۳/۲	۱/۲	۴٫۴۲۹	۴٫۴۰۵	۲٫۶۷۱	۲٫۵۰۶	۱٫۸۳۳	۱٫۸۱۸	۱٫۶۶۰	۱٫۵۵۸	۰٫۹۹۱	۱٫۰۸۸
۰	۰	۲	۳/۲	۵/۲	۴٫۸۳۳	—	۳٫۰۰۵	۲٫۸۲۹	۲٫۲۰۸	۲٫۱۷۹	۲٫۰۵۶	۱٫۹۴۳	۱٫۴۱۷	۱٫۲۶۸
۰	۰	۲	۳/۲	۷/۲	۵٫۱۸۷	—	۳٫۲۹۸	—	۲٫۵۳۶	۲٫۴۰۴	۲٫۴۰۳	—	۱٫۷۸۹	—
۰	۰	۳	۵/۲	۳/۲	۶٫۰۵۵	—	۳٫۸۰۸	—	۲٫۷۲۵	—	۲٫۴۹۹	—	۱٫۶۳۱	—
۰	۰	۳	۵/۲	۵/۲	۶٫۳۰۸	—	۴٫۰۱۷	—	۲٫۹۵۹	—	۲٫۷۴۷	—	۱٫۸۹۷	۱٫۹۳۰
۰	۰	۳	۵/۲	۷/۲	۶٫۶۶۱	—	۴٫۳۰۹	—	۳٫۲۸۷	—	۳٫۰۹۳	—	۲٫۲۶۹	—
۰	۰	۳	۵/۲	۹/۲	۷٫۱۱۶	—	۴٫۶۸۵	—	۳٫۷۰۹	۳٫۵۱۵	۳٫۵۳۹	—	۲٫۷۴۸	—
۰	۰	۳	۵/۲	۱۱/۲	۷٫۶۷۲	—	۵٫۱۴۵	—	۴٫۲۲۵	—	۴٫۰۸۳	—	۳٫۳۳۴	—
<i>a</i>					۰٫۵۰		۲٫۲۰		۰٫۰۱		۰٫۰۱		۳٫۶۸	
<i>b</i>					۹٫۳۹		۳۲٫۰۶		۲۶٫۱۰		۲۱٫۳۸		۱۶٫۵۳	
<i>k</i>					-۱۰٫۷۰		-۲۱٫۶۰		-۱۳٫۷۹		-۱۱٫۱۰		-۴٫۲۰	
<i>k'</i>					۱٫۰۱		۳٫۵۴		۴٫۱۲		۳٫۸۶		۴٫۱۳	
χ^2					۰٫۰۵۲		۰٫۰۹۴		۰٫۰۵۸		۰٫۰۵۲		۰٫۰۱۱	

را بیابیم. بنابراین محاسبات مربوط به گذارها را به صورت تابعی از ξ در جدول ۵.۱۵ فهرست کرده‌ایم. در این جدول برای ^{191}Ir مقدار $\xi = ۰٫۱۵$ لحاظ شده است.

در پایان این قسمت به منظور امکان مقایسه میان نتایج تجربی و پیش‌بینی‌های نظری برای گذارهای چهارقطبی برای دو ایزوتوپ $^{191}, ^{193}\text{Ir}$ که اطلاعات برخی از چنین گذارهایی موجود بود، جدول ۶.۱۵ تهیه شده است.

جدول ۱۵. ۵: مجموعه‌ای از گذارهای چهارقطبی منتسب به ایزوتوپ‌های ^{187}Ir , ^{189}Ir , ^{191}Ir , ^{193}Ir , ^{195}Ir می‌باشد که به کمک نتایج حاصل از جدول ۴.۱۵ محاسبه شده است.

M	n	τ	τ_1	J	M'	n'	τ'	τ'_1	J'	$ \Delta\tau $	^{187}Ir	^{189}Ir	^{191}Ir	^{193}Ir	^{195}Ir
۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۰	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۱	۰	۱	۳/۲	۱/۲	۱	۰	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۰	۰	۲	۵/۲	۱۱/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۱,۸۸۹	۱,۹۹۶	۲,۰۰۰	۲,۰۰۰	۱,۸۷۴
۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰,۴۲۶	۰,۴۲۸	۰,۴۲۹	۰,۴۲۹	۰,۴۲۲
۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۱,۵۶۳	۱,۵۶۸	۱,۵۷۱	۱,۵۷۱	۱,۵۵۱
۰	۰	۲	۵/۲	۷/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰,۸۷۴	۰,۸۷۸	۰,۸۸۰	۰,۸۸۰	۰,۸۶۷
۰	۰	۲	۵/۲	۷/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۱,۰۱۵	۱,۰۱۸	۱,۰۲۰	۱,۰۲۰	۱,۰۰۷
۰	۰	۲	۵/۲	۵/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰,۴۹۱	۰,۴۹۳	۰,۴۹۴	۰,۴۹۴	۰,۴۸۷
۰	۰	۲	۵/۲	۵/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۰,۳۰۴	۰,۳۰۵	۰,۳۰۶	۰,۳۰۶	۰,۳۰۲
۰	۰	۲	۵/۲	۵/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۱/۲	۱	۱,۱۹۳	۱,۱۹۷	۱,۲۰۰	۱,۲۰۰	۱,۱۸۴
۰	۰	۲	۵/۲	۳/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰,۲۲۷	۰,۲۲۸	۰,۲۲۹	۰,۲۲۹	۰,۲۲۶
۰	۰	۲	۵/۲	۳/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۱,۰۶۵	۱,۰۶۹	۱,۰۷۱	۱,۰۷۱	۱,۰۵۷
۰	۰	۲	۵/۲	۳/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۱/۲	۱	۰,۶۹۶	۰,۶۹۹	۰,۷۰۰	۰,۷۰۰	۰,۶۹۱
۰	۰	۳	۷/۲	۱۵/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۱۱/۲	۱	۲,۸۳۷	۲,۸۷۵	۳,۰۰۰	۳,۰۰۰	۲,۸۶۵
۰	۰	۳	۷/۲	۱۳/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۱۱/۲	۱	۰,۲۶۷	۰,۲۷۰	۰,۲۷۳	۰,۲۷۳	۰,۲۶۰
۰	۰	۳	۷/۲	۱۳/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۱	۲,۶۷۰	۲,۷۰۵	۲,۸۲۷	۲,۸۲۷	۲,۶۰۵
۰	۰	۳	۷/۲	۱۱/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۱۱/۲	۱	۱,۰۱۳	۱,۰۲۶	۱,۰۳۴	۱,۰۳۴	۰,۹۸۸
۰	۰	۳	۷/۲	۱۱/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۱	۰,۳۸۵	۰,۳۹۰	۰,۳۹۳	۰,۳۹۳	۰,۳۷۵
۰	۰	۳	۷/۲	۱۱/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۷/۲	۱	۱,۵۴۰	۱,۵۶۰	۱,۵۷۳	۱,۵۷۳	۱,۵۰۲
۰	۰	۲	۳/۲	۷/۲	۱	۰	۱	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۳۹۲	۱,۳۹۷	۱,۴۰۰	۱,۴۰۰	۱,۳۸۲
۰	۰	۲	۳/۲	۵/۲	۱	۰	۱	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۳۹۲	۱,۳۹۷	۱,۴۰۰	۱,۴۰۰	۱,۳۸۲
۰	۰	۲	۳/۲	۱/۲	۱	۰	۱	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۳۹۲	۱,۳۹۷	۱,۴۰۰	۱,۴۰۰	۱,۳۸۲
۱	۰	۱	۱/۲	۳/۲	۱	۰	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۱	۱	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۱	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۳۴۹	۱,۳۸۰	۱,۴۰۰	۱,۴۰۰	۱,۲۹۲
۱	۱	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۱	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۳۴۹	۱,۳۸۰	۱,۴۰۰	۱,۴۰۰	۱,۲۹۲
۱	۱	۱	۳/۲	۱/۲	۱	۱	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۱,۳۴۹	۱,۳۸۰	۱,۴۰۰	۱,۴۰۰	۱,۲۹۲
۱	۱	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰,۷۸۴	۰,۷۹۴	۰,۸۰۰	۰,۸۰۰	۰,۷۶۴
۱	۱	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۰,۵۸۸	۰,۵۹۶	۰,۶۰۰	۰,۶۰۰	۰,۵۷۳
۱	۱	۰	۱/۲	۳/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۱/۲	۱	۰,۱۹۶	۰,۱۹۹	۰,۲۰۰	۰,۲۰۰	۰,۱۹۱
۱	۰	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۰	۹,۷۴۱ ξ^T	۳۳,۰۸۲ ξ^T	۰,۶۰۴	۲۱,۹۹۲ ξ^T	۱۷,۲۵۳ ξ^T
۱	۰	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۰	۱	۳/۲	۱/۲	۰	۶,۶۳۰ ξ^T	۲۲,۵۱۴ ξ^T	۰,۴۱۱	۱۴,۹۶۶ ξ^T	۱۱,۸۱۰ ξ^T
۰	۰	۲	۵/۲	۱۱/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۰	۹,۹۴۹ ξ^T	۳۳,۷۸۸ ξ^T	۰,۶۱۷	۲۲,۴۶۱ ξ^T	۱۷,۷۲۳ ξ^T
۰	۰	۲	۵/۲	۹/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۷/۲	۰	۰,۱۰۳ ξ^T	۰,۳۵۰ ξ^T	۰,۰۰۶	۰,۲۳۳ ξ^T	۰,۱۸۴ ξ^T
۰	۰	۲	۵/۲	۷/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۵/۲	۰	۶,۶۴۵ ξ^T	۲۲,۵۶۸ ξ^T	۰,۴۱۲	۱۵,۰۰۲ ξ^T	۱۱,۸۲۸ ξ^T
۰	۰	۲	۵/۲	۵/۲	۰	۰	۲	۵/۲	۳/۲	۰	۱,۸۵۵ ξ^T	۶,۳۰۱ ξ^T	۰,۱۱۵	۴,۱۸۹ ξ^T	۳,۳۰۵ ξ^T
۰	۰	۲	۳/۲	۷/۲	۰	۰	۲	۳/۲	۵/۲	۰	۴,۹۷۰ ξ^T	۱۶,۸۷۹ ξ^T	۰,۳۰۸	۱۱,۲۲۰ ξ^T	۸,۸۵۴ ξ^T
۰	۰	۲	۳/۲	۵/۲	۰	۰	۲	۳/۲	۱/۲	۰	۳,۳۸۲ ξ^T	۱۱,۴۸۷ ξ^T	۰,۲۱۰	۷,۶۳۶ ξ^T	۶,۰۲۵ ξ^T
۰	۰	۳	۵/۲	۱۱/۲	۰	۰	۳	۵/۲	۹/۲	۰	۶,۰۱۹ ξ^T	۲۰,۴۴۰ ξ^T	۰,۳۷۳	۱۳,۵۸۷ ξ^T	۱۰,۷۲۱ ξ^T
۰	۰	۳	۵/۲	۹/۲	۰	۰	۳	۵/۲	۷/۲	۰	۰,۰۶۲ ξ^T	۰,۲۱۲ ξ^T	۰,۰۰۴	۰,۱۴۱ ξ^T	۰,۱۱۱ ξ^T
۰	۰	۳	۵/۲	۷/۲	۰	۰	۳	۵/۲	۵/۲	۰	۴,۰۲۰ ξ^T	۱۳,۶۵۲ ξ^T	۰,۲۴۹	۹,۰۷۵ ξ^T	۷,۱۶۱ ξ^T
۰	۰	۳	۵/۲	۵/۲	۰	۰	۳	۵/۲	۳/۲	۰	۱,۱۲۲ ξ^T	۳,۸۱۲ ξ^T	۰,۰۷۰	۲,۵۲۴ ξ^T	۲,۰۰۰ ξ^T
۱	۱	۱	۳/۲	۷/۲	۱	۱	۱	۳/۲	۵/۲	۰	۹,۷۴۱ ξ^T	۳۳,۰۸۲ ξ^T	۰,۶۰۴	۲۱,۹۹۲ ξ^T	۱۷,۲۵۳ ξ^T
۱	۱	۱	۳/۲	۵/۲	۱	۱	۱	۳/۲	۱/۲	۰	۶,۶۳۰ ξ^T	۲۲,۵۱۴ ξ^T	۰,۴۱۱	۱۴,۹۶۶ ξ^T	۱۱,۸۱۰ ξ^T

جدول ۶.۱۵: مقایسه‌ای برای گذارهای چهارقطبی $^{191,193}\text{Ir}$ که به صورت نظری توسط نتایج بدست‌آمده پیش‌بینی شده و مقادیر مشاهده‌شده به صورت تجربی.

Initial state (M, n, τ, τ_1, J)	Final state ($M', n', \tau', \tau'_1, J'$)	^{191}Ir		^{193}Ir	
		Exp.	Theo.	Exp.	Theo.
($1, 0, 1, 3/2, 7/2$)	($1, 0, 0, 1/2, 3/2$)	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
($1, 0, 1, 3/2, 5/2$)	($1, 0, 0, 1/2, 3/2$)	۲۲۹۶	۱۰۰۰	۲۶۰۱	۱۰۰۰
($1, 0, 1, 3/2, 1/2$)	($1, 0, 0, 1/2, 3/2$)	۰۴۹۹	۱۰۰۰	۰۷۰۰	۱۰۰۰
($0, 0, 2, 5/2, 11/2$)	($1, 0, 1, 3/2, 7/2$)	—	۲۰۰۰	۱۷۶۵	۲۰۰۰
($0, 0, 2, 5/2, 9/2$)	($1, 0, 1, 3/2, 5/2$)	۱۷۱۸	۱۵۷۱	—	۱۵۷۱
($0, 0, 2, 5/2, 3/2$)	($1, 0, 1, 3/2, 5/2$)	۰۶۴۴	۱۰۷۱	۱۸۸۹	۱۰۷۱
($0, 0, 2, 5/2, 3/2$)	($1, 0, 1, 3/2, 1/2$)	۱۳۸۴	۰۷۰۰	۱۷۰۳	۰۷۰۰
($1, 0, 1, 3/2, 5/2$)	($1, 0, 1, 3/2, 1/2$)	۰۲۴۸	۰۴۱۱	—	۱۴۹۶۶ ξ^2
($1, 0, 1, 3/2, 7/2$)	($1, 0, 1, 3/2, 5/2$)	۰۷۱۱	۰۶۰۴	—	۲۱۹۹۲ ξ^2

فصل ۱۶

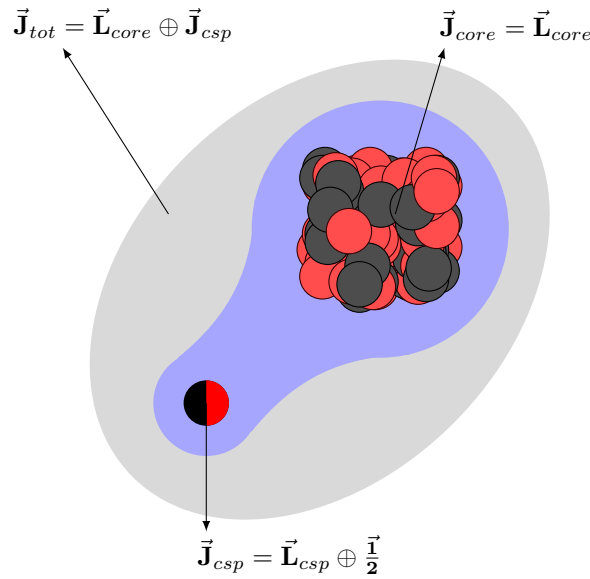
ذره مستقل کنترل شده

در قسمت قبل دیدیم که چگونه محاسبات منتسب به بررسی هسته‌های A فرد می‌تواند دچار پیچیدگی شود. ضمن آنکه ما در قسمت قبل از یک ساختار محاسبه‌شده برای یک مقدار مشخص از J ، برای ذره مستقل استفاده کردیم. اما اگر این مقدار برای ذره تغییر کند محاسبات و نتایج دستخوش تغییر خواهد شد که پیچیدگی آن‌ها غیرقابل انکار می‌باشد. در اینجا می‌خواهیم مفهومی را معرفی کنیم که به ساده‌سازی مسئله کمک می‌کند.

در قسمت قبل دیدیم که بررسی هسته‌های فرد از چه پیچیدگی قابل توجهی برخوردار هستند. به عنوان مثال نوع تبهگنی‌هایی که در محاسبات مربوط به ترازها بدست می‌آید تشخیص تراز متناظر با آن را در اطلاعات تجربی به سختی قابل توجهی روبرو می‌کرد و یا اینکه محاسبات گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ از چه دشواری‌هایی برخوردار بود. تمام این مطال فارغ از این مطلب است که ذره مستقل دارای چه تکانه زاویه‌ای باشد و یا اینکه تغییرات پارامتر در ترازهای مورد بررسی رخ ندهد.

برای سهولت در بررسی هسته‌های فرد می‌خواهیم مفهوم ذره مستقل کنترل‌شده را وارد این مسائل کنیم. یکی از مفاهیم شناخته‌شده در فیزیک هسته‌ای مفهوم ذره مستقل است. در این مفهوم هسته فرد فرض می‌شود که از یک مغز هسته‌ای زوج و یک ذره منفرد تشکیل شده باشد و ذره دارای استقلال از آن مغز هسته‌ای باشد. اما این مفهوم اگر چه که موفقیت‌های قابل توجهی دارد اما در بحث توجیح تغییر پارامتر میان نوارهای مختلف برانگیختگی دچار نارسایی می‌شود. مفهوم ذره مستقل کنترل‌شده این امکان را فراهم می‌کند که اولاً ترازهای نوار به نوار بتوان بررسی کرد. دوماً این که تغییر پارامتر را هم می‌توان به قابلیت‌های این مفهوم اضافه کرد و در نهایت امکان ساده‌تری را برای محاسبه گذارهای چهارقطبی $B(E2)$ فراهم سازد.

در این مفهوم هسته فرد فرض می‌شود که متشکل از یک مغز هسته‌ای زوج و یک ذره منفرد تشکیل شده باشد. اما



شکل ۱.۱۶: شمای کلی از مفهوم مدل ذره مستقل کنترل شده.

این ذره اگر چه منفرد است اما تحت کنترل آن مغز هسته‌ای می‌باشد. یعنی آن مغز هسته‌ای این ذره را مجبور به تجربه کردن حالت‌های برانگیخته متفاوتی کند. این ترازهای برانگیخته برای ذره را می‌توان با توجه به اطلاعات آزمایشگاهی تعیین کرد. در شکل ۱.۱۶ نمایی از این ایده را به تصویر می‌کشد. در این مدل هامیلتونی کل سیستم به صورت

$$H_{tot} = H_{core} + H_{int}, \quad (۱.۱۶)$$

که در آن

$$H_{core} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (۲.۱۶)$$

که در آن از پارامترهای مرسوم رفتار جمعی استفاده شده است. همچنین فرض می‌شود که یک برهمکنشی میان ذره کنترل شده و مغز هسته‌ای به صورت

$$H_{int} = \frac{\hbar^2 f_0}{B\beta^2} \mathbf{L}_{core} \cdot \mathbf{J}_{csp}, \quad (۳.۱۶)$$

برقرار باشد که در آن f_0 یک پارامتر آزاد می‌باشد. در این روابط اطلاعات مربوط به مغز هسته‌ای و ذره مستقل کنترل شده به ترتیب با زیروندهای core و CSP نمایش داده شده است. بدیهی است که اثر قسمت دوم بر روی ویژه‌تابع‌های خود (مثلاً $|\psi\rangle$) به صورت

$$\mathbf{L}_{core} \cdot \mathbf{J}_{csp} |\psi\rangle = \frac{1}{\beta} (J_{tot}(J_{tot} + 1) - L_{core}(L_{core} + 1) - J_{csp}(J_{csp} + 1)) |\psi\rangle, \quad (۴.۱۶)$$

می‌باشد. در اینجا می‌خواهیم یک شکل ساده‌ای از این محاسبات را در نظر بگیریم. بنابراین با انتخاب یک برهمکنشی به صورت یک چاه پتانسیل

$$u(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{for } \beta \leq \beta_w \\ \infty & \text{for } \beta > \beta_w \end{cases} \quad (۵.۱۶)$$

می‌خواهیم در واقع مدل $X(5)$ را برای این مدل در نظر بگیریم. همانند مدل $X(5)$ که انرژی سیستم بر حسب صفرهای توابع بسل می‌آید زیرا دقیقاً معادله دیفرانسیلی که از این کار بدست می‌آید دقیقاً همان معادله دیفرانسیل بسل می‌باشد. بنابراین ویژه توابع و ویژه مقادیر عبارتند از

$$\xi_{s,J,L,j}(\beta) = N_c \beta^{-\frac{2}{3}} J_\nu \left(\frac{x_{s,J,L,j}}{\beta_w} \beta \right), \quad (۶.۱۶)$$

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - f\right) L_{core}(L_{core} + 1) + fJ(J + 1) - fj_{csp}(j_{csp} + 1)}, \quad (۷.۱۶)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{x_{s,J,L,j}}{\beta_w} \right)^2, \quad (۸.۱۶)$$

که در آن صفرهای توابع بسل با $x_{s,J,L,j}$ نمایش داده شده‌اند.

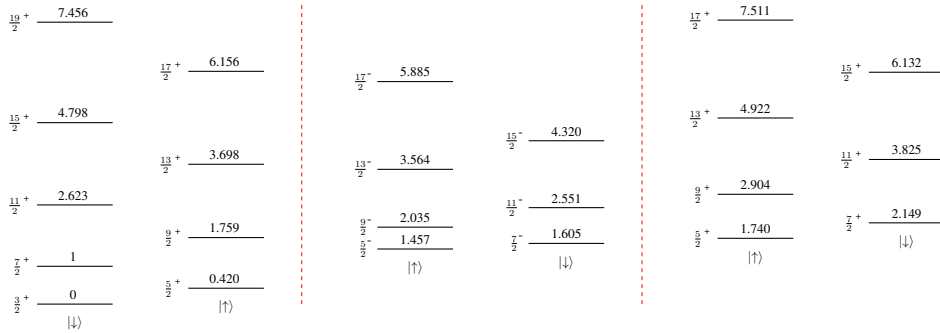
۱۰.۱۶ مبحثی در باب بازتولید اطلاعات آزمایشگاهی

در این قسمت بایستی اطلاعات آزمایشگاهی منتسب به یک ایزوتوپ را بازتولید کنیم. ایزوتویی را که برای این قسمت در نظر گرفتیم ^{155}Tb می‌باشد. اطلاعات تجربی این ایزوتوپ در شکل ۲.۱۶ به تصویر کشیده شده است. در این شکل برخی از حالت‌های برانگیخته منتسب به این ایزوتوپ که دارای پارته‌های مختلف هستند، وجود دارد. مقادیر تجربی به صورت نسبت‌های

$$R = \frac{E(s, J_{tot}, L_{core}, J_{csp}) - E(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})}{E(0, \frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}) - E(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})}, \quad (۱۰.۱۶)$$

می‌باشد. در این مدل حالت‌های برانگیخته به کمک مغز هسته‌ای زوج و ذره مستقل کنترل شده با هم تعیین می‌شوند. به همین دلیل این نوارهای را قرار است که بر همین اساس نام‌گذاری کنیم. در شکل ۲.۱۶ اولین نوار از سمت چپ نوار شبه پایه نام دارد. علت این نام‌گذاری این است که قرار است برای ترازهای برانگیخته این نوار از الگوی رفتاری نوار حالت پایه هسته‌های زوج استفاده شود. در این الگوی رفتاری پایین‌ترین تراز دارای تکانه زاویه‌ای 0^+ می‌باشد. بنابراین اگر برای ذره $L_{CSP} = 2$ در نظر گرفته شود و جهت‌گیری اسپین همانند شکل ۲.۱۶ فرض گردد، می‌توان به جمع‌های این مقادیر به مقادیر تجربی این تکانه‌ها دست یافت. به همین ترتیب می‌توان تمامی حالت‌های برانگیخته این نوار را بازتولید کرد. توجه شود که پارته کل حالت‌های از حاصل ضرب پارته مغز هسته‌ای و ذره مستقل کنترل شده بدست می‌آید برای مورد اول به دلیل اینکه فرض می‌شود دچار یک تغییر شکل چهارقطبی شده است، این مقدار همواره مثبت است و برای آن ذره به صورت $(-1)^{L_{CSP}}$ می‌باشد. بنابراین پارته‌ای که به صورت نظری برای این نوار تایید می‌گردد، مثبت می‌باشد.

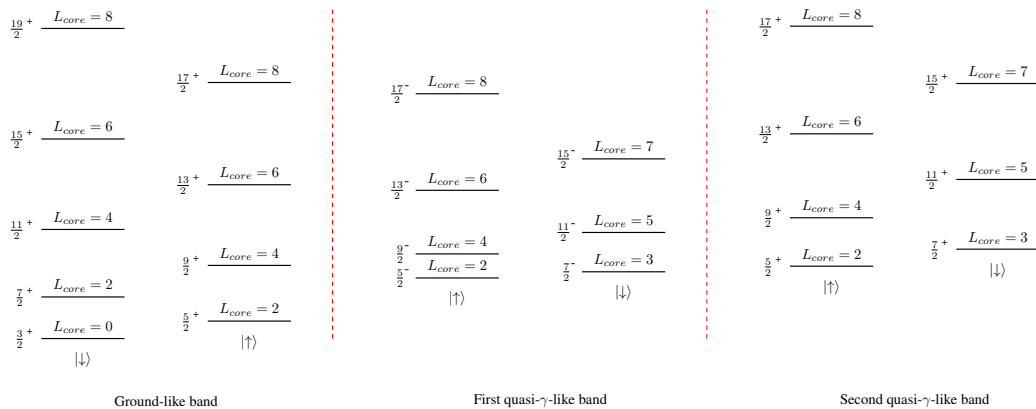
^{155}Tb



شکل ۲.۱۶: برخی از حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ ^{155}Tb که متعلق به نوارهای برانگیختگی متفاوت هستند. این مقادیر به اولین حالت $5/2^+$ بهنجار شده‌اند.

برای نوار دوم بایستی فرض کرد که آن مغز هسته‌ای دچار یک برانگیختگی شده است، مثلاً برای این مورد بایستی از الگوی رفتاری نوار گاما استفاده کرد. جهت‌گیری اسپینی برای این نوارهای در شکل ۲.۱۶ نشان داده شده است. بنابراین برای تعیین مقدار تکانه زاویه‌ای آن ذره نیاز به یک مقدار فرد داریم تا پارامتر منفی لازم برای این مورد را تعیین کنید. مناسب‌ترین مقدار برای این نوار برانگیختگی $L_{CSP} = 1$ می‌باشد. در این نوار به دلیل اینکه از الگو رفتاری نوار گاما استفاده شده است، آن را اولین نوار گاما مانند می‌نامیم.

در نهایت برای سومین نوار برانگیختگی هم می‌توان برای مغز هسته‌ای از الگوی رفتاری تکانه زاویه‌ای برای نوار گاما استفاده کرد و هم از نوار گاما ضمن آنکه برای تامین پارامتر مناسب از $L_{CSP} = 2$ استفاده خواهد شد. در فرآیند انجام محاسبات عددی بدست آوریم که استفاده از نوار گاما نتیجه بهتری را به ارمغان می‌آورد. بنابراین این نوار برانگیختگی را دومین نوار گاما مانند می‌نامیم. در نهایت نتیجه این بحث را می‌توان در شکل ۳.۱۶ مشاهده کرد که خلاصه‌ای از چگونگی روند مقادیر تکانه زاویه‌ای برای مغز هسته‌ای هسته فرد به تفکیک نوارهای برانگیختگی می‌باشد.



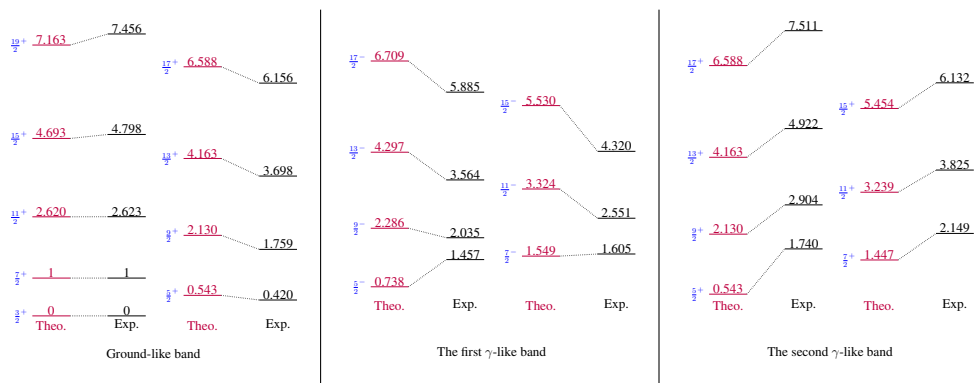
Ground-like band

First quasi- γ -like band

Second quasi- γ -like band

شکل ۳.۱۶: تکانه‌های زاویه‌ای مناسب برای مغز هسته‌ای هسته فرد برای ایزوتوپ ^{155}Tb .

حال پس از تعیین تکانه زاویه‌ای‌های مناسب می‌توان اقدام به انجام محاسبات عددی کرد با انتخاب مقدار $f = 0.11$ می‌توان به بهترین نتیجه برازش با انحراف معیار $\sigma = 0.649$ دست یافت. حاصل فرآیند برازش در شکل



شکل ۴.۱۶: مقایسه‌ای میان پیش‌بینی‌های نظری و اطلاعات تجربی برای ^{155}Tb .

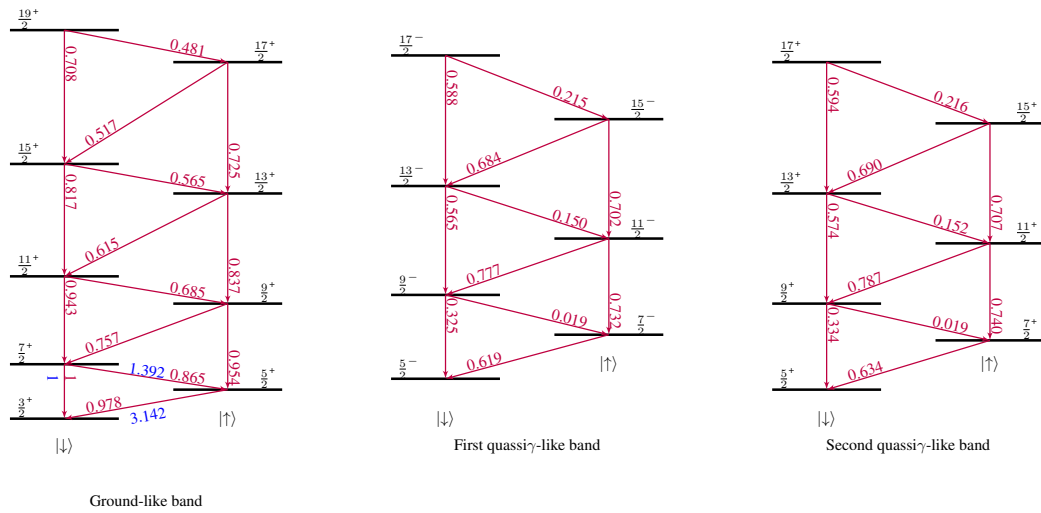
برای محاسبه گذارهای چهارقطبی در این مدل همانند تقریبی که آقای یا کلو انجام داده بود، این گذارهای را صرفاً به هسته انتساب می‌دهیم. اگر بخواهیم فرمولی برای محاسبه این گذارها داشته باشیم به طوری که شامل جهت‌گیری اسپینی هم باشد می‌توان از

$$B(E\gamma; i \rightarrow f) = I(i \rightarrow f)^2 (J_{tot_i}, \gamma, J_{tot_f} | S_i + K_i, (S_f + K_f) - (S_i + K_i), S_f + K_f)^2, \quad (2.16)$$

استفاده کرد که در آن

$$I(i \rightarrow f) = \int_0^{\beta_w} \xi_i(\beta) \beta \xi_f(\beta) \beta^4 d\beta. \quad (3.16)$$

می‌توان دید که این فرمول تقریبی با حذف عوامل اسپینی به همان فرمول معروف که در قسمت‌های قبل مورد استفاده قرار گرفت کاهش می‌یابد. توجه کنید که به دلیل اینکه قرار است گذارهای درون‌نواری را محاسبه کنیم، انتگرال قسمت γ در این فرمول لحاظ نشده است زیرا دارای مقدار یک می‌باشد. در شکل ۵.۱۶ نتایج محاسبات عددی برای گذارهای چهارقطبی میان‌نواری برای ایزوتوپ مورد نظر رسم شده است. این مقادیر به‌نچارشده به مقدار $B(E\gamma; \frac{7}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+)$ هستند.



شکل ۵.۱۶: پیش‌بینی‌های نظری برای گذار چهارقطبی ^{155}Tb .

۲.۱۶ ذره مستقل کنترل شده برای هسته‌های سه‌محوری

در فصل ۱۶ مفهوم ذره مستقل کنترل شده را توضیح داده و محاسبات تحلیلی و عددی مناسب را برای آن انجام دادیم. در این فصل می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بحث سه‌محوری بودن هسته‌های A فرد را به کمک مفهوم ذره مستقل کنترل شده بررسی کرد. در اینجا می‌خواهیم قدری بیشتر از مباحث ریاضی این مفهوم استفاده کنیم. همان‌طور که در فصل‌های گذشته دیده شد برای بررسی هسته‌های سه‌محوری می‌توان از هامیلتونی بوهر استفاده کرد در حالیکه در این فرآیند از تقریب مشخصی استفاده می‌شود. به عبارت دیگر برای بهره‌گیری از هامیلتونی بوهر برای هسته‌های سه‌محوری فرض می‌کنیم که هسته در محتمل‌ترین وضع سه‌محوری که متناظر با $\gamma = 30^\circ$ و یا نزدیک به این حالت قرار گرفته باشد با این فرض می‌توان از بسط جمله دورانی پیرامون از مقدار استفاده کرد. حال اگر در مدل ذره مستقل کنترل شده از این نوع هامیلتونی استفاده می‌شود می‌توان به بررسی هسته‌های سه‌محوری اقدام کرد. با در نظر گرفتن همان شکل برهمکنش میان ذره مستقل کنترل شده و مغز هسته‌ای زوج و با یادآوری تقریب

$$\sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \approx Q_1^2 + 4(Q_2^2 + Q_3^2) = 4(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) - 3Q_1^2, \quad (1.16)$$

و چنین شکل پتانسیل و انرژی کاهیده در مدل $Z(5)$ به دسته معادلات زیر می‌رسیم

$$\left(-\frac{1}{\beta^4} \frac{d}{d\beta} \beta^4 \frac{d}{d\beta} + \frac{W_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}}{\beta^2} + u_1(\beta) - \varepsilon_\beta \right) \xi(\beta) = 0, \quad (2.16)$$

$$\left(-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin(3\gamma)} \frac{d}{d\gamma} \sin(3\gamma) \frac{d}{d\gamma} + u_2(\gamma) - \varepsilon_\gamma \right) \Gamma(\gamma) = 0, \quad (3.16)$$

$$W_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha} = L_{core}(L_{core} + 1) - \frac{3}{4}\alpha^2 + 2f_0 \mathbf{L}_{core} \cdot \mathbf{J}_{CSP} \quad (4.16)$$

در اینجا نیز می‌خواهیم از خود مدل $Z(5)$ برای محاسبات استفاده کنیم. لذا با فرض یک چاه پتانسیل نامحدود برای قسمت β و با در نظر گرفتن $\tilde{\xi}(\beta) = \beta^{3/2} \xi(\beta)$ و متغیر جدید $z = \beta \sqrt{\varepsilon_\beta}$ داریم

$$\frac{d^2 \tilde{\xi}(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\tilde{\xi}(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}}{z^2} \right) \tilde{\xi}(z) = 0, \quad (5.16)$$

که در آن

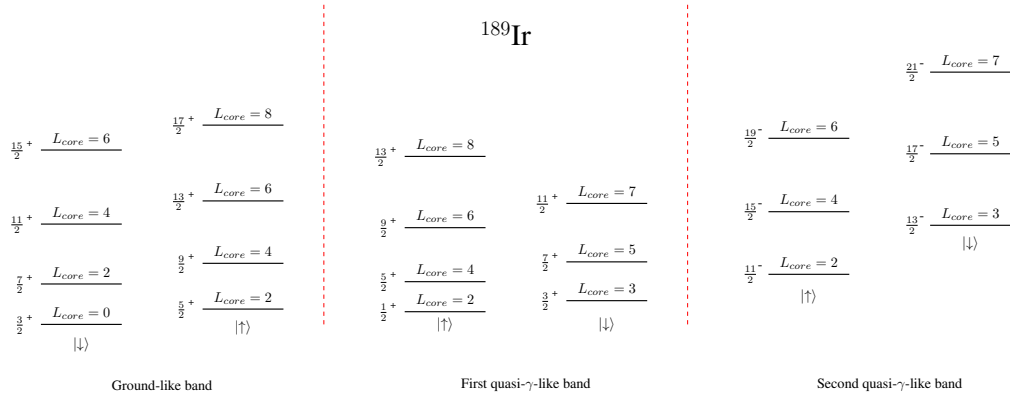
$$\nu_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha} = \sqrt{W_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha} + \frac{9}{4}}. \quad (6.16)$$

این معادله دیفرانسیل، معادله دیفرانسیل بسل می‌باشد. بنابراین ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر آن عبارت است از

$$\xi_{s, J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}(\beta) = N_\beta \beta^{3/2} J_{\nu_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}} \left(\frac{x_{s, \nu_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}}}{\beta_w} \beta \right) \quad (7.16)$$

$$\varepsilon_{\beta; \nu_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}} = \left(\frac{x_{s, \nu_{J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}}}{\beta_w} \right)^2 \quad (8.16)$$

که در آن N_β ثابت بهنجارش می‌باشد.



شکل ۱۶.۶: تکانه‌های زاویه‌ای منتسب به مغز هسته‌ای ^{189}Ir در مدل ذره مستقل کنترل شده.

برای قسمت γ تابع موج همانند فصل ۱۴ نوسانگر هماهنگی فرض می‌شود که در $\gamma = 30^\circ$ دارای کمینه باشد. این فرض منجر به ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر زیر برای این قسمت می‌شود

$$\Gamma_{n\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = N_\gamma H_{n\tilde{\gamma}}(b\tilde{\gamma}) \exp\left(-\frac{b\tilde{\gamma}^2}{2}\right), \quad (9.16)$$

$$b = \left(\frac{c\langle\beta^2\rangle}{2}\right)^{1/4}. \quad (10.16)$$

بنابراین شکل کلی انرژی برای این قسمت عبارتست از

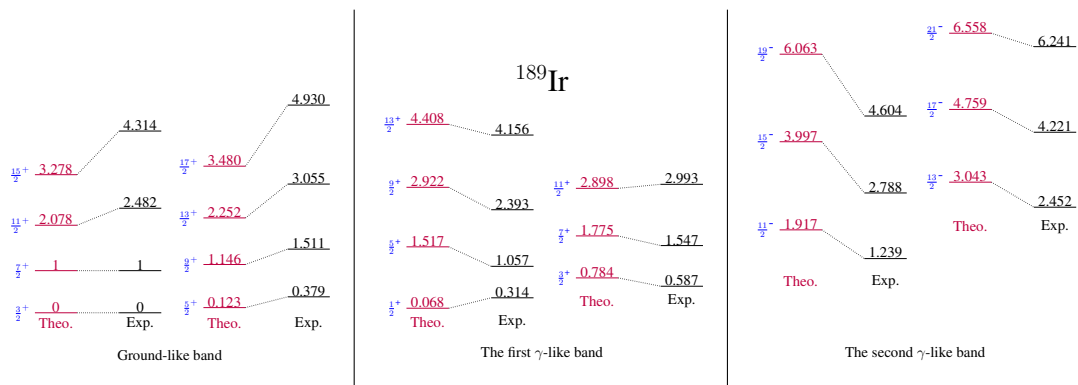
$$E(s, n\tilde{\gamma}, J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha) = E_0 + A \left(x_{s, \nu, J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha}\right)^2 + Bn\tilde{\gamma}. \quad (11.16)$$

۱۰.۲.۱۶ بازتولید اطلاعات تجربی

در این قسمت قصد داریم که اطلاعات تجربی منتسب به ایزوتوپ فرد ^{189}Ir را به کمک مفهوم ذره مستقل کنترل شده بازتولید کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد برای استفاده از این مدل در ابتدا بایستی تکانه‌های مناسب را برای حالت‌های مختلف برانگیختگی به کمک مغز هسته‌ای و ذره مستقل کنترل شده تشکیل داد. این ایزوتوپ دارای حالت پایه $\frac{3}{2}^+$ است. این حالت را می‌توان با در نظر گرفتن الگوی تکانه زاویه‌ای حالت پایه برای مغز هسته‌ای و جهت‌گیری رو به پایین به همراه $L_{CSP} = 2$ بدست آورد. این انتخاب با پارامتر اولیه مجموعه از نوار برانگیخته را دارد. بیان این نکته بدیهی است که در اطلاعات تجربی از حالت‌های برانگیخته هسته‌های فرد اغلب نوارهای از دو قسمت تشکیل شده‌اند که بیان‌گر جهت‌گیری‌های متفاوت اسپینی هستند. نوارهای برانگیختگی دیگر را هم همانند قبل با استفاده از الگوی رفتار تکانه زاویه‌ای در نوار گاما تشکیل داد. اما در اولین نوار شبه‌گاما بایستی $L_{CSP} = 2$ را برای ذره مستقل کنترل شده فرض کرد در حالیکه برای دومین نوار شبه‌گاما بایستی $L_{CSP} = 3$ برای آن ذره فرض شود تا تکانه‌ها و پارامترهای مناسب برای حالت‌های برانگیخته فراهم شود. خلاصه این مطالب را می‌توان به‌صورت گویایی در شکل دید که تکانه‌های زاویه‌ای منتسب به مغز هسته‌ای را به تفکیک ترازها و نوارها بیان کرده است.

برای بازتولید اطلاعات مربوط به نسبت‌های انرژی بایستی از رابطه

$$R = \frac{E(s, n\tilde{\gamma}, J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha) - E\left(1, 0, \frac{3}{2}, 0, \left(2 - \frac{1}{2}\right), 0\right)}{E\left(1, 0, \frac{5}{2}, 2, \left(2 - \frac{1}{2}\right), 0\right) - E\left(1, 0, \frac{3}{2}, 0, \left(2 - \frac{1}{2}\right), 0\right)}, \quad (12.16)$$



شکل ۷.۱۶: مقایسه میان پیش‌بینی‌های نظری و مقادیر مشاهده‌شده تجربی برای ایزوتوپ ^{189}Ir به کمک مفهوم ذره مستقل کنترل شده.

برای این اطلاعات استفاده کرد تا بتوان اطلاعات مربوطه را بازتولید. در فرآیند برازش مقدار مناسبی که برای پارامتر آزاد در این مدل بدست آمد $f = 0.407$ است که منجر به $\sigma = 0.696$ می‌شود. جزئیات نتایج بدست آمده در تصویر ۷.۱۶ به تفکیک نوارهای مختلف به تصویر کشیده شده است.

برای محاسبات مربوط به گذارهای چهارقطبی نیز همان فرض قبلی را در نظر می‌گیریم که این گذارهای صرفاً توسط مغز هسته‌ای صورت پذیرد. در واقع اگر بخواهیم روابط را بدست آوریم به کمک تعریف عمگر چهارقطبی

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left(D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right), \quad (13.16)$$

که با فرض $\gamma \approx 30^\circ$ تبدیل می‌شود به

$$T_{\mu}^{(E2)} = \frac{-t\beta}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right), \quad (14.16)$$

و همچنین قضیه ویگنر-اکارت داریم

$$B(E2; L_i^{core} \alpha_i \rightarrow L_f^{core} \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{\left| \langle L_f^{core} \alpha_f | T^{(E2)} | L_i^{core} \alpha_i \rangle \right|^2}{2L_i^{core} + 1} \quad (15.16)$$

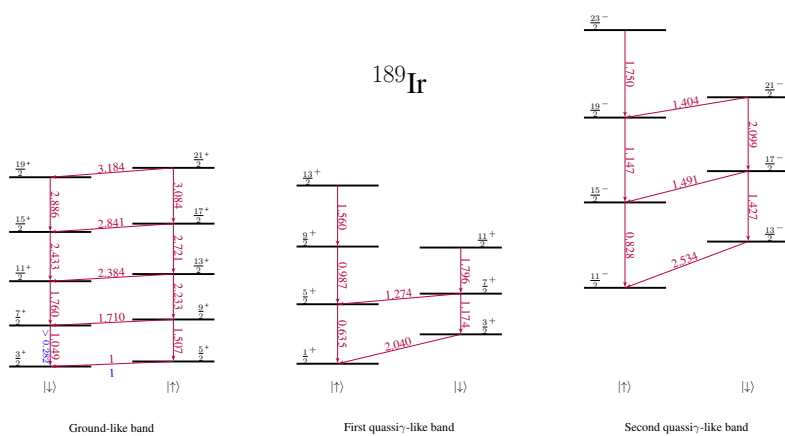
که در آن عنصر ماتریسی کاهش یافته از

$$\langle L_f^{core} \mu_f \alpha_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i^{core} \mu_i \alpha_i \rangle = \frac{\left(L_i^{core} 2 L_f^{core} \middle| \mu_i \mu \mu_f \right)}{\sqrt{2L_f^{core} + 1}} \langle L_f^{core} \alpha_f | T^{(E2)} | L_i^{core} \alpha_i \rangle, \quad (16.16)$$

بدست می‌آید. توجه شود که در این محاسبات تابع موج نهایی حاوی تکانه زاویه‌ای کل می‌باشد. در واقع برای محاسبات عناصر ماتریسی گذار بایستی از انتگرال‌گیری

$$I_{\beta}(i \rightarrow f) = \int_0^{\beta_w} \beta \xi_{S_i, J_{tot,i}, L_{core,i}, J_{CSP,i}, \alpha_i}(\beta) \xi_{S_f, J_{tot,f}, L_{core,f}, J_{CSP,f}, \alpha_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (17.16)$$

استفاده شود. در تصویر ۸.۱۶ نتایج محاسبات نظری برای این ایزوتوپ به کمک مفهوم ذره مستقل کنترل شده به تفکیک نوارهای برانگیختگی به تصویر کشیده شده است.



شکل ۱۶. ۸: محاسبات نظری گذارهای چهارقطبی ایزوتوپ ^{189}Ir به کمک مفهوم ذره مستقل کنترل شده.

۳.۱۶ مطالعه‌ای بیشتر بر هسته‌های سه‌محوری به کمک ذره مستقل

کنترل‌شده

در قسمت فرض شد که برای پارامترهای زفتار جمعی میانگین مقدار γ پیرامون 30° باشد و با این فرض اقدام به بسط جمله دورانی در هامیلتونی بوهر کردیم و به نتایجی دست یافتیم. اما می‌توان این فرض را یک قدم محکم‌تر کرد که دقیقاً این پارامتر دارای مقدار $\gamma = 30^\circ$ باشد. با این فرض یکی از درجات آزادی کاهش می‌یابد و پیش‌بینی‌های نظری متفاوت خواهد شد.

پس در این شرایط می‌توان هامیلتونی کل را برای یک هسته فرد به صورت $H = H_{core} + H_{int}$ می‌باشد که در

آن

$$H_{int} = \frac{\hbar^2 f_0}{B \beta^2} \mathbf{L}_{core} \cdot \mathbf{J}_{csp}, \quad (1.16)$$

$$H_{core} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta). \quad (2.16)$$

در این وضعیت پس از جداسازی تابع موج به دسته‌معادلات زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\lambda + \mathbf{L}_{core} \cdot \mathbf{J}_{CSP}}{\beta^2} + (\epsilon - v(\beta)) \right] \phi(\beta) = 0, \quad (3.16)$$

$$\left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} - \lambda \right] \psi_{\mu, \alpha}^{L_{core}}(\theta_i) = 0, \quad (4.16)$$

که در آن λ

$$\lambda = L_{core}(L_{core} + 1) - \frac{3}{4}\alpha^2. \quad (5.16)$$

قسمت فضایی دارای ویژه‌توابع

$$\psi_{\mu, \alpha}^{L_{core}}(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L_{core} + 1}{16\pi^2(1 + \delta_{\alpha, 0})}} \left(\mathcal{D}_{\mu, \alpha}^{L_{core}}(\theta_i) + (-1)^{L_{core}} \mathcal{D}_{\mu, -\alpha}^{L_{core}}(\theta_i) \right). \quad (6.16)$$

می‌باشد و در اینجا نیز همان برهمکنش چاه پتانسیل را ادامه می‌دهیم. بنابراین با فرض $\phi(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta}$ و متغیر جدید

$z = \sqrt{\epsilon} \beta$ به معادله بسط می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] f(z) = 0, \quad (7.16)$$

$$\nu = \sqrt{\lambda + \mathbf{L}_{core} \cdot \mathbf{J}_{CSP} + 1},$$

که مرتبه آن ν می‌باشد. انرژی این سیستم از شرط $f(\beta_w) = 0$ بدست می‌آید که برابرست با

$$\epsilon = \left(\frac{x_{s, \nu}}{\beta_w} \right)^2, \quad (8.16)$$

جدول ۱۰.۱۶: اعداد کوانتومی حالت‌های برانگیخته در نوار شبه‌پایه ^{189}Ir .

s	J_{tot}	L_{core}	L_{csp}	S_{csp}	n_{ω}
۱	$\frac{3}{2}^+$	۰	۲	$-\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{7}{2}^+$	۲	۲	$-\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{11}{2}^+$	۴	۲	$-\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{15}{2}^+$	۶	۲	$-\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{5}{2}^+$	۲	۲	$\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{9}{2}^+$	۴	۲	$\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{13}{2}^+$	۶	۲	$\frac{1}{2}$	۰
۱	$\frac{17}{2}^+$	۸	۲	$\frac{1}{2}$	۰

در آن از s امین صفر بسل مرتبه ν استفاده شده است. بنابراین شکل نهایی انرژی عبارتست از

$$E = \frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w} \right)^2, \quad (9.16)$$

$$\nu = \sqrt{L_{core}(L_{core} + 1) - \frac{1}{2}\alpha^2 + f_s (J_{tot}(J_{tot} + 1) - L_{core}(L_{core} + 1) - J_{CSP}(J_{CSP} + 1))} + 1. \quad (10.16)$$

همچنین شکل نهایی تابع موج نیز به صورت

$$\phi(\beta) = \frac{N_{\beta}}{\beta} J_{\nu} \left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w} \beta \right), \quad (11.16)$$

می‌باشد.

برای محاسبات عددی دوباره همان ایزوتوپ ^{189}Ir را در نظر می‌گیریم که در قسمت قبل کاملاً بررسی شد. در فرآیند برازش نسبت‌های انرژی مقدار عددی بدست‌آمده $f_s = 0.372$ می‌باشد که منجر به پارامتر انحراف از معیار $\sigma = 0.646$ می‌شود. در اینجا قبل از اینکه نتایج عددی را بر حسب محاسبات جدید ارائه دهیم اعداد کوانتومی استفاده‌شده در رابطه نسبت‌های انرژی

$$R = \frac{E(s, J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}, \alpha) - E\left(1, \frac{3}{2}, 0, \left(2 - \frac{1}{2}\right), 0\right)}{E\left(1, \frac{7}{2}, 2, \left(2 - \frac{1}{2}\right), 0\right) - E\left(1, \frac{3}{2}, 0, \left(2 - \frac{1}{2}\right), 0\right)}, \quad (12.16)$$

در جدول‌های ۱۰.۱۶، ۲۰.۱۶، ۳۰.۱۶ بیان شده است. در این جدول از عدد کوانتومی n_{ω} استفاده شده است که در رابطه $\alpha = L - n_{\omega}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

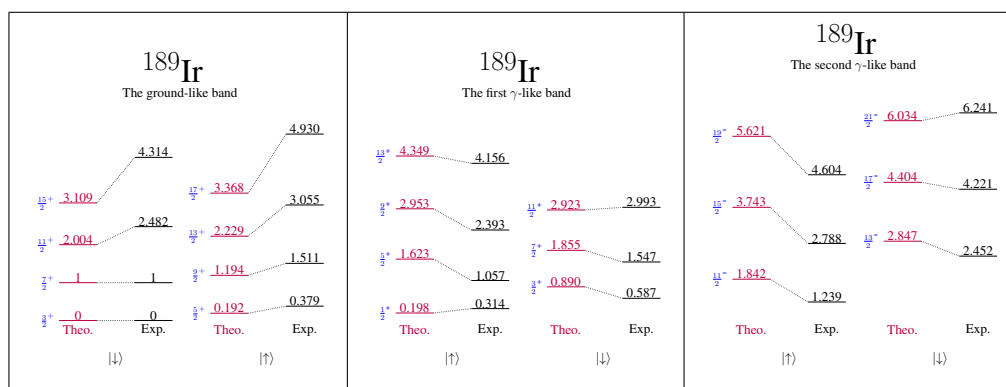
با استفاده از این اطلاعات به راحتی می‌توان نسبت‌های انرژی و گذارهای چهار منتسب به این ایزوتوپ را بازتولید کرد که به ترتیب در شکل‌های ۹.۱۶ و ۱۰.۱۶ به تصویر کشیده شده‌اند.

جدول ۲.۱۶: اعداد کوانتومی اولین نوار شبه‌گاما ^{189}Ir .

s	J_{tot}	L_{core}	L_{csp}	S_{csp}	n_{ω}
۱	$\frac{1}{2}^+$	۲	۲	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{5}{2}^+$	۴	۲	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{9}{2}^+$	۶	۲	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{13}{2}^+$	۸	۲	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{3}{2}^+$	۳	۲	$-\frac{1}{2}$	۱
۱	$\frac{7}{2}^+$	۵	۲	$-\frac{1}{2}$	۱
۱	$\frac{11}{2}^+$	۷	۲	$-\frac{1}{2}$	۱

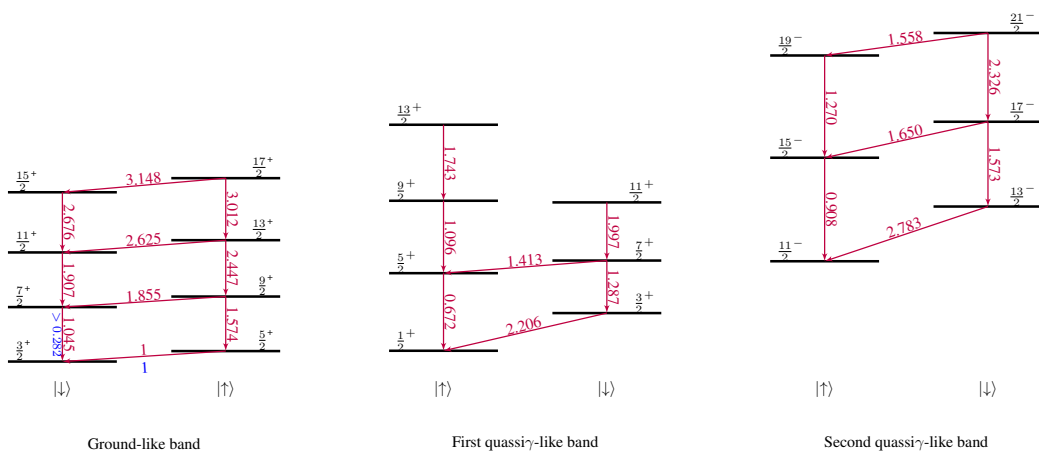
جدول ۳.۱۶: اعداد کوانتومی دومین نوار شبه‌گاما ^{189}Ir .

s	J_{tot}	L_{core}	L_{csp}	S_{csp}	n_{ω}
۱	$\frac{11}{2}^+$	۲	۳	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{15}{2}^+$	۴	۳	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{19}{2}^+$	۶	۳	$\frac{1}{2}$	۲
۱	$\frac{13}{2}^+$	۳	۳	$-\frac{1}{2}$	۱
۱	$\frac{17}{2}^+$	۵	۳	$-\frac{1}{2}$	۱
۱	$\frac{21}{2}^+$	۷	۳	$-\frac{1}{2}$	۱



شکل ۹.۱۶: مقایسه میان پیش‌بینی‌های نظری محاسبه‌شده به کمک مدل ذره مستقل کنترل‌شده با فرض $\gamma = 30^\circ$ و اطلاعات تجربی نسبت‌های انرژی.

^{189}Ir



شکل ۱۰.۱۶: نتایج گذارهای چهارقطبی محاسبه شده توسط مدل ذره مستقل کنترل شده با در نظر گرفتن $\gamma = 30^\circ$.

فصل ۱۷

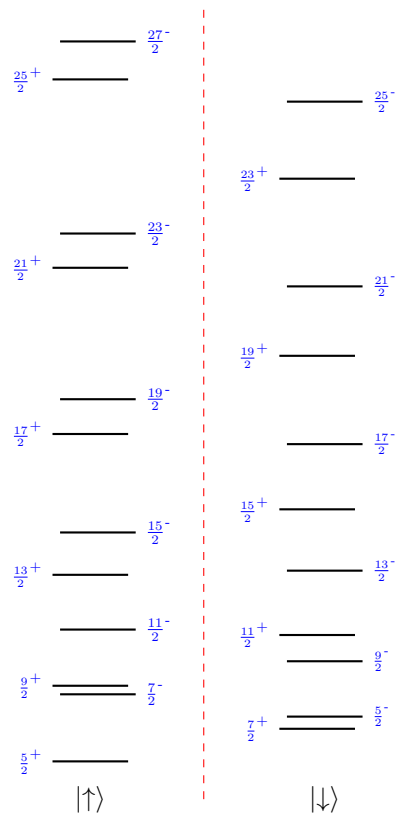
پدیده پارите دوگانه و مدل ذره مستقل کنترل شده

تا اینجا اطلاعات تجربی ای که از هسته‌ها در نظر گرفته می‌شد تماما دارای این ویژگی بودند که در هر نوار مشخص، پارите علامت مشخصی دارد. این علامت در سراسر نوار ثابت می‌ماند و تغییر نمی‌کرد. در برخی از هسته‌های پدیده‌ای رخ می‌دهد که موسوم به پارите دوگانه^۱ می‌باشد. در این پدیده در یک نوار برانگیختگی، پارите تغییر پیدا می‌کند. از جمله معروف‌ترین مثال‌های آن ایزوتوپ ^{151}Pm می‌باشد. برای توضیح این اتفاق اطلاعات تجربی این ایزوتوپ را در تصویر ۱.۱۷ نمایش داده شده است. در این تصویر مشاهده می‌شود که در حالت پایه دو قسمت برای این ایزوتوپ وجود دارد که متعلق به جهت‌گیری‌های متفاوت اسپینی هستند. نکته قابل تامل در این ترازاها تغییر پارите در درون هر یک از این قسمت‌ها می‌باشد. این رفتار به نوبه خود از پیچیدگی خاصی برخوردار است اما می‌توان با استفاده از مدل ذره مستقل کنترل‌شده آن را توجیح کرد.

در موارد قبلی در هر نوار ذره مستقل کنترل‌شده مجبور به پذیرش یک تکانه زاویه‌ای معین می‌شد که بر اساس پایین‌ترین حالت در نوار و علامت پارите این مقدار تعیین می‌شد. اما اگر ما این ساختار پیچیده را تفکیک کنیم می‌بینیم که اگر ذره مستقل کنترل‌شده بتواند در همین نوار دو تکانه زاویه‌ای مختلف که دارای پارите زوج و فرد باشد را بدست آورد می‌توان این رفتار را توجیح کرد. این کار در شکل ۲.۱۷ ترسیم شده است. به وضوح این شکل نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن نوار برانگیختگی شبه‌حالت پایه و در نظر گرفتن دو مقدار $L_{CSP} = 1^-$ و $L_{CSP} = 2^+$ می‌توان این رفتار را توجیح کرد.

¹double parity

151Pm



شکل ۱۰۱۷: ساختار پاریتته دوگانه ^{151}Pm .

^{151}Pm Negative parity states		^{151}Pm Positive parity states	
$\frac{27}{2}^-$ <u>9.520</u>	<u>8.724</u> $\frac{25}{2}^-$	$\frac{25}{2}^+$ <u>9.018</u>	
			<u>7.705</u> $\frac{23}{2}^+$
$\frac{23}{2}^-$ <u>6.980</u>	<u>6.281</u> $\frac{21}{2}^-$	$\frac{21}{2}^+$ <u>6.527</u>	
			<u>5.363</u> $\frac{19}{2}^+$
$\frac{19}{2}^-$ <u>4.789</u>	<u>4.195</u> $\frac{17}{2}^-$	$\frac{17}{2}^+$ <u>4.329</u>	
			<u>3.333</u> $\frac{15}{2}^+$
$\frac{15}{2}^-$ <u>3.027</u>	<u>2.522</u> $\frac{13}{2}^-$	$\frac{13}{2}^+$ <u>2.467</u>	
			<u>1.671</u> $\frac{11}{2}^+$
$\frac{11}{2}^-$ <u>1.743</u>	<u>1.324</u> $\frac{9}{2}^-$	$\frac{9}{2}^+$ <u>1</u>	
	<u>0.592</u> $\frac{5}{2}^-$		<u>0.431</u> $\frac{7}{2}^+$
$\frac{7}{2}^-$ <u>0.887</u>		$\frac{5}{2}^+$ <u>0</u>	
$ \uparrow\rangle$	$ \downarrow\rangle$	$ \uparrow\rangle$	$ \downarrow\rangle$

شکل ۲.۱۷: ساختار پارامیتر دوگانه پس از جداسازی ترازهایی که پارامیتر یکسان دارند.

۱.۱۷ محاسبات تحلیلی مربوط به تابع موج و طیف انرژی

برای توجیح این رفتار همانند فصل‌های مربوط به مفهوم ذره مستقل کنترل شده هامیلتونی کل هسته فرد را تشکیل می‌دهیم. به دلیل شباهت، از بیان کردن جزئیات خودداری می‌کنیم. دقیقاً همان گام‌ها را برای محاسبات برمی‌داریم با این تفاوت که این بار از شکل دقیق جداسازی برای برهمکنش استفاده می‌کنیم. در این موقعیت پتانسیل به صورت

$$v(\beta, \gamma) = \frac{2B}{\hbar^2} V(\beta, \gamma) = u_1(\beta) + \frac{u_2(\gamma)}{\beta^2}, \quad (1.17)$$

می‌باشد. با در نظر گرفتن

$$u_2(\gamma) = (3c)^2 \gamma^2, \quad (2.17)$$

می‌توان به معادله زیر دست یافت

$$\left[\frac{d^2}{d\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} + \left(\varepsilon_\gamma - (3c)^2 \gamma^2 - \frac{K^2/4}{\gamma^2} \right) \right] \Gamma(\gamma) = 0, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_\gamma = \lambda + \frac{K^2}{3}. \quad (4.17)$$

که در آن از تقریب $\gamma \approx 0$ استفاده شده است. این معادله دیفرانسیل می‌تواند بر حسب چندجمله‌ای‌های لاگر حل شود که جواب‌های آن عبارتست از

$$\gamma(\gamma) = N_\gamma \gamma^{|\frac{K}{4}|} \exp \left[\frac{-3c}{2} \gamma^2 \right] L_{n_\gamma}^{|\frac{K}{4}|} (3c\gamma^2) \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_\gamma = 6c \left(2n_\gamma + 1 - \frac{K}{4} \right). \quad (6.17)$$

برای قسمت β معادله دیفرانسیلی پس از جداسازی به شکل

$$\left[\frac{-1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + u_1(\beta) + \frac{W}{\beta^2} - \varepsilon \right] \xi(\beta) = 0, \quad (7.17)$$

$$W = \frac{L_{core}(L_{core} + 1)}{3} + \lambda + 2f L_{core} \cdot J_{csp} \quad (8.17)$$

می‌شود. با فرض یک چاه پتانسیل و جواب به صورت $\xi(\beta) = \beta^{-3/2} \phi(\beta)$ معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 \phi(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{d\phi(\beta)}{d\beta} + \left(\varepsilon - \frac{W + \frac{9}{4}}{\beta^2} \right) \phi(\beta) = 0, \quad (9.17)$$

می‌رسیم. این معادله دیفرانسیل را می‌توان بر حسب توابع بسل حل کرد. لذا جواب‌های این قسمت نیز عبارتند از

$$\xi(\beta) = N_\beta \beta^{-3/2} J_\nu \left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w} \beta \right), \quad (10.17)$$

$$\nu = \sqrt{W + \frac{9}{4}}, \quad (11.17)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w} \right)^2. \quad (12.17)$$

حال که شکل نهایی انرژی بدست آمد می‌توان به باز تولید اطلاعات آزمایشگاهی پرداخت.

جدول ۱.۱۷: اعداد کوانتومی ترازهای مربوط به قسمت اسپین بالای پاریته مثبت. برای قسمت داریم $s = 1, n_\gamma = K$.
 $J_{CSP} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ و $L_{CSP} = 2^+$

J_{tot}	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{13}{2}^+$	$\frac{17}{2}^+$	$\frac{21}{2}^+$	$\frac{25}{2}^+$
L_{core}	0^+	2^+	4^+	6^+	8^+	10^+

جدول ۲.۱۷: اعداد کوانتومی ترازهای مربوط به قسمت اسپین بالای پاریته مثبت. برای قسمت داریم $s = 1, n_\gamma = K$.
 $J_{CSP} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ و $L_{CSP} = 2^+$

J_{tot}	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{11}{2}^+$	$\frac{15}{2}^+$	$\frac{19}{2}^+$	$\frac{23}{2}^+$
L_{core}	2^+	4^+	6^+	8^+	10^+

۲.۱۷ بازتولید اطلاعات ساختار پاریته دوگانه

در این قسمت همانند فصل‌های مربوط به مدل ذره مستقل کنترل‌شده بایستی اعداد کوانتومی مربوط به ترازهای مختلف را بیابیم تا بتوان نسبت‌های انرژی

$$R = \frac{E(s, n_\gamma, K, J_{tot}, L_{core}, J_{CSP}) - E(1, 0, 0, \frac{9}{4}, 0, (2 + \frac{1}{4}))}{E(1, 0, 0, \frac{7}{4}, 2, (2 + \frac{1}{4})) - E(1, 0, 0, \frac{9}{4}, 0, (2 + \frac{1}{4}))}, \quad (1.17)$$

را برای این ساختار متفاوت بازتولید کرد. از آنجایی که تمامی این ترازهای متعلق به اولن نوار برانگیختگی هستند، از الگو تکانه زاویه‌ای نوار حالت و پایه برای تکانه‌های زاویه‌ای مغز هسته‌ای استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن تکانه‌های زاویه‌ای $L_{CSP} = 1^-$ و $L_{CSP} = 2^+$ می‌توان به تمامی اعداد کوانتومی مورد نظر برای این حالت‌های برانگیخته دست یافت. جزئیات این اعداد به تفکیک در جدول‌های ۱.۱۷، ۲.۱۷، ۳.۱۷ و ۴.۱۷ بیان شده است.

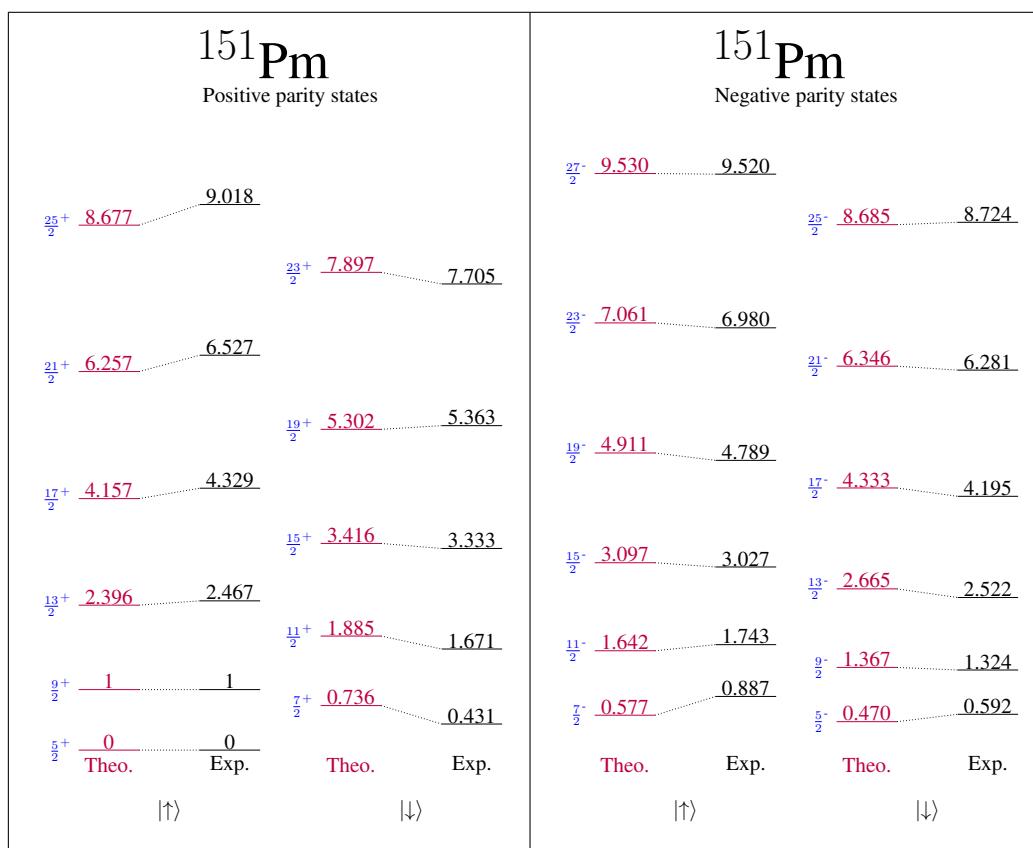
حال با مشخص شدن تمامی این اعداد می‌توان در یک فرآیند برازش بهتری مقدار را برای پارامترهای آزاد f و c بدست آورد تا انحراف معیار کمترین مقدار خود را بدست آورد. این کار با انتخاب $f = 0.402$ و $c = 5.260$ ممکن می‌شود که منجر به انحراف معیار $\sigma = 0.166$ می‌شود. در شکل ۳.۱۷ نتیجه این فرآیند عددی به تصویر کشیده شده است.

جدول ۳.۱۷: اعداد کوانتومی ترازهای مربوط به قسمت اسپین پایین پاریته منفی. برای قسمت داریم $s = 1, n_\gamma = K$.
 $J_{CSP} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ و $L_{CSP} = 1^-$

J_{tot}	$\frac{5}{2}^-$	$\frac{9}{2}^-$	$\frac{13}{2}^-$	$\frac{17}{2}^-$	$\frac{21}{2}^-$	$\frac{25}{2}^-$
L_{core}	2^+	4^+	6^+	8^+	10^+	12^+

جدول ۴.۱۷: اعداد کوانتومی ترازهای مربوط به قسمت اسپین بالا پاریته منفی. برای قسمت داریم $s = 1, n_\gamma = K$.
 $J_{CSP} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ and $L_{CSP} = 1^-$

J_{tot}	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{11}{2}^-$	$\frac{15}{2}^-$	$\frac{19}{2}^-$	$\frac{23}{2}^-$	$\frac{27}{2}^-$
L_{core}	4^+	6^+	8^+	10^+	12^+	14^+



شکل ۳.۱۷: مقایسه میان نتایج پیش‌بینی‌های نظری به کمک ذره مستقل کنترل شده و اطلاعات آزمایشگاهی.

فصل ۱۸

نتیجه‌گیری

در این رساله اثرات تغییر شکل بر روی طیف حالت‌های برانگیخته هسته مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. این تغییر شکل‌ها را می‌توان به دو دسته ثابت و پویا تقسیم‌بندی کرد. در ابتدا نشان دادیم که در حالت کلی چگونه یک تغییر شکل می‌تواند ترازهای یک سیستم را دچار تغییر کند. سپس مثال‌های معروف آن را در فیزیک هسته‌ای بررسی کردیم به ترازهای نیلسون موسوم بودند. در بررسی ترازهای نیلسون نحوه عددگذاری جدیدی را برای مدارهای هر پوسته ارائه کردیم. این رویه عددگذاری جدید باعث می‌شد که نتیجه‌های استفاده از مختصات کروی و استوانه‌ای به توافق کامل برسد. همچنین نشان دادیم که رویه عددگذاری‌های دیگر حاوی چه نقصانی هستند و راه حل آن‌ها را هم بیان کردیم. مدل (۳) proxy-SU را معرفی کرده و از قابلیت‌های آن برای بررسی رفتار هسته‌ها استفاده کردیم. چگونگی تغییر اعداد جادویی به هنگام در نظر گرفتن تغییر شکل را مورد برر قرار دادیم. همچنین بسط حالت‌های نیلسونی را در پایه‌های کروی در این مدل نیز بررسی شد. یک فرمول نیمه‌تجربی برای نیمه‌عمر واپاشی آلفا ارائه کردیم. در این فرمول از اثرات تغییر شکل هسته مادر که به کمک مدل (۳) proxy-SU محاسبه می‌شد، استفاده کردیم که بیانگر نتایج قابل توجهی بود. و در انتهای این قسمت رفتار لنگیدنی هسته را معرفی و بررسی کردیم.

سپس تغییر شکل‌های پویا را در نظر گرفتیم که در آن با لحاظ کردن نوسانات و دورانات این تغییر شکل از حالت ثابت خارج می‌شوند و پارامترهای تغییر شکل به عنوان متغیرهای اصلی وارد مسئله می‌شوند. در این قسمت نیز هسته‌های زوج و فرد را به‌صورت جداگانه در شرایط مختلف مورد بررسی قرار دادیم و اطلاعات نسبت‌های انرژی و گذارهای چهارقطبی تعداد قابل توجهی از ایزوتوپ‌ها را به کمک مدل‌های مختلف که از تقریب‌های مختلف به همراه استفاده از پتانسیل‌های مختلف بدست می‌آمدند را بازتولید کردیم. همچنین در قسمت مربوط به هسته‌های فرد در ابتدا محاسبات کاملی از بررسی رفتار جمعی چند هسته فرد ارائه کردیم که دارای پیچیدگی‌های قابل توجهی بود. سپس به

منظور سهولت در بررسی رفتار هسته‌های فرد مفهوم ذره مستقل کنترل‌شده را معرفی کرده و محاسبات و پایه‌های ریاضی آن را با جزئیات کامل شرح دادیم. پس از آن اقدام به بازتولید اطلاعات تجربی برخی از ایزوتوپ‌های فرد کردیم که توافق خوبی را میان پیش‌بینی‌های نظری و اطلاعات تجربی با استفاده از این مفهوم بدست آوردیم. در انتها نیز یکی از ساختارهای جالب در فیزیک هسته‌ای موسوم به پاریده دوگانه را معرفی کرده و به کمک مفهوم ذره مستقل کنترل‌شده آن را توجیح و نسبت‌های انرژی آن را بازتولید کردیم.

اما مواردی بود که قرار بود آن‌ها را بررسی کنیم ولی نتوانستیم. از جمله در نظر گرفتن عوامل غیر خطی و یا مشتقات کسری که علت آن حل نشدن معادلات و یا خوش‌تعریف نبودن تکانه زاویه‌ای در آن صورت‌ها بود. همچنین استفاده از هامیلتونی بوهر برای هسته‌های سبک که نبود اطلاعات آزمایشگاهی کافی از جمله علت‌های آن بوده است.

مراجع

- [1] I. Talmi, Simple Models of Complex Nuclei: The Shell Model and the Interacting Boson Model (Harwood, Chur, 1993).
- [2] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, Shapes and Shells in Nuclear Structure (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [3] B. R. Mottelson and S. G. Nilsson, The shape of the nuclear photo-resonance in deformed nuclei, Nucl. Phys. 13, 281 (1959).
- [4] A. Bohr and B. R. Mottelson, Nuclear Structure, Vol. II: Nuclear Deformations (Benjamin, New York, 1975).
- [5] Kenneth S. Krane, Introductory Nuclear Physics (Wiley, 1988).
- [6] W. Greiner, J. A. Maruhn, Nuclear Models (Springer London, Limited, 1997).
- [7] D. J. Rowe, Nuclear Collective Motion: Models And Theory (World Scientific, 2010).
- [8] A. Sitenko, V. Tartakovskii, Theory of Nucleus: Nuclear Structure and Nuclear Interaction (Springer Netherlands, 1997).
- [9] R. F. Casten, Nuclear Structure from a Simple Perspective (Oxford University Press, 1990).
- [10] P. Ring, P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem (Springer Science & Business Media, 2004).
- [11] S. Gasiorowicz, Quantum Physics (John Wiley & Sons, 2003).
- [12] N. Zettili, Quantum Mechanics: Concepts and Applications (Wiley, 2009).
- [13] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics (Benjamin/Cummings Pub., 1985).

-
- [14] Walter Greiner, Berndt Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [15] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, Andriana Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, K. Blaum, *Phys. Rev. C* **95** 064325 (2017).
- [16] Draayer, J. P., Y. Leschber, S. C. Park and R. Lopez. 1989. Representations of U(3) in U(N). *Comp. Phys. Commun.* 56: 279-90.
- [17] Martinou, A., D. Bonatsos, N. Minkov et al. 2018. Highest weight SU(3) irreducible representations for nuclei with shape coexistence. Proc. of 37-th International Workshop on Nuclear Theory, Nucl. Th. 37. arXiv: 1810.11870 [nucl-th].
- [18] R. D. Ratna Raju, J. P. Draayer, and K. T. Hecht, *Nucl. Phys. A* **202** 433 (1973).
- [19] J. P. Draayer, K. J. Weeks, and K. T. Hecht, *Nucl. Phys. A* **381** 1 (1982).
- [20] J. P. Draayer and K. J. Weeks, *Phys. Rev. Lett.* **51** 1422 (1983).
- [21] J. P. Draayer and K. J. Weeks, *Ann. Phys. (NY)* **156** 41 (1984).
- [22] J. N. Ginocchio, *Phys. Rev. Lett.* **78** 436 (1997).
- [23] R. B. Cakirli, K. Blaum, and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **82** 061304(R) (2010).
- [24] D. Bonatsos, S. Karampagia, R. B. Cakirli, R. F. Casten, K. Blaum, and L. Amon Susam, *Phys. Rev. C* **88** 054309 (2013).
- [25] Richard B. Firestone, *Table of Isotopes* (Wiley, 1998)
- [26] C. Qi, et al., *Phys. Lett. B* 734 (2014) 203.
- [27] D. T. Akrawy and D. N. Poenaru, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **44** 105105 (2017)
- [28] D. R. Jensen, G. B. Hagemann, I. Hamamoto, S. W. Ødegård, B. Herskind, G. Sletten, J. N. Wilson, K. Spohr, H. Hübel, P. Bringel, et al., *Phys. Rev. Lett.* **89** 142503 (2002).
- [29] D. R. Jensen, G. B. Hagemann, I. Hamamoto, S. W. Ødegård, M. Bergstrom, B. Herskind, G. Sletten, S. Tormanen, J. N. Wilson, P. O. Tjøm, et al., *Nucl. Phys. A* **703** 3 (2002).

- [30] G. Schönwaßer, H. Hübel, G. B. Hagemann, P. Bednarczyk, G. Benzoni, A. Bracco, P. Bringel, R. Chapman, D. Curien, J. Domscheit, et al., *Phys. Lett. B* **552** 9 (2003).
- [31] H. Amro, W. C. Ma, G. B. Hagemann, R. M. Diamond, J. Domscheit, P. Fallon, A. Gorgen, B. Herskind, H. Hubel, D. R. Jensen, et al., *Phys. Lett. B* **553** 197 (2003).
- [32] G. B. Hagemann, *Eur. Phys. J. A* **20** 183 (2004).
- [33] P. Bringel, G. Hagemann, H. Hübel, A. Al-khatib, P. Bednarczyk, A. Bürger, D. Curien, G. Gangopadhyay, B. Herskind, D. Jensen, et al., *Eur. Phys. J. A* **24** 167 (2005).
- [34] D. J. Hartley, R. V. F. Janssens, L. L. Riedinger, M. A. Riley, A. Aguilar, M. P. Carpenter, C. J. Chiara, P. Chowdhury, I. G. Darby, U. Garg, et al., *Phys. Rev C* **80** 041304 (2009).
- [35] S. Frauendorf and F. Dönau, *Phys. Rev. C* **89** 014322 (2014).
- [36] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, *Phys. Lett. B* **34** 575 (1971).
- [37] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, *Phys. Rev. C* **73** 034305 (2006).
- [38] K. Tanabe and K. Sugawara-Tanabe, *Phys. Rev. C* **77** 064318 (2008).
- [39] A. Davydov and G. Filippov, *Nuclear Physics* **8** 237 (1958).
- [40] M. Oi and J. Fletcher, *J. Phys. G* **31** S1753 (2005).
- [41] M. Oi, *Phys. Lett. B* **634** 30 (2006).
- [42] <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>
- [43] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** 3580 (2000).
- [44] M. A. Caprio and F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **781** 26 (2007).
- [45] H. Hassanabadi and H. Sobhani, *Phys. Rev. C.* **98** 014312 (2018).
- [46] H. Sobhani, and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **133** 482 (2018).
- [47] Hadi Sobhani, Hassan Hassanabadi *Nucl. Phys. A*, **983** 229 (2019)
- [48] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87** 052502 (2001).

-
- [49] F. Pan, Y. Zhang, H.-C. Xu, L.-R. Dai, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **91** 034305 (2015).
- [50] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **95** 052503 (2005).
- [51] Yu Zhang, Feng Pan, Yu-Xin Liu, Zhan-Feng Hou, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C.* **82** 034327 (2010).

Abstract

In the present thesis effects of deformation on the nuclei have been studied. In the first part the deformations are considered as the constant form. By this consideration, Nilsson Hamiltonian is investigated and some discussion are argued. Then the proxy-SU(3) model is presented and its properties are used. Furthermore, the effects of deformations on the magic numbers are surveyed. In addition, with the help of the proxy-SU(3) model, a semi-empirical formula for the alpha-decay half-life is suggested which includes the deformation of a given nucleus. After that the wobbling motion is presented and studied.

In the second part, by including the vibrations and rotations we come into the dynamical deformations and with the help of it the even and odd nuclei are studied separately in some different situations. At the end by introducing the controlled single particle an opportunity is provided which makes the study of odd nuclei simpler.

Key Words: Nuclear deformations, Nilsson levels, proxy-SU(3) model, Bohr Hamiltonian.



Faculty of Physics and Nuclear Engineering

PhD Thesis in Nuclear Physics

Investigation of nuclei considering constant and dynamical deformation

By: Hadi Sobhani

Supervisors:

Dr. Hassan Hassanabadi

Dr. Dennis Bonatsos

September 2020