بسم الله الرحمن الرحیم

پردیس بین‌المللی خوارزمی

رساله دکتری فیزیک هسته ای

مطالعه و بررسی ایزوتوپ های دو جادویی با مدل خوشه ای و لایه ای

نگارنده :
سحر اصلانزاده

اساتید راهنما:

دکتر محمد رضا شجاعی

دکتر علی اصغر مولوی

بهمن ۱۳۹۸

شماره ۲۳۹۱۶، ۳/۹۱، الف
تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۰
پیوست

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم **سحر اصلان زاده** دانشجوی دکتری رشته فیزیک هسته ای به شماره دانشجویی ۹۲۲۶۳۲۵ ورودی بهمن ۹۲ در تاریخ ۱۳۹۸/۱۱/۲۹ از رساله **نظری** ■ **عملی** □ خود با عنوان **مطالعه و بررسی ایزوتوپ های دو جادویی با عدد جرمی خوشه ای و لایه ای** دفاع و با اخذ نمره ۱۹٫۴۹ به درجه **عالی** نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☒ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹- ۱۵ ☐ د) مردود: کمتر از ۱۵ ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر محمد رضا شجاعی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر علی اصغر مولوی	استاد راهنما	استاد	
۳	دکتر امید ناصر قدسی	داور خارجی	استاد	
۴	دکتر نسرین صالحی	داور خارجی	دانشیار	
۵	دکتر مجتبی هاشم زاده دهقانی	داور داخلی	استادیار	
۶	دکتر سید ایمان آقایان	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای/خانم سحر اصلان زاده بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: مرتضی زاهدی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به مادر عاشق و پدر مهربانم.....

داستان زندگی هرکس منحصر به خودش است و نشانه ها فقط جهت آن را رقم می زنند، جهتی توام با لحاظ قسمت و حکمت.

من اما داستان زندگی خود را به مادر عاشق و پدر مهربانم و تو که می دانی زندگی حاصل خواندن ها و نوشتن هاست تقدیم می کنم، تا شاید راهی باشد برای خواندن دوباره ی این داستان و نشانه ای برای تولد یک داستان دیگر و البته جدید.....

تقدیر و تشــکر از آن کسانی است که وجودشان پر از ایثار و از خودگذشتگی است و گرمای امید بخش نگاهشــان روشــنگر راهی اســت که مقصدش ناپیداست ،همان کسانی که حامی لحظه های پر از فراز و نشیب این داستان بوده اند.....

بی شــک ممکن شــدن تامین این پایان نامه با راهنمایی های اســتاد عزیز و پر از صــبر و مهربانی، جناب آقای دکتر شــجاعی گرانقدر و حمایت و نگاه محبت آمیز جناب آقای دکتر مولوی صورت پذیرفته است....

سپاسگزارم و امیدوار، به آن که زکاتی که پرداخت نموده اید حامی لحظه لحظه هایتان باشد و تمامی تلاشم بر آن است که لیاقت پرداخت زکات را بر خود ممکن سازم.....

سحر اصلان زاده

تعهد نامه

اینجانب **سحر اصلانزاده**، دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **"مطالعه و بررسی ایزوتوپ های دو جادویی با مدل خوشه ای و لایه ای"** تحت راهنمائی **آقایان دکتر محمد رضا شجاعی و دکتر علی اصغر مولوی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

برای بررسی ایزوتوپ های زوج-زوج دوجادویی در مدل خوشه‌ای، ابتدا باید ساختار مختلف خوشه‌ای را برای ایزوتوپه‌ای دوجادویی بررسی‌کنیم. این ساختارها بسته به انرژی سیستم‌های مورد نظر تغییر کرده و عبارتند از: ترکیب یک هسته ی کوچک تر و یک ذره ی آلفا، ترکیب دو هسته ی کوچک تر و در نهایت ترکیب چند ذره ی آلفا. به دلیل موفقیت های مدل خوشه‌ای برای هسته های سبک، در این رساله از این مدل استفاده شده است. بدین ترتیب با استفاده از روش های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم برای توابع موج فوق هندسی، مانند روش NU[1] (نیکی واروف-یووارف) و با استفاده از یک پتانسیل جایگزیده، ترازها و توابع موج حالت مربوط به ساختارهای خوشه‌ای تعیین شده و از ساختار درونی خوشه‌های آلفا نیز صرفنظر شده است.

پتانسیل منتخب، درقسمتی از این پایان نامه، مشابه پتانسیل علی-بودمر[2] و سازگار با پتانسیل هافستد-تلر[3]، در نظر گرفته شده و در قسمتی دیگر، پتانسیل بین خوشه‌ها به صورت مجموع پتانسیل یوکاوا [4]، و پتانسیل اصلاح شده هالتن[5]، فرض شده است. بنابراین ترازهای انرژی و ساختار چینش ذرات آلفا با استفاده از مدل خوشه‌ای برای هسته‌های سبکی چون ^{8}Be، ^{16}O ، ^{24}Mg، ^{20}Neو ^{32}S محاسبه و پس از آن با داده‌های تجربی مقایسه شده‌اند. همخوانی نتایج با موارد تجربی بیانگر کارآمد بودن مدل پیشنهادی می باشد.

کلمات کلیدی: ایزوتوپ های زوج-زوج، ایزوتوپ های دوجادویی، مدل خوشه ای ، روش NU

[1] Nikiforov-Uvarov
[2] Ali-Bodmer
[3] Hafstad-Teller
[4] Yukawa
[5] Hulthen

فهرست مقالات مستخرج از رساله

[۱] اصلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر " محاسبه ترازهای انرژی اکسیژن ۱۶ در مدل خوشه ای $^{8}Be + {}^{8}Be$ با یک پتانسیل جایگزیده به روش NU " بیست و سومین کنفرانس هسته‌ای ایران، ۱۳۹۵.

[۲] اصلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر " محاسبه ترازهای انرژی هسته های سبک در مدل خوشه ای با پتانسیل تعمیم یافته علی–بودمر از روشNikiforov-Uvarov - " کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، قم، ۱۳۹۶.

[۳] اصلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر " بررسی هسته های سبک درمدل خوشه ای با روشNU "بیست و چهارمین کنفرانس هسته ای ایران، اصفهان،۱۳۹۶.

[۴] اصلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر " محاسبه ترازهای هسته منیزیم 24 در مدل خوشه ای و تعیین ساختار آن در حالت های مختلف "نهمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان ها،یزد، ۱۳۹۷.

[5] Sahar Aslanzadeh, Mohammad Reza Shojaei , Ali Asghar mowlavi, “Considering the Light Nuclei in the Cluster Model from NU Method”, **World Journal of Applied Physics**, Vol. 3, No. 4, 2018, pp. 54-60; doi: 10.11648/j.wjap.20180304.11 .

[6] Sahar Aslanzadeh, Mohammad Reza Shojaei , Ali Asghar mowlavi, “Calculation the energy levels and charge radius of 24Mg and 32S isotopes in the cluster model”, Canadian Journal of Physics, https://doi.org/10.1139/cjp-2018-0843.

[۷] Sahar Aslanzadeh, Mohammad Reza Shojaei , Ali Asghar mowlavi, “Consideration of some static properties for doubly-magic nuclei of 41Ca and 17O in relativistic systems”, The African Review of Physics, 2019, 14: 000

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل ۱ ازمدل قطره مایع تا مدل خوشه‌ای ۱
۱-۱ مقدمه: ۲
۱-۲ مدل قطره مایع ۳
۱-۳ مدل لایه‌ای ۶
۱-۴ مدل تجمعی ۱۱
۱-۵ مدل گاز فرمی: ۱۱
۱-۶ مدل خوشه‌ای ۱۴
فصل ۲ مدل خوشه‌ای ایزوتوپ های هسته‌ای ۲۳
۲-۱ مقدمه: ۲۴
۲-۲ تعریف ایزوتوپ هسته‌ای ۲۴
۲-۳ انواع ایزوتوپ ها ۲۵
۲-۳-۱ ایزوتوپ پایدار ۲۵
۲-۳-۲ ایزوتوپه‌ای ناپایدار ۲۵
۲-۴ ویژگی های هسته ای ایزوتوپ ها ۲۵
۲-۴-۱ ایزوتوپ های زوج – زوج ۲۶
۲-۴-۲ ایزوتوپ های فرد-فرد ۲۸
۲-۴-۳ ایزوتوپ های فرد-زوج یا زوج-فرد ۲۸
۲-۴-۴ ایزوتوپ های دو جادویی: ۲۹
۲-۵ انواع مدل ها در توصیف خوشه‌ای ایزوتوپ های هسته‌ای ۳۲
۲-۵-۱ مدل نوسانگرهماهنگ(HOM): ۳۲
۲-۵-۲ مدل نوسانگر هارمونیک با دو مرکز ۳۲
۲-۵-۳ مدل خوشه‌ای آلفا برینک-بلاچ[۳۸] ۳۳
۲-۵-۴ مدل پدیده شناختی بررسی ایزوتوپه‌ای مزدوج ۳۳
۲-۶ جمع بندی فصل: ۳۵

فصل ۳ دستگاه های مختصات و روش تحلیلی NU برای حل معادلات دیفرانسیل ۳۷
۳-۱ مقدمه: ۳۸
۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی ۳۹
۳-۳ دستگاه مختصات کروی ۴۰
۳-۴ روش تحلیلی NU برای حل معادلات دیفرانسیل ۴۱
۳-۵ معادله شرودینگر در مختصات کروی..... ۴۵
۳-۶ معادله کلاین-گوردن در مختصات کروی ۴۷
۳-۷ جمع بندی فصل:..... ۴۹
فصل ۴ تراز انرژی هسته های سبک در مدل خوشه ای ۵۱
۴-۱ مقدمه ۵۲
۴-۲ حل معادله شرودینگر..... ۵۲
۴-۳ پتانسیل برهم کنش خوشه ها..... ۵۵
۴-۴ حل معادله شرودینگر از روش NU و تعیین ترازها ۵۷
۴-۵ محاسبه ترازهای انرژی هسته $\boldsymbol{48Be}$:..... ۶۲
۴-۶ ترازهای انرژی هسته $\boldsymbol{816O}$ به صورت مدل $\boldsymbol{48Be+48Be}$: ۶۳
۴-۷: محاسبه ترازهای انرژی هسته های $1224Mg$ و $1632S$ به صورت دو ذرهای در مدل غیر نسبیتی:..... ۶۵
۴-۸ محاسبه ترازهای انرژی هسته $1224Mg$ و $1632S$ به صورت دو ذرهای در مدل نسبیتی: ۶۸
۴-۹ محاسبه ترازهای انرژی هسته $816O$ و $1020Ne$ در مدل خوشه ای و ساختار(هسته+آلفا): ۷۳
۴-۱۰: محاسبه ترازهای انرژی هسته $817O$ و $2041Ca$در مدل خوشه ای به صورت یک سیستم نسبیتی:..... ۷۵
۴-۱۱ جمع بندی فصل:..... ۸۰
فصل نتیجه گیری ۵..... ۸۱
۵-۱ جمع بندی و نتیجه گیری: ۸۳
۵-۲ پیشنهادات:..... ۸۳
مراجع : ۸۵

فهرست اشکال

شکل(۱-۱): مدل قطره مایع برای درک فرآیند شکافت هسته‌ای[۲]. ۳

شکل(۱-۲): نمودار انرژی بستگی بر اساس فرمول نیمه تجربی جرم[۱]..... ۷

شکل(۱-۳): ساختار پوسته ای حاصل از پتانسیل های چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ. ظرفیت هر تراز در سمت راست است و عدد داخل دایره نشانگر تعداد کل نوکلئون های موجود در پوسته های پر می باشد [۱]. ۹

شکل (۱-۴): این شکل حاصل از پتانسیل اسپین-مدار است [۱]. ۱۰

شکل(۱-۵) : این شکل بیانگر مدل گاز فرمی است[۱]. ۱۲

شکل(۱-۶): شکل قرار گرفتن ۴ خوشه ذره آلفا در $816O$ را نشان میدهد. ۱۶

شکل۱-۷ : مدلی از چگالی ذرات در پتانسیل نوسانگرهماهنگ که مدل خوشه ای درآن واضح است۱۷

شکل ۱-۸: نمودار ایکدا نشان دهنده حالت های خوشه ای در N=Z [۱۲]. ۱۸

شکل۱-۹: رابطه بین انرژی بستگی و تعداد پیوند بین ذرات آلفا در مدل خوشه ای[۸]..... ۱۹

شکل(۲-۱): زنجیرهای جرمی برای دو دسته از ایزومرهای A=۱۲۵ و A=۱۲۸ . ..... ۲۷

شکل(۲-۲): در این شکل تعداد پروتون ها بر حسب نوترون ها برای هسته های مختلف نشان داده شده است که با مربع های مشکی مشخص است. میتوان هسته های دوجادویی را در شکل مشخص کرد که از تقاطع خطوط خط چین حاصل شده است [۲۵]. ۳۰

شکل(۳-۱): این شکل مختصات ژاکوبی را برای دو ذره نشان میدهد[۴۴]. ۴۰

شکل(۳-۲): این شکل، مختصات ژاکوبی را برای چهار جسم نشان میدهد. مطابق معادلات بالا مختصات های$r3,r2,r1$ و R رسم شده اند[۴۷]..... ۴۰

شکل(۳-۳): این شکل مختصات کروی را نشان میدهد[۴۹]..... ۴۱

شکل(۴-۱): پتانسیل هافستد-تلر[۶۳]. ۵۵

شکل (۴-۲): پتانسیل های اصلی و تقریبی معادله (۴-۱۰) برای هسته $48Be$ [۶۶-۶۰]..... ۵۸

شکل (۴-۳): پتانسیل های اصلی و تقریبی معادله (۴-۱۰) برای هسته $816O$ [۶۶-۶۰]. ۵۹

فهرست جدول ها

جدول(۱-۱): پارامترهای فرمول نیمه تجربی جرم ۵

جدول (۴-۱): ترازهای انرژی هسته $48Be$ [۶۶-۶۰]. ۶۳

جدول(۴-۲): ترازهای انرژی هسته $816O$به صورت دوخو شه $48Be$ [۷۶-۷۷] ۶۴

جدول(۴-۳): ترازهای انرژی $816O$به صورت دوخو شه $48Be$ [۷۸ و ۷۹] ۶۵

جدول (۴-۴): انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ایزوتوپ های $1224Mg$ و $1632S$در روش غیرنسبیتی ۶۷

جدول (۴-۵): انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ایزوتوپ های $1224Mg$ و 1632S در روش نسبیتی[۸۳،۸۴]. ۷۰

جدول (۴-۶): نتیجه غیرنسبیتی محاسبات و تجربه مربوط به شعاع بار برای دو هسته $1224Mg$و 1632S ۷۲

جدول (۴-۷): نتیجه نسبیتی محاسبات و تجربه مربوط به شعاع بار برای دو هسته $1224Mg$ و 1632S. ۷۳

جدول(۴-۸): ترازهای انرژی هسته $816O$ در ساختار دوخوشه‌ای $612C + \alpha$ ۷۴

جدول (۴-۹): ترازهای انرژی برای هسته $1020Ne$ به صورت ساختار دو خوشه ای $816O + \alpha$. ۷۴

جدول (۴-۱۰): ضرایب معادله بالا برای محاسبه انرژی ۷۸

جدول(۴-۱۱): ترازهای انرژی حالت پایه ایزوتوپ های $817O$و $2041Ca$ ۷۹

فصل ۱

ازمدل قطره مایع تا مدل خوشه‌ای

۱-۱ مقدمه:

به دلیل مشخص بودن نیروهای توصیف کننده در اتم ها، مدل های اتمی بر اساس این نیروها به طور واضح بیان می‌شوند، اما در هسته ها شکل قطعی این نیروها معلوم نمی باشد. از طرفی ماهیت نیروهای هسته ای به این صورت است که برهم کنش نوکلئون ها تنها از طریق نیروهای متقابل دوجسمی نبوده بلکه از طریق نیروهای سه جسمی نیز صورت می‌گیرد. لذا می توان گفت نیروی وارد بر نوکلئون ۱ تنها به مکان نوکلئون‌های ۲و۳ بستگی ندارد و شامل یک جمله ی اضافی نیز می باشد که از همبستگی بین مکان های نوکلئون‌های ۲ و ۳ ناشی می شود[۱]. ساختار هسته ها به شکل خوشه ای در یک معیار بزرگ، پدیده ای است که به وسیله ی همبستگی بین نوکلئون های داخل هسته و از اصل برهم کنش نوکلئون-نوکلئون نتیجه می‌شود. برای مثال، محاسبات مونت کارلو تابع گرین برای هسته $^{8}_{4}Be$ [۲] ساختار هسته ها را بر یک نقطه شروع پیش بینی می‌کند که برهم کنش های نوکلئون-نوکلئون را برحسب اجزای دو بعدی و سه بعدی بیان می نماید. برهم کنش دو ذره‌ای یک مدل همسان سازی از نیروی بین نوکلئون‌ها است که توسط پراکندگی نوکلئون-نوکلئون مشخص می‌شود. اما نیروی سه ذره‌ای را نمی‌توان از پراکندگی بین ذرات تعیین کرد. بنابراین برای توضیح کامل همه خصوصیات هسته‌های پایا و غیرپایا تنها یک مدل جوابگو نیست و مدل های مختلفی برای توصیف ساختار هسته‌ها وجود دارند که تاکنون هیچ کدام به طور کامل نتوانسته اند ساختار پیچیده ی هسته ها را تشریح کنند.

برای ساختن یک مدل هسته ای باید توجه کنیم که مدل مزبور بتواند خواص هسته‌ها را تا اندازه قابل قبولی توضیح دهد و برای هسته های سبک و سنگین دچار مشکل نشود. معمولا در کل فیزیک، ما دنبال مدلی می‌گردیم تا بتواند یک پدیده ی فیزیکی یا یک سیستم فیزیکی را به طور کامل، جدا از این که مدل مد نظر چقدر برای ما ملموس و قابل پذیرش باشد توجیه کند. مدل سازی در اکثر شاخه های فیزیک مانند گرانش، فیزیک ذرات بنیادی و فیزیک اتمی برای توصیف کامل یک پدیده فیزیکی قابل استفاده است. مانند مدل سازی برای رسانایی فلزات یا مدل سازی برای پدیده های جهان تورمی.

بنابراین برای درک بهتر و انتخاب شایسته تر لازم است مدل های مختلف هسته‌ای به اختصار شرح داده شوند.

۱-۲ مدل قطره مایع

این مدل هسته‌ای در سال ۱۹۳۹ توسط نیلز بور و جان ویلر بیان شد. در این مدل، هسته را مانند یک قطره کروی در نظر می‌گیرند. اما آنچه سبب کروی ماندن یک قطره مایع می‌شود، نیروهای کشش سطحی قطره است. نیروی نگهدارنده ی هسته که بین نوکلئون‌ها وجود دارد دارای ویژگی‌های زیر است:

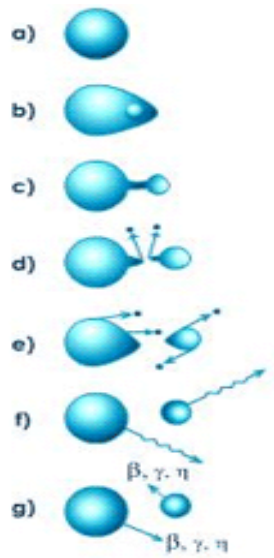
۱. این نیروها دارای برد کوتاهی می باشند.

۲. نیروهای هسته‌ای بین نوکلئون‌ها خیلی بیشتر از نیروهای الکترستاتیکی بین آن ها می باشند.

۳. این نیروها مستقل از جفت شدگی سایر نوکلئون‌ها هستند.

۴. این نیروها تنها با نوکلئون‌های مجاور برهم کنش داشته و آن ها را جذب می‌کنند.

بنابراین می‌توان گفت که نیروی نگهدارنده ی نوکلئون‌های هسته و نیروهای کشش سطحی در قطره مایع خیلی به هم شبیه می باشند. مدل قطره مایع می‌تواند پدیده ی شکافت را به راحتی توضیح دهد (شکل۱-۱)، این مدل مدلی برای واکنش‌هایی با انرژی پایین است. همچنین اساسی برای مطالعه ی انرژی بستگی به فرمول نیمه تجربی جرم را نیز ارائه می‌دهد (شکل۱- ۲).



شکل(۱-۱): مدل قطره مایع برای درک فرآیند شکافت هسته‌ای[۲].

مدل قطره مایع در توجیه برخی پدیده ها مانند شکافت هسته‌ای و محاسبه ی انرژی بستگی هسته موفقیت آمیز عمل کرده است. اما برای برخی پدیده ها نیز مانند پایداری هسته هایی با عدد اتمی و جرمی خاص هیچ پاسخی ندارد. مدل قطره مایع در توضیح واکنش های هسته‌ای نظریه ای موفق بوده و توانسته است فرآیند شکافت را به درستی توجیه کند. برای مثال هسته ی $^{235}_{92}U$ می‌تواند بعد از کسب انرژی به $^{238}_{92}U$ برانگیخته تبدیل شود. انرژی برانگیختگی این هسته در حد چند مگا الکترون ولت است. در این حالت قطره تغییر شکل داده و کمی کشیده شده و به صورت یک دمبل درمی‌آید که دو بخش این دمبل خارج از برد نیروی هسته‌ای قوی قرار می‌گیرند ولی فاصله بین آنها در حد نیروی دافعه کولنی قرار دارد و باعث می‌شود که دو بخش از هم دور شوند که نشان دهنده ی آن است که هسته ی بزرگ شکافته می‌شود. در این فرآیند چندین نوترون گسیل می‌شوند. مدل قطره مایع می‌تواند انرژی های لازم برای شکافت های مختلف را تعیین کند. برای شکافت های مختلف هسته ای مقداری انرژی نیاز است تا یک هسته ی کروی شکل را چنان تغییر دهد که نیروی دافعه الکتریکی بر نیروی قوی هسته‌ای برتری یافته و دو هسته ی کوچکتر حاصل گردد. به این انرژی، انرژی فعالسازی هسته گفته می شود. این انرژی را می‌توان با استفاده از ساختار ریاضی قطره مایع تعیین کرد که البته با تجربه نیز همخوانی دارد[۳]. همچنین از مدل قطره مایع نیز می‌توان انرژی بستگی یک هسته را حساب کرد، یعنی انرژی لازم برای تجزیه ی یک هسته به نوکلئون های تشکیل دهنده ی آن. از این مدل می‌توان انرژی بستگی هسته‌ای را برحسب A عدد جرمی و عدد اتمی Z نوشت. پنج اثر مهم تعیین کننده ی انرژی بستگی با درنظر گرفتن یک هسته به صورت قطره مایع عبارتند از :

۱) اثر ربایشی نوکلئون‌های مجاور بر روی هم باعث شکل گرفتن یک کره می شود که به آن اثر حجمی گفته می شود.

۲) نوکلئون‌هایی که در سطح قرار دارند تنها با نوکلئون‌های داخل سطح برهم کنش دارند و به همین دلیل انرژی بستگی این نوکلئون‌ها نسبت به نوکلئون های درونی کمتر بوده و لذا لازم

است مقداری از انرژی بستگی کل در یک هسته را به دلیل این اثر که اثر سطحی نامیده می شود کم کرد.

۳) نیروی دافعه ی بین نوکلئون ها در هسته ها به دلیل اینکه پروتون‌ها دارای بار مثبت هستند وجود دارد که این نیرو از انرژی بستگی کل کم می شود و اثر، اثر دافعه کولنی نامیده می شود.

۴) در هسته ها تعداد پروتون‌ها Z و نوترون‌ها N تعیین کننده است. هرچه این دو عدد به هم نزدیکتر باشند، انرژی بستگی نیز بیشتر است و حداکثر انرژی بستگی زمانی است که دو مقدار مساوی باشند. $N = Z$. لذا هر چه فاصله زیادتر شود، انرژی بستگی نیز کمتر می‌شود. به این اثر که انرژی بستگی را کاهش می‌دهد، اثر عدم تقارن گفته می‌شود.

۵) اگر تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها زوج باشند، انرژی بستگی زیاد شده و در هسته هایی که عدد N و Z هر دو فرد هستند انرژی بستگی کاهش خواهد یافت که این اثر را اثر جفت شدگی می گویند. اگر عدد جرمی A فرد باشد، مقدار این اثر برابر صفر خواهد بود.

چند اثر بالا را می‌توان در رابطه ی زیر که به رابطه ی نیمه تجربی جرم معروف است خلاصه و انرژی بستگی هسته را تعیین کرد:

$$E_B = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A,Z) \quad (۱-۱)$$

در رابطه ی فوق داده های زیر به صورت تجربی حاصل شده اند[۴]:

جدول(۱-۱): پارامترهای فرمول نیمه تجربی جرم

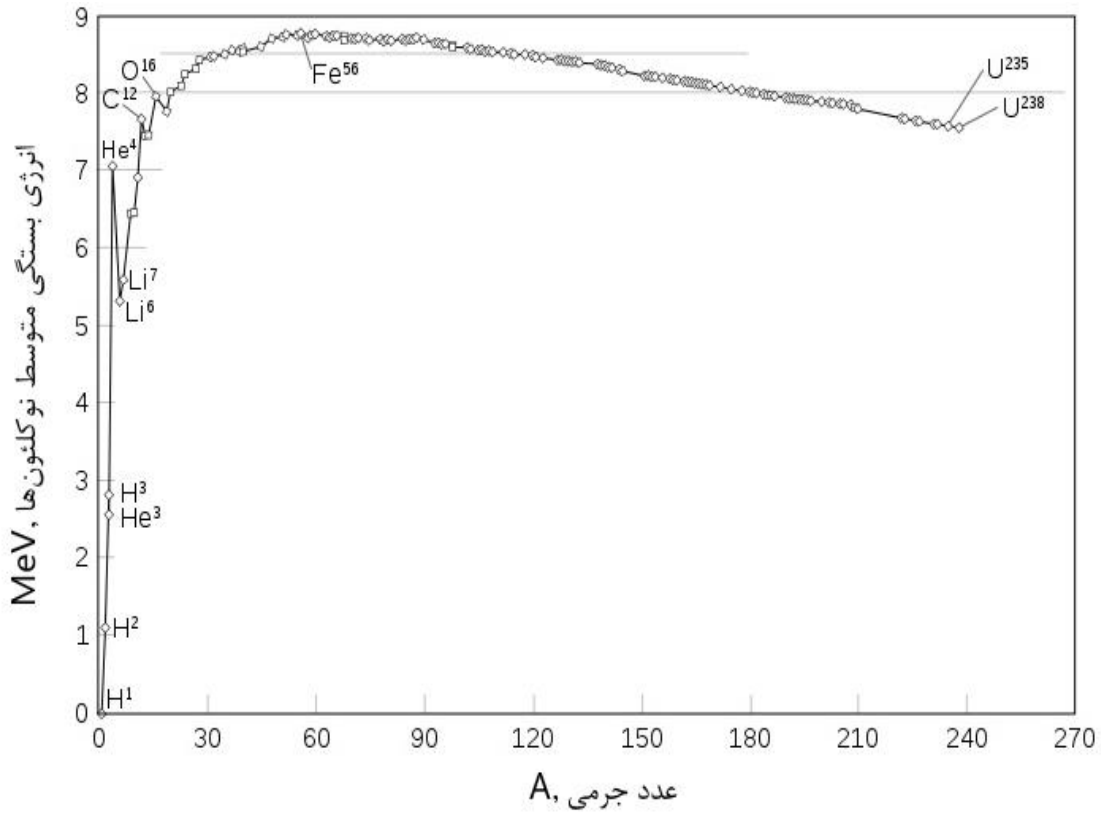
پارامترها	$a_1(MeV)$	$a_2(MeV)$	$a_3(MeV)$	$a_4(MeV)$	$\delta(A,Z)$
نتایج تجربی	15/56	17/23	0/697	23/28	$\frac{\pm 11/18}{A^{1/2}}$

در جدول بالا $\delta(A,Z)$ ، در حالتی که هسته زوج-زوج است، علامت آن مثبت و اگر هسته فرد-فرد باشد علامت آن منفی و در حالت زوج-فرد مقدار آن برابر صفر می باشد. انرژی بستگی حاصل شده از رابطه ی مزبور با نتایج تجربی همخوانی خوبی دارد.

۱-۳ مدل لایه‌ای[1]

مدل لایه‌ای، در ساختار اتمی به خوبی توانسته است اتم های مختلف را تفسیر کند، به همین دلیل فیزیکدانان بر این عقیده هستند که این مدل احتمالا برای هسته‌ها نیز توصیف خوبی را ارائه خواهد داد. این مدل برای اتم ها به طور خلاصه به این صورت بیان می شود: لایه‌ها توسط الکترون هایی که انرژی آن ها در حال افزایش است پر می‌شوند ، که اصل طرد پاولی در آن رعایت می شود. لذا خواص اتم ها را میزان اشغال الکترون ها در آخرین پوسته تعیین می‌کنند. (مثلا برای اتم هایی با تعداد الکترون های۲،۱۰،۱۸،۳۶،۵۴ ، ۸۶، تمام لایه‌ها به طور کامل پر می‌شوند.). چنین ساختار الکترونی از پایداری خوبی برخوردار بوده و دارای انرژِی بستگی بالایی نیز می باشد.

[1] The shell model



شکل(۱-۲): نمودار انرژی بستگی بر اساس فرمول نیمه تجربی جرم[۱]

در مدل قطره مایع، می‌توان تغییرات انرژی بستگی را با عدد جرمی در نقاطی که منحنی دارای پیوستگی است توضیح داد، اما در نقاطی که منحنی پیوسته نمی باشد این مدل جوابگو نبوده و لازم است از مدل لایه‌ای استفاده شود . مدل لایه‌ای در هسته ها برگرفته از مدل لایه‌ای در اتم ها می باشد. اما به کار بردن مدل لایه‌ای در هسته ها مشکلاتی را نیز همراه دارد، اول این که در اتم ها پتانسیل حاکم را پتانسیل کولنی هسته تامین می‌کند ولی در مورد هسته هیچ عامل خارجی وجود ندارد و نوکلئون ها در پتانسیل خود حرکت می‌کنند. دوم نکته آن است که قطر نوکلئون‌ها نسبت به اندازه هسته بزرگ تر است[۱]. بنابراین این سوال می تواند مطرح شود که چگونه یک نوکلئون در هنگام حرکت می‌تواند بدون برخورد با نوکلئون‌های دیگر در یک مدار کاملا مشخص در حرکت باشد. با این وجود شواهد تجربی، وجود لایه‌های هسته ای را تایید می‌کنند. البته بعضی از هسته ها هستند که دارای انرژی بستگی خیلی بالایی می باشند، تعداد پروتون یا نوترون های این هسته ها برابر اعداد ۲، ۸، ۲۰، ۲۸،

۵۰، ۸۲، ۱۲۶ است که به اعداد جادویی مشهورند، که شباهت دیگری را با مدل لایه ای تایید می کند. ایزوتوپه‌ایی که دارای تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های جادویی هستند، به طوری نامعمول دارای عمری طولانی‌تر نیز هستند. انرژی جداسازی لازم برای یک هسته با تعداد پروتون‌ها یا نوترون‌های جادویی در مقایسه با هسته ای با تعداد یک نوترون بیشتر نسبت به اعداد جادویی بالاتر است و این نکته حایز اهمیت می باشد. در مدل لایه‌ای، می‌توان مشکل پتانسیل هسته‌ای را به این صورت برطرف کرد که هر نوکلئون تنها تحت تاثیر پتانسیل واحدی که نوکلئون های دیگر در ایجاد آن نقش دارند، در نظر گرفته می شود. بنابراین می‌توان برای هر یک از نوکلئون‌های هسته، ترازهای انرژی متناظر با زیر پوسته ها را به دست آورد.

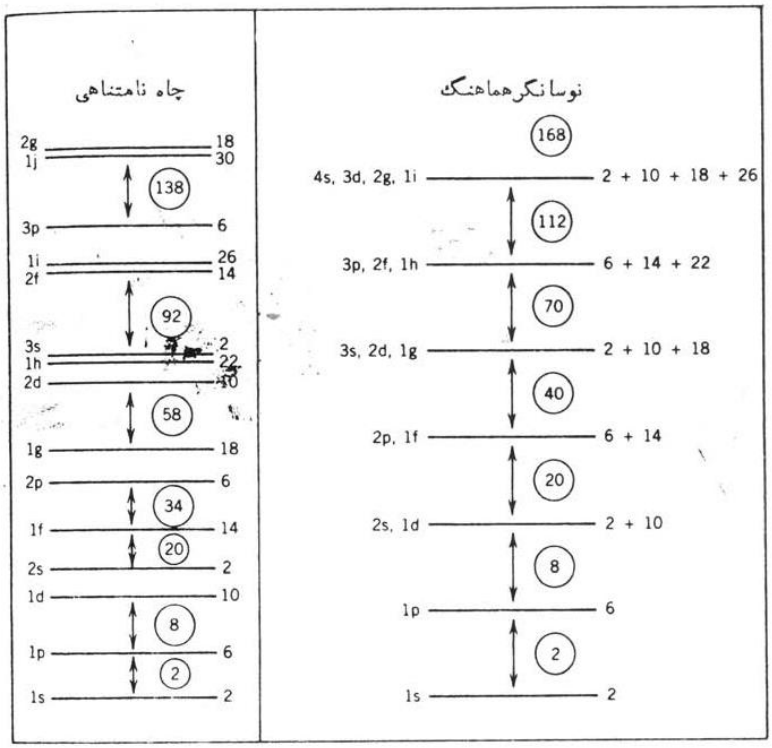
خواص هسته‌ای متعدد، بیانگر آن است که برای مقادیر خاصی از نوترون و پروتون ها ، انرژی جدا شدگی باعث شده تا رفتاری ناپیوسته از هسته بروز کند که منجر به پیشنهاد ساختار پوسته‌ای برای هسته‌ها شده است. ناپیوستگی‌ها وقتی کاملا یافت می‌شوند که نوترون یا پروتون ها مقادیر ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ را به خود اختصاص داده باشند. مطالعات تجربی صورت گرفته بر روی هسته‌هایی با مقادیر N و Z فوق نشان داده است که این هسته‌ها از پایداری بهتری برخوردار بوده و انرژی بستگی‌شان نیز نسبت به هسته‌های نظیرشان کاملاً بیشتر می‌باشد. با این وجود مدل لایه ای در هسته ها به صورتی بیان می شود که برای هر هسته، ساختار لایه‌ای در نظر گرفته شده، که نوکلئون‌ها در سطوح خاصی که هریک سطح انرژی مخصوص به خود را دارند، قرار می‌گیرند. البته فاصله ی لایه های هسته‌ای از فاصله ی لایه‌های الکترونی بیشتر است. در این مدل، نوکلئون‌ها نیز مانند الکترون ها ،با جذب انرژی تحریک شده و به لایه ی بالاتر می‌روند و وقتی مجبور به بازگشت به لایه خود می شوند ، یک فوتون آزاد می‌کنند.

در ارائه ی مدل پوسته‌ای، اولین گام انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب است. تا کنون هیچ یک از پتانسیل های بیان شده به طور دقیق نتوانسته اند ساختار هسته ای را به طورکامل توضیح دهند. از

پتانسیل های ارائه شده می‌توان به پتانسیل چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ اشاره کرد [۵]. حل معادله شرودینگر مربوط به این پتانسیل‌ها در مرجع [۱] موجود است.

یکی از مهم ترین مطالب در مدل لایه ای، تعیین تابع موج حاصل از معادله ی شرودینگر در پتانسیل های بکاربرده شده است. چنانچه تابع موج های یک پتانسیل متقارن کروی را می‌توان به دو قسمت مجزای شعاعی $R_{nl}(r)$ یعنی وابسته به مولفه شعاعی مکان و قسمت زاویه‌ای $Y_{lm}(\theta,\phi)$ وابسته به مولفه ی زاویه‌ای و جهتی مکان ذرات جداسازی کرد. عدد کوانتومی n مربوط به تعداد گره ها بعلاوه عدد یک در فاصله های $r > 0$ است. همچنین l برابر s، p، d، f، g، h، i و..... عدد کوانتومی تکانه ی زاویه‌ای است. انرژی مستقل از عدد کوانتومی مغناطیسی m است. ترازهای انرژی وابسته به n و l دارای واگنی $2(2l+1)$ است که فاکتور ۲ به دلیل دو جهت ممکن اسپین نوکلئون است.

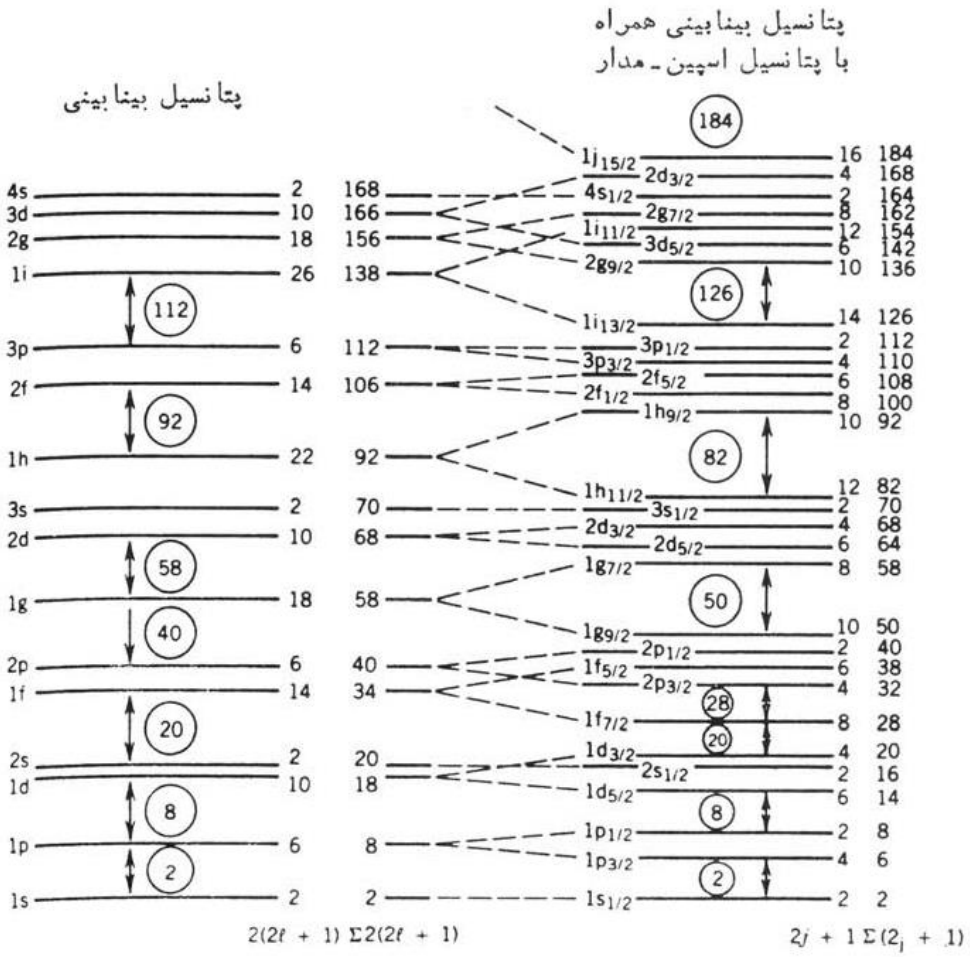
ترازهای انرژی حاصل از دو پتانسیل در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. در این شکل برخلاف فیزیک اتمی، عدد n عدد کوانتومی اصلی نیست و شماره تراز است.



شکل(۱-۳): ساختار پوسته ای حاصل از پتانسیل های چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ. ظرفیت هر تراز در سمت راست است و عدد داخل دایره نشانگر تعداد کل نوکلئون های موجود در پوسته های پر می باشد [۱].

در شکل بالا واگنی هر تراز برابر ۲(۲l+۱) می شود که در آن عامل (۲l+۱) از طریق واگنی m_l و عامل ۲ از طریق m_s حاصل شده است. در شکل اعداد جادویی ۲ ،۸ ،۲۰ ظاهر شده اند و اعداد بالاتر قابل مشاهده نمی باشند.

لذا می‌توان پتانسیل را با پتانسیل اسپین-مدار اصلاح‌کرد تا اعداد دیگر نیز ظاهر شوند که در شکل (۱-۴) آمده است. در شکل زیر همه ی اعداد جادویی ظاهر شده‌اند. در این شکل استنباط می شود که تنها نوکلئون‌های تزویج نشده در تعیین خواص هسته دخالت دارند. این نکته همچنین از پتانسیل اسپین مدار نیز نتیجه می شود.



شکل (۱-۴): این شکل حاصل از پتانسیل اسپین-مدار است [۱].

مدل پوسته‌ای بر اساس مکانیک کوانتومی ساخته و پرداخته شده و در موارد زیر از جمله بررسی خواص نوکلئید هایی که موجب گسیل ذرات آلفا، بتا و فوتون‌های گاما می‌شوند و بیان چگونگی میدان الکتریکی و مغناطیسی اطراف هسته‌ها، موفق بوده است ولی این مدل برای توضیح عمل شکافت کمکی نمی‌کند [۵و۶].

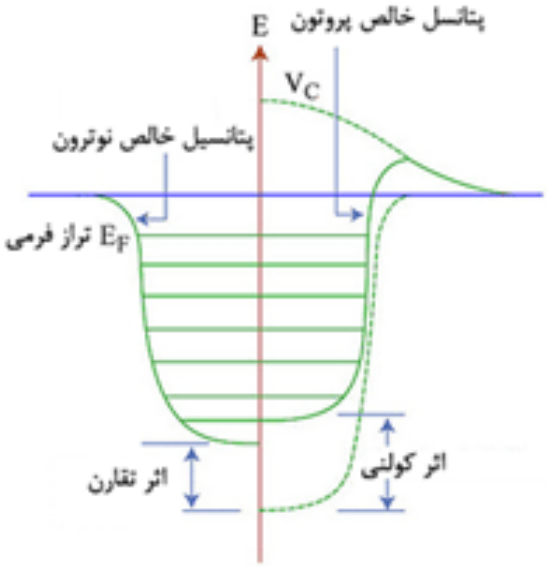
۱-۴ مدل تجمعی

این مدل از ترکیب دو مدل قطره مایع و مدل لایه‌ای ایجاد شده است. در این مدل هسته می‌تواند شکافته شود و تعداد پروتون‌ها و نوترون های آن تغییر کند. دانشمندانی مانند بور و موتلسون با ترکیب برخی از قسمت های مدل لایه‌ای با مدل قطره مایع، این مدل را پیشنهاد کردند که تفسیر بسیاری از نتایج تجربی را ممکن ساخته است. چنان که مانند مدل لایه‌ای، هر نوکلئون بر روی مداری قرار دارد که توسط پتانسیل حاصل از اثر تمامی نوکلئون‌های دیگر هسته تعیین می‌شود. از طرفی در ساختمان هسته، حرکت دسته جمعی نوکلئون‌ها بر مدارهای فردی آن ها نیز اثر می‌گذارد و پتانسیل ناحیه‌ای که نوکلئون‌ها در آن قرار می‌گیرند، تغییر می‌کنند. اگر هسته دارای لایه های تقریباً پر باشند، به دلیل پایداری مرکز هسته، حرکت دسته جمعی نوکلئون‌ها دارای اهمیت چندانی نیست و مدل لایه ای (ذره‌ای) غالب است. اگر تعداد پروتون‌ها و نوترون ها طوری باشد که فقط نصف یک لایه مربوط به نوکلئون ها پر شده باشد، مدل قطره مایع (دسته جمعی) غالب است [۱و۵].

۱-۵ مدل گاز فرمی:

مدل گاز فرمی نیز برگرفته از مدل لایه‌ای است ، با این تفاوت که نوکلئون‌ها مانند شکل (۱-۵) به طور جداگانه بر روی مداری قرار می گیرند. طبق این مدل، نوترون ها و پروتون‌ها به صورت آزادانه در یک چاه پتانسیل جاذبه‌ای به ابعاد هسته حرکت می‌کنند. برهم کنش کولنی بین پروتون‌ها، به وجود آورنده ی همین چاه پتانسیل است.

به همین دلیل ته چاه پتانسیل برای پروتون ها، در شکل به اندازه ی چند الکترون ولت بالاتر از نوترون‌ها می باشد [۱].



شکل(۱-۵) : این شکل بیانگر مدل گاز فرمی است[۱].

این مدل برای دستگاه هایی به کار می‌رود که ذرات تشکیل دهنده ی آن با هم برهم کنش ضعیفی دارند، یعنی ذرات از آمار فرمی-دیراک پیروی می کنند که منجر به اصل طرد پاولی می‌شود. گاز الکترونی آزاد یک مثالی از مدل گاز فرمی در حالت جامد است که الکترون ها به صورت نسبتا آزاد در پایه‌ای از یون‌های مثبت حرکت می کنند. در فیزیک هسته‌ای پروتون‌ها و نوترون‌ها به صورت آزادانه در حجم هسته حرکت می‌کنند که پتانسیل برهم کنش کننده به وسیله ی کل آنها تولید می‌شود. در شکل به دلیل نداشتن برهم کنش کولنی برای نوترون ها عمق چاه برای آن بیشتر است و این نکته ی مهمی است. از طرفی دیگر برای یک هسته ی پایدار، ترازهای فرمی برای پروتون‌ها و نوترون‌ها باید یکسان باشند، زیرا در غیر اینصورت باید با تابش بتا به حالت دیگر واپاشی کند. به عنوان یک نتیجه، حالت های نوترونی بیشتری نسبت به حالت پروتونی اشغال شده وجود دارد که این نکته این حقیقت را توضیح می‌دهد که برای هسته های سنگین پایدار تعداد نوترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌ها است . در

این مدل می‌توان تعداد حالت پروتون‌ها و نوترون‌ها در یک حجم هسته ای V را محاسبه کرد که رابطه ی محاسبه ی آن به صورت زیر است:

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} dV \qquad (۲-۱)$$

در دمای $T = 0$ یعنی برای یک هسته در حالت پایه اش، پایین ترین حالت ها تا یک تکانه ماکزیمم پر می‌شوند که به آن تکانه ی فرمی گویند. تعداد این حالت ها از انتگرال معادله ی بالا از ۰ تا p_F حاصل می‌شوند:

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2\hbar^3} \qquad (۳-۱)$$

چون هر حالت می تواند با دو نوکلئون از همان نوع پر شود، بنابراین:

$$N = \frac{V p_{F,n}^3}{3\pi^2\hbar^3} \text{ ، } Z = \frac{V p_{F,p}^3}{3\pi^2\hbar^3} \qquad (۴-۱)$$

که $p_{F,n}$ و $p_{F,p}$ به ترتیب تکانه ی فرمی نوترون و تکانه ی فرمی پروتون هستند. با استفاده از داده های قبلی از پراکندگی الکترون و شعاع هسته ها برحسب عددجرمی هسته‌ای A ، می‌توان حجم هسته ها را نیز از رابطه ی زیر محاسبه کرد:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \text{ , } R_0 = 1/21 fm \qquad (۵-۱)$$

از رابطه بالا و استفاده از $Z = N = A/2$ و شعاع برابر برای دو چاه پتانسیل مجزای پروتون و نوترون، رابطه زیر برای تکانه ی فرمی حاصل می شود:

$$p_f = p_{F,n} = p_{F,p} = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \approx 250 MeV/c \qquad (۶-۱)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نوکلئون ها با تکانه‌های بالای درونی هسته حرکت می‌کنند. لذا انرژی فرمی برابر انرژی بالاترین تراز اشغال شده بوسیله نوکلئون ها به صورت زیر خواهد بود:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_N} \approx 33\ MeV \qquad (۷-۱)$$

که M_N جرم نوکلئون است.

۱-۶ مدل خوشه‌ای

مدل خوشه‌ای بر اساس این فرضیه بنیان گذاری شده است که می‌توان هسته‌ها را به صورت خوشه‌هایی کوچک از نوکلئون‌ها که در کنار هم جمع شده اند درنظر گرفت. مهمترین این خوشه‌های نوکلئونی، ذرات آلفا (دوپروتون، دونوترون) می‌باشند (مطابق شکل۱-۶). لذا برای بررسی کامل و بهتر مدل خوشه ای لازم است ذره ی آلفا مورد بررسی قرارگیرد. بالا بودن انرژی بستگی ذره ی آلفا، ویژگی‌های خاصی را برای هسته‌هایی نظیر$^{8}_{4}Be$ ، $^{12}_{6}C$ و $^{16}_{8}O$ که حاوی تعداد درستی از این ذره هستند، به وجود می‌آورد. انرژی بستگی این هسته‌ها مساوی با جمع انرژی بستگی ذرات آلفایشان به اضافه یک سهم کوچک از انرژی بستگی حاصل پیوند بین ذرات آلفا با یکدیگر می‌باشد، که با انتخاب پتانسیل مناسب می‌توان شعاع و انرژی بستگی هسته‌های خوشه ی آلفا را محاسبه کرد. دلیل اصلی استفاده از خوشه‌های آلفا، ثبات و پایداری بالای آن است که کاملا جفت شده‌اند.

مدل مقدماتی آلفا برای هسته‌های چهار نوکلئونی سبک طراحی شده است که تحت عنوان سیستم‌هایی با ذرات آلفا بوده که از مکانیک آماری بوز-اینشتین[1] تبعیت می‌کنند. این مدل‌ها، ساختار درونی آلفا را نادیده می‌گیرند و اثرات طرد پاولی بین نوکلئون‌ها در خوشه‌های آلفا با معرفی یک نیروی دافعه ی کوتاه برد بین خوشه‌ها به حساب آورده می‌شود. بعد از نظریه گاموف[2] درباره واپاشی آلفا [۷] یک مدل ایجاد شد که هسته ها از ذرات آلفا تشکیل شده‌اند. او فرض کرد که هسته‌هایی که به صورت ۴n هستند مانند $^{4}_{2}He$، $^{8}_{4}Be$، $^{12}_{6}C$ و $^{16}_{8}O$ از ذرات آلفا تشکیل شده‌اند و هسته‌های دیگر شامل پروتون‌ها، الکترون ها و ذرات آلفا هستند. اما بعد از کشف نوترون، مدل های پروتون-نوترون هسته عمومیت پیدا کرد. تلر و هافستد ، یک مدل خوشه‌ای را پیشنهاد کردند که انرژی بستگی هسته‌هایی به صورت ۴n ، ۴n-۱ و ۴n+۱ را تخمین بزنند [۸]. در یک هسته ۴n-۱ شامل n آلفا و یک حفره و ۴n+۱ شامل n ذره آلفا و

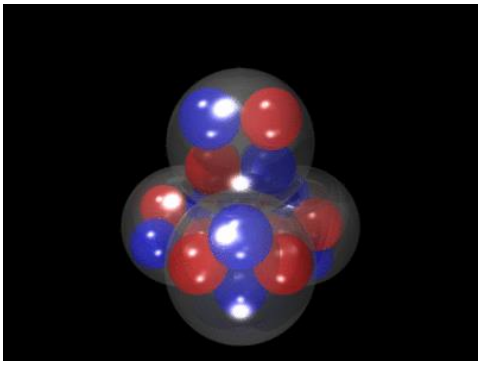
[1] Bose Einstein statistics
[2] Gamow

یک نوکلئون می‌باشند. در سال ۱۹۴۰ دانشمندی به نام دنیسون[1] مدلی را پیشنهاد کرد که درآن $^{16}_{8}O$ با چهار آلفا درگوشه‌های یک جسم چهارسطحی قرار گرفته اند. مدل های خوشه‌ای آلفا بیشتر برای شناخت طیف انرژی عناصری مانند $^{12}_{6}C$ و $^{16}_{8}O$ بکار برده شده است[۹،۱۰]. در دهه ۱۹۷۰ نیز کارهای دیگری در زمینه ی انرژی این عناصر با این مدل انجام پذیرفته است [۱۱-۲۱].

مدل خوشه‌ای در بحث‌های دیگر نیز کاربرد فراوانی دارد. مثلا در فیزیک اتمی، اتم ها مولکول ها را ایجاد می‌کنند و این بدان معنا است که اتم ها خوشه‌های مولکولی هستند و مولکول ها حالت های مختلفی مانند مایع، جامد و گاز را ایجاد می‌کنند. از طرفی کوارک[2]ها نیز خودشان را محصور به هادرون[3]ها یا همان نوکلئون‌ها می دانند که می‌توان به صورت خوشه‌ای آن را بیان کرد. پس با این وجود می توان نتیجه گرفت که مدل خوشه‌ای برای هسته ها نیز کاربردی خواهد بود.

ابتدا این نظریه مرسوم شد که ساختار خوشه‌ای نمی‌تواند در حالت پایه وجود داشته باشد و برای ایجاد این ساختار به انرژی کافی نیاز می باشد و با افزایش انرژی داخلی سیستم ایجاد می‌گردد. هسته به اجزای خوشه‌ای خود در حالی تجزیه می‌شود که انرژیی معادل اختلاف جرم بین هسته ی اولیه و خوشه‌های حاصل در دسترس باشد. بنابراین در ساختار خوشه‌ای انتظار بر آن است که در نزدیکی آستانه واپاشی خوشه‌ای[4] ظاهر شود. به عبارت دیگر می‌توان گفت که مدل های خوشه‌ای در برانگیختگی‌های هسته‌ای که با آستانه واپاشی همزمان است، خیلی آشکار به نظر می‌آیند. لذا ساختار خوشه‌ای آلفا+آلفا، در حالت پایه ایزوتوپ $^{8}_{4}Be$ یافت می‌شود.

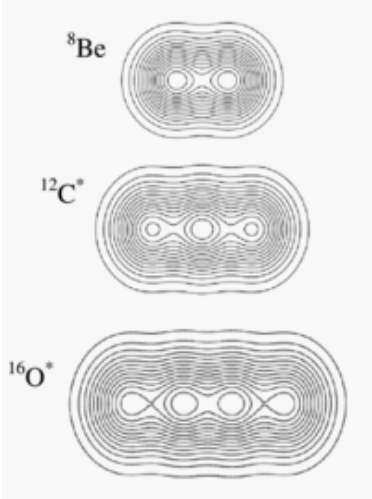
[1] Dennison
[2] Quark
[3] Hadron
[4] The cluster decay threshold



شکل(۱-۶): شکل قرار گرفتن ۴ خوشه ذره آلفا در $^{16}_{8}O$ را نشان می‌دهد.

در محاسبه چگالی ذرات در پتانسیل نوسانگر هماهنگ، خوشه‌های آلفا برای بعضی از ایزوتوپها خیلی آشکار است که در شکل(۱-۷) نشان داده شده است. هرچند این یک تقریب خیلی ساده به نظر می‌رسد اما محاسبات خیلی پیچیده ساختار هسته‌ای، تقارن‌های مشابهی را آشکار می‌کنند[۲۲]. کشف واپاشی ذره ی آلفا از هسته های سنگین، این ایده را که هسته‌ها احتمالا ابتدا از خوشه‌های نوکلئونی[1] (دو پروتون و دو نوترون) تشکیل شده باشند، تقویت کرد. بنابراین اگر خصوصیات هسته‌های نسبتا سبک مانند انرژی بستگی[2] هر نوکلئون آزمایش شود، مشاهده خواهد شد که انرژی بستگی برای سیستم هایی با تعداد پروتون های زوج بالاتر بوده و برای هسته هایی با تعداد نوترون ها و پروتون های زوج و برابر، انرژی بستگی ماکزیمم است، برای مثال هسته هایی مانند $^{4}_{2}He$، $^{8}_{4}Be$ و $^{12}_{6}C$. این قضیه را به صورتی توجیه می کنند که همه ی این هسته ها از ذرات آلفا تشکیل شده‌اند. در حقیقت تعدادی از اولین مدل های هسته‌ای بر اساس این اصل بسط داده شده‌اند، مانند کار هافستد و تلر در سال ۱۹۳۸[۸]. آزمایش های متعدد نشان می‌دهند که انرژی بستگی هسته‌هایی با A=۴n که n=۲,۳,۴,... وZ=N براساس تعداد ممکن پیوندهای $\alpha - \alpha$، یک رابطه ی خطی را آشکار می‌کنند که همین هم اهمیت نقش خوشه‌های آلفا در حالت پایه این هسته ها را پررنگ تر جلوه می دهد.

[1] The nucleon clusters
[2] The binding energy

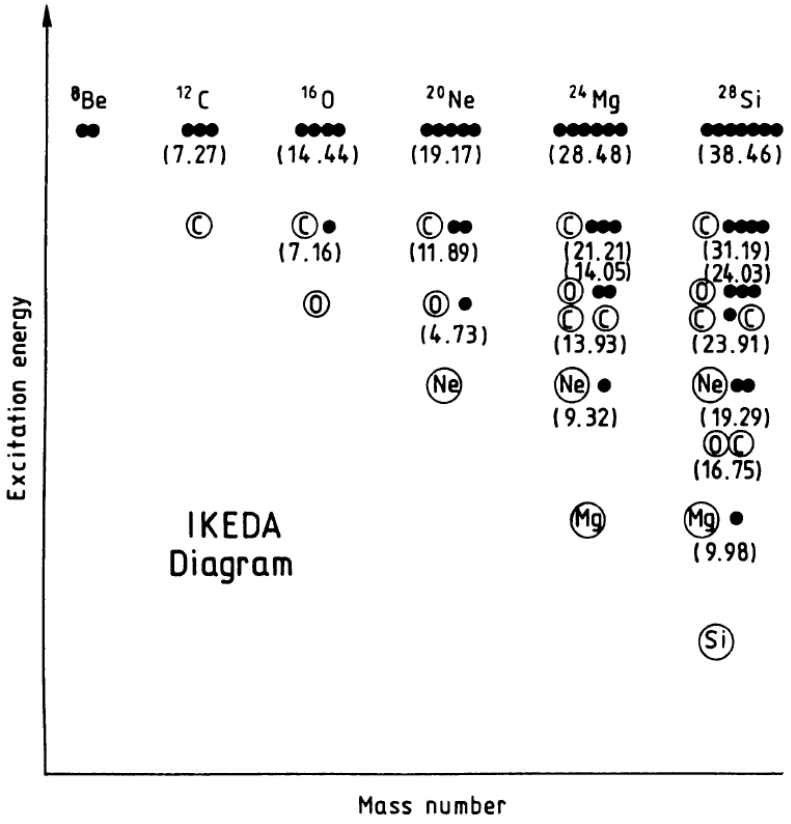


شکل۱-۷ : مدلی از چگالی ذرات در پتانسیل نوسانگر هماهنگ که مدل خوشه ای در آن واضح است

ماند، اما به بیان دقیق تر، ساختار خوشه‌ای خیلی متراکم شده و هم پوشانی طبق اصل پاولی انجام می‌شود[۲۲]. شواهد تجربی برای ساختار خوشه‌ای هسته‌های سبک کاملا مستند است[۲۴و۲۳]. ساده‌ترین مورد برای سیستم دو خوشه آلفا، هسته $^{8}_{4}Be$ است. شاید مشهورترین حالت خوشه ای، حالت $^{12}_{6}C$ در انرژی ۷٫۶۵MeV باشد که توسط هویل[1] در سال ۱۹۵۳ بیان شد [۲۵]. مدل ذره ی آلفا برای حالت های برانگیخته می‌تواند خیلی سریع تر از آنچه در مدل است، عمل کند و در این حالت این مدل به هسته‌های سبک محدود می‌شود. مفهوم خوشه در هسته‌ها زمانی که تاکید بر خوشه آلفا باشد اهمیت ویژه‌ای دارد به ویژه هنگامی‌که واکنش گذار با واپاشی آلفا مد نظر باشد. تحقیقات فراوان در مورد واکنش گذار آلفا نشان می‌دهد که این واکنش‌ها به صورت تبعیض‌آمیزی باندهای چرخشی در هسته‌های سبک را پر تعداد می‌کنند. این موضوع به صورت صریحی بیان‌کننده این مطلب است که حالت های مغز مرکزی هسته دارای ساختار آلفا می‌باشند. در نهایت می‌توان گفت که به صورت تجربی نشان داده شده که هسته‌های سبک، خودشان را به صورت خوشه ای نشان می‌دهند و در سیستم‌هایی با تعداد پروتون و نوکلئون‌های برابر و زوج، خوشه‌کردن سیستم به صورت ذرات آلفا، مدل مورد علاقه است. در هسته های سبک، مشاهده شده است که نوکلئون‌ها برای تشکیل

[1] Hoyle

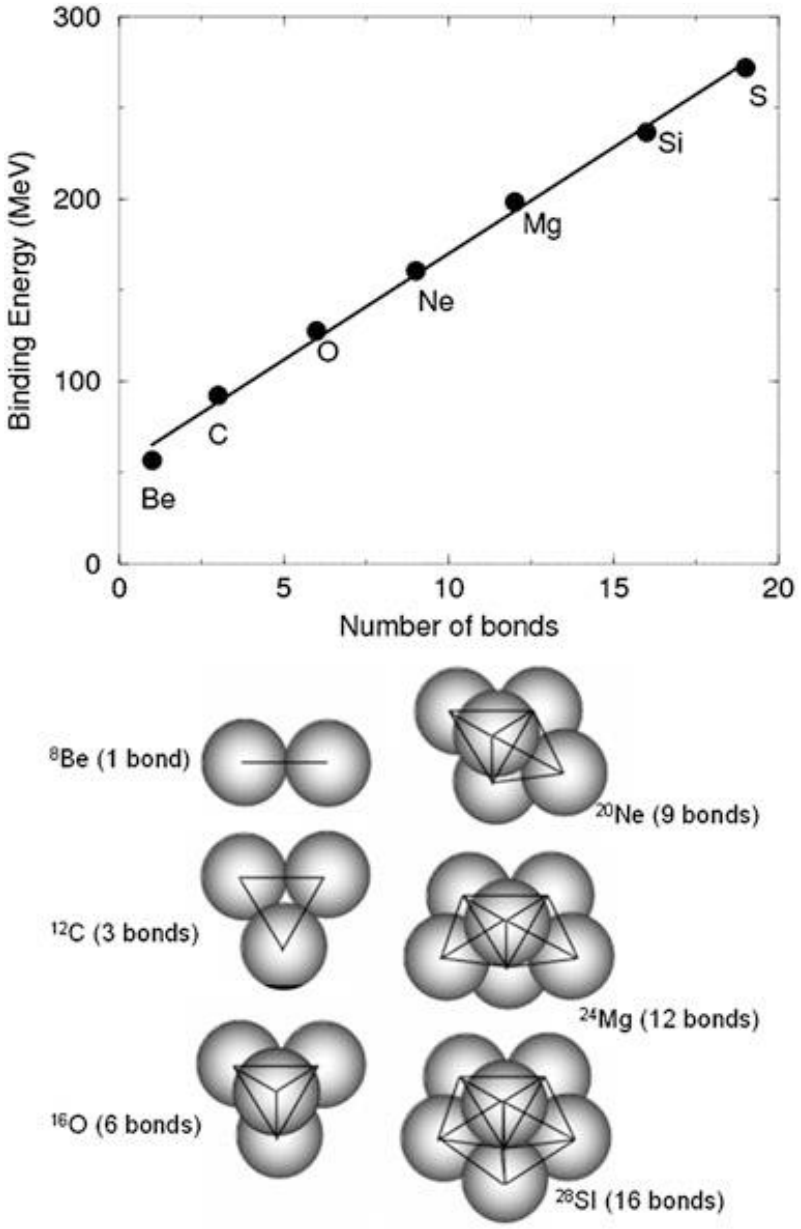
زیرساخت‌هایی در محدوده هسته های اتمی به هم می‌پیوندند، برای حالتی که نوکلئون‌ها به هم مقید باشند. این حقیقت به خوبی در نمودار ایکدا [1]بیان شده است.



شکل ۱-۸: نمودار ایکدا نشان دهنده حالت های خوشه ای در N=Z [۱۲].

احتمـال اینکه ذرات آلفا بتوانند خود را در شـــکل های متفاوتی کنار هم قرار دهند، از همان ابتدای پیدایش بحث ذرات آلفا در هســته وجود داشت. همانطور که قبلا گفته شد (مطابق شکل ۱-۸) هسته های سـبکی که از تعداد نوکلئون های برابر و زوج تشکیل شده اند هسته های پایداری هستند. هسته $^{4}_{2}He$ دارای دو ویژگی پایداری و بی تحرکی اسـت. این سـیسـتم ها بوسـیله هافسـتد و تلر بررسـی شدند[۸] که انرژی بستگی با تعداد پیوندهای بین ذرات آلفا بستگی دارد(مطابق شکل ۱-۹)

[1] Ikeda



شکل۱-۹: رابطه بین انرژی بستگی و تعداد پیوند بین ذرات آلفا در مدل خوشه ای[۸]

از شـکل (۱-۹) به سـادگی می‌توان دریافت که بین انرژی بسـتگی و تعداد برهم کنش های آلفا-آلفا رابطه ی خطی برقرار اسـت و همچنین می‌توان عدم جنبش ذرات آلفا را در حالت پایه نیز مشـاهده کرد. بنابراین انرژی بستگی هسته های تشکیل شده از N ذره آلفا به صورت زیر نوشته می شود:

$$E_B = N(BE_\alpha) + N(B_{\alpha\alpha}) \qquad (۸-۱)$$

که BE_α انرژی بستگی ذره آلفا و $B_{\alpha\alpha}$ انرژی بستگی بین دو ذره ی آلفا است.که بیانگر اهمیت انرژی همبستگی پیوندهای p-p ، n-n و n-p است که مربوط به اشغال اوربیتال‌های معمولی در هسته‌هایی با تعداد پروتون و نوترون های برابر و زوج است. البته هسته برای داشتن ساختاری خوشه ای باید از لحاظ انرژی به ترازی برانگیخته شود. در این زمینه مورینـاگا[1] بیان کرد که ذرات آلفا می‌توانند خودشان را در یک ساختار خطی سازماندهی کنند[۲۶]. به صورت دقیق تر، وقتی هسته به اجزای خوشه‌ای آن تجزیه می شود ، مانند همان شکافت هسته‌ای انرژیی معادل اختلاف جرم بین هسته و خوشه ها باید تأمین گردد. البته ساختار خوشه‌ای نزدیک به آستانه ی حالت واپاشی است. بنایراین برای جداسازی کامل خوشه‌ها از هم به انرژیی اضافی که معادل برهم کنش بین خوشه‌ها است، نیز نیاز است. این موضوع به وسیله ایکدا و همکارانش حاصل و در نمودار شکل (۱-۸) نشان داده شده است. شکل مزبور بیانگر آن است که هر درجه ی آزادی برای خوشه ی جدید به صورت آستانه ی واپاشی برای خوشه ی دیگر تخمین زده می‌شود. از این رو، انتقال تدریجی از حالت پایه به حالتی با N ذره ی آلفا وجود دارد. نمودار هندسی ترتیب خطی از ذرات آلفا را نشان می‌دهد ، در حقیقت می‌توان به این نکته اشاره کرد که این ساختار خطی دارای یک نوع بی ثباتی ذاتی است[۲۷]. تقارن عامل مهم دیگری است که که نقشی موثر در ترتیب هندسی خوشه های هسته ای را به خود اختصاص می دهد.

مدل خوشه‌ای آلفا و مدل قطره مایع در هسته ها، از ابتدای فیزیک هسته‌ای تا کنون توسعه داده شده[۲۸] و بر اساس دو فرض مهم که در مطالعات میکروسکوپی ساختار هسته ای برای هسته های سبک در چارچوب سیستم های چند ذره‌ای استفاده شده[۲۹] به شرح زیر بیان شده است:

۱. برهم کنش های جفت پروتون-نوترون که مبین چسبندگی بین خوشه های آلفا است.
۲. برهم کنش های نوکلئون-نوکلئون در ساختار خوشه‌ای آلفا که مستقل از آیزواسپین ها هستند.

[1] morinaga

در سال های اخیر مطالعات قابل توجهی در زمینه ی به کاربردن مدل خوشه‌ای آلفا برای ساده کردن مشـخصات هسته ها مانند انرژی جداسازی ذرات آلفا و شعاع هسته برای پهنه ی وسیعی از هسته ها نیز انجام شـده اسـت[۳۲-۳۰] که علی رغم موفقیت های گوناگون ، چون این مدل تنها برای هسته های سـبک جوابگو بوده و برای هسته هایی که تعداد پروتون و نوترون های آن ها برابر نبوده و جمع سـاده‌ای از ذرات آلفا در آن امکان پذیر نمی باشـد کاربرد چندانی ندارد. لذا نتوانسـته یک مدل کلی برای بررسـی هسته‌های مختلف در فیزیک هسته ای به حساب آید و مورد استفاده ی دانشمندان قرار گیرد.

۱-۷ جمع بندی فصل:

در این فصـل مدل های مختلف فیزیک هسـته‌ای از مدل های قدیمی یعنی قطره مایع تا مدل لایه‌ای مورد بررسـی قرار گرفته است. در بررسی این مدل‌ها نقاط ضعف و قوت مدل‌ها به انضمام محدوده ی استفاده از آن ها برای هسته‌های مختلف بیان شده است. مدل خوشه ای در مقایسه با دیگر مدل های هسته ای برای هسته‌های سبک به کار گرفته می شود.

فصل ۲

مدل خوشه‌ای ایزوتوپ های هسته‌ای

۲-۱ مقدمه:

بررسی سیستم های چند ذره‌ای مانند یک هسته اتمی بسیار پیچیده است زیرا در توصیف این سیستم‌ها تعداد ذرات و نوع آن ها (پروتون‌ها و نوترون ها) از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در توصیف هسته های اتمی به دلیل ریز بودن ذرات و ابعاد خیلی کوچک آنها ، مکانیک کوانتومی حاکم است. همچنین دربرهم کنش‌های بین ذرات، علاوه برنیروهای دو جسمی ، نیروهای سه جسمی نیز تاثیر دارند و همین بر پیچیدگی این سیستم ها می افزاید. چرا که در هسته‌ها، ذرات سازنده از لحاظ فاکتور بار الکتریکی با هم متفاوت می باشند، به شیوه ای که پروتون دارای بار مثبت و نوترون خنثی و یا به عبارتی بدون بار است، بنابراین افزایش پروتون‌ها عاملی برای ناپایداری بوده و برعکس بیشتر شدن نوترون ها بر پایداری هسته‌ها افزوده می‌کند. به عبارت دیگر عامل پایداری یک هسته نیروی هسته‌ای است که به بارذرات بستگی ندارد و عامل ربایش نوکلئون‌ها می باشد[۱و۵]. به این دلیل، خصوصیات سیستم‌های هسته‌ای نسبت به سیستم اتمی بسیار متفاوت است. معمولا هر هسته با دو عدد Z (تعداد پروتون‌ها) و N (تعداد نوترون ها) تعیین می‌شود که احتمال دارد تعداد آن ها زوج یا فرد باشد. تجربه نشان داده است که زوج بودن هردو یا فرد بودن آن ها در انرژی بستگی هسته نیز تاثیر دارد و هسته‌هایی که دارای هردو عدد زوج و برابر می باشند، بیشترین انرژی بستگی را نیز به خود اختصاص می دهند [۳۳].از طرفی هسته‌هایی که تعداد Z و N آن ها فرد می باشد نیز دارای پیچیدگی بیشتری بوده و توصیف آن ها سخت‌تر خواهد بود. بدین سان در این فصل با توجه به مبحث فوق الذکر، مفهوم ایزوتوپه‌ای هسته‌ای توضیح داده می‌شود.

۲-۲ تعریف ایزوتوپ هسته‌ای

ایزوتوپ هسته‌ای،اتم های یک نوع عنصر هستند که تعداد پروتون های (Z) آن ها یکسان ولی عدد جرمی (A) آن ها متفاوت است. اختلاف جرمی ایزوتوپ ها از اختلاف بین تعداد نوترون های آن ها

ناشی می‌شود. لذا هر عنصر می‌تواند ایزوتوپه‌ای مختلفی داشته باشد مانند ایزوتوپه‌ای هیدروژن: $^{1}_{1}H$ ، $^{2}_{1}D$ و $^{3}_{1}T$.

۲-۳ انواع ایزوتوپ ها

۲-۳-۱ ایزوتوپ پایدار

ایزوتوپی پایدار است که واپاشی نکرده و تاکنون هیچ نوع واپاشی در آن مشاهده نشده باشد. تاکنون ۲۵۴ ایزوتوپ پایدار شناسایی شده‌اند. چون عناصر سبک نسبت به عناصر سنگین از پایداری بیشتری برخوردار می باشند، بنابراین ایزوتوپه‌ای پایدار از عناصر سبک می باشند. نشان داده شده است که بیشتر این ایزوتوپ ها از ۴۰ عنصر اول می‌باشند. عنصر قلع بیشترین تعداد ایزوتوپ های پایدار را برابر عدد ۱۰ دارا می‌باشد. از عناصر موجود در طبیعت تنها ۲۶ عنصر، دارای یک ایزوتوپ پایدار هستند.

۲-۳-۲ ایزوتوپه‌ای ناپایدار

این ایزوتوپها پرتوزا هستند و نیمه عمر پایین و کوتاهی دارند. عناصر سنگین که عدد اتمی آن ها از ۸۳ بیشتر باشد، شامل این گروه هستند (به جز یک ایزوتوپ توریم و دو ایزوتوپ اورانیوم).

۲-۴ ویژگی های هسته ای ایزوتوپ ها

چون پایداری یک هسته به تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن بستگی دارد بنابراین اگر تعدادپروتون‌ها بسیار بیشتر از نوترون ها باشد، پروتون‌ها یکدیگر را دفع می‌کنند و واپاشی رخ می‌دهد. اما اگر نوترون ها بیشتر باشند هسته پایدارتر خواهد بود زیرا اولا یک لایه بین پروتون‌ها قرار گرفته و از دافعه ی آن ها می کاهد، ثانیا با نیروی جاذبه ای که حاکم است پروتون‌ها را به سمت خود کشیده تا بدین صورت پروتون ها در کنار هم باقی مانده و استحکام هسته حفظ شود. چون زوج یا فرد بودن تعداد پروتون‌ها و نوترون ها و مجموع آن ها در پایداری یک هسته اهمیت دارد، بنابراین لازم است که ایزوتوپها را از این لحاظ بررسی کنیم.

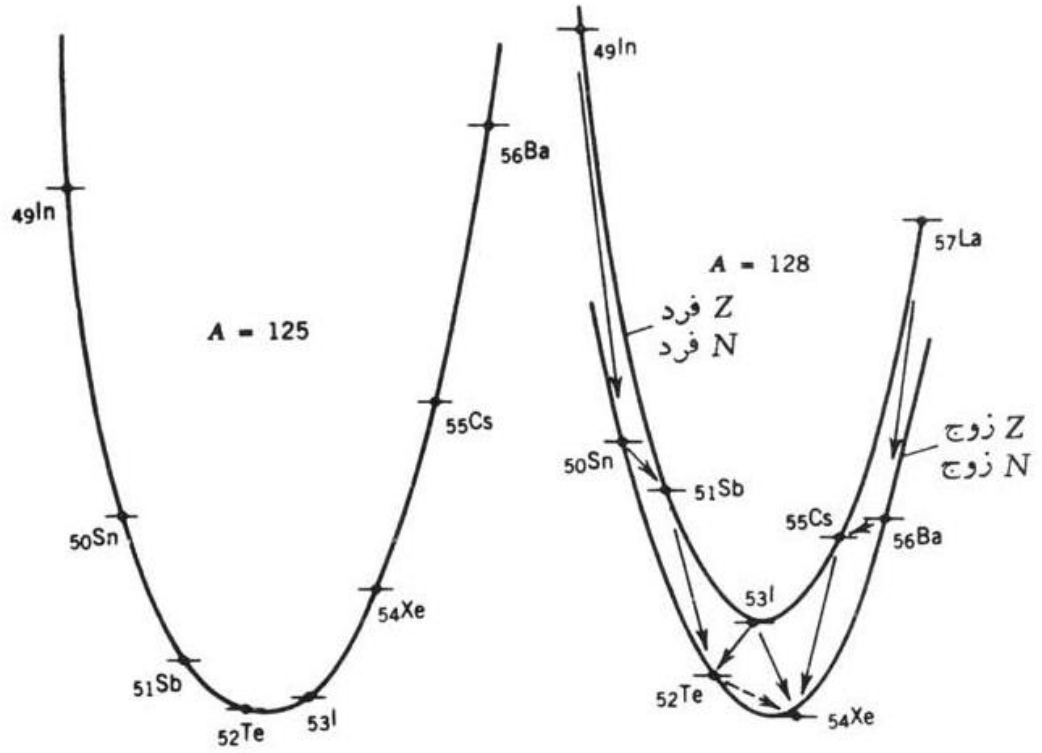
۲-۴-۱ ایزوتوپ های زوج – زوج

ایزوتوپ هایی هستند که تعداد پروتون ها و نوترون های آن ها زوج باشند مانند $^{16}_{8}O$ و $^{12}_{6}C$ یا $^{18}_{8}O$. در همه این ایزوتوپها تعداد N و Z زوج هستند ولی الزاما برابر نیستند. اما زوج بودن این دو عدد در پایداری هسته دخالت دارد. در فرمول نیمه تجربی جرم یکی از جملات که در انرژی بستگی نوکلئون‌ها دخالت دارد، مربوط به زوج و فرد بودن این ذرات یا جمله تزویج است. انرژی تزویج، تمایل نوکلئون‌های همنام (مثلاً پروتون) به تشکیل زوج و تحکیم پیکربندی پایدار هسته‌ای را نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر نوکلئون‌های همنام تمایل دارند بصورت زوج‌هایی با اسپین صفر (یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین) در حالت فضایی واحدی قرارگیرند. این نوع جفت شدگی منجر به افزایش انرژی بستگی ناشی از همپوشانی تابع موج‌های فضایی می‌شود. هم پوشانی تابع موج‌ها، بدان معنی است که نوکلئون‌ها نسبت به وقتی که در اوربیتال‌های متفاوت قرار می‌گیرند زمان بیشتری را در نزدیکی همدیگر و در محدوده‌ی برد نیروی هسته‌ای خود می گذرانند.

اگرN و Z هر دو عدد زوج باشند و همه نوکلئون‌ها بر اثر جفت شدگی به صورت زوج هایی با اسپین صفر درآیند آنگاه اسپین کل هسته صفرخواهد شد و اثر جفت شدگی، انرژی بستگی هسته را افزایش می‌دهد.

بنابراین برای هسته های (زوج – زوج) انرژی تزویج $\boldsymbol{\delta}$ با علامت مثبت، در فرمول اصلی انرژی بستگی ظاهر می‌شود که مقدار آن برابر $+a_p\, A^{-\frac{3}{4}}$ است [۱و۵]. در کتابهای مختلف هسته‌ای این جمله زوجیت برای هسته های زوج-زوج به صورت $+11.2\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$ بیان می شود. با این وجود این مهم مشاهده می شودکه هسته‌های زوج-زوج از پایداری خیلی بالایی بر خوردارند (شکل ۲-۱). شکل زیر بیانگر آن است که هسته های زوج-زوج پایدارترند. تعداد ایزوتوپه‌ای هسته‌ای مختلف با تعداد N و Z زوج برابر عدد ۱۶۷می باشد [۱]. در مدل لایه‌ای، با توجه به اینکه نوکلئون‌های یک مدار بیشترین زمان را در نزدیکی هم می گذرانند بنابراین برهم کنش آن ها نیز بیشتر از وضعیت‌های دیگر است. پس بدین

ترتیب می توان نتیجه گرفت که برهم کنش تزویجی از همه حالت های دیگر نیز بیشترخواهد بود [۲۵،۳۳].



شکل(۲-۱): زنجیرهای جرمی برای دو دسته از ایزومرهای A=۱۲۵ و A=۱۲۸ .

برهم کنش تزویجی آنقدر موثر است که در حالت های پایه ی هسته‌هایی با پوسته ی غیر پر نیز که دارای پروتون و نوترون های زوج هستند اثر مهمی می گذارند. مهم ترین اثر در حالت پایه ی این هسته‌های زوج-زوج، برای تمام نوترون هایی که در پوسته‌های پر نیستند با نوترون های دیگر، و تمام پروتون‌ها با پروتون های دیگر آن است که به صورت جفت در می آیند. بنابراین هر جفت شامل دو عضو در یک لایه است که در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. یعنی دارای اعداد کوانتومی j،l،n و عدد کوانتومی متقارن m هستند. تکانه زاویه‌ای کل برای هر جفت برابر صفر است زیرا تکانه ی زاویه‌ای هریک برابر و در جهت خلاف هم قرار دارند [۲۵].از طرفی چون الکترون‌ها از یک تکانه‌ی زاویه‌ای ذاتی به نام اسپین هسته برخوردار می‌باشند و نوکلئون‌ها نیز دارای تکانه ی زاویه‌ای ذاتی اسپین هستند و هسته اتم نیز پیرامون یک محور می چرخد و مقدار تکانه زاویه‌ای هسته‌ای آن در نتیجه این چرخش

برابراست با $I\hbar$ که در آن I عدد کوانتومی اسپین هسته‌ای است، این عدد برای هسته‌های زوج-زوج برابر صفر است.

۲-۴-۲ ایزوتوپ های فرد-فرد

از آنجایی که نوکلئون‌های مشابه تمایل به تشکیل زوج دارند تا پیکربندی هسته محکم شود، و چون در ایزوتوپه‌ای فرد-فرد این تمایل وجود ندارد لذا پایداری هسته های ایزوتوپه‌ای فرد-فرد نسبت به هسته-هایی با ایزوتوپ زوج-زوج کمتراست. جمله تزویج برای ایزوتوپه‌ای فرد-فرد به صورت $-a_p A^{-\frac{3}{4}}$ می‌باشد که انرژی بستگی آن ها را کاهش می دهد.بدین ترتیب با دقت و توجه به هسته‌های پایدار که در طبیعت یافت می‌شوند، می‌توان به شواهدی مبنی بر وجود نیروی تزویج در هسته‌ها دست یافت. شایان ذکر است که فقط ۴ هسته در طبیعت یافت می شوند که عدد Z وN آنها فرد است آنها عبارتند از: ($^{2}_{1}H$، $^{6}_{3}Li$، $^{10}_{5}B$، $^{14}_{7}N$)[۲۵]. در شکل ۲-۱ نیز می‌توان ناپایداری این ایزوتوپها را نسبت به هسته‌های زوج-زوج ملاحظه کرد. هسته‌هایی با نوترون و پروتون فرد می توانند به هر دو روش تبدیل نوترون به پروتون (با تابش β^-) و یا تبدیل پروتون به نوترون (با تابش β^+) واپاشیده شوند. مثلاً هسته‌ی $^{128}_{53}I$ به دو طریق وا می‌پاشد. عدد کوانتومی اسپین (I) برای هسته‌های (فرد – فرد) عدد درستی است. مثلاً برای هسته‌های $^{2}_{1}H_{1}$، $^{14}_{7}N_{7}$، $^{12}_{5}B_{7}$، $^{6}_{3}Li_{3}$ برابر یک می باشد (I=1)

۲-۴-۳ ایزوتوپ های فرد-زوج یا زوج-فرد

ایزوتوپه‌ایی هستند که تعداد پروتون ها و نوترون های آن ها فرد و زوج یا زوج و فرد هستند. به عبارت بهتر، ایزوتوپه‌ایی هستند که عدد جرمی (A) آن ها فرد است. مانند $^{17}_{8}O$و$^{3}_{1}H$ و... . در این مدل اگر عمل تزویج در لایه‌ها صورت‌پذیرد، آنگاه یک نوکلئون تنها (مانند الکترون آزاد) و یا به عبارتی تک خواهد ماند. برای هسته‌هایی با عدد جرمی فرد، جمله تزویج برابر صفر است. بنابراین انرژی بستگی آن ها نیز از هسته های فرد-فرد بیشتر خواهد بود. ساده ترین حالت های یک هسته با Z زوج و N فرد

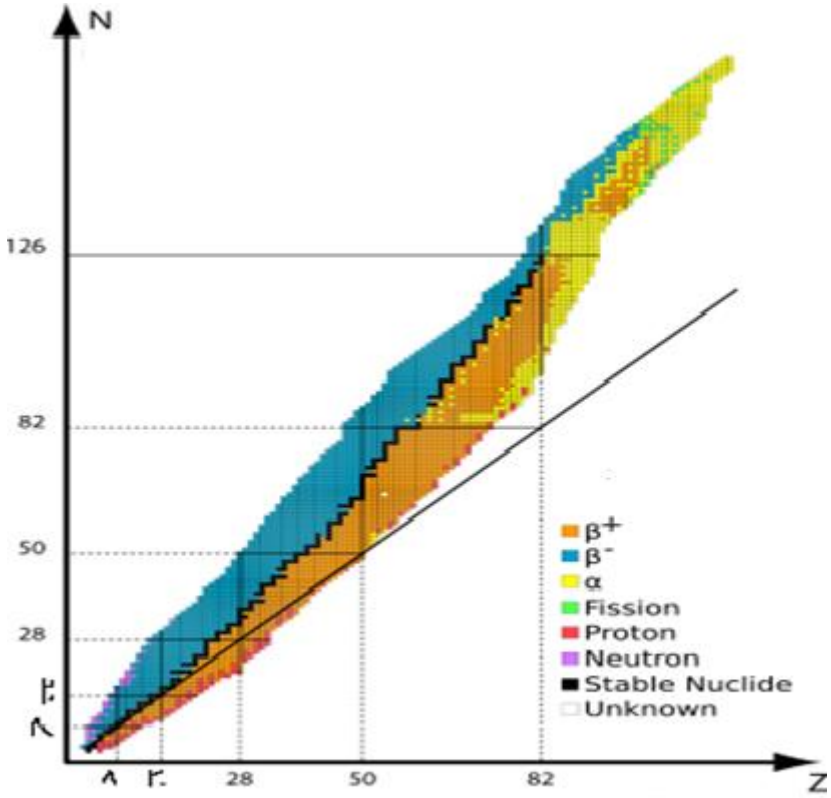
حالت های شبه ذره منفرد [1](SQP) است [۲۵]. شبه ذره منفرد حالت هایی هستند که با اضافه کردن یک ذره یا یک حفره به نزدیکترین هسته زوج-زوج به دست می‌آیند. عدد کوانتومی اسپین (I) هسته های (زوج – فرد) و (فرد – زوج) یا به عبارت دیگر هسته‌هایی با عدد جرمی فرد، I یک عدد نیم درست فرد است یعنی $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{2}$، $\frac{5}{2}$ و... . مثلاً I برای $^{3}_{2}He_{1}$ برابر $\frac{1}{2}$ و برای $^{7}_{3}Li_{4}$ برابر $\frac{3}{2}$ است. بنابراین می‌توان پر شدن دو ایزوتوپ با A فرد را در مدل لایه‌ای با پتانسیل اسپین-مدار برای ایزوتوپ هایی مانند $^{15}_{8}O$ و $^{17}_{8}O$ مشاهده کرد. لذا می توان نتیجه گرفت که در مدل پوسته‌ای تنها نوکلئون‌های تزویج نشده در تعیین خواص هسته دخالت داشته و لایه‌های پر هیچ تاثیری در خواص هسته‌ها ندارند. از نوکلئون‌های تنها نیز می توان پاریته را به صورت سازگار با تجربه بدست آورد. این نکته تا حدودی مدل پوسته‌ای را تایید می‌کند و مشاهده می شود که هسته هایی با عدد جرمی فرد در این کار نقشی بسیار اساسی دارند [۲۵].

۲-۴-۴ ایزوتوپ های دو جادویی:

ایزوتوپ های دو جادویی، ایزوتوپه‌ایی هستند که تعداد پروتون‌ها و نوترون های آن ها اعداد جادویی می باشند. اعداد جادویی که عبارتند از ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶، در قله ی نمودار انرژی بستگی هسته مشاهده می شوند. در بیشتر موارد، اعداد Z و N ایزوتوپه‌ای هسته های دو جادویی نمی‌توانند دو عدد مختلف جادویی را در بر داشته باشند، لذا در این مورد، باید هر دو عدد ،یک عدد جادویی را قبول کنند، یعنی N=Z ، مانند $^{4}_{2}He$ ، $^{16}_{8}O$، $^{40}_{20}Ca$ و در حالتی که دو عدد Z و N با هم برابر نباشند می توان ایزوتوپ $^{208}_{82}Pb$ را معرفی کرد. بنابراین چهار ایزوتوپ دوجادویی موجود است،که از تقاطع خطوط افقی و عمودی در ناحیه مشخص شده قابل مشاهده خواهد بود (شکل ۲-۲). این ایزوتوپه‌ا،در واقع زیر مجموعه ی ایزوتوپه‌ای زوج-زوج می باشند، ولی از آنجاییکه اعداد زوج آن ها از لیست اعداد جادویی است، بنابراین از لحاظ کاربرد عملی، نیز بسیار سودمند می باشند. لذا به دلیل نیروی تزویج، از انرژی بستگی زیادی نیز برخوردارند. علاوه بر این با توجه به پر شدن لایه‌ها مطابق با

[1] The single quasi particle

مدل پوسته‌ای،که اعداد جادویی را نشان می دهد، انرژی بستگی این ایزوتوپ ها نیز بیشتر می شود. از شکل(۱-۲) می‌توان متوجه شد که در نمودار پایین که در رابطه با ایزوتوپها می باشد، هر رشته برای یک ایزوتوپ است. قله هر رشته مربوط به ایزوتوپه‌ای دوجادویی است. مثلا در رشته اول که برای ایزوتوپه‌ای اکسیژن است، یعنی $^{15}_{8}O$،$^{16}_{8}O$ ،$^{17}_{8}O$و $^{18}_{8}O$، بیانگر آن است که انرژی بستگی ایزوتوپ دوجادویی $^{16}_{8}O$ از دو ایزوتوپ مجاور خود بیشتر است و این ، ویژگی خاص این نوع ایزوتوپها را می-رساند. البته در انرژی بستگی هسته‌ها، فاکتورهای مهم دیگری نیز دخالت دارند [۲۵].



شکل(۲-۲): در این شکل تعداد پروتون‌ها بر حسب نوترون ها برای هسته‌های مختلف نشان داده شده است که با مربع‌های مشکی مشخص است. می‌توان هسته‌های دوجادویی را در شکل مشخص کرد که از تقاطع خطوط خط چین حاصل شده است [۲۵].

به دلیل اینکه تعداد پروتون‌ها و نوترون ها در سه ایزوتوپ از چهار ایزوتوپ دو جادویی، با هم برابر هستند، جمله تقارن یعنی $-a_{sym}(A-2Z)^2/A$ نیز که در انرژی بستگی تاثیر بسزایی دارد برابر صفر است. اما تاثیر بیشتر بالا بودن انرژی بستگی این ایزوتوپها به دلیل این است که لایه‌های پروتونی و

نوترونی در آن‌ها پر شده است. ایزوتوپه‌ای دوجادویی می‌توانند به صورت مدل‌های خوشه‌ای، یعنی تعداد صحیح از خوشه‌های آلفا بررسی شوند، مانند $^{16}_{8}O$ که از چهارخوشه آلفا تشکیل شده است. ذره آلفا همان هسته ایزوتوپ هلیم $^{4}_{2}He$ می باشد که یک ایزوتوپ دوجادویی است زیرا از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده است. یکی از دلایلی که از خوشه آلفا در مدل خوشه‌ای استفاده می شود، پایداری بالای این ایزوتوپ دوجادویی است. در ایزوتوپ دوجادویی $^{16}_{8}O$ ، چهار خوشه آلفا مانند چهار مولکول که با پیوندهای مولکولی به هم مربوطند، در کنار هم قرار می‌گیرند. هسته‌های دوجادویی، لایه‌هایی پر از پروتون ها و نوترون ها می باشند که ذرات زیر اتمی به نام نوکلئون شناخته می‌شوند. ازاینرو، یک چنین هسته‌هایی دارای ذراتی هستند که به سختی کنار هم قرار گرفته‌اند و تحریک این هسته‌ها نسبت به هسته‌های همسایه شان در شکل (۲-۲) خیلی سخت‌تر خواهد بود. سنگ بنای درک ما از فیزیک هسته‌ای ساختار ساده ی هسته‌های دو جادویی است ،زیرا همسایگان آن ها را می‌توان برحسب تعدادی اضافی از نوکلئون‌های برهم کنش کننده با چرخش از یک دستگاه چند ذره‌ای کوانتومی به یک مسئله چند جسمی توصیف کرد. یکی دیگر از ایزوتوپه‌ای دو جادویی که اولین بار در سال ۱۹۹۵ مشاهده شد و تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن با هم برابر نیستند ، ایزوتوپ $^{78}_{28}Ni$ است [۳۵ و ۳۴]. به دلیل اینکه این ایزوتوپ غنی از نوترون است، پس ساختن و مطالعه آن مشکل است. این ایزوتوپ نادر از نیکل، دارای نیمه عمر کوتاهی در حدود ۰/۱ ثانیه است که در سال ۲۰۰۵ اندازه گیری شد [۳۶]. همچنین اطلاعات نه چندان زیادی از این ایزوتوپ در دسترس می باشد. تانیچی و همکارانش هسته $^{78}_{28}Ni$ را با تفکیک به ترتیب به یک و دو پروتون به ایزوتوپ های نادر مس $^{79}_{29}Cu$ و روی $^{80}_{30}Zn$ ، بررسی کردند [۳۷] که پرتوهایی تولید شد و نتایج قابل مشاهده ای به همراه داشت. لذا با تطبیق دادن واکنش‌های حذفی پروتون از یک ایزوتوپ، تانیچی و همکارانش شاهد پرتوهای ساطع شده ی گاما شدند ، بطوریکه وقتی ایزوتوپ $^{78}_{28}Ni$ از حالت های برانگیخته مختلف در انرژی MeV ۲/۶ به حالت پایه گذار می کند، یک تابش قوی از پرتوهای گاما ساطع و قابل مشاهده بود. بنابراین، به طور نسبی

انرژی زیاد این حالت برانگیختگی، ایزوتوپ $^{78}_{28}Ni$ را نیز به صورت یک ایزوتوپ دوجادویی معرفی می‌کند [۳۴].

۲-۵ انواع مدل ها در توصیف خوشه‌ای ایزوتوپ های هسته‌ای

۲-۵-۱ مدل نوسانگرهماهنگ(HOM):

در این مدل فرض براین است که دو خوشه از یک هسته توسط یک فنر به هم متصل هستند که در فواصل نزدیک همدیگر را دفع و در فواصل متوسط همدیگر را جذب می‌کنند. بنابراین پتانسیلی که در اینجا به کار می‌رود، یک پتانسیل میانگین است که از همه خوشه‌های سازنده نتیجه شده است و آن، همان نوسانگر هماهنگ می باشد. یعنی:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2mi} + \frac{1}{2} m\omega^2 z_i^2 \qquad (۱-۲)$$

جواب معادله شرودینگر به صورت سطوح انرژی معروف برابر $E = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$ بوده و تابع موج آن نیز به روش تحلیلی به صورت زیر قابل حل می باشد که در راستای Z نوشته شده است:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right) e^{\frac{-\mu\omega z^2}{2\hbar}} \qquad (۲-۲)$$

در این رابطه n عددکوانتومی نوسانی وابسته به محور z است، μ جرم کاهیده، ω بسامد نوسان و H_n چند جمله هرمیت[1] از مرتبه n و در راستای محور z است.

۲-۵-۲ مدل نوسانگر هارمونیک با دو مرکز[2]

یکی از شگردهای دیگر حل معادله شرودینگر این است که هر خوشه ی آلفا به وسیله پتانسیل نوسانگر هماهنگ خاص خود حرکت می‌کند. در این مدل، هر خوشه با پتانسیلی جداگانه با استفاده از روش نوسانگر هارمونیک، مدل‌سازی می شود.

[1] Hermite Polynomial
[2] Two centre harmonic oscillator

این روش برای سیستم‌های ۴n+۱ و ۴n-۱ که هسته‌های زوج-زوج با یک نوکلئون اضافی یا یک حفره می‌باشد، کاربرد ویژه ای دارد. با استفاده از این مدل می‌توان یک سیستم دو خوشه‌ای با یک نوکلئون اضافی مانند $^{9}_{4}Be$ را حل کرد که به صورت زیر تابع موج نوترون بدست می‌آید:

$$\psi(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}}\left(H_n(z-z_1)e^{\frac{-\omega(z-z_1)^2}{2}}\pm H_n(z-z_2)e^{\frac{-\omega(z-z_2)^2}{2}}\right) \qquad (۳-۲)$$

n عدد کوانتومی نوسانگر، ω بسامد نوسان و H_n چند جمله هرمیت و از مرتبه n و در راستای z است. کمیت های z_1 و z_2 محل قرارگیری دو خوشه آلفا می‌باشند.

۲-۵-۳ مدل خوشه‌ای آلفا برینک-بلاچ[1][۳۸]

مدل خوشه‌ای آلفا اولین بار به وسیله مارگنو[2] بررسی شد و به وسیله برینک توسعه داده شد [۳۸]. با استفاده از کار بلاچ این مدل می‌تواند ایزوتوپ آلفا مزدوج را تحلیل کند. در این مدل هر خوشه از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند که دارای اندازه حرکت زاویه‌ای جفت شده برابر صفراست.

این مدل در هسته‌هایی که N=Z و A=۴n می باشد که n تعداد خوشه ها است، کاربرد دارد. هامیلتونی توصیف کننده انرژی کل یک سیستم آلفا-مزدوج به صورت زیر است:

$$H=\sum_{i=1}^{n}T_i+\sum_{i\neq j}^{n}v(r_i-r_j)+v_c(r_i-r_j)-T_{c.m} \qquad (۴-۲)$$

که T_{cm} انرژی مرکز جرم سیستم است، برهم کنش‌های بین α-α به وسیله پتانسیل $v(r_i-r_j)$ که پتانسیل نوکلئون-نوکلئون است، توصیف می شود و $v_c(r_i-r_j)$ همان برهم کنش کولنی است.

۲-۵-۴ مدل پدیده شناختی[3] بررسی ایزوتوپه‌ای مزدوج

دراین روش ابتدا برای برهم کنش بین ذرات موجود در سیستم، پتانسیل مناسبی شامل چند پارامتر در نظرگرفته می شود و پس از آن، پارامترها را به روش همخوانی نتایج تجربی و عددی تعیین می‌کنند

[1] Brink-Bloch Alpha Cluster Model
[2] Margenau
[3] Phenomenological Potentials

[۳۹و۴۰]. در سیستم‌های خوشه‌ای این پتانسیل‌ها باید شامل جملات جاذبه و دافعه باشند. پتانسیل های مهم زیر دارای کاربرد در این مدل می باشند :

۱) برای برهم کنش ذرات α در $^{12}_{6}C$، جملات شامل جاذبه هسته‌ای به شکل گاوسی و یک جمله دافعه کولنی به صورت زیر، در نظر گرفته می شود:

$$V(r) = -V_0 e^{-\alpha r^2} + \frac{V_1}{r} \qquad (۵-۲)$$

که V_0 و V_1 بزرگی هریک از جملات و قدرت آن ها و α عکس مجذور برد پتانسیل است. این پارامترها از راه تطابق بین داده‌های تجربی با نتایج عددی، تعیین می‌گردند.

۲- پتانسیل زیر برای برهم کنش بین دو خوشه آلفا بوسیله علی و بودمر مطرح شده است:

$$V(r) = V_R e^{\frac{-r^2}{\alpha_R^2}} - V_A e^{\frac{-r^2}{\alpha_A^2}} + \frac{C}{r} \qquad (۶-۲)$$

در پتانسیل فوق قسمت جاذبه و دافعه مشخص است و α_R و α_A برد پتانسیل در قسمت دافعه و جاذبه هستند و C قدرت جمله کولنی است.

۳) برای بررسی ایزوتوپ های آلفا مزدوج $^{8}_{4}Be$ نیز پتانسیل دیگری که ترکیبی از یک چاه جاذبه مانند پتانسیل وود-ساکسون[1] و جمله دافعه کولنی بود مطابق زیر پیشنهاد شد:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1+e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{V_1}{r} \qquad (۷-۲)$$

کمیت های V_0وV_1 به ترتیب بیانگر عمق چاه پتانسیل و قدرت جمله دافعه کولنی است. R_0 ، شعاع خوشه ی آلفا و a برد پتانسیل لحاظ شده است [۴۱و۴۲] .

۴) پتانسیل دیگر معرفی شده برای بررسی ایزوتوپ آلفا-مزدوج $^{8}_{4}Be$:

$$V(r) = -A + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r} \qquad (۸-۲)$$

کهA عمق چاه، B قدرت دافعه و C قدرت جمله کولنی است[۴۰].

[1] Woods-Saxon

۵- از دیگر پتانسیل‌های مهم می‌توان به مجموع پتانسیل یوکاوا و پتانسیل اصلاح شده هالتن[1] نیز اشاره کرد [۴۱و۴۲]:

$$V(r) = -\frac{v_0 e^{-\alpha r}}{\alpha(1-e^{-\alpha r})} + \frac{v_1 e^{-\alpha r}}{\alpha r^2} \qquad (۹-۲)$$

که پارامترهای V_0وV_1 پارامترهای حقیقی، پارامترهای قدرت، هستند. همچنین پارامتر α مربوط به محدوده پتانسیل است.

۶- از دیگر پتانسیل‌های استفاده شده، می‌توان پتانسیل جایگزیده ی زیر را که یک پتانسیل پدیده شناختی است و با پتانسیل هافستد-تلر نیز همخوانی دارد، بیان کرد:

$$V(r) = V_N(r) + V_C(r) = -V_A \frac{e^{-\frac{r^2}{\alpha_A^2}}}{r} + V_R \frac{e^{-\frac{r^2}{\alpha_R^2}}}{r^2} + \frac{V_C}{r} \qquad (۱۰-۲)$$

۲-۶ جمع بندی فصل:

در این فصل ساختار اصلی ایزوتوپ ها و تنوع آنها، با توجه به زوج یا فرد بودن تعداد نوترون ها و پروتون‌هایشان شرح داده شده است، که این زوج و فرد بودن تعداد پروتون‌ها و نوترون ها در پایداری ایزوتوپها نیز تاثیر گذار می باشد. البته بعضی از ایزوتوپها که معروف به ایزوتوپه‌ای دوجادویی می باشند نیز وجود دارند، این دسته از ایزوتوپ ها با N و Z جادویی، هسته‌های بسیار سختی را تشکیل داده و دارای کاربردهای فراوانی می باشند. بدین ترتیب در آخر برای بررسی این دسته از ایزوتوپ ها بعضی از مدل های هسته‌ای با معرفی تعدادی از پتانسیل‌های جایگزیده ای که تا کنون مورد استفاده قرار گرفته شده اند، معرفی و مختصر شرح داده شده اند.

[1] Hulthen

فصل ۳

دستگاه های مختصات و روش تحلیلی NU

برای حل معادلات دیفرانسیل

۳-۱ مقدمه:

در فیزیک ذرات بنیادی و هسته‌ای ، مفهوم دستگاه های چند فرمیونی از اهمیت زیادی برخوردار است. هر دستگاه چند فرمیونی مانند یک هسته دارای پارامترهای خیلی مهمی از جمله انرژی و تابع موج حالت پایه است، که باید برای آن دستگاه مشخص شوند. در واقع باید معادله شرودینگر را برای این دستگاه ها حل کرد تا بتوان ترازهای انرژی و تابع موج حالت پایه آن را به دست آورد. اما به دلیل پیچیده بودن پتانسیل‌های بین ذرات دستگاه (مانند نوکلئون ها در هسته) امکان اینکه بتوان به صورت تحلیلی مسئله را حل کرد وجود ندارد. بنابراین باید از تقریب‌هایی برای حل معادله شرودینگر استفاده کنیم. معمولا یکی از روش های حل و بحث این است که یک تابع مشخص را به عنوان متغیر اساسی در دستگاه های چند فرمیونی انتخاب می‌کنند، که یکی از این توابع، تابع چگالی ذرات است. استفاده از متغیر چگالی ذرات برای اولین بار به ترتیب توسط توماس[1] در سال ۱۹۲۶ و فرمی[2] در سال ۱۹۲۷انجام شد، که در واقع یک تقریب محاسباتی قابل قیاس با تقریب هارتری[3] و هارتری فوک[4] است که در این تقریب ها، متغیر مهم دستگاه تابع موج است. در سال ۱۹۵۴ هوفنبرگ و کوهن اثبات کردند که کلیه خواص دستگاه چند ذره‌ای را می‌توان برحسب چگالی ذرات به طور واضح و روشن بیان کرد، اما در عمل، هنگام استفاده، تقریب‌های فراوانی را اعمال کردند. از آن زمان به بعد روش های مختلفی برای حل معادله ی شرودینگر برای دستگاه های چند ذره‌ای و توصیف این دستگاه ها به کار گرفته شد. روش منتخبی که در این فصل توضیح داده می شود یک روش تحلیلی می باشد. که به روش NU

[1] Tommas
[2] Fermi
[3] Hartree
[4] Hartree-fock approximation

[1]مشهور است[۴۳]. قبل از بیان و چگونگی استفاده از این روش ،دستگاه مختصات ژاکوبی[2] و دستگاه مختصات کروی نیز شرح داده می شوند.

۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی

در نظریه ی سیستم‌های چند ذره‌ای ، اغلب برای ساده کردن فرمول بندی های ریاضی از مختصات ژاکوبی استفاده می شود. این مختصه ها منحصرا برای مولکول های چند اتمی و واکنش‌های شیمیایی، مشترک هستند [۴۴]. به صورت خلاصه، یک الگوریتم برای تولید مختصات ژاکوبی مثلا برای دو ذره به صورت زیر است:

در نظر بگیرید که m_k و m_j جرم دو ذره هستند که به وسیله یک جرم جدید به صورت $M = m_j +$ m_k در سیستم جایگزین می‌شوند. مختصات مکان دو ذره یعنی x_k و x_j به وسیله مختصات نسبی آن ها $r_{jk} = x_j - x_k$ و بردار مرکز جرم آن ها $R_{jk} = \frac{m_j x_j + m_k x_k}{m_j + m_k}$ لحاظ شده اند[۴۵و۴۶]. این مختصات برای یک مسئله N ذره ای به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$r_j = \frac{1}{m_{0j}} \sum_{k=1}^{j} m_k x_k - x_{j+1} \quad , j = 1,2, \dots, N-1 \qquad (۳-۱)$$

و مختصات مرکز جرم به صورت :

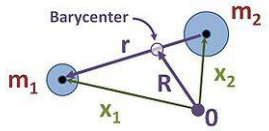
$$r_N = R = \frac{1}{m_{0N}} \sum_{k=1}^{N} m_k x_k \quad , m_{0j} = \sum_{k=1}^{j} m_k \qquad (۳-۲)$$

برای یک دستگاه سه جسمی مطابق معادلات (۳-۱) و (۳-۲) ، مختصات ژاکوبی به صورت زیر است:

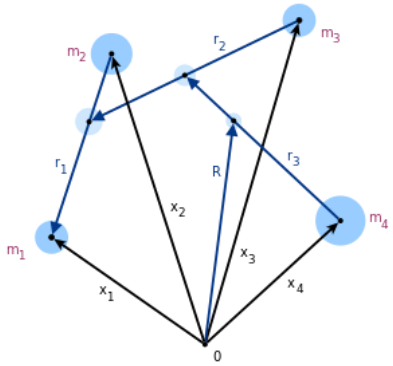
$$r_1 = x_1 - x_2$$
$$r_2 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_3$$
$$r_3 = R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (۳-۳)$$

[1] Nikiforov-Uvarov method
[2] Jacobi coordinate

شکل مختصات ژاکوبی برای دو جسمی و چهار جسمی در شکل های (۳-۱) و (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل(۳-۱): این شکل مختصات ژاکوبی را برای دو ذره نشان می‌دهد[۴۴].



شکل(۳-۲): این شکل، مختصات ژاکوبی را برای چهار جسم نشان می‌دهد. مطابق معادلات بالا مختصات های r_3, r_2, r_1 و R رسم شده اند[۴۷].

۳-۳ دستگاه مختصات کروی

در علم فیزیک انتخاب دستگاه مختصات برای ساده سازی حل مسایل بسیار ضروری است و البته در مسائل فیزیک هسته ای به علت شکل کروی هسته ها، دستگاه مختصات کروی حل معادلات را تا حد بسیار زیادی ساده می‌کند[۴۸]. دستگاه مختصات کروی دستگاهی است که برای بیان یک مسئله در سه بعد استفاده می‌شود، این دستگاه برای حل مسایل مادامی سودمند و قابل استفاده است که تقارن کروی موجود باشد، مانند بررسی یک کره باردار یا حل معادله شرودینگر با پتانسیل کره‌های سخت.

سه مختصه ی دستگاه کروی به صورت زیر تعریف شده است:

۱. فاصله شعاعی یک نقطه از مبدا ثابت ρ

۲. زاویه(θ) در نقطه مورد نظر در جهت مثبت محور Z ها.

۳. زاویه سمتی φ از قسمت مثبت محور Xها .

محدوده این سه مختصه به صورت زیر است: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ ، $\rho \geq 0$

از طرفی دستگاه مختصات کروی به وسیله روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = arc\tan(\frac{y}{x})$$

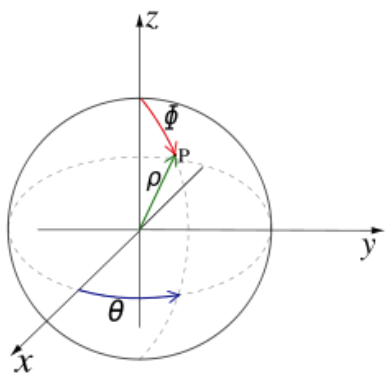
$$\theta = arc\cos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \qquad (۴-۳)$$

مختصات دکارتی نیز به وسیله روابط زیر به مختصات کروی مربوطند:

$$x = \rho sin\theta cos\phi$$

$$y = \rho sin\theta \sin\phi$$

$$z = \rho cos\theta \qquad (۵-۳)$$



شکل(۳-۳): این شکل مختصات کروی را نشان می‌دهد[۴۹].

۳-۴ روش تحلیلی NU برای حل معادلات دیفرانسیل

روش نیکی فارف-یوارف[1] [۴۳] برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم فوق هندسی[2] به وسیله توابع متعامد کروی پایه‌گذاری شده است. برای یک پتانسیل انتخابی بر اساس شرایط حاکم بر مساله، معادلات شرودینگر و شبه شرودینگر در مختصات کروی به معادلات کلی از نوع فوق هندسی با یک تبدیل مختصاتی مناسب، کاهش می‌یابند. بنابراین معادلات می‌توانند به صورت اصولی حل شده و جواب های دقیق و ویژه ای را به خود اختصاص دهند. معادله ی اصلی زیر به طور دقیق مربوط به این روش است:

$$\psi''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \qquad (۶-۳)$$

که در اینجا $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله‌هایی از حداکثر درجه دوم هستند. $\tilde{\tau}(s)$ چند جمله‌ای درجه اول و $\psi(s)$ یک تابع فوق هندسی است. با گرفتن $\psi(s)=\phi(s)y(s)$ و یک تابع مناسب برای $\phi(s)$ ، معادله بالا به یک شکل قابل درک، به صورت زیر تبدیل می شود:

$$y''(s)+\left(2\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\right)y'(s)+\left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}+\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\right)y(s)=0 \qquad (۷-۳)$$

در معادله بالا، ضریب $y'(s)$ در اصل به شکل $\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}$ است که $\tau(s)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه اول می باشد، یعنی

$$2\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}=\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \qquad (۸-۳)$$

و بنابراین شکل منظم به صورت زیر است:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \qquad (۹-۳)$$

در معادله بالا داریم:

$$\pi(s)=\frac{1}{2}[\tau(s)-\tilde{\tau}(s)] \qquad (۱۰-۳)$$

بنابراین از معادله بالا، یک بیان خیلی سودمند بدست می‌آید:

[1] Nikiforov-Uvarov
[2] Hypergeometric

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \qquad (۱۱-۳)$$

بدین ترتیب پارامتر جدید $\pi(s)$ یک چند جمله‌ای با حداکثر از درجه ۱ است. در ضمن، جمله $\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}$ که در ضریب $y(s)$ در معادله (۳-۷) می باشد، به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right)' + \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right)^2 = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)^2 \qquad (۱۲-۳)$$

در این مورد، با استفاده ازمعادله (۳-۹)، ضریب $y(s)$ به یک شکل مناسب تبدیل می‌شود:

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \qquad (۱۳-۳)$$

که:

$$\bar{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s) \qquad (۱۴-۳)$$

با جایگزینی طرف راست معادله (۳-۸) و (۳-۱۳) در معادله (۳-۷)، یک معادله از نوع فوق هندسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y''(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}y'(s) + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}y(s) = 0 \qquad (۱۵-۳)$$

اگر چند جمله‌ای $\bar{\sigma}(s)$ در معادله بالا به چند جمله‌ای $\sigma(s)$ تقسیم پذیر باشد، یعنی $\bar{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s)$ که λ یک ثابت است، آنگاه معادله (۳-۱۵) به معادله فوق هندسی زیر تبدیل می شود:

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0 \qquad (۱۶-۳)$$

و بنابراین جواب آن به عنوان یک تابع فوق هندسی می باشد[۴۳و۴۴و۴۷].

با قرار دادن رابطه $\bar{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s)$ در معادله (۳-۱۴)، می‌توان به معادله درجه دوم زیر برای $\pi(s)$ دست یافت:

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0 \qquad (۱۷-۳)$$

که در اینجا داریم $k = \lambda - \pi'(s)$.

جواب این معادله درجه دوم برای $\pi(s)$ رابطه زیر را نتیجه خواهد داد:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \qquad (۱۸-۳)$$

به منظور به دست آوردن جواب های ممکن، مطابق با علامت های مثبت و منفی در رابطه بالا، پارامتر k در زیر علامت رادیکال باید کاملا مشخص باشد. برای برطرف کردن این نیاز، عبارت زیر رادیکال باید مربع یک چند جمله‌ای باشد زیرا $\pi(s)$ یک چند جمله‌ای با درجه حداکثر ۱ است. برای این منظور، باید چند جمله‌ای درجه دوم زیر رادیکال دارای $\Delta = b^2 - 4ac$ برابر صفر باشد که پارامتر k از این شرط بدست می‌آید. بعد از مشخص شدن پارامتر k، چندجمله‌ای $\pi(s)$ از معادله (۳-۱۸) به دست می‌آید و بنابراین $\tau(s)$ و λ می‌توانند با استفاده از معادله (۳-۱۰) و رابطه $k = \lambda - \pi'(s)$ به ترتیب بدست آیند. برای تعمیم جواب‌های معادله (۳-۱۶)، یک گرایش عمومی دنبال می شود و آن این است که نشان دهیم همه مشتقات توابع فوق هندسی خود نیز توابع فوق هندسی هستند. برای این هدف، معادله (۳-۱۶) با استفاده از عبارت $\nu_1(s) = y'(s)$ ، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sigma(s)\nu_1''(s) + \tau_1(s)\nu_1'(s) + \mu_1\nu_1(s) = 0 \qquad (۱۹-۳)$$

که $\tau_1(s) = \tau(s) + \sigma'(s)$ و $\mu_1 = \lambda + \tau'(s)$. $\tau_1(s)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۱ و μ_1 یک پارامتری مستقل از متغیر s است. واضح است که معادله (۳-۱۹) یک معادله فوق هندسی است. با گرفتن $\nu_2(s) = y''(s)$، مشتق دوم معادله (۳-۱۶) به صورت زیر نتیجه می شود:

$$\sigma(s)\nu_2''(s) + \tau_2(s)\nu_2'(s) + \mu_2\nu_2(s) = 0 \qquad (۲۰-۳)$$

که در اینجا

$$\tau_2(s) = \tau_1(s) + \sigma'(s) = \tau(s) + 2\sigma'(s) \qquad (۲۱-۳)$$

و

$$\mu_2 = \mu_1 + \tau_1'(s) = \lambda + 2\tau'(s) + \sigma''(s) \qquad (۲۲-۳)$$

در یک راه مشابه، یک معادله فوق هندسی می‌تواند به عنوان یک خانواده از جواب‌های ویژه معادله (۳-۱۶) با گرفتن عبارت $\nu_n(s) = y^n(s)$ ساخته شود:

$$\sigma(s)v_n''(s) + \tau_n(s)v_n'(s) + \mu_n v_n(s) = 0 \qquad (۲۳-۳)$$

و در اینجا معادلات بازگشتی کلی برای $\tau_n(s)$ و μ_n به صورت زیر به ترتیب یافت می‌شوند:

$$\tau_n(s) = \tau(s) + n\sigma'(s) \qquad (۲۴-۳)$$

و

$$.\mu_n = \lambda + n\tau'(s) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \qquad (۲۵-۳)$$

اگر قرار دهیم $\mu_n = 0$ ، آنگاه معادله (۳-۲۵) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$.\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad , n = 0,1,2,3 , ... \qquad (۲۶-۳)$$

بنابراین معادله (۳-۲۳) یک جواب ویژه به شکل $y(s) = y_n(s)$ خواهد داشت که یک چند جمله‌ای از درجه n است. برای بدست آوردن یک جواب ویژه مقدار[1] از روش NU، رابطه بین λ و λ_n باید به وسیله معادله (۳-۲۶) و $k = \lambda - \pi'(s)$ برقرار شود. $y_n(s)$ یک تابع فوق هندسی است که جواب‌های چند جمله‌ای آن به وسیله رابطه رودریگز[2] به شرح زیر است:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)] \qquad (۲۷-۳)$$

که B_n ثابت نرمالیزاسیون [3] و تابع وزنی $\rho(s)$ باید شرط زیر را داشته باشد:

$$.\big(\sigma(s)\rho(s)\big)' = \tau(s)\rho(s) \qquad (۲۸-۳)$$

بنابراین از روش NU، ویژه مقادیر انرژی از رابطه (۳-۲۶) به دست خواهد آمد.

۳-۵ معادله شرودینگر در مختصات کروی

معادله شرودینگر معادله ای برای توصیف حرکت ذرات غیرنسبیتی در مکانیک کوانتومی است که توسط اروین شرودینگر[4] بیان شد. این معادله از معادله ی پایستگی انرژی برای یک ذره ی در حال حرکت

[1] Eigenvalue
[2] Rodrigues
[3] The normlization
[4] Erwin Shrodinger

ناشی می‌شود که به جای پارامترهای تکانه و پتانسیل در فیزیک کلاسیک عملگرهای آنها را قرار داده و پس از آن معادله ی شرودینگر نتیجه می شود[۵۰]. این معادله در اصل به صورت زیر است:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V(r)\psi(r,t) \qquad (۲۹-۳)$$

که m جرم ذره و ∇^2 یک عملگر است که در هر دستگاهی می‌تواند تعریف شود. معادله بالا معادله وابسته به زمان شرودینگر است و این معادله می‌تواند با استفاده از یک تابع موج مناسب $\psi(r,t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi(r)$ که با حالت های E ثابت تطابق دارد، به معادله مستقل از زمان نیزکاهش یابد. با قرار دادن این تابع موج در معادله وابسته به زمان شرودینگر، معادله مستقل از زمان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \qquad (۳۰-۳)$$

به صورت خلاصه، معادله شرودینگر به معادله (۳-۳۰) اطلاق می شود. جواب این معادله نه تنها به تابع انرژِی پتانسیل $V(r)$، بلکه به دستگاه مختصات هم مربوط می باشد. با نوشتن تابع موج $\psi(\mathbf{r})$ بصورت $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ ،همراه با جداسازی و ساده سازی معادله (۳-۳۰) ،می‌توان قسمت شعاعی آن $R(r)$ را از طریق معادله دیفرانسیل درجه دوم زیر محاسبه کرد:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]R(r) = 0 \qquad (۳۱-۳)$$

در این معادله l به عنوان عدد کوانتومی مداری و مقدار l به صورت $l = 0,1,2,3,\ldots..$ می باشد. قسمت‌های دیگر معادله (۳-۳۰) از طریق چند جمله ای لژاندر[1] که همان y_{lm} ها هستند، بدست می‌آیند.

این معادله می‌تواند به عنوان یک معادله دیفرانسیلی معمولی با ضرایب متغیر به حساب آید و به وسیله یک روش استاندارد که قبلا در کتابهای کوانتومی بحث شده حل شود. یکی از این روش‌ها می‌تواند روش

[1] Legendre

NU باشد. در هرصورت جواب تحلیلی معادله بالا به طور قطع به تابع پتانسیل $V(r)$ وابسته است که در بعضی پتانسیل‌ها از جمله پتانسیل‌های هسته‌ای کاری بسیار سخت است.

۳-۶ معادله کلاین-گوردن[1] در مختصات کروی

معادله کلاین –گوردن همان شکل نسبیتی معادله شرودینگر برای توصیف پدیده های کوانتومی است. یعنی با جایگذاری عملگرهای کوانتومی در معادله ی انرژی نسبیتی ، معادله دیگری حاصل می شود که توصیف بهتری از ذرات با سرعت بالا را نشان داده و نسبت به فضا و زمان از مرتبه دوم است. به عبارت دیگر، این معادله شکل کوانتیزه ی رابطه ی تکانه-انرژی نسبیتی است. جواب‌های این معادله، یک میدان اسکالر کوانتومی هستند که کوانتاهای میدان، ذرات بدون اسپین می باشند. این معادله برای ذره نسبیتی با جرم m_0 (جرم حالت سکون) به صورت زیر از رابطه نسبیتی $E^2 = P^2C^2 + m_0^2C^4$ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2\psi + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (۳۲-۳)$$

که جواب‌های این معادله دیفرانسیل، توابعی با مقادیر موهومی $\psi(t,x)$ می باشند. معادله مستقل از زمان از رابطه بالا، به صورت زیر است:

$$\nabla^2\psi - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (۳۳-۳)$$

معادله بالا نیز می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{\hbar^2c^2}E_0^2)\psi = 0 \qquad (۳۴-۳)$$

در مکانیک کوانتومی نسبیتی معمولا معادله کلاین گوردن برای توصیف یک ذره اسکالر، یعنی ذره با اسپین صفر، استفاده می شود. بحث رفتار نسبیتی ذرات با اسپین صفر، نیاز به طیف ذرات و جواب های

[1] Klein-Gordon equation

دقیق معادله کلاین-گوردن را دارد که با استفاده از پتانسیل چهاربردار $A_\lambda(\lambda = 0,1,2,3)$ و پتانسیل اسکالر S ساخته می‌شود. به منظور ساده کردن جواب معادله کلاین گوردن، پتانسیل چهار بردار می‌تواند به صورت $A_\lambda = (A_0, 0,0,0)$ نوشته شود. اولین جزء این پتانسیل چهار بردار بوسیله پتانسیل V بیان می شود. بنابراین حرکت یک ذره نسبیتی با اسپین صفر دریک پتانسیل، بوسیله معادله کلاین-گوردن شامل پتانسیل های V و S شرح داده شده است[۵۱]. اگر $V \leq S$ باشد بنابراین جواب‌های مقید واقعی برای یک ذره با اسپیین صفر نسبیتی وجود خواهد داشت[۵۲-۵۶]. از طرف دیگر در حالتی که پتانسیل ها برابر باشند یعنی: $S = V$ معادله کلاین-گوردن به معادله‌ای شبیه معادله شرودینگر کاهش می‌یابد. معادله کلاین-گوردن توصیف کننده ی یک ذره اسکالر(اسپین صفر) با پتانسیل برداری $V(r,\theta,\varphi)$ و پتانسیل اسکالر $S(r,\theta,\varphi)$ به صورت زیر می باشد[۵۷،۵۸].

$$\{P^2 - [V(r,\theta,\varphi) - E_R]^2 + [S(r,\theta,\varphi) + \mu]^2\}\psi(r,\theta,\varphi) = 0 \qquad (۳۵-۳)$$

که μ جرم حالت سکون، E_R جرم نسبیتی، P عملگر تکانه و S و V پتانسیل‌های اسکالر و برداری هستند. در فضای D بعدی، معادله کلاین-گوردن *مستقل* از زمان شعاعی در حالت l، مطابق معادله قبل در پتانسیل‌های تنها وابسته به مکان بصورت زیر است[۵۹،۶۰]:

$$\nabla_D^2 \psi_{l_1 \dots l_{D-2}}^{l_{D-1}=l}(x) + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\{[E_{nl} - V(r)]^2 - [m_0 c^2 + S(r)]^2\}\psi_{l_1 \dots l_{D-2}}^{l_{D-1}=l}(x) = 0 \qquad (۳۶-۳)$$

که $\nabla_D^2 = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ و $\psi_{l_1 \dots l_{D-2}}^{l_{D-1}=l}(x) = R_l(r) Y_{l_1 \dots l_{D-1}}^{l}(\theta_1, \theta_2, \dots)$. که دراینجا x یک بردارمکان D بعدی است. حال می‌خواهیم قسمت شعاعی تابع موج $R_l(r)$ را جدا کنیم. با قرار دادن $R_l(r) = r^{-\frac{D-1}{2}} u_l(r)$ ، معادله کلاین گوردن بالا به معادله شبه شرودینگر شعاعی زیر با عدد تکانه زاویه‌ای چرخشی l، به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left\{[E_{nl} - V(r)]^2 - [m_0 c^2 + S(r)]^2 - \frac{l'(l'+1)\hbar^2 c^2}{r^2}\right\} u_l(r) = 0 \qquad (۳۷-۳)$$

که تحت پتانسیل های $S(r) = \pm V(r)$ داریم: $l'(l'+1) = [(M-2)^2 - 1]/4$ و $M = D + 2l$ که $l = 0,1,2,\ldots$ و معادله کلاین- گوردن به معادله شبیه شرودینگر تبدیل می شود، بنابراین جواب های حالت مقید به صورتی ساده و با کمک روش هایی مشهور در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی حاصل می‌شوند.

۳-۷ جمع بندی فصل:

در این فصل روش حل معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی به صورت تحلیلی برای دستگاه های چند ذره‌ای و توصیف این دستگاه ها از جمله دستگاه های مهمی چون دستگاه ژاکوبی و دستگاه کروی برای بررسی هسته ها شرح داده شده است. یکی از روش های حل ،حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم فوق هندسی[1] به وسیله توابع متعامد کروی روش نیکی وارف- یووارف NU می باشد، که با لحاظ شرایط استفاده از آن و انتخاب یک پتانسیل مناسب می توان به پارامترهای بسیار مهمی مانند ترازهای انرژی و تابع موج حالت پایه دست یافت.

[1] Hypergeometric

فصل ۴

تراز انرژی هسته های سبک در مدل خوشه ای

۴-۱ مقدمه

ساختن یک مدل مناسب سازگار با تجربه در گرایش های مختلف فیزیک برای حل مسائل بسیار سودمند است. در فیزیک هسته‌ای به‌دلیل پیچیدگی پتانسیل‌ها، باید مدلی را لحاظ کرد تا بتوان بر این پیچیدگی فائق آمد، بدین سان می توان کمیت های استاتیکی هسته را در توافق خوب و همخوان با تجربه نتیجه گرفت. در مدل های مختلف هسته‌ای، مدل خوشه‌ای جواب های قابل تاملی را برای هسته‌های سبک، مخصوصا هسته هایی که دارای لایه های کاملا پر و یا نزدیک آنها باشند مانند $^{16}_{8}O$ ، $^{12}_{6}C$ و..... را رقم زده است. [۶۲ و ۶۱].

در این فصل با انتخاب یک پتانسیل مناسب در مدل خوشه‌ای، ترازهای انرژی ایزوتوپ های سبک با حل معادلات غیرنسبیتی (شرودینگر) و نسبیتی (کلاین گوردن) بررسی و با داده های تجربی مقایسه شده اند.

۴-۲ حل معادله شرودینگر

در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی معادله شرودینگر بصورت زیر می باشد:

$$H\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (۴-۱)$$

که در آن H هامیلتونی سیستم است. بنابراین:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \mathrm{V}(\mathrm{r})\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{E}\psi(\mathbf{r}) \qquad (۴-۲)$$

که ∇^2 به صورت زیر است:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \qquad (۴-۳)$$

بدین سان معادله بیان شده در رابطه (۴-۱) را بصورت زیر می‌توان نوشت :

$$R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r)=0 \qquad (۴-۴)$$

در حالت کلی حل معادله ی شرودینگر به دو منظور صورت می پذیرد:

۱. یافتن ویژه توابع

۲. پیداکردن ویژه مقادیر

ولی نکته ی اساسی در معادله ی بالا انتخاب پتانسیل برهم کنش بین ذرات می باشد که در این صورت هم حل معادله به سادگی ممکن نبوده و لازم است از روش های مختلفی مانند روش NU که بر اساس معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فوق هندسی در رابطه (۳-۶) بیان شده استفاده شود:

$$\psi''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \qquad (۵-۴)$$

که در اینجا $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(\mathrm{s})$ چند جمله‌هایی با حداکثر درجه دوم می باشند. $\tilde{\tau}(\mathrm{s})$ چند جمله ای درجه اول و $\psi(s)$ یک تابع فوق هندسی است. با مقایسه معادله بالا و معادله (۴-۱) البته با نوشتن معادله شرودینگر به طریقی که ضرایب معادله با ضرایب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فوق هندسی رابطه (۴-۵) تطابق داشته باشند-و این اساس کار است- می‌توان به نتایج مطلوبی رسید.

مراحل زیر برای حل معادله شرودینگر از روش NU لحاظ می شود:

۱. ابتدا معادله دیفرانسیلی بدست آمده از معادله شرودینگر با یک پتانسیل مشخص، به معادله‌ای شبیه رابطه (۴-۵) کاهش داده می شود و البته ضرایب باید با هم تطابق داشته باشند.

۲. با مقایسه دو معادله، عبارات $\tilde{\tau}(\mathrm{s})$، $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(\mathrm{s})$ تعیین می‌شوند.

۳. با قرار $\tilde{\tau}(\mathrm{s})$، $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(\mathrm{s})$ در معادله (۳-۱۸) می‌توان $\pi(s)$ را تعیین کرد. باید توجه کرد که زیر رادیکال در $\pi(s)$ به شکل درجه دوم است.

۴. لازم است چند جمله ای درجه دوم Δ را با توجه به رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ برابر صفر قرار داده تا $\pi(s)$ از درجه یک و پس از آن دو ریشه k، یعنی $k_{\pm}$ حاصل گردند.

۵. با جایگذاری مقادیر k در $\pi(s)$، چهار جواب برای $\pi(s)$ حاصل می‌شود. در این حالت دو جواب $\pi(s)$ برای k_+ و دو جواب $\pi(s)$ برای k_- می‌باشند. در این حالت این مهم باید بررسی شود که کدامیک از جواب ها از لحاظ فیزیکی معتبر است.

۶. با استفاده از چهار جواب $\pi(s)$، یک جواب منفی طبق رابطه (۳-۱۱) حاصل می شود و در مراحل بعدی از آن استفاده خواهد شد ،زیرا لازم است این نتایج از لحاظ فیزیکی صحیح باشند.

۷. با مقایسه ی مقادیر حاصل شده از معادلات $k = \lambda - \pi'(s)$ برای λ، و معادله (۳-۲۶) برای λ_n، رابطه ی $\lambda = \lambda_n$ را که همان طیف انرژی است خواهیم داشت.

۸. با درج مقادیر $\sigma(s)$ و $\pi(s)$ در معادله (۳-۹) تابعی برای $\varphi(s)$ حاصل می‌شود.

۹. معادله (۳-۲۸) را با یک تابع وزنی $\rho(s)$ برآورد کرده و یک تابع فوق هندسی $y_n(s)$ را که می‌تواند بوسیله معادله رودریگز (۳-۲۷) لحاظ شود بدست می‌آوریم.

۱۰. در نهایت لازم است توابع $\varphi(s)$ و $y_n(s)$ را ترکیب کرده تا $\psi(s)$ که همان تابع موج شعاعی است حاصل شود.

مشکل اساسی در حل معادله شرودینگر از طریق روش NU، شکل پتانسیل میانگین اعمال شده در سیستم است. کاربرد روش NU برای حل معادله شرودینگر برای پتانسیل هایی مانند پتانسیل نوسانگر هارمونیک، پتانسیل کولنی، پتانسیل کراتزر[1]، پتانسیل مورس[2] و پتانسیل هالتن[3] انجام شده است[۶۳]. لذا هدف بررسی تراز های انرژی و تابع حالت موج برای هسته های سبک و در نهایت تعیین ساختار حالت های مختلف بعضی از ایزوتوپ ها می‌باشد.

[1] Kratzer
[2] Morse
[3] Hulthen

۴-۳ پتانسیل برهم کنش خوشه ها

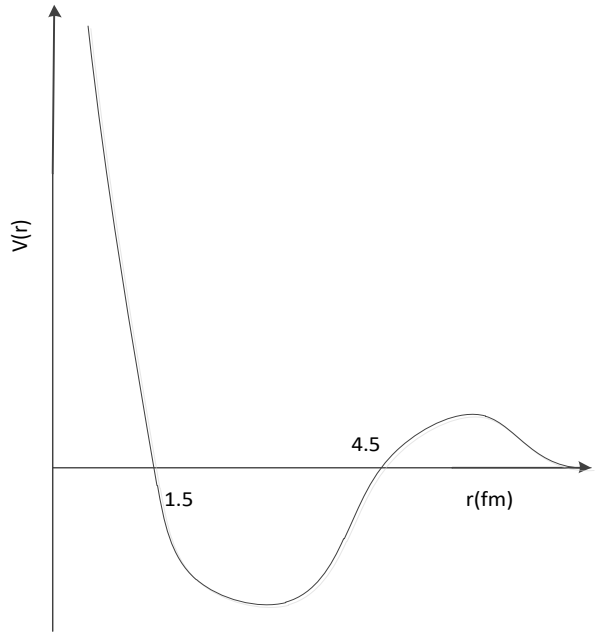
در مدل‌های هسته‌ای، انرژی بستگی هر هسته با تعداد نوکلئون‌های موجود در آن متناسب است و لذا با توجه به اینکه انرژی بستگی هر هسته در مدل خوشه‌ای با تعداد پیوندها و به عبارت دیگر با تعداد ذرات آلفا نسبت مستقیم دارد (شکل ۱-۱۳)، می‌توان نتیجه گرفت که شباهت زیادی بین برهم کنش بین دو نوکلئون و دو خوشه آلفا وجود دارد. بر همین اساس نیروی بین ذرات آلفا برای اولین بار بوسیله هافستد و تلر به شرح زیر بیان شد[۶۳]:

۱) خوشه‌ها در فواصل خیلی نزدیک یکدیگر را دفع می‌کنند.

۲) در فواصل میانی این خوشه‌ها همدیگر را جذب می‌کنند.

۳) در فواصل دور به دلیل نیروی کولنی بین خوشه‌ها، همدیگر را دفع می‌کنند.

این سه شرط برای برهم کنش دو ذره آلفا در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. بنابراین یکی از مشخصه‌های اصلی که ساختار خوشه‌ای هسته‌ها را تعیین می‌کند، انرژی سیستم های هسته‌ای است.



شکل(۴-۱): پتانسیل هافستد-تلر[۶۳].

این عامل باعث می‌شود که در ساختار خوشه‌ای هسته‌ها تغییراتی ایجاد و بدین ترتیب ساختار هسته ی کوچکتر همراه با یک ذره آلفا به ساختاری متشکل از چندین ذره آلفا ختم گردد[۶۴].

در سیستم‌های چند نوکلئونی دو مدل برای توصیف سیستم و پتانسیل بین آنها پیشنهاد شده است که به صورت زیر بیان می‌شوند[۶۵].

۱) مدل غیر میکروسکوپی: در این مدل، یک سیستم A نوکلئونی به صورت n خوشه یکسان تقسیم بندی شده است. این مدل در واقع همان مدل خوشه‌ای است.

۲) مدل میکروسکوپی: سیستم به صورت A نوکلئون بیان می شود که به صورت یک پتانسیل میانگین بین آن ها توصیف می‌شود.

حال اگر به معادله شرودینگر مستقل از زمان در رابطه ی (۴-۲) که ترازهای انرژی از آن بدست می‌آید رجوع شود. که در آن تابع H مشخص‌کننده هامیلتونی سیستم، E انرژی کل سیستم در یک حالت مشخص و $\psi(\mathbf{r})$ تابع موج کلی سیستم است.

$$H\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{E}\psi(\mathbf{r}) \qquad (۶-۴)$$

برای سیستم‌های غیرمیکروسکوپیکی خواهیم داشت:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2M_i} + \sum_{i>j=1}^{n} v_{ij}(r_i - r_j) \qquad (۷-۴)$$

از طرفی شکل معادله شرودینگر برای یک هسته ${}^{8}_{4}Be$ یا همان 2α به صورت زیر است:

$$\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2\mu}\psi(\mathbf{r}) + \mathrm{V}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{E}\psi(\mathbf{r}) \qquad (۸-۴)$$

تنها کمیت مهم در رابطه بالا انتخاب مناسب پتانسیل است که فاکتورهای مهمی نیز در تعیین آن نقش خواهند داشت. البته در مدل غیرمیکروسکوپی، از ساختار داخلی خوشه ها صرفنظر می‌شود.

و به همین ترتیب برای سیستم‌های میکروسکوپی که از A نوکلئون تشکیل شده است هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \sum_{i=1}^{A} \frac{p_i^2}{2M_N} + \sum_{i>j=1}^{A} v_{ij}(r_i - r_j) \qquad (۹-۴)$$

۴-۴ حل معادله شرودینگر از روش NU و تعیین ترازها

با توجه به مطالب فوق مشکل اساسی انتخاب پتانسیل می باشد. با در نظر گرفتن ویژگی های برهم کنش بین خوشه ها شامل برهم کنش $\alpha - \alpha$ و بر هم کنش کولنی پتانسیل زیر را در نظر می گیریم[۶۶].

$$V(r) = -V_A \frac{e^{-\frac{r^2}{\alpha_A^2}}}{r} + V_R \frac{e^{-\frac{r^2}{\alpha_R^2}}}{r^2} + \frac{V_k}{r} \qquad (۱۰-۴)$$

با جایگذاری پتانسیل بالا در معادله شرودینگر خواهیم داشت:

$$R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = 0 \qquad (۱۱-۴)$$

لذا با قرار گرفتن پتانسیل (۴-۱۰) در معادله (۴-۱۱) رابطه ی زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + V_A \frac{e^{-\frac{r^2}{\alpha_A^2}}}{r} - V_R \frac{e^{-\frac{r^2}{\alpha_R^2}}}{r^2} - \frac{V_C}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = 0 \qquad (۱۲-۴)$$

می‌توان معادله بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2}\left[P_1 r e^{-\frac{r^2}{\alpha_A^2}} - P_2 e^{-\frac{r^2}{\alpha_R^2}} - P_3 r - P_0 + k^2 r^2\right]R(r) = 0 \qquad (۱۳-۴)$$

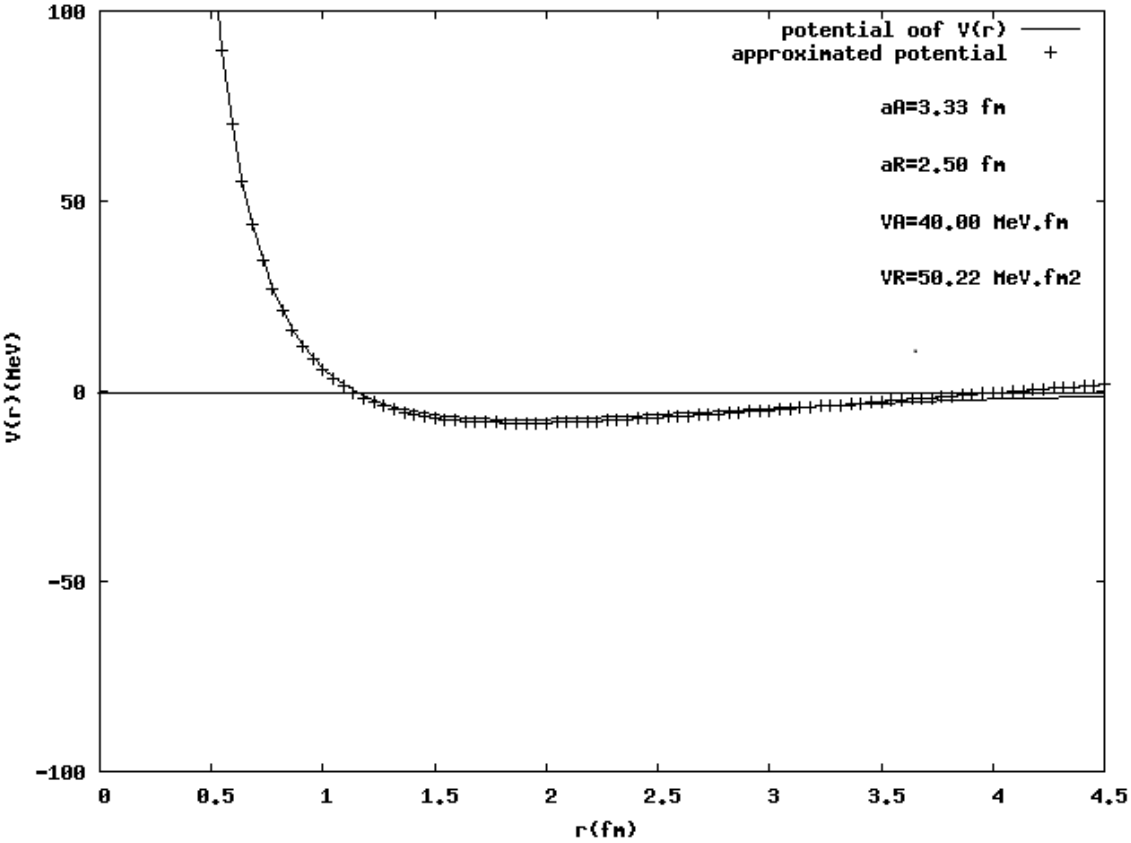
که پارامترهای آن به صورت زیر می باشند:

$$P_1 = \frac{2\mu V_A}{\hbar^2}, P_2 = \frac{2\mu V_R}{\hbar^2}, P_3 = \frac{2\mu V_C}{\hbar^2}, P_0 = l(l+1), k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \qquad (۱۴-۴)$$

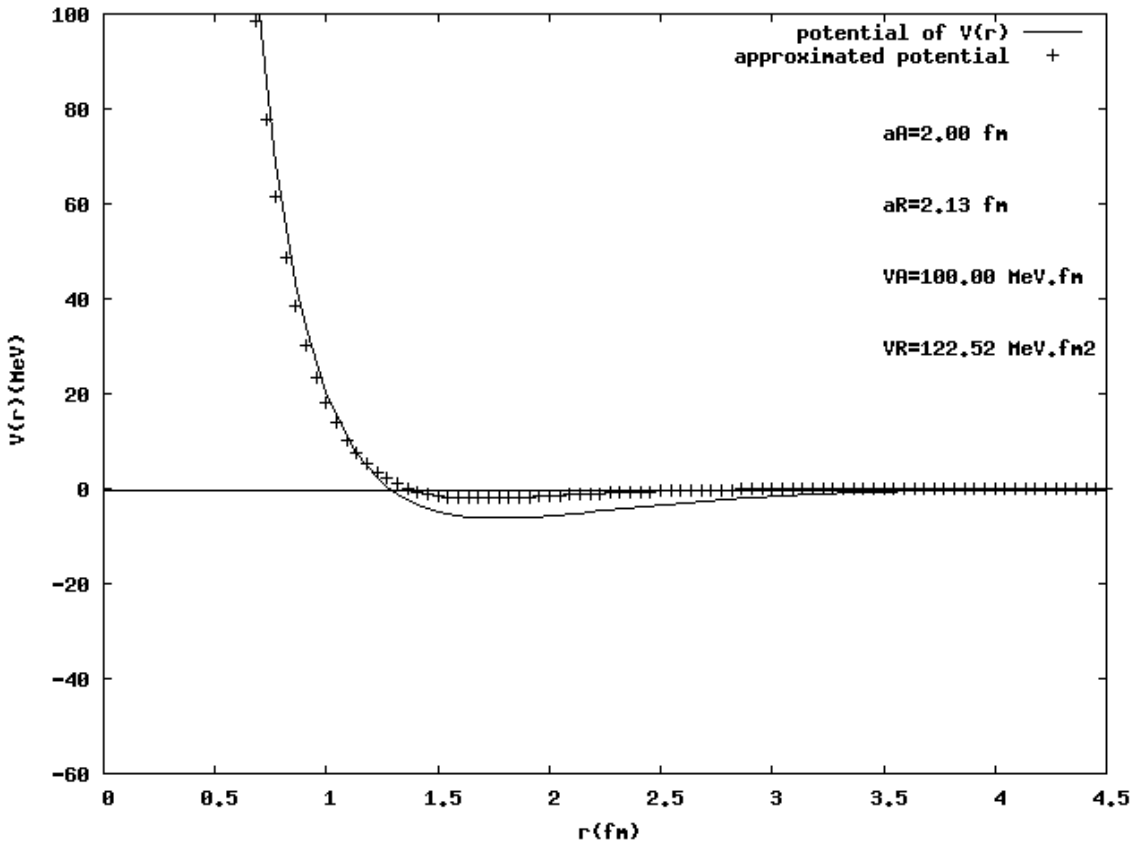
معادله (۴-۱۳) را نمی‌توان از روش‌های معمولی و تحلیلی حل کرد، لذا لازم است تقریبی مناسب به صورت زیر لحاظ نماییم.

$$e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \approx 1 - \frac{r^2}{\alpha^2}$$

شکل پتانسیل رابطه (۴-۱۰) و پتانسیل تقریبی برای دو هسته $^{8}_{4}Be$ ، $^{16}_{8}O$ رسم و در شکل های (۴-۲) و (۴-۳) نشان داده شده‌اند. از این دو شکل می‌توان سازگاری خوبی بین تقریب و پتانسیل اصلی مشاهده نمود. [۶۶].



شکل (۴-۲): پتانسیل های اصلی و تقریبی معادله (۴-۱۰) برای هسته $^{8}_{4}Be$ [۶۶-۶۰].



شکل (۴-۳): پتانسیل های اصلی و تقریبی معادله (۴-۱۰) برای هسته $^{16}_{8}O$ [۶۶-۶۰].

معادله (۴-۱۳) به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{P_2}{\alpha_R^2}+k^2\right)r^2+(P_1-P_3)r-(P_2+P_0)\right]R(r)=0 \qquad (۱۵-۴)$$

با توجه به تغییر متغیرهای $\alpha=-\left(\frac{P_2}{\alpha_R^2}+k^2\right)$، $\beta=P_1-P_3$، $\gamma=P_2+P_0$، و تغییر متغیر r به s و هم‌ارزی $\psi(r)\equiv R(r)$، معادله (۴-۱۵) بصورت زیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2}+\frac{2}{s}\frac{d\psi(s)}{ds}+\frac{1}{s^2}[-\alpha s^2+\beta s-\gamma]\psi(s)=0 \qquad (۱۶-۴)$$

با مقایسه این معادله با معادله فوق هندسی NU یعنی معادله [۴۳]:

$$\psi''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \qquad (۱۷-۴)$$

خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau}=2,\sigma(s)=s\,,\tilde{\sigma}=-\alpha s^2+\beta s-\gamma \qquad (۱۸-۴)$$

حال از روش NU می‌توان معادله (۴-۱۶) را حل کرد. از قرار دادن معادلات رابطه (۴-۱۸) در معادله (۳-۱۸) و با محاسبه k ازطریق صفرکردن دلتای عبارت زیر رادیکال در معادله (۳-۱۸) یعنی $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، و استفاده از معادله (۳-۱۰) یعنی $\pi(s) = \frac{1}{2}[\tau(s) - \tilde{\tau}(s)]$، می‌توان به معادله زیر رسید:

$$\tau(s) = 1 + \sqrt{1+4\gamma} - 2\sqrt{\alpha}s \qquad (۴-۱۹)$$

با محاسبه $\tau(s)$، می‌توان λ را از $k = \lambda - \pi'(s)$ بدست آورد و از آنجا ترازهای انرژی را به صورت زیر حساب کرد:

$$E = -V_{0_R} - \frac{\frac{\mu}{2\hbar^2}\left(V_{0_A}\alpha_A - V_C\right)^2}{\left(1+2n+\sqrt{1+4\left[\frac{2\mu V_{0_R}\alpha_R^2}{\hbar^2} - l(l+1)\right]}\right)^2} \qquad (۴-۲۰)$$

که این فرمول محاسبه ترازهای انرژی برای هسته مورد نظر است. حال تابع موج شعاعی را برای این پتانسیل به دست می‌آوریم. با گرفتن تابع موج $\psi(s)$ به $\psi(s) = \phi(s)y_n(s)$ و جانشینی این تابع در معادله (۴-۱۶)، و استفاده از معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹) و رابطه $\pi(s) = \frac{1}{2}[\tau(s) - \tilde{\tau}(s)]$ در معادله $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}$ خواهیم داشت:

$$\phi(s) = e^{-\sqrt{\alpha}s} s^{\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma}-1)} \qquad (۴-۲۱)$$

و با جانشینی معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹) در معادله (۳-۲۸)، می‌توان تابع وزنی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\rho(s) = e^{-2\sqrt{\alpha}s} s^{\sqrt{1+4\gamma}} \ , \qquad (۴-۲۲)$$

با در نظر گرفتن معادله بالا برای $\rho(s)$، تابع $y_n(s)$ در معادله (۳-۲۷) به صورت زیر نوشته می شود:

$$y_n(s) = B_n e^{2\sqrt{\alpha}s} s^{-\sqrt{1+4\gamma}} \frac{d^n}{ds^n}\left(e^{-2\sqrt{\alpha}s} s^{n+\sqrt{1+4\gamma}}\right) \qquad (۴-۲۳)$$

از اینرو، تابع موج $\psi(s)$ از رابطه $\psi(s) = \phi(s)y_n(s)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\psi(s) = B_n e^{\sqrt{\alpha}s} s^{-\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma}+1)} \frac{d^n}{ds^n}\left(e^{-2\sqrt{\alpha}s} s^{n+\sqrt{1+4\gamma}}\right). \qquad (۲۴-۴)$$

با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر تعمیم یافته زیر

$$L_n(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}\, x^{\alpha+n}) \ , \qquad (۲۵-۴)$$

تابع $\psi(s)$ برحسب $L_n^{\alpha}(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi(s) = C_n e^{-\sqrt{\alpha}s} s^{\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma}-1)} L_n^{\sqrt{1+4\gamma}}\left(2\sqrt{\alpha}\, s\right) \qquad (۲۶-۴)$$

C_n ثابت نرمالیزاسیون است. برای محاسبه این ثابت، با استفاده از شرط نرمالیزاسیون یعنی $\int_0^{\infty} \psi^2(s)s^2 ds = 1$

$$C_n = \sqrt{\frac{n!\left(2\sqrt{\alpha}\right)^{\sqrt{1+4\gamma}+2}}{(2n+\sqrt{1+4\gamma}+1)\left(n+\sqrt{1+4\gamma}\right)!}} \ . \qquad (۲۷-۴)$$

بنابراین، تابع موج شعاعی معادله شرودینگر به صورت زیر است:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{n!\left(2\sqrt{\alpha}\right)^{\sqrt{1+4\gamma}+2}}{(2n+\sqrt{1+4\gamma}+1)\left(n+\sqrt{1+4\gamma}\right)!}}\, e^{-\sqrt{\alpha}r} r^{\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma}-1)} L_n^{\sqrt{1+4\gamma}}\left(2\sqrt{\alpha}\, r\right) \ . \qquad (۲۸-۴)$$

$L_n^{\alpha}(x)$ چند جمله‌ای تعمیم یافته لاگر است. علاوه بر آن می‌توان جملات اسپین-مدار و تانسوری را به صورت پتانسیل اختلالی به جمله مرکزی اضافه کرد. مقدار اولین مرتبه تصحیح انرژی با $E_n^{(1)}$ نشان داده شده است. پتانسیل اختلالی به صورت زیر نوشته می شود [۵۰]:

$$V_p(r) = V_{L.S}(r)L.S \ + V_T\ (r)\hat{S}_{12} \qquad (۲۹-۴)$$

که جمله اول پتانسیل اسپین مدار و جمله دوم پتانسیل تانسوری است. اولین مرتبه تصحیح انرژی برابر است با مقدار انتظاری پتانسیل $V_p(r)$ نسبت به حالت |n>. بنابراین:

$$E_n^{(1)} =< n|V_{L.S}(r)L.S + V_T(r)\hat{S}_{12}|n >=$$

$$E_n^{(1)} =< n|V_{L.S}(r)L.S + V_T(r)\hat{S}_{12}|n = \qquad (۳۰-۴)$$

$$\int \psi_n^{(0)*}(r)\left(V_{L.S}(r)L.S + V_T(r)\hat{S}_{12}\right)\psi_n^{(0)}(r)r^2\,dr$$

که $\psi_n^{(0)}(r)$ تابع موج غیراختلالی است. ازاینرو با استفاده از $\psi(r)$ در معادله (۴-۲۸) در معادله (۴-۳۰)، مقدار $E_n^{(1)}$ محاسبه خواهد شد.

۴-۵ محاسبه ترازهای انرژی هسته ^8_4Be:

ساده‌ترین ساختار خوشه ای هسته ها ، هسته ^8_4Be است که از دو ذره آلفا تشکیل شده است. این هسته کلا در حالت پایه ناپایدار بوده و با جذب مقدار انرژی ۹۲keV به دو ذره آلفا واپاشی می‌شود. لازم است در پتانسیل معادله (۴-۱۰) پارامترها مشخص شوند. پارامتر μ این هسته برابر $\frac{m_\alpha}{2}$ است که معادل مقدار$۱۸۷۶\frac{MeV}{c^2}$ می باشد [٦٤-٦٦]. همچنین مقدارموثر V_k برای این هسته برابر MeV.fm ۵/۷۶ است. با تطبیق بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته با داده‌های تجربی، سایر پارامترها حاصل می‌شوند. بدین صورت پارامترهای V_{0A}، V_{0R}، α_A و α_R برای هسته ^8_4Be در معادله (۴-۱۰) به ترتیب به صورت ۴۰/۱MeV،۵۰/۲۲MeV، ۳/۳۳fm،۲ /۵fm می باشند[٦٤]. چون هسته ^8_4Be دو خوشه دارد، پس می‌توان برای محاسبه ترازهای انرژی ، یعنی E_c ، از معادله ی (۴-۲۰) و برای محاسبه توابع موج از رابطه ی (۴-۲۸) استفاده کرد. همچنین با استفاده از معادلات (۴-۲۸) و (۴-۳۰) برای آن هسته، مقدار اولین مرتبه تصحیح انرژی، یعنی $E_n^{(1)}$، محاسبه می‌شود که معادل با صفر است. لذا اگر سیستم در حالت پایه باشد، مقدار $E_n^{(1)}$ برای حالت 0^+ برابر صفر است اما این مقدار برای حالت ۲^+

برابر ۲/۳۵MeV می‌باشد. از اینرو، نتایج محاسبه شده برای پتانسیل مرکزی و پتانسیل‌های اختلالی به انضمام نتایج تجربی در جدول (۴-۱) نشان داده شده است.

جدول (۴-۱): ترازهای انرژی هسته $^{8}_{4}Be$ [۶۶-۶۰].

ترازها	$E_C(MeV)$	$E_C + E_n^{(1)}(MeV)$	$E_{exp}(MeV)$	J^P, T, L, S	خطا(درصد)
حالت پایه	-۵۷/۷۴	-۵۷/۷۴	-۵۶/۵۰	۰، ۰، ۰، ۰ ، ۰^+	۲/۱۵
اولین حالت برانگیختگی	-۵۴/۹۴	-۵۲/۹۲	-۵۳/۴۷	۱ ، ۲ ، ۰، ۲^+	۱/۰۳

از جدول بالا می‌توان نتیجه گرفت که درصد خطا در حالت پایه بیشتر و در حالت برانگیخته کمتر است و این مهم بیانگر آن است که پتانسیل استفاده شده برای این هسته مناسب نمی باشد.

۴-۶ ترازهای انرژی هسته $^{16}_{8}O$ به صورت مدل $^{8}_{4}Be + ^{8}_{4}Be$:

برای بررسی می توان ایزوتوپ دیگری مانند $^{16}_{8}O$ را در نظر گرفت ،این ایزوتوپ به صورت دو خوشه ی $^{8}_{4}Be$ با استفاده از مدل خوشه ای لحاظ شده است. ترازهای انرژی این ایزوتوپ با استفاده از یک پتانسیل جایگزیده با استفاده از پتانسیل هافستد-تلر که پتانسیل کراتزر است به روش NU محاسبه شده است[۴۰]:

$$V(r) = -A + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r} \qquad (۴-۳۱)$$

با جایگذاری پتانسیل منتخب (۴-۴۰) در معادله شرودینگر (۴-۴۱)

$$R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = 0 \qquad (۴-۳۲)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - (-A + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r}) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]R(r) = 0 \qquad (۴-۳۳)$$

لذا می‌توان معادله بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{2\mu(E+A)}{\hbar^2}r^2-\frac{2\mu C}{\hbar^2}r-(\frac{2\mu B}{\hbar^2}+l(l+1))\right]R(r)=0 \qquad (۳۴-۴)$$

برای ساده سازی، پارامترهای جدیدα، β و γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha=-\frac{2\mu(E+A)}{\hbar^2},\beta=-\frac{2\mu C}{\hbar^2},\gamma=\frac{2\mu B}{\hbar^2}+l(l+1) \qquad (۳۵-۴)$$

بنابراین با توجه به این پارامترها و تغییر متغیر r به s و با هم ارزی $\psi(r)\equiv R(r)$ ، معادله (۴-۳۴) بصورت زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2}+\frac{2}{s}\frac{d\psi(s)}{ds}+\frac{1}{s^2}[\alpha s^2+\beta s-\gamma]\psi(s)=0 \qquad (۳۶-۴)$$

با مقایسه ی معادله فوق با معادله فوق هندسی NU خواهیم داشت[۴۳]:

$$E=-A-\frac{\frac{\mu C^2}{2\hbar^2}}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2\mu B}{\hbar^2}+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2} \qquad (۳۷-۴)$$

از این فرمول می‌توان ترازهای انرژی یک هسته ی دو خوشه‌ای را تعیین کرد که در اینجا دو خوشه را به صورت دو ایزوتوپ ^8_4Be در نظر می‌گیریم. لذا باید پارامترهای A، μ، C و B را تعیین کرد. این پارامترها در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

جدول(۴-۲): ترازهای انرژی هسته $^{16}_8O$ به صورت دوخو شه ^8_4Be [۷۶-۷۷]

پارامترها	$\mu(\frac{MeV}{c^2})$	A(MeV)	B($MeV.fm^2$)	C($MeV.fm$)
مقدار پارامترها	۹۴۰	8	397/62	112/8

نتایج این محاسبات برای این پتانسیل در جدول زیر برای حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O نشان داده شده است.

جدول(۴-۳): ترازهای انرژی $^{16}_{8}O$ به صورت دوخو شه $^{8}_{4}Be$ [۷۸ و ۷۹]

ترازهای انرژی	تابع محاسبه شده(MeV)	داده های تجربی بر حسب MeV	خطا(درصد)
حالت پایه	-۱۲۷/۳۱	-۱۲۷/۶۲	۰/۲۵
اولین حالت برانگیخته	-۱۲۳/۱۳	-۱۲۱/۵۷	۱/۲۶

نگاه به جدول فوق بیانگر آن است که با بالا رفتن تراز خطا نیز بیشتر می‌شود چرا که انتخاب و نوع استفاده از پتانسیل و پارامترهای آن از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

۴-۷: محاسبه ترازهای انرژی هسته‌های $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$ به صورت دو ذره‌ای در مدل غیر نسبیتی:

با استفاده از مدل خوشه ای ، هسته‌های منتخب منیزیم ۲۴ و گوگرد ۳۲ به صورت دو ذره که هر ذره یک هسته است، در نظر گرفته شده اند . به عبارتی هسته $^{24}_{12}Mg$ را به صورت $^{12}_{6}C + ^{12}_{6}C$ و هسته $^{32}_{16}S$ را به صورت $^{16}_{8}O + ^{16}_{8}O$ در نظر گرفته و بدین ترتیب با اعمال یک پتانسیل مناسب ، ترازهای انرژی هسته های $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$ محاسبه شده اند[۷۹]. پتانسیل انتخاب شده برای این کار پتانسیل هالتن تعمیم یافته بعلاوه پتانسیل یوکاوای درجه دوم ،به صورت زیر، می باشد:

$$V(r) = -\frac{v_0 e^{-r}}{\alpha(1-e^{-r})} + \frac{v_1 e^{-\alpha r}}{\alpha^2 r^2} \qquad (۳۸-۴)$$

با قرار دادن پتانسیل بالا در معادله (۴-۱۱) و استفاده از تقریب زیر:

$$\frac{l(l+1)}{r^2} \approx \frac{l(l+1)\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})^2} \qquad (۳۹-۴)$$

و معرفی متغیر جدید $S = e^{-\alpha r}$، معادله (۴-۱۱) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\psi''_{n,l}(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}\psi'_{n,l}(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2}[\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0]\psi_{n,l}(s) = 0 \qquad (۴۰-۴)$$

که پارامترهای χ_2 ، χ_1 و χ_0 به صورت زیر هستند:

$$\chi_0 = -\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}E_{n,l}$$

$$\chi_2 = \frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\left[v_1 + \frac{V_0}{\alpha} - E_{n,l}\right]; \chi_1 = \frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\left[+2E_{n,l} - \frac{V_0}{\alpha} + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}l(l+1)\right] \qquad (۴۱-۴)$$

از مقایسه معادله (۴-۴۰) با معادله فوق هندسی (۴-۱۷) با استفاده از روش PNU ، معادله ی زیر برای ترازهای انرژی حاصل شده است:

$$(2n+1)\left[\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right]$$
$$+2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \qquad (۴۲-۴)$$

تابع موج از روش PNU به صورت زیر حاصل می شود:

$$\psi_{n,l}(r) = \frac{N}{r}(e^{-\alpha r})^{\sqrt{\chi_0}}(1-e^{-\alpha r})^{(\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2})}$$

$$\times P_n^{(2\sqrt{\chi_0},2\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}})}(1-2e^{-\alpha r}) \qquad (۴۳-۴)$$

که N ثابت بهنجارش و $P_n^{\alpha,\beta}(r)$ چند جمله ای ژاکوبی[1]است. نتایج عددی حاصل از معادله (۴-۴۲) در جدول (۴-۴) نشان داده شده است[۸۰]

جدول (۴-۴): انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ایزوتوپ های $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$در روش غیرنسبیتی

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل			حالت	محاسبات انجام شده(MeV)	داده های تجربی (MeV)[66,69]	خطا (درصد)
	$\alpha(fm^{-1})$	$v_0(MeV.fm^{-}$	$v_1(MeV$				
^{24}Mg	0/0640	5/5230	7/9899	0^+	-198/5741	-198/2570	۰/۱۵
				2^+	-196/1946	-196/8883	۰/۳۵
				4^+	-193/0958	-194/1341	۰/۵۴
^{32}S	0/0570	6/1824	9 /7713	0^+	-271/4974	-271/7801	۰/۱۱
				2^+	-269/8823	-269/5459	۰/۱۲
				4^+	-268/2835	-267/3210	۰/۳۵

از جدول بالا می توان نتیجه گرفت که نتایج حاصل شده برای حالت پایه دارای توافق خوبی با تجربه بوده و هرچه اسپین زیادتر می شود اختلاف با نتایج تجربی نیز بیشتر می شود چرا که پتانسیل وابسته به اسپین نیست.

[1] The Jacobi coordinate

۴-۸ محاسبه ترازهای انرژی هسته $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$ به صورت دو ذره‌ای در مدل نسبیتی:

برای محاسبه ی تراز های انرژی در حالت نسبیتی لازم است، مکانیک کوانتومی نسبیتی یعنی معادله ی کلاین گوردن با انتخاب یک پتانسیل مناسب حل و در نهایت نتایج حاصل شده با نتایج حالت غیر نسبیتی مقایسه گردند. لذا ابتدا معادله کلاین-گوردن[1] را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{P^2 - (V(r,\theta,\phi) - E_R)^2 \ + (S(r,\theta,\phi) + \mu c^2)^2\}\psi(r,\theta,\phi) = 0 \qquad (۴۴-۴)$$

که این معادله برای یک ذره با اسپین صفر است و $V(r,\theta,\phi)$ پتانسیل برداری و $S(r,\theta,\phi)$ پتانسیل نرده ای است[۵۸،۵۷]. μ، E_R ، S و V به ترتیب برابر جرم کاهیده، انرژی نسبیتی، پتانسیل نرده ای و پتانسیل برداری هستند. بنابراین معادله ی بالا به صورت زیر ساده می شود:

$$\nabla^2 + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\{(V(r,\theta,\phi) - E_R)^2 \ - (V(r,\theta,\phi) + \mu c^2)^2\}\psi(r,\theta,\phi) = 0 \qquad (۴۵-۴)$$

با انتخاب $S(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$ برای معادله بالا ، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\{-2V(r)(E_R + \mu c^2) + E_R^2 - \mu^2 c^4\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (۴۶-۴)$$

قسمت شعاعی معادله بالا برای بردار مکانی D بعدی r به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\{-2V(r)(E_R + \mu c^2) \qquad (۴۷-۴)$$
$$+(E_R^2 - \mu^2 c^4) \ - \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2}\}R(r) = 0$$

[1] Klein-Gordon equation

پتانسیل انتخاب شده برای این کار ، پتانسیل تعمیم یافته هالتن[1] بعلاوه پتانسیل های یوکاوا[2] است که به صورت زیر تعریف می شود[۸۱،۸۲]:

$$V(r) = -\frac{v_0 e^{-r}}{\alpha(1-e^{-r})} + \frac{v_1 e^{-\alpha r}}{\alpha^2 r^2} \qquad (۴-۴۸)$$

با قرار دادن پتانسیل بالا در معادله (۴-۴۷) و استفاده از تقریب زیر:

$$\frac{l(l+1)}{r^2} \approx \frac{l(l+1)\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})^2} \qquad (۴-۴۹)$$

و معرفی متغیر جدید $S = e^{-\alpha r}$، و جایگذاری متغیر $\psi_{n,l}(r)$ به جای $R(r)$ ، معادله (۴-۴۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi''_{n,l}(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}\psi'_{n,l}(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2}[-\eta_2 s^2 + \eta_1 s - \eta_0]\psi_{n,l}(s) = 0 \qquad (۴-۵۰)$$

که پارامترهای η_2، η_1 و η_0 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta_2 = \left[\beta v_1 + \beta\frac{v_0}{\alpha} - \gamma\right], \eta_1 = -\left[2\gamma - \beta\frac{v_0}{\alpha} + l(l+1)\right], \eta_0 = \gamma \qquad (۴-۵۱)$$

$$\gamma = \frac{(E_{n,l}^2 - M^2c^4)}{\hbar^2 c^2 \alpha^2}, \beta = \frac{(E_{n,l}^2 - M^2c^4)}{\hbar^2 c^2 \alpha^2}$$

با بکار بردن روش PNU ، معادله زیر برای ترازهای انرژی حاصل می شود:

$$(2n+1)\left[\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\eta_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right] \qquad (۴-۵۲)$$

$$+2\sqrt{\eta_0(\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4})} + 2\eta_0 - \eta_1 + \frac{1}{4} = 0$$

[1] Hulthen
[2] Yukawa

و تابع موج حاصل از معادله کلاین-گوردن نیز به صورت زیر از PNU حاصل می شود:

$$\Psi_{n,l}(r) = \frac{N'}{r}(e^{-\alpha r})^{\sqrt{\eta_0}}(1-e^{-\alpha r})^{\left(\sqrt{\eta_2-\eta_1+\eta_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)} \times P_n^{2\sqrt{\eta_0},2\sqrt{\eta_2-\eta_1+\eta_0+\frac{1}{4}}}(1-2e^{-\alpha r}) \qquad (۵۳-۴)$$

که N' ثابت بهنجارش و تابع $P_n^{\alpha,\beta}(r)$ چند جمله‌ای ژاکوبی می باشد. نتایج عددی حاصل از معادله (۴-۵۲) در جدول (۴-۵) برای دو عنصر $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$ نشان داده شده است.

جدول (۴-۵): انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ایزوتوپ های $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$ در روش نسبیتی[۸۳،۸۴].

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل			حالت	محاسبات انجام شده (MeV)	داده های تجربی (MeV)[66,69]	خطا(درصد)
	$\alpha(fm^{-1})$	$v_0(MeV.fm^{-1})$	$v_1(MeV)$				
^{24}Mg	0/0210	17/35860	28 /5170	0^+	-198/4332	-198/2570	۰/۱۲
				2^+	-196/5952	-196/8883	۰/۱۴
				4^+	-194/4260	-194/1341	۰/۱۳
^{32}S	0/0320	61/1467	115 /466	0^+	-271/9351	-271/7801	۰/۱۲
				2^+	-269/4887	-269/5459	۰/۱۱
				4^+	-267/0453	-267/3210	۰/۱۴

با دقت به جدول بالا، می توان نتیجه گرفت که نتایج برای تمام حالت ها به تجربه نزدیکتر است و این نشان دهنده این است که روش نسبیتی نسبت به غیر نسبیتی دقیق تر است. یکی دیگر از نتایج محاسبه شده محاسبه شعاع بار ، یعنی محاسبه $< r^2 >^{\frac{1}{2}}$. می باشد، که فرمول محاسبه آن نیز به صورت زیر است:

$$< r^2 >^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\int R^*_{n,l}(r) r^2 R_{n,l}(r) d^3r}{\int R^*_{n,l}(r) R_{n,l}(r) d^3r} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۴-۴)$$

لذا با توجه به معادلات (۴-۵۳) و (۴-۵۴) می‌توان این تابع را برای غیر نسبیتی و نسبیتی محاسبه کرد که به ترتیب در جدول های (۴-۶) و (۴-۷) نشان داده شده اند. داده‌های این دو جدول نشان می‌دهند که نتایج نسبیتی توافق بهتری نسبت به نتایج غیرنسبیتی دارند، و این بیانگر رفتار نسبیتی ذرات داخل هسته است.

جدول (۴-۶): نتیجه غیرنسبیتی محاسبات و تجربه مربوط به شعاع بار برای دو هسته $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل			$< r^2 >^{\frac{1}{2}}$	$< r^2 >^{\frac{1}{2}}$	خطا(درصد)
	$\alpha(fm^{-1})$	$v_0(MeV.fm^{-1})$	$v_1(MeV)$	محاسبه ما	[66,69]تجربی	
^{24}Mg	0/064	5/5230	7/9899	3/0833	3/0570	۰/۸۴
^{32}S	0/057	6/1824	9/7713	3/2960	3/2611	۰/۹۱

جدول (۴-۷): نتیجه نسبیتی محاسبات و تجربه مربوط به شعاع بار برای دو هسته $^{24}_{12}Mg$ و $^{32}_{16}S$.

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل			$<r^2>^{\frac{1}{2}}$	$<r^2>^{\frac{1}{2}}$	
	$\alpha(fm^{-1})$	$v_0(MeV.fm^{-1})$	$v_1(MeV)$	محاسبه ما	تجربی[66,69]	خطا(درصد)
^{24}Mg	0/021	17/3586	28/5170	3/0438	3/0570	۰/۴۶
^{32}S	0/032	61/1467	115/4661	3/28601	3/2611	۰/۶۲

۴-۹ محاسبه ترازهای انرژی هسته $^{16}_{8}O$ و $^{20}_{10}Ne$ در مدل خوشه ای و ساختار(هسته+آلفا):

با استفاده از مدل خوشه‌ای ، هسته‌های $^{16}_{8}O$ و $^{20}_{10}Ne$ به صورت یک هسته کوچک تر و یک ذره ی آلفا در نظرگرفته شده اند. بدین ترتیب می‌توان هسته $^{16}_{8}O$ را به صورت $^{12}_{6}C+\alpha$ و هسته $^{20}_{10}Ne$ را به صورت $^{16}_{8}O+\alpha$ نوشت ، با در نظر گرفتن این ساختار برای این دو عنصر و با استفاده ازپتانسیل معادله (۴-۱۰) و حل معادله شرودینگر از روش NU ، معادله ی (۴-۲۰) برای دو ذره حاصل شده است . با در نظر گرفتن معادله (۴-۲۰) و با استفاده از پارامترهای مناسب و موثر می توان ترازهای انرژی را بدست آورد. برای هسته $^{16}_{8}O$ در ساختار $^{12}C+\alpha$، پارامتر موثر V_k برابر17/28 MeV.fm است و پارامتر $\mu=\frac{m_\alpha m_{12_C}}{m_\alpha+m_{12_C}}$ برابر $2796/44\ \frac{MeV}{C^2}$ است. با تطبیق دادن حالت پایه و اولین حالت برانگیخته با داده های تجربی، می‌توان پارامترهای دیگر V_{0A} , V_{0R} , α_A و α_R را نیز حساب کرد که به ترتیب برابر مقادیر۶۷MeV، ۱۲۲/۵۲ MeV ، ۲fm و ۲/۱۳ fm می‌باشند، نتایج منتج شده از قرار دادن پارامترهای مذکور در معادله (۴-۲۰) برای هسته $^{16}_{8}O$ همراه با داده های تجربی در جدول (۴-۸) نشان داده شده است.

جدول(۴-۸): ترازهای انرژی هسته $^{16}_{8}O$ در ساختار دوخوشه‌ای $^{12}_{6}C + \alpha$.

ترازها	$E_C(MeV)$	$E_{exp}(MeV)$ [۶۶ و ۶۹]	خطا(درصد)
حالت پایه	-127/99	-127/62	۰/۲۹
اولین حالت برانگیخته	-126/09	-121/57	۳/۹۶
دومین حالت برانگیخته	-125/86	-121/48	۳/۲
سومین حالت برانگیخته	-125/51	-120/07	۴

حال برای هسته $^{20}_{10}Ne$ که آن را به صورت ساختار دو خوشه ای $^{16}_{8}O + \alpha$ در نظر می‌گیریم، مقدار پارامتر V_k برابر 23/04 MeV.fm برای این ساختار است. پارامتر μ که به صورت $\mu = \frac{m_\alpha m_{^{16}_{8}O}}{m_\alpha + m_{^{16}_{8}O}}$ تعریف می شود برابر $\frac{MeV}{C^2}$ ۲۹۸۲/۲۴ است. پارامترهای دیگر را هم می‌توان از انطباق بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته به دست آورد. بنابراین پارامترهای V_{0A} , V_{0R} , α_A و α_R به ترتیب برابر MeV ۸۲/۸ ، MeV ۱۵۴/۲، fm ۲ و fm ۲/۱۳ هستند[۶۴]. با قرار دادن این پارامترها در معادله (۴-۲۰) برای دو ذره نتایج خوبی حاصل شده است که در جدول (۴-۹) نشان داده شده است.

جدول (۴-۹): ترازهای انرژی برای هسته $^{20}_{10}Ne$ به صورت ساختار دو خوشه ای $^{16}_{8}O + \alpha$.

ترازها	$E_C(MeV)$	$E_{exp}(MeV)$	خطا(درصد)
حالت پایه	-160/77	-160/6	۰/۰۶
اولین حالت برانگیخته	-159/57	-158/97	۰/۳۷
دومین حالت برانگیخته	-159/02	-156/36	۱/۸
سومین حالت برانگیخته	-158/24	-153/41	۳/۱۶

از جدول های (۴-۸) و (۴-۹) می‌توان نوشت: در مدل های مختلف دو خوشه ای، هرچه هسته مقابل آلفا بزرگتر باشد ، نتیجه دقیق تر است و همخوانی بهتری دارد.

۴-۱۰: محاسبه ترازهای انرژی هسته $^{17}_{8}O$ و $^{41}_{20}Ca$ در مدل خوشه ای به صورت یک سیستم نسبیتی:

همانطور که در فصل اول مطرح شد، بعد از کشف نوترون، مدل‌های پروتون-نوترون هسته عمومیت پیدا کردند. مدل خوشه ای پیشنهادی دو دانشمند دیگر به نام تلر[1] و هافستد[2]، به صورتی بیان شد که امکان محاسبه ی انرژی بستگی هسته هایی به صورت ۴n ، ۴n-۱ و ۴n+۱ نیز ممکن گردد[۸]. بصورتی که یک هسته ۴n-۱ شامل n آلفا و یک حفره و ۴n+۱ شامل n ذره آلفا و یک نوکلئون می‌باشند. از آنجاییکه هسته $^{17}_{8}O$ را می توان به صورت 4n+1 نوشت (n ذره آلفا و یک نوکلئون اضافی).یعنی این هسته نیز در مدل خوشه‌ای مورد بحث قرار گرفته است .اکسیژن ۱۷ شامل چهار ذره آلفا و یک نوکلئون اضافی می باشد. چون 4n به صورت لایه پر عمل کرده و تنها نوکلئون باقی مانده نقش اساسی را بازی می کند و به دلیل فرد بودن اسپین این مجموعه، باید از معادلات دیراک برای محاسبه ترازهای انرژی این ایزوتوپ استفاده کرد. هسته ایزوتوپ $^{41}_{20}Ca$ نیز مانند $^{17}_{8}O$ قابل بررسی است. از اینرو، در توصیف نسبیتی، معادله دیراک برای یک نوکلئون با جرم حرکت کننده در یک پتانسیل عددی جاذب S(r) و یک پتانسیل برداری دافعه V(r) به صورت زیر نوشته می شود [۵۸] :

$$[-i\hbar c\hat{\alpha}.\hat{\nabla}+\hat{\beta}(Mc^2+S(r))]\Psi_{n_r,k}=[E-V(r)]\Psi_{n_r,k} \qquad (۵۵-۴)$$

که E انرژی نسبیتی، M جرم یک ذره، و α و β ماتریس های ۴×۴ دیراک هستند. توابع موج می‌توانند مطابق با تکانه زاویه ای کل j و عدد کوانتومی اسپین-مدار k به صورت زیر نوشته میشوند:

[1] Teller
[2] Hafstad

$$\Psi_{n_r,k}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r}\begin{bmatrix} F_{n_r,k}(r)Y_{jm}^{l}(\theta,\phi) \\ iG_{n_r,k}(r)Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \qquad (۵۶-۴)$$

که $F_{n_r,k}(r)$ و $G_{n_r,k}(r)$ اجزای بالا و پایین هستند و $Y_{jm}^{l}(\theta,\phi)$ و $Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\phi)$ توابع هارمونیک کروی هستند. n_r عدد کوانتومی شعاعی و m عدد کوانتومی مغناطیسی در جهت Z است. اعداد کوانتومی تکانه زاویه ای کل چرخشی l ، $\tilde{l}$ نشان دهنده اعداد کوانتومی اسپینی و شبه اسپینی هستند. با قرار دادن معادلات (۴-۵۶) در معادله (۴-۵۵)، یک جفت معادله برای قسمت شعاعی معادله دیراک نتیجه می شود:

$$\begin{cases} (\frac{d}{dr}+\frac{k}{r})F_{n_r,k}(r)=\frac{1}{\hbar c}[Mc^2+E-\Delta(r)]G_{n_r,k}(r) \\ (\frac{d}{dr}-\frac{k}{r})G_{n_r,k}(r)=\frac{1}{\hbar c}[Mc^2-E+\Sigma(r)]F_{n_r,k}(r) \end{cases} \qquad (۵۷-۴)$$

که $\Delta(r)=V(r)-S(r)$ و $\Sigma(r)=V(r)+S(r)$ به ترتیب اختلاف و مجموع پتانسیل های $V(r)$ و $S(r)$ هستند. تحت شرایط تقارن اسپینی، یعنی $\Delta(r)=0$ ، معادله (۴-۵۷) به معادله زیر کاهش می یابد:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{k(k+1)}{r^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}[Mc^2+E][Mc^2-E+\Sigma(r)]\right)F_{n_r,k}(r)=0 \qquad (۵۸-۴)$$

و تحت شرایط تقارن شبه اسپینی ، یعنی $\Sigma(r)=0$ ، معادله (۴-۵۷) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{k(k-1)}{r^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}[Mc^2-E][Mc^2+E-\Delta(r)]\right)G_{n_r,k}(r)=0 \qquad (۵۹-۴)$$

بنابراین جواب های حالت مقید که شرط های $F_{n_r,k}(0)=G_{n_r,k}(0)=0$ و $F_{n_r,k}(\infty)=G_{n_r,k}(\infty)=0$ را ارضا میکنند، بررسی شده اند[۵۹]. با محاسبه ی ترازهای انرژی ایزوتوپ های

های $^{41}_{20}Ca$ و $^{17}_{8}O$ تحت شرایط تقارن اسپینی $\Delta(r) = 0$ ، معادله دیراک مولفه بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{k(k+1)}{r^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}[Mc^2+E][Mc^2-E+\sum(r)]\right)F_{n_r,k}(r)=0 \qquad (۶۰-۴)$$

با استفاده از پتانسیل معادله (۴-۴۸)، معادله (۴-۶۰) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$F''(s)+\frac{1}{s}F'(s)+\frac{1}{s^2}\left\{\frac{(E^2-M^2c^4)}{\hbar^2c^2\alpha^2}-\frac{(E+Mc^2)}{\hbar^2c^2\alpha^2}\left[-2v_0\frac{s}{\alpha(1-s)^2}+2v_1\frac{s^2}{\alpha(1-s)^2}\right]\right.$$
$$\left.-k(k+1)\frac{s}{(1-s)^2}\right\}F(s)=0 \qquad (۶۱-۴)$$

معادله بالا تنها برای k=0 قابل حل به صورت دقیق است. به منظور به دست آوردن جواب های تحلیلی برای این معادله، ما تقریب بهبود یافته پکریس[1] را استفاده می کنیم و جمله جفت شدگی اسپین-مدار را با عبارتی که در $\alpha\leq\leq 1$ معتبر است و به صورت زیر است، جایگزین میکنیم[۷۴،۷۳]:

$$\frac{k(k+1)}{r^2}\approx k(k+1)\frac{\alpha^2e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})^2} \qquad (۶۲-۴)$$

حالا ما می‌توانیم معادله (۴-۷۹) را به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$F''_{n,k}(s)+\frac{(1-s)}{s(1-s)}F'_{n,k}(s)+\frac{1}{s^2(1-s)^2}[-\chi_2s^2+\chi_1s-\chi_0]F_{n,k}(s)=0 \qquad (۶۳-۴)$$

که پارامترهای χ_0، χ_1، χ_2 به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

[1] pekeris

$$\chi_2 = 2\beta\left(\frac{v_0}{\alpha}+\frac{v_1}{\alpha}\right)-\gamma$$

مقایسه $$\chi_1 = 2\beta\left(\frac{v_0}{\alpha}\right)-2\gamma-k(k+1);\quad \beta=\frac{\left(E+Mc^2\right)}{\hbar^2c^2\alpha^2},\gamma=\frac{\left(E^2-M^2c^4\right)}{\hbar^2c^2\alpha^2} \qquad (۶۴-۴)$$

$$\chi_0 = -\gamma$$

معادله (۴-۶۳) با معادله زیر:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2 s}{s(1-\varepsilon_3 s)}\frac{d}{ds}+\frac{(-\chi_2 s^2+\chi_1 s-\chi_0)}{s^2(1-\varepsilon_3 s)^2}\right]\Psi_n(s)=0 \qquad (۶۵-۴)$$

ضرایب معادله بالا برای محاسبه ترازهای انرژی در جدول (۴-۱۰) در صفحه بعد آمده است. معادله انرژی که از روش PNU به دست می‌آید در معادله زیر نشان داده شده است:

$$n\varepsilon_2-(2n+1)\varepsilon_5+(2n+1)(\sqrt{\varepsilon_9}+\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_8})+n(n-1)\varepsilon_3+\varepsilon_7+2\varepsilon_3\varepsilon_8+2\sqrt{\varepsilon_8\varepsilon_9}=0 \qquad (۶۶-۴)$$

جدول (۴-۱۰): ضرایب معادله بالا برای محاسبه انرژی

$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$	$\varepsilon_4=0$	$\varepsilon_5=-\frac{1}{2}$
$\varepsilon_6=\chi_2+\frac{1}{4}$	$\varepsilon_7=-\chi_1$	$\varepsilon_8=\chi_0$
$\varepsilon_9=\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}$	$\varepsilon_{10}=2\sqrt{\chi_0}$	$\varepsilon_{12}=2\sqrt{\chi_0}$
$\varepsilon_{11}=2\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}$	$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}+2\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}$	

با استفاده از ضرایب جدول بالا و معادله انرژی بالا، خواهیم داشت:

(۶۷-۴)

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}+\sqrt{\chi_0}+\frac{1}{4}(2n+1)\right)+2\sqrt{\chi_0(\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4})}+2\chi_0-\chi_1+\frac{1}{4}=0$$

تابع موج حاصل شده از طریق PNU به صورت زیر است:

$$F_{n_r,k}(r)=N\left(e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_0}\right)}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)}P_n^{\left(2\sqrt{\chi_0},2\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}\right)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right) \qquad (۶۸-۴)$$

که N ثابت بهنجارش است. از طرف دیگر، جزء پایین اسپینور دیراک می‌تواند از معادله زیر حساب شود:

$$G_{n_r,k}(r)=\frac{\hbar^2c^2}{E+Mc^2}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)F_{n_r,k}(r) \qquad (۶۹-۴)$$

و تابع موج برای معادله دیراک نیز از معادله زیر محاسبه می شود:

(۷۰-۴)

$$\psi_{n_r,k}(r,\theta,\varphi)=N\begin{bmatrix} Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ \frac{i}{[M+E_{n_r,k}]}\left[\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right]Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi)\end{bmatrix}\left(e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_0}\right)}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)}$$
$$P_n^{\left(2\sqrt{\chi_0},2\sqrt{\chi_2-\chi_1+\chi_0+\frac{1}{4}}\right)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right)$$

نتایج حاصل از معادله (۴-۶۷) در جدول (۴-۱۱) نشان داده شده است.

جدول(۴-۱۱): ترازهای انرژی حالت پایه ایزوتوپ های $^{17}_{8}O$ و $^{41}_{20}Ca$

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل تعمیم یافته			حالت	$E_{our}(MeV)$	$E_{exp}(MeV)$	خطا(درصد)
	$(fm^{-1})\alpha$	V_0	V_1				
^{41}Ca	۰/۰۶۹	۴۷/۸۶۴۷	۱۱/۲۱۸۲	$1F_{7/2}$	-۳۵۰/۸۰۹۲	-۳۵۰/۴۱۴۸	۰/۱۱
^{17}O	۰/۰۶۹	۲۲/۲۲۸۴	۴/۴۷۷۲	$d_{5/2}$	-۱۳۲/۰۴۴۳	-۱۳۱/۷۶۲۴	۰/۲۱

جدول نمایانگر آن است که درصد خطا با بالارفتن تعداد نوکلئون ها کمتر می‌شود.

۴-۱۱ جمع‌بندی فصل:

در این فصل روش حل معادله شرودینگر و خصوصیات پتانسیل‌های مناسب برای استفاده در مدل خوشه‌ای که باید در معادلات قرار گیرند شرح داده شده است. پس از آن محاسبه ی ترازهای انرژی هسته های سبک در ساختار مختلف خوشه ای در سیستم های نسبیتی و غیر نسبیتی با استفاده از روش NU و مقایسه ی نتایج با داده های تجربی صورت گرفته است.

فصل ۵

نتیجه گیری

۵-۱ جمع بندی و نتیجه گیری:

در فصل اول این رساله مدل‌های هسته‌ای، که عبارتند از: مدل قطره مایع، مدل لایه ای، مدل تجمعی، مدل گاز فرمی و مدل خوشه ای، به انضمام ویژگی ها، نقاط ضعف و قوت هر کدام شرح داده می شود که در این میان، مدل لایه‌ای توافق خوبی با نتایج تجربی داشته و مدل خوشه‌ای نیز برای هسته های سبک مورد استفاده بوده و کاربردی تر می باشد.پس از آن در فصل دوم مفهوم ایزوتوپ های هسته‌ای و مدل‌های توصیف کننده ی آن ها با معرفی پتانسیل‌های استفاده شده در هر مدل بیان می شوند. فصل سوم به شرح روش عددی حل مسایل می پردازد، که این روش، همان روش NU یا روشی تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم متعامد فوق هندسی با استفاده از یک پتانسیل جایگزیده است. منتج استفاده از این روش در حل معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی یعنی حل معادلات شرودینگر و کلاین گوردن، البته وابسته به پتانسیل‌های انتخابی متناسب با مدل خوشه ای در ساختار مختلف، با محاسبه ی دقیق ترازهای انرژی و توابع موج هسته های سبک در فصل چهارم ارائه شده است. البته این فصل علاوه بر حالت در نظر گرفتن تعداد صحیح از ذره ی آلفا به صورت 4n در ایزوتوپ های مختلف در ساختار مختلف خوشه ای به محاسبه ی انرژی بستگی هسته هایی به صورت 4n+1 که شامل n ذره ی آلفا و یک نوکلئون اضافی می باشد ،در مدل خوشه ای، نیز با حل معادله ی دیراک پرداخته است. مقایسه ی نتایج حاصل شده با داده های تجربی بیانگر توافقی خوب و همخوان با مخصوصا در حالت پایه می باشد.

۵-۲ پیشنهادات:

با توجه به تنوع ساختاری در مدل خوشه‌ای و پتانسیل‌های متفاوت جایگزیده برای ایزوتوپ های زوج-زوج، می‌توان عناوین زیر را مورد بررسی قرار داد:

۱) بررسی ترازهای انرژی یک ایزوتوپ زوج-زوج در مدل خوشه‌ای با ساختار دو ذره‌ای با پتانسیل‌های جایگزیده مختلف و مقایسه آن ها با نتایج تجربی از روش NU یا روش‌های دیگر.

۲)بررسی ترازهای یک ایزوتوپ زوج-زوج در مدل خوشه‌ای در مدل چند ذره آلفا با پتانسیل‌های جایگزیده مختلف و مقایسه آن ها با نتایج تجربی از روش NU یا روش های دیگر

۳) بررسی ترازهای انرژی یک ایزوتوپ دو جادویی در مدل خوشه‌ای با ساختار تجزیه به دو هسته کوچکتر یا یک هسته و ذره آلفا از روش NU یا روش‌های دیگر

۴) بررسی ترازهای یک ایزوتوپ زوج-زوج در مدل خوشه‌ای با یک پتانسیل پدیده شناختی در یک ساختار مشخص به روش NU یا روش دیگر.

مراجع :

1. Krane K. S. (1988) “Introducory nuclear physic”, 3 edition, Wiley, pp.264.
2. Wiringa R.B., Pieper S.C., Carlson J., Pandharipande V.R.(2000) Phys. Rev. C **62**, 014001.

۳. هولتون، جرالد؛ راذرفورد، جیمز؛ واتسون، فلچر جی (۱۳۷۱) "*طرح فیزیک هاروارد"، واحد۶: هستهٔ اتم* . تهران: انتشارات فاطمی.

۴. ریگدن، جان و دیگران (۱۳۸۱) " دانشنامه فیزیک" ترجمهٔ محمد ابراهیم ابوکاظمی و دیگران. زنجان: مکان مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه .شابک ۹۶۴-۵۵۱۵-۳۵-۱

5. Meyerhof W. E. (1967) “ Elements of nuclear physics”, McGraw-Hill, pp.143.
6. Frauenfelder H. and Henley E. M. (1974) “Subatomic physic”, 3rd edition, Prentice-Hall,pp.87.
7. Gamow G. (1930)” Mass defect curve and nuclear constitution” **Proc. Roy. Soc. A** ,**126** ,pp.632.
8. Hafstad L. R. and Teller E. (1938) “The Alpha-Particle Model of the Nucleus” **Phys. Rev**., **54**, pp.681.
9. Wheeler J. A. (1937)”Molecular Viewpoints in Nuclear Structure”, **Phys. Rev. C, 52**,pp.1083
10. Dennison D. M. (1954)” Energy Levels of the ^{16}O Nucleus”, **Phys. Rev. 96**, pp.378.
11. Brink D. M., Friedrich H., Weiguny A. and Wong C. W. (1970) ” Investigation of the alpha-particle model for light nuclei”, **Phys. Lett. B**,**33**, pp.143.
12. K. Ikeda et al. (1972),” Formation of the Viewpoint, Alpha-Like Four-Body Correlations and Molecular Aspects in Nuclei” **Prog. Theor. Phys. Suppl., 52**, pp.1 .
13. Horiuchi H. (1974)” On $^{12}C + \alpha$ Scattering by the Coupled Channel Resonating Group Method: Solution of the Redundancy and Non-Orthogonality Problem”, **Prog. Theor. Phys., 51**, pp.1266.
14. Smirnov Yu. F., Obukhovsky I. T. , Tchuvil’sky Yu. M. and Neudatchin V. G. (1974)” The 12C nucleus as a 3α system with forbidden states” ,**Nucl. Phys. A, 235**, pp.289 .

15. Uegaki E., Okabe S., Abe Y. and Tanaka H. (1977)" Structure of the Excited States in ^{12}C. I" **Prog. Theor. Phys.** ,**57**, pp.1262 .
16. Uegaki E., Abe Y., Okabe S. and Tanaka H. (1979)" Structure of the Excited States in ^{12}C. II", **Prog. Theor. Phys., 62**, pp.1621 .
17. Fukushima Y. and Kamimura M.(1977)"Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure",Tokyo, japan.
18. Kamimura M., (1981)" Transition densities between the 01+, 21+, 41+, 02+, 22+, 11− and 31− states in 12C derived from the three-alpha resonating-group wave functions" **Nucl. Phys. A., 351**,pp. 456
19. Suzuki Y. (1976)" Structure Study of T = 0 States in ^{16}O by ^{12}C + α Cluster-Coupling Model. I", **Prog. Theor. Phys. , 55**, pp.1751.
20. Fujiwara Y. et al. (1980)" Comprehensive study of alpha-nuclei" **Prog. Theor. Phys. Suppl., 68**, pp.29.
21. Bauhoff W., Schultheis H., Schultheis R. (1984)" Alpha cluster model and the spectrum of ^{16}O" ,**Phys. Rev. C, 29**, pp.1046.
22. Morinaga H. (1956)"Interpretation of Some of the Excited States of 4n Self-Conjugate Nuclei" ,**Phys. Rev., 101**, pp.254.
23. Freer M. (2007)" The clustered nucleus—cluster structures in stable and unstable nuclei" Rep. Prog. Phys. ,70, pp.2149.
24. Freer M. and Merchant A. C. (1997)" Developments in the study of nuclear clustering in light even - even nuclei" J. Phys. G, 23, pp.261.
25. Hoyle F., Dunbar D. N. F. and Wenzel W. A. (1953)"Prediction of the 7.65 MeV state", Phys. Rev., 92, pp.1095.
26. Morinaga H. (1956) Phys. Rev. **101**, pp.254.
27. Itagaki N., von Oertzen W., Okabe S.(2006) Phys. Rev. C **74**, 067304.
28. Norman P. D. (1993) *Eur. J. Phys.* 14, pp.36.
29. Fedorov D.V. and Jensen A.S.(1996) *Phys. Lett.* B 389, pp.631.
30. Dufour M. and Descouvemont P.(2005) *Nucl. Phys.* A 750, pp.218.
31. Anangostatos S.(1996) *International Journal of Modern Physics* E 5, pp.557.
32. M. Dufour and P. Descouvemont, *Nucl. Phys.* A750, 2-4, 218 (2005).
33. Cohen B. L.(1971)" concepts of Nuclear physics", McGraw-Hill, New York, pp.84.

34. Hagen G, Papenbrock T. (2019) “A doubly magic nucleus that has two faces”, Nature 569, pp. 49-50.
35. Taniuchi, R. et al(2019), Nature 569, pp.53–58.
36. Engelmann, Ch. et al. (1995), Z. Phys. A 352, pp.351–352.
37. Hosmer, P. T. et al. (2005), Phys. Rev. Lett. 94, 112501.
38. Brink D. M. (1966)” International School of Physics “Enrico Fermi”, XXXVI, p. 247.
39. Suzuki Y. and Varga K.(1998)” Stochastic variational approach to quantum-mechanical few-body problems”, vol. 54, Springer Science & Business Media.
40. Bertulani C. A. (2007)” Nuclear physics in a nutshell”, Princeton University Press,.
41. Afzal S. A., Ahmad A. A. Z., and Ali S. (1969) “Systematic Survey of the α− α Interaction,” Rev. Mod. Phys., 41, no. 1, p. 247.
42. Shojaei M. R. and Roshanbakht N. (2015)“Deuteron-Deuteron Cluster Model for Studying the Ground State Energy of the 4He Isotope” ,Chinese J. Phys., 53, no. 7,pp.1-10.
43. Nikiforov A.V. and Uvarov V.B. (1988)” Special Functions of Mathematical Physics”, Birkhauser, Boston.
44. Ikhdair S. M. (2011) “Bound States of the Klein-Gordon for Exponential-Type Potentials in D-Dimensions” , J. Quan. Info. Sci, 1, no. 2, pp.73-86.
45. Giannini, M.M.; Santopinto E.; Vassallo, A. Nuclear Physics A, 2002, 699: 308 -311.
46. Rajabi, A. A. Few-Body System 2005, 37, 267.
47. Shojaei M.R. and Mousavi M.(2016) “The Effect of Tensor Interaction in Splitting the Energy Levels of Relativistic Systems”, Advances in High Energy Physics, 2016, pp.8314784.
48. Shojaei, M .R.; Rajabi, A.A.; Hasanabadi, H. International Journal of Modern Physics E, 2006, 17,6.
49. Greiner W. (2000) “ Relativistic Quantum Mechanics:Wave Equations” , Springer.
50. J.J.Sakurai (1985), “Modern Quantum Mechanics” , (Second Edition), Cambridge University Press.

51. Wu T. Y. and Hwang W. Y. P. (1991)" Relativistic Quantum Mechanics and Quantum Fields" , World Scientific, Singapore.
52. Chen G. (2005) " Solution of the Klein–Gordon for exponential scalar and vector potentials", Phys. Lett. A , 339 , pp.300
53. Dutra A. d. S. and Chen G. (2006) "On some classes of exactly-solvable Klein–Gordon equations",Phys. Lett. A , 349, pp.297.
54. Dominguez-Adame F. (1989)" Bound states of the Klein-Gordon equation with vector and scalar Hulthén-type potentials", Phys. Lett. A , 136 , pp.175.
55. Castro A. S. de (2005)" Klein–Gordon particles in mixed vector–scalar inversely linear potentials", Phys. Lett. A , 338, pp.81.
56. Chen G. (2004)" Bound states for Dirac equation with Wood-Saxon potential" Acta Phys. Sinica , 53, pp.680; Chen G. and Zhao D. F. (2003)" Bound states of Klein-Gordon equation for scalar and vector linear potentials", Acta Phys. Sinica, 52, pp.2954.
57. Alhaidari A. D., Bahlouli H. and Al-Hasan A. (2006)" Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials" Phys. Lett. A , 349 , pp.87.
58. Greiner W.(2000) "Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations" ,3rd ed ,springer, Berlin.
59. Pekeris C.L. (1934)" The rotation-vibration coupling in diatomic molecules", Phys. Rev. , 45 pp.98.
60. Ikhdair S.M. and Sever R. (2010)" Solutions of the spatially-dependent mass Dirac equation with the spin and pseudospin symmetry for the Coulomb-like potential", Appl. Math. Comput. , 216 ,pp.545
61. Kanada-En'yo Y. (1998) "Variation after angular momentum projection for the study of excited states based on antisymmetrized molecular dynamics" , Phys. Rev. Lett., 81, pp.5291.
62. Kanada-En'yo Y. (2007) "The Structure of Ground and Excited States of 12C" , Prog. Theor. Phys., 117, pp.655.
63. Hafstad L. R. and Teller E. (1938) "The alpha-particle model of the nucleus," Phys. Rev., 54, no. 9, p. 681; Cuneyt Berkdemir, Application of the Nikiforov-UvarovMethod in Quantum Mechanics, Theoretical Concepts of Quantum Mechanics,pp. 225-250. DOI: 10.5772/33510
64. Beck C.(2012) " Clusters in Nuclei" , vol. 2, Springer Science & Business Media.

65. Yamada T. and Schuck P.(2004)" Dilute multi-α cluster states in nuclei" Phys. Rev. C, 69, pp.024309(1-44).
66. Audi G., Wapstra A. H. and Thibaul C.(2003)" The Ame2003 atomic mass evaluation: (I). Evaluation of input data, adjustment procedures", Nucl. Phys. A, 729,no. 1, pp.337-676.
67. Ikhdair S. M. and Sever R. (2008)" Exact bound state of THE D-dimensional Klein–Gordon" Int. J. Mod. Phys. C, 19, no. 09, pp.1425-1442.
68. Shojaei M.R. and Mousavi M.(2016) "The Effect of Tensor Interaction in Splitting the Energy Levels of Relativistic Systems", Advances in High Energy Physics, 2016, pp.8314784.
69. Falaye B.J. (2012) "Any ℓ-state solutions of the Eckart potential via asymptotic iteration method",Cent.Euro. J. Phys ,10 , pp.960.
70. H. de Vries, C. W. de Jager, C. de Vries, Atomic Data and Nucl. Data Tabl. 36 (1987) 495.
71. E. W. Otten " Treatise on heavy-ion science" , Vol. 8, Bromley D. A. (ed.), NewYork, Plenum Press (1989).
72. Al-Ghamdi A.H., Ibraheem A.A. and Farid M.E. (2012) "An Investigation of 4He+12C and 4He+16O Reactions Using the Cluster Model", Comm. Theor. Phys., 58,pp.135-140.
73. Hill E.H.(1954) "The Theory of Vector Spherical Harmonics", Am. J. Phys. , 22 ,pp.211.
74. Shojaei M. R. and Roshanbakht N.(2015)" Deuteron-Deuteron Cluster Model for Studying the Ground State Energy of the 44He Isotope", Chin. J. Phys., 53, pp.120301.
75. Shojaei, M. R.; Rajabi, A.A. Modern Physics Letters A, 2008, 23, 2.
۷۶. اصـلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر " محاسبه ترازهای انرژی هسته های سبک در مدل خوشـه ای با پتانسـیل تعمیم یافته علی بودمر از روشNikiforov-Uvarov - " کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، قم، ۱۳۹۶.
77. Funaki et al., Phys. Rev. Lett. 101 082502 (2008)
78. Sahar Aslanzadeh, Mohammad Reza Shojaei , Ali Asghar mowlavi, "Considering the Light Nuclei in the Cluster Model from NU Method", World Journal of

Applied Physics, Vol. 3, No. 4, 2018, pp. 54-60; doi: 10.11648/j.wjap.20180304.11 .

۷۹. .اصلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر(۱۳۹۶) " محاسبه ترازهای انرژی هسته های سبک در ۶۹مدل خوشه ای با پتانسیل تعمیم یافته علی بودمر از روش نیکی فارویووارف " کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، قم.

۸۰. .اصلانزاده، سحر؛ شجاعی، محمد رضا؛ مولوی، علی اصغر(۱۳۹۷) " محاسبه ترازهای هسته منیزیم۲۴ در مدل خوشه ای و تعیین ساختار آن در حالت های مختلف "نهمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان ها،یزد.

81. Freer M.(2010) Scholarpedia, vol. 5, no. 6, p. 9652.
82. Roshanbakht N. and Shojaei M. R.(2018) Communications in Theoretical physics, vol. 70, no. 1, p. 67.
83. Aslanzadeh S., Shojaei M. R. and Mowlavi A. A.(2018) “Calculation the energy levels and charge radius of 24Mg and 32S isotopes in the cluster model”, Canadian Journal of Physics, https://doi.org/10.1139/cjp-2018-0843.
84. Aslanzadeh S., Shojaei M. R. and Mowlavi A. A.(2019) “Consideration of some static properties for doubly-magic nuclei of 41Ca and 17O in relativistic systems”, The African Review of Physics, 2019, 14:

Abstract

For studying the doubly magic even-even isotops in the cluster and layer model, first we should consider the different cluster structures for the doubly magic isotops. These structures change depending on the energy of the used systems that are as α+nucleus, the sum of two smaller nuclei and finally the sum of many alpha particles. The cluster model is used due to its successes for the light nuclei. We want to calculate the energy levels and the wave functions for the light nuclei from the NikiVarov- Uvarov(NU) method that indeed this method is the solution of the second-order differential equation for the super geometric wave functions.

First, we have represented the NU method for solving the Schrodinger equation with a local potential and also have explained the calculation way of the wave function and the energy levels in this method briefly. We ignore the internal structure of the alpha cluster. The used potentials have been considered the modified Yukawa potential or the potential similar to the Ali-Bodmer potential. In this thesis, we consider the energy levels and the ordering structure of the alpha particles for the nuclei of ^{8}Be, ^{16}O, ^{24}Mg, ^{20}Ne and ^{32}S that the used model is the cluster model and the used method is the NU method. Therefore, we determined the different structures of nuclei by comparing the calculated results with the experimental data and obtained the good results for these isotops.

Key words: even-even isotopes, doubly magic isotopes, cluster model, NU method.

Shahrood University of Technology

Kharazmi International Campus

Ph.D. Thesis in Nuclear Physics

Study and consideration of the double magic isotopes with the cluster and layer model

By:Sahar Aslanzadeh

Supervisor:

Dr. Mohammadreza Shojaei

Dr. Ali Asghar Mowlavi

February 2020