





دانشکده فیزیک
گروه فیزیک هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی ذرات در مکانیک کوانتومی تعمیم یافته یافته با رهیافتی از نسبت خاص تعمیم یافته

نسرین
فرحانی

استاد راهنما

دکتر حسن حسن آبادی

تیر ماه ۱۳۹۸

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای نسرین فرحانی با شماره دانشجویی 9606824 رشته: فیزیک گرایش: هسته ای تحت عنوان: بررسی ذرات در مکانیک کوانتومی تغییر شکل یافته با رهیافتی از نسبت خاص تغییر شکل یافته که در تاریخ 1398/4/24 با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می-گردد:

قبول (با درجه: ... عالی.....) مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استاد	دکتر حسن حسن آبادی	1- استاد راهنمای اول
			2- استاد راهنمای دوم
			3- استاد مشاور
	استادیار	دکتر احسان ابراهیمی بسایی	4- نماینده تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر مسلم سوهانی	5- استاد ممتحن اول
	دانشیار	دکتر حسین توکلی عنبران	6- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر سعید حسامی پبله ورد

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از 4 ماه برگزار شود).



تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم که در سختی ها و دشواری های زندگی، همواره یاری دلسوز
و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده اند و همچنین از استاد راهنمای گرامی تقدیرم
جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی که علاوه بر آموزش علم، منش زندگی و مسیر
بهبود زیستن را به من آموخته اند، همچنین وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده
است و بدون شک انجام این پایان نامه بدون کمک و راهنمایی های ارزنده ایشان
امکان پذیر نبوده است، بی نهایت سپاسگزارم و در نهایت از دوست نازنینم که
همیشه با حضور و همراهی اش پشتیبان من بوده و مراد این راه استوار و ثابت قدم
نموده است کمال تشکر را دارم.

تعمدنامه

اینجانب نسرين فرحانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک فیزیک هسته ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی ذرات در مکانیک کوانتومی تعمیم یافته با رهیافتی از نسبیت خاص تعمیم یافته، تحت راهنمایی دکتر حسن حسن آبادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نسرين
فرحانی
سیرماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه به معرفی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP ¹ پرداخته که انتظار داریم در حالت حدی به معادله اصل عدم قطعیت هایزنبرگ معمول دست یابیم. چگونگی دستیابی به این اصل عدم قطعیت را شرح داده و در می یابیم که این عدم قطعیت دارای یک طول کمینه است که این طول کمینه از مرتبه γ طول پلانک است که از این نظر با نظریه ریسمان هم خوانی دارد. سپس با استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته به بررسی معادله شرودینگر تعمیم یافته می پردازیم. محاسبه γ طیف و تابع موج ذرات در این فضا به ازای بعضی از حالت های خاص بخشی از روند انجام این پایان نامه است. همچنین نوع دیگری از اصل عدم قطعیت را که اصل عدم قطعیت بسط یافته EUP ² نام دارد را بررسی کرده و کمینه تکانه را در این فضا بدست می آوریم. سپس با توجه به این نکته که اصل عدم قطعیت بسط یافته و پارامتر تعمیم یافتگی در این عدم قطعیت از مرتبه γ ثابت کیهان شناسی و همچنین متناسب با مربع شعاع سیاهچاله است، از این نظر به بررسی این اصل عدم قطعیت بسط یافته در فضای دی سیترو و آنتی دی سیترو و سپس بررسی معادله موج شرودینگر تعمیم یافته و همچنین بررسی خواص ترمودینامیکی سیستم از جمله تابع پارش در این فضا می پردازیم و همچنین به بررسی معادله کلاین-گوردون تعمیم یافته در دو بعد در این فضا می پردازیم. همچنین برآینم تا بتوانیم یک ساختار کلی برای این محاسبات بیابیم. سپس با تعیین انرژی سیستم به بررسی خواص ترمودینامیکی سیستم مربوطه خواهیم پرداخت و همچنین انتظار داریم که در حالت حدی به روابط متداول برسیم. سپس با تعریف نسبت خاص دو گانه براساس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته که $DSR-GUP$ ³ نام می گیرد به بررسی طول کمینه در این حالت می پردازیم. همچنین رویکرد جبری را در این حالت نوشته و به بررسی معادله موج شرودینگر تعمیم یافته با پتانسیل های مختلف در این حالت می پردازیم. سپس جبر هایزنبرگ تعمیم یافته را برای این اصل عدم قطعیت تعمیم یافته معرفی کرده و روابط تحول زمانی را می نویسیم. در نهایت با نوشتن دمای آنروح و همچنین معرفی سیاهچاله شوارتزشیلد برآینم تا دمای آنروح تعمیم یافته را برای سیاهچاله شوارتزشیلد در حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و بسط اصل عدم قطعیت و همچنین بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته بیابیم.

کلمات کلیدی: اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، اصل عدم قطعیت بسط یافته، معادله شرودینگر، نسبت خاص دوگانه، دمای آنروح، معادله کلاین-گوردون

¹Generalized uncertainty principle

²Extended uncertainty principle

³Doubly special relativity-Generalized uncertainty principle

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Chung, Won Sang, Hassan Hassanabadi and Nasrin Farahani. Modern Physics Letters A (2019): 1950204.
2. N. Farahani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, Investigation of Unruh temperature of Black holes by using of EGUP formalism(submitted)

فهرست مطالب

فهرست تصاویر	
ذ	
۱	۱ بررسی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و حالات تعمیم یافته ی آن
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ تاریخچه
۴	۱.۲.۱ نحوه ی بدست آوردن اصل عدم قطعیت هایزنبرگ
۴	۳.۱ بررسی مفاهیم اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و بسط یافته
۵	۱.۳.۱ بررسی رابطه ی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP
۷	۴.۱ معرفی ثوابت پلانک
۹	۱.۴.۱ بررسی رابطه ی اصل عدم قطعیت بسط یافته EUP
۱۰	۲.۴.۱ تفاوت های بین اصل عدم قطعیت بسط یافته و تعمیم یافته
۱۱	۳.۴.۱ بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته EGUP
۱۱	۵.۱ اصل عدم قطعیت تعمیمی یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه
۲ بررسی معادله کلاین-گوردون در حضور تکانه کمینه و بسط اصل عدم قطعیت در فضای	
۱۳	دی سیتز و آنتی دی سیتز
۱۳	۱.۲ بررسی بسط اصل عدم قطعیت در فضای دی سیتز و آنتی دی سیتز
۱۵	۲.۲ اصل عدم قطعیت بسط یافته
۱۶	۳.۲ اثرات رامسوار-تاونزند در حضور اصل عدم قطعیت بسط یافته
۲۰	۴.۲ تقریب دابلویکی بی برای اصل عدم قطعیت بسط یافته

۲۲	پتانسیل هارمونیک	۱۰۴.۲
۲۳	بسط اصل عدم قطعیت و تکانه کمینه در فضای آنتی دی سیتر	۵.۲
۲۴	نوسانگر هارمونیک در فضای آنتی دی سیتر	۱۰۵.۲
۲۹	ویژگی های استاتیکی: تابع پارش	۶.۲
۳۰	بررسی مکانیک کوانتومی در فضای دی سیتر	۷.۲
۳۱	نوسانگر هارمونیک در فضای دی سیتر	۸.۲
۳۳	بررسی نوسانگر کلاین-گوردون دو بعدی در حضور تکانه کمینه	۹.۲
	نوسانگر کلاین گوردون دو بعدی در حضور میدان مغناطیسی غیریکنواخت	۱۰۹.۲
۳۶	و در حضور تکانه کمینه	
۳ بررسی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه: رویکرد جبری،		
۳۹	بررسی معادله ی شرودینگر و پتانسیل های مختلف در این جبر	
۴۱	نمایش تکانه تغییر شکل یافته	۱۰۰.۳
۴۲	نمایش مکان	۲۰۰.۳
۴۲	نمایش تکانه تغییر شکل نیافته	۳۰۰.۳
۱۰۳	معرفی یک مرتبه ی بالاتر از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در مکانیک کوانتومی	
۴۳	یک بعدی	
۴۵	نمایش در فضای تکانه با جبر جدید اصل عدم قطعیت تعمیم یافته	۱۰۱.۳
۴۶	نمایش در فضای مکان با جبر جدید اصل عدم قطعیت تعمیم یافته	۲۰۱.۳
۴۶	بررسی تابع موج مکان و بیشترین حالت جایگزیدگی	۲.۳
۴۹	بررسی جعبه ی یک بعدی در جبر تعمیم یافته ی جدید	۳.۳
۵۰	بررسی مسئله ی نوسانگر هارمونیک در جبر تعمیم یافته ی جدید	۴.۳
۵۱	حل کلاسیکی	۵.۳
۵۱	اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ی جدید مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه	۶.۳
	نمایش تکانه تغییر شکل یافته برای اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت	۷.۳
۵۳	خاص دوگانه	

۱۰۷.۳	نمایش حالت برای اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص	
۵۴ دوگانه	
۵۴ تابع موج تکانه در نمایش مکان	۸.۳
۵۶ مسئله ی جعبه ی یک بعدی در نمایش مکان	۹.۳
۵۷ بررسی مسئله ی نوسانگر هارمونیک در نمایش تکانه تغییر شکل نیافته	۱۰.۳
۵۹ معرفی جبر صادق بر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه	۱۱.۳
۱۲.۳ دیفرانسیل تغییر شکل یافته مرتبط با اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر	
۶۱ نسبیت خاص دوگانه	
۶۳ تبدیل فوریه تغییر شکل یافته، صفحه ی موج و جعبه ی گاوسی	۱۳.۳
۶۵ حل بسته ی موج در فضای حالت	۱.۱۳.۳
۶۵ جعبه ی گاوسی	۲.۱۳.۳
۶۷ موج جایگزیده در فضای تکانه	۳.۱۳.۳
۶۹ بسته ی موج، سرعت فاز و سرعت گروه	۱۴.۳
۷۰ اثرات رامسوار-تاونزند	۱۵.۳
۷۲ پتانسیل دلتا	۱.۱۵.۳
۷۳ معرفی انواع نسبیت خاص دوگانه	۱۶.۳
۱۷.۳ تبدیلات لورنتس تغییر شکل یافته براساس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر	
۷۵ نسبیت خاص دوگانه	
۱۸.۳ ماکسیمم حالت جایگزیده در اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص	
۷۶ دوگانه	
۱۹.۳ ترمودینامیک سیاهچاله ها براساس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت	
۷۸ خاص دوگانه	
۸۰ اصل عدم قطعیت مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه نوع اول	۲۰.۳
۸۲ ترمودینامیک سیاهچاله	۲۱.۳
۸۵ مطالعه ی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته براساس جبر هایزنبرگ	۴
۸۵ بررسی تحول زمانی در حضور پتانسیل های مختلف	۱.۴

۲۰۴	بررسی سقوط آزاد ذرات در میدان گرانشی یکنواخت تحت اصل عدم قطعیت تعمیم یافته	۸۶
۱۰۲۰۴	انرژی جنبشی وابسته به پارامتر تغییر شکل	۸۸
۲۰۲۰۴	بررسی سقوط آزاد ذرات در میدان گرانشی یکنواخت تحت اصل عدم قطعیت بسط یافته	۸۸
۳۰۴	معادله حرکت با استفاده از جبر هایزنبرگ برای GUP در فضای تکانه	۹۲
۴۰۴	معادله حرکت با استفاده از جبر هایزنبرگ برای GUP در فضای مکان	۹۴
۵۰۴	حل دقیق اصل عدم قطعیت تعمیم یافته از روش جبر هایزنبرگ در فضای مکان	۹۶
۵	بررسی دمای آنروح و خواص ترمودینامیکی سیاهچاله شوارتسشیلد براساس اصل عدم قطعیت	۹۹
۱۰۵	سیاهچاله شوارتسشیلد	۹۹
۱۰۱۰۵	تاریخچه	۹۹
۲۰۱۰۵	حل معادله انیشتین و بدست آوردن شعاع شوارتسشیلد	۱۰۱
۲۰۵	بررسی دمای آنروح در حضور اصل عدم قطعیت هایزنبرگ	۱۰۷
۱۰۲۰۵	بررسی دمای آنروح در حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته	۱۰۹
۲۰۲۰۵	بررسی دمای آنروح در حضور اصل عدم قطعیت بسط یافته	۱۱۲
۳۰۲۰۵	بررسی دمای آنروح در حضور بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته	۱۱۶
۱۳۱	مراجع	
۱۳۷	نمایه	

فهرست تصاویر

۳	۱.۱	نشانگر مکان ذره در هر لحظه
۳	۲.۱	نشانگر طول موج ذره در هر لحظه
		۱.۲	این نمودار نشان می دهد که نمودار $y = e_{\alpha}(x)$ برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و برای
۱۸		$\alpha = 0.1$ (سبز) و $\alpha = -0.1$ (صورتی) است
		۲.۲	این نمودار نشان می دهد که ضرایب بازتاب بر حسب انرژی برای $\alpha = 0$ (قهوه ای
۱۸) و برای $\alpha = 0.1$ (سبز) و $\alpha = -0.1$ (صورتی) هستند
		۳.۲	این نمودار نشان می دهد که ضریب عبور را براساس انرژی برای $\alpha = 0$ (قهوه ای)
۲۰		و $\alpha = 0.5$ (سبز) و $\alpha = -0.5$ (صورتی) رسم کردیم
		۴.۲	طیف انرژی $\varepsilon_{Ads} = \frac{E_n^{Ads}}{\hbar\omega}$ را برای نوسانگر هارمونیک در فضای Ads بعنوان یک
			تابع وابسته به عدد کوانتومی n برای مقادیر مختلف $0.1, 0.5, 1$ و $\frac{\hbar}{m\omega} = 1$ را
۲۹		رسم شده است
۳۲	۵.۲	انرژی بر حسب β های مختلف رسم شده است.
۴۷	۱.۳	رسم ویژه توابع
		۲.۳	رسم ضرایب بازتابی بر حسب انرژی برای $\kappa = \infty$ به رنگ قهوه ای و $\kappa = 120$
۷۱		به رنگ قرمز و $\hbar = 1, m = 2$ و $V_0 = 3, a = \pi$
		۳.۳	رسم ضرایب عبور بر حسب انرژی برای $\kappa = \infty$ به رنگ قهوه ای و $\kappa = 120$ به
۷۲		رنگ قرمز و $\hbar = 1, m = 2$ و $V_0 = 3, a = \pi$

- ۱۰۵ نمودار رابطه ی دمای تغییر شکل یافته سیاهچاله-دما آنروح برای ξ_1, ξ_2 و ξ_3 با $|\Lambda| = 0.5$ و $\beta \cdot \ell_p^2 = 0.5$ مشخص شده است. $(\hbar = c = k = 1 = \pi = 1)$. . ۱۱۹
- ۲۰۵ نمودار رابطه ی جرم-دما برای η_1, η_2 و η_3 با $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ مشخص شده است. $(\hbar = c = k = 1, \Lambda \pi G = 1)$. . ۱۲۱
- ۳۰۵ نمودار رابطه ی ظرفیت گرمایی-دما برای ϑ_1, ϑ_2 و ϑ_3 با $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ مشخص شده است. $(\hbar = c = k = 1, \Lambda \pi G = 1)$. . ۱۲۳
- ۴۰۵ نمودار رابطه ی آنتروپی-دما برای μ_1, μ_2 و μ_3 با $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ مشخص شده است. $(\hbar = c = k = 1, \Lambda \pi G = 1)$. . ۱۲۵

فصل ۱

بررسی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و حالات تعمیم یافته ی آن

۱.۱ مقدمه

۲.۱ تاریخچه

در این فصل قصد داریم مروری بر تاریخچه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و معرفی روابط تعمیم یافته اصل عدم قطعیت هایزنبرگ داشته باشیم، ابتدا رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ و دستگاه یگاهای طبیعی پلانک و طول کمینه را نیز معرفی می کنیم همانطور که می دانیم، ورنر هایزنبرگ^۱ اصل عدم قطعیت خود را زمانی که بر روی مبانی ریاضی مکانیک کوانتومی در موسسه نیلز بوهر^۲ در کپنهاگ کار می کرد، صورت بندی کرد. ورنر هایزنبرگ در سال ۱۹۲۵ میلادی، با همکاری هانس کرامرز^۳، مکانیک ماتریسی را بنیان نهاد، که باعث جایگزین شدن مکانیک مدرن کوانتومی به جای نظریه کوانتومی قدیمی، که فاقد عمومیت بود، شد [۳ - ۱]. فرض اصلی این بود که مفهوم حرکت کلاسیک به اندازه کافی در سطح کوانتومی دقیق نیست، و الکترون های اتم، آن گونه که در فیزیک کلاسیک از مفهوم حرکت برداشت می شود، در مدارهای دقیقا معین حرکت نمی کنند. در عوض، حرکت به شکل عجیبی پخش شده

¹Werner Heisenberg

² Niels bohr

³Hans Kramers

است: تبدیل فوریه زمان تنها شامل فرکانس هایی است که در جهش های کوانتومی مشاهده می شود. مقاله هایزنبرگ هیچ کمیت مشاهده ناپذیری مانند مکان دقیق الکترون در مدار در هر زمان دلخواه را نمی پذیرد، او به نظریه پرداز تنها این اجازه را می دهد که درباره مولفه های تبدیل فوریه حرکت حرف بزند. از آن جا که مولفه های فوریه در فرکانس های کلاسیک تعریف نشده است، نمی توان از آن ها برای ساخت و تشریح مسیر دقیق حرکت الکترون استفاده کرد، در نتیجه فرمالیسم نمی تواند پاسخ قطعی به این پرسش ها بدهد که الکترون دقیقا در کجا است و یا دقیقا چه سرعتی دارد خاصیت ماتریس های نامتناهی هایزنبرگ نشان می دهد مکان و تکانه در عمل ضرب ناجابجا هستند. مقدار انحراف از ناجابجایی توسط رابطه هایزنبرگ مشخص می گردد. ($\hbar = 1$)

$$[x, p] = xp - px = i \quad (1.1)$$

در ابتدا این رابطه تعبیر شفاف و مشخصی نداشت. در مارس ۱۹۲۷ میلادی، هنگامی که هایزنبرگ در موسسه بوهر کار می کرد، متوجه شد که ناجابجایی اشاره به اصل عدم قطعیت دارد [۴]. اصل مکملیت بین مکان و تکانه به وسیله مفهوم دوگانگی موج ذره ای بیان می شود. اگر ذره ای که به وسیله یک موج تخت توصیف می شود از میان یک شکاف باریک عبور کند، (مانند امواج آب که از یک کانال باریک عبور می کنند)، ذره پراکنده می شود و موج آن با زوایای مختلفی از شکاف خارج می شود. هر چه قدر که پهنای شکاف کمتر باشد، مقدار پراش بیشتر شده و عدم قطعیت تکانه به تبع آن افزایش می یابد. هایزنبرگ در مقاله مشهور خود در سال ۱۹۲۷ اظهارات خود را با این عبارت بیان کرد: کمترین مقدار اجتناب ناپذیر، آشفتگی تکانه است که علت آن اندازه گیری مکان می باشد، اما او در آن جا تعریف دقیق از عدم قطعیت های Δx و Δp نداد و در عوض تخمین های قابل قبولی در هر مورد ارائه کرد در سخنرانی خود در شیکاگو اصل خود را به صورت زیر ارائه نمود [۵].

$$\Delta x \Delta p \geq h \quad (2.1)$$

ولی کنارد^۴ بود که در سال ۱۹۲۷ اولین بار صورت مدرن رابطه را چنین ارائه کرد [۶]

$$\delta x \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.1)$$

که در این رابطه $h = \frac{\hbar}{2}$ و δx و δp انحراف استاندارد (معیار) مکان و تکانه هستند، توجه شود که δx و Δx یکسان نیستند، در تعریف کنارد، δx و δp تکرار اندازه گیری مکان ذره و تکانه ذره در سیستم

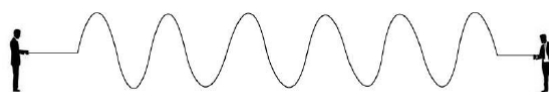
⁴Frank Conrad

هستند، که به شکل محاسبه‌ی انحراف میانگین آن اندازه‌گیری‌ها نشان داده شده است، از این رو رابطه‌ی کنارد چیزی درباره‌ی اندازه‌گیری همزمان به ما نمی‌گوید، در این رابطه ثابت پلانک تقریباً برابر با $h \approx 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ است. حال برای درک بهتر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نیاز است بیانی از اصل مکملی نیز بیان کنیم، طبق این اصل، کاربرد هم‌زمان توصیف‌های موجی-ذره‌ای در مورد یک ذره‌ی مادی مانند یک فوتون غیر ممکن است و در صورتی که یکی از این دو توصیف را بکار ببریم، توصیف دیگری کنار گذاشته می‌شود. به عنوان مثال اگر تابش الکترو مغناطیس را به زبان ذرات بیان کنیم و مکان فوتون را در هر لحظه با دقت کامل بیان کنیم، در این صورت عدم قطعیت در مکان و زمان هر دو صفر است ولی عدم قطعیت در آن چه که به موج فوتون نسبت می‌دهیم، طول موج و فرکانس بی‌نهایت است [۱]. این موضوع مانند این است که همانطور که در شکل (۱.۱) دو نفر دو سر یک طناب را گرفته باشند و یکی از آن‌ها با یک بار تکان دادن طناب پالسی را تولید کند، در این حالت مکان ذره را به دلیل جایگزیدگی در یک نقطه می‌توان در هر لحظه کاملاً اندازه‌گیری کرد ولی دیگر نمی‌توانیم مدعی شویم که طول موج ذره را هم می‌توانیم اندازه بگیریم.



شکل ۱.۱: نشانگر مکان ذره در هر لحظه

برعکس چنانچه توصیف موجی را برای ذره به کار ببریم به دلیل این که طول موج ذره، کاملاً معلوم است لذا عدم قطعیت در تعیین طول موج ذره و همچنین فرکانس آن، صفر است ولی عدم قطعیت در مکان و ذره بی‌نهایت می‌شود. در این حالت نیز می‌توان گفت مطابق شکل (۲.۱) اگر یکی از دو نفر با تکان دادن مداوم طناب موجی ایستا در طول طناب ایجاد نماید در هر لحظه می‌توان ادعا نمود که طول موج معلوم است ولی دیگر نمی‌توان گفت در هر لحظه ذره در چه نقطه‌ای قرار دارد [۲].



شکل ۲.۱: نشانگر طول موج ذره در هر لحظه

۱.۲.۱ نحوه ی بدست آوردن اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

هنگامی که عملگرهای خطی A و B بر روی یک تابع موج مثل $\psi(x)$ اثر می کند، عملیات همیشه جابجایی پذیر نیست، یک مثال واضح در این مورد وقتی است که عملگر B تابع را در x ضرب میکند و عملگر A از تابع نسبت به x مشتق می گیرد.

$$(AB - BA)\Psi = \frac{d}{dx}(x\Psi) - x\frac{d}{dx}\Psi = \Psi \quad (۴.۱)$$

که به زبان عملگرها یعنی:

$$\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = ۱ \quad (۵.۱)$$

این مثال به جهت اینکه نزدیکی زیادی با رابطه جابجایی در مکانیک کوانتومی دارد از اهمیت فراوانی برخوردار است، در آنجا عملگر مکان تابع موج را در x ضرب کرده در حالی که عملگر متناظر با تکانه مشتق گرفته و در $-i\hbar$ ضرب می کند بنابراین :

$$[p, x] = px - xp = -i\hbar\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right) = -i\hbar \quad (۶.۱)$$

۳.۱ بررسی مفاهیم اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و بسط یافته

نظریه ریسمان یکی از رهیافت هایی است که قصد تزویج مکانیک کوانتوم و گرانش را دارد این نظریه در حد انرژی های کم تبدیل به نظریه برهم کنش های پیمانه ای و نظریه گرانش می شود، در انرژی های زیاد و یا فواصل کم در حدود ابعاد پلانک چهره اصلی این نظریه در برطرف کردن مشکلاتی از قبیل تکینگی کلاسیکی و بی نهایت های کوانتومی در نسبت عام نمایان می شود. در این نظریه فرض بر این است ذرات بنیادی همانند الکترون ها و کوارک ها به جای موجودات صفر بعدی، موجوداتی یک بعدی شبیه ریسمان در حال نوسان هستند. حالت های مختلف نوسان این ریسمان بنیادین به صورت ذرات بنیادین جلوه گر می شود. نتیجه بررسی ها در خصوص دامنه پراکندگی ریسمان ها در انرژی های بسیار زیاد منجر به اصلاحی در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در حدود ابعاد پلانک می شود که به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته^۵ GUP مشهور است [۷, ۸]. اصل عدم قطعیت بسط یافته نوع دیگری از این اصل

^۵Generalized Uncertainty Principle

است که تکانه حداقل سیستم را به ما می دهد درحالی که در اصل عدم قطعیت کلی GUP طول کمینه یا طول حداقل برآورده می شود. در معادله ی زیر ℓ_H شعای فضای دی سیتراست که فضای دی سیترا و آنتی دی سیترا یک فضا با بیشترین تقارن هستند که حل دقیقی را برای معادله انیشتین ارائه می دهند. نسخه کلی اصل عدم قطعیت بسط یافته به صورت زیر ارائه می شود:

$$\Delta X \Delta P \geq \hbar \left(1 + \alpha_0^2 \frac{(\Delta X)^2}{\hbar^2 \ell_H^2} \right) \quad (7.1)$$

نسخه کلی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته معمولا به صورت زیر ارائه می شود:

$$\Delta X \Delta P \geq \hbar \left(1 + \beta_0^2 \ell_p^2 \frac{(\Delta P)^2}{\hbar^2} \right) \quad (8.1)$$

که ℓ_p همان طول پلانک است که در بخش قبل به آن پرداختیم و β_0 یک ثابت بدون بعد است [۱۵-۱۳] معادله بالا کاملا عمومی است و هنگامی که ساختار میکروسکوپی فضا-زمان در نظر گرفته می شود، عدم قطعیت مکانیک کوانتومی را شرح می دهد [۱۶] و همچنین می دانیم که مکانیک کوانتومی ناجابجایی [۱۷] و آزمایشات سیاهچاله گدانکن^۶ [۱۸، ۱۹] همگی نمونه های اکتشافی بر اصل عدم قطعیت هستند.

۱.۳.۱ بررسی رابطه ی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP

برای اینکه ایده ی کلی طول کمینه L_f را توصیف کنیم، فرض کنید که می توان تکانه p یک ذره را تا هر مقدار دلخواه افزایش داد، اما طول موج اش نمی تواند به کمتر از مقدار طول کمینه L_f کاهش یابد، یا به طور معادل، بردار موج k هرگز بیشتر از M_f ($L_f = \frac{1}{M_f}$) در یکاهای طبیعی و $c = 1$) نمی شود [۶، ۹، ۱۰] ($p = \hbar k$). بنابراین رابطه بین p و k دیگر نمی تواند خطی باشد. بلکه یک رابطه تابعی خواهد بود، این رابطه تابعی $k(p)$ باید شرایط زیر را برآورده کند [۲]:

- برای انرژی های خیلی کمتر از مقدار جدید، دوباره به همان رابطه خطی برسیم، یعنی برای $P \ll M_f$ داشته باشیم $p \approx k$.

- تابع $k(p)$ به خاطر پایستگی پاریته باید فرد باشد

- تابع به طور یکنواخت به حد بالایی خودش M_f برسد

- یک نمونه از توابعی که از این شرط ها پیروی می کند به شکل زیر است:

$$k(p) = \frac{1}{L_f} \tanh^{\frac{1}{\gamma}} \frac{p}{M_f} \quad (9.1)$$

⁶gedanken

که یک انتخاب رایج در ادبیات طول کمینه است، ما برای سادگی $\gamma = 1$ در نظر می گیریم

$$k(p) = \frac{1}{L_f} \tanh\left(\frac{p}{M_f}\right) \quad (10.1)$$

در ادامه از بسط مرتبه اول \tanh شامل مرتبه ی $\frac{p}{M_f}$ استفاده خواهیم کرد ، بنابراین با وجه به رابطه ی قبل به دست می آوریم

$$\tanh \frac{p}{M_f} \approx \left(\frac{p}{M_f}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{M_f}\right)^3 \quad (11.1)$$

پس با در نظر گرفتن طول کمینه به روابطی برای p بر حسب k می رسم که دیگر خطی نیست.

$$k(p)L_f \approx \left(\frac{p}{M_f}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{M_f}\right)^3 \quad (12.1)$$

برای اینکه بتوانیم رابطه عدم قطعیت طول کمینه، که آن را رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته می نامیم را بدست آوریم لازم است جابجاگر بین x و p را بدانیم، اگر $F(p)$ یک سری توانی قابل بسط بر حسب k باشد رابطه جابجاگری را خواهیم داشت.

$$p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (13.1)$$

$$x_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (14.1)$$

$$x = i \frac{\partial p}{\partial k} \frac{\partial}{\partial k} = i \frac{\partial}{\partial k} \quad (15.1)$$

$$[x, F(p)] = i\hbar \frac{\partial F(p)}{\partial p} \quad (16.1)$$

بنابراین به طور معادل خواهیم داشت

$$[x, p] = i\hbar \frac{\partial p}{\partial k} \quad (17.1)$$

برای محاسبه ی $\frac{\partial p}{\partial k}$ از رابطه ی زیر مشتق گیری می کنیم، خواهیم داشت

$$k(p) = \frac{1}{L_f} \left(\left(\frac{p}{M_f} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{p}{M_f} \right)^3 \right) \quad (18.1)$$

با مشتق گیری از معادله ی قبل خواهیم داشت:

$$\frac{\partial k(p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{L_f} \left(\left(\frac{p}{M_f} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{p}{M_f} \right)^3 \right) \right) = \left(\frac{1}{L_f} \left(\left(\frac{1}{M_f} \right) - \frac{p^2}{M_f^3} \right) \right) \quad (19.1)$$

همانطور که می دانیم رابطه ی $L_f = \frac{1}{M_f}$ را داشتیم

$$\frac{\partial k(p)}{\partial p} = 1 - \left(\frac{p}{M_f} \right)^2 \quad (20.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial k} = \left(1 - \left(\frac{p}{M_f} \right)^2 \right)^{-1} \quad (21.1)$$

سپس با معکوس نوشتن معادله ی قبل داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial k} = \left(1 + \left(\frac{p}{M_f} \right)^2 \right) \quad (22.1)$$

در نتیجه جابجایی به شکل زیر حاصل می شود که نشانگر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته می باشد و پارامتر تعمیم یافتگی از جنس طول پلانک است.

$$[x, p] = i\hbar \left(1 + \left(\frac{p}{M_f} \right)^2 \right) \quad (23.1)$$

۴.۱ معرفی ثوابت پلانک

برخی محاسبات در نظریه ریسمان^۷ منجر به پیش بینی یک طول کمینه (در حدود ابعاد پلانک) در اندازه گیری مکان شده است، این پیش بینی ها اندازه گیری و تفکیک فاصله های کوچکتر از این طول کمینه را غیر ممکن نشان می دهد. فرض وجود طول کمینه در نظریه گرانش بر این اساس است که اگر بخواهیم فواصل بسیار کوچکتر را بررسی و تفکیک کنیم، ذراتی با انرژی بسیار زیاد را باید به کار گرفت، اثرات گرانشی و کوانتومی این ذرات انرژی بالا باعث به هم ریختن ساختار فضا زمان می شود از جمله این

⁷string theory

که مفهوم جایگزیدگی را باید کنار گذاشت که در نتیجه ی آن حد کمینه ای در اندازه گیری طول خواهیم داشت. از این رو برای اثبات طول کمینه می دانیم عدم قطعیت زمان به شکل زیر است:

$$(\Delta E)(\Delta t) \simeq \frac{\hbar}{2} \quad (24.1)$$

از طرفی می دانیم که $x = ct$ پس خواهیم داشت:

$$(\Delta E)(\Delta x) \simeq \frac{\hbar c}{2} \quad (25.1)$$

از طرفی داریم $\Delta E = \Delta M c^2$ پس در ادامه بدست می آوریم:

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (26.1)$$

از طرفی می دانیم شعاع شوارتسشیلد سیاهچاله شوارتسشیلد^۸ به قرار زیر است:

$$R = \Delta x = \frac{2G\Delta M}{c^2} \quad (27.1)$$

$$\Delta x = \frac{2G\Delta E}{c^4} \quad (28.1)$$

طول پلانک: معادله ی بدست آمده متناسب با طول پلانک است.

$$\Delta x = \ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (29.1)$$

جرم پلانک: با قرار دادن طول پلانک در معادله (۲۵.۱) و بدست آوردن جرم، جرم پلانک بدست می آید:

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (30.1)$$

دمای پلانک:

$$T_p = \frac{M_p c^2}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{Gk^2}} \quad (31.1)$$

انرژی پلانک:

$$E_p = M_p c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (32.1)$$

^۸Schwarzschild black hole

تکانه پلانک:

$$P_p = \frac{E_p}{c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}} \quad (33.1)$$

پس ابعاد بدست آمده برای پلانک را در جدولی به قرار زیر با در نظر گرفتن ثوابت نیوتن و پلانک و سرعت نور و ثابت بولتزمن به صورت زیر می نویسیم.

مقدار	فرمول	نماد	کمیت
$5/11 \times 10^{-36} m$	$\sqrt{\frac{G\hbar}{c}}$	ℓ_p	طول پلانک
$3/44 \times 10^{-8} kg$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	m_p	جرم پلانک
$4/49 \times 10^{31} K$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{Gk^2}}$	T_p	دما پلانک
$1/93 \times 10^{18} GeV$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$	E_p	انرژی پلانک
$1/03 kgms^{-1}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}}$	P_p	تکانه پلانک
$1/70 \times 10^{-42} s$	$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	t_p	زمان پلانک

جدول ۱۰.۱: ثوابت پلانک

۱.۴.۱ بررسی رابطه ی اصل عدم قطعیت بسط یافته EUP

اصل عدم قطعیت بسط یافته^۹ در انرژی های پایین در محدوده ی مکانیک کوانتومی و در انرژی های بالا در محدوده ی گرانش کوانتومی قرار می گیرند، از این رو حد مکانیک کوانتومی زمانی بدست می آید که جمله ی دوم در معادله روبرو ناچیز باشد پس خواهیم داشت:

$$\ell_p^2 \frac{(\Delta P)^2}{\hbar^2} \lll \frac{1}{\beta_0^2} \implies \beta_0^2 \ell_p^2 \frac{(\Delta P)^2}{\hbar^2} \lll 1 \quad (34.1)$$

که جرم پلانک هست و این حد به این معنی است که حد گرانش کوانتومی هنگامی بدست می آید که داشته باشیم:

$$\ell_p^2 \frac{(\Delta P)^2}{\hbar^2} \sim \frac{1}{\beta_0^2} \implies \beta_0^2 \ell_p^2 \frac{(\Delta P)^2}{\hbar^2} \sim 1 \quad (35.1)$$

^۹Extended Uncertainty Principle

از طرفی با توجه به رابطه ی بین طول پلانک و جرم پلانک بدست می آوریم: حد مکانیک کوانتومی:

$$\frac{\Delta P^2}{(M_p c)^2} \ll \frac{1}{\beta_0^2} \quad (36.1)$$

حد گرانش کوانتومی:

$$\frac{\Delta P}{(M_p c)} \sim \frac{1}{\beta_0} \quad (37.1)$$

از طرفی با حل معادله درجه دوم (۳۵.۱) خواهیم داشت

پایین ترین حد در عدم قطعیت مکان به شکل زیر خواهد بود

$$\Delta X = l_{min} = 2\beta_0 l_p \quad (38.1)$$

رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ زمانی بدست می آید که طول کمینه در مقایسه با ابعاد قابل اغماض باشد

یعنی $\Delta X \gg l_p$ یا $\alpha \rightarrow 0$. در حد معکوس اگر $\Delta X \sim l_p$ باشد از رابطه ی (۳۷.۱) و (۳۸.۱)

خواهیم داشت

$$\frac{\Delta X^2}{4\beta_0^2 l_p^2} \sim \frac{\Delta P^2}{(M_p c)^2} \quad (39.1)$$

$$\frac{\alpha_0^2 \Delta X^2}{l_p^2} \sim \frac{\Delta P^2}{(M_p c)^2} \quad (40.1)$$

معادله (۴۰.۱) هنگامی که اثرات گرانشی قوی وجود داشته باشند را می توان از ویژگی تغییر ناپذیری

اساس نظریه ریسمان (*stringtheory*) بدست آورد:

$$\Delta X \Delta P \geq \hbar \left(1 + \frac{\alpha_0^2 \Delta X^2}{l_p^2} \right) \quad (41.1)$$

در نظریه استرینگ، عدم قطعیت مکان متناسب با عدم قطعیت تکانه است مانند معادله (۴۰.۱) که در

نتیجه با جایگذاری در معادله (۳۵.۱) نوع دیگری از اصل عدم قطعیت را به ما می دهد که *EUP* نام

می گیرد [۱۶].

۲.۴.۱ تفاوت های بین اصل عدم قطعیت بسط یافته و تعمیم یافته

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2}$ نقش حیاتی را در چارچوب مکانیک کوانتومی ایفا می کند

و می تواند به عنوان یکی از اصول اساسی نظریه در نظر گرفته شود، با این حال ممکن است رد شرایط حاد

(غیر عادی)، به دور از محدوده ی انرژی که مکانیک کوانتومی از آن مشتق شده است، اصل عدم قطعیت نیاز به اصلاح داشته باشد [۱۷]. از طرف دیگر تاثیرات مشابه نیز می تواند از تنظیمات کلاسیکی بیشتر بدست آید. به عنوان مثال، در این زمینه بحث شده است که در یک زمینه ی آنتی دی ستر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ باید با معرفی یک تصحیح متناسب با ثابت کیهان شناسی $\lambda = -3\Lambda^2$ ، $\lambda^2 = \frac{1}{L_H^2}$ که شعاع فضای آنتی دی ستر است اصلاح شود. این تغییر در رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ، اصل عدم قطعیت بسط یافته یا EUP نامیده می شود.

$$\Delta X_i \Delta P_j \geq \frac{\hbar}{4} (1 + \ell_p^2 \Delta P_j^2) \quad (42.1)$$

اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP اولین بار در زمینه ی نظریه ریسمان [۱۸]، سپس برای بدست آوردن جاذبه ی خالص از آزمایشات $gedanken$ ^{۱۰} سیاهچاله بدست آمد [۱۹] و هندسه ی ناجابجایی [۲۰]، یا مدل های اندازه گیری که شامل اثرات اندرکنش گرانشی دینامیکی است [۲۱، ۲۲]. در حقیقت می توان گفت که GUP و طول پلانک، محصول مستقیم گرانش کوانتومی است، ℓ_p طول پلانک است.

۳.۴.۱ بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته $EGUP$

بطور طبیعی می توان اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و اصل عدم قطعیت بسط یافته را ترکیب کرد و بصورت بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته^{۱۱} به شکل زیر نوشت

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{4} \left(1 + \ell_p^2 \Delta P^2 + \frac{\Delta X^2}{\ell_H^2} \right) \quad (43.1)$$

که اگر $\ell_p^2 > 0$ و $\ell_H^2 > 0$ یک مقدار کمینه قابل اندازه گیری برای طول و همچنین برای تکانه را نتیجه می دهد.

۵.۱ اصل عدم قطعیت تعمیمی یافته مبتنی بر نسبیت خاص

دوگانه

همچنان که قبلا گفته شد یکی از مشکلات فیزیک نظری اتحاد برهمکنش گرانشی با مکانیک کوانتوم است، در راستای نیل به این هدف دو رهیافت مد نظر است. رهیافت اول نظریه هایی همچون نظریه

¹⁰gedanken

¹¹Extended Generalized Uncertainty Principle

ریسمان را که مدعی حل مشکل هستند مورد مطالعه ، بسط و گسترش قرار می دهد. یکی از دیدگاه هایی که در رهیافت دوم مطرح است روی اثرات وجودی طول کمینه مشاهده پذیر در حدود ابعاد پلانک است، در محدوده ی این ابعاد نیاز به بازنگری اساسی در خصوص رفتار فضا-زمان احساس می شود، همچنانکه در بخش قبل ذکر شد مطالعات انجام شده در نظریه ریسمان و ساختار سیاه چاله های کوانتومی در محدوده ی ابعاد پلانک منجر به یک بازنگری اساسی در اصول مکانیک کوانتومی تحت عنوان اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در حدود ابعاد پلانک شد. اخیرا با توجه به اثرات گرانشی که در فواصل کوچک مد انتظار است یک بازنگری روی اصول نسبیت با موضوع وجود یک طول کمینه مشاهده پذیر ناوردا انجام شده است که به نسبیت خاص دوگانه^{۱۲} مشهور است [۲۳]، در این نظریه فرض شده است که علاوه بر ناوردایی سرعت نور از دید ناظر های لخت، ابعاد پلانک نیز جز ناوردایی فیزیکی باشد. انتظار بر این است که این دیدگاه رفتار حدی فضا-زمان تخت نظریه گرانش کوانتومی را نمایش می دهد [۲۴, ۲۶].

¹²Doubly Special Relativity

فصل ۲

بررسی معادله کلاین-گوردون در حضور تکانه کمینه و بسط اصل عدم قطعیت در فضای دی سیتر و آنتی دی سیتر

۱.۲ بررسی بسط اصل عدم قطعیت در فضای دی سیتر و آنتی

دی سیتر

در این فصل به بررسی اصل عدم قطعیت بسط یافته *EUP* در فضای آنتی دی سیتر و دی سیتر می پردازیم. از این جهت ابتدا به معرفی فضای آنتی دی سیتر و دی سیتر خواهیم پرداخت. اخیراً فیزیکدانان دریافته اند که هندسه جهان دارای بعد های اضافی و تقارن های مختلفی است. همچنین در بررسی سیاهچاله ها حدس زده شد که آنها دارای بعد های اضافی فشرده شده، یعنی دارای ابعاد اضافی خارجی هستند [۲۸]. مناسب ترین فضایی که همه ی این شرایط را برآورده می کند، فضای آنتی دی سیتر است. که اولین بار توسط ویلم دی سیتر^۱ در سال ۱۸۷۲ کشف شد. این فضا جواب معادله انیشتین^۲ در خلاء می باشد. فضای آنتی دی سیتر، فضایی دارای بیشترین تقارن است. و با توجه به محدودیت هایی که فضاهاى مختلف دارند این فضا را می توانیم در ابعاد مختلف بررسی می کنیم. همچنین بسیاری

¹Willem de Sitter

²einstein

ار مسائل فیزیک در این فضا حل پذیرند. در واقع ویلم دی سیترو توانست یک فضا-زمان پنج بعدی پیشنهاد کند که منطبق با ثابت کیهان شناسی منفی باشد و این فضا را فضای دی سیترو نامید [۲۹]. در ادامه برای شفاف تر شدن فضای آنتی دی سیترو، به بررسی فضای دی سیترو می پردازیم، به زبان نسبت عام فضای دی سیترو دارای تقارن زیادی است و این فضا از حل معادله انیشتین با ثابت کیهان شناسی مثبت (Λ) در خلاء بدست می آید. فضای دی سیترو را مانند پارچه صاف و بسیار بزرگی می توان در نظر گرفت که در مقیاس معمولی، یک جسم بر روی آن قرار گرفته باشد این فرورفتگی در سطح صاف همانند انحنای کره بسیار بزرگ (با انحنای بسیار کم) می باشد. اگر از بیرون به این سطح نگاه کنیم دارای انحنای مثبت و در نتیجه دارای ثابت کیهان شناسی مثبت است [۳۰]. انحنای مثبت به این معنی نیروی دفع کننده است و اگر این فضا را برای جهان در نظر بگیریم به معنی این است که جهان در حال انبساط است [۳۱]. همچنین این فضا، فضایی است که شامل متغیرهای فضا-زمانی نسبت عام می باشد و در غیاب ماده و انرژی (خلاء) نیز تا حدی منحنی شکل است این انحنای مثبت کیهان شناسی را در نسبت عام مشخص می کند و به این مفهوم است که خلاء دارای انرژی بنیادین در خودش است. هدف از فضای دی سیترو این است که می تواند به ابعاد بالاتر بسط داده شود. متریک فضای دی سیترو از متریک مینکوفسکی گرفته شده است و این متریک غیر تبهگن و دارای ناوردایی لورنتس است. حال به بیان تعریف فضای آنتی دی سیترو می پردازیم. به زبان نسبت عام، فضای آنتی دی سیترو که به این صورت نمایش داده می شود Ads دارای تقارن زیادی است و از حل معادله انیشتین با ثابت کیهان شناسی منفی $-\Lambda$ در خلاء بدست می آید. فضای آنتی دی سیترو، فضا-زمان نسبت عام گرانشی است که در غیاب ماده و انرژی (خلاء) منحنی فضا-زمان آن به طور طبیعی هذلولی وار است. این فضا را مثل فضای دی سیترو، مانند پارچه صاف و بسیار بزرگی می توان در نظر گرفت که در مقیاس معمولی، یک جسم روی آن قرار گرفته است. فضای آنتی دی سیترو معادل سطح داخلی این فرورفتگی و یا همانند سطح داخلی کره بسیار بزرگ با انحنای بسیار کم است. چون سطح داخلی کره دارای انحنای منفی است در نتیجه دارای ثابت کیهان شناسی منفی می باشد، پس فضای آنتی دی سیترو با ثابت کیهان شناسی منفی مطابقت دارد و فضای خالی آن دارای انرژی منفی است [۳۰]. همچنین انحنای منفی به معنای نیروی جذب کننده است و اگر جهان را به عنوان فضای آنتی دی سیترو در نظر بگیریم به مفهوم جهان در حال انقباض است.

۲.۲ اصل عدم قطعیت بسط یافته

به خوبی می دانیم که در فضای آنتی دی سیترا اصل عدم قطعیت با ثابت کیهان شناسی اصلاح می شود و حاصل معادله ای به شکل زیر است [۳۲]:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \frac{\Delta X^2}{\ell_H^2} \right) \quad (1.2)$$

می توان به این صورت نیز نوشت:

$$[X, P] = i\hbar \left(1 + \frac{X^2}{\ell_H^2} \right) \quad (2.2)$$

که به صورت کلی زیر خواهیم داشت که در فضای دی سیترا $\alpha > 0$ و در فضای آنتی دی سیترا $\alpha < 0$ است [۳۲].

$$[X, P] = i\hbar (1 - \alpha X^2) \quad (3.2)$$

که این روابط یک کمینه تکانه را در $\hbar\sqrt{|\alpha|}$ بیان می کنند و همچنین عملگر حالت را بین $\left[\frac{-1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]$ محدود می کند.

$$P = \frac{\hbar}{i} D_x, \quad X = x, \quad D_x = (1 - \alpha x^2) \partial_x \quad (4.2)$$

عملگر تکانه تغییر شکل یافته تحت ضرب اسکالر هرمیتی نیست.

$$\int dx (P\psi(x))^* \phi(x) \neq \int dx (\psi(x))^* P\phi(x) \quad (5.2)$$

و داریم:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \frac{dx}{1 - \alpha x^2} (\psi(x))^* \phi(x) \quad (6.2)$$

و می توان براحتی نشان داد که عملگر تکانه تحت ضرب اسکالر بالا هرمیتی است. و برای این ضرب اسکالر مقادیر انتظاری عملگر A برای حالت $\psi(x)$ بصورت زیر است:

$$\langle A \rangle = \int \frac{dx}{1 - \alpha x^2} \psi(x)^* A\psi(x) \quad (7.2)$$

۳.۲ اثرات رامسوار-تاونزند در حضور اصل عدم قطعیت بسط یافته

اثرات رامسوار-تاونزند^۳ به این معنی است که وقتی ذرات کیهانی به سمت زمین می آیند در برخورد به ذرات گازهای نجیب برخی از آنها عبور می کنند و برخی دیگر بازتاب می شوند در نتیجه می توان ضرایب عبور و بازتاب را برای این ذرات بدست آورد. از طرفی می دانیم پتانسیل مربوط به آن به شکل زیر است:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0, \text{Region I}) \\ -V_0 & (0 < x < a, \text{Region II}) \\ 0 & (x > a, \text{Region III}) \end{cases} \quad (8.2)$$

که V_0 مقدار ثابتی هست و فرض می کنیم که $E > 0$. حال معادله ی شرودینگر سه بعدی زیر را در نظر می گیریم.

$$\frac{-\hbar^2 D_x^2}{2m} \psi_I = E \psi_I \quad (9.2)$$

$$\frac{-\hbar^2 D_x^2}{2m} \psi_{II} - V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (10.2)$$

$$\frac{-\hbar^2 D_x^2}{2m} \psi_{III} = E \psi_{III} \quad (11.2)$$

با حل معادلات (۸.۲) تا (۱۰.۲) خواهیم داشت:

$$\psi_I = e_\alpha(ik; x) + A e_\alpha(-ik; x) \quad (12.2)$$

$$\psi_{II} = B e_\alpha(iq; x) + C e_\alpha(-iq; x) \quad (13.2)$$

$$\psi_{III} = D e_\alpha(ik; x) \quad (14.2)$$

³Ramsauer-Townsend

که

$$k = \sqrt{2mE}, \quad q = \sqrt{2m(E + V_0)} \quad (15.2)$$

تابع نمایی تغییر شکل یافته از $e_\alpha(x) = D_x e_\alpha(x)$ پیروی می کند.

$$e_\alpha(x) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tanh^{-1}(\sqrt{\alpha}x)\right) = \left(\frac{1 + \sqrt{\alpha}x}{1 - \sqrt{\alpha}x}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}} \quad (16.2)$$

$$e_\alpha(a; x) = [e_\alpha(x)]^a = \left(\frac{1 + \sqrt{\alpha}x}{1 - \sqrt{\alpha}x}\right)^{\frac{a}{2\sqrt{\alpha}}} \quad (17.2)$$

از طرفی داریم:

$$e_\alpha(0; x) = 1 \quad (18.2)$$

و می دانیم که معکوس $e_\alpha(a; x)$ ، $e_\alpha(-a; x)$ است.

$$D_x e_\alpha(x) = a e_\alpha(x) \quad (19.2)$$

حال اجازه دهید توابع مثلثاتی برای α تغییر شکل یافته را به شکل زیر بنویسیم

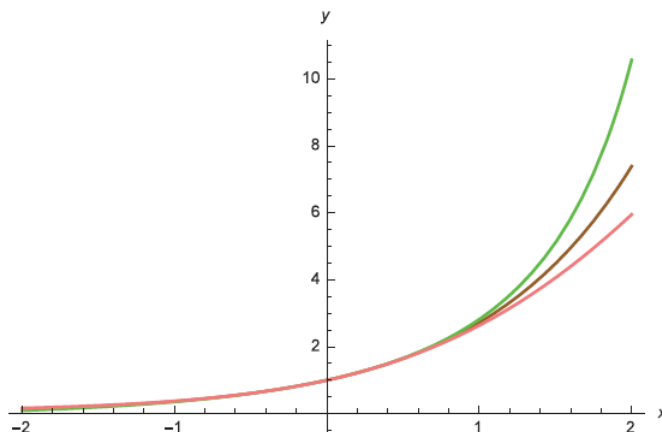
$$C_\alpha(a; x) = \cos\left[\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha}} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{\alpha}x}{1 - \sqrt{\alpha}x}\right)\right] \quad (20.2)$$

$$S_\alpha(a; x) = \sin\left[\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha}} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{\alpha}x}{1 - \sqrt{\alpha}x}\right)\right] \quad (21.2)$$

$$D_x S_\alpha(a; x) = a C_\alpha(a; x) \quad (22.2)$$

$$D_x C_\alpha(a; x) = -a S_\alpha(a; x) \quad (23.2)$$

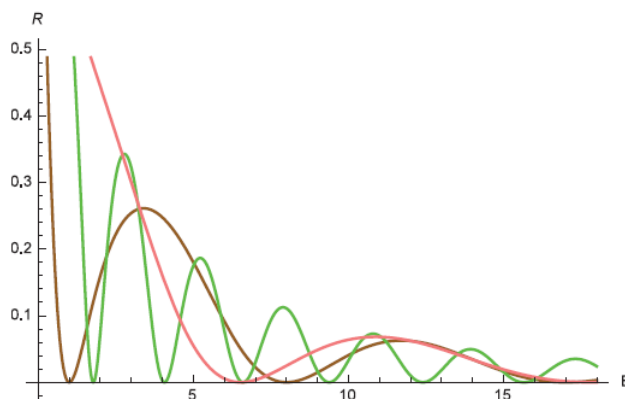
شکل (۱.۲) نشان می دهد که نمودار $y = e_\alpha(x)$ برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و برای $\alpha = 0.1$ (سبز) و $\alpha = -0.1$ (صورتی) است. پس از حل معادله می توانیم ضرایب A ، B ، C و D را بدست آوریم و از این طریق ضرایب بازتاب R را به شکل زیر بدست آوریم:



شکل ۱۰.۲: این نمودار نشان می دهد که نمودار $y = e_\alpha(x)$ برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و برای $\alpha = 0.1$ (سبز) و $\alpha = -0.1$ (صورتی) است

$$R = |A|^2 = \frac{(k^2 - q^2)^2 S_\alpha^2(q; a)}{(k^2 + q^2)^2 S_\alpha^2(q; a) + 4k^2 q^2 C_\alpha^2(q; a)} \quad (24.2)$$

شکل (۲.۲) ضرایب بازتاب بر حسب انرژی برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و برای $\alpha = 0.1$ (سبز) و $\alpha = -0.1$ (صورتی) نشان می دهد .



شکل ۲۰.۲: این نمودار نشان می دهد که ضرایب بازتاب بر حسب انرژی برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و برای $\alpha = 0.1$ (سبز) و $\alpha = -0.1$ (صورتی) هستند .

سپس اثرات رامسوار-تاونزند را تحت تصحیح EUP مطالعه کنیم. از $R = 0$ داریم:

$$S_\alpha(q; a) = 0 \quad (25.2)$$

$$q_{EUP} = \frac{2\sqrt{\alpha n\pi}}{Ln\left(\frac{1+\sqrt{\alpha x}}{1-\sqrt{\alpha x}}\right)} \quad (26.2)$$

که در حد $a \rightarrow 0$ تبدیل به حالت عام خود یعنی $q_{ord} = \frac{n\pi}{a}$ می شود. پس نشاندهنده ی وجود یک شیفت $\Delta q = q_{EUP} - q_{ord}$ در عدد موج از رزونانس انتقال است. که در فضای دی سیترا این شیفت به شکل زیر است:

$$\Delta q \simeq \frac{-1}{3}\alpha an\pi \quad (27.2)$$

و در فضای آنتی دی سیترا به شکل زیر:

$$\Delta q \simeq \frac{1}{3}|\alpha|an\pi \quad (28.2)$$

شاهد آن هستیم که تغییر فاز برای فضا-زمان دی سیترا کاهش می یابد در حالی که برای فضا زمان آنتی دی سیترا افزایش می یابد از طرفی می دانیم که $\lambda_{ord} = \frac{2\pi}{q_{ord}} = \frac{2a}{n}$ که در حضور EUP این شرط تغییر یافته و به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\lambda_{EUP} = \frac{1}{n\sqrt{\alpha}} Ln\left(\frac{1+\sqrt{\alpha x}}{1-\sqrt{\alpha x}}\right) \quad (29.2)$$

که برای α کوچک و در فضای دی سیترا داریم:

$$\lambda_{EUP} = \lambda_{ord}\left(1 + \frac{1}{3}(\sqrt{\alpha a})^2\right) \quad (30.2)$$

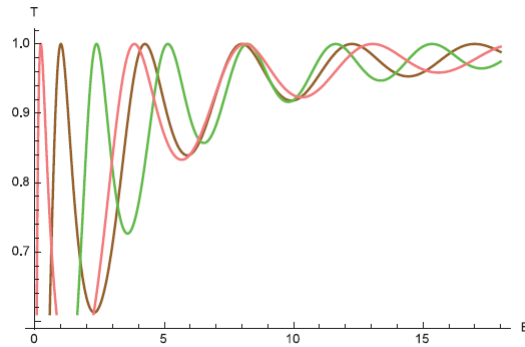
و در فضای آنتی دی سیترا داریم:

$$\lambda_{EUP} = \lambda_{ord}\left(1 - \frac{1}{3}(\sqrt{|\alpha|a})^2\right) \quad (31.2)$$

بنابراین از معادلات بالا در می یابیم که طول موج برای در فضا-زمان دی سیترا افزایش می یابد در حالی که در فضا-زمان آنتی دی سیترا کاهش می یابد. حال می توانیم برای $E > 0$ ضریب عبور را بیابیم:

$$T = |D|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2}{E(V_0 + E)} S_\alpha^2(q; a) C_\alpha^2(q; a)\right]^{-1} \quad (32.2)$$

شکل (۳.۲) نشان می دهد که ضریب عبور را براساس انرژی برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و $\alpha = 0.5$ (سبز) و $\alpha = -0.5$ (صورتی) رسم کردیم. و می دانیم که $-V_0 < E < 0$ مربوط به حالات مقید است.



شکل ۳.۲: این نمودار نشان می دهد که ضریب عبور را براساس انرژی برای $\alpha = 0$ (قهوه ای) و $\alpha = 0.05$ (سبز) و $\alpha = -0.05$ (صورتی) رسم کردیم

۴.۲ تقریب دابلیو کی بی برای اصل عدم قطعیت بسط یافته

جبر هایزنبرگ تغییر شکل یافته یک بعدی برای حالت عامی از EUP به شکل زیر داده می شود:

$$[X, P] = i\hbar G(X), \quad G(X) = 1 - \alpha X^2 \quad (33.2)$$

در حالت عام در نظر می گیریم که $G(X)$ یک تابع زوج در X است. با توجه به انعکاس هاس (عملگر تصویر) $X \rightarrow -X$ و $P \rightarrow -P$ از تقریب نیمه کلاسیکی برای نمایشی به شکل زیر استفاده می کنیم:

$$P = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}, \quad X = X(x) \quad (34.2)$$

سپس خواهیم داشت:

$$\frac{dX(x)}{dx} = G(X) \quad (35.2)$$

بنابراین می دانیم که $X(x)$ یک تابع فرد در x است و این معادله به شکل زیر حل میشود.

$$\int \frac{dX(x)}{G(X)} = x \quad (36.2)$$

و می دانیم که $x(X)$ وارون $X(x)$ است. حال اجازه دهید یک معادله شرودینگر یک بعدی را در فضای دی سیتر تعمیم یافته در نظر بگیریم:

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x) \right) \psi = E \psi \quad (37.2)$$

یا

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \partial^2 + U(x)\right)\psi = E\psi \quad (38.2)$$

حال ما در نظر می گیریم:

$$U(x) = V(X(x)) \quad (39.2)$$

در نمایش مکان، معادله شرودینگر یک بعدی در فضای دی سیتز تعمیم یافته شبیه به معادله شرودینگر یک بعدی با اثرات پتانسیل $U(x)$ در فضای عادی است. با استفاده از شرط بوهر-سامرفیلد^۴ داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} p dx = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{4}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (40.2)$$

که در آن x_1 و x_2 دو نقطه عطف هستند و ما می دانیم که این مرزها هیچ خط عمودی (مجانب عمودی) وجود ندارد. برای یک خط عمودی (مجانب عمودی) معادله بالا به شکل زیر تغییر کرده است:

$$\int_{x_1}^{x_2} p dx = \pi \hbar \left(n + \frac{3}{4}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (41.2)$$

و برای دو خط عمودی (دو مجانب عمودی) به شکل زیر تغییر می کند:

$$\int_{x_1}^{x_2} p dx = \pi \hbar n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (42.2)$$

اگر شرط بوهر-سامرفیلد را در جملات X و P لحاظ کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{P}{G(X)} dX = \pi \hbar (n + \delta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (43.2)$$

که X_1 و X_2 راه حل $E = V(X)$ است و که در $\delta = \frac{1}{4}$ هیچ مجانب عمودی نداریم ولی در $\delta = \frac{3}{4}$ یک مجانب عمودی داریم. سپس برای فضای دی سیتز داریم:

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{\alpha} x}{1 - \sqrt{\alpha} x} \right) \quad (44.2)$$

و

$$x(X) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left[\frac{e^{2\sqrt{\alpha} X} - 1}{e^{2\sqrt{\alpha} X} + 1} \right] \quad (45.2)$$

⁴Bohr-Sommerfeld

که در فضای آنتی دی سیتزر داریم:

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan^{-1}(\sqrt{\alpha x}) \quad (46.2)$$

و

$$x(X) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan(\sqrt{\alpha X}) \quad (47.2)$$

شرط بوهر-سامرفیلد به ما این توانایی را می دهد که بتوانیم تراز های انرژی را برای مکانیک کوانتومی در یک بعد بیابیم.

۱.۴.۲ پتانسیل هارمونیک

اگر هامیلتونی سیستمی به شکل زیر باشد:

$$H = P^2 + X^2 \quad (48.2)$$

سپس برای پتانسیل نوسانگر در نظر می گیریم که $m = \frac{1}{2}$ و $\omega = 2$ و $\hbar = 1$ که $H(P, X) = E$ بدست می آوریم:

$$P = \sqrt{E^2 - X^2} \quad (49.2)$$

با استفاده از شرط بوهر-سامرفیلد بیان شده داریم:

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \frac{\sqrt{E - X^2}}{1 - \alpha X^2} dX = \pi(n + \frac{1}{4}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (50.2)$$

که در فضای دی سیتزر برای α های کوچک بدست می آوریم:

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \sqrt{E - X^2} (1 + \alpha X^2) dX \approx \pi(n + \frac{1}{4}) \quad (51.2)$$

در این فضا (دی سیتزر) برای مرتبه ی اول α تراز انرژی بصورت زیر داده می شود:

$$E_n \approx 2n + 1 - \alpha(n^2 + n + \frac{1}{4}) \quad (52.2)$$

همچنین برای $|\alpha|$ های کوچک در فضای آنتی دی سیتزر داریم:

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \sqrt{E - X^2} (1 - |\alpha| X^2) dX \approx \pi(n + \frac{1}{4}) \quad (53.2)$$

همچنین در این فضا (آنتی دی سیتز) برای مرتبه ی اول α تراز انرژی بصورت زیر داده می شود:

$$E_n \approx 2n + 1 + |\alpha|(n^2 + n + \frac{1}{4}) \quad (54.2)$$

۵.۲ بسط اصل عدم قطعیت و تکانه کمینه در فضای آنتی دی

سیتز

جبر هایزنبرگ تغییر شکل یافته در یک بعد در فضای آنتی دی سیتز^۵ بصورت زیر صورت بندی شده است که در آن همانطور که پیش از این بیان کردیم β متناسب با طول پلانک است که مقدار آن را در جدول در فصل اول بیان نمودیم :

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta X^2) \quad (55.2)$$

که در این معادله β پارامتر بدون بعد مثبت که همانطور که در فصل قبل بیان شد متناسب با ثابت کیهان شناسی و همچنین مربع شعاع آنتی دی سیتز است و زمانی که $\beta \rightarrow 0$ میل می کند روابط EUP به همان روابط معمول اصل عدم قطعیت هایزنبرگ^۶ تبدیل می شوند [۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷]

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{4}(1 + \beta(\Delta X)^2) \quad (56.2)$$

رابطه ی بالا وجود یک تکانه کمینه را به صورت زیر پیش بینی می کند [۳۵]

$$(\Delta P)_{min} = \frac{\hbar\sqrt{\beta}}{4} \quad (57.2)$$

که می توان نمایشی را به صورت زیر برای این جبر تعمیم یافته EUP که تکانه کمینه می دهد نوشت [۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸]

$$X = x, \quad P = \frac{\hbar}{i}(1 + \beta x^2) \frac{\partial}{\partial x} \quad (58.2)$$

عملگرهای X و P در این جبر متقارن و هرمیتی هستند که با نوشتن معادلات زیر می توان به این امر پی برد.

$$\langle \psi | (X | \phi) \rangle = (\langle \psi | X) | \phi \rangle \quad (59.2)$$

⁵Anti de sitter

⁶Heisenberg

$$\langle \psi | P | \phi \rangle = \langle \psi | P | \phi \rangle \quad (60.2)$$

با توجه به رابطه ی حاصلضرب دو تابع موج در این فضا خواهیم داشت:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \frac{dx}{1 + \beta x^2} \psi^*(x) \phi(x) \quad (61.2)$$

تقازن عملگر X واضح است و برای تصدیق بیان تقزان عملگر P بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\langle \psi | P | \phi \rangle = \int \frac{dx}{1 + \beta x^2} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} (1 + \beta x^2) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = \quad (62.2)$$

$$= \int \frac{dx}{1 + \beta x^2} \left(\frac{\hbar}{i} (1 + \beta x^2) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right)^* \phi(x) = (\langle \psi | P | \phi \rangle)$$

$$1 = \frac{dx}{1 + \beta x^2} |x\rangle \langle x| \quad (63.2)$$

۱.۵.۲ نوسانگر هارمونیک در فضای آنتی دی سیترو

در این قسمت علاقمندیم که معادله شرودینگر را برای یک نوسانگر هارمونیک در یک بعد در فضای

حالت تغییر شکل یافته (۱) هستیم که می توان بصورت زیر نوشت: [۳۸، ۳۹]

$$\frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2 \psi = E\psi \quad (64.2)$$

با استفاده از نمایش X و P در قسمت قبل معادله را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\hbar^2}{2m} (1 + \beta x^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2 \beta}{m} x (1 + \beta x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E\psi \quad (65.2)$$

که m جرم سکون و ω فرکانس نوسانگر است و می توان هامیلتونی را به شکل زیر همراه با یک هامیلتونی

اختلالی نوشت:

$$H = H_0 + \beta H_1 + O(\beta^2) \quad (66.2)$$

$$H_1 = \frac{-\hbar^2}{m} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{m} x \frac{\partial}{\partial x} \quad (67.2)$$

از طرفی می دانیم می توان هامیلتونی را براساس عملگرهای خلق و نابودی که به شکل زیر تعریف می شوند صورت بندی کرد:

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx} \quad (۶۸.۲)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx} \quad (۶۹.۲)$$

عملگرهای خلق و نابودی بیان شده در جابجایی های زیر صدق می کنند: [۴۰]

$$N = a^\dagger a, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a \quad (۷۰.۲)$$

در مکانیک کوانتومی معمول که فقط شامل هامیلتونی استاندارد است می توان هامیلتونی را براساس عملگرهای خلق و نابودی به صورت زیر نوشت:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (۷۱.۲)$$

که ویژه تابع و ویژه مقدار این هامیلتونی به صورت زیر است:

$$H_0 = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \quad (۷۲.۲)$$

$$E_n^0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad (۷۳.۲)$$

همچنین تابع موج آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\psi_n^0(x) = \frac{(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x) \quad (۷۴.۲)$$

سپس می دانیم تصحیح یا همان هامیلتونی اختلالی وارد شده را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\langle x|n\rangle = \psi_n^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x) \quad (۷۵.۲)$$

که ویژه تابع و ویژه مقدار آن به صورت زیر خواهد بود:

$$H_1 = \frac{\hbar^2}{4m}(2N^2 + 2N + 1 - a^{\dagger 2} - a^2 + 2a^\dagger - 2a^{\dagger 2}) \quad (۷۶.۲)$$

$$E_n^{\lambda} = \beta \langle n | H_{\lambda} | n \rangle = \frac{\hbar^2 \beta}{2m} (n^2 + n + \frac{1}{2}) \quad (77.2)$$

سپس از ویژه مقادیر بدست آمده مجموع ویژه مقدار را محاسبه کرده و می نویسیم.

$$E_n^{Ads} = E_n^{\circ} + E_n^{\lambda} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 \beta}{2m} (n^2 + n + \frac{1}{2}) \quad (78.2)$$

جمله ی اول در معادله ی قبل ناشی از طیف انرژی معمول یک نوسانگر هارمونیک است و جمله ی دوم ناشی از حضور عدم قطعیت کمینه در تکانه است. از طرفی اگر $\beta = 0$ شود انرژی نوسانگر هارمونیک معمول را بدست می آوریم و برای مقادیر بزرگ ($n \rightarrow \infty$) سطوح انرژی به صورت $\frac{\Delta E_n}{E_n^{\circ}} = \frac{\hbar\beta}{m\omega}$ فاصله می یابند و می توانیم برای n بزرگ به صورت $\Delta E_n = (E_{n+1} - E_n) \simeq \frac{\hbar\beta}{m\omega} E_n^{\circ}$ بنویسیم. بنابراین تغییر نسبی در هر سطح انرژی برای n بزرگ ثابت می شود. و همچنین ویژه تابع کل را نیز بدست می آوریم:

$$\psi_n = \psi_n^{\circ} + \psi_n^{\lambda} + O(\beta^2) \quad (79.2)$$

$$\psi_p^{\lambda} = \beta \sum \frac{\langle |H| \rangle}{E_k^{\circ} - E_p^{\circ}} |p \rangle \quad (80.2)$$

$$\psi_k^{\lambda} = \frac{\beta \hbar \sqrt{(k+1)(k+2)}}{4m\omega} (\sqrt{(k+3)(k+4)} 4|k+4\rangle + |k+2\rangle) \quad (81.2)$$

$$\frac{\beta \hbar \sqrt{k(k-1)}}{4m\omega} (\frac{\sqrt{(k-2)(k-3)}}{4} |k-4\rangle + |k-2\rangle)$$

در اینجا به منظور دستیابی به عدم قطعیت در مکان، مقادیر انتظاری مکان و مربع مکان را به شکل زیر محاسبه می کنیم:

$$\langle X \rangle = \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n | (a^{\dagger} + a) | n \rangle = 0 \quad (82.2)$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (a^{\dagger} + a)^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} (n + \frac{1}{2}) \quad (83.2)$$

به طور مشابه ما می توانیم مقادیر انتظاری تکانه و مربع تکانه را بدست آوریم:

$$\langle P \rangle = 0 \quad (84.2)$$

$$\langle P^2 \rangle = 2m \langle H \rangle - m^2 \omega^2 \langle x^2 \rangle = m\hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \hbar^2\beta(n^2 + n + \frac{1}{2}) \quad (85.2)$$

سپس با استفاده ی از معادلات (۴۰) تا (۴۳) و عدم قطعیت مکان و تکانه بصورت زیر ارائه می شود:

$$(\Delta X)_n = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}(n + \frac{1}{2})} \quad (86.2)$$

$$(\Delta P)_n = \sqrt{m\hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \hbar^2\beta(n^2 + n + \frac{1}{2})} \quad (87.2)$$

پس رابطه عدم قطعیت در فضای Ads بصورت زیر صورت بندی می شود:

$$(\Delta X)_n(\Delta P)_n = \hbar(n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2\beta}{2m\omega}(n^2 + n + \frac{1}{2}) \quad (88.2)$$

و در نتیجه رابطه عدم قطعیت به طور عام و زمانیکه $\beta \rightarrow 0$ میل می کند به شکل زیر در خواهد آمد:

$$(\Delta X)_n(\Delta P)_n = \hbar(n + \frac{1}{2}) \quad (89.2)$$

سپس مشاهده می کنیم که برای $n = 0$ حالت پایه نوسانگر هارمونیک و عدم قطعیت کمینه را داریم.

$$(\Delta X)_0(\Delta P)_0 = \frac{\hbar}{2} \quad (90.2)$$

حال با در نظر گرفتن y به صورت زیر در معادله (۱۱) معادله را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$y = \frac{\tan^{-1}(\sqrt{\beta}x)}{\sqrt{\beta}} \quad (91.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{m^2\omega^2}{\beta\hbar^2} \tan^2(\sqrt{\beta}y) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \quad (92.2)$$

با جایگذاری $\psi = \cos^\gamma(\sqrt{\beta}y)\Psi$ که $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4m^2\omega^2}{\beta\hbar^2}}$ یک ثابت است سپس معادله (۲۸)

به شکل زیر قابل حل است:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\gamma \tan(\sqrt{\beta}y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2m}{\hbar^2} E - \gamma\beta\Psi = 0 \quad (93.2)$$

حال با استفاده از تغییر متغیر y به ξ که $\xi = \sin(\sqrt{\beta}y)$ است و شرط $\frac{2m}{\beta\hbar^2} E - \gamma = n(n + 2\gamma)$

معادله قبل را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(1 + 2\gamma)\xi}{(\xi^2 - 1)} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{n(n + 2\gamma)}{(\xi^2 - 1)} \Psi = 0 \quad (94.2)$$

و حل این معادله با استفاده از چند جمله ای گيجنبوار^۷ که در رفرنس [۴۱] داده شده است امکان پذیر است

$$\Psi_n = C_n^\gamma(\xi) \quad (۹۵.۲)$$

همچنین می دانیم چند جمله ای های گيجنبوار به شکل زیر بیان می شوند

$$C_n^\gamma(\xi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\gamma)}{\Gamma(\gamma)k!(n-2k)!} (2\xi)^{n-2k} \quad (۹۶.۲)$$

پس ویژه تابع نوسانگر هارمونیک یک بعدی با عدم قطعیت در تکانه بصورت زیر داده می شود:

$$\psi = N \cos^\gamma(\sqrt{\beta}y) C_n^\gamma(\sin(\sqrt{\beta}y)) \quad (۹۷.۲)$$

که N ثابت نرمالیزاسیون و از شرط نرمالیزاسیون چند جمله ای گيجنبوار [۴۱] بصورت زیر بدست می آید:

$$\int du (1-u^2)^{\gamma-\frac{1}{2}} (C_n^\gamma(u))^2 = \frac{\pi 2^{1-2\gamma} \Gamma(n+2\gamma)}{n!(n+\gamma)(\Gamma(\gamma))^2} \quad (۹۸.۲)$$

ویژه تابع انرژی نرمالیزه شده نیز بصورت زیر ارائه می شود:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{n!(n+\gamma)(\Gamma(\gamma))^2}{\pi 2^{1-2\gamma} \Gamma(n+2\gamma)}} \cos^\gamma(\sqrt{\beta}y) C_n^\gamma(\sin(\sqrt{\beta}y)) \quad (۹۹.۲)$$

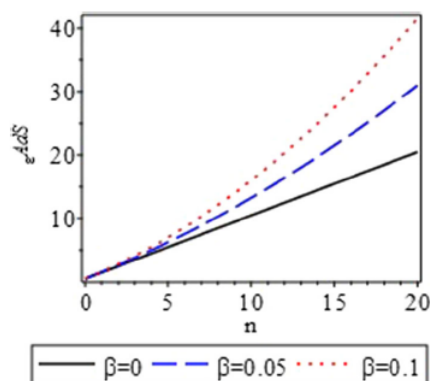
سپس ویژه مقدار انرژی را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$E_{Ads} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{4}\right) \left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2 \hbar^2}{4m^2 \omega^2}} + \frac{\beta \hbar}{2m\omega} + \frac{2(\Delta P)_{min}^2}{m} n \right) \quad (۱۰۰.۲)$$

تصحیح طیف کوانتومی ناشی از EUP شبیه به GUP است [۳۹] سپس با بسط انرژی تا مرتبه ی اول β خواهیم داشت:

$$E_{Ads} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{4}\right) + \frac{2(\Delta P)_{min}^2}{m} \left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right) \quad (۱۰۱.۲)$$

⁷Gegenbauer



۲

شکل ۴.۲: طیف انرژی $\varepsilon_{Ads} = \frac{E_n^{Ads}}{\hbar\omega}$ را برای نوسانگر هارمونیک در فضای Ads بعنوان یک تابع وابسته به عدد کوانتومی n برای مقادیر مختلف $\beta = 0.05, 0.1$ و $\frac{\hbar}{m\omega} = 1$ را رسم شده است

در شکل (۴.۲) ما طیف انرژی $\varepsilon_{Ads} = \frac{E_n^{Ads}}{\hbar\omega}$ را برای نوسانگر هارمونیک در فضای Ads بعنوان یک تابع وابسته به عدد کوانتومی n برای مقادیر مختلف $\beta = 0.05, 0.1$ و $\frac{\hbar}{m\omega} = 1$ را رسم کردیم. در شکل بطور واضح نشان داده شده که ε با عدد کوانتومی n افزایش می یابد. و همچنین برای مقادیر ثابت عدد کوانتومی n طیف انرژی وقتی که پارامتر تغییر شکل β رشد می کند، افزایش می یابد.

۶.۲ ویژگی های استاتیکی: تابع پارش

در این قسمت می خواهیم مقادیر ترمودینامیکی یک سیستم نوسانگر هارمونیک در فضای Ads مشخص می کنیم. بنابراین تابع پارش کوانتومی برای یک سیستم نوسانگر هارمونیک را در آنسامبل کانونی بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$Z = \sum e^{\frac{-E_n}{k_B T}} \quad (102.2)$$

که E_n ویژه مقدار انرژی و k_B ثابت بولتزمن و T نشاندهنده ی دما است. با استفاده از ویژه مقادیر انرژی تعریف شده در (۲۳) و جایگذاری در معادله ی قبل، تابع پارش آنسامبل کانونی برای نوسانگر هارمونیک در فضای Ads یک بعدی بصورت زیر بدست می آید:

$$Z_{Ads} = \sum e^{\frac{-E_n}{k_B T}} (n+\frac{1}{2}) e^{\frac{-\beta\hbar^2}{2mk_B T}} (n^2+n+\frac{1}{4}) \quad (103.2)$$

با بسط exp در رابطه ی قبل نسبت به β خواهیم داشت:

$$Z_{Ads} = \Sigma \left[\frac{-\beta \hbar^2}{2mk_B T} (n^2 + n + \frac{1}{2} + O(\beta^2)) \right] e^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T} (n + \frac{1}{2})} \quad (104.2)$$

جمله ی اول این تابع پارش از نوسانگر هارمونیک بصورت زیر ارائه می شود:

$$Z_0 = \Sigma e^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T} (n + \frac{1}{2})} = (Z \sinh(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}))^{-1} \quad (105.2)$$

جمله ی دوم و سوم معادله ی Z_{Ads} با استفاده از معادله ی قبل بصورت یزر خواهد بود:

$$Z_{Ads} = \Sigma (n^2 + n + \frac{1}{2}) e^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T} (n + \frac{1}{2})} = (\frac{1}{2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2}) Z_0, \quad b = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (106.2)$$

بنابراین تابع پارش کل برای سیستم نوسانگر هارمونیک در فضای Ads بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$Z_{Ads} = Z_0 - \frac{(\Delta P)_{min}}{2mk_B T} \frac{\coth^2(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})}{\sinh(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})} + O(\beta^2) \quad (107.2)$$

جمله ی اول $Z_0 = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})}$ ناشی از تابع پارش برای نوسانگر هارمونیک عادی (حالت عام) است.

۷.۲ بررسی مکانیک کوانتومی در فضای دی سیترو

در فضای دی سیترو اصل عدم قطعیت بسط یافته به شکل زیر معرفی می شود [۳۵، ۴۸]:

$$[X, P] = i\hbar(1 - \beta X^2) \quad (108.2)$$

که

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 - \beta(\Delta X)^2) \quad (109.2)$$

و نمایش آن بصورت زیر است:

$$X = x, \quad P = \frac{\hbar}{i} (1 - \beta x^2) \frac{\partial}{\partial x} \quad (110.2)$$

$$\int \frac{dx}{1 - \beta x^2} |x\rangle \langle x| = 1 \quad \langle \phi | \psi \rangle = \int \frac{dx}{1 - \beta x^2} \phi^*(x) \psi(x) \quad (111.2)$$

۸.۲ نوسانگر هارمونیک در فضای دی سیتز

حال در فضای دی سیتز معادله ی (۱۲) می تواند بصورت زیر باشد:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} (1 - \beta x^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2 \beta}{m} x (1 - \beta x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right] \Omega = E\Omega \quad (112.2)$$

با کمک تغییر متغیر $z = \frac{\tanh^{-1}(\sqrt{\beta}x)}{\sqrt{\beta}}$ که بین بازه ی $z \in [-\infty, \infty]$ و همچنین $x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right]$ پس فرم معادله ی قبل به شکل زیر درمی آید:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2 m^2}{\beta} \tanh^{-1}(\sqrt{\beta}z) + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \Omega = 0 \quad (113.2)$$

با حل این معادله دیفرانسیلی با استفاده از $\Omega = \cosh^\theta(\sqrt{\beta}z)\Xi$ می توان معادله را به شکل زیر نوشت:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\theta\sqrt{\beta} \tanh(\sqrt{\beta}z) \frac{\partial}{\partial z} + \beta(\theta(\theta - 1) - \frac{m^2\omega^2}{\beta^2}) \tanh^2(\sqrt{\beta}z) \right] \Xi = 0 \quad (114.2)$$

ما جمله ی دارای θ را برابر با صفر می گیریم که موجب حذف $\tanh^2(\sqrt{\beta}z)$ می شود:

$$(\theta(\theta - 1) - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}) = 0 \quad (115.2)$$

$$\theta_- = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}}, \quad \theta_+ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}} \quad (116.2)$$

حال با تغییر متغیر z با ρ که $\rho = i \sinh(z\sqrt{\beta})$ را می توان در معادله (۱۱۶) تبدیل کنیم:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{(1 + 2\theta)\rho}{(\rho^2 - 1)} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\theta + \frac{2mE}{\beta\hbar^2}}{(\rho^2 - 1)} \right] \Xi = 0 \quad (117.2)$$

سپس با در نظر گرفتن جمله ی آخر به شکل زیر:

$$\theta + \frac{2mE}{\beta\hbar^2} = -n(n + 2\theta) \quad (118.2)$$

و با جایگذاری در معادله ی قبل خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{(1 + 2\theta)\rho}{(\rho^2 - 1)} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{-n(n + 2\theta)}{(\rho^2 - 1)} \right] \Xi = 0 \quad (119.2)$$

که با حل آن توسط چند جمله ای گیبسوار که بصورت زیر نمایش داده می شود:

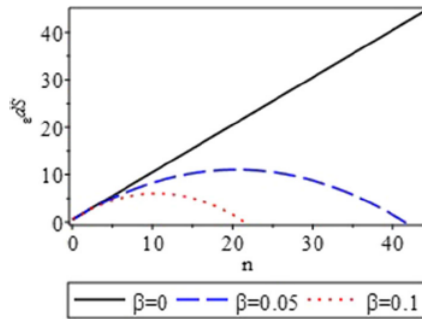
$$\Xi = C_n^\theta(\rho) = C_n^\theta(i \sinh(z\sqrt{\beta})) \quad (120.2)$$

پس می توان ویژه مقدار انرژی را بدست آورد:

$$E_{ds} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 \beta^2}{4m^2 \omega^2} - \frac{\beta \hbar}{2m\omega}} \right] - \frac{\beta \hbar^2}{2m} n^2 \quad (121.2)$$

سپس اجازه دهید به این نکته توجه کنیم که معادله بالا ویژه مقادیر منفی را زمانی که عدد کوانتومی n به اندازه ی کافی بزرگ باشد می دهد، چون عبارت $\frac{\beta \hbar^2}{2m} n^2$ نسبت به رشد n خیلی سریع افت می کند. که با استفاده از بسط تیلور بر حسب β می توان ویژه مقدار انرژی را به صورت کلی زیر نوشت:

$$E_{ds} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\beta \hbar^2}{2m} \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \quad (122.2)$$



۲

شکل ۵.۲: انرژی بر حسب β های مختلف رسم شده است.

در معادله ی بالا جمله ی اول ناشی از طیف انرژی نوسانگر هارمونیک معمول است و جمله ی دوم ناشی از تصحیح عدم قطعیت تعمیم یافته در فضای دی سیترو است. همچنین شاهد آن هستیم که برای β های کوچک طیف انرژی در فضای دی سیترو کوچکتر از طیف انرژی در مکانیک کوانتومی معمول است و در شکل (۵.۲) طیف انرژی $\varepsilon_{ds} = \frac{E_{ds}}{\hbar\omega}$ بر حسب عدد کوانتومی n برای مقادیر مختلف پارامتر EUP رسم کردیم و شاهد آن هستیم که با رشد عدد کوانتومی n انرژی کاهش می یابد و منفی می شود و تاثیر پارامتر EUP بر روی طیف انرژی قابل توجه است.

۹.۲ بررسی نوسانگر کلاین-گوردون دو بعدی در حضور تکانه

کمینه

در این قسمت با معرفی اصل عدم قطعیت بسط یافته در دو بعد به بررسی آن توسط معادله کلاین گوردون می پردازیم از این جهت معادله کلاین گوردون را معرفی می کنیم. معادله کلاین-گوردون حالت نسبیتی معادله شرودینگر برای توجیه ذرات کوانتومی با اسپین صفر است که در سال ۱۹۲۶ توسط دو فیزیکدان به نام های اسکار کلاین^۸ و والتر گوردون^۹ پیشنهاد شد. از آنجایی که هر معادله در نسبیت باید تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باشد، این معادله نیز با داشتن ۴ بردار تکانه که به صورت عملگر ناوردای لورنتس ظاهر شده است ناوردای لورنتس می باشد. در این قسمت اصل عدم قطعیت بسط یافته EUP را در دو بعد معرفی می کنیم [۳۳، ۳۵، ۴۰، ۴۱]

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}(\lambda + \alpha R^2), \quad [X_i, X_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = -2i\hbar\alpha[X_i P_j - X_j P_i], \quad (123.2)$$

که نمایش در فضای حالت آن به شکل زیر است:

$$P_i = \frac{\hbar}{i}(\lambda + \alpha r^2)_i, \quad X_i = x_i, \quad (124.2)$$

و مربع تکانه در این فضا به شکل زیر معرفی می شود:

$$P^2 = -\hbar^2 [(\lambda + \alpha r^2)^2 \nabla^2 + 2\alpha r(\lambda + \alpha r^2)_r] \quad (125.2)$$

حال نوسانگر کلاین گوردون دو بعدی در حضور کمینه تکانه به صورت زیر معرفی می شود [۴۲]

$$\left[(P_X + imwX)(P_X - imwX) + (P_Y + imwY)(P_Y - imwY) - \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} \right] \psi = 0 \quad (126.2)$$

یا

$$\left[P^2 + m^2 w^2 R^2 + imw[X, P_X] + imw[Y, P_Y] - \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} \right] \psi = 0 \quad (127.2)$$

⁸Oscar Klein

⁹Walter Gordon

که

$$P^\nu = P_X^\nu + P_Y^\nu, \quad R^\nu = X^\nu + Y^\nu \quad (128.2)$$

در دو بعد داریم:

$$\nabla^\nu = \partial_r^\nu + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \quad (129.2)$$

با استفاده از جابجایی EUP گفته شده خواهیم داشت:

$$\left[P^\nu + (m^\nu w^\nu - 2\alpha \hbar m w) R^\nu - 2\hbar m w - \frac{E^\nu - m^\nu c^4}{c^2} \right] \psi = 0 \quad (130.2)$$

یا

$$\left[(1 + \alpha r^\nu)^\nu \partial_r^\nu + (1 + \alpha r^\nu) \left(\frac{1}{r} + 2\alpha r \right) \partial_r + \frac{(1 + \alpha r^\nu)^\nu}{r^2} \partial_r^\nu - \frac{1}{\hbar^2} (m^\nu w^\nu - 2\alpha \hbar m w) r^\nu + \epsilon \right] \psi = 0 \quad (131.2)$$

که

$$\epsilon = \frac{E^\nu - m^\nu c^4}{c^2} + 2\hbar m w \quad (132.2)$$

اگر ما در نظر بگیریم:

$$\psi = u(r) e^{i|l|}, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (133.2)$$

و با جایگذاری آن در معادله یقبل خواهیم داشت:

$$\left[(1 + \alpha r^\nu)^\nu \partial_r^\nu + (1 + \alpha r^\nu) \left(\frac{1}{r} + 2\alpha r \right) \partial_r - \frac{(1 + \alpha r^\nu)^\nu}{r^2} l^\nu - \frac{1}{\hbar^2} (m^\nu w^\nu - 2\alpha \hbar m w) r^\nu + \epsilon \right] \psi = 0 \quad (134.2)$$

حال اجازه دهید $s = -r^\nu$ را جایگذاری کنیم:

$$\left[\partial_s^\nu + \frac{1 - 2s}{s(1-s)} \partial_s + \frac{-\lambda_1 s^2 + \lambda_2 s - \lambda_3}{s^2(1-s)^2} \right] u = 0 \quad (135.2)$$

که

$$\lambda_1 = \frac{1}{4\alpha} \left[\alpha l^\nu + \frac{1}{\alpha \hbar^2} (m^\nu w^\nu - 2\alpha \hbar m w) \right] \quad (136.2)$$

$$\lambda_2 = \frac{l^2}{2} - \frac{\epsilon}{4\alpha}, \quad \lambda_3 = \frac{l^2}{4} \quad (137.2)$$

با استفاده از روش NU ، 1° [۴۳، ۴۴] که در پیوست ۱ آورده شده است خواهیم داشت:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1 \quad (138.2)$$

بنابراین ترازهای انرژی بصورت زیر مشخص می شوند:

$$n(n+1) - \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3} + (1+2n)(\sqrt{\lambda_3} + \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}) = 0 \quad (139.2)$$

که $n = 0, 1, 2, \dots$ است و خواهیم داشت:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[-(N^2 + 2N - 1) - \sqrt{(N^2 + 2N - 1)^2 + 4\lambda_1(N+1)^2 + \frac{1}{4}(N^2 + 2N - l^2)^2} \right] \quad (140.2)$$

که عدد کوانتومی N به صورت زیر تعریف می شود:

$$N = 2n + |l| \quad (141.2)$$

سپس خواهیم داشت:

$$\epsilon_{Nl} = 2\alpha \left[N^2 + 2N - 1 + l^2 + \sqrt{C_{Nl} + \frac{1}{\alpha^2 \hbar^2} (m^2 w^2 - 2\alpha \hbar m w)(N+1)^2} \right] \quad (142.2)$$

که

$$C_{Nl} = (N^2 + 2N - 1)^2 + l^2(N+1)^2 + \frac{1}{4}(N^2 + 2N - l^2)^2 \quad (143.2)$$

و

$$E_{Nl} = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2(\epsilon_{Nl} - 2\hbar m w)} \quad (144.2)$$

و بطور خاص برای α کوچک داریم:

$$E_{Nl} \approx \sqrt{m^2 c^4 - 2\hbar m w c^2 + \frac{2}{\hbar} m c^2 w (N+1)} + \frac{2(N^2 + N - 1 + l^2)}{\sqrt{m^2 c^4 - 2w c^2 + \frac{2}{\hbar} m c^2 w (N+1)}} \quad (145.2)$$

۱.۹.۲ نوسانگر کلاین گوردون دو بعدی در حضور میدان مغناطیسی غیریکنواخت و در حضور تکانه کمینه

در این قسمت اجازه دهید نوسانگر کلاین گوردون دو بعدی را در حضور میدان مغناطیسی غیریکنواخت B در حضور کمینه تکانه بررسی کنیم [۴۷]

$$P_i \rightarrow \Pi_i = P_i - eA_i \quad (۱۴۶.۲)$$

سپس خواهیم داشت:

$$\left[(\Pi_X + imwX)(\Pi_X - imwX) + (\Pi_Y + imwY)(\Pi_Y - imwY) - \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} \right] \psi = 0 \quad (۱۴۷.۲)$$

یا

$$\left[\Pi^2 + m^2w^2R^2 + imw[X, \Pi_X] + imw[Y, \Pi_Y] - \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} \right] \psi = 0 \quad (۱۴۸.۲)$$

سپس میدان مغناطیسی را در طول محور z در نظر می گیریم:

$$\vec{B} = B\hat{k} \quad (۱۴۹.۲)$$

و همچنین در امتداد محور x و y پتانسیل برداری به شکل زیر خواهد بود:

$$A_X = -\frac{B}{2}Y, \quad A_Y = \frac{B}{2}X \quad (۱۵۰.۲)$$

حال ما داریم:

$$\Pi_X^2 = P_X^2 + \frac{B^2e^2}{4}Y^2 + BeYP_X \quad (۱۵۱.۲)$$

$$\Pi_Y^2 = P_Y^2 + \frac{B^2e^2}{4}X^2 - BeXP_Y \quad (۱۵۲.۲)$$

$$[X, \Pi_X] = i\alpha(1 + \alpha(X^2 + Y^2)) \quad (۱۵۳.۲)$$

$$[Y, \Pi_Y] = i\hbar(1 + \alpha(X^2 + Y^2)) \quad (۱۵۴.۲)$$

و معادله ی ۹۶ را بازنویسی می کنیم:

$$\left[P^2 + (m^2 w^2 + \frac{B^2 e^2}{4} - 2\alpha \hbar m w) R^2 - Be(XP_Y - YP_X) - 2\hbar m w - \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} \right] \psi = 0 \quad (155.2)$$

یا

$$\left[(\mathbb{1} + \alpha r^2)^2 \partial_r^2 + (\mathbb{1} + \alpha r^2) \left(\frac{\mathbb{1}}{r} + 2\alpha r \right) \partial_r + \frac{(\mathbb{1} + \alpha r^2)^2}{r^2} \partial^2 - iBe(\mathbb{1} + \mathbb{1}) \partial - \frac{\mathbb{1}}{\hbar^2} \xi r^2 + \epsilon \right] \psi = 0 \quad (156.2)$$

که

$$\xi = m^2 w^2 + \frac{B^2 e^2}{4} - 2\alpha \hbar m w \quad (157.2)$$

و اگر در نظر بگیریم

$$\psi = u(r) e^{i|l|}, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (158.2)$$

و در داخل معادله ی (۱۰۴) قرار دهیم.

$$\left[(\mathbb{1} + \alpha r^2)^2 \partial_r^2 + (\mathbb{1} + \alpha r^2) \left(\frac{\mathbb{1}}{r} + 2\alpha r \right) \partial_r - \frac{(\mathbb{1} + \alpha r^2)^2}{r^2} l^2 + Be|l|(\mathbb{1} + \alpha r^2) - \frac{\mathbb{1}}{\hbar^2} \xi r^2 + \epsilon \right] \psi = 0 \quad (159.2)$$

اجازه دهید $s = -\alpha r^2$ را جایگذاری کنیم:

$$\left[\partial_s^2 + \frac{\mathbb{1} - 2s}{s(\mathbb{1} - s)} \partial_s + \frac{-\lambda_1 s^2 + \lambda_2 s - \lambda_3}{s^2(\mathbb{1} - s)^2} \right] u = 0 \quad (160.2)$$

که

$$\lambda_1 = \frac{\mathbb{1}}{4\alpha} \left[\alpha l^2 - Be|l| + \frac{\mathbb{1}}{\alpha \hbar^2} \left(m^2 w^2 + \frac{B^2 e^2}{4} - 2\alpha \hbar m w \right) \right] \quad (161.2)$$

$$\lambda_2 = \frac{l^2}{2} - \frac{\mathbb{1}}{4\alpha} (\epsilon + Be|l|), \quad \lambda_3 = \frac{l^2}{4} \quad (162.2)$$

سپس معادله را بصورت زیر مینویسیم:

$$\alpha_{Nl} = -Be|l| + 2\alpha \left[N^2 + 2N - \mathbb{1} + l^2 + \sqrt{C_{Nl} + \frac{\mathbb{1}}{\alpha^2 \hbar^2} \left(m^2 w^2 + \frac{B^2 e^2}{4} - 2\alpha \hbar m w \right) (N + \mathbb{1})^2} \right] \quad (163.2)$$

که

$$C_{Nl} = (N^2 + 2N - 1)^2 + l^2(N + 1)^2 + \frac{1}{4}(N^2 + 2N - l^2)^2 \quad (164.2)$$

و

$$E_{Nl} = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2(\epsilon_{Nl} - 2\hbar m \omega)} \quad (165.2)$$

و بطور خاص برای α کوچک داریم:

$$E_{Nl} \approx \sqrt{m^2 c^4 - 2\hbar m \omega c^2 + c^2(-Be|l| + \frac{2}{\hbar} \sqrt{m^2 \omega^2 + \frac{B^2 e^2}{4}}(N + 1))} \quad (166.2)$$

$$+ \frac{\alpha c^2 (N^2 + 2N + l^2 - \frac{(N+1)mw}{\sqrt{m^2 \omega^2 + \frac{B^2 e^2}{4}}})}{\sqrt{m^2 c^4 - 2\hbar m \omega c^2 + c^2(-Be|l| + \frac{2}{\hbar} \sqrt{m^2 \omega^2 + \frac{B^2 e^2}{4}}(N + 1))}} \quad (167.2)$$

از معادلات بدست آمده نتیجه می شود که در غیاب میدان مغناطیسی، انرژی برای حالت های $l = \pm L (L = 1, 2, 3, \dots)$ تبهگن است اما در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت، این تبهگنی شکسته می شود که به این معناست که حالت هایی با $l = L (L = 1, 2, 3, \dots)$ و همچنین حالت هایی با $l = -L (L = 1, 2, 3, \dots)$ مشخص می شوند تراز های انرژی متفاوتی دارند.

فصل ۳

بررسی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبت خاص دوگانه: رویکرد جبری، بررسی معادله ی شرودینگر و پتانسیل های مختلف در این جبر

در سال های اخیر مطالعه بر روی مسائل مکانیک کوانتوم نظریه میدان با روابط عدم قطعیت تصحیح شده مورد توجه قرار گرفته است. این روابط عدم قطعیت منجر به کمینه طول یا کمینه تکانه های مشاهده پذیر غیر صفر می گردند و از روابط جابجایی تصحیح شده به فرم کلی زیر بدست می آیند:

$$[X, P] = i\hbar f(X^2, P^2) \quad (1.3)$$

انگیزه های مطالعه چنین روابطی از حوزه های گوناگون در فیزیک نظری مانند نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی نتیجه می شود. به عنوان مثال برای ساختن نظریه گرانش کوانتومی اینگونه استدلال می شود که: برهم نهی مکانیک کوانتومی و نسبیت عام در ابعادی از مرتبه ی طول پلانک محدودیتی برای مفهوم جایگزینی ایجاد می کند، ذره آزمونی که برای اندازه گیری در طول هایی به کوچکی طول پلانک به کار می رود باید تکانه و انرژی زیادی داشته باشد، چنین ذره ای خود ساختار فضا زمان را تحت تاثیر قرار می دهد، بنابراین یک نظریه وحدت یافته از گرانش مکانیک کوانتومی جایگزینی مطلقاً ندارد، عدم

جایگزینی باعث عدم قطعیتی در اندازه گیری ها در گرانش کوانتومی می شود، این انگیزه ای است برای مطالعه ی نظریه ای که از آن به عنوان پدیده شناسی گرانش کوانتومی یاد می شود، در پدیده شناسی گرانش کوانتومی تلاش می شود با استفاده از داده های اخترشناسی نظریه ای برای ساختار فضا زمان در فواصل کوچک از مرتبه ی طول پلانک بیابند. آمیلنو کاملیا^۱ [۳۸، ۳۹] از این طریق نظریه ای معرفی کرد با عنوان نظریه نسبیت هاس دوگانه که در آن علاوه بر وجود یک سرعت حدی مشاهده پذیر و مستقل از مشاهده گر نیز وجود دارد که اندازه گیری طول هایی کمتر از آن امکان پذیر نیست. در نظریه ریسمان اختلالی نیز نشان داده شده است که ریسمان ها به عنوان عناصر بنیادی نظریه قادر به اندازه گیری و آشکار سازی فواصلی کمتر از طول خود نیستند، پس نظریه ریسمان نیز به نوعی وجود یک طول کمینه مشاهده پذیر را پیش بینی می کند، وجود این طول کمینه مشاهده پذیر همگی ناشی از یک رابطه عدم قطعیت به صورت $\Delta X \geq \frac{\hbar}{4}(\frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P)$ است. که در این نظریه ها ظاهر می شود. برای مثال این رابطه عدم قطعیت در آزمایش های فکری که برای اندازه گیری افق رویداد یک سیاه چاله در نظر گرفته می شود ظاهر می شود، یکی از خصوصیت های جالب توجهی که این رابطه عدم قطعیت نتیجه می دهد وجود یک طول کمینه (طول ریسمان) $\Delta X_0 = \hbar\sqrt{\beta}$ است که اندازه گیری طول های کمتر از آن مطابق با عدم قطعیت گفته شده امکان پذیر نیست. بعنوان روشی برای حل برخی از مشکلات در جاذبه ی کوانتومی، اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP را معرفی می کنیم. توسعه ی زیادی برای فرمول بندی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP و سیستم های کوانتومی تصحیح شده وجود دارد. اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP توسط روابط جابجایی زیر معرفی می شود.

$$[X, P] = i(1 + \beta P^2), \quad (2.3)$$

که X و P به ترتیب عملگر مکان و عملگر تکانه هستند. و β پارامتر کوچکی است که توسط $\beta = \frac{\beta_0}{M_{pl}c^2}$ که M_{pl} جرم پلانک و β_0 پارامتر بدون بعد از مرتبه ی یک است و $\hbar = 1$ است. این GUP تضمین می کند که ما یک طول حداقل غیر صفر = خواهیم داشت. بطور عام، روابط جابجایی می توانند به شکل زیر نوشته می شوند [۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵]

$$[X, P] = iF(P), \quad (3.3)$$

¹Amelino-camelia

که در معادله ی بالا $F(p)$ تابع تغییر شکل GUP نامیده می شود.

$$x \rightarrow X = x, \quad p \rightarrow P = f(p) \quad (۴.۳)$$

به این معناست که مکان و تکانه در انرژی بالا قرار دارند و (x, p) به معنی مکان و تکانه در انرژی پایین هستند. و از طرفی می دانیم که در انرژی های بالا مکان و تکانه به طریق بالا نمایش داده می شوند. این نشان می دهد که مکان همچنان در انرژی های بالا بدون تغییر باقی می ماند در حالیکه تکانه در انرژی بالا تغییر شکل می دهد. در این مورد تکانه در انرژی های بالا محدود نیست و $-\infty < P < \infty$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta p}) \quad (۵.۳)$$

این امر عجیب بنظر می رسد زیرا نیروی تکانه در انرژی های بالا محدود می شود اگر ما این انرژی مضاعف را ناشی از نسبیت خاص دوگانه در نظر بگیریم. در واقع نسبیت خاص دوگانه DSR این حقیقت را بیان میدارد که تکانه بیشینه است و این تکانه را تکانه ی پلانک مینامد κ . روی $X = x$ ، $P = f(p)$ و $f(\pm\infty) = \pm\kappa$ باید راه حلی یافت. بنابراین با این شرایط عملگر تکانه از بیشترین مقدار (تکانه پلانک κ) می آید. مدل GUP از مفهوم DSR گرفته می شود در این مدل:

$$[X, P] = iF(P), \quad (۶.۳)$$

۱.۰.۳ نمایش تکانه تغییر شکل یافته

نمایش تکانه تغییر شکل یافته با توجه به جابجایی معرفی شده به شکل زیر است:

$$X = iF(p) \frac{\partial}{\partial p}, \quad P = p \quad (۷.۳)$$

نمایش تکانه عمل می کند روی تابع مربعی انتگرال پذیر $\frac{dp}{F(p)}$ پذیر $\Phi(p) \in \mathcal{L}^2 - A, A; \frac{dp}{F(p)}$ که $\phi(\pm A) = 0$ داریم نرم Φ بصورت زیر داده می شود:

$$\|\Phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{F(p)} |\Phi(p)|^2 \quad (۸.۳)$$

برای GUP استاندارد، $A = \infty$ است و معادله شرودینگر را به شکل زیر داریم:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V\left(iF(p) \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] \Phi(p) = E\Phi(p) \quad (۹.۳)$$

۲.۰.۳ نمایش مکان

نمایش حالت برای GUP به شکل زیر خواهد بود:

$$X = x, \quad P = f(p) = f\left(\frac{1}{i}\partial_x\right) \quad (10.3)$$

که تابع f بصورت زیر بیان می شود:

$$p = \int^P \frac{dP}{F(P)} \quad (11.3)$$

نمایش مکان 1 عمل می کند روی تابع مربعی انتگرال پذیر $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(-\infty, \infty; dx)$ که نرم ψ داده همیشه توسط

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \quad (12.3)$$

و در نهایت معادله شرودینگر در این نمایش به این شکل نوشته میشه:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i}\partial_x\right)^2 + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (13.3)$$

۳.۰.۳ نمایش تکانه تغییر شکل نیافته

نمایش تکانه تغییر شکل نیافته برای جبر با استفاده از نمایش حالت با جایگذاری $x = i\partial_p$ بصورت زیر خواهد بود:

$$X = x = i\partial_p, \quad P = f(p) = f(p) \quad (14.3)$$

نمایش تکانه تغییر شکل نیافته عمل می کند روی تابع انتگرال پذیر مربعی $\phi(p) \in \mathcal{L}^2(-\infty, \infty; dp)$ و نرم ψ داده همیشه توسط

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\phi(p)|^2 \quad (15.3)$$

سپس معادله شرودینگر برای GUP در نمایش تکانه تغییر شکل نیافته به شکل زیر خواهد شد:

$$\left[\frac{1}{2m} (f(p))^2 + V(i\partial_p) \right] \phi(p) = E\phi(p) \quad (16.3)$$

۱.۳ معرفی یک مرتبه ی بالاتر از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در مکانیک کوانتومی یک بعدی

در این بخش یک نمایش دیگر از مرتبه ی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته را معرفی می کنیم که دارای بیشینه ی تکانه و کمینه ی طول است. سپس نمایش این جبر را در فضای تکانه و مکان را می نویسیم و ویژه تابع آن در مکان و بیشینه حالت جایگزیده را بدست می آوریم. بطور مثال جعبه ی یک بعدی و مسئله ی نوسانگر هارمونیک را بررسی می کنیم. همانطور که در فصل اول بیان کردیم اصل عدم قطعیت تعمیم یافته توسط کمپف^۲ و مانگانو^۳ و منن^۴ که به (KMM) مشهور هستند معرفی شد [۴۰].

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta^2 P^2) \quad (17.3)$$

که به صورت زیر هم نمایش داده می شود:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta^2 \Delta P^2) \quad (18.3)$$

که این روابط منجر به وجود یک طول کمینه بصورت $(\Delta X)_0 = \hbar\beta$ می شوند. از طرفی همانطور که معرفی کردیم $\beta^2 = \frac{\beta_0^2}{(m_p c)^2}$ که m_p جرم پلانک با $10^{19} GeV$ و $m_p c^2 \simeq 10^{19} GeV$ و β_0 از مرتبه ی واحد است. از طرفی می دانیم رابطه ی بیان شده طول کمینه را برآورده می کند اما تکانه بیشینه را خیر. به همین دلیل ایده ی بیشینه ی تکانه توسط علی^۵ و داس^۶ و واگناس^۷ توسط جابجایی زیر پیشنهاد شد [۴۷-۴۹].

$$[X_i, P_j] = i\hbar[\delta_{ij} - \alpha(P\delta_{ij} + \frac{P_i P_j}{P}) + \alpha^2(P^2 \delta_{ij} + 3P_i P_j)] \quad (19.3)$$

که در رابطه ی بالا $\alpha = \frac{\alpha_0}{m_p} = \frac{\alpha_0 \ell_p}{\hbar}$ پارامتر تعمیم یافتگی GUP است همچنین رابطه ی جابجایی قبل بطور تقریبی برآورده می شود توسط نمایش زیر:

$$X_i = x_i, \quad P_i = p_i(1 - \alpha p + 2\alpha^2 p^2) \quad (20.3)$$

²Kempf

³Mangano

⁴Mann

⁵Ahmad farag Ali

⁶Suraya Das

⁷Elias Vagenas

که جابجایی اولیه بیان شده نیازمند یک طول حداقل از مرتبه ی α و یک تکانه بیشینه از مرتبه ی $\frac{1}{\alpha}$ است از طرفی جبر گفته شده از هندسه ی ناجابجایی پیروی نمی کند زیرا $[X_i, X_j] = 0$ از این جهت پدram در رفرنس [۴۱, ۴۶] مرتبه ای بالاتر برای اصل عدم قطعیت تعمیم یافته پیشنهاد داد.

$$[X, P] = \frac{i\hbar}{\sqrt{1 - \beta^2 P^2}} \quad (21.3)$$

این رابطه موافق با جبر $[X, P] = i\hbar(1 + \beta^2 P^2)$ است و یک تکینگی در $P^2 = \frac{1}{\beta^2}$ دارد. این حقیقت نشان می دهد که تکانه ذرات نمی تواند $\frac{1}{\beta}$ باشد و این امر موافق با نسبیت خاص دوگانه است جابجایی تعمیم یافته بیان شده فقط جملات زوج P را شامل می شود. در یک بعد، اندازه ی تکانه $|P| = \sqrt{P^2}$ است. سپس اگر بخواهیم یک مرتبه ی جدیدتر از اصل عدم قطعیت را بیان کنیم می توانیم $|P|$ را بجای P^2 انتخاب کنیم که می توان فرمی ساده تر برای α پیدا کرد. براین اساس یک اصل عدم قطعیت جدیدتر که دارای یک تکانه بیشینه و همچنین کمینه ی طول است به شکل زیر می یابیم

$$[X, P] = \frac{i\hbar}{\sqrt{1 - \beta|P|}}, \quad \beta > 0 \quad (22.3)$$

که

$$|P| = \sqrt{|P^2|}, \quad \beta = \frac{\beta_0}{m_p c} \quad (23.3)$$

می دانیم که تکینگی معادله ی بالا در نقطه ی $|P| = \frac{1}{\beta}$ قرار دارد. این حقیقت نشان می دهد که تکانه ذرات نمی تواند $\frac{1}{\beta}$ باشد که موافق با نسبیت خاص دوگانه است. در این قسمت بررسی می کنیم که جابجایی بیان شده، طول کمینه دارد یا خیر؟ با بسط معادله ی ۱ برحسب β داریم

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta|P| + (\beta|P|)^2 + (\beta|P|)^3 + \dots) \quad (24.3)$$

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{1 - \beta|P|} \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle 1 + \beta|P| + \beta^2 P^2 + \beta^3 |P|P^2 + \beta^4 (P^2)^2 + \dots \rangle \quad (25.3)$$

$$\geq \frac{\hbar}{2} [1 + \langle |P| \rangle + \beta^2 (\Delta P)^2 + \beta^3 (\Delta P)^3 + \beta^4 (\Delta P)^4 + \dots] \quad (26.3)$$

$$\geq \frac{\hbar}{2} [-\beta \Delta P + 1 + \beta \Delta P + \beta^2 (\Delta P)^2 + \beta^3 (\Delta P)^3 + \dots] \quad (27.3)$$

$$= \frac{\hbar}{2} [-\beta \Delta P + \frac{1}{1 - \beta \Delta P}]$$

که در نظر می گیریم $\langle P \rangle = 0$ و $\langle |P| \rangle \geq 0$ می توانیم معادله ی (۲۲.۳) را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2 \Delta P} [-\beta \Delta P + \frac{1}{1 - \beta \Delta P}] \quad (28.3)$$

در سمت راست معادله ی بالا یک کمینه در $\Delta P = \frac{1}{\beta}$ قرار دارد در حالیکه طول کمینه ای به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\Delta X_{min} = \frac{3}{2} \beta \hbar \quad (29.3)$$

۱.۱.۳ نمایش در فضای تکانه با جبر جدید اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

نمایش در فضای تکانه برای جابجایی بیان شده به شکل زیر است

$$X = \frac{i\hbar}{1 - \beta|P|}, \quad P = p \quad (30.3)$$

نمایش تکانه روی تابع مربعی انتگرال پذیر $\phi(p)$ به شکل زیر است

$$\phi(p) \in \left(\frac{-1}{\beta}, \frac{1}{\beta}; (1 - \beta|p|) dp \right) \quad (31.3)$$

که نرم $\phi(p)$ بصورت زیر است

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} (1 - \beta|p|) |\phi(p)|^2 dp \quad (32.3)$$

برای عملگر A ، مقادیر انتظاری A برای تابع موج $\phi(p)$ بصورت زیر است

$$\langle A \rangle_\phi = \langle \phi(P) | A | \phi(p) \rangle = \int_{-\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} (1 - \beta|p|) \phi^*(p) A dp \quad (33.3)$$

معادله شرودینگر در این فضا به شکل زیر است

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(i\hbar(1 - \beta|p|) \frac{\partial}{\partial p}) \right] \phi(p) = E \phi(p) \quad (34.3)$$

۲.۱.۳ نمایش در فضای مکان با جبر جدید اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

نمایش در فضای مکان با جبر بیان شده به شکل زیر است

$$X = x, \quad P = \frac{p}{|p|} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2\beta|p|}}{\beta} \right), \quad p = \frac{\hbar}{i} \partial_x \quad (35.3)$$

نمایش مکان روی تابع انتگرال پذیر مربعی $\psi(x)$ بصورت زیر عمل می کند

$$\psi(x) \in (-\infty, \infty, dx) \quad (36.3)$$

که نرم $\psi(x)$ به شکل زیر است

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \quad (37.3)$$

مقادیر انتظاری عملگر A برای تابع موج $\psi(x)$ بصورت زیر است

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi(x) | A | \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) A dx \quad (38.3)$$

که معادله شرودینگر در این فضا به شکل زیر است

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2\beta|p|}}{\beta} \right)^2 + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad (39.3)$$

۲.۳ بررسی تابع موج مکان و بیشترین حالت جایگزیدگی

در این قسمت می خواهیم حالت هایی را برای عملگر مکان بدست آوریم که بیشترین جایگزیدگی را داشته باشد و همچنین به بررسی تابع موج مکان از طریق حل معادله ویژه مقداری در این فضا می پردازیم.

$$\frac{i\hbar}{1 - \beta|p|} \frac{\partial}{\partial p} \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \quad (40.3)$$

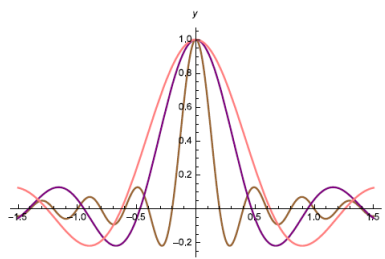
که از حل معادله ویژه مقدراری بالا، ویژه تابع مکان نرمالیزه شده بصورت زیر است

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\beta} \exp\left(\frac{-i\lambda p}{\hbar} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\right) \quad (41.3)$$

سپس حاصلضرب ویژه تابع مکان را به شکل زیر داریم

$$\langle \psi_\lambda(p) | \psi_{\lambda'}(p) \rangle = \frac{2\beta\hbar}{\lambda - \lambda'} \sin\left(\frac{\lambda - \lambda'}{2\beta\hbar}\right) \quad (42.3)$$

بنابراین مانند رفرنس [۵۰] و رفرنس [۴۱, ۴۶] ویژه تابع مکان عمدتا تعامد دارد. در شکل نشان می دهیم که نمودار (۱.۳) برحسب $y = \langle \psi_\lambda(p) | \psi_{\lambda'}(p) \rangle$ برای رفرنس [۵۰] با رنگ قهوه ای و برای رفرنس [۴۱, ۴۶] با رنگ زرشکی و برای جبر جدیدی که خودمان بیان کردیم به رنگ صورتی رسم شده است. می دانیم که برای جبری که خودمان بیان کردیم شبیه به رفرنس [۵۰] است.



شکل ۱.۳: رسم ویژه توابع

در اینجا برای بررسی بیشترین حالت جایگزیدگی کت حالت را به شکل زیر تعریف می کنیم. حالتی است که بیشترین جایگزیدگی را حول پارامتر ξ دارد که ویژگی های زیر را دارا می باشد.

$$\langle \phi_\xi^{ml} | X | \phi_\xi^{ml} \rangle = \xi, \quad (\Delta X) | \phi_\xi^{ml} \rangle = 0 \quad (43.3)$$

معادله دیفرانسیلی را به شکل زیر می نویسیم.

$$\left[\frac{i\hbar}{1 - \beta|p|} \partial_p - \xi + \frac{i\hbar}{2(\Delta p)^2} (-\beta\Delta P + \frac{1}{1 - \beta\Delta P}) p \right] \phi_\xi^{ml} = 0 \quad (44.3)$$

که $\Delta p = \frac{1}{\beta}$ انتخاب می کنیم و جوابی بصورت زیر ارائه می دهیم

$$\phi_\xi^{ml} = N \exp\left[\frac{-i}{\hbar} \xi p \left(1 - \frac{\beta}{2}|p|\right) - \frac{3}{2}\beta^2 p^2 \left(1 - \frac{2\beta}{3}|p|\right)\right] \quad (45.3)$$

که فاکتور نرمالیزاسیون به شکل زیر است

$$N^{-2} = \int_{-\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} dp (1 - \beta|p|) \exp[-3\beta^2 p^2 (1 - \frac{2\beta}{3}|p|)] \simeq \frac{0.7691}{\beta} \quad (46.3)$$

سپس در این فضا بیشترین حالت جایگزیدگی را مشاهده می کنیم که ΔX مرتبه ای از طول کمینه است

$$(\Delta X)|_{|\phi_{\xi}^{ml}\rangle} \simeq 1.2(\Delta X)_{min} \quad (47.3)$$

سپس عملگر انرژی جنبشی را تحت تابع موج مکان و همچنین بیشترین حالت جایگزیدگی بررسی می کنیم و مشاهده می کنیم که محدود است

$$\langle \psi_{\lambda}(p) | \frac{P^2}{2m} | \psi_{\lambda}(p) \rangle = \frac{1}{12m\beta^2} \quad (48.3)$$

$$\langle \phi_{\xi}^{ml} | \frac{P^2}{2m} | \phi_{\xi}^{ml} \rangle = \frac{0.1196}{2m\beta^2} \quad (49.3)$$

که در رفرنس [5°] بصورت زیر داشتیم

$$\langle \psi_{\lambda}(p) | \frac{P^2}{2m} | \psi_{\lambda}(p) \rangle_{Pedram} = \frac{1}{10m\beta^2} \quad (50.3)$$

$$\langle \phi_{\xi}^{ml} | \frac{P^2}{2m} | \phi_{\xi}^{ml} \rangle_{Pedram} = \frac{0.1469}{2m\beta^2} \quad (51.3)$$

و همچنین در مقایسه با رفرنس [41, 46] داریم

$$\langle \psi_{\lambda}(p) | \frac{P^2}{2m} | \psi_{\lambda}(p) \rangle_{KMM} = \frac{1}{2m\beta^2} \quad (52.3)$$

$$\langle \phi_{\xi}^{ml} | \frac{P^2}{2m} | \phi_{\xi}^{ml} \rangle_{KMM} = \infty \quad (53.3)$$

با توجه به نتایج بدست آمده و مقایسه ویژه مقادیر برای عملگر انرژی جنبشی با رفرنس های بیان شده در می یابیم که جابجایی که بیان کردیم در معادله ی (32.3) جواب بهتری را ارائه می دهد و ویژه مقدار انرژی جنبشی را تحت این حالات کوچکتر از قبل بدست می دهد.

۳.۳ بررسی جعبه ی یک بعدی در جبر تعمیم یافته ی جدید

یک ذره ی کوانتومی بدون اسپین را با جرم m در یک جعبه ی یک بعدی با پتانسیل زیر در نظر می گیریم

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (54.3)$$

معادله شرودینگر در نمایش مکان بصورت زیر است

$$\frac{P^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x) \quad (55.3)$$

حل معادله ی بالا بصورت زیر است

$$\psi_n(x) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (56.3)$$

سپس انرژی بصورت زیر بدست می آید

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m\beta^2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)}\right)^2 \quad (57.3)$$

در نتیجه برای β کوچک داریم

$$E_n \simeq \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL^2} \left[1 + \beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right] \quad (58.3)$$

که نشاندهنده ی این حقیقت است که افزایش انرژی ناشی از اثر جبرجدید تعمیم یافته (۳۲.۳) است. سپس ویژه مقادیر مکان و مربع مکان را بصورت زیر بدست می آوریم

$$\langle X \rangle = \frac{L}{2} \quad (59.3)$$

$$\langle X^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right) \quad (60.3)$$

همچنین میزده مقادیر تکانه و مربع تکانه به صورت زیر بدست می آید

$$\langle P \rangle = 0 \quad (61.3)$$

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{\beta^2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\beta \left(\frac{n\pi}{L} \right)} \right)^2 \quad (62.3)$$

در نتیجه روابط عدم قطعیت در جبر تعمیم یافته ی جدید به شکل زیر خواهد بود

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar L}{\beta} \left(1 - \sqrt{1 - 2\beta \left(\frac{n\pi}{L} \right)} \right) \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2}} \quad (63.3)$$

۴.۳ بررسی مسئله ی نوسانگر هارمونیک در جبر تعمیم یافته ی

جدید

جبر تعمیم یافته ی جدید بیان شده در معادله ی (۳۰.۳) را برای مسئله ی نوسانگر هارمونیک بررسی می کنیم ، هامیلتونی برای نوسانگر هارمونیک به شکل زیر است

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \quad (64.3)$$

که در نمایش تکانه به شکل زیر است

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2(1 - \beta|p|)} \quad (65.3)$$

برای پیدا کردن ویژه مقادیر تقریبی انرژی از هامیلتونی بالا، از نقش ویلسون سامرفیلد^۸ استفاده می کنیم

$$\oint x dp = \left(n + \frac{1}{4} \right) h, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (66.3)$$

سپس می توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$\frac{2}{m\omega} \int_{-z}^z dp (1 - \beta|p|) \sqrt{z^2 - p^2} = \left(n + \frac{1}{4} \right) h, \quad z^2 = 2mE \quad (67.3)$$

با جایگذاری معادله داریم

$$z^2 - \frac{4\beta}{3\pi} z^3 = 2\hbar m \omega \left(n + \frac{1}{4} \right) \quad (68.3)$$

در اینصورت برای β کوچک به شکل زیر داریم

$$E_n^{sc} \approx \hbar \omega \left(n + \frac{1}{4} \right) + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \beta \sqrt{m} (\hbar \omega)^{\frac{3}{2}} \left(n + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (69.3)$$

⁸wilson-sommerfeld

۵.۳ حل کلاسیکی

در این قسمت به بررسی حل کلاسیکی هامیلتونی براساس جبر تعمیم یافته ی جدید معادله ی (۳۰.۳) می پردازیم

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E \quad (۷۰.۳)$$

سپس روابط تحول زمانی را به شکل زیر داریم

$$\dot{x} = \frac{p}{m(1 - \beta|p|)}, \quad \dot{p} = -\frac{m\omega^2 x}{1 - \beta|p|} \quad (۷۱.۳)$$

که با در نظر گرفتن $p_{max} = \sqrt{2mE}$ داریم

$$x = \frac{1}{m\omega} \sqrt{p_{max}^2 - p(t)^2} \quad (۷۲.۳)$$

با جایگذاری معادله ی قبل در معادله ی تحول زمانی بصورت زیر داریم

$$\omega t = -\frac{\beta p}{|p|} \sqrt{p_{max}^2 - p(t)^2} - \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{p_{max}^2 - p(t)^2}} \right) \quad (۷۳.۳)$$

سپس معادله حرکت نیوتنی در این فضا به شکل زیر است

$$m\ddot{x} = -mW(|\dot{x}|)^2 x \quad (۷۴.۳)$$

که

$$W(|\dot{x}|) = \omega(1 + m\beta|\dot{x}|)^2 \quad (۷۵.۳)$$

در نتیجه معادله بدست آمده معادله ی قانون هوک است که وابسته به سرعت و فرکانس زاویه ای است.

۶.۳ اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ی جدید مبتنی بر نسبیت

خاص دوگانه

در نسبیت خاص دوگانه DSR روابط انرژی-تکانه تغییر شکل یافته به شکل زیر است [۵۱]

$$E^2 = p^2 + m^2 + h(|p_0|, \kappa), \quad (۷۶.۳)$$

ما نیاز داریم که به صورت زیر داشته باشیم

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} h(|p_0|, \kappa) = 0 \quad (77.3)$$

می دانیم که $|p_0|$ عملگر نیست و عددی هست و سرعت نور را برابر با یک در نظر می گیریم. تکانه تغییر شکل نیافته (تکانه در انرژی های پایین) p_0 میتواند مرتبط باشد با تکانه تغییر شکل یافته (تکانه در انرژی های بالا) P_0 به شکل زیر:

$$P_0 = f(p_0) \quad (78.3)$$

حال اگر ما به این شکل انتخاب کنیم:

$$P_0 = f(p_0) = \frac{p_0}{1 + \frac{|p_0|}{\kappa}}, \quad (79.3)$$

ما روابط تغییر شکل یافته را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$E^2 = P_0^2 + m^2 = \left[\frac{p_0}{1 + \frac{|p_0|}{\kappa}} \right]^2 + m^2 \quad (80.3)$$

یا به شکل زیر:

$$E^2 = p_0^2 + m^2 - 2 \frac{|p_0|}{\kappa} p_0^2 + 3 \frac{p_0^4}{\kappa^2} + \dots \quad (81.3)$$

براحتی می توان دریافت از رابطه ی (79.3) خواهیم داشت

$$\lim_{p_0 \rightarrow \pm\infty} P_0 = \lim_{p_0 \rightarrow \pm\infty} f(p_0) = \pm\kappa \quad (82.3)$$

که نشان میدهد که $|P_0| \leq \kappa$ است. براساس DSR و روابط گفته شده، ما می توانیم عملگر تکانه را به شکل زیر معرفی کنیم:

$$P = \frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}}, \quad (83.3)$$

که $|p|$ اندازه ی عملگر تغییر شکل نیافته ی تکانه p هست، یا $|p| = \sqrt{p^2}$. تابع معکوس آن به شکل زیر خواهد بود

$$p = \frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}} \quad (84.3)$$

برای شرط $0 \leq |p|$ ما خواهیم داشت $|P| \leq \kappa$ که مرز(کران) بالا، برای حرکت در انرژی بالا فراهم می کند. و از طرفی حد $p \rightarrow \pm\infty$ متناظر است با $P = \pm\kappa$ که نشان می دهد که تکانه ماکسیمم(حداکثر) (تکانه پلانک) در مدل ما وجود دارد. معادلات عملگری قبل جابجایی زیر را نتیجه می دهند: [۵۱، ۵۲]

$$[X, P] = i\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2, \quad (۸۵.۳)$$

که به شکل زیر برای جابجایی قبل خواهیم داشت:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{\langle |P| \rangle}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} (\Delta P)^2\right), \quad (۸۶.۳)$$

اگر در نظر بگیریم که $\langle P \rangle = 0$.

$$(\Delta X)_{min} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{1 - 2 \frac{\langle |P| \rangle}{\kappa}} \quad (۸۷.۳)$$

۷.۳ نمایش تکانه تغییر شکل یافته برای اصل عدم قطعیت تعمیم

یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

نمایش تکانه تغییر شکل یافته براساس جابجایی گفته شده در معادله ی (۸۵.۳) به شکل زیر خواهد بود:

$$X = i\left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p}, \quad P = p \quad (۸۸.۳)$$

نمایش تکانه تغییر شکل یافته عمل می کند روی تابع انتگرال پذیر مربعی $\Phi(p) \in \mathcal{L}^2(-\kappa, \kappa; \frac{dp}{(1-\frac{|p|}{\kappa})^2})$

با $\Phi(\pm\kappa) = 0$ و همچنین نرم Φ داده میشه توسط

$$\|\Phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^2} |\Phi(p)|^2 \quad (۸۹.۳)$$

و معادله شرودینگر در این نمایش بصورت زیر نوشته می شود:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] \Phi(p) = E\Phi(p) \quad (۹۰.۳)$$

۱.۷.۳ نمایش حالت برای اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

همچنین نمایش حالت برای جابجایی گفته شده در معادله ی (۸۵.۳) بصورت زیر است: [۵۶-۵۹]

$$X = x, \quad P = \frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}} = \frac{\frac{1}{i}\partial_x}{1 + \frac{|\frac{1}{i}\partial_x|}{\kappa}} \quad (91.3)$$

کند نمایش حالت عمل می کند روی تابع مربعی انتگرال پذیر $dx \in \mathcal{L}^2 - \infty, \infty$; $\psi(x) \in \mathcal{L}^2 - \infty, \infty$ و نرم ψ بصورت زیر ارائه می شود:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \quad (92.3)$$

و معادله شرودینگر در این نمایش به صورت زیر ارائه می شود:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\frac{1}{i}\partial_x}{1 + \frac{|\frac{1}{i}\partial_x|}{\kappa}} \right)^2 + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (93.3)$$

نمایش تکانه تغییر شکل نیافته برای معادله ی (۸۵.۳) بدست میاد از نمایش حالت با جایگذاری $x = i\partial_p$ در آن، سپس خواهیم داشت:

$$X = x = i\partial_p, \quad P = \frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}} \quad (94.3)$$

نمایش تکانه تغییر شکل نیافته عمل می کند رو تابع مربعی انتگرال پذیر $dp \in \mathcal{L}^2 - \infty, \infty$; $\phi(p) \in \mathcal{L}^2 - \infty, \infty$ و نرم ϕ بصورت زیر ارائه می شود:

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\phi(p)|^2 \quad (95.3)$$

معادله شرودینگر برای این مایش نیز به صورت زیر ارائه می شود:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}} \right)^2 + V(i\partial_p) \right] \phi(p) = E\phi(p) \quad (96.3)$$

۸.۳ تابع موج تکانه در نمایش مکان

اجازه دهید تابع موج تکانه را به شکل زیر در نظر بگیریم

$$Pu_{p_0}(x) = p_0 u_{p_0}(x), \quad (97.3)$$

که p_0 عملگر نیست و ویژه مقدار تکانه هست. برای تابع نمایی زیر به این صورت خواهیم داشت

$$f(p)e^{iax} = f\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) e^{iax} = f(a)e^{iax}, \quad (98.3)$$

اجازه دهید که در نظر بگیریم تابع موج تکانه به فرم زیر داده شده است.

$$u_{p_0}(x) = A(p_0)e^{iax} \quad (99.3)$$

با جایگذاری معادله (۱۰۱.۳) در معادله ی (۹۷.۳) بصورت زیر

$$P(A(p_0)e^{iax}) = \left[\frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}} \right] (A(p_0)e^{iax}) = \left[\frac{a}{1 + \frac{|a|}{\kappa}} \right] (A(p_0)e^{iax}) \quad (100.3)$$

بنابراین ما داریم

$$p_0 = \frac{a}{1 + \frac{|a|}{\kappa}} \quad (101.3)$$

و با در نظر گرفتن مقادیر مثبت معادله ی (۱۰۳.۳) خواهیم داشت

$$|p_0| = \frac{|a|}{1 + \frac{|a|}{\kappa}} \quad (102.3)$$

یا

$$|a| = \frac{|p_0|}{1 - \frac{|p_0|}{\kappa}} \quad (103.3)$$

که این نتیجه را می دهد

$$a = \frac{p_0}{1 - \frac{|p_0|}{\kappa}} \quad (104.3)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$u_{p_0}(x) = A(p_0)e^{i \frac{p_0 x}{1 - \frac{|p_0|}{\kappa}}} \quad (105.3)$$

و با استفاده از این روابط خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{p_0}(x)^* u_{p'_0}(x) dx = \delta(p - p'), \quad (106.3)$$

سپس

$$A(p_0) = \frac{1}{1 - \frac{|p_0|}{\kappa}} \quad (107.3)$$

بنابراین تابع موج تکانه در این نمایش به شکل زیر خواهد بود:

$$u_{p_0}(x) = \frac{1}{1 - \frac{|p_0|}{\kappa}} \exp \frac{ip_0 x}{1 - \frac{|p_0|}{\kappa}} \quad (108.3)$$

۹.۳ مسئله ی جعبه ی یک بعدی در نمایش مکان

اگر یک ذره ی کوانتومی بدون اسپین را به جرم m در یک جعبه ی یک بعدی در نظر بگیریم

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & elsewhere \end{cases} \quad (109.3)$$

معادله ی شرودینگر در نمایش حالت آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2m} P^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (110.3)$$

یا

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (111.3)$$

با حل معادله ی قبل تابع را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$\psi(x) = c_1 \cos\left(\frac{qx}{\sqrt{1-\frac{q}{k}}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{qx}{\sqrt{1-\frac{q}{k}}}\right) \quad (112.3)$$

که

$$q = \sqrt{2mE} \quad (113.3)$$

با توجه به شرط $\psi(0) = 0$ ضریب زیر را بدست می آوریم:

$$c_1 = 0 \quad (114.3)$$

و از شرط $\psi(L) = 0$ بدست می آوریم:

$$q = q_n = \frac{n\pi}{L + \frac{n\pi}{k}} \quad (115.3)$$

که با در نظر گرفتن $n = 1, 2, 3, \dots$ تابع موج به شکل زیر بدست می آید:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (116.3)$$

و انرژی این تابع به شکل زیر داده می شود:

$$E_n = \frac{1}{2m} \left[\frac{n\pi}{L + \frac{n\pi}{\kappa}} \right]^2 \quad (117.3)$$

مقادیر انتظاری حالت و مربع حالت به شکل زیر داده می شود:

$$\langle X \rangle = \frac{L}{2} \quad (118.3)$$

$$\langle X^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} \right) \quad (119.3)$$

و مقادیر انتظاری تکانه و مربع تمانه نیز به شکل زیر ارائه می گردد:

$$\langle P \rangle = 0 \quad (120.3)$$

$$\langle P^2 \rangle = \left[\frac{n\pi}{L + \frac{n\pi}{\kappa}} \right]^2 \quad (121.3)$$

سپس برای مقادیر انتظاری گفته شده رابطه ی عدم قطعیت به شکل زیر خواهد بود:

$$\Delta X \Delta P = \frac{n\pi}{1 + \frac{n\pi}{\kappa L}} \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2}} \quad (122.3)$$

۱۰.۳ بررسی مسئله ی نوسانگر هارمونیک در نمایش تکانه تغییر

شکل نیافته

اجازه دهید یک ذره به جرم m را با پتانسیل هارمونیک $V(X) = \frac{1}{2}mw^2X^2$ را در نظر بگیریم و برای آن معادله ی شرودینگر با شکل زیر خواهد بود:

$$\left[\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2X^2 \right] \phi = E\phi \quad (123.3)$$

با استفاده از نمایش تکانه ی تغییر شکل نیافته معادله ی شرودینگر را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}} \right)^2 - \frac{1}{2}mw_p^2 \right] \psi(p) = E\psi(p) \quad (124.3)$$

در اینجا برای حل معادله با استفاده از تغییر متغیر $s = 1 + |p|/\kappa$ خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa^4}{m^2 w^2 s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2\kappa^2 Em - \kappa^4}{(mw)^2} \right] \psi(s) = 0 \quad (125.3)$$

با مقایسه ی معادله ی بالا با معادله ی ویتاکر^۹ خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\kappa^4}{m^2 w^2 y^2} + \frac{2A\kappa^4}{m^2 w^2 y} + \frac{A^2(2\kappa^2 Em - \kappa^4)}{(mw)^2} \right] \psi(y) = 0 \quad (126.3)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{y^2} + \frac{\lambda}{y} - \frac{1}{4} \right] \psi(y) = 0 \quad (127.3)$$

ما داریم

$$A = \frac{mw}{2\kappa^2 \sqrt{1 - \frac{2Em}{\kappa^2}}} \quad (128.3)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\kappa^4}{m^2 w^2}} \quad (129.3)$$

$$\lambda = \frac{\kappa^2}{mw \sqrt{1 - \frac{2Em}{\kappa^2}}} \quad (130.3)$$

بنابراین تابع موج در نمایش تکانه به شکل زیر خواهد بود:

$$\psi(p) = M_{\lambda, \mu}(y) \quad (131.3)$$

که تابع ویتاکر^{۱۰} به شکل زیر تعریف می شود:

$$M_{\lambda, \mu}(y) = e^{-y/2} y^{\mu+1/2} M(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu; y) \quad (132.3)$$

و $M(a, b, y)$ تابع کومر^{۱۱} است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} z^n}{b^{(n)} n!} = {}_1F_1(a; b; z) \quad (133.3)$$

⁹Wittacker

¹⁰Wittacker

¹¹Kummer

$$a^{(0)} = 1, \quad a^{(n)} = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), \quad (134.3)$$

بعد از پایان دادن به این سری بی نهایت، به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\mu - \lambda + \frac{1}{\gamma} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (135.3)$$

یا

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \kappa^4}{m^2 w^2}} - \frac{\kappa^2}{mw \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 Em}{\kappa^2}}} + \frac{1}{\gamma} = -n \quad (136.3)$$

با حل معادله ی قبل انرژی را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$E_n = \frac{mw^2 \kappa^2 \left[1 + 2n + n + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \kappa^4}{m^2 w^2}} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \kappa^4}{m^2 w^2}} \right]}{\gamma \kappa^4 + 2m^2 w^2 \left[1 + 2n + n + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \kappa^4}{m^2 w^2}} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \kappa^4}{m^2 w^2}} \right]} \quad (137.3)$$

$$E_n = wn + \frac{1}{\gamma} - \frac{mw^2}{\gamma \kappa^2} (\epsilon n^2 + \epsilon n + 1) + \mathcal{O} \frac{1}{\kappa^4} \quad (138.3)$$

۱۱.۳ معرفی جبر صادق بر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی

بر نسبیت خاص دوگانه

در این قسمت $DSR - GUP$ را در نظر می گیریم که در قسمت قبل پیشنهاد دادیم .

$$Planck \text{ energy} \sim Planck \text{ momentum} \sim Planck \text{ mass} \sim \kappa \quad (139.3)$$

با استفاده از معادله ی (۸۶.۳) که بیانگر اصل عدم قطعیت مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه بود و با در نظر گرفتن $\langle \hat{P} \rangle = 0$ می بینیم که معادله ی (۸۶.۳) از شکل استاندارد GUP که به صورت $[\hat{X}, \hat{P}] = i(1 + \beta \hat{P}^2)$ داده می شود متفاوت است [۵۵]. زیرا در این مورد روابط بین عملگر تکانه در مقیاس پلانک و دیگری در مقیاسی غیر از مقیاس پلانک است داده شده توسط $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} \hat{P})$ از این روابط در می یابیم که این تعریف $DSR - GUP$ است و از طرفی معادله ی (۸۶.۳) مقادیر انتظاری

$|\hat{P}|$ را می دهد. از طرفی این وابسته به تابع موج است پس اگر تابع موج را روی معادله ی (۸۶.۳) اثر دهیم داریم: [۵۶-۵۹]

$$(\Delta \hat{X})_{\Psi} (\Delta \hat{P})_{\Psi} \geq \frac{1}{\kappa} \left(1 - 2 \frac{\langle \Psi | |\hat{P}| | \Psi \rangle}{\kappa}\right) + \frac{1}{\kappa^2} (\Delta \hat{P})_{\Psi}^2 \quad (140.3)$$

که

$$(\Delta \hat{X})_{\Psi} = \sqrt{\langle \Psi | \hat{X}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{X} | \Psi \rangle^2} \quad (141.3)$$

$$(\Delta \hat{P})_{\Psi} = \sqrt{\langle \Psi | \hat{P}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{P} | \Psi \rangle^2} \quad (142.3)$$

در $DSR - GUP$ تابع موج فیزیکی در فضای حالت پیروی می کند از:

$$\Psi(X)|_{X=\pm\infty} = 0, \quad (143.3)$$

در حالیکه تابع موج فیزیکی در فضای تکانه پیروی می کند از:

$$\Psi(P)|_{P=\pm\kappa} = 0, \quad (144.3)$$

بنابراین، طول کمینه [۶۱] به تابع موج فیزیکی وابسته است. وجود طول کمینه فقط بخاطر شرط $\langle \Psi | |\hat{P}| | \Psi \rangle < \kappa/2$ که از معادله ی زیر نتیجه می شود.

$$[(\Delta \hat{X})_{\Psi}]_{min} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{1 - 2 \frac{\langle \Psi | |\hat{P}| | \Psi \rangle}{\kappa}} \quad (145.3)$$

چون $|\hat{P}|$ از ویژه مقدار مثبت تابع موج فیزیکی گرفته میشه که این ویژه مقدار بین ۰ تا κ است پس می دانیم که

$$0 < \langle \Psi | |\hat{P}| | \Psi \rangle < \kappa/2 \quad (146.3)$$

که داده میشود بصورت

$$0 < [(\Delta \hat{X})_{\Psi}]_{min} < \frac{1}{\kappa} \quad (147.3)$$

پس می دانیم که وجود طول کمینه ی غیر صفر ناشی از $\langle \Psi | |\hat{P}| | \Psi \rangle < \kappa/2$ بنابراین نتیجه می گیریم که $DSR - GUP$ یک طول کمینه و یک تکانه بیشینه از مرتبه ی κ می دهد.

۱۲.۳ دیفرانسیل تغییر شکل یافته مرتبط با اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

در $DSR - GUP$ ما نمایشی به صورت زیر داریم

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{1 + \frac{|\hat{p}|}{\kappa}} = \frac{\frac{1}{i}\partial_x}{1 + \frac{|\partial_x|}{\kappa}}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (148.3)$$

در مکانیک کوانتومی معمول بصورت $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ توصیف میشود و عملگر تکانه \hat{p} بصورت جمله ای مشتق شده بصورت $\hat{p} = \frac{1}{i}\partial_x$ تعریف می شود. حال در حالتی مشابه اجازه دهید تغییر شکل یافته ی آن را تعریف کنیم بصورت D_x .

$$\hat{P} = \frac{1}{i}D_x \quad (149.3)$$

سپس نمایش حالت $DSR - GUP$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P} = \frac{1}{i}D_x \quad (150.3)$$

که

$$D_x = \frac{\partial_x}{1 + \frac{|\partial_x|}{\kappa}} \quad (151.3)$$

بسط معادله ی (۱۴۹.۳) برای $1/\kappa$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\hat{P} = \frac{1}{i}\partial_x - \frac{1}{i\kappa}\partial_x|\partial_x| + \frac{1}{i\kappa^2}\partial_x^3 + \dots \quad (152.3)$$

و این شاده بنظر می رسد که در حد $\kappa \rightarrow \infty$ معادله ی بالا تبدیل به معادله ی عام خودش بصورت $\frac{1}{i}\partial_x$ میشود. تصحیحات $DSR - GUP$ زمانی که تکانه یک ذره نزدیک به تکانه پلانک است غالب می شود. و برای تکانه ای که کوچکتر از تکانه پلانک است می توان از تصحیحات $DSR - GUP$ صرف نظر کرد و تصحیحات $DSR - GUP$ به حالت عام خودش تبدیل می شود در این حالت. برای $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|\partial_x|e^{iax} = |a|e^{iax}, \quad |\partial_x|e^{ax} = |a|e^{ax} \quad (153.3)$$

با استفاده از این روابط

$$f(\partial_x)e^{ax} = f(a)e^{ax}, \quad (154.3)$$

می توان تابع نمایی تغییر شکل یافته زیر را تعریف کرد:

$$D_x e_\kappa(a; x) = a e_\kappa(a; x) \quad (155.3)$$

که

$$e_\kappa(a; x) = \exp\left(\frac{ax}{1 - \frac{|a|}{\kappa}}\right) \quad (156.3)$$

و می توان بسادگی این روابط نمایی تغییر شکل یافته رو در حضور شرایط زیر بدست آورد: [۶۰، ۶۱]

$$e_\kappa(a; 0) = 1 \quad (157.3)$$

$$e_\kappa(0; x) = 1 \quad (158.3)$$

$$e_\kappa(a; x)e_\kappa(a; y) = e_\kappa(a; x + y) \quad (159.3)$$

$$e_\kappa(a; x)e_\kappa(b; x) = e_\kappa(a_\kappa b; x), \quad (160.3)$$

که

$$a_\kappa b = \frac{\frac{a}{1 - \frac{|a|}{\kappa}} + \frac{b}{1 - \frac{|b|}{\kappa}}}{1 - \frac{1}{\kappa} \left| \frac{a}{1 - \frac{|a|}{\kappa}} + \frac{b}{1 - \frac{|b|}{\kappa}} \right|} \quad (161.3)$$

بنابراین می توانیم تابع نمایی تغییر شکل یافته ای را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$(D_x^\alpha - a^\alpha)y(x) = 0 \quad (162.3)$$

که حل آن بصورت زیر خواهد بود:

$$e_\kappa(a; x) \quad \text{or} \quad e_\kappa(a; -x) \quad (163.3)$$

با جایگزینی a با ia خواهیم داشت:

$$e_{\kappa}(ia; x) = \exp\left(\frac{iax}{\sqrt{1 - \frac{|a|}{\kappa}}}\right) \quad (164.3)$$

$$e_{\kappa}(-ia; x) = \exp\left(\frac{-iax}{\sqrt{1 - \frac{|a|}{\kappa}}}\right) \quad (165.3)$$

حالا می داینم که $e_{\kappa}(ia; x)$ دوره ای بصورت T دارد که تعریف می شود بشکل:

$$e_{\kappa}(ia; x + T) = e_{\kappa}(ia; x), \quad (166.3)$$

که این دوره بشکل زیر تعریف می شود:

$$T = \frac{2\pi}{a} \left(1 - \frac{|a|}{\kappa}\right) \quad (167.3)$$

همچنین تابع کسینوس و سینوس تغییر شکل یافته نیز در این فضا تعریف می کنیم:

$$C_{\kappa}(a; x) = \frac{1}{2} [e_{\kappa}(ia; x) + e_{\kappa}(-ia; x)] = \cos \left[\frac{ax}{\sqrt{1 - \frac{|a|}{\kappa}}} \right] \quad (168.3)$$

$$S_{\kappa}(a; x) = \frac{1}{2i} [e_{\kappa}(ia; x) - e_{\kappa}(-ia; x)] = \sin \left[\frac{ax}{\sqrt{1 - \frac{|a|}{\kappa}}} \right] \quad (169.3)$$

که این دو تابع از معادله ی زیر پیروی می کنند:

$$(D_x^2 + a^2)y(x) = 0 \quad (170.3)$$

۱۳.۳ تبدیل فوریه تغییر شکل یافته، صفحه ی موج و جعبه ی

گاوسی

در $DSR - GUP$ تابع موج در فضای x در $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty; dx)$ است که بیان می کند که برای دو تابع

موج در فضای x می توانیم حاصل ضربی به شکل زیر را داشته باشیم:

$$\langle \phi | \psi \rangle_x = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \psi(x) \quad (171.3)$$

و مقادیر انتظاری عملگر \hat{A} برای تابع موج $\psi(x)$ بصورت زیر داده می شود:

$$\langle \hat{A} \rangle_x = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \hat{A} \phi(x) \quad (172.3)$$

برای تعریف حاصلضرب (۱۷۱.۳) می توان بسادگی این نکته را بیان کرد $D_x^\dagger = -D_x$ و $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$. پس شرایط نرمالیزاسیون برای موج جایگزیده به شکل زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \phi(x) = 1, \quad (173.3)$$

که به $\phi(\pm\infty) = 0$ دلالت می کند. اما برای موج پراکنده مثل صفحه ی موج با تکانه P برای جواب تابع نرمالیزاسیون تابع دلتا را داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_P^*(x) \phi_{P'}(x) = \delta(P - P') \quad (174.3)$$

در نهایت روابط کاملی را بدست آوردیم. تبدیل فوریه تغییر شکل یافته تعریف می شود بصورت:

$$g(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) \exp \left[-\frac{ixP}{1 - \frac{|P|}{\kappa}} \right] \quad (175.3)$$

و تبدیل معکوس آن نیز به شکل زیر است:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} g(P) \exp \left[\frac{ixP}{1 - \frac{|P|}{\kappa}} \right] \quad (176.3)$$

تابع موج در فضای P در $\mathcal{L}^2(-\kappa, \kappa; \frac{dP}{(1 - \frac{|P|}{\kappa})^2})$ است که بیان می کند که برای دو تابع موج در فضای P می توانیم حاصل ضربی به شکل زیر را داشته باشیم:

$$\langle g|h \rangle_P = \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} g^*(P) h(P) \quad (177.3)$$

مقادیر انتظاری عملگر \hat{A} برای تابع موج $g(P)$ بصورت زیر داده می شود:

$$\langle \hat{A} \rangle_P = \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} g^*(P) \hat{A} g(P) \quad (178.3)$$

پس شرایط نرمالیزاسیون برای موج جایگزیده در فضای P به شکل زیر است:

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} g^*(P) g(P) = 1 \quad (179.3)$$

که به $g(\pm\kappa) = 0$ دلالت می کند. اما برای موج پراکنده مثل صفحه ی موج با تکانه x برای جواب تابع نرمالیزاسیون تابع دلتا را داریم.

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} g_x^*(P) g_{x'}(P) = \delta(x - x') \quad (180.3)$$

۱.۱۳.۳ حل بسته ی موج در فضای حالت

اجازه دهید در این بخش حل صفحه ی موج را با تکانه ی P که تابع موج تکانه در فضای x است را بیابیم:

$$\hat{P}u_P(x) = Pu_P(x) \quad (181.3)$$

یا

$$D_x u_P(x) = iPu_P(x) \quad (182.3)$$

از حل معادله ی بالا خواهیم داشت:

$$u_P(x) = A(P)e_{\kappa}(iP; x) \quad (183.3)$$

با استفاده از این روابط ما داریم:

$$u_P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)} \exp\left(\frac{iPx}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right) \quad (184.3)$$

طول موج از $u_P(x + \lambda) = u_P(x)$ بدست می آید با شرط $P > 0$ بصورت:

$$\lambda = \frac{2\pi}{P}\left(1 - \frac{P}{\kappa}\right) = \frac{2\pi}{P} - \frac{2\pi}{\kappa} \quad (185.3)$$

بنابراین، طول موج کاهش می یابد و منجر به اثرات $DSR - GUP$ می شود.

۲.۱۳.۳ جعبه ی گاوسی

در این قسمت اجازه دهید یک جعبه ی گاوسی در فضای x در نظر بگیریم که می توان یک ذره را در

$x = 0$ پیدا کرد پس به این صورت داده می شود [۶۲]

$$|\phi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (186.3)$$

تابع موج متناظر در فضای x بصورت زیر است:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (187.3)$$

سپس ما داریم:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sigma \quad (188.3)$$

تبدیل فوریه تغییر شکل یافته بصورت زیر داده می شود:

$$g(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \exp\left[-\frac{ixP}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right] \quad (189.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{1}{4\sigma^2} \left(x + \frac{2\sigma^2 iP}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right)^2\right] \exp\left[-\sigma^2 \left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right)^2\right] \quad (190.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\right) \sqrt{4\sigma^2\pi} \exp\left[-\sigma^2 \left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right)^2\right] \quad (191.3)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left[-\sigma^2 \left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right)^2\right] \quad (192.3)$$

می توان بسادگی فهمید که $g(\pm\kappa) = 0$ است. و با استفاده از تعریف خواهیم داشت:

$$\langle |\hat{P}| \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\kappa\sqrt{2})^n \sigma^{n+1}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \quad (193.3)$$

برای بیشتر ذرات تکانه به اندازه ی کافی کوچک است در مقایسه با تکانه پلانک κ . بنابراین در بیشتر موارد جمله ی $1/\kappa$ غالب می شود اگر ما $1/\kappa$ کوچک را در نظر بگیریم، بدست می آوریم:

$$\langle |\hat{P}| \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sigma^2\kappa}\right) \quad (194.3)$$

و

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(\sqrt{2}\sigma)^n \kappa^{n-1}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \quad (195.3)$$

و برای $1/\kappa$ کوچک خواهیم داشت:

$$\langle \hat{P}^2 \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sigma} - \frac{1}{\sigma^2\kappa}\right) \quad (196.3)$$

با استخراج معادله ی (۱۹۴.۳) و (۱۹۵.۳) در پیوست ۲. براحتی میتوان فهمید که معادله ی (۱۹۴.۳) و (۱۹۵.۳) شرایط $DSR - GUP$ را برآورده می کنند برای مراتب بالاتر از $1/\kappa$.

۳.۱۳.۳ موج جایگزیده در فضای تکانه

اجازه دهید یک موج جایگزیده را در نظر بگیریم که از شرط $g(\pm\kappa) = 0$ در فضای P پیروی می کند، ما می خواهیم شرطی را برای جایگزیدگی موج در فضای P پیدا کنیم.

$$g(P) = A\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^a e^{i\Theta(|P|)}, \quad a > 0 \quad (197.3)$$

که $\Theta(|P|)$ یک تابع دلخواه است. حال $a > 0$ نیاز است برای $g(\pm\kappa) = 0$. از طرفی $g(P)$ تکینه می شود در $|P| = \kappa$. شرط نرمالیزاسیون هست

$$A^2 \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} \left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^{2a} = 1 \quad (198.3)$$

انتگرال بالا همگرا می شود زمانی که $a > 1/2$. سپس ما داریم

$$A = \sqrt{\frac{2a-1}{2\kappa}} \quad (199.3)$$

از شرط (۱۴۶.۳) داریم

$$a > 1 \quad (200.3)$$

بنابراین، تابع موج نوع (۱۹۳.۳)، شرطی برای موج جایگزیده در فضای P با $a > 1$ در این مورد ما موج جایگزیده در فضای P داریم:

$$g(P) = \sqrt{\frac{2a-1}{2\kappa}} \left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^a e^{i\Theta(|P|)} \quad (201.3)$$

و

$$\langle g | \hat{P} | g \rangle = \frac{\kappa}{2a} \quad (202.3)$$

اجازه دهید واحد پلانک را برای تکانه در نظر میگیریم. سپس ما می توانیم $\kappa = 1$ در نظر بگیریم و تکانه P بین -1 تا 1 خواهد بود. برای سادگی ما $\Theta(|P|) = 0$ در نظر میگیریم. برای موردی از $a = 3/2$ معادله را می توان به شکل زیر نوشت:

$$g(P) = (1 - |P|)^{3/2} \quad (203.3)$$

که داریم:

$$\langle g | \hat{P} | g \rangle = \int_1^1 \frac{dP}{(1-|P|)^2} |P| g(P)^2 = \frac{1}{3}, \quad (204.3)$$

و

$$\langle g | (\Delta \hat{P})^2 | g \rangle = \int_1^1 \frac{dP}{(1-|P|)^2} P^2 g(P)^2 = \frac{1}{6} \quad (205.3)$$

و تبدیل فوریه $g(P)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[2 + \sqrt{2\pi|x|} (\cos x (2S(\sqrt{\frac{2|x|}{\pi}}) - 1) + \sin|x|(1 - 2C(\sqrt{\frac{2|x|}{\pi}}))) \right] \quad (206.3)$$

که انتگرال فرنسل^{۱۲} به شکل زیر تعریف می شود.

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)dt \quad (207.3)$$

با ساده سازی معادله ی (۱۴۷) که در ضمیمه ۲ داده شده است. برای $\phi(x)$ ما داریم:

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi(x)|^2 \quad (208.3)$$

این انتگرال به صورت عددی محاسبه شده است و نتیجه ی آن بصورت زیر داده می شود.

$$\Delta x \approx 1,0607 \quad (209.3)$$

بنابراین ما داریم:

$$\Delta x \Delta P \approx 0,433 \quad (210.3)$$

و

$$\frac{1}{4}(1 - 2\langle g | \hat{P} | g \rangle + (\Delta P)^2) = 0,25 \quad (211.3)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$\Delta x \Delta P > \frac{1}{4}(1 - 2\langle g | \hat{P} | g \rangle + (\Delta P)^2), \quad (212.3)$$

که دلالت بر این دارد که تابع موج (۱۴۴) و (۱۴۷) $DSR - GUP$ را برآورده می کنند.

¹²Fresnel

۱۴.۳ بسته ی موج، سرعت فاز و سرعت گروه

در این قسمت اجازه دهید درباره ی بسته ی موج، سرعت فاز و سرعت گروه بحث کنیم. مثل پیدا کردن تکانه تغییر شکل یافته از روی تکانه تغییر شکل نیافته، ما در اینجا انرژی تغییر شکل یافته E را از انرژی تغییر شکل نیافته ϵ بدست می آوریم:

$$\epsilon = \frac{E}{1 - E/\kappa} \quad (213.3)$$

با استفاده از معادله ی قبل، موج متحرک $e^{i(px-\epsilon t)}$ در نظریه تغییر شکل نیافته میتواند بصورت زیر معرفی شود.

$$e_{\kappa}(iP; x)e_{\kappa}(-iE; t) \quad (214.3)$$

سپس، بسته ی موج به شکل زیر نوشته می شود:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{(1 - \frac{|P|}{\kappa})^2} F(P)e_{\kappa}(iP; x)e_{\kappa}(-iE; t) \quad (215.3)$$

که ما فرض می کنیم $E > 0$. اگر ما در معادله ی قبل انرژی و تکانه ی تغییر شکل نیافته را بنویسیم:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{F}(p)e^{i(px-\epsilon t)} \quad (216.3)$$

که $F(P) = \tilde{F}(p)$ و ϵ هستند توابعی در p که از روابط پراکندگی نتیجه می شوند سرعت فاز بصورت زیر داده می شود:

$$v_{ph} = \frac{\epsilon}{p} = \left(\frac{E}{P}\right) \left(\frac{1 - \frac{|P|}{\kappa}}{1 - \frac{E}{\kappa}}\right)^2 \quad (217.3)$$

فرض کنید که بسته ی موج تقریباً تک فاز باشد؟. بنابراین $\tilde{F}(p)$ یک پیک تیز در اطراف تکانه ی مرکزی \tilde{p} دارد. سپس خطی سازی این نتیجه را می دهد که:

$$\epsilon = \epsilon(\tilde{p}) + \left(\frac{d\epsilon}{dp}\right)_{\tilde{p}}(p - \tilde{p}) \quad (218.3)$$

با جایگذاری معادله ی (۲۱۸.۳) داخل معادله ی (۲۱۶.۳) سرعت گروه را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$v_g = \left(\frac{d\epsilon}{dp}\right)_{\tilde{p}} = \left(\frac{1 - \frac{|\tilde{P}|}{\kappa}}{1 - \frac{E(\tilde{P})}{\kappa}}\right)^2 \left(\frac{dE}{dP}\right)_{\tilde{P}} \quad (219.3)$$

که

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{P}}{1 - \frac{|\tilde{P}|}{\kappa}} \quad (220.3)$$

۱۵.۳ اثرات رامسوار-تاونزند

اثر Ramsauer-Townsend^{۱۳} که در اصل به پراکندگی الکترونها توسط اتمهای گاز نجیب اشاره دارد. در واقع می توان برای سادگی اینطور بیان کرد که اثرات رامسوار-تاونزند به این اصل ساده اشاره دارد که وقتی ذرات کیهانی به یک سیاه چاله می رسند یک سری از این ذرات از سیاه چاله گذشته و طی پدیده ی تونل زنی از آن می گذرند و یک سری از آنها بازتاب شده و بر میگردند حال می توان این ضرایب عبور و بازتاب را بدست آورد، در اینجا می توان اثرات رامسوار-تاونزند را در حضور طول کمینه که یک شیفت و تغییر $\Delta_q = q_{GUP} - q_{ord}$ در آن وجود دارد محاسبه کرد. [۶۳، ۶۴] ما می توانیم پتانسیل چاه کوانتومی به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0, \text{Region I}) \\ -V_0 & (0 < x < a, \text{Region II}) \\ 0 & (x > a, \text{Region III}) \end{cases} \quad (221.3)$$

که V_0 مقدار ثابتی هست و فرض می کنیم که $E > 0$. حال معادله ی شرودینگر سه بعدی زیر را در نظر می گیریم.

$$\frac{P^2}{2m} \psi_I = E \psi_I \quad (222.3)$$

$$\frac{P^2}{2m} \psi_{II} - V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (223.3)$$

$$\frac{P^2}{2m} \psi_{III} = E \psi_{III} \quad (224.3)$$

با حل معادلات (۲۲۲.۳) تا (۲۲۴.۳) خواهیم داشت:

$$\psi_I = e_{\kappa}(iq_0; x) + A e_{\kappa}(-iq_0; x) \quad (225.3)$$

$$\psi_{II} = B e_{\kappa}(iq; x) + C e_{\kappa}(-iq; x) \quad (226.3)$$

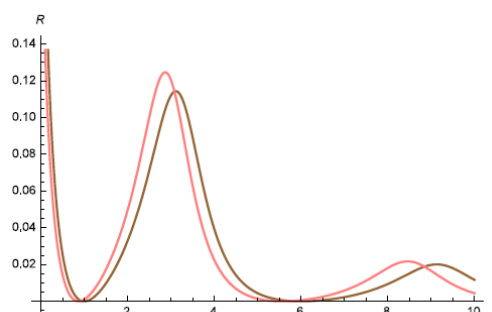
¹³Ramsauer-Townsend

$$\psi_{III} = De_{\kappa}(iq_0; x) \quad (227.3)$$

که

$$q_0 = \sqrt{2mE}, \quad q = \sqrt{2m(E + V_0)} \quad (228.3)$$

از پیوستگی ψ در $x = a$ و $x = 0$ بدست می آوریم:



شکل ۲.۳: رسم ضرایب بازتابی بر حسب انرژی برای $\kappa = \infty$ به رنگ قهوه ای و $\kappa = 12^\circ$ به رنگ قرمز و $a = \pi$ ، $V_0 = 3$ و $2m = \hbar = 1$

$$S_{\kappa}(q; a) = 0 \quad (229.3)$$

بنابراین ما داریم:

$$q = \frac{\frac{n\pi}{a}}{1 + \frac{1}{\kappa}(\frac{n\pi}{a})} \quad (230.3)$$

که در حد

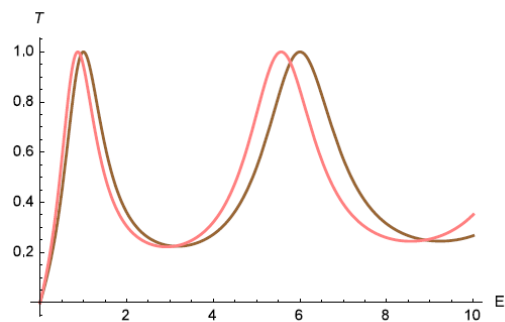
$$1/\kappa \rightarrow 0$$

به حالت عام $q_0 = n\pi/a$ تبدیل می شود و این نشاندهنده ی این نکته است که یک شیفت $(\Delta_q = q - q_0)$ در عدم موج رزونانس انتقال است و این تغییر خود وابسته به عدد موج است.

$$\Delta_q = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{n\pi}{a} \right)} \right] < 0 \quad (231.3)$$

سپس تغییر فاز افزایش می یابد و منجر به وجود آمدن طول کمینه می شود. ما براحتمی می توانیم پدیده ی انتقال را برای $E > 0$ مطالعه کنیم. ضرایب انتقال توسط معادلات زیر داده می شوند:

$$T = |D|^2 = \left[C_{\kappa}^{\nu}(q; a) + \left(\frac{1 + \mu^2}{\mu} \right)^{\nu} S_{\kappa}^{\nu}(q; a) \right]^{-1} \quad (232.3)$$



شکل ۳.۳: رسم ضرایب عبور بر حسب انرژی برای $\kappa = \infty$ به رنگ قهوه ای و $\kappa = 120^\circ$ به رنگ قرمز و $a = \pi$ ، $V_0 = 3$ و $2m = \hbar = 1$

۱.۱۵.۳ پتانسیل دلتا

اجازه دهید در نظر بگیریم یک چاه پتانسیل تابع دلتا (منفی) بصورت $V(X) = -\delta(X)$. سپس برای حالت $E < 0$ در نظر می گیریم معادله شرودینگر را ر نمایش x بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{1}{2m} D_x^2 - \alpha \delta(x) \right] \psi(x) = -|E| \psi(x) \quad (233.3)$$

که

$$-\frac{1}{2m} D_x^2 \psi(x) = -|E| \psi(x) \quad (234.3)$$

که حلی بصورت زیر را ارائه می دهد

$$\psi_I(x) = B e_{\kappa}(q; x) \quad (x < 0) \quad (235.3)$$

$$\psi_{II}(x) = F e_{\kappa}(q; -x) \quad (x > 0) \quad (236.3)$$

که

$$q = \sqrt{2m|E|} \quad (237.3)$$

ما می خواهیم $\psi_{II}(x \rightarrow \infty) = \psi_I(x \rightarrow \infty)$ ، بنابراین تابع موج پیوسته است. و این نکته را نشان می دهد که $B = F$. با انتگرال گیری از معادله ی ضریب عبور T از $-\epsilon$ تا ϵ که $\epsilon > 0$ خواهیم داشت:

$$-\int_{-\epsilon}^{\epsilon} D_x^2 \psi(x) dx - 2m\alpha \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \psi(x) dx = -2m|E| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx \quad (238.3)$$

سپس جمله ی اول بصورت زیر جایگزین میشه:

$$-\int_{-\epsilon}^{\epsilon} D_x^2 \psi(x) dx = -2Bq(1 - \frac{q}{\kappa}) \quad (239.3)$$

بنابراین ما داریم:

$$q(1 - \frac{q}{\kappa}) = m \quad (240.3)$$

بنابراین انرژی بصورت زیر ارائه می شود:

$$E = -\frac{\kappa^2}{\lambda m} (1 - \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{\kappa}})^2 \quad (241.3)$$

برای $1/\kappa$ کوچک خواهیم داشت:

$$E \approx -\frac{m\alpha^2}{2} (1 + \frac{2m\alpha}{\kappa}) \quad (242.3)$$

بنابراین $|E|$ افزایش می یابد و ناشی از اثرات $DSR - GUP$ خواهد بود.

۱۶.۳ معرفی انواع نسبیت خاص دوگانه

دو نوع DSR وجود دارد که به صورت $DSR - 1$ و $DSR - 2$ نام گذاری می شود. $DSR - 1$ در دو بعد توسط آمیلینو کاملیا [۳۸، ۳۹]^{۱۴} بصورت زیر معرفی شد:

$$(\kappa \sinh \frac{E}{\kappa})^2 - (\kappa \sinh \frac{m}{\kappa})^2 = P^2 e^{E/\kappa}, \quad (243.3)$$

¹⁴Amelino-camelia

و ۲- DSR توسط ماگیجو^{۱۵} و اسمولین^{۱۶} [۶۱] نیز صورت زیر معرفی شد:

$$\frac{E^2 - P^2}{(1 - E/\kappa)^2} = \frac{m^2}{(1 - m/\kappa)^2}, \quad (244.3)$$

که κ انرژی پلانک (یا تکانه پلانک یا جرم پلانک) است. بسادگی می توان فهمید که هر دو ۱- DSR و ۲- DSR در حد $\kappa \rightarrow \infty$ به حالت عام کاهش پیدا می کنند.

علاوه بر DSR ، یک روش دیگر برای مقیاس پلانک، که با تغییر شکل اصلی عدم قطعیت (هایزنبرگ) انجام شد تا وجود حداقل طول را تضمین کند وجود دارد. که به صورت GUP ارائه شد [۵۵].

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\left(1 + \frac{\beta_0}{\kappa^2} \hat{P}^2\right), \quad (245.3)$$

که

$$\{X, P\} = 1 + \frac{\beta_0}{\kappa^2} P^2. \quad (246.3)$$

در انرژی های پایین معادله به حالت عام اصل عدم قطعیت هایزنبرگ تبدیل می شود.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i, \quad (247.3)$$

$$\{x, p\} = 1. \quad (248.3)$$

در GUP روابط بین عملگر تکانه و عملگر حالت در انرژی های پایین و در انرژی های بالا بصورت زیر ارائه می شود:

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad \hat{P} = \frac{\kappa}{\sqrt{\beta_0}} \tan\left(\frac{\sqrt{\beta_0}}{\kappa} \hat{p}\right), \quad (249.3)$$

یا بصورت کلاسیکی

$$X = x, \quad P = \frac{\kappa}{\sqrt{\beta_0}} \tan\left(\frac{\sqrt{\beta_0}}{\kappa} p\right). \quad (250.3)$$

¹⁵Magueijo

¹⁶Smolin

۱۷.۳. تبدیلات لورنتس تغییر شکل یافته براساس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

در اینجا می دانیم که تکانه در انرژی های بالا کراندار نیست و $-\infty < P < \infty$. این بنظر عجیب می رسد که تکانه در انرژی های بالا در نسبیت خاص دوگانه کراندار است. و این کران همانطور که گفته شد تکانه پلانک نامیده می شود که به شکل زیر معرفی می شود:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\left(1 - \frac{|\hat{P}|}{\kappa}\right)^2, \quad (251.3)$$

یا بصورت کلاسیکی

$$\{X, P\} = \left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2. \quad (252.3)$$

روابط بین مکان و تکانه در انرژی های بالا و پایین بصورت زیر ارائه می شود:

$$P = \frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}}, \quad p = \frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}} \quad (253.3)$$

۱۷.۳ تبدیلات لورنتس تغییر شکل یافته براساس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

چون DSR روابط متفاوتی را ارائه می دهد ما نیاز داریم رابطه ی بین انرژی در انرژی های بالا (E) و انرژی در انرژی های پایین (ϵ) را بدانیم:

$$\epsilon = \frac{E}{1 - \frac{E}{\kappa}}, \quad p = \frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}. \quad (254.3)$$

این روابط تکینگی می دهند زمانیکه $E = \kappa, |P| = \kappa$.

$$E = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{\kappa}}, \quad P = \frac{p}{1 + \frac{|p|}{\kappa}}, \quad (255.3)$$

روابط تغییر شکل یافته بصورت زیر است:

$$E = \frac{\sqrt{\left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right)^2 + \left(\frac{m}{1 - \frac{m}{\kappa}}\right)^2}}{1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}}\right)^2}} \quad (256.3)$$

$$+ \left(\frac{m}{1 - \frac{m}{\kappa}}\right)^2. \quad (257.3)$$

برای $1/\kappa$ کوچک داریم بصورت:

$$E^2 = P^2 + m^2 + \frac{1}{\kappa} [-2(P^2 + m^2)^{3/2} + 2(m^3 + P^2|P|)] + \dots \quad (258.3)$$

از تبدیلات لورنتس عام برای (ϵ, p)

$$p' = \gamma(p - v\epsilon), \quad \epsilon' = \gamma(\epsilon - vp), \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad (259.3)$$

ما تبدیلات لورنتس تغییر شکل یافته را برای $DSR - GUP$ بشکل زیر خواهیم داشت:

$$E' = \frac{\frac{E}{\sqrt{1-\frac{v}{\kappa}}} - \frac{vP}{\sqrt{1-\frac{|P|}{\kappa}}}}{1 + \frac{\gamma}{\kappa} \left(\frac{E}{\sqrt{1-\frac{v}{\kappa}}} - \frac{vP}{\sqrt{1-\frac{|P|}{\kappa}}} \right)}, \quad (260.3)$$

$$P' = \frac{\frac{P}{\sqrt{1-\frac{|P|}{\kappa}}} - \frac{vE}{\sqrt{1-\frac{v}{\kappa}}}}{1 + \frac{\gamma}{\kappa} \left| \frac{P}{\sqrt{1-\frac{|P|}{\kappa}}} - \frac{vE}{\sqrt{1-\frac{v}{\kappa}}} \right|}. \quad (261.3)$$

۱۸.۳ ماکسیمم حالت جایگزیده در اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

رابطه ی عدم قطعیت در $DSR - GUP$ به شکل زیر معرفی شد:

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} \geq \frac{1}{2} \left(1 - 2a + \frac{1}{\kappa^2} (\Delta \hat{P})^2 \right), \quad (262.3)$$

که

$$\langle |\hat{P}| \rangle = a\kappa. \quad (263.3)$$

اگر $0 < a < 1/2$ طول کمینه خواهیم داشت.

$$(\Delta \hat{X})_0 = \frac{\sqrt{1 - 2a}}{\kappa} \quad (264.3)$$

و مقدار تکانه بحرانی $(\Delta \hat{P})_c = \sqrt{1 - 2a}\kappa$ همانطور که می دانیم در جبر هایزنبرگ تعمیمی یافته

مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه اگر عملگر X روی تابع موج در فضای تکانه عمل کند نتیجه زیر را

خواهیم داشت:

$$\hat{X} \phi_\lambda(p) = \lambda \phi_\lambda(p), \quad (265.3)$$

یا

$$i\left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p} \phi_\lambda(p) = \lambda \phi_\lambda(p). \quad (266.3)$$

این معادله دیفرانسیلی قابل حل بوده و ویژه مقدار عملگر مکان بدست می آید:

$$\phi_\lambda(p) = C \exp \left[-\frac{i\lambda p}{1 - \frac{|p|}{\kappa}} \right]. \quad (267.3)$$

و می دانیم که ویژه مقدار عملگر ماکن در فضای تکانه نرمالیزه شده نیست. بنابراین $\phi_\lambda(p)$ یک حالت فیزیکی است. حال در اینجا می خواهیم حالت هایی را برای عملگر مکان بدست آوریم که بیشترین جایگزیدگی را داشته باشند پس کت $|\phi_\xi^{ml}\rangle$ را بصورت زیر معرفی می کنیم که حول پارامتر ξ ویژگی های زیر را دارا می باشد:

$$\langle \phi_\xi^{ml} | \hat{X} | \phi_\xi^{ml} \rangle = \xi, \quad (268.3)$$

و

$$(\Delta \hat{X})_{|\phi_\xi^{ml}\rangle} = (\Delta \hat{X})_0. \quad (269.3)$$

می دانیم که مینیم طول یعنی $(\Delta x)_0$ وابسته به مقدار چشم داشتی P به ازای $\langle \hat{P} \rangle = 0$ بدست می آید. از طرفی می دانیم نرم (اندازه) یک بردار مقدار مثبت است، در اینجا نرمی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta \hat{P})^2} \hat{P}) |\phi_\xi^{ml}\rangle = 0, \quad (270.3)$$

که $\langle \hat{X} \rangle = \xi$. در فضای تکانه می توان معادله دیفرانسیلی را اینطور نوشت:

$$i\left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^2 \partial_p \phi_\xi^{ml}(p) = \left(\xi - \frac{ip}{\kappa}\right) \phi_\xi^{ml}(p), \quad (271.3)$$

که تکانه بحرانی بصورت $(\Delta \hat{P})_c = \sqrt{1 - 2a\kappa}$ معرفی می کنیم. و با جایگذاری در معادله:

$$\phi_\xi^{ml}(p) = C \left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^{-1} \exp \left[-\frac{\frac{p^2}{\kappa|p|}}{1 - \frac{|p|}{\kappa}} \right] \exp \left[-\frac{i\xi p}{1 - \frac{|p|}{\kappa}} \right]. \quad (272.3)$$

ثابت نرمالیزاسیون (اندازه گیری) C بصورت زیر مشخص می شود:

$$1 = \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dp}{\left(1 - \frac{|p|}{\kappa}\right)^2} |\phi_\xi^{ml}(p)|^2, \quad (273.3)$$

که در نهایت بدست می آوریم:

$$C = \sqrt{\frac{2}{5\kappa}}. \quad (274.3)$$

این معادله تعمیم صفحه ی موج در فضای تکانه یا تابع دلتای دیراک در فضای حالت را می دهد که توصیف می کند بیشترین جایگزیدگی را مکانیک کوانتومی معمول. ماکسیم حالت جایگزیدگی یک حالت فیزیکی از انرژی های محدود است:

$$\langle \phi_{\xi}^{ml} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | \phi_{\xi}^{ml} \rangle = \frac{\kappa^2}{10m} = \text{محدود}. \quad (275.3)$$

بطور خاص، برای ماکسیم حالت جایگزیده ما داریم:

$$a = \frac{1}{\kappa} \langle |\hat{P}| \rangle = 0.4 < 0.5. \quad (276.3)$$

که طول کمینه بصورت :

$$(\Delta \hat{X})_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\kappa} \right). \quad (277.3)$$

و عدم قطعیت تکانه بحرانی را بصورت:

$$(\Delta \hat{P})_c = \frac{1}{\sqrt{5}} \kappa. \quad (278.3)$$

از طرفی می دانیم ماکسیم حالت جایگزیده از اصل زیر پیروی می کند:

$$(\Delta \hat{X})(\Delta \hat{P}) = \frac{1}{2} \left(1 - 2a + \frac{(\Delta \hat{P})^2}{\kappa^2} \right), \quad a = 2/5. \quad (279.3)$$

۱۹.۳ ترمودینامیک سیاهچاله ها براساس اصل عدم قطعیت

تعمیم یافته مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه

اگر یک سیاهچاله به جرم M در نظر بگیریم. در افق رویداد سیاهچاله ذره و پادذره ای تولید می شود.

$$E = \pm(E_0^2 + P^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (280.3)$$

که ذره تولید شده با انرژی منفی در سمت داخل افق و پادذره با انرژی مثبت در سمت خارج افق رویداد قرار می گیرند. و همانطور که $P \gg E$ خواهیم داشت $E = \pm P$. این به این معنی است که می توانیم ذره ی بدون جرمی را با تکانه پراکنده شده بصورت عدم قطعیت ΔP . در نظر بگیریم. از طرفی دمای هاوکینگ^{۱۷} سیاهچاله متناسب با دمای ذره خواهد بود بنابراین $E = T$ که ثابت بولتزمن را یک در نظر گرفتیم. عدم قطعیت تکانه بصورت زیر مشخص می شود براساس دما [۱۳]:

$$T = \Delta P. \quad (281.3)$$

برای تعادلا ترمودینامیکی دمای ذره کوانتومی متناسب با دمای سیاهچاله در نظر گرفته شد. نزدیک به افق رویداد سیاهچاله، عدم قطعیت در مکان ذره از مرتبه ی شعاع شوارتسشیلد سیاهچاله خواهد بود [۱۳، ۵۶]:

$$\Delta \hat{X} = \eta r_s, \quad r_s = 2GM, \quad (282.3)$$

که r_s شعاع شوارتسشیلد سیاهچاله و G ثابت جهانی نیوتن و η فاکتور بعد است. با جایگذاری این دو معادله در معادله ی جابجایی بدست آمده برای عدم قطعیت $DSR - GUP$ خواهیم داشت:

$$M = \frac{1}{2\eta GT} \left(1 + \frac{5}{\kappa^2} T^2 \right). \quad (283.3)$$

در حالت عام به این شکل نوشته می شود:

$$M = \frac{1}{2\eta GT}. \quad (284.3)$$

با مقایسه ی این جرم با دمای هاوکینگ $T_H = \frac{\kappa^2}{4\pi M}$ ، ما داریم $\eta = \frac{2\pi}{5}$ و در نهایت رابطه ی دما-جرم را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$M = \frac{m_P}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + 5x \right), \quad x = \frac{T}{T_P}, \quad (285.3)$$

که ما در اینجا κ از مرتبه ی دمای پلانک در نظر می گیریم:

$$M = \frac{1}{4\pi\sqrt{G}} \left(\frac{1}{x} + 5x \right), \quad x = \frac{T}{T_P}. \quad (286.3)$$

¹⁷Hawking

که x مقداری بدون بعد است و جرم سیاهچاله مقدار حداقلی بصورت زیر خواهد داشت:

$$M_{min} = \frac{13\sqrt{5}}{5\pi} m_p \approx 1.8515212 m_p, \quad (287.3)$$

$$. = \frac{1}{\sqrt{5}} T_P \approx 0.4472 T_P.T$$

سپس، ظرفیت گرمایی را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$C = \frac{dM}{dT} = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{5}{\kappa^2} - \frac{1}{T^2} \right). \quad (288.3)$$

$$M(T_0) = M_{min} = \frac{13\sqrt{5}}{5\pi} m_p \approx 1.8515212 m_p, \quad (289.3)$$

پس دریافتیم که جرم تعمیم یافته حاصل از $DSR - GUP$ از مرتبه ی جرم پلانک است.

۲۰.۳ اصل عدم قطعیت مبتنی بر نسبیت خاص دوگانه نوع اول

اصل عدم قطعیت تعمیم یافته همانطور که در فصل اول بیان شد به شکل زیر تعریف می شود [۶۵]

$$\delta x \delta p \geq \frac{\hbar}{4} \left(1 + \beta \ell_{Pl}^2 (\delta p)^2 \right), \quad (290.3)$$

که $\ell_{Pl} \sim 10^{-35} m$ طول پلانک است و β یک ثابت بدون بعد از مرتبه ی یک است. سپس به معرفی

اصل عدم قطعیت مبتنی بر نسبیت خص دوگانه به شکل زیر می پردازیم:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad (291.3)$$

$$[x_i, p_j] = i \left\{ \delta_{ij} - \alpha \ell_{Pl} \left(p \delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{p} \right) + \alpha^2 \ell_{Pl}^2 (p^2 \delta_i + 3 p_i p_j) \right\}, \quad (292.3)$$

$$\delta x \delta p \geq \frac{1}{4} \left(1 - 2\alpha \ell_{Pl} (\delta p) + 4\alpha^2 \ell_{Pl}^2 (\delta p)^2 \right), \quad (293.3)$$

که در معادله ی بالا α از مرتبه ی واحد است.

$$\delta x \delta p \geq \frac{1}{2} \left(1 + \beta \ell_{Pl}(\delta p) + \alpha^2 \ell_{Pl}^2(\delta p)^2 \right). \quad (294.3)$$

در معادله ی قبل β ضریب ℓ_{Pl} و α ضریب ℓ_{Pl}^2 است. که ضریب β اثرات خطی طول پلانک را نشان می دهد و می توانیم این ضریب را به این شکل در نظر بگیریم که $\beta = 0$ و $\beta = -2\alpha$ و $\alpha^2 = 4\alpha^2$ در نتیجه با این شرایط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته کلی را خواهیم داشت که در معادله ی اول معرفی کردیم همچنین با این معادله می توانیم عدم قطعیت تکانه را به صورت زیر بنویسیم:

$$\delta p \geq \frac{1}{2\delta x} f_{DSR-GUP}(\delta x), \quad (295.3)$$

که

$$f_{DSR-GUP}(\delta x) = \left[\frac{2(\delta x)^2}{\alpha^2 \ell_{Pl}^2} \left(1 - \frac{\beta \ell_{Pl}}{2\delta x} \right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell_{Pl}^2}{(\delta x)^2 \left(1 - \frac{\beta \ell_{Pl}}{2\delta x} \right)^2}} \right\} \right]. \quad (296.3)$$

نیازمند آنیم که برای $f_{DSR-GUP}(\delta x)$ به وجود یک طول کمینه دست یابیم.

$$\delta x \geq \delta x_{min} = (2\alpha + \beta) \frac{\ell_{Pl}}{2}, \quad (297.3)$$

و همچنین بیشینه ی تکانه بصورت زیر خواهد بود:

$$\delta p \leq \delta p_{max} = \frac{M_{Pl}}{\alpha}. \quad (298.3)$$

می بینیم که δp_{max} وابسته به β است و همچنین برای GUP و $DSR - GUP$ ، δx_{min} برابر با ℓ_{Pl} است. در معادله ی (۲۹۶.۳) علامت منفی را انتخاب می کنیم چون می خواهیم دمای بکنشتاین-هاوکینگ را در حد M_{BH} بزرگ در قسمت بعد بررسی کنیم. در اینجا بسط $f_{DSR-GUP}(\delta x)$ برحسب α و β به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} f_{DSR-GUP}(\delta x) = & 1 + \frac{\beta \ell_{Pl}}{2\delta x} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \ell_{Pl}^2}{(2\delta x)^2} + \frac{(3\alpha^2 \beta + \beta^3) \ell_{Pl}^3}{(2\delta x)^3} \\ & + \frac{(2\alpha^4 + \beta^4 + 6\alpha^2 \beta^2) \ell_{Pl}^4}{(2\delta x)^4} + \frac{(10\alpha^4 \beta + 10\alpha^2 \beta^3 + \beta^5) \ell_{Pl}^5}{(2\delta x)^5} \\ & + \sum_{d=3} \left[\frac{f_{2d}(\alpha\beta) \ell_{Pl}^{2d}}{(2\delta x)^{2d}} + \frac{f_{2d+1}(\alpha\beta) \ell_{Pl}^{2d+1}}{(2\delta x)^{2d+1}} \right]. \quad (299.3) \end{aligned}$$

۲۱.۳ ترمودینامیک سیاهچاله

آنتروپی و دمای سیاهچاله شوارتزشیلد بترتیب به شکل زیر ارائه می شود [۶۶-۷۰]

$$S_{BH} = \frac{A_{BH}}{4\ell_{Pl}^2}, \quad (300.3)$$

که A_{BH} و M_{BH} بترتیب مساحت و جرم سیاهچاله هستند

$$T_{BH} = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}}, \quad (301.3)$$

حال اجازه دهید فرض کنیم که افق رویداد سیاهچاله یک فوتون با انرژی dE را جذب یا ساطع می کند. ما می توانیم انرژی این ذره را با عدم قطعیت در تکانه مشخص کنیم و اگر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را در مکان اعمال کنیم افزایش یا کاهش دمای سیاهچاله به صورت زیر بدست می آید.

$$dT_{BH} = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}^2} dM = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}^2} \delta p \approx \frac{M_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}^2} \frac{1}{2\delta x}, \quad (302.3)$$

با در نظر گرفتن (۳۰۲.۳) در می یابیم که افزایش یا کاهش دمای سیاهچاله در چارچوب $DSR-GUP$ اثر دارد.

$$dT_{DSR-GUP} \approx \frac{M_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}^2} \frac{1}{2\delta x} f_{DSR-GUP}(\delta x) \approx f_{DSR-GUP}(\delta x) dT_{BH}. \quad (303.3)$$

ما می دانیم که در مجاورت افق سیاهچاله، عدم قطعیت در مکان فوتون ساطع شده دو برابر شعاع شوارتزشیلد است. سپس با استفاده از تعریف شعاع شوارتزشیلد و دمای سیاهچاله بدست می آوریم.

$$\delta x \approx 2r_s = 4M_{BH} = \frac{\ell_{Pl} M_{Pl}}{2\pi T_{BH}}, \quad (304.3)$$

توجه کنید که اگر $\delta x_{min} = 2(r_s)_{min} = 4M_{min}$ انتخاب کنیم و از معادله ی (۲۹۷.۳) استفاده می کنیم سپس خواهیم داشت:

$$(r_s)_{min} = (2\alpha + \beta) \frac{\ell_{Pl}}{4}, \quad M_{min} = (2\alpha + \beta) \frac{M_{Pl}}{8}. \quad (305.3)$$

با جایگذاری δx از معادله ی (۳۰۴.۳) و با استفاده از بسط $f_{DSR-GUP}(\delta x)$ و انتگرال گیری داریم:

$$T_{DSR-GUP} = T_{BH} + \frac{\pi\beta}{2M_{Pl}^2} T_{BH}^2 + \frac{\pi^2(\alpha^2 + \beta^2)}{3M_{Pl}^3} T_{BH}^3 + \frac{\pi^3(3\alpha^2\beta + \beta^3)}{4M_{Pl}^4} T_{BH}^4 + (306.3)$$

$$+ \frac{\pi^4(2\alpha^4 + \beta^4 + 6\alpha^2\beta^2)}{5M_{Pl}^5} T_{BH}^5 + \frac{\pi^5(10\alpha^4\beta + 10\alpha^2\beta^3 + \beta^5)}{6M_{Pl}^6} T_{BH}^6 + (307.3)$$

$$+ \sum_{d=3} \left[\frac{\pi^{2d} f_{2d}(\alpha\beta)}{(2d+1)M_{Pl}^{2d}} T_{BH}^{(2d+1)} + \frac{\pi^{(2d+1)} f_{2d+1}(\alpha\beta)}{(2d+2)M_{Pl}^{(2d+1)}} T_{BH}^{(2d+2)} \right] + \text{Const.}$$

که ثابت انتگرال گیری میتواند تابعی از α و β باشد. با استفاده از معادله ی (۳۰۱.۳) می توانیم $T_{DSR-GUP}$ را بعنوان یک تابع از جرم سیاهچاله بنویسیم.

$$T_{DSR-GUP} = \frac{1}{8\pi} \frac{M_{Pl}^2}{M_{BH}} + \frac{\beta}{2 \times 8^2 \pi} \frac{M_{Pl}^3}{M_{BH}^2} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{3 \times 8^3 \pi} \frac{M_{Pl}^4}{M_{BH}^3} + \frac{(3\alpha^2\beta + \beta^3)}{4 \times 8^4 \pi} \frac{M_{Pl}^5}{M_{BH}^4}$$

$$+ \frac{(2\alpha^4 + \beta^4 + 6\alpha^2\beta^2)}{5 \times 8^5 \pi} \frac{M_{Pl}^6}{M_{BH}^5} + \frac{(10\alpha^4\beta + 10\alpha^2\beta^3 + \beta^5)}{6 \times 8^6 \pi} \frac{M_{Pl}^7}{M_{BH}^6}$$

$$+ \sum_{d=3} \left[\frac{f_{2d}(\alpha\beta)}{(2d+1)8^{(2d+1)}\pi} \frac{M_{Pl}^{(2d+2)}}{M_{BH}^{(2d+1)}} + \frac{f_{2d+1}(\alpha\beta)}{(2d+2)8^{(2d+2)}\pi} \frac{M_{Pl}^{(2d+3)}}{M_{BH}^{(2d+2)}} \right] + \text{Const.}$$

(۳۰۸.۳)

اگر در نظر بگیریم که $\text{Const} = 0$ نتیجه ای موافق با معادله ی (۳۰۱.۳) برای جرم های بزرگ خواهیم داشت که بعنوان تابعی از جرم سیاهچاله است. در چارچوب GUP دما بزرگتر از حالت عادی است در حالیکه در $DSR - GUP$ بدلیل $\beta < 0$ کمتر است. این نتیجه ای از عبارت خطی در طول پلانک در رابطه ی عدم قطعیت اصلاح شده است که باعث پایداری سیاهچاله بخصوص با جرم کم می شود.

در اینجا ما آنتروپی را برای محاسبه می کنیم همانطور که در مطلب بالا اشاره شد، انتشار یا جذب یک فوتون، مساحت سیاهچاله و آنتروپی آن را تغییر می دهد. با استفاده از معادله ی (۳۰۰.۳) و $TdS = dE$ داریم:

$$dA = \frac{4}{T} dE. \quad (309.3)$$

اگر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را در نظر بگیریم:

$$dA_{BH} = \frac{4}{T} \frac{1}{2\delta x}. \quad (310.3)$$

در چارچوب $DSR - GUP$ این معادله به معادله ی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} dA_{DSR-GUP} &= \frac{\Upsilon}{T} \frac{1}{\Upsilon \delta x} f_{DSR-GUP}(\delta x) \\ &= dA_{BH} f_{DSR-GUP}(\delta x) \end{aligned} \quad (311.3)$$

حال با استفاده از $\delta x \approx 2r_s = 2\left(\frac{A_{BH}}{\Upsilon\pi}\right)^{\frac{1}{\Upsilon}}$ و قرار دادن در معادله ی (۳۱۱.۳) و انتگرال گیری از آن، نتیجه می دهد.

$$A_{DSR-GUP} = A_{BH} + (\pi)^{\frac{1}{\Upsilon}} \beta \ell_{Pl} (A_{BH})^{\frac{1}{\Upsilon}} + \pi \frac{(\alpha^{\Upsilon} + \beta^{\Upsilon}) \ell_{Pl}^{\Upsilon}}{\Upsilon} \ln A_{BH} - (\pi)^{\frac{\Upsilon}{\Upsilon}} \frac{(\Upsilon\alpha^{\Upsilon}\beta + \beta^{\Upsilon}) \ell_{Pl}^{\Upsilon}}{\Upsilon} (A_{BH})^{-\frac{1}{\Upsilon}} \quad (312.3)$$

$$- \pi^{\Upsilon} \frac{(\Upsilon\alpha^{\Upsilon} + \beta^{\Upsilon} + \Upsilon\alpha^{\Upsilon}\beta^{\Upsilon}) \ell_{Pl}^{\Upsilon}}{16} (A_{BH})^{-1} - (\pi)^{\frac{\Upsilon}{\Upsilon}} \frac{(1\circ\alpha^{\Upsilon}\beta + 1\circ\alpha^{\Upsilon}\beta^{\Upsilon} + \beta^{\Upsilon}) \ell_{Pl}^{\Upsilon}}{48} (A_{BH})^{-\frac{\Upsilon}{\Upsilon}} \quad (313.3)$$

$$- \sum_{d=3} \left[\frac{\pi^d f_{\Upsilon d}(\alpha\beta) \ell_{Pl}^{\Upsilon d}}{(d-1)\Upsilon^{\Upsilon d}} (A_{BH})^{-d+1} + \Upsilon \frac{\pi^{\frac{\Upsilon d+1}{\Upsilon}} f_{\Upsilon d+1}(\alpha\beta) \ell_{Pl}^{\Upsilon d+1}}{(\Upsilon d-1)\Upsilon^{\Upsilon d+1}} (A_{BH})^{-\frac{\Upsilon d-1}{\Upsilon}} \right] + \text{Const}, \quad (314.3)$$

که ثابت انتگرال گیری می تواند تابعی از α و β باشد. با استفاده از رابطه ی بکنشتاین-هاوکینگ برای آنروپی، از معادله ی (۳۰۰.۳) می توانیم آنروپی $DSR - GUP$ را بعنوان تابعی از جرم سیاهچاله محاسبه می کنیم.

$$S_{DSR-GUP} = \frac{\Upsilon\pi M_{BH}^{\Upsilon}}{M_{Pl}^{\Upsilon}} + \pi\beta \frac{M_{BH}}{M_{Pl}} + \frac{\pi}{\lambda} (\alpha^{\Upsilon} + \beta^{\Upsilon}) \ln \frac{M_{BH}}{M_{Pl}} - \frac{\pi}{64} (\Upsilon\alpha^{\Upsilon}\beta + \beta^{\Upsilon}) \frac{M_{Pl}}{M_{BH}} \quad (315.3)$$

$$- \frac{\pi}{1024} (\Upsilon\alpha^{\Upsilon} + \beta^{\Upsilon} + \Upsilon\alpha^{\Upsilon}\beta^{\Upsilon}) \frac{M_{Pl}^{\Upsilon}}{M_{BH}^{\Upsilon}} - \frac{\pi}{12288} (1\circ\alpha^{\Upsilon}\beta + 1\circ\alpha^{\Upsilon}\beta^{\Upsilon} + \beta^{\Upsilon}) \frac{M_{Pl}^{\Upsilon}}{M_{BH}^{\Upsilon}} \quad (316.3)$$

$$- \sum_{d=3} \left[\frac{\pi}{\Upsilon^{\Upsilon d-\Upsilon}} \frac{f_{\Upsilon d}(\alpha\beta)}{(d-1)} \left(\frac{M_{Pl}}{M_{BH}}\right)^{\Upsilon d-\Upsilon} + \frac{\pi}{\Upsilon^{\Upsilon d}} \frac{f_{\Upsilon d+1}(\alpha\beta)}{(\Upsilon d-1)} \left(\frac{M_{Pl}}{M}\right)^{\Upsilon d-1} \right] + \text{Const}. \quad (317.3)$$

فصل ۴

مطالعه ی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته بر اساس جبر هایزنبرگ

۱.۴ بررسی تحول زمانی در حضور پتانسیل های مختلف

مطالعات در نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی منجر به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP) می شود و وجود یک طول حداقل اساسی را نشان می دهد که ، همانطور که ثابت شد ، می تواند از جبر (هایزنبرگ) تغییر شکل یافته به دست آید . [۵۸] اخیرا توجه بسیاری به مطالعات سیستم های مختلف شده است . در فضایی با یک جبر (هایزنبرگ) که در نظر گرفته می شود در سطح پدیده شناسی ماهیت کوانتومی فضا وجود دارد . این کارها عبارتند از : تعداد زیادی از تحقیقات در زمینه نظریه ریسمان انجام شد . گرانش کوانتومی که منجر به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP می شود .

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{\lambda} \left(\frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right) \quad (1.4)$$

و پیشنهاد وجود یک طول کمینه در این جبر $\Delta X_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}$ که از مرتبه ی طول پلانک $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1/6 \times 10^{-35} \text{m}$ است. ثابت شد که حداقل طول را می توان از اصلاح درجه دوم جبر هایزنبرگ بدست آورد. [۷۳، ۷۲]

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2). \quad (2.4)$$

در حد $\hbar \rightarrow 0$ جابجاچه های مکانیک کوانتومی برای عملگرها براکت پواسون با متغیرهای کلاسیک متناظر جایگزین می شود.

$$\frac{1}{i\hbar}[X, P] \rightarrow \{X, P\}, \quad (۳.۴)$$

و به این شکل هم می توان نوشت:

$$\{X, P\} = (1 + \beta P^2). \quad (۴.۴)$$

همچنین اشاره می کنیم که از نظر تاریخی اولین جبر مجرد از این نوع در مورد نسبیتی توسط اسنایدر در سال ۱۹۴۷ پیشنهاد شد [۷۳]. اما تنها پس از تحقیقات در زمینه نظریه ریسمان و جاذبه کوانتومی، علاقه قابل توجهی به مطالعه خواص فیزیکی سیستم های کلاسیک و کوانتومی در فضا با تغییر جبر ظاهر شد. مشاهده این نکته که GUP را می توان از جبر تغییر شکل یافته ی (هایزنبرگ) به دست آورد، که این جبر امکان مطالعه تاثیر حداقل طول بر خصوصیات سیستم های فیزیکی در سطح کوانتومی و نیز در مورد کلاسیک را فراهم می کند. توجه داشته باشید که تغییر شکل جبر هایزنبرگ نه تنها فنی را برای حل معادلات مربوطه به ارمغان می آورد از طرفی مشکلاتی را نیز به همراه دارد. یکی از آنها نقض اصل هم ارزی در فضا با حداقل طول است [۷۴].

۲.۴ بررسی سقوط آزاد ذرات در میدان گرانشی یکنواخت تحت

اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

در این بخش هامیلتونی یک ذره را در نظر می گیریم (هامیلتونی یک جسم که به صورت یک ذره نقطه ای در نظر می گیریم) با جرم m که در یک میدان گرانشی یکنواخت قرار دارد به شکل زیر است [۷۵]

$$H = \frac{P^2}{2m} - mgX, \quad (۵.۴)$$

میدان گرانشی مشخص میشود با فاکتور g که در طول محور x فرض شده است. معادلات هامیلتونی حرکت در فضا با براکت های پواسون دگرگون شده به شرح زیر است.

$$\dot{X} = \{X, H\} = \frac{P}{m}(1 + \beta P^2), \quad (۶.۴)$$

$$\dot{P} = \{P, H\} = mg(1 + \beta P^2). \quad (۷.۴)$$

ما شرایط صفر برای مکان و تکانه، یعنی $X = 0$ و $P = 0$ را در $t = 0$ اعمال میکنیم. این معادلات را می توان به راحتی حل کرد. برای معادله ی دوم به این شکل می نویسیم:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} mgt). \quad (۸.۴)$$

و برای معادله ی اول سرعت را به این شکل بدست می آوریم:

$$\dot{X} = \frac{1}{m\sqrt{\beta}} \frac{\tan(\sqrt{\beta} mgt)}{\cos^2(\sqrt{\beta} mgt)} \quad (۹.۴)$$

از طرفی با در نظر گرفتن شروطی که اعمال کردیم اگر P بدست آمده را در معادله سرعت قرار دهیم و انتگرال بگیریم بصورت زیر معادله ی مکان را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$X = \frac{1}{\sqrt{gm^2\beta}} \tan^2(\sqrt{\beta} mgt). \quad (۱۰.۴)$$

می توان ثابت کرد که حرکت دوره ای با دوره $T = \frac{\pi}{m\sqrt{\beta}g}$ است. ذرات از $X = 0$ حرکت می کنند به $X = \infty$ ، سپس از ∞ انعکاس می یابد و در جهت مخالف به $X = 0$ حرکت می کند. اما از لحاظ فیزیکی این راه حل فقط برای زمان $t \ll T$ درست است که سرعت ذرات بسیار کوچکتر از سرعت نور است. در موارد دیگر، مکانیک نسبیتی باید مورد توجه قرار گیرد. آموزنده است که نتایج را برای سرعت و هماهنگی در اولین مرتبه بیش از β بنویسیم

$$\dot{X} = gt \left(1 + \frac{4}{3} \beta m^2 g^2 t^2 \right), \quad (۱۱.۴)$$

$$X = \frac{gt^2}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \beta m^2 g^2 t^2 \right). \quad (۱۲.۴)$$

در حده $\beta \rightarrow 0$ نتایج خوبی به دست می آید.

$$\dot{X} = gt, \quad X = \frac{gt^2}{2}, \quad (۱۳.۴)$$

جایی که ویژگی های سینماتیک مانند سرعت و موقعیت یک ذره آزاد در حال فروپاشی تنها به موقعیت اولیه و سرعت ذره بستگی دارند و به ترکیب و جرم ذره وابسته نیستند. همانطور که از فضای تغییر شکل می بینیم، مسیر توده نقطه در میدان گرانشی اگر فرض کنیم که پارامتر تغییر شکل برای همه اجسام یکسان است، بستگی به جرم ذره دارد.

۱۰.۲.۴ انرژی جنبشی وابسته به پارامتر تغییر شکل

ما این مورد را در نظر می گیریم که هر ذره سیستم با همان سرعت به عنوان کل سیستم حرکت می کند. اجازه دهید انرژی جنبشی را به صورت تابع سرعت بازنویسی کنیم. از رابطه سرعت و شتاب در تقریب اول بیش از β پیدا کنید

$$P = m\dot{X}(1 - \beta m^2 \dot{X}^2). \quad (14.4)$$

سپس انرژی جنبشی به عنوان تابع سرعت در تقریب مرتبه اول بیش از β خوانده می شود

$$T = \frac{m\dot{X}^2}{2} - \beta m^3 \dot{X}^4. \quad (15.4)$$

۲۰.۲.۴ بررسی سقوط آزاد ذرات در میدان گرانشی یکنواخت تحت اصل عدم قطعیت بسط یافته

در این قسمت با استفاده از معرفی اصل عدم قطعیت بسط یافته به صورت زیر قصد داریم تحت جبر هایزنبرگ با استفاده از هامیلتونی یک ذره ی آزد که معادله ای برای مکان بدست می آوریم. از این جهت اصل عدم قطعیت بسط یافته را بصورت زیر معرفی می کنیم.

$$[X, P] = i\hbar(1 + \alpha^2 X^2) \quad (16.4)$$

سپس از نمایش در فضای مکان برای جبر بیان شده استفاده می کنیم و نمایشی بصورت زیر ارائه می دهیم.

$$\hat{X} = \frac{1}{\alpha} \tan(\alpha x), \quad \hat{P} = p \quad (17.4)$$

همچنین می توان نمایش در فضای تکانه را بصورت زیر ارائه داد

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P} = i\hbar(1 + \alpha^2 X^2)\partial_x \quad (18.4)$$

سپس معادلات تحول زمانی مکان و تکانه را تحت جبر هایزنبرگ با هامیلتونی یک ذره ی آزاد بشکل زیر بدست می آوریم

$$\dot{X} = \frac{1}{i\hbar} [X, H] = (1 + \alpha^2 X^2) \frac{P}{m} \quad (19.4)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{i\hbar} [P, H] = 0 \implies P = 0 \quad (20.4)$$

سپس با انتگرال گیری از معادله ی (۱۹.۴) خواهیم داشت

$$\int \frac{dX}{(1 + \alpha^2 X^2)} = \int \frac{P}{m} dt \quad (21.4)$$

پس معادله ی تعمیم یافته ای را برای مکان تحت اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ی (۱۶.۴) بصورت زیر دست می آوریم.

$$X = \frac{1}{\alpha} \tan\left(\frac{P}{m} \alpha t\right) \quad (22.4)$$

در نتیجه با استفاده از بسط tan بصورت زیر بدست می آوریم

$$X = \frac{P}{m} t \left(1 + \frac{\alpha^2}{3} \left(\frac{P}{m} t\right)^2\right) \quad (23.4)$$

از طرفی معادله اصل عدم قطعیت بسط یافته ای را به صورت زیر معرفی می کنیم.

$$[X, P] = i\hbar(1 - \alpha^2 X^2) \quad (24.4)$$

سپس نمایش در فضای تکانه را برای جبر معرفی شده بصورت زیر می نویسیم.

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P} = \frac{\hbar}{i}(1 - \alpha^2 X^2) \partial_x \quad (25.4)$$

و معادلات تحول زمانی مکان و تکانه را تحت جبر هایزنبرگ با هامیلتونی یک ذره ی آزاد بدست می آوریم.

$$\dot{X} = \frac{1}{i\hbar} [X, H] = (1 - \alpha^2 X^2) \frac{P}{m} \quad (26.4)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{i\hbar} [P, H] = 0 \implies P = const \quad (27.4)$$

سپس با انتگرال گیری از معادله ی (۲۶.۴) خواهیم داشت

$$\int \frac{dX}{1 - \alpha^2 X^2} = \int \frac{P}{m} \alpha dt \quad (28.4)$$

در نتیجه برای جبر اصل عدم قطعیت بسط یافته در (۲۴.۴) معادله ی مکان بسط یافته ای را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$X = \frac{1}{\alpha} \tanh\left(\frac{P}{m}\alpha t\right) \quad (29.4)$$

سپس با استفاده از بسط \tanh به شکل زیر خواهیم داشت

$$X = \frac{P}{m}t\left(1 - \frac{\alpha}{3}\left(\frac{P}{m}t\right)^2\right) \quad (30.4)$$

همچنین با معرفی فرم دیگری از اصل عدم قطعیت بسط یافته به شکل زیر خواهیم داشت.

$$[X, P] = i\hbar\sqrt{1 - \alpha^2 X^2} \quad (31.4)$$

و برای جبر بیان شده نمایشی بصورت زیر را ارائه می دهیم.

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P} = \frac{\hbar}{i}\sqrt{1 - \alpha^2 X^2}\partial_x \quad (32.4)$$

و معادلات تحول زمانی مکان و تکانه را تحت هامیلتونی یک ذره ی آزاد بصورت زیر بدست می آوریم

$$\dot{X} = \frac{1}{i\hbar}[X, H] = \sqrt{1 - \alpha^2 X^2}\frac{P}{m} \quad (33.4)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{i\hbar}[P, H] = 0, \quad P = const \quad (34.4)$$

سپس با انتگرال گیری از معادله ی (۳۲.۴) با توجه به اینکه تکانه ثابت است خواهیم داشت

$$\int \frac{dX}{\sqrt{1 - \alpha^2 X^2}} = \int \frac{P}{m}\alpha dt \quad (35.4)$$

در نتیجه توسط جبر هایزنبرگ با استفاده از هامیلتونی با پتانسیل سقوط آزاد و با استفاده از جبر معرفی شده در معادله ی (۳۰.۴) معادله ی مکان تغییر شکل یافته ای را برای این جبر بصورت زیر بدست می آوریم.

$$X = \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{P}{m}\alpha t\right) \quad (36.4)$$

سپس با استفاده از بسط \sin بصورت زیر بدست می آوریم

$$X = \frac{P}{m}t\left(1 - \frac{\alpha}{6}\left(\frac{P}{m}t\right)^2\right) \quad (37.4)$$

سپس با معرفی نوع دیگری از اصل عدم قطعیت بسط یافته بشکل زیر مانند مسیری که قبلا طی شد تحت هامیلتونی معرفی شده قصد پیدا کردن معادله ای بسط یافته تحت جبر معرفی شده برای مکان داریم.

$$[X, P] = i\hbar\sqrt{1 + \alpha^2 X^2} \quad (38.4)$$

نمایش معرفی شده برای جبر بالا به شکل زیر خواهد بود.

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P} = \frac{\hbar}{i}\sqrt{1 + \alpha^2 X^2}\partial_x \quad (39.4)$$

معادلات تحول زمانی تحت هامیلتونی معادله ی (۵.۴) به شکل زیر بدست می آیند.

$$\dot{X} = \frac{1}{i\hbar}[X, H] = \sqrt{1 + \alpha^2 X^2}\frac{P}{m} \quad (40.4)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{i\hbar}[P, H] = 0, \quad P = const \quad (41.4)$$

با انتگرال گیری از معادله ی (۳۸.۴) خواهیم داشت.

$$\int \frac{dX}{\sqrt{1 + \alpha^2 X^2}} = \int \frac{P}{m}\alpha dt \quad (42.4)$$

در نتیجه برای اصل عدم قطعیت بسط یافته ی معرفی شده در معادله ی (۳۶.۴) تحت جبر هایزنبرگ با پتانسیل سقوط آزاد معادله مکان بسط یافته ی به شکل زیر برای این جبر می یابیم.

$$X = \frac{1}{\alpha} \sinh\left(\frac{P}{m}\alpha t\right) \quad (43.4)$$

سپس با استفاده از بسط sinh بصورت زیر بدست می آوریم

$$X = \frac{P}{m}t\left(1 + \frac{\alpha}{6}\left(\frac{P}{m}t\right)^2\right) \quad (44.4)$$

در نهایت برای بررسی صحیح بودن معادلات تعمیمی بدست آمده برای مکان ذره با میل دادن پارامتر تعمیم یافتگی α به سمت صفر در معادلات (۲۳.۴) و (۳۰.۴) و (۳۷.۴) و (۴۴.۴) بصورت زیر معادله ی معمول مکان ذره را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$X = \frac{P}{m}t \quad (45.4)$$

۳.۴ معادله حرکت با استفاده از جبر هایزنبرگ برای GUP در فضای تکانه

با استفاده از معادله (۲.۴) بیان شده در این قسمت به بررسی معادله حرکت بدست آمده از طریق بررسی جبر هایزنبرگ با پتانسیل نوسانگر هارمونیک با استفاده از نمایش X و P که در زیر بیان شده می پردازیم:

$$\hat{P} = p \quad (۴۶.۴)$$

$$\hat{X} = i(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \quad (۴۷.۴)$$

پس هامیلتونی با پتانسیل نوسانگر به شکل زیر خواهد بود:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X^2 \quad (۴۸.۴)$$

با توجه به نمایش X و P و هامیلتونی بیان شده تحول زمانی مکان و تکانه به شکل زیر خواهد بود

$$\dot{X} = \frac{1}{i} [X, H] = (1 + \beta P^2) \frac{P}{m} \quad (۴۹.۴)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{i} [P, H] = -m \omega_0^2 X (1 + \beta P^2) \quad (۵۰.۴)$$

که با صفر قرار دادن پارامتر تعمیم یافتگی ($\beta \rightarrow 0$) بصورت زیر شاهد آن هستیم که در این حالت حدی به معادلات معمول دست می یابیم.

$$\dot{X} = \frac{P}{m} \quad (۵۱.۴)$$

$$\dot{P} = -m \omega_0^2 X \quad (۵۲.۴)$$

سپس بار دیگر با استفاده از جبر هایزنبرگ تحول زمانی \dot{P} را بصورت \ddot{P} بدست می آوریم:

$$\ddot{P} = \frac{1}{i} [\dot{P}, H] = -\omega_0^2 P (1 + \beta P^2) \quad (۵۳.۴)$$

که مشخصا در حد $\beta \rightarrow 0$ حالت حدی بدست خواهد آمد.

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P = 0 \quad (۵۴.۴)$$

اما با در نظر گرفتن پارامتر β معادله را به شکل زیر داریم:

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P + 2\beta\omega_0^2 P^3 = 0 \quad (55.4)$$

با حل این معادله و با در نظر گرفتن P برحسب ω بصورت زیر:

$$P = P_0 \cos(\omega t) \quad (56.4)$$

با جایگذاری این جمله در معادله (۲۵.۴) بصورت زیر داری:

$$-P_0 \cos(\omega t)\omega^2 + P_0 \cos(\omega t)\omega_0^2 + 2\beta P_0^3 \cos^3(\omega t)\omega_0^2 = 0 \quad (57.4)$$

از طرفی با استفاده از بسط $\cos^3(\omega t)$ و برابر با صفر قرار دادن آن به فرکانش تعمیم یافته زیر دست می یابیم [۱۸, ۱۹] مقاله:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta P_0^2 \omega_0^2)P_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{4}\beta P_0^3 \cos(3\omega t)\omega_0^2 = 0 \quad (58.4)$$

که

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{4}\beta P_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (59.4)$$

بطور واضح پیداست که با صفر قرار دادن پارامتر تعمیم یافتگی $\beta = 0$ معادله بالا منجر به روابط معمول $\omega^2 = \omega_0^2$ می شود.

سپس اجازه دهید فرکانش تعمیم یافته را با در نظر گرفتن مراتب بالاتر P بصورت $P_1 \cos(3\omega t)$ بررسی کنیم.

$$\begin{aligned} & -9P_1 \cos(3\omega t)\omega^2 - P_0 \cos(\omega t)\omega^2 + P_1 \cos(3\omega t)\omega_0^2 + P_0 \cos(\omega t)\omega_0^2 + 2\beta P_0^3 \cos^3(\omega t)\omega_0^2 + \\ & + 2\beta P_1^3 \cos^3(3\omega t)\omega_0^2 + 6\beta P_0^2 P_1 \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t)\omega_0^2 + 6\beta P_0 P_1^2 \cos^2(3\omega t) \cos(\omega t)\omega_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (60.4)$$

در این معادله از جملات ششم و هفتم و هشتم صرف نظر می کنیم و معادله را برحسب پارامتر $P_0 \cos(\omega t)$ و $\cos(3\omega t)$ مرتب می کنیم. سپس، معادله ی داخل پرانتز اول را برابر با صفر قرار داده و مقدار ω را

در معادله ی (۲۹.۴) مثل قبل بدست می آوریم.

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta P_0^2 \omega_0^2)P_0 \cos(\omega t) + (-9P_1 \omega^2 + P_1 \omega_0^2 + \frac{1}{4}\beta P_0^3 \omega_0^2) \cos(3\omega t) = 0 \quad (61.4)$$

سپس معادله ی داخل پرانتز دوم را برابر با صفر قرار داده و از آن P_1 را بدست می آوریم:

$$-9P_1 \omega^2 + P_1 \omega_0^2 + \frac{1}{4}\beta P_0^3 \omega_0^2 = 0 \quad (62.4)$$

$$P_1 = \frac{\beta P_0^3}{16} \quad (63.4)$$

در اینجا با داشتن مقدار P_0 و P_1 می توانیم تکانه ی P را که از جبر هایزنبرگ با استفاده از معادلات تعمیم یافته عدم قطعیت بدست آمده را به شکل زیر بنویسیم:

$$P(t) = P_0 \cos(\omega t) + \frac{\beta P_0^3}{16} \cos(3\omega t) \quad (64.4)$$

سپس با جایگذاری معادله ی قبل در معادله (۲۱.۴) معادله مکان حاصل از جبر هایزنبرگ در حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته را بدست می آوریم:

$$X(t) = \left(\frac{P_0}{m\omega} \sin(\omega t) + \frac{3\beta P_0^3}{4m\omega} \sin(\omega t) + \frac{5\beta P_0^3}{48m\omega} \sin(3\omega t) \right) + O(\beta^2) \quad (65.4)$$

این معادله ویژگی های دینامیکی سیستم را به ما می دهد.

۴.۴ معادله حرکت با استفاده از جبر هایزنبرگ برای GUP در

فضای مکان

در این قسمت می خواهیم فرکانس تعمیم یافتگی ناشی از معادله (۵.۴) را در فضای حالت با استفاده از نمایشی که برای این جبر در فضای حالت معرفی می شود بنویسیم. نمایش حالت بصورت زیر تعریف می شود

$$\hat{X} = x \quad (66.4)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} \frac{1}{i} \partial_x) \quad (۶۷.۴)$$

ما می توانیم با استفاده از بسط $\tan(\sqrt{\beta} \frac{1}{i} \partial_x)$ به شکل زیر معادله را حل کنیم:

$$\hat{P} = \frac{1}{i} \partial_x + \frac{\beta}{3} (\frac{1}{i} \partial_x)^3 \quad (۶۸.۴)$$

تحول زمانی جبر هایزنبرگ با استفاده از هامیلتونی نوسانگر هارمونیک بیان شده در قسمت قبل برای X و P به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{X} = \frac{1}{i} [X, H] = (1 + \beta P^2) \frac{P}{m} \quad (۶۹.۴)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{i} [P, H] = \frac{-m\omega_0^2}{\hbar} X \quad (۷۰.۴)$$

و همچنین \ddot{P} را بصورت زیر بیان میکنیم:

$$\ddot{P} = \frac{1}{i} [\dot{P}, H] = -\omega_0^2 P (1 + \beta P^2) \quad (۷۱.۴)$$

و معادله ای بصورت زیر حاصل می شود:

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P + \beta \omega_0^2 P^3 = 0 \quad (۷۲.۴)$$

سپس درمی یابیم که در حالت حدی $\beta \rightarrow 0$ معادلات به صورت معادلات عام قبل بدست می آیند.

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P = 0 \quad (۷۳.۴)$$

مانند قسمت قبل P را بصورت $P = P_0 \cos(\omega t)$ در نظر می گیریم و جایگزین می کنیم و فرکانش تعمیم یافته را به شکل زیر در فضای حالت بدست می آوریم:

$$\omega = \omega_0 (1 + \frac{3}{4} \beta P_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (۷۴.۴)$$

حالا با در نظر گرفتن جمله ای از مرتبه ی بالاتر P بصورت زیر خواهیم داشت:

$$P_1 = \frac{\beta P_0^3}{32} \quad (۷۵.۴)$$

$$P(t) = P_0 \cos(\omega t) + \frac{\beta P_0^3}{32} \cos(3\omega t) \quad (۷۶.۴)$$

حال با جایگذاری معادله ی بدست آمده در معادله (۳۹.۴) خواهیم داشت:

$$X(t) = \left(\frac{P_0}{m\omega}\right) \sin(\omega t) + \frac{\beta P_0^3}{4m\omega} \sin(\omega t) + \frac{\beta P_0^3}{32m\omega} \sin(3\omega t) + O(\beta^2) \quad (77.4)$$

معادله مکان بدست آمده ویژگی های دینامیکی سیستم را معرفی می کند. در اینجا معادله مکان و تکانه را با استفاده از جبر هایزنبرگ و اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در دو نمایش بدست آوردیم.

۵.۴ حل دقیق اصل عدم قطعیت تعمیم یافته از روش جبر هایزنبرگ در فضای مکان

هایلتونی یک ذره ی آزاد می تواند تحت نمایش مکان گفته شده در بخش های قبل تحت اصل عدم قطعیت تعمیم یافته بصورت زیر بیان شود [۷۷]

$$H = \frac{P_i^2}{2m} = \frac{1}{2m} \frac{p_i^2}{1 + \beta^2 p_k^2} \quad (78.4)$$

معادلات تحول زمانی مکان و تکانه تحت هایلتونی بیان شده با پتانسیل ذره ی آزاد بصورت زیر خواهد بود

$$\dot{x}_i = (1 + \beta^2 p_k^2) p_i, \quad \dot{p}_i = 0, \quad (79.4)$$

در می یابیم که روابط بین سرعت و تکانه خطی هستند اگرچه حل کلاسیکی بصورت $x_i = \alpha t + \beta$ و p_i است. سپس می توانیم هایلتونی را تحت پتانسیل نوسانگر هارمونیک در یک بعد به این صورت بنویسیم

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}. \quad (80.4)$$

برای یک ذره با جرم واحد معادلات تحول زمانی تحت جبر هایزنبرگ به شکل زیر بدست می آیند

$$\dot{x} = (1 + \beta^2 p^2) p, \quad \dot{p} = -\omega_0^2 (1 + \beta^2 p^2) x. \quad (81.4)$$

معادله تحول زمانی تکانه را می توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$\frac{d(\arctan \beta p)}{dt} = -\omega_0^2 \beta x. \quad (82.4)$$

سپس با تعریف $\bar{p} = \arctan \beta p$ و گرفتن مشتق زمانی دوباره از معادله تحول زمانی تکانه به صورت زیر داریم

$$\frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = -\omega_0^2 \frac{\sin \bar{p}}{\cos^3 \bar{p}} \quad (۸۳.۴)$$

که با انتگرال گیری از معادله ی بالا داریم

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \tan^2 \bar{p} = \text{const} = \omega_0^2 \beta^2 E \quad (۸۴.۴)$$

سپس اگر ثابت انتگرال گیری را از جنس E در نظر بگیریم و این انرژی را متناظر با انرژی کل حاصل از یک نوسانگر که در پتانسیل موهتر $V = \omega_0^2 \tan^2 \bar{p}$ در حال حرکت است در نظر بگیریم خواهیم داشت. با انتگرال گیری از معادله ی (۵۴.۴) داریم

$$\sin \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 E} \omega_0 t \right) = \sqrt{\frac{1 + 2\beta^2 E}{2\beta^2 E}} \sin \bar{p} \quad (۸۵.۴)$$

همچنین

$$p = \frac{\sqrt{2E} \sin \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)}{\sqrt{1 + 2\beta^2 E} \cos^2 \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)} \quad (۸۶.۴)$$

همچنین از معادله ی (۵۱.۴) می توانیم x را بصورت زیر بدست آوریم

$$x = \frac{\sqrt{2E(1 + 2\beta^2 E)} \cos \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)}{\omega_0 \sqrt{1 + 2\beta^2 E} \cos^2 \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)} \quad (۸۷.۴)$$

سپس نوسانگر را برای $\beta^2 E = 2$ در نظر می گیریم که فرکانس ω وابسته به انرژی از مرتبه $\beta^2 E$ است به صورت $\omega = \sqrt{1 + 2\beta^2 E} \omega_0$. سپس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ای را حل می کنیم که پارامتر تعمیم یافته ی آن ضریب منفی داشته باش یعنی $-\beta^2 \rightarrow \beta^2$ سپس طبق محاسبات گذشته خواهیم داشت.

$$\frac{d(\bar{p})}{dt} = -\omega_0^2 \beta x, \quad (۸۸.۴)$$

سپس مانند قبل از تغییر متغیر $\bar{p} = \operatorname{arctanh} \beta p$ استفاده ی کنیم

$$\frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = -\omega_0^2 \frac{\sinh \bar{p}}{\cosh^3 \bar{p}} \quad (۸۹.۴)$$

با انتگرال گیری از معادله قبل خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{p}}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \tanh^2 \bar{p} = \text{const} = \omega_0^2 \beta^2 E, \quad (۹۰.۴)$$

که اگر ثابت انتگرال گیری را از جنس E انتخاب کنیم که این انرژی متناظر با انرژی کل یک نوسانگر در پتانسیل $V = \omega_0^2 \tanh^2 \beta p$ است، سپس به صورت زیر با انتگرال گیری از معادلات قبل داریم

$$p = \frac{\sqrt{2E} \sin \left(\sqrt{1 - 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)}{\sqrt{1 - 2\beta^2 E} \cos^2 \left(\sqrt{1 - 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)}, \quad (۹۱.۴)$$

و

$$x = \frac{\sqrt{2E(1 - 2\beta^2 E)} \cos \left(\sqrt{1 - 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)}{\omega \sqrt{1 - 2\beta^2 E} \cos^2 \left(\sqrt{1 - 2\beta^2 E} \omega_0 t \right)}. \quad (۹۲.۴)$$

فصل ۵

بررسی دمای آنروح و خواص ترمودینامیکی سیاهچاله شوارتسشیلد براساس اصل عدم قطعیت

در این بخش ابتدا با ارائه مفاهیم مختصری از دمای آنروح^۱ و سیاه چاله شوارتسشیلد^۲ به بررسی حالات تعمیم یافته ی دمای آنروح برای سیاهچاله شوارتسشیلد در حضور اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و حالات تعمیم یافته ی آن می پردازیم [۷۸]

۱.۵ سیاهچاله شوارتسشیلد

۱.۱.۵ تاریخچه

اصطلاح سیاهچاله توسط جان ویلر^۳، فیزیکدان آمریکایی در سال ۱۹۶۹ سر زبان ها افتاد، در آن زمان دو نظریه در مورد نور وجود داشت: ذره ای و موجی. که امروزه در فیزیک کوانتوم می دانیم که هر دو نوع نظریه درست هستند و نور خاصیت موجی-ذره ای دارد. اگر نور را متشکل از ذرات بدانیم، انتظار

¹Unruh

²Schwarzschild

³Jan Viler

می رود که گرانش بر نور تاثیر بگذارد ولی تاثیر گرانش بر نور متشکل از ذرات روشن نبود چون در آغاز مردم سرعت نور را بینهایت می دانستند، برین عقیده بودند که گرانش تاثیری بر نور ندارد، ولی اوله کریستنسن رومر در سال ۱۹۷۶ با بررسی حرکت اقمار مشتری و دوره تناوب پیدایش آنها ثابت کرد نور با سرعت محدود حرکت می کند و این به معنای تاثیر گذاشتن گرانش بر نور است. سپس در سال ۱۷۸۳ جان میچل^۴ با تکیه بر مفهوم ذره ای نور و سرعت محدود آن، ستاره ای با میدان گرانشی قدرتمندی را توصیف کرد که حتی نور نیز نمی تواند از آن بگریزد، برای پی بردن به چگونگی تولد سیاهچاله ها باید کمی درباره ی ستارگان بدانیم، وقتی مقادیر زیادی گاز (عمدتا هیدروژن) تحت تاثیر گرانش خود متراکم می شود شروع به فروپاشی می کند ستاره بوجود می آید. هنگام انقباض ستاره، اتم ها بیشتر و بیشتر به هم برخورد می کنند و داغ می گردند. این حرارت و برخورد اتم های هیدروژن باعث ایجاد سلسله واکنش های همجوشی هسته ای می شود. اتم های هیدروژن به یکدیگر برخورد می کنند و اتم هلیوم را تشکیل می دهند. این واکنش ها حرارت و فشار لازم برای اینکه ستاره در مقابل فروپاشی گرانشی خود تاب آورد را فراهم می کند، اما سرانجام سوخت هر ستاره ای تمام می شود. نکته جالب و تناقض آمیز این است که سوخت بیشتر به معنای جرم بیشتر و جرم بیشتر به معنای نیروی گرانشی بیشتر است و ستاره برای جلوگیری از فروپاشی باید سوخت بیشتری بسوزاند و داغ تر باشد، پس سوخت آن زودتر تمام می شود. با همجوشی هسته ای در هسته ی ستاره عناصر سنگین تری مانند آهن بوجود می آید. ولی آهن نمی تواند به راحتی در واکنش هسته ای شرکت کند، در نتیجه با اتمام سوخت اولیه، ستاره به تدریج سردتر می شود. اما بعد از این چه اتفاقی می افتد؟ بعد از انتشار نسبت عام انیشتین در سال ۱۹۱۵، کارل شوارتسشیلد^۵ اولین راه حل را برای میدان گرانشی متناظر یک جرم نقطه ای و کروی ارائه داد که نشان گر محتمل بودن وجود سیاه چاله ها از دیدگاه نظری است. سپس شوارتسشیلد در مقاله دومش نشان داد که در اطراف یک ستاره غول پیکر، کره جادویی وجود دارد، با ویژگی های عجیب. این کره جادویی در واقعیت مرزی است که پس از عبور از آن بازگشتی در کار نخواهد بود، حتی نور نیز نمی تواند از این کره بگریزد، گرانش آنقدر قوی است که هر چیزی سریعا به درون ستاره کشیده می شود. او قطر این کره جادویی که قطر شوارتسشیلد نام دارد محاسبه کرد، بطور مثال این قطر برای جرمی معادل با جرم خورشید حدودا ۳ کیلومتر است، برای زمین نیز ۱ سانتیمتر. تقسیم بندی سیاهچاله ها از نظر جرم به ۴ دسته ی سیاهچاله های بسیار پرجرم (جرمی بین میلیون ها تا میلیاردها برابر جرم

⁴John Michell

⁵karl Schwarzschild

خورشید)، سیاهچاله های با جرم متوسط (جرمی هزاران برابر جرم خورشید)، سیاهچاله های جرم ستاره ای (جرمی بین ۳ تا ۱۵ برابر جرم خورشید، میکروسیاهچاله هاست. افق رویداد سیاهچاله محدوده ای از سیاهچاله است که هیچ چیز حتی نور نیز نمی تواند از آن بگریزد، به همین دلیل است که افق رویداد محدوده سیاهی است، افق رویداد نباید به شکل یک سطح جامد یا مادی تصور شود، افق رویداد تنها مرزی را مشخص می کند که از آنجا به بعد نور نیز نمی تواند از میدان گرانشی سیاهچاله فرار کند، میدان گرانشی سیاهچاله بیرون از افق رویداد، مشابه میدان گرانشی هر جسم کروی و متقارن دیگری است. فقط بسیار شدیدتر از آن. این بدان معناست که تصور عامه از سیاهچاله به عنوان یک جسم مطلقا مکنده نادرست است و ماده می تواند مدار گرانشی خود به دور سیاهچاله را حفظ کند، البته به شرطی که خارج از فوتون کره باشد. فوتون کره یک سیاهچاله غیرچرخشی محدوده ای کروی و با ضخامت صفر است که فوتون هایی که در طول مسیر مماس بر این کره حرکت می کنند در مداری به دور سیاهچاله به دام انداخته می شوند، این بدان معناست که فوتون ها با حرکت مماس بر این کره می توانند به دور بچرخند و از افتادن به آن امتناع بورزند، شعاع فوتون کره در یک سیاهچاله غیرچرخشی $1/5$ برابر شعاع افق رویداد (شعاع شوارتسشیلد) سیاهچاله است. البته فوتون ها به دو دلیل به مدت طولانی نمی توانند در این مدار حرکت کنند. ۱- به احتمال زیاد فوتون ها با دیگر موادی که در حلقه تجمعی قرار دارند برخورد می کنند که یا جذب می شوند و یا پراکنده. ۲- این مدار از لحاظ دینامیکی ناپایدار است و کوچکترین انحرافات از این مسیر دایره ای می تواند خیلی سریع به انحرافات بزرگ تر منجر شود و به سقوط یا گریز فوتون ها می انجامد. تکینگی سیاهچاله یکی از ویژگی های عجیب سیاهچاله هست، ستاره ای که در حال فروپاشی است و به سیاهچاله تبدیل می شود را در نظر بگیرید، می دانیم براساس نسبیت عام انیشتین این ستاره بطور کامل در ناحیه ای به حجم صفر فشرده می شود. در این نقطه بیشتر معادلات فیزیکی، از جمله معادلات نسبیت کارایی خود را از دست می دهند و به همین دلیل است که این نقطه بینهایت چگال با حجم صفر را تکینگی می نامند.

۲.۱.۵ حل معادله انیشتین و بدست آوردن شعاع شوارتسشیلد

در این بخش هدف بیان یک مفهوم کامل از راه حل شوارتسشیلد است، شاید بهتر باشد اینطور شروع کنیم که راه حل متریک برای فضا-زمان خارج از یک جسم کروی به شعاع R و جرم M چطور است. برای شروع پاسخ به این مسئله ما متریک فضا-زمان را در مختصات کروی و به صورت کلی بررسی

خواهیم کرد [۷۹]

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.5)$$

که اعضای غیر صفر آن به شکل زیر هستند و شاخص های i, j, k همان شاخص های فضایی (r, θ, ϕ) هستند.

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

می توان شکل کلی متریک را به صورت زیر بیان کرد و همچنین با توجه به $t = 0, r = 1, \theta = 2, \phi = 3$

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = U(r) dt^2 - V(r) dr^2 - W r^2 d\theta^2 - X r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.5)$$

در معادله بالا ضرایب U و V و همچنین W و X باید تعیین شود که می توان با شرایط مسئله این ضرایب را محدود کرد.

۱. شرط اول این است که اگر تقارن کروی داشته باشیم تابع نباید به θ و ϕ بستگی داشته باشد و همچنین قسمت زاویه ای متریک باید $W = X$ باشد در حقیقت .

۲. $W = X = 1$ شرط دیگر این است که حل مسئله با شرط در نظر گرفتن در خلا باشد و خمیدگی یا انرژی در این مسیر حائز اهمیت نیست.

با شرایط گفته شده متریک به صورت زیر بدست می آید که ثابت غیر صفر آن نیز در زیر آورده شده اند. [۶۶]

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = U(r) dt^2 - V(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.5)$$

$$g_{00} = U, \quad g_{11} = -V, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (5.5)$$

تانسور متریک متقارن است و دارای ویژگی زیر است:

$$g_\mu^\nu = \sum \sum g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \equiv 4 \quad (6.5)$$

از طرفی می توان تانسور متریک را با توجه با شاخص های گفته شده که فقط معکوس باشند به صورت زیر نوشت:

$$g^{00} = \frac{1}{U}, \quad g^{11} = \frac{-1}{V}, \quad g^{22} = \frac{-1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (7.5)$$

هدف حل معادله ی انیشتین برای متریک معادله ی (۳.۲) است.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \frac{\Lambda\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (8.5)$$

$R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی و R اسکالر ریچی^۶ و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تنش *stress - energy* است که قبل از حل معادله سعی در معرفی مقادیر بالا داریم. تانسور ریچی ادغام (فشرده) تانسور انرژی-تنش است.

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} \quad (9.5)$$

اسکالر ریچی فشرده (ادغام) تانسور ریچی است. می دانیم که اگر تانسور ریچی صفر شود نشاندهنده ی این نکته است که فضا تخت است و در صورت غیر صفر شدن تانسور ریچی فضای خمیده خواهیم داشت.

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\alpha}R_{\mu\alpha} \quad (10.5)$$

تانسور گرادیان ریمان توسط ضرایب کریستوفل^۷ معرفی می شود.

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} \quad (11.5)$$

در این حالت یک نماد دستی برای مشتقات جزئی در نظر می گیریم که هر اندیس پایینی که خارج از کاما است نشاندهنده ی یک مشتق نسبت به آن است به شکل زیر:

$$\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} \quad (12.5)$$

ضرایب کریستوفل برای تانسور متریک بیان می شود.

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}) \quad (13.5)$$

⁶Ricci

⁷Christoffel

حال با وارد کردن اجزای متریک خود در تانسور متریک بدنبال یافتن ضرایب U و V و تمام ضرایب کریستوفل در گام بعدی هستیم، در آخرین مرحله یافتن تانسور ریچی و اسکالر ریچی است. به منظور بدست آوردن ضرایب کریستوفل و برای ساده کردن محاسبات از خواصی به شکل زیر استفاده می کنیم: ۱. هر مشتق نسبت به زمان صفر خواهد شد یعنی هر عبارتی که شامل $g_{\mu\nu,t} = 0$ براحتی صفر می شود.

۲. تمام جملات غیر قطری یعنی $g_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu$ است.

۳. ضرایب کریستوفل در دو شاخص اندیس پایین متقارن هستند یعنی $\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ برابر می شوند که این ویژگی جملات را به طور قابل توجهی کاهش می دهد.

۴. همچنین دقت شود که تنها مشتقات U و V نسبت به r غیر صفر هستند.

حال با توجه به شرط های گفته شده به دنبال پیدا کردن ضرایب کریستوفل هستیم:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 \rightarrow \Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{\sqrt{U}} \partial_r U, \quad \Gamma_{ij}^0 = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 \rightarrow \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \partial_r U, \quad \Gamma_{0i}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{i,j \neq i}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \partial_r V, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-r}{V}, \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{-r}{V} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 \rightarrow \Gamma_{00}^2 = 0, \quad \Gamma_{ii}^2 = -\cos \theta \sin \theta = \Gamma_{33}^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^2 = 0, \quad \Gamma_{23}^2 = 0, \quad \Gamma_{0i}^2 = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 \rightarrow \Gamma_{00}^3 = 0, \quad \Gamma_{ii}^3 = 0, \quad \Gamma_{i,j \neq i}^3 = \frac{1}{\sqrt{V}} [g^{3i,j} + g^{3j,i}], \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \Gamma_{0i}^3 = 0$$

سپس جملات بدست آمده را که غیر صفر هستند به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{U'}{\sqrt{U}} \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{U'}{\sqrt{V}}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{V'}{\sqrt{V}}$$

$$, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-r}{V}, \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{-r}{V} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\cos \theta \sin \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta$$

در اینجا با داشتن مقادیر ضرایب کریستوفل می توانیم تانسور ریچی و اسکالر ریچی را بدست آوریم. سپس با توجه به معادله ی (۱۰.۲) می توان تانسور ریچی را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\beta}^{\beta} &= \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} = \\
 &= \Gamma_{\mu^{\circ},\nu}^{\circ} - \Gamma_{\mu\nu,\circ}^{\circ} + \Gamma_{\mu^{\circ}}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\circ} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha^{\circ}}^{\circ} + \\
 &+ \Gamma_{\mu^1,\nu}^1 - \Gamma_{\mu\nu,1}^1 + \Gamma_{\mu^1}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^1 - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha^1}^1 + \\
 &+ \Gamma_{\mu^2,\nu}^2 - \Gamma_{\mu\nu,2}^2 + \Gamma_{\mu^2}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^2 - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha^2}^2 + \\
 &+ \Gamma_{\mu^3,\nu}^3 - \Gamma_{\mu\nu,3}^3 + \Gamma_{\mu^3}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^3 - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha^3}^3 \quad (14.5)
 \end{aligned}$$

ابتدا عبارات قطری در تانسور ریچی را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$R_{\circ\circ} = \frac{-U''}{2V} + \frac{U'V'}{4V^2} + \frac{U'^2}{4UV} - \frac{1}{r} \frac{U'}{V} \quad (15.5)$$

$$R_{11} = \frac{U''}{2U} - \frac{U'^2}{4U^2} - \frac{U'V'}{2U2V} - \frac{V'}{Vr} \quad (16.5)$$

$$R_{22} = \frac{rU'}{2UV} + \frac{1}{V} - \frac{rV'}{2V^2} - 1 \quad (17.5)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (18.5)$$

اسکالر ریچی از تانسور ریچی به شکل زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= g^{\circ\circ} R_{\circ\circ} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = \\
 &= g^{\circ\circ} R_{\circ\circ} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} \sin^2 \theta R_{22} = \\
 &= \frac{-U''}{UV} + \frac{U'V'}{2UV^2} + \frac{U'^2}{2U^2V} - \frac{2}{r} \frac{U'}{UV} + \frac{2}{r} \frac{V'}{V^2} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V}\right) \quad (19.5)
 \end{aligned}$$

از آنجا که حل شوارتزشیلد مربوط به فضا- زمان ظاهراً یک جسم متقارن کروی است معادله انیشتین به ساده ترین فرم در نظر گرفته می شود.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (20.5)$$

این منجر به ۴ معادله به شکل زیر می شود.

$$R_{00} - \frac{1}{r} g_{00} R = 0 = R_{00} - \frac{U}{r} R =$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{V}{V^2} + \frac{1}{r^2} (1 - \frac{1}{V}) \quad (21.5)$$

مشاهده می کنیم که این معادله فقط تابعی از V است، بنابراین می توانیم این معادله دیفرانسیل را برای پیدا کردن V حل کنیم و سپس از آن در معادلات دیگر برای یافتن U استفاده کنیم.

$$0 = -\frac{V}{V} + \frac{1}{r} (V - 1) \rightarrow \frac{-dr}{r} = \frac{dV}{V(V-1)} \quad (22.5)$$

سپس با استفاده از این فرمول به شکل $\int \frac{dx}{ax+bx^2} = \frac{-1}{a} \text{Ln} \frac{a+bx}{x}$ و خواهیم داشت:

$$-Lnr + Ct = \text{Ln}(\frac{1}{r}) + Ct = \text{Ln}(\frac{V-1}{V})$$

$$\frac{C}{r} = \frac{V-1}{V} \rightarrow V-1 = \frac{C}{r} V \rightarrow V(1 - \frac{C}{r}) = 1$$

$$V = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} \quad (23.5)$$

پس ضریب V به شکل بالا بدست آمد.

$$R_{11} - \frac{1}{r} g_{11} R = 0 = R_{11} + \frac{V}{r} R$$

$$0 = \frac{-U}{rUV} + \frac{1}{r^2} (1 - \frac{1}{V}) \quad (24.5)$$

$$R_{22} - \frac{1}{r} g_{22} R = 0 = R_{22} + \frac{r^2}{r} R =$$

$$0 = \frac{-U}{U} + \frac{V}{V} - r \frac{U}{r} \frac{V}{UV} + \frac{rU}{rU^2} \quad (25.5)$$

$$R_{33} - \frac{1}{r} g_{33} R = 0 = \sin^2 \theta R_{22} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r} R = R_{22} + \frac{r^2}{r} R \quad (26.5)$$

سپس با استفاده از معادله ی (۲۳.۵) و (۲۴.۵) ضریب U را به شکل زیر بدست می آوریم.

$$0 = \frac{U}{U} (1 - \frac{C}{r}) - \frac{1}{r} (1 - (1 - \frac{C}{r}))$$

$$0 = \frac{U}{U} (1 - \frac{C}{r}) - \frac{C}{r^2}$$

$$\frac{U}{U} = \frac{C}{r^2(1 - \frac{C}{r})} = \frac{C}{r^2 - Cr}$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{Cdr}{r^2 - cr} \quad (27.5)$$

$$\int \frac{dU}{U} = \ln U = C \int \frac{dr}{r^2 - Cr} = \frac{C}{C} \ln \frac{r-C}{r} = \ln \left(1 - \frac{C}{r}\right) \quad (28.5)$$

با داشتن ضرایب U و V به صورت زیر:

$$U = \left(1 - \frac{C}{r}\right), \quad V = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} \quad (29.5)$$

متریک را با داشتن ضریب U و V بازنویسی می کنیم.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (30.5)$$

در ابتدا متوجه این نکته می شویم که جواب بدست آمده خواسته های ما را برآورده می کند چون یک شکل متقارن کروی را می دهد و به طور مجانبی تخت می شود یعنی در $r \rightarrow \infty$ متریک فضا زمان تخت می شود. حال باید پارامتر نامشخص C را بدست آوریم. ما انتظار داریم که در حد $M \rightarrow 0$ ما باید دوباره متریک تخت را داشته باشیم پس خواهیم دید که برای نیل به این نتیجه و اجرایی شدن آن باید $C = 0$ شود بنابراین ما فرض می کنیم که آن متناسب با جرم است. (چون هیچ پارامتر آزاد دیگری وجود ندارد)

برای بدست آوردن فرم دقیق نیاز به مقایسه ی نتایج برای یک جرم آزمایشی بسیار کوچک هنگامیکه منبع جرم M است می پردازیم. ما باید قانون نیوتن را همچنان بکار بگیریم که در نهایت نتیجه $C = \frac{2GM}{c^2}$ را می دهد و متریک شوارتزشیلد بدست می آید.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (31.5)$$

۲.۵ بررسی دمای آنروح در حضور اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

اثر آنروح-دیودیس^۸ را می توان اینطور بیان کرد که در نزدیکی افق رویداد سیاه چاله، فوتون قرار دارد و این فوتون به ذره و پاد ذره تبدیل می شود که هر کدام از ذرات یکی در خارج از افق رویداد سیاهچاله و دیگری در سمت داخل افق رویداد سیاهچاله قرار دارند و دمای این ذرات در نزدیکی افق رویداد بصورت

$$T = \frac{ha}{\sqrt{\pi} kc} \quad \text{است و انرژی این ذرات به شکل زیر خواهد بود}$$

$$\Delta E = mv\Delta v = ma\Delta x \quad (32.5)$$

⁸Unruh-Davis

از طرفی می دانیم که انرژی هر ذره است و مجموعاً انرژی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta E = 2mc^2 \quad (33.5)$$

سپس با برابر قرار دادن دو معادله ی بالا برای انرژی می توان Δx که در واقع طولی است که ذره طی می کند و به داخل سیاهچاله می افتد. $[8^\circ]$

$$ma\Delta x = 2mc^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{2c^2}{a} \quad (34.5)$$

حال Δx را با قرار دادن در داخل معادله ی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، ΔE را بدست می آوریم
($\Delta E = c\Delta p$)

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (35.5)$$

$$\Delta E = \frac{\hbar c}{2\Delta x} = \frac{\hbar a}{4c} \quad (36.5)$$

از طرفی می دانیم که انرژی جنبشی ذره مرتبه ای از kT است و با انرژی بدست آمده از ذره ای که به داخل سیاهچاله می افتد برابر قرار می دهیم و از این طریق دما را بدست می آوریم که به دمای $Unruh$ شناخته می شود:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{\hbar a}{4c} \quad (37.5)$$

پس دمای $Unruh$ را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$T = \frac{\hbar a}{6kc} \quad (38.5)$$

در نتیجه رابطه ای که بدست آمده بطور توافقی نزدیک به آنچه هست که آنروح^۹ و دیویس^{۱۰} در سال ۱۹۷۶ بدست آوردند با تقریب $2\pi = 6$

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi kc} \quad (39.5)$$

⁹W. G. Unruh

¹⁰Paul Davies

۱.۲.۵ بررسی دمای آنروح در حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

در اینجا یک راه ممکن برای بررسی این تعمیم، بررسی مجدد بحث کلاسیکی شناخته شده ی میکروسکوپ هایزنبرگ است. اندازه ی کوچک δx در تئوری توسط یک بیم (پرتو) فوتون با انرژی E داده می شود (با فرض $E = pc$) [۸۱]

$$\delta x \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{E}}, \quad (۴۰.۵)$$

از آنجا که انرژی زیادی برای اکتشاف جزئیات کوچک مورد نیاز است، در فرمول اصلی آزمایش گدانکن^{۱۱} هایزنبرگ جاذبه نادیده گرفته شده است. با این حال آزمایش گدانکن شامل شکلی از بی ثباتی گرانشی در پراکندگی های انرژی بالا در ریسمان است. یا آزمایش گدانکن شکل احتمالی از پراکندگی میکروسیاهچاله ها با شعاع گرانشی $R_s = R_s(E)$ متناسب با انرژی E در انرژی بالا در نظر می گیرد و نشان می دهد که رابطه ی عدم قطعیت معمول باید به صورت زیر باشد:

$$\delta x \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{E}} + \beta R_s(E), \quad (۴۱.۵)$$

که β پارامتر بدون بعد و $\ell_p^2 \frac{E}{\hbar} = 2G_N E$ است که به شکل زیر می توان نوشت: $(\frac{\ell_p m_p}{\hbar} = \hbar)$

$$\delta x \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{E}} + 2\beta \ell_p^2 \frac{E}{\hbar} = \ell_p \left(\frac{m_p}{E} + \beta \frac{E}{m_p} \right). \quad (۴۲.۵)$$

یک نوع اصلاح از اصل عدم قطعیت که بصورت زیر پیشنهاد شده است. پارامتر تعمیم یافتگی بدون بعد از نظر تئوری (در اصل) ثابت نیست، اگر چه به طور کلی از مرتبه ی واحد فرض شده است. این امر به طور خاص در برخی از مدل های نظریه ریسمان رخ می دهد و توسط یک محاسبه ی صریح در رفرنس [۶۶] تایید شده است و هدف از آن تعیین حدود β است. رابطه می تواند به شکل یک رابطه ی عدم قطعیت بیان شود.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta \left(\frac{\Delta p}{m_p} \right)^2 \right] \quad (۴۳.۵)$$

و در حالتی که $\langle \hat{p} \rangle = 0$ باشد رابطه ی قبل با جابجاگر زیر برابر خواهد شد چرا که $|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| \geq \frac{\hbar}{2}$:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \left[1 + \beta \left(\frac{\hat{p}}{m_p} \right)^2 \right] \quad (۴۴.۵)$$

¹¹gedanken

GUP به طور گسترده در زمینه نظریه میدان کوانتومی [۸۲] و گرانش کوانتومی مورد مطالعه قرار می گیرد. در ادامه با استفاده از رابطه ی [۸۰] اثر $Unruh$ (به عنوان اثر $Davis - Unruh$ شناخته شده) را شرح خواهیم داد. در نتیجه برای اولین بار به محاسبه ی تصحیحات با درجه اول β به دمای $Unruh$ دست یافت. در بخش قبل یک استخراج مستقیم از اثر $Unruh$ از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ HUP داده شد از سوی دیگر ضرورت این تاثیر برای سازگاری داخلی QFT و آرگومان های هر دو مبتنی بر کوواریانس عمومی و ترمودینامیک تاثیر شده است. علاوه بر این، اصلاحات جزئی (غیر نسبی) در طیف $Unruh$ نیز به تازگی در زمینه های مختلف نشان داده شده است.

$$E_k = m a \delta x , \quad (45.5)$$

و پیدا می کنیم فاصله ای را که در آن هر ذره به منظور ایجاد N زوج شتاب می گیرند.

$$E_k \simeq 2 N m , \quad (46.5)$$

با استفاده از معادله (۴۶.۵) و (۴۵.۵) خواهیم داشت:

$$\delta x \simeq 2 \frac{N}{a} . \quad (47.5)$$

ذرات اصلی و زوج های ایجاد شده در این روش در داخل یک محدوده ی فضایی با عرض δx قرار می گیرند، بنابراین نوسان انرژی هر ذره یکسان است.

$$\delta E \simeq \frac{\hbar}{2 \delta x} \simeq \frac{\hbar a}{4 N} . \quad (48.5)$$

اگر این نوسانات را به عنوان یک آشفتگی گرمایی کلاسیک از ذرات تعبیر کنیم، می توانیم بنویسیم:

$$\frac{3}{2} k_B T \simeq \delta E \simeq \frac{\hbar a}{4 N} , \quad (49.5)$$

$$T = \frac{\hbar a}{6 N k_B} . \quad (50.5)$$

در مقایسه ی معادله قبل با دمای $Unruh$ شناخته شده [۸۰، ۸۲].

$$T_U = \frac{\hbar a}{2 \pi k_B} , \quad (51.5)$$

سپس با جایگذاری معادله (۴۷.۵) در معادله (۴۴.۵) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$2 \frac{N}{a} \simeq \frac{\hbar}{3 k_B T} + \beta \ell_p^2 \frac{3 k_B T}{\hbar}. \quad (52.5)$$

که با استفاده از رابطه ی بین طول و جرم پلانک و ثابت پلانک به شکل زیر داریم:

$$\frac{2 \pi}{a} \simeq \frac{\hbar}{k_B T} + 9 \beta \ell_p^2 \frac{k_B T}{\hbar} = \ell_p \left(\frac{2 m_p}{k_B T} + 9 \beta \frac{k_B T}{2 m_p} \right). \quad (53.5)$$

از طرفی می دانیم که در معادله ی بالا می توان دمای آنزوح را که در معادله (۵۱.۵) آمده را استخراج کرد:

$$T_U^{GUP} \simeq T_U \left(1 + \frac{9 \beta \ell_p^2 a^2}{4 \pi^2} \right) = T_U \left[1 + \frac{9 \beta}{4} \left(\frac{k_B T_U}{m_p} \right)^2 \right]. \quad (54.5)$$

در این رابطه قادریم مقدار کمینه ای را برای شتاب سیستم گفته شده به شکل زیر بدست آوریم:

$$a \lesssim \frac{\pi}{3 \sqrt{\beta} \ell_p}, \quad (55.5)$$

همچنین مقدار کمینه ای را برای دمای آنزوح بیان شده در این مسئله بصورت زیر خواهیم داشت:

$$k_B T_U \lesssim \frac{m_p}{3 \sqrt{\beta}}. \quad (56.5)$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{4} \left[1 + \beta \left(\frac{\Delta p}{m_p} \right)^2 \right] \quad (57.5)$$

نزدیک به افق رویداد یک سیاه چاله، عدم قطعیت یک ذره از مرتبه ی شعاع شوارزشیلد سیاه چاله

شوارزشیلد خواهد بود [۸۳، ۶۶، ۱۳]

$$\Delta X = \eta r_s, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (58.5)$$

$$M_{GUP} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k} \left(\frac{1}{T} + \frac{k^2 \beta^2}{c^2} T \right) \quad (59.5)$$

و حداقل جرم را اینطور داریم:

$$M \geq M_0 = \frac{\hbar c^2 \beta}{4\pi G} \quad (60.5)$$

ظرفیت گرمایی به شکل زیر بدست می آید:

$$C_{GUP} = \frac{\hbar c^5}{8\pi G k} \left(-\frac{1}{T^2} + \frac{k^2 \beta^2}{c^2} \right) \quad (61.5)$$

۲.۲.۵ بررسی دمای آنروح در حضور اصل عدم قطعیت بسط یافته

در این بخش، هدف بدست آوردن دمای $Unruh$ تغییر شکل یافته برای اصل عدم قطعیت بسط یافته است، با توجه به روابط (۳۲.۵) تا (۳۹.۵) که در آن به دمای آنروح رسیدیم [۸۴] حال اصل عدم قطعیت بسط یافته را به شکل زیر داریم:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \frac{(\Delta t)^2}{l_H^2} \right], \quad (62.5)$$

از طرف دیگر، $\Delta X = c\Delta t$ و $\frac{|\Lambda|}{3} = \frac{1}{L_H}$ بنابراین، بدست می آوریم [۸۳]

$$\Delta X \Delta E \geq \frac{\hbar c}{2} \left[1 + |\Lambda| \frac{(\Delta X)^2}{3c^2} \right], \quad (63.5)$$

سپس معادله درجه دوم را به شکل زیر حل می کنیم:

$$\frac{\hbar |\Lambda| (\Delta X)^2}{6c} - (\Delta E) (\Delta X) + \frac{\hbar c}{2} = 0 \quad (64.5)$$

یا

$$\Delta X = \frac{3c(\Delta E)(1 - \sqrt{(1 - |\Lambda|^2/3(\Delta E)^2})}{|\Lambda| \hbar} \quad (65.5)$$

که ما در نظر می گیریم $T \geq T_{min} = \frac{2\hbar}{3k} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}$ سپس معادله ی قبل را بسط می دهیم به شکل زیر:

$$\Delta X = \frac{\hbar c}{2\Delta E} \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{12(\Delta E)^2} \right) \quad (66.5)$$

و با استفاده از معادله ی (۴۹.۵) و جایگذاری در معادله ی قبل خواهیم داشت:

$$T_U^{EUP} = \frac{\hbar a}{2\pi k c} \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T^2}} \right) \quad (67.5)$$

و می دانیم که $T_U = \frac{\hbar a}{2\pi k c}$ سپس بدست می آوریم:

$$T_U^{EUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T^2}} \right) \quad (68.5)$$

حال با جایگذاری T_U^{EUP} در معادله قبل خواهیم داشت:

$$T_U^{EUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2} \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \right)^2} \right) \quad (69.5)$$

سپس

$$T_U^{EUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \right)^{-2} \right) \quad (70.5)$$

حال جمله ی دوم را به شکل زیر بسط می دهیم:

$$T_U^{EUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \left(1 - 2 \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \right) \right) \quad (71.5)$$

و از جملات از مرتبه ی $|\Lambda|^2$ صرف می کنیم و در نهایت بدست می آوریم:

$$T_U^{EUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \right) \quad (72.5)$$

تصحیحات EUP در دمای $Unruh$ نسبت به اثرات معمولی $Unruh$ بزرگتر می شود و $T_U = \frac{\hbar a}{2\pi k c}$ و $|\Lambda| \geq 0$ در معادله ی قبل قرار می دهیم. در این قسمت در سه بعد یک سیاهچاله شوارتزشیلد را به جرم M در نظر می گیریم. برای هر ذره ی کوانتومی (بدون جرم) نزدیک به افق رویداد سیاهچاله، عدم قطعیتی در تکانه مشخص می شود که دمای آن را می توان به شکل زیر نوشت:

$$T = \frac{c \Delta P}{k} \quad (73.5)$$

که در معادله ی قبل k ثابت بولتزمن و c سرعت نور است. با استفاده از این معادله و معادله ی قبل می دانیم که یک کران پایین برای دمای سیاهچاله به شکل مقابل وجود دارد [۸۳]

$$T \geq T_{min} = \frac{\hbar c \alpha}{k} \sim 1.3221 \times 10^{-29} K \quad (74.5)$$

برای تعادل ترمودینامیکی، دمای ذره کوانتومی شبیه به دمای سیاهچاله است. به منظور بررسی رابطه ی این دما با جرم سیاهچاله، متناظر است.

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2} [1 + \alpha^2 (\Delta X)^2] \quad (75.5)$$

و با استفاده از معادله (۵۸.۵) که η مشخصه ی بعد است و r_s شعاع شوارتزشیلد سیاه چاله و G ثابت جهانی گرانشی نیوتن است. با جایگذاری معادله ی (۵۸.۵) و (۷۳.۵) در داخل معادله ی (۷۵.۵) خواهیم داشت:

$$\frac{2\eta GMkT}{c^3} = \frac{\hbar}{2} \left(1 + \frac{4\alpha^2 \eta^2 G^2 M^2}{c^4} \right) \quad (76.5)$$

که معادله ی بالا معادله ی درجه دوم M هست و حل آن به شکل زیر خواهد بود [۸۴]

$$M_{EUP} = \frac{(m_p c)^2 k T}{2 \eta (\alpha \hbar c)^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(\alpha \hbar c)^2}{(k T)^2}} \right] \quad (77.5)$$

که m_p جرم پلانک پیرو معادله ی $\frac{\hbar c^2}{G} = (m_p c)^2$ است، که در صورت عدم حضور اصلاحات معادله ی قبل منجر به معادله ی زیر خواهد شد:

$$M_{EUP} = \frac{(m_p c)^2}{2 \eta k T} \quad (78.5)$$

در مقایسه ی معادله ی قبل با دمای هاوکینگ $T_H = \frac{(m_p c)^2}{\lambda \pi k M}$ و اینکه $\eta = 2\pi$ است، در نهایت رابطه ی پایین رابطه ی بین دما-جرم را مشخص می کند.

$$M_{EUP} = \frac{(m_p c)^2 k T}{4 \pi (\alpha \hbar c)^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(\alpha \hbar c)^2}{(k T)^2}} \right] \quad (79.5)$$

که

$$T \geq T_{min} = \frac{\hbar c \alpha}{k} \quad (80.5)$$

که برای مقادیر کوچک α خواهیم داشت:

$$M_{EUP} = \frac{\hbar c^2}{\lambda \pi G k} \left(\frac{1}{T} + \frac{(\alpha \hbar c)^2}{4 k^2 T^3} + \frac{(\alpha \hbar c)^4}{\lambda k^4 T^5} + \dots \right) \quad (81.5)$$

در نتیجه ظرفیت گرمایی سیاه چاله EUP به شکل زیر تعریف می شود:

$$C_{EUP} = c^2 \frac{dM}{dT} = \frac{(m_p c)^2 k}{4 \pi (\alpha \hbar c)^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\alpha \hbar c)^2}{(k T)^2}}} \right] \quad (82.5)$$

که برای مقادیر کوچک α خواهیم داشت:

$$C_{EUP} = \frac{\hbar c^5}{\lambda \pi G k} \left(-\frac{1}{T^2} - \frac{3(\alpha \hbar c)^2}{2 k^2 T^4} - \frac{5(\alpha \hbar c)^4}{\lambda k^4 T^6} - \dots \right) \quad (83.5)$$

همچنین می توان آنتروپی سیاه چاله EUP را از قانون اول ترمودینامیک سیاه چاله به شکل زیر تعیین کرد:

$$S = c^2 \int_{T_{min}}^T \frac{dM}{T} = \int_{T_{min}}^T C(T) \frac{dT}{T} \quad (84.5)$$

انتگرال بالا منجر می شود به معادله ی زیر:

$$S_{EUP} = -\frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln \left[1 + \sqrt{1 - \frac{(\alpha\hbar c)^2}{(kT)^2}} \right] + K \quad (85.5)$$

که ثابت انتگرال گیری است، با بسط عبارت بالا برای α کوچک خواهیم داشت [۷۹]

$$S_{EUP} = K - \frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln 2 + \frac{k(m_p c^2)^2}{16\pi(kT)^2} + \frac{3k(c)^2(m_p c^2)^2}{128\pi(kT)^4} + \dots \quad (86.5)$$

با در نظر گرفتن مقدار K به صورت زیر:

$$K = \frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln 2 \quad (87.5)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$S_{EUP} = -\frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln \left[1 + \sqrt{1 - \frac{(\alpha\hbar c)^2}{(kT)^2}} \right] + \frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln 2 \quad (88.5)$$

حال با بازنویسی معادله ی (۷۹.۵) بصورت زیر خواهیم داشت:

$$M = m_0 T \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2} \right] \quad (89.5)$$

همچنین با در نظر گرفتن مقادیر زیر

$$m_0 = \frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\hbar c)^2}, \quad T_0 = T_{min} = \frac{\hbar c \alpha}{k} \quad (90.5)$$

معکوس رابطه ی (۸۹.۵) به شکل زیر بدست می آید:

$$T = \frac{M}{2m_0} + \frac{m_0 T_0^2}{2M} \quad (91.5)$$

بنابراین ما همیشه یک دمایی واقعی برای تمام مقادیر جرم به صورت بالا داریم. با توجه به معادله ی

قبل ظرفیت گرمایی به این صورت می تواند بیان شود:

$$C = m_0 c^2 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2}} \right] \quad (92.5)$$

$$= m_0 c^2 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{M}{2m_0 T_0} + \frac{m_0 T_0^2}{2M} \right)^{-2} \right)^{-1/2} \right]$$

و همچنین آنتروپی به این شکل بیان می شود:

$$S = -\frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln \left[1 + \sqrt{1 - \frac{(\alpha\hbar c)^2}{k^2 \left(\frac{M}{\sqrt{m_s}} + \frac{m_s T_s}{\sqrt{M}} \right)^2}} \right] + \frac{(m_p c)^2 k}{4\pi(\alpha\hbar)^2} \ln 2 \quad (93.5)$$

برای α های کوچک به شکل زیر داریم:

$$\frac{S}{k} \approx \frac{S_{BH}}{k} - \frac{2\pi(\hbar\alpha)^2}{(km_p c)^2} S_{BH}^2 \quad (94.5)$$

از طرفی آنتروپی بکنشتاین هاوکینگ نیمه کلاسیکی برای سیاهچاله ی شوارتزشیلد به صورت زیر است:

$$S_{BH} = 4\pi \left(\frac{M}{m_p} \right)^2 \quad (95.5)$$

در اینجا می دانیم که در سطح افق رویداد که $A = 4\pi r_s^2 = 4L_p^2 \left(\frac{S_{BH}}{k} \right)$ و L_p طول پلانک است معادله ی (۹۴.۵) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{S}{k} \approx \frac{A}{4L_p^2} - \frac{\pi(\hbar\alpha)^2 A^2}{4(m_p c)^2 L_p^4} \quad (96.5)$$

۳.۲.۵ بررسی دمای آنروح در حضور بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

در این بخش با استفاده از بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته به بررسی دمای *Unruh* سیاه چاله می پردازیم و همچنین به تحقیق درباره ی دما، جرم و گرمای ویژه یک سیاهچاله میپردازیم. همانطور که در

فصل اول بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته را معرفی کردیم داریم [۸۵]

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha^2 \Delta X^2 + \beta^2 \Delta P^2) \quad (97.5)$$

از طرفی با توجه به اینکه $\Delta E = c\Delta p$ است می توان اصل عدم قطعیتی به شکل زیر داشت:

$$\Delta E \Delta x \geq \frac{\hbar c}{2} \quad (98.5)$$

پس با استفاده از معادلات قبل می توانیم رابطه ی *GUP* و *EUP* را به شکل روبرو بنویسیم:

$$\Delta X \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \left(c + \frac{\beta^2}{c} \Delta E^2 \right) \quad (99.5)$$

$$\Delta X \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}(c + \alpha^2 \Delta X^2) \quad (100.5)$$

در نتیجه می توانیم $EGUP$ را به شکل زیر بنویسیم:

$$\Delta X \Delta E \geq \frac{\hbar c}{2} \left(1 + \alpha^2 \Delta X^2 + \frac{\beta^2}{c^2} \Delta E^2\right) \quad (101.5)$$

سپس می توانیم رابطه ی قبل را به شکل معادله درجه دوم و با در نظر گرفتن مساوی بنویسیم:

$$c\alpha^2 \Delta X^2 - \frac{2}{\hbar} \Delta E \Delta X + \frac{\beta^2}{c} \Delta E^2 + c = 0 \quad (102.5)$$

و برای ΔX به صورت مقابل بدست آوریم:

$$\Delta X = \frac{\Delta E}{c\alpha^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(\alpha\hbar c)^2}{\Delta E^2} - (\alpha\beta\hbar)^2}\right) \quad (103.5)$$

که با بسط دادن معادله ی قبل خواهیم داشت:

$$\Delta X = \frac{\hbar c}{2\Delta E} \left(1 + \frac{(\alpha\hbar c)^2}{4\Delta E^2} + \frac{\beta^2 \Delta E^2}{c^2} + \frac{(\alpha\beta\hbar)^2}{2}\right) \quad (104.5)$$

که با در نظر گرفتن روابط (۵۸.۵) و (۷۳.۵) و (۱۰۴.۵) و $T_U = \frac{\hbar a}{\sqrt{\pi} k c}$ دمای $Unruh$ را برای بسط اصل

عدم قطعیت تعمیم یافته $EGUP$ به شکل زیر بدست می آوریم [۸۰]

$$T_U^{EGUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} + \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{6}\right) \quad (105.5)$$

که با جایگذاری T_U^{EGUP} در معادله قبل به شکل زیر خواهیم داشت:

$$T_U^{EGUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2} \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} + \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{6}\right)^2} + \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} + \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{6}\right)^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{6}\right) \quad (106.5)$$

سپس با بسط دادن مخرج جمله ی دوم خواهیم داشت:

$$T_U^{EGUP} = T_U \left[1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \left(1 - \frac{2\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} - \frac{18\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} - \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{3}\right) + \right.$$

$$+ \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} + \frac{18\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{3} \right)}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{6} \quad (107.5)$$

در معادله ی قبل از $|\Lambda|^2$ و β^2 صرف نظر می کنیم و در نتیجه برای بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته دمای $Unruh$ را به شکل زیر خواهیم داشت [۸۵]

$$T_{EGUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} + \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{|\Lambda| \beta_0 l_P^2}{6} \right) \quad (108.5)$$

در معادله ی قبل جمله ی دوم ناشی از EUP و جمله ی سوم ناشی از GUP و جمله ی چهارم ناشی از $EGUP$ است. اگر در این معادله $|\Lambda|$ را به سمت صفر میل دهیم معادله ی دمای $Unruh$ تغییر شکل یافته برای بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته $EGUP$ به معادله ی دمای $Unruh$ تغییر شکل یافته برای اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP تغییر می یابد.

$$T_{GUP} = T_U \left(1 + \frac{9\beta_0 l_P^2 k^2 T_U^2}{4c^2 \hbar^2} \right) \quad (109.5)$$

و همچنین اگر در معادله ی (۱۰۷.۵) β را به سمت صفر میل دهیم معادله ی دمای $Unruh$ تغییر شکل یافته برای بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته $EGUP$ به معادله ی دمای $Unruh$ تغییر شکل یافته برای اصل عدم قطعیت بسط یافته EUP تغییر می یابد.

$$T_{EUP} = T_U \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2 |\Lambda|}{2\sqrt{k^2 T_U^2}} \right) \quad (110.5)$$

در نهایت اگر $|\Lambda|$ و β را به سمت صفر میل دهیم دمای $Unruh$ برای بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با دمای $Unruh$ معمولی برابر خواهد شد

$$T = T_U \quad (111.5)$$

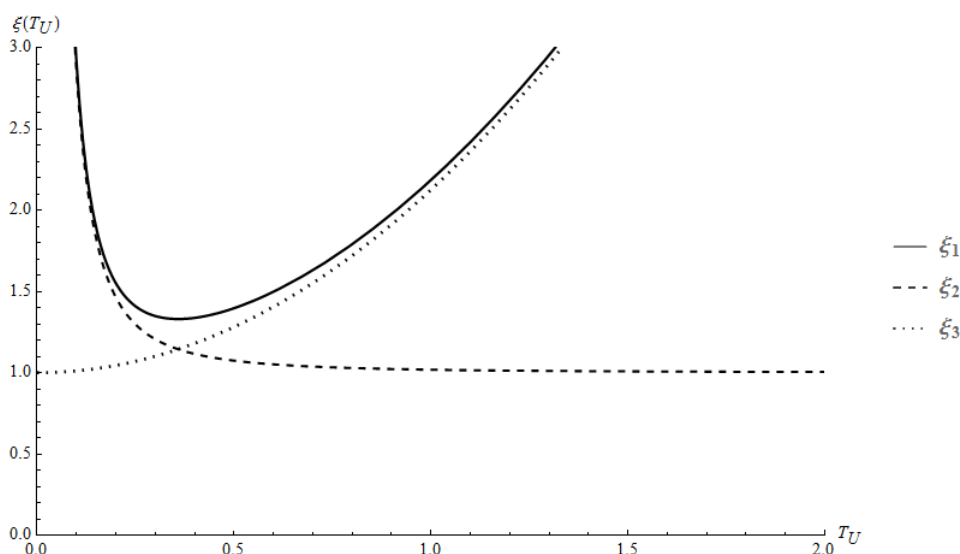
برای درک بهتر روابط تعمیم یافته بیان شده بهتر است تا نمودار دمای آنروح تغییر شکل یافته برای $EGUP$ ، GUP و EUP را نسبت به دمای آنروح با تعریف ξ_1 ، ξ_2 و ξ_3 بصورت زیر رسم کنیم.

$$\xi_1 = \frac{T_{EGUP}}{T_U}, \quad \xi_2 = \frac{T_{EUP}}{T_U}, \quad \xi_3 = \frac{T_{GUP}}{T_U} \quad (112.5)$$

با توجه به نمودار شکل (۱.۵) در می یابیم که ξ_1 و ξ_3 در دماهای پایین رفتار مشابهی دارند و این نکته از این جهت حائز اهمیت است چرا که نشان می دهد که T_{EGUP} و T_{GUP} بزرگتر از T_U هستند. همچنین مشاهده می کنیم که ξ_1 و ξ_2 در دماهای بالا نیز رفتار مشابهی دارند و این به این معنی است که

T_{EGUP} و T_{EUP} بزرگتر از T_U هستند. از نمودار نیز می توان فهمید که ξ_2 و ξ_3 در نقطه ای به معادله $T^U = \frac{\sqrt{2}ch}{3k}(\frac{\alpha}{3\beta})^{\frac{1}{3}}$ که نشاندهنده ی این امر است که در این نقطه $\xi_2 = \xi_3$ و دارای مقدار زیر در این نقطه هستند:

$$\xi_{min}(T^U) = \xi_2(T^U) = \xi_3(T^U) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{3}} \quad (113.5)$$



شکل ۱۰۵: نمودار رابطه ی دمای تغییر شکل یافته سیاهچاله-دما آنروح برای ξ_1 ، ξ_2 و ξ_3 با $|\Lambda| = 0.5$ و $\beta \cdot \ell_p^3 = 0.5$ مشخص شده است. ($\hbar = c = k = 1 = \pi = 1$).

سپس با استفاده از معادلات (۷۳.۵) و (۵۸.۵) که $(T$ و $P)$ هستند در معادله (۹۷.۵) جایگذاری کرده و معادله درجه دومی نتیجه میدهد که آن را حل می کنیم.

$$\frac{2\alpha^2 G^2 \eta^2 \hbar}{c^2} M^2 - \frac{2G\eta k T}{c^3} M + \frac{\beta^2 k^2 T^2 \hbar}{2c^2} + \frac{\hbar}{2} = 0 \quad (114.5)$$

بعد از حل معادله درجه دو، خواهیم داشت

$$M_{EGUP} = \frac{kT\hbar c^3}{4\pi G(\alpha\hbar c)^2} \left(1 - \sqrt{1 - (\alpha\beta\hbar)^2 - \left(\frac{\alpha\hbar c}{kT}\right)^2} \right) \quad (115.5)$$

که با بسط جمله ی $\left(1 - \sqrt{1 - (\alpha\beta\hbar)^2 - \left(\frac{\alpha\hbar c}{kT}\right)^2} \right)$ و جایگذاری در معادله قبل، معادله زیر را برای جرم سیاهچاله $EGUP$ بدست می آوریم

$$M_{EGUP} = \frac{\hbar c^3}{8\pi Gk} \left(\frac{1}{T} + \frac{(\alpha\hbar c)^2}{4k^2 T^3} + \frac{k^2 \beta^2 T}{c^2} + \frac{(\alpha\beta\hbar)^2}{2c^2 T} \right) \quad (116.5)$$

از معادله ی بالا می توان این نکته را دریافت که جمله ی اول ناشی از جرم سیاهچاله ی EUP و جمله ی دوم ناشی از جرم سیاهچاله ی GUP و جمله ی سوم جمله ای است که شامل پارامتر اختلالی یعنی هر دو پارامتر تعمیم یافتگی را در بردارد. همچنین دمای زیر را بدست می آوریم که در این دما جرم سیاهچاله حداقل مقدار خود را اتخاذ می کند.

$$T = \frac{1}{2\beta k} \sqrt{2c^2 + (\alpha\beta\hbar)^2 + \sqrt{4(\alpha\beta\hbar c)^2 + (\alpha\beta\hbar)^4 + 4c^2(1 + 3(\alpha\beta\hbar)^2)}} \quad (117.5)$$

از طرفی برای تصدیق درستی رابطه با فرض اینکه α به سمت صفر میل کند معادله ی (۱۱۶.۵) تبدیل به معادله ی جرم برای سیاهچاله GUP می شود که نتیجه ی درستی است.

$$M_{GUP} = \frac{\hbar c^3}{\lambda\pi Gk} \left(\frac{1}{T} + \frac{k^2\beta^2 T}{c^2} \right) \quad (118.5)$$

همچنین با فرض اینکه β در معادله ی (۱۱۶.۵) به سمت صفر میل کند معادله ی جرم برای سیاهچاله ی EUP را بدست می آوریم

$$M_{EUP} = \frac{\hbar c^3}{\lambda\pi Gk} \left(\frac{1}{T} + \frac{(\alpha\hbar c)^2}{4k^2 T^3} \right) \quad (119.5)$$

در نهایت، با فرض اینکه هر دو پارامتر تعمیمی یعنی α و β را به سمت صفر میل دهیم معادله ی (۱۱۶.۵) تبدیل به جرم بدست آمده برای سیاهچاله ی HUP می شود که حالت عام است این امر حاکی از درست بودن معادلات بدست آمده برای جرم سیاهچاله ی $EGUP$ است.

$$M_{HUP} = \frac{\hbar c^3}{\lambda\pi GkT} \quad (120.5)$$

اگر در معادله ی (۱۱۵.۵) جمله ی زیر رادیکال را برابر صفر قرار دهیم و دما را از این طریق بدست آوریم، دمایی که حاصل می شود دمای حداقل است به شکل زیر:

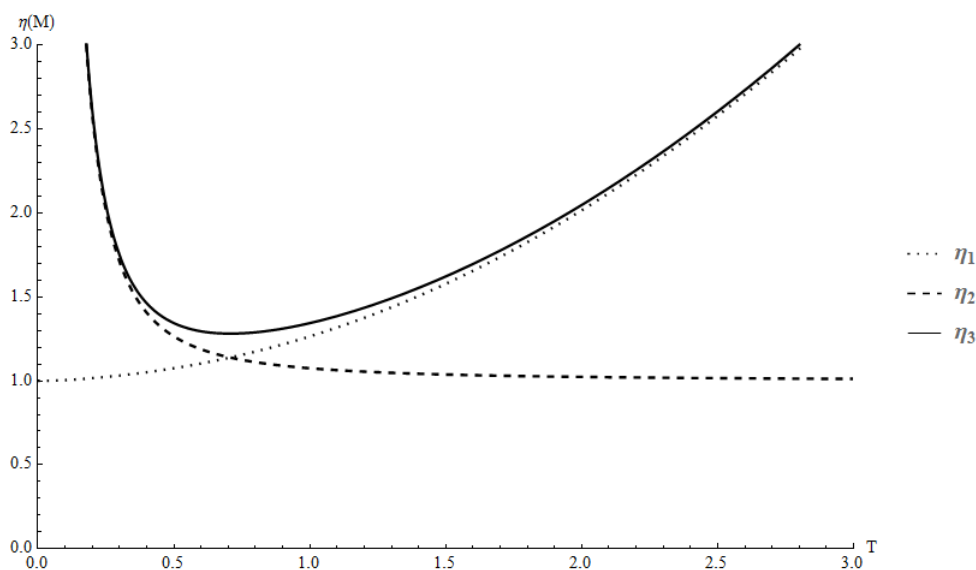
$$T \geq T_{min} = \frac{\alpha\hbar c}{k\sqrt{(1 - \alpha\beta\hbar)^2}} \quad (121.5)$$

حال با استفاده از معادلات بیان شده η_1 ، η_2 و η_3 را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta_1 = \frac{M_{EGUP}}{M_{GUP}}, \quad \eta_2 = \frac{M_{EGUP}}{M_{EUP}}, \quad \eta_3 = \frac{M_{EGUP}}{M_{HUP}} \quad (122.5)$$

حال با توجه با معادلات بالا نمودار η_1 ، η_2 و η_3 را برحسب دما در شکل (۲.۵) نمایش می دهیم. می بینیم که η_1 و η_3 در دماهای بالا در این نمودار رفتار مشابهی دارند و این به این معنی است که M_{EGUP} بزرگتر از M_{EUP} و همچنین بزرگتر از M_{HUP} است. از طرف دیگر، η_2 و η_3 در دماهای پایین رفتار مشابهی دارند و این به این معنی است که M_{EGUP} بزرگتر از M_{GUP} و همچنین بزرگتر از M_{HUP} است. و نکته ی جالب قابل توجه این است که تمام رنج دما را شامل می شود. از طرفی مشاهده می کنیم که η_1 و η_2 رفتار مشابهی نداشته اما در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند که در این نقطه $\eta_1 = \eta_2$ و دارای دمای $T_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ به صورت زیر هستند:

$$\eta_{min}(T_0) = \eta_1(T_0) = \eta_2(T_0) = \frac{M_{EGUP}(T_0)}{M_{EUP}(T_0)} = \frac{M_{EGUP}(T_0)}{M_{EUP}(T_0)} = \frac{2 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2}{2 + \alpha\beta} \quad (123.5)$$



شکل ۲.۵: نمودار رابطه ی جرم-دما برای η_1 ، η_2 و η_3 با $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ مشخص شده است. $(\hbar = c = k = 1, \Lambda\pi G = 1)$

می توان ΔM_{EGUP} را به صورت فرمولی که در زیر مشاهده می کنید نوشت و حاصل آن شامل سه جمله خواهد بود که جمله ی اول ناشی از ΔM_{GUP} و جمله ی دوم ناشی از ΔM_{EUP} و جمله ی سوم

را می توان جمله ی اختلالی ناشی که دارای هر دو پارامتر α و β است در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} \Delta M_{EGUP} &= M_{EGUP} - M_{ord} = \frac{\hbar ck\beta^2}{\Lambda\pi G} T + \frac{\hbar^2 c^5 \alpha^2}{32\pi Gk^3} \frac{1}{T^3} + \frac{\alpha^2 \beta^2 \hbar^2 c}{16\pi Gk} \frac{1}{T} = \\ &= \Delta M_{GUP} + \Delta M_{EUP} + \frac{\alpha^2 \beta^2 \hbar^2 c}{16\pi Gk} \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (124.5)$$

$$C_{EGUP} = c^2 \frac{dM}{dT} = \frac{\hbar c^5}{\Lambda\pi Gk} \left(\frac{-1}{T^2} - \frac{3(\hbar c)^2}{4k^2 T^4} + \frac{k^2 \beta^2}{c^2} - \frac{(\alpha\beta\hbar)^2}{2c^2 T^2} \right) \quad (125.5)$$

از معادله ی بالا در می یابیم که جمله ی اول ناشی از ظرفیت گرمایی سیاهچاله ی EUP و جمله ی دوم ناشی از ظرفیت گرمایی سیاهچاله ی GUP و جمله ی سوم جمله ای است که شامل پارامتر اختلالی یعنی هر دو پارامتر تعمیم یافتگی را در بردارد. برای آزمودن درستی ظرفیت گرمایی بدست آمده با فرض اینکه α را به سمت صفر میل دهیم ظرفیت گرمایی سیاهچاله ی GUP را بدست می آوریم که حاکی از صحیح بودن معادله ی بدست آمده است.

$$C_{GUP} = \frac{\hbar c^5}{\Lambda\pi Gk} \left(\frac{-1}{T^2} + \frac{k^2 \beta^2}{c^2} \right) \quad (126.5)$$

همچنین با فرض صفر قرار دادن پارامتر β معادله ی (۱۲۵.۵) تبدیل به معادله ی ظرفیت گرمایی برای سیاهچاله ی EUP می شود.

$$C_{EUP} = \frac{\hbar c^5}{\Lambda\pi Gk} \left(\frac{-1}{T^2} - \frac{3(\hbar c)^2}{4k^2 T^4} \right) \quad (127.5)$$

و در نهایت با صفر قرار دادن هر دو پارامتر α و β ظرفیت گرمایی برای حالت عام یعنی سیاهچاله ی HUP را بدست می آوریم.

$$C_{HUP} = \frac{-\hbar c^5}{\Lambda\pi GkT^2} \quad (128.5)$$

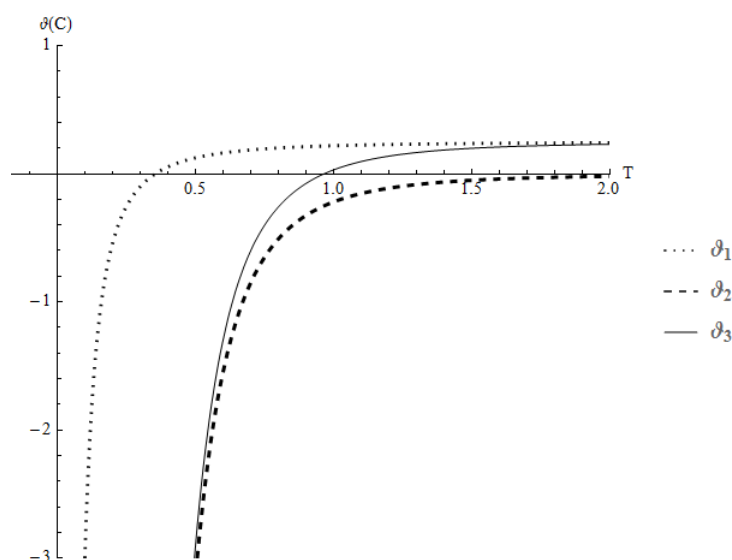
حال با توجه به معادلات بالا ϑ_1 ، ϑ_2 و ϑ_3 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vartheta_1 = \Delta C_{EGUP-EUP} = C_{EGUP} - C_{EUP}, \quad \vartheta_2 = \Delta C_{EGUP-GUP} = C_{EGUP} - C_{GUP}$$

$$\vartheta_3 = \Delta C_{EGUP-HUP} = C_{EGUP} - C_{HUP}$$

(۱۲۹.۵)

در نتیجه معادلات ϑ_1, ϑ_2 و ϑ_3 را برحسب دما در شکل (۳.۵) رسم می کنیم و مشاهده می کنیم که با افزایش دما ϑ_1 و ϑ_3 بر هم منطبق می شوند در دماهای بالا و همچنین ϑ_1 و ϑ_2 در دماهای پایین رفتار مشابهی دارند در حالیکه ϑ_3 همیشه منفی است و همچنین این نکته که ϑ_3 همیشه منفی است و تمام رنج دما را شامل می شود.



شکل ۳.۵: نمودار رابطه ی ظرفیت گرمایی-دما برای ϑ_1, ϑ_2 و ϑ_3 با $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ مشخص شده است. ($\hbar = c = k = 1, \lambda\pi G = 1$).

حال می خواهیم تفاوت بین C_{HUP} و C_{EGUP} را به شکل زیر بدست آوریم:

$$\Delta C_{EGUP} = C_{EGUP} - C_{HUP} = \frac{\hbar c^3 k \beta^2}{\lambda \pi G} - \frac{3 \alpha^2 \hbar^3 c^3}{32 \pi G k^3 T^4} - \frac{\hbar^3 \alpha^2 \beta^2 c^3}{16 \pi G k T^3} \quad (130.5)$$

که در معادله ی بالا جمله ی اول ناشی از ΔC_{GUP} و جمله ی دوم ناشی از ΔC_{EUP} و جمله ی آخر ناشی از پارامتر اختلالی است.

$$\Delta C_{EGUP} = \Delta C_{GUP} + \Delta C_{EUP} - \frac{\hbar^3 \alpha^2 \beta^2 c^3}{16 \pi G k T^3} \quad (131.5)$$

$$S_{EGUP} = \int C_{EGUP} \frac{dT}{T} = \frac{\hbar c^{\omega}}{\lambda \pi G k} \left(\frac{1}{2T^2} + \frac{3(\alpha \hbar c)^2}{16k^2 T^4} + \frac{k^2 \beta^2 \ln(T)}{c^2} + \frac{(\alpha \beta \hbar)^2}{4c^2 T^2} \right) \quad (132.5)$$

بعد از بدست آوردن آنترپپی سیاهچاله ی $EGUP$ به شکل بالا، در می یابیم که جمله ی اول ناشی از آنترپپی سیاهچاله ی EUP و جمله ی دوم ناشی از آنترپپی سیاهچاله ی GUP و جمله ی سوم جمله است که شامل پارامتر اختلالی یعنی هر دو پارامتر تعمیم یافتگی را در بردارد. سپس برای آزمودن صحت رابطه با فرض اینکه α به سمت صفر میل کند خواهیم دید که S_{EGUP} تبدیل به S_{GUP} می شود.

$$S_{GUP} = \frac{\hbar c^{\omega}}{\lambda \pi G k} \left(\frac{1}{2T^2} + \frac{k^2 \beta^2 \ln(T)}{c^2} \right) \quad (133.5)$$

همچنین در حالتی که β به سمت صفر میل می کند S_{EGUP} تبدیل به S_{EUP} می شود [۶۷]

$$S_{EUP} = \frac{\hbar c^{\omega}}{\lambda \pi G k} \left(\frac{1}{2T^2} + \frac{3(\alpha \hbar c)^2}{16k^2 T^4} \right) \quad (134.5)$$

در نهایت در حالیکه هر دو پارامتر تعمیم یافتگی یعنی α و β به سمت صفر میل می کنند این نتیجه رضایت بخش حاصل می شود که S_{EGUP} تبدیل به S_{HUP} می شود.

$$S_{HUP} = \frac{\hbar c^{\omega}}{\sqrt{6} \pi G k T^2} \quad (135.5)$$

حال با توجه به معادلات بالا μ_1, μ_2 و μ_3 را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mu_1 = \Delta S_{EGUP-EUP} = S_{EGUP} - S_{EUP}, \quad \mu_2 = \Delta S_{EGUP-GUP} = S_{EGUP} - S_{GUP}$$

$$\mu_3 = \Delta S_{EGUP-HUP} = S_{EGUP} - S_{HUP}$$

(136.5)

در نتیجه می توانیم μ_1, μ_2 و μ_3 را برحسب دما در شکل (۴.۵) نمایش دهیم و از این نمودار می توان نتیجه گرفت که μ_1 و μ_3 در دماهای بالا برهم منطبق هستند و همچنین با کاهش دما و در دماهای

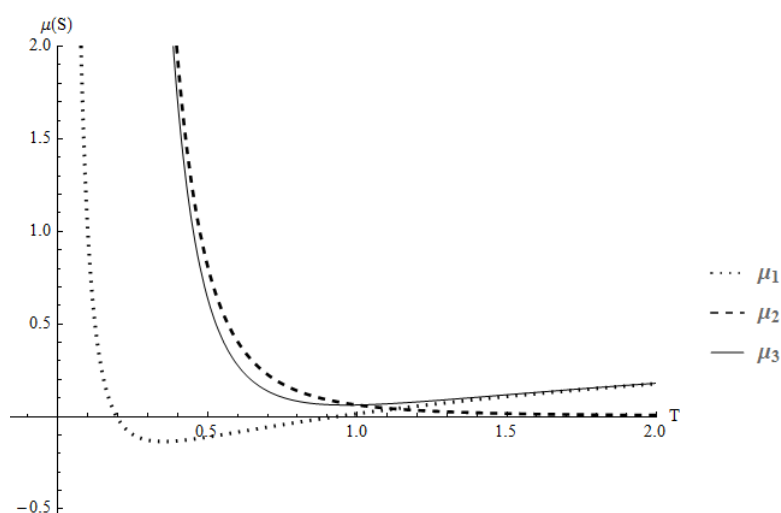
پایین μ_2 و μ_3 رفتار مشابهی دارند و همچنین شاهد این نکته هستیم که μ_1 و μ_2 در یک دمای مشخص همدیگر را قطع کرده و مقدار یکسانی در این دما دارند. حالا می خواهیم که تفاوت بین S_{HUP} و S_{EGUP} را به شکل زیر مشخص کنیم:

$$\Delta S_{EGUP} = S_{EGUP} - S_{HUP} = \frac{\hbar c^3 k \beta^2 \ln(T)}{\lambda \pi G} + \frac{3\alpha^2 \hbar^3 c^3}{128 \pi G k^3 T^4} + \frac{\alpha^2 \beta^2 \hbar^3 c^3}{32 \pi G k T^2} \quad (137.5)$$

پس می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$\Delta S_{EGUP} = \Delta S_{GUP} + \Delta S_{EUP} + \frac{\alpha^2 \beta^2 \hbar^3 c^3}{32 \pi G k T^2} \quad (138.5)$$

که نشاندهنده ی این نکته است که جمله ی اول ناشی از ΔS_{GUP} و جمله ی دوم ناشی از ΔS_{EUP} و جمله ی آخر ناشی از جمله ی اختلالی است.



شکل ۴.۵: نمودار رابطه ی آنزویی-دما برای μ_1 ، μ_2 و μ_3 با $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ مشخص شده است. ($\hbar = c = k = 1, \lambda \pi G = 1$).

نتیجه گیری

در آخر می خواهیم به نکات مهم و دستاورد هایی که در این کار به آنها دست یافتیم اشاره کنیم. ابتدا به بررسی حالات تعمیم یافته ای از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ پرداختیم که دارای کمینه ی تکانه و همچنین فرم دیگر آن دارای کمینه طول هستند که بررسی کردیم که این کمینه طول از مرتبه ی پلانک است. ویژه مقدار انرژی را برای مسئله ی ذره ی در جعبه و همچنین اثرا رامسوار-تاونزند را تحت جبر معرفی شده بررسی کردیم. سپس با اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ی بیان شده به بررسی معادله ی شرودینگر در یک بعد پرداخته و انرژی و تابع موج را در این حالت بررسی کردیم و همچنین با معرفی اصل عدم قطعیت بسط یافته به بررسی معادله ی نسبیتی کلاین گوردون در دو بعد پرداخته و تراز های انرژی را در این حالت بدست آورده و تبهگنی را بررسی کردیم. همچنین با معرفی اصل عدم قطعیت بسط یافته در فضای نسبیت خاص، رویکرد جبری معادلات را در این فضا بررسی کردیم از طرفی با استفاده از جبر هایزنبرگ و معادلات اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و بسط یافته ی بیان شده به بررسی معادلات تغییر شکل یافته ای برای مکان در حضور پتانسیل گرانشی و همچنین برای فرکانس در حضور پتانسیل نوسانگر هارمونیک دست یافتیم که در حالت حدی به معادلات معمول تبدیل می شوند. سپس با معرفی دمای آنروح به بررسی دمای ذره و پاد ذره نزدیک به افق رویداد سیاهچاله در حضور اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و بسط یافته و همچنین بسط اصل عدم قطعیت تعمیم یافته پرداختیم و از ای طریق جرم و ظرفیت گرمایی و آنتروپی را برای حالات تعمیم یافته ی معرفی شده یافتیم. برای ادامه ی کار نیز می توان پیشنهاد هایی به صورت زیر ارائه نمود:

- ۱- با در نظر گرفتن سایر پتانسیل ها و نوشتن هامیلتونی می توان با در نظر گرفتن اصل عدم قطعیت بسط یافته و نمایش های این اصل به حل جبر هایزنبرگ پرداخت.
- ۲- با در نظر گرفتن سایر متریک ها می توان معادله ی انیشتین را برای سایر متریک ها حل نمود.

پیوست ۱

در این پیوست به حل معادله دیفرانسیلی درجه دوم شرودینگر می پردازیم. [۳۷-۳۸]

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\lambda_1 s^2 + \lambda_2 s - \lambda_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \right] \psi_n(s) = 0$$

برای بدست آوردن ویژه مقادیر خواهیم داشت:

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1), \quad \alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3), \quad \alpha_6 = \alpha_5^2 + \lambda_1, \quad \alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \lambda_2, \quad \alpha_8 = \alpha_4^2 + \lambda_3$$

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_4^2\alpha_8 + \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \quad \alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}),$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \quad \alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})$$

و انرژی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0$$

تابع موج در این روش به شکل زیر خواهد بود:

$$\psi_n(s) = s^{\alpha_{12}}(1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{13}/\alpha_3} P_n^{(\alpha_{10}-1, \alpha_{11}/\alpha_3 - \alpha_{10}-1)}(1 - 2\alpha_3 s)$$

حال تابع موج را به شکل زیر خواهیم داشت.

$$\psi_n(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s)$$

پیوست ۲

$$\begin{aligned} \langle |\hat{P}| \rangle &= \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} |P| g^*(P) g(P) \\ &= \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^2} |P| \frac{2\sigma^2}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-2\sigma^2 \left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sigma \int_0^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{\kappa}\right)^{\nu}} P \exp \left[-\nu \sigma^{\nu} \left(\frac{P}{1 - \frac{P}{\kappa}} \right)^{\nu} \right]$$

با جایگذاری $\xi = \frac{P}{1 - \frac{P}{\kappa}}$ در معادله:

$$\langle |\hat{P}| \rangle = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sigma \int_0^{\infty} d\xi \left(\frac{\xi}{1 + \xi/\kappa} \right)^{\nu} e^{-\nu \sigma^{\nu} \xi^{\nu}}$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sigma \int_0^{\infty} d\xi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{n+1}}{\kappa^n} \right) e^{-\nu \sigma^{\nu} \xi^{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\kappa \sqrt{\nu})^n \sigma^{n+1}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\nu}\right)$$

بطور مشابه خواهیم داشت:

$$\langle \nu \rangle = \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^{\nu}} P^{\nu} g^*(P) g(P)$$

$$= \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{|P|}{\kappa}\right)^{\nu}} P^{\nu} \frac{\nu \sigma^{\nu}}{(\nu \pi \sigma^{\nu})^{1/\nu}} \exp \left[-\nu \sigma^{\nu} \left(\frac{P}{1 - \frac{|P|}{\kappa}} \right)^{\nu} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sigma \int_0^{\kappa} \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{\kappa}\right)^{\nu}} P^{\nu} \exp \left[-\nu \sigma^{\nu} \left(\frac{P}{1 - \frac{P}{\kappa}} \right)^{\nu} \right]$$

و همچنین با جایگذاری $\xi = \frac{P}{1 - \frac{P}{\kappa}}$:

$$\langle \nu \rangle = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sigma \int_0^{\infty} d\xi \left(\frac{\xi}{1 + \xi/\kappa} \right)^{\nu} e^{-\nu \sigma^{\nu} \xi^{\nu}}$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sigma \int_0^{\infty} d\xi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \xi^{n+1}}{\kappa^{n-1}} \right) e^{-\nu \sigma^{\nu} \xi^{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\kappa \sqrt{\nu})^n \sigma^{n+1}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\nu}\right)$$

پیوست ۳

تبدیلات فوریه برای $g(P) = (1 - |P|)^{3/2}$ بصورت زیر است:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \frac{dP}{(1 - |P|)^2} (1 - |P|)^{3/2} e^{\frac{ixP}{1 - |P|}}$$

برای $x > 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{P}{1 - |P|} = \xi$$

و داریم:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi e^{ix\xi}}{(1 + |\xi|)^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d\xi \cos(x\xi)}{(1 + \xi)^{3/2}}$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos x \int_1^{\infty} \frac{dy \cos(xy)}{y^{3/2}} + \sin x \int_1^{\infty} \frac{dy \sin(xy)}{y^{3/2}} \right]$$

با انتگرال گیری

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dy \cos(xy)}{y^{3/2}} = [-2y^{-1/2} \cos(xy)]_1^{\infty} + 2x \int_1^{\infty} y^{-1/2} \sin(xy) dy$$

$$= 2 \cos x - 2x \int_1^{\infty} y^{-1/2} \sin(xy) dy$$

با جایگذاری $xy = \frac{\pi}{2} t^2$:

$$I_1 = 2 \cos x - 2\sqrt{2\pi x} \int_{\sqrt{\frac{yx}{\pi}}}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

$$= 2 \cos x - \sqrt{2\pi x} \left[1 - 2S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right) \right]$$

بطور مشابه داریم:

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dy \sin(xy)}{y^{3/2}} = 2 \sin x + \sqrt{2\pi x} \left[1 - 2C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right) \right]$$

با جایگذاری $1 + \xi = y$

مراجع

- [۱] فرداد، ابوالفضل و ندا حجازی. شرحی بر مکانیک کوانتوم دانشگاه شهید رجایی. جلد دوم. تهران، انتشارات دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی (۱۳۸۷)
- [۲] ایرانپور، فائزه. دکتر فاطمه احمدی، بررسی اثر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته بر معادله شرودینگر یک ذره، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران، (۱۳۹۳)
- [3] Heisenberg, W. (1925) Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen Zeitschrift für physic 33 879-893.
- [4] Heisenberg, W. (1926) Quantenmechanik Die Naturwissenschaften 14 899- 894.
- [5] Heisenberg, w. (1927) Ueber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik and Mechanik zeitschrift für physic 43 172-198. English translation in (Wheeler and Zurek, 1983), pp. 62-84.
- [6] Kenard E. H. Zur Quantum mechanik einfacher Bewegungstypen Zeitscharift fur Physic, (1927) 44 326-352.
- [7] Veneziano, G., 1986. A stringy nature needs just two constants. Eur. Phys. Lett.2: 199.
- [8] Konishi, K., Paffuti, G., and Provero, P., 1990. Minimum Physical Length and the Generalized Uncertainty Principle in String Theory. Phys. Lett. B 234: 276.
- [9] S. Hossenfelder, [arXiv:hep-ph/0410122v1], (2004).
- [10] S. Hossenfelder, M. Bleicher and et al, [arXiv:hep-th/0305262v2], (2003).

-
- [11] Nyambuya, Golden G. *Prespacetime Journal* 3.10 (2012).
- [12] Tajmar, Martin. "Derivation of the Planck mass from gravitational polarization of the quantum vacuum." arXiv preprint arXiv:1207.6997 (2012).
- [13] R. J. Adler, P. Chen and D. I. Santiago, *Gen. Rel. Grav.* 33, 2101 (2001) [arXiv:gr-qc/0106080].
- [14] P. Chen and R. J. Adler, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 124, 103 (2003) [arXiv:gr-qc/0205106];
- [15] M. Cavaglia, S. Das and R. Maartens, *Class. Quant. Grav.* 20, L205 (2003) [arXiv:hep-ph/0305223];
- [16] Bolen, Brett, and Marco Cavaglia. *General Relativity and Gravitation* 37.7 (2005): 1255-1262.
- [17] S. Ghosha, S. Mignemi *Quantum mechanics in anti-de Sitter space*
- [18] G. Veneziano, *Europhys. Lett.* 2, 199 (1986).
- [19] M. Maggiore, *Phys. Lett.* B304, 63 (1993).
- [20] M. Maggiore, *Phys. Lett.* B319, 83 (1993).
- [21] F. Scardigli, *Phys. Lett.* B452, 39 (1999);
- [22] R.J. Adler and D.I. Santiago, *Mod.Phys. Lett.* A14, 1371 (1999).
- [23] M. Maggiore, *Phys. Rev. D* 49, 5182 (1994) [arXiv:hep-th/9305163];
- [24] F. Scardigli, *Phys. Lett. B* 452, 39 (1999) [arXiv:hep-th/9904025];
- [25] Sepangi, H.R., Shakerin, B., and Vakili, B., 2009. *Class. Quant. Grav.* 26: 065003.
- [26] S. Mignemi, *Mod. Phys. Lett. A* 25, 1697 (2010).
- [27] S. Mignemi, *Annalen Phys.* 522, 924 (2010).

-
- [28] W. S. Chung and H. Hassanabadi, *Mod. Phys. Lett. A* 32, 1750138 (2017).
- [29] Won Sang Chung and H. Hassanabadi, *Journal of the Korean Physical Society*, Vol. 71, No. 1 (2017).
- [30] Won Sang Chung and H. Hassanabadi, *Phys. Lett. A* 381, 949 (2017).
- [31] B. Mirza, M. Zarei, *Phys. Rev. D* 79,125007 (2009).
- [32] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995).
- [33] S. Mignemi, *Phys. Rev. D* 84, 025021 (2011).
- [34] C. Bambi and F.R. Urban, *Class. Quantum Grav.* 25, 095006 (2008).
- [35] Chargui, Y., L. Chetouani, and A. Trabelsi. *Communications in Theoretical Physics* 53.2 (2010): 231.
- [36] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A Math. Gen.* 22, L817 (1989).
- [37] P.A. Cook, *Lett. Nuovo Cimento* 10, 419 (1971).
- [38] G. Amelino-Camelia, *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 35 (2002).
- [39] G. Amelino-Camelia, *Phys. Lett. B* 510, 255 (2001).
- [40] Chung, Won Sang, and Hassan Hassanabadi, *The European Physical Journal C* 79.3 (2019): 213.
- [41] P. Pedram, *Phys. Lett. B* 714 (2012) 317
- [42] P. Pedram, *Phys. Lett. B* 718 (2012) 638
- [43] A.Ali, S.Das, E.Vagenas , *Phys.Lett.B*678, 497 (2009).
- [44] K. Nozari, P. Pedram, *EPL* 92 (2010) 50013
- [45] A.Ali, S.Das, E.Vagenas , *Phys.Rev.D*84, 044013 (2011).
- [46] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995).

- [47] Chung, Won Sang, Hassan Hassanabadi and Nasrin Farahani. *Modern Physics Letters A* (2019): 1950204.
- [48] Hamil, B. "Harmonic oscillator in Ads and dS spaces." *Indian Journal of Physics* (2019): 1-9.
- [49] M. Bojowald, A. Kempf, *Phys. Rev. D* 86, 085017 (2012).
- [50] R.J. Adler, D.I. Santiago, *Mod. Phys. Lett. A*14, 1371 (1999).
- [51] P. Pedram, *Adv. High Energy Phys.* 2013, 853696 (2013)
- [52] P. Pedram, *J. Phys. A: Math. Theor.* 45 (2012) 505304
- [53] W. S. Chung and H. Hassanabadi, *Physics Letters B* 785 127131 (2018).
- [54] W. S. Chung, and H. Hassanabadi. "New generalized uncertainty principle from the doubly special relativity." *Physics Letters B* 785 (2018): 127-131.
- [55] S. Das, E. Vagenas, A.Ali, *Phys. Lett. B* 690, 407 (2010); Erratum-ibid.692, 342 (2010).
- [56] K. Jahankohan, S. Zarrinkamar and H. Hassanabadi, *Quantum Stud.: Math. Found.*, 3: 109(2016).
- [57] F. Ghobakhloo and H. Hassanabadi, *Advances in High Energy Physics Volume 2016*, Article ID 2045313, 4 pages (2016).
- [58] H. Hassanabadi, P. Hooshmand and S. Zarrinkamar, *Few-Body Syst.*, 56:1927, (2015).
- [59] Chung, Won Sang, and Hassan Hassanabadi. *Physics Letters B* 785 (2018): 127-131.
- [60] Vahedi, Javad, Kouros Nozari, and Pouria Pedram. *Gravitation and Cosmology* 18.3 (2012): 211-215.
- [61] J. Magueijo and L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.* 88, 190403 (2002).
- [62] A.J.M. Medved, E.C. Vagenas, *Phys. Rev. D* 70 (2004) 124021.

- [63] Won Sang Chung and Hassan Hassanabadi, DSR-GUP, Maximally localized state, and Black hole thermodynamics(unpublished)
- [64] D. J. Gross and P. F. Mende, Nucl. Phys. B 303, 407 (1988).
- [65] E. Witten, Phys. Today 49, 24 (1996).
- [66] Zeynali, K., F. Darabi, and H. Motavalli, Modern Physics Letters A 27.39 (2012): 1250227.
- [67] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D.7, 2333, (1973).
- [68] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D.9, 3292, (1974).
- [69] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett.26, 1344 (1971).
- [70] S. W. Hawking, Nature 248, 30, (1974).
- [71] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199, (1975).
- [72] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).
- [73] A. Kempf, Phys. Rev. D 54, 5174 (1996).
- [74] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [75] Tkachuk, V. M. Physical Review A 86.6 (2012): 062112.
- [76] W. G. Unruh, Phys. Rev. D 14, 870 (1976).
- [77] Wald, R. M. "General relativity. the university of Chicago." Chicago. Sect 6 (1984)
- [78] Oas, Gary. "Full derivation of the Schwarzschild solution."
- [79] W. S. Chung, H. Hassanabadi, Physics Letters B 793 (2019): 451-456.
- [80] M. Sen and Z. Hua, Chinese Physics C38, 045102 (2014).
- [81] R. Eisberg, R. Resnick, Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles, New York: Wiley,(1985)

-
- [82] Maggiore, Michele, Physics Letters B 319.1-3 (1993): 83-86.
- [83] Ikot, Akpan N., et al. Journal of Information and Optimization Sciences 37.1 (2016): 101-109.
- [84] S. Mignemi, PHYSICAL REVIEW D 84, 025021 (2011)
- [85] N. Farahani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, Investigation of Unruh temperature of Black holes by using of EGUP formalism(submitted)

Abstract In this thesis, we introduce the generalized uncertainty principle and we expect to obtain standard relation in limited state. We describes how to ocheive the generalized uncertainty principle (GUP) and find that this generalized uncertainty principle has a minimal length, that consequence with the string theory that generalized parameter corresponding with Planck length. Also we introduce the extended uncertainty principle (EUP) that in limited state change to Heisenberg uncertainty principle and it has a non zero minimum uncertainty in momentum. Also we know that GUP and EUP and extended generalized uncertainty principle (EGUP) are modified equation from Heisenberg uncertainty principle. in this thesis we obtain relativistic and non relativistic equation with modified uncertainty principle. Then we investigate algebraic approach with doubly special relativity on generalized uncertainty principle. Also we obtain modified equation for position and frequency with using Heisenberg algebra in GUP and EUP. Then we have used the extended generalized uncertainty principle to investigate Unruh temperature and thermodynamic properties of a black hole. This study starts from a brief perusal of the Heisenberg uncertainty principle and some physical and mathematical discussion for obtaining the generalized and the extended generalized uncertainty principle. Then, using the discussion, it has been shown in detail how Unruh temperature, mass, specific heat and entropy of a black hole may be extended.

Keywords: Generalized uncertainty principle, Extended uncertainty principle, Schrodinger equation, Doubly special relativity, Unruh temperature, Klein-Gordon equation



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics Sciences

**Investigation of deformed quantum
mechanics with approach of deformed
special relativity**

Student

Nasrin Farahani

Supervisor

Dr. Hassan Hassanabadi

July 2019