بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

ساختار خوشه‌ای برای ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne با برهم‌کنش بین پوسته بسته و خوشه‌ها

نگارنده: مریم مرشدلو

استاد راهنما: دکتر محمدرضا شجاعی

استاد مشاور: دکتر محسن موسوی

شهریور ۱۳۹۸

با ژرفترین سپاس‌ها:

حمد و سپاس یکتای بی همتا را که لطفش بر ما عیان است ، ادای شکرش را هیچ زبان و دریای فضلش را هیچ کران نیست و اگر در این وادی هستیم همه محبت اوست. خدایا اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و نه توان تشکر از بندگان تو را، اما برحسب وظیفه تشکر و قدردانی می‌کنم از:

– محضر ارزشمند پدر، مادر و خانواده ی عزیزم به خاطر همه‌ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام دادند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

– محضر استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال این پایان نامه بوده است.

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

– محضر اساتید فرزانه جناب آقای دکتر علی اکبر رجبی و جناب آقای دکتراحسان ابراهیمی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند.

– اساتید فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.

– آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.

– آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

– الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

– پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

تقدیم اثر

به دو بال پرواز زندگانیم

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکراز

دکتر محمدرضا شجاعی که مرا در مسیر یادگیری صبورانه راهنمایی نموداند و سپاس از زحمات دکتر محسن موسوی

تعهد نامه

اینجانب مریم مرشدلو دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی ساختارخوشه‌ای برای ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne با برهم‌کنش بین پوسته‌ی بسته و خوشه‌ها تحت راهنمائی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ **امضای دانشجو**

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

محاسبه انرژی ایزوتوپ‌های زوج- زوج با استفاده از مدل جمعی در فیزیک هسته‌ای دارای پیچیدگی‌های خاصی است. لذا برای بررسی و مطالعه هسته‌های سبک از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود که یکی از این روش‌ها، استفاده از مدل خوشه‌ای می‌باشد. مدل خوشه‌ای از جمله مدل‌های موفق و جدید در بررسی خواص ایزوتوپ‌ها می‌باشد که می‌تواند توصیف خوبی از خواص استاتیکی، الکترومغناطیسی و دیگر خواص هسته‌ها را به همراه داشته باشد. بر اساس آخرین یافته‌های فیزیکدانان، آرایش خوشه‌ای را نوعاً نمی‌توان در حالت پایه هسته‌ها جستجو کرد بلکه عموماً این خوشه شدن در حالت‌های برانگیخته‌ای از هسته‌ها اتفاق می‌افتد و برای ایجاد این تغییر شکل سیستم باید به اندازه کافی انرژی داشته باشد که آن‌ها را در آستانه واپاشی به صورت آن خوشه‌ها قرار دهد. پدیده خوشه شدن در حالت‌های مختلفی صورت می‌گیرد که با استفاده از این مدل می‌توان برهم‌کنش پوسته بسته و خوشه را انتخاب کرده و برخی از خواص استاتیکی ایزوتوپ‌ها شامل ویژه مقادیر انرژی، تابع موج و شعاع باری را محاسبه کنیم. حال با درنظرگرفتن هریک از ایزوتوپ‌ها به صورت خوشه‌ای به حل معادله شرودینگر و معادله کلاین‌گوردن با استفاده از روش پارامتری NU می‌پردازیم. با استفاده از مدل پیشنهادی می‌توان یک سیستم بس ذره‌ای را به یک سیستم دو ذره‌ای تبدیل کرده و با در نظرگرفتن پتانسیل مناسب برای برهم‌کنش بین خوشه‌ها و استفاده از معادلات غیرنسبیتی و نسبیتی برخی از خواص استاتیکی شامل تابع‌موج، ویژه‌مقادیرانرژی و شعاع باری را برای هریک از ایزوتوپ‌های زوج- زوج محاسبه کرده و مقادیر آن را با داده‌های تجربی مقایسه کنیم.

کلمات کلیدی: مدل خوشه‌ای، پتانسیل ایکارت و هولسن، روش تحلیلی Nikiforov-Uvarov ، ^{14}C و ^{20}Ne

مقالات کنفرانسی

۱. مرشدلو، مریم ؛ شجاعی، محمدرضا ؛ حاجی حسینی، حسن " استفاده از ساختار خوشه‌ای در محاسبه انرژی و شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne " *کنفرانس فیزیک ایران، تبریز، ۳-۷ شهریور ۱۳۹۸*

فهرست

فصل اول ۱
آشنایی با فیزیک هسته‌ای ۱
۱-۱ مقدمه ۲
۱-۲ خواص هسته‌ای ٤
۱-۱-۲ انرژی بستگی ۴
۱-۲-۲ پاریته ۶
۱-۲-۳ شعاع هسته ۶
۱-۲-۴ اسپین هسته ۷
۱-۲-۵ ایزواسپین ۹
۱-۳ دسته‌بندی هسته‌ها ۱۰
۱-۴ مروری بر مدل‌های هسته‌ای ۱۱
۱-۴-۱ مدل خوشه‌ای ۱۲
۱-۵ بررسی خوشه شدن ۱٤
۱-۶ پدیده خوشه شدن در فیزیک هسته‌ای ۱۸
۱-۷ مطالعات تجربی مربوط به ساختارهای خوشه‌ای در هسته‌ها ۲۰
۱-۸ رهیافت‌های تئوری اخیر در ارتباط با خوشه‌های هسته‌ای ۲۱
۱-۹ شکل عمومی پتانسیل‌های نوکلئون- نوکلئون ۲۲
۱-۱۰ مدل نیروی تبادل ۲٤
۱-۱۱ توجیح حضور نیروی تبادلی در هسته‌ها ۲٤
۱-۱۲ نظریه یوکاوا و ذره‌ی یوکاوا ۲٦
۱-۱۳ مروری بر ویژگی‌های کربن ۲۸
۱-۱۴ مروری بر ویژگی‌های اکسیژن ۳٦

۱-۱۵ مروری بر ویژگی‌های نئون ۳۷
۱-۱۶ مروری بر ویژگی‌های منیزیم ۳۸
۱-۱۷ مروری بر ویژگی‌های سیلسیوم ۴۰
۱-۱۸ مروری بر ویژگی‌های گوگرد ۴۲
فصل دوم ۴۵
روش‌های تحلیلی و عددی حل مساله ۴۵
۲-۱ مقدمه ۴۶
۲-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی ۴۸
۲-۳ متغییرهای فوق کروی ۴۹
۲-۴ نیروهای چند جسمی ۵۱
۲-۵ کلیات روش NU ۵۳
۲-۶ روش‌های حل عددی ۵۷
۲-۷ روش PNU ۵۸
۲-۸ ذرات نسبیتی با اسپین صفر ۵۹
۲-۹ بررسی غیر نسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU ۶۰
۲-۱۰ بررسی نسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU ۶۳
فصل سوم ۶۷
محاسبه برخی خواص استاتیکی ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne با استفاده از مدل خوشه‌ای ۶۷
۳-۱ مقدمه ۶۸
۳-۲ بررسی غیر نسبیتی ایزوتوپ‌های زوج- زوج با استفاده از مدل خوشه‌ای ۷۰
۳-۳ بررسی نسبیتی ایزوتوپ‌های زوج- زوج با استفاده از مدل خوشه‌ای ۷۵
۳-۴ بررسی ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne به کمک معادله شرودینگر D بعدی ۸۱
۳-۵ بررسی ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne به کمک معادله کلاین- گوردن در حالت D بعدی ۸۷
۳-۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۹۱

۳-۷ منابع ۹۳

فهرست شکل‌ها

شکل (۱-۱): رفتار انرژی بستگی میانگین هسته‌های مختلف برحسب عدد جرمی A. ۵

شکل (۱-۲): نمودار توزیع بار توسط پراکندگی الکترون ۷

شکل (۱-۳): نمودار انرژی بستگی هر هسته براساس تعداد پیوندهای ممکن بین ذرات آلفا ۱۳

شکل (۱-۴): پتانسیل هافستد- تلر ۱۵

شکل (۱-۵): پتانسیل پدیده شناختی برحسب فاصله ذرات در هسته‌های آلفا مزدوج ۱۶

شکل (۱-۶): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون- پروتون ۲۵

شکل (۱-۷): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{14}C ۳۶

شکل (۱-۸): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{16}O ۳۷

شکل (۱-۹): نمودار ترازهای ایزوتوپ ^{20}Ne ۳۸

شکل (۱-۱۰): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{24}Mg ۴۰

شکل (۱-۱۱): نمودار ترازهای انرژِی ایزوتوپ ^{28}Si ۴۱

شکل (۱-۱۲): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ^{32}S ۴۳

شکل (۲-۱): طرح شماتیک نیروهای دو جسمی و سه جسمی ۵۲

شکل (۲-۲): نمودار فایمن نیروی سه جسمی ۵۳

شکل (۲-۳): نمودار تغییرات پتانسیل بر حسب r به ازای مقادیر مختلف A و B و مقادیر ثابت C و δ ۶۱

شکل (۲-۴): نمودار پتانسیل بر حسب r به ازای مقادیر ثابت A، B ، K و مقادیر مختلف δ ۶۴

شکل (۳-۱): نمودار پتانسیل برحسب r ۷۱

شکل(۳-۲): رفتار تقریب به کار برده شده برای مقادیر مختلف $\alpha\ (fm^{-1})$. ۷۲

شکل (۳-۳): تغییرات پتانسیل به ازای مقادیر مختلف V0، V1 و K و مقدار ثابت α ۷۷

فهرست جدول‌ها

جدول(۱-۱): اعداد کوانتومی وابسته به زوج یا فرد بودن نوکلئون‌ها ۸

جدول (۱-۲): برخی خصوصیات ایزوتوپ‌های کربن. ۳۳

جدول (۱-۲): برخی خصوصیات ایزوتوپ‌های کربن ۳۴

جدول (۲-۱): ضرایب c_i(i=1,…,13) ۵۹

جدول (۳-۱): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های زوج- زوج در توصیف غیر نسبیتی ۷۴

جدول (۳-۲): شعاع باری ایزوتوپ‌های زوج- زوج در حالت پایه.....۷۵

جدول (۳-۳): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های زوج- زوج در توصیف نسبیتی ۸۰

جدول (۳-۴): شعاع باری ایزوتوپ‌های زوج- زوج در حالت پایه.....۸۱

جدول (۳-۵): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در توصیف غیر نسبیتی ۸۶

جدول (۳-۶): شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در حالت پایه ۸۶

جدول (۳-۷): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در توصیف نسبیتی..۸۹

جدول (۳-۸): شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در حالت پایه ۹۰

ص

فصل اول

آشنایی با فیزیک هسته‌ای

۱-۱ مقدمه

با ظهور فیزیک هسته‌ای، دانشمندان به درک درستی از هسته و خواص هسته‌ای دست یافتند، اما باید توجه داشت برخی از مسائل فیزیک هسته‌ای، مانند ماهیت دقیق نیروهایی که در پایداری هسته نقش دارند، هنوز ناشناخته هستند. فیزیک هسته‌ای به بررسی و مطالعه ساختار هسته و برهم‌کنش بین اجزای تشکیل دهنده آن می‌پردازد. فیزیکدانان می‌توانند سیستم‌های چند ذره‌ای را در قالب تقریب‌های معینی توضیح دهند که به وسیله آزمایشات تجربی خالصی که آن‌ها در پی توجیه آن هستند تعیین می‌شود. تاکنون به دلیل متنوع بودن ساختار ماده هسته‌ای، مدل‌های متعددی برای توصیف ویژگی‌های هسته‌ای مطرح شده است. منظور از مدل‌سازی در فیزیک هسته‌ای، ارائه توصیف تقریبی سیستم هسته‌ای می‌باشد اما تا به حال مدل کلی و جامعی که بتوان با به کارگیری آن پتانسیل هسته را محاسبه کرد و ساختار هسته را براساس آن نوشت، ارائه نشده است .

دراتم‌ها به دلیل مشخص بودن نیروهای توصیف کننده اتم، مدل اتمی بطور صریح و واضحی قابل بیان است. اما در هسته‌ها، شکل قطعی برای آن‌ها نمی‌توان یافت. ماهیت نیروهای هسته‌ای به گونه‌ای است که برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها تنها از طریق نیروهای متقابل دو جسمی نیست بلکه از طریق نیروهای سه جسمی صورت می‌گیرد [۱،۲]. بنابراین مدل‌های مختلفی برای توصیف ساختار هسته‌ها ارائه شده‌اند که هنوز هیچ کدام قادر به توصیف و تشریح ساختار پیچیده هسته‌ها نبوده‌اند. در هنگام ارائه و پیشنهاد یک

مدل هسته‌ای باید توجه کنیم که این مدل تمام خواص هسته‌های پایا و ناپایا را به طورکامل و به اندازه‌ی قابل قبولی پوشش دهد و در توصیف هسته‌های سبک و سنگین دچار مشکل نشود [۳،۴]. از دیرباز تاکنون در تمام شاخه‌های فیزیک و در تمام مقیاس‌ها، ذرات و اجرام تمایل به هم‌پیوستن و جمع شدن با یکدیگر را داشته‌اند، که این تمایل به هم‌پیوستن ذرات باعث می‌شود رفتار نامنظم و غیر همبسته ذرات مستقل به صورت ساختارهای منظم و شبه کریستالی، ساده سازی می‌شود. اساس این مسئله باعث افزایش انرژی ذرات سیستم مورد نظر شده و از سوی دیگر سبب کاهش انرژی پتانسیل و در نتیجه افزایش ثبات و پایداری در سیستم‌ها می‌شود. فیزیکدانان دریافته‌اند که در کهکشان‌ها نیز این تمایل وجود دارد و مواد به صورت ساختارهای شبه ریسمان و به هم‌پیوسته با یکدیگر جمع می‌شوند و از طرف دیگر، دانشمندان معتقدند که موجودات زنده نیز به این تشخیص رسیده‌اند که ساختارهای جمعی کمک قابل توجهی به پیشرفت تکاملی سیستم خواهد کرد. این حقایق باید بشر را به این فکر وادارد که رخداد پدیده خوشه شدن یا به هم‌پیوستن می‌تواند در مقیاس‌های کوچک هم صحت داشته باشد. چرا که ذرات زیراتمی نیز اهمیت نظم و به هم‌پیوستن را دریافته‌اند. اتم‌ها در فاز مایع یا گاز، مولکول‌ها را تشکیل می‌دهند و در فاز جامد به صورت بلورین در می‌آیند. همچنین، کوارک‌ها نیز خود را در قالب هادرون‌ها تنها با آرایشی از ترکیب‌های دوتایی و سه‌تایی محصور کرده‌اند. بنابراین اگر چنین وضعیتی برای هسته‌ها یافت نشود، جای تعجب وجود دارد. براساس دستاوردهای محققین مبنی بر اینکه سیستم‌های هسته‌ای تابع قوانین مکانیک کوانتومی می‌باشند، هسته‌ها نیز مانند بسیاری از سیستم‌های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرارآمیز هستند که باید به توصیف رفتار میکروسکوپیکی[1]آن‌ها پرداخت. بدین ترتیب خواص آن بسیار سخت‌تر و پیچیده‌تر از خواص اجسام ماکروسکوپیکی[2] است [۵،۶].

[1] Microscopic
[2] Macroscopic

ما در این بخش، برخی از تعاریف را به صورت مختصر توضیح داده و بطور کامل به بررسی مدل خوشه‌ای می‌پردازیم.

۲-۱ خواص هسته‌ای

فیزیک هسته‌ای به مطالعه و بررسی ساختار هسته و برهم‌کنش بین اجزای سازنده‌ی آن می‌پردازد.

خواص هسته‌ها به دو دسته‌ی:

۱- خواص استاتیکی هسته‌ها شامل: جرم، انرژی بستگی، شعاع باری، بارالکتریکی، گشتاور دوقطبی مغناطیسی، گشتاورچهارقطبی الکتریکی، اسپین، پاریته و انرژی برانگیختگی می‌باشد که وابسته به زمان نبوده و باگذشت زمان هیچ تغییری درآن اتفاق نمی‌افتد [۷].

۲- خواص دینامیکی هسته: این خواص وابسته به زمان بوده و با گذشت زمان تغییر می‌کند. مانند احتمال واپاشی و احتمال واکنش هسته‌ها که در زیر به توصیف مختصری از برخی خواص استاتیکی می‌پردازیم.

۲-۱-۱ انرژی بستگی

انرژی بستگی هسته اختلاف بین جرم هسته‌ای و مجموع جرم اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن است.

$$B(A,Z) \approx N m_n C^2 + Z m_p C^2 - m(A,Z) C^2$$

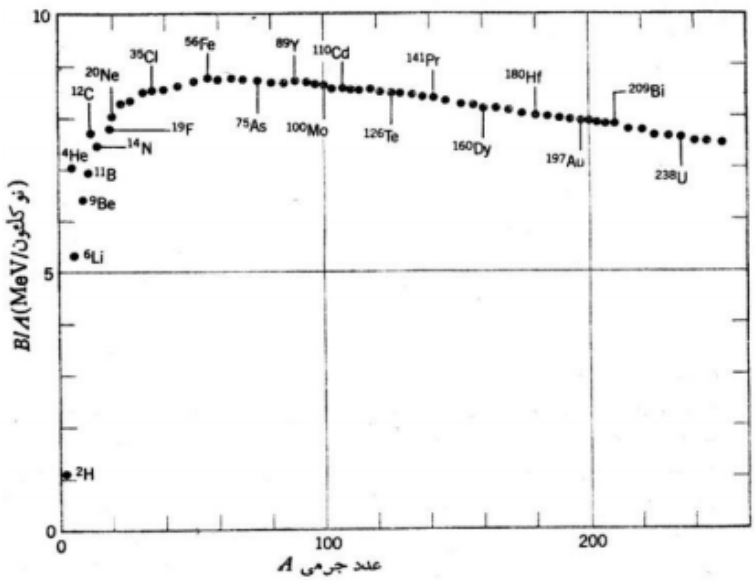
انرژی بستگی هر نوکلئون برحسب $\frac{B}{A}$ محاسبه می‌شود که تابعی از A است و مقدار $\frac{B}{A}$ با افزایش A در هسته‌های سبک افزایش می‌یابد و به یک پهن‌شدگی در حدود A = 55-60 می‌رسیم.

و در ادامه به عنوان تابعی از A کاهش می‌یابد. در نتیجه با همجوشی هسته‌های سبک و یا با شکافت هسته‌های سنگین، با بررسی رفتار انرژی بستگی متوسط در محدوده‌ی جرمی هسته‌های سبک تا سنگین، انرژی آزاد می‌شود. علاوه براین مشاهده می‌شود که برای هسته‌های پایدار که در ناحیه‌ی جرمی A>12 قرار دارند، انرژی بستگی B متناسب با عدد جرمی است یعنی:

$$B(A,Z) \approx A \times 8MeV$$

و به طور دقیق‌تر به ازای 12< A<225 داریم:

$$7.7(MeV) < \frac{B(A,Z)}{A} < 8.8(MeV)$$



شکل (۱-۱): رفتار انرژی بستگی میانگین هسته‌های مختلف برحسب عدد جرمی A [۷].

۱-۲-۲ پاریته[1]

هامیلتونی‌های قوی هسته‌ای و الکترومغناطیسی، پاریته را پایسته نگه می‌دارند. بنابراین ویژه حالت‌ها به دو دسته از حالات که هر کدام پاریته مشخص $\pi = +1$ یا $\pi = -1$ دارند تقسیم می‌شوند و هامیلتونی، این دو دسته را با هم مخلوط نمی‌کند. در ساختار هسته‌ای، پاریته کل از پاریته ذاتی نوکلئون $\pi_{\text{int}} = +1$ و پاریته مربوط به اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون $\pi_l = (-1)^l$ نشأت می‌گیرد. پاریته کل هسته، برابر حاصل ضرب پاریته کل نوکلئون‌های آن می‌باشد.

$$\pi = \pi_l \, \pi_{\text{int}}(i) \, \pi_l(i) = \pi_j (-1)^{l\,j} \qquad (۱-۱)$$

و معمولا حالت‌های پایه و ویژه‌حالت‌ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که پاریته مشخصی داشته باشند. هامیلتونی ضعیف هسته‌ای، پاریته را پایسته نگه نمی‌دارد. به عنوان یک اختلال[2]، عناصر ماتریسی هامیلتونی ضعیف نوعاً از مرتبه چند eV یا کم‌تر هستند. بنابراین اختلال پاریته را می‌توان از نظریه اختلال مرتبه اول محاسبه کرد [۸].

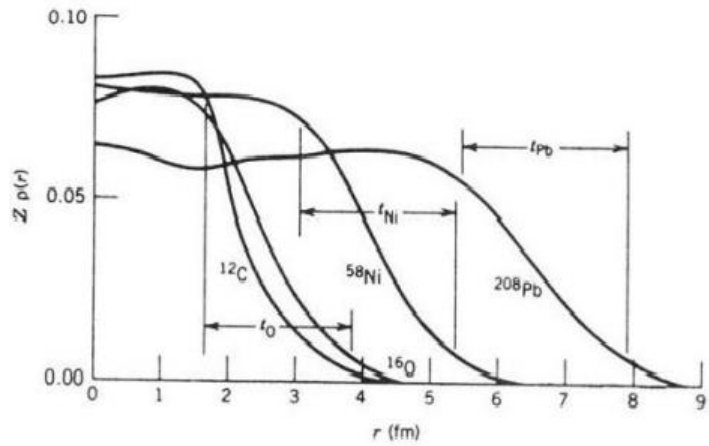
۱-۲-۳ شعاع هسته

با وجود اینکه اثرات کوانتومی درون هسته بسیار زیاد است ولی می‌توان نشان داد که حجم هسته V با تقریب خوبی با عدد جرمی A متناسب است و هر نوکلئون حجمی در حدود $V_N = 7.2 fm^3$ اشغال می‌کند. در تقریب اول، هسته پایدار و کروی است که حجمی در حدود $V \cong AV_0$ را اشغال می‌کند که در آن شعاع هسته از رابطه زیر بدست می‌آید:

[1] Parity
[2] Disorder

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \qquad r_0 = 1.2 fm \qquad (۲-۱)$$

نمودار زیر نحوه توزیع بار برحسب شعاع را به خوبی نمایش می‌دهد:



شکل (۱-۲): نمودار توزیع بار توسط پراکندگی الکترون [۷]

۱-۲-۴ اسپین[1] هسته

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر بفرد I مشخص می‌کنند که نمایانگر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون‌های هسته می‌باشد. بردار I را می‌توان به‌صورت حاصل جمع مولفه‌های مداری و ذاتی تکانه ذاتی و تکانه زاویه‌ای در نظر گرفت:

$$I = \sum_{i=1}^{A} (\vec{l}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^{A} \overrightarrow{J_i} \qquad (۳-۱)$$

عدد کوانتومی I ممکن است بسته به اینکه تعداد نوکلئون‌ها زوج یا فرد باشد مقادیر درست یا نیم صحیح را به خود اختصاص دهد.

[1] Spin

جدول(۱-۱): اعداد کوانتومی وابسته به زوج یا فرد بودن نوکلئون‌ها [۹]

I	Z	A
درست	زوج	زوج
نیم درست	زوج	فرد
درست	فرد	زوج
نیم درست	فرد	فرد

و همچنین عدد کوانتومی I رابطه ساده‌ای با بردار $\vec{I}$ دارد:

$$\left|\vec{I}\right| = \sqrt{I\,(I+1)\hbar} \qquad (۴-۱)$$

$$I_z = m_I \hbar \qquad (m_I = I, I-1, \ldots, -I+1, -I) \qquad (۵-۱)$$

تنها علت اینکه در رابطه (۱-۳) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف‌نظر شده است می‌تواند این باشد که، برهم‌کنش‌هایی مانند آن‌هایی که حاصل از میدان‌های الکترومغناطیسی هستند به اندازه کافی قدرتمند نمی‌باشند که شرایط تغییر در ساختمان داخلی هسته و یا از هم شکستن جفت شدگی نوکلئون‌ها را فراهم کنند.

۱-۲-۵ ایزواسپین [1]

هایزنبرگ[2] با ایده گرفتن از نظریه اسپین، مفهوم ریاضی جدیدی به نام ایزوتوپ اسپین یا ایزواسپین را معرفی کرد. او پیشنهاد کرد، همانطورکه در حضور میدان الکتریکی خطوط طیفی یکی هستند و با ظهور میدان مغناطیسی به چند خط دیگر شکافته می‌شوند، نوکلئون‌ها نیز در مقابل نیروی هسته‌ای بصورت یک ذره در نظر گرفته می‌شوند. اما با ایجاد میدان الکترومغناطیسی به دو ذره با ایزواسپین متفاوت تبدیل می‌شوند. استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزواسپین می‌شود. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزواسپین معرفی می‌شود [۹،۷]، بطوری که دو حالت متفاوت از یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ نه به عنوان دو ذره، بلکه به صورت دو حالت متفاوت از نوکلئون تلقی می‌شود. بدین ترتیب پروتون به حالت بالا و نوترون به حالت پایین در نظر گرفته می‌شود. این وضعیت را به صورت یک کمیت جدید، ایزواسپین I معرفی می‌کنند. نوکلئون که دارای ایزواسپین $\frac{1}{2}$ است، تعداد $2I+1=2$ سمتگیری ممکن در فضای ایزواسپینی دارد. بنابراین به هر دو نوکلئون، ایزواسپین $\frac{1}{2}$ نسبت می‌دهیم که پروتون تصویر $T_Z=-\frac{1}{2}$ آن است. عملگر ایزواسپین t برای درجات آزادی ایزواسپین، شبیه عملگر اسپین S برای درجات آزادی اسپین است. برای چندین نوکلئون، ایزواسپین کل و تصویر z اش با روابط زیر داده می‌شود.

$$T_Z=\frac{N-Z}{2} \qquad (۱-۶)$$

$$T_Z=\sum_i \vec{t}_z(i)$$

[1] Isospin
[2] Heisenberg

تعداد $2T+1$ مقدار برای T_Z، از $T_Z=-T$ تا $T_Z=+T$ با گام‌های صحیح، وجود دارد. برای هسته‌ای با z پروتون و تعداد N نوترون، $T_Z=\frac{N-Z}{2}$ است [۸].

۱-۳ دسته‌بندی هسته‌ها

برای بررسی خصوصیات فیزیکی هسته‌ها می‌توان آن‌ها را به سه دسته تقسیم کرد:

۱-۳-۱ هسته‌های زوج– فرد: هسته‌هایی با تعداد پروتون‌های زوج و نوترون‌های فرد و بالعکس، که A منفرد دارند. اسپین و پاریته کل آن با استفاده از اسپین و پاریته نوکلئون منفرد مشخص می‌شود. مانند ^{17}O،^{13}C، ^{117}Sn

مدل لایه‌ای در هسته‌های زوج- فرد را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱- مدل لایه‌ای کامل: اگر در هسته‌های زوج- فرد، چند نوکلئون تزویج نشده در خارج از بخش جادویی قرار بگیرد، به آن مدل لایه‌ای کامل می‌گویند.

۲- مدل لایه‌ای ذره خیلی مستقل: اگر در هسته‌های زوج- فرد، یکی از نوکلئون‌ها در هسته تزویج نشده باشند به آن مدل لایه‌ای خیلی مستقل می‌گویند که تمام خواص هسته از حرکت همین نوکلئون منفرد سرچشمه می‌گیرد.

۱-۳-۲ هسته‌های فرد- فرد: هسته‌هایی که تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های فرد دارند به هسته‌های فرد- فرد معروف هستند. که بررسی مدل لایه‌ای در این نوع هسته‌ها به سختی انجام می‌شود.

۱-۳-۳ هسته‌های زوج- زوج: هسته‌هایی که تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌های آن‌ها به صورت زوج بوده در این دسته قرار می‌گیرند و این زوج بودن سبب پایداری هسته می‌شود [۱۰]. در چنین هسته‌هایی

نوکلئون‌های هم نام عموماً بصورت زوج‌هایی با اسپین صفر درحالت فضایی قرار می‌گیرند و این جفت شدگی سبب افزایش انرژی بستگی و صفر شدن اسپین هسته که در اثر هم‌پوشانی تابع موج فضایی صورت گرفته است، می‌شود. (نوکلئون ها در زمان بیشتری در نزدیکی همدیگر و در محدوده برد نیروی هسته‌ای در کنار هم قرار می‌گیرند). این هسته‌ها دارای ویژگی منحصر به فردی هستند از جمله: دارای اعدادکوانتومی n, j, I هستند. هرجفت شامل دو عضو در یک مدار هستند که در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. تکانه زاویه‌ای کل برای هر جفت برابر صفر است. می‌دانیم نوکلئون‌ها دارای تکانه زاویه‌ای ذاتی اسپین هستند و خود هسته نیز حول یک محور می‌چرخد، در نتیجه این چرخش هسته یک تکانه زاویه‌ای دارد، در چنین هسته‌هایی عدد کوانتومی I اسپین برابر صفر است. که این‌گونه هسته‌ها را می‌توان بااستفاده از مدل جمعی و یا مدل خوشه‌ای مورد بررسی و مطالعه قرار داد. مانند ^{14}C، ^{16}O، ^{20}Ne، ^{24}Mg، ^{28}Si، ^{32}S [۱۰،۱۱].

۱-۴ مروری بر مدل‌های هسته‌ای

برای بررسی هسته‌ها، عمدتا یک نظریه فوق‌العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد، انتخاب می‌کنیم. اگر این نظریه در مرحله نخست دربردارنده‌ی چند ویژگی هسته‌ای نسبتاً مهم باشد، آنگاه قادر خواهیم بود با افزودن جمله‌های اضافی آن را بهبود بخشیم. مدل‌های متعددی جهت توضیح خواص و واکنش‌های هسته‌ای پیشنهاد شده‌اند. باید توجه کرد که هیچکدام از این مدل‌ها برای توضیح کل مشاهدات تجربی بطور کامل رضایت بخش نیستند، ازاین‌رو مدل‌های مختلفی برای تفسیر پدیده‌های گوناگون هسته‌ای بکار برده می‌شود. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل قطره مایع، مدل لایه‌ای، مدل جمعی، مدل اپتیکی، مدل خوشه‌ای و... اشاره کرد که ما در این بخش به بررسی و مطالعه مدل خوشه‌ای می‌پردازیم.

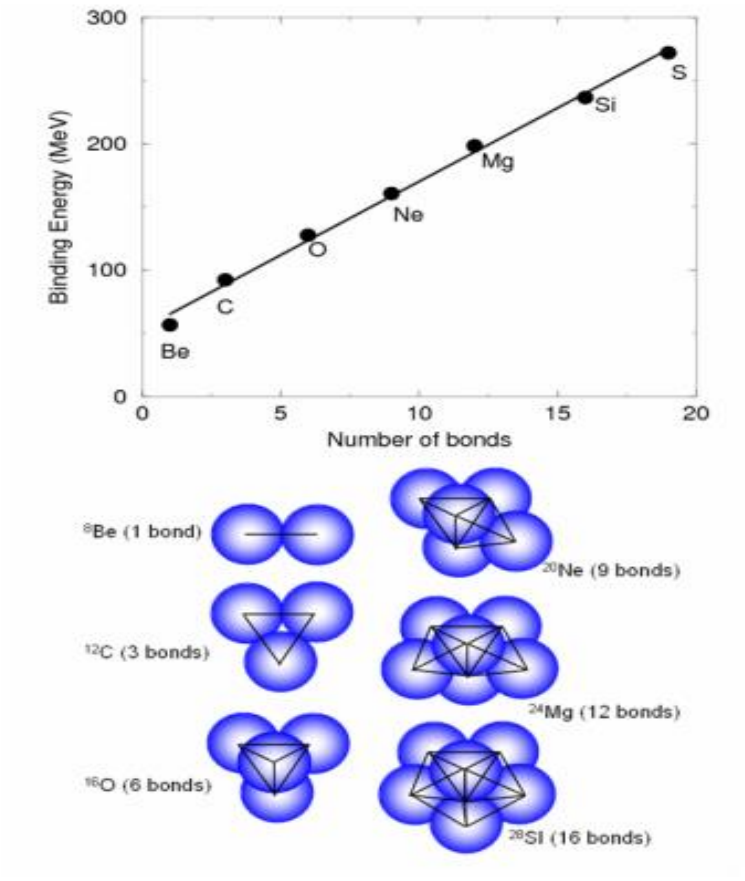
۱-۴-۱ مدل خوشه‌ای[1]

تاریخچه خوشه آلفا مربوط به سال ۱۹۱۱ می‌باشد، هنگامی که آزمایشات رادرفورد و همکارانش، گسیل خودبه‌خودی ذرات آلفا را نشان داد. رادرفورد پیشنهاد داد که ذرات آلفا می‌توانند درون هسته مادر شکل بگیرند. در این هنگام فرضیه اولیه که هسته‌ها از ذرات آلفا تشکیل شده‌اند شکل گرفت [۱۲]. در فیزیک هسته‌ای، خوشه شدن و به هم پیوستن نوکلئون‌ها تحت شرایط معین باعث افزایش انرژی پیوندی سیستم خواهد شد. در هسته‌های سبک، علاوه بر انحراف‌های محوری، انحراف از حالت کروی در قالب ساختار خوشه‌ای نیز دیده می‌شود. از همان آغاز کار دانش هسته‌ای، ساختار خوشه‌ای یا همان تجمع نوکلئون‌ها در تعیین ساختار هسته‌های سبک حائز اهمیت بوده است. در واقع مدل خوشه‌ای، بر این اساس است که درون هسته، ترکیباتی از نوکلئون‌ها وجود دارند که ضمن حفظ خود با یکدیگر برهم‌کنش می کنند [۱۳]. یکی از مهم‌ترین خوشه‌ها در بین وجود خوشه‌ها و موقعیت فضایی آن‌ها نسبت به یکدیگر، خوشه آلفا می‌باشد. هسته‌هایی که ساختار خوشه‌ای آن‌ها متشکل از ذرات آلفا است، هسته‌های آلفا مزدوج می‌نامند. مزیت خوشه‌های آلفا ثبات و پایداری آن‌هاست. در سال ۱۹۳۱ براساس تئوری واپاشی ذرات آلفا، گاموو[2] به بررسی هسته‌ها به صورت ترکیبی از ذرات آلفا پرداخت. در آن زمان ماهیت نوترون هنوز ناشناخته بود. او هسته‌هایی با عدد جرمی $A=4n$ $(n=2,3,4,..)$ را متشکل از ذرات آلفا دانست که از پروتون‌ها و الکترون‌ها تشکیل شده بودند و بیان داشت به دلیل نامعلوم، الکترون‌ها تاثیری بر روی ذرات آلفا و پروتون‌ها در ساختار هسته‌ای ندارند. در واقع می‌توان ذرات آلفا و پروتون‌ها را به صورت مستقل از الکترون‌ها بررسی کرد [۱۴،۱۵].

بعد از کشف نوترون، مدل‌های پروتون- نوترون در بررسی هسته‌ها عمومیت یافت و ایزوتوپ‌های متشکل از ذرات آلفا مورد بررسی قرار گرفتند. ذره آلفا شامل دو پروتون و دو نوترون می‌باشد، این ذره با ۴ نوکلئون،

[1] Cluster model
[2] Gamow

به صورت یک ساختار متراکم درنظر گرفته می‌شود که در تقابل با ذرات بسیار نزدیک به خود است. این مدل با درنظر گرفتن یک اندرکنش آلفا-آلفا جهت محاسبه انرژی بستگی سیستم‌هایی با $n\alpha$ گسترش یافت. با توجه به رابطه خطی انرژی بستگی به صورت تابعی از تعداد پیوندهای آلفا-آلفا برای هسته‌های Z = N و A = 4n (n=2,3,4,…) که در نمودار شکل (۱-۳) نشان داده شده است، نقش مهمی که خوشه آلفا در پایه بازی می‌کند مشخص است. این تصویر ساده، به ویژه در هنگامی که انرژی آستانه واپاشی خوشه در نزدیکی حالت پایه باشد، درست است. اما در بیشتر حالت‌های پایه ساختار خوشه‌ای به عنوان ذرات آلفا جدا از هم باقی نمی‌ماند بلکه ساختار خوشه‌ای فشرده شده و خوشه‌ها با یکدیگر همپوشانی می‌کنند [۱۶].



شکل (۱-۳): نمودار انرژی بستگی هر هسته براساس تعداد پیوندهای ممکن بین ذرات آلفا

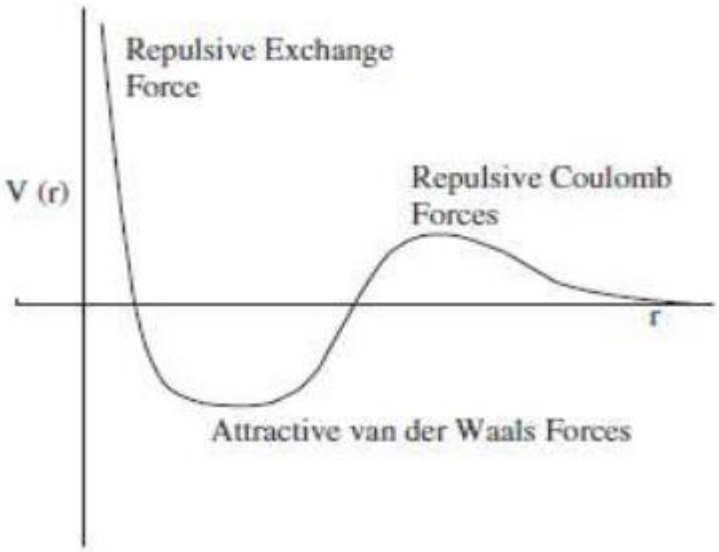
این ایده که آرایش هسته‌ها به صورت خوشه آلفا یا هر ساختار مقید و پایداری با Z = N را نمی‌توان در حالت پایه هسته‌ها یافت، بلکه این خوشه شدن‌ها در حالت‌های برانگیخته هسته‌ها در آستانه واپاشی رخ می‌دهند، قوت یافت. تا این که در سال ۱۹۶۸، ایکدا[1] برای کلیه هسته‌ها با Z = N و A = 4n پیشنهاد کرد که حالت خوشه‌ای با یک برجستگی مربوط به انرژی آستانه واپاشی می‌تواند ایجاد شود و به دیاگرام ایکدا معروف است. بنابراین، انتظار می‌رود ساختار خوشه‌ای در آستانه واپاشی خوشه و احتمالاً کمی پایین‌تر، دیده شود [۱۷]. همچنین هسته می‌تواند انرژی برانگیختگی داخلی را به انرژی بستگی خوشه‌ها تبدیل کند.

۱-۵ بررسی خوشه شدن

با درنظر گرفتن هر هسته در حالت خوشه‌ای خود بصورت ساختارهای شبیه به آرایش هندسی اتم‌ها و مولکول‌ها یکی از اولین دیدگاه‌های فیزیکدانان هسته‌ای در رابطه با برهم‌کنش بین آلفا در هسته‌ها بوده است. این دیدگاه بعدها به مدل ساختار شبه مولکولی گوسی معروف شد. فرضیات اولیه در اندرکنش بین ذرات آلفا که توسط هافستد[2] و تلر[3] به شرح ذیل مطرح شدند [۱۸]:

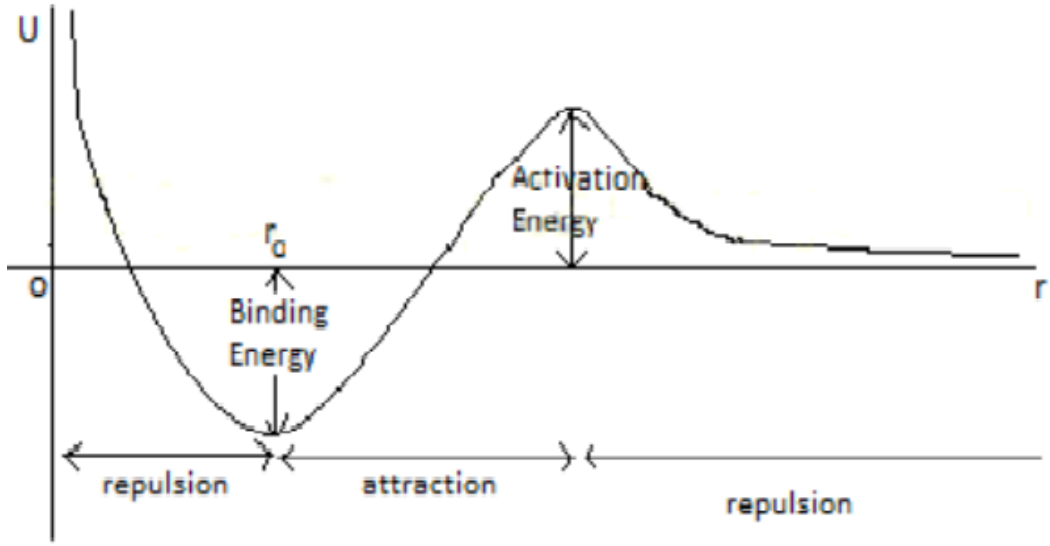
۱. ذرات آلفا در فواصل نزدیک، به واسطه وجود نیروی تبادلی بین خوشه‌ها یکدیگر را دفع می‌کنند.
۲. در فواصل میانی، بین ذرات آلفا یک نیروی جاذبه از نوع واندروالس قرار دارد.
۳. در فواصل دور، به واسطه وجود دافعه کولنی ذرات آلفا یکدیگر را دفع می‌کنند.

[1] Ikeda
[2] Hofstede
[3] Teller



شکل (۱-۴): پتانسیل هافستد- تلر

براساس این مدل، می‌توان نیروی دافعه در فواصل نزدیک را متناظر با برهم‌کنش تبادلی و پتانسیل بین ذرات آلفا تشکیل دهنده هسته‌ها در فواصل میانی را از نوع واندروالس در نظر گرفت. در این مدل، برهم‌کنش بین دو ذره با حضور ذره آلفای سوم تغییری نمی‌کند، بدین معنی که بدون ایجاد هر نوع تغییری در برهم‌کنش بین دو ذره اول، تنها کافی است برهم‌کنش بین ذره سوم با آن‌ها را نیز به مسأله بیافزاییم [۱۹]. شکل (۱-۸) فرم کلی پتانسیل برحسب فاصله ذرات را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۵): پتانسیل پدیده شناختی برحسب فاصله ذرات در هسته‌های آلفا مزدوج

اساسی‌ترین و مهم‌ترین پارامتر تأثیر گذار بر پدیده‌ی خوشه‌ای شدن در هسته‌ها، انرژی سیستم نوکلئونی می‌باشد. براساس فرضیات این مدل، ذرات آلفا درون هسته با آرایش هندسی متناظر با یک مدل دمبلی شکل، به صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع از خوشه‌های آلفا معرفی می‌شوند. با توجه به ماهیت برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها و اینکه خوشه شدن در همه سیستم‌ها یک مکانیسم طبیعی است، بنابراین خوشه شدن برای افزایش پایداری محسوب می‌شود. تشکیل خوشه‌های نوکلئونی در هسته اتم‌ها، دور از انتظار نخواهد بود. یک ویژگی اصلی پدیده خوشه شدن این است که مستقیما به مقدار انرژی هسته بستگی دارد. مطالعات اثرات خوشه شدن براساس مدل‌های خوشه‌ای به دو دسته تقسیم می‌شوند [۲۰]:

۱. مدل‌های غیر میکروسکوپی که در آن سیستم بصورت A نوکلئون در n خوشه است و از ساختار داخلی خوشه‌ها صرف‌نظر می‌شود.

۲. مدل‌های میکروسکوپی که سیستم را با A نوکلئون توصیف می‌کند و خوشه‌ها به کمک تابع موج‌های مدل لایه‌ای توصیف می‌شوند.

حل معادله غیر نسبیتی شرودینگر با پتانسیل‌های محدود کننده در پدیده‌های مختلف، از فیزیک ذرات تا فیزیک اتمی، جالب توجه بوده است. اصلی‌ترین گام در حل مسائل مکانیک کوانتومی، طرح معادله شرودینگر است [۲۰]. معادله شرودینگر، معادله‌ای است که چگونگی تغییر حالت کوانتومی یک سامانه فیزیکی با زمان را توصیف می‌کند. این معادله در اواخر سال ۱۹۲۵ فرمول بندی شده است و در سال ۱۹۲۶ توسط فیزیکدان اتریشی اروین شرودینگر منتشر گردید. شکل معادله شرودینگر به شرایط فیزیکی بستگی دارد. ساده‌ترین فرم معادله شرودینگر بصورت زیر است:

$$H\Psi = E\Psi \qquad (۷-۱)$$

که در آن H هامیتونی سیستم، E انرژی کلی سیستم و Ψ تابع موج سیستم است. فرم کلی معادله شرودینگر برای سیستم دو خوشه‌ای بصورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r) + V\ (r)\psi(r) = E\ \psi(r) \qquad (۸-۱)$$

که r فاصله دو ذره و μ جرم کاهش یافته ذرات است. پتانسیل V می‌تواند به مختصه‌های دیگر خوشه مانند اسپین هم وابسته باشد. ولی موضوع مهم، انتخاب صحیح پتانسیل بین خوشه‌هاست که بتواند برخی از ویژگی‌های سیستم را توصیف نماید [۲۱]. در این مدل از ساختار داخلی خوشه‌ها صرف نظر می‌شود. در سیستم‌های میکروسکوپی، هامیلتونی برای سیستمی متشکل از A نوکلئون در نظر گرفته می‌شود و جرم نوکلئون و مختصات و برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون وارد رابطه می‌شود. در این محاسبات نیز پتانسیل می‌تواند به جز وابستگی فضایی به کمیت‌های دیگری مانند اسپین و اندازه حرکت مداری و یا موارد دیگر وابسته باشد. در مورد سیستم‌هایی که تعداد نوکلئون‌هایشان کم است، برای حل معادله شرودینگر در مدل‌های میکروسکوپی روش‌های موفقی ارائه شده است ولی برای وضعیت‌هایی که در آن‌ها تعداد نوکلئون‌ها

زیاد است، باید تقریب‌هایی را جهت حل مسئله بکار برد. در واقع در نظریه‌های میکروسکوپی در مدل خوشه‌ای، خوشه‌ها به کمک تابع موج مدل لایه‌ای توصیف می‌شوند [۲۲،۲۳].

۱-۶ پدیده خوشه شدن در فیزیک هسته‌ای

منحنی انرژی پیوندی معرف بهترین گواه تجربی برای چگونگی شکل‌گیری ساختار هسته‌ای است. بدین معنی که در فیزیک هسته‌ای، هر تئوری و نظریه‌ای باید با منحنی انرژی پیوندی هسته‌ها سازگار باشد. مهم‌ترین تلاش‌های نظریه پردازان در این زمینه، از مدل قطره مایع آغاز شده و اکنون به مدل پوسته‌ای رسیده که این مدل، تاکنون موفق‌ترین مدل در توصیف ساختار هسته بوده است. مدل قطره مایع با اینکه به خوبی با منحنی انرژی پیوندی مطابقت می‌کند، اما نمی‌تواند انرژی پیوندی بسیار بالای هسته‌های زوج-زوج مثل ^{4}He یا ^{16}O را توجیه کنند. در همین راستا دلیل موفقیت مدل پوسته‌ای در این است که برای انرژی پیوندی چنین هسته‌هایی دلایل کافی و مناسبی را ارائه می‌کند. اما نکته اینجاست که براساس تعاریف اولیه مدل پوسته‌ای هسته‌ها از نظر ساختار هندسی به صورت کروی در نظر گرفته می‌شوند. در حالیکه امروزه آزمایشات تجربی بسیاری نشان می‌دهند که ۹۰٪ هسته‌ها غیر کروی [1]هستند. به این ترتیب با وجود اینکه مدل نیلسون [2]در سال ۱۹۹۵ تعمیم مناسبی از مدل پوسته‌ای برای توصیف حالت تغییر شکل یافته هسته‌ها در اختیار فیزیکدانان قرار داد. اما هنوز هم برای ارائه توصیف بهتری از ساختار هسته‌ها نیاز به یک تئوری جدید هست. با توجه به ماهیت برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها و اینکه خوشه شدن در همه سیستم‌ها یک مکانیزم طبیعی برای افزایش پایداری محسوب می‌شود. بنابراین تشکیل خوشه‌های نوکلئونی در ماده هسته‌ای و هسته اتم‌ها نیز دور از انتظار نخواهد بود. چرا که وقتی به سیستم‌های بزرگ مقیاس

[1] Non- Spherical
[2] Nilson

نگاه می‌کنیم، خوشه‌های کهکشانی و خوشه‌شدن در ستاره‌ها را می‌بینیم. همچنین وقتی به سیستم‌های کوچک مقیاس می‌نگریم، می‌بینیم که اتم‌ها برای تشکیل مولکول‌ها خوشه می‌شوند و کوارک‌ها برای ایجاد نوکلئون‌ها به صورت خوشه‌های دو ذره‌ای و سه ذره‌ای در می‌آیند. در نتیجه نمی‌توانیم خوشه شدن نوکلئون‌ها برای تشکیل ساختارهای پایدارتری مثل ذرات آلفا را قبول نکنیم. در اواخر سال ۱۹۳۰، همزمان با آغاز توصیف هسته‌ها به کمک مبانی مکانیک کوانتومی و با مشاهده تابش ذرات آلفا از هسته‌ها، مفهوم خوشه شدن نیز پا به عرصه وجود در حیطه فیزیک هسته‌ای نهاد. بدین ترتیب از همان زمان، وجود ذرات پایداری که قبل از واپاشی هسته در درون آن شکل می‌گیرد، الهام بخش ایده‌هایی شد که می‌گویند یکی از حالت‌های مطلوب و مورد علاقه هسته‌ها این است که به صورت خوشه‌هایی از ذرات آلفا دربیایند [۲۴]. مناسب و صحیح بودن این ایده‌ها برای اولین بار توسط بته و باچر [1] در اواخر سال ۱۹۳۰ در یک مقاله مورد بحث و بررسی قرار گرفت. آن‌ها در این مقاله پیش‌بینی کرده‌اند که هسته‌ها می‌توانند در شرایط خاصی متشکل از ذرات آلفا باشند. همچنین آن‌ها نظریات خوبی در رابطه با آرایش هندسی و تعداد پیوندهای بین ذرات آلفا در درون هسته‌های سبک آلفا- مزدوج ارائه کردند. به علاوه آن‌ها پیش‌بینی کردند که از هسته ^{16}O به بعد، به ازای هریک، ذره آلفایی که به سیستم خوشه‌ای نوکلئون‌ها اضافه می‌شود، تعداد پیوندهای بین ذرات به اندازه سه تا افزایش می‌یابد.

در همین سال‌ها، هایزنبرگ بود که قبل از همه اعتقاد داشت که نیروی تبادلی که بین دو ذره آلفا وجود دارد می‌تواند شبیه به برهم‌کنش حاکم در ساختارهای مولکولی عمل کند. پس از آن هافتسد و تلر در سال ۱۹۳۸، در ادامه کارهای بته و همکارش، منحنی انرژی پیوندی برحسب تعداد پیوندهای آلفا را تا هسته ^{32}S برای هسته‌های آلفا مزدوج رسم کردند که در شکل (۱-۳) نشان داده شد. به علاوه، آن‌ها مدل پیشنهادی خود را برای توصیف سیستم‌هایی متشکل از ذرات آلفا و یک نوترون اضافی نیز به کار بردند. در

[1] Bethe and Bacher

آن زمان هافتسد و همکارش معتقد بودند که رابطه خطی انرژی پیوندی با تعداد پیوندهای آلفا نشان دهنده نقش مهم خوشه‌های آلفا در حالت پایه هسته‌های آلفا- مزدوج بود. هرچند که این تصور ساده بود، اما در نگاه اول درست به نظر می‌آمد، چون از نظر آن‌ها خوشه شدن در نزدیکی حالت پایه اتفاق می‌افتاد. در اواخر سال ۱۹۵۰ موریناگا [1]این نظریه را مطرح کرد که خوشه شدن نمی‌تواند در حالت پایه اتفاق بیافتد و پس از آن در سال ۱۹۶۰ اثبات شد که هسته‌ها باید از نظر انرژی در وضعیت مشخصی باشند تا بتوانند به صورت ساختارهای خوشه‌ای دربیایند. سرانجام در سال ۱۹۶۸، آیکدا مقادیر انرژی لازم برای ایجاد هریک از ساختارهای خوشه‌ای در هریک از هسته‌های سبک آلفا- مزدوج را با نمودار معروف خود تعیین کرد. او در این نمودار به وضوح مشخص نمود که پدیده خوشه شدن در حالت پایه هیچ یک از هسته‌های آلفا مزدوج اتفاق نمی‌افتد (به جز ^{8}Be). علاوه بر این در سال ۱۹۶۶، مدلی با عنوان مدل خوشه آلفا توسط برینک برای مطالعه ساختارهای پایدار و شبه پایدار در سیستم‌های خوشه‌ای معرفی شد. او برای هسته‌های آلفا- مزدوج، ساختارهایی با آرایش هندسی را پیشنهاد کرد که از بسیاری جهات شبیه به همان پیش‌بینی-های هافتسد و همکارش در سال ۱۹۳۸ بود. با این تفاوت که بررسی‌های او مربوط به حالت‌های برانگیخته می‌شد[۲۵].

۱-۷ مطالعات تجربی مربوط به ساختارهای خوشه‌ای در هسته‌ها

در فیزیک هسته‌ای، برای تشکیل خوشه‌های آلفا در هسته‌ها شواهد تجربی بسیاری وجود دارد و از زمان کشف هسته‌ها پدیده واپاشی ذره آلفا از آن‌ها نیز در آزمایشات مشاهده شده است. برای مثال: فیزیکدانان تجربی اثبات کرده‌اند که هسته ^{8}Be پس از ایجاد شدن به سرعت به دو ذره آلفا واپاشی می‌کنند. همچنین آن‌ها به کمک آزمایشات وسیعی از قلمرو اختر فیزیک نشان داده‌اند که هسته ^{12}C در یکی از حالت‌های

[1] Morinaga

برانگیخته خودش به صورت ساختار متشکل از سه خوشه آلفا درمی‌آید. به طوریکه اگر مقدار انرژی این هسته را در این تراز برانگیخته خودش به اندازه 0.38 MeV تغییر بدهیم، ^{12}C کاملا به صورت ساختاری از سه خوشه آلفا مشاهده خواهد شد. پس از همه این مطالعات، نمودار معروف آیکدا به میان آمد که می‌گفت همه هسته‌های آلفا- مزدوج در ترازهای انرژی مشخصی خوشه‌ای می‌شوند و می‌توان برای بررسی آن‌ها در این وضعیت خاص از برهم‌کنش‌های بین نوکلئون‌ها صرف نظر کرد و تنها برهم‌کنش‌های بین این خوشه‌ها را در نظر گرفت، اما باید توجه نمود که در حالت پایه، فقط این برهم‌کنش‌های نوکلئون- نوکلئون هستند که در هسته حکمرانی می‌کنند. به علاوه در سال ۱۹۹۲، ویوزما [1] و همکارانش برای هسته ^{24}Mg به ساختار دو خوشه $^{12}C + ^{12}C$ دست یافتند که بررسی و مطالعه آن‌ها نتایج مربوط به نمودار آیکدا را تأیید می‌کند. و سرانجام در سال ۲۰۰۷، کاواباتا [2] و همکارانش در آزمایشات خود نشان دادند که هسته ^{11}Be می‌تواند با دریافت مقدار مشخصی از انرژی به صورت ساختاری از دو خوشه آلفا و سه نوترون در بیاید. همچنین برخی از مطالعات تجربی پی به وجود ساختارهای خوشه‌ای در هسته‌های میان وزن برده‌اند و برای ^{40}Ca ساختار خوشه‌ای $^{36}Ag + \alpha$ را پیش‌بینی کرده‌اند[۲۶].

۱-۸ رهیافت‌های تئوری اخیر در ارتباط با خوشه‌های هسته‌ای

اولین توصیف کامل از هسته‌ها با رویکرد خوشه‌ای توسط ویلر [3] پیشنهاد شد که بعدها نیز توسط برینگ کامل گردید. این فرمول‌بندی با نام مدل خوشه آلفا معروف است، که برای بررسی ویژگی‌های هسته‌های آلفا- مزدوج مناسب می‌باشد. همانطور که قبلا نیز اشاره شده است، یکی از ویژگی‌های مهم پدیده خوشه شدن این است که مستقیما به مقدار انرژی هسته بستگی دارد. علاوه براین با توجه به اینکه در آخرین بررسی‌های مربوط به فیزیک ناپایدار، ساختارهای خوشه‌ای شگفت‌انگیزی در آن‌ها پیش‌بینی شده است.

[1] Wiosma
[2] Kavabata
[3] Wheeler

مدل‌های تئوری گوناگونی نیز برای مطالعه پدیده خوشه شدن در هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آن‌ها فرد است مطرح می‌باشد. برای توصیف سیستم‌های بس ذره‌ای که شامل مغزهای خوشه شده و تعدادی نوکلئون ظرفیت هستند، از مدل‌های خوشه‌ای تعمیم یافته استفاده می‌شود که برخی از آن‌ها به صورت زیر است [۲۷].

۱) روش وردشی تصادفی SVM

۲) روش مولکولی- مداری MO

۳) روش مختصه مولد GCM

۴) روش دینامیکی مولکولی نامتقارن ADM

یک ویژگی مهم مدل‌های فوق این است که در آن‌ها تابع موج سیستم متشکل از A نوکلئون با استفاده از تقریب خوشه‌ای توصیف و معرفی می‌شود و یا به عبارتی فرض می‌شود که A تا نوکلئون سیستم به صورت خوشه‌هایی در آمده‌اند که با توابع موج مخصوص به خود توصیف می‌شوند و تابع موج کل آن‌ها پادمتقارن است. تمامی این مدل‌ها میکروسکوپی هستند و وجود خوشه‌ها در همه آن‌ها از فرض‌های اولیه مسئله است. با وجود اینکه این مدل‌ها، با تمام پیچیدگی‌هایشان، برای شناخت جزئیات اتفاقات درون هسته‌ها مفید هستند. اما برای همه هسته‌های ناپایدار به طور دقیق مشخص نشده است که در چه شرایطی می‌توان بخشی از اجزای تشکیل دهنده سیستم را خوشه شده فرض کرد.

۱-۹ شکل عمومی پتانسیل‌های نوکلئون- نوکلئون

برای توجیه خواص هسته‌ای با استفاده از مدل، ابتدا باید یک پتانسیل هسته‌ای مناسب تعریف کنیم که با این مدل مطابقت داشته باشد و بتواند ترازهای انرژی و لایه‌ها را دقیقا مشخص کند. متوسط پتانسیل

هسته‌ای در مقیاس میکروسکوپی با در نظر گرفتن برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون توسط نظریه هاری-فوک [1] و نظریه بروکنر[2](این نظریه، دافعه بین نوکلئون‌ها در فواصل خیلی کوتاه را وارد محاسبات می‌کند) محاسبه می‌شود. برای مقایسه پتانسیل‌ها ابتدا لازم است که سه جز برهم‌کنش را در سیستم دو نوکلئونی در نظر بگیریم:

۱) بخش بلند برد ($r \geq 2fm$): پتانسیل تبادل تک-پیون (OPEP) به واسطه جرم کوچک پیون، بلند بردترین قسمت برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون است.

۲) بخش متوسط برد ($1fm \leq r \leq 2\ fm$): که از تبادل مزون‌های اسکالر بدست می‌آید (دو پیون و مزون‌های سنگین)

۳) بخش کوتاه برد ($r \leq 1fm$): که از تبادلات مزون‌های برداری بدست می‌آید (مزون‌های سنگین و تبادلات پیون‌های چندگانه که به‌خوبی در QCD مشهود است).

در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات بدست آمده پتانسیل‌های پدیده شناختی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت [۲۸]:

$$V = V_C + V_{CS}\ \vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2 + V_T\ S_{12} + V_{LS}\ \vec{L}, \vec{\sigma} \qquad (۹-۱)$$

V_C انرژی پتانسیل مرکزی معمولی را توصیف می‌کند. V_{CS} پتانسیل مرکزی وابسته به اسپین است. V_T معرف نیروی تانسوری و S_{12} معرف عملگر تانسوری است. V_{LS} معرف نیروی اسپین- مدار است.

[1] Harry-Fuck
[2] Bruckner's Theory

۱-۱۰ مدل نیروی تبادل[1]

در نگاه اول شاید به نظر رسد که نیروی هسته‌ای نباید به اینکه S=0 یا S=1 و زوج و فرد بودن L وابسته باشد ولی شواهدی بر وابستگی نیروی هسته‌ای به اسپین و تکانه مداری وجود دارد. موارد مشاهده شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۲۹].

۱) انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون مقدار اشباعی دارد.

۲) نوکلئون‌ها چگالی ثابت دارند.

۳) تحلیل‌های انتقال فاز و قطبیدگی در انرژی بالا مستلزم حضور نیروهای تبادلی می‌باشد.

این رفتار به این واقعیت مربوط می‌شود که نیروهای هسته‌ای از تبادل مزون نتیجه می‌شود و تبادل مزون منجر به نیروهای تبادلی می‌شود. سه نوع نیروی تبادلی وجود دارد که شامل: تبادل فضایی یا نیروی ماژرونا، تبادل اسپینی یا نیروی بارتلت، تبادل فضایی- اسپینی یا نیروی هایزنبرگ می‌شود.

۱-۱۱ توجیح حضور نیروی تبادلی در هسته‌ها

دو دلیلی را که حضور نیروی تبادلی را در هسته‌ها تأیید می‌کند به صورت زیر می‌باشد:

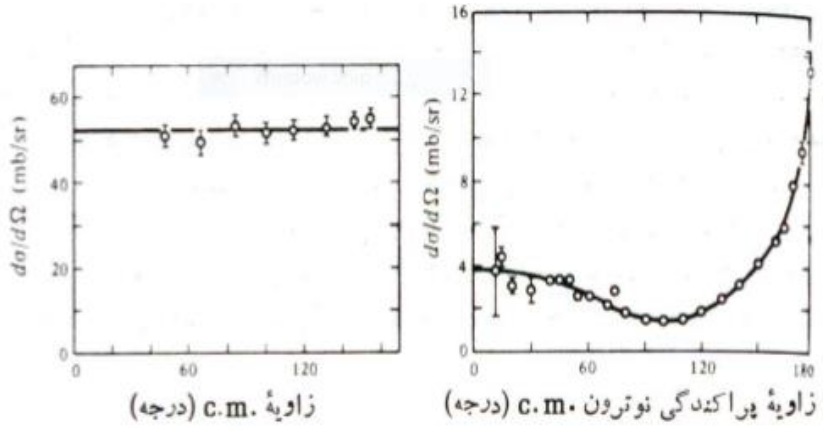
الف) خاصیت اشباع نیروی هسته‌ای: از تجربه می‌دانیم که چگالی هسته‌ای نسبتا ثابت است و انرژی بستگی تقریبا به ازای هر نوکلئون 8MeV و ثابت است. به نظر می‌رسد که هر نوکلئون فقط تعداد کمی از همسایه‌های نزدیکش را جذب می‌کند و در فواصل خیلی کوتاه همین نوکلئون‌ها همان همسایه‌های نزدیکش را نیز دفع می‌کند تا از نزدیکی بیش از حد آن‌ها جلوگیری کند که این را در فیزیک هسته‌ای با

[1] Exchange Force Model

انتخاب یک پتانسیل مرکزی مناسب که برد محدود و مرکزیتی به صورت یک مغز دافعه داشته باشد، توضیح می‌دهند. شباهت فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای در این مورد قابل توجه است.

ب) وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی نوترون-پروتون

از مطالعه پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های بالا دلایلی به دست می‌آید که به نوعی مدل نیروی تبادل را تأیید می‌کند سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در شکل (۱-۶) نشان داده شده است [۲۹].



(الف) (ب)

شکل (۱-۶): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون

(الف) توزیع زاویه‌ای برای نوترون‌های با انرژی ۱۴ MeV همسانگرد است. (ب) برای پروتون‌های با انرژی ۴۰۰MeV یک قله برجسته در ۱۸۰ درجه وجود دارد.

سطح مقطع پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر دارای قله‌ای بزرگ است و این یعنی اینکه انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف، کوچک است ولی وجود قله‌ای بزرگ در زاویه پراکندگی 180^0 توجیحی می‌تواند داشته باشد؟ اگر فرض کنیم که در طی برخورد، نوترون و پروتون جایشان را با هم عوض می‌کنند.

مدل تبادل می‌تواند توضیح قانع کننده‌ای ارائه کند، و این یعنی اینکه نوترون که به طرف جلو در حرکت است به پروتون تبدیل می‌شود و پروتونی که به طرف عقب (ازدیدگاه چارچوب مرکز جرم) در حرکت است به نوترون تبدیل می‌شود. به طور خلاصه اینکه نیروی تبادل هم خصوصیت اشباع نیروهای هسته‌ای و هم وجود قله بزرگ رو به عقب را در پراکندگی نوترون-پروتون توجیه می‌کند. در مورد اولی می‌گوییم که برای آن نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون‌ها وجود داشته باشد باید بین آن‌ها ذره‌ای (پیونی) رد و بدل شود و در مورد دومی هم می‌گوییم که بین نوکلئون‌ها ذره‌ای (پیونی) مبادله می‌شود که عملاً خصوصیت آن‌ها را تغییر می‌دهد.

۱-۱۲ نظریه یوکاوا و ذره‌ی یوکاوا

مفهوم نیروی تبادلی اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونی‌اش بیان شد. طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هسته‌ای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی را که مبنی بر نیروهای هسته‌ای کوتاه برد هستند مشاهده خواهیم کرد [۳۰]. برد نیروهای هسته‌ای از مرتبه $\hbar/m_\pi c$ می‌باشد که در آن $m_\pi = 266 m_e$ جرم مزون π پایون است. ذرات تبادلی حامل نیروی هسته‌ای را مزون می‌نامند. سبک‌ترین مزون‌ها را که مزون π یا پایون نامیده می‌شود، عامل اصلی قسمتی از پتانسیل نوکلئون- نوکلئون با برد بیشتر از ۱ تا ۱,۵ فرمی است، بنابراین شاید بتوان عامل پیوند نوکلئونی را تبادل پایون دانست. باید توجه کرد این نظریه توسط داده‌های تجربی اثبات شده است. مطابق این نظریه عامل برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها مزون π است. اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین- گوردن می‌گوییم [۳۰]. همانطور که می‌دانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E^2 = P^2C^2 + m_\pi C^4 \quad , \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad P \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad (۱۰-۱)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial y}{\partial x} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + m_\pi c^4 \Phi \qquad (۱۱-۱)$$

با در نظر گرفتن چهار بردار x_1, x_2, x_3 برای قسمت فضایی و $x_4 = ict$ قسمت وابسته به زمان رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[-\hbar^2 c^2 (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + m_\pi c^4)]\Phi = 0 \qquad (۱۲-۱)$$

که معادله کلاین- گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورت‌های زیر می‌توان نوشت.

وابسته به زمان:

$$(\Box^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad , \quad \Box^2 = -\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (۱۳-۱)$$

مستقل از زمان:

$$(\nabla^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad , \quad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (۱۴-۱)$$

معلادله کلاین- گوردن:

$$(\Box^2 + \mu^2)\Phi = 0 \qquad (۱۵-۱)$$

که برای حالت پایه معادله کلاین- گوردن به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow \Box^2 = \nabla^2 \rightarrow (\Box^2 + \mu^2)\Phi = 0 \qquad (۱۶-۱)$$

با حل معادله اخیر برای Φ به جواب $\Phi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$ می‌رسیم. که برد نیروی هسته‌ای از مرتبه $\frac{1}{\mu}$ یا $\frac{\hbar}{m_\pi c}$ می‌شود. اگر برد نیروی هسته‌ای را با $\frac{\hbar}{m_\pi c}$ مساوی قرار دهیم (برد نیروی هسته‌ای $10^{-13} cms$) به

نتیجه $m_\pi = 200\, m_e$ می‌رسیم که با جواب بدست آمده از آزمایشات $m_\pi = 266\, m_e$ قابل مقایسه است. پس معادله کلاین-گوردن مزون π را توجیح می‌کند [۳۰]. درصورتی که دو نوکلئون به اندازه کافی بهم نزدیک شوند ممکن است دو مزون همزمان مبادله شوند. تبادل چند مزونی فرآیند پیچیده‌ای است که نمی‌توان آن را با نظریه‌های فعلی محاسبه کرد. بنابراین، اثر آن را در نیروی هسته‌ای نمی‌توان با اطمینان حساب کرد.

۱-۱۳ مروری بر ویژگی‌های کربن

کربن را می‌توان یک عنصر استثنایی در جدول تناوبی دانست. ترکیبات کربنی تا به آن حد گسترده است که یکی از گرایش‌های رشته شیمی، تحت عنوان شیمی آلی را به خود اختصاص داده است. در این گرایش شیمیدانان به بررسی کامل ترکیبات شیمی می‌پردازند. گستره وسیعی از ترکیبات شامل ترکیبات متنوع نفتی تا مواد دارویی و بسپارهای آلی زیرمجوعه ترکیبات کربن هستند [۳۱]. ترکیبات کربنی در نانوفناوری نیز دسته مهمی را به خود اختصاص داده‌اند و تحت عنوان نانوساختارهای کربنی شناخته شده‌اند. نانوساختارهای کربنی خصوصیات فیزیکی-شیمیایی منحصر به‌فردی از خود نشان می‌دهند که نقش مهمی در زمینه فناوری‌های نوین و پیشرفته دارند [۳۲]. از نظر فراوانی کربن یازدهمین عنصر شناخته شده سنگ کره بشمار می‌رود. اما از نظر ترکیبات شناخته شده، کربن بعد از هیدروژن در مرتبه دوم قرار دارد، که اغلب این ترکیبات را به عنوان مواد آلی دسته بندی می‌کنند. کربن برای تشکیل نیاز به یک برخورد سه مرحله‌ای ذرات آلفا (هسته هلیم) دارد بنابراین در انفجار بزرگ تشکیل نشده است. تاکنون چهار شکل مختلف از کربن شناخته شده است: غیرمتبلور(آمورف)، گرافیت، الماس و فولرن (در این حالت مولکول‌ها در حد بیلیونیم متر هستند، و شکل ساده آن، ۶۰ اتم کربن یک لایه گرافیتی با ساختمان ۳ بعدی منحنی را تشکیل می‌دهند) [۳۳]. کربن دارای ۱۵ ایزوتوپ است که از کربن۸ تا کربن۲۲، جدول (۱-۲) ملاحظه

شود. ایزوتوپ‌ها در تعداد پروتون یکسان و در تعداد نوترون نابرابراند. از بین این ایزوتوپ‌ها تنها دو مورد به فراوانی یافت می‌شوند و پایدار هستند که شامل کربن۱۲ و کربن۱۳ است و کربن۱۴ به مقادیر کم در اتمسفر با نیتروژن۱۴ تولید می‌شود، مابقی دارای نیمه عمر بسیار پایینی هستند. کربن۱۲ و کربن۱۳ پایداراند، ۱۳ ایزوتوپ دیگر دستخوش واکنش‌های هسته‌ای خود به خودی قرار می‌گیرند که باعث می‌شود هسته تغییر کند. فراوانی کربن در طبیعت بدین صورت است: ایزوتوپ کربن۱۲ با فراوانی ۹۸/۸۹ درصد و کربن۱۳ با میزان فراوانی۱/۱۱ درصد می‌باشد [۳۴]. برای بررسی خصوصیات فیزیکی ایزوتوپ‌های کربن آن‌ها را در دو دسته تقسیم می‌کنیم: ایزوتوپ‌های زوج- زوج (تعداد پروتون و نوترون زوج) و ایزوتوپ‌های زوج- فرد (تعداد پروتون زوج و تعداد نوترون‌های فرد) قرار می‌دهیم. در مورد ایزوتوپ‌های زوج- زوج باید توجه کرد چون هر دو زوج هستند اسپین پاریته حالت پایه آن‌ها 0^+ است. برای حالت زوج- فرد اسپین و پاریته را برای نوترون زوج نشده محاسبه می‌کنیم.

کربن ۱۲

فراوان‌ترین ایزوتوپ کربن، کربن۱۲ است، که دارای ۶ پروتون و ۶ نوترون است. این عنصر کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف دارد و نیز دارای اهمیت است. در مبحث همجوشی‌ها، هرگاه علاوه بر هیدروژن و هلیم عناصر سنگین‌تری در داخل یک ستاره موجود باشند، رشته متفاوتی از واکنش‌های همجوشی ممکن است به وقوع بپیوندد، چرخه کربن یا چرخه CNO ممکن است یکی از این رشته‌ها باشد که بصورت زیر است [۳۴]:

$$^{12}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{12}N + \gamma$$
$$^{12}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu$$
$$^{13}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{14}N + \gamma$$
$$^{14}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{15}O + \gamma$$
$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{+} + \nu$$
$$^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$$

در این چرخه کربن۱۲ نه تولید می‌شود و نه از بین می‌رود، بلکه بصورت یک عامل برهم‌کنش وارد واکنش می‌شود تا به فرآیند همجوشی کمک کند. مقدار انرژی بستگی کربن MeV ۹۲/۱۶ است [۳۵] و ایزواسپین حالت پایه آن با توجه به رابطه $T = \frac{Z - N}{2}$ محاسبه می‌شود.

کربن ۱۳

کربن ۱۳ دارای عدد جرمی فرد و اسپین هسته‌ای $I = 1/2$ است. فراوانی طبیعی کربن ۱۳ بسیار پایین است و فقط ۱/۱۱ درصد از کلیه اتم‌های کربن در طبیعت اتم‌های کربن ۱۳ است. بررسی ایزوتوپ‌های فرد به صورت خواص هامیلتونی تک ذره صحیح است. مقدار انرژی بستگی تجربی برای هسته MeV ۹۷/۱۱۸ است و دارای پاریته منفی می‌باشد [۳۶]. کربن ۱۳ وسیله مناسبی برای مشاهده مکانیزم تشکیل پیوند و ساختمان ترکیبات کربن از طریق طیف سنجی تشدید مغناطیسی هسته محسوب می‌شود که تکنیک بسیار خوب و دقیق در بررسی ساختار مولکولی است[۳۱].

کربن۱۴

کربن ۱۴ نیز از جمله ایزوتوپ‌های زوج- زوج کربن است که برخلاف دو ایزوتوپ توضیح داده شده (کربن۱۲ و۱۳) پایدار نبوده و دستخوش واکنش‌های هسته‌ای می‌شود و دارای مد واپاشی β^-است. البته خصوصیات ایزوتوپ‌های کربن در جدول (۱-۲) نشان داده شده است. از جمله کاربردهای کربن ۱۴، تخمین سن اشیا است. از طرفی می‌دانیم بمباران زمین به وسیله پرتوهای کیهانی ذخیره ثابتی از نوترون‌ها را در جو زمین تولید می‌کند. این نوترون‌ها با ازت جو واکنش می‌کنند و ^{3}H , ^{14}Cو احتمالا مقدار کمی ^{4}Heبا ^{11}Be به وجود می‌آورند. ^{3}H , ^{14}C پرتوزا هستند. نیمه عمر ^{14}C، ۵۵۶۸ سال است. فرض می‌شود که کربن پرتوزا با اکسیژن واکنش می‌کند و Co_2 تشکیل می‌دهند و این Co_2 با Co_2 موجود در جو مخلوط می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که جذب پرتوهای کیهانی معادل است با تولید دی‌اکسیدکربن پرتوزا مخلوط با دی‌اکسیدکربن جو. از آنجایی که گیاهان و موجودات زنده نهایتا برای ادامه حیات به دی اکسیدکربن محتاج‌اند، آن‌ها نیز پرتوزا می‌شوند. فرضیه‌های علمی و آزمایش‌ها نشان می‌دهد که تعادلی بین آهنگ واپاشی اتم‌های کربن پرتوزا و آهنگ جذب اتم‌های کربن پرتوزا برای تمام موجودات زنده وجود دارد. هنگامی که موجودات زنده نهایتاً برای ادامه حیات به دی‌اکسیدکربن محتاج‌اند، آن‌ها نیز پرتوزا می‌شوند. فرضیه‌های علمی و آزمایش‌ها نشان می‌دهد که تعادلی بین آهنگ واپاشی اتم‌های کربن پرتوزا و آهنگ جذب اتم‌های کربن پرتوزا برای تمام موجودات زنده وجود دارد. هنگامی که موجود زنده می‌میرد، جذب متوقف می‌شود و ^{14}C در بافت واپاشیده می‌شود. مقدار تعیین شده تعادل برابر ۱۰,۳ فروپاشی در دقیقه برای هر گرم کربن است. با استفاده از این مقدار می‌توان سن پس از مرگ مواد آلی را تعیین کرد. معادله فعالیت ویژه ^{14}Cدر یک ماده آلی به صورت زیر است:

$$Spact = 10.3e - 0.693t/556$$

که در آن t تعداد سال‌های پس از مرگ است. هنگامی‌که اندازه‌گیری سن مورد نظر است، نمونه‌گیری باید به طور دقیق صورت گیرد. این نمونه باید حاوی اتم‌های کربنی باشد که در زمان مرگ آن وجود داشته است. تغییرات شیمیایی نمی‌تواند سبب جایگزینی اتم‌های کربن گردد. از آنجا که نمونه‌ها طی هزاران سال پس از مرگ مستعد تغییرات فراوان‌اند، سن‌یابی به وسیله ^{14}C به تنهایی قابل اعتماد نیست. فنون سن‌یابی به وسیله کربن اخیرا در برنامه مخاطرات راکتور در بررسی زمین‌شناسی ایالات متحد آمریکا به کار رفته است. هدف از این برنامه مشخص کردن فرآیندهای زمین شناختی است که ممکن است در تعیین محل راکتور قدرت تاثیر داشته باشند [۳۲].

کربن ۱۵

کربن ۱۵ دارای ۹ نوترون می‌باشد و همچنین دارای اسپین و پاریته نیم صحیح است. مقدار تجربی انرژی بستگی برای این ایزوتوپ MeV ۱۰۶/۵ است واسپین و پاریته حالت پایه آن $j^{\pi}=\frac{1}{2}^{+}$ است و انرژی اولین حالت برانگیخته $E(\frac{5}{2}^{+})=0.74MeV$ است [۳۶]. در جدول (۱-۲) جرم ایزوتوپ‌ها و اسپین و پاریته و ایزواسپین ایزوتوپ‌های کربن محاسبه و نمایش داده شده است.

جدول (۱-۲): برخی خصوصیات ایزوتوپ‌های کربن [۳۳].

ایزواسپین	اسپین	نیمه عمر	ایزوتوپ دختر	مد واپاشی	جرم ایزوتوپ(u)	${}^{A}_{Z}X_{N}$
-2	0^{+}	$2\times10^{-21}(s)$	${}^{6}Be$	$2p$	8.0376	${}^{8}_{6}C_{2}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}^{-}$	$126.5(ms)$	${}^{9}B$	$\beta^{+}(60\%)$	9.031036	${}^{9}_{6}C_{3}$
			${}^{8}Be$	$\beta^{+},p(23\%)$		
			${}^{5}Li$	$\beta^{+},\alpha(17\%)$		
-1	0^{+}	$19.290(s)$	${}^{10}B$	β^{+}	10.01685	${}^{10}_{6}C_{4}$
$-1/2$	$\frac{3}{2}^{-}$	20.334(min)	${}^{11}B$	$\beta^{+}(99.79\%)$	11.01143	${}^{11}_{6}C_{5}$
			${}^{11}B$	$K-Capture$		
0	0^{+}	پایدار			12	${}^{12}_{6}C_{6}$
$1/2$	$1/2^{-}$	پایدار			13.003355	${}^{13}_{6}C_{7}$
1	0^{+}	5.730×10^{3} years	${}^{14}N$	β^{-}	14.00324	${}^{14}_{6}C_{8}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}^{+}$	$2.449(s)$	${}^{15}N$	β^{-}	15.01059	${}^{15}_{6}C_{9}$

جدول (۱-۲): برخی خصوصیات ایزوتوپ‌های کربن[۳۳].

ایزواسپین	اسپین	نیمه عمر	ایزوتوپ دختر	مد واپاشی	جرم ایزوتوپ(u)	$^{A}_{Z}X_{N}$
2	0^{+}	$0.747(s)$	^{15}N	$\beta^{-},n(97.9\%)$	16.01470	$^{16}_{6}C_{10}$
			^{16}N	$\beta^{-}(2.1\%)$		
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}^{+}$	$193(ms)$	^{17}N	$\beta^{-}(71.59\%)$	17.02258	$^{17}_{6}C_{11}$
			^{16}N	$\beta^{-},n(28.49\%)$		
3	0^{+}	$92(ms)$	^{18}N	$\beta^{-}(68.5\%)$	18.02676	$^{18}_{6}C_{12}$
			^{17}N	$\beta^{-},n(31.5\%)$		
$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}^{+}$	$46.2(ms)$	^{18}N	$\beta^{-}(46\%)$	19.03480	$^{19}_{6}C_{13}$
			^{19}N	$\beta^{-},n(47\%)$		
			^{17}N	$\beta^{-},2n(7\%)$		
4	0^{+}	$16(ms)$	^{19}N	$\beta^{-}(28\%)$	20.04032	$^{20}_{6}C_{14}$
			^{20}N	$\beta^{-},n(72\%)$		
$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}^{+}$	$<30ns$	^{20}C	n	21.04938	$^{21}_{6}C_{15}$
5	0^{+}	$6.2(ms)$	^{22}N	β^{-}	22.02258	$^{22}_{6}C_{16}$

کاربردهای کربن

1- عمده‌ترین کاربرد اقتصادی کربن به فرم هیدروکربن‌ها می‌باشد که قابل توجه‌ترین آن‌ها سوخت‌های فسیلی، گاز متان و نفت خام است.

2- ایزوتوپ ^{14}C که در ۲۷ فوریه ۱۹۳۰ کشف شد در سن‌یابی کربن پرتوزا مورد استفاده است.

3- گرافیت در ترکیب با خاک رس به عنوان مغز مداد به کار می‌رود.

4- الماس جهت تزئین و نیز در مته‌ها و سایر کاربردهایی که سختی آن مورد استفاده است کاربرد دارد.

5- برای تولید فولاد، به آهن کربن اضافه می‌کنند.

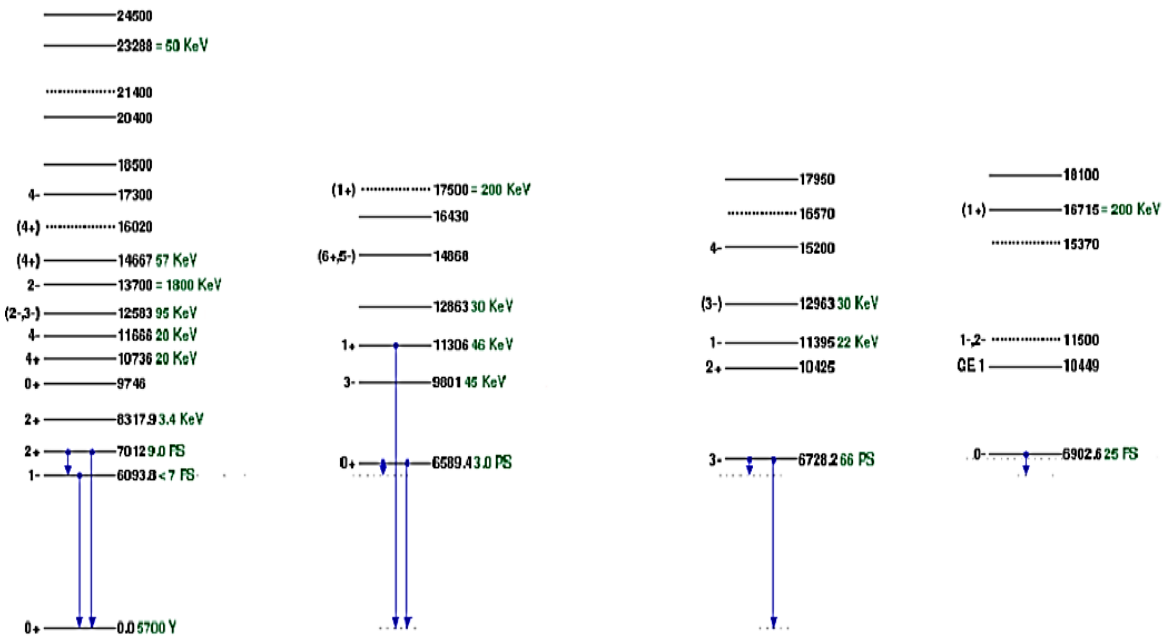
6- کربن در میله کنترل در راکتورهای اتمی به کار می‌رود.

7- گرافیت به شکل پودر و سفت شده به عنوان ذغال چوب برای پخت غذا، در آثار هنری و موارد دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

8- قرص‌های ذغالی چوب در پزشکی که به صورت قرص یا پودر وجود دارند برای جذب سم از دستگاه گوارشی مورد استفاده‌اند.

9- خصوصیت ساختمانی و شیمیایی فولرن به شکل ریز تیوب کربن، کاربردهای بالقوه امیدوار کننده‌ای در رشته در حال شکل نانو تکنولوژی دارد.

10- نمودار(۱-۱۰) ترازهای انرژی ^{14}C را نشان می دهد [۳۷].

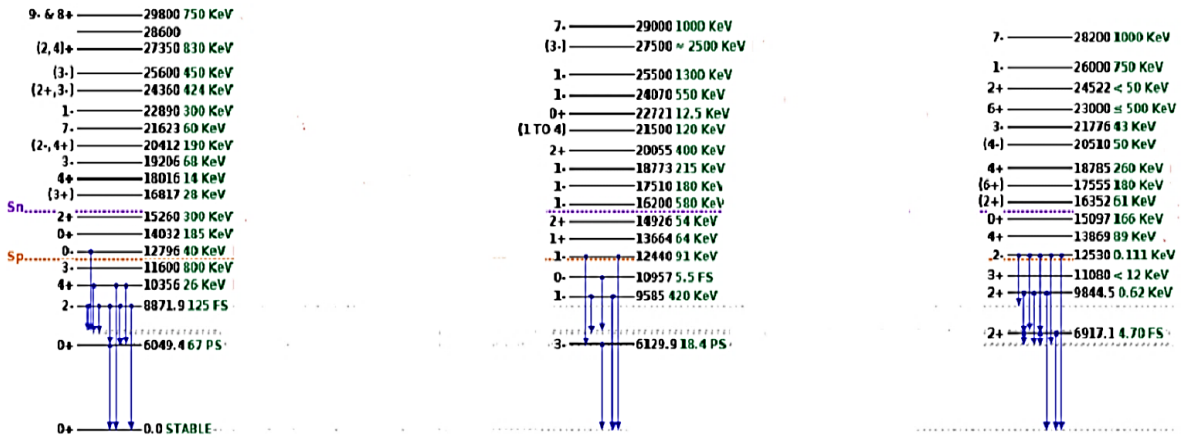


شکل (۱-۷): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{14}C

۱-۱۴ مروری بر ویژگی‌های اکسیژن

اکسیژن در سال ۱۷۷۱ توسط داروساز سوئدی به نام کارل، کشف شد. اکسیژن فراوان ترین عنصر در پوسته زمین است و مقدار آن حدود ٪ ۴۶/۷ است و حدود ۸۷٪ اقیانوس‌ها به صورت H_2O و ۲۰٪ جو زمین به صورت ازن O_2 و O_3 را به خود اختصاص می‌دهد. اکسیژن دارای ۳ ایزوتوپ پایدار^{16}O-^{17}O- ^{18}O است و بقیه ایزوتوپ‌ها همگی ناپایدار هستند که ^{12}O با نیمه عمر 580×10^{-24} ثانیه ناپایدارترین ایزوتوپ اکسیژن و ^{16}O یکی از ایزوتوپ‌های پایدار اکسیژن است که دارای اسپین و پاریته0^+ می‌باشد. با استفاده از مدل لایه‌ای این ایزوتوپ به لایه $1P_{1/2}$ ختم می‌شود. جرم اتمی این ایزوتوپ u ۹۹۴/ ۱۵ بوده و انرژی بستگی هریک از نوکلئون‌های آن (MeV) ۱۲۷/۶۱۹ است. همچنین درصد فراوانی این ایزوتوپ در طبیعت ۹۹٪/۷۶ بوده و دارای شعاع باری (fm) ۲/۶۹۹۴ است [۳۸،۳۹،۴۰].

نمودار(۱-۱۱) ترازهای انرژی ^{16}O را نشان می دهد [۳۷].



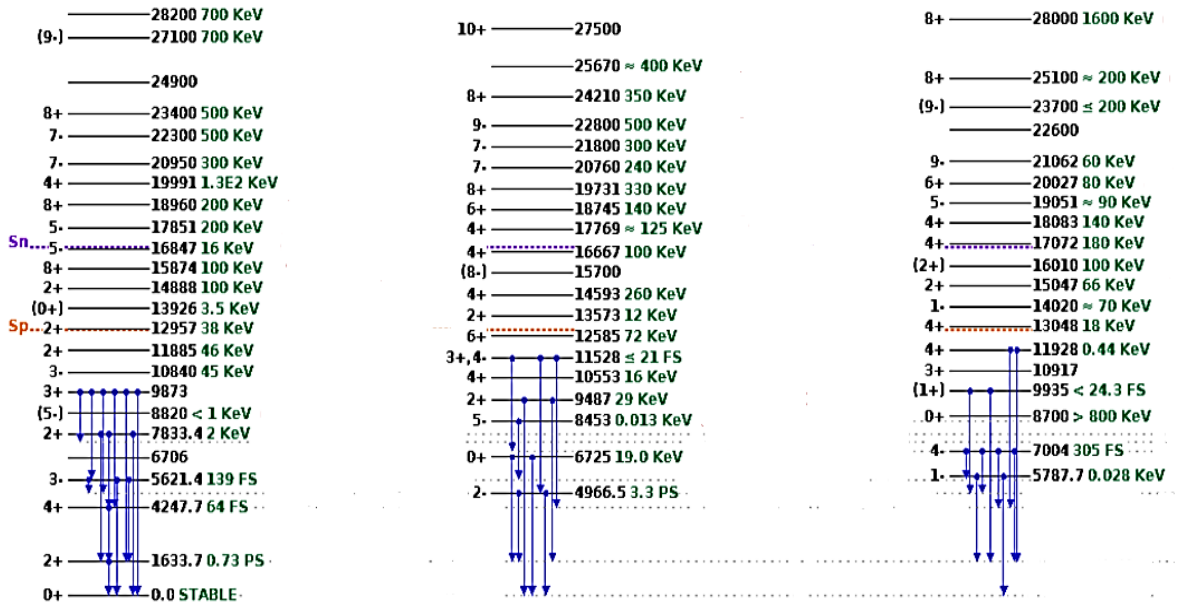
شکل (۱-۸): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{16}O

۱-۱۵ مروری بر ویژگی‌های نئون

در سال ۱۸۹۸ شیمیدان انگلیسی به نام ویلیام رمزی و موریس در لندن ایزوتوپ نئون را کشف کردند. نئون یک گاز بی اثر است ولی در ترکیب با فلوئور در آزمایشگاه، ترکیبات رنگی جالبی را ایجاد می‌کند. باید توجه داشت که استشمام گاز نئون به شدت خطرناک است و سبب خفگی شدید می‌شود، چراکه گاز نئون از طریق تنفس به سرعت جذب بدن می‌شود. نئون دارای سه ایزوتوپ پایدار $^{22}Ne - ^{21}Ne - ^{20}Ne$ است. درصد فراوانی این ایزوتوپ‌ها به صورت ^{20}Ne حدود ٪۹۰/۹۸ و ^{21}Ne حدود ٪۰/۲۷ و ^{22}Ne حدود ٪۹/۲۲ می‌باشد. ^{20}Ne یکی از پایدارترین ایزوتوپ‌های نئون است که بر اساس مدل لایه‌ای به تراز $1d_{5/2}$ ختم می‌شود و دارای اسپین و پاریته کل 0^+ است زیرا در این ایزوتوپ‌ها نوکلئون‌ها به صورت تزویج شده قرار دارند و هیچ تک نوکلئون منفردی در این لایه وجود ندارد. این ایزوتوپ یک ایزوتوپ زوج- زوج با تعداد ۱۰ پروتون و ۱۰ نوترون می‌باشد. هسته ^{20}Ne دارای جرم اتمی u ۱۹/۹۹۲ بوده و انرژی بستگی

هر یک از نوکلئون‌ها (MeV) ۱۶۰/۶۴۵ است که با مقدار انرژی در حالت پایه این هسته برابر است زیرا سیستم در حالت مقید بوده و هیچ‌گونه انرژی دریافت نکرده است. شعاع باری این هسته (fm) ۳/۰۰۵ است[۳۸،۳۹،۴۰].

نمودار(۱-۱۲) تراز های ایزوتوپ ^{20}Ne را نشان می‌دهد [۳۷].



شکل (۱-۹): نمودار ترازهای ایزوتوپ ^{20}Ne

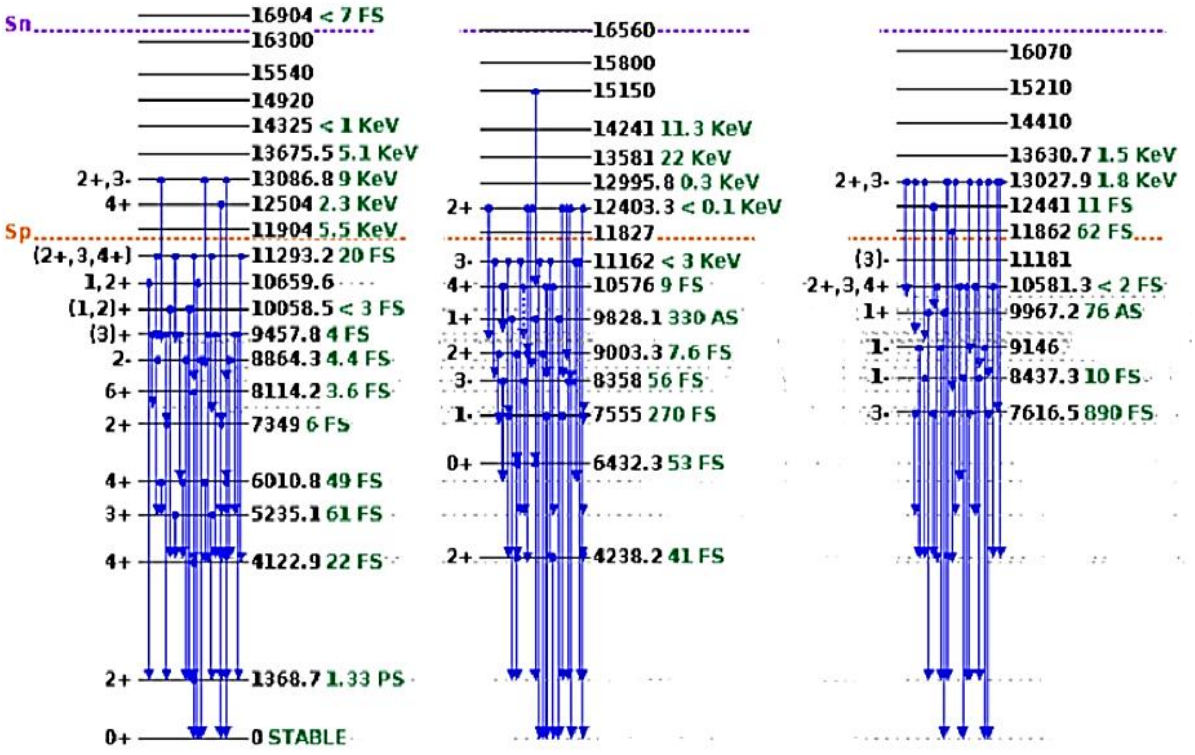
۱-۱۶ مروری بر ویژگی‌های منیزیم

در سال ۱۷۵۵ جوزف بلک منیزیم را به عنوان یک عنصر شناسایی کرد و در سال ۱۸۰۸ هامفری دیوی منیزیم خالص را کشف کرد. ترکیبات منیزیم، اکثراً به صورت مواد دیرگداز در کوره‌های تولید آهن، فولاد،

شیشه و سیمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. منیزیم در تولید کلروفیل کاربرد دارد و در نتیجه در فتوسنتز نیز موثر است. منیزیم دارای ۲۲ ایزوتوپ است که از این تعداد ایزوتوپ، ۳ ایزوتوپ ^{24}Mg - ^{25}Mg - ^{26}Mg پایدار بوده و همچنین ۱۹ ایزوتوپ پرتوزا دارد. درصد فراوانی این سه ایزوتوپ به صورت ^{24}Mg حدود ٪ ۷۸/۹۹ ، ^{25}Mg حدود ٪ ۱۰ و ^{26}Mg حدود ٪۱۱/۰۱ است [۳۸] . پایدارترین آن‌ها ایزوتوپ ^{24}Mg است. جرم اتمی این ایزوتوپ u ۲۳/۹۸۵ است که بر اساس مدل لایه‌ای به تراز $1d_{5/2}$ ختم می‌شود که اندازه حرکت مداری در این تراز $l = 2$ است، همچنین با استفاده از رابطه پاریته $\pi = (-1)^l$، پاریته مربوط به این تراز (+) است.

^{24}Mg یک ایزوتوپ زوج- زوج با تعداد $Z = N = 12$ است که اسپین و پاریته کل آن 0^+ است. انرژی بستگی و شعاع باری این ایزوتوپ به ترتیب (MeV) ۱۹۸/۲۵۷ و (fm) ۳/۱۲۲۴ است که به عنوان خواص استاتیکی هسته می‌توان نام برد[۳۹،۴۰].

در شکل (۱-۱۳) نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{24}Mg را نشان داده شده است [۳۷].



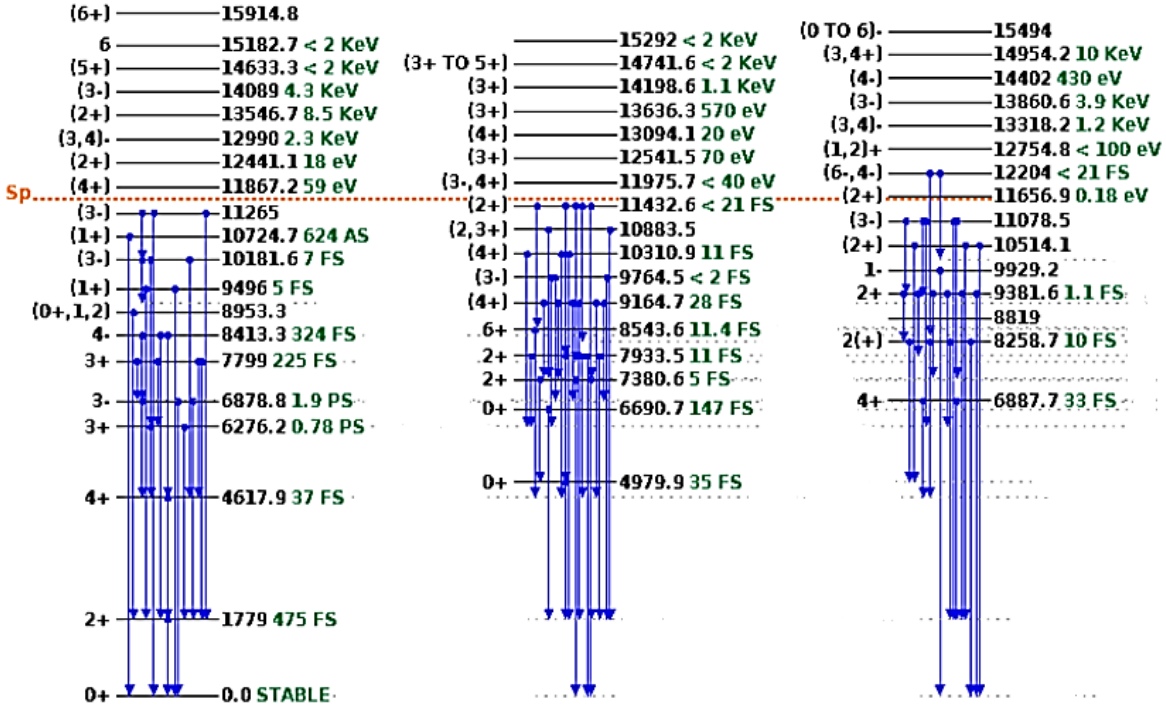
شکل (۱-۱۰): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{24}Mg

۱-۱۷ مروری بر ویژگی‌های سیلسیوم

در سال ۱۸۷۸ سیلسیوم توسط آنتوان لاووازیه کشف شد. سیلسیوم ٪۲۷/۷ پوسته زمین را تشکیل می دهد و این عنصر بعد از اکسیژن دومین عنصر فراوان در پوسته زمین است. این هسته دارای ۲۳ ایزوتوپ است و از این تعداد تنها ۳ ایزوتوپ پایدار ^{28}Si-^{29}Si- ^{30}Si است. در طبیعت ^{28}Si بیشترین فراوانی را داراست که حدود ٪۹۲/۲۳ است. تا کنون ۲۰ ایزوتوپ پرتوزای سیلسیوم شناخته شده است، که پایدارترین آن‌ها ^{28}Si و بعد از آن ^{32}Si با نیمه عمر۱۰۵ سال با مد واپاشی β^- و بعد از آن ^{31}Si با نیمه‌عمر ۱۵۷/۳ دقیقه است که بعد از گذشت این زمان β^- واپاشی می‌کند. ناپایدارترین ایزوتوپ سیلسیوم شامل ^{43}Si است که نیمه عمر آن ۶۰ نانوثانیه است [۳۷]. سیلسیوم را می‌توان در گرد و غبار، سرما، سیارک‌ها و سیاره‌ها

پیدا کرد [۳۹]. از پایدارترین ایزوتوپ‌های سیلسیوم به ^{28}Si می‌توان اشاره کرد که جرم اتمی این ایزوتوپ u ۲۷/۹۷۶ است و بر اساس مدل پوسته‌ای به لایه $1d_{5/2}$ ختم می‌شود. این ایزوتوپ یک ایزوتوپ زوج- زوج با تعداد یکسانی از پروتون‌ها و نوترون‌ها می‌باشد که این تعداد مساوی ۱۴ می‌باشد. همچنین این هسته مانند سایر ایزوتوپ‌های زوج- زوج دارای اسپین و پاریته 0^+ بوده و انرژی بستگی هریک از نوکلئون‌ها در حالت پایه این ایزوتوپ (MeV) ۲۳۶/۵۳۷ می‌باشد که در این هسته شعاع باری (fm) ۳/۱۲۲۴ است [۳۹،۴۰].

شکل (۱-۱۴) نمودار تراز های انرژِی ^{28}Si را به نمایش گذاشته است [۳۷].

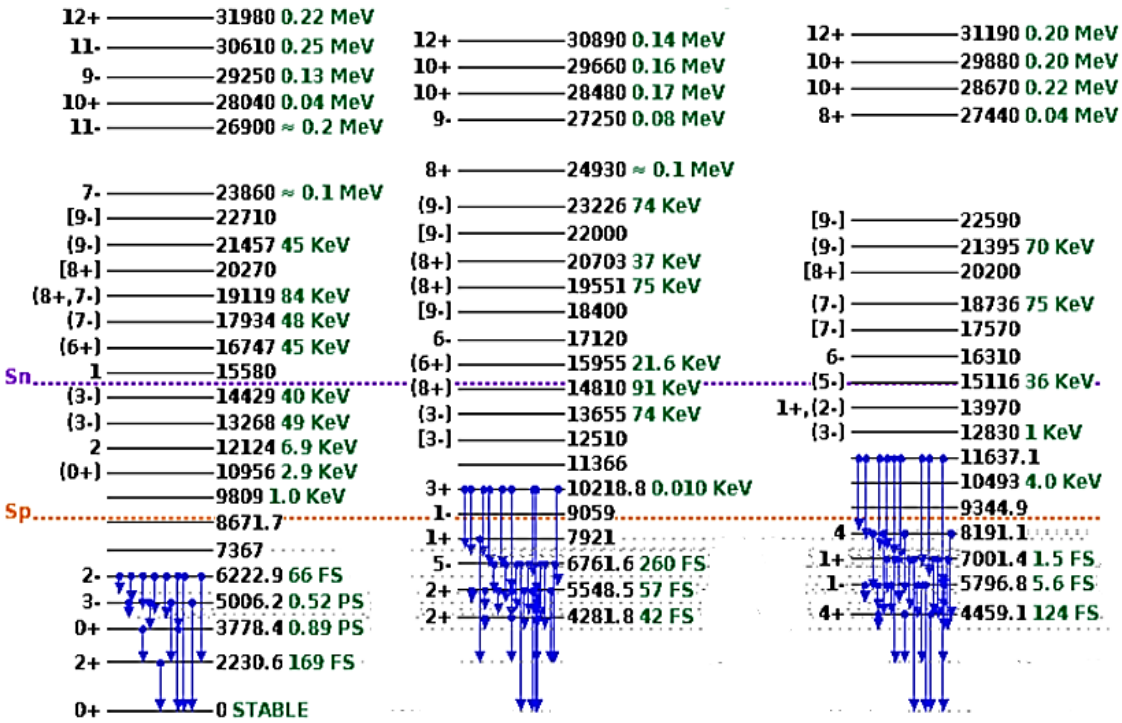


شکل (۱-۱۱): نمودار ترازهای انرژِی ایزوتوپ ^{28}Si

۱-۱۸ مروری بر ویژگی‌های گوگرد

در کتب به جای سولفور از گوگرد استفاده می‌کنند، در سال ۸۰۸ میلادی در یک دست نوشته چینی برای ساخت باروت در قسمت دستور العمل آن از نیترات و گوگرد و کربن نام برده است و این میزان قدمت سولفور را می‌رساند. در سال۱۷۸۹ میلادی گوگرد به عنوان یک عنصر شیمیایی شناخته شد و در جدول عناصر جای گرفت.گوگرد تقریبا سه درصد از جرم زمین را تشکیل می‌دهد. در هسته زمین میزان سولفور تقریبا ۱۰۰ برابر نسبت به پوسته آن بیشتر است. سولفور دارای کاربرد فراوانی است از جمله: یک ضد قارچ و ضد عفونی کننده بسیار خوب است. زمانی که گوگرد می‌سوزد، دی اکسید گوگرد گاز سمی تولید می‌کنند. در گذشته از این بخار در نیویورک برای ضدعفونی ساختمان‌هایی که محل قرار گرفتن بیماران عفونی یا پناهگاه‌ها بود، مورد استفاده قرار می‌گرفت. سولفور دارای ۲۳ ایزوتوپ است که از این تعداد تنها ۴ ایزوتوپ پایدار دارد که شامل ^{32}S -^{33}S-^{34}S-^{36}S می‌باشد. ^{32}S یک ایزوتوپ پایدار است که ٪۹۵ از گوگرد طبیعی را تشکیل می دهد. ^{33}S حدود ٪۰/۷۵ و ^{34}S حدود ٪۴/۲۱ و ^{36}S حدود ٪۰/۰۲ از گوگرد طبیعی را تشکیل می دهند. ^{35}S یک ایزوتوپ رادیواکتیو است که به طور طبیعی در طبیعت یافت می‌شود. ^{32}S هسته‌ای زوج- زوج، که دارای ۱۶ پروتون و ۱۶ نوترون بوده و یکی از ایزوتوپ‌های پایدار گوگرد است. اسپین و پاریته کل در این هسته 0^+ است. این ایزوتوپ طبق مدل پوسته‌ای به لایه ($2S_{1/2}$) ختم می‌شود که اندازه حرکت مداری در حالت پایه برای آن $l = 0$ است [۳۷]. میزان فراوانی ایزوتوپ ^{32}S در طبیعت ٪۹۴/۹۹ بوده و دارای جرم اتمی ۳۱/۹۷۲۰u است طبق مدل لایه‌ای می‌توان به برخی خواص استاتیکی این ایزوتوپ شامل انرژی بستگی و شعاع باری اشاره کرد که انرژی بستگی آن (MeV) ۲۷۱/۷۸۰ بوده و شعاع باری (fm) ۳/۲۶۱۱ است [۳۹،۴۰].

شکل (۱-۱۵) نمودار ترازهای انرژی ^{32}S را به نمایش گذاشته‌است [۳۷].



شکل (۱-۱۲): نمودار ترازهای انرژی ایزوتوپ ^{32}S

فصل دوم

روش‌های تحلیلی و عددی حل مساله

۲-۱ مقدمه

در فصل اول به بررسی مفاهیم اولیه فیزیک هسته‌ای پرداختیم. در این فصل می‌خواهیم به روش‌های حل مسأله بپردازیم. به‌طور کلی برای حل مسائل فیزیک سه روش وجود دارد:

۱) روش تحلیلی: در این روش به محاسبه و حل دقیق پارامتری معادلات دیفرانسیل حاکم بر میدان‌های فیزیک می‌پردازیم.

۲) روش عددی: در این روش به حل تقریبی و عددی مسائل فیزیکی می‌پردازیم، و به جای اینکه مسائل را پیوسته در نظر بگیریم بصورت گسسته در نظر گرفته و در بازه‌های زمانی کوچک جواب مسأله را بدست می‌آوریم.

۳) روش تجربی یا آزمایشگاهی: این روش برگرفته از واقعیت می‌باشد، و یکی از پرکاربردترین روش‌های مورد استفاده در حل مسائل است.

این روش‌ها برای حل مسائل مختلف به‌کار برده می‌شود. و با حل سیستم‌های هسته‌ای می‌توان به درک درست‌تری از ساختار هسته دست یافت. برای بیان بخش‌های مختلف فیزیک معادلات مختلفی ارائه شده است. می‌توان گفت، برای توصیف فیزیک نسبیتی و غیر نسبیتی از معادلات مختلفی استفاده می‌شود. که می‌توان از معادله شرودینگر برای سیستم‌های غیرنسبیتی و معادلات دیراک و کلاین- گوردن برای سیستم‌های نسبیتی نام برد. از جمله روش‌هایی که برای حل معادلات شرودینگر پیشنهاد می‌شود می‌توان به روش NU[1] [۴۱]، ابر تقارن [۴۲] و انتگرال مسیر [۴۳] اشاره کرد. این تکنیک‌های جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی به‌کار برده می‌شود [۴۴،۴۵].

[1] Nikiforov-Uvarov method

در این میان می‌توان این پتانسیل را با روش‌های متفاوت تحلیلی و عددی حل کرد. روش‌های حل عددی به دلیل حل پتانسیل‌های محدود به روش تحلیلی، از اهمیت خاصی برخوردار است.

در سال‌های اخیر توجه زیادی به روش NU برای حل سیستم‌های کوانتومی شده است. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم درنظر گرفته شده است، و نیز علاوه بر معادله شرودینگر برای حل معادلات دیراک، کلاین- گوردن و DKP در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی به‌کار برده می‌شود [۴۶،۴۷،۴۸]. به کارگیری روش NU در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل روشنی برای به دست آوردن جواب‌های دقیق حالت‌های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته به آن‌ها، برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد ارائه می‌دهد. که در حین سادگی بسیار مؤثر است. همچنین به دلیل اینکه یافتن جواب‌های دقیق معادله شرودینگر فقط در مواردی خاص مانند سیستم با پتانسیل کولنی و یا نوسانگر هماهنگ امکان پذیر است و در سایر موارد با استفاده از روش‌های معمول و سنتی غیر ممکن است. لذا استفاده از این روش باعث حل این مشکل شده و گامی به جلو محسوب می‌شود. از جمله مواردی که منجر به جستجوی روش‌های جدید می‌شود حل معادله شرودینگر با پتانسیل‌های غیر مرکزی است که اخیراً مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده است. البته باید توجه داشت که روش NU هم، مانند روش‌های قبلی در حل معادله شرودینگر با هر نوع پتانسیل معین ناکارآمد است و تنها با پتانسیل‌های خاصی که الزامات روش را برآورده می‌کنند، می‌توان با استفاده از این روش به نتیجه مورد نظر رسید.

در ادامه این فصل به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با استفاده از روش NU بر پایه تقلیل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می‌پردازیم.

۲-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی

در یک سیستم دو جسمی بردار مکان را با r_{12} یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ۲ ارتباط می‌دهد، تکانه زاویه‌ای نسبی را بصورت $\vec{P}_{12}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$ و تکانه زاویه مداری را بصورت $\vec{L}=\vec{r}_{12}\times\vec{P}_{12}$ تعریف می‌شود، و اسپین کل را با S نمایش می‌دهند. حال اگر سیستم مورد مطالعه ما یک سیستم A ذره‌ای باشد، در این صورت معادله شرودینگر مستقل از زمان آن بصورت $H\psi=E\psi$ بیان می‌شود که هامیلتونی بصورت زیر تعریف می‌شود [۴۹،۵۰]:

$$H=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j,i<j}}^{N}\left(\frac{P_i^2}{2m_i}+V(r_i)+V(r_i,r_j)\right) \qquad (۱-۲)$$

که در جمله‌بندی فوق استفاده از شرط $i\neq j$ به این دلیل است که هیچ ذره‌ای با خودش برهم‌کنش نداشته باشد. علاوه براین، شرط $i<j$ از نوشتن جملات تکراری صرف‌نظر می‌کند. با توجه به جملات معادله (۲-۱) جمله $V(r_i)$ شامل اثرات محیطی است و جمله $V(r_i,r_j)$ نیز شامل برهم‌کنش هر دو ذره با یکدیگر است. درنظر داریم برای یک سیستم A ذره‌ای از دستگاه مختصات ژاکوبی بهره‌مند شویم. برای محاسبات سیستم A ذره‌ای می‌توان $N=A-1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه ژاکوبی تعریف کرد و در هر تعریف هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می‌کند [۵۱]. زمانی که ذرات مورد مطالعه نوکلئون‌ها باشند می‌توان با صرف‌نظر از اختلاف جرم ناچیزشان جرم پروتون و نوترون را برابر در نظر بگیریم. برای چنین سیستمی می‌توان N بردار ژاکوبی را بصورت زیر تعریف کرد [۵۲]:

$$\xi_i=\sqrt{\frac{i}{i+1}}\left(\vec{r}_{i+1}-\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\vec{r}_j\right) \quad , \quad i=1,2,\ldots,N-1 \qquad (۲-۲)$$

$\vec{\xi}_i$ بردار مکان هر ذره نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای هر A ذره بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R=\frac{1}{A}(r_1+r_2+...r_A)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}r_i=\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}r_i \qquad (۳-۲)$$

و در نهایت المان حجم در این مختصات بصورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^{N}dr_i=N^{\frac{3}{2}}dR\prod_{j=1}^{N-1}d\vec{\xi}_i=dx \qquad (۴-۲)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان‌هایی از فاصله نسبی آن‌ها باشند، می‌توان آن‌ها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌گویند [۵۳،۵۴].

معادله شرودینگر درD بعد به صورت زیر داده می‌شود [۵۵].

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_{nl}-V(r)-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{l(l+D-2)}{r^2}\right)\right)\right\}R_{nl}(r)=0 \qquad (۵-۲)$$

که در آن $D=3N-3$ می‌باشد.

۲-۳ متغییرهای فوق کروی

هسته‌ها در حالت پایدار شکلی کروی دارند بنابراین می‌توان گفت معمولا پتانسیل برهم‌کنشی بین نوکلئون‌ها را پتانسیل مرکزی در نظر می‌گیریم، درنتیجه به جای مختصات دکارتی از مختصات فوق کروی استفاده می‌کنیم. در مختصات فوق کروی ما D=3N مختصه داریم که 2N مختصه آن مربوط به زوایای قطبی و سمتی مختصات ژاکوبی است. N-1 مختصه فوق زاویه هستند، و تک مختصه دیگر، فوق شعاع است و با رابطه زیر تعریف می‌شود [۵۶،۵۷]:

$$r^2=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_N^2=\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 \qquad (۶-۲)$$

3N-1 مختصه دیگر براساس تعریف «زرنیک-بریکمن» به صورت زیر است:

$$\Omega=\Omega\,(\omega_1,\omega_2,...,\omega_N\,;\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_N) \qquad (۷-۲)$$

که در آن ω_i بیانگر دو زاویه قطبی و سمتی مربوط به هر بردار ژاکوبی ξ_i است که در کل شامل 2N زاویه می‌شود و N-1 مختصه دیگر $(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_N)$ فوق زاویه هستند و بردار ژاکوبی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$|\xi_i|=\xi_i=r\cos\varphi_i\,\sin\varphi_{i+1}\,\sin\varphi_{i+2}...\sin\varphi_{i+N} \qquad (i=1,2,..,N);(0<\varphi_i<\frac{\pi}{2}) \qquad (۸-۲)$$

و نیز زوایا و فوق زوایا به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r=(\sum_{i=1}^{D}x_i^{\,2})^{\frac{1}{2}} \qquad (۹-۲)$$

$$x_1=r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3...\sin\theta_{D-1}$$

$$x_2=r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3...\cos\theta_{D-1}$$

.

.

.

$$x_i=r\cos\theta_{i-1}\sin\theta_i\,\sin\theta_{i+1}...\sin\theta_{D-1} \qquad (۱۰-۲)$$

.

.

.

$$x_{D-1}=r\cos\theta_{D-2}\,\sin\theta_{D-1}$$

$$\frac{\tilde{\sigma}(S)}{\sigma^2(S)}\psi_n(S)+\frac{\tilde{\tau}(S)}{\sigma(S)}\psi_n'(S)+\psi_n''(S)=0$$

که در آن داریم:

$$0 \le r < \infty \quad ; \quad -\pi \le \theta_1 \le \pi \quad ; \quad 0 \le \theta_i \le \pi \ (2 \le i \le D-1)$$

کمیات $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}, \xi_N$ که در رابطه (۲-۶) بیان شده است، به ترتیب با کمیت‌های $r = (\sum_{j=1}^{2N+1} x_j^2)^{\frac{1}{2}}$

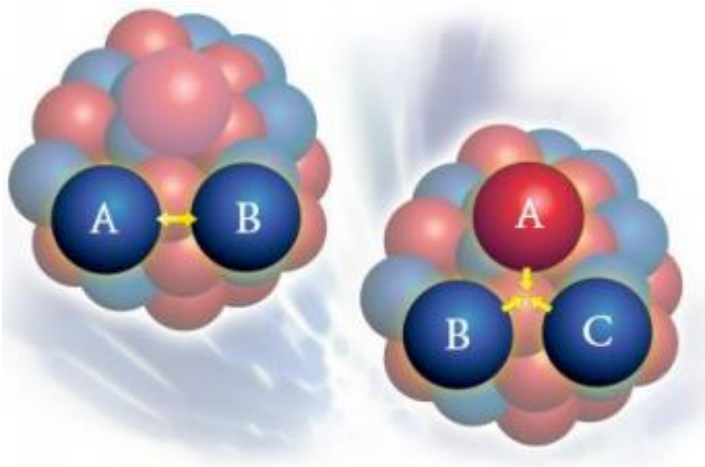
$x_D, x_{D-1}, \ldots, x_{2N+2}$ در رابطه (۲-۹) متناظراند. اندازه زوایا به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan\theta_i = \frac{(\sum_{j=1}^{i} x_j^2)^{1/2}}{x_{j+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, D-1) \qquad (۲-۱۱)$$

۲-۴ نیروهای چند جسمی

درنظر می‌گیریم، نیروی هسته‌ای، نیروی بین دوجسمی است. همانطور که در شکل (۲-۱) نیز مشاهده می‌شود، نیروی دوجسمی F_{AB} میان دو نوکلئون A و B وجود دارد. بنابراین برهم‌کنش‌های دو جسمی بطور طبیعی در زمینه تئوری نظریه تبادل مزون و در سطح بنیادی‌تر از QCD [1] به وجود می‌آیند [۵۸]. حال اگر نوکلئون‌های A، B و C مطابق شکل نزدیک به یکدیگر باشند، نیروی اعمال شده بر A، $F_{AB} + F_{AC}$ است [۵۹].

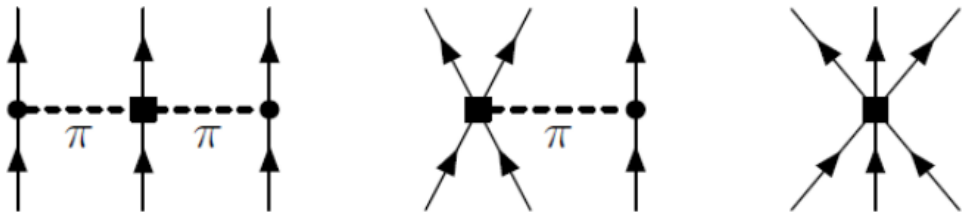
[1] Quantum Chromodynamics



شکل (۲-۱): طرح شماتیک نیروهای دو جسمی و سه جسمی

از مدل نیروی تبادل چنین برمی‌آید که نیروی مزونی فقط میان جفت‌ها عمل می‌کند. اما تبادل‌های دیگری نیز وجود دارند، برای مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هرگاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته باشند، دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این امر منجر به نیروی سه جسمی می‌شود. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی، پنج جسمی و ... که نیروی چند جسمی نامیده می‌شوند را نیز پیش‌بینی می‌کند.

در فیزیک ذرات بنیادی، برهم‌کنش بین سه کوارک، هادرون‌ها را تشکیل می‌دهند، می‌توان با مدل کوارکی که هم ارز نیروی سه جسمی است آن‌ها را توصیف کرد. بنابراین نیروی سه جسمی مربوط به بخش هادرون (باریون) است. یک پایون که بوسیله یکی از نوکلئون‌ها تابش شده است، قبل از جذب شدن به وسیله سومین نوکلئون، توسط نوکلئون دوم پراکنده می‌شود [۶۰]. همچنین مدل پدیده شناختی، موفقیت‌های متعددی در نیروی هسته‌ای داشته است که به‌طور معمول چندین مدل پدیده شناختی نیروی سه جسمی حاصل از سهم تبادل دو پایون وجود دارد. در شکل (۲-۲) نمودار فایمن نیروی سه جسمی حاصل از تبادل دو پایون نشان داده شده است [۶۱].



شکل (۲-۲): نمودار فایمن نیروی سه جسمی[۶۲]

یک روش دیگر، مطالعه سیستم‌های سه نوکلئونی است که آیا می‌شود نیروی سه جسمی را از نیروی دوجسمی محاسبه کرد یا نه؟ جواب منفی است. سیستم‌های سه نوکلئونی را می‌توان بصورت حالت‌های مقید نظیر هسته‌های $^{3}_{2}He$, $^{3}_{1}H$ یا توسط پراکندگی نوترون یا پروتون از دوترون مطالعه کرد که در این زمینه اطلاعات زیادی موجود است. تجزیه و تحلیل این اطلاعات بسیار مشکل است، به هر حال کوشش زیادی صرف محاسبه انرژی بستگی $^{3}_{1}H$ شده است که مقدار تجربی آن ۸/۴۸۲ MeV است [۶۳]. نتایج نشان می‌دهد، انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم فقط برابر ۷ MeV است و در نتیجه حدود MeV ۱/۵ از انرژی بستگی آن از نیروی سه جسمی ناشی می‌شود.

۲-۵ کلیات روش NU

روش نیکی‌فارو- یووارو [۶۴] برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم فوق هندسی به وسیله توابع متعامد کروی پایه‌گذاری شده است. این روش یکی از پرطرفدارترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم تک متغیره برای تحلیل و توصیف سیستم‌های مکانیک کوانتومی در سال‌های اخیر به شمار می‌آید [۶۵،۶۶]. برای به‌دست آوردن جواب‌های دقیق برای حالت‌های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته آن می‌توان از روش NU استفاده کرد. این روش دستورالعمل مشخصی در حل معادلات شرودینگر، کلاین- گوردن و دیراک برای محاسبه مقادیر عنوان شده برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد ارائه می‌دهد. این روش

براساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. در این روش معادله شرودینگر با یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ به شکل کلی زیر تبدیل می‌شود [۶۷]:

$$\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi_n(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi_n'(s)+\psi_n''(s)=0 \qquad (۱۲-۲)$$

در این رابطه $\tilde{\sigma}(s)$, $\sigma(s)$ چندجمله‌ای‌هایی حداکثر از مرتبه دو هستند و $\tilde{\tau}(s)$ نیز یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه اول است و $\psi_n(s)$ یک تابع فوق هندسی است. تابع موج $\psi_n(s)$ را به‌صورت معادله زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi_n(s)=\varphi_n(s)\,y_n(s) \qquad (۱۳-۲)$$

$y_n(s)$ تابع فوق کروی است که چندجمله آن با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y_n(s)=\frac{B_n}{\rho_n}\frac{d^n}{ds^n}(\sigma^n(s)\,\rho(s)) \qquad (۱۴-۲)$$

B_n ضریب نرمالیزاسیون و ρ تابع وزنی است که با توجه به رابطه زیر داریم:

$$\frac{d\,\omega'(s)}{ds}=\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\omega(s) \qquad \omega(s)=\sigma(s)\,\rho(s) \qquad (۱۵-۲)$$

معادله (۲-۱۲) به یک معادله فوق هندسی به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$\left(\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}+\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\right)y_n(s)+\left(2\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\right)y_n'(s)+y_n''(s)=0 \qquad (۱۶-۲)$$

در معادله بالا، ضریب $y_n'(s)$ را با تقریبی به شکل $\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}$ برابر قرار می‌دهیم که $\tau(s)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه اول می‌باشد، یعنی:

$$2\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}=\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \qquad (۱۷-۲)$$

و بنابراین شکل منظم به‌صورت زیر است:

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \qquad (۱۸-۲)$$

که در معادله بالا داریم:

$$\pi(s)=\frac{1}{2}(\tau(s)-\tilde{\tau}(s)) \qquad (۱۹-۲)$$

از عبارت بالا به نتیجه‌ای قابل قبول می‌رسیم:

$$\tau(s)=2\pi(s)+\tilde{\tau}(s) \qquad (۲۰-۲)$$

در نتیجه پارامتر جدید $\pi(s)$ یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه یک است. علاوه بر این، جمله $\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$ که در ضریب $y(s)$ در معادله (۲-۱۴) می‌باشد، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}=(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)})'+(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)})^2=(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)})'+(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)})^2 \qquad (۲۱-۲)$$

با استفاده از معادله (۲-۱۶)، ضریب $y(s)$ به شکل مناسب تبدیل می‌شود:

$$\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}+\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}=\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \qquad (۲۲-۲)$$

داریم:

$$\tilde{\sigma}(s)=\tilde{\sigma}(s)+\pi^2(s)+\pi(s)[\tilde{\tau}(s)-\sigma^2(s)]+\pi'(s)\sigma(s) \qquad (۲۳-۲)$$

با جایگزینی طرف راست معادله (۲-۱۷) و (۲-۲۲) در معادله (۲-۱۶)، یک معادله از نوع فوق هندسی بصورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y_n''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}y_n'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)})y_n(s)=0 \qquad (۲۴-۲)$$

اگر چندجمله‌ای $\tilde{\sigma}(s)$ در معادله بالا به چندجمله‌ای $\sigma(s)$ تقسیم پذیر باشد، یعنی $\tilde{\sigma}(s)=\lambda\sigma(s)$ که λ یک عدد ثابت است، آنگاه معادله (۲-۲۲) به معادله فوق هندسی زیر تبدیل می‌شود:

$$\sigma(s)y''(s)+\tau(s)y'(s)+\lambda y(s)=0 \qquad (۲۵-۲)$$

بنابراین جواب آن به عنوان یک تابع فوق هندسی می‌باشد. با قرار دادن رابطه $\tilde{\sigma}(s)=\lambda\sigma(s)$ در معادله (۲-۲۱) می‌توان به معادله درجه دوم زیر برای $\pi(s)$ دست یافت:

$$\pi^2(s)+\pi(s)[\tilde{\tau}(s)-\sigma'(s)]+\tilde{\sigma}(s)-k\sigma(s)=0 \qquad (۲۶-۲)$$

$k=\lambda-\pi'(s)$ را در نظر می‌گیریم. در نتیجه جواب معادله درجه دوم برای $\pi(s)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2})^2-\tilde{\sigma}(s)+k\sigma(s)} \qquad (۲۷-۲)$$

به منظور به‌دست آوردن جواب‌های ممکن مطابق با علامت‌های مثبت و منفی رابطه بالا، پارامتر k در زیر رادیکال باید کاملاً مشخص باشد. بنابراین، عبارت زیر رادیکال باید مربع یک چندجمله‌ای باشد زیرا $\pi(s)$ یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه یک می‌باشد. برای این منظور، باید چندجمله‌ای درجه دوم در زیر رادیکال دارای $\Delta=b^2-4ac$ برابر صفر باشد. بنابراین $\tau(s),\lambda$ می‌توانند با استفاده از معادله (۲-۱۷) و رابطه $k=\lambda-\pi'(s)$ به ترتیب به‌دست آیند. $\pi(s)$ یک چندجمله‌ای وابسته به پارامتر s است. تعیین مقدار k هدفی اساسی در محاسبات $\pi(s)$ است. برای محاسبه مقدار k ریشه عبارت زیر رادیکال باید برابر صفر باشد، داریم:

$$\lambda = \lambda_n = -n\,\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \qquad (n = 0,1,2,...) \qquad (۲-۲۸)$$

با برابر قرار دادن مقدار معادله (۲-۲۸) و مقدار $\lambda = k + \pi'(s)$ مقدار انرژی مورد نیاز محاسبه می‌شود. توجه شود مقدار k از معادله (۲-۲۶) بدست می‌آید. قابل ذکر است که ویژه مقادیر انرژی و وِیژه توابع وابسته‌شان را برای سیستمی تحت یک پتانسیل غیرمرکزی معین به آسانی می‌توان با بکار بستن روش NU به‌دست آورد. البته باید توجه داشت همانطور که قبلاً هم اشاره شد، این روش همچون روش‌های دیگر در حل معادله شرودینگر با هر نوع پتانسیل غیرمرکزی دلخواه، ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیل‌ها که الزامات روش را برآورده می‌کنند، می‌توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید. لذا در این میان، روش‌های عددی در حل مسائل سخت نقش مهمی دارند که در ادامه به طور مختصر با برخی از روش‌های عددی در حل مسائل فیزیک آشنا می‌شویم [۶۸].

۲-۶ روش‌های حل عددی

یکی از بهترین روش‌های موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد روش‌های رایانه‌ای و عددی می‌باشد. روش‌های رایانه‌ای از لحاظ کم هزینه بودن کنترل‌پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روش‌های آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانه‌ها روش‌های رایانه‌ای نقش به سزایی در پیش‌برد و اثبات نظریه و فرضیه‌های علمی دارد. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستم‌های چند ذره‌ای نیز می‌توان از روش‌های رایانه‌ای و عددی بهره جست. به این منظور در ابتدای امر باید پتانسیلی برای بین ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات اصول و قواعد خاص خود را می‌طلبد. شناخت پتانسیل بین ذرات یکی از پایه‌های اصلی برای شناخت و توصیف وپیش‌بینی رفتار ذرات می‌باشد. معمولا به دلیل وجود تعداد زیاد ذره‌ها در یک دستگاه تعیین شکل دقیق پتانسیل واقعی میسر نیست. در عمل پتانسیل با تقریب و بر اساس ملاحظات پدیده شناختی انتخاب می‌شود. اهمیت و درستی اکثر نتایج حاصل از محاسبات رایانه‌ای و آنچه آن‌ها از رفتار واقعی حالت‌های مختلف مواد و گذار حالت تحت شرایط مختلف را نشان

می‌دهند به انتخاب صحیح انرژی پتانسیل بستگی دارد. در شبیه‌سازی‌های کلاسیک همه اثرهای کوانتومی دستگاه‌های بس ذره‌ای در پتانسیل بین ذره‌ای نهفته است. برای مدل‌سازی فیزیکی اقسام مختلف مواد مثل‌فلزها، نیمرساناها و غیره، پتانسیل‌های بس ذره‌ای مختلفی توسعه داده شده‌اند. پتانسیل‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی‌ها اغلب مرکزی‌اند. یعنی فقط به فاصله ذرات وابسته‌اند. یک پتانسیل بس ذره‌ای را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$V_{pot} = \sum_i V_1(\vec{r}_i) + \sum_i \sum_{j>i} V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j>i} V_3(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) \qquad (۲۹-۲)$$

در این رابطه i, j, k مشخصه ذرات هستند. که جمله اول پتانسیل خارجی اعمال شده بر ذره‌های دستگاه است. که می‌توان از این جمله صرف نظر کرد. جمله دوم عبارت است از برهم‌کنش‌های دو ذره‌ای بین ذره‌ها که معمولاً مقدار آن فقط به فاصله نسبی دو ذره از یکدیگر یعنی $r_{ij} = \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|$ بستگی دارد. جمله‌های بالاتر برهم‌کنش‌های سه ذره‌ای و چهار ذره‌ای و ... می‌باشند [۶۸].

۲-۷ روش PNU

یک روش مستقیم برای دستیابی به روش نیکی فارو- یووارو، بدون نیاز به بررسی توابع مختلف، روش PNU است. ابتدا فرم عمومی معادله شرودینگر گونه‌ای را به صورت رابطه زیر معرفی می‌کنیم [۶۹،۷۰]:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{c_1 - c_2 s}{s(1-c_3 s)}\frac{d}{ds} + \frac{(-\rho_2 s^2 + \rho_1 s - \rho_0)}{s^2(1-c_3 s)^2}\right]\psi_n(s) = 0 \qquad (۳۰-۲)$$

برای معادله شرودینگر گونه در حضور هر پتانسیل برهم‌کنشی که بتوان به صورت معادله‌ی بالا نوشت، رابطه ویژه مقداری انرژی و تابع موج به ترتیب با روابط زیر داده می‌شوند.

$$\mathrm{n\,c_2 - (2n+1)c_5 + (2n+1)(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}) + n(n-1)c_3 + c_7 + 2c_3c_8 + 2\sqrt{c_8c_9} = 0} \qquad (۳۱-۲)$$

$$\psi_{nk(s)} = N_{nk}\, s^{c_{12}}(1-c_3 s)^{c_{13}}\, p_n^{(c_{10},c_{11})}(1-2c_3 s) \qquad (۳۲-۲)$$

که در آن $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی می‌باشند و ضرایب ثابت c بکار رفته در معادلات بالا در جدول (۲-۱) ارائه شده‌اند. همچنین ضرایب $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ می‌باشد.

جدول(۲-۱): ضرایب $c_i (i=1,\ldots,13)$

$c_4 = \frac{1}{2}(1-c_1)$	$c_5 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3)$	$c_6 = c_5^2 + \rho_2$
$c_7 = 2c_4c_5 - \rho_1$	$c_8 = c_4^2 + \rho_0$	$c_9 = c_3(c_7 + c_3c_8) + c_6$
$c_{10} = c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8} - 1\rangle -1$	$c_{11} = 1 - c_1 - 2c_4 + \frac{2}{c_3}\sqrt{c_9}\rangle -1, c_3 \neq 0$	
$c_{12} = c_4 + \sqrt{c_8}\rangle 0$	$c_{13} = -c_4 + \frac{1}{c_3}\left(\sqrt{c_9} - c_5\right)\rangle 0, c_3 \neq 0$	

با استفاده از روابط (۲-۲۶) و (۲-۲۷) و ضرایب موجود در جدول (۲-۱) می‌توان روابط مربوط به طیف انرژی و تابع موج را به دست آورد.

۲-۸ ذرات نسبیتی با اسپین صفر

توصیف پدیده‌ها در انرژی بالا مستلزم بکارگیری معادلات موج نسبیتی می‌باشد. معادلات موج نسبیتی مانند کلاین گوردن و دیراک از مسئله‌های جالب در فیزیک انرژی بالا است. در سال‌های اخیر مطالعه و بررسی معادلات موج نسبیتی به ویژه معادله کلاین- گوردن توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است زیرا حل این معادله نقش مهمی را در فیزیک کوانتوم نسبیتی بازی می‌کند. این معادله حرکت ذرات با اسپین صفر را در یک میدان پتانسیل توصیف می‌کند. که شامل عملگر چار- بردار تکانه خطی و جرم سکون اسکالر می‌باشد. که این دو عامل به ما اجازه می‌دهند که دو نوع پتانسیل جفت شده یعنی پتانسیل

اسکالر S(r) و برداری V(r) را معرفی کنیم. بسیاری از محققین با استفاده از روش‌های مختلف حالت‌های مقید معادله کلاین- گوردن و دیراک را با پتانسیل‌های متعدد، و با استفاده از روش‌های گوناگونی از جمله ابر تقارن، NU و... مطالعه و بررسی کرده‌اند [۷۱،۷۲].

در ادامه ما به بررسی معادله کلاین- گوردن در سه بعد با استفاده از پتانسیل تعمیم یافته هولسن و ایکارت پرداخته و معادله ویژه‌مقداری انرژی و ویژه تابع را با استفاده از روش تحلیلی پارامتری NU به دست می‌آوریم.

۲-۹ بررسی غیر نسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU

با در نظر گرفتن معادله شعاعی شرودینگر به صورت زیر داریم [۷۳،۷۴]:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+D-2)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V(r)-E_{nl}\right)\right\}R_{nl}(r)=0 \qquad (۳۳-۲)$$

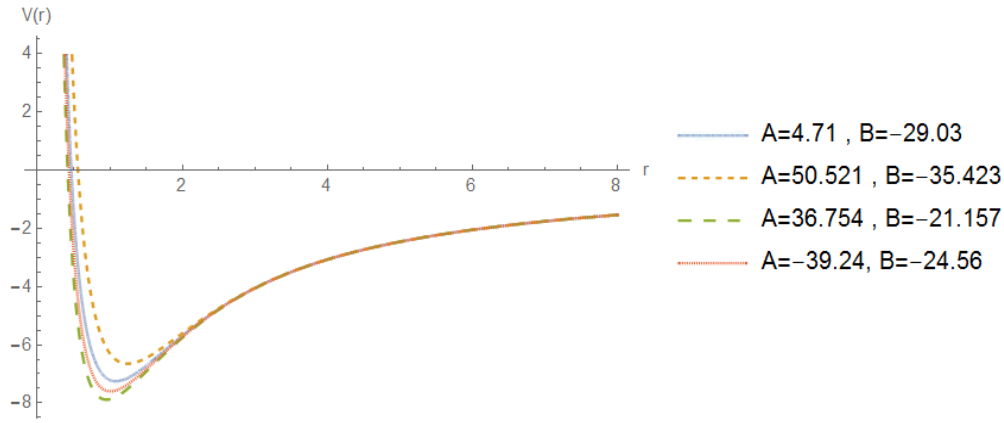
که در آن $E_{n,l}$ و $R_{nl}(r)$ به ترتیب ویژه مقادیر انرژی و قسمت شعاعی تابع موج است [۷۵].

با در نظر گرفتن پتانسیل جایگزیده جهت برهم‌کنش بین ذرات به صورت $V(r)=V_N(r)+V_C(r)$، که در آن $V_C(r)$ پتانسیل دافعه کولنی و $V_N(r)$ پتانسیل هسته‌ای است که شامل جملات دافعه و جاذبه می‌باشد و در دستگاه مختصات ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(r)=\frac{-A\,e^{-r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}+\frac{B\,e^{-2r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}+\frac{C}{r} \qquad (۳۴-۲)$$

در این رابطه، A قدرت جاذبه هسته‌ای، B قدرت دافعه هسته‌ای، C قدرت دافعه کولنی و δ معکوس برد پتانسیل هستند.

می‌توان شکل مربوط به پتانسیل موجود در رابطه (۲-۳۴) را به صورت شکل (۲-۳) به ازای مقادیر متغیر A و B بر حسب (MeV) و مقادیر ثابت $\delta = 0.44(fm)^{-1}$ رسم کرد:



شکل (۲-۳): نمودار تغییرات پتانسیل بر حسب r به ازای مقادیر مختلف A و B و مقادیر ثابت C و δ

با داشتن بخش شعاعی تابع موج به صورت زیر:

$$U_{nl}(r) = r\,R_{nl}(r)$$

و با قرار دادن پتانسیل در معادله شرودینگر D بعدی موجود در رابطه (۲-۳۳) داریم:

$$\frac{d^2U_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E + \frac{A\,e^{-r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2} - \frac{B\,e^{-2r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2} - \frac{C}{r} - \hbar^2\frac{(2l+D-1)(2l+D-3)}{8\mu r^2}\right]U_{nl}(r) = 0 \qquad (۲-۳۵)$$

معادله بالا به دلیل شکل پتانسیل به روش‌های معمول قابل حل نمی‌باشد، لذا برای حل این معادله از تقریب زیر استفاده می‌کنیم[۷۶]:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2}\frac{e^{-2r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2} \qquad (۲-۳۶)$$

با به کار بردن تغییر متغیر $s = e^{-r/\delta}$ رابطه (۲-۳۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2U(s)}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dU(s)}{ds}+\frac{1}{s^2}\frac{2\mu\delta^2}{\hbar^2}\left\{E+\frac{As}{(1-s)^2}-\frac{Bs^2}{(1-s)^2}-\frac{Cs}{\delta(1-s)}-\hbar^2\frac{(2l+D-1)(2l+D-3)s^2}{8\mu\delta^2(1-s)^2}\right\}U(s)=0 \qquad (۳۷-۲)$$

که می‌توان رابطه بالا را از طریق روش پارامتری نیکوفارو- یووارو (PNU) به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2U_{nl}(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU_{nl}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}(-\zeta_2 s^2+\zeta_1 s-\zeta_0)U_{nl}(s)=0 \qquad (۳۸-۲)$$

که پارامترهای $\zeta_2, \zeta_1, \zeta_0$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\zeta_0=-\frac{2\mu\delta^2}{\hbar^2}E$$

$$\zeta_1=-\frac{2\mu\delta^2}{\hbar^2}\left[E-A+\frac{C}{\delta}\right] \qquad (۳۹-۲)$$

$$\zeta_2=-\frac{2\mu\delta^2}{\hbar^2}\left[E-B+\frac{C}{\delta}\right]-\frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{4}$$

همچنین با استفاده ازروش PNU به ترتیب معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$n\,\varepsilon_2-(2n+1)\varepsilon_5+(2n+1)(\sqrt{\varepsilon_9}+\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_8})+n(n-1)\varepsilon_3+\varepsilon_7+2\varepsilon_3\varepsilon_8+2\sqrt{\varepsilon_8\varepsilon_9}=0 \qquad (۴۰-۲)$$

$$\psi_{nk(s)}=N_{nk}s^{\varepsilon_{12}}(1-\varepsilon_3 s)^{c_{13}}p_n^{(\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})}(1-2\varepsilon_3 s) \qquad (۴۱-۲)$$

که به کمک معادلات موجود در بخش (۲-۷) می‌توان پارامترهای ε را محاسبه کرد.

حال معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج به ترتیب برابر خواهند شد با:

$$(2n+1)[\sqrt{\zeta_2-\zeta_1+\zeta_0+\frac{1}{4}}+\sqrt{\zeta_0}+\frac{1}{4}(2n+1)]+2\sqrt{\zeta_0(\zeta_2-\zeta_1+\zeta_0)}+2\zeta_0-\zeta_1+\frac{1}{4}=0$$

(۲-۴۲)

$$\psi_{nl}(s)=\frac{N}{r}\exp(-2\delta r)^{\sqrt{\zeta_0}}(1-\mathrm{e}^{-2\delta r})^{\sqrt{\zeta_2-\zeta_1+\zeta_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}p_n^{(2\sqrt{\zeta_0},2\sqrt{\zeta_2-\zeta_1+\zeta_0+\frac{1}{4}})}(1-2\,\mathrm{e}^{-2\delta r}) \qquad (۲-۴۳)$$

که N ضریب بهنجار و $\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{(\alpha,\beta)}(\mathrm{x})$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی می‌باشند.

۲-۱۰ بررسی نسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU

معادله شعاعی کلاین- گوردن مربوط به صورت زیر نوشته می‌شود [۷۷،۷۸]:

$$\{-\hbar^2c^2\nabla^2+(Mc^2+S(r))^2-(E_{nl}-V(r))^2\}\psi_{nl}(r,\theta,\phi)=0 \qquad (۲-۴۴)$$

که E_{nl}، $V(r)$ و $S(r)$ به ترتیب انرژی نسبیتی ذرات، پتانسیل برداری و پتانسیل اسکالر هستند. برای تقارن کروی پتانسیل‌های اسکالر و برداری می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi_{nl}(r,\theta,\phi)=\frac{u_{nl}(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (۲-۴۵)$$

که در آن $Y_{lm}(\theta,\phi)$ تابع هماهنگ کروی و l عدد کوانتومی تکانه زاویه است. که معادله کلاین- گوردن حاصل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2U_{nl}(r)}{dr^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}\left\{(E_{nl}-V(r))^2-(Mc^2+S(r))^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\hbar^2c^2\right\}U_{nl}(r)=0 \qquad (۲-۴۶)$$

که M جرم کاهیده، E_{nl} انرژی نسبیتی ذرات، C سرعت نور و $\hbar$ ثابت پلانک است. در حالتی که پتانسیل برداری و اسکالر باهم برابر باشند، معادله شعاعی شرودینگر گونه در D بعد با استفاده از مختصات نسبی ژاکوبی به صورت زیر به دست می‌آید.

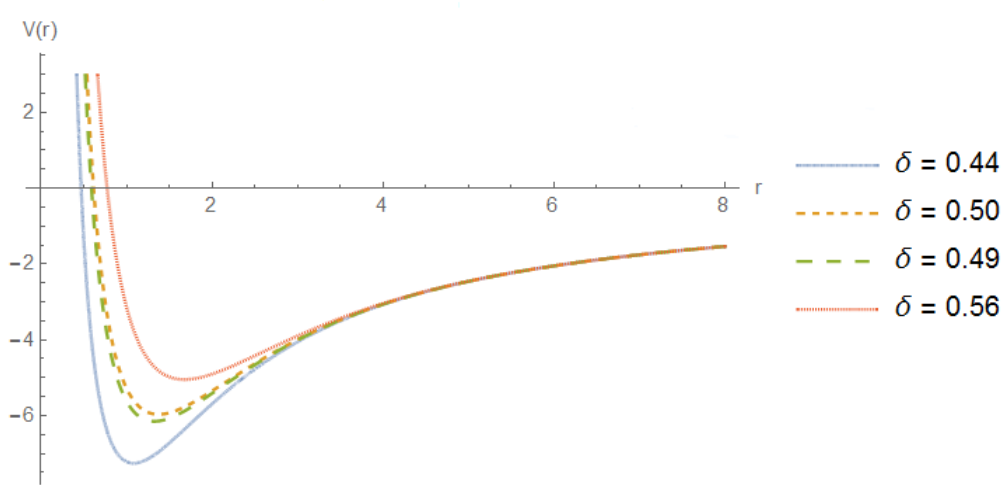
$$V(r)=S(r)$$

$$\frac{d^2U_{nl}(r)}{dr^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}\left\{E_{nl}^2-M^2c^4-V(r)(Mc^2+E_{nl})-\frac{l(l+1)}{r^2}\hbar^2c^2\right\}U_{nl}(r)=0 \qquad (۴۷-۲)$$

و با در نظر گرفتن

$$V(r)=\frac{-Ae^{-r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}+\frac{Be^{-2r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}+\frac{C}{r} \qquad (۴۸-۲)$$

می‌توان شکل مربوط به پتانسیل موجود در رابطه (۲-۴۸) را به صورت شکل (۲-۴) به ازای مقادیر متغیر δ رسم کرد:



شکل (۲-۴): نمودار پتانسیل بر حسب r به ازای مقادیر ثابت A، B ، K و مقادیر مختلف δ

با انتخاب تابع موج به صورت $\phi_{nl}(r)=r\,U_{nl}(r)$ معادله بالا با پتانسیل پیشنهادی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{d^2\phi_{nl}(r)}{dr^2}+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(E_{nl}^2-M^2c^4)}{\hbar^2c^2}-\dfrac{(Mc^2+E_{nl})}{\hbar^2c^2}\\ \left(\dfrac{-A\,e^{-r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}+\dfrac{B\,e^{-2r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}+\dfrac{C}{r}\right)-\dfrac{l\,(l+1)}{r^2}\end{array}\right\}\phi_{nl}(r)=0 \qquad (۴۹-۲)$$

با استفاده از تقریب به کار گرفته شده به صورت زیر [۷۶]:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{b^2}\frac{e^{-2r/\delta}}{(1-e^{-r/\delta})^2}$$

و با معرفی تغییر متغیر $s=e^{-r/\delta}$ رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2\phi_{nl}(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{d\phi_{nl}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\delta^2(E_{nl}^2-M^2c^4)}{\hbar^2c^2}(1-s)^2-\dfrac{\delta^2(Mc^2+E_{nl})}{\hbar^2c^2}\\ \left(-2A\,s+2B\,s^2+\dfrac{2C}{\delta}s\,(1-s)\right)+l\,(l+1)s^2\end{array}\right\}\phi_{nl}(s)=0 \qquad (۵۰-۲)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر در نظرگرفت:

$$\phi''_{nl}(s)+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\phi'_{nl}(s)+\frac{1}{s^2(1-s)^2}(-\kappa_2 s^2+\kappa_1 s-\kappa_0)\phi_{nl}(s)=0 \qquad (۵۱-۲)$$

که $\kappa_0,\kappa_1,\kappa_2$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\kappa_2=-\left[\alpha-2B\,\gamma+\frac{2C}{\delta}\gamma-l\,(l+1)\right]$$

$$\kappa_1=-\left[2\alpha-2A\,\gamma+\frac{2C}{\delta}\gamma\right] \qquad (۵۲-۲)$$

$$\kappa_0=-\alpha \qquad \gamma=\frac{\delta^2(E_{nl}+Mc^2)}{\hbar^2c^2} \qquad \alpha=\frac{\delta^2(E_{nl}^2-M^2c^4)}{\hbar^2c^2}$$

همچنین با استفاده از روش پارامتری NU به ترتیب معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$n\,\varepsilon_2-(2n+1)\,\varepsilon_5+(2n+1)(\sqrt{\varepsilon_9}+\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_8})+n\,(n-1)\,\varepsilon_3+\varepsilon_7+2\varepsilon_3\varepsilon_8+2\sqrt{\varepsilon_8\varepsilon_9}=0 \qquad (۵۳-۲)$$

$$\psi_{nk\,(s)}=N_{nk}\,s^{\varepsilon_{12}}(1-\varepsilon_3 s)^{c_{13}}\,p_n^{(\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})}(1-2\varepsilon_3 s) \qquad (۵۴-۲)$$

که به کمک معادلات موجود در بخش (۲-۷) می‌توان پارامترهای ε را محاسبه کرد.

در نهایت با استفاده از روش PNU معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(2n+1)[\sqrt{\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0+\frac{1}{4}}+\sqrt{\kappa_0}+\frac{1}{4}(2n+1)]+2\sqrt{\kappa_0(\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0)}+2\kappa_0-\kappa_1+\frac{1}{4}=0 \qquad (۵۵-۲)$$

$$\psi_{nl}(s)=\frac{N'}{r}\exp(-2\delta r)^{\sqrt{\kappa_0}}(1-\mathrm{e}^{-2\delta r})^{\sqrt{\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}\,p_n^{(2\sqrt{\kappa_0},2\sqrt{\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0+\frac{1}{4}})}(1-2\,\mathrm{e}^{-2\delta r}) \qquad (۵۶-۲)$$

که N' ضریب بهنجار و $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(\mathrm{x})$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی می‌باشند.

حال با استفاده از روابط اصلی در این محاسبات، به بررسی خواص استاتیکی ایزوتوپ‌های زوج- زوج در فصل بعد می‌پردازیم.

فصل سوم

محاسبه برخی خواص استاتیکی ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne با استفاده از مدل خوشه‌ای

۳-۱ مقدمه

بررسی و مطالعه هسته‌های سبک به روش‌های مختلفی صورت می‌گیرد که یکی از این روش‌ها استفاده از مدل خوشه‌ای می‌باشد [۷۹]. مطالعه پدیده خوشه شدن در هسته‌ها دارای یک تاریخچه عظیم و طولانی است [۸۰]. این مدل می‌تواند توصیف خوبی از خواص استاتیکی، الکترومغناطیسی و سایر خواص هسته‌ها را به همراه داشته باشد [۸۱]. بر اساس آخرین یافته‌های فیزیکدانان، آرایش خوشه‌ای را نوعا نمی‌توان در حالت پایه هسته‌ها جست‌وجو کرد بلکه عموما خوشه شدن در حالت‌های برانگیخته‌ای از هسته‌ها اتفاق می‌افتد و برای ایجاد این تغییر شکل سیستم باید به اندازه کافی انرژی داشته باشد که آن‌ها را در آستانه واپاشی به صورت خوشه قرار دهد [۸۲،۸۳]. برای مثال هسته ^{14}C با گرفتن 2.27 MeV انرژی می‌تواند به ساختار 3α دست یابد [۸۴]. پدیده خوشه شدن در حالت‌های مختلفی صورت می‌گیرد:

۱- هسته‌های متشکل از خوشه‌های یکسان:

مدل خوشه‌ای بر پایه جمع شدن ذرات کنار هم است که نیروی بین خوشه‌ها شبیه نیروی هسته‌ای است. یکی از کارآمدترین مدل‌ها برای هسته‌های سبک، ذرات آلفا است [۸۵،۸۶]. در سال‌های اخیر، کارهای مهمی درباره هسته‌های با $A=4n$ که n تعداد ذرات آلفا می‌باشد، انجام شده است. برای مثال هسته‌های ^{8}Be، ^{12}C ، ^{16}O ، ^{20}Ne و ^{24}Mg و...که می‌توان هر یک از آن‌ها را به جای استفاده از مدل جمعی و یک سیستم بس ذره‌ای، متشکل از ذرات آلفا در نظر بگیریم، مانند: ($^{12}C = 3\alpha$). این هسته‌ها در مدل خوشه‌ای ساختارهای متفاوتی دارند برای مثال هسته ^{12}C، در حالت پایه به صورت زنجیر خطی یا به صورت مثلث می‌باشد. همچنین ساختار حالت پایه ^{16}O به صورت چهار وجهی است و احتمالاً حالت‌های برانگیخته این هسته ساختار مربعی، زنجیره خطی و گاز غیر برهم‌کنشی دارند [۸۷].

یکی دیگر از مدل‌های به کار رفته با خوشه‌های یکسان در سال‌های اخیر، هسته‌های متشکل از پوسته‌های بسته می‌باشد. برای مثال ^{24}Mg با گرفتن 13.93 MeV انرژی به دو خوشه $^{12}C + ^{12}C$ تغییر شکل می‌دهد [۸۸]. همچنین هسته ^{32}S را می‌توان متشکل از دو خوشه $^{16}O + ^{16}O$ در نظر گرفت [۸۹].

۲- هسته‌های متشکل از خوشه‌های نایکسان:

در سال ۱۹۹۵- بوک و همکارانش مدل‌هایی را برای بررسی هسته‌ها پیشنهاد داده‌اند که این مدل را به نوعی می‌توان مدل خوشه‌ای در نظر گرفت. این مدل‌ها شامل برهم‌کنش پوسته بسته- خوشه است [۹۰،۹۱]. نکته اساسی در مطالعه این ایزوتوپ‌ها در نظر گرفتن برهم‌کنش بین خوشه‌های پیشنهادی می‌باشد. ما در این پایان نامه به بررسی ایزوتوپ‌های زوج- زوج ^{14}C، ^{16}O، ^{20}Ne، ^{24}Mg، ^{28}Si، ^{32}S با انتخاب مدل پوسته بسته- خوشه (core- cluster) می‌پردازیم و به دنبال این هستیم که آیا مدل پیشنهادی برای سایر ایزوتوپ‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد یا خیر؟ به همین دلیل علاوه بر بررسی دو ایزوتوپ ^{14}C و ^{20}Ne به مطالعه ایزوتوپ‌های ^{16}O، ^{24}Mg، ^{28}Si، ^{32}S نیز می‌پردازیم. هیچ یک از این خوشه شدن‌ها در حالت پایه اتفاق نمی‌افتند و سیستم برای این تغییر شکل نیز باید انرژی داشته باشد. مثلا اگر به هسته ^{20}Ne در حالت پایه‌اش مقدار 4.73MeV انرژی بدهیم نوکلئون‌های آن به صورت دو خوشه $^{16}O + \alpha$ تغییر شکل می‌دهند.

برخی از این هسته‌ها قبلا با استفاده از مدل‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. یکی از مدل‌های به کار رفته برای بررسی ایزوتوپ‌ها در هسته‌های متشکل از خوشه‌های نایکسان انتخاب یک پوسته بسته (core) به اضافه یک یا دو نوکلئون اضافی است. برای مثال ایزوتوپ ^{14}O را می‌توان به صورت یک سیستم سه ذره‌ای که متشکل است از $^{12}O + n + n$ در نظر گرفت. همچنین می‌توان ایزوتوپ ^{14}C را به جای بررسی یک سیستم چند ذره‌ای که کاری بس دشوار است، به صورت $^{12}C + n + n$ در نظر گرفت که به یک سیستم سه ذره‌ای تبدیل شده است [۹۲،۹۳]. در این قسمت با در نظر گرفتن مدل پوسته بسته- خوشه هر یک از

ایزوتوپ‌ها را به یک سیستم دو جسمی تبدیل کرده و با در نظر گرفتن پتانسیل برهم‌کنشی مناسب برای برهم‌کنش بین core- cluster، به محاسبه ترازهای انرژی و شعاع باری بر مبنای روش تحلیلی پارامتری NU می‌پردازیم.

۳-۲ بررسی غیر نسبیتی ایزوتوپ‌های زوج- زوج با استفاده از مدل خوشه‌ای

با در نظر گرفتن معادله شعاعی شرودینگر به صورت زیر داریم [۷۳،۷۴]:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+D-2)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[V(r)-E_{nl}\right]\right\}R_{nl}(r)=0 \qquad (۱-۳)$$

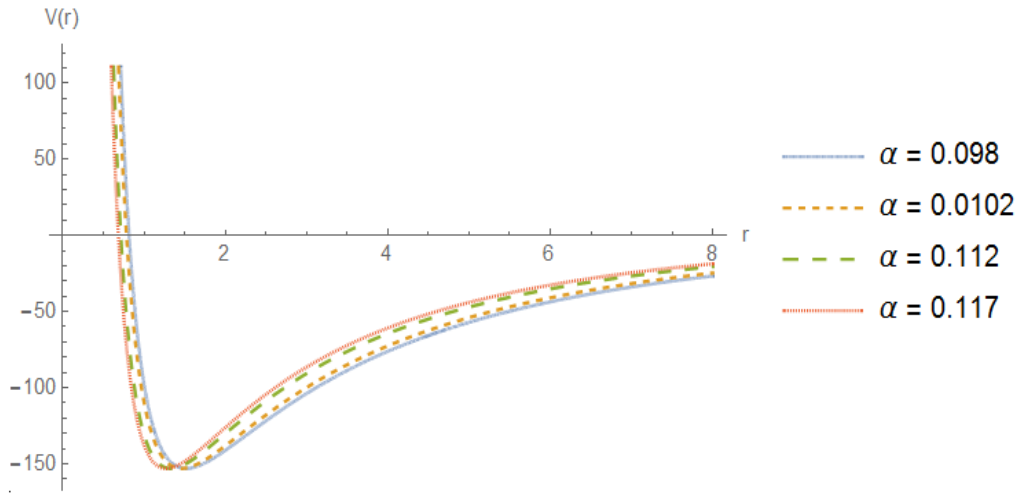
که در آن $E_{n,l}$ و $R_{nl}(r)$ به ترتیب ویژه مقادیر انرژی و قسمت شعاعی تابع موج است.

حال برای مطالعه برهم‌کنش بین پوسته بسته- خوشه در مدل پیشنهادی پتانسیل زیر را درنظر می‌گیریم [۹۵،۹۴]:

$$V(r)=V_0 Csch^2(\alpha r)+V_1\frac{\exp(-2\alpha r)}{1-\exp(-2\alpha r)}+\frac{K}{r} \qquad (۲-۳)$$

رابطه بالا متشکل از پتانسیل دافعه کولنی با قدرت K و پتانسیل هسته‌ای شامل جاذبه و دافعه است. بطوری که V_0 و V_1 ضرایب پتانسیل و پارامترهای حقیقی هستند، که جمله اول، دافعه هسته‌ای با ثابت V_0 و جمله دوم، جاذبه هسته‌ای با ثابت V_1 را نشان می‌دهد. همچنین پارامتر α نیز محدوده پتانسیل را تعیین می‌کند و $1/\alpha$ برد نیروی هسته‌ای می‌باشد.

می‌توان شکل مربوط به پتانسیل موجود در رابطه (۳-۲) را به صورت شکل (۳-۱) به ازای مقادیر متغیر α (fm^{-1}) و مقادیر ثابت V0 = 4.595 ، V1 = -124.452 وK = 0.012 بر حسب (MeV) رسم کرد که این مقادیر از طریق برازش با داده‌های تجربی محاسبه شده‌اند:



شکل (۳-۱): نمودار پتانسیل برحسب r

با داشتن بخش شعاعی تابع موج به صورت زیر:

$$U_{nl}(r) = r\,R_{nl}(r)$$

و با قرار دادن پتانسیل در معادله شرودینگر موجود در رابطه (۳-۱) داریم:

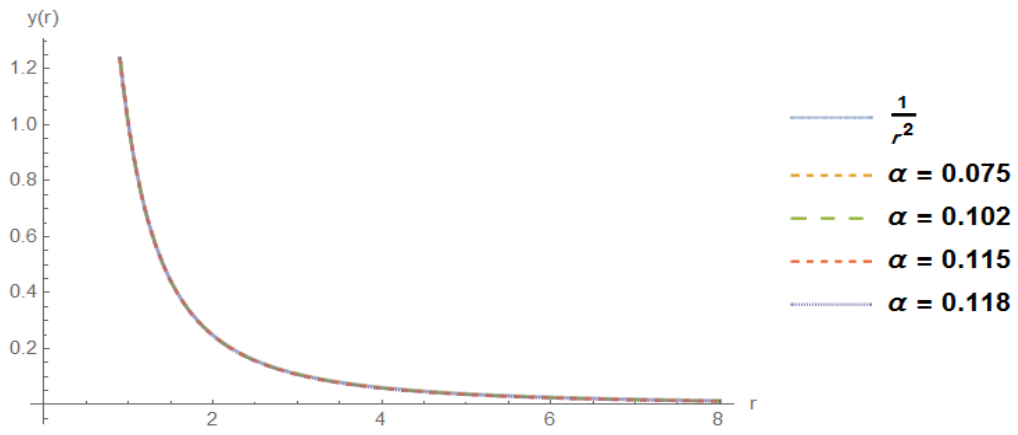
$$\frac{d^2U_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E_{nl} - 4V_0\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2} - V_1\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))} - \frac{K}{r} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]U_{nl}(r) = 0$$

(۳-۳)

معادله بالا به دلیل شکل پتانسیل به روش‌های معمول قابل حل نمی‌باشد، و تنها برای $l = 0, -1$ به طور دقیق قابل محاسبه است. لذا برای حل تحلیلی این معادله از تقریب Aldrich, Greene استفاده می‌کنیم [۷۰]. این تقریب برای $\alpha r << 1$ معتبر است.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\alpha^2\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2} \qquad (۴-۳)$$

رفتار تقریب در نظر گرفته شده در شکل (۳-۲) نشان داده شده است که می‌توان توافق خوبی برای آلفاهای کوچک مشاهده کرد.



شکل(۳-۲): رفتار تقریب به کار برده شده برای مقادیر مختلف $\alpha\ (fm^{-1})$.

با به کار بردن تغییر متغیر $s=\exp(-2\alpha r)$ رابطه (۳-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2U_{nl}(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU_{nl}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left\{\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}E\,(1-s)^2-\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}\,[4V_0 s-V_1 s(1-s)\right.$$
$$\left.-2K\alpha s(1-s)]-l(l+1)s\right\}U_{nl}(s)=0$$

(۵-۳)

که می‌توان رابطه بالا را از طریق روش پارامتری نیکوفارو- یووارو (PNU) به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2U(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}(-\rho_2 s^2+\rho_1 s-\rho_0)U(s)=0$$

(۶-۳)

که پارامترهای ρ_0,ρ_1,ρ_2 به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\rho_0=-\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}E$$

$$\rho_1 = -\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}\left[2E + 4V_0 + V_1 + 2K\alpha\right] + l(l+1) \qquad (۷-۳)$$

$$\rho_2 = -\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}\left[E + V_1 + 2K\alpha\right]$$

همچنین با استفاده ازروش PNU به ترتیب معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$(2n+1) + \left[\begin{array}{l}\sqrt{\rho_2 - \rho_1 + \rho_0 + \frac{1}{4}} \\ \quad + \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\end{array}\right] 2\sqrt{\rho_0(\rho_2 - \rho_1 + \rho_0)} + 2\rho_0 - \rho_1 + \frac{1}{4} = 0 \qquad (۸-۳)$$

$$\psi_{nl}(s) = \frac{N}{r}\exp(-2\alpha r)^{\sqrt{\rho_0}}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha r})^{\sqrt{\rho_2-\rho_1+\rho_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}} p_n^{(2\sqrt{\rho_0},2\sqrt{\rho_2-\rho_1+\rho_0+\frac{1}{4}})}(1-2\mathrm{e}^{-2\alpha r}) \qquad (۹-۳)$$

که N ضریب بهنجار و $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی می‌باشند. که با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$p_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k\, k!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^k}{dx^k}((1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k} \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad (۱۰-۳)$$

حال برای بررسی و مطالعه هسته‌های سبک از جمله ایزوتوپ‌های زوج- زوج ^{14}C و ^{20}Ne با استفاده از مدل خوشه‌ای، هر یک از آن‌ها را به صورت پوسته بسته و یک خوشه آلفا (core- cluster) در نظر می‌گیریم. با استفاده از مدل پیشنهادی می‌توان هر یک از سیستم‌های بس ذره‌ای، موجود در مدل جمعی را به یک سیستم دو ذره‌ای تبدیل کرد. که این خوشه شدن به صورت زیر می‌باشد [۹۰،۹۱]:

$^{14}C \rightarrow (^{10}Be + \alpha)$, $^{16}O \rightarrow (^{12}C + \alpha)$, $^{20}Ne \rightarrow (^{16}O + \alpha)$

$^{24}Mg \rightarrow (^{20}Ne + \alpha)$, $^{28}Si \rightarrow (^{24}Mg + \alpha)$, $^{32}S \rightarrow (^{28}Si + \alpha)$

حال با در نظر گرفتن پتانسیل ایکارت و هولسن به همراه پتانسیل دافعه کولنی برای برهم‌کنش بین خوشه‌ها با استفاده از معادلات (۳-۸) و (۳-۹) که به ترتیب نشان دهنده ویژه مقادیر انرژی و تابع موج هستند به محاسبه برخی خواص استاتیکی هسته‌ها می‌پردازیم. ترازهای انرژی حالت پایه و دو حالت برانگیخته را برای ایزوتوپ‌های مورد بررسی با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی بدست آمده محاسبه کرده و در جدول زیر نشان داده‌ایم.

جدول (۳-۱): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های زوج- زوج در توصیف غیر نسبیتی

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل	حالت	E_{Our}(MeV)	E_{Exp}(MeV) [۹۶]
^{14}C	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.098 \\ V_0(MeV) & 4.595 \\ V_1(MeV) & -124.452 \\ K(MeV) & 0.012 \end{pmatrix}$	0^+	-105.712	-105.285
		1^-	-97.463	-99.247
		0^+	-93.684	-92.658
^{16}O	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.076 \\ V_0(MeV) & 3.622 \\ V_1(MeV) & -115.201 \\ K(MeV) & 0.121 \end{pmatrix}$	0^+	-127.682	-127.619
		0^+	-120.779	-121.569
		3^-	-117.068	-115.439
^{20}Ne	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.081 \\ V_0(MeV) & 9.312 \\ V_1(MeV) & -212.561 \\ K(MeV) & 0.215 \end{pmatrix}$	0^+	-160.667	-160.645
		2^+	-157.547	-159.012
		4^+	-154.543	-154.765
^{24}Mg	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.101 \\ V_0(MeV) & 22.129 \\ V_1(MeV) & -385.871 \\ K(MeV) & 0.034 \end{pmatrix}$	0^+	-198.244	-198.257
		2^+	-194.589	-196.888
		4^+	-192.794	-192.134
^{28}Si	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.114 \\ V_0(MeV) & 37.826 \\ V_1(MeV) & -573.148 \\ K(MeV) & 0.021 \end{pmatrix}$	0^+	-236.842	-236.537
		2^+	-233.399	-234.758
		4^+	-231.700	-230.141
^{32}S	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.096 \\ V_0(MeV) & 36.545 \\ V_1(MeV) & -582.482 \\ K(MeV) & 0.051 \end{pmatrix}$	0^+	-271.789	-271.780
		2^+	-269.041	-269.545
		0^+	-267.680	-267.321

همچنین با داشتن تابع موج با استفاده از رابطه زیر می‌توان شعاع باری هر یک از ایزوتوپ‌ها را به دست آورد.

$$\langle r^2\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\int R_{nl}^*(r) r^2 R_{nl}(r) d^3r}{\int R_{nl}^*(r) R_{nl}(r) d^3r}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۱-۳)$$

شعاع باری این ایزوتوپ‌ها در حالت پایه به کمک روابط (۳-۹) و (۳-۱۱) بدست آمده است و با مقدار تجربی مقایسه شده است.

جدول (۳-۲): شعاع باری ایزوتوپ‌های زوج- زوج در حالت پایه

ایزوتوپ	ضرایب پتانسیل				$\langle r^2\rangle^{1/2}_{our\,work}(fm)$	$\langle r^2\rangle^{1/2}_{\exp}(fm)$ [۹۷]
	V_0(MeV)	$\alpha\,(fm^{-1})$	V_1(MeV)	K(MeV)		
^{14}C	4.595	0.098	-124.452	0.012	2.521	2.502
^{16}O	3.622	0.076	-115.201	0.121	2.665	2.699
^{20}Ne	9.312	0.081	-212.561	0.215	3.003	3.005
^{24}Mg	22.129	0.101	-385.871	0.034	3.067	3.056
^{28}Si	37.826	0.114	-573.148	0.021	3.103	3.122
^{32}S	36.545	0.096	-582.482	0.051	3.265	3.261

۳-۳ بررسی نسبیتی ایزوتوپ‌های زوج- زوج با استفاده از مدل خوشه‌ای

معادله شعاعی کلاین- گوردن مربوط به صورت زیر نوشته می‌شود [۹۸،۹۹]:

$$\left\{-\hbar^2c^2\nabla^2 + (Mc^2 + S(r))^2 - (E_{nl} - V(r))^2\right\}\psi_{nl}(r,\theta,\phi) = 0 \qquad (۱۲-۳)$$

که E_{nl}، $V(r)$ و $S(r)$ به ترتیب انرژی نسبیتی ذرات، پتانسیل برداری و پتانسیل اسکالر هستند. برای تقارن کروی پتانسیل‌های اسکالر و برداری می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi_{nl}(r,\theta,\phi)=\frac{\phi_{nl}(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (۱۳-۳)$$

که در آن $Y_{lm}(\theta,\phi)$ تابع هماهنگ کروی و l عدد کوانتومی تکانه زاویه است. که معادله کلاین- گوردن حاصل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2\phi_{nl}(r)}{dr^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}\left\{(E_{nl}-V(r))^2-(Mc^2+S(r))^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\hbar^2c^2\right\}\phi_{nl}(r)=0 \qquad (۱۴-۳)$$

که M جرم کاهیده، E_{nl} انرژی نسبیتی ذرات، C سرعت نور و $\hbar$ ثابت پلانک است. در حالتی که پتانسیل برداری و اسکالر با هم برابر باشند، معادله شعاعی شرودینگر گونه با استفاده از مختصات نسبی ژاکوبی به صورت زیر به دست می‌آید.

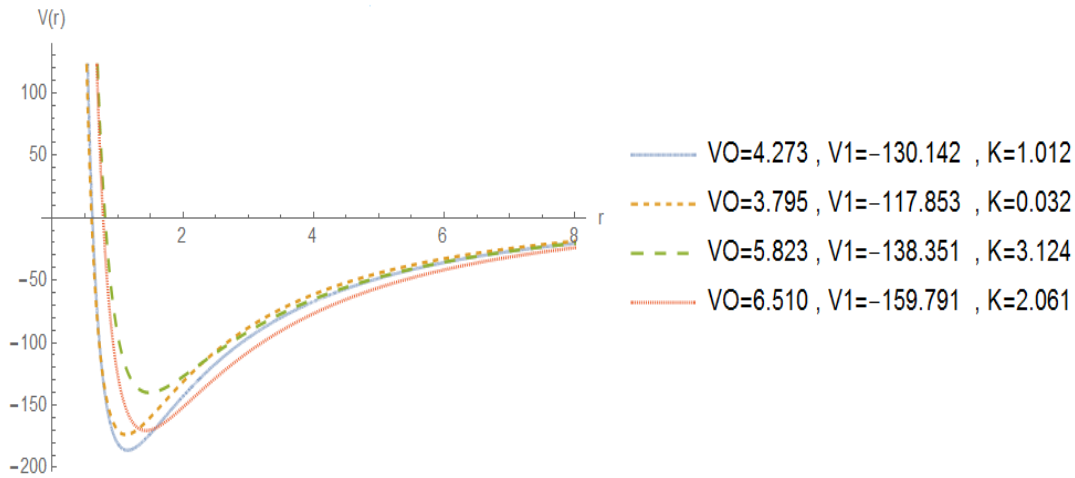
$$V(r)=S(r)$$

$$\frac{d^2\phi_{nl}(r)}{dr^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}\left\{E_{nl}^2-M^2c^4-V(r)(Mc^2+E_{nl})-\frac{l(l+1)}{r^2}\hbar^2c^2\right\}\phi_{nl}(r)=0 \qquad (۱۵-۳)$$

و با در نظر گرفتن:

$$V(r)=V_0Csch^2(\alpha r)+V_1\frac{\exp(-2\alpha r)}{1-\exp(-2\alpha r)}+\frac{K}{r} \qquad (۱۶-۳)$$

می‌توان شکل مربوط به پتانسیل موجود در رابطه (۳-۱۶) را به صورت شکل (۳-۳) به ازای ضرایب مختلف پتانسیل و مقدار ثابت α رسم کرد که این مقادیر از طریق برازش با داده‌های تجربی محاسبه شده‌اند:



شکل (۳-۳): تغییرات پتانسیل به ازای مقادیر مختلف V0، V1 و K و مقدار ثابت α

با انتخاب تابع موج به صورت $U_{nl}(r)=r\,\phi_{nl}(r)$ معادله بالا با پتانسیل پیشنهادی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{d^2U_{nl}(r)}{dr^2}+\left\{\frac{(E_{nl}^2-M^2c^4)}{\hbar^2c^2}-\frac{(Mc^2+E_{nl})}{\hbar^2c^2}\left(4V_0\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2}+V_1\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))}\right)+\frac{K}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}U_{nl}(r)=0$$

(۱۷-۳)

معادله بالا تنها برای $l=0,-1$ به طور دقیق قابل محاسبه است. لذا برای حل تحلیلی این معادله از تقریب Aldrich, Greene استفاده می‌کنیم [۷۰].

$$\frac{1}{r^2}=\frac{4\alpha^2\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2} \qquad (۱۸-۳)$$

با به کار بردن تغییر متغیر $s=\exp(-2\alpha r)$ رابطه (۱۷-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2U_{nl}(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU_{nl}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left\{\frac{(E_{nl}^2-M^2c^4)}{4\alpha^2\hbar^2c^2}(1-s)^2\right.$$
$$\left.-\frac{(E_{nl}+Mc^2)}{4\alpha^2\hbar^2c^2}\left(8V_0s+2V_1s(1-s)\right)+4\alpha K\,s(1-s)-l(l+1)s\right\}U_{nl}(s)=0 \qquad (۱۹-۳)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر در نظرگرفت:

$$U''_{nl}(s)+\frac{(1-s)}{s(1-s)}U'_{nl}(s)+\frac{1}{s^2(1-s)^2}(-\kappa_2s^2+\kappa_1s-\kappa_0)U_{nl}(s)=0 \qquad (۲۰-۳)$$

که $\kappa_0,\kappa_1,\kappa_2$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\kappa_2=-\left[\xi+2V_1\delta+4\alpha K\delta\right]$$

$$\kappa_1=-\left[2\xi+8V_0\delta+2V_1\delta+4\alpha K\delta+l(l+1)\right] \qquad (۲۱-۳)$$

$$\kappa_0=-\xi \quad , \quad \delta=\frac{(E_{nl}+Mc^2)}{4\alpha^2\hbar^2c^2} \quad , \quad \xi=\frac{(E_{nl}^2-M^2c^4)}{4\alpha^2\hbar^2c^2}$$

همچنین با استفاده از روش پارامتری NU به ترتیب معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$(2n+1)\left[\sqrt{\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0+\frac{1}{4}}+\sqrt{\kappa_0}+\frac{1}{4}(2n+1)\right]+2\sqrt{\kappa_0(\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0)}+2\kappa_0-\kappa_1+\frac{1}{4}=0$$

(۲۲-۳)

$$\psi_{nl}(s)=\frac{N'}{r}\exp(-2\alpha r)^{\sqrt{\kappa_0}}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha r})^{\sqrt{\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}p_n^{(2\sqrt{\kappa_0},2\sqrt{\kappa_2-\kappa_1+\kappa_0+\frac{1}{4}})}(1-2\,\mathrm{e}^{-2\alpha r}) \qquad (۲۳-۳)$$

که N' ضریب بهنجار و $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی می‌باشند. که با استفاده از رابطه (۱۰-۳) موجود در بخش قبل محاسبه می‌شود.

با استفاده از مدل پیشنهادی می‌توان هر یک از سیستم‌های بس ذره‌ای را به یک سیستم دو ذره‌ای متشکل از core- cluster، موجود در مدل خوشه‌ای تبدیل کرد. که این خوشه شدن به صورت زیر می‌باشد [۹۰،۹۱]:

$^{14}C \rightarrow (^{10}Be + \alpha)$, $^{16}O \rightarrow (^{12}C + \alpha)$, $^{20}Ne \rightarrow (^{16}O + \alpha)$

$^{24}Mg \rightarrow (^{20}Ne + \alpha)$, $^{28}Si \rightarrow (^{24}Mg + \alpha)$, $^{32}S \rightarrow (^{28}Si + \alpha)$

حال می‌خواهیم اثرات نسبیتی را بر روی ترازهای انرژی بررسی کنیم، با در نظر گرفتن پتانسیل دافعه کولنی به همراه پتانسیل ایکارت و هولسن برای برهم‌کنش بین خوشه‌ها با استفاده از رابطه (۳-۲۲) که نشان دهنده ویژه مقادیر انرژی و رابطه (۳-۲۳) نشان دهنده تابع موج می‌باشد، به محاسبه برخی خواص استاتیکی هسته‌ها می‌پردازیم.

ترازهای انرژی حالت پایه و دو حالت برانگیخته را برای ایزوتوپ‌های مورد بررسی با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی بدست آمده در توصیف نسبیتی محاسبه کرده و در جدول زیر نشان داده‌ایم.

همچنین با داشتن تابع موج با استفاده از رابطه زیر می‌توان شعاع باری هر یک از ایزوتوپ‌ها را به دست آورد.

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\int R_{nl}^*(r) r^2 R_{nl}(r) d^3 r}{\int R_{nl}^*(r) R_{nl}(r) d^3 r} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳-۲۴)$$

جدول (۳-۳): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های زوج- زوج در توصیف نسبیتی

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل	حالت	E_{Our}(MeV)	E_{Exp}(MeV) [۹۶]
^{14}C	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.0125 \\ V_0(MeV) & 1.328 \\ V_1(MeV) & -185.028 \\ K(MeV) & 0.285 \end{pmatrix}$	0^+	-105.385	-105.285
		1^-	-100.589	-99.247
		0^+	-91.095	-92.658
^{16}O	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.0115 \\ V_0(MeV) & 1.228 \\ V_1(MeV) & -181.969 \\ K(MeV) & 1.294 \end{pmatrix}$	0^+	-127.630	-127.619
		0^+	-123.179	-121.569
		3^-	-114.357	-115.439
^{20}Ne	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.0102 \\ V_0(MeV) & 1.115 \\ V_1(MeV) & -178.752 \\ K(MeV) & 0.346 \end{pmatrix}$	0^+	-160.878	-160.645
		2^+	-159.372	-159.012
		4^+	-153.051	-154.765
^{24}Mg	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.0120 \\ V_0(MeV) & 1.693 \\ V_1(MeV) & -220.569 \\ K(MeV) & 0.851 \end{pmatrix}$	0^+	-198.710	-198.257
		2^+	-196.658	-196.888
		4^+	-191.324	-192.134
^{28}Si	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.0118 \\ V_0(MeV) & 1.840 \\ V_1(MeV) & -240.306 \\ K(MeV) & 1.421 \end{pmatrix}$	0^+	-236.885	-236.537
		2^+	-234.341	-234.758
		4^+	-230.137	-230.141
^{32}S	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.0112 \\ V_0(MeV) & 1.969 \\ V_1(MeV) & -251.641 \\ K(MeV) & 1.623 \end{pmatrix}$	0^+	-271.936	-271.780
		2^+	-269.683	-269.545
		0^+	-266.106	-267.321

شعاع باری این ایزوتوپ‌ها در حالت پایه به کمک روابط (۳-۲۳) و (۳-۲۴) به دست آمده است و با مقدار تجربی مقایسه شده است.

جدول (۳-۴): شعاع باری ایزوتوپ‌های زوج- زوج در حالت پایه

ایزوتوپ	ضرایب پتانسیل				$\langle r^2\rangle^{1/2}_{our\,work}(fm)$	$\langle r^2\rangle^{1/2}_{\exp}(fm)$ [۹۷]
	V_0(MeV)	$\alpha\,(fm^{-1})$	V_1(MeV)	K(MeV)		
^{14}C	1.328	0.0125	-185.028	0.285	2.503	2.502
^{16}O	1.228	0.0115	-181.969	1.294	2.692	2.699
^{20}Ne	1.115	0.0102	-178.752	0.346	3.007	3.005
^{24}Mg	1.693	0.0120	-220.569	0.851	3.054	3.056
^{28}Si	1.840	0.0118	-240.306	1.421	3.127	3.122
^{32}S	1.969	0.0112	-251.641	1.623	3.265	3.261

۳-۴ بررسی ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne به کمک معادله شرودینگر D بعدی

در این قسمت به بررسی یک سیستم سه جسمی به منظور مشخص شدن اثرات غیرنسبیتی در تعیین ترازهای انرژی به روش تحلیلی می‌پردازیم و خواص هسته را ناشی از برهم‌کنش این سه خوشه می‌دانیم. برای این کار معادله شرودینگر را برای سیستم چند جسمی با استفاده از مختصات ژاکوبی و توابع فوق‌کروی مورد بررسی قرار می‌دهیم. ما از پتانسیل بهبود یافته ایکارت و هولسن به اضافه پتانسیل دافعه کولنی برای برهم‌کنش بین خوشه‌ها استفاده کرده و با استفاده از روش پارامتری NU به بررسی معادله شرودینگر D بعدی می‌پردازیم و روابط مربوط به ویژه مقادیر انرژی و تابع موج را بدست می‌آوریم و در نهایت انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته به همراه شعاع باری برای دو ایزوتوپ ^{14}Cو ^{20}Ne رامحاسبه می‌کنیم.

برای یک سیستم A ذره‌ای از دستگاه مختصات ژاکوبی بهره‌مند شویم. برای محاسبات سیستم A ذره‌ای می‌توان $N=A-1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه ژاکوبی تعریف کرد و در هر تعریف هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می‌کند [۵۱].

زمانی که ذرات مورد مطالعه نوکلئون‌ها باشند می‌توان با صرف‌نظر از اختلاف جرم ناچیزشان جرم پروتون و نوترون را برابر در نظر بگیریم. برای چنین سیستمی می‌توان N بردار ژاکوبی را بصورت زیر تعریف کرد [۵۲]:

$$\xi_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}}(\vec{r}_{i+1} - \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\vec{r}_j) \qquad , \qquad i = 1,2,...,N-1 \tag{۲۵-۳}$$

$\vec{\xi}_i$ بردار مکان هر ذره نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای هر A ذره بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{N-1}(\xi_i^2) = \sum_{i=1}^{N-1}(r_i - R)^2 = \frac{2}{N-1}\sum_{k,l>k} r_{kl}^2 \ , \ R = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} r_i \tag{۲۶-۳}$$

بدین صورت مسئله N جسمی در چارچوب مرکز جرم به یک مسئله با $(3N-3)$ بعد هندسی تبدیل می شود. برای مثال یک سیستم سه ذره‌ای بعد از حذف مرکز جرم به یک مسئله ۶ بعدی (D = 9-3=6) تبدیل می‌شود. که با استفاده از مختصات نسبی ژاکوبی ξ_1, ξ_2 و مختصات مرکز جرم تعریف می شود [۱۰۰].

به عنوان مثال برای یک سیستم سه ذره‌ای مختصات ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_1 = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \xi_2 = \frac{r_1 + r_2 - 2r_3}{\sqrt{6}} \quad , \quad R_3 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \tag{۲۷-۳}$$

مختصه فوق کروی با استفاده از مقادیر ξ_1, ξ_2 با رابطه زیر داده می‌شود:

$$x = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \qquad , \qquad t = \arctan(\frac{\xi_1}{\xi_2}) \tag{۲۸-۳}$$

همچنین برای عملگر لاپلاسی در مختصات کروی برای N ذره در فضای D بعدی داریم [۱۰۱،۱۰۲،۱۰۳].

$$-\sum_{i=1}^{N-1}\nabla_{\xi_i}^2=-\sum_{i=1}^{N-1}\nabla_x^2=-(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{D-1}{x}\frac{d}{dx}+\frac{L^2(\Omega)}{x^2}) \qquad (۲۹-۳)$$

با به‌کارگیری روش جداسازی متغییرها داریم:

$$\psi_{n,l,m}(x,\Omega_D)=U_{nl}(x)Y_l^m(\Omega) \qquad (۳۰-۳)$$

رابطه بالا دو معادله جداگانه ایجاد می‌کند که در آن $Y_l^m(\Omega_D)$ توابع هارمونیک فوق کروی می‌باشند.

$$L^2(\Omega)Y_l^m(\Omega_D)=l(l+D-2)Y_l^m(\Omega_D) \qquad (۳۱-۳)$$

معادله فوق شعاعی شرودینگر به کمک مختصات ژاکوبی به صورت زیر داده می‌شود [۱۰۴،۱۰۵].

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E_{nl}-V(r)-\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{l(l+D-2)}{r^2})\right]\right\}R_{nl}(r)=0 \qquad (۳۲-۳)$$

که در آن E_{nl} و $R_{nl}(r)$ به ترتیب ویژه مقادیر انرژی و قسمت فوق شعاعی تابع موج هستند [۱۰۶].

با در نظر گرفتن پتانسیل معرفی شده ایکارت و هولسن با پتانسیل کولنی موجود در بخش قبل که به طور کامل توضیح داده شد، به صورت زیر داریم [۹۴،۹۵]:

$$V(r)=4V_0\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2}+V_1\frac{\exp(-2\alpha r)}{1-\exp(-2\alpha r)}+\frac{K}{r} \qquad (۳۳-۳)$$

با داشتن بخش شعاعی تابع موج به صورت زیر:

$$\lambda=l+\frac{D-3}{2} \quad , \quad U_{nl}(r)=r^{(D-1/2)}R_{nl}(r)$$

معادله فوق شعاعی شرودینگر با پتانسیل فوق مرکزی به صورت زیر داده می‌شود.

$$\frac{d^2U_{nl}(r)}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E_{nl}-4V_0\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2}-V_1\frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))}-\frac{K}{r}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right]U_{nl}(r)=0 \qquad (۳۴-۳)$$

معادله بالا تنها برای $\lambda=0,-1$ به طور دقیق قابل محاسبه است. لذا برای حل تحلیلی این معادله از تقریب Aldrich, Greene استفاده می‌کنیم [۷۰].

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}=\frac{\lambda(\lambda+1)4\alpha^2\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2} \qquad (۳۵-۳)$$

همچنین با به کار بردن تغییر متغیر $s=\mathrm{e}^{-2\alpha r}$ رابطه (۳-۳۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2U_{nl}(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU_{nl}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left\{\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}E(1-s)^2-\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}[4V_0s-V_1s(1-s)-2K\alpha s(1-s)]-\lambda(\lambda+1)s\right\}U_{nl}(s)=0$$

(۳۶-۳)

که می‌توان رابطه بالا را از طریق روش PNU به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2U(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}(-\rho_2's^2+\rho_1's-\rho_0')U(s)=0 \qquad (۳۷-۳)$$

که پارامترهای ρ_0',ρ_1',ρ_2' به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\rho_0'=-\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}E$$

$$\rho_1'=-\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}[2E+4V_0+V_1+2K\alpha]+\lambda(\lambda+1) \qquad (۳۸-۳)$$

$$\rho_2'=-\frac{2\mu}{4\alpha^2\hbar^2}[E+V_1+2K\alpha]$$

همچنین با استفاده ازروش PNU به ترتیب معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$(2n+1)+\left[\begin{array}{l}\sqrt{\rho_2'-\rho_1'+\rho_0'+\frac{1}{4}}\\ +\sqrt{\rho_0'}+\frac{1}{4}(2n+1)\end{array}\right]2\sqrt{\rho_0'(\rho_2'-\rho_1'+\rho_0')}+2\rho_0'-\rho_1'+\frac{1}{4}=0 \qquad (۳۹-۳)$$

$$\psi_{nl}(s)=N''r^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)}\exp(-2\alpha r)^{\sqrt{\rho_0'}}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha r})^{\sqrt{\rho_2'-\rho_1'+\rho_0'+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}p_n^{(2\sqrt{\rho_0'},2\sqrt{\rho_2'-\rho_1'+\rho_0'+\frac{1}{4}})}(1-2\mathrm{e}^{-2\alpha r})$$

(۴۰-۳)

که N'' نشان‌دهنده ضریب بهنجار است.

برای بررسی ایزوتوپ ^{14}C ، آن‌را به صورت یک سیستم سه جسمی متشکل از $^{14}C={}^{9}Be+\alpha+n$، شامل یک پوسته بسته ^{9}Be و یک خوشه α به همراه یک نوکلئون در نظر گرفته‌ایم. همچنین برای ایزوتوپ ^{20}Ne را به صورت $^{20}Ne={}^{12}C+\alpha+\alpha$ که شامل یک پوسته بسته ^{12}C به همراه دو خوشه α در نظر می‌گیریم و یک سیستم بس ذره‌ای را به یک سیستم سه جسمی تبدیل می‌کنیم [۹۰،۹۳].

که مقدار $D=(9-3)=6$ به دست می‌آید. حال با استفاده از مختصات ژاکوبی، به بررسی خواص استاتیکی این دو ایزوتوپ می‌پردازیم.

مختصات ژاکوبی برای یک سیستم سه جسمی با جرم‌های m_1, m_2, m_3 را به صورت زیر داریم:

$$\xi_i=\sqrt{\frac{i}{i+1}}(\vec{r}_{i+1}-\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\vec{r}_j) \qquad , \qquad i=1,2,...,N-1$$

$$\xi_1=\sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad (۴۱-۳)$$

$$\xi_2=\sqrt{\frac{2}{3}}(\vec{r}_3-\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2))$$

مقدار فوق شعاع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \qquad (۴۲-۳)$$

با توجه به معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج به دست آمده در روابط بالا، ترازهای انرژی حالت پایه و دو حالت برانگیخته برای دو ایزوتوپ اشاره شده را بدست می‌آوریم. مقادیر بدست آمده در این بررسی با مقادیر تجربی مقایسه گردیده و نتایج در جدول زیر ارائه شده است.

جدول (۳-۵): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در توصیف غیر نسبیتی

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل	حالت	E_{Our}(MeV)	E_{Exp}(MeV) [۹۶]
^{14}C	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.115 \\ V_0(MeV) & 22.136 \\ V_1(MeV) & -305.412 \\ K(MeV) & 2.620 \end{pmatrix}$	0^+	-105.3540	-105.285
		1^-	-100.4803	-99.247
		0^+	-94.9141	-92.658
^{20}Ne	$\begin{pmatrix} \alpha(fm^{-1}) & 0.103 \\ V_0(MeV) & 33.136 \\ V_1(MeV) & -452.838 \\ K(MeV) & 6.257 \end{pmatrix}$	0^+	-160.9129	-160.645
		2^+	-159.0366	-159.012
		4^+	-152.3030	-154.765

حال با استفاده از روابط موجود در معادله (۳-۴۰) و (۳-۲۴)، شعاع باری دو ایزوتوپ ^{14}Cو ^{20}Ne را در حالت پایه محاسبه کرده و با مقادیر تجربی مقایسه می‌کنیم.

جدول (۳-۶): شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در حالت پایه

ایزوتوپ	ضرایب پتانسیل				$\langle r^2 \rangle^{1/2}_{our work}(fm)$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}_{exp}(fm)$ [۹۷]
	V_0(MeV)	$\alpha(fm^{-1})$	V_1(MeV)	K(MeV)		
^{14}C	22.136	0.115	-305.412	2.620	2.510	2.502
^{20}Ne	33.135	0.103	-452.838	6.257	3.004	3.005

۳-۵ بررسی ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne به کمک معادله کلاین گوردن در حالت D بعدی

معادله شعاعی کلاین- گوردن برای عدد مداری l دلخواه در D بعد با پتانسیل اسکالر و برداری S(r) و V(r) به صورت فرم کلی زیر درنظر گرفته می‌شود [۹۸،۹۹].

$$\nabla_D^2 \Psi_{\ell_1 \ldots \ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}^{-1}}(r) + \frac{1}{\hbar^2 c^2}\left\{\left[E_{nl} - V(r)\right]^2 - \left[M c^2 + S(r)\right]^2\right\}\Psi_{\ell_1 \ldots \ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}^{-1}}(r) = 0 \qquad (۴۳-۳)$$

در حالتی که پتانسیل اسکالر و برداری با هم برابر باشند به وسیله مختصات نسبی ژاکوبی که در قسمت قبل به طورکامل توضیح داده شد، معادله فوق شعاعی شبیه شرودینگر در D بعد به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^2} + \frac{(E^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - 2\frac{(E - M c^2)}{\hbar^2 c^2} V(r)\right\}\Psi_{nl}(r) = 0 \qquad (۴۴-۳)$$

و

$$V(r) = 4V_0 \frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2} + V_1 \frac{\exp(-2\alpha r)}{1-\exp(-2\alpha r)} + \frac{K}{r} \qquad (۴۵-۳)$$

با انتخاب یک پیشنهاد برای تابع موج به صورت $U_{nl}(r) = r^{(D-1/2)}\Psi_{nl}(r)$, $\lambda = l + \frac{D-3}{2}$ معادله بالا با پتانسیل فوق مرکزی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{d^2 U_{nl}(r)}{dr^2} + \left\{\frac{(E_{nl}^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - \frac{(Mc^2 + E_{nl})}{\hbar^2 c^2}\left(4V_0 \frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))^2} + V_1 \frac{\exp(-2\alpha r)}{(1-\exp(-2\alpha r))} + \frac{K}{r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right)\right\}U_{nl}(r) = 0$$

(۴۶-۳)

با بکارگیری تقریب ارایه شده در قسمت قبلی برای جمله مرکزی، و با معرفی تغییر متغیر $s = e^{-2\alpha r}$ رابطه بالا می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{d^2U_{nl}(s)}{ds^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{dU_{nl}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left\{\frac{(E_{nl}^2-M^2c^4)}{4\alpha^2\hbar^2c^2}(1-s)^2 -\frac{(E_{nl}+Mc^2)}{4\alpha^2\hbar^2c^2}[8V_0 s+2V_1 s(1-s)]+4\alpha K\, s(1-s)-\lambda(\lambda+1)s\right\}U_{nl}(s)=0 \qquad (۴۷-۳)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر در نظرگرفت:

$$U''_{nl}(s)+\frac{(1-s)}{s(1-s)}U'_{nl}(s)+\frac{1}{s^2(1-s)^2}(-\kappa'_2 s^2+\kappa'_1 s-\kappa'_0)U_{nl}(s)=0 \qquad (۴۸-۳)$$

که $\kappa'_0, \kappa'_1, \kappa'_2$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\kappa'_2=-\left[\xi'+2V_1\delta'+4\alpha K\delta'\right]$$

$$\kappa'_1=-\left[2\xi'+8V_0\delta'+2V_1\delta'+4\alpha K\delta'+\lambda(\lambda+1)\right] \qquad (۴۹-۳)$$

$$\kappa'_0=-\xi \quad , \quad \delta'=\frac{(E_{nl}+Mc^2)}{4\alpha^2\hbar^2c^2} \quad , \quad \xi'=\frac{(E_{nl}^2-M^2c^4)}{4\alpha^2\hbar^2c^2}$$

همچنین با استفاده از روش پارامتری NU به ترتیب معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$(2n+1)[\sqrt{\kappa'_2-\kappa'_1+\kappa'_0+\frac{1}{4}}+\sqrt{\kappa'_0}+\frac{1}{4}(2n+1)]+2\sqrt{\kappa'_0(\kappa'_2-\kappa'_1+\kappa'_0)}+2\kappa'_0-\kappa'_1+\frac{1}{4}=0$$

(۵۰-۳)

$$\psi_{nl}(s)=N'''r^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)}\exp(-2\alpha r)^{\sqrt{\kappa_0'}}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha r})^{\sqrt{\kappa_2'-\kappa_1'+\kappa_0'+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}p_n^{(2\sqrt{\kappa_0'},2\sqrt{\kappa_2'-\kappa_1'+\kappa_0'+\frac{1}{4}})}(1-2\,\mathrm{e}^{-2\alpha r})$$

(۵۱-۳)

با توجه به معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج به دست آمده در روابط بالا، همچنین با در نظر گرفتن مدل پیشنهادی در قسمت قبل و تبدیل یک سیستم چند جسمی به یک سیستم سه جسمی، ترازهای انرژی حالت پایه و دو حالت برانگیخته را برای هر یک از این دو ایزوتوپ محاسبه می‌کنیم و اثرات نسبیتی را در تعیین ترازهای انرژی برای هر یک از ایزوتوپ‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین خواص هسته را ناشی از برهم‌کنش این سه خوشه می‌دانیم. مقادیر بدست آمده در این بررسی با مقادیر تجربی مقایسه گردیده و نتایج در جدول زیر ارائه شده است.

جدول (۳-۷): انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته برای ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در توصیف نسبیتی

ایزوتوپ	پارامترهای پتانسیل	حالت	E_{Our}(MeV)	E_{Exp}(MeV) [۹۶]
^{14}C	$\begin{pmatrix} \alpha\,(fm^{-1}) & 0.0117 \\ V_0\,(MeV) & 1.180 \\ V_1\,(MeV) & -165.865 \\ K\,(MeV) & 4.324 \end{pmatrix}$	0^+	-105.3020	-105.285
		1^-	-98.659	-99.247
		0^+	-93.586	-92.658
^{20}Ne	$\begin{pmatrix} \alpha\,(fm^{-1}) & 0.0115 \\ V_0\,(MeV) & 3.027 \\ V_1\,(MeV) & -372.289 \\ K\,(MeV) & 2.401 \end{pmatrix}$	0^+	-160.429	-160.645
		2^+	-159.012	-159.012
		4^+	-155.788	-154.765

همچنین با استفاده از روابط موجود در معادله (۳-۵۱) و (۳-۲۴)، شعاع باری دو ایزوتوپ ^{14}C و ^{20}Ne را در حالت پایه محاسبه کرده و با مقادیر تجربی مقایسه می‌کنیم.

جدول (۳-۸): شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{14}C و ^{20}Ne در حالت پایه

ایزوتوپ	ضرایب پتانسیل				$\langle r^2\rangle^{1/2}_{our\,work}\,(fm)$	$\langle r^2\rangle^{1/2}_{\exp}(fm)$ [۹۷]
	V_0(MeV)	$\alpha\,(fm^{-1})$	V_1(MeV)	K(MeV)		
^{14}C	1.180	0.0117	-165.865	4.324	2.522	2.502
^{20}Ne	3.027	0.0115	-372.289	2.401	3.006	3.005

۳-۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان‌نامه، ما به بررسی ایزوتوپ‌های زوج- زوج با استفاده از مدل خوشه‌ای پرداخته‌ایم. گام اول انتخاب یک دیدگاه مناسب برای توصیف و بررسی هسته‌ها است که ما به بررسی هسته‌ها از دو دیدگاه نسبیتی و غیر نسبیتی پرداختیم که هر یک به نوبه خود از اهمیت خاصی برخوردار است. گام دوم انتخاب یک مدل هسته‌ای مناسب است که مدل خوشه‌ای یکی از مدل‌های موفق بوده و نتایج خوبی را در خارج از خط پایداری برای ساختار هسته می‌دهد. مدل پیشنهادی شامل سیستم‌های دو جسمی و سه جسمی متشکل از پوسته بسته و خوشه‌ها است که تمام خواص هسته ناشی از برهم‌کنش این خوشه‌ها می‌باشد.گام سوم انتخاب یک پتانسیل برهم‌کنشی مناسب است که بتواند با مدل پیشنهادی مطابقت داشته باشد و ترازهای انرژی را محاسبه کند. برای برهم‌کنش بین پوسته بسته و خوشه‌ها، پتانسیل ایکارت و هولسن به اضافه پتانسیل دافعه کولنی را پیشنهاد داده و به محاسبه انرژی حالت پایه و دو تراز برانگیخته و همچنین شعاع باری با استفاده از معادلات نسبیتی و غیرنسبیتی برای ایزوتوپ‌های مختلف پرداخته‌ایم. با انجام محاسبات به روش PNU، به نتایج قابل قبولی دست یافتیم. آنچه از این نتایج برمی‌آید شاهد بر مناسب بودن مدل پیشنهادی برای محاسبات فیزیکی می‌باشد. مطابق نتایج به دست آمده از این محاسبات بین کار ما و داده‌های تجربی توافق خوبی برقرار است. همچنین ضرائب پتانسیل از طریق برازش با داده‌های تجربی محاسبه شده‌اند. از آنجایی که نتایج محاسبات در این پایان‌نامه مناسب و نزدیک به تجربی بوده است، بنابراین مدل پیشنهادی می‌تواند برای دیگر ایزوتوپ‌ها با ویژگی‌های یکسان مورد استفاده قرار گیرد.

پیشنهادات:

- بررسی پتانسیل‌های مناسب و روش‌های تحلیلی دیگر به منظور استفاده در بدست آوردن ویژگی-های استاتیکی (ترازهای انرژی و شعاع باری) ایزوتوپ‌های مورد بررسی
- محاسبه ترازهای انرژی و شعاع باری برای سایر ایزوتوپ‌های مشابه

- محاسبه سایر خصوصیات هسته‌ها از قبیل گشاور های چهار قطبی و دو قطبی

۳-۷ منابع

[1] KS. Krane, D. Halliday, **" T**he atomic nuclide with the highest mean binding energy" American Journal of Physics 63, 653 (1995);
[2] M. Planck, "On the law of distribution of energy in the normal spectrum .”Annalen der Physik .Jan. 4,553 (1901).

[3] L. Page “Three Books on Wave Mechanics”. Bulletin of the American Mathematical Society. 35, 3. 403 (1929).

[4] E. Schrodinger “Quantisierung als Eigenwertproblem, (Dritte Mitteilung: Storungstheorie, mit Anwendung auf den Strakeffekt der Balmerlinien”. Ann. Phys. 4, 474 (1926).

[5] W. Heisenberg “The physical principles of the quantum theory”. Courier Corporation, 1949.

[6] PA. Dirac “On the theory of quantum mechanics”. InProceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society 1. 112. 762. 661-677. (1926).

[۷] برون ب ال، مهمان دوست خواجه داد ع، "مباحثی در فیزیک ساختار هسته‌ای"، انتشارات مرنیز، مشهد؛ ۱۳۹۱

[۸] ب الکس برون، مهمان دوست خواجه داد ع، "مباحثی در فیزیک ساختار هسته‌ای"، انتشارات مرنیز، مشهد؛ ۱۳۹۱

[۹] کنت اس کرین، میرفخرایی ن، مدرس م، "آشنایی با فیزیک هسته‌ای"، جلد دوم، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران؛۱۳۷۳

[10] K. S. Krane. “Introductory Nuclear physics”, John Willey & sons, 1.2 (1988).

[11] B. L Cohen. “Concepts of Nuclear physics”, McGraw-Hill, New York. 27.11, 937, 11-05 (1971).

[12] E. Rutherford “The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. Philosophical Magazine”. 1, 92. 4,379-98 (2012).

[13] M. Freer “The clustered nucleus-cluster structures in stable and unstable nuclei”. Reports on Progress in PhysicsNov 16,70. 12, 2149 (2007).

[14] G. Gamow “Mass defect curve and nuclear constitution”. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 3,126. 803:632-44 (1930).

[15] K. Wildermuth, T. Kanellopoulos,” The cluster model of the atomic nuclei” Nuclear Physics.7, 150-62 (1958).

[16] M. Freer,” Clusters in nuclei. Scholarpedia” 2010 Jun 3, 5, 6.9652.

[17] H. Horiuchi, K. Ikeda, “A Molecule-like Structure in Atomic Nuclei of 16O* and 10Ne”. Progress of Theoretical Physics. 40, 2. 277-87 (1968).

[18] L. R. Hafstad, E. Teller, “The alpha-particle model of the nucleus, Ⅱ”. Phys. Rev. 54, 9, 681 (1938).

[19] W. von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En’yo “Nuclear clusters and nuclear molecules”. Physics Reports. 432, 2. 43-113 (2006).

[20] C. Beck, editor, “Clusters in nuclei”. Springer Science & Business Media, Feb 16 (2012).

[21] B. Buck, CB. Dover, JP. Vary, “Simple potential model for cluster states in light nuclei”. Physical Review CMay 1. 11, 5. 1803 (1975).

[22] Y. Suzuki, K. Varga, “Stochastic variational approach to quantum-mechanical few-body problems”. Springer Science & Business Media; Nov 26 (1998).

[23] Y. Tang, K. Wildermuth, “A unified theory of the nucleus” Braunschweig, Vieweg. (1977).

[24] G. Gamow, “Mass defect curve and nuclear constilution” proceedings of the Royal society of London Series A, 632-644 (1930).

[25] M. Freer, “Cluster in nuclei”, Scholar pedia. 5, 9652 (2010).

[26] A. H. Wuosmaa, R. R. Betts, B. B. Back, M. Freer and etal,” Evidence for alpha- particle chin configurations in ^{24}Mg”, Physical Review letters. 68,1295 (1992).

[27] A. Cowley, “Alpha- cluster structure in the ground state of ^{40}Ca displayed in a (p, pa) knockout reaction”, Journal of Physics, Conference Series. 436,012011(2013).

[28] BL. Cohen, “Concepts of nuclear physics” Tata McGraw-Hill Education. (1971).

[29] K. S. Krane, “Introductory Nuclear physics” John Willey & sons, 1. 2 (1988).

[30] HS. Hans, “Nuclear physics: experimental and theoretical” New Age International; (2008).

[۳۱] رابرت تورنتون موریسون. رابرت نیلسون بوید. شیمی آلی. عیسی یاوری. سید احمد میرشکرایی. علی سیدی اصفهانی. علوم دانشگاهی. جلد اول. دوم. سوم، ۱۳۸۸-۱۳۹۰

[32] TD. Burchell, editor, “Carbon materials for advanced technologies” Elsevier; Jul 22 (1999).

[33] MS. Dresselhaus, G. Dresselhaus, PC. Eklund, “Science of fullerenes and carbon nanotubes: their properties and applications” Academic pressMar 20 (1996).

[۳۴] کنت اس کرین، میرفخرایی ن، مدرس م، "آشنایی با فیزیک هسته‌ای"، جلد اول، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران؛ ۱۳۷۳

[35] G. Puddu, “Projected Thermal Hartree-Fock-Bogoliubov approximation in a canonical ensemble” arXiv preprint arXiv:1105.4021May 20 (2011).

[36] G. Puddu, Acta Physica Polonica B, 6, 42 (2011).

[37] National Nuclear Data Center, Evaluated Nuclear Structure Data File, https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/.

[38] M. Wang, G. Audi, A.H. Wapstra, F.G. Kondev, M. MacCormick, X. Xu, and B. Pfeiffer,” The Ame2012 atomic mass evaluation” Chinese Physics C. 36, 1603-2014 (2012).

[39] I. Angeli, K.P. Marinova, “Atomic Data and Nuclear Data Tables” 2013. 99, 69-95. unpublished update (2016).

[40] P. Möller, A.J. Sierk, T. Ichikawa, H. Sagawa, “Atomic Data and Nuclear Data Tables” 109-110, 1-204 (2016).

[41] C. Berkdemir, “Pseudospin symmetry in the relativistic Morse potential including the spin-orbit coupling term” Nuclear Physics A. 7701, 232-9 (2006).

[42] B. Gönül, I. Zorba, “Supersymmetric solutions of non-central potentials” Physics Letters A. 269(2):83-8 (2000).

[43] S. Erkoç, R. Sever, “Path-integral solution for a Mie-type potential” Physical Review D. 30, 10. 2117 (1984).

[44] A. A. Rajabi, “Hypercentral constituent quark model and isospin for the baryon static properties” Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran. 161, 73-9 (2005).

[45] C. Bekdemir, Nucl. Phys. A 77032 (2006).

[46] G. Levai, J. Phys. A. Math. Gen. 37,4379 (1989).

[47] A. A. Rajabi. “Hypercentral Constituent Quark Model and Isospin for the Baryon Static Properties” Ir. J. Phys. R; 15, 2 (2005).

[48] A. Kievshy, A. Viviani, L. Girlanda, L. E. Maecucci, S. Rosatti. “Few body systems” 45. 115-118 (2009).

[49] A. A. Rajabi, “Exact analytical solution of the schrödinger equation for an N-identical body-force system” Few-body systems.;37, 4. 197-213 (2005).

[50] M. Aiello, M. Ferraris, MM Giannini, M. Pizzo, Santopinto E. “A three-body force model for the electromagnetic excitation of the nucleon” Physics Letters B. Oct 10, 387, 1. 15-21 (1996).

[51] A. Kievsky, M. Viviani, LE. Marcucci, S. Rosati, “Variational description of bound states in three-and four-nucleon systems” Few-Body Systems. 38, 2. 63-6 (2006.)

[52] A. Kievsky, M. Viviani, L. Girlanda, LE. Marcucci, S. Rosati, “Analysis of the Effects of Three-nucleon Forces in A= 3, 4 Systems” Few-Body Systems. 45, 2-4. 115-8 (2009).

[53] AC. Fonseca,” Models and methods in few body Physics”. Proceedings, 8TH Autumn school, Lisbon, Portugal. Lect. Notes Phys. 1987, 273 (1986).

[54] SH. Dong, “The ansatz method for analyzing Schrödinger's equation with three anharmonic potentials in D dimensions” Foundations of Physics Letters. 15, 4. 385-95 (2002).

[55] A. Niknam, A. A. Rajabi, M. Solaimani, “Solutions of D-dimensional Schrodinger equation for Woods–Saxon potential with spin–orbit, coulomb and centrifugal terms through a new hybrid numerical fitting Nikiforov–Uvarov method” J, Theor, Appl, Phys, 10, 53 (2016).

[56] A. A. Rajabi, “Exact analytical solution of the schrödinger equation for an N-identical body-force system. Few-body systems” 37, 4. 197-213 (2005).

[57] LS. Ferreira, AC. Fonseca, L. Streit, “Models and methods in few-body physics” (1987).

[58] P. Doleschall, I. Borbély, Z. Papp, W. Plessas, “Nonlocality in the nucleon-nucleon interaction and three-nucleon bound states”, Physical Review C. 67, 6. 064005 (2003).

[59] BL. Cohen, “Concepts of nuclear physics”. Tata McGraw-Hill Education, (1971).

[60] M. Naghdi, “Nucleon-nucleon interaction: A typical/concise review”. Physics of Particles and Nuclei. 45, 5. 924-71 (2014).

[61] N. Kalantar-Nayestanaki, E. Epelbaum, JG. Messchendorp, A. Nogga, “Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems”. Reports on Progress in Physics. 75, 1. 016301 (2011).

[62] W. von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En’yo, “Nuclear clusters and nuclear molecules”, Physics Reports. 432, 2. 43-113 (2006).

[63] M. R. Shojaei, A. A Rajabi, M. Farrokh, N. Zoghi-Foumani, “Energy levels of spin-1/2 particles with Yukawa interaction”, Journal of Modern Physics. 5, 9773-80 (2014).

[64] AF. Nikiforov, VB. Uvarov, “Special functions of mathematical physics”, Basel. Birkhäuser, (1988).

[65] O. Bayrak, D. Sahin, “Exact Analytical Solution of the Klein–Gordon Equation in the Generalized Woods–Saxon Potential”. Communications in Theoretical Physics. 64, 3259 (2015).

[66] MR. Shojaei, M. Amini, N. Zoghi-Foumani, “A new approach for parameters of Nucleon-Nucleon Scattering at low energies in one and two dimensions. 2349-4484, 3. 1-10 (2015).

[67] AF. Nikiforov, VB. Uvarov, “Special functions of mathematical physics” Basel. Birkhäuser, (1988).

[۶۸] مهدی نیک عمل، امین الله واعظ و امیر لهراسبی " آشنایی با روش های شبیه سازی در فیزیک " ناشر: تهران: دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسه انتشارات علمی، ۱۳۸۶.

[69] M. Mousavi, M. R. Shojaei and A. Hejazi Juybari, "Investigation of N-identical few-body bound systems in the relativistic description" Chin. Phys. 55, 3, 583-593 (2017).

[70] M. R. Shojaei, M. Mousavi, "Solutions of the Klein-Gordon equation for 1≠0 with position-dependent mass for modified Eckart potential plus Hulthen potential " Int. J. Phys. Sci, 10, 9, 324-328 (2015).

[71] S. M. Ikhdair, “Bound states of the klein-gordon equation for vector and scalar general hulthén-type potentials in D-dimension” Int, J, Mod, Phys, C, 20, 1, 25–45 (2009).

[72] A. N. Ikot and E. J. Uwah, “Bound State Solutions of the Klein Gordon Equation with the Hulth´en Potential” Electron. J. Theor. Phys, 8, 25, 225–232 (2011).

[73] A. A. Rajabi, "Exact Analytical Solution of the Schrodinger Equation for an N-Identical Body-Force System " Few-Body Syst, 37, 4, 197-213 (2015).

[74] U. A. Deta, S. Cari, "Approximate solution of Schrodinger Equation in D-dimensions for scarf hyperbolic potential using Nikiforov-Uvarov method" Adv. Studies Theor.Phys, 7, 13, 647-656 (2013).

[75] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi “Exact Solutions of DDimensional Schrödinger Equation for an Energy-Dependent Potential by NU Method” Commun, Theor, Phys, 55, 541 (2011).

[76] C. L. Pekris, Physical Review, (1934).

[77] A. Rajabi, M. R. Shojaei, “Determination of energy levels of the Klein–Gordon equation, with pseudo harmonic potential plus the ring shaped potential” Int, J, Phy, Sci, 6, 33 (2011),

[78] O. Bayrak, I. Boztosun, “Arbitrary ℓ-state solutions of the rotating Morse potential by the asymptotic iteration method” J, Phys, A: Math, Gen, 39, 22, 6955 (2006).

[79] W.von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En’ yo, “Nuclear clusters and nuclear molecules”

Phys. Rep 432, 43-113 (2006).

[80] B. Buck, H. Friedrich, C. Wheatley, “Local potential models for the scattering of complex nuclei” nucl. Phys. A 275, 246-268 (1977).

[81] M. R. Shojaei, N. Roshan Bakht," Calculation of energy spectrum of ^{12}C isotope with modified Yukawa potential by cluster models ,”phys 87, 54 (2016).

[82] C. F. von Weizsacker, Die Atomkerne, Akadem. Verlagsanstalt, Leipzig. 21, 15-28 (1937).

[83] J. A. Wheeler,” On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure” Phys. Rev 52, 1107 (1937).

[84] H. Horiuchi, K. Ikeda, Y. Suzuki,” Molecule-Like Structures in Nuclear System”, Theor. Phys 52 (Suppl.) (1972).

[85] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck and G. Ropke,” Alpha Cluster Condensation in 12C and 16O. Phys. Rev. Lett 87, 192501 (2001).

[86] M. Freer,” Nucleons come together”, Phys 70, 2149-2210 (2007).

[87] J. M. Blatt, V. F. Weisskopf,” Nuclear Spectroscopy II. Special Models”, Theor. Nucl. Phys 295, 266-310 (1979).

[88] M. Freer, et al,” Exotic Molecular States in 12Be”, Phys. Rev. Lett 82, 295 (1999).

[89] B. Buck, A. C. Merchant and S. M. Perez,” Mass-symmetric form for cluster-core potentials”

Nucl. Phys. A 614, 129-136 (1997).

[90] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez,” Theory of recursive nuclear band spectra”, Phys. Rev. C 81, 034322 (2010).

[91] B. Buck, A. C. Merchant, M. J. Horner and S. M. Perez,” Choosing cluster and core in cluster models of nuclei”, Phys. Rev. C 61, 024314 (2000).

[92] W.von Oertzen, M. Freer and Y. Kanada-En’ yo,” Nuclear clusters and nuclear molecules”

Phys. Rep 432, 43-113 (2006).

[93] K. Ikeda, N. Tagikawa and H. Horiuchi,” The Systematic Structure-Change into the Molecule-like Structures in the Self-Conjugate 4*n* Nuclei”, Theor. Phys E68, 464-475 (1968).

[94] B. I. Ita, A. I. Ikeuba, " Solution to the Schrodinger Equation with Inversely Quadratic Yukawa Plus Inversely Quadratic Hellmann Potential Using Nikiforov-Uvarov Method" J. At. Mol. Phys. 582610 (2013).

[95] M. Hamzavi, M. Movahed, K.E. Thylwe and A. A. Rajabi, "Approximate Analytical Solution of the Yukawa Potential with Arbitrary Angular Momenta" Chin.Phys, Lett., 29,8, 080302 (2012).

[96] G. Audi, A. H. Wapstra and C. Thibaul," The Ame2003 atomic mass evaluation: (II). Tables, graphs and references", Nucl. Phys. A 729, 337-676 (2003).

[97] I. Angeli, K. P. Marinova," A Study of Nuclear Structure and NeutronStars with a Bayesian Neural NetworkApproach", Atom Dat. Nucl Dat Tab 99, 69-95 (2013).

[98] A. A. Rajabi, M. R. Shojaei, "Determination of energy levels of the Klein–Gordon equation, with pseudo harmonic potential plus the ring shaped potential" Int, J, Phy, 6, 33 (2011).

[99] O. Bayrak, I. Boztosun, "Arbitrary ℓ-state solutions of the rotating Morse potential by the asymptotic iteration method" J, Phys, A. Math, Gen, 39, 22, 6955 (2006).

[100] J. Avery, "Hyperspherical Harmonics: Applications in Quantum Theory" Dordrecht: Kluwer. (1989),

[101] M. M. Giannini, E. Santopinto, A. Vassallo, "The hypercentral constituent quark model" Nucl, Phys, A, 699, 1-2, 308 (2002).

[102] M. Sameer, Ikhdair, Ramazan Sever "Exact solutions of the D-dimensional Schrödinger equation for a ring–shaped pseudoharmonic potential" Cent, Eur, J, Phys, 6, 3, 685-696 (2088).

[103] F. Jing-Jing, H. Ling, Y. Shi-Jie, "Solutions of Laplace Equation in nDimensional Spaces" Commun, Theor, Phys, 56, 623–625 (2011).

[104] A. A. Rajabi, "Exact Analytical Solution of the Schrödinger Equation for an NIdentical Body-Force System" Few-Body Syst., 37, 4, 197-213 (2005).

[105] U. A. Deta, S. Cari, "Approximate solution of Schrodinger equation in Ddimensions for scarf hyperbolic potential using Nikiforov-Uvarov method" Adv. Studies Theor. Phys., 7, 13, 647–656 (2013).

[106] M. Hamzavi, M. Movahed, K.E. Thylwe, A. A. Rajabi, "Approximate Analytical Solution of the Yukawa Potential with Arbitrary Angular Momenta" Chin. Phys. Lett., 29, 8, 080302 (2012).

Abstract

Calculation the energy of even-even isotopes using collective models in nuclear physics has its own complication. Therefor investigation of light nuclei is done through different models which one of them is using of a cluster model. The cluster model is a new and successful model for investigating the properties of isotopes. The cluster model can provide a good description of the static, electromagnetic properties and other properties of the nuclei. According to the latest findings of nuclear physicists, cluster arrangement cannot be found typically in the ground state of the nuclei. Usually clustering arrangement occurs in the ground state of the cores, and in order to make clustering the system must have enough energy to put down at the threshold of clustering. Phenomenon of clustering occurs in different forms that using this model, interaction between core and cluster can be chosen and static properties, including the eigenvalues energy and wave function can be calculated. Now by considering each of the isotopes as a cluster, we solve the Schrödinger equation and the Klein Gordon equation using the PNU method. The proposed model the many particle systems can be converted to two-particle system by considering the appropriate potential for interaction between clusters and applying non-relativistic and relativistic equations to some of the static properties including wave function, specific energy values and radius for each of even- even isotopes can be calculated and their value can be compared with experimental data.

Keywords: Cluster model, Eckart plus Hulthen potentials, Nikiforov-Uvarov method, ^{14}C, ^{20}Ne

Shahrood University of technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

cluster structure for ^{14}C and ^{20}Ne isotopes with interaction between core and clusters

Supervisor:

Dr. Mohammad Reza Shojaei

Advisor:

Dr. Mohsen Musavi

By:

Maryam Morshedloo

September 2019