بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک‌ومهندسی‌هسته‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک هسته‌ای

بررسی محصورسازی یون در تله‌ی پنینگ و خواص کوانتومی آن

نگارنده: آیدا کلته‌ئی

اساتید راهنما:

دکتر مسلم سوهانی

دکترمرتضی رفیعی

شهریور ۹۷

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم آیدا کلته‌ئی با شماره دانشجویی ۹۴۳۸۸۲۴ رشته فیزیک گرایش هسته‌ای تحت عنوان بررسی محصورسازی یون در تله‌ی یونی پنینگ و خواص کوانتومی آن که در تاریخ ۹۷/۶/۱۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: ...عالی...) ■ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر مسلم سوهانی	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر مرتضی رفیعی	استادیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سید علی حسینی منصوری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احسان ابراهیمی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر مصطفی عنابستانی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر سعید حسامی پیله رود

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شاهرود
دانشکده فیزیک

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به مهد علم و آرامش

پدر و مادر عزیزم

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است

و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

به پاس محبت های بی دریغشان که فروکش نمی کند.

آن دو انسان شریف، بزرگوار و فراتر از فرشته ای که راه را به درستی به من نشان دادند و با فداکاریشان، سختی های راه را به دوش کشیدند و سپر بلای مشکلات شدند تا من به جایگاه کنونی برسم.

سپاس

تشکر و قدردانی

*از زحمات استاد بزرگوارم جناب دکتر **مسلم سوهانی** خالصانه سپاسگزارم که با قلبی آکنده از معرفت، نه تنها راهنمای من در تهیه‌ی این پایان‌نامه بودند، بلکه از محضر پر فیض ایشان بهره‌های بسیار بردم.*

*همچنین از دیگر استاد راهنمایم جناب دکتر **مرتضی رفیعی** متشکرم.*

*در پایان از تمام زحمات **خانواده‌ی مهربانم** که همیشه حامی من هستند کمال تشکر را دارم و نیز از **دوستان** خوبم که همراهی‌ام کردند ممنونم.*

تعهدنامه

اینجانب **آیدا کلته‌ئی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **فیزیک هسته‌ای** دانشکده **فیزیک و مهندسی هسته‌ای** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **بررسی محصورسازی یون در تله‌ی پنینگ و خواص کوانتومی آن** تحت راهنمائی **دکتر مسلم سوهانی و دکتر مرتضی رفیعی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

تله‌های پتانسیلی یکی از رایج‌ترین سیستم‌ها برای گیراندازی ذرات باردار به منظور تحقیقات بنیادی و دقیق بر روی آن‌ها می‌باشد. تله‌ی پنینگ، نوعی تله‌ی پتانسیلی است که با استفاده از برهم‌نهی پتانسیل الکتریکی پایا و میدان مغناطیسی همراه با آن، گیراندازی ذرات باردار را در سه بعد فراهم می‌سازند.

از جمله کاربردهای این تله‌ها می‌توان در زمینه‌هایی همچون مطالعه و اندازه‌گیری ثابت‌های بنیادی ذرات، بررسی ترازهای انرژی، مطالعه‌ی واپاشی‌های ذرات، مطالعه‌ی برهم‌کنش ذرات باردار و اطلاعات کوانتومی اشاره نمود.

در این پایان‌نامه، به بررسی رفتار کلاسیکی الکترون و یون در یک تله‌ی پنینگ پرداخته‌ایم. مسیر حرکت الکترون، یون‌های کلسیم $^{40}_{20}Ca^{+}$ و $^{197}_{79}AU^{+}$ را تحت تاثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تله با برنامه‌نویسی C++ محاسبه و ترسیم کرده‌ایم و میدان‌های مناسب برای گیراندازی آن ها، متناسب با ابعاد تله‌ی مفروض، را بدست آورده‌ایم. در ادامه گیراندازی یون در تله‌ی پنینگ از دیدگاه کوانتومی بررسی شده و استفاده از حالات کوانتومی یون برای ساخت کیوبیت‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تله‌ی پتانسیلی، تله‌ی پنینگ، گیراندازی، کیوبیت، حالات کوانتومی.

لیست مقالات استخراج شده از پایان نامه

۱- آیدا کلته‌ئی، مسلم سوهانی، مرتضی رفیعی، مطالعه‌ی کلاسیکی و کوانتومی یون در تله‌ی یونی پنینگ، کنفرانس فیزیک ایران، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، شهریور ۱۳۹۷.

فهرست مطالب

فصل۱ : تله‌ی یونی پنینگ **۱**

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ تاریخچه ۳

۱-۳ تله‌ی یونی پنینگ ۴

۱-۴ فشار و گاز پس‌زمینه ۶

۱-۵ تولید یون ۷

۱-۵-۱ یونش گاز درون تله ۸

۱-۵-۲ چشمه‌ی یونی ۸

۱-۶ چشمه‌ی الکترونی ۱۰

۱-۷ آشکارسازی یون و الکترون درون تله ۱۲

۱-۸ میدان‌ها در تله‌ی پنینگ و محصورسازی ذرات باردار ۱۴

فصل۲ : بررسی کلاسیکی حرکت ذره در تله‌ی یونی پنینگ **۱۷**

۲-۱ پتانسیل چهارقطبی الکتریکی ۱۸

۲-۲ پتانسیل و معادلات حرکت الکترون در تله‌ی یونی پنینگ ۲۰

۲-۳ پتانسیل و معادلات حرکت یون مثبت در تله‌ی پنینگ ۲۲۲

۲-۴ مسیر حرکت الکترون در تله‌ی یونی پنینگ ۲۴

۲-۵ مسیر حرکت یون $^{40}Ca^{+}$ در تله‌ی یونی پنینگ ۲۷

۲-۶ مسیر حرکت $^{197}Au^{+}$ در تله‌ی یونی پنینگ ۳۰

۲-۷ میدان‌های مناسب گیراندازی ۳۳

فصل۳ : بررسی کوانتومی ذره در تله‌ی یونی پنینگ **۳۵**

۳-۱ مقدمه ۳۶

۳-۲ کیوبیت ۳۸

۳-۳ تئوری نیمه‌کلاسیکی برهم‌کنش اتم-میدان ۴۱

۳-۳-۱ هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان ۴۱

۳-۳-۲ برهم‌کنش یک اتم دوترازه با میدان تک مد ۴۸

۳-۴ تئوری کوانتومی برهم‌کنش اتم-میدان ۵۸

۳-۴-۱ هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان ۵۹

۳-۴-۲ برهم‌کنش یک اتم دوترازه با میدان تک مد ۶۲

۳-۵ برهم‌کنش لیزر با یون $^{40}Ca^{+}$ ۶۹

۳-۶ جمع‌بندی ۷۱

منابع **۷۲**

فهرست اشکال

شکل ۱-۱-۱: نمایی کلی از شکل تله‌های یونی پائول و پنینگ ۲

شکل ۱-۲-۱: برندگان جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۸۹..... ۳

شکل ۱-۳-۱: الف) طرحواره تله‌ی یونی پنینگ ب) تله‌ی یونی پنینگ با برش بخشی از آن ۴

شکل ۱-۳-۲: تله‌ی یونی پنینگ ساخته شده در مرکز ماکس پلانک آلمان ۵

شکل ۱-۴-۱: محفظه‌ی خلاء ۶

شکل ۱-۵-۱: ساختار کلی چشمه‌ی یونی ۹

شکل ۱-۶-۱: طرحواره‌ی الکترودهای تله‌ی یونی پنینگ برای ورود الکترون‌ها ۱۱

شکل ۱-۶-۲: الکترودهای تله‌ی یونی پنینگ و اندازه آن در مقایسه با سکه ۱۱

شکل ۱-۷-۱: نمایی از جمع کننده فارادی ۱۲

شکل ۱-۷-۲: تکثیرکننده الکترونی ۱۳

شکل ۱-۷-۳: آشکارسازهای مدار تشدیدی RCL ۱۳

شکل ۱-۷-۴: آشکارسازی یون محبوس در تله‌ی یونی توسط باریکه لیزری ۱۴

شکل ۱-۸-۱: طرحواره‌ی میدان الکتریکی و مغناطیسی در تله‌ی یونی پنینگ ۱۵

شکل ۱-۸-۲: طرحواره‌ی ایجاد میدان الکتریکی و مغناطیسی در تله‌ی پنینگ..... ۱۵

شکل ۱-۸-۳: الف) سه حرکت هارمونیک ذره‌ی باردار درون تله ب) حرکت سه بعدی ذره‌ی باردار محصور شده درون تله ج) حرکت ذره‌ی باردار درون تله در صفحه x-y ۱۶

شکل ۲-۱-۱: طرحواره‌ی تله‌ی یونی پنینگ ۱۹

شکل ۲-۴-۱: شبیه‌سازی مسیر حرکت الکترون در تله‌ی پنینگ الف) محدوده حرکتی در راستای محور x ب) محدوده حرکتی در راستای محور y ج) محدوده حرکتی در راستای محور z د) حرکت در صفحه y-x و) حرکت در صفحه z-y ه) حرکت در صفحه z-x ۲۶

شکل ۲-۵-۱: شبیه‌سازی مسیر حرکت یون $^{40}Ca^{+}$ در تله‌ی پنینگ الف) محدوده حرکتی در راستای محور x ب) محدوده حرکتی در راستای محور y ج) محدوده حرکتی در راستای محور z د) حرکت در صفحه y-x و) حرکت در صفحه z-y ه) حرکت در صفحه z-x ۲۹

شکل ۲-۶-۱: شبیه‌سازی مسیر حرکت یون $^{197}Au^{+}$ در تله‌ی پنینگ الف) محدوده حرکتی در راستای محور x ب) محدوده حرکتی در راستای محور y ج) محدوده حرکتی در راستای محور z د) حرکت در صفحه y-x و) حرکت در صفحه z-y ه) حرکت در صفحه z-x ۳۲

شکل ۳-۳-۱: برهم‌کنش یک اتم دوترازه با یک میدان تک مد ۴۸

شکل ۳-۴-۱: رسم p(n) بر حسب تعداد فوتون‌ها (n)، برای حالت همدوس ۶۷

شکل ۳-۵-۱: الف) ترازهای انرژی Ca^{+} در غیاب میدان مغناطیسی ب) ترازهای انرژی Ca^{+} در حضور میدان مغناطیسی ۷۰

فهرست جداول

جدول ۲-۱: پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی مناسب گیراندازی ۳۳

فصل ۱ : تله‌ی یونی‌پینگ

۱-۱ مقدمه

گیراندازی ذرات به عنوان یکی از کارآمدترین روش‌ها به منظور مطالعه و اندازه‌گیری‌های دقیق ویژگی‌های یون و ذرات زیراتمی باردار محسوب می‌شود [۱و۲]. از جمله کاربردهای آن را می‌توان، ساختن کیوبیت‌ها برای محقق‌سازی رایانه‌های کوانتومی و پردازش اطلاعات کوانتومی با استفاده از ذرات به تله افتاده، بررسی ترازهای انرژی، مطالعه و اندازه‌گیری ثابت‌های بنیادی ذرات، مطالعه‌ی واپاشی ذرات، بررسی مسیر حرکت و مطالعه‌ی معادلات حرکت ذرات باردار محصور در تله و مطالعه‌ی اندرکنش بین ذرات نام برد [۳-۵].

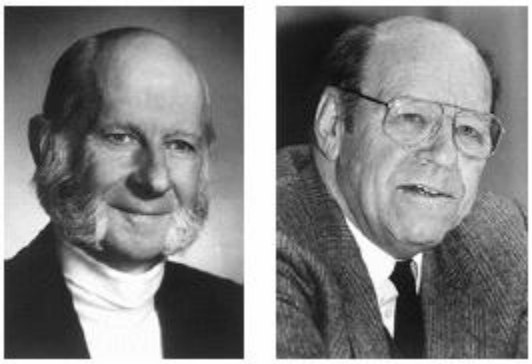
استفاده از پتانسیل چهارقطبی الکتریکی یکی از روش‌های گیراندازی یون‌ها و هر ذره‌ی باردار دیگری است که در این زمینه به کار گرفته می‌شود [۱]. با توجه به عدم توانایی پتانسیل الکتروستاتیکی در گیراندازی ذرات در سه بعد، این سیستم‌ها به صورت ترکیبی از پتانسیل الکتروستاتیکی و میدان مغناطیسی یکنواخت در یک راستا به عنوان تله‌های یونی پنینگ[1] [۶] و مدلی بر اساس پتانسیل الکتریکی متناوب به عنوان تله‌های یونی پائول[2] شناخته می‌شوند [۷]. شکل ۱-۱-۱ نمایی از این تله‌ها را نشان می‌دهد.

شکل ۱-۱-۱: نمایی کلی از شکل تله‌های یونی پائول (شکل سمت راست) و پنینگ (شکل سمت چپ).

[1]Penning Ion Trap
[2]Paul Ion Trap

۱-۲ تاریخچه

اولین نظریه تله‌های یونی در حدود ۱۰۰ سال پیش توسط "ولفگانگ پائول[۱]" و "هانس استین ودل[۲]" بیان شد و بعد از آن دانشمندان متعددی سال‌های زیادی در این زمینه کار کردند. "هانس دهملت[۳]" نخستین تله‌ی پنینگ را ساخته و نام آنرا از روی نام "فرانس میشل پنینگ[۴]" برگزید. دهملت از خلاءسنج ساخته شده توسط فرانس پنینگ الهام گرفته بود. با ظهور تله‌های یونی، کاربردهای زیادی در زمینه‌ی طیف‌نگاری جرمی ذرات بازگردید و منجر به بردن جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۸۹ توسط دو دانشمند "ولفگانگ پائول" و "هانس دهملت" گردید [۳و۸]. شکل ۱-۲-۱.



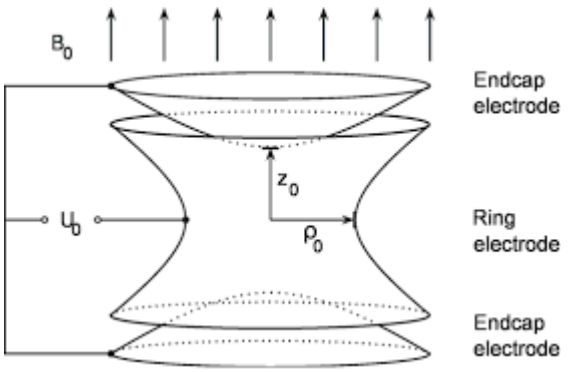
شکل ۱-۲-۱: برندگان جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۸۹.
سمت راست: آقای ولفگانگ پائول. سمت چپ: آقای هانس دهملت [۱۰].

[1]Wolfgang Paul
[2]Hans Steinwedel
[3]Hans Dehmelt
[4]Frans Michel Penning

۱-۳ تله‌ی یونی پنینگ

تله‌ی یونی پنینگ نوعی تله‌ی پتانسیلی است که برای محصورسازی ذرات باردار، جهت مطالعه و اندازه-گیری‌های دقیق روی آن‌ها استفاده می‌شود. تله‌ی پنینگ با استفاده از پتانسیل چهارقطبی الکتروستاتیکی و حضور میدان مغناطیسی یکنواخت بر روی سیستم، با ایجاد چاه پتانسیلی، گیراندازی سه بعدی یون را فراهم می‌سازد. تله‌ی پنینگ از میدان الکتریکی چهارقطبی پایا، برای محصورسازی ذرات در راستای محوری و از میدان مغناطیسی همگن که در مرکز و در راستای z اعمال می‌شود، برای محصورسازی ذرات در راستای شعاعی استفاده می‌کند. شکل این تله متشکل از سه الکترود هذلولی می‌باشد، شامل یک الکترود حلقوی و دو الکترود کلاهک‌دار که هر سه از جنس مس می‌باشند و نیز جنس عایق بین الکترودها از سرامیک بوده و الکترودها موازی با میدان مغناطیسی تراز شده اند و درون سیستم خلاء می‌باشد [۳و۹و۱۰]. شکل ۱-۳-۱.

(ب)



(الف)

شکل ۱-۳-۱: الف) طرحواره تله‌ی یونی پنینگ با سه الکترود هذلولی، شامل یک الکترود حلقوی و دو الکترود کلاهک‌دار. ب) تله‌ی یونی پنینگ با برش بخشی از الکترود آن.

در تله‌ی واقعی ایراداتی مثل شکل هذلولی ناقص و یا داشتن سوراخ‌ها و شکاف‌هایی در الکترودها

باعث عدم ایجاد پتانسیل متقارن و میدان مغناطیسی همگن می‌شود [۱۲].

یکی از مزیت‌های تله‌ی یونی پنینگ استفاده از میدان مغناطیسی است که در بسیاری از اندازه‌گیری ها و مطالعات یون‌ها از جمله اثر زیمن و اندازه‌گیری ضریب ژیرومغناطیسی ذرات باردار مورد استفاده قرار می‌گیرد. این قابلیت متمایز کننده‌ی تله‌های پنینگ از تله‌های پائول است که تنها با پتانسیل الکتریکی متناوب کار می‌کنند و بیشتر در زمینه طیف‌سنجی جرمی ذرات باردار با دقت بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۱-۳-۲ نمایی از تله‌ی پنینگ ساخته شده در مرکز ماکس پلانک[1] آلمان را نشان می‌دهد که به منظور اندازه‌گیری ضریب ژیرومغناطیسی پروتون و یون‌ها طراحی و مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین دام پنینگ را همراه با حفظ قدرت به دام‌اندازی آن می‌توان بزرگتر نمود و بدین ترتیب یون به دام افتاده را از سطح الکترودها دور نگه داشت [۱۱].

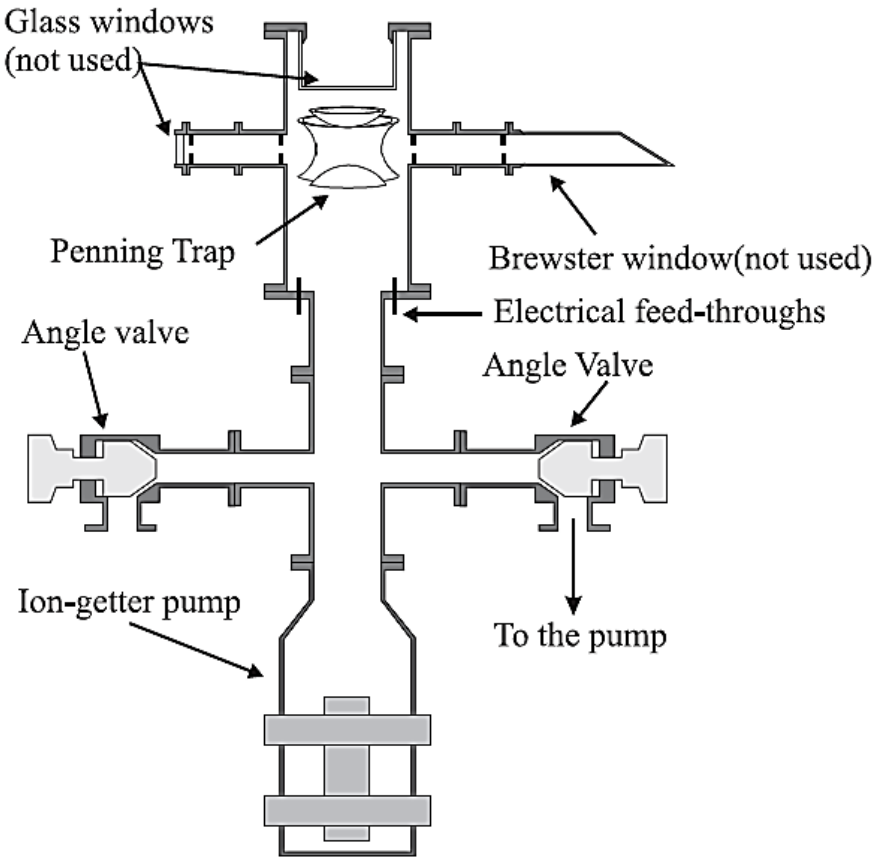
شکل ۱-۳-۲: تله‌ی یونی پنینگ ساخته شده در مرکز ماکس پلانک آلمان [۱۱].

[1]Max Plank Institute

۱-۴ فشار و گاز پس‌زمینه

عملکرد دقیق سیستم‌های گیراندازی یون و همچنین مدت زمان گیراندازی آن‌ها مستلزم خلاء مناسب فراهم شده درون سیستم است. به منظور کاهش برخوردهای یون/ یون و یون/ اتم میان یون‌های گیراندازی شده و اتم‌های خنثی گاز پس‌زمینه موجود در تله، فشار مناسب از مرتبه $۱۰^{-۶}$ mbar و کمتر (محدوده‌ی خلاء بالا و خلاء فوق بالا) فراهم می‌شود [۱۳].

سیستم توسط یک پمپ مولکولی توربو[1] تخلیه شده و پس از پمپاژ اولیه، فشار توسط یک پمپ یونی[2] حفظ می‌شود [۱۲]. (شکل ۱-۴-۱).



شکل ۱-۴-۱: محفظه‌ی خلاء [۱۲].

[1]Turbo-molecular
[2]Ion pump

یونش و طیف سنجی جرمی گاز پس زمینه انجام شده توسط رتینگ هاوس[1] نشان دهنده حضور مولکول یونی با نسبت جرم به بار $\frac{m}{e} = 29$ در گاز پس‌زمینه تله‌ی یونی است که معرف مولکول COH^+ شکل گرفته در اثر برخوردهای یون-مولکول میان CO^+ و مولکول‌های هیدروکربنی موجود در گاز پس‌زمینه است [۱].

حضور مولکول‌های هیدروکربنی در گاز پس‌زمینه درون تله به علت گاز پس‌دهی دیواره‌ی داخلی محفظه خلاء است. تمیزکاری سطوح داخلی محفظه خلاء با استفاده از الکل‌هایی همچون اتانول و استون انجام می‌شود. پس از تمیزکاری تعدادی از مولکول‌های الکل بر روی سطح می‌چسبند که در خلاء بالا از آن جدا شده و وارد محیط می‌شوند. به منظور کاهش این مولکول‌های هیدروکربنی سطوح مورد نظر در حین خلاءسازی داغ می‌شوند تا مولکول‌های چسبیده به سطح جدا شده و به بیرون پمپ شوند و پس از آن سطوح دوباره سرد می‌شوند [۱].

۱-۵ تولید یون

یونش اتم‌های خنثی به منظور گیراندازی آن‌ها درون تله‌ی یونی به دو روش رایج زیر صورت می‌گیرد:

الف) یونش درون تله‌ی یونی با استفاده از برخورد شار الکترونی

این روش با تزریق گاز خنثی به درون تله‌ی یونی و سپس وارد کردن یک شار الکترونی از حفره کلاهک تله به درون آن انجام می‌گیرد که برخورد میان آن‌ها منجر به یونش اتم‌ها می‌شود [۲و۱۴].

ب) استفاده از چشمه‌های یونی و وارد کردن یون به درون تله

در این روش فرآیند یون‌سازی درون چشمه‌ی یونی انجام می‌گیرد و پس از آن با استفاده از میدان‌های الکترومغناطیسی، یون از حفره موجود در یکی از کلاهک‌های تله وارد آن می‌شود [۹و۱۵].

در ادامه این روش‌ها توضیح داده خواهند شد.

---

[1] Rettinghaus

۱-۵-۱ یونش گاز درون تله

در اکثر سیستم‌های طیف‌سنجی جرمی و آنالیز مولکولی تله‌های یونی، یون درون تله تولید می‌شود و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این روش با تزریق شار الکترون با انرژی مناسب به درون تله و اندرکنش آن با اتم‌ها و مولکول‌های خنثی موجود در تله‌ی یونی منجر به تولید گاز یونیزه می‌شود. یک مولکول خنثی در اثر اندرکنش الکترون فرودی با ابر الکترونی آن انرژی جذب می‌کند. معادله (۱-۵-۱) اندرکنش یک الکترون با انرژی ۷۰ eV را با مولکول M نشان می‌دهد. مولکول مورد نظر در طی این اندرکنش حدود ۱۴ eV انرژی جذب می‌کند که سریعا منجر به کنده شدن یکی از الکترون‌های مداری آن با انرژی جنبشی زیر ۱ eV می‌شود. پس از آن نیز، دوباره الکترون پراکنده شده با انرژی ۵۶ eV همچنان می‌تواند با اتم‌های دیگر برخورد کرده و باعث یونیزه شدن آن‌ها شود [۱۳].

$$M + e^-_{70eV} \rightarrow M^{+\bullet} + e^-_{56eV} + e^-_{thermal} \qquad (۱-۵-۱)$$

اما با توجه به انرژی متفاوت الکترون‌های مداری اتم‌ها و همچنین متفاوت بودن انرژی بستگی آن‌ها در اتم‌ها و مولکول‌های مختلف، این انرژی تبادلی ۱۴ eV در نظر گرفته شده می‌تواند متفاوت باشد و محدوده وسیعی را شامل شود. به‌طوری که بسته به گاز مورد نظر ممکن است یک مولکول مقدار eV ۳۰ انرژی جذب کند و یا حتی تنها ۹ eV جذب شود.

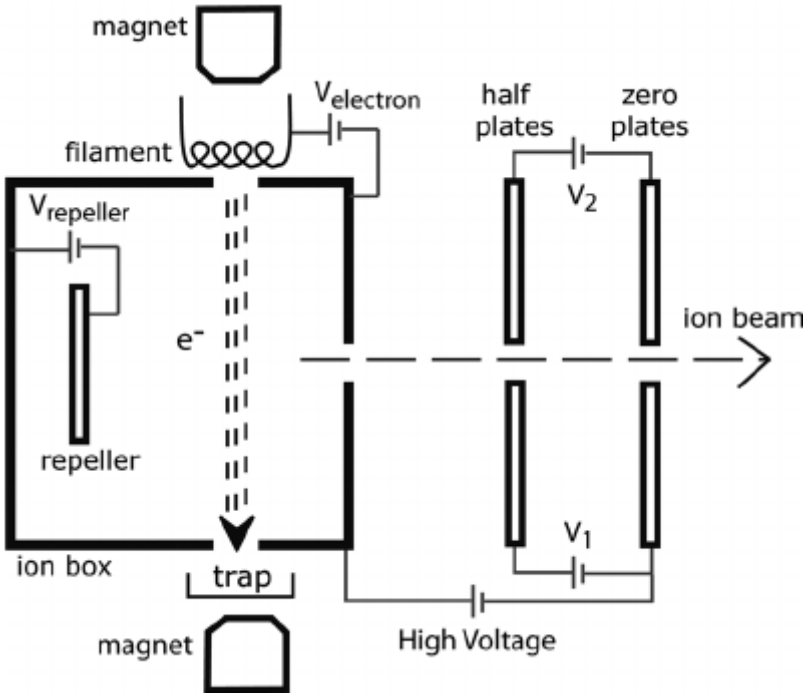
هر چه انرژی انتقال یافته از طرف الکترون فرودی به مولکول بیشتر باشد و مولکول در حالت برانگیخته بالاتری قرار گیرد این مولکول تمایل بیشتری به تکه تکه شدن و تجزیه مولکول به قسمت‌های کوچکتر دارد که کاربرد گسترده‌ای در زمینه آنالیز مولکولی و انرژی بستگی آن‌ها دارد.

۱-۵-۲ چشمه‌ی یونی

چشمه‌ی یونی به عنوان یکی دیگر از روش‌های تولید یون به منظور گیراندازی آن درون تله‌ی یونی است. در این روش نیز با استفاده از تابش شار الکترون به گاز خنثی اما اینک خارج از تله‌ی یونی منجر

به یونش اتم شده و پس از آن با استفاده از لنزهای الکتریکی یون مورد نظر از یکی از حفره‌های کلاهک تله‌ی یونی وارد آن می‌گردد. این روش با توجه به کنترل فشار گاز چشمه‌ی یونی و تله‌ی یونی و لنزهای الکتریکی به منظور هدایت مناسب یون‌ها به درون تله، امکان گیراندازی تعداد کمی از یون‌ها حتی یک تک یون را درون تله فراهم می‌سازد.

ساختار کلی چشمه‌های یونی که در شکل ۱-۵-۱ نشان داده شده است متشکل از فیلامان کاتد داغ، آند، دفع کننده الکتریکی، آهنربا و لنزهای الکتریکی است.



شکل ۱-۵-۱: ساختار کلی چشمه‌ی یونی متشکل از فیلامان کاتد داغ، آند، دفع کننده الکتریکی، آهنربا و لنزهای الکتریکی.

عملکرد این سیستم بدین شکل است که با عبور جریانی در حد ۳ تا ۴ آمپر از فیلامان که از جنس تنگستن (دمای ذوب $^{\circ}C$ ۳۴۰۷ و تابع کار eV ۴.۵۵) می‌باشد این فیلامان داغ شده و شروع به تابش الکترون می‌کند و سپس با توجه به اختلاف پتانسیل بین فیلامان و محفظه چشمه، الکترون‌ها شتاب می‌گیرند. در اثر اندرکنش شار الکترونی با گاز خنثی موجود در محفظه چشمه، این اتم‌ها یونیزه شده

و توسط دفع کننده پشت آن‌ها به سمت حفره خروج از چشمه هدایت می‌شوند که پس از آن با استفاده از لنزهای الکتریکی به بیرون هدایت می‌شوند. در این سیستم‌ها محفظه چشمه نیز داغ می‌گردد تا گاز موجود درون آن روی دیواره سرد داخلی نچسبد. حضور آند برای جمع کردن الکترون‌ها و به منظور جلوگیری از کاهش شار الکترون تابشی از کاتد به کار گرفته می‌شود.

از آنجا که سطح مقطع اندرکنش الکترون با اتم‌های خنثی کم است و تنها از طریق اندرکنش با ابر الکترونی اتم‌ها تنها می‌تواند در حدود ۱ درصد از اتم‌ها را یونیزه کند حضور میدان مغناطیسی می‌تواند با افزایش طول مسیر حرکت الکترون در مسیری مارپیچی احتمال این اندرکنش را افزایش دهد. اختلاف پتانسیل بین فیلامان و محفظه چشمه‌ی یونی به منظور شتابدهی شار الکترون در حدود V ۷۰ است [۱۳].

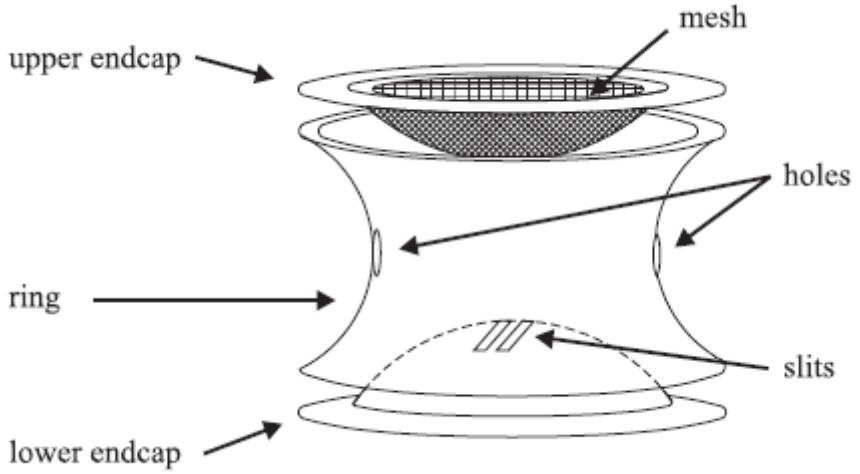
۱-۶ چشمه‌ی الکترونی

چشمه‌های الکترونی فیلامان داغ[1] و کاتد سرد[2] دو نمونه از متداول‌ترین چشمه‌های الکترونی به منظور گیراندازی الکترون در تله‌های چهار قطبی هستند. چشمه فیلامان داغ به عنوان یکی از ارزان‌ترین و ساده‌ترین چشمه‌های الکترونی کاربرد زیادی در زمینه گیراندازی الکترون و همچنین یونیزه کردن اتم‌ها دارد. عملکرد این چشمه به این شکل است که با عبور جریان از رشته نازک تنگستنی این رشته داغ شده و شروع به تابش الکترون می‌کند. الکترون‌ها توسط آند قرار گرفته در مجاور آن شتاب گرفته و از حفره آند خارج می‌شوند.

شکل ۱-۶-۱ طرحواره‌ای از تله‌ی پنینگ را نشان می‌دهد که درآن الکترون‌ها از درپوش بالایی که شامل یک شبکه است وارد تله می‌شوند. در یک تله‌ای که برای طیف‌نگار لیزری استفاده شده، الکترود حلقه دو سوراخ به قطر 4mm دارد. درپوش پایینی دو شکاف کوچکی دارد که توسط آن به یون‌ها اجازه

[1] Hot Filament
[2] Cold Cathode

تبخیر داده می‌شود [۱۲].



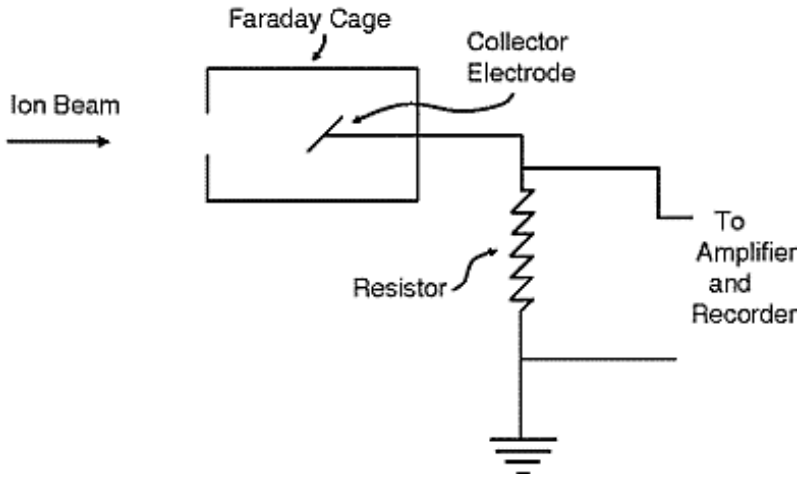
شکل ۱-۶-۱: طرحواره‌ی الکترودهای تله‌ی یونی پنینگ برای ورود الکترون‌ها [۱۲].

شکل ۱-۶-۲: الکترودهای تله‌ی یونی پنینگ و اندازه آن در مقایسه با سکه.

یونیزه کردن اتم‌ها و خروج یون‌ها و الکترون‌ها از تله با استفاده از سیستم‌های الکترونیکی دقیقی انجام می‌گیرد که با اعمال پالس ولتاژی در بازه زمانی از مرتبه میلی‌ثانیه و میکروثانیه به کلاهک‌ها، ورود شار الکترونی به منظور یونیزه کردن اتم‌های درون تله و همچنین خروج یون‌ها و الکترون‌ها از حفره کلاهک‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱و۱۲].

۱-۷ آشکارسازی یون و الکترون درون تله

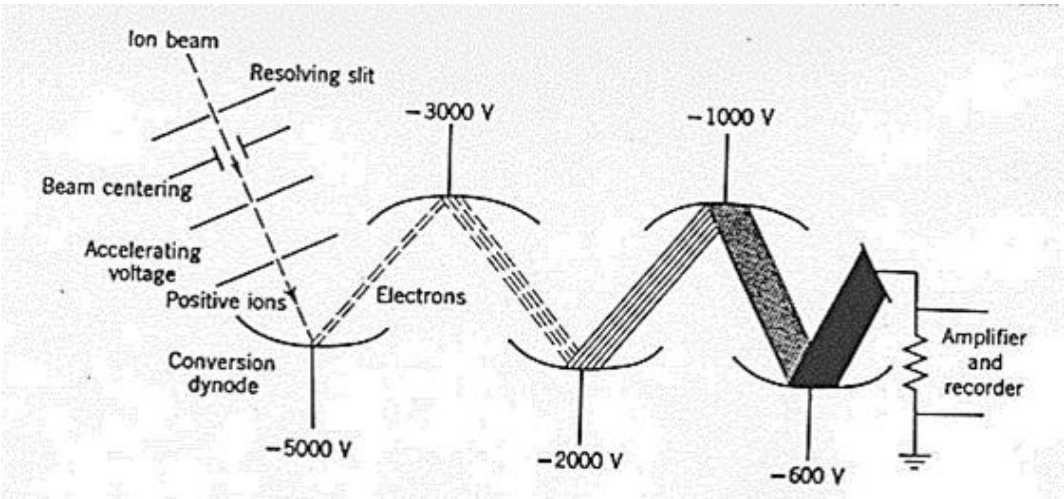
آشکارسازی یون در نمونه‌های اولیه تله‌های یونی توسط جمع کننده فنجانی فارادی[1] انجام می‌گرفت. در این نمونه‌ها یون خارج شده از حفره کلاهک توسط جمع‌کننده فارادی جمع می‌شود و خنثی می‌گردد و پس از آن در اثر این بار القا شده در جمع کننده فارادی تعداد یون‌های رسیده به جمع کننده فارادی برآورد می‌شود. شکل ۱-۷-۱ نمایی از جمع‌کننده فارادی مورد استفاده در آشکارسازی یون در تله‌های یونی را نشان می‌دهد [۱۳].



شکل ۱-۷-۱: نمایی از جمع کننده فارادی به منظور آشکارسازی یون خروجی از تله‌ی یونی [۱۳].

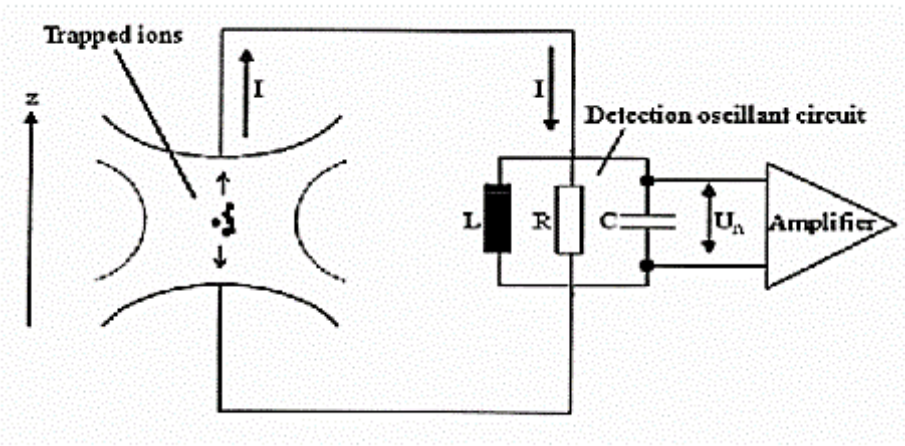
تکثیرکننده‌های الکترونی[2] به عنوان نسل بعدی آشکارسازهای یونی بودند که دقت بالاتری نسبت به جمع‌کننده‌های فارادی داشتند. عملکرد این روش آشکارسازی نیز مستلزم بیرون کشیدن یون از درون تله‌ی یونی توسط میدان‌های الکتریکی است. شکل ۱-۷-۲ آشکارسازی یون توسط تکثیر کننده‌ی الکترونی را نشان می‌دهد [۱۳].

[1]Faraday Cup Collector
[2]Electron Mulriplier



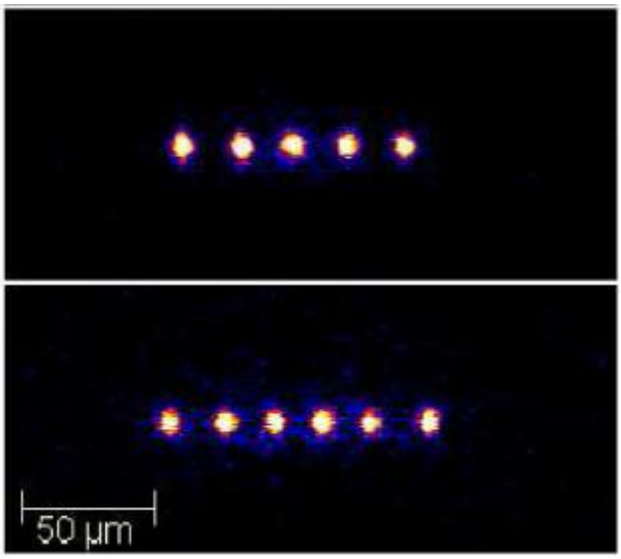
شکل ۱-۷-۲: تکثیرکننده الکترونی مورد استفاده در آشکارسازی یون بیرون کشیده شده از تله [۱۳].

مدارهای تشدیدی RCL که یک روش آشکارسازی غیر مخرب است، یکی از دقیق‌ترین روش‌های آشکارسازی یون به دام افتاده درون تله‌ی یونی شناخته می‌شوند که بدون نیاز به بیرون کشیدن یون از درون تله‌ی یونی و تنها با استفاده از آشکارسازی بار تصویری القا شده روی کلاهک‌ها در اثر نوسان یون محصور شده کار می‌کند. این سیستم‌ها قابلیت فوق‌العاده بالایی در آشکارسازی حتی یک تک یون محبوس شده درون تله را در دمای پایین دارا هستند. شکل ۱-۷-۳ نمونه‌ای از مدارهای RCL متصل به کلاهک را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۷-۳: آشکارسازهای مدار تشدیدی RCL متصل به کلاهک [۱۳].

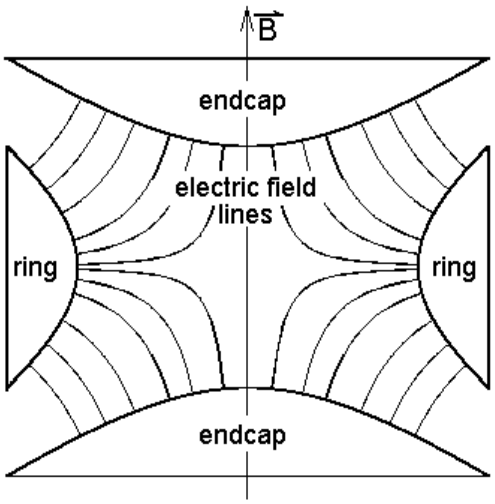
روش دیگر آشکارسازی یون درون تله‌ی یونی و حتی اندازه‌گیری انرژی و تکانه یون محبوس در تله‌ی یونی استفاده از باریکه لیزرهای تکفام است که با تابش لیزر به یون محبوس در تله‌ی یونی و برانگیختگی آن و پس از آن آشکارسازی فوتون باز نشر شده از آن انجام می‌گیرد. شکل ۱-۷-۴ نمونه ای از آشکارسازی یون‌های محبوس در تله‌ی یونی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۷-۴: آشکارسازی یون محبوس در تله‌ی یونی توسط باریکه لیزری [۱۳].

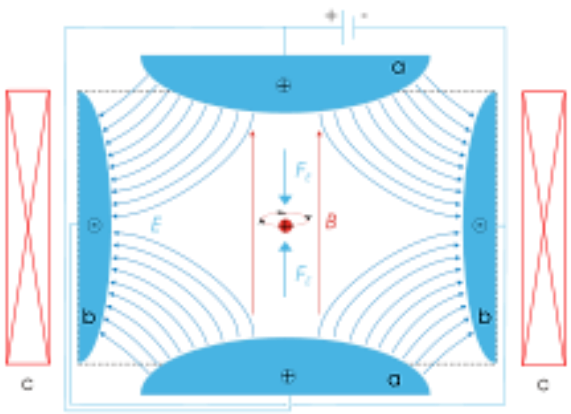
۱-۸ میدان‌ها در تله‌ی پنینگ و محصورسازی ذرات باردار

تله‌ی پنینگ از میدان الکتریکی چهارقطبی پایا، برای محصورسازی ذرات در راستای محوری و از میدان مغناطیسی همگن که در مرکز و در راستای z اعمال می‌شود، برای محصورسازی ذرات در راستای شعاعی استفاده می‌کند (شکل ۱-۸-۱).



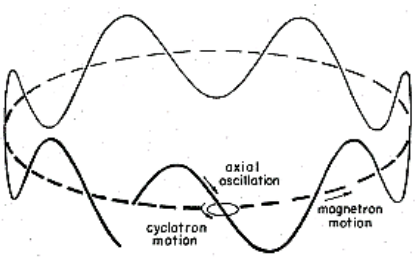
شکل ۱-۸-۱: طرحواره‌ی میدان الکتریکی و مغناطیسی در تله‌ی یونی پنینگ [۳].

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین حلقه و کلاهک‌ها که با استفاده از ولتاژهای DC اعمال می‌شود یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند که باعث گیراندازی یون در راستای محوری z می‌شود. برای به دام انداختن یون‌های مثبت (منفی)، الکترودهای کلاهک‌دار نسبت به الکترود حلقوی در پتانسیل مثبت (منفی) قرار می‌گیرند. میدان مغناطیسی اعمالی توسط سیم‌پیچ در راستای z و در مرکز تله، امکان محصورسازی یون در راستای شعاعی را فراهم می‌کند، که نهایتا منجر به محصورسازی سه بعدی یون درون تله می‌شود [۹و۱۰و۱۲] (شکل ۱-۸-۲).

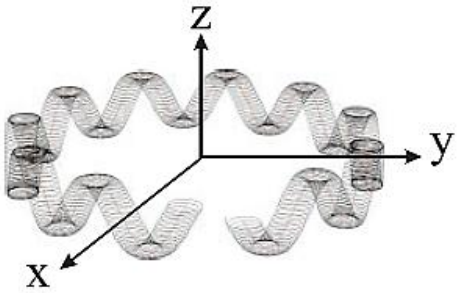


شکل ۱-۸-۲: طرحواره‌ی ایجاد میدان الکتریکی و مغناطیسی وگیراندازی یون مثبت در تله‌ی پنینگ.

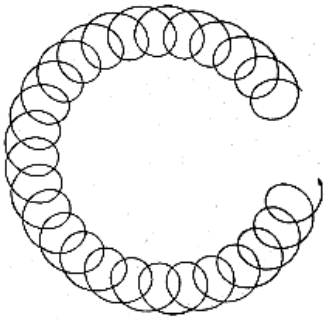
حرکت مداری ذرات باردار درون یک تله‌ی پنینگ ترکیبی از سه حرکت هارمونیک جداست; یک حرکت محوری در جهت z و دو حرکت در صفحه‌ی شعاعی به نام‌های مگنترونی و حرکت سیکلوترونی [۳] شکل (۱-۸-۳).



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱-۸-۳: الف) سه حرکت هارمونیک محوری، سیکلوترونی و مگنترونی ذره‌ی باردار درون تله‌ی پنینگ [۳]. ب) حرکت سه بعدی ذره‌ی باردار محصور شده درون تله‌ی پنینگ [۱۲]. ج) حرکت ذره‌ی باردار درون تله‌ی پنینگ در صفحه x-y [۳].

فصل ۲ : بررسی کلاسیکی حرکت ذره در تله ی یونی پینگ

۲-۱ پتانسیل چهارقطبی الکتریکی

اصطلاح چهارقطبی در سیستم‌های تله‌ی یونی برگرفته از این مفهوم است که پتانسیل در هر نقطه درون آن‌ها وابسته به مجذور فاصله از مرجع مورد نظر است. دلیل انتخاب این پتانسیل چهارقطبی در سیستم‌های گیراندازی یون به منظور دستیابی به نیروی بازگرداننده خطی وارد بر یون محصور شده در تله است که از این پتانسیل چهارقطبی نشات می‌گیرد. این نیروی خطی وارد بر یون از قدرت بازگردانندگی بیشتری در مرکز تله برخوردار است و همچنین معادلات حرکتی آن بسیار ساده‌تر خواهد بود. در واقع پتانسیل‌های مرتبه بالاتر دارای نیروی بازگردانندگی ضعیف‌تری نسبت به پتانسیل چهارقطبی هستند و همچنین معادلات حرکتی بدست آمده از آن‌ها دارای پیچیدگی بیشتری خواهد بود [۱۶و۱۷].

در حالت کلی، پتانسیل در هر نقطه داخل دستگاه‌های تله‌ی یونی چهارقطبی در مختصات دکارتی به شکل زیر است [۱]:

$$\phi_{x,y,z} = A(\lambda x^2 + \sigma y^2 + \gamma z^2) + C \qquad (۲-۱-۱)$$

که A ثابت مستقل از x, y, z بوده و وابسته به اختلاف پتانسیل الکتریکی بین الکترودها است; C یک جمله‌ی پتانسیل ثابت و ثابت‌های λ, σ, γ به ترتیب ضرایب وزنی مرتبط با x, y, z هستند.

با توجه به صفر بودن چگالی بار در محیط ($\rho = 0$) از معادله‌ی لاپلاس خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \phi_{x,y,z} = 0$$
$$\nabla^2 \phi_{x,y,z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (۲-۱-۲)$$

مشتق پاره‌ای در راستای x برابر است با:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A\lambda x^2) = 2A\lambda x$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A\lambda \qquad (۲-۱-۳)$$

و به همین صورت برای دو راستای دیگر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=2A\sigma \quad \text{و} \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=2A\gamma \qquad (۴-۱-۲)$$

که در نهایت معادله‌ی (۲-۱-۲) به صورت زیر خواهد شد:

$$\nabla^2\phi_{x,y,z}=A(2\lambda+2\sigma+2\gamma)=0 \qquad (۵-۱-۲)$$

در معادله‌ی (۲-۱-۵) واضح است که به ازای A مخالف صفر خواهیم داشت: $(\lambda+\sigma+\gamma)=0$ که در ساده‌ترین و کلی‌ترین انتخاب برای تله‌ی یونی چهارقطبی، این سه ضریب به شکل $(\lambda=\sigma=1$ و $\gamma=-2)$ هستند.

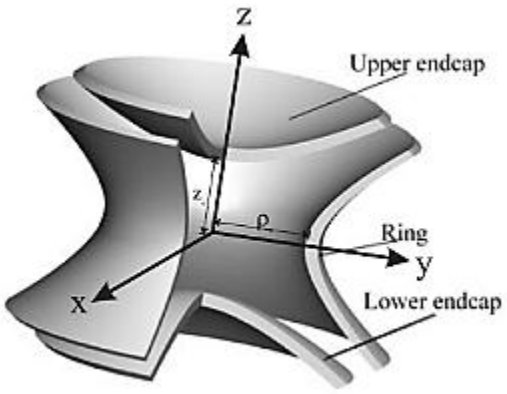
بنابراین شکل پتانسیل معادله‌ی (۲-۱-۱) به شکل زیر می‌شود:

$$\phi_{x,y,z}=A(x^2+y^2-2z^2)+C \qquad (۶-۱-۲)$$

که ثابت‌های A و C با توجه به شرایط مرزی مسئله تعیین می‌شوند.

از طرفی V_0 اختلاف پتانسیل بین الکترود حلقه و کلاهک می‌باشد که به صورت زیر است:

$$V_0=\phi_{ring}-\phi_{endcap} \qquad (۷-۱-۲)$$



شکل ۲-۱-۱: طرحواره‌ی تله‌ی یونی پنینگ (Z_0 نصف فاصله‌ی بین الکترودهای کلاهک‌دار و ρ_0 کوتاه‌ترین فاصله تا الکترود حلقوی و شعاع تله است) [۱۲].

ϕ_{ring} و ϕ_{endcap} را با توجه به مختصات الکترودها در شکل (۲-۱-۱) از معادله‌ی (۲-۱-۶) بدست می‌آوریم:

$$\phi_{ring} = \phi_{0,\rho_0,0} = A\rho_0^2 + C$$
$$\phi_{endcap} = \phi_{0,0,z_o} = A(-2z_0^2) + C \qquad (۲-۱-۸)$$

بنابراین از تفاضل آن‌ها خواهیم داشت:

$$V_0 = \phi_{ring} - \phi_{endcap} = A\rho_0^2 - A(-2z_0^2) = A(\rho_0^2 + 2z_0^2) \qquad (۲-۱-۹)$$

از این رو ثابت A برابر می‌شود با:

$$A = \frac{V_0}{\rho_0^2 + 2z_0^2} \qquad (۲-۱-۱۰)$$

بنابراین شکل پتانسیل معادله‌ی (۲-۱-۶) به صورت زیر می‌شود:

$$\phi_{x,y,z} = \frac{V_0}{\rho_0^2 + 2z_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2) + C \qquad (۲-۱-۱۱)$$

۲-۲ پتانسیل و معادلات حرکت الکترون در تله‌ی یونی پنینگ

همانطور که در فصل اول توضیح دادیم برای به دام انداختن ذرات با بار منفی، الکترودهای کلاهک‌دار نسبت به الکترود حلقوی در پتانسیل منفی قرار می‌گیرند. بنابراین در معادله‌ی (۲-۱-۷)، $V_0 > 0$ می‌شود.

برای الکترون پتانسیلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۱۲] که همان معادله‌ی (۲-۱-۱۱) با شرط $z_0^2 = \frac{\rho_0^2}{2}$ می‌باشد که C=0 و $V_0 > 0$ است:

$$\phi = V_0(x^2 + y^2 - 2z^2)/(2\rho_0^2) \qquad (۲-۲-۱)$$

که در آن x,y,z مکان اولیه‌ی الکترون است.

از طرفی طبق رابطه‌ی (۲-۱-۷) می‌دانیم که:

$$\phi_{ring} - \phi_{endcap} = V_0$$

ϕ_{ring} و ϕ_{endcap} را از معادله‌ی (۲-۲-۱) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \phi_{ring} &= \phi_{0,\rho_0,0} = V_0 \rho_0^2 / 2\rho_0^2 \\ \phi_{endcap} &= \phi_{0,0,z_o} = V_0(-2z_0^2)/2\rho_0^2 \end{aligned} \qquad (۲-۲-۲)$$

بنابراین از تفاضل ابن دو خواهیم داشت:

$$\phi_{ring} - \phi_{endcap} = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0 z_0^2}{\rho_0^2} = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0^2}{\rho_0^2}\right) \qquad (۲-۲-۳)$$

از برابری معادله (۲-۱-۷) و (۲-۲-۳) خواهیم داشت:

$$V_0 = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0^2}{\rho_0^2}\right) \rightarrow z_0^2 = \frac{\rho_0^2}{2} \qquad (۲-۲-۴)$$

که رابطه‌ی (۲-۲-۴) همان شرط اولیه‌ای است که در نظر گرفتیم و درستی آن‌را نشان دادیم.

میدان الکتریکی از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{E} = -\nabla\phi \qquad (۲-۲-۵)$$

با جای‌گذاری پتانسیل از رابطه‌ی (۲-۲-۱) داریم:

$$\begin{aligned} E &= \frac{-V_0}{2\rho_0^2}(2x\hat{i} + 2y\hat{j} - 4z\hat{k}) \\ &\rightarrow E_x = \frac{-V_0 x}{\rho_0^2}, E_y = \frac{-V_0 y}{\rho_0^2}, E_z = \frac{2V_0 z}{\rho_0^2} \end{aligned} \qquad (۲-۲-۶)$$

و میدان مغناطیسی نیز در تله‌ی یونی پنینگ به شکل زیر است:

$$\mathrm{B} = \mathrm{B_Z} \qquad (۲-۲-۷)$$

نیروی لورنتس وارد بر ذره‌ی باردار به شکل زیر می‌باشد:

$$\mathrm{F} = \mathrm{q}(\mathrm{E} + \mathrm{v} \times \mathrm{B}) \qquad (۲-۲-۸)$$

که در آن q بار ذره و v سرعت اولیه ذره می‌باشد که از انرژی اولیه ذره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2k/m} \qquad (۹-۲-۲)$$

با توجه به اینکه سرعت اولیه در چه راستایی اعمال شود، سه مولفه برای آن خواهیم داشت. در اینصورت با استفاده از معادله‌ی (۲-۲-۷) داریم:

$$v \times B = v_x B_z \hat{i} - v_x B_z \hat{j} \qquad (۱۰-۲-۲)$$

از این رو مولفه‌های نیرو را با توجه به معادله‌ی (۲-۲-۸) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_x + v_x B_z) \\ F_y &= q(E_y - v_x B_z) \\ F_z &= qE_z \end{aligned} \qquad (۱۱-۲-۲)$$

اکنون با محاسبه‌ی شتاب در هر راستا می‌توان مسیر حرکت ذره را در سه بعد با استفاده از معادله‌ی حرکت یافت:

$$a = F/m \qquad (۱۲-۲-۲)$$

$$\rightarrow a_x = F_x / m \ , \qquad a_y = F_y / m \ , \qquad a_z = F_z / m$$

بنابراین با محاسبه‌ی نیروی وارده از طرف میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به الکترون و بدست آوردن شتاب آن می‌توان مسیر حرکت الکترون به تله افتاده را با توجه به سرعت و مکان اولیه و جرم آن بدست آورد.

۲-۳ پتانسیل و معادلات حرکت یون مثبت در تله‌ی پنینگ

همانطور که در فصل اول توضیح دادیم برای به دام انداختن یون‌های مثبت، الکترودهای کلاهک‌دار نسبت به الکترود حلقوی در پتانسیل مثبت قرار می‌گیرند. بنابراین در معادله‌ی (۲-۱-۷)، $V_0 < 0$ می‌شود.

برای یون مثبت پتانسیلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۱۸] که همان معادله‌ی (۲-۱-۱۱) با C=0

و $V_0 < 0$ است که علامت منفی V_0 را اعمال کردیم:

$$\phi = V_0(2z^2 - x^2 - y^2)/(2z_0^2 + \rho_0^2) \qquad (۱-۳-۲)$$

که در آن x,y,z مکان اولیه‌ی یون است.

همانند بخش قبل میدان الکتریکی از روابط زیر بدست می‌آید:

$$E = -\nabla\phi$$

با جای‌گذاری پتانسیل از رابطه‌ی (۲-۳-۱) داریم:

(۲-۳-۲)

$$E = \frac{-V_0}{2z_0^2 + \rho_0^2}(-2x\hat{i} - 2y\hat{j} + 4z\hat{k})$$
$$\rightarrow E_x = \frac{2V_0 x}{2z_0^2 + \rho_0^2}, E_y = \frac{2V_0 y}{2z_0^2 + \rho_0^2}, E_z = \frac{-4V_0 z}{2z_0^2 + \rho_0^2}$$

همانطور که گفتیم میدان مغناطیسی در تله‌ی یونی پنینگ به شکل زیر است:

$$B = B_Z$$

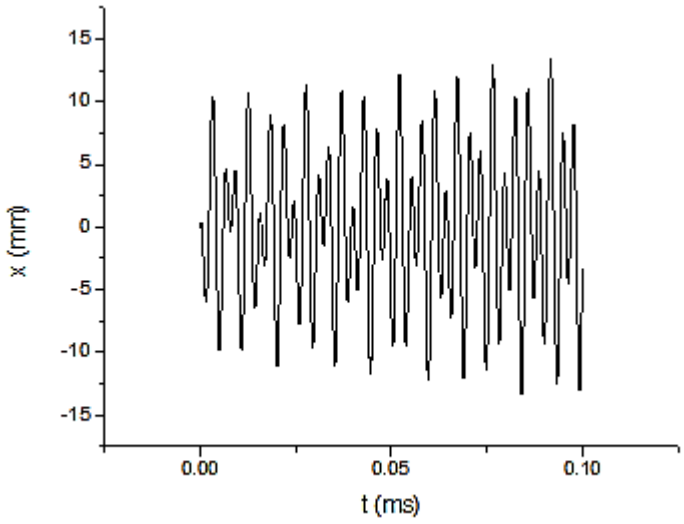
برای یون مثبت نیز همانند بخش قبل و با توجه به معادلات (۲-۲-۷) تا (۲-۲-۱۲)، مسیر حرکت بدست می‌آید.

این‌کار برای الکترون[۱] ، یون کلسیم[۲] ($^{40}_{20}Ca^+$) و یون طلا[۳] ($^{197}_{79}AU^+$)، با استفاده از زبان برنامه‌نویسی C++ و با گام زمانی ۱ نانوثانیه انجام شد که نتایج آن در بخش‌های بعدی رسم شده است.

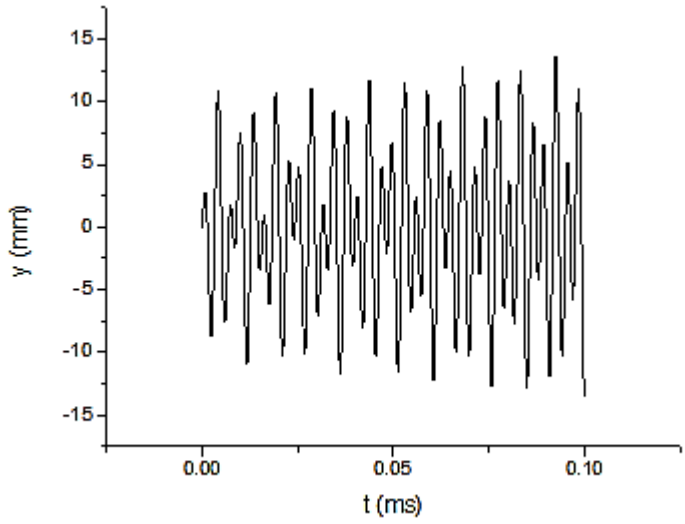
[1]Electron
[2]Calcium ion (1+)
[3]Gold ion (1+)

۲-۴ مسیر حرکت الکترون در تله‌ی یونی پنینگ

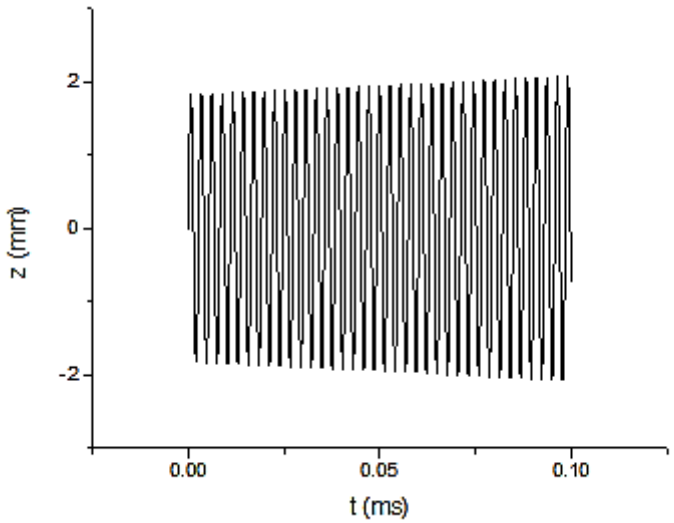
حرکت الکترون با انرژی اولیه ۰/۰۰۰۱ الکترون ولت در تله‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر و تحت میدان مغناطیسی ۰/۱۹ گاوس و اختلاف پتانسیل ۰/۰۰۶ ولت با نرم‌افزار Origin رسم شده و در شکل ۲-۴-۱ نشان داده شده است.



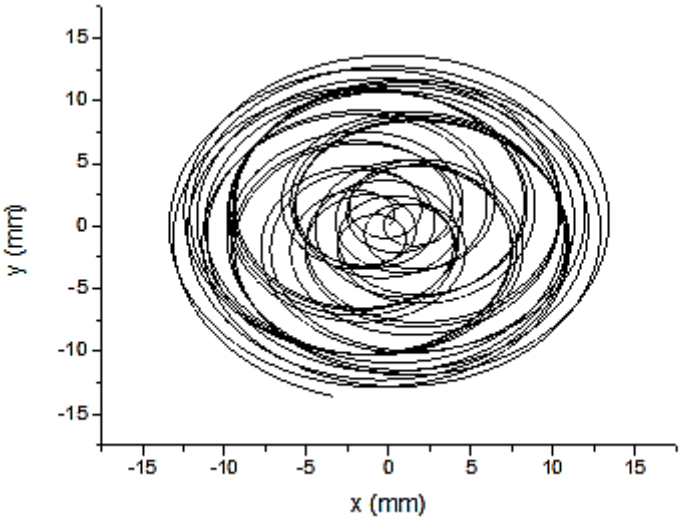
(الف)



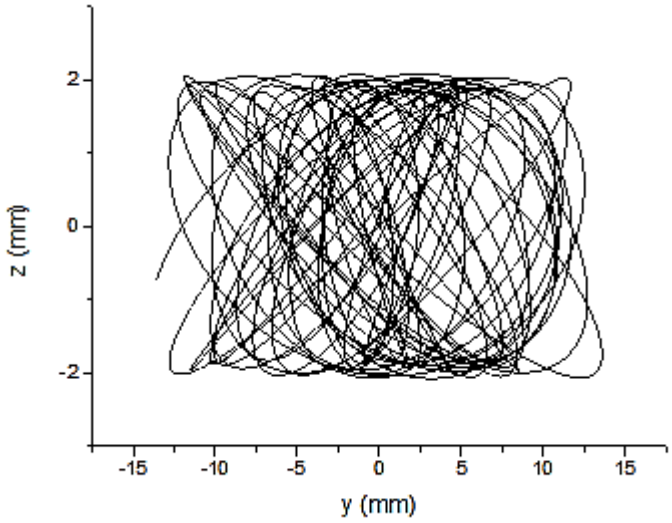
(ب)



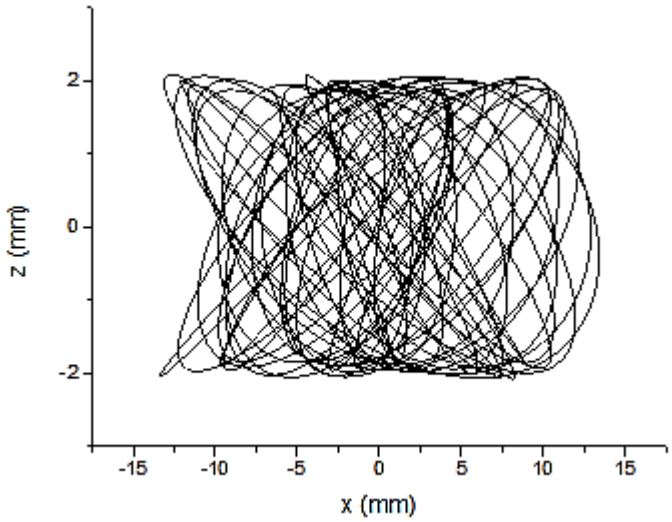
(ج)



(د)



(و)

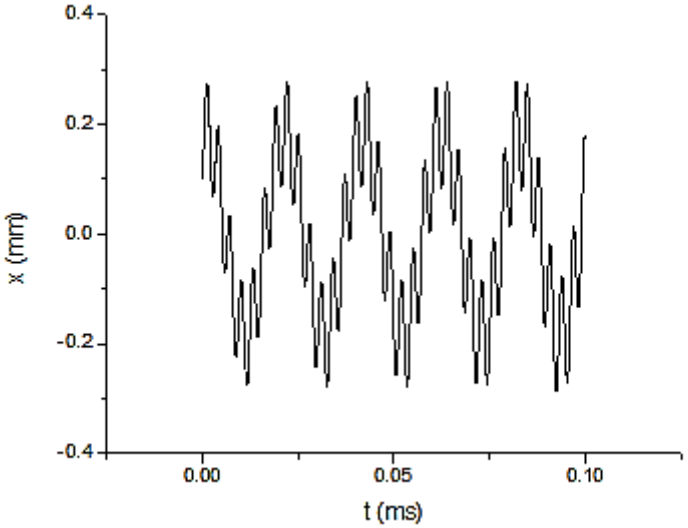


(ه)

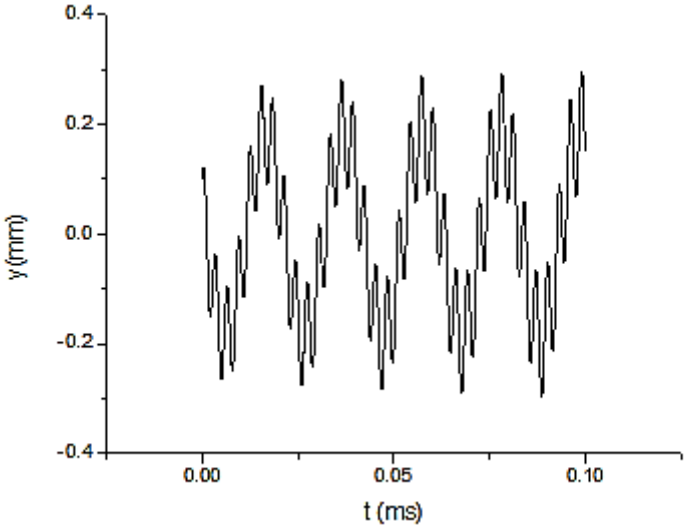
شکل ۲-۴-۱: شبیه‌سازی مسیر حرکت الکترون در تله‌ی یونی پنینگ به ازای میدان مغناطیسی ۰/۱۹ گاوس و اختلاف پتانسیل ۰/۰۰۶ ولت. الف) محدوده حرکتی در راستای محور x بر حسب زمان. ب) محدوده حرکتی در راستای محور y بر حسب زمان. ج) محدوده حرکتی در راستای محور z بر حسب زمان. د) حرکت در صفحه y-x. و) حرکت در صفحه z-y. ه) حرکت در صفحه z-x.

۲-۵ مسیر حرکت یون $^{40}Ca^{+}$ در تله‌ی یونی پنینگ

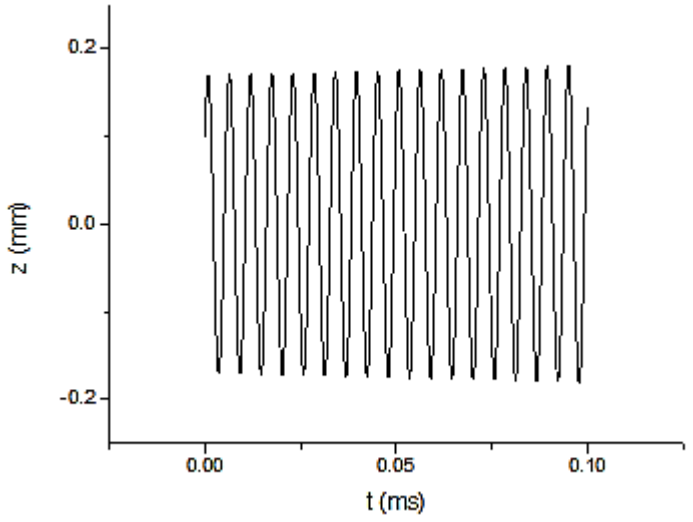
حرکت $^{40}Ca^{+}$ با انرژی اولیه ۰/۰۱ الکترون ولت در تله‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر و تحت میدان مغناطیسی ۱ تسلا و اختلاف پتانسیل ۱۶۰ ولت با نرم‌افزار Origin رسم شده و در شکل ۲-۵-۱ نشان داده شده است.



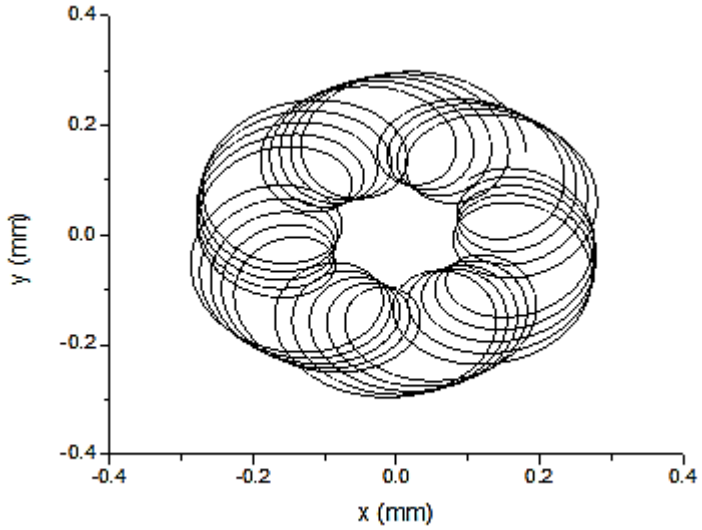
(الف)



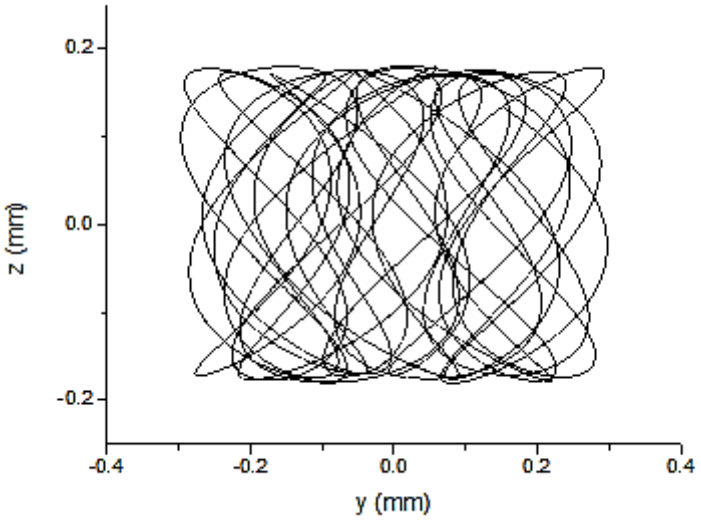
(ب)



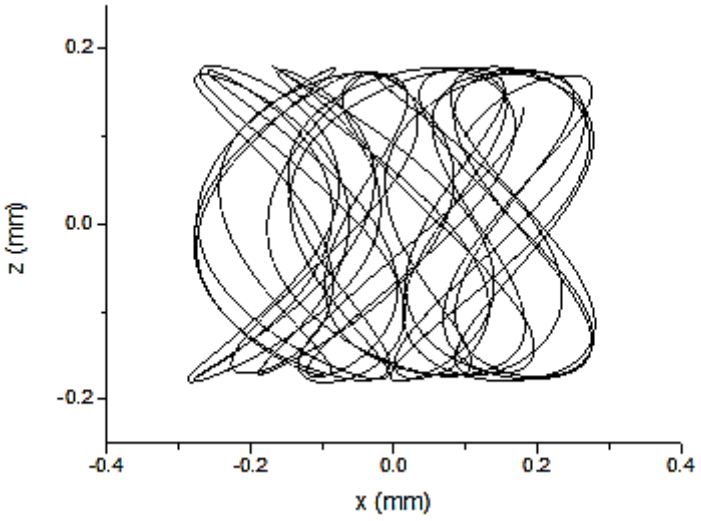
(ج)



(د)



(و)

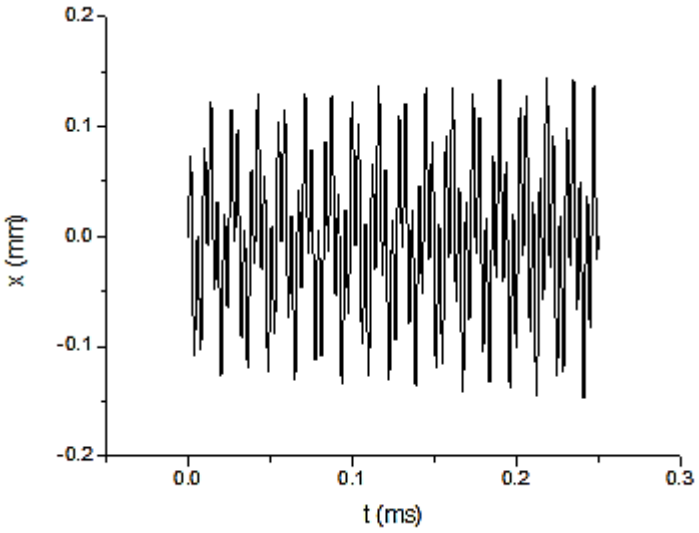


(ه)

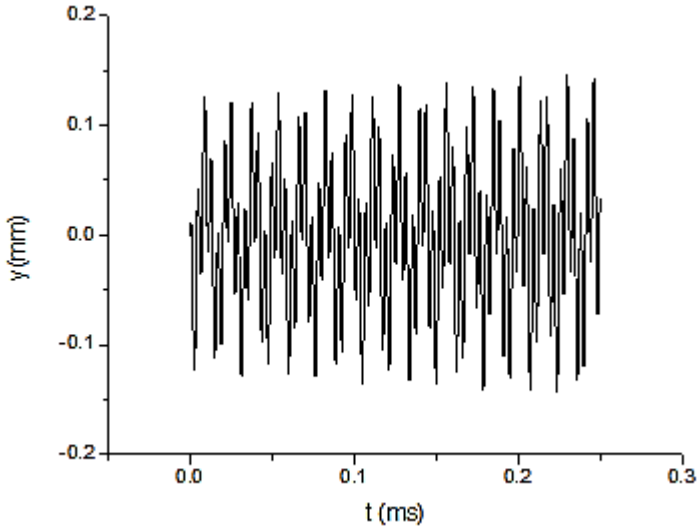
شکل ۲-۵-۱: شبیه‌سازی مسیر حرکت یون $^{40}Ca^{+}$ در تله‌ی یونی پنینگ به ازای میدان مغناطیسی ۱ تسلا و اختلاف پتانسیل ۱۶۰ ولت. الف) محدوده حرکتی در راستای محور x بر حسب زمان. ب) محدوده حرکتی در راستای محور y بر حسب زمان. ج) محدوده حرکتی در راستای محور z بر حسب زمان. د) حرکت در صفحه y-x. و) حرکت در صفحه z-y. ه) حرکت در صفحه z-x.

۲-۶ مسیر حرکت $^{197}Au^{+}$ در تله‌ی یونی پنینگ

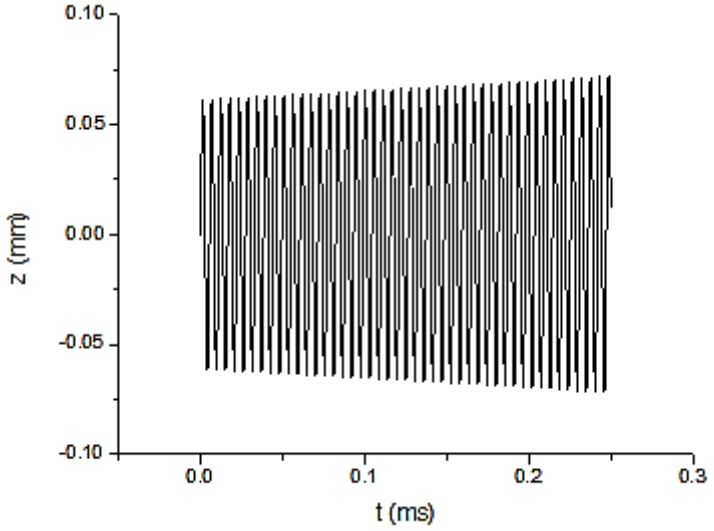
حرکت $^{197}Au^{+}$ با انرژی اولیه ۰/۰۱ الکترون ولت در تله‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر و تحت میدان مغناطیسی ۴ تسلا و اختلاف پتانسیل ۸۰۰ ولت با نرم‌افزار Origin رسم شده و در شکل ۲-۶-۱ نشان داده شده است.



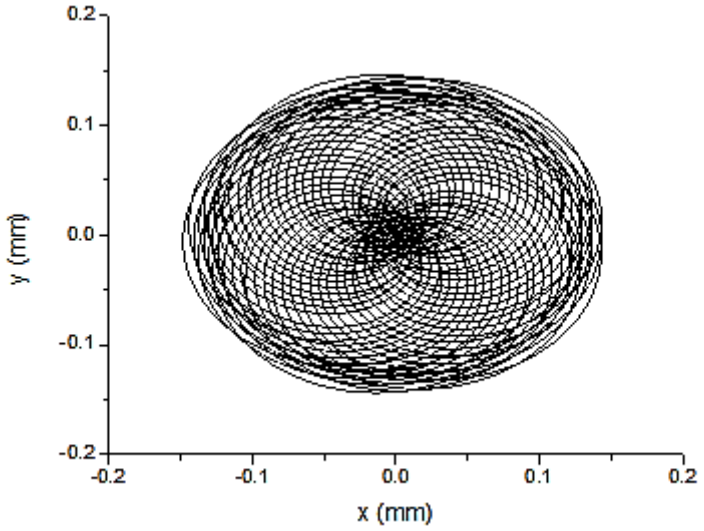
(الف)



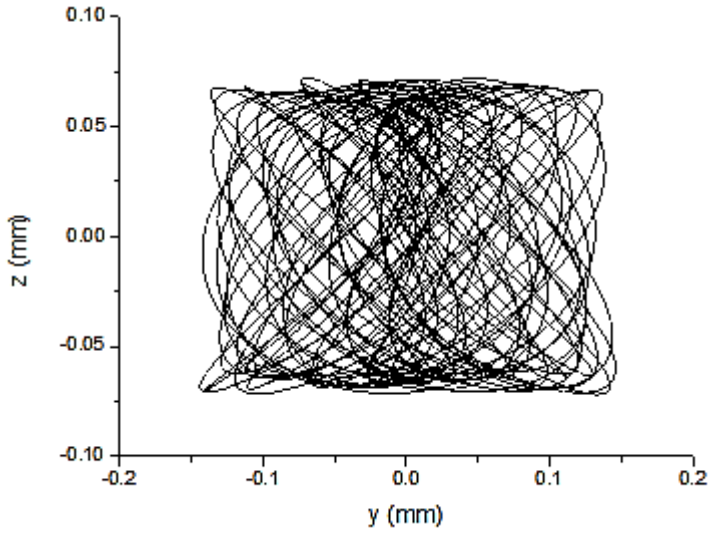
(ب)


0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
z (mm)
0.0
0.1
0.2
0.3
t (ms)

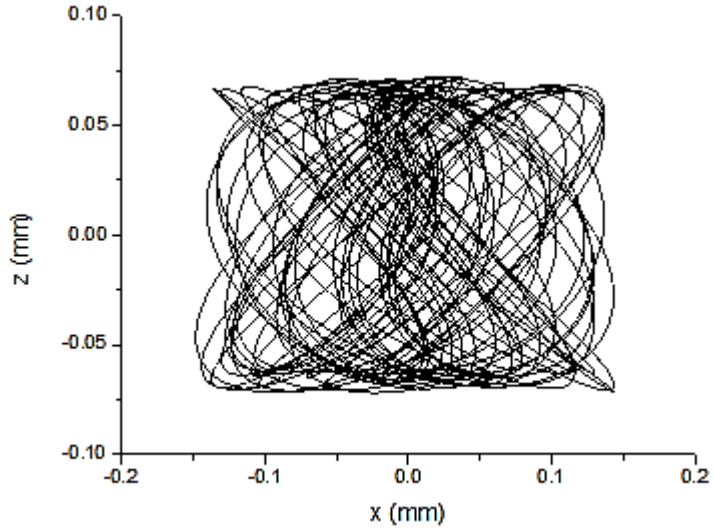
(ج)


0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
y (mm)
-0.2
-0.1
0.0
0.1
0.2
x (mm)

(د)



(و)



(ه)

شکل ۲-۶-۱: شبیه‌سازی مسیر حرکت یون $^{197}Au^{+}$ در تله‌ی یونی پنینگ به ازای میدان مغناطیسی ۴ تسلا و اختلاف پتانسیل ۸۰۰ ولت. الف) محدوده حرکتی در راستای محور x بر حسب زمان. ب) محدوده حرکتی در راستای محور y بر حسب زمان. ج) محدوده حرکتی در راستای محور z بر حسب زمان. د) حرکت در صفحه y-x. و) حرکت در صفحه z-y. ه) حرکت در صفحه z-x.

۲-۷ میدان‌های مناسب گیراندازی

برای تله‌ای به ابعاد $\rho_0 = 2cm$ و $z_0 = 2cm$ با استفاده از برنامه‌نویسی C++ بررسی شد که برای اختلاف پتانسیل در محدوده‌ی ۳۰ تا ۲۰۰ ولت و میدان مغناطیسی در محدوده‌ی ۱ تا ۱۰۰ گاوس، به ازای کدام اختلاف‌پتانسیل‌ها و میدان‌ها می‌توان ۳ ذره‌ی الکترون، یون کلسیم و یون طلا را گیراندازی کرد و زمان گیراندازی آن‌ها چه مقدار می‌باشد که نتایج آن در جدول ۲-۱ آورده شده است.

جدول ۲-۱: پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی مناسب گیراندازی در محدوده‌ی معین برای ۳ ذره.

ذرات به دام افتاده	انرژی اولیه (eV)	گام زمانی (s)	زمان گیراندازی (ms)	میدان مغناطیسی (G)	اختلاف پتانسیل (V)
الکترون	۰/۰۱	$۱۰^{-۱۰}$	$۱۰^{-۲}$	۷ ۷ ۷	۳۱ ۳۲ ۳۳
$^{40}_{20}Ca^{+}$	۰/۰۱	$۱۰^{-۱۰}$	$۱۰^{-۲}$	۱-۱۰۰ ۱-۸۱ ۱-۵۰ ۱-۲۲	۳۰-۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸
$^{197}_{79}AU^{+}$	۰/۰۱	$۱۰^{-۱۰}$	$۱۰^{-۲}$	۱-۱۰۰	۳۰-۲۰۰

همانطور که در جدول نشان داده شده، برای هر ۳ ذره، انرژی اولیه ۰/۰۱ الکترون ولت و گام زمانی $۱۰^{-۱۰}$ ثانیه در نظر گرفته شده است که در محدوده‌ی اختلاف پتانسیل و میدان مغناطیسی که تعیین کردیم، به ازای مقادیر مشخص در جدول، ذرات به مدت $۱۰^{-۲}$ میلی ثانیه در تله گیراندازی شدند.

فصل ۳ : بررسی کوانتومی ذره در تله‌ی یونی پینگ

۳-۱ مقدمه

در این فصل ضمن بررسی رفتار یک یون گیراندازی شده در تله‌ی پنینگ، حالات کوانتومی ایجاد شده در این سیستم و امکان استفاده از این حالات در محاسبات کوانتومی بررسی می‌شود. برای این کار به بررسی برهم‌کنش اتم-میدان در قالب دو نظریه‌ی کوانتومی و نیمه کلاسیکی می‌پردازیم تا با استفاده از آن یون گیراندازی شده در تله‌ی پنینگ را از دیدگاه کوانتومی بررسی کنیم و همچنین کاربرد آن در ساخت کیوبیت‌ها را که اساس کار کامپیوترهای کوانتومی هستند، توضیح دهیم.

دنیای کنونی فیزیک را می‌توان به دو بخش عمده تقسیم کرد؛ یکی فیزیک کلاسیک و دیگری فیزیک کوانتوم. منظور از فیزیک کلاسیک مجموعه‌ای از قوانین و روابط فیزیکی است که تقریباً تا اوایل قرن بیستم بدست آمده بود و قادر بودند بسیاری از پدیده های عالم را توصیف کنند، اما پدیده‌هایی وجود داشتند که یا توضیح آنها با این قوانین ممکن نبود و یا توجیه آن پدیده ها به صورت منحصر به فرد انجام می‌شد و امکان تعمیم آن به پدیده های دیگر وجود نداشت. آغاز قرن بیستم مصادف با آغاز دو واقعه ی مهم در فیزیک بود که دیدگاه بنیادی ما را درمورد ساختار جهان متحول کرد، یکی نظریه‌ی نسبیت انیشتین بود، و دیگری پدیدار شدن فیزیک کوانتومی.

نظریه‌ی نسبیت قوانین نیوتنی را به چالش می‌کشید و به تصحیح این قوانین در محدوده‌ی سرعت-های بالا می‌پرداخت؛ همچنین خمیدگی فضا-زمان در اثر وجود گرانش از دیگر مباحث جدیدی بود که با ظهور نظریه‌ی نسبیت خودنمایی کرد. فیزیک کوانتومی نیز پای علم را به دنیای میکروسکوپی بیشتر باز کرد و موجب درک بهتر از این دنیای پر رمز و راز شد. توصیف و توجیه بسیاری از پدیده‌ها و ساخت بسیاری از ابزارها مانند لیزرها بر اساس فیزیک کوانتومی صورت گرفته است. علاوه بر اینها، در دنیای کنونی که نام عصر اطلاعات را به خود گرفته است، رسیدن به انتقال سریع‌تر، گسترده‌تر و با امنیت بالاتر اطلاعات بسیار مهم است، که فیزیک کوانتومی با موضوعاتی همچون ساخت کامپیوترهای کوانتومی، در این عرصه وارد شده است [۱۹].

در سال ۱۹۸۲ ریچارد فاینمن ایده‌ی کامپیوترهای کوانتومی را مطرح کرد [۲۰]. کامپیوتری که از اثرات مکانیک کوانتومی بهره‌برداری کند. تا مدتی این ایده فقط از نظر تئوری جالب بود، تا این که پیتر شور در سال ۱۹۹۴ الگوریتمی کوانتومی، برای تجزیه عددها به عوامل اول اختراع کرد [۲۱]. روش شور قادر است در زمانی از مرتبه چند جمله ای، یک عدد را به عوامل اول تجزیه کند. در کامپیوترهای کلاسیک تجزیه به عوامل اول کاری سخت است و تجزیه اعداد بزرگ روی یک کامپیوتر کلاسیک، حتی یک ابر رایانه، می تواند چندین سال یا حتی چندین قرن طول بکشد، درحالی‌که روی یک کامپیوتر کوانتومی، می تواند در چند دقیقه انجام شود. این موضوع زمانی اهمیت بیشتری می‌یابد که بدانیم بسیاری از الگوریتم های رمزنگاری امروزی از جمله RSA، بر اساس محاسبه عوامل اول کار می کند. در صورت ساخت کامپیوترهای کوانتومی، این‌گونه رمزنگاری‌ها در مدت زمانی کوتاه شکسته خواهند شد.

هرگونه ذخیره‌سازی، انتقال و پردازش اطلاعات در کامپیوترهای کوانتومی نیاز به یک حامل فیزیکی دارد. نظریه‌ی نوین اطلاعات کوانتومی بر پایه‌ی این ایده استوار است که سیستم‌های منفرد کوانتومی مانند اتم‌ها، فوتون‌ها و یون‌ها را می‌توان به عنوان حامل‌های اولیه‌ی اطلاعات مورد استفاده قرار داد [۲۲]. امکان ذخیره‌سازی و دستکاری حالات منفرد کوانتومی، توسط روش‌های اپتیک کوانتومی، فیزیک حالت جامد و بدام‌اندازی یون‌ها و اتم‌ها وجود دارد. در نظریه‌ی کوانتومی هر واحد اطلاعات یک بیت کوانتومی (Quantum bit) یا به اختصار کیوبیت (Qubit) نامیده می شود. یک کیوبیت، یک سیستم دوحالته‌ی کوانتومی است. کنترل و دستکاری گذارهای بین حالت‌های یونی یون‌های بدام افتاده امکان ساخت کیوبیت را فراهم می‌آورد [۲۳]. کیوبیت‌های ایجاد شده از یک یون بدام افتاده می توانند در آماده‌سازی، انتقال و پردازش اطلاعات کوانتومی استفاده شوند [۲۴].

۳-۲ کیوبیت

بیت به عنوان مفهومی بنیادی در محاسبات و تئوری اطلاعات کلاسیکی شناخته شده است که حاوی اطلاعات دیجیتالی صفر و یک می‌باشد. با کد نمودن اطلاعات به زبان صفر و یک‌ها می‌توان زنجیره‌ای از صفر و یک جهت انتقال و پردازش اطلاعات به‌دست آورد. یک بیت کوانتومی را کیوبیت می‌نامیم.

کیوبیت واحد بنیادی در سنجش اطلاعات کوانتومی است که معادل بیت در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی محسوب می‌شود. یک بیت کلاسیک تنها می تواند در یکی از ۲ حالت ممکن، صفر یا یک، باشد و به طور کلی n بیت کلاسیک می تواند در یکی از ۲^n حالت ممکن باشد، در حالی که کیوبیت می‌تواند توسط یک بردار واحد در فضای برداری دو بعدی مختلط اندازه‌گیری شود و مقدار صفر یا یک و یا ترکیبی خطی از این دو را همزمان اختیار کند.

بیت‌های کوانتومی یا کیوبیت‌ها، ترانزیستورهایی‌اند که رایانه‌های امروزی را تشکیل داده‌اند. وجه مشترک تمام کیوبیت‌ها آن است که می‌توانند از وضعیتی به وضعیت دیگر سوئیچ شوند، تغییر وضعیتی که می‌توان از آن برای نشان دادن دوتایی (صفر و یک) اطلاعات استفاده نمود.

کیوبیت‌ها دارای یکی از چهار نوع ذره کوانتومی فوتون، الکترون، اتم و یون می‌باشند. فوتون‌ها با یکدیگر برهم‌کنش خوبی ندارند، اما می‌توانند به آسانی از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا شوند و این خاصیت آنها را به گزینه‌ای مناسب جهت انتقال اطلاعات کوانتومی تبدیل می‌کند؛ الکترون‌ها، اتم‌ها و یون‌ها بر خلاف فوتون‌ها، به آسانی با هم برهم‌کنش دارند، اما جابه‌جایی خوبی ندارند و به همین دلیل برای پردازش و ذخیره اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب می‌باشند.

الکترون‌ها:

الکترون‌ها دارای دو جهت اسپین بالا و پایین، همانند دوقطب یک آهنربا، می‌باشند و می‌توان با استفاده از میدان‌های الکتریکی، مغناطیسی یا نوری، آنها را در یکی از این دو وضعیت قرار داد. همچنین می‌توان از موقعیت الکترون در یک نقطه کوانتومی برای نمایش یک عدد دوتایی (۰، ۱) استفاده نمود.

اتم‌ها و یون‌ها:

اتم‌ها و یون‌ها از الکترون‌ها پیچیده‌تر می‌باشد و به روش‌های متعددی می‌توان از آنها برای نمایش اطلاعات استفاده کرد. یون‌ها در واقع اتم‌های باردار هستند که بار آنها ناشی از دریافت کردن و یا از دست دادن الکترون می‌باشد. اتم‌ها نیز همانند الکترون‌ها دارای جهت اسپینی هستند که می‌توان از آن برای نمایش یک رقم دوتایی در یک کیوبیت استفاده نمود. همچنین از موقعیت الکترون لایه خارجی اتم در سطح انرژی پایین‌تر یا بالاتر هم می‌توان برای نمایش صفر و یک‌ها استفاده نمود [۲۵-۲۷].

وقتی که ما بتوانیم فرآیندی خاص را پیدا کنیم که شامل دو مجموعه‌ی ممکن باشد، میتوانیم ۰ و ۱ ها را بسته به آن ویژگی خاص، تعریف کنیم. از انواع سیستم‌های کیوبیتی می‌توان دام‌های یونی، نقاط کوانتومی، ناخالص‌های نیمه‌رسانا، مدارهای ابررسانا و دام‌های نوری را نام برد.

دام‌های یونی یکی از سیستم‌های کیوبیتی می‌باشد که برای نگه داشتن یون‌ها از میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی استفاده می‌کنند. فناوری دام یونی به خوبی جا افتاده و می‌توان با استفاده از آن در سطح انبوه به تولید کیوبیت‌ها پرداخت.

در زیر کیوبیت‌ها و روابط کوانتومی حاکم بر آن را شرح می‌دهیم.

یک بیت کوانتومی یا کیوبیت، معادل با حالت کوانتومی یک سیستم فیزیکی است که همانطور که گفتیم از دو حالت پایه تشکیل شده است. در حالت کلاسیک می توان آن را معادل با یک سیستم فیزیکی فرض کرد که از دو حالت متفاوت مانند $\{0,1\}$ تشکیل شده است. در محاسبات کوانتومی نمادگذاری دیراک مورد استفاده قرار می گیرد از این رو حالت‌های پایه سیستم کوانتومی مورد نظر به صورت $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ نمایش داده می‌شود. هر یک از حالت‌های پایه معادل با یک حالت کلاسیک درستی و نادرستی است که می تواند با استفاده از خصوصیت های فیزیک کوانتومی مانند اسپین هسته و یا حالت فوتون نمایش داده شود. در اینجا جزئیات فیزیکی یک کیوبیت مد نظر نیست اما بر اساس مبانی کوانتومی یک سیستم کوانتومی نه تنها می تواند در حالت‌های پایه ای خود باشد بلکه می تواند در یک

ترکیب خطی از حالت های پایه نیز قرار داشته باشد. بر این اساس در حالت کلی یک کیوبیت با عبارت کلی زیر توصیف می‌شود:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad (۱-۲-۳)$$

که اعداد α و β اعداد مختلط دلخواه هستند. از مکانیکی کوانتومی مقدماتی می‌دانیم، اگر حالت کوانتومی بالا را اندازه‌گیری نماییم، نتیجه‌ی حاصل با احتمال $|\alpha|^2$ حالت $|0\rangle$ و با احتمال $|\beta|^2$ حالت $|1\rangle$ می‌باشد. با توجه به بقای احتمال تنها شرط موجود در روی ضرایب α و β به این صورت است که:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad (۲-۲-۳)$$

توانایی اختیار کردن ترکیب خطی صفر و یک در کیوبیت‌ها پایه‌ی توانایی محاسبات کوانتومی است. کیوبیت‌ها در دنیای واقعی و آزمایشگاه توسط سیستم‌های فیزیکی مختلف پیاده‌سازی می‌شوند. می‌دانیم که سیستم اسپینی $s = \frac{1}{2}$ دارای فضای هیلبرت دوبعدی است و در اکثر مواقع به عنوان یک کیوبیت به کار می‌رود، به‌طوری که گاهی اوقات این دو به جای یکدیگر استفاده می‌شوند. اما اسپین $\frac{1}{2}$ تنها سیستمی نیست که می‌تواند مفهوم کیوبیت را داشته باشد. برخی از سطوح انرژی یون‌های به دام افتاده در میدان‌های الکتریکی به عنوان صفر و یک‌های کوانتومی استفاده کرده‌اند.

در حالت اتمی که کیوبیت‌ها به‌وسیله‌ی حالت الکترون‌ها در اتم توصیف می‌شوند، اتم می‌تواند در حالت پایه و یا برانگیخته باشد که حالت پایه را با $|0\rangle$ و حالت برانگیخته آن را با $|1\rangle$ نشان می‌دهیم. با تابش نور توسط لیزر می‌توانیم اتم را از حالت پایه $|0\rangle$ به حالت برانگیخته $|1\rangle$ منتقل نماییم و برعکس [۲۸و۲۹]. در بخش‌های بعدی برهم‌کنش حاصل از تاباندن نور لیزر به اتم را از دو دیدگاه نیمه‌کلاسیکی و کوانتومی بررسی می‌کنیم که در آن‌ها اتم به عنوان یک سیستم دوترازه‌ی کوانتومی در نظر گرفته شده و میدان در تئوری نیمه‌کلاسیکی، کلاسیکی و در تئوری کوانتومی، کوانتومی می‌باشد.

۳-۳ تئوری نیمه‌کلاسیکی برهم‌کنش اتم-میدان

یکی از ساده‌ترین مسائل که شامل برهم‌کنش اتم-میدان است، جفت‌شدگی یک اتم دوترازه با یک میدان الکترومغناطیسی تک مد است. توصیف اتم دوترازه در صورتی صحیح است که، دو تراز اتمی در حالت تشدید یا نزدیک به تشدید با میدان محرک باشند، در حالی‌که تمام سایر ترازها بسیار نامیزان هستند. تحت تقریب واقع گرایانه‌ی معین، این مسئله می‌تواند به یک شکلی که دقیقا حل شده، ساده شود.

در این بخش ما یک تئوری نیمه‌کلاسیکی از برهم‌کنش اتم دوترازه با یک میدان تک مد معرفی می‌کنیم که در آن اتم به عنوان یک سیستم دوترازه‌ی کوانتومی و میدان کلاسیکی رفتار می‌کند.

یک اتم دوترازه شبیه به یک سیستم اسپین ۱/۲ با دو حالت محتمل است. در تقریب دوقطبی، زمانی که طول موج میدان بزرگتر از اندازه‌ی اتمی است، برهم‌کنش اتم-میدان مسئله از لحاظ ریاضیاتی شبیه به یک برهم‌کنش ذره‌ی اسپین ۱/۲ با یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان است و مانند یک سیستم با اسپین ۱/۲ که در اثر برهم‌کنش با میدان، دچار نوسان‌های به اصطلاح رابی[1] بین حالت‌های اسپین بالا و اسپین پایین می‌شود، اتم دوترازه هم در برهم‌کنش با میدان مغناطیسی تحریک کننده، دچار نوسان‌های رابی می‌گردد که در صورت واپاشی ترازهای اتمی، این نوسان‌ها میرا خواهند بود.

درست همانطور که سیستم اسپین ۱/۲ مورد بررسی نوسانات رابی، بین حالت‌های اسپین بالا و اسپین پایین، تحت اثر یک میدان مغناطیسی نوسانی، قرار می‌گیرد، اتم دوترازه نیز مورد بررسی نوسانات رابی اپتیکی، تحت اثر میدان مغناطیسی محرک قرار می‌گیرد [۳۰].

۳-۳-۱ هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان

هامیلتونی برهم‌کنش یک الکترون با بار e و جرم m با یک میدان الکترومغناطیسی خارجی به شکل

[1]Rabi

زیر است [۳۱]:

$$H = \frac{1}{2m}[p - eA(r,t)]^2 + eU(r,t) + V(r) \qquad (۱-۳-۳)$$

که در آن p عملگر تکانه و A پتانسیل برداری میدان خارجی و U پتانسیل اسکالر میدان خارجی و V پتانسیل الکتروستاتیکی (پتانسیل بستگی اتمی) می‌باشد. قبل از اینکه هامیلتونی را به شکل مناسب توصیف برهم‌کنش اتم دوترازی با میدان تابشی ساده کنیم، ابتدا آن را از نقطه نظر پیمانه ناوردا بررسی می‌نماییم.

معادله شرودینگر برای توصیف حرکت الکترون آزاد نیز به شکل زیر است:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (۲-۳-۳)$$

که در آن تساوی زیر بین چگالی احتمال یافتن الکترون در مکان r و زمان t با تابع موج دلخواه آن برقرار است:

$$p(r,t) = |\psi(r,t)|^2 \qquad (۳-۳-۳)$$

$$\psi_1(r,t) = \psi(r,t)\exp(i\chi) \qquad (۴-۳-۳)$$

در تبدیل پیمانه ای بالا با انتخاب هر χ، چگالی احتمال همچنان بدون تغییر باقی خواهد ماند و تفاوت ψ و ψ_1 در بالا فقط در یک عامل فاز ثابت است و حالت فیزیکی یکسانی را نشان می‌دهند ولی در معادله‌ی زیر متفاوت خواهند بود.

$$\psi(r,t) \rightarrow \psi(r,t)e^{i\chi(r,t)} \qquad (۵-۳-۳)$$

زمانی‌که χ تابعی از مکان و زمان باشد، چگالی احتمال همچنان مانند قبل بی تاثیر است ولی معادله‌ی شرودینگر تغییر می‌کند. بدین ترتیب برای برآوردن ناوردایی پیمانه موضعی معادلعه‌ی شرودینگر باید اصلاح شود. برای این کار از تبدیلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$A(r,t) \to A(r,t) + \frac{\hbar}{e}\nabla\chi(r,t),$$
$$U(r,t) \to U(r,t) - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial\chi}{\partial t}(r,t) \qquad (۶-۳-۳)$$

و با قرار دادن تبدیلات پیمانه‌ای فوق در معادله‌ی (۳-۳-۱) و ساده‌سازی آن معادله شرودینگر را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}[\nabla - i\frac{e}{\hbar}A(r,t)]^2 + eU(r,t)\right\}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (۷-۳-۳)$$

تحت تبدیلات پیمانه‌ای بالا جواب معادله‌ی شرودینگر تغییری نمی‌کند که در آن A و U وابسته به پیمانه و E و B مستقل از پیمانه‌اند. هامیلتونی جفت کننده برابر عبارت زیر است:

$$H\psi = i\hbar\partial\psi/\partial t \qquad (۸-۳-۳)$$

میدان الکتریکی و مغناطیسی به‌ترتیب در زیر آورده شده:

$$E = -\nabla U - \frac{\partial A}{\partial t},$$
$$B = \nabla \times A \qquad (۹-۳-۳)$$

معادله شرودینگر (۳-۳-۷)، اندرکنش یک الکترون با میدان الکترومغناطیس مشخص را نشان می‌دهد که در آن، الکترون‌ها توسط تابع موج ψ و میدان توسط پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای توصیف شده‌اند.

اکنون مسئله‌ی یک الکترون مقید به یک نیروی مرکزی که توسط پتانسیل در r_0 قرار داده شده را در تقریب دوقطبی و برای بدست آوردن هامیلتونی r.E بررسی می‌کنیم. هامیلتونی می‌تواند توسط تقریب دوقطبی ساده شود. فرض می‌شود که کل اتم داخل یک موج الکترومغناطیسی تخت که توسط پتانسیل برداری توصیف شده قرار داده شده است. پتانسیل برداری در تقریب دوقطبی به شکل زیر است:

$$A(r_0+r,t)=A(t)\exp[ik.(r_0+r)]$$
$$=A(t)\exp(ik.r_0)(1+ik.r+...)] \qquad (۱۰-۳-۳)$$
$$\simeq A(t)\exp(ik.r_0).$$

معادله‌ی شرودینگر برای تقریب دوقطبی و با قرار دادن $A(r,t)$ به جای $A(r_0,t)$ در معادله‌ی شرودینگر اصلاح شده (۳-۳-۷) و اضافه کردن پتانسیل بستگی الکترون و با شرط پیمانه‌ی تابش به شکل زیر می‌شود:

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}[\nabla-i\frac{e}{\hbar}A(r_0,t)]^2+V(r)\right\}\psi(r,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} \qquad (۱۱-۳-۳)$$

که شرط پیمانه‌ی تابش به صورت زیر است:

$$U(r,t)=0,$$
$$\nabla.A=0. \qquad (۱۲-۳-۳)$$

با تعریف یک تابع موج جدید در معادله‌ی شرودینگر بالا (۳-۳-۱۱) داریم:

$$\psi(r,t)=\exp[i\frac{e}{\hbar}A(r_0,t).r]\phi(r,t). \qquad (۱۳-۳-۳)$$

با قرار دادن معادله‌ی (۳-۳-۱۳) در معادله‌ی (۳-۳-۱۱) داریم:

$$i\hbar\left\{(i\frac{e}{\hbar}\dot{A}.r)\phi(r,t)\exp(i\frac{e}{\hbar}A.r)+\dot{\phi}(r,t)\exp(i\frac{e}{\hbar}A.r)\right\}$$
$$=\left\{\frac{P^2}{2m}-\frac{e^2}{2m}A^2+V(r)\right\}\left\{\phi(r,t)\exp(i\frac{e}{\hbar}A.r)\right\} \qquad (۱۴-۳-۳)$$

A^2 کوچک و قابل حذف است، در نتیجه داریم:

$$i\hbar[(i\frac{e}{\hbar}\dot{A}.r)\phi(r,t)+\dot{\phi}(r,t)]\exp(i\frac{e}{\hbar}A.r)$$
$$=\exp(i\frac{e}{\hbar}A.r)[\frac{P^2}{2m}+V(r)]\phi(r,t) \qquad (۱۵-۳-۳)$$

با ساده کردن معادله‌ی فوق و حذف رابطه‌ی نمایی از طرفین داریم:

$$i\hbar(i\frac{e}{\hbar}\dot{A}.r)\phi(r,t)+i\hbar\dot{\phi}(r,t)=[\frac{P^2}{2m}+V(r)]\phi(r,t) \qquad (۱۶-۳-۳)$$

از طرفی:

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + V(r) \qquad (۱۷-۳-۳)$$

که H_0 هامیلتونی انرژی آزاد الکترون است.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۳-۳-۱۷)، رابطه‌ی (۳-۳-۱۶) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$i\hbar(i\frac{e}{\hbar}\dot{A}.r)\phi(r,t) + i\hbar\dot{\phi}(r,t) = H_0\phi(r,t) \qquad (۱۸-۳-۳)$$

از طرفی از رابطه‌ی (۳-۳-۹) برای میدان الکتریکی و در نظر گرفتن شرط پیمانه‌ی تابش $U(r,t) = 0$ ، میدان الکتریکی بصورت زیر می‌شود:

$$E = -\dot{A} \qquad (۱۹-۳-۳)$$

بنابراین با قرار دادن E در رابطه‌ی (۳-۳-۱۸) و با ساده‌سازی آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &i\hbar\dot{\phi}(r,t) = [H_0 - er.E(r_0,t)]\phi(r,t), \\ &H_0 = \frac{P^2}{2m} + V(r) \end{aligned} \qquad (۲۰-۳-۳)$$

از آنجایی که رابطه‌ی زیر برای هامیلتونی برقرار است، رابطه‌ی (۳-۳-۲۰) را بر اساس آن بازنویسی می‌کنیم:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = H\phi \qquad (۲۱-۳-۳)$$

$$H\phi = [H_0 - er.E(r_0,t)]\phi(r,t) \qquad (۲۲-۳-۳)$$

بنابراین هامیلتونی کل به شکل زیر می‌شود:

$$H = H_0 + H_1, \qquad (۲۳-۳-۳)$$

$$H_1 = -er.E(r_0,t) \qquad (۲۴-۳-۳)$$

که در آن $E = -\dot{A}$ است.

اکنون می‌خواهیم هامیلتونی p.A به جای هامیلتونی r.E را بدست آوریم یعنی به دنبال هامیلتونی اتم-میدان برحسب تکانه کانونی p و پتانسیل برداری A به‌جای جمله‌ی H_1 در هامیلتونی بالا هستیم.

ما دوباره شرط پیمانه‌ی تابش را در نظر می‌گیریم، نهایتا هامیلتونی (۳-۳-۱) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$H' = H_0 + H_2, \qquad (۲۵-۳-۳)$$

$$H_2 = -\frac{e}{m} p.A(r_0, t) + \frac{e^2}{2m} A^2(r_0, t) \qquad (۲۶-۳-۳)$$

که H_0 در رابطه‌ی (۳-۳-۱۷) داده شده و H_2 از تقریب دوقطبی و باز کردن رابطه‌ی (۳-۳-۱) برابر زیر است:

$$H_2 = -\frac{e}{m} p.A(r_0, t) + \frac{e^2}{2m} A^2(r_0, t) \qquad (۲۷-۳-۳)$$

و بنابراین معادله‌ی شرودینگر بصورت زیر می‌شود:

$$[H_0 - \frac{e}{m} p.A(r_0, t) + \frac{e^2}{2m} A^2(r_0, t)]\psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) \qquad (۲۸-۳-۳)$$

و معادله‌ی حرکت و هامیلتونی با در نظر نگرفتن A^2 به این صورت است:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = [H_0 - \frac{e}{m} p.A(r_0, t)]\psi(r, t) \qquad (۲۹-۳-۳)$$

و بنابراین هامیلتونی به شکل زیر می‌شود:

$$H' = H_0 - \frac{e}{m} p.A(r_0, t) \qquad (۳۰-۳-۳)$$

و معادله‌ی (۳-۳-۲۷) با حذف A^2 می‌شود:

$$H_2 = \frac{e}{m} p.A(r_0, t) \qquad (۳۱-۳-۳)$$

ما در زیر برهم‌کنش یک اتم در مکان $r_0 = 0$ را با میدان موج تخت تک‌رنگ پلاریزه‌ی خطی را بررسی می‌کنیم.

میدان الکتریکی به شکل زیر می‌شود:

$$E(0, t) = \varepsilon \cos(\nu t) \qquad (۳۲-۳-۳)$$

که در آن ε دامنه و ν فرکانس می‌باشد.

و پتانسیل برداری پیمانه‌ی تابش متناظر:

$$A(0,t) = -\frac{1}{\nu}\varepsilon \sin(\nu t) \qquad (۳۳-۳-۳)$$

اکنون می‌خواهیم دامنه‌ی وابسته به زمان را به همراه H_1 و H_2 بررسی کنیم. از جای‌گذاری A و E در H_1 و H_2 و حذف بخش وابستگی زمانی داریم:

$$W_1 = -er.\varepsilon, \qquad (۳۴-۳-۳)$$

$$W_2 = \frac{e}{m\nu} p.\varepsilon \qquad (۳۵-۳-۳)$$

می‌خواهیم ارتباط بین W_1 و W_2 را پیدا کنیم:

$$p = mv = -m(\frac{i}{\hbar})[r, H_0] \qquad (۳۶-۳-۳)$$

سپس عناصر ماتریسی W_1 و W_2 را با محاسبه بین ویژه‌حالت اولیه‌ی $|i\rangle$ برای H_0 و یک ویژه‌حالت نهایی $|f\rangle$ پیدا می‌کنیم، بطوریکه [۳۰]:

$$\begin{aligned} H_0|i\rangle &= \hbar\omega_i|i\rangle, \\ H_0|f\rangle &= \hbar\omega_f|f\rangle \end{aligned} \qquad (۳۷-۳-۳)$$

ابتدا $\langle f|p|i\rangle$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle f|p|i\rangle &= \langle f|-\frac{mi}{\hbar}[r, H_0]|i\rangle = -m\frac{i}{\hbar}\langle f|[r, H_0]|i\rangle \\ &= -m\frac{i}{\hbar}[\langle f|rH_0|i\rangle - \langle f|H_0 r|i\rangle] = mi(\omega_f - \omega_i)\langle f|r|i\rangle \\ &= mi\omega\langle f|r|i\rangle \end{aligned} \qquad (۳۸-۳-۳)$$

که در آن فرکانس گذار به شکل زیر است:

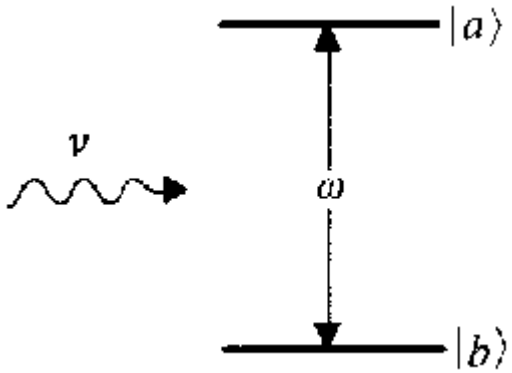
$$\omega = \omega_f - \omega_i \qquad (۳۹-۳-۳)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۳-۳-۳۸)، نسبت زیر برای W_1 و W_2 بدست می‌آید:

$$\left|\frac{\langle f|W_2|i\rangle}{\langle f|W_1|i\rangle}\right| = \left|-\frac{(e/m\nu)\langle f|p|i\rangle.\varepsilon}{e\langle f|r|i\rangle.\varepsilon}\right| = \left|-\frac{(e/m\nu)mi\omega\langle f|r|i\rangle.\varepsilon}{e\langle f|r|i\rangle.\varepsilon}\right| = \frac{\omega}{\nu} \qquad (۴۰-۳-۳)$$

۳-۳-۲ برهم‌کنش یک اتم دوترازه با میدان تک مد

برهم‌کنش یک میدان تابشی حامل فرکانس با یک اتم دوترازه را به صورت شکل (۳-۳-۱) در نظر می‌گیریم. یعنی $|a\rangle$ و $|b\rangle$ حالت‌های تراز پایین و بالای اتم هستند. به عبارتی آن‌ها ویژه‌حالت‌های هامیلتونی H_0 با ویژه مقادیر $\hbar\omega_a$ و $\hbar\omega_b$ هستند [۳۰].



شکل ۳-۳-۱: برهم‌کنش یک اتم دوترازه با یک میدان تک مد [۳۰].

تابع موج اتم دوترازه که در آن C_a و C_b به ترتیب دامنه‌ی احتمال یافتن اتم در حالت‌های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ است، به شکل زیر می‌باشد:

$$|\psi(t)\rangle = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle \qquad (۴۱-۳-۳)$$

از آنجا که ذره می‌تواند در یکی از دو حالت کوانتومی یافت شود، بردار حالت یک برهم‌نهی از حالت-های کوانتومی خواهد بود. پس حتی هنگامی که نیروهای خارجی حضور دارند نیز تابع موج اتم دوترازه

باید بصورت یک برهم‌نهی باشد.

معادله‌ی شرودینگر متناظر:

$$|\dot{\psi}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle \qquad (۴۲-۳-۳)$$

که در آن $H = H_0 + H_1$ است.

از آنجایی که $|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = 1$، بنابراین H_0 را بر اساس آن می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} H_0 &= (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)H_0(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) \\ &= \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| \end{aligned} \qquad (۴۳-۳-۳)$$

که در آن روابط (۳-۳-۳۷) برقرار است.

و به همین ترتیب بخش H_1 هامیلتونی که نشان دهنده‌ی برهم‌کنش اتم با میدان تابشی است بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} H_1 &= -e\chi E(t) \\ &= -e(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)\chi(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)E(z,t) \\ &= -(\Lambda_{ab}|a\rangle\langle b| + \Lambda_{ab}|b\rangle\langle a|)E(t) \end{aligned} \qquad (۴۴-۳-۳)$$

که در آن Λ_{ab} عنصر ماتریس گشتاور دوقطبی الکتریکی است بطوریکه:

$$\Lambda_{ab} = \Lambda_{ba}^* = e\langle a|\chi|b\rangle \qquad (۴۵-۳-۳)$$

میدان در تقریب دوقطبی بر اساس معادله‌ی (۳-۳-۳۲) با این فرض که در راستای محور x و قطبیده‌ی خطی باشد، به صورت $E(0,t) = \varepsilon\cos\nu t$ است.

با قرار دادن ψ از معادله‌ی (۳-۳-۴۱) در معادله‌ی شرودینگر (۳-۳-۴۲) و اثر دادن H، داریم:

$$\begin{aligned} &\dot{C}_a|a\rangle + \dot{C}_b|b\rangle = -\frac{i}{\hbar}H_0(C_a|a\rangle + C_b|b\rangle) - \frac{i}{\hbar}H_1(C_a|a\rangle + C_b|b\rangle) \\ &\rightarrow \dot{C}_a|a\rangle + \dot{C}_b|b\rangle = -iC_a\omega_a|a\rangle - iC_b\omega_b|b\rangle + \frac{i}{\hbar}C_bE\Lambda_{ab}|a\rangle + \frac{i}{\hbar}C_aE\Lambda_{ba}|b\rangle \end{aligned} \qquad (۴۶-۳-۳)$$

از طرفی فرکانس رابی Ω_R بصورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$\Omega_R = \frac{|\Lambda_{ba}|}{\hbar}\varepsilon \qquad (۴۷-۳-۳)$$

بطوریکه:

$$\Lambda_{ba} = |\Lambda_{ba}|\exp(i\phi) \qquad (۴۸-۳-۳)$$

و ϕ فاز عنصر ماتریس دوقطبی است. پس با توجه به روابط (۳-۳-۴۷) و (۳-۳-۴۸) داریم:

$$\begin{aligned} |\Lambda_{ba}| &= \frac{\Omega_R}{\varepsilon}\hbar, \\ \Lambda_{ba} &= |\Lambda_{ba}|\exp(i\phi) = \frac{\Omega_R}{\varepsilon}\hbar\exp(i\phi) \end{aligned} \qquad (۴۹-۳-۳)$$

بنابراین رابطه‌ی (۳-۳-۴۶) را می‌توانیم با استفاده از روابط (۳-۳-۳۲) و (۳-۳-۴۹) و (۳-۳-۴۵) بصورت زیر ساده کنیم:

(۵۰-۳-۳)

$$\dot{C}_a|a\rangle + \dot{C}_b|b\rangle = -iC_a\omega_a|a\rangle - iC_b\omega_b|b\rangle + i\Omega_R C_b(\cos\nu t)e^{-i\phi}|a\rangle + i\Omega_R C_a(\cos\nu t)e^{i\phi}|b\rangle$$

بنابراین با مقایسه‌ی ضرایب $|a\rangle$ و $|b\rangle$ از طرفین معادله‌ی بالا، معادلات حرکت دامنه‌های C_a و C_b بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{C}_a &= -i\omega_a C_a + i\Omega_R(\cos\nu t)e^{-i\phi}C_b, \\ \dot{C}_b &= -i\omega_b C_b + i\Omega_R(\cos\nu t)e^{i\phi}C_a \end{aligned} \qquad (۵۱-۳-۳)$$

به منظور حل C_a و C_b در معادلات فوق، آن‌ها را برای دامنه‌های زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} c_a &= C_a e^{i\omega_a t}, \\ c_b &= C_b e^{i\omega_b t}. \end{aligned} \qquad (۵۲-۳-۳)$$

با مشتق‌گیری از معادلات بالا و جای‌گذاری $\dot{C}_a$ و $\dot{C}_b$ از معادلات حرکت (۳-۳-۵۱) بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
\dot{c}_a &= \dot{C}_a e^{i\omega_a t} + iC_a e^{i\omega_a t}\omega_a \\
&= -iC_a e^{i\omega_a t}\omega_a + i\Omega_R e^{-i\phi}(\cos \nu t)e^{i\omega_a t}C_b + iC_a e^{i\omega_a t}\omega_a \\
&= \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2}\frac{c_b}{e^{i\omega_b t}}e^{i\omega_a t}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}) \\
&= \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2}c_b(e^{i(\omega_a-\omega_b+\nu)t} + e^{i(\omega_a-\omega_b-\nu)t}) \\
&= \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2}c_b(e^{i(\omega+\nu)t} + e^{i(\omega-\nu)t})
\end{aligned}
\qquad (۵۳-۳-۳)
$$

که در آن $\omega = \omega_a - \omega_b$ بوده و ν فرکانس میدان و ω فرکانس گذار اتمی می‌باشد. جمله‌ی نمایی $e^{i(\omega+\nu)t}$ با توجه به تقریب موج چرخان حذف (برابر صفر) می‌شود. از آنجا که برای جفت شدن دو تراز با یکدیگر و برهم‌کنش اتم با میدان در یک سیستم اتمی، نباید نوسانات اتم میدان خیلی سریع باشد، عبارت نمایی دارای مقدار بزرگ را حذف می‌کنیم که تحت عنوان تقریب موج چرخان نامیده می‌شود.

بنابراین $\dot{c}_a$ تحت تقریب موج چرخان بصورت زیر می‌شود:

$$
\dot{c}_a = \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2}c_b e^{i(\omega-\nu)t} \qquad (۵۴-۳-۳)
$$

به همین روش، $\dot{c}_b$ نیز بدست می‌آید:

$$
\dot{c}_b = \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2}c_a e^{i(\omega-\nu)t} \qquad (۵۵-۳-۳)
$$

جواب‌های حدسی معادلات بالا به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
c_a(t) &= (a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2})e^{i\Delta t/2}, \\
c_b(t) &= (b_1 e^{i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2})e^{-i\Delta t/2}.
\end{aligned}
\qquad (۵۶-۳-۳)
$$

که در آن نامیزانی یعنی اختلاف فرکانس اتمی با فرکانس میدان بصورت زیر است:

$$
\Delta = \omega - \nu \qquad (۵۷-۳-۳)
$$

و همچنین:

$$
\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + (\omega-\nu)^2} \qquad (۵۸-۳-۳)
$$

و a_1، a_2، b_1 و b_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند که از شرایط اولیه تعیین می‌شوند. برای این

کار ابتدا $\dot{c}_a$ را از رابطه‌ی (۳-۳-۵۶) بدست می‌آوریم:

(۳-۳-۵۹)

$$\dot{c}_a(t) = e^{i\Delta t/2}[a_1 e^{i\Omega t/2}(i\Omega/2) + a_2 e^{-i\Omega t/2}(-i\Omega/2)] + (a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2})e^{i\Delta t/2}(i\Delta/2)$$

سپس رابطه‌ی (۳-۳-۵۹) در بالا را برای لحظه‌ی t=0 می‌نویسیم:

$$\dot{c}_a(0) = a_1(i\Omega/2) + a_2(-i\Omega/2) + (a_1 + a_2)(i\Delta/2) \qquad (۳-۳-۶۰)$$

و همچنین c_a را از رابطه‌ی (۳-۳-۵۶) برای t=0 می‌نویسیم:

$$c_a(0) = a_1 + a_2 \qquad (۳-۳-۶۱)$$

از طرفی رابطه‌ی (۳-۳-۵۴) برای t=0 بصورت زیر می‌شود:

$$\dot{c}_a = \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2} c_b(0) \qquad (۳-۳-۶۲)$$

که $c_b(0)$ از رابطه‌ی (۳-۳-۵۶) در لحظه‌ی t=0 می‌شود:

$$c_b(0) = b_1 + b_2 \qquad (۳-۳-۶۳)$$

از برابری روابط (۳-۳-۶۰) و (۳-۳-۶۲) داریم:

$$\begin{aligned} &a_1(i\Omega/2) + a_2(-i\Omega/2) + (a_1 + a_2)(i\Delta/2) = \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2} c_b(0) \\ &\rightarrow i\Omega/2(a_1 - a_2) + (a_1 + a_2)(i\Delta/2) = \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2} c_b(0) \end{aligned} \qquad (۳-۳-۶۴)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۳-۶۱)، رابطه‌ی بالا را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &(i\Omega/2)(2a_1 - c_a(0)) + (c_a(0))(i\Delta/2) = \frac{i\Omega_R e^{-i\phi}}{2} c_b(0) \\ &\rightarrow a_1 = (\Omega_R/2\Omega)e^{-i\phi}c_b(0) + \frac{1}{2}c_a(0) - (\Delta/2\Omega)c_a(0) \\ &= \frac{1}{2\Omega}[(\Omega - \Delta)c_a(0) + \Omega_R e^{-i\phi}c_b(0)] \end{aligned} \qquad (۳-۳-۶۵)$$

همانطور که دیدیم a_1 بدست آمد، با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳-۶۱) می‌توان a_2 را نیز بدست آورد وهمچنین با همین روش سایر ضرایب b_1 و b_2 نیز بدست می‌آید:

$$a_1 = \frac{1}{2\Omega}[(\Omega-\Delta)c_a(0)+\Omega_R e^{-i\phi}c_b(0)],$$
$$a_2 = \frac{1}{2\Omega}[(\Omega+\Delta)c_a(0)-\Omega_R e^{-i\phi}c_b(0)],$$
$$b_1 = \frac{1}{2\Omega}[(\Omega+\Delta)c_b(0)+\Omega_R e^{i\phi}c_a(0)],$$
$$b_2 = \frac{1}{2\Omega}[(\Omega-\Delta)c_b(0)-\Omega_R e^{i\phi}c_a(0)]. \qquad (۶۶-۳-۳)$$

با قرار دادن شرایط اولیه در معادلات (۳-۳-۵۶) داریم:

(۶۷-۳-۳)

$$c_a(t) = \frac{e^{i\Delta t/2}}{2\Omega}\left\{[(\Omega-\Delta)c_a(0)+\Omega_R e^{-i\phi}c_b(0)]e^{i\Omega t/2}+[(\Omega+\Delta)c_a(0)-\Omega_R e^{-i\phi}c_b(0)]e^{-i\Omega t/2}\right\}$$
$$= e^{i\Delta t/2}\left\{c_a(0)[\frac{e^{i\Omega t/2}(\Omega-\Delta)+e^{-i\Omega t/2}(\Omega+\Delta)}{2\Omega}+i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{-i\phi}c_b(0)\sin(\frac{\Omega t}{2})\right\}$$
$$= e^{i\Delta t/2}\left\{c_a(0)[\cos(\frac{\Omega t}{2})-\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]+i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{-i\phi}c_b(0)\sin(\frac{\Omega t}{2})\right\}$$

همچنین با روشی مشابه، $c_b(t)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$c_b(t) = e^{-i\Delta t/2}\left\{c_b(0)[\cos(\frac{\Omega t}{2})+\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]+i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}c_a(0)\sin(\frac{\Omega t}{2})\right\} \qquad (۶۸-۳-۳)$$

از طرفی مجموع احتمالات ۱ می‌شود، زیرا اتم یا در حالت $|a\rangle$ یا در حالت $|b\rangle$ قرار دارد. بنابراین:

$$|c_a(t)|^2+|c_b(t)|^2=1 \qquad (۶۹-۳-۳)$$

اگر فرض کنیم که در زمان اولیه اتم در حالت $|a\rangle$ قرار دارد و $C_a(0)=1$ و $C_b(0)=0$ است، در این صورت احتمال قرار گرفتن اتم در حالت‌های $|a\rangle$و $|b\rangle$در زمان t توسط $|C_a(t)|^2$ و $|C_b(t)|^2$ داده می‌شود.

وارونی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(t)=|c_a(t)|^2-|c_b(t)|^2 \qquad (۷۰-۳-۳)$$

با جای‌گذاری c_a و c_b از روابط (۳-۳-۶۷) و (۳-۳-۶۸) و فرضیات بالا که $C_a(0)=1$ و $C_b(0)=0$ است، وارونی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}W(t)&=\left|e^{i\Delta t/2}[\cos(\frac{\Omega t}{2})-\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]\right|^2-\left|e^{-i\Delta t/2}[i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}-\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]\right|^2\\&=[\cos^2(\frac{\Omega t}{2})+\frac{\Delta^2}{\Omega^2}\sin^2(\frac{\Omega t}{2})]-[\frac{\Omega_R{}^2}{\Omega^2}\sin^2(\frac{\Omega t}{2})]\\&=(\frac{\Delta^2-\Omega_R{}^2}{\Omega^2})\sin^2(\frac{\Omega t}{2})+\cos^2(\frac{\Omega t}{2})\end{aligned} \qquad (۷۱-۳-۳)$$

تحت اثر میدان، یک گشتاور دوقطبی بین ترازهای اتمی القاء می‌شود که به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}P(t)&=e\langle\psi(t)|r|\psi(t)\rangle=e\langle(C_a|a\rangle+C_b|b\rangle)|r|(C_a^*\langle a|+C_b^*\langle b|)\rangle\\&=C_a^*C_b\Lambda_{ab}+C_b^*C_a\Lambda_{ab}^*\end{aligned} \qquad (۷۲-۳-۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳-۵۲)، $P(t)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}P(t)&=c_a^*e^{i\omega_a t}c_b e^{-i\omega_b t}\Lambda_{ab}+c_b^*e^{i\omega_b t}c_a e^{-i\omega_a t}\Lambda_{ab}^*\\&=c_a^*c_b\Lambda_{ab}e^{i\omega t}+c_b^*c_a\Lambda_{ab}^*e^{-i\omega t}\end{aligned} \qquad (۷۳-۳-۳)$$

که در آن $\omega=\omega_a-\omega_b$ است.

با جای‌گذاری c_a و c_b از رابطه‌ی (۳-۳-۶۷) و (۳-۳-۶۸) در رابطه‌ی گشتاور دوقطبی بالا و با همان فرض $C_a(0)=1$ و $C_b(0)=0$ داریم:

$$\begin{aligned}P(t)&=2\,\mathrm{Re}\left\{\Lambda_{ab}e^{i\omega t}e^{-2i\Delta t/2}[i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}\sin(\frac{\Omega t}{2})][\cos(\frac{\Omega t}{2})+\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]\right\}\\&=2\,\mathrm{Re}\left\{\Lambda_{ab}e^{i(\omega-\Delta)t}[i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}\sin(\frac{\Omega t}{2})][\cos(\frac{\Omega t}{2})+\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]\right\}\\&=2\,\mathrm{Re}\left\{i\frac{\Omega_R}{\Omega}\Lambda_{ab}[\cos(\frac{\Omega t}{2})+\frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2})]\sin(\frac{\Omega t}{2})e^{i\phi}e^{i\nu t}\right\}\end{aligned} \qquad (۷۴-۳-۳)$$

که در آن طبق رابطه‌ی (۳-۳-۵۷)، $\omega-\Delta=\nu$ است.

بنابراین گشتاور دوقطبی با فرکانس میدان اعمالی نوسان می‌کند.

در حالت خاص که اتم در تشدید با میدان ورودی باشد $\Delta = 0$ است و از طرفی $\Delta = \omega - \gamma$، در اینصورت $\omega = \gamma$ می‌شود و طبق رابطه‌ی (۳-۳-۵۸)، $\Omega = \Omega_R$ بدست می‌آید و در نتیجه با توجه به رابطه‌ی (۳-۳-۷۱) در حالت تشدید داریم:

$$W(t) = -\sin^2 \frac{\Omega_R t}{2} + \cos^2 \frac{\Omega_R}{2} = \cos \Omega_R t \qquad (۳-۳-۷۵)$$

اکنون تصویر برهم‌کنش را بررسی می‌کنیم و معادله‌ی شرودینگر را بصورت زیر داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H|\psi(t)\rangle \qquad (۳-۳-۷۶)$$

با جای‌گذاری $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ در معادله‌ی شرودینگر بالاداریم:

$$\dot{U}|\psi(0)\rangle = -\frac{i}{\hbar} HU\,|\psi(0)\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} U|\psi(0)\rangle = -\frac{i}{\hbar} HU|\psi(0)\rangle \qquad (۳-۳-۷۷)$$

در نتیجه عملگر تحول زمانی یکانی به شکل زیر می‌شود:

$$\dot{U}(t) = -\frac{i}{\hbar} HU(t) \qquad (۳-۳-۷۸)$$

که $U(0) = 1$ است.

بردار حالت در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر است:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t)|\psi(t)\rangle \qquad (۳-۳-۷۹)$$

با استفاده از معادله‌ی (۳-۳-۷۸) داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{U}}{U} = \frac{\partial}{\partial t} \ell n U \rightarrow \int \frac{\partial}{\partial t} \ell n U dt = \int -\frac{i}{\hbar} H dt \\ &\rightarrow \ell n U = -\frac{i}{\hbar} Ht \rightarrow U = \exp(-\frac{i}{\hbar} Ht) \\ &\rightarrow U_0(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) \end{aligned} \qquad (۳-۳-۸۰)$$

با مشتق‌گیری از سمت راست معادله‌ی (۳-۳-۷۹) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = [\frac{\partial}{\partial t} U_0^\dagger(t)]|\psi(t)\rangle + U_0^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \qquad (۳-۳-۸۱)$$

از این رو با استفاده از روابط (۳-۳-۷۶) و (۳-۳-۷۹) و (۳-۳-۸۰) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_I(t)\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}V(t)\left|\psi_I(t)\right\rangle, \qquad (۸۲-۳-۳)$$

$$V(t) = U_0^\dagger(t)H_1U_0(t). \qquad (۸۳-۳-۳)$$

که $V(t)$ هامیلتونی تصویر برهم‌کنش است.

و همچنین عملگر O در تصویر شرودینگر تحت تبدیل، عملگر O_I در تصویر برهم‌کنش را می‌دهد :

$$O_I(t) = U_0^\dagger(t)OU_0(t) \qquad (۸۴-۳-۳)$$

مقدار انتظاری O را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\left\langle O\right\rangle &= \left\langle\psi(t)\right|O\left|\psi(t)\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_I(t)\right|U_0^\dagger(t)OU_0(t)\left|\psi_I(t)\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_I(t)\right|O_I\left|\psi_I(t)\right\rangle.\end{aligned} \qquad (۸۵-۳-۳)$$

برای جواب معادله‌ی (۳-۳-۸۲) داریم:

$$\left|\psi_I(t)\right\rangle = U_I(t)\left|\psi_I(0)\right\rangle \qquad (۸۶-۳-۳)$$

بطوریکه U_I عملگر تحول زمانی در تصویر برهم‌کنش بصورت زیر است که T در آن عملگر ترتیب زمانی است:

$$U_I(t) = T\exp[-\frac{i}{\hbar}\int V(\tau)d\tau] \qquad (۸۷-۳-۳)$$

با به توان n رساندن رابطه‌ی (۳-۳-۴۳) خواهیم داشت:

$$H_0^n = (\hbar\omega_a)^n\left|a\right\rangle\left\langle a\right| + (\hbar\omega_b)^n\left|b\right\rangle\left\langle b\right| \qquad (۸۸-۳-۳)$$

از رابطه‌ی (۳-۳-۸۰) و با استفاده از بسط تیلور آن رابطه و جای گذاری H_0^n از رابطه‌ی (۳-۳-۸۸) خواهیم داشت:

$$U_0(t)=\exp(-\frac{i}{\hbar}H_0t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{i}{\hbar})^n\frac{H_0^nt^n}{n!}=[1-\frac{it}{\hbar}H_0+(\frac{i}{\hbar})^2\frac{t^2}{2}H_0^2+...]$$
$$=[1-\frac{it}{\hbar}(\hbar\omega_a|a\rangle\langle a|+\hbar\omega_b|b\rangle\langle b|)+(\frac{i}{\hbar})^2\frac{t^2}{2}(\hbar^2\omega_a^2|a\rangle\langle a|+\hbar^2\omega_b^2|b\rangle\langle b|)+...] \qquad (۸۹-۳-۳)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(i)^n\frac{\omega_a^nt^n}{n!}|a\rangle\langle a|+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(i)^n\frac{\omega_b^nt^n}{n!}|b\rangle\langle b|$$
$$=\exp(-i\omega_at)|a\rangle\langle a|+\exp(-i\omega_bt)|b\rangle\langle b|$$

هامیلتونی تصویر برهم‌کنش V(t) برای یک اتم در z=0 بصورت زیر بدست می‌آید:

ابتدا رابطه‌ی (۳-۳-۴۴) را با استفاده از روابط (۳-۳-۴۵) و (۳-۳-۴۹) و E از رابطه‌ی (۳-۳-۳۲)بازنویسی می‌کنیم:

$$H_1=-(\frac{\Omega_R}{\varepsilon}\hbar\exp(-i\phi)|a\rangle\langle b|+\frac{\Omega_R}{\varepsilon}\hbar\exp(i\phi)|b\rangle\langle a|)\varepsilon\cos\nu t \qquad (۹۰-۳-۳)$$
$$=-\Omega_R\hbar(\exp(-i\phi)|a\rangle\langle b|+\exp(i\phi)|b\rangle\langle a|)\cos\nu t$$

اکنون V(t) را از رابطه‌ی (۳-۳-۸۳)، با استفاده از H_1 از رابطه‌ی (۳-۳-۹۰) بازنویسی می‌کنیم:

$$V(t)=-\Omega_R\hbar U_0^\dagger(t)(\exp(-i\phi)|a\rangle\langle b|+\exp(i\phi)|b\rangle\langle a|)U_0\cos\nu t \qquad (۹۱-۳-۳)$$

با جای گذاری U_0 و $U_0^\dagger$ با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳-۸۹) در رابطه‌ی بالا، V(t) را بدست می‌آوریم:

(۹۲-۳-۳)

$$V(t)=-\Omega_R\hbar(e^{i\omega_at}|a\rangle\langle a|+e^{i\omega_bt}|b\rangle\langle b|)(e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|+e^{i\phi}|b\rangle\langle a|)(e^{-i\omega_at}|a\rangle\langle a|+e^{-i\omega_bt}|b\rangle\langle b|)\frac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{2}$$
$$=-\Omega_R\hbar(e^{i\omega_at}e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|+e^{i\omega_bt}e^{i\phi}|b\rangle\langle a|)(e^{-i\omega_at}|a\rangle\langle a|+e^{-i\omega_at}|b\rangle\langle b|)\frac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{2}$$
$$=\frac{-\Omega_R\hbar}{2}(e^{i\omega t}e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|+e^{-i\omega t}e^{i\phi}|b\rangle\langle a|)(e^{i\nu t}+e^{-i\nu t})$$
$$=\frac{-\Omega_R\hbar}{2}[e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|e^{i\Delta t}+e^{i\phi}|b\rangle\langle a|e^{-i\Delta t}+e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|e^{i(\omega+\nu)t}+e^{i\phi}|b\rangle\langle a|e^{-i(\omega+\nu)t}].$$

که در آن $\Delta=\omega-\nu$ و $\omega=\omega_a-\omega_b$ است.

با در نظر گرفتن تقریب موج چرخان که طبق آن عبارت نمایی با مقدار بزرگ حذف (برابر صفر) می‌شود و با فرض اینکه $\Delta=0$ است، V(t) را بازنویسی می‌کنیم:

$$V(t)=\frac{-\Omega_R\hbar}{2}(e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|+e^{i\phi}|b\rangle\langle a|) \qquad (۹۳-۳-۳)$$

با محاسبه‌ی V^2 و V^3 و ... می‌توان به روابط زیر رسید:

$$\begin{aligned} V^{2n}(t)&=(\frac{\Omega_R\hbar}{2})^{2n}(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|)^n,\\ V^{2n+1}(t)&=-(\frac{\Omega_R\hbar}{2})^{2n+1}(e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|+e^{i\phi}|b\rangle\langle a|). \end{aligned} \qquad (۹۴-۳-۳)$$

از رابطه‌ی (۳-۳-۸۷) و با جای‌گذاری V از رابطه‌ی (۳-۳-۹۳) در آن، در نتیجه عملگر تحول زمانی $U_I(t)$ با استفاده از بسط تیلور ورابطه‌ی (۳-۳-۹۴) به شکل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} U_I&=\exp[\frac{-it}{\hbar}V(t)]=\sum\frac{i^n(-tV(t)/\hbar)^n}{n!}\\ &=\sum\frac{i^{2n}}{2n!}(\frac{t}{\hbar})^{2n}V^{2n}(t)-\sum\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}(\frac{t}{\hbar})^{2n+1}V^{2n+1}(t)\\ &=\cos(\frac{t}{\hbar}V^{2n}(t))+i\sin(\frac{t}{\hbar}V^{2n+1}(t))\\ &=\cos(\frac{\Omega_R t}{2})(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|)+i\sin(\frac{\Omega_R t}{2})(e^{-i\phi}|a\rangle\langle b|+e^{i\phi}|b\rangle\langle a|). \end{aligned} \qquad (۹۵-۳-۳)$$

اگر اتم ابتدا در حالت برانگیخته‌ی $|a\rangle$ باشد ($|\psi(0)\rangle\equiv|a\rangle$)، طبق رابطه‌ی (۳-۳-۸۶) و جای‌گذاری U_I از رابطه‌ی (۳-۳-۹۵) داریم:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle&=U_I(t)|a\rangle\\ &=\cos(\frac{\Omega_R t}{2})|a\rangle+i\sin(\frac{\Omega_R t}{2})e^{i\phi}|b\rangle. \end{aligned} \qquad (۹۶-۳-۳)$$

و همچنین از رابطه‌ی (۳-۳-۴۱) برای دامنه‌ی احتمال داریم:

$$\begin{aligned} c_a(t)&=\langle a|\psi\rangle=\cos(\frac{\Omega_R t}{2}),\\ c_b(t)&=\langle b|\psi\rangle=i\sin(\frac{\Omega_R t}{2})e^{i\phi}. \end{aligned} \qquad (۹۷-۳-۳)$$

در این بخش برهم‌کنش یک سیستم اتم دوترازه با میدان کلاسیکی را بررسی کردیم و دیدیم نیروی الکتریکی حاصل از میدان باعث نوسان ترازها با فرکانس رابی می‌شود. با استفاده از تقریب دوقطبی،

هامیلتونی برهم‌کنش سیستم را بدست آوردیم و با استفاده از آن معادلات حرکت دامنه‌های احتمال و در نهایت هامیلتونی سیستم دوترازه در تقریب موج چرخان را محاسبه کردیم [۳۰].

۳-۴ تئوری کوانتومی برهم‌کنش اتم-میدان

در بخش قبلی، در باب برهم‌کنش میدان تابشی با ذره، ما فرض کردیم که میدان، کلاسیکی است. اگرچه در بسیاری از حالت‌ها این فرض درست است، اما موارد بسیاری وجود دارد که یک میدان کلاسیکی در توضیح نتایجی که بصورت تجربی مشاهده شده، شکست می‌خورد و یک شرح کوانتیزه از میدان ضروری است. ما یک تئوری کوانتومی از برهم‌کنش اتم دوترازه با یک میدان تک مد معرفی می‌کنیم که در آن اتم به عنوان یک سیستم دوترازه‌ی کوانتومی و میدان نیز کوانتیزه در نظر گرفته می‌شود. حتی در سیستم‌های ساده‌ای همچون برهم‌کنش اتم-میدان، پیش‌بینی‌ها برای دینامیک اتم، در تئوری نیمه‌کلاسیکی و تئوری کوانتومی، کاملا متفاوت است.

در این بخش ما برهم‌کنش میدان تابشی کوانتیزه با سیستم اتمی دوترازه‌ی شرح داده شده توسط یک هامیلتونی در تقریب‌های دوقطبی و موج چرخان را مطرح می‌کنیم [۳۰].

۳-۴-۱ هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان

برهم‌کنش میدان تابشی E و اتم تک الکترون می‌تواند توسط هامیلتونی زیر در تقریب دوقطبی ($k.r \ll 1$) توصیف شود که در آن H_A انرژی اتم، H_F انرژی میدان تابشی و er بردار حالت الکترون است:

$$H = H_A + H_F - er.E \qquad (۳-۴-۱)$$

در تقریب دوقطبی، میدان روی کل اتم یکنواخت فرض شده است.

و انرژی میدان تابشی بصورت زیر است [۳۱]:

$$H_F = \sum_k \hbar\nu_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}) \qquad (۲-۴-۳)$$

که ν_k فرکانس میدان و $a_k^\dagger$ و a_k به ترتیب عملگرهای خلق و فنا هستند. σ_{ij}عملگر گذار اتمی است:

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j| \qquad (۳-۴-۳)$$

$\{|i\rangle\}$ مجموعه‌ی کاملی از ویژه‌کت‌های انرژی اتمی را نشان می‌دهد، یعنی:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \qquad (۴-۴-۳)$$

بنابراین ویژه مقدار انرژی اتمی از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

$$H_A |i\rangle = E_i |i\rangle \qquad (۵-۴-۳)$$

بنابراین:

$$H_A = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i \sigma_{ii} \qquad (۶-۴-۳)$$

و باز بر اساس (۳-۴-۴) و (۳-۴-۳)، er بصورت زیر می‌شود:

$$er = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|r|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \Lambda_{i,j}\sigma_{ij} \qquad (۷-۴-۳)$$

که در آن $\Lambda_{i,j}$ عنصر ماتریس گذار دوقطبی الکتریکی و به شکل زیر است:

$$\Lambda_{i,j} = e\langle i|r|j\rangle \qquad (۸-۴-۳)$$

عملگر میدان الکتریکی تحت تقریب دوقطبی و برای اتم در مبداء ($r_0 = 0$) و در $t = 0$ بصورت زیر است [۳۰]:

$$E = \sum_k \hat{\epsilon}_k \, \varepsilon_k (a_k^\dagger + a_k) \qquad (۹-۴-۳)$$

در لحظه‌ی t=0 هامیلتونی را که مستقل از زمان در نظر گرفتیم و انرژی نقطه‌ی صفر آن را حذف کردیم، به اینصورت می‌شود:

$$H=\sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k+\sum_i E_i\sigma_{ii}+\hbar\sum_{i,j}\sum_k g_k^{ij}\sigma_{ij}(a_k+a_k^\dagger), \qquad (۱۰-۴-۳)$$

بطوریکه:

$$g_k^{ij}=-\frac{\Lambda_{i,j}.\hat{\epsilon}_k\ \varepsilon_k}{\hbar}. \qquad (۱۱-۴-۳)$$

ما در این پایان‌نامه برای سادگی، $\Lambda_{i,j}$ را حقیقی فرض کردیم.

همچنان برای اتم دوترازه روابط زیر برقرار است، یعنی گذار بین a و b یکی می‌باشد:

$$\Lambda_{ab}=\Lambda_{ab}^*, \qquad (۱۲-۴-۳)$$

$$\Lambda_{ba}=\Lambda_{ba}^*. \qquad (۱۳-۴-۳)$$

در نهایت هامیلتونی رابطه‌ی (۳-۴-۱۰) برای اتم دوترازه با دو تراز انرژی به شکل زیر می‌شود:

$$H=\sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k+(E_a\sigma_{aa}+E_b\sigma_{bb})+\hbar\sum_k g_k(\sigma_{ab}+\sigma_{ba})(a_k+a_k^\dagger) \qquad (۱۴-۴-۳)$$

که جمله‌ی دوم آن را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned}
E_a\sigma_{aa}+E_b\sigma_{bb}&=\frac{2E_a\sigma_{aa}+E_b\sigma_{bb}}{2}\pm E_a\sigma_{aa}\pm E_b\sigma_{bb}\\
&=\frac{1}{2}[E_a\sigma_{aa}-E_a\sigma_{bb}-E_b\sigma_{aa}+E_b\sigma_{bb}+E_a\sigma_{aa}+E_b\sigma_{bb}+E_a\sigma_{bb}+E_b\sigma_{aa}]\\
&=\frac{1}{2}[(E_a-E_b)(\sigma_{aa}-\sigma_{bb})+(E_a+E_b)(\sigma_{aa}+\sigma_{bb})]\\
&=\frac{1}{2}\hbar\omega(\sigma_{aa}-\sigma_{bb})+\frac{1}{2}(E_a+E_b)
\end{aligned} \qquad (۱۵-۴-۳)$$

که در آن روابط زیر برقرار است و $\frac{1}{2}(E_a+E_b)$ مقدار ثابتی بوده و می‌توانیم آن را حذف کنیم:

اختلاف انرژی دو تراز: (۳-۴-۱۶) $E_a-E_b=\hbar\omega$

بر اساس رابطه‌ی (۳-۴-۴) داریم: (۳-۴-۱۷) $\sigma_{aa}+\sigma_{bb}=|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|=1$

ما از نمادهای زیر بر اساس ماتریس‌های پائولی در روابطمان استفاده می‌کنیم:

$$\sigma_z=\sigma_{aa}-\sigma_{bb}=|a\rangle\langle a|-|b\rangle\langle b|, \qquad (۱۸-۴-۳)$$

$$\sigma_+=\sigma_{ab}=|a\rangle\langle b|, \qquad (۱۹-۴-۳)$$

$$\sigma_- = \sigma_{ba} = |b\rangle\langle a|. \qquad (۲۰-۴-۳)$$

بنابراین هامیلتونی رابطه‌ی (۳-۴-۱۴) با نمادهایی که در بالا تعریف شد، به شکل زیر درمی‌آید:

$$H = \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\sum_k g_k(\sigma_+ + \sigma_-)(a_k + a_k^\dagger) \qquad (۲۱-۴-۳)$$

بطوریکه رابطه‌ی زیر بین ماتریس‌های پائولی برقرار است:

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z, \qquad (۲۲-۴-۳)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_-. \qquad (۲۳-۴-۳)$$

و ماتریس‌های پائولی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (۲۴-۴-۳)$$

انرژی برهم‌کنش در رابطه‌ی (۳-۴-۲۱) شامل ۴ جمله می‌باشد. جمله‌ی شامل $a_k^\dagger\sigma_-$ فرایندی را نشان می‌دهد که اتم از تراز بالا به تراز پایین می‌رود و یک فوتون تولید می‌کند. همچنین جمله‌ی $a_k\sigma_+$ عکس فرایند فوق را توصیف می‌کند. بنابراین در هر دو فرایند انرژی بقا دارد. جمله‌ی $a_k\sigma_-$ فرایندی را توصیف می‌کند که اتم از تراز بالا به تراز پایین می‌رود و یک فوتون نابود می‌شود و نتیجه‌ی آن از دست دادن انرژی می‌باشد. به صورت مشابه $a_k^\dagger\sigma_+$ به دست آوردن انرژی را نشان می‌دهد. بنابراین در دو جمله توصیف شده در آخر اصل بقای انرژی نقض می‌شود. با حذف دوجمله آخر که مطابق با تقریب موج چرخان صورت می‌گیرد، هامیلتونی سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت [۳۰].

$$H = \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\sum_k g_k(\sigma_+ a_k + a_k^\dagger\sigma_-) \qquad (۲۵-۴-۳)$$

۳-۴-۲ برهم‌کنش یک اتم دوترازه با میدان تک مد

در ادامه‌ی رابطه‌ی (۳-۴-۲۵)، برهم‌کنش اتم دوترازه با میدان کوانتیزه‌ی تک مد با فرکانس ν توسط هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = H_0 + H_1, \qquad (۲۶-۴-۳)$$

که در آن:

$$H_0 = \hbar\nu a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z, \qquad (۲۷-۴-۳)$$

$$H_1 = \hbar g(\sigma_+ a + a^{\dagger}\sigma_-). \qquad (۲۸-۴-۳)$$

هامیلتونی بالا برهم‌کنش اتم-میدان را در تقریب دوقطبی و موج چرخان نشان می‌دهد.

از رابطه‌ی (۳-۴-۸۰) و (۳-۴-۸۳)، هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش را بصورت زیر داریم:

$$V = e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \qquad (۲۹-۴-۳)$$

بسط بیکرهاستورف به شکل زیر است [۳۱]:

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha[A,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] + ..., \qquad (۳۰-۴-۳)$$

که با استفاده از بسط بیکرهاستورف و بسط تیلور داریم:

$$\begin{aligned} e^{i\nu a^{\dagger}at} a e^{-i\nu a^{\dagger}at} &= a + i\nu t[a^{\dagger}a, a] + \frac{(i\nu t)^2}{2!}[a^{\dagger}a,[a^{\dagger}a,a]] + ... \\ &= a + i\nu t(-a) + \frac{(i\nu t)^2}{2!}[a^{\dagger}a,(-a)] + \frac{(i\nu t)^3}{3!}(-a) \\ &= a(1 - i\nu t + \frac{(i\nu t)^2}{2!} - \frac{(i\nu t)^3}{3!}) = a e^{-i\nu t} \end{aligned} \qquad (۳۱-۴-۳)$$

به همین روش رابطه‌ی زیر نیز بدست می‌آید:

$$e^{i\omega\sigma_z t/2}\sigma_+ e^{-i\omega\sigma_z t/2} = \sigma_+ e^{i\omega t} \qquad (۳۲-۴-۳)$$

انرژی برهم‌کنش V از روابط (۳-۴-۲۷) تا (۳-۴-۳۲) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} V &= e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \\ &= e^{i\nu a^{\dagger}at} e^{i\omega\sigma_z t/2}(H_1) e^{-i\nu a^{\dagger}at} e^{-i\omega\sigma_z t/2} \\ &= \hbar g e^{i\nu a^{\dagger}at} e^{i\omega\sigma_z t/2}(\sigma_+ a + a^{\dagger}\sigma_-) e^{-i\nu a^{\dagger}at} e^{-i\omega\sigma_z t/2} \\ &= \hbar g(\sigma_+ e^{i\omega t} a e^{-i\nu t} + a^{\dagger} e^{i\nu t}\sigma_- e^{-i\omega t}) \\ &= \hbar g(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + a^{\dagger}\sigma_- e^{-i\Delta t}) \end{aligned} \qquad (۳۳-۴-۳)$$

که در آن $\Delta = \omega - \nu$ است.

برای پیدا کردن دامنه‌ی احتمال ابتدا به حل معادله‌ی حرکت زیر برای $|\psi\rangle$ می‌پردازیم:

$$i\hbar \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = V|\psi\rangle \qquad (۳۴-۴-۳)$$

در هر زمان t، بردار حالت $|\psi\rangle$، ترکیب خطی از حالت‌های $|a,n\rangle$ و $|b,n\rangle$ می‌باشد که $|a,n\rangle$ یعنی اتم در حالت برانگیخته‌ی $|a\rangle$ و میدان دارای n فوتون است و $|b,n\rangle$ یعنی اتم در حالت برانگیخته‌ی $|b\rangle$ و میدان دارای n فوتون است.

همانند رابطه‌ی (۳-۳-۴۱)، بردار حالت $|\psi\rangle$ (تابع موج اتم دوترازه با میدان) به شکل زیر است:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{a,n}(t)|a,n\rangle + c_{b,n}(t)|b,n\rangle] \qquad (۳۵-۴-۳)$$

$|\psi(t)\rangle$ را از رابطه‌ی (۳-۴-۳۵) و V را از رابطه‌ی (۳-۴-۳۳) در معادله‌ی حرکت (۳-۴-۳۴) قرار می‌دهیم و معادلات حرکت دامنه‌ی احتمال را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

انرژی برهم‌کنش V، فقط می‌تواند باعث گذار بین حالت $|a,n\rangle$ و $|b,n+1\rangle$ شود. پس تحول دامنه‌ی $c_{a,n}$ و $c_{b,n+1}$ را در نظر می‌گیریم.

(۳۶-۴-۳)

$$\begin{aligned}
& i\hbar \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = V|\psi\rangle \\
& \rightarrow i\hbar(\dot{c}_{a,n}(t)|a,n\rangle + \dot{c}_{b,n}(t)|b,n+1\rangle) \\
& = \hbar g(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\Delta t})(c_{a,n}(t)|a,n\rangle + c_{b,n+1}(t)|b,n+1\rangle) \\
& = \hbar g \sigma_+ a e^{i\Delta t}(c_{a,n}(t)|a,n\rangle + c_{b,n+1}(t)|b,n+1\rangle) + \hbar g a^\dagger \sigma_- e^{-i\Delta t}(c_{a,n}(t)|a,n\rangle + c_{b,n+1}(t)|b,n+1\rangle
\end{aligned}$$

$$\rightarrow i\hbar(\dot{c}_{a,n}(t)\,|a,n\rangle + \dot{c}_{b,n}(t)\,|b,n+1\rangle)$$
$$= \hbar g e^{i\Delta t} c_{a,n}(t)\sqrt{n}\,|b,n-1\rangle + \hbar g e^{i\Delta t} c_{b,n+1}(t)\sqrt{n+1}\,|a,n\rangle \qquad (۳۷-۴-۳)$$
$$+\hbar g e^{-i\Delta t} c_{a,n}(t)\sqrt{n+1}\,|b,n+1\rangle + \hbar g e^{-i\Delta t} c_{b,n+1}(t)\sqrt{n+2}\,|a,n+2\rangle$$

از مقایسه‌ی دو طرف معادله‌ی (۳-۴-۳۷)، معادلات دامنه‌ی احتمال بدست می‌آید:

$$\dot{c}_{a,n} = -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{b,n+1},$$
$$\dot{c}_{b,n+1} = -ig\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{a,n}. \qquad (۳۸-۴-۳)$$

از مقایسه‌ی روابط (۳-۴-۳۸) با (۳-۴-۵۴) و (۳-۴-۵۵) در بخش قبل، مشاهده می‌کنیم که دامنه-های احتمال مشابه‌اند با این تفاوت که:

برای $\dot{c}_a$: (۳-۴-۳۹)
$$g\sqrt{n+1} = \frac{\Omega_R}{2}e^{-i\phi}$$

و برای $\dot{c}_b$: (۳-۴-۴۰)
$$g\sqrt{n+1} = \frac{\Omega_R}{2}e^{i\phi}$$

بنابراین تساوی‌های (۳-۴-۳۹) و (۳-۴-۴۰) را در روابط (۳-۴-۶۷) و (۳-۴-۶۸) جای‌گذاری و معادلات کلی دامنه‌ی احتمال را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

(۳-۴-۴۱)

$$c_{a,n}(t) = \left\{c_{a,n}(0)[\cos(\frac{\Omega_n t}{2}) - \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}c_{b,n+1}(0)\sin(\frac{\Omega_n t}{2})\right\}e^{i\Delta t/2},$$
$$c_{b,n+1}(t) = \left\{c_{b,n+1}(0)[\cos(\frac{\Omega_n t}{2}) + \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}c_{a,n}(0)\sin(\frac{\Omega_n t}{2})\right\}e^{-i\Delta t/2}.$$

که در آن $\Omega = \Omega_n$ است.

و از (۳-۴-۵۸) و (۳-۴-۳۹) و (۳-۴-۴۰) نتیجه می‌گیریم:

$$\Omega_n^2 = \Omega^2 = \Omega_R^2 + (\omega - \nu)^2 = 4g^2(n+1) + \Delta^2 \qquad (۳-۴-۴۲)$$

که در آن $\omega - \nu = \Delta$ است و در حالت $\Delta = 0$ فرکانس برابر فرکانس رابی می‌شود.

در ابتدا اتم در حالت برانگیخته‌ی $|a\rangle$ است، بنابراین $c_{a,n}(0) = c_n(0)$ و $c_{b,n+1}(0) = 0$ می‌شود که

$c_n(0)$، دامنه‌ی احتمال میدان است. بنابراین معادلات (۳-۴-۴۱) به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$c_{a,n}(t) = c_n(0)[\cos(\frac{\Omega_n t}{2}) - \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})]e^{i\Delta t/2},$$
$$c_{b,n+1}(t) = -c_n(0)\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})e^{-i\Delta t/2}. \qquad (۴۳-۴-۳)$$

احتمال اینکه در زمان t، n فوتون در میدان وجود داشته باشد با p(n) و بصورت زیر نشان داده می‌شود که $|C_{a,n}(t)|^2$ در آن احتمال این است که در زمان t اتم در حالت $|a\rangle$ باشد و میدان n فوتون داشته باشد و $|C_{b,n}(t)|^2$ احتمال این است که در زمان t اتم در حالت $|b\rangle$ باشد و میدان n فوتون داشته باشد.

$$p(n) = |c_{a,n}(t)|^2 + |c_{b,n}(t)|^2$$
$$= \rho_{nn}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_n t}{2}) + (\frac{\Delta}{\Omega_n})^2\sin^2(\frac{\Omega_n t}{2})] + \rho_{n-1,n-1}(0)(\frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2})\sin^2(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}), \qquad (۴۴-۴-۳)$$

بطوریکه در آن $\rho_{nn}(0)$ که احتمال وجود n فوتون در میدان در زمان t=0 است به شکل زیر است:

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}. \qquad (۴۵-۴-۳)$$

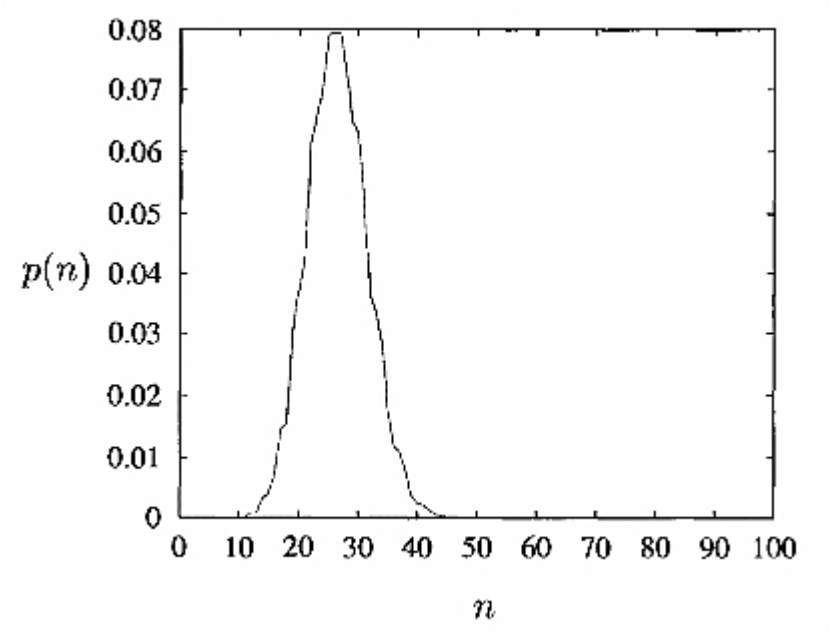
طبق رابطه‌ی (۳-۴-۴۴) در t=0 داریم:

$$p(n) = \rho_{nn}(0) \qquad (۴۶-۴-۳)$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴-۴۵) داریم:

$$p(n) = \rho_{nn}(0) = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!} \qquad (۴۷-۴-۳)$$

که p(n) را می‌توان بر حسب n رسم کرد (شکل ۳-۴-۱).



شکل ۳-۴-۱: رسم p(n) بر حسب تعداد فوتون‌ها (n)، برای حالت همدوس اولیه در زمان t=0 [۳۰].

کمیت مهم دیگر وارونی است که بصورت زیر است [۳۰]:

$$W(t)=\sum_{n}[|c_{a,n}(t)|^2-|c_{b,n}(t)|^2] \qquad (۴۸-۴-۳)$$

با جای‌گذاری $c_{a,n}(t)$ و $c_{b,n}(t)$ از روابط (۳-۴-۴۳) و باز آرایش رابطه‌ی (۳-۴-۴۸)، وارونی به شکل زیر بدست می‌آید:

(۴۹-۴-۳)

$$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\rho_{nn}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_n t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_n})^2\sin^2(\frac{\Omega_n t}{2})]-\rho_{n-1,n-1}(0)(\frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2})\sin^2(\frac{\Omega_{n-1}t}{2})\right\}$$

با نوشتن جملات آن داریم:

$$\begin{aligned}W(t)&=\rho_{00}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2})]+0\\&+\rho_{11}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_1 t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_1})^2\sin^2(\frac{\Omega_1 t}{2})-\rho_{00}(0)(\frac{4g^2(1)}{\Omega_0^2})\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2})\\&+\rho_{22}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_2 t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_2})^2\sin^2(\frac{\Omega_2 t}{2})-\rho_{11}(0)(\frac{4g^2(2)}{\Omega_0^2})\sin^2(\frac{\Omega_1 t}{2})+\ldots\end{aligned} \qquad (۵۰-۴-۳)$$

همانطور که می‌بینیم ضریب ρ در جملات یکی در میان تکرار می‌شود، از این رو به روش استقرایی معادله‌ی کلی وارونی را می‌یابیم. برای اینکار ابتدا جمع روی جملات با ضریب ρ_{00} را محاسبه می‌کنیم:

(۵۱-۴-۳)

$$\rho_{00}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2})-(\frac{4g^2(1)}{\Omega_0^2})\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2})]\pm(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})$$
$$=\rho_{00}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2[\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2})+\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})]-(\frac{4g^2(1)}{\Omega_0^2})\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2})-(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})]$$
$$=\rho_{00}(0)[(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2+(\frac{4g^2(1)}{\Omega_0^2})(\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})-\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2}))]$$
$$=\rho_{00}(0)[(\frac{\Delta}{\Omega_0})^2+(\frac{4g^2(1)}{\Omega_0^2})(\cos^2(\frac{\Omega_0 t}{2})-\sin^2(\frac{\Omega_0 t}{2}))]$$

که این برای سایر جملات با ضرایب دیگر نیز برقرار است، از این رو در حالت کلی وارونی را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}(0)[(\frac{\Delta}{\Omega_n})^2+\frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2}\cos(\Omega_n t)] \qquad (۵۲-۴-۳)$$

همچنین رابطه‌ی (۳-۴-۵۲) وارونی را می‌توان به روش استنتاجی نیز اثبات کرد. به اینصورت که جمله‌ی $\pm(\frac{\Delta}{\Omega_n})^2\cos^2(\frac{\Omega_n t}{2})$ را به سمت راست معادله‌ی (۳-۴-۴۹) اضافه می‌کنیم و وارونی را بدست می‌آوریم: (۳-۴-۵۳)

$$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\rho_{nn}(0)[\cos^2(\frac{\Omega_n t}{2})+(\frac{\Delta}{\Omega_n})^2\sin^2(\frac{\Omega_n t}{2})]-\rho_{n-1,n-1}(0)(\frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2})\sin^2(\frac{\Omega_{n-1} t}{2})\pm(\frac{\Delta}{\Omega_n})^2\cos^2(\frac{\Omega_n t}{2})\right\}$$
$$\rightarrow W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}(0)[(\frac{\Delta}{\Omega_n})^2+\frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2}\cos(\Omega_n t)]$$

در بخش‌های (۳-۳) و (۳-۴) برهم‌کنش سیستم اتم دوترازه را با میدان کلاسیکی و کوانتومی بررسی کردیم و ملاحظه شد که نیروی الکتریکی حاصل از میدان اعمال شده، باعث نوسان جمعیت سیستم توسط فرکانس رابی می شود. همچنین با استفاده از ناوردایی پیمانه موضعی و تقریب دوقطبی، هامیلتونی برهم‌کنش سیستم به دست آمد که با استفاده از آن معادلات حرکت دامنه های احتمال و

در نهایت هامیلتونی موثر سیستم دوترازه در تقریب موج چرخان محاسبه شد.

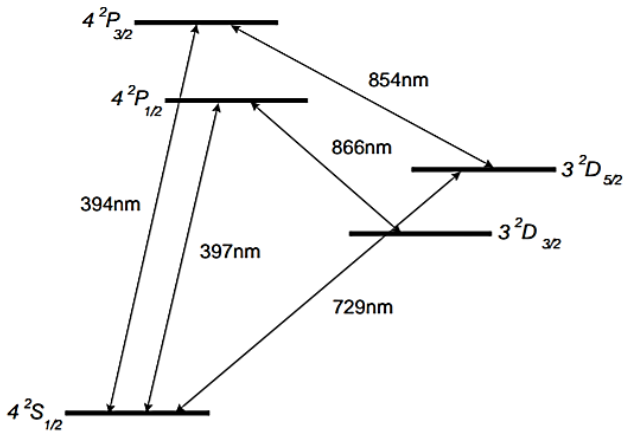
در ادامه به عنوان مثالی از برهم‌کنش اتم-میدان، به توضیح برهم‌کنش میدان لیزر با یون $^{40}Ca^{+}$ می‌پردازیم که همانند اتم دوترازه که در بخش‌های قبلی توضیح دادیم تحت تابش لیزر بین ترازهای آن گذار اتفاق می‌افتد که چگونگی آن را شرح خواهیم داد.

۳-۵ برهم‌کنش لیزر با یون $^{40}Ca^{+}$

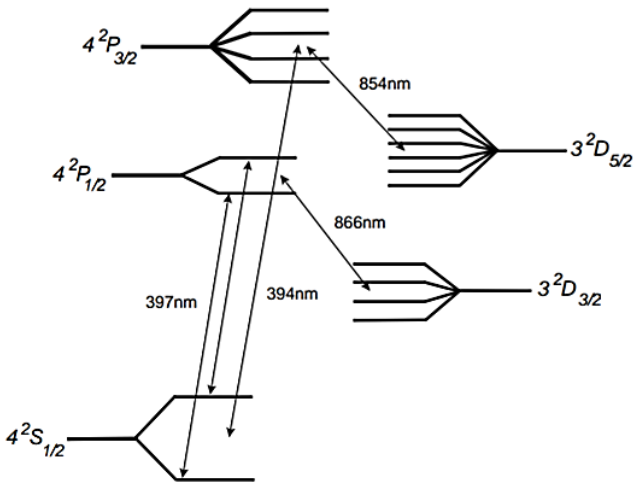
همانطور که قبل‌تر توضیح دادیم، کیوبیت واحد پایه‌ی اطلاعات کوانتومی می‌باشد که در واقع حالت کوانتومی کلی یک سیستم فیزیکی است که دارای دو حالت می‌باشد. چنین سیستمی قادر به ذخیره اطلاعات باینری است. یکی از گزینه‌ها برای ساخت کیوبیت‌ها، یون‌های به دام افتاده در چاه پتانسیلی تله می‌باشند که در آن ترازهای اتمی یون به تله افتاده نقش سیستم دوحالته را دارند که تاکنون تله‌ی یونی یکی از موفق‌ترین گزینه ها برای انجام محاسبات کوانتومی بوده است [۱۸].

Ca^{+} یک یون قابل گیراندازی است که پس از گیراندازی توسط تله‌ی یونی پنینگ، از ترازهای اتمی آن می‌توان به عنوان سیستم دوحالته استفاده کرد.

در شکل ۳-۵-۱ ترازهای انرژی یون Ca^{+} در غیاب میدان مغناطیسی و در حضور میدان مغناطیسی نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۵-۱: الف) ترازهای انرژی Ca^+ در غیاب میدان مغناطیسی. ب) ترازهای انرژی Ca^+ در حضور میدان مغناطیسی [۳۲].

مطابق شکل (الف) که ترازهای انرژی یون Ca^+ را در غیاب میدان مغناطیسی نشان می‌دهد، یک گذار دوقطبی مجاز $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$ با استفاده از لیزر ۳۹۷ nm صورت می‌گیرد که طول عمر تراز $4^2P_{1/2}$، ۷/۷ ns است و سپس می‌تواند به هر یک از ترازهای $4^2S_{1/2}$ و $3^2D_{3/2}$ فروپاشی کند که طول عمر تراز $3^2D_{3/2}$ برابر ۱/۰۸ s می‌باشد. از آنجایی که این زمان طولانی است با استفاده از لیزر ۸۶۶ nm گذار $3^2D_{3/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$ ایجاد می‌شود.

اگر از لیزر ۳۹۴ nm استفاده کنیم، گذار $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$ صورت می‌گیرد که می‌تواند به تراز $3^2D_{5/2}$ فروپاشی کند که در اینصورت از لیزر ۸۵۴ nm برای جفت‌شدگی تراز $3^2D_{5/2}$ به تراز $4^2P_{3/2}$ استفاده می‌شود.

در حضور میدان مغناطیسی مطابق شکل (ب)، به دلیل اثر زیمن و شکافته شدن سطوح، استفاده از لیزر پیچیده‌تر می‌شود. اینبار دو لیزر ۳۹۷ nm، چهار لیزر ۸۶۶ nm و یک لیزر ۸۵۴ nm نیاز داریم که با وجود اثر زیمن، برای گذار $3^2D_{5/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$ تنها یک لیزر ۸۵۴ nm کافی است [۱۸و۳۲].

۳-۶ جمع‌بندی

در این پایان‌نامه، به بررسی رفتار کلاسیکی الکترون و یون در یک تله‌ی پنینگ پرداخته‌ایم. مسیر حرکت الکترون، یون‌های کلسیم $^{40}_{20}Ca^{+}$ و $^{197}_{79}AU^{+}$ را تحت تاثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تله با برنامه‌نویسی C++ محاسبه و با نرم‌افزار Origin ترسیم کرده‌ایم که در این نمودارهای محصورسازی، سه حرکت هارمونیک محوری، سیکلوترونی و مگنترونی نمایان بود. همچنین میدان‌های مناسب برای گیراندازی آنها، متناسب با ابعاد تله‌ی مفروض را بدست آورده‌ایم. در ادامه، گیراندازی یون در تله‌ی پنینگ را از دیدگاه کوانتومی و استفاده از حالات کوانتومی یون برای ساخت کیوبیت‌ها را مورد بررسی قرار دادیم و دیدیم که با استفاده از تحریک لیزری ترازهای انرژی یون به دام افتاده، می‌توان از آن به عنوان سیستم دوحالته جهت ساخت کیوبیت‌ها استفاده کرد. از این رو برخورد میدان تک مد با اتم دوترازه را تحت دو تئوری نیمه‌کلاسیکی و کوانتومی توضیح دادیم و برای مثال، برهم‌کنش میدان لیزر با یون $^{40}Ca^{+}$ را به عنوان یک یون گیراندازی شده در تله‌ی پنینگ بررسی کردیم و ترازهای انرژی و گذارهای آن را تحت میدان مغناطیسی تله و تحریک لیزری نشان دادیم.

منابع

[1] R. March, J. Todd, 2005, *Quadrupole Ion Trap Mass Sspectrometry*, 165,second edition, WILEY, New Jersey.

[2] S. Bohm, A. Enulescu, T. Fritioff, I. Orban, S. Tashenov and R. Schuch, 2007, First results from the Stockholm Electron Beam Ion Trap, *Journal of Physic*, 58, 303-306.

[3] Lowell S. Brown and Gerald Gabrielse. (1986) "Geonium theory: Physics of a single electron or ion a Penning trap" *Rev.Mod.phys*.,1,58, pp 233.

[4] I Marzoli, P Tombesi, G Ciaramicoli, G Werth, P Bushev, S Stahl, F Schmidt-Kaler, M Hellwig, C Henkel, G Marx, I Jex, E Stachowska, G Szawiola and A Walaszyk, 2009, "Experimental and theoretical challenges for the trapped electron quantum computer", *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*. Vol 42, 154010

[5] B. B. Blinov, D. Leibfried, C. Monroe and D. J. Wineland, 2004, Quantum Computing with Trapped Ion Hyperfine Qubits, *Quantum Information Processing*, 3, 45-59

[6] Hall D. S., 1997, Phd thesis, "Positrons, Antiprotons and Interactions for Cold Antihydrogen", Department of physics, Hardvard University.

[7] J. Mitchell Wells, Ethan R. Badman, and R. Graham Cooks, 1998, A Quadrupole Ion Trap with Cylindrical Geometry Operated in the Mass-Selective Instability Mode, *Anal. Chem*., 3, 70, 438-444.

[8] HANS G DEHMELT and WOLFGANG PAUL, 1989, THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS for the development of the ion trap technique.

[9] R.Ringle, G. Bollen, P. Schury, S. Schwarz, T. Sun, 2006, Octupolar excitation of ion motion in a Penning trap-A study performed at LEBIT, *International Journal of Mass Spectrometry*, vol 262, 33-44.

[10] V.Yu. Kozlov, N. Severijns, D. Beck, M. Beck, S. Coeck, B. Delaur'e, A. Lindroth, S. Kopecky, P. Delahaye, F. Wenander, V.V. Golovko, I.S. Kraev, T. Phalet, 2006, The WITCH experiment: Completion of a set-up to investigate the structure of weak interaction with a Penning trap, *International Journal of Mass Spectrometry*, vol 251, 159-172.

[11] Sven Sturm, Florian köhler and Günter Werth, 2015, The g-factor of highly charged ions, *Journal of Physics:* Conference Series 599.

[12] Tristan Valenzueia Salazar, (2001), Diplomarbeit Von, “Collective oscillation of an electron cloud confind in a penning trap”, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität Mains.

[13] J.THROCK WATSON, O. DAVID SPARKMAN, 2007, *Introduction to Mass Spectrometry*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, England.

[14] R. Schuch, S. Tashenov, I. Orban, M. Hobein, S. Mahmood, O. Kamalou, N. Akram, A. Safdar, P. Skog, A. Solders and H. Zhang, 2010, The new Stockholm Electrom Beam Ion Trap (S-EBIT), *INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTRON BEAM ION SOURCES AND TRAPS*, vol 5, Issue:12.

[15] Bernd Schmidt, Klaus Wetzig, 2012, *Ion Beams in Materials Processing and Analysis*, Springer-Verlag Wien, New York Dordrecht London.

[16] ANNE H. PAYNE and GARY L. GLISH, Tandem Mass Spectrometry in Quadruple Ion Trap and Ion Cyclotron Resonance Mass Spectrometers, MS/MS in trapping instruments page 109.

[17] Eliades J. A., 2012, PhD thesis, "A Radio Frequency Quadrupole Instrument for use with Accelerator Mass Spectrometry: Application to Low Kinetic Energy Reactive Isobar Suppression and Gas-Phase Anion Reaction Studies", Department of Geology and Depatment of Physics (collarborative programme), University of Toronto.

[18] Hamid Ohadi., (2008),PhD. thesis, "Single Ca+ ions in a Penning trap for Applications in Quantum Information Processing", Phys. Depart. London university.

[19] C.H. Bennett and G. Brassard, “Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing,” *Computers, Systems, and Signal Processing*, pp. 175-179, 1984.

[20] Feynman, “Simulating physics with computers,” *International journal of theoretical physics*, vol. 21, pp. 467-488, 1982.

[21] P. W. Shor, “Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring,” *35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 124-134, Santa Fe, NM , USA, 1994.

[22] M.A. Nielsen, I.L. Chuang. (2010), *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, New York.

[23] W. Nagourney, J. Sandberg, H. Dehmelt. (1986) "Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps" *Phys. Rev. Lett.*, 26, 56, pp 2797.

[24] J.I. Cirac, P. Zoller. (1995) "Quantum computations with cold trapped ions" *Phys. Rev. Lett.*, 20, 74, pp 4091.

[25] S. Bose. (2003) "Quantum communication through an unmodulated spin chain" *Phys. Rev. Lett.*, 91(20):207901.

[26] A. Casaccino, S. Lloyd, S. Mancini, and S. Severini. (2009), "Quantum state transfer through a qubit network with energy shifts and fluctuations" *Int. J. Quant. Inf.*, 7(8):1417–1427.

[27] D. Tsomokos, M. Plenio, I. de Vega, and S. Huelga. (2008) "State transfer in highly connected networks and a quantum babinet principle". *Phys. Rev. A*, 78:062310.

[28] S. Weisner (1983). "Conjugate coding". *Association for Computing Machinery, Special Interest Group in Algorithms and Computation Theory*. 15: 78–88.

[29] S. Bose. "Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview". *Contemp. Phys*., 48(13–30):13, 2007.

[30] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy, 1997, *Quantum Optics*, Cambridge University Press.

[۳۱] جی جی ساکورایی، ۱۳۸۹، *مکانیک کوانتومی مدرن*، دکتر مسعود علیمحمدی و دکتر حمیدرضا مشفق، چاپ هفتم، انتشارات دانشگاه تهران.

[32] Jenn Liam Kingston Koo., (2003),PhD. thesis, "Laser cooling and trapping of Ca+ ions in a Penning trap", Imperial College. London.

Abstract

The potential traps for trapping of the charged particles are one of the most conventional systems used for fundamental research and perecise measurements on trapped charged particles. The Penning trap is a potential trap that with a static electric potential and a superimposed magnetic field can confine the charged particles in three dimensions.

These systems have applications such as study and measurement of the fundamental constant of the particles, energy states studies, study of particles decay, study of charged particles interaction and Quantum Information.

In this thesis, classical evolution of electron and ion in a Penning trap is studied. The trajectory of a electron, ${}^{40}_{20}Ca^{+}$ and ${}^{197}_{79}AU^{+}$ ions under electric and magnetic field of trap is calculated and ploted using a C++ programming. Also suitable fields for trapping they considering the geometry of the trap is obtained. Next, quantum states of such an ion in a Penning tarp is studied to be used for a qubit construction.

Keywords: Potential trap, Penning trap, Trapping, Qubit, Quantum states.

Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

M.Sc. Thesis in Nuclear Physics

Study of ion in a Penning trap and it's quantum properties

By: Ayda Kaltehei

Supervisors:
Dr. Moslem Sohani
Dr. Morteza Rafiee

September, 2018