

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک هسته‌ای

محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌های نزدیک به پوسته‌ی بسته

نگارنده:

کیوان داروئی دیوشلی

استاد راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

شهریور ۱۳۹۷

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند  
به پاس عاطفه سرشار و کرمای امید بخش و جودشان  
و به پاس قلب های بزرگشان

این مجموعه را تقدیم می کنم به

پدر و مادر عزیزم

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.

تشکر و قدردانی می‌نمایم از استاد بزرگوار پرفسور رجبی که راهنمایی‌های ایشان روشنی راه بنده بوده‌است و استادان پرفسور حسن آبادی و دکتر شجاعی که بنده را در راه تکمیل این پایان نامه راهنمایی نمودند و معلمان گرامی که در طی این راه پر فراز و نشیب تحصیل و تهذیب از سرچشمه‌ی وجودی خود به بنده علم و ایمان ارزانی داشته‌اند، و در نهایت می‌بوسم دست بزرگوارانی که مرا همواره مورد محبت خود قرار داده‌اند و هم‌صحبتی با ایشان مرا از رنج و اندوه می‌رهانند.



## تعهد نامه

اینجانب **کیوان داروئی دیوشلی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌های نزدیک به پوسته‌ی بسته تحت راهنمایی **پروفسور علی اکبر رجبی** متعهد می‌شوم

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

۹۷/۰۶/۲۰

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان نامه ما به هسته به عنوان یک سیستم کوانتومی نگاه می کنیم و به دنبال تابع موج این سیستم کوانتومی هستیم زیرا تابع موج یک موجود ریاضی است که حاوی اطلاعاتی از سیستم است که با استفاده از آن می توان به خواص سیستم پی برد و به طور خاص در یک سیستم هسته ای به گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته و انرژی بستگی هسته پرداخت. هسته های مد نظر ما هسته های نزدیک به پوسته ی بسته هستند که دارای یک نوکلئون و یا یک حفره در لایه ی ظرفیت خود هستند که بر اساس مدل لایه ای همین یک نوکلئون (یا حفره) تعیین کننده ی بسیاری از خواص هسته می باشد.

نوکلئون ها با انرژی جنبشی حدود  $10\text{Mev}$  در داخل هسته در حرکت هستند و این انرژی در مقایسه با انرژی سکون نوکلئون ها اندک است، پس با اطمینان می توان گفت که نوکلئون ها با سرعت غیر نسبیتی در داخل هسته حرکت می کنند و به همین دلیل می توانیم از معادله ی موج شرودینگر که یک معادله ی موج غیر نسبیتی است برای به دست آوردن تابع موج هسته استفاده کنیم، سپس در گام بعدی معادله ی موج شرودینگر را با پتانسیل مرکزی وود ساکسون و یوکاوا به روش ابرتقارن حل می کنیم و معادله ی انرژی و تابع موج سیستم را برای حالت پایه به دست می آوریم و در نهایت با استفاده از این تابع موج، گشتاور دوقطبی مغناطیسی را برای هسته های نزدیک به پوسته ی بسته محاسبه می کنیم. ضمن اینکه ما در این کار از شیوه ی پدیده شناختی برای تعیین ثابت های قابل تنظیم پتانسیل های وود ساکسون و یوکاوا استفاده می کنیم و محاسبات را بر پایه ی آن ها انجام می دهیم و در نهایت مقدارهای به دست آمده از محاسبات را با داده های تجربی مقایسه می کنیم.

واژه های کلیدی: ابرتقارن، پتانسیل یوکاوا، پتانسیل وود ساکسون، گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته.

## فهرست مطالب

فصل اول	۱
مفاهیم هسته‌ای	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۱-۲ ویژگی‌های استاتیکی هسته‌ها	۲
۱-۲-۱ انرژی بستگی هسته‌ای	۳
۱-۲-۲ گشتاور چهار قطبی الکتریکی هسته	۵
۱-۲-۳ ایزواسپین	۶
۱-۲-۴ گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته	۸
۱-۳ پتانسیل هسته‌ای	۱۴
۱-۳-۱ پتانسیل وودساکسون	۱۷
۱-۳-۲ پتانسیل یوکاوا	۱۹
۱-۴ مدل لایه‌ای:	۲۲
فصل دوم	۲۹
روش‌های محاسباتی	۲۹
۲-۱ مقدمه	۳۰
۲-۲ ابرتقارن	۳۰
۲-۲-۱ هامیلتونی ابرتقارنی	۳۱
۲-۳ روش حدس زدن	۳۷
۲-۴ روش NU	۴۰
۲-۴-۱ تعمیم پارامتری روش NU	۴۲

فصل سوم	۴۷
محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌های نزدیک به پوسته‌ی بسته	۴۷
۳-۱ مقدمه	۴۸
۳-۲ محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته با پتانسیل وودساکسون	۵۰
۳-۳ محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته با پتانسیل یوکاوا	۶۲
۳-۴ مقایسه‌ی نتایج:	۷۰
بحث و نتیجه‌گیری:	۷۲
منابع	۷۳

## فهرست شکل ها

- شکل (۱-۱): انرژی بستگی بر نوکلئون هسته بر حسب عدد جرمی [۱]----- ۴
- شکل (۱-۲): پتانسیل وودساکسون [۱]----- ۱۷
- شکل (۱-۳): توزیع جرم هسته [۱]----- ۱۸
- شکل (۱-۴): انرژی یونش آخرین الکترون بر حسب عدد اتمی [۱]----- ۲۳
- شکل (۱-۵): انرژی جدایی نوترون و پروتون برای هسته [۱]----- ۲۴
- شکل (۱-۶): انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپ های مختلف Rn [۱]----- ۲۵
- شکل (۱-۷): سطوح انرژی هسته‌ای در حضور و غیاب پتانسیل اسپین مدار: سمت چپ ترازهای انرژی در حضور یک پتانسیل مرکزی و سمت راست ترازها در حضور پتانسیل اسپین مدار به علاوه پتانسیل مرکزی و همچنین در سمت راست هر تراز ظرفیت نوکلئونی آن مشخص شده است [۱].----- ۲۷
- شکل (۳-۱): ترازهای نوکلئونی هسته‌ها----- ۴۹

## فهرست جداول

- جدول (۳-۱): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{15}\text{O}$  با حضور پتانسیل وودساکسون ----- ۶۰
- جدول (۳-۲): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{39}\text{Ca}$  با حضور پتانسیل وودساکسون ----- ۶۱
- جدول (۳-۳): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{57}\text{Ni}$  با حضور پتانسیل وودساکسون ----- ۶۱
- جدول (۳-۴): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{15}\text{O}$  با حضور پتانسیل یوکاوا ----- ۶۹
- جدول (۳-۵): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{39}\text{Ca}$  با حضور پتانسیل یوکاوا ----- ۶۹
- جدول (۳-۶): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{57}\text{Ni}$  با حضور پتانسیل یوکاوا ----- ۷۰
- جدول (۳-۷): گشتاور دوقطبی مغناطیسی در حضور پتانسیل یوکاوا و وودساکسون ----- ۷۰
- جدول (۳-۸): گشتاور دوقطبی مغناطیسی محاسبه شده‌ی هسته ----- ۷۱

# فصل اول

## مفاهیم هسته‌ای

## ۱-۱ مقدمه

هسته حالت مقید سیستم شامل نوکلئون‌ها را می‌گویند همانطور که اتم حالت مقید سیستم شامل نوکلئون‌ها و الکترون‌ها می‌باشد. واحدهایی که برای ابعاد هسته استفاده می‌شود غالباً از مرتبه‌ی فرمی ( $10^{-15}$ ) است و جرم و انرژی آن از مرتبه‌ی مگا الکترون ولت (Mev) می‌باشد هسته‌ها به شکل تقریبی کروی یا بیضوی هستند و ذرات سازنده‌ی آن دارای گشتاور مغناطیسی هستند و ساکن نیستند. در حالی که چگالی هسته تقریباً برای تمام هسته‌ها ثابت است بر این اساس بدیهی است که شعاع هسته با تعداد نوکلئون‌ها رابطه‌ی مسقیم دارد که اگر تعداد نوکلئون‌ها را با  $A$  نشان دهیم برای تخمین شعاع هسته رابطه‌ی نسبتاً خوبی خواهیم داشت به قسمی که  $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  خواهد بود.

## ۱-۲ ویژگی‌های استاتیکی هسته‌ها

به جهت اینکه بتوانیم درک خوبی از هسته داشته باشیم آن‌را با پارامترهایی توصیف خواهیم کرد که اطلاعاتی از خواص و ویژگی‌های هسته را در دسترس ما قرار خواهند داد برخی از این پارامترها با زمان تغییر می‌کنند که به آن ویژگی‌های دینامیکی هسته می‌گویند مانند مدهای واپاشی و خواص رادیو اکتیو<sup>۱</sup> هسته‌ها و برخی در گذر زمان تغییر نمی‌کنند مانند شعاع میانگین، انرژی بستگی<sup>۲</sup>، گشتاور دوقطبی مغناطیسی<sup>۳</sup>، اسپین و ایزواسپین و ... که به آن‌ها خواص استاتیکی هسته می‌گویند که در ادامه به توضیح برخی از ویژگی‌های استاتیکی هسته‌ها خواهیم پرداخت [۱].

---

<sup>1</sup> Radioactive

<sup>2</sup> Binding energy

<sup>3</sup> Magnetic dipole moment



## ۱-۲-۱ انرژی بستگی هسته‌ای

برای تبدیل یک هسته به پروتون‌ها و نوترون‌های منفرد، باید حتماً به هسته مقداری انرژی بدهیم؛ جرم سکون اجزای منفرد هسته بیشتر از جرم سکون هسته است، با در نظر گرفتن هم انرژی جرم و انرژی، به انرژی متناظر با اختلاف جرم بین هسته و اجزای تشکیل دهنده آن انرژی بستگی ( $E_B$ ) هسته می‌گویند یا به عبارتی بهتر به میزان انرژی که بایستی به یک هسته بدهیم تا به اجزای تشکیل دهنده خود تبدیل شود انرژی بستگی هسته می‌گوییم که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود [۱]:

$$E_B = (Zm_p + Nm_N - \frac{A}{Z}M)c^2 \quad (1-1)$$

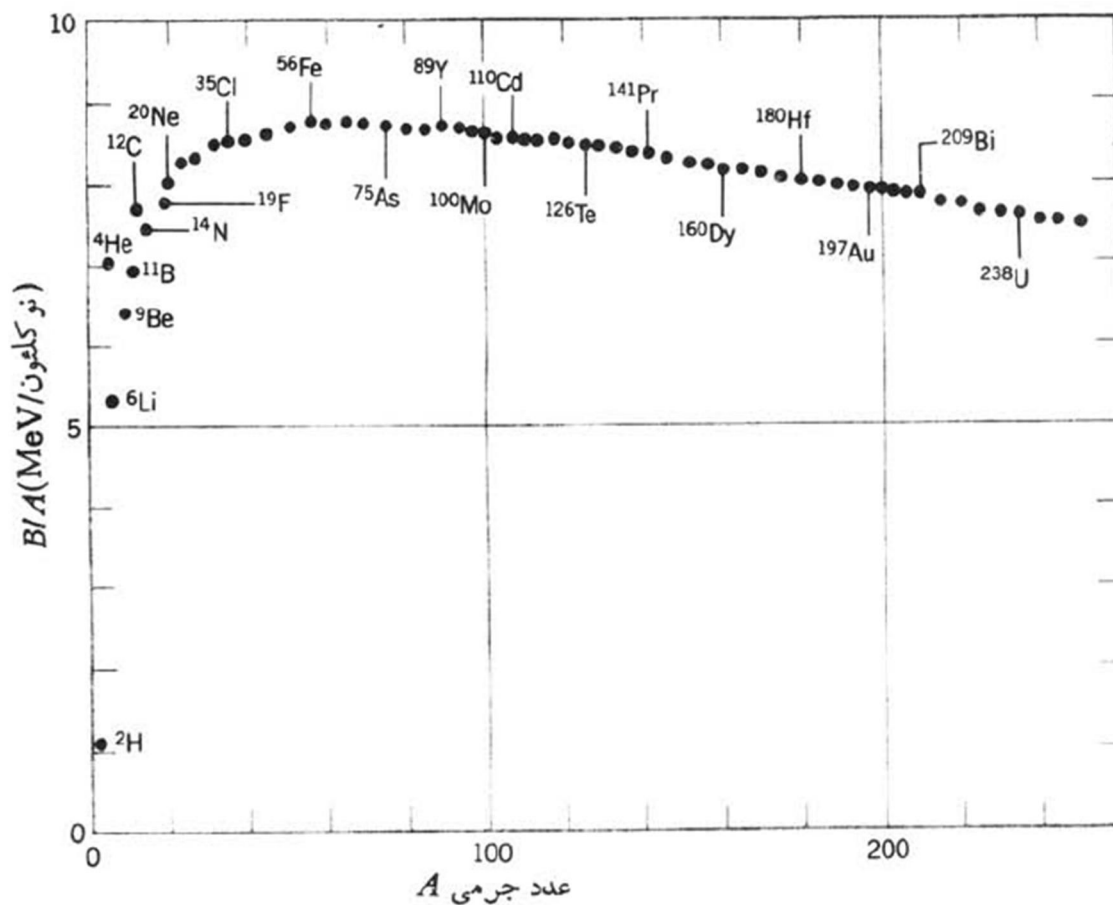
که  $N$  تعداد نوترون‌ها  $Z$  تعداد پروتون‌ها و  $m_N$  و  $m_p$  و  $\frac{A}{Z}M$  به ترتیب جرم‌های پروتون و نوترون و هسته‌ی مورد نظر می‌باشد و  $c$  سرعت نور است، مطلبی که در این مبحث حائز اهمیت است پارامتر انرژی بستگی بر نوکلئون هسته ( $\frac{E_B}{A}$ ) است که برای هسته‌های مختلف محاسبه شده و در هسته‌های پایدار که خیلی سبک نیستند یعنی ( $A > 12$ ) انرژی بستگی در تقریب اول با عدد جرمی متناسب است [۲، ۱]:

$$E_B = A \times 8 \text{ Mev} \quad (2-1)$$

و به طور دقیق‌تر

$$7.7 \text{ Mev} < \frac{E_B}{A} < 8.8 \text{ Mev} \quad (3-1)$$

که شمایی از آن را در نمودار شکل (۱-۱) می‌بینید.



شکل (۱-۱): انرژی بستگی بر نوکلئون هسته بر حسب عدد جرمی [۱]

در عمل ترجیحا به جای اندازه‌گیری جرم خود هسته‌ها به اندازه‌گیری مستقیم جرم اتم‌ها می‌پردازند، به این دلیل که مقدار کل انرژی بستگی الکترون بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی است؛ جرم‌های اتمی با دقت بسیار بالایی تعیین شده‌اند و در جدول‌ها به جای جرم‌های هسته‌ها، جرم‌های اتمی با دقت بسیار بالایی تعیین شده‌اند. در شکل (۱-۱) به نظر می‌آید که برای هسته‌های سبک به سمت هسته‌های سنگین‌تر انرژی بستگی میانگین به ازای هر نوکلئون اندک اندک به حدود مقدار 8 MeV افزایش می‌یابد اما اعداد از هسته‌ای به هسته‌ی دیگر تا حدی افت و خیز دارند و این را می‌توان به اثرات زوجیت نوترون- نوترون و پروتون- پروتون ربط داد که ریشه‌ی آن برمی‌گردد به ویژگی جاذبه‌ای برهمکنش نوکلئون-نوکلئون و جفت‌شدگی اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای و این ثابت بودن تقریبی انرژی بستگی میانگین در غالب هسته‌ها به ما این نتیجه را می‌دهد که هر نوکلئون با تعداد

معدودی از نوکلئون‌های دیگر برهمکنش دارد و لذا برد نیروهای هسته‌ای باید بسیار کوتاه باشد و تقریباً از مرتبه‌ی قطر یک نوکلئون باشد و با یک نظر اجمالی بر انرژی بستگی هسته‌ای و حجم هسته‌ای می‌توان به نکات مهمی درباره‌ی نیروی هسته‌ای دست یافت.

## ۲-۲-۱ گشتاور چهار قطبی الکتریکی<sup>۱</sup> هسته

اگر توزیع بار را در هسته در نظر بگیریم، از یک نقطه در خارج، پتانسیل الکتریکی به صورت زیر است [۳،۱]:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') dv'}{|r - r'|} \quad (۴ - ۱)$$

با بسط ضریب  $|r - r'|^{-1}$  داریم:

$$|r - r'|^{-1} = r^{-1} \left[ 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cong \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right)^2 + \dots \right\} \quad (۵ - ۱)$$

که در آن  $\theta$  زاویه‌ی بین  $r$  و  $r'$  و فرض کرده‌ایم که  $r \gg r'$  باشد، بنابراین داریم:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int \rho(r') dv' + \frac{1}{r^2} \int \rho(r') r' \cos\theta \right]$$

$$+ \frac{1}{r^3} \int \rho(r') r'^2 \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) dv' + \dots \quad (۶ - ۱)$$

<sup>۱</sup> Electric quadrupole moment

جمله‌ی سوم این انتگرال مربوط به چهارقطبی است که گشتاور چهارقطبی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$eQ = e \int \rho(r') r'^2 (3\cos^2\theta' - 1) dv' \quad (۷-۱)$$

که  $\theta'$  را نسبت به محوری که تصویر اسپین هسته روی آن بیشینه است اندازه‌گیری می‌کنیم، هسته‌هایی با اسپین بزرگتر یا مساوی با یک معمولاً دارای گشتاورهای چهارقطبی الکتریکی کوچکی هستند، اندازه‌ی این گشتاور چهارقطبی نشان دهنده‌ی میزان انحراف توزیع بار و در نتیجه توزیع ماده در هسته از تقارن کروی است؛ گشتاور چهارقطبی هسته مشخص می‌کند که هسته کروی است ( $Q=0$ ) یا غیرکروی است ( $Q \neq 0$ ) که اگر  $Q$  مثبت باشد هسته‌ها را غیرکروی کشیده می‌نامند و به عبارتی دیگر مقدار بیشتری از چگالی بار هسته در امتداد محور  $Z$  قرار گرفته‌است تا اینکه در امتداد شعاع متوسط باشد، اگر  $Q$  منفی شود محور  $Z$  چگالی بار کمتری از هسته را با خود خواهد داشت و هسته پهن می‌شود.

### ۳-۲-۱ ایزواسپین

نیروی هسته‌ای قوی نسبت به تعویض پروتون و نوترون کاملاً متقارن است، می‌توانیم بگوییم که نیروی هسته‌ای قوی تنها روی یک نوکلئون اثر می‌کند و این نوکلئون می‌تواند در یکی از دو حالتی که ما پروتون و نوترون می‌نامیم قرار گیرد، درست مثل اسپین الکترون که میتواند در یکی از دو حالت بالا و پایین قرار گیرد، به همین علت این تقارن را تقارن ایزواسپین می‌نامیم [۵،۴].

ایزواسپین یک تقارن است و در مسیر دنیای ماکروسکوپی به سمت دنیای زیر اتمی برای اولین بار در اینجا با تقارنی مواجه می‌شویم که تقارن فضا یا فضا-زمان ملموس نیست بلکه تقارن یک فضای مجرد و درونی مربوط به ذرات است که به فضای ایزوسپینی معروف است.

ایزواسپین را به ذراتی نسبت می دهیم که تحت برهمکنش قوی قرار می گیرند، آنهایی که خواص مشابه و جرمهای تقریباً یکسانی دارند در چندتاییهای ایزواسپینی قرار می گیرند. هادرون ها که شامل مزون ها و باریون ها هستند، به صورت زیر تقسیم بندی می شوند.

$$(p, n), (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), (\pi^+, \pi^0, \pi^-), (\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-), \dots$$

از ایزواسپین به عنوان راهی برای برچسب زدن به اعضای چندگانه استفاده می کنیم زیرا بار الکتریکی در برهمکنش قوی نقشی ندارد و برای متمایز ساختن اعضا از دید برهمکنش قوی و در راستای اصل طرد پائولی در یک سیستم کوانتومی ما نیاز به یک عدد کوانتومی جدید داریم ( و در حد پیشرفته تر چند عدد کوانتومی جدید که شامل طعم و رنگ هم می شوند) که در غیاب برهمکنش های الکترومغناطیسی اعضای چندگانه ی ما قابل تمیز باشد.

ایزواسپین یک بردار در فضای ایزواسپینی است که اگر این بردار را با  $I$  نمایش دهیم مولفه های

آن شامل  $(I_1, I_2, I_3)$  خواهد بود و کمیتی به نام  $I_3$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I_3 = \frac{Q}{e} - \frac{\bar{Q}}{e} \quad (۸ - ۱)$$

که در آن  $Q$  معرف بار الکتریکی ذره و  $\bar{Q}$  بار متوسط چندگانه است که از جمع بستن بارها تقسیم بر تعداد آنها به دست می آید. بنابراین برای چندگانه  $\Delta$  داریم:

$$\frac{\bar{Q}}{e} = \frac{1}{2} \quad (۹ - ۱)$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$I_3(\Delta^{++}) = \frac{3}{2}, \quad I_3(\Delta^+) = \frac{1}{2}, \quad I_3(\Delta^0) = \frac{-1}{2}, \quad I_3(\Delta^-) = \frac{-3}{2} \quad (۱۰ - ۱)$$

و برای نوکلئون‌ها داریم :

$$I_3(n) = \frac{-1}{2} \cdot I_3(p) = \frac{1}{2} \quad (11-1)$$

به این ترتیب پروتون و نوترون ذرات مشابهی در نظر گرفته می‌شوند که در مولفه‌ی سوم ایزواسپین با هم تفاوت دارند یعنی می‌توانیم پروتون و نوترون را دو حالت متفاوت یک ذره‌ای تحت عنوان نوکلئون توصیف کنیم.

## ۴-۲-۱ گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته

مقدار گشتاور یک حلقه‌ی جریان به مساحت  $A$  که حامل جریان  $i$  باشد عبارت است از  $iA$  که اگر جریان  $i$  در اثر گردش بار  $e$  که با سرعت  $v$  در دایره‌ای به شعاع  $r$  در حرکت است به وجود بیاید [۶،۱]:

$$|\mu| = \frac{evr}{2} \quad (12-1)$$

و اگر تکانه‌ی زاویه‌ای  $l = mvr$  باشد، داریم:

$$|\mu| = \frac{e|l|}{2m} \quad (13-1)$$

در بالا یک اثبات ساده‌ای از گشتاور مغناطیسی ارائه دادیم، می‌توانیم جملات بالا را به نحو دیگری نیز بیان کنیم که در این صورت  $i = \frac{e\omega}{2\pi}$  و  $l = I\omega$  پس:

$$i = \frac{el}{2\pi I} \quad (14-1)$$

و برای  $I = mr^2$  و با ضرب کردن جریان در مساحت برای گشتاور مغناطیسی داریم:

$$|\mu| = iA = \frac{el}{2\pi r^2} (\pi r^2) = \frac{e|l|}{2m} \quad (15 - 1)$$

در برداشت ساده‌ای از مدل پوسته‌ای، گشتاور مغناطیسی هسته‌ای با  $A$  فرد را تماماً برخواسته از نوکلئون جفت نشده می‌دانیم، اگر این نوکلئون جفت نشده پروتون باشد (از آنجا که نوترون بدون بار است هیچ سهمی در گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری ندارد)، همانند الکترومغناطیس کلاسیک، حرکت مداری آن گشتاوری به شکل زیر خواهد داشت:

$$\vec{\mu}_L = \frac{e\vec{L}}{2m_p} = \mu_N \left( \frac{\vec{L}}{\hbar} \right) \quad (16 - 1)$$

که در آن  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$  مگنتون هسته‌ای<sup>۱</sup> نام دارد و به عنوان واحد گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته شناخته می‌شود که مقدار آن  $\mu_N = 3.15245 \times 10^{-8}$  (eV/T) است. هنگامی که میدان خارجی اعمال می‌کنیم، این میدان راستای متمایزی را مشخص می‌کند و از این رو سیستم فیزیکی ما تحت چرخش‌های اختیاری دیگر ناوردا نیست اما هنوز تحت چرخش حول محور متمایزی که میدان اعمال نمودیم ناوردا باقی خواهد ماند که به اصطلاح این راستای متمایز را  $Z$  سیستم می‌گوییم بنابراین در سیستم فیزیکی ما (هسته)  $L_z$  هنوز هم ثابت خوبی است، بنابراین گشتاور دوقطبی مغناطیسی در مکانیک کوانتومی در راستای بزرگترین مؤلفه‌ی  $L$  تعریف می‌شود. باید به معادله دوقطبی، گشتاور مغناطیسی ذاتی نوکلئون را نیز اضافه نماییم:

$$\vec{\mu}_S = g_S \mu_N \left( \frac{\vec{S}}{\hbar} \right) \quad (17 - 1)$$

<sup>۱</sup> Nuclear magneton (nm)

که برای پروتون  $g_s = 5.59$  و برای نوترون  $g_s = -3.38$  است. بنابراین عملگر گشتاور دو قطبی مغناطیسی کل برای نوکلئونی منفرد به صورت زیر می‌شود [۲]:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_s = \frac{\mu_N}{\hbar} [g_L \vec{L} + g_s \vec{S}] \quad (۱۸ - ۱)$$

که در آن برای پروتون  $g_L = 1$  و برای نوترون  $g_L = 0$  است. می‌توانیم این معادله را به شکل زیر بنویسیم:

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} (g_L + g_s) (\vec{L} + \vec{S}) + \frac{1}{2} (g_L - g_s) (\vec{L} - \vec{S}) \right] \quad (۱۹ - ۱)$$

و با در نظر گرفتن  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  و با توجه به اینکه  $\vec{L}$  و  $\vec{S}$  جابه‌جا پذیر هستند و با ضرب داخلی هر دو طرف در  $\vec{J}$  داریم:

$$\vec{\mu} \cdot \vec{J} = \frac{\mu_N}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} (g_L + g_s) (J^2) + \frac{1}{2} (g_L - g_s) (L^2 - S^2) \right] \quad (۲۰ - ۱)$$

و در نتیجه مقدار چشمداشتی هر بخش از معادله به صورت (۲۱ - ۱) می‌شود:

$$\mu \frac{j(j+1)}{j} = \mu_N \left[ \frac{1}{2} (g_L + g_s) j(j+1) + \frac{1}{2} (g_L - g_s) (l(l+1) - s(s+1)) \right] \quad (۲۱ - ۱)$$

در نتیجه:

$$\mu = \mu_N \left[ \frac{1}{2} (g_L + g_s) j + \frac{1}{2} (g_L - g_s) \left( \frac{(l-s)(l+s+1)}{j+1} \right) \right] \quad (۲۲ - ۱)$$



از آنجایی که برای هسته ای با نوکلئون جفت نشده ی فرد در مدل پوسته ای  $s = \frac{1}{2}$  و  $j = l \pm \frac{1}{2}$  است، در نهایت برای سهم حاصل از نوکلئون جفت نشده داریم:

$$\mu = \mu_N \left[ j g_L - \frac{1}{2} (g_L - g_s) \right] \quad ; \quad j = l + \frac{1}{2}$$

$$\mu = \mu_N \left[ j g_L - \frac{1}{2} \frac{j}{j+1} (g_L - g_s) \right] \quad ; \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (۲۳ - ۱)$$

که به آنها مقادیر اشمیت می گویند، تقریباً همه ی گشتاورهای دوقطبی مشاهده شده برای چنین هسته هایی بین این دو مقدار قرار دارند.

هر گشتاور چند قطبی پاریته ی خاصی دارد که با توجه به رفتار عملگر چند قطبی در طی تبدیل  $r \rightarrow -r$  تعیین می شود، پاریته ی گشتاور مغناطیسی از عدد نمایی  $(-1)^{L-1}$  پیروی می کند که در آن  $L$  مرتبه ی گشتاور مغناطیسی است به طوری که  $L=0$  برای تک قطبی و  $L=1$  برای دوقطبی مغناطیسی و برای چهارقطبی  $L=2$  است و الی آخر.

نیروی تزویج در هسته ها، جفت شدگی میان نوکلئون ها را چنان تنظیم می کند که برآیند تکانه های زاویه ای و اسپینی هر زوج برابر صفر می شود. به این ترتیب نوکلئون تزویج شده هیچ سهمی در گشتاور مغناطیسی ندارند و در تعیین آن فقط کافی است که نوکلئون های ظرفیت را در نظر بگیریم.

هنگامی که می خواهیم مقدار انتظاری یک گشتاور را حساب کنیم در حالت کلی باید مقدار

انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int \psi^* O \psi dv' \quad (۲۴ - ۱)$$

که  $O$  عملگر الکترومغناطیسی است و از آنجایی که طبق اصل پاریتته، تابع موجی که در ابتدا فرد (یا زوج) باشد همواره فرد (یا زوج) باقی خواهد ماند و از آنجایی که در انتگرال مورد نظر، ما  $\psi$  را دو بار مشاهده می‌کنیم، در نتیجه پاریتته‌ی  $\psi$  برای ما اهمیتی نخواهد داشت که در این صورت اگر پاریتته‌ی مشاهده‌پذیر دارای پاریتته‌ی فرد باشد آنگاه تابع زیر انتگرال بر حسب مختصات فرد خواهد شد که به مقدار انتظاری گشتاور صفر منتهی خواهد شد؛ پس تمام گشتاورهای چند قطبی که پاریتته زوج دارند مورد قبول است، از جمله دوقطبی و هشت قطبی و الی آخر.

از دید کلاسیکی گشتاور دوقطبی مغناطیسی از حرکت ذرات باردار حاصل می‌شود، پس اگر یک توزیع جریان با چگالی جریان  $J$  در نظر بگیریم و پتانسیل برداری  $A$  را روی تمام جریان‌های نمونه محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(r')}{|r - r'|} dv' \quad (۲۵ - ۱)$$

و با بسط  $A$  خواهیم داشت:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int J(r') dv' + \frac{1}{r^3} \int J(r')(r \cdot r') dv' + \dots \right] \quad (۲۶ - ۱)$$

با کمی عملیات ریاضی برای دومین انتگرال خواهیم داشت:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \int r' \times J(r') dv' \right] \quad (۲۷ - ۱)$$

که جمله‌ی داخل کروشه به گشتاور دوقطبی مغناطیسی معروف است:

$$\mu = \frac{1}{2} \int r' \times J(r') dv' \quad (۲۸ - ۱)$$

اگر در این رابطه چگالی جریان را به صورت  $J = \rho v$  در نظر بگیریم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mu = \frac{1}{2} \int r' \times v' \rho' dv' \quad (29 - 1)$$

در حد کوانتومی برای چگالی جریان  $\rho$  با عبارت  $e|\psi(r)|^2$  مواجه هستیم و می‌توان عبارت بالا را به شیوه‌ی مکانیک کوانتومی برای مقدار چشمداشتی یک مشاهده‌پذیر به صورت زیر نوشت:

$$\mu = \frac{e}{2} \int \psi^*(r' \times v') \psi dv' \quad (30 - 1)$$

که جمله‌ی داخل پرانتز برابر است با  $\frac{L}{m}$  که می‌توانیم رابطه‌ی مورد نظر را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mu = \frac{e}{2m} \int \psi^* L \psi dv' \quad (31 - 1)$$

به دلیل اینکه  $|\psi(r)|^2$  یک احتمال فیزیکی است  $\psi$  باید تک مقداری باشد و در همه جا پیوسته باشد و تمام مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول  $\psi$  که به چگالی جریان یا شار ذرات وابسته است باید پیوسته باشد و  $\psi$  هیچگاه نباید نامتناهی باشد. و ما در این کار برای به‌دست آوردن تابع موج از معادله‌ی موج شرودینگر استفاده می‌کنیم که به صورت یک معادله‌ی ویژه مقداری است:

$$H\psi = E\psi \quad (32 - 1)$$

به قسمی که معادله‌ی مستقل از زمان و یک بعدی شرودینگر برای ذره‌ای به جرم  $m$  و با انرژی پتانسیل  $V(x)$  به صورت زیر است:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (33 - 1)$$

تابع موج در واقع توصیف ریاضی بسته‌ی موج است و بسته‌ی موج تمام اطلاعات موجود در ذره را به دست می‌دهد، به طور کلی این معادله به ازای مقادیر معینی از انرژی  $E$  قابل حل است این مقادیر که

معمولا از کاربرد شرایط مرزی برای تابع موج حاصل می‌شوند، ویژه مقادیر انرژی نامیده می‌شوند. همان طور که از معادله‌ی شرودینگر مشخص است برای به دست آوردن تابع موج سیستم نیاز به یک پتانسیل داریم پتانسیلی که معرف سیستم کووانتومی ما است که در بخش بعدی به معرفی پتانسیل هسته‌ای می‌پردازیم.

### ۳-۱ پتانسیل هسته‌ای

در بحث پتانسیل هسته‌ای نکاتی قابل توجه وجود دارد که باید همواره مد نظر قرار بدهیم، از لحاظ کوانتوم مکانیکی یک تفاوت جدی بین اتم و هسته وجود دارد و هر گاه بخواهیم به مدل لایه‌ای نگاه کنیم باید این تفاوت را در ذهن داشته باشیم.

زمانی که می‌خواهیم یک سیستم را به شکل کوانتومی بررسی کنیم باید یک سیستم و منطبق با آن برهمکنشی تعیین کنیم و سپس فرض کنیم که سیستم ما تحت تاثیر برهمکنش مورد نظر ما است و محاسبات کوانتوم مکانیکی را انجام بدهیم؛ در اتم منشاء پتانسیل هسته است و ما فرض می‌کنیم که الکترون‌ها در یک پتانسیلی هستند که ناشی از یک منبع دیگر است و منشاء پتانسیل خود اتم نیست در حالی که اگر بخواهیم هسته را به عنوان یک سیستم کوانتومی تعریف کنیم منشاء پتانسیل خود هسته است و در حقیقت ذرات تحت تاثیر پتانسیلی قرار می‌گیرند که خودشان درست کرده‌اند و در دام برهمکنش‌های بین خودشان می‌افتند و هیچ منشا پتانسیل خارجی وجود ندارد.

در این رهیافت کوانتوم مکانیکی فرض می‌کنیم یک پتانسیل خارجی وجود دارد و ذراتی که هسته را تشکیل می‌دهند شامل نوترون‌ها و پروتون‌ها در داخل چاه پتانسیلی قرار گرفته‌اند که از پیش برای آنها موجود بود و یا به اصطلاح این چاه را شخص دیگری برای آن‌ها حفر کرده است در

حالی که در واقعیت چاه پتانسیل از خود نوکلئون‌ها ناشی می‌شود، و به همین دلیل است که در محاسبات دقیق وقتی می‌خواهند یک هسته را بررسی کنند هنگامی که یک نوکلئون اضافه می‌کنند به یکباره می‌بینند که خواص هسته دگرگون می‌شود سپس اثر این نوکلئون اضافی را با تغییر در پتانسیل هسته جبران می‌کنند و پتانسیل هسته تغییر می‌کند.

اگر بخواهیم از این رهیافت واقع نگرانه استفاده کنیم هر بار باید با اضافه کردن نوکلئون پتانسیل جدیدی را تعریف کنیم، شاید پتانسیل قبلی کاملاً دگرگون نشود ولی قطعاً همان پتانسیل قبل نخواهد بود، به طور مثال وقتی به سیستم ده نوکلئونی یک نوکلئون اضافه می‌کنیم شکل پتانسیل یازده نوکلئونی شکل متفاوتی را نسبت به سیستم قبلی می‌طلبد.

تفاوت ذکر شده در بحث فوق یک تفاوت استراتژیکی است؛ ما در هسته هیچ منشاء پتانسیل خارجی نداریم، آنچه که در این جا به عنوان یک پتانسیل برای هسته پیشنهاد می‌کنیم فرضی است، فرض می‌کنیم تعدادی نوکلئون داریم و به این‌ها به چشم ذرات غیر برهمکنشی می‌نگریم، در ابتدا فرض می‌کنیم ذرات هیچ برهمکنشی با هم ندارند و همدیگر را نمی‌بینند و در ادامه این فرض را اصلاح می‌کنیم.

ابتدا یک پتانسیل پیشنهاد می‌کنیم و تعدادی از حالت‌های کوانتومی (ترازهای انرژی) به دست می‌آید سپس این حالت‌های کوانتومی را توسط ذرات غیر برهمکنشی پر می‌کنیم و خواص دیده شده از هسته‌ها در آزمایشگاه را روی پتانسیل به گونه‌ای اعمال می‌کنیم که در جواب ظاهر شود، حال فرض کنیم که اکنون این ذرات با هم برهمکنش داشته باشند صرف نظر از آن برهمکنشی که این پتانسیل را جایگزین آن کردیم ممکن است برهمکنش‌های جانبی داشته باشند.

در اتم هنگامی که می‌خواهند ترازهای اتم را محاسبه کنند ابتدا فرض می‌کنند الکترون‌ها در پتانسیل خارجی کولنی قرار گرفته‌اند و سپس در نظر می‌گیرند که الکترون‌ها واقعا غیر برهمکنشی

نیستند و زمانی که در اوربیتال‌هایشان قرار می‌گیرند همدیگر را حس می‌کنند و اثرات جانبی ظاهر می‌شوند که آن‌ها را نیز به محاسبات اضافه می‌کنند و مشاهده می‌شود که نتایج با نتایج اسپکتروسکوپی تطابق خوبی پیدا می‌کنند.

آنچه که به عنوان شاهد تجربی در هسته‌ها مشاهده می‌کنیم این مطلب است که در تعدادی از اعداد که اگر تعداد پروتون‌ها یا نوترون‌ها باشند، رفتار هسته تغییر می‌کند، این اعداد که عبارتند از ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ به اعداد جادویی معروف هستند.

ما باید پتانسیلی پیشنهاد دهیم که اعداد جادویی را توصیف کند، شکل پتانسیل‌هایی که پیشنهاد می‌شود متفاوت هستند، می‌توان یک چاه ساده به صورت چاه نامتناهی در نظر گرفت:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & ; r \leq R \\ \infty & ; r > R \end{cases} \quad (۱ - ۳۴)$$

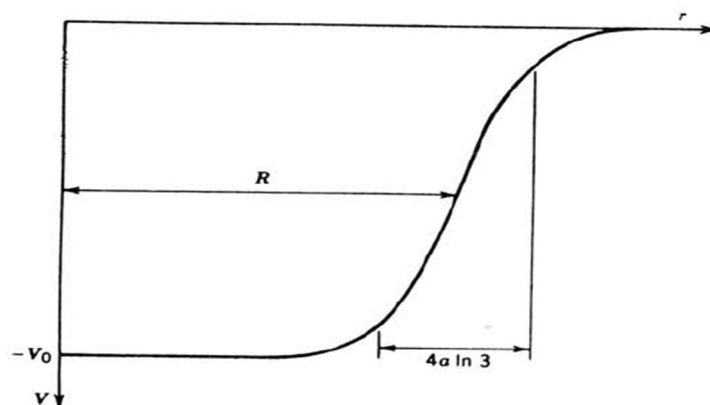
به این معنی که از صفر تا شعاع هسته یک مقداری خاص باشد و از شعاع هسته به بعد مقدار پتانسیل بی‌نهایت باشد، به مانند این که هسته با دیواره‌های بی‌نهایت پتانسیل در یک ناحیه‌ی کروی به شعاع  $R$  محصور شده است، پیشنهاد دیگر نیز می‌تواند نوسانگر هماهنگ به عنوان پتانسیل باشد.

هر مسئله‌ای اعداد کوانتومی مختص به خودش را دارد و محدوده‌ی تغییرات اعداد کوانتومی بستگی به شرایط فیزیکی مسئله دارد؛ در اتم‌ها پتانسیل به  $\theta$  و  $\varphi$  وابسته نیست در هسته‌ها هم پتانسیل به  $\theta$  و  $\varphi$  وابسته نیست و فقط به مختصه‌ی  $r$  فاصله‌ی بین ذرات یا شعاع وابسته است. هنگامی که به حل پتانسیل‌های هسته و اتم می‌پردازیم به دلیل این که پتانسیل آن‌ها مرکزی است، قسمت فضایی مربوط به سیستم را جداگانه حل می‌کنیم که منجر به هارمونیک‌های کروی ( $Y_{lm}$ ) می‌شوند و به همین دلیل است که ما برای دو سیستم کوانتومی متفاوت یعنی هسته و اتم از دو عدد کوانتومی مشابه به هم استفاده می‌کنیم.

می‌توانیم پتانسیل‌ها را به دو نوع تقسیم بندی کنیم، پتانسیل‌های مرکزی و پتانسیل‌های غیرمرکزی، پتانسیل‌هایی که فقط وابسته به شعاع باشند را پتانسیل‌های مرکزی و مابقی را غیرمرکزی می‌گویند، از آنجایی که ما در این کار از پتانسیل مرکزی استفاده می‌کنیم به معرفی چند نمونه از این نوع پتانسیل می‌پردازیم.

### ۱-۳-۱ پتانسیل وودساکسون<sup>۱</sup>

پیش از آنکه به معرفی پتانسیل وودساکسون بپردازیم شکل پتانسیل وودساکسون را به نمایش می‌گذاریم و بحث خود را با این سوال که چرا پتانسیل وود-ساکسون می‌تواند یک پیشنهاد خوب باشد آغاز می‌کنیم.

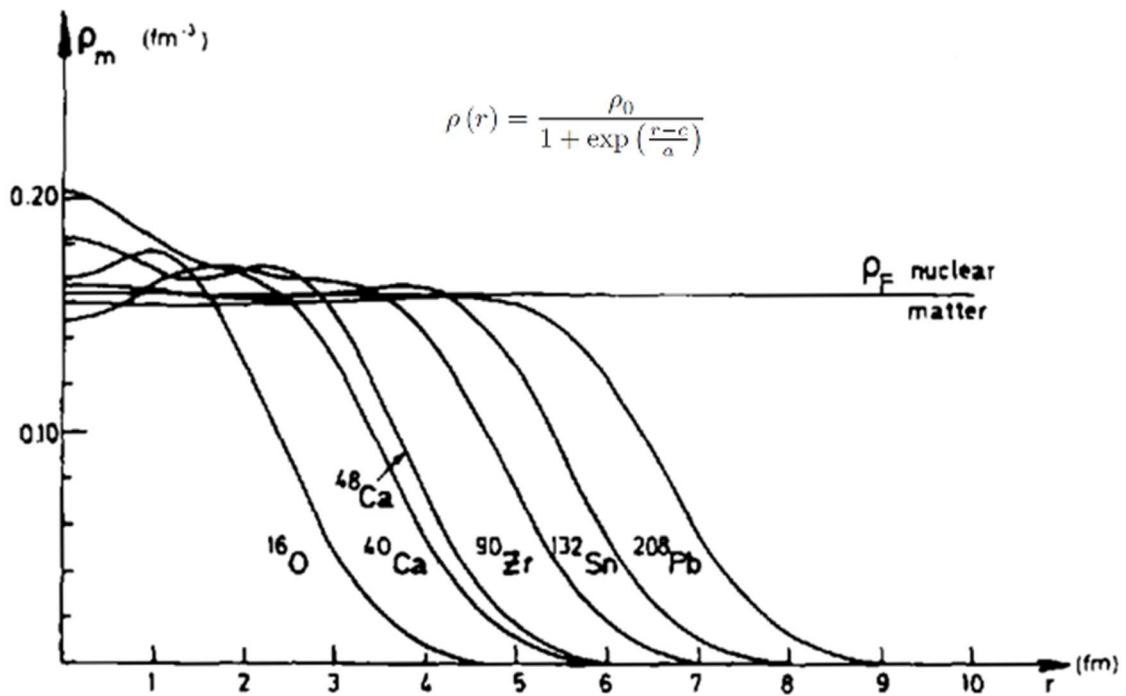


شکل (۱-۲): پتانسیل وودساکسون [۱]

شکل (۱-۲) پتانسیل وودساکسون است و شکل (۱-۳) توزیع جرم هسته است که یک مرکز با چگالی یکنواخت دارد و بعد به شکل نمایی افت می‌کند، پتانسیل وود-ساکسون در واقع تصویر

<sup>۱</sup> Wood-Saxon

همین توزیع است به این معنی که آنجا که ماده‌ی بیشتری است، پتانسیل بیشتری است و آنجا که ماده‌ی کمتری است، پتانسیل کمتری است و این ساده‌ترین پیشنهادی است که می‌توان انجام داد.



شکل (۳-۱): توزیع جرم هسته [۱]

در سال ۱۹۵۴ وود و ساکسون پتانسیلی برای توصیف هسته ارائه نمودند، پیشنهاد آنان یک پتانسیل کوتاه‌برد بود که بخش عظیمی از فیزیک هسته‌ای و مدل لایه‌ای را تشکیل می‌دهد، این پتانسیل که بر حسب فاصله از مرکز هسته است به صورت زیر می‌باشد [۷]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - r_0}{a}\right)} \quad (۳۵ - ۱)$$



که  $V_0$  ،  $a$  و  $r_0$  به ترتیب عمق پتانسیل<sup>۱</sup>، ضخامت پوسته<sup>۲</sup> و شعاع میانگین<sup>۳</sup> هستند که اغلب با مقادیر تجربی سازگارند.

برای پتانسیل وودساکسون مشاهده می‌کنیم که پتانسیل مرکزی است و فقط تابع  $I$  است اما در حالت واقعی پتانسیل هسته مرکزی نیست و بزرگترین شاهد بر این ماجرا تمایل هسته‌ها به داشتن شکل غیر کروی است و این بزرگترین دلیل است که پتانسیل هسته وابسته به  $\theta$  و  $\varphi$  است که ما در مرتبه ی اول از آن صرف نظر می‌کنیم اما بر اساس همین پتانسیل وودساکسون مدلی دیگر ارائه می‌شود که اثر قسمت زاویه‌ای را به صورت تغییر شکل در هسته و ترازهای انرژی وارد می‌کنند که مربوط است به هسته‌های تغییر شکل یافته و به آن مدل نیلسون گفته می‌شود.

## ۲-۳-۱ پتانسیل یوکاوا<sup>۴</sup>

یوکاوا در سال ۱۹۳۳ در فکر این بود که برهم‌کنشی میان نوترون و پروتون را با یک میدان قدرت به تشابه از میدان الکترومغناطیسی تعریف کند. قدرت هسته‌ای باید با مبادله‌ی ذره‌ای که آن را « $U$ » نامید متناظر باشد. چون ذره شناخته شده نیست باید خواص این ذره‌ی ناشناخته‌ی مبادله شده، از خصوصیات خود قدرت استنتاج گردد، او تلاش کرد پتانسیلی بیابد تا تبادل ذراتی را که منجر به نیروی هسته‌ای می‌شوند را توصیف کند، تفاوت عمده بین برهم‌کنش الکترومغناطیسی و برهم‌کنش هسته‌ای قوی برد نامحدود آن در مقایسه با برد حدود یک فرمی هسته‌ای قوی است.

---

<sup>1</sup> Potential depth

<sup>2</sup> Shell thickness

<sup>3</sup> Average radius

<sup>4</sup> Yukawa

یوکاوا اندیشید که قدرت هسته‌ای در فاصله‌ی کوتاه کنش می‌کند و جرم ذره‌ی جدید مبادله شده، به نسبت کوتاهی فاصله‌ی برهم کنشی باید بزرگ باشد. و این‌ها را به صورت فرمول می‌نویسد و درمی‌یابد که ذره‌ی مبادله شده باید جرمی بسیار بزرگ‌تر از جرم الکترون داشته باشد [۹،۸،۵،۴]

اگر  $m$  جرم در حال سکون ذره‌ی مبادله شده باشد آنگاه تا زمانی که  $t$  بزرگتر از آنچه که رابطه‌ی عدم قطعیت مجاز می‌شمارد، نباشد آنگاه یک ذره‌ی مجازی می‌تواند خلق شود و برای مدت زمان  $t$  دوام داشته باشد:

$$t = \frac{\hbar}{mc^2} \quad (۳۶ - ۱)$$

در این صورت بیشترین مسافتی که ذره می‌تواند حرکت کند چنین است:

$$x = ct = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{200 \text{ (Mev} \cdot \text{fm)}}{mc^2} \quad (۳۷ - ۱)$$

بنابراین برای برد  $۱ \text{ fm}$  جرم ذره‌ی مبادله شده از مرتبه‌ی  $۲۰۰ \text{ Mev}/c^2$  است. بار ذره (مثبت یا منفی) باید با بار الکترون مساوی باشد، اما اسپین آن به نظر یوکاوا باید صفر باشد. چنین ذره‌ای هنوز کشف نشده بود. این ذره را بعدها پیون<sup>۱</sup> نامیدند. پیون باردار را سیسیل پاول<sup>۲</sup> در سال ۱۹۴۷ در دانشگاه بریستول کشف کرد و اکنون معلوم شده است که حامل‌های حقیقی نیروی بنیادی قوی پیون‌ها نیستند بلکه گلوئون<sup>۳</sup>ها هستند اما پیون‌ها را می‌توان ذرات تبادلی میانجی بین نوکلئون‌ها دانست.

---

<sup>۱</sup> Pion

<sup>۲</sup> Cecil Frank Powell

<sup>۳</sup> Gluon

بر اساس اصل «عدم قطعیت» هایزنبرگ، ذره با داشتن مقداری جرم (که با مقداری انرژی متناظر است) می تواند میان دو نوکلئون خیلی نزدیک مبادله شود، به شرطی که فرایند خیلی سریع باشد. یک چنین مبادله ای باید مرتباً میان نوکلئون ها در یک هسته صورت گیرد.

معادلات میدان الکترومغناطیسی نمی توانند برای میدان هسته ای به کار روند زیرا این معادلات برای ذرات بدون جرم کاربرد دارند، معادله ی شرودینگر<sup>۱</sup> هم به دلیل اینکه یک معادله ی غیرنسبیتی<sup>۲</sup> است نمی تواند مناسب باشد در نتیجه معادله ای مورد نیاز است که با رابطه ی نسبیتی (۱ - ۳۷) سازگار باشد و همچنین انرژی کل و جرم در حال سکون ذره را به هم پیوند بدهد:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (۱ - ۳۸)$$

در مکانیک کوانتومی به انرژی عملگر  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  و به تکانه عملگر  $-i\hbar \nabla$  نسبت داده می شود، با جایگذاری این عملگرها در رابطه ی فوق، یک معادله ی دیفرانسیل نسبیتی شبیه به معادله ی موج حاصل می شود که به آن معادله ی کلاین-گوردن<sup>۳</sup> می گویند که به شکل زیر است:

$$\left( \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (۱ - ۳۹)$$

به دنبال پتانسیل استاتیکی خواهیم بود که جواب مستقل از زمان معادله ی زیر باشد:

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = 0 \quad (۱ - ۴۰)$$

که در آن  $k = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$  و در مختصات شعاعی با این حساب جواب متقارن کروی به شکل زیر خواهد بود:

$$\phi = g \frac{e^{-k r}}{r} \quad (۱ - ۴۱)$$

<sup>۱</sup> Schrodinger

<sup>۲</sup> non-relativistic equation

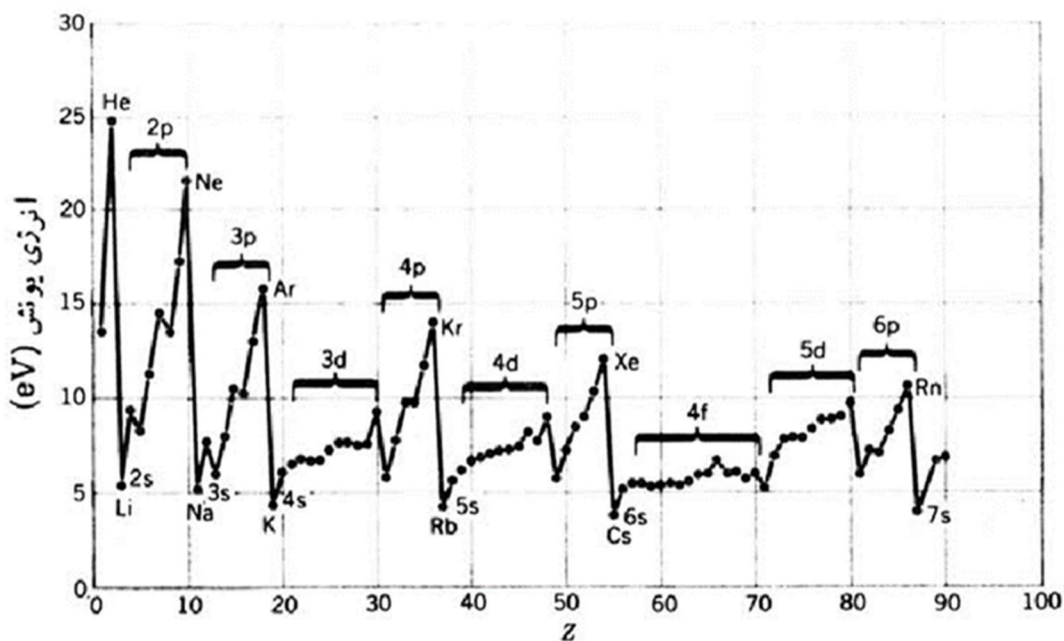
<sup>۳</sup> Klein-Gordon

در اینجا  $g$  بیانگر قدرت میدان «U» است و با پیروی از برهم کنش الکترومغناطیس، برهم کنش قوی میان دو ذره ی بنیادی هسته‌ای می‌تواند به صورت  $-g^2 \frac{e^{-kr}}{r}$  باشد که به این عبارت پتانسیل یوکاوا می‌گوییم.

## ۴-۱ مدل لایه‌ای:

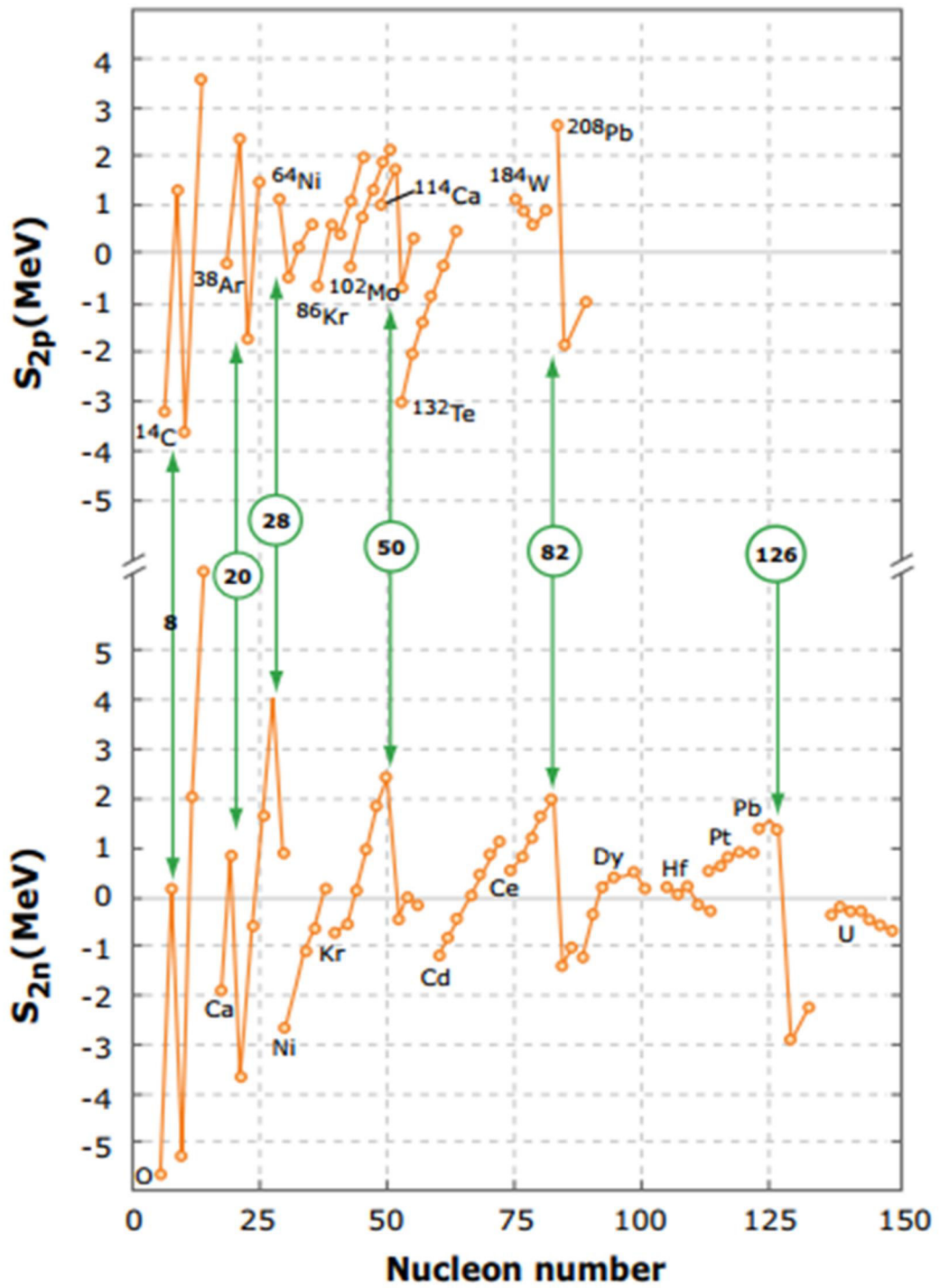
در مدل لایه‌ای ما به هسته به چشم یک سیستم کووانتوم مکانیکی نگاه می‌کنیم و مبنای نام گذاری این مدل یک شباهت عمده در رفتار سیستم کووانتومی بین اتم‌ها و هسته‌ها می‌باشد، در اتم‌ها یک رفتار شیمیایی دوره‌ای را مشاهده می‌کنیم. مندلیف نخستین شخصی بود که این رفتار شیمیایی دوره‌ای اتم‌ها را مشاهده و نظم موجود بین آن‌ها را به صورت علمی بیان کرد، هنگامی که به اتم‌ها به چشم سیستم کووانتومی نگاه می‌کنیم هر بار که یک عدد کووانتومی  $n$  شروع می‌شود تا به اتمام برسد و به عدد کووانتومی دیگر یعنی  $n+1$  برسد در این بین تشکیل یک لایه از اتم‌ها می‌دهد و هر چه که عدد  $n$  بزرگتر باشد لایه‌ی بزرگتری نیز تشکیل می‌دهد ضمن اینکه این لایه‌ها هر کدام دارای زیر لایه‌هایی نیز هستند.

همانطور که در شکل (۴-۱) مشخص است انرژی یونش آخرین الکترون روی عددهایی ماکزیمم می‌شود که با رفتار شیمیایی آن‌ها نیز هم‌خوانی دارد و به این‌ها گازهای نجیب می‌گویند، ما مشابه این رفتار را در هسته‌ها هم می‌بینیم اگر انرژی جداسازی یک نوکلئون یا یک جفت نوکلئون را در هسته‌های مختلف بررسی کنیم، می‌بینیم که انرژی جداسازی یک جفت پروتون یا نوترون روی یک عددهایی دارای ماکزیمم هستند و بعد افت می‌کنند (شکل ۱-۵).

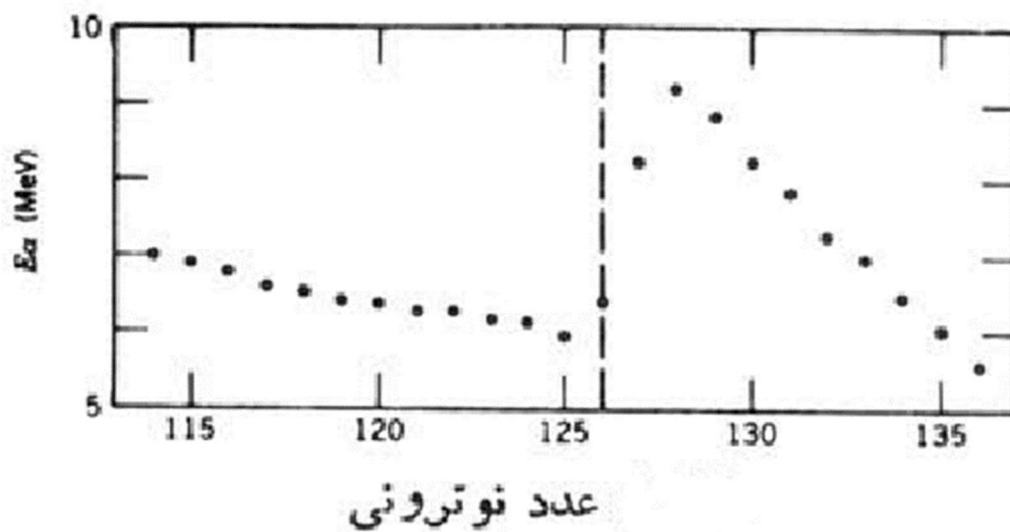


شکل (۴-۱): انرژی یونش آخرین الکترون بر حسب عدد اتمی [۱]

این عددها شامل ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ هستند (در قسمت پروتونی ۱۲۶ را نداریم چون هنوز هسته ای با عدد پروتونی ۱۲۶ کشف نشده است)، مشابه همین عددها را در قسمت‌های دیگری مربوط به هسته‌ها مشاهده می‌کنیم به عنوان نمونه وقتی که انرژی  $\alpha$  ساطع شده از یک رادیو ایزوتوپ را در ایزوتوپ‌هایش بررسی می‌کنیم (شکل ۱-۶) با افزایش ناگهانی انرژی در هسته‌ی دختر در  $N=126$  برخورد می‌کنیم، انرژی بستگی دختر هسته هرچه بیشتر باشد ذره‌ی آلفای گسیل شده پر انرژی‌تر است [۱۰، ۱].



شکل (۵-۱): انرژی جدایی نوترون و پروتون برای هسته [۱]



شکل (۶-۱): انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپ های مختلف Rn [۱]

در فیزیک هسته‌ای ما تلاش می‌کنیم که اعداد جادویی را توجیه کنیم، ابتدا پتانسیلی نظیر نوسانگر هماهنگ پیشنهاد شد که نتایج امیدوار کننده‌ای از خود نشان داد و سپس پتانسیل وود-ساکسون پیشنهاد شد که از نوسانگر هماهنگ بهتر بود اما در توجیه اعداد جادویی در هسته‌های سنگین ناتوان بود که بر آن شدند که به اصلاح این پتانسیل پردازند تا بتوانند دیگر اعداد جادویی را توجیه کنند، در این راستا یک پتانسیل اسپین-مدار پیشنهاد شد که نشان از یک برهمکنش قوی بین تکانه‌ی زاویه‌ای مداری و تکانه‌ی زاویه‌ای اسپین ذاتی هر نوکلئون دارد که در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و ذاتی بایستی جفت شده و اندازه حرکت زاویه‌ای کل را بسازند  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  به گونه‌ای که  $\vec{J}$  به مقادیر زیر محدود می‌شود:

$$j = l + \frac{1}{2} \quad . \quad j = l - \frac{1}{2}$$

که به این دلیل است که عدد کوانتومی اسپین یک نوکلئون برابر  $S = \frac{1}{2}$  است، و انرژی متفاوتی با هر کدام از این دو مقدار  $j$  همراه است که این باعث شکافتگی اسپین-مداری ترازها می‌شود که می‌توانید

نتایج آن را در شکل (۷-۱) ببینید. به طور تجربی مشخص شده است که در هسته‌ها تراز انرژی با  $j$  بزرگ‌تر، پایین‌تر از تراز انرژی با  $j$  کوچک‌تر قرار می‌گیرد.

برهمکنش اسپین مدار را به صورت  $V_{so}(r)(\vec{l} \cdot \vec{s})$  در نظر می‌گیریم ولی شکل  $V_{so}(r)$  خیلی مهم نیست اما با توجه به آنچه که بیان شد آن را منفی در نظر می‌گیریم و این عامل  $(\vec{l} \cdot \vec{s})$  است که باعث تجدید سازمان ترازها می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\vec{j}^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 .$$

$$\vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (۱ - ۴۲)$$

که خواهیم داشت:

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \quad (۱ - ۴۳)$$

با قرار دادن مقادیر انتظاری در این معادله داریم:

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \quad (۱ - ۴۴)$$

برای هر  $l > 0$  یک دوتایه خواهیم داشت که می‌توان اختلاف انرژی آنها را با رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

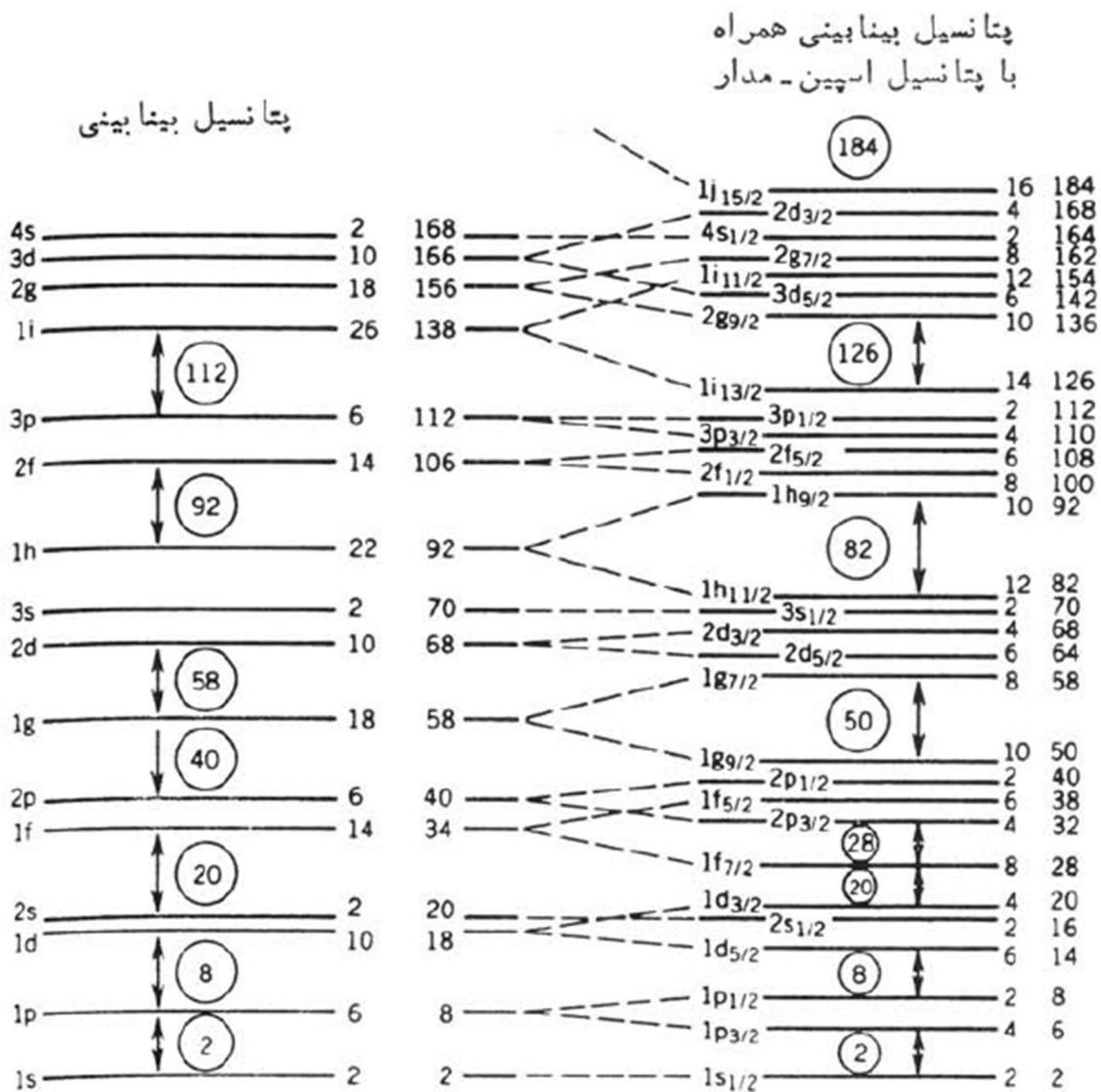
$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l+\frac{1}{2}} - \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2l+1)\hbar^2 \quad (۱ - ۴۵)$$

فاصله‌ی انرژی بین حالت‌ها با افزایش  $l$  افزایش می‌یابد و با دقت در شکل (۷-۱) می‌بینیم که  $1f_{7/2}$  بین پوسته‌ی دوم و سوم قرار می‌گیرد و خود به تنهایی یک لایه را تشکیل می‌دهد که عدد جادویی ۲۸ را به دست می‌دهد و یا آنقدر گاهی یک حالت پایین می‌رود که از لایه‌ی خود خارج و در لایه‌ی



زیرین قرار می‌گیرد مانند  $1g_{\frac{9}{2}}$  که وقتی با ظرفیت ۱۰ نوکلئونی خود در لایه‌ی زیرین قرار می‌گیرد،

عدد جادویی ۵۰ را توجیه می‌کند و به همین ترتیب اعداد جادویی دیگر تولید می‌شوند.



شکل (۷-۱): سطوح انرژی هسته‌ای در حضور و غیاب پتانسیل اسپین-مدار: سمت چپ ترازهای انرژی در حضور یک پتانسیل مرکزی و سمت راست ترازها در حضور پتانسیل اسپین-مدار به علاوه‌ی پتانسیل مرکزی و همچنین در سمت راست هر تراز ظرفیت نوکلئونی آن مشخص شده‌است [۱].

در ادامه‌ی مدل لایه‌ای ذره‌ی خیلی مستقل را در نظر می‌گیریم به این صورت که به استثنای یکی از نوکلئون‌ها بقیه‌ی نوکلئون‌های موجود در هسته در حالت جفت شده هستند و هسته با توجه به

حرکت همین نوکلئون منفرد توصیف می‌شود یعنی فقط نوکلئون تزویج نشده در تعیین خواص هسته نقش دارد.

به عنوان مثال برای هسته‌های تک ذره، هسته‌های  ${}^{41}_{21}\text{Sc}$  و  ${}^{41}_{20}\text{Ca}$ ،  ${}^{17}_9\text{F}$ ،  ${}^{17}_8\text{O}$ ،  ${}^5_3\text{Li}$ ،  ${}^5_2\text{He}$  هسته‌های تک ذره، هسته‌های  ${}^{39}_{20}\text{Ca}$  و  ${}^{39}_{19}\text{K}$ ،  ${}^{15}_7\text{N}$ ،  ${}^{15}_8\text{O}$  که در این نوع هسته‌ها تمام پوسته‌ها یا کاملاً پر هستند و یا کاملاً خالی هستند و دسته‌ی دیگر از هسته‌ها که به هسته‌های تک حفره معروف هستند مانند  ${}^{39}_{20}\text{Ca}$  و  ${}^{39}_{19}\text{K}$ ،  ${}^{15}_7\text{N}$ ،  ${}^{15}_8\text{O}$  که در این نوع هسته‌ها تمام پوسته‌ها یا کاملاً پر هستند و یا کاملاً خالی هستند به جز پوسته‌ی بالاترین حالت انرژی که فقط یک نوکلئون کم دارد و به اصطلاح ایجاد یک حفره می‌کند که با این تک حفره هم به مانند یک تک ذره برخورد می‌کنیم و محاسبات را برای آن انجام می‌دهیم.

## فصل دوم

# روش‌های محاسباتی

## ۲-۱ مقدمه

در چند دهه‌ی اخیر حل معادلات دیفرانسیل به وسیله‌ی روش‌های تحلیلی و عددی بسیار مورد توجه واقع شده‌است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به روش‌های ابرتقارن<sup>۱</sup>، رونگه کوتا<sup>۲</sup>،  $NU^3$  و روش حدس زدن<sup>۴</sup> اشاره کرد که بسیاری از معادلات دیفرانسیل در فیزیک هسته‌ای و کووانتوم و ذرات بنیادی با این روش‌ها قابل حل است که به عنوان نمونه می‌توان به معادله‌ی دیفرانسیل دیراک و معادله‌ی دیفرانسیل شرودینگر اشاره کرد. از این رو ما در این فصل و در بخش‌های بعدی به معرفی و توضیحی مختصر از این روش‌ها می‌پردازیم.

## ۲-۲ ابرتقارن

در سال ۱۹۸۱ ویتن<sup>۵</sup> برای آن که یک مدل ساده غیرنسبیتی برای ساز و کار شکست خود به خودی ابرتقارن فراهم کند، مکانیک کوانتومی ابرتقارن را بر پایه‌ی ساده‌ترین شکل ممکن جبری معرفی کرد که در این بخش به طور خلاصه این فرمول بندی و نماد گذاری را معرفی می‌کنیم.

---

<sup>1</sup> Supersymmetry

<sup>2</sup> Runge-Kutta

<sup>3</sup> Niikiforov-Uvarov

<sup>4</sup> Ansatz

<sup>5</sup> Witten

## ۲-۲-۱ هامیلتونی ابرتقارنی

یکی از کاربردهای ابرتقارن در مکانیک کوانتومی حل معادلات کوانتومی مانند معادله‌ی شرودینگر در حضور پتانسیل‌های مختلف می‌باشد، به این ترتیب که می‌توان با استفاده از پتانسیل‌های ساده، پتانسیل‌های مشکل را ساخت و ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیل‌های حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر پتانسیل‌های حل نشده تبدیل کرد، این روش کمی شبیه به حل نوسانگر هارمونیک یک بعدی است.

حال می‌پردازیم به فرمالیزم هامیلتونی ابرتقارنی، در مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، فوق‌بارها<sup>۱</sup> دو ویژه حالت اورتونرمال یک هامیلتونی را که دارای ویژه مقادیر یکسانی هستند به هم مرتبط می‌سازد که روابط زیر بر آنها حاکم است [۱۵-۱۱]:

$$\{Q, Q_+\} = H, \quad Q^2 = Q_+^2 = 0, \quad (1-2)$$

که  $H$  هامیلتونی ابرتقارنی است و دو مولد ما به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

که در آن عملگرهای خلق و فنا مطابق زیر تعریف می‌شوند:

$$A^- = ip + W(x)$$

$$A^+ = -ip + W(x) \quad (3-2)$$

---

<sup>1</sup> Supercharge

همیلتونی ابرتقارنی به صورت زیر است:

$$H = \begin{pmatrix} A^+ A^- & 0 \\ 0 & A^- A^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}. \quad (۴ - ۲)$$

که

$$H_{\pm} = \frac{p^2}{2m} + V_{\pm}(x) \quad (۵ - ۲)$$

و داریم:

$$V_{\pm}(x) = W^2 \pm \frac{dW}{dx} \quad (۶ - ۲)$$

از طرف دیگر شرط:

$$A^- \psi_E^- = \sqrt{E} \psi_E^- \quad (۷ - ۲)$$

یک ابرتقارن خوب<sup>۱</sup> است، یعنی  $E_0 = 0$  است و در نتیجه داریم:

$$\psi_0^-(x) = C \exp\left(-\int^x W(x') dx'\right) \quad (۸ - ۲)$$

که  $C$  ثابت بهنجارش است و  $W(x)$  ابرپتانسیل<sup>۲</sup> مورد نظر است. بنابراین توانستیم تابع موج حالت پایه را به دست آوریم.

اکنون به معرفی شرط نوردایی شکل<sup>۳</sup> خواهیم پرداخت، اگر معادله‌ی شرودینگر را به صورت (۹ - ۲) داشته باشیم:

---

<sup>۱</sup> Good Supersymmetric

<sup>۲</sup> Superpotential

<sup>۳</sup> Shape invariance

$$H\psi = E\psi \quad \rightarrow \quad \left( \frac{p^2}{2m} + V(a_0 \cdot x) \right) \psi = E_0 \psi \quad (9 - 2)$$

اگر  $E_0 = 0$  باشد داریم:

$$\left( \frac{p^2}{2m} + V(a_0 \cdot x) \right) \psi = 0 \quad (10 - 2)$$

اگر بتوانیم با نگاشت یک به یک ضرایب پتانسیل معادله‌ی شرودینگر، پتانسیلی بر حسب ضرایب جدید و متغیر  $x$  تشکیل بدهیم به اضافه‌ی یک تابعی بر حسب ضرایب جدید و مستقل از  $x$ ، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left( \frac{p^2}{2m} + V(a_1 \cdot x) + R(a_1) \right) \psi = 0 \quad (11 - 2)$$

بازنویسی عبارت قبل به صورت زیر خواهد بود:

$$\left( \frac{p^2}{2m} + V(a_1 \cdot x) \right) \psi = R(a_1) \psi \quad (12 - 2)$$

که  $R(a_1)$  یک عدد است و آن را به عنوان ویژه مقدار می‌پذیریم پس خواهیم داشت:

$$E_1 = R(a_1) \quad (13 - 2)$$

اگر دوباره بتوانیم این پتانسیل را بر حسب ضرایب دیگری به اضافه‌ی یک تابع مستقل از  $x$  بنویسیم خواهیم داشت:

$$\left( \frac{p^2}{2m} + V(a_2 \cdot x) + R(a_2) \right) \psi = R(a_1) \psi \quad (14 - 2)$$

در نتیجه:

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(a_2 \cdot x)\right)\psi = [R(a_2) + R(a_1)]\psi \quad (۱۵ - ۲)$$

و متناظرا

$$E_2 = R(a_2) + R(a_1) \quad (۱۶ - ۲)$$

و به همین ترتیب برای مراتب بالاتر می توانیم بنویسیم:

$$E_n = \sum_{s=1}^n R(a_s) \quad (۱۷ - ۲)$$

که ویژه مقادیر انرژی را می توان از آن به دست آورد و در نهایت می توانیم شرط ناوردایی شکل را به صورت زیر بنویسیم:

$$V_+(a_0 \cdot x) = V_-(a_1 \cdot x) + R(a_1) \quad (۱۸ - ۲)$$

اکنون برای روشنی مطلب در خصوص شرط ناوردایی شکل و به عنوان تمرین به ذکر دو مثال می پردازیم، در این راستا اگر ابر پتانسیل ما به صورت زیر باشد:

$$W(x) = A - Be^{-\alpha x} \quad (۱۹ - ۲)$$

پس  $V_{\pm}$  به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{aligned} V_+(x) &= A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2ABe^{-\alpha x} + B\alpha e^{-\alpha x} \\ &= B^2 e^{-2\alpha x} + B(\alpha - 2A)e^{-\alpha x} + A^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V_-(x) &= A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2A \alpha e^{-\alpha x} - B \alpha e^{-\alpha x} \\
 &= B^2 e^{-2\alpha x} + B(-\alpha - 2A)e^{-\alpha x} + A^2 \quad (20 - 2)
 \end{aligned}$$

همانطور که مشخص است  $V_{\pm}$  تنها در یک ضریب عبارت  $e^{-\alpha x}$  تفاوت دارند و ما باید سازوکاری را فراهم آوریم که شرط ناوردایی شکل برقرار شود و تنها در یک جمله‌ی ثابت اختلاف را مشاهده کنیم از این رو نگاشت:

$$A \rightarrow A' = A - \alpha$$

را در نظر می‌گیریم که با این حساب

$$V_-(x) = B^2 e^{-2\alpha x} + B(\alpha - 2A)e^{-\alpha x} + (A - \alpha)^2 \quad (21 - 2)$$

مشاهده می‌کنیم که صرف نظر از یک جمله‌ی ثابت پتانسیل‌ها یکسان هستند یعنی شرط ناوردایی شکل برقرار است در نتیجه:

$$a_0 = A \quad . \quad a_1 = A - \alpha \quad (22 - 2)$$

در نظر می‌گیریم و با این حساب خواهیم داشت:

$$R(a_1) = A^2 - (A - \alpha)^2 = a_0^2 - a_1^2 \quad (23 - 2)$$

و به همین ترتیب برای مراتب بالاتر به دست می‌آید:

$$a_n = A - n\alpha \quad .$$

$$R(a_n) = (a_{n-1})^2 - (a_n)^2 \quad (24 - 2)$$

و در نهایت برای انرژی خواهیم داشت:

$$E_n = \sum_{s=1}^n R(a_s) = (a_0)^2 - (a_n)^2 = n\alpha(2 - n\alpha) \quad (25 - 2)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود انرژی به سهولت حاصل شد حال به یک مثال دیگر می‌پردازیم که اگر ابریتانسیل به صورت زیر باشد:

$$W(x) = -A \cot(\alpha x) - \frac{B}{A} \quad (26 - 2)$$

برای  $V_{\pm}$  خواهیم داشت:

$$V_+ = (A^2 + A\alpha) \operatorname{cosec}^2(\alpha x) + \frac{B^2}{A^2} + 2B \cot(\alpha x) - A^2$$

$$V_- = (A^2 - A\alpha) \operatorname{cosec}^2(\alpha x) + \frac{B^2}{A^2} + 2B \cot(\alpha x) - A^2 \quad (27 - 2)$$

حال اگر نگاهیست زیر را در نظر بگیریم:

$$A \rightarrow A' = A + \alpha$$

خواهیم داشت:

$$V_- = (A^2 + A\alpha) \operatorname{cosec}^2(\alpha x) + \frac{B^2}{(A + \alpha)^2} + 2B \cot(\alpha x) - (A + \alpha)^2 \quad (28 - 2)$$

با توجه به برقرار بودن شرط نوردایی شکل عبارتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a_0 = A \quad . \quad a_1 = A + \alpha \quad (29 - 2)$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 R(a_1) &= -A^2 + \frac{B^2}{A^2} + (A + \alpha)^2 - \frac{B^2}{(A + \alpha)^2} \\
 &= -a_0^2 + \frac{B^2}{a_0^2} + a_1^2 - \frac{B^2}{a_1^2} \quad (30 - 2)
 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب برای مراتب بالاتر داریم:

$$a_n = A + n\alpha$$

که

$$R(a_n) = -(a_{n-1})^2 + \frac{B^2}{(a_{n-1})^2} + (a_n)^2 - \frac{B^2}{(a_n)^2} \quad (31 - 2)$$

و در نهایت ترم انرژی به صورت زیر به دست می آید:

$$E_n = \sum_{s=1}^n R(a_s) = -(a_0)^2 + \frac{B^2}{(a_0)^2} + (a_n)^2 - \frac{B^2}{(a_n)^2} \quad (32 - 2)$$

## ۲-۳ روش حدس زدن

در بسیاری از معادلات نمی توان جواب دقیقی پیدا کرد، در چنین مواردی می توان با حل یک

معادله ریگاتی<sup>۱</sup> جوابی مناسب برای معادله حدس زد. اگر معادله ی فوق شعاعی شرویدینگر را در  $D$

بعد به صورت (۲ - ۳۳) در نظر بگیریم [۱۶-۱۸]:

---

<sup>۱</sup> Riccati

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} \right) R_{v,\gamma}(x) + \left( V(x) + \frac{\gamma(\gamma + D - 2)\hbar^2}{2\mu x^2} \right) R_{v,\gamma}(x) \\ = E_{v,\gamma} R_{v,\gamma}(x) \end{aligned} \quad (۳۳ - ۲)$$

اگر  $V(x)$  به صورت زیر باشد

$$V(x) = -\frac{\tau}{x} + \kappa x + \eta x^2 \quad (۳۴ - ۲)$$

و معادله‌ی شرودینگر را در شش بعد در نظر بگیریم، با استفاده از تبدیل:

$$R_{v,\gamma}(x) = \frac{\varphi_{v,\gamma}(x)}{x^{\frac{5}{2}}} \quad (۳۵ - ۲)$$

خواهیم داشت:

$$\varphi_{v,\gamma}'' + \left[ \varepsilon - \eta_1 x^2 - \kappa_1 x + \frac{\tau_1}{x} - \frac{(2\gamma + 3)(2\gamma + 5)}{4x^2} \right] \varphi_{v,\gamma}(x) = 0 \quad (۳۶ - ۲)$$

که در آن تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} E_{v,\gamma} \quad \eta_1 = \frac{2\mu}{\hbar^2} \eta \quad \kappa_1 = \frac{2\mu}{\hbar^2} \kappa \quad \tau_1 = \frac{2\mu}{\hbar^2} \tau \quad (۳۷ - ۲)$$

اکنون قصد داریم که به حل معادله از روش حدس زدن بپردازیم، فرض می‌کنیم که تابع موج

$\varphi_{v,\gamma}(x)$  به صورت زیر است:

$$\varphi_{v,\gamma}(x) = h(x) \exp(g(x)) \quad (۳۸ - ۲)$$

که در آن برای توابع  $h(x)$  و  $g(x)$  جوابهای حدسی در نظر می‌گیریم که برای  $h(x)$  داریم:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \prod_{i=1}^v (x - \alpha_i^v) & \text{if } v \geq 1 \end{cases} \quad (39 - 2)$$

و برای  $g(x)$  فرض می‌کنیم:

$$g(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 - \beta x + \delta \ln(x) \quad (40 - 2)$$

اگر جواب حالت پایه را در نظر بگیریم، یعنی:

$$\varphi_{0,\gamma}(x) = \exp(g(x)) \quad (41 - 2)$$

و در معادله‌ی شرودینگر جایگذاری کنیم به یک معادله می‌رسیم که طرف دوم آن پتانسیل معادله‌ی شرودینگر است، یعنی:

$$g''(x) + g'^2(x) = \eta_1 x^2 + \kappa_1 x - \frac{\tau_1}{x} + \frac{(2\gamma + 3)(2\gamma + 5)}{4x^2} - \varepsilon \quad (42 - 2)$$

و با جایگذاری جملات مربوط به  $g''(x)$  و  $g'^2(x)$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 - \alpha(1 + 2\delta) - \frac{2\delta\beta}{x} + \frac{\delta(\delta - 1)}{x^2} \\ = \eta_1 x^2 + \kappa_1 x - \frac{\tau_1}{x} + \frac{(2\gamma + 3)(2\gamma + 5)}{4x^2} - \varepsilon \end{aligned} \quad (43 - 2)$$

با مساوی قرار دادن توان‌های مختلف  $x$  از طرفین معادله‌ی فوق، روابط (44 - 2) به دست می‌آید:

$$\alpha = \sqrt{\eta_1} \quad . \quad \kappa_1 = 2\alpha\beta \quad . \quad \tau_1 = 2\delta\beta$$

$$\varepsilon = \alpha(1 + 2\delta) \quad . \quad \delta = \gamma + \frac{5}{2} \quad (۴۴ - ۲)$$

که با توجه به روابط بالا به راحتی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$  به دست می‌آیند و در نهایت ویژه مقادیر انرژی برای حالت  $v = 0$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{v,\gamma} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \sqrt{\eta_1} (2\gamma + 6) - \frac{\tau_1^2}{(2\gamma + 5)^2} \right] \quad (۴۵ - ۲)$$

و همچنین قسمت شعاعی تابع موج به شکل زیر در می‌آید

$$R_{0\gamma}(x) = N_\gamma x^{-\frac{5}{2}} \varphi_{0\gamma}(x) = N_\gamma x^\gamma \exp\left(\frac{\sqrt{\eta_1}}{2} x^2 - \frac{\tau_1}{2\gamma + 5} x\right) \quad (۴۶ - ۲)$$

که  $N_\gamma$  ضریب نرمالیزاسیون است و به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که ویژه مقادیر انرژی و تابع موج به دست می‌آید.

## ۲-۴ روش NU

این روش بر اساس تقلیل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم که در اینجا معادله‌ی شرودینگر است

پایه‌ریزی شده‌است، معادله‌ای به فرم (۴۷ - ۲) را در نظر می‌گیریم [۱۹، ۱۵]:

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi(s) = 0 \quad (۴۷ - ۲)$$

که  $\sigma$  و  $\tilde{\sigma}$  چند جمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه‌ی دوم و  $\tilde{\tau}$  یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه‌ی اول است، با در نظر گرفتن تابع موج به صورت زیر

$$\Psi(s) = \phi(s)y(s) \quad (۴۸ - ۲)$$

و قرار دادن در معادله‌ی قبل این معادله تبدیل می‌شود به

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad (۴۹ - ۲)$$

که

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (۵۰ - ۲)$$

و در اینجا معادله‌ی (۲-۴۹) دارای یک حل خاص با درجه‌ی  $n$  است در زمانی که رابطه‌ی زیر برقرار باشد که  $\lambda$  به صورت زیر تعریف شود:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad n = 0.1.2. \dots \quad (۵۱ - ۲)$$

باید به این نکته توجه کرد که  $\lambda_n$  و  $\lambda$  از یک جواب خاص شکل  $y(s) = y_n(s)$  که یک چند جمله‌ای درجه‌ی  $n$  است، به دست می‌آیند، به علاوه اینکه جمله‌ی  $y_n(s)$  از رابطه‌ی رودریگز زیر به دست می‌آید:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma''(s)\rho(s)) \quad (۵۲ - ۲)$$

که در آن  $B_n$  ثابت نرمالیزاسیون است و  $\rho(s)$  تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند:

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \cdot \quad \omega(s) = \sigma(s)\rho(s) \quad (۵۳ - ۲)$$

به منظور به دست آوردن ویژه مقدار انرژی در روش نیکارو-اوراوو تابع  $\pi(s)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{t}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{t}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (54-2)$$

که

$$k = \lambda - \pi'(s) \quad (55-2)$$

از آنجایی که باید  $\pi(s)$  حداکثر یک چند جمله‌ای درجه‌ی یک باشد عبارت زیر رادیکال باید توان دو یک عبارت درجه‌ی یک باشد که با حل این معادله می‌توانیم در نهایت ویژه مقادیر انرژی را به دست آوریم. از طرف دیگر فاکتور دیگر  $\phi(s)$  باید در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\frac{d}{ds} \ln \phi(s) = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (56-2)$$

## ۱-۴-۲-۲ تعمیم پارامتری روش NU

معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دو (۵۷-۲) را در نظر می‌گیریم، که به فرم کلی معادله‌ی شرودینگر است تا تعمیم پارامتری روش NU به دست آید [۲۰].

$$\frac{d^2}{ds^2} \Psi_n(s) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} \Psi_n(s) + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \Psi_n(s) = 0 \quad (57-2)$$



با مقایسه‌ی معادله‌ی فوق و رابطه‌ی (۲-۴۹) روابط زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s$$

$$\sigma(s) = s(1 - \alpha_3 s)$$

$$\tilde{\sigma}(s) = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \quad (۵۸ - ۲)$$

با قرار دادن روابط بالا در رابطه‌ی (۵۴ - ۲) خواهیم داشت:

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8} \quad (۵۹ - ۲)$$

که

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \quad .$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) \quad .$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1 \quad .$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 \quad .$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3 \quad (۶۰ - ۲)$$

با در نظر گرفتن اینکه تابع دلتای ریشه‌ی مربعی زیر رادیکال در معادله‌ی (۲-۵۴) بایستی صفر باشد،

پس خواهیم داشت:

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (۶۱ - ۲)$$

که

$$\alpha_9 = \alpha_3 \alpha_7 + \alpha_3^2 \alpha_8 + \alpha_6 \quad (62 - 2)$$

از معادله‌ی (۵۹ - ۲) دیده می‌شود که مقادیر مختلف  $k$  منجر به  $\pi(s)$  های متفاوت می‌شود. اگر رابطه‌ی زیر در نظر گرفته شود:

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} \quad (63 - 2)$$

که  $\pi(s)$  برابر می‌شود با:

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad (64 - 2)$$

و سپس به دست می‌آید:

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad (65 - 2)$$

و معادله‌ی ویژه‌ی مقداری انرژی به آسانی از رابطه‌های (۵۱ - ۲) و (۵۴ - ۲) و نتایجی که در صفحه‌ی قبل حاصل شد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (66 - 2)$$

و به منظور به دست آوردن تابع موج می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\Psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{\left(\alpha_{10} - 1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10} - 1\right)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (67 - 2)$$

که

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad .$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad .$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \quad .$$

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (68 - 2)$$



## فصل سوم

محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی  
مغناطیسی هسته‌های نزدیک  
به پوسته‌ی بسته

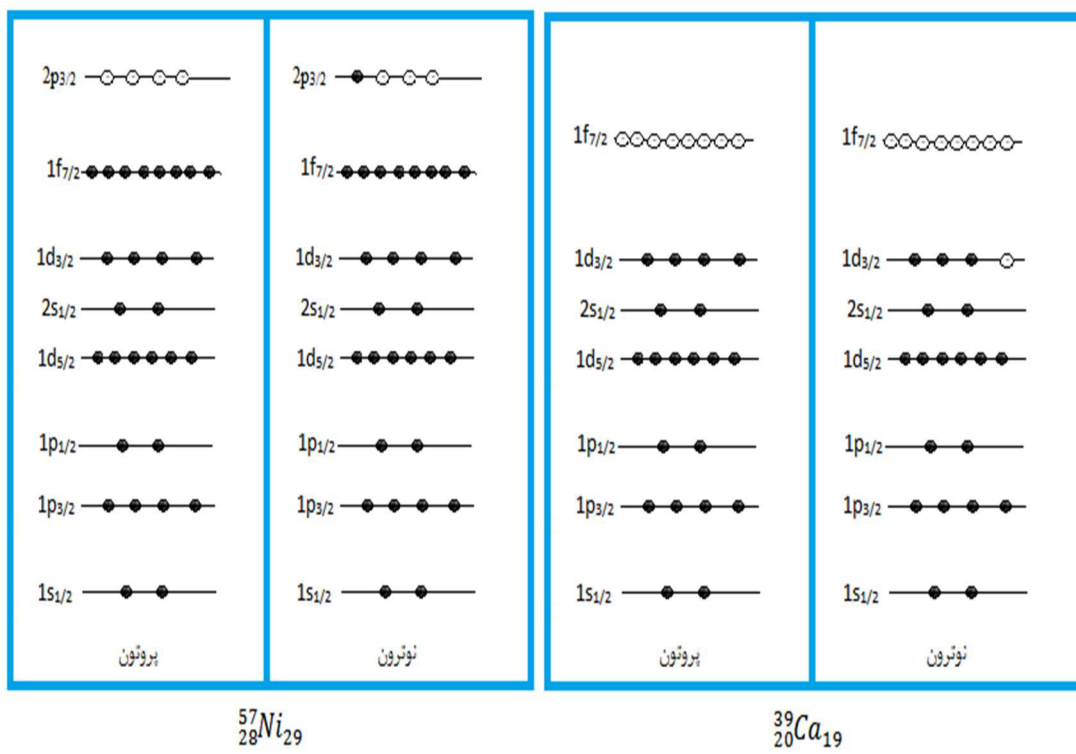
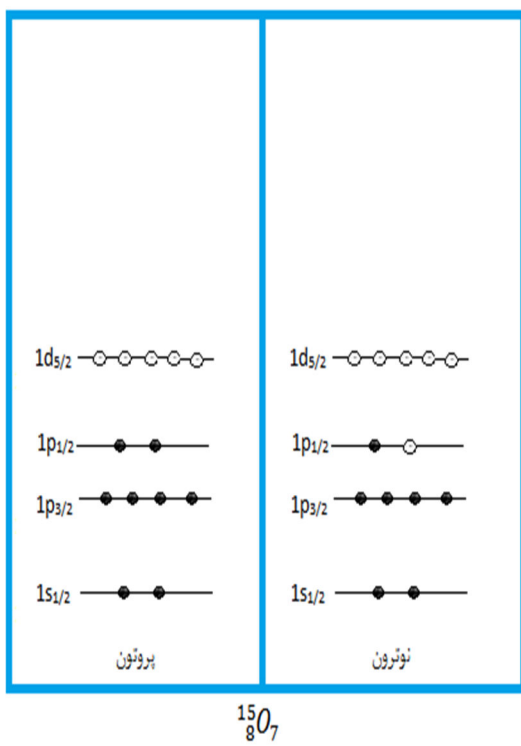
## ۱-۳ مقدمه

ما به هسته به عنوان یک سیستم کوانتومی نگاه می‌کنیم و به دنبال تابع موج این سیستم کوانتومی هستیم زیرا تابع موج یک موجود ریاضی است که حاوی اطلاعاتی از سیستم است که با استفاده از آن می‌توان به خواص سیستم پی برد و به طور خاص در یک سیستم هسته‌ای به گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته و انرژی بستگی هسته پرداخت.

از آن جایی که انرژی بستگی نوکلئون از مرتبه ی انرژی جنبشی آن می‌باشد پس با اطمینان می‌توان گفت که نوکلئون‌ها با سرعت غیر نسبیتی حرکت می‌کنند ( $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-2}$ ) و به همین دلیل معادله‌ی موج شرودینگر که یک معادله موج غیر نسبیتی است، برای محاسبات ما مناسب می‌باشد.

ما در این فصل قصد داریم به محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌های نزدیک به پوسته‌ی بسته پردازیم از این روی چند هسته را که در نزدیکی پوسته‌ی بسته قرار دارند را به عنوان هسته‌های هدف انتخاب می‌کنیم که هسته‌های هدف مورد نظر ما عبارتند از  $^{15}_8O_7$ ،  $^{39}_{20}Ca_{19}$  و  $^{57}_{28}Ni_{29}$  که اکنون به ترسیم ترازهای پروتونی و نوترونی آن‌ها می‌پردازیم تا مدل هسته‌ای متناسب با آن‌ها را در نظر بگیریم.

همان‌طور که از نمودار ترازهای هر هسته در شکل (۱-۳) پیدا است هر کدام از هسته‌ها در لایه‌ی ظرفیت خود تنها یا یک نوکلئون خارج از پوسته‌ی بسته دارند و یا یک نوکلئون داخل پوسته‌ی بسته کم دارند که به اصطلاح می‌گوییم یک حفره داخل پوسته‌ی بسته دارند، از این روی ما از مدل لایه‌ای برای توصیف هسته‌های خود استفاده می‌کنیم و محاسبات خود را بر اساس همین مدل انجام می‌دهیم.



شکل (۱-۳): ترازهای نوکلئونی هسته‌ها

از آنجا که در مدل لایه‌ای خواص سیستم را از طریق نوکلئون‌های جفت نشده‌ی لایه‌ی ظرفیت تعیین می‌کنند در هسته‌های هدف ما نیز تک نوکلئون و یا یک حفره داریم که بر این اساس خواص سیستم ما را مشخص می‌کنند و به همین دلیل ما برای به‌دست آوردن تابع موج سیستم خود از معادله‌ی موج شرودینگر در سه بعد بهره می‌بریم و با قرار دادن پتانسیل هسته‌ای مناسب در معادله‌ی شرودینگر و سپس حل این معادله می‌توانیم ویژه مقادیر انرژی سیستم را تعیین کنیم و سپس با استفاده از تابع موج به‌دست آمده گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌ها را محاسبه کنیم.

## ۲-۳ محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته با پتانسیل

### وودساکسون

برای انجام محاسبات ابتدا قسمت شعاعی معادله‌ی شرودینگر را در سه بعد نوشته و سپس پتانسیل مرکزی وود-ساکسون را در آن قرار می‌دهیم و پس از کمی تغییرات به حل معادله با استفاده از روش ابرتقارن می‌پردازیم، معادله‌ی شرودینگر در سه بعد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R_{n,l}(r) + \left( V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right) R_{n,l}(r) \\ = E_{n,l} R_{n,l}(r) \end{aligned} \quad (۱-۳)$$

که در آن  $m$ ،  $E_{n,l}$ ،  $V(r)$  و  $l$  به ترتیب جرم ذره، انرژی ذره، پتانسیل و ممتمم زاویه‌ای کل می‌باشند؛ با در نظر گرفتن  $R_{n,l}(r) = \frac{\Psi_{n,l}(r)}{r}$  و قرار دادن پتانسیل وود-ساکسون در معادله‌ی فوق خواهیم داشت [۲۱]:



$$\frac{-d^2\Psi_{n,l}(r)}{dr^2} + \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2}V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}E_{n,l} \right) \Psi_{n,l}(r) = 0 \quad (2-3)$$

با تغییر متغیر

$$r = R(x+1) \quad . \quad \alpha = \frac{R}{a} \quad (3-3)$$

داریم:

$$V_l = \frac{l(l+1)}{r^2} = \frac{l(l+1)}{R^2(1+x)^2} \quad (4-3)$$

که با بسط

$$(1+x)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \quad (5-3)$$

خواهیم داشت:

$$V_l = \gamma(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots) \quad (6-3)$$

که  $\gamma = \frac{l(l+1)}{R^2}$  و از طرفی با استفاده از تقریب سد مرکزگرا برای  $\frac{1}{r^2}$  [۱۹-۲۱]:

$$V_l = \gamma \left( d_0 + \frac{d_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) \quad (7-3)$$

برای تعیین پارامترهای مجهول دو تابع  $F(x)$  و  $G(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = (1 + e^{\alpha x})^{-1} \quad .$$

$$G(x) = (1 + e^{\alpha x})^{-2} \quad (۸ - ۳)$$

که بسط تیلور این توابع حول صفر به شکل زیر خواهند بود:

$$F(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha x}{4}$$

$$G(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) = \frac{1}{4} - \frac{\alpha x}{4} + \frac{\alpha^2 x^2}{16} \quad (۹ - ۳)$$

با جایگذاری این دو رابطه در (۳ - ۷) و مقایسه با (۳ - ۶) خواهیم داشت:

$$d_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2} .$$

$$d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2} .$$

$$d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (۱۰ - ۳)$$

در نهایت با جایگذاری (۳ - ۳) و (۳ - ۷) در (۳ - ۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{-d^2 \Psi_{n,l}(x)}{dx^2} + \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \gamma d_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{\gamma d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) \Psi_{n,l}(x) \\ = \left( \frac{2m}{\hbar^2} E_{n,l} - \gamma d_0 \right) \Psi_{n,l}(x) \end{aligned} \quad (۱۱ - ۳)$$

اکنون با در نظر گرفتن تقریب سد مرکزگرا به حل معادله به روش ابرتقارن می‌پردازیم؛ معادله‌ی بالا

را می‌توان به فرم کلی زیر نوشت [۱۴]:

$$\frac{d^2 G_{n,l}}{dx^2} = (V_{eff} - \tilde{E}_{n,l}) G_{n,l} \quad (12-3)$$

که:

$$\tilde{E}_{n,l} = \frac{2m}{\hbar^2} E_{n,l} - \gamma d_0.$$

$$V_{eff} = \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0 + d_1}{1 + e^{ax}} + \frac{\gamma d_2}{(1 + e^{ax})^2} \quad (13-3)$$

اگر تابع موج حالت پایه را بر حسب ابرپتانسیل  $\varphi(x)$  به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$G_{0,l} = \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x \varphi(x) dx\right) \quad (14-3)$$

و در رابطه‌ی (۱۲-۳) جایگزین کنیم با کمی محاسبه داریم:

$$\varphi^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \varphi'(x) = \frac{\hbar^2}{2m} (V_{eff} - \tilde{E}_{0,l}) \quad (15-3)$$

که به معادله‌ی مرتبه‌ی اول ریکاتی معروف است، ابرپتانسیل پیشنهادی ما برای حل این معادله برای

پتانسیل وود-ساکسون به صورت زیر است:

$$\varphi(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( A + \frac{B}{1 + e^{ax}} \right) \quad (16-3)$$

که A و B ثابت‌های ابرپتانسیل ما هستند، با جایگذاری این ابرپتانسیل در معادله‌ی ریکاتی خواهیم

داشت:

$$A^2 + \frac{B^2}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} = \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \gamma d_1}{1 + e^{\alpha x}}$$

$$+ \frac{\gamma d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} - \frac{2m}{\hbar^2} E_{0,l} + \gamma d_0 \quad (۱۷ - ۳)$$

که با در نظر گرفتن:

$$\frac{\alpha B e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2} = \frac{\alpha B}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} \quad (۱۸ - ۳)$$

خواهیم داشت:

$$A^2 + \frac{B^2 + \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB - \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} = \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \gamma d_1}{1 + e^{\alpha x}}$$

$$+ \frac{\gamma d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} - \frac{2m}{\hbar^2} E_{0,l} + \gamma d_0 \quad (۱۹ - ۳)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب داریم:

$$A^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{n,l} + \gamma d_0 .$$

$$B^2 + \alpha B = \gamma d_2$$

$$2AB - \alpha B = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \gamma d_1 \quad (۲۰ - ۳)$$

با ساده سازی عبارت‌های بالا و کمی محاسبه داریم:

$$E_{0,l} = \frac{-\hbar^2}{2m} (A^2 - \gamma d_0) .$$

$$B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma d_2}}{2} .$$

$$A = \frac{C - B^2}{2B} \quad (۲۱ - ۳)$$

که  $C = \gamma d_2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \gamma d_1$  و با توجه به مشخص شدن ضرایب A و B تابع ابرپتانسیل و جایگذاری ابرپتانسیل در رابطه‌ی (۳ - ۱۴) و با عملیات انتگرال گیری از آن در نهایت برای تابع موج داریم:

$$G_{0,l} = \exp \left( \left( \frac{\frac{l(l+1)}{R^2} d_2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \frac{l(l+1)}{R^2} d_1}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}} + \frac{\left( \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}}{2} \right)^2}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}} x \right) \times (1 + e^{\alpha x})^{-\frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}}{2\alpha}} \right) \quad (۲۲ - ۳)$$

اکنون با در نظر گرفتن شرط ناوردایی شکل و تشکیل  $V_{\pm}$  می‌توانیم ترم انرژی را به دست آوریم، برای  $V_{\pm}$  داریم:

$$V_{\pm} = \varphi^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \varphi'(x)$$

که:

$$V_+ = \frac{\hbar^2}{2m} \left( A^2 + \frac{B^2}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{\alpha B e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right).$$

$$V_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left( A^2 + \frac{B^2}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\alpha B e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) \quad (23 - 3)$$

با جایگذاری A از (21 - 3) در (23 - 3) خواهیم داشت:

$$V_+ = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - B^2}{2B} \right)^2 + \frac{B^2 - \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{C - B^2 + \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} \right).$$

$$V_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - B^2}{2B} \right)^2 + \frac{B^2 + \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{C - B^2 - \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} \right) \quad (24 - 3)$$

اکنون برای یکسان سازی ضرایب نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$B \rightarrow B' = B - \alpha$$

که با توجه به آن خواهیم داشت:

$$V_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - (B - \alpha)^2}{2(B - \alpha)} \right)^2 + \frac{B^2 - \alpha B}{(1 + e^{\alpha x})^2} + \frac{C - B^2 + \alpha B}{1 + e^{\alpha x}} \right) \quad (25 - 3)$$

حال اگر فرض کنیم:

$$a_0 = B \quad . \quad a_1 = B - \alpha \quad (26 - 3)$$

خواهیم داشت:

$$R(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - a_0^2}{2a_0} \right)^2 - \left( \frac{C - a_1^2}{2a_1} \right)^2 \right) \quad (27-3)$$

به همین ترتیب برای  $R(a_2)$  داریم:

$$R(a_2) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - a_1^2}{2a_1} \right)^2 - \left( \frac{C - a_2^2}{2a_2} \right)^2 \right) \quad (28-3)$$

و در می‌یابیم که  $a_n = B - n\alpha$  و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R(a_n) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \right)^2 - \left( \frac{C - a_n^2}{2a_n} \right)^2 \right) \quad (29-3)$$

که در نهایت  $E_{n,l}^-$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_{n,l}^- = \sum_{i=1}^n R(a_i) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{C - a_0^2}{2a_0} \right)^2 - \left( \frac{C - a_n^2}{2a_n} \right)^2 \right) \quad (30-3)$$

و در آخر برای انرژی سیستم داریم:

$$E_{n,l} = E_{n,l}^- + E_{0,l}$$

در نتیجه:

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{l(l+1)d_0}{R^2} - \left( \frac{\frac{l(l+1)}{R^2}(d_1+d_2) - \frac{2m}{\hbar^2}V_0}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2} - 2n\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\left( \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2}}{2} - n\alpha \right)^2}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2} - 2n\alpha} \right) \right) \quad (31-3)$$

حال برای محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌های مورد نظر بایستی مقدار انتگرال زیر را برای هر کدام از هسته‌ها به دست آوریم:

$$\mu = -\mu_N N^2 4\pi R^2 \int (1+x) \exp \left( 2 \left( \frac{\frac{l(l+1)}{R^2}d_2 - \frac{2m}{\hbar^2}V_0 + \frac{l(l+1)}{R^2}d_1}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\left( \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2}}{2} \right)^2}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2}} \right) x \times (1 + e^{\alpha x})^{-\frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 4\frac{l(l+1)}{R^2}d_2}}{\alpha}} \right)$$



$$\times \left[ \frac{\frac{l(l+1)}{R^2} d_2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \frac{l(l+1)}{R^2} d_1 + \left( \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}}{2} \right)^2}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}} + \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}}{2} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{1}{R(1+x)} \right] dx \quad (۳۲ - ۳)$$

که N ضریب نرمالیزاسیون است و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T = 4\pi R \int_0^{\infty} \exp \left( 2 \left( \frac{\frac{l(l+1)}{R^2} d_2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 + \frac{l(l+1)}{R^2} d_1}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}} + \left( \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}}{2} \right)^2 \right) x \right) \times (1 + e^{\alpha x})^{-\frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 4 \frac{l(l+1)}{R^2} d_2}}{\alpha}} dx .$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{T}} \quad (3 - 33)$$

با محاسبه‌ی پارامترهای مربوط به هر کدام از هسته‌ها و جایگذاری آن در انتگرال‌ها و حل آن‌ها به وسیله‌ی برنامه‌ی ممتیکا توانستیم گشتاور دوقطبی مغناطیسی هر کدام از هسته‌ها را محاسبه کنیم، در پتانسیل وودساکسون عمق پتانسیل را از رابطه‌ی  $V_0 = 50 \pm 32 \frac{N-Z}{A}$  و برای شعاع هسته هم داریم  $R = 1.27A^{\frac{1}{3}}$  و به این ترتیب گشتاور دوقطبی مغناطیسی را بر حسب  $a$  های مختلف محاسبه می‌کنیم [۲۶-۲۳] و مقدار آن‌ها را با مقادیر تجربی گزارش شده در مرجع [۲۷] مقایسه می‌کنیم.

محاسبات برای  $^{15}\text{O}$  در جدول (۳-۱) بر حسب مگنتون هسته‌ای آورده شده‌است که گشتاور دوقطبی محاسبه شده بر حسب  $a$  های مختلف با داده‌ی تجربی مقایسه شده و در  $a = 0.30$  بهترین نتیجه را گرفتیم و مقدار محاسبه شده با خطای نسبی  $0.65$  اختلاف بسیار کمی با مقدار تجربی را نشان می‌دهد.

جدول (۳-۱): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{15}\text{O}$  با حضور پتانسیل وودساکسون

خطای نسبی (درصد)	$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{our calculation}}$ (nm)	$a$ (fm)	هسته
2.85	0.7889	0.7664	0.25	$^{15}_8\text{O}_7$
0.65	0.7889	0.7837	0.30	$^{15}_8\text{O}_7$
2.19	0.7889	0.8062	0.35	$^{15}_8\text{O}_7$
5.85	0.7889	0.8351	0.40	$^{15}_8\text{O}_7$
10.41	0.7889	0.8711	0.45	$^{15}_8\text{O}_7$
16.03	0.7889	0.9154	0.50	$^{15}_8\text{O}_7$

محاسبات برای  $^{39}\text{Ca}$  در جدول (۳-۲) آورده شده است که گشتاور دوقطبی محاسبه شده بر حسب  $a$  های مختلف با داده‌ی تجربی مقایسه شده و در  $a = 0.45$  بهترین نتیجه را گرفتیم و مقدار محاسبه شده با خطای نسبی 0.88 اختلاف بسیار کمی با مقدار تجربی را نشان می‌دهد.

جدول (۳-۲): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{39}\text{Ca}$  با حضور پتانسیل وودساکسون

خطای نسبی (درصد)	$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{our calculation}}$ (nm)	$a$ (fm)	هسته
7.93	1.1417	1.0512	0.30	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
6.02	1.1417	1.0729	0.35	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
2.19	1.1417	1.0994	0.40	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
0.88	1.1417	1.1316	0.45	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
2.51	1.1417	1.1704	0.50	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
6.52	1.1417	1.2162	0.55	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$

محاسبات برای  $^{57}\text{Ni}$  در جدول (۳-۳) آورده شده است که گشتاور دوقطبی محاسبه شده بر حسب  $a$  های مختلف با داده‌ی تجربی مقایسه شده و در  $a = 0.25$  بهترین نتیجه را گرفتیم و مقدار محاسبه شده با خطای نسبی 17.33 اختلاف قابل قبولی را با مقدار تجربی نشان می‌دهد.

جدول (۳-۳): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{57}\text{Ni}$  با حضور پتانسیل وودساکسون

خطای نسبی (درصد)	$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{our calculation}}$ (nm)	$a$ (fm)	هسته
17.33	0.9600	1.1264	0.25	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
17.71	0.9600	1.1301	0.30	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
18.21	0.9600	1.1348	0.35	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
18.78	0.9600	1.1403	0.40	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
21.92	0.9600	1.1704	0.45	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
20.30	0.9600	1.1549	0.50	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$

در سه جدول بالا مقدارهای محاسبه شده با پتانسیل وودساکسون در مقایسه با داده‌های تجربی نتایج خوبی را نشان می‌دهند و می‌بینیم که اختلاف کمی بین داده‌های تجربی و بهترین نتیجه در محاسبات ما وجود دارد و محاسبات تا حدود بسیار زیادی موفقیت آمیز بوده‌اند.

### ۳-۳ محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته با پتانسیل

#### یوکاوا

محاسبات خود را با یک پتانسیل هسته‌ای مناسب دیگر انجام می‌دهیم و در آخر یک مقایسه‌ای بین نتایج به‌دست آمده انجام می‌دهیم. در معادله‌ی شرودینگر (۳-۱) با در نظر گرفتن  $R_{n,l}(r) = \frac{\Psi_{n,l}(r)}{r}$  و پتانسیل یوکاوا خواهیم داشت:

$$\frac{-d^2\Psi_{n,l}(r)}{dr^2} + \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2}V_0e^{-ar}}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}E_{n,l} \right) \Psi_{n,l}(r) = 0 \quad (3-34)$$

برای پتانسیل یوکاوا با استفاده از بسط تیلور می‌توانیم ساده‌سازی زیر را انجام دهیم [۲۸]:

$$V(r) = -\frac{V_0e^{-ar}}{r} = -V_0 \frac{(1-ar)}{r} = -\frac{V_0}{r} + aV_0 \quad (3-35)$$

پس با قرار دادن (۳-۳۴) در (۳-۳۳) خواهیم داشت:

$$\frac{-d^2\Psi_{n,l}(r)}{dr^2} + \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2}V_0}{r} + \frac{2m}{\hbar^2}(aV_0) + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}E_{n,l} \right) \Psi_{n,l}(r) = 0$$

(۳-۳۶)

معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{-d^2\Psi_{n,l}(r)}{dr^2} + \left( \varepsilon + \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \right) \Psi_{n,l}(r) = 0 \quad (37-3)$$

که:

$$\beta = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 \quad .$$

$$\gamma = l(l+1) \quad .$$

$$\varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2} (aV_0 - E_{n,l}) \quad (38-3)$$

به حل معادله (36-3) به روش ابرتقارن می‌پردازیم که می‌توان آن را به فرم کلی زیر نوشت:

$$\frac{d^2 G_{n,l}}{dx^2} = (V_{eff} - \tilde{E}_{n,l}) G_{n,l} \quad (39-3)$$

که

$$\tilde{E}_{n,l} = -\varepsilon \quad .$$

$$V_{eff} = \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \quad (40-3)$$

تابع موج حالت پایه را بر حسب ابرپتانسیل  $\varphi(x)$ :

$$G_{0,l} = \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x \varphi(x) dx\right) \quad (3-41)$$

و معادله‌ی ریکاتی:

$$\varphi^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \varphi'(x) = \frac{\hbar^2}{2m} (V_{eff} - \tilde{E}_{0,l}) \quad (3-42)$$

ابرپتانسیل پیشنهادی ما برای حل این معادله برای پتانسیل یوکاوا به صورت زیر است:

$$\varphi(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(A + \frac{B}{r}\right) \quad (3-43)$$

که A و B ثابت‌های ابرپتانسیل ما هستند، با جایگذاری این ابرپتانسیل در معادله‌ی ریکاتی خواهیم داشت:

$$A^2 + \frac{B^2}{r^2} + \frac{2AB}{r} - \frac{B}{r^2} = \varepsilon + \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \quad (3-44)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب داریم:

$$A^2 = \varepsilon$$

$$B^2 - B = \gamma$$

$$2AB = \beta \quad (3-45)$$

با ساده سازی عبارت‌های بالا و کمی محاسبه داریم:

$$B = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} .$$

$$A = \frac{\beta}{2B}$$

$$E_{0,l} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0}{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}} \right)^2 + aV_0 \quad (46-3)$$

با توجه به مشخص شدن ضرایب A و B تابع ابرپتانسیل و جایگذاری ابرپتانسیل در رابطه‌ی (3-41) و با عملیات انتگرال گیری از آن در نهایت برای تابع موج داریم:

$$G_{0,l} = \exp(Ar + B \ln(r)) \quad (47-3)$$

که می‌شود:

$$G_{0,l} = \left( r^{\frac{1 \pm \sqrt{1+4l(l+1)}}{2}} \right) \left( \exp \left( \frac{\frac{2m}{\hbar^2} V_0}{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}} r \right) \right) \quad (48-3)$$

اکنون با در نظر گرفتن شرط ناوردایی شکل و تشکیل  $V_{\pm}$  ترم انرژی را به دست می‌آوریم، برای  $V_{\pm}$  داریم:

$$V_{\pm} = \varphi^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \varphi'(x) \quad (49-3)$$

که:

$$V_+ = \frac{\hbar^2}{2m} \left( A^2 + \frac{B^2}{r^2} + \frac{2AB}{r} + \frac{B}{r^2} \right) .$$

$$V_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left( A^2 + \frac{B^2}{r^2} + \frac{2AB}{r} - \frac{B}{r^2} \right) \quad (50-3)$$

با جایگذاری A از (46-3) در (50-3) خواهیم داشت:

$$V_+ = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2B} \right)^2 + \frac{B^2 + B}{r^2} + \frac{\beta}{r} \right).$$

$$V_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2B} \right)^2 + \frac{B^2 - B}{r^2} + \frac{\beta}{r} \right) \quad (51-3)$$

اکنون برای یکسان سازی ضرایب نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$B \rightarrow B' = B + 1$$

که با توجه به آن خواهیم داشت:

$$V_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2(B+1)} \right)^2 + \frac{B^2 + B}{r^2} + \frac{\beta}{r} \right) \quad (52-3)$$

حال اگر فرض کنیم:

$$a_0 = B \quad . \quad a_1 = B + 1 \quad (53-3)$$

خواهیم داشت:

$$R(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2a_0} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2a_1} \right)^2 \right) \quad (54-3)$$

به همین ترتیب برای  $R(a_2)$  داریم:



$$R(a_2) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2a_1} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2a_2} \right)^2 \right) \quad (55-3)$$

و در می‌یابیم که  $a_n = B+n$  و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R(a_n) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2a_{n-1}} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2a_n} \right)^2 \right) \quad (56-3)$$

که در نهایت  $E_{n,l}^-$  این چنین به دست می‌آید:

$$E_{n,l}^- = \sum_{i=1}^n R(a_i) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2a_0} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2a_n} \right)^2 \right) \quad (57-3)$$

و در آخر برای انرژی سیستم داریم:

$$E_{n,l} = E_{n,l}^- + E_{0,l}$$

در نتیجه:

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{\beta}{2a_0} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2a_n} \right)^2 \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0}{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}} \right)^2 + aV_0$$

و برای محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌های  $^{15}_8O_7$ ،  $^{39}_{20}Ca_{19}$  و  $^{57}_{28}Ni_{29}$  بایستی

مقدار انتگرال زیر را برای هر کدام از هسته‌ها به دست آوریم:

$$\mu = -\mu_N N^2 4\pi \int \left( r^{1 \pm \sqrt{1+4l(l+1)}} \right) \left( \exp \left( \frac{-\frac{4m}{\hbar^2} V_0}{1 \pm \sqrt{1+4l(l+1)}} r \right) \right) \times \left( \frac{-\frac{2m}{\hbar^2} V_0}{1 \pm \sqrt{1+4l(l+1)}} r + \frac{1 \pm \sqrt{1+4l(l+1)}}{2} \right) dr \quad (3-58)$$

که N ضریب نرمالیزاسیون تابع موج است.

روشن است که تابع موج ما از پارامترهای مربوط به پتانسیل یوکاوا تنها به  $V_0$  وابسته است و به پیروی از آن گشتاور دوقطبی هم به این صورت تنها به  $V_0$  وابسته است و ما نیز آن را به روش پدیده شناختی تعیین می‌کنیم؛ با محاسبه‌ی پارامترهای مربوط به هر کدام از هسته‌ها و جایگذاری آن در انتگرال‌ها و حل آن‌ها به وسیله‌ی برنامه‌ی متمتیکا توانستیم گشتاور دوقطبی مغناطیسی را برای هر کدام از هسته‌ها محاسبه کنیم.

در جدول (۳-۴) محاسبات برای  $^{15}\text{O}$  بر حسب مگنتون هسته‌ای آورده شده‌است که گشتاور دوقطبی مغناطیسی محاسبه شده برحسب  $V_0$  های مختلف با داده‌ی تجربی مقایسه شده و در  $V_0=40$  بهترین نتیجه را گرفتیم و مقدار محاسبه شده با خطای نسبی 3.27 اختلاف بسیار کمی با مقدار تجربی را نشان می‌دهد.

جدول (۳-۴): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{15}\text{O}$  با حضور پتانسیل یوکاوا

خطای نسبی (درصد)	$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{our calculation}}$ (nm)	$V_0$ (Mev)	هسته
26.61	0.7889	0.5790	25.0	$^{15}_8\text{O}_7$
18.85	0.7889	0.6402	30.0	$^{15}_8\text{O}_7$
8.82	0.7889	0.7193	35.0	$^{15}_8\text{O}_7$
3.27	0.7889	0.8147	40.0	$^{15}_8\text{O}_7$
17.11	0.7889	0.9239	45.0	$^{15}_8\text{O}_7$

در جدول (۳-۵) محاسبات برای  $^{39}\text{Ca}$  آورده شده است که گشتاور دوقطبی محاسبه شده بر حسب  $V_0$  های مختلف با داده‌ی تجربی مقایسه شده و در  $V_0=75$  بهترین نتیجه را گرفتیم و مقدار محاسبه شده با خطای نسبی 0.88 اختلاف بسیار کمی با مقدار تجربی را نشان می‌دهد.

جدول (۳-۵): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{39}\text{Ca}$  با حضور پتانسیل یوکاوا

خطای نسبی (درصد)	$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{our calculation}}$ (nm)	$V_0$ (Mev)	هسته
7.93	1.1417	0.7666	60.0	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
6.02	1.1417	0.8467	65.0	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
2.19	1.1417	0.9367	70.0	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
0.88	1.1417	1.0353	75.0	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
2.51	1.1417	1.1418	80.0	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
6.52	1.1417	1.2553	85.0	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$

در جدول (۳-۶) محاسبات برای  $^{57}\text{Ni}$  آورده شده است که گشتاور دوقطبی محاسبه شده بر حسب  $V_0$  های مختلف با داده‌ی تجربی مقایسه شده و در  $V_0=30$  بهترین نتیجه را گرفتیم و مقدار محاسبه شده با خطای نسبی 0.68 اختلاف بسیار کمی با مقدار تجربی را نشان می‌دهد.

جدول (۳-۶): گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $^{57}\text{Ni}$  با حضور پتانسیل یوکاوا

خطای نسبی (درصد)	$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{our calculation}}$ (nm)	$V_0$ (Mev)	هسته
17.22	0.9600	0.7947	25.0	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
0.68	0.9600	0.9665	30.0	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
21.36	0.9600	1.1651	35.0	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$
44.14	0.9600	1.3838	40.0	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$

در سه جدول (۳-۴)، (۳-۵) و (۳-۶) مقدارهای محاسبه شده با یوکاوا در مقایسه با داده‌های تجربی نتایج خوبی را نشان می‌دهند و می‌بینیم که اختلاف کمی بین داده‌های تجربی و بهترین نتیجه در محاسبات ما وجود دارد و محاسبات تا حدود بسیار زیادی موفقیت آمیز بوده‌اند.

### ۳-۴ مقایسه‌ی نتایج:

در جدول (۳-۷) گشتاور دوقطبی مغناطیسی را برای هسته‌های  $^{15}_8\text{O}_7$ ،  $^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$  و  $^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$

گزارش داده‌ایم که در آن محاسبات خود با پتانسیل‌های وود-ساکسون و یوکاوا را با توجه به داده‌های تجربی در یک نما مقایسه کرده‌ایم که ملاحظه می‌شود که محاسبات با پتانسیل وودساکسون غالباً به داده‌های تجربی نزدیک‌تر هستند.

جدول (۳-۷): گشتاور دوقطبی مغناطیسی در حضور پتانسیل یوکاوا و وودساکسون

$\mu_{\text{exp}}$ (nm)	$\mu_{\text{Yukawa}}$ (nm)	$\mu_{\text{W-S}}$ (nm)	هسته
0.7889	0.8147	0.7837	$^{15}_8\text{O}_7$
1.1417	1.0353	1.1316	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
0.9600	0.9665	1.1264	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$

در مقام مقایسه‌ی کار خود با دیگران به چند نمونه از کارهای انجام شده اشاره می‌کنیم؛ در مرجع [۲۹] اس. گوداسمیت<sup>۱</sup> برای هسته  $^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$  مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی را  $1.04(\text{nm})$  به دست آورده‌اند که محاسبات ما کمی بهتر از ایشان می‌باشد. در مرجع [۳۰] رزنبلوم<sup>۲</sup> و استیرت<sup>۳</sup> برای هسته‌های  $^{15}_8\text{O}_7$ ،  $^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$  مقدارهای دوقطبی را به ترتیب  $0.89(\text{nm})$  و  $2.18(\text{nm})$  به دست آورده‌اند که محاسبات ما با پتانسیل یوکاوا و وود-ساکسون در هر دو مورد بهتر است، این مقایسه‌ها را می‌توانید در جدول (۸-۳) مشاهده کنید. و همچنین در این جدول به مقایسه‌ی نتایج خود با مقدارهای محاسبه شده توسط جی. ام. یائو و همکارانش در مرجع [۳۱] و هم چنین کار هافمن و رینگ در مرجع [۳۲] پرداختیم که در دو هسته می‌توانستیم این مقایسه را انجام بدهیم، با توجه به نتایج موجود در کارها در هسته‌ی  $^{15}_8\text{O}_7$  نتیجه‌ی محاسبات ما بهتر از دو کار دیگر به دست آمده‌است و در کل ملاحظه می‌شود که کار هافمن-رینگ در هسته‌های  $^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$  به دلیل تاثیر محاسبات نسبیتی در کار آنان بهتر از هر دو کار ما است.

جدول (۸-۳): گشتاور دوقطبی مغناطیسی محاسبه شده‌ی هسته

$\mu_{\text{exp}} (\text{nm})$	$\mu_{\text{H-R}}(\text{nm})$	$\mu_{\text{yao}} (\text{nm})$	$\mu_{\text{R-S}} (\text{nm})$	$\mu_{\text{S.G}} (\text{nm})$	$\mu_{\text{Yukawa}}(\text{nm})$	$\mu_{\text{W-S}}(\text{nm})$	هسته
0.7889	0.640	0.570	0.890	--	0.8147	0.7837	$^{15}_8\text{O}_7$
1.1417	1.150	0.980	--	1.040	1.0353	1.1316	$^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$
0.9600	--	--	2.180	--	0.9665	1.1264	$^{57}_{28}\text{Ni}_{29}$

<sup>1</sup> S. Goudsmit

<sup>2</sup> Rosenblum

<sup>3</sup> Steyert

## بحث و نتیجه‌گیری:

در ابتدا ما سه هسته را که نزدیک به پوسته‌ی بسته بودند انتخاب نمودیم و چون این هسته‌ها دارای یک نوکلئون (یا یک حفره) در لایه‌ی ظرفیت خود بودند از مدل لایه‌ای برای بررسی این هسته‌ها استفاده کردیم و توانستیم اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای کل سیستم را تعیین کنیم و سپس برای به‌دست آوردن تابع موج سیستم از معادله‌ی موج شرودینگر که یک معادله‌ی غیر نسبیتی است استفاده کردیم.

با قرار دادن پتانسیل‌های هسته‌ای مناسب یعنی پتانسیل‌های وودساکسون و یوکاوا در معادله‌ی شرودینگر اقدام به حل آن کردیم و با استفاده از روش ابرتقارن تابع موج و انرژی سیستم را به دست آوردیم و سپس با قرار دادن این تابع موج در فرمول گشتاور دوقطبی مغناطیسی توانستیم برای هسته‌های نزدیک به پوسته‌ی بسته که  $^{15}_8O$ ،  $^{39}_{20}Ca$  و  $^{57}_{28}Ni$  بودند، گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن‌ها را حساب کنیم. و در آخر با مقایسه بین محاسبات ما و داده‌های تجربی دیدیم که این محاسبات تا حدودی موفقیت‌آمیز بوده‌است و اختلاف کمی بین مقدارهای به‌دست آمده و داده‌های تجربی وجود دارد.

## منابع

- [1] Kenneth S. krein, (1998), “**Introductory Nucleae Physics**”, J. willey & Sons, Vol 1,2.
- [2] دلیو. ان. کاتینگهام، دی. ای. گرین وود، (۱۳۸۶)، “**مبانی فیزیک هسته ای**”، جلد اول، م. ف. رحیمی، ح. رضازاده، ویراست دوم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford, (1960), “**Foundations of Electromagnetic Theory**”, Addison-Wesley.
- [4] دلیو. ان. کاتینگهام، دی. ای. گرین وود، (۱۳۹۱)، “**فیزیک ذرات بنیادی**”، جلد اول، م. ف. رحیمی، ح. رضازاده، ویراست دوم، دانش نگار، مشهد.
- [5] Griffiths. D. J, (1984), “**Introduction to Elementary particles**”, John Wiley & Sons, Inc, pp27.
- [6] Jackson J.D, (1999), “**Classical electrodynamics**”, American Journal of Physics 67, 841.
- [7] Roger. D. Wood, David S. Saxon, (1954), “Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering”, **Phys. Rev. 95, 577-578.**
- [8] Yukawa H, (1935), “On the Interaction of Elementary Particles I”, **Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 48,**
- [9] Yukawa H and Sakata S, (1937), “On the interaction of elementary particles II”, **Proc. Phys. Math. Soc. Japan 19 1084.**
- [10] بی. ال. کوهن. (۱۹۶۹)، “**مفاهیم فیزیک هسته ای**”، جلد اول، م. مدرس، ر. معصومی، انتشارات دانشگاه تهران، تهران.

- [11] Bagchi B, (2000), “**Supersymmetry in quantum and classical mechanics**”, Chapman & Hall CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Boca Raton, Vol. 116.
- [12] م. توکلی، (۱۳۸۷)، پایان نامه ارشد، ابرتقارن در مکانیک کووانتومی، دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [13] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, (2001), “**Supersymmetry in Quantum Mechanics**”, World Scientific.
- [14] مقصودی. ا، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد، بررسی عددی و تحلیلی برهمکنش فوق ریز و سطوح انرژی ایزوتوپ‌های مختلف، دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [15] زرین کمر. ص، (۱۳۸۷)، رساله‌ی دکتری، معادلات دی کی پی سالیپتر بدون اسپین در مدل هسته‌ای پتانسیل، دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [16] A. A. Rajabi, (2005), “Exact Analytical Solution of the Schrodinger Equation for an N-Identical Body-Force System”, **Few-Body system**, **37**, **267**, **197-213**.
- [17] صالحی. ن، (۱۳۹۰)، رساله‌ی دکتری، محاسبه‌ی طیف باریون‌ها به کمک گروه‌های تقارنی و با در نظر گرفتن پتانسیل نگهدارنده‌ی فوق کروی کوارک‌های تشکیل دهنده، ، دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [18] A. A. Rajabi, (2003), “Static Properties of Hadrons from MIT bag model With Interacting quarks”, **Indian J. Pure and Appl. Phys**, Vol. 41, 89-94.
- [19] V. H. Badalov, H. I. Ahmadov, A. I. Ahmadov, (2009),” Analytical Solutions of the Schrodinger Equation With the Woods Saxon Potential for Arbitrary l State” **Int. J. Mod. Phys. E**, Vol. 18, No. 3, **631–641**



- [20] A. A. Rajabi, M. Hamzavi, (2013), "A new Coulomb-Shaped Potential via Generalized Parametric Nikiforov-Uvarov Method", **Indian J. Theo and Appl. Phys**, Vol. 17.
- [21] Hamed Feizi, Ali Akbar Rajabi and Mohammad Reza Shojaei, (2011), "Supersymmetric Solution of the Schrodinger Equation for Woods-Saxon Potential by Using the Pekeris Approximation", **Acta Physica Polonica B**, Vol 42, No 10, 2143-2152.
- [22] C.L. Pekeris, (1934), "The rotation-vibration coupling in diatomic molecules", **Phys. Rev.** 45, 98.
- [23] E. Rost, (1967), "Proton shell-model potentials for lead and the stability of superheavy nuclei", **Physics Letters B**, Vol. 26B. No.4, 184-187.
- [24] Shan-Gui. Zhou, J. Meng, P. Ring, (2003), "Spherical relativistic Hartree theory in a Woods-Saxon basis", **Phys. Rev. C**, 68, 034323,
- [25] A. A. Ross, HANS MARK, R. D. LAWSON, (1956), "Nucleon Energy Levels in a Diffuse Potential", **Phys. Rev**, Vol. 102. No. 6, 1613-1620.
- [26] M. DOST, W. R. HERING, (1967), "shape of the 208pb nuclear potential", **Nucl. Phys. A**, 93, 357-369.
- [27] P. Raghavan, Table of Nuclear Moments, At Data and Nucl Data Tables, Vol 42, 189-291, (1989).
- [28] M. Ghazvini et al, (2015)," A New Model for Calculating the Binding Energy of the Lithium Nucleus Under Generalized Yukawa potential and Hellmann Potential a" **Chin. Phys. C**, Vol. 39, No. 6, 063106.
- [29] S. Ghoudsmit, (1933)," Nuclear Magnetic Moments", **Phys. Rev**, Vol. 43, 636-639.
- [30] S. S. Rosenblum, W. A. Steyert, (1975)," Magnetic Moments of  $^{57}\text{Ni}$ ", **Phys. Lett. B**, Vol. 55, Num. 5, 450-452.

- [31] J. M. Yao, H. Chen, J. Meng, (2006),” Time Odd Relativistic Mean Field Approach for Nuclear Magnetic Moment”, **Phys. Rev. C**, **Vol. 74**, 024307.
- [32] U. Hofmann, P. Ring, (1988),” A New Method to Calculate Magnetic Moments in Relativistic Mean Field Theories”, **Phys. Lett. B**, **Vol. 214**, **Num. 3**, 307-311.

## Abstract:

In this work, we consider nucleus as a quantum system and looking for the wave function of this quantum system, because the wave function is existing math which contains information from the system which can be used to understand the properties of the system. In particular, in a nuclear system, it can be used to obtain magnetic dipole moment. We consider the nucleus that near the closed-shell, which has a nucleon or a hole in its capacity layer, based on shell model, this is a nucleon (or hole) that determines many core nucleus properties.

The nucleons move in the nucleus with a kinetic energy of about 10 Mev, and this energy is low compared to the rest energy of the nucleons. So, it's safe to say that nucleons move at a non-relativity rate inside the nucleus. For this reason, we can use the Schrodinger wave equation, which is a non-relativistic equation, and we obtain the nucleus wave function. Solving the Schrodinger wave equation by placing Wood-Saxon and Yukawa potentials, we use the supersymmetric method to do this. Finally, we use the wave function and calculate the magnetic dipole moment for nucleus near the closed-shell.

### *Keywords:*

*Magnetic dipole Moment, Wood-Saxon Potential, Yukawa Potential, Supersymmetric method.*



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics and Nuclear Engineering**

**M.Sc. Thesis in Nuclear Physics**

**Calculate the Magnetic Dipole Moment for Nuclei Near the Closed-Shell**

By: Keivan Darooyi Divshali

**Supervisor:**

Prof. Ali Akbar Rajabi

**September 2018**