

حاشا  
البربر  
البربر



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک ، گرایش فیزیک هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

# بررسی توابع هیون در سیستم‌های بوزونی و فرمیونی

نگارنده: مهسالسادات حسینی

اساتید راهنما

دکتر حسن حسن‌آبادی  
دکتر سمیه حسن‌آبادی

تیر ۱۳۹۷

شماره:  
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای مهسالسادات حسینی با شماره دانشجویی ۹۴۰۶۰۷۴ رشته فیزیک گرایش فیزیک هسته ای تحت عنوان بررسی توابع هیون در سیستم های بوزونی و فرمیونی که در تاریخ ۱۳۹۷/۴/۲۵ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> قبول (با درجه: .....)
<input type="checkbox"/> عملی	<input checked="" type="checkbox"/> نظری

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر حسن حسن آبادی	استاد	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر سمیه حسن آبادی	استادیار	
۳- استاد مشاور	-	-	-
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدعلی حسینی منصوری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حسین توکلی عنبران	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مسلم سوهانی	استادیار	



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی مومنی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه  
درخت پر بار و جودشان بیسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ بگیرم و از سایه و جودشان  
در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودندشان تاج افتخاری است  
بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه  
هستی ام بوده اند؛ دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب  
آموختند. آموزگاران آنی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند....

و تقدیم به برادر عزیزم

که همواره در طول تحصیل همراه و همگام من بوده و وجودش مایه دلگرمی من است.

## سپاس‌گزاری

با تقدیر و تشکر از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسن حسن‌آبادی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام واکمال پایان‌نامه بوده‌اند.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته سرکارخانم دکتر سمیه حسن‌آبادی به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی‌چشمداشت ایشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند.

مهسالات حسینی

تیر ۱۳۹۷

## تعهد نامه

اینجانب مهسالسادات حسینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی توابع هیون در سیستم‌های بوزونی و فرمیونی، تحت راهنمایی حسن حسن‌آبادی و سمیه حسن‌آبادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهسالسادات حسینی

تیر ۱۳۹۷

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

توابع هیون جواب‌های معادله هیون که تعمیمی از معادله فوق هندسی است، می‌باشند. معادله هیون کلی‌ترین معادله مرتبه دو با چهار نقطه تکین منظم می‌باشد که در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. اکنون این معادله در بسیاری از زمینه‌ها همچون فیزیک ذرات، هسته‌ای و مکانیک کوانتوم ظاهر می‌شود و برای توصیف طیف گسترده‌ای از پدیده‌های فیزیکی به کار می‌رود. معادله دیفرانسیل هیون در بررسی ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی برای بسیاری از پتانسیل‌ها ظاهر می‌شود و ویژه توابع برحسب توابع هیون مشخص می‌شوند. یکی از کاربردهای مهم معادله هیون در مسائل نسبیت عام و کیهانشناسی است. در این مطالعه پس از معرفی تابع هیون و فرم‌های کانفلوئنس آن، این تابع را در سیستم‌های نسبیتی توسط معادله دیراک برای ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$ ، معادله ویل برای ذرات بدون جرم با اسپین  $\frac{1}{2}$ ، معادله کلاین - گوردون و معادله دی کی پی برای ذرات با اسپین صفر بررسی می‌کنیم. امروزه بررسی ذرات نسبیتی در فضا زمان‌های ایجاد شده توسط نواقص هندسی توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. ریسمان کیهانی یکی از مهم‌ترین نواقص هندسی است. در این تحقیق فضا زمان‌های مختلف شامل ریسمان کیهانی، ریسمان کیهانی چرخان، فضا زمان‌های با اثرات غیر اینرسی و فضا زمان‌های گودل گونه را معرفی می‌کنیم و به بررسی اثر نقص هندسی بر روی طیف انرژی ذرات نسبیتی می‌پردازیم. همچنین معادله ویل را در حضور میدان‌های مغناطیسی متغیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم و تأثیر این میدان‌ها را بر روی طیف انرژی ذرات بررسی می‌کنیم. هدف از محاسبه انرژی به دست آوردن کمیت‌های ترمودینامیکی سیستم می‌باشد.

کلمات کلیدی: توابع هیون، معادله کلاین-گوردون، معادله دی کی پی، معادله دیراک، معادله ویل، ریسمان کیهانی، فضا زمان گودل گونه

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. Hosseini, H. Hassanabadi and S. Hassanabadi ” Solutions of the Dirac -Weyl equation in graphene under magnetic fields in the Cartesian coordinate system ” Eur. Phys. J. Plus (Revised)
2. H. Hassanabadi, M. Hosseini, S. Zare and M. Hosseinpour ” Study of bosons for three special limits of Gödel-type spacetimes ” FEW-BODY SYST (Revised)
3. M. Hosseini, H. Hassanabadi and S. Hassanabadi ” The Weyl equation under an external electromagnetic field in the cosmic string spacetime ” (Submitted)
4. M. Hosseini, H. Hassanabadi, S. Hassanabadi and H. Sobhani ” Klein–Gordon oscillator in the presence of a Cornell potential in the cosmic string spacetime ” (Submitted)
5. M. Hosseini, H. Hassanabadi, S. Hassanabadi and M. Hosseinpour ” The Weyl equation in the Som - Raychaudhuri space-time in the presence of an external electromagnetic field ” (Submitted)



# فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
۱	۱ توابع هیون
۱	۱.۱ مقدمه
۴	۲.۱ انواع معادله هیون
۵	۲ تابع هیون در بررسی نسبیتی بوزون‌ها
۵	۱.۲ معادله کلاین - گوردون
۶	۲.۲ معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری
۸	۱.۲.۲ کمیت‌های ترمودینامیکی
۱۱	۳.۲ فضا زمان خمیده
۱۱	۱.۳.۲ متریک
۱۲	۲.۳.۲ مشتقات هم‌وردا و نمادهای کریستوفل
۱۲	۳.۳.۲ فرمول بندی چهارگانه
۱۳	۴.۲ ریسمان کیهانی
۱۳	۵.۲ چارچوب مرجع غیراینرسی و ریسمان کیهانی
	۶.۲ معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری کولنی‌گونه
۱۴	
۱۷	۷.۲ نوسانگر کلاین - گوردون در فضا زمان ریسمان کیهانی
	۸.۲ معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل کرنل در فضا زمان ریسمان کیهانی
۱۹	۹.۲ نوسانگر کلاین - گوردون در حضور پتانسیل کرنل در فضا زمان ریسمان کیهانی
۲۲	۱۰.۲ نوسانگر کلاین - گوردون در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت در فضا زمان ریسمان کیهانی
۲۴	

۱۱.۲	نوسانگر کلاین- گوردون در حضور میدان مغناطیسی همگن در ریسمان
۲۷	کیهانی چرخان
۱۲.۲	معادله دی-کی-پی
۳۱	بخش اسکالر
۳۲	معادله دی کی پی برای اسپین صفر در فضا زمان گودل گونه
۳۲	حل معادله دی کی پی در فضا زمان گودل گونه تخت
۳۷	حل معادله دی کی پی در فضا زمان گودل گونه متقارن کروی
۴۱	حل معادله دی کی پی در فضا زمان گودل گونه هایپربولیکی
۴۲	
۴۵	<b>۳ تابع هیون در بررسی نسبیتی فرمیون ها</b>
۴۵	معادله دیراک در فضا زمان خمیده
۴۷	حل تقریبی معادله دیراک در حضور پتانسیل هایپربولیکی
۴۸	فرم کلی معادله دیراک
۴۹	مدل پتانسیل هایپربولیکی و ساختار معادله کانفلوئنت هیون
۵۱	معادله دیراک در حضور پتانسیل های اسکالر و برداری
۵۶	معادله دیراک در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی
۵۸	نوسانگر دیراک در زمینه گرانش رنگین کمانی
۶۱	حالت اول برای رنگین کمان گرانشی
۶۵	حالت دوم برای رنگین کمان گرانشی
۶۷	حالت سوم برای رنگین کمان گرانشی
۷۱	<b>۴ تابع هیون در بررسی فرمیون های بدون جرم</b>
۷۱	معادله ویل
	معادله ویل در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی در فضا زمان ریسمان
۷۲	کیهانی
۷۵	فرمیون های ویل در فضا زمان های گودل گونه
	معادله ویل در فضا زمان سام ریچادری در حضور میدان الکترومغناطیسی
۷۷	خارجی
۸۴	معادله دیراک-ویل در گرافن در حضور میدان های مغناطیسی
۸۵	حالت اول برای پتانسیل برداری
۸۷	حالت دوم برای پتانسیل برداری
۸۹	حالت سوم برای پتانسیل برداری
۹۱	<b>۵ نتیجه گیری</b>



# فهرست تصاویر

۹	تغییرات انرژی آزاد برای پتانسیل حاضر نسبت به $\bar{m}$ . . . . .	۱.۲
۱۰	تغییرات انرژی میانگین برای پتانسیل حاضر نسبت به $\bar{m}$ . . . . .	۲.۲
۱۰	تغییرات گرمای ویژه برای پتانسیل حاضر نسبت به $\bar{m}$ . . . . .	۳.۲
۳۹	مختلف. . . . . $E_n(\alpha)$ برای $n = 10$ ، با پارامترهای $m = 2$ ، $M = 1$ و $k = 2$ برای $\Omega$ های	۴.۲
۳۹	مختلف. . . . . $E_n(\alpha)$ برای $n = 10$ ، با پارامترهای $m = -2$ ، $M = 1$ و $k = 1$ برای $\Omega$ های	۵.۲
۴۰	مختلف. . . . . $E_n(\Omega)$ برای $n = 10$ ، با پارامترهای $m = 2$ ، $M = 1$ و $k = 1$ برای $\alpha$ های	۶.۲
۴۱	مختلف. . . . . $ C_1(r) ^2$ برای $n = 1$ با پارامترهای $\Omega = 0.5$ ، $m = 2$ ، $M = 1$ و $k = 1$ برای $\alpha$ های مختلف.	۷.۲
۴۸	نمودار پتانسیل هایپربولیک برحسب $r$ به ازای $V_0 = 200$ و $d = 0.5$ . . . . .	۱.۳
۶۰	نمودار ترازهای انرژی (۸۵.۳) نوسانگر دیراک در فضا زمان ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس $\omega$ به انرژی پلانک. برای هر دو نمودار $\frac{m}{E_p} = 0.8$ و $\eta = \frac{1}{q}$ در نظر گرفته می شود. . . . .	۲.۳
۶۴	نمودار ترازهای انرژی (۱۰۶.۳) نوسانگر دیراک در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس $\omega$ به انرژی پلانک. برای این نمودار $\frac{m}{E_p} = 0.8$ و $\eta = \frac{1}{q}$ در نظر گرفته می شود. منحنی های قرمز رنگ (به ازای $q = 1$ ) ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی توصیف می کند در حالی که منحنی های دیگر ترازهای انرژی را با رنگین کمان گرانشی نشان می دهند. . . . .	۳.۳

۴.۳	نمودار ترازهای انرژی نوسانگر دیراک (۱۱۵.۳) در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس $\omega$ به انرژی پلانک. برای این نمودار $\frac{m}{E_p} = \frac{1}{8}$ و $\eta = \frac{1}{q}$ در نظر گرفته می‌شود. منحنی‌های مشکی رنگ (به ازای $q = 1$ )، ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی توصیف می‌کند در حالی که منحنی‌های رنگی ترازهای انرژی را در حضور رنگین کمان گرانشی نشان می‌دهند. . . . .	۶۷
۵.۳	نمودار ترازهای انرژی (۱۲۸.۳) نوسانگر دیراک در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس $\omega$ به انرژی پلانک. . . . .	۶۹
۱.۴	ویژه توابع $ \Psi_1(r) ^2$ برای $\alpha = \frac{1}{5}$ و $\Omega = \frac{1}{2}$ برای مقادیر مختلف $B_0$ . . . . .	۸۳
۲.۴	ویژه توابع $ \Psi_1(r) ^2$ برای $B_0 = 1$ و $\Omega = \frac{1}{2}$ برای مقادیر مختلف $\alpha$ . . . . .	۸۳
۳.۴	ویژه توابع $ \Psi_1(r) ^2$ برای $B_0 = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ برای مقادیر مختلف $\Omega$ . . . . .	۸۳
۴.۴	انرژی برحسب $B_0$ برای $n = 1$ با پارامترهای $v_F = 1, c = \hbar = e = 1$ . . . . .	۸۶
۵.۴	چگالی احتمال $ \Psi_2(x, y) ^2$ نسبت به $x$ با پارامترهای $v_F = 1, c = \hbar = 1$ و $\alpha = k = \frac{1}{5}$ . . . . .	۸۶
۶.۴	انرژی برحسب $B_0$ برای $n = 1$ با پارامترهای $v_F = 1, c = \hbar = e = k$ . . . . .	۸۸
۷.۴	چگالی احتمال $ \Psi_2(x, y) ^2$ نسبت به $x$ با پارامترهای $v_F = 1, c = \hbar = 1$ و $a = 1$ . . . . .	۸۸

# فصل ۱

## توابع هیون

### ۱.۱ مقدمه

بیشتر فیزیک نظری امروزه با استفاده از تعداد کمی از معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شود. اگر فقط سیستم‌های خطی را بررسی کنیم، شکل‌های مختلفی از معادلات فوق هندسی یا فوق هندسی کانفلوئنت<sup>۱</sup> برای توصیف این سیستم کافی است. این معادلات دارای جواب‌های سری‌های توانی با روابط ساده بین ضرایب متوالی هستند و به طور معمول می‌توانند برحسب تبدیلات انتگرالی ساده ارائه شوند. اگر مسئله برحسب معادلات دیفرانسیلی غیر خطی توصیف شود اغلب از شکل معادله پینلیو<sup>۲</sup> استفاده می‌شود. با این حال مثال‌های مهمی وجود دارد که از معادلات مرتبه بالاتری استفاده می‌کنند. یک مثال که اغلب در مکانیک کوانتوم دیده می‌شود، اتم هیدروژن در یک میدان الکتریکی خارجی یا اثر اشتارک<sup>۳</sup> است. در بررسی مسائل مربوط به کیهانشناسی یا نسبیت عام، رویارویی با معادله هیون<sup>۴</sup> اجتناب ناپذیر است که این معادله یک معادله معمولی می‌باشد و دارای فرم‌های خاصی مانند معادلات متیو<sup>۵</sup>، لام<sup>۶</sup> و

<sup>1</sup>Confluent hypergeometric equation

<sup>2</sup>Painlevé equation

<sup>3</sup>Stark effect

<sup>4</sup>Heun equation

<sup>5</sup>Mathieu

<sup>6</sup>Lamé

کروی کولنی<sup>۷</sup> است [۱].

نیاز به فراتر رفتن از گروه پتانسیل‌های فوق هندسی به منظور به دست آوردن پتانسیل‌های جدید قابل حل نشان داد که به زودی پتانسیل‌های جدیدی کشف خواهند شد. اولین بار مورس<sup>۸</sup> و استوکلبگ<sup>۹</sup> و سپس مانینگ<sup>۱۰</sup> پتانسیل‌های مهمی را پیشنهاد دادند که در گروه فوق هندسی نبودند. علاوه بر دسته‌بندی و تحلیل نتایج معتبر، مانینگ در مورد تقلیل معادله شرودینگر<sup>۱۱</sup> به گروه نسبتاً بزرگی از معادلات که دارای ضرایب منطقی هستند، بحث کرد و نشان داد که برخی از آن‌ها به معادلات فوق هندسی نزدیک هستند. پیام اصلی توسط مورس، استوکلبگ و مانینگ این بود که باید در معادلاتی که دارای جواب‌های سری هستند و ضرایب جملات متوالی بسط‌ها توسط سه یا چند رابطه بازگشتی کنترل می‌شوند، تجدید نظر شود. بسیاری از نویسندگان این احتمال را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۱۹۶۹ لامیوکس<sup>۱۲</sup> و بوز<sup>۱۳</sup> اولین رفتار سیستماتیک را با استفاده از معادلات خاصی ارائه دادند، جواب‌هایی که توسط سه رابطه بازگشتی برای ضرایب بسط سری‌های توانی کنترل می‌شد. این معادلات برای ایجاد معادلات گروه هیون شناخته شدند که در حال حاضر تعمیم‌های مختلفی از معادلات فوق هندسی هستند. اگرچه مقاله لامیوکس و بوز خیلی مورد توجه قرار نگرفت اما شامل تحلیل‌های نسبتاً پیشرفته‌ای از گروه بزرگی از پتانسیل‌های قابل حل برحسب توابع هیون بود [۲].

تابع هیون از توابع خاص در علم ریاضیات است و پاسخ یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دو با ضرایب غیرثابت به نام معادله هیون می‌باشد که توسط ریاضیدان آلمانی، کارل هیون<sup>۱۴</sup> در سال ۱۸۸۸ [۳] معرفی شد. معادله هیون کلی‌ترین حالت معادله خطی مرتبه دو با چهار نقطه تکین منظم است. حل این معادله تحت عنوان تابع هیون، از طریق تکنیک حل معادلات دیفرانسیل با کمک سری‌های توانی، بر پایه تئوری فوکس - فروبنیوس<sup>۱۵</sup> امکان پذیر است. گونه‌هایی از معادلات هیون تحت عنوان معادلات کانفلوئنس هیون با داشتن یک یا چند نقطه تکین نامنظم وجود دارند. توابع هیون به عنوان جانشین‌های فوق هندسی قرن ۲۱ شناخته می‌شوند. تابع هیون در دینامیک سیالات، فرآیند تبدیل کریستال‌ها، مکانیک کوانتوم، مطالعه بر سیاهچاله‌ها و بسیاری از علوم دیگر کاربرد دارد.

معادلات دیفرانسیل برحسب ساختار تکینگی‌شان دسته‌بندی می‌شوند. اگر یک معادله دیفرانسیل هیچ تکینگی نداشته باشد فقط می‌تواند یک ثابت باشد. تکینگی‌ها به صورت نقاط

<sup>7</sup>Coulomb spheroidal

<sup>8</sup>Morse

<sup>9</sup>Stückelberg

<sup>10</sup>Manning

<sup>11</sup>Schrödinger equation

<sup>12</sup>Lamieux

<sup>13</sup>Bose

<sup>14</sup>Karl Heun

<sup>15</sup>Fuchs-Frobenius

تکین منظم یا نامنظم دسته‌بندی می‌شوند. اگر ضریب مشتق اول دارای حداکثر تک قطبی‌ها باشد و ضریب جمله بدون مشتق دارای قطب‌های دوگانه باشد، زمانی که ضریب مشتق دوم یک است، این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم دارای تکینگی‌های منظم است. سپس با بسط حول این نقاط تکین یک جواب منظم داریم. جواب دوم حول یک نقطه تکین منظم دارای برش است. اگر قطب‌های این ضرایب بالاتر باشند، تکینگی‌های نامنظم داریم و جواب عمومی دارای تکینگی‌های اساسی حول این نقاط است. همان طور که مورس و فاش باخ<sup>۱۶</sup> بررسی کردند، مثالی از یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با یک نقطه تکین منظم به صورت زیر است :

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = 0 \quad (1.1)$$

این معادله دارای یک جواب است که ثابت می‌باشد. جواب دوم در بی‌نهایت است. معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + k^2\omega = 0 \quad (2.1)$$

دارای یک تکینگی نامنظم در بی‌نهایت است که یک تکینگی اساسی را در این نقطه می‌دهد. معادله

$$z \frac{d^2\omega}{dz^2} + (1+a) \frac{d\omega}{dz} = 0 \quad (3.1)$$

دارای دو نقطه تکین منظم در صفر و در بی‌نهایت است. در فیزیک معادله‌ای که اغلب استفاده می‌شود، معادله فوق هندسی است.

$$z(1-z) \frac{d^2\omega}{dz^2} + [c - (1+a+b)z] \frac{d\omega}{dz} - ab\omega = 0 \quad (4.1)$$

این معادله دارای سه نقطه تکین منظم در صفر و یکی در بی‌نهایت است. معادلات ژاکوبی<sup>۱۷</sup>، لژاندر<sup>۱۸</sup>، گگن بائور<sup>۱۹</sup> و چبیشف<sup>۲۰</sup> فرم‌های خاصی از این معادله هستند. وقتی که نقاط تکین در  $z = 1$  و  $z = \infty$  در بی‌نهایت تلفیق<sup>۲۱</sup> می‌شوند، معادله فوق هندسی کانفلوئنت

$$z \frac{d^2\omega}{dz^2} + (c-z) \frac{d\omega}{dz} - a\omega = 0 \quad (5.1)$$

را با یک تکینگی اساسی در بی‌نهایت و یک تکینگی منظم در صفر به دست می‌آوریم. معادلات بسل<sup>۲۲</sup>، لاگر<sup>۲۳</sup> و هرمیت<sup>۲۴</sup> می‌توانند به این فرم تقلیل یابند.

<sup>16</sup>Feshbach

<sup>17</sup>Jacobi

<sup>18</sup>Legendre

<sup>19</sup>Gegenbauer

<sup>20</sup>Tchebycheff

<sup>21</sup>Coalesced

<sup>22</sup>Bessel

<sup>23</sup>Laguerre

<sup>24</sup>Hermite



یک ویژگی مهم تمام این معادلات این است که جواب‌های سری‌های بی‌نهایت را حول یکی از نقاط تکینگی منظمشان مجاز می‌دانند و یک رابطه بازگشتی می‌تواند بین دو ضریب متوالی از سری‌ها یافت شود. این واقعیت به ما اجازه داشتن ایده‌ای در مورد مشخصات کلی جواب، رفتار مجانبی در نقاط دور، شعاع همگرایی سری‌ها و غیره را می‌دهد. معادله هیون که معادله‌ای با چهار نقطه تکین منظم است می‌تواند فرم‌های کانفلوئنت مختلفی داشته باشد [۱].

## ۲.۱ انواع معادله هیون

فرم‌های کانفلوئنت معادله دیفرانسیل هیون زمانی به وجود می‌آید که دو تکینگی منظم یا بیشتر، برای ایجاد یک تکینگی نامنظم پدیدار شوند که با مشتق معادله فوق هندسی کانفلوئنت مشابهت دارد. چهار فرم استاندارد وجود دارد:

۱. معادله کانفلوئنت هیون:

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \left( \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon \right) \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)} \omega = 0 \quad (6.1)$$

این معادله دارای تکینگی‌های منظم در  $z=0$  و  $z=1$  و یک تکینگی نامنظم درجه یک در  $z=\infty$  است. توابع متیو، توابع موج کروی و توابع کروی کولنی موارد خاصی از جواب‌های معادله کانفلوئنت هیون هستند.

۲. معادله کانفلوئنت مضاعف هیون ۲۵:

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \left( \frac{\delta}{z^2} + \frac{\gamma}{z} + 1 \right) \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z^2} \omega = 0 \quad (7.1)$$

این معادله دارای تکینگی‌های نامنظم در  $z=0$  و  $z=\infty$ ، هر یک از مرتبه اول است.

۳. معادله بای کانفلوئنت هیون ۲۶:

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} - \left( \frac{\gamma}{z} + \delta + z \right) \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z} \omega = 0 \quad (8.1)$$

این معادله دارای یک تکینگی منظم در  $z=0$  و یک تکینگی نامنظم در  $z=\infty$  از مرتبه دو است.

۴. معادله تری کانفلوئنت هیون ۲۷:

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + (\gamma + z) z \frac{d\omega}{dz} + (\alpha z - q) \omega = 0 \quad (9.1)$$

این معادله دارای یک تکینگی نامنظم مرتبه سه در  $z=\infty$  است.

<sup>25</sup>Double-confluent Heun equation

<sup>26</sup>Bi-confluent Heun equation

<sup>27</sup>Tri-confluent Heun equation

## فصل ۲

# تابع هیون در بررسی نسبیتی بوزون ها

### ۱.۲ معادله کلاین - گوردون

معادله شرودینگر<sup>۱</sup> یک معادله غیر نسبیتی است و تحت تبدیلات نسبیتی شکل خود را حفظ نمی کند زیرا در آن مشتق زمانی با مرتبه اول و مشتق مکانی با مرتبه دوم ظاهر می شوند. برای نخستین بار یافتن حالت نسبیتی معادله شرودینگر توسط کلاین<sup>۲</sup> و گوردون<sup>۳</sup> انجام شد. برخلاف معادله شرودینگر، در معادله کلاین - گوردون مشتقات زمانی و مکانی هر دو هم مرتبه و از مرتبه دو می باشند. معادله کلاین - گوردون برای توجیه ذرات کوانتومی با اسپین صفر به کار می رود. فرم هموردای این معادله با در نظر گرفتن  $\hbar = c = 1$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2] \Psi = 0 \quad (1.2)$$

که  $\partial^\mu$  و  $\partial_\mu$  با استفاده از تعریف چهار بردار فضا زمان  $x^\mu = (ct, x)$ ، به صورت زیر می باشند.

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right) \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Schrödinger

<sup>2</sup>Klein

<sup>3</sup>Gordon

## ۲.۲ معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری

پتانسیلی را به صورت معکوس خطی ( $\sim |x|^{-1}$ ) در نظر می‌گیریم [۴] که این پتانسیل اتم هیدروژن را در فضای یک بعدی نشان می‌دهد. نتایج غیرنسبیتی برای این پتانسیل نشان می‌دهد که جواب حالت پایه دارای یک انرژی بی‌نهایت با یک ویژه تابع برحسب تابع دلتا در نزدیکی مبدأ است [۵]. معادله کلاین گوردون مستقل از زمان یک بعدی، با پتانسیل  $V(x) = a_1 + a_2 |x| + \frac{a_3}{|x|}$  و پتانسیل‌های اسکالر<sup>۴</sup>،  $V_S(x)$ ، و برداری  $V_V(x)$ ، به صورت زیر است [۶]:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + Q^2 [mc^2 + V_S(x)]^2 - Q^2 [V_V(x) - E]^2 \right\} \psi(x) = 0 \quad (3.2)$$

که  $Q = 1/\hbar c$ ،  $c$  سرعت نور،  $m$  جرم سکون و  $E$  انرژی می‌باشد. در اینجا پتانسیل برداری به صورت  $V_V(x) = 0$  و پتانسیل اسکالر به صورت پتانسیل ذکر شده در بالا می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - Q^2 \left[ (mc^2 + a_1)^2 + 2a_2 a_3 + 2a_3 (mc^2 + a_1) \frac{1}{|x|} \right. \\ \left. + \frac{a_3^2}{x^2} + 2a_2 (mc^2 + a_1) |x| - a_2^2 x^2 \right] \psi(x) = -Q^2 E^2 \psi(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

با استفاده از تعریف یک متغیر جدید  $|x| = \sqrt{Q a_2} y$ ، و با استفاده از اختصارات زیر

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{Q}{a_2} \left[ E^2 - (mc^2 + a_1)^2 - 2a_2 a_3 \right] \\ A_1 &= -2Q a_3 (mc^2 + a_1) \sqrt{\frac{Q}{a_2}} \\ A_2 &= -Q^2 a_3^2 \\ A_3 &= -2 \sqrt{\frac{Q}{a_2}} (mc^2 + a_1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

داریم:  
(۶.۲)

$$\frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} + \left( \varepsilon_1 + \frac{A_1}{y} + \frac{A_2}{y^2} + A_3 y - y^2 \right) \psi(y) = 0$$

به منظور به دست آوردن یک فرم مناسب‌تر برای معادله (۶.۲)، تابع موج را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\psi(y) = |y|^p e^{-qy^2 - ry} \phi(y) \quad (7.2)$$

<sup>4</sup>Scalar

## معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل های اسکالر و برداری ۷

که  $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4A_2}$  است. اکنون با قرار دادن معادله (۷.۲) در معادله (۶.۲) ، معادله حاصل به صورت زیر می باشد :

(۸.۲)

$$y\phi''(y) + (2p - 2ry - 4qy^2)\phi'(y) + [(-4pq - 2q + r^2 + \varepsilon_1)y - (2pr - a_1)]\phi(y) = 0$$

این معادله ، معادله دیفرانسیل هیون بای کانفلوئنت است که دارای فرم معمول زیر [۷]

(۹.۲)

$$\xi u''(\xi) + (1 + c_1 - c_2\xi - 2\xi^2)u'(\xi) + \left\{ (c_3 - c_1 - 2)\xi - \frac{1}{4}[c_4 + c_2(1 + c_1)] \right\} u(\xi) = 0$$

با جواب هایی که توابع هیون بای کانفلوئنت نامیده می شوند ، می باشد.

(۱۰.۲)

$$\phi(y) \sim HB \left( \sqrt{1 - 4A_2}, 2Q\sqrt{a_2} (mc^2 + a_1), 1 + \gamma^2 + \varepsilon_1, \frac{4Q^2 a_3}{\sqrt{Qa_2}} (mc^2 + a_1), y \right)$$

معادله هیون بای کانفلوئنت دارای کاربردهای بسیاری در موضوعات مختلف برای یافتن شرط کوانتیزه<sup>۵</sup> و توابع موج برای سیستم موردنظر است. جواب معمولی این معادله می تواند با استفاده از روش های فروبنیوس و سری های بای کانفلوئنت هیون محاسبه شود که یک فرم چند جمله ای درجه n را نتیجه می دهد ، زمانی که شرط زیر برقرار باشد [۸] :

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{4} A_2^2 - 2p - 1 = 2n \quad (11.2)$$

و  $n = 0, 1, 2, \dots$  . با استفاده از معادله (۵.۲) ، حالات مقید سیستم و ویژه توابع را به دست می آوریم :

$$E_n^2 = 2a_2 a_3 + \frac{a_2}{Q} \left( 2n + 1 + \sqrt{1 + 4Q^2 a_2^2} \right) \quad (12.2)$$

(۱۳.۲)

$$\psi(y) \sim |y|^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4A_2}} e^{\frac{1}{4}(A_2 y - y^2)}$$

$$\times HB \left( \sqrt{1 - 4A_2}, 2Q\sqrt{a_2} (mc^2 + a_1), 1 + \gamma^2 + \varepsilon_1, \frac{4Q^2 a_3}{\sqrt{Qa_2}} (mc^2 + a_1), y \right)$$

علاوه بر این ، دو معادله آخر این امکان را فراهم می کند تا چگالی تراز تک ذره که به طور اساسی به صورت تعداد ترازهای انرژی در بازه انرژی dE تعریف شده است [۹] ، افزایش یابد که به صورت زیر می باشد :

$$\rho(E) = \frac{dE}{dn} \quad (14.2)$$

<sup>5</sup>Quantization condition

که برای سیستم موردنظر به فرم زیر درمی‌آید :

$$\rho(E) = \frac{Q}{a_2} \sqrt{E} \quad (15.2)$$

به طور واضح دیده می‌شود که چگالی تراز به قسمت خطی و معکوس خطی پتانسیل بستگی دارد. به این ترتیب برای داشتن معادله‌ای با ابعاد یکسان در سمت چپ و راست معادله (۱۲.۲) ، کمیت  $a_2 a_3$  را به صورت  $\varepsilon^2$  در محاسبات درنظر می‌گیریم که باعث می‌شود معادله (۱۲.۲) را با یک پارامتر بدون بعد  $q = Q a_3$  به صورت زیر بنویسیم :

$$E_n = \mp \varepsilon \sqrt{2 + q^{-1} \left( 2n + 2 + \sqrt{1 + 4q^2} \right)} \quad (16.2)$$

در بخش بعد ، توابع گرمایی را برحسب یک پارامتر بدون بعد  $\bar{m}$  که با کمک  $\varepsilon$  نوشته می‌شود ، محاسبه می‌کنیم .

## ۱.۲.۲ کمیت‌های ترمودینامیکی

تابع پارش می‌تواند به صورت جمع روی تمام حالات کوانتومی نوشته شود [۱۰] :

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(E_n - E_0)\beta} = e^{\beta E_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon \sqrt{\sigma_1 n + \sigma_2}} \quad (17.2)$$

که  $\beta = 1/k_B T$  ،  $k_B$  ثابت بولتزمن<sup>۶</sup> و  $T$  دما برحسب کلوین<sup>۷</sup> با ثابت‌های  $\sigma_1 = 2/q$  و  $\sigma_2 = 2 + (1/q) \left( 2 + \sqrt{1 + 4q^2} \right)$  می‌باشد. سپس به محاسبه کمیت‌های گرمایی زیر همچون انرژی آزاد ، انرژی متوسط و گرمای ویژه برحسب تابع پارش می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} F(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \\ U(\beta) &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \\ C(\beta) &= -k_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} U(\beta) \end{aligned} \quad (18.2)$$

معادله انتگرالی زیر

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta_1 \sqrt{\beta_2 n + \beta_3}} dn = \frac{2}{\beta_1^2 \beta_2} e^{-\beta_1 \sqrt{\beta_3}} \left( 1 + \beta_1 \sqrt{\beta_3} \right) \quad (19.2)$$

نشان می‌دهد که تابع پارش در معادله (۱۷.۲) همگراست . معادله (۱۹.۲) این امکان را فراهم می‌کند تا تابع پارش را با کمک فرمول اویلر- مک لورین<sup>۸</sup>

<sup>۶</sup>Boltzmann constant

<sup>۷</sup>Kelvin

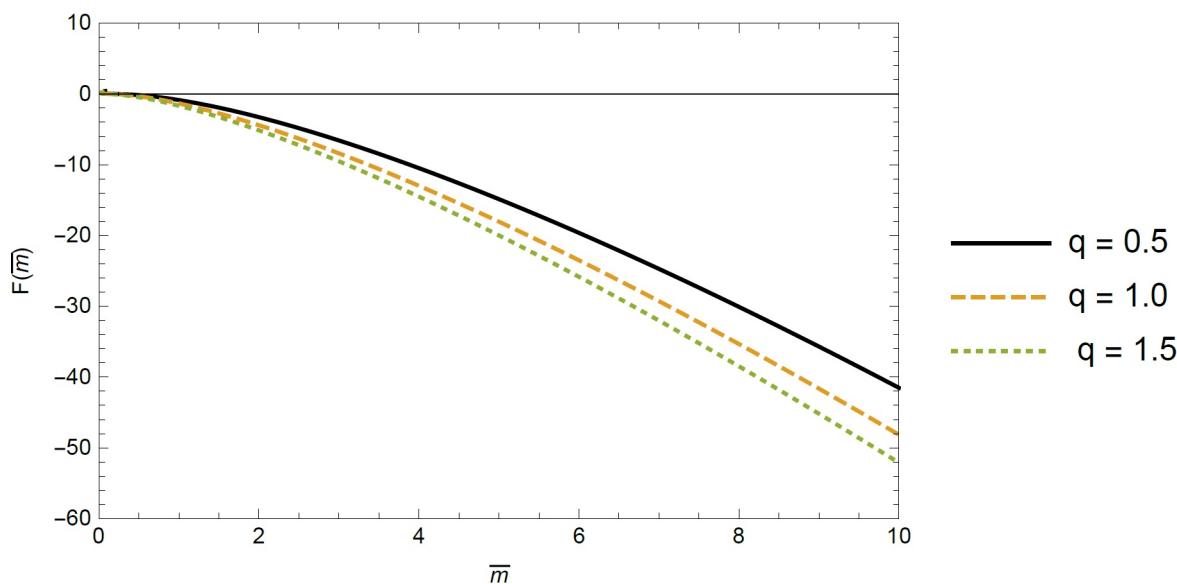
<sup>۸</sup>Euler-MacLaurin formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{\Gamma} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\Gamma i)!} B_{\Gamma i} f^{(\Gamma i-1)}(0) \quad (20.2)$$

محاسبه کنیم که  $B_{\Gamma i}$  اعداد برنولی<sup>۹</sup> هستند ،  $B_{\Gamma} = 1/6$  ،  $B_{\Gamma} = -1/30$  ، ... [۱۱] . برای  $i$  های بالاتر از  $i = 2$  ، معادله (۱۷.۲) به کمک معادله (۱۴.۲) ، تابع پارش سیستمی که بر حسب یک پارامتر بدون بعد  $1/\bar{m} = \beta \varepsilon$  نوشته شده است را به صورت زیر می دهد :

$$Z(\bar{m}) = \frac{1}{\Gamma} + \frac{\Gamma \bar{m}^2}{\sigma_1} \left( 1 + \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\bar{m}} \right) + \frac{\sigma_1}{24 \bar{m} \sqrt{\sigma_2}} - \frac{\sigma_1^3}{576 \bar{m} \sigma_2^{5/2}} \left( 3 + 3 \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\bar{m}} + \frac{\sigma_2}{\bar{m}^2} \right) \quad (21.2)$$

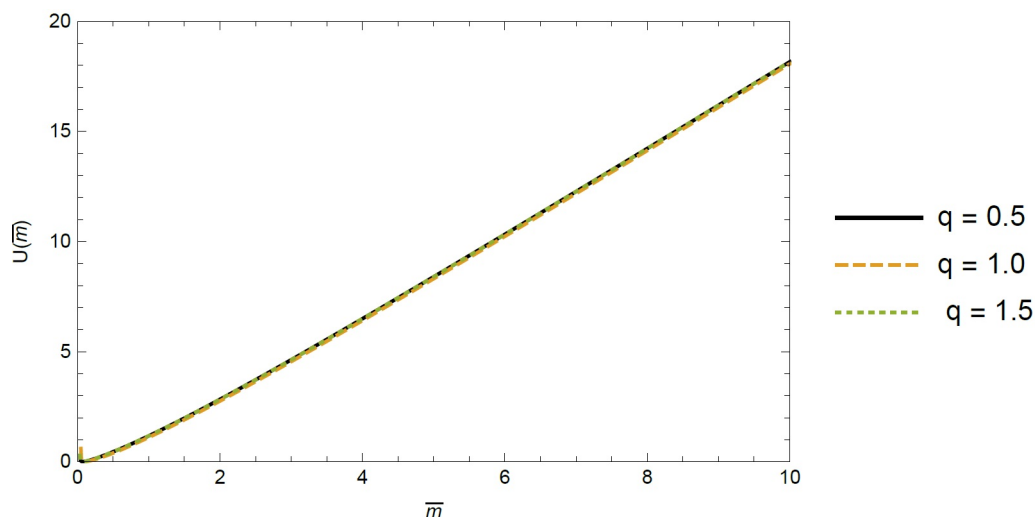
مشاهده می کنیم که کمیت های ترمودینامیکی در معادله (۱۸.۲) بستگی به پارامتر  $q$  شامل پارامتر پتانسیل دارد. بنابراین ، همه نتایج عددی را به صورت تغییرات آنها نسبت به دما برای سه مقدار مختلف پارامتر ، برای مثال  $q = 0.5$  ،  $q = 1$  و  $q = 1.5$  ارائه می دهیم. در شکل ۱.۲ مشاهده می کنیم که انرژی آزاد هلمهولتز<sup>۱۰</sup> با مقدار فزاینده  $a$  افزایش می یابد. در شکل ۲.۲ می بینیم که اثر پارامتر  $q$  روی انرژی متوسط برای دماهای تقریباً پایین آشکارتر است. از طرف دیگر ، نمودارها برای مقادیر مختلف  $q$  برای انرژی متوسط به یکدیگر نزدیکند. تغییر گرمای ویژه بر حسب دما را نیز در شکل ۳.۲ نشان می دهیم و به گونه ای است که وقتی دما افزایش می یابد دارای مقدار بالاتری است.



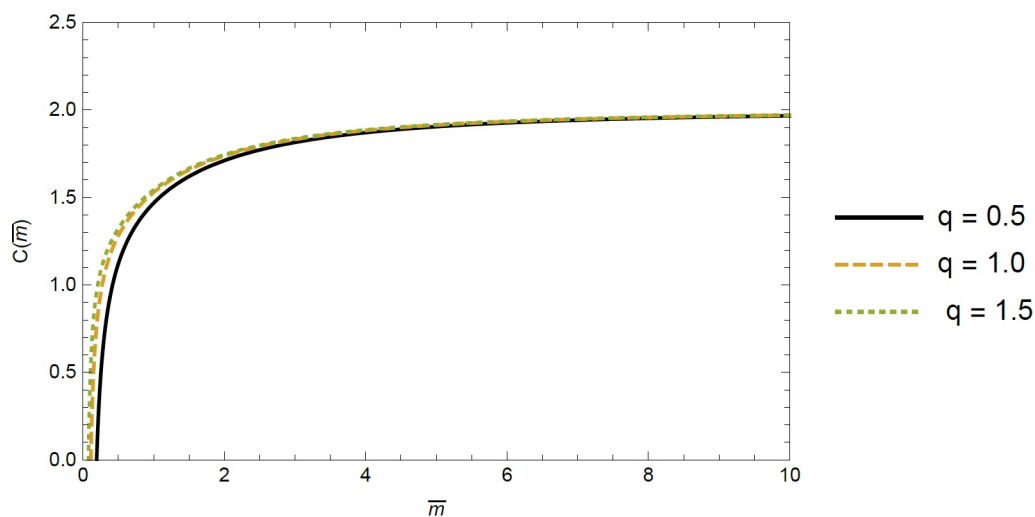
شکل ۱.۲: تغییرات انرژی آزاد برای پتانسیل حاضر نسبت به  $\bar{m}$  .

<sup>9</sup>Bernoulli

<sup>10</sup>Helmholtz



شکل ۲.۲: تغییرات انرژی میانگین برای پتانسیل حاضر نسبت به  $\bar{m}$ .



شکل ۳.۲: تغییرات گرمای ویژه برای پتانسیل حاضر نسبت به  $\bar{m}$ .

اکنون نتایج را به صورت مختصر برای توابع گرمایی برای دماهای بالا که متناسب با  $\beta \ll 1$  است، ارائه می‌دهیم. برای این مورد، معادله (۲۱.۲) نتایج زیر را می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 Z(\bar{m}) &\sim \frac{\mathcal{V} \bar{m}^2}{\sigma_1} \sim \bar{m}^2 Q a_3 \\
 U(\bar{m}) &\sim \mathcal{V} \bar{m} \\
 C(\bar{m}) &\sim \mathcal{V}
 \end{aligned}
 \tag{۲۲.۲}$$

که حد بالا برای گرمای ویژه می‌تواند به‌طور واضح در شکل ۳.۲ دیده شود. بررسی تابع پارش در معادله (۲۱.۲) برحسب پارامترهای پتانسیل نشان می‌دهد که سهم نزول، که معکوس خطی است، از قسمت پتانسیل متناسب با  $|x|$  ناشی می‌شود. قسمت‌های دیگر پتانسیل متناسب با  $\frac{1}{|x|}$ ، سهم ضعیف‌تری را دارند که در بعضی جملات خطی و در دیگر جملات معکوس خطی است. از طرف دیگر، معادله (۲۲.۲) نشان می‌دهد که فقط پارامتر پتانسیل  $a_2$  یک سهم معکوس خطی را برای تابع پارش می‌دهد زمانی که هر دو پارامتر  $a_2$  و  $a_3$  یک سهم مربع معکوس را برای انرژی متوسط برای دمای بالا می‌دهند. یکی از کاربردهای مهم تابع هیون در فضا زمان خمیده است. به منظور بررسی تابع هیون در فضا زمان خمیده، به معرفی این نوع فضا زمان می‌پردازیم.

## ۳.۲ فضا زمان خمیده

نظریه نسبیت عام<sup>۱۱</sup> نظریه‌ای هندسی برای گرانش است که در سال ۱۹۱۶ توسط اینشتین<sup>۱۲</sup> پیشنهاد شد. براساس نظریه نسبیت عام، فضا و زمان توسط خمینه‌هایی<sup>۱۳</sup> یک ساختار واحد را تشکیل می‌دهند یعنی در فضا زمان سه بعد فضا و یک بعد زمان با یکدیگر ترکیب می‌شوند و یک پیوستار چهار بعدی را ایجاد می‌کنند. گرانش نتیجه‌ای از فضا زمان خمیده است.

### ۱.۳.۲ متریک

تانسور متریک<sup>۱۴</sup> یک تانسور مرتبه دو است که با  $g_{\mu\nu}$  نشان داده می‌شود. تانسور متریک معکوس  $g^{\mu\nu}$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad (23.2)$$

المان طول براساس تانسور متریک به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (24.2)$$

در فضا زمان تخت المان طول به صورت زیر است:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (25.2)$$

علامت<sup>۱۵</sup> تانسور متریک با علامت متریک مینکوفسکی  $\eta_{\mu\nu} = (-+++)$  یکسان است.

<sup>11</sup>General Relativity

<sup>12</sup>Einstein

<sup>13</sup>Manifolds

<sup>14</sup>Metric tensor

<sup>15</sup>Signature



### ۲.۳.۲ مشتقات هم‌وردا و نمادهای کریستوفل

مشتق هم‌وردا<sup>۱۶</sup> تعمیمی از مشتق‌گیری در فضای تخت به فضای خمیده است. مشتق هم‌وردا ( $\nabla_\mu$ ) به صورت مجموع مشتق پاره‌ای و تبدیل خطی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (26.2)$$

$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  اتصال‌دهنده<sup>۱۷</sup> نام دارد. نماد کریستوفل<sup>۱۸</sup> نوعی اتصال‌دهنده است که برای ساخت مشتق هم‌وردا استفاده می‌شود.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (27.2)$$

### ۳.۳.۲ فرمول بندی چهارگانه

برای معرفی اسپینورها در یک فضا زمان خمیده باید آن‌ها را با یک پایه  $\hat{\theta}^a$  به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{\theta}^a = e_\mu^a(x) dx^\mu \quad (28.2)$$

که مؤلفه‌های ماتریس چهارگانه<sup>۱۹</sup>  $e_\mu^a(x)$  باید از رابطه زیر تبعیت کنند:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab} \quad (29.2)$$

تانسور  $\eta_{ab} = \text{diag}(-+++)$  تانسور مینکوفسکی است.  $e_\mu^a(x)$  و  $e_a^\mu(x)$  ماتریس‌های تبدیل هستند که به ترتیب به آن‌ها ماتریس‌های تبدیل چهارگانه (تتراد) و ماتریس‌های معکوس چهارگانه گفته می‌شود. معکوس تتراد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dx^\mu = e_a^\mu(x) \hat{\theta}^a \quad (30.2)$$

به گونه‌ای که روابط زیر برقرار باشند:

$$e_\mu^a(x) e_b^\mu(x) = \delta_b^a \quad (31.2)$$

$$e_\mu^a(x) e_a^\nu(x) = \delta_\mu^\nu$$

<sup>16</sup>Covariant derivative

<sup>17</sup>Connection

<sup>18</sup>Christoffel symbol

<sup>19</sup>Tetrad

## ۴.۲ ریسمان کیهانی

ریسمان‌های کیهانی<sup>۲۰</sup> نقص‌های توپولوژیکی<sup>۲۱</sup> یک بعدی فرضی هستند که در نتیجه انتقال فاز و شکسته شدن تقارن در جهان اولیه به وجود می‌آیند. تام کیبیل<sup>۲۲</sup> در سال ۱۹۷۶ هنگامی که بر روی تئوری ورتکس<sup>۲۳</sup> های خطی در ابررساناها کار می‌کرد، وجود ریسمان‌های کیهانی را پیشنهاد داد. ریسمان‌های کیهانی از میان انواع مختلف نقص‌های توپولوژیکی بیشتر مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند و منجر به آثار فیزیکی جالبی مانند انفجار پرتوهای گاما، گسیل امواج گرانشی و تولید پرتوهای کیهانی با انرژی بالا می‌شوند [۱۲].

## ۵.۲ چارچوب مرجع غیراینرسی و ریسمان کیهانی

در زمینه بررسی اثرات غیراینرسی<sup>۲۴</sup> روی سیستم‌های فیزیکی مطالعات زیادی صورت گرفته است [۱۳، ۱۴، ۱۵]. یک حالت خاص از یک سیستم غیراینرسی، چارچوب چرخان مرجع است. مطالعات صورت گرفته نشان می‌دهند که هندسه فضا زمان می‌تواند نقش پتانسیل دیواره سخت را ایفا کند. مثال دیگری از سیستم غیراینرسی، اثر مشحون<sup>۲۵</sup> یعنی جفت شدگی اسپین ذرات با سرعت زاویه‌ای چارچوب‌های چرخان است که از تأثیر این چارچوب‌های چرخان هنگامی که اثرات تداخلی در نظر گرفته شوند، ناشی می‌شود [۱۶]. در این بخش رابطه بین متریک و ریسمان کیهانی و اثرات چرخش چارچوب مرجع غیراینرسی را شرح خواهیم داد. فضا زمان ریسمان کیهانی جواب معادلات میدان اینشتین است و یک فضا زمان تعیین شده توسط یک ریسمان طویل بی‌نهایت را توصیف می‌کند. فضا زمان ریسمان به صورت ساکن و با تقارن استوانه‌ای فرض می‌شود. سپس المان طول برای این سیستم می‌تواند به فرم زیر نوشته شود [۱۷]:

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + \alpha^2 r'^2 d\phi'^2 + dz'^2 \quad (32.2)$$

که  $\alpha = 1 - 4G\mu$  و  $\mu$  چگالی جرم ریسمان است. در این فضا زمان محدوده مختصات به صورت زیر نمایش داده می‌شود: محدوده زاویه  $\phi' \in [0, 2\pi)$  است زمانی که  $r'$  و  $z'$  به ترتیب در محدوده  $r' \in [0, \infty)$  و  $z' \in (-\infty, \infty)$  باشند. پارامتر  $\alpha$  مربوط به انحنای فضا زمان است و مقادیر  $\alpha \leq 1$  و یا  $\alpha > 1$  را اختیار می‌کند. در اینجا به بررسی مورد  $0 < \alpha < 1$  می‌پردازیم.

<sup>20</sup>Cosmic strings

<sup>21</sup>Topological defects

<sup>22</sup>Tom Kibble

<sup>23</sup>Vortex

<sup>24</sup>Noninertial

<sup>25</sup>Mashhoon

تبدیل متریک (۳۲.۲) برای چارچوب مرجع چرخان می‌تواند با در نظر گرفتن تبدیل مختصات زیر صورت گیرد:

$$t' = t, \quad r' = r, \quad \phi' = \phi + \omega t, \quad z' = z \quad (33.2)$$

که  $\omega$  سرعت زاویه‌ای چارچوب چرخان است و ما فرض می‌کنیم که مثبت باشد. با قرار دادن این تبدیل در معادله (۳۲.۲) المان خطی زیر را به دست می‌آوریم:

$$ds^2 = - (1 - \alpha^2 r^2 \omega^2) dt^2 + 2\alpha^2 r^2 \omega dt d\phi + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (34.2)$$

که با تانسور متریک هم‌وردا در ارتباط است.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - (1 - \alpha^2 r^2 \omega^2) & 0 & \alpha^2 r^2 \omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 r^2 \omega & 0 & \alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35.2)$$

می‌توانیم مشاهده کنیم که  $g_{\mu\nu}$  یک تانسور متریک غیر قطری است که اثرات توپولوژی و چرخش چارچوب مرجع را در نظر می‌گیرد. یک ویژگی جالب معادله (۳۴.۲) شرط زیر است:

$$0 < r < 1/\alpha\omega \quad (36.2)$$

از آنجایی که برای  $r > 1/\alpha\omega$  سرعت ذره بزرگ‌تر از سرعت نور است، بنابراین محدود کردن  $r$  به بازه  $(0, 1/\alpha\omega)$  مناسب می‌باشد.

## ۶.۲ معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل‌های

### اسکالر و برداری کولنی‌گونه

ذرات با اسپین صفر با معادله معمول کلاین - گوردون نمایش داده می‌شوند که می‌توانند به فضا زمان خمیده تعمیم یابند. به منظور به دست آوردن تعمیم معادله موج، مشتقات هم‌وردا را به جای مشتقات معمولی در معادله کلاین - گوردون در فضا زمان مینکوفسکی قرار می‌دهیم و نتیجه می‌دهد [۱۷]:

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} D_\nu \psi) + m^2 \psi = 0 \quad (37.2)$$

این معادله، معادله کلاین - گوردون در فضا زمان خمیده است که  $m$  جرم ذره،  $D_\mu$  به صورت  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  و  $e$  بار الکتریکی است. پتانسیل اسکالر  $V(r)$  را با تعمیم جمله جرم

## معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری کولنی گونه ۱۵

معادله  $m \rightarrow m + V(r)$  در نظر می‌گیریم. با قرار دادن این جمله جرم در معادله (۳۷.۲)، معادله دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} D_\nu \psi) + (m + V)^2 \psi = 0 \quad (38.2)$$

با در نظر گرفتن المان خطی (۳۴.۲) و پتانسیل برداری  $A_0$ ، معادله دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ -\left(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0\right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{1 - \alpha^2 r^2 \omega^2}{\alpha^2 r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2\omega \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0\right) - (m + V)^2 \right] \psi = 0 \quad (39.2)$$

این معادله، معادله کلاین - گوردون در فضا زمان ریسمان کیهانی است. مشاهده می‌کنیم که معادله (۳۹.۲) مستقل از  $t$ ،  $z$  و  $\phi$  است، به همین خاطر جواب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\psi(t, r, z, \phi) = e^{-i\varepsilon t} e^{il\phi} e^{ip_z z} R(r) \quad (40.2)$$

که  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  است و  $\varepsilon$  می‌تواند به عنوان انرژی ذره تعبیر شود و  $p_z$  تکانه می‌باشد. با قرار دادن رابطه (۴۰.۲) در (۳۹.۲) و با در نظر گرفتن  $A_0 = \kappa/r$ ، معادله دیفرانسیل شعاعی را به دست می‌آوریم:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{e^2 \kappa^2 - l^2 / \alpha^2}{r^2} - (m + V)^2 + \frac{2\varepsilon e \kappa + 2\omega e \kappa l}{r} + (\varepsilon + \omega l)^2 - p_z^2 \right] R(r) = 0 \quad (41.2)$$

که پارامتر  $\alpha$  زاویه کاستی<sup>۲۶</sup> فضا زمان را نشان می‌دهد و  $\alpha = 1$  مربوط به فضا زمان مینکوفسکی است. در اینجا به بررسی مورد  $\alpha < 1$  می‌پردازیم.

در این مرحله، پتانسیل اسکالر  $V(r) = \eta/r$  را در نظر می‌گیریم که  $\eta$  ثابت است. بنابراین با قرار دادن این پتانسیل در معادله (۴۱.۲) عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\beta^2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} - \delta^2 \right] R(r) = 0 \quad (42.2)$$

که

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{l^2 / \alpha^2 + \eta^2 - e^2 \kappa^2}, & \gamma &= -\varepsilon e \kappa - \omega e \kappa l + m \eta \\ \delta^2 &= m^2 + p_z^2 - (\varepsilon + \omega l)^2 \end{aligned} \quad (43.2)$$

<sup>26</sup>Deficit angle

رابطه  $e^2 \kappa^2 < \eta^2$  را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که  $\beta$  یک عدد حقیقی است. اکنون تبدیل مختصات شعاعی  $\rho = 2\delta r$  را در نظر می‌گیریم، در نتیجه معادله (۴۲.۲) فرم زیر را خواهد گرفت:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} - \frac{\gamma}{\delta\rho} - \frac{1}{4} \right] R(\rho) = 0 \quad (44.2)$$

برای به دست آوردن ویژه توابع جواب زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$R(\rho) = \rho^\beta e^{-\frac{\rho}{2\delta}} F(\rho) \quad (45.2)$$

با قرار دادن  $R(\rho)$  در معادله (۴۴.۲)، معادله دیفرانسیلی را به دست می‌آوریم که با معادله شعاعی مرتبط است.

$$\rho \frac{d^2 F}{d\rho^2} + (2\beta + 1 - \rho) \frac{dF}{d\rho} + \left( -\beta - \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1}{4} \right) F = 0 \quad (46.2)$$

این معادله، معادله فوق هندسی کانفلوئنت است که یک معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم می‌باشد و دو جواب مستقل به دست می‌آید. جواب معادله (۴۶.۲)، دارای تکینگی منظم در  $\rho = 0$ ، با تابع فوق هندسی کانفلوئنت زیر به دست می‌آید:

$$F(\rho) = {}_1F_1 \left( \beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{4}, 2\beta + 1; \rho \right) \quad (47.2)$$

اگر محدوده  $1 \ll \alpha\omega$ ، یعنی محدوده  $2\gamma$  چرخش کند، را در نظر بگیریم شرط مرزی ایجاب می‌کند که جواب

$${}_1F_1 \left( \beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{4}, 2\beta + 1; \frac{2\delta}{\alpha\omega} \rightarrow \infty \right) \quad (48.2)$$

در  $\rho_0 = 1/\alpha\omega \rightarrow \infty$  بی‌نهایت باشد. بنابراین به علت رفتار جانبی تابع فوق هندسی، لازم است که تابع  ${}_1F_1$  یک تابع چند جمله‌ای درجه  $N$  باشد و پارامتر  $\beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{4}$  باید صحیح منفی باشد.

$$\beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{4} = -N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (49.2)$$

سپس طیف انرژی را به دست می‌آوریم.

$$\varepsilon = \frac{e\kappa m\eta}{\zeta + e^2 \kappa^2} \pm \sqrt{\zeta \frac{[(p_z^2 + m^2)(\zeta + e^2 \kappa^2) - m^2 \eta^2]}{(\zeta + e^2 \kappa^2)^2} - \omega |l|} \quad (50.2)$$

که  $\zeta = \left( N + \frac{1}{r} + \sqrt{l^2/\alpha^2 + \eta^2 - e^2\kappa^2} \right)^2$  می‌باشد. از رابطه (۵۰.۲) می‌توان مشاهده کرد که طیف انرژی به پارامتر  $\alpha$ ، زاویه کاستی فضا زمان مخروطی بستگی دارد و حضور نقص توپولوژیکی تبهگنی ترازهای انرژی ذره را از بین می‌برد. جملات اول و دوم مربوط به پتانسیل‌های کولنی گونه استخراج شده از ریسمان کیهانی است و جمله سوم مرتبط با اثر غیراینرسی چارچوب‌های چرخان است. برای  $l = 0$  یا  $\omega = 0$  مجموعه مجزای انرژی‌ها حدود  $\varepsilon = 0$  متقارن است. در این روش حضور اثرات غیر اینرسی چارچوب‌های چرخان در فضا زمان تقارن ترازهای انرژی را حدود  $\varepsilon = 0$  می‌شکند زیرا  $\varepsilon_+$  به طور کلی بزرگ‌تر از  $\varepsilon_-$  است.

## ۷.۲ نوسانگر کلاین - گوردون در فضا زمان ریسمان کیهانی

سیستم جالب دیگری که در نظر گرفته می‌شود، نوسانگر کلاین - گوردون در فضا زمان ریسمان کیهانی است. این نوسانگر دارای فرمولی مشابه پتانسیل برداری در بخش قبلی است، بنابراین برای بررسی جواب‌های آن از تغییر عملگر تکانه زیر استفاده می‌کنیم [۱۷]:

$$p_\mu \rightarrow (p_\mu + im\Omega X_\mu) \quad (51.2)$$

که جرم ذره در حال سکون،  $\Omega$  فرکانس نوسانگر و  $X_\mu = (0, r, 0, 0)$  است که  $r$  فاصله ذره تا ریسمان می‌باشد. در اینجا معادله کلاین - گوردون به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[ -\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + m\Omega X_\mu) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\nu - m\Omega X_\nu) + (m + V)^2 \right] \psi = 0 \quad (52.2)$$

با قرار دادن  $V = 0$  در معادله بالا و با در نظر گرفتن المان خطی (۳۴.۲)، معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + m\Omega \right) r \left( \frac{\partial}{\partial r} - m\Omega \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1 - \alpha^2 r^2 \omega^2}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2\omega \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} - m^2 \right] \psi = 0 \quad (53.2)$$

مشابه مورد پتانسیل کولنی در بخش قبلی، معادله (۵۳.۲) مستقل از  $t$ ،  $z$  و  $\phi$  است، بنابراین انتخاب زیر مناسب است:

$$\psi(t, r, z, \phi) = e^{-i\varepsilon t} e^{i l \phi} e^{i p_z z} R'(r) \quad (54.2)$$

که  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  و  $\varepsilon$  انرژی ذره است. با قرار دادن (۵۴.۲) در (۵۳.۲)، معادله دیفرانسیل شعاعی را به دست می‌آوریم:

$$\left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + m\Omega \right) r \left( \frac{\partial}{\partial r} - m\Omega \right) - \frac{l^2}{\alpha^2 r^2} + (\varepsilon + \omega l)^2 - p_z^2 - m^2 \right] R'(r) = 0 \quad (55.2)$$

در این مرحله، می‌توانیم تغییر متغیر  $R'(r) = \frac{R(r)}{\sqrt{r}}$  را در معادله (۵۵.۲) قرار دهیم و به نتیجه زیر برسیم:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - m^2 \Omega^2 r^2 - \frac{(l^2/\alpha^2 - 1/4)}{r^2} + K^2 \right] R(r) = 0 \quad (56.2)$$

که  $K = \sqrt{(\varepsilon + \omega l)^2 - p_z^2 - m^2 - 2m\Omega}$  می‌باشد. این معادله یک معادله شعاعی است که نوسانگر کلاین-گوردون را در فضا زمان ریمان کیهانی توصیف می‌کند.

برای حل معادله بالا از روش  $NU$ <sup>۲۸</sup> استفاده می‌کنیم [۱۸، ۱۹]. با تعریف متغیر جدید  $s = r^2$ ، می‌توانیم معادله شعاعی (۵۶.۲) را به فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \frac{1}{2s} \frac{dR(s)}{ds} + \frac{1}{s^2} (-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3) R(s) = 0 \quad (57.2)$$

که پارامترهای  $\xi_1$ ،  $\xi_2$ ،  $\xi_3$  و پارامترهای  $\alpha$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\xi_1 = \frac{m^2 \Omega^2}{4} \quad (58.2)$$

$$\xi_2 = \frac{k^2}{4} \quad (59.2)$$

$$\xi_3 = \frac{\left(\frac{l^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4}\right)}{4} \quad (60.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0, \quad \alpha_4 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_6 = \alpha_9 = \frac{m^2 \Omega^2}{4} \\ \alpha_7 &= -\frac{k^2}{4}, \quad \alpha_8 = \frac{l^2}{4\alpha^2}, \quad \alpha_{10} = 1 + \frac{l}{\alpha}, \quad \alpha_{11} = m\Omega \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{4} + \frac{l}{2\alpha}, \quad \alpha_{13} = -\frac{m\Omega}{2} \end{aligned} \quad (61.2)$$

با استفاده از معادله ویژه مقدری انرژی زیر

$$(2n+1)\sqrt{\alpha_9} + \alpha_7 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (62.2)$$

انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \pm \sqrt{2m\Omega \left( 2n' + \left| \frac{l}{\alpha} \right| \right) + m^2 + p_z^2 - \omega |l|} \\ n' &\equiv n+1 = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (63.2)$$

ویژه تابع نیز به صورت زیر می‌باشد

$$R(r) = r^{\left(\frac{1}{2} + \left| \frac{l}{\alpha} \right| \right)} e^{-\frac{m\Omega r^2}{2}} L_n^{\left| \frac{l}{\alpha} \right|} (m\Omega r^2) \quad (64.2)$$

با استفاده از رابطه زیر می‌توان تابع لاگر را به تابع فوق هندسی تبدیل کرد.

$$L_n^{|\frac{l}{\alpha}|} (m\Omega r^2) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (|\frac{l}{\alpha}| + 1 + k)}{n!} {}_1F_1 \left( -n, |\frac{l}{\alpha}| + 1, m\Omega r^2 \right) \quad (65.2)$$

که

$$-n = \frac{1}{\alpha} \left| \frac{l}{\alpha} \right| + \frac{1}{\alpha} - \frac{K^2}{4m\Omega} \quad (66.2)$$

ما مشاهده می‌کنیم که طیف انرژی مربوط به نوسانگر کلاین - گوردون در فضا زمان مخروطی به  $\alpha$ ، یعنی زاویه کاستی فضا زمان مخروطی بستگی دارد. اگر  $\alpha < 1$  باشد، انرژی سیستم افزایش می‌یابد. به راحتی مشاهده می‌کنیم که برای  $l = 0$  یا  $\omega = 0$ ، انرژی حول  $\varepsilon = 0$  متقارن است. در این روش، چارچوب چرخان تقارن انرژی را در  $\varepsilon = 0$  می‌شکند. جمله اول در معادله (۶۳.۲) مربوط به نوسانگر کلاین - گوردون حاصل از یک فضای مخروطی است و جمله دوم مرتبط با اثر غیر اینرسی است که به نوبه خود جفت شدگی بین عدد کوانتومی و سرعت زاویه‌ای چارچوب چرخان است.

## ۸.۲ معادله کلاین - گوردون در حضور پتانسیل کرنل در فضا زمان ریسمان کیهانی

در این بخش، معادله کلاین - گوردون را با استفاده از پتانسیل کرنل<sup>۲۹</sup> در فضا زمان ریسمان کیهانی حل می‌کنیم. متریک زیر را در نظر می‌گیریم

$$ds^2 = - (1 - \alpha^2 r^2 \omega^2) dt^2 + 2\alpha^2 r^2 \omega dt d\phi + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (67.2)$$

و تانسور متریک هم‌وردا به صورت زیر می‌باشد.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \alpha^2 r^2 \omega^2) & 0 & \alpha^2 r^2 \omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 r^2 \omega & 0 & \alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (68.2)$$

برای بررسی معادله کلاین - گوردون در یک فضا زمان خمیده از معادله دیفرانسیل زیر استفاده می‌کنیم:

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} D_\nu \psi) + (m + V)^2 \psi = 0 \quad (69.2)$$

<sup>29</sup>Cornell



می‌باشد.  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  با در نظر گرفتن المان خطی (۶۷.۲) رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ -\left(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0\right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{1 - \alpha^2 r^2 \omega^2}{\alpha^2 r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2\omega \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0\right) - (m + V)^2 \right] \psi = 0 \quad (70.2)$$

معادله بالا مستقل از  $t$ ،  $z$  و  $\phi$  است، بنابراین می‌توانیم از روش حدسی<sup>۳۰</sup> زیر استفاده کنیم

$$\psi(t, r, z, \phi) = e^{-i\epsilon t} e^{il\phi} e^{ip_z z} R(r) \quad (71.2)$$

که  $\epsilon$ ،  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  انرژی ذره و  $p_z$  تکانه در راستای  $z$  است. با قرار دادن رابطه (۷۱.۲) در معادله (۷۰.۲)، معادله دیفرانسیل شعاعی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{e^2 \kappa^2 - l^2 / \alpha^2}{r^2} - (m + V)^2 + \frac{2\epsilon \epsilon \kappa + 2\omega \epsilon \kappa l}{r} + (\epsilon + \omega l)^2 - p_z^2 \right] R(r) = 0 \quad (72.2)$$

برای حل معادله شعاعی پتانسیل کرنل  $V(r) = ar + \frac{b}{r}$  را در نظر می‌گیریم که  $a$  و  $b$  ثابت هستند. بنابراین با قرار دادن این پتانسیل در معادله (۷۲.۲)، معادله زیر به دست می‌آید

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\beta^2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} - a^2 r^2 - 2mar + \epsilon_\beta \right] R(r) = 0 \quad (73.2)$$

که پارامترهای  $\beta$ ،  $\gamma$  و  $\epsilon_\beta$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\beta = \sqrt{l^2 / \alpha^2 + b^2 - e^2 \kappa^2} \quad \gamma = -\epsilon \epsilon \kappa - \omega \epsilon \kappa l + mb$$

$$\epsilon_\beta = -m^2 - p_z^2 + (\epsilon + \omega l)^2 - 2ab \quad (74.2)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر

$$R(r) = r^{-1/4} F(r) \quad (75.2)$$

معادله (۷۳.۲) فرم زیر را می‌گیرد.

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left( \epsilon_\beta - \frac{\beta^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} - 2mar - a^2 r^2 \right) F(r) = 0 \quad (76.2)$$

به منظور به دست آوردن فرم ساده‌تری از معادله دیفرانسیل، فرم زیر را در نظر می‌گیریم

$$F(r) = r^A \exp(r(B + Dr)) u(r) \quad (77.2)$$

<sup>30</sup> Ansatz

که پارامترهای  $A$ ،  $B$  و  $D$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r} + \beta \\ D &= -\frac{1}{r} \\ B &= \frac{m}{2D} \end{aligned} \quad (78.2)$$

بنابراین معادله (76.2) فرم زیر را می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left( -2m + \frac{2\left(\frac{1}{r} + \beta\right)}{r} - 2r \right) \frac{du(r)}{dr} \\ + \left( -1 - 2\left(\frac{1}{r} + \beta\right) + m^2 + \frac{-2\gamma - 2\left(\frac{1}{r} + \beta\right)m}{r} + \varepsilon_\beta \right) u(r) = 0 \end{aligned} \quad (79.2)$$

این معادله، معادله دیفرانسیل هیون بای کانفلوئنت است که باید  $a^2 = 1$  باشد. بنابراین جواب معادله (79.2) برحسب توابع هیون بای کانفلوئنت نوشته می‌شود [20].

$$u(r) = H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', r) \quad (80.2)$$

$$\alpha' = 2\beta \quad (81.2)$$

$$\beta' = 2m \quad (82.2)$$

$$\gamma' = m^2 + \varepsilon_\beta \quad (83.2)$$

$$\delta' = 4\gamma \quad (84.2)$$

تابع موج می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\psi(t, r, z, \phi) = r^\beta \exp \left[ -i\varepsilon t + i l \phi + i p_z z + r \left( -m - \frac{1}{r} \right) \right] H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', r) \quad (85.2)$$

برای به دست آوردن رابطه ویژه مقداری انرژی، ابتدا فرض می‌کنیم  $u(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \beta^n$ . سپس با قرار دادن چنین فرمی در معادله (79.2)، رابطه بازگشتی زیر را بین ضرایب بسط به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} C_{n+3} (n+3) (n+3+\alpha') - C_{n+2} \left( \beta' (n+2) + \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} \right) \\ + C_{n+1} (\gamma' - 2(n+1) - \alpha' - 2) = 0 \end{aligned} \quad (86.2)$$

با حذف جملات بعد از  $C_{n+3}$  در سری، رابطه ویژه مقداری انرژی می‌تواند به دست بیاید و روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{4 + 2b + 2n + p_z^2 + 2\sqrt{b^2 + \frac{l^2}{\alpha^2} - e^2 k^2 - l\omega}} \quad (87.2)$$

$$b = \frac{2ek(\varepsilon + l\omega) + m \left( -\Delta - 2n + \frac{4m(l-ek)(l+ek)}{\alpha^2(m(\Delta+2n)-2ek(\varepsilon+l\omega))} \right)}{4m} \quad (88.2)$$

از معادله (۸۷.۲) می‌توان مشاهده کرد که طیف انرژی به زاویه کاستی  $\alpha$  بستگی دارد.

## ۹.۲ نوسانگر کلاین - گوردون در حضور پتانسیل کرنل در فضا زمان ریسمان کیهانی

در این بخش، نوسانگر کلاین - گوردون را با در نظر گرفتن پتانسیل کرنل در فضا زمان ریسمان کیهانی بررسی می‌کنیم که معادله آن دارای ساختاری مشابه پتانسیل برداری در بخش قبلی است. به منظور بررسی جواب‌های معادله عملگر تکانه را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$p_\mu \rightarrow (p_\mu + im\Omega X_\mu) \quad (۸۹.۲)$$

$m$  جرم ذره در حال سکون،  $\Omega$  فرکانس نوسانگر و  $X_\mu = (\circ, r, \circ, \circ)$  است که  $r$  فاصله ذره تا ریسمان می‌باشد. معادله کلاین - گوردون به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[ -\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + m\Omega X_\mu) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\nu - m\Omega X_\nu) + (m + V(r))^2 \right] \psi = \circ \quad (۹۰.۲)$$

با در نظر گرفتن المان خطی (۶۷.۲) و پتانسیل کرنل  $V(r) = ar + \frac{b}{r}$ ، معادله دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2m\Omega - m^2 \Omega^2 r^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left( \frac{1 - \alpha^2 r^2 \omega^2}{\alpha^2 r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2\omega \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} - m^2 - a^2 r^2 - \frac{b^2}{r^2} - 2mar - \frac{2mb}{r} - 2ab \right] \psi = \circ \quad (۹۱.۲)$$

چون معادله بالا مستقل از  $t$ ،  $z$  و  $\phi$  است، انتخاب زیر را انجام می‌دهیم

$$\psi(t, r, z, \phi) = e^{-i\epsilon t} e^{il\phi} e^{ip_z z} R'(r) \quad (۹۲.۲)$$

که در آن  $l = \circ, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  و  $\epsilon$  انرژی ذره است. با قرار دادن رابطه (۹۲.۲) در معادله (۹۱.۲)، معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left[ \epsilon^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2m\Omega - m^2 \Omega^2 r^2 - p_z^2 - \frac{l^2}{\alpha^2 r^2} + \omega^2 l^2 + 2\omega \epsilon l - m^2 - a^2 r^2 - \frac{b^2}{r^2} - 2mar - \frac{2mb}{r} - 2ab \right] R'(r) = \circ \quad (۹۳.۲)$$

اگر تغییر متغیر  $R(r) = \frac{R(r)}{\sqrt{r}}$  را در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[ \epsilon^2 - \frac{l^2/\alpha^2 + b^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2mb}{r} - 2mar - (m^2 \Omega^2 + a^2) r^2 \right] R(r) = \circ \quad (۹۴.۲)$$

و  $\varepsilon_\beta = (\varepsilon + \omega l)^2 - p_z^2 - m^2 - 2m\Omega - 2ab$  می‌کنیم [۲۰]. به منظور حل این معادله از شکل زیر استفاده

$$R(r) = r^A \exp(r(B + Dr)) u(r) \quad (95.2)$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} \quad (96.2)$$

$$B = \frac{am}{2D} \quad (97.2)$$

$$D = -\frac{1}{2} \quad (98.2)$$

بنابراین معادله (۹۴.۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left( -2am - 2r + \frac{2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} \right)}{r} \right) \frac{du(r)}{dr} \\ + \left( -1 + a^2 m^2 - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} \right) + \frac{-2bm - 2am \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} \right)}{r} + \varepsilon_\beta \right) u(r) = 0 \end{aligned} \quad (99.2)$$

این معادله، معادله دیفرانسیل هیون بای کانفلوئنس است که باید شرط  $m^2 \Omega^2 + a^2 = 1$  برقرار باشد. جواب این معادله، تابع هیون بای کانفلوئنس است.

$$u(r) = H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', r) \quad (100.2)$$

$$\alpha' = \frac{2\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} \quad (101.2)$$

$$\beta' = 2am \quad (102.2)$$

$$\gamma' = a^2 m^2 + \varepsilon_\beta \quad (103.2)$$

$$\delta' = 4bm \quad (104.2)$$

بنابراین تابع موج به صورت زیر است:

$$(105.2)$$

$$\psi(t, r, z, \phi) = r \left( \frac{\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} \right) \exp \left[ -i\varepsilon t + il\phi + ip_z z + r \left( -am - \frac{1}{2} r \right) \right] H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', r)$$

اگر رابطه  $u(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \beta^n$  را در نظر بگیریم، رابطه بازگشتی بین ضرایب بسط را به دست می‌آوریم:

$$C_{n+3} (n+3) (n+3+\alpha') - C_{n+2} \left( \beta' (n+2) + \frac{\delta' + (1+\alpha') \beta'}{2} \right) \quad (106.2)$$

$$+ C_{n+1} (\gamma' - 2(n+1) - \alpha' - 2) = 0$$

با حذف ضرایب بعد از  $C_{n+3}$ ، رابطه ویژه مقداری انرژی به دست می‌آید و روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\varepsilon = -l\omega \pm \sqrt{4 + 2ab + m^2 - a^2 m^2 + 2n + p_z^2 + \frac{2\sqrt{l^2 + b^2 \alpha^2}}{\alpha} + 2m\Omega} \quad (107.2)$$

$$b = \frac{2^{\circ} a + \lambda a n \pm \sqrt{a^2 (-2^{\circ} - \lambda n)^2 + 4a^2 (-4 + 4a^2) (25 + 2^{\circ} n + 4n^2 - \frac{4l^2}{\alpha^2})}}{\lambda (-1 + a^2)} \quad (108.2)$$

مشاهده می‌کنیم که پتانسیل کرنل منجر به شکل‌گیری حالات مقید می‌شود و طیف انرژی مربوط به معادله کلاین - گوردون در فضا زمان ریسمان کیهانی به پارامتر زاویه کاستی  $\alpha$  بستگی دارد. همچنین حضور نقص توپولوژیکی انرژی سیستم‌های فیزیکی را بهبود می‌بخشد.

## ۱۰.۲ نوسانگر کلاین - گوردون در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت در فضا زمان ریسمان کیهانی

در این بخش، به بررسی ذره بدون اسپین نسبیتی باردار در فضا زمان تولید شده توسط یک ریسمان کیهانی چرخان بدون ساختار داخلی، که ریسمان کیهانی چرخان ساکن نامیده می‌شود، می‌پردازیم. این فضا زمان توسط متریک زیر توصیف می‌شود [۲۱]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + 2ac dt d\varphi - (\alpha^2 \rho^2 - a^2) d\varphi^2 - d\rho^2 - dz^2 \quad (109.2)$$

که پارامتر چرخش است و به صورت  $a = \frac{4GJ}{c^2}$  تعریف می‌شود که دارای واحد فاصله است. از طرف دیگر، پارامتر  $\alpha = 1 - \frac{4G\mu}{c^2}$  بستگی به زاویه کاستی  $\alpha = 2\pi(1 - \alpha)$  دارد. در این جا پارامترهای  $c$ ،  $G$  و  $\mu$  به ترتیب سرعت نور، ثابت گرانشی نیوتن و چگالی جرم خطی ریسمان است. تانسور متریک ریسمان کیهانی چرخان بالا نیز به صورت زیر است:

$$g_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & ac & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ ac & 0 & -(\alpha^2 \rho^2 - a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (110.2)$$

اکنون نوسانگر کلاین - گوردون جفت شده در این فضا زمان را در نظر می‌گیریم. مشخص است که نوسانگر کلاین - گوردون از معادله کلاین - گوردون آزاد با جایگزینی  $p_{\sigma} \rightarrow (p_{\sigma} + iM\omega x_{\sigma})$  به دست می‌آید [۲۲]. در این جا  $x_{\sigma} = (0, \rho, 0, 0)$  و  $\rho$  فاصله عرضی ذره تا نقص است. بنابراین فرم هم‌وردای نوسانگر کلاین - گوردون به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_{\sigma} + M\omega x_{\sigma}) \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} (\partial_{\tau} - M\omega x_{\tau}) + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad (111.2)$$

## نوسانگر کلاین - گوردون در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت در فضا زمان ریمان کیهانی ۲۵

که  $M$  جرم ذره،  $\hbar$  ثابت پلانک کاهش،  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای،  $g_{\sigma\tau}$  تانسور متریک و  $g = \det(g_{\sigma\tau})$  در  $\rho^2 \alpha^2 c^2 -$  است و جفت شدگی الکترومغناطیسی نیز با  $\partial_\varphi - \frac{ieA_\varphi}{\hbar c} \rightarrow \partial_\varphi$  معرفی می‌شود. در اینجا باید توجه داشته باشیم که پتانسیل برداری  $A_\varphi$  فقط دارای مؤلفه شعاعی است و به این معنی است که میدان مغناطیسی  $B$  با ریمان کیهانی چرخان موازی می‌باشد. بنابراین پتانسیل مغناطیسی می‌تواند به صورت  $A = (\circ, A_\varphi, \circ)$  با  $A_\varphi = \frac{\alpha B \rho^2}{r}$  نوشته شود. بنابراین معادله نوسانگر کلاین - گوردون جفت شده با میدان مغناطیسی یکنواخت در فضا زمان ریمان کیهانی چرخان می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$(112.2) \quad \left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - M^2 \omega^2 \rho^2 - 2M\omega - \left( \frac{\alpha^2 \rho^2 - a^2}{c^2 \alpha^2 \rho^2} \right) dt^2 - \frac{2a}{c \alpha^2 \rho^2} dt \left( d\varphi - \frac{ieA_\varphi}{\hbar c} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \left( d\varphi - \frac{ieA_\varphi}{\hbar c} \right)^2 + dz^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(\rho, \varphi, z; t) = 0$$

به خاطر تقارن استوانه‌ای، می‌توانیم جواب را به فرم زیر بنویسیم:

$$(113.2) \quad \psi(\rho, \varphi, z; t) = e^{i(-\frac{E}{\hbar}t + m\varphi + kz)} R(\rho)$$

که  $R(\rho)$  معادله شعاعی را ارضا می‌کند.

$$(114.2) \quad \left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \gamma^2 \frac{1}{\rho^2} - \left( M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2} \right) \rho^2 + \varepsilon \right] R(\rho) = 0$$

$$\gamma = \left( \frac{m}{\alpha} + \frac{aE}{\alpha \hbar c} \right)$$

$$(115.2) \quad \varepsilon = -2M\omega + \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{aeBE}{\alpha \hbar^2 c^2} + \frac{eBm}{\alpha \hbar c} - k^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}$$

با معرفی یک متغیر جدید  $\chi = \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \rho^2$ ، معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم زیر محاسبه می‌شود.

$$(116.2) \quad \left[ \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{d}{d\chi} - \gamma^2 \frac{1}{4\chi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{4\chi \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}}} \right] R(\chi) = 0$$

$R(\chi)$  را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$(117.2) \quad R(\chi) = \chi^{\frac{|\gamma|}{2}} \exp\left(-\frac{\chi}{4}\right) F(\chi)$$

با قرار دادن عبارت بالا در معادله (116.2)، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$(118.2) \quad \chi F''(\chi) + (|\gamma| + 1 - \chi) F'(\chi) - \left( -\frac{\varepsilon}{4 \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}}} + \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{4} \right) F(\chi) = 0$$

این معادله، معادله فوق هندسی کانفلوئنت است که جواب آن می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$F(\chi) = {}_1F_1 \left( -\frac{\varepsilon}{\sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}}} + \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{4}, |\gamma| + 1; \chi \right) \quad (119.2)$$

بنابراین تابع موج مرتبط به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z; t) = & N e^{i(-\frac{E}{\hbar}t + m\varphi + kz)} \left( M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2} \right)^{\frac{|\gamma|}{4}} \rho^{|\gamma|} \\ & \times \exp \left( -\frac{\sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \rho^2}{2} \right) \\ & {}_1F_1 \left( -\frac{\varepsilon}{\sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}}} + \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{4}, |\gamma| + 1; \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \rho^2 \right) \end{aligned} \quad (120.2)$$

وقتی  $\chi \rightarrow \infty$  میل کند، تابع فوق هندسی کانفلوئنت به صورت نمایی واگرا می‌شود. به منظور داشتن جواب‌های فیزیکی قابل قبول شرط زیر را اعمال می‌کنیم

$$\frac{-\varepsilon}{\sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}}} + \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{4} = -n \quad (121.2)$$

که  $n$  عدد صحیح مثبت است. از عبارت بالا می‌توانیم ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر به دست آوریم.

$$E = - \left( \frac{aeB}{2\alpha} - \frac{c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \right) \pm \sqrt{\lambda + \Delta} \quad (122.2)$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \left( \frac{aeB}{\alpha} - \frac{2c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \right)^2 + 2M\omega\hbar^2 c^2 + \hbar^2 c^2 k^2 + M^2 c^4 \quad (123.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & 2\hbar^2 c^2 (2n + 1) \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \\ & + \left( -\frac{c\hbar e B m}{\alpha} + 2\hbar^2 c^2 \frac{|m|^2}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2}} \right) \end{aligned} \quad (124.2)$$

ویژه مقادیر انرژی نه تنها به پارامتر  $\alpha$  بستگی دارد بلکه به پارامتر چرخشی  $a$  نیز وابسته است و عدد کوانتومی مغناطیسی منفی و مثبت  $m$  برای ویژه مقادیر انرژی مؤثر است.

نوسانگر کلاین- گوردون در حضور میدان مغناطیسی همگن در ریزمان کیهانی

چرخان ۲۷

در پایان این بخش، روی محدوده غیر نسبیتی این مدل متمرکز می‌شویم. با استفاده از رابطه  $\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \simeq 2mE$  معادله (۱۲۲.۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left[ E + \left( \frac{aeB}{2\alpha} - \frac{c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{aeB}{\alpha} - \frac{2c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right)^2 + 2M\omega\hbar^2 c^2 + \hbar^2 c^2 k^2 \\ &+ E^2 - 2MEc^2 + \hbar^2 c^2 (2n+1) \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \\ &+ \left( -\frac{c\hbar eBm}{\alpha} + 2\hbar^2 c^2 \frac{|m|^2}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right) \end{aligned} \quad (125.2)$$

بعد از انجام برخی محاسبات جبری، عبارت زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E &= \frac{Mc^2}{Mc^2 + \frac{aeB}{2\alpha} - \frac{c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}}} \\ &\times \left[ \omega\hbar^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \frac{\hbar^2}{M} (2n+1) \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} + \left( -\frac{\hbar eBm}{2M\alpha} + \frac{\hbar^2 |m|^2}{\alpha m M} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (126.2)$$

که ویژه مقادیر انرژی با استفاده از آن محاسبه می‌گردد.

## ۱۱.۲ نوسانگر کلاین- گوردون در حضور میدان مغناطیسی همگن در ریزمان کیهانی چرخان

براساس تحلیل‌های بخش قبلی، حالتی را که جرم از طریق رابطه زیر به مکان وابسته است، در نظر می‌گیریم [۲۱]

$$M(\rho) = M_0 \left( 1 + \frac{\Omega \nu}{\rho} \right), \quad \rho \neq 0 \quad (127.2)$$

که  $M_0$ ،  $\nu$  و  $\Omega = \frac{\hbar}{M_0 c}$  به ترتیب جرم سکون ذره بوزون، ثابت حقیقی بدون بعد و طول موج کامپتون گونه با واحد فرمی هستند. در حقیقت، سیستم‌های کوانتوم نسبیتی با جرم وابسته به مکان توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند؛ زیرا آن‌ها در بررسی مشخصات الکترونیکی و فیزیکی نیمه رساناها، مایعات کوانتومی [۲۳]، دیوارهای کوانتومی و نقاط کوانتومی بسیار مفیدند.



بنابراین، فرم هم‌وردای نوسانگر کلاین-گوردون به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\sigma + M\omega x_\sigma) \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} (\partial_\tau - M\omega x_\tau) + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \phi = 0 \quad (128.2)$$

نوسانگر کلاین-گوردون جفت شده با یک میدان مغناطیسی همگن به همراه جرم وابسته به مکان در فضا زمان ریسمان کیهانی چرخان توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{d}{d\rho} + M\omega\rho \right) \rho \left( \frac{d}{d\rho} - M\omega\rho \right) + \left( \frac{1}{c^2} - \frac{a^2}{\alpha^2 \rho^2 c^2} \right) dt^2 + \frac{2a}{c\alpha^2 \rho^2} dt d\varphi - \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} d^2\varphi - d^2z + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \phi(\rho, \varphi, z; t) = 0 \quad (129.2)$$

با استفاده از روش حدسی، انتخاب زیر را انجام می‌دهیم

$$\phi(\rho, \varphi, z; t) = e^{i(-\frac{E}{\hbar}t + m\varphi + kz)} S(\rho) \quad (130.2)$$

و معادله (۱۲۹.۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \Sigma_1 \frac{1}{\rho^2} - \Sigma_2^2 \rho^2 - 2\Sigma_3 \rho - 2\Sigma_4 \frac{1}{\rho} + \Sigma_5 \right] S(\rho) = 0 \quad (131.2)$$

که

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \gamma^2 + \frac{M_0 c^2 \Omega^2 \nu^2}{\hbar^2} \\ \Sigma_2^2 &= M_0^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2} \\ \Sigma_3 &= \Omega \nu M_0^2 \omega^2 \\ \Sigma_4 &= M_0 \omega \Omega \nu + \frac{\Omega \nu M_0^2 c^2}{\hbar^2} \\ \Sigma_5 &= -2M_0 \omega - M_0^2 \omega^2 \Omega^2 \nu^2 + \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{aeBE}{\alpha \hbar^2 c^2} + \frac{eBm}{\alpha \hbar c} - k^2 - \frac{M_0^2 c^2}{\hbar^2} \end{aligned} \quad (132.2)$$

برای ساده سازی تابع جدیدی را تعریف می‌کنیم:

$$S(\rho) = \exp\left(-\frac{1}{\nu} \Sigma_2 \rho^2 - \frac{\Sigma_3}{\Sigma_2} \rho\right) \rho^{\sqrt{\Sigma_1}} R(\rho) \quad (133.2)$$

سپس به کمک تغییر متغیر  $r = \sqrt{\Sigma_2} \rho$  داریم:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{1 + 2\sqrt{\Sigma_1}}{r} - \frac{2\Sigma_3}{\Sigma_2^{3/2} r} - 2r \right) \frac{d}{dr} + 2 + \frac{\Sigma_3^2}{\Sigma_2^3} - 2\sqrt{\Sigma_1} + \frac{\Sigma_5}{\Sigma_2} - \frac{1}{2r} \left( \frac{4\Sigma_3 \sqrt{\Sigma_1}}{\Sigma_2^{3/2}} + \frac{4\Sigma_4}{\sqrt{\Sigma_2}} \right) \right] R(r) = 0 \quad (134.2)$$

این معادله، معادله دیفرانسیل هیون بای کانفلوئنت است که جواب آن نیز تابع هیون بای کانفلوئنت نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن

$$\begin{aligned} a &= 1 + 2\sqrt{\Sigma_1} \\ b &= -\frac{2\Sigma_3}{\Sigma_2^{3/2}} \\ c &= -2 \\ d &= 2 + \frac{\Sigma_3^2}{\Sigma_2^3} - 2\sqrt{\Sigma_1} + \frac{\Sigma_5}{\Sigma_2} \\ e &= -\frac{1}{2} \left( \frac{4\Sigma_3\sqrt{\Sigma_1}}{\Sigma_2^{3/2}} + \frac{4\Sigma_4}{\sqrt{\Sigma_2}} \right) \end{aligned} \quad (135.2)$$

به معادله زیر می‌رسیم.

$$R''(r) + \left( \frac{a}{r} + b + cr \right) R'(r) + dR(r) + \frac{e}{r}R(r) = 0 \quad (136.2)$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$R(r) = e^{-\frac{cr^2}{2} - \frac{br}{r}} u(r) \quad (137.2)$$

معادله زیر حاصل می‌شود.

$$u''(r) + \left[ \frac{a - a^2}{r^2} + \frac{e - 2ab}{r} - c^2 r^2 - 2bcr + d - c - b^2 - 2ac \right] u(r) = 0 \quad (138.2)$$

اگر از روش حدسی زیر استفاده کنیم

$$\begin{aligned} u(r) &= e^{g(r)} \\ g(r) &= \lambda r^2 + \beta r + \gamma \ln r \end{aligned} \quad (139.2)$$

معادله زیر به دست می‌آید.

$$u''(r) - [g'' + g'^2] u(r) = 0 \quad (140.2)$$

$$u'' - \left[ \frac{\gamma^2 - \gamma}{r^2} + \frac{2\beta\gamma}{r} + 4\lambda^2 r^2 + 4\lambda\beta r + 2\lambda + \beta^2 + 4\lambda\gamma \right] u(r) = 0 \quad (141.2)$$

از مقایسه دو معادله (۱۳۸.۲) و (۱۴۱.۲) به روابط زیر خواهیم رسید:

$$a^2 - a = \gamma^2 - \gamma \quad (142.2 \text{ آ})$$

$$2ab - e = 2\beta\gamma \quad (142.2 \text{ ب})$$

$$c^2 = 4\lambda^2 \quad (142.2 \text{ ج})$$

$$2bc = 4\lambda\beta \quad (142.2 \text{ د})$$

$$-d + c + b^2 + 2ac = 2\lambda + \beta^2 + 4\lambda\gamma \quad (142.2 \text{ ه})$$

$$\beta^2 = -d + b^2 \quad (142.2 \text{ و})$$

سپس ضرایب ثابت  $\gamma$ ،  $\lambda$  و  $\beta$  را به ترتیب از معادلات بالا به دست می‌آوریم.

$$\gamma = a \quad (143.2)$$

$$\lambda = \pm \frac{c}{\alpha} \quad (144.2)$$

$$\beta = \pm \sqrt{b^2 - d} \quad (145.2)$$

اگر  $\nu \rightarrow 0$ ، از معادله (۱۴۲.۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$-2 + 2\sqrt{\Sigma_1} + \frac{\Sigma_5}{\Sigma_2} = 0 \quad (146.2)$$

پس از ساده سازی به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$E^2 + \left( \frac{2ach}{\alpha} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} + \frac{eaB}{\alpha} \right) E + \left[ -2c^2 \hbar^2 \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right. \\ \left. + \frac{2mc^2 \hbar^2}{\alpha} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} - 2c^2 \hbar^2 M\omega + \frac{eBm\hbar c}{\alpha} - k^2 c^2 \hbar^2 - M^2 c^4 \right] = 0 \quad (147.2)$$

و ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم:

$$E = - \left( \frac{aeB}{2\alpha} + \frac{c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right) \pm \sqrt{\lambda + \Delta} \quad (148.2)$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \left( \frac{aeB}{\alpha} + \frac{2c\hbar a|m|}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \right)^2 + 2M\omega \hbar^2 c^2 + \hbar^2 c^2 k^2 + M^2 c^4 \quad (149.2)$$

$$\Delta = 2\hbar^2 c^2 \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} - \frac{c\hbar eBm}{\alpha} - 2\hbar^2 c^2 \frac{|m|^2}{\alpha m} \sqrt{M^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2}} \quad (150.2)$$

با صفر شدن فرکانس زاویه‌ای، نوسانگر کلاین-گوردون جفت شده با میدان مغناطیسی یکنواخت در فضا زمان ریسمان کیهانی دارای رفتارهایی مشابه معادله کلاین-گوردون جفت شده با میدان مغناطیسی یکنواخت در حضور پتانسیل کولنی گونه در فضا زمان ریسمان کیهانی است.

همانطور که نشان داده شد ترازهای انرژی به پارامتر چرخش  $a$  و پارامتر  $\alpha$  که تعیین کننده ساختار متریک در فضا زمان ریسمان کیهانی چرخان است، بستگی دارند.

## ۱۲.۲ معادله دی-کی-پی

کارهای پیشگام دافین<sup>۳۱</sup>، کمر<sup>۳۲</sup> و پتیو<sup>۳۳</sup> به یک فرمالیسم غنی تبدیل شد که قادر به توصیف برهمکنش‌های بوزون‌های اسپین صفر و اسپین یک می‌باشد. جفت‌شدگی‌هایی که به طور معمول در معادلات کلاین - گوردون و پروکا<sup>۳۴</sup> مورد بررسی قرار می‌گیرند، قسمت عظیمی از کاربردهای فیزیکی همچون توصیف پراکندگی مزون‌ها توسط هسته، دینامیک بوزون‌ها در فضا زمان خمیده و اثر غیراینرسی چارچوب‌های چرخان، مشخصات ترمودینامیکی بوزون‌ها در فضای ناجابه‌جایی و تمام بررسی‌های شامل سیستم‌های اسپین صفر را در برمی‌گیرند. بوزون‌های برداری در جهان در حال گسترش و در پتانسیل آهارنوف-بوهم<sup>۳۵</sup> مثال‌هایی از کاربردهایی برای سیستم اسپین یک است. چگالش بوز-اینشتین<sup>۳۶</sup> و نسبت خاص کاربردهایی برای سیستم‌های هر دو اسپین هستند.

معادله دی-کی-پی<sup>۳۷</sup> از نظر ظاهری به معادله دیراک<sup>۳۸</sup> شباهت دارد اما در معادله دیراک از ماتریس‌های گاما و در معادله دی-کی-پی از ماتریس‌های بتا استفاده می‌شود. ماتریس‌های ۵ مؤلفه‌ای بتا برای بوزون‌های اسپین صفر و ماتریس‌های ۱۰ مؤلفه‌ای بتا برای بوزون‌های اسپین یک به کار می‌روند. معادله دی-کی-پی برای یک بوزون آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید و  $\hbar = c = 1$  را در نظر می‌گیریم [۲۴]

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (151.2)$$

که ماتریس‌های  $\beta^\mu$  از جبر  $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu$  متریک  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  است.

با برهمکنش‌های برداری غیر کمینه، معادله دی-کی-پی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - i[P, \beta^\mu] A_\mu) \psi = 0 \quad (152.2)$$

که  $P$  عملگر تصویر است ( $P^2 = P, P^\dagger = P$ ) و  $\bar{\psi}[P, \beta^\mu] \psi$  تحت تبدیل لورنتسی<sup>۳۹</sup> به صورت  $\bar{\psi}\beta^\mu\psi$  شبیه یک بردار رفتار می‌کند. اگر پتانسیل مستقل از زمان باشد، می‌توانیم بنویسیم  $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \exp(-iEt)$  که  $E$  انرژی بوزون است و معادله دی-کی-پی به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$[\beta^\circ E + i\beta^i \partial_i - (m + i[P, \beta^\mu] A_\mu)] \phi = 0 \quad (153.2)$$

<sup>31</sup>Duffin

<sup>32</sup>Kemmer

<sup>33</sup>Petiau

<sup>34</sup>Proca

<sup>35</sup>Aharonov-Bohm

<sup>36</sup>Bose-Einstein condensate

<sup>37</sup>Duffin-Kemmer-Petiau equation

<sup>38</sup>Dirac

<sup>39</sup>Lorentz transformation

## ۱.۱۲.۲ بخش اسکالر

برای بوزون‌های اسکالر، از نمایشی برای ماتریس‌های  $\beta^\mu$  استفاده می‌کنیم که به صورت زیر هستند [۲۵]:

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} \theta & \bar{\circ} \\ \bar{\circ}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \bar{\circ} & \rho_i \\ -\rho_i^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (154.2)$$

که

$$\theta = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (155.2)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

$\bar{\circ}$ ،  $\circ$  و  $\mathbf{0}$  به ترتیب ماتریس‌های صفر  $2 \times 3$ ،  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  هستند که بالانویس  $T$  ماتریس ترانهاده را تعیین می‌کند. در اینجا عملگر تصویر به صورت  $P = (\beta^\mu \beta_\mu - 1) / 3 = \text{diag}(1, \circ, \circ, \circ, \circ)$  می‌تواند نوشته شود [۲۶]. در این حالت  $P$  اولین مؤلفه اسپینور دی-کی-پی را انتخاب می‌کند. اسپینور ۵ مؤلفه‌ای می‌تواند به صورت  $\psi^T = (\phi_1, \dots, \phi_5)$  نوشته شود که معادله دی-کی-پی مستقل از زمان برای یک بوزون که در راستای محور  $X$  حرکت می‌کند و با توجه به این که پتانسیل فقط به  $x$  بستگی دارد، به فرم زیر تجزیه می‌شود

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + E^2 - m^2 + A_\circ^2 - A_1^2 + \frac{dA_1}{dx} - A_1 \frac{d}{dx} \right) \phi_1 = \circ \quad (156.2)$$

و مؤلفه‌های دیگر اسپینور به صورت

$$\phi_2 = \frac{1}{m} (E + iA_\circ) \phi_1$$

$$\phi_3 = \frac{i}{m} \left( \frac{d}{dx} + A_1 \right) \phi_1, \quad \phi_4 = \phi_5 = \circ \quad (157.2)$$

به دست می‌آیند.

## ۱۳.۲ معادله دی کی پی برای اسپین صفر در فضا زمان

### گودل گونه

در این بخش، معادله هم‌وردای دی کی پی را برای اسپین صفر در بستر خمیده معرفی کرده و این معادله را برای تمامی حالات ممکن برای توابع  $H(r)$ ،  $J(r)$  و  $D(r)$  برای فضا زمان‌های گودل گونه<sup>۴۰</sup> حل می‌کنیم.

<sup>40</sup>Gödel-type

در سال ۱۹۴۹ کورت گودل<sup>۴۱</sup> امکان سفر در زمان و جواب جدیدی برای معادلات میدان انیشتین را پیشنهاد داد [۲۷]. جواب گودل معادله اینشتین اولین مثال از جهان کیهانی با ماده چرخان است و با در نظر گرفتن جواب متقارن استوانه‌ای معادلات نسبت عام به دست می‌آید. این گروه از جواب‌ها توسط المان خطی زیر داده می‌شوند:

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{H(r)}{D(r)}d\phi\right)^2 + \frac{1}{D^2(r)}\left(dr^2 + J^2(r)d\phi^2\right) + dz^2 \quad (158.2)$$

که برای هر مورد، توابع مختلف  $H(r)$ ،  $J(r)$  و  $D(r)$  را داریم. برای حالت فضا زمان سام ریچادری<sup>۴۲</sup>  $J(r) = \alpha r$ ،  $H(r) = \alpha \Omega r^2$ ،  $D(r) = 1$  با تقارن کروی<sup>۴۳</sup>  $J(r) = \alpha r$ ،  $H(r) = \alpha \Omega r^2$ ،  $D(r) = (1 + \frac{r^2}{4R^2})$  گودل گونه هایپربولیکی<sup>۴۴</sup>  $J(r) = \alpha r$ ،  $H(r) = \alpha \Omega r^2$ ،  $D(r) = (1 - l^2 r^2)$  می‌باشد. سیستم مختصات  $(t, r, \phi, z)$  در نواحی  $0 \leq r < \infty$ ،  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  و  $-\infty < (z, t) < \infty$  تعریف می‌شود. پارامترهای  $\Omega$  و  $\alpha$  به ترتیب بیانگر پیچش و زاویه کاستی که از نقص توپولوژیکی ناشی می‌شود، هستند. زاویه کاستی به صورت  $\alpha = 1 - 4\Theta$  است و بازه  $(0, 1]$  را اختیار می‌کند.  $\Theta$  جرم بر واحد طول ریسمان کیهانی می‌باشد. اگر تغییر متغیر  $\theta = \alpha\phi$  را در نظر بگیریم،  $\theta$  در بازه  $0 < \theta < 2\pi\alpha$  تعریف می‌شود. به منظور ساختن معادله دی کی پی در فضا زمان خمیده، می‌توانیم تتراد و اتصال اسپینی گرانشی را به کار ببریم. تتراد  $e^{\mu}_a(x)$  مختصات فضا زمان خمیده  $x^{\mu}$  را به متغیرهای فضا زمان مینکوفسکی  $x^a$  مربوط می‌کند و تانسور متریک دارای فرم زیر است:

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{ab}e^{\mu}_a(x)e^{\nu}_b(x), \quad (159.2)$$

و باید شرط  $e^{\mu}_a(x)e^a_{\nu}(x) = \delta^{\mu}_{\nu}$  برقرار باشد.  $\eta^{ab} = \text{diag}(-+++)$  متریک فضا زمان تخت مینکوفسکی است. می‌توانیم مؤلفه‌های متریک را به طور مستقیم از معادله (۱۵۹.۲) به دست آوریم:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{H(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D^2(r)} & 0 & 0 \\ -\frac{H(r)}{D(r)} & 0 & \frac{-H^2(r)+J^2(r)}{D^2(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (160.2)$$

<sup>41</sup>Kurt Gödel

<sup>42</sup>Som-Raychaudhuri

<sup>43</sup>Spherically symmetric

<sup>44</sup>Hyperbolic

که  $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \varphi$  و  $x^3 = z$  هستند و با محاسبه متریک معکوس خواهیم داشت:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{H^2(r)}{J^2(r)} - 1 & 0 & -\frac{D(r)H(r)}{J^2(r)} & 0 \\ 0 & D^2(r) & 0 & 0 \\ -\frac{D(r)H(r)}{J^2(r)} & 0 & \frac{D^2(r)}{J^2(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (161.2)$$

این متریک می‌تواند با تتراد که به صورت زیر به دست می‌آید، مرتبط باشد.

$$e^a{}_{\mu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{H(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{\mu}{}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{H(r)}{J(r)} & 0 \\ 0 & D(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(r)}{J(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (162.2)$$

معادله دی‌کی پی برای یک میدان فرمی آزاد  $\Psi$  با جرم  $M$  در فضا زمان خمیده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}(x)) - (M + S(r))] \Psi = 0 \quad (163.2)$$

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} [\beta^a, \beta^b]. \quad (164.2)$$

در معادله (۱۶۴.۲)،  $\beta^a$  ماتریس‌های دی‌کی پی در فضا زمان مینکوفسکی تخت هستند و  $\omega_{\mu ab}$  اتصال اسپینی است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e^c{}_{\nu} e^{\sigma}{}_{b} \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} - \eta_{ac} e^{\nu}{}_{b} \partial_{\mu} e^c{}_{\nu}. \quad (165.2)$$

در معادله (۱۶۵.۲) نمادهای کریستوفل هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\Gamma^{\mu}{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial g_{\nu i}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{\nu}} \right\}, \quad (166.2)$$

که برای متریک (۱۵۸.۲) ، به طور صریح به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\Gamma_{\circ 1}^t = \Gamma_{1\circ}^t = \frac{H(r)(-H(r)D'(r) + D(r)H'(r))}{\sqrt{D(r)J'(r)}} \quad (۱۶۷.۲)$$

$$\Gamma_{12}^t = \Gamma_{21}^t = \frac{1}{\sqrt{D^2(r)J'(r)}} \left( -H^{\sqrt{}}(r)D'(r) + D(r)H^{\sqrt{}}(r)H'(r) + D(r)J^{\sqrt{}}(r)H'(r) + H(r)J(r)(J(r)D'(r) - \sqrt{2}D(r)J'(r)) \right) \quad (۱۶۷.۲ب)$$

$$\Gamma_{\circ 2}^r = \Gamma_{2\circ}^r = \frac{1}{\sqrt{}} (-H(r)D'(r) + D(r)H'(r)) \quad (۱۶۷.۲ج)$$

$$\Gamma_{23}^r = \frac{1}{D(r)} \left( -H^{\sqrt{}}(r)D'(r) + D(r)H(r)H'(r) + J(r)(J(r)D'(r) - D(r)J'(r)) \right) \quad (۱۶۷.۲د)$$

$$\Gamma_{22}^r = -\frac{D'(r)}{D(r)} \quad (۱۶۷.۲ه)$$

$$\Gamma_{\circ 1}^{\varphi} = \Gamma_{1\circ}^{\varphi} = \frac{H(r)D'(r) - D(r)H'(r)}{\sqrt{J'(r)}} \quad (۱۶۷.۲و)$$

$$\Gamma_{12}^{\varphi} = \Gamma_{21}^{\varphi} = \frac{H^{\sqrt{}}(r)D'(r) - \sqrt{2}J^{\sqrt{}}(r)D'(r) - D(r)H(r)H'(r) + \sqrt{2}D(r)J(r)J'(r)}{\sqrt{D(r)J'(r)}} \quad (۱۶۷.۲ز)$$

بنابراین، از معادله (۱۶۵.۲) ماتریس های اتصال اسپینی به دست می آیند.

$$\omega_{t12} = -\omega_{t21} = \frac{H'(r)D(r) - D'(r)H(r)}{\sqrt{J(r)}} = \frac{D^{\sqrt{}}(r)}{\sqrt{J(r)}} \frac{d}{dr} \left( \frac{H(r)}{D(r)} \right) \quad (۱۶۸.۲)$$

$$\omega_{r\circ 2} = -\omega_{r2\circ} = \frac{H'(r)D(r) - D'(r)H(r)}{\sqrt{J(r)D(r)}} = \frac{D(r)}{\sqrt{J(r)}} \frac{d}{dr} \left( \frac{H(r)}{D(r)} \right) \quad (۱۶۸.۲ب)$$

$$\omega_{\varphi\circ 1} = -\omega_{\varphi 1\circ} = \frac{-H'(r)D(r) + D'(r)H(r)}{\sqrt{D(r)}} = -\frac{D(r)}{\sqrt{}} \frac{d}{dr} \left( \frac{H(r)}{D(r)} \right) \quad (۱۶۸.۲ج)$$

$$\omega_{\varphi 12} = -\omega_{\varphi 21} = \frac{H(r)(H'(r)D(r) - D'(r)H(r))}{\sqrt{J(r)D(r)}} + \frac{\sqrt{2}J(r)(J(r)D'(r) - J'(r)D(r))}{\sqrt{J(r)D(r)}} \quad (۱۶۸.۲د)$$

$$= -\frac{H(r)D(r)}{\sqrt{J(r)}} \frac{d}{dr} \left( \frac{H(r)}{D(r)} \right) - D(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{H(r)}{D(r)} \right)$$



اگر نمایش زیر را برای ماتریس‌های دی کی پی در فضا زمان تخت به کار ببریم

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (169.2)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و رابطه آن‌ها برحسب تتراد به صورت زیر باشد

$$\beta^\mu(x) = e^\mu_a \beta^a, \quad (170.2)$$

می‌توانیم ماتریس‌های دی کی پی را در فضا زمان خمیده با متریک (۱۵۸.۲) به دست آوریم:

$$\beta^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{H(r)}{J(r)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{H(r)}{J(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -D(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (171.2)$$

$$\beta^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{D(r)}{J(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D(r)}{J(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

سپس جمله دوم در معادله (۱۶۳.۲) به فرم زیر تقلیل می‌یابد.

$$\beta^\mu(x) \Gamma_\mu(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D'(r) - \frac{D(r)J'(r)}{J(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (172.2)$$

اسپینور دی کی پی را به صورت زیر می نویسیم

$$\Psi(t, r, \varphi, z) = e^{-iEt + im\varphi + ikz} \begin{pmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \\ C_3(r) \\ C_4(r) \\ C_5(r) \end{pmatrix} \quad (173.2)$$

که  $E_{n,m}$  انرژی،  $m$  عدد کوانتومی مغناطیسی و  $k$  عدد موج در راستای جهت  $z$  است. سپس از معادله (۱۶۳.۲) و نتایج ذکر شده قبلی، پنج معادله زیر را به دست می آوریم:

$$-EH(r)C_4(r) + D(r)(\iota C_4(r) - \dot{C}_3(r)J'(r)) + \quad (174.2)$$

$$J(r)(-MC_1(r) + EC_2(r) + kC_5(r) + \dot{C}_3(r)D'(r) - \dot{D}(r)C_3'(r)) = 0$$

$$EC_1(r) - MC_2(r) = 0 \quad (174.2 \text{ ب})$$

$$-iD(r)C_1'(r) - MC_3(r) = 0 \quad (174.2 \text{ ج})$$

$$(-mD(r) + EH(r))C_1(r) - MC_4(r)J(r) = 0 \quad (174.2 \text{ د})$$

$$kC_1(r) + MC_5(r) = 0 \quad (174.2 \text{ ه})$$

اگر معادلات بالا را برای  $\Phi_1(r)$  حل کنیم، خواهیم داشت:

$$C_2(r) = \frac{EC_1(r)}{M}, \quad (175.2 \text{ آ})$$

$$C_3(r) = -\frac{iD(r)C_1'(r)}{M}, \quad (175.2 \text{ ب})$$

$$C_4(r) = \frac{C_1(r)(-mD(r) + EH(r))}{MJ(r)}, \quad (175.2 \text{ ج})$$

$$C_5(r) = \frac{-kC_1(r)}{M}. \quad (175.2 \text{ د})$$

با ترکیب این روابط، معادله زیر را به دست می آوریم:

$$C_1''(r) + \frac{C_1'(r)J'(r)}{J(r)} + \left( \frac{(E^2 - k^2 - M^2)}{D(r)^2} - \frac{E^2 H(r)^2}{D(r)^2 J(r)^2} - \frac{2EmH(r)}{D(r)J(r)^2} - \frac{m^2}{J(r)^2} \right) C_1(r) = 0.$$

## ۱.۱۳.۲ حل معادله دی کی پی در فضا زمان گودل گونه تخت

در این بخش، معادله دی کی پی را برای اسپین صفر در فضا زمان سام ریچادری حل می کنیم و سپس ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع را به دست می آوریم. برای این حالت داریم:  $D(r) = 1$ ،  $H(r) = \alpha\Omega r^2$  و  $J(r) = \alpha r$ . بنابراین معادله دی کی پی فرم زیر را می گیرد:

$$C_1''(r) + \frac{C_1'(r)}{r} + \left( E^2(-r^2\Omega^2 + 1) - \frac{2Em\Omega}{\alpha} - k^2 - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} - M^2 \right) C_1(r) = 0. \quad (177.2)$$

تغییر متغیر  $r^2 = s$  را به کار می‌بریم.

(۱۷۸.۲)

$$C_1''(s) + \frac{C_1'(s)}{s} + \frac{1}{s^2} \left( -\frac{s^2 E^2 \Omega^2}{4} + \frac{1}{4} (E^2 - \frac{2Em\Omega}{\alpha} - k^2 - M^2)s - \frac{m^2}{4\alpha^2} \right) C_1(s) = 0.$$

ویژه مقادیر انرژی از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$(2n+1)\sqrt{A} + 2\sqrt{AC} - B = 0 \quad (179.2)$$

که  $A$ ،  $B$  و  $C$  برحسب پارامترهای فیزیکی به صورت زیر هستند:

$$A = \frac{E^2 \Omega^2}{4}, \quad (180.2 \text{ آ})$$

$$B = \frac{1}{4} \left( E^2 - M^2 - k^2 - \frac{2Em\Omega}{\alpha} \right), \quad (180.2 \text{ ب})$$

$$C = \frac{m^2}{4\alpha^2}. \quad (180.2 \text{ ج})$$

با قرار دادن  $A$ ،  $B$  و  $C$  در معادله ویژه مقداری انرژی (۱۷۹.۲)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$(2n+1) \frac{\Omega}{4} |E| + \frac{|E|\Omega|m|}{2\alpha} - \frac{1}{4} \left( M^2 - E^2 - k^2 - \frac{2Em\Omega}{\alpha} \right) = 0 \quad (181.2)$$

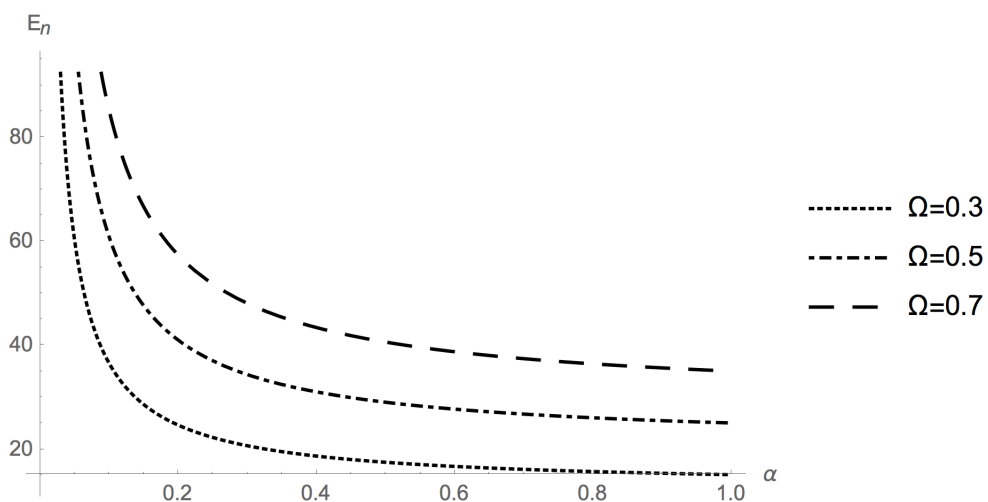
که انرژی ذره ( $E > 0$ ) برابر است با:

$$E_n = \Omega + 2n\Omega + \frac{m\Omega}{\alpha} + \frac{\Omega|m|}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{M^2}{4} + \left( \frac{\Omega}{2} + n\Omega + \frac{m\Omega}{2\alpha} + \frac{\Omega|m|}{2\alpha} \right)^2} \quad (182.2)$$

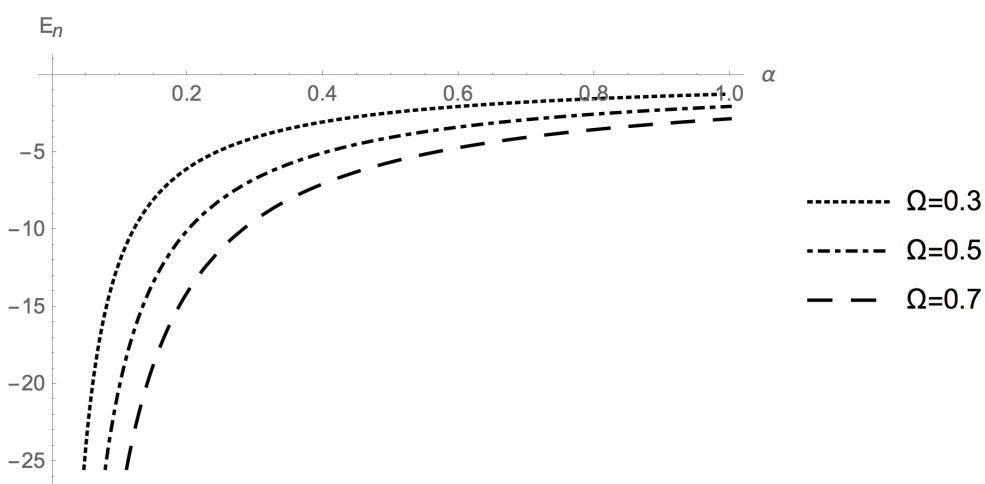
و انرژی پادذره ( $E < 0$ ) نیز برابر است با:

$$E_n = -\Omega - 2n\Omega + \frac{m\Omega}{\alpha} - \frac{\Omega|m|}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{M^2}{4} + \left( -\frac{\Omega}{2} - n\Omega + \frac{m\Omega}{2\alpha} - \frac{\Omega|m|}{2\alpha} \right)^2} \quad (183.2)$$

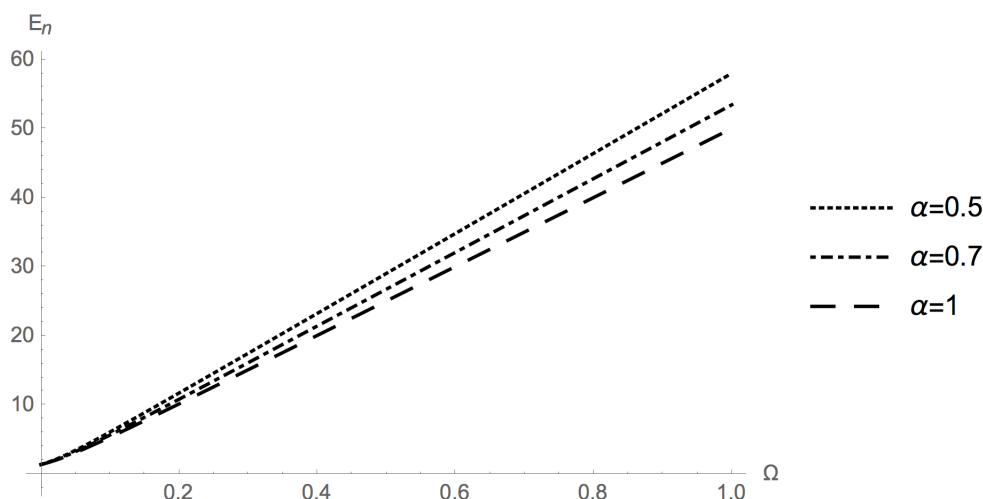
ملاحظه می‌شود که حضور نقص توپولوژیکی منجر به از بین رفتن تبهگنی ترازهای انرژی می‌شود و باعث می‌شود که انرژی‌های ذره و پادذره متفاوت شوند. سپس ویژه مقادیر انرژی را نسبت به  $\alpha$  و  $\Omega$  برای پارامترهای مختلف در بازه  $E < 0$  رسم می‌کنیم.



شکل ۴.۲:  $E_n(\alpha)$  برای  $n = 1^\circ$  ، با پارامترهای  $m = 2$  ،  $M = 1$  و  $k = 2$  برای  $\Omega$  های مختلف.



شکل ۵.۲:  $E_n(\alpha)$  برای  $n = 1^\circ$  ، با پارامترهای  $m = -2$  ،  $M = 1$  و  $k = 1$  برای  $\Omega$  های مختلف.



شکل ۶.۲:  $E_n(\Omega)$  برای  $n = 10$ ، با پارامترهای  $m = 2$ ،  $M = 1$  و  $k = 1$  برای  $\alpha$  های مختلف.

طیف انرژی به صورت تابعی از  $\alpha$  در شکل‌های ۴.۲ و ۵.۲ برای  $\Omega = 0.3, 0.5, 0.7$  رسم شده است. در شکل ۶.۲ مشاهده می‌کنیم که قدر مطلق انرژی با افزایش  $\alpha$  کاهش می‌یابد. طیف انرژی به صورت تابعی از  $\Omega$  در شکل ۶.۲ برای  $\alpha = 0.5, 0.7, 1$  نشان داده می‌شود. می‌توانیم معادلات (۱۷۵.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$C_1(r) = r^{\frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{|E|\Omega}{\gamma} r^\gamma} L_n^{\frac{|m|}{\alpha}}(|E|\Omega r^\gamma), \quad (184.2 \text{ آ})$$

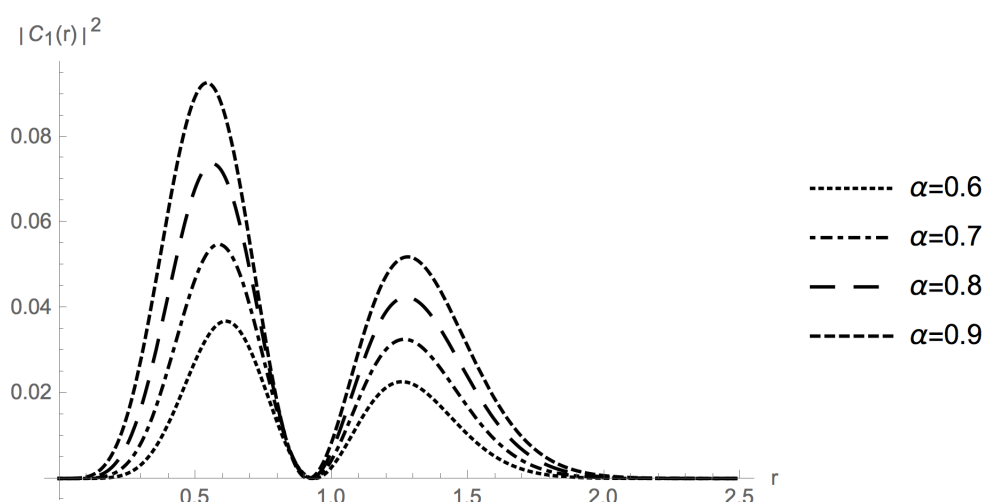
$$C_2(r) = \frac{E}{M} \left( r^{\frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{|E|\Omega}{\gamma} r^\gamma} L_n^{\frac{|m|}{\alpha}}(|E|\Omega r^\gamma) \right) \quad (184.2 \text{ ب})$$

$$C_3(r) = \frac{\gamma i r^{-1 + \frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{|E|\Omega}{\gamma} r^\gamma}}{M} \left( r^\gamma |E|\Omega L_{n-1}^{\frac{|m|}{\alpha}}(|E|\Omega r^\gamma) + \left( r^\gamma \frac{|E|\Omega}{\gamma} - \frac{|m|}{\gamma \alpha} \right) L_n^{\frac{|m|}{\alpha}}(|E|\Omega r^\gamma) \right) \quad (184.2 \text{ ج})$$

$$C_4(r) = \frac{r^{-1 + \frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{|E|\Omega}{\gamma} r^\gamma} (-m + E r^\gamma \alpha \Omega)}{M \alpha} L_n^{\frac{|m|}{\alpha}}(|E|\Omega r^\gamma) \quad (184.2 \text{ د})$$

$$C_5(r) = \frac{-r^{\frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{|E|\Omega}{\gamma} r^\gamma} k}{M} L_n^{\frac{|m|}{\alpha}}(|E|\Omega r^\gamma). \quad (184.2 \text{ ه})$$

که  $L_n^{\frac{|m|}{\alpha}}(x)$  چند جمله‌ای لاگر تعمیم یافته را نشان می‌دهد.



شکل ۷.۲:  $|C_1(r)|^2$  برای  $n = 1$  با پارامترهای  $\Omega = 0.5$ ،  $m = 2$ ،  $M = 1$  و  $k = 1$  برای  $\alpha$  های مختلف.

چگالی احتمال  $|C_1(r)|^2$  برای مؤلفه اول تابع موج به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  در شکل ۷.۲ نشان داده شده است. مشاهده می‌کنیم که با افزایش  $\alpha$  قله چگالی به سمت مقادیر کمتر  $r$  می‌رود.

## ۲.۱۳.۲ حل معادله دی کی پی در فضا زمان گودل گونه متقارن کروی

در اینجا، معادله دی کی پی را برای اسپین صفر در فضا زمان گودل گونه متقارن کروی با  $H(r) = \alpha\Omega r^2$ ،  $J(r) = \alpha r$  و  $D(r) = \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)$  حل می‌کنیم. (۱۸۵.۲)

$$C_1''(r) + \frac{C_1'(r)}{r} + \left( -\frac{16R^4 (E^2 (r^2\Omega^2 - 1) + k^2 + M^2)}{(r^2 + 4R^2)^2} + \frac{\lambda EmR^2\Omega}{\alpha(r^2 + 4R^2)} - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} \right) C_1(r) = 0$$

ویژه مقادیر انرژی از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$-\frac{1}{4} - 2n - (n-1)n - \zeta_2 - 2\zeta_3 + 2\sqrt{\zeta_3 \left( \frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \right)} + (1+2n) \left( -\sqrt{\zeta_3} + \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) = 0 \quad (186.2)$$

که  $\zeta_1$ ،  $\zeta_2$  و  $\zeta_3$  برحسب پارامترهای فیزیکی به صورت زیر می باشند:

$$\zeta_1 = 4R^4 E^2 \Omega^2 + \frac{2Em\Omega R^2}{\alpha} + \frac{m^2}{4\alpha^2}, \quad (\text{آ}187.2)$$

$$\zeta_2 = R^2 (E^2 - k^2 - M^2) - \frac{2Em\Omega R^2}{\alpha} - \frac{m^2}{2\alpha^2}, \quad (\text{ب}187.2)$$

$$\zeta_3 = \frac{m^2}{4\alpha^2}. \quad (\text{ج}187.2)$$

بنابراین برای ساده سازی  $m$  را مثبت در نظر می گیریم. می توانیم معادلات (آ175.2) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$C_1(r) = r^2 \sqrt{\zeta_2} (1+r^2)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}} P_n \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2), \quad (\text{آ}188.2)$$

$$C_2(r) = \frac{E}{M} \left( r^2 \sqrt{\zeta_2} (1+r^2)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}} P \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2) \right), \quad (\text{ب}188.2)$$

$$\begin{aligned} C_3(r) &= \frac{-2ir^{-1+2\sqrt{\zeta_2}}}{M} (1+r^2)^{-\frac{1}{2} - \sqrt{1+4(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)}} \left( 1 + \frac{r^2}{4R^2} \right) (r^2 (1+r^2)) \\ &\times \left( 1+n+2\sqrt{\zeta_2} - \sqrt{1+4(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)} \right) P_{n-1} \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2) \\ &+ \left( 1+r^2 \right) \sqrt{\zeta_2} P_n \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2) - \frac{r^2}{4} \left( -1 + \sqrt{1+4(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)} \right) \\ &\times P_n \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2) \end{aligned} \quad (\text{ج}188.2)$$

$$C_4(r) = \frac{r^{-1+2\sqrt{\zeta_2}} (1+r^2)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}}}{M\alpha} \left( m \left( 1 + \frac{r^2}{4R^2} \right) + Er^2 \alpha \Omega \right) \times P_n \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2) \quad (\text{د}188.2)$$

$$C_5(r) = C_5(r) = \frac{k}{M} \left( r^2 \sqrt{\zeta_2} (1+r^2)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}} P_n \left( 2\sqrt{\zeta_2}, -2\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} \right) (1+2r^2) \right). \quad (\text{ه}188.2)$$

### ۳.۱۳.۲ حل معادله دی کی پی در فضا زمان گودل گونه هایپربولیکی

در این بخش، معادله دی کی پی را برای اسپین صفر در فضا زمان گودل گونه هایپربولیکی حل می کنیم. برای این حالت داریم:  $D(r) = (1-l^2 r^2)$ ،  $H(r) = \alpha \Omega r^2$  و  $J(r) = \alpha r$ . بنابراین

معادله دی کی پی فرم زیر را می‌گیرد:

(۱۸۹.۲)

$$C_1''(r) + \frac{1}{r}C_1'(r) + \left( -\frac{E^2(r^2\Omega^2 - 1) + k^2 + M^2}{(1 - l^2r^2)^2} + \frac{2Em\Omega}{\alpha(1 - l^2r^2)} - \frac{m^2}{\alpha^2r^2} \right) C_1(r) = 0$$

تغییر متغیر  $s = l^2r^2$  را در نظر می‌گیریم. معادله (۱۸۹.۲) به صورت زیر درمی‌آید:

(۱۹۰.۲)

$$C_1''(s) + \frac{1}{s}C_1'(s) + \left( -\frac{E^2\left(\frac{s\Omega^2}{l^2} - 1\right) + k^2 + M^2}{4l^2s(1-s)^2} + \frac{Em\Omega}{2l^2s\alpha(1-s)} - \frac{m^2}{4\alpha^2s^2} \right) C_1(s) = 0$$

برای حل معادله بالا از روش  $NU$  استفاده می‌کنیم و ویژه مقادیر انرژی را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{4} + 2n + (n-1)n - \xi_2 + 2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3\left(\frac{1}{4} + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3\right)} + (1+2n)\left(\sqrt{\xi_3} + \sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3}\right) = 0 \quad (191.2)$$

که  $\xi_1$ ،  $\xi_2$  و  $\xi_3$  برحسب پارامترهای فیزیکی به صورت زیر هستند:

$$\xi_1 = \frac{E^2\Omega^2}{4l^4} + \frac{Em\Omega}{2l^2\alpha} + \frac{m^2}{4\alpha^2} \quad (192.2)$$

$$\xi_2 = \frac{E^2 - k^2 - M^2}{4l^2} - \frac{Em\Omega}{2l^2\alpha} + \frac{m^2}{2\alpha^2} \quad (193.2)$$

$$\xi_3 = \frac{m^2}{4\alpha^2} \quad (194.2)$$

مانند قبل برای ساده سازی، پارامتر  $m$  را مثبت در نظر می‌گیریم و داریم:

$$C_1(r) = l^2\sqrt{\xi_3}r^2\sqrt{\xi_3}\left(1 - l^2r^2\right)^{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3}} P_n\left(2\sqrt{\xi_3}\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3}\right)\left(1 - 2l^2r^2\right) \quad (195.2)$$

$$C_2(r) = \frac{EC_1(r)}{M} \quad (196.2)$$

$$C_3(r) = -\frac{i\left(1 - l^2r^2\right)C_1'(r)}{M} \quad (197.2)$$

$$C_4(r) = \frac{C_1(r)\left(m\left(1 - l^2r^2\right) + E\alpha\Omega r^2\right)}{M\alpha r} \quad (198.2)$$

$$C_5(r) = \frac{kC_1(r)}{M} \quad (199.2)$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که پارامتر  $\alpha$  که نقص توپولوژیکی است، منجر به از بین رفتن تبهگنی ترازهای انرژی می‌شود.





## فصل ۳

# تابع هیون در بررسی نسبیتی فرمیون‌ها

### ۱.۳ معادله دیراک در فضا زمان خمیده

معادله دیراک ذرات فرمیون با اسپین  $\frac{1}{2}$  را توصیف می‌کند و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\alpha \cdot Pc + \beta mc^2) \Psi \quad (1.3)$$

این معادله نسبیتی هم‌وردا در فضای تخت می‌باشد.  $\vec{\alpha}$  و  $\beta$  ماتریس‌های  $4 \times 4$  هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 \quad (2.3)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

معادله دیراک در فضای تخت مینکوفسکی برحسب ماتریس‌های گاما به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$i\hbar\gamma^a \frac{\partial\psi}{\partial x^a} - mc\psi = 0 \quad a = 0, 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

که  $\gamma^a$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta \\ \gamma^i &= \beta\alpha_i \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

به منظور ایجاد معادله دیراک در فضا زمان خمیده از ماتریس‌های گاما استفاده می‌کنیم.  $\gamma^\mu(x)$  ماتریس‌های دیراک تعمیم یافته هستند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x)\gamma^a \quad (6.3)$$

ماتریس‌های دیراک از جبر تعمیم یافته کلیفورد<sup>۱</sup> تبعیت می‌کنند.

$$\{\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x) \quad (7.3)$$

بنابراین می‌توان معادله دیراک تعمیم یافته در فضای خمیده را به صورت زیر نوشت:

$$[ie^\mu_a \gamma^a (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m] \psi = 0 \quad (8.3)$$

$\Gamma_\mu$  اتصال دهنده‌های اسپینی<sup>۲</sup> هستند که از رابطه زیر به دست می‌آیند [۲۸]:

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{\lambda} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b] \quad (9.3)$$

که  $\gamma^a(x)$  ماتریس‌های دیراک استاندارد در فضا زمان مینکوفسکی هستند و  $\omega^a_{\mu b}$  اتصال اسپینی<sup>۳</sup> را نشان می‌دهد که توسط رابطه زیر

$$\omega^a_{\mu b} = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e^c_\nu e^a_\sigma \Gamma^\nu_{\sigma\mu} - \eta_{\bar{a}\bar{c}} e^c_\nu \partial_\mu e^a_\nu \quad (10.3)$$

با  $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$  و  $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$  به دست می‌آید. نمادهای کریستوفل نوع دوم هستند و می‌توانند از فرم زیر به دست بیایند که  $q^i$  مؤلفه‌های یک مجموعه مختصات  $(q^1, q^2, q^3)$  می‌باشند.

$$\Gamma^\mu_{ij} = \frac{1}{\lambda} g^{\mu k} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] \quad (11.3)$$

<sup>1</sup>Clifford generalized algebra

<sup>2</sup>Spinor affine connections

<sup>3</sup>Spin connection

## ۲.۳ حل تقریبی معادله دیراک در حضور پتانسیل های پیربولیکی

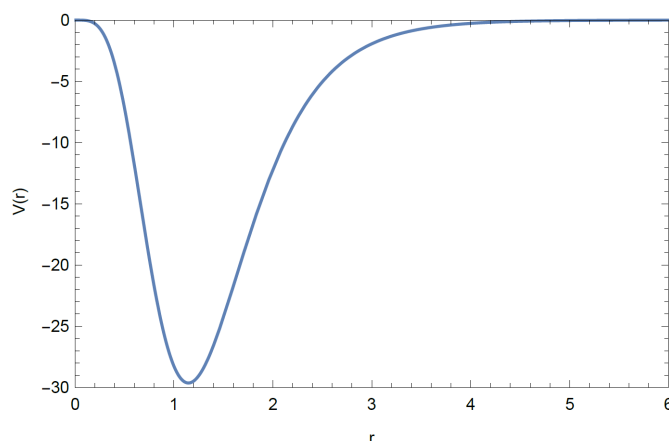
معادله شرودینگر را می توان به عنوان نقطه شروع مکانیک کوانتومی در سیستم های فیزیکی در نظر گرفت. با مطرح شدن بحث های نسبیتی در مکانیک کوانتومی، معادلات کلاین - گوردون و دیراک اساس مطالعات را به خود اختصاص می دهند [۲۹]. پتانسیل هایی که در چارچوب معادلات کلاین - گوردون و دیراک قابلیت حل پذیری کامل را دارند، بسیار محدود می باشند. از میدان های پتانسیلی که فرم نمایی دارند، می توان به عنوان یکی از مهمترین پتانسیل های قابل حل در معادلات کلاین - گوردون و دیراک نام برد که در دهه گذشته بسیار مورد توجه قرار گرفته اند [۳۰، ۳۱].

حالتی را که در آن اندازه پتانسیل های برداری و اسکالر  $V(r)$  و  $S(r)$  با یکدیگر برابر اما با علامت مختلف هستند  $S(r) \simeq -V(r)$  تقارن شبه اسپینی<sup>۴</sup> می نامند و جواب های معادله دیراک دارای تقارن شبه اسپینی هستند [۳۲، ۳۳]. اگر پتانسیل های اسکالر و برداری شرط  $S(r) \simeq V(r)$  را ارضا کنند، هامیلتونی دیراک دارای تقارن اسپینی است [۳۴]. تقارن شبه اسپینی یک تقارن دقیق برای هامیلتونی دیراک تحت شرط  $d(S(r) + V(r))/dr = 0$  است، هنگامی که تقارن اسپینی یک تقارن دقیق تحت شرط  $d(-S(r) + V(r))/dr = 0$  باشد [۳۵، ۳۶]. در اینجا به حل های تحلیلی حالت  $S(r) \simeq -V(r)$  برای معادله دیراک در وضعیتی که تحت تأثیر پتانسیل نمایی متقارن شبه اسپینی قرار دارد، می پردازیم. پتانسیل های پیربولیکی در حالت غیر نسبیتی نیز بررسی شده [۳۷، ۳۸] و تأثیرات جرم وابسته به مختصه مکان روی طیف مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۹]. فرم صریح پتانسیل به صورت زیر می باشد [۲۹]:

$$V(r) = -V_0 \frac{\sinh^p(r/\sqrt{2}d)}{\cosh^q(r/\sqrt{2}d)} \quad (12.3)$$

که در آن پارامترهای پتانسیلی  $V_0$  و  $d$  به ترتیب بر عمق و عرض چاه دلالت دارند. به واسطه  $p$  و  $q$  عبارت بالا گروهی از پتانسیل ها را با  $q = -2, 0, 2, 4, 6$  و  $p = -2, 0, \dots, q$  تعریف می کند [۳۷]. برای حالتی که در آن  $q = 4, 6$  باشد، معادله شرودینگر را می توان به فرم معادله کانفلوئننت هیون نوشت [۴۰]. در اینجا قصد داریم معادله دیراک را به شکلی از معادلات دیفرانسیل کانفلوئننت هیون [۴۱، ۴۲] تبدیل کنیم. این کار را با استفاده از تبدیلات مناسب در متغیر  $r$  برای حالت  $(p, q) = (4, 6)$  انجام می دهیم. در شکل ۱.۳ پتانسیل های پیربولیک بر حسب  $r$  رسم شده است و چاه پتانسیل را نشان می دهد.

<sup>4</sup>Pseudospin symmetry



شکل ۱.۳: نمودار پتانسیل هایپربولیک بر حسب  $r$  به ازای  $V_0 = 200$  و  $d = 0.5$ .

### ۱.۲.۳ فرم کلی معادله دیراک

برای ذره‌ای با جرم  $\mu'$ ، معادله دیراک را می‌توان به این صورت نوشت [۶۵]:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta [\mu' + S(r)] + V(r) - E] \Psi(r) = 0 \quad (13.3)$$

که در آن  $E$  نشان دهنده انرژی و  $\vec{p}$  تکانه خطی است.  $\vec{\alpha}$  و  $\beta$  نیز ماتریس‌های  $4 \times 4$  هستند:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

و ماتریس‌های  $\sigma$  و  $I$  به ترتیب نمایش دهنده ماتریس‌های پائولی<sup>۵</sup> و ماتریس واحد  $2 \times 2$  می‌باشند. تقارن کروی اسپینوری دیراک را نیز با اعداد کوانتومی  $n$  (عدد کوانتومی معمولی)،  $\kappa$  (عدد کوانتومی اسپین - مدار<sup>۶</sup>)،  $\ell$  (عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری<sup>۷</sup>) و  $m$  (عدد کوانتومی مؤلفه  $z$  تکانه زاویه‌ای) به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\Psi(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r) Y_{jm}^{\ell}(\theta, \phi) \\ i G(r) Y_{jm}^{\tilde{\ell}}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (15.3)$$

که در آن  $\tilde{\ell} = \ell + 1$  و همچنین  $\kappa = \pm(j + 1/2)$  که  $j = \ell \pm 1/2$  است و  $F(r)/r$  و  $G(r)/r$  قسمت‌های شعاعی اسپینوری دیراک می‌باشند. با جایگذاری معادله (۱۵.۳) در معادله (۱۳.۳) دو معادله جفت شده زیر را خواهیم داشت:

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F(r) - [\mu' + E - V(r) + S(r)] G(r) = 0 \quad (16.3)$$

<sup>5</sup>Pauli matrix

<sup>6</sup>Spin-orbit

<sup>7</sup>Orbital angular momentum

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right) G(r) - [\mu' - E + V(r) + S(r)] F(r) = 0 \quad (17.3)$$

حال با جایگذاری مقدار  $F(r)$  از رابطه (۱۶.۳) در رابطه (۱۷.۳) ، دو معادله دیفرانسیل درجه دو به دست خواهیم آورد:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} + (\mu' - E + C) [V(r) - S(r)] \right\} G(r) = [\mu'^2 - E^2 + C(\mu' + E)] G(r) \quad (18.3)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (\mu' + E - C') [V(r) + S(r)] \right\} F(r) = [\mu'^2 - E^2 - C'(\mu' - E)] F(r) \quad (19.3)$$

که در آن داریم:  $C = V(r) + S(r)$  ( $dC/dr = 0$ ) و  $C' = V(r) - S(r)$  ( $dC'/dr = 0$ )

## ۲.۲.۳ مدل پتانسیل های پربولیکی و ساختار معادله کانفلوئنت هیون

با در نظر گرفتن پتانسیلی با  $(p, q) = (4, 6)$  و قرار دادن آن در معادله (۱۸.۳) و  $C = V(r) + S(r)$  و همچنین استفاده از جمله ای معادل جمله گریز از مرکز

$$\frac{1}{r^2} \simeq \frac{1}{4 \sinh^2(r/2d)} \quad (20.3)$$

خواهیم داشت:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - 4d^2 \left( \frac{k(k-1)}{4 \sinh^2(x)} - MV_0 \frac{\sinh^4(x)}{\cosh^6(x)} - \varepsilon \right) \right] G(x) = 0 \quad (21.3)$$

که در آن داریم:

$$x = r/2d$$

$$M = \mu' - E + C \quad (22.3)$$

$$\varepsilon = \mu'^2 - E^2 + C(\mu' + E)$$

با در نظر گرفتن تبدیل  $y = 1/\cosh^2(x)$  ، تابع موج  $G(x)$  را به صورت  $G(y) = e^{Ay} f(y)$  می نویسیم و با استفاده از اختصارات زیر

$$a_1 = -\frac{1}{4} d^2 k(k-1) - d^2 MV_0 - d^2 \varepsilon$$

$$a_2 = a_1 + d^2 MV_0 \quad (23.3)$$

معادله دیفرانسیل زیر را برای  $f(y)$  به دست می آوریم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \left( 2A + \frac{1}{y} - \frac{1/2}{1-y} \right) \frac{d}{dy} + \left[ \frac{A+a_1}{y} + \frac{a_2 - A/2}{1-y} - \frac{d^2 \varepsilon}{y^2} - \frac{d^2 k(k-1)/4}{(1-y)^2} \right] \right\} f(y) = 0 \quad (24.3)$$

که در آن  $A^\nu = -d^\nu MV_0$  می‌باشد. حال اگر تبدیل  $f(y) = y^{p'}(1-y)^{q'}$  را به کار ببریم، این بار معادله دیفرانسیل مرتبه دومی برحسب  $H(y)$  به دست خواهیم آورد:

$$(25.3) \left\{ \frac{d^\nu}{dy^\nu} + \left( 2A + \frac{1+2p'}{y} - \frac{2q'+1/2}{1-y} \right) \frac{d}{dy} + \left[ \left( 2Ap' + A + a_1 - 2p'q' - q' - \frac{p'}{2} \right) \frac{1}{y} + \left( a_2 - \frac{A}{2} - 2Aq' - 2p'q' - q' - \frac{p'}{2} \right) \frac{1}{1-y} \right] \right\} H(y) = 0$$

که ثابت‌های  $p'$  و  $q'$  در این معادله باید به ترتیب در روابط  $p'(p'-1) + p' - d^\nu \varepsilon = 0$  و  $q'(q'-1) + q'/2 - (1/4)d^\nu k(k-1) = 0$  به منظور به دست آوردن معادله هیون‌گونه کانفلوئنس صدق کنند. اگر معادله (۲۵.۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$(26.3) \left\{ \frac{d^\nu}{dy^\nu} + \left( 2A + \frac{1+B_1}{y} + \frac{1+B_2}{y-1} \right) \frac{d}{dy} + \frac{B_3 y + B_4}{y(y-1)} \right\} H(y) = 0$$

$$B_1 = 2p'$$

$$B_2 = 2q' - (1/2) \quad (27.3)$$

$$B_3 = 2A(p' + q') + a_1 - a_2 + 3A/2$$

$$B_4 = (1 + 2p')(q' - A) - a_1 + p'/2$$

و آن را با معادله زیر مقایسه کنیم [۴۲]

$$(28.3) \left\{ \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} + \left( \alpha + \frac{\beta+1}{\rho} + \frac{\gamma+1}{\rho-1} \right) \frac{d}{d\rho} + \left( \frac{\mu}{\rho} + \frac{\nu}{\rho-1} \right) \right\} H(\rho) = 0$$

می‌توان جواب‌های معادله (۲۶.۳) را به شکل  $H(y) = HeunC(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, y)$  نوشت که در دو نقطه  $y = 0$  و  $y = 1$  با تکینگی منظم و در حالت حدی  $y \rightarrow \infty$  با تکینگی نامنظم مواجه هستیم. جواب‌های معادله (۲۶.۳) به صورت زیر به دست می‌آیند [۴۲]:

$$(29.3) H(y) = HeunC(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n$$

که در آن ضرایب  $d_n$  در رابطه  $A'_n d_n = B'_n d_{n-1} + C'_n d_{n-2}$  با شرایط  $d_{-1} = 1$  و  $d_0 = 1$ ، با شرایط اولیه  $d_{-1} = 0$  و  $d_0 = 1$  صدق می‌کند. ضرایب در این جمع عبارتند از:

$$A'_n = 1 + \beta/n$$

$$B'_n = 1 + (\beta + \gamma - \alpha - 1)/n + (\eta - \beta)/2 + (\gamma - \alpha)(\beta + 1)/n^2 \quad (30.3)$$

$$C'_n = \alpha(\delta/\alpha + (\beta + \gamma)/2 + n - 1)/n^2$$

## معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری ۵۱

که اگر  $n \rightarrow \infty$ ، باید حالت‌های حدی  $A'_n \rightarrow 1$ ،  $B'_n \rightarrow 1$  و  $C'_n \rightarrow 0$  را داشته باشیم. حالت بهنجار را برای تابع  $HeunC(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, y) = 1$  در نظر می‌گیریم. پارامترهای تعریف شده در معادله اخیر باید به گونه‌ای باشند که در دو رابطه زیر صدق کنند.

$$\begin{aligned}\mu &= (1/2)(\alpha - \beta - \gamma + \beta(\alpha - \gamma)) - \eta \\ \nu &= (1/2)(\alpha + \beta + \gamma + \gamma(\alpha + \beta)) + \delta + \eta\end{aligned}\quad (31.3)$$

در این قسمت مجموعه‌ای از معادلات مربوط به پارامترها را داریم:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2A & \beta &= B_1 & \gamma &= B_2 \\ \mu &= -B_4 & \nu &= B_3 + B_4 \\ \eta &= A(1 + 2B_1) + B_4 - \frac{1}{4}(B_1 + B_2 + B_1B_2) \\ \delta &= B_3 - A(2 + B_1 + B_2)\end{aligned}\quad (32.3)$$

همچنین برای به دست آوردن چند جمله‌ای کانفلوئنت هیون از درجه  $N \geq 0$  برای  $y$ ، دو شرط زیر

$$\begin{aligned}\delta &= -\alpha \left( N + 1 + \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\ \Delta_{N+1} &= 0\end{aligned}\quad (33.3)$$

نیاز است.  $\Delta_{N+1}$  یک دترمینان  $(N+1) \times (N+1)$  می‌باشد [۴۰، ۴۱، ۴۲].

## ۳.۳ معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری

در اینجا قصد داریم معادله دیراک هم‌وردا را در فضا زمان‌هایی که توسط ریسمان کیهانی ایجاد می‌شود، در حضور پتانسیل‌های برداری و اسکالر میدان الکترومغناطیسی بررسی کنیم. سپس موارد خاص معادله را برای پتانسیل‌های اسکالر و برداری مساوی و مخالف هم به دست می‌آوریم [۴۳].

یک ریسمان کیهانی را با المان خطی زیر در نظر می‌گیریم [۴۴، ۴۵]:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (34.3)$$

که  $-\infty < t < \infty$ ،  $r \geq 0$ ،  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  می‌باشد. پارامتر  $\alpha = 1 - \frac{4G}{c^2} \bar{\mu}$  زاویه کاستی است که در ناحیه  $(0, 1)$  تعریف شده و  $\bar{\mu}$  چگالی جرم خطی



ریسمان کیهانی را نمایش می‌دهد. معادله دیراک در فضا زمان خمیده با پتانسیل اسکالر  $S(r)$  و پتانسیل برداری  $V(r)$  به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\left[ i\gamma^\mu(x) \left( \partial_\mu + \Gamma_\mu(x) + i \frac{V(r)}{\hbar c} \right) - (M + S(r)) \right] \psi(r, t) = 0 \quad (35.3)$$

$\gamma^\mu(x)$  ماتریس‌های دیراک تعمیم یافته در فضا زمان هستند. اتصال دهنده‌های اسپینی را از رابطه

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{\lambda} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b] \quad (36.3)$$

و اتصال اسپینی را توسط رابطه زیر

$$\omega_{\mu b}^a = \eta_{\bar{a}c} e_\nu^a e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - \eta_{\bar{a}c} e_\nu^a \partial_\mu e_b^\nu \quad (37.3)$$

به دست می‌آوریم [۶۶، ۶۷]. اتصال اسپینی در معادله (۳۷.۳) این اجازه را می‌دهد که یک چارچوب موضعی از طریق پایه‌های چهارگانه که اسپینورها را در فضا زمان خمیده ایجاد می‌کنند، داشته باشیم. [۴۶، ۴۷]. نمادهای کریستوفل نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$\Gamma_{ij}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\mu k} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] \quad (38.3)$$

مؤلفه‌های غیرصفر کریستوفل عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\psi\psi}^r &= -r \\ \Gamma_{\psi\psi}^r &= -r \alpha^\psi \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\psi\psi}^\theta &= \Gamma_{\psi\psi}^\theta = 1/r \\ \Gamma_{\psi\psi}^\theta &= -\alpha^\psi \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\psi\psi}^\varphi &= \Gamma_{\psi\psi}^\varphi = 1/r \\ \Gamma_{\psi\psi}^\varphi &= \Gamma_{\psi\psi}^\varphi = \cot \theta \end{aligned} \quad (39.3)$$

اتصال دهنده‌های اسپینی نیز به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma_r &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma_\theta &= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ -e^{-i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \\ 0 & 0 & -e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix} & \Gamma_\varphi &= \begin{pmatrix} -\frac{i(\alpha+1)}{\sqrt{-g}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i(\alpha+1)}{\sqrt{-g}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i(\alpha+1)}{\sqrt{-g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i(\alpha+1)}{\sqrt{-g}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (40.3)$$

و  $\gamma^\mu(x)$  برحسب  $\gamma^a(x)$  با استفاده از رابطه

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x) \gamma^a \quad (41.3)$$

با  $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^i)$  ,  $(i = 1, 2, 3)$  نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42.3)$$

می‌توان چارچوب مرجع موضعی را از طریق یک پایه با مؤلفه‌های  $e_{(a)}^\mu(x)$  ایجاد کرد که ماتریس‌های تبدیل هستند و از رابطه زیر تبعیت می‌کنند.

$$\eta^{ab} e_{(a)}^\mu(x) e_{(b)}^\nu(x) = g^{\mu\nu}(x) \quad (43.3)$$

چهارگانه هستند [۶۸، ۶۹]. به منظور نوشتن معادله دیراک در این فضا زمان، انتخاب‌های زیر را انجام می‌دهیم [۴۳].

$$\begin{aligned} e_a^\mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ 0 & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ 0 & -\frac{\sin \varphi}{ar \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{ar \sin \theta} & 0 \end{pmatrix} \\ e_\mu^a &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \alpha \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \alpha \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (44.3)$$

از معادله (۴۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} g^{00} = g^{11} = 1, & \quad g^{22} = r^2, & \quad g^{33} = \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \\ g_{00} = g_{11} = 1, & \quad g_{22} = r^{-2}, & \quad g_{33} = \alpha^{-2} r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{aligned} \quad (45.3)$$

$g^{ij}$  و  $g_{ij}$  های دیگر صفر هستند. ماتریس‌های  $\gamma^\mu$  در معادله (۴۱.۳) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\gamma^0(x) &= \gamma^{(0)} \\ \gamma^1(x) &= \gamma^{(r)} = (\gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi) \sin \theta + \gamma^3 \cos \theta \\ \gamma^2(x) &= \frac{\gamma^{(\theta)}}{r} = \frac{1}{r} [(\gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi) \cos \theta - \gamma^3 \sin \theta] \\ \gamma^3(x) &= \frac{\gamma^{(\varphi)}}{\alpha r \sin \theta} = \frac{1}{\alpha r \sin \theta} (-\gamma^1 \sin \varphi + \gamma^2 \cos \varphi)\end{aligned}\quad (46.3)$$

سپس ماتریس‌های دیراک  $\gamma^\mu$  برای سیستم مختصات کروی در فضای مینکوفسکی عبارتند از:

$$\begin{aligned}\gamma^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^{(\theta)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \cos \theta e^{i\varphi} & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos \theta e^{i\varphi} & -\sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^{(r)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ \sin \theta e^{i\varphi} & \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^{(\varphi)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & ie^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & ie^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -ie^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (47.3)$$

معادله دیراک هم‌وردا (۳۵.۳) در فضا زمان یک ریسمان کیهانی نوشته می‌شود و سپس به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}[i\hbar \Sigma^r \partial_r + i\hbar \frac{\Sigma^\theta}{r} \partial_\theta + i\hbar \frac{\Sigma^\varphi}{\alpha r \sin \theta} \partial_\varphi \\ + i\hbar \frac{1}{\sqrt{r}} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (\Sigma^r + \cot \theta \Sigma^\theta) + \frac{E - V(r)}{c} - \gamma^{(0)} (m + S(r))]\chi(r) = 0\end{aligned}\quad (48.3)$$

$$\Sigma^r \equiv \gamma^{(0)} \gamma^{(r)}, \quad \Sigma^\theta \equiv \gamma^{(0)} \gamma^{(\theta)}, \quad \Sigma^\varphi \equiv \gamma^{(0)} \gamma^{(\varphi)}\quad (49.3)$$

انتخاب زیر را انجام می‌دهیم.

$$\psi(r, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \chi(r) \quad (۵۰.۳)$$

اکنون فرض می‌کنیم که جواب معادله (۴۸.۳) به فرم زیر باشد

$$\chi(r) = r^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (۵۱.۳)$$

سپس با قرار دادن معادله (۵۱.۳) در معادله (۴۸.۳)، معادله شعاعی زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left( c \Sigma'_r p_r + i \hbar c \frac{\Sigma'_r}{r} \gamma^{(\circ)} \kappa(\alpha) + V(r) + (m + S(r)) c^2 \gamma^{(\circ)} \right) R_{n, \kappa(\alpha)}(r) \\ & = E R_{n, \kappa(\alpha)}(r) \end{aligned} \quad (۵۲.۳)$$

که  $\kappa(\alpha)$  اپراتور اسپین - مدار تعمیم یافته در فضا زمان یک ریسمان کیهانی است و ویژه مقادیر به صورت زیر هستند.

$$k(\alpha) = \pm \left( j(\alpha) + \frac{1}{2} \right) = \pm \left[ j + \frac{1}{2} + m \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] \quad (۵۳.۳)$$

$j(\alpha)$  مربوط به ویژه مقادیر اپراتور تکانه زاویه‌ای کل تعمیم یافته است. اپراتور  $\kappa(\alpha)$  از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\hbar \gamma^{(\circ)} \kappa(\alpha) = \Sigma \cdot L_{(\alpha)} + \hbar \quad (۵۴.۳)$$

و  $L_{(\alpha)}$  اپراتور تکانه زاویه‌ای تعمیم یافته در فضا زمان ریسمان کیهانی است.

$$L^2_{(\alpha)} Y^m_{\ell(\alpha)}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\alpha) (\ell(\alpha) + 1) Y^m_{\ell(\alpha)}(\theta, \varphi) \quad (۵۵.۳)$$

$Y^m_{\ell(\alpha)}(\theta, \varphi)$  هماهنگ‌های کروی تعمیم یافته می‌باشند و  $m(\alpha)$  و  $\ell(\alpha)$  لزوماً صحیح نیستند. پارامترهای  $m(\alpha)$  و  $\ell(\alpha)$  از روابط زیر

$$m(\alpha) = \frac{m}{\alpha}$$

$$\ell(\alpha) = n + m(\alpha) = \ell + m \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۵۶.۳)$$

به دست می‌آیند.  $\ell$  عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری،  $m$  عدد کوانتومی مغناطیسی و  $n$  عدد کوانتومی اصلی است. با انتخاب  $\Sigma'_r$  و  $\gamma^{(\circ)}$  به صورت زیر

$$\Sigma'_r = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(\circ)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۵۷.۳)$$

و با در نظر گرفتن تابع موج شعاعی زیر

$$R(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -i F(r) \\ G(r) \end{pmatrix} \quad (۵۸.۳)$$

معادلات جفت شده‌ای را به دست می‌آوریم.

$$-i(E - m - (S + V)) F(r) + \frac{dG(r)}{dr} + \frac{\kappa(\alpha)}{r} G(r) = 0 \quad (۵۹.۳)$$

$$-i(E + m + S - V) G(r) + \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\kappa(\alpha)}{r} F(r) = 0 \quad (۶۰.۳)$$

در معادلات (۵۹.۳) و (۶۰.۳)  $\hbar = c = 1$  را در نظر گرفتیم. اکنون حالات خاص  $S(r) = V(r)$  و  $S(r) = -V(r)$  را در نظر می‌گیریم. پس از حذف یک مؤلفه، معادله زیر را برای پتانسیل‌های اسکالر و برداری برابر به دست می‌آوریم.

$$-\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left( \frac{\kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)}{r^2} - (E - m - 2V(r))(E + m) \right) F(r) = 0 \quad (۶۱.۳)$$

علاوه براین، معادله زیر را

$$-\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + \left( \frac{\kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1)}{r^2} - (E + m - 2V(r))(E - m) \right) G(r) = 0 \quad (۶۲.۳)$$

برای حالت  $V(r) = -S(r)$  خواهیم داشت که بسته به نوع پتانسیل ویژه توابع برحسب توابع فوق هندسی یا توابع هیون به دست خواهند آمد.

## ۴.۳ معادله دیراک در حضور میدان الکترومغناطیسی

### خارجی

در حضور یک میدان الکترومغناطیسی خارجی،  $A_\mu$ ، دینامیک کوانتومی یک میدان فرمیونی سنگین باردار در فضا زمان خمیده توسط معادله دیراک به صورت زیر توصیف می‌شود [۴۸]

$$i\gamma^\mu (\nabla_\mu + ieA_\mu) \psi - m\psi = 0, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \quad (۶۳.۳)$$

که  $\gamma^\mu$  ماتریس‌های دیراک در فضا زمان خمیده و  $\Gamma_\mu$  اتصال اسپینی هستند. هر دو این ماتریس‌ها برحسب ماتریس‌های دیراک فضا زمان تخت،  $\gamma^{(a)}$ ، توسط روابط زیر به دست می‌آیند

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu;\mu} \quad (۶۴.۳)$$

$$\gamma^\mu = e_{(a)}^\mu \gamma^{(a)} \quad (۶۵.۳)$$

که پایه چهارگانه می‌باشد که از رابطه

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\mu \eta^{ab} = g^{\mu\nu} \quad (۶۶.۳)$$

تبعیت می کند. متریک مربوط به یک ریسمان کیهانی ایده آل در راستای محور  $z$ ، در مختصات استوانه‌ای توسط المان خطی زیر بیان می شود.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2 \quad (۶۷.۳)$$

در عبارت بالا، سیستم مختصات مقادیری را در ناحیه  $0 \leq \phi \leq \phi_0 = \frac{2\pi}{q}$ ،  $r \geq 0$  و  $-\infty \leq (t, z) \leq +\infty$  اختیار می کند. پارامتر  $q$  مربوط به زاویه کاستی تخت است که بر حسب جرم بر واحد طول ریسمان،  $\mu_0$ ، توسط رابطه  $q^{-1} = 1 - 4\mu_0$  می تواند به دست بیاید. طبق رابطه (۶۶.۳) داریم:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -1 \quad (۶۸.۳)$$

تتراد و معکوس آن به صورت زیر به دست می آیند.

$$e_{\mu}^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_a^{\mu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۶۹.۳)$$

مؤلفه های غیر صفر کریستوفل نیز طبق رابطه (۶۴.۳) به دست می آیند.

$$\Gamma_{22}^r = -r$$

$$\Gamma_{12}^{\varphi} = \Gamma_{21}^{\varphi} = 1/r \quad (۷۰.۳)$$

مؤلفه غیر صفر اتصال اسپینی نیز برابر است با:

$$\Gamma_{\varphi} = -\gamma^{(1)}\gamma^{(2)} \quad (۷۱.۳)$$

$\gamma^{\mu}(x)$  بر حسب  $\gamma^a(x)$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$\gamma^{\mu}(x) = e_a^{\mu}(x) \gamma^a \quad (۷۲.۳)$$

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-iq\phi} \\ 0 & 0 & e^{iq\phi} & 0 \\ 0 & -e^{-iq\phi} & 0 & 0 \\ -e^{iq\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-iq\phi} \\ 0 & 0 & ie^{iq\phi} & 0 \\ 0 & ie^{-iq\phi} & 0 & 0 \\ -ie^{iq\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۷۳.۳)$$

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \gamma^{(0)} \\ \gamma^1 &= \cos \phi \gamma^{(1)} + \sin \phi \gamma^{(2)} \\ \gamma^2 &= \frac{1}{r} [-\sin \phi \gamma^{(1)} + \cos \phi \gamma^{(2)}] \\ \gamma^3 &= \gamma^{(3)}\end{aligned}\quad (74.3)$$

در اینجا سیستم مورد نظر شامل یک میدان کوانتومی فرمیونی باردار در ریزمان کیهانی با احتساب حضور میدان های مغناطیسی است. در ادامه، میدان های مغناطیسی را توسط یک پتانسیل چاربردار  $A_\mu$  به فرم زیر نمایش خواهیم داد.

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi(r), 0) \quad (75.3)$$

در متریک (۶۷.۳) ماتریس های گامای دیراک به صورت زیر می تواند بیان شود [۴۹]

$$\gamma^0 = \gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^l = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ -\sigma^l & 0 \end{pmatrix} \quad (76.3)$$

که ماتریس های  $2 \times 2$  را برای  $l = (r, \phi, z)$  به صورت زیر معرفی می کنیم. (۷۷.۳)

$$\sigma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\phi = -\frac{i}{r} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ -e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن  $A_\phi(r)$  به صورت

$$A_\phi(r) = -\frac{q\phi}{\sqrt{2}\pi} a(r) \quad (78.3)$$

اتصال اسپینی و ترکیب ظاهر شده در معادله دیراک به صورت زیر به دست می آیند.

$$\Gamma_\mu = \frac{1-q}{\sqrt{2}} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \delta_\mu^\phi, \quad \gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{1-q}{\sqrt{2}r} \gamma^r \quad (79.3)$$

بنابراین معادله زیر استخراج می شود.

$$\left( \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + \frac{1-q}{\sqrt{2}r} \gamma^r + im \right) \psi = 0 \quad (80.3)$$

معادله بالا معادله دیراک در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی می باشد.

## ۵.۳ نوسانگر دیراک در زمینه گرانش رنگین کمانی

رهیافت های نیمه کلاسیکی برای بررسی پدیده گرانش کوانتومی بسیار مفیدند. یک چارچوب پدیدارشناسی جالب برای بررسی اثرات گرانش کوانتومی، رنگین کمان گرانشی می باشد [۵۰،

[۵۱]. در این چارچوب تعریف یک فضای دوگانه غیر بدیهی که نتیجه‌ای از تبدیل لورنتس غیر خطی در فضای تکانه است، به اینکه متریک توصیف کننده فضا زمان باید وابسته به انرژی باشد اشاره دارد و منجر به تعمیم رابطه پراکندگی می‌شود. این انرژی به دلیل ذراتی است که در نهایت فضا زمان را بررسی می‌کنند زیرا برای هر مقدار فرکانس ذرات هندسه‌ای متفاوت وجود دارد.

در زمینه رنگین کمان گرانشی دو کمیت وجود دارد که مستقل از ناظرند؛ یکی سرعت نور و دیگری طول پلانک (انرژی). بنابراین در مقیاس‌های انرژی بالا (از مرتبه مقیاس پلانک) رابطه پراکندگی نسبیتی باید تصحیح شود. در اینجا بحثی را در زمینه رنگین کمان گرانشی با اثراتی که از اصلاحات مرتبه بالا برای رابطه پراکندگی نسبیتی نوسانگر دیراک در فضا زمان ریسمان کیهانی حاصل می‌شود، مطرح می‌کنیم.

نوسانگر دیراک یک مدل نسبیتی برای نوسانگر هارمونیک معروف است که با یک جفت شدگی که معادله دیراک را در دو مختصات فضایی و تکانه به صورت خطی حفظ می‌کند، تعیین می‌شود. از سوی دیگر در محدوده غیر نسبیتی معادله دیراک، طیف انرژی نوسانگر هماهنگ با یک جفت شدگی اسپین - مدار بهبود می‌یابد. بنابراین به بحث در مورد رهیافت نیمه کلاسیکی گرانش با بررسی تأثیر زمینه تعیین شده توسط رنگین کمان گرانشی روی طیف انرژی نوسانگر دیراک می‌پردازیم و از واحدهای طبیعی  $G = \hbar = c = 1$  استفاده می‌کنیم [۵۲].

در این بخش رفتار نوسانگر دیراک را در سه حالت رنگین کمان گرانشی بررسی می‌کنیم. ابتدا فضا زمان ریسمان کیهانی را با استفاده از المان خطی زیر توصیف می‌کنیم:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \eta^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (۸۱.۳)$$

که پارامتر  $\eta$  مربوط به زاویه کاستی است که به صورت  $\eta = 1 - 4\omega$  تعریف می‌شود و  $\omega$  چگالی جرم خطی ریسمان کیهانی است. در فضا زمان ریسمان کیهانی  $\eta < 1$  می‌باشد. علاوه بر این، در تقارن استوانه‌ای داریم  $0 < r < \infty$ ،  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  و  $-\infty < z < \infty$ . محدوده مقیاس انرژی بالا به رابطه پراکندگی نسبیتی که با میدان کوانتومی با جرم  $m$  و تکانه  $p$  در ارتباط است و فرم تعمیم یافته آن به صورت زیر می‌باشد، اشاره دارد.

$$E^2 g_0^2(x) - p^2 g_1^2(x) = m^2 \quad (۸۲.۳)$$

توابع  $g_0(x)$  و  $g_1(x)$  توابع رنگین کمانی نامیده می‌شوند و آرگومان آن‌ها،  $x = \frac{E}{E_p}$ ، نسبت انرژی ذرات به انرژی پلانک  $E_p$  است. این نسبت رابطه متقابل بین بستر فضا زمان و ذرات را تنظیم می‌کند. بنابراین در محدوده انرژی پایین باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_i(x) = 1 \quad i = 0, 1 \quad (۸۳.۳)$$

در زمینه رنگین کمان گرانشی، المان خطی ریسمان کیهانی (۸۱.۳) به صورت زیر در می‌آید.

$$ds^2 = -\frac{1}{g_0^2(x)} dt^2 + \frac{1}{g_1^2(x)} [dr^2 + \eta^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2] \quad (۸۴.۳)$$



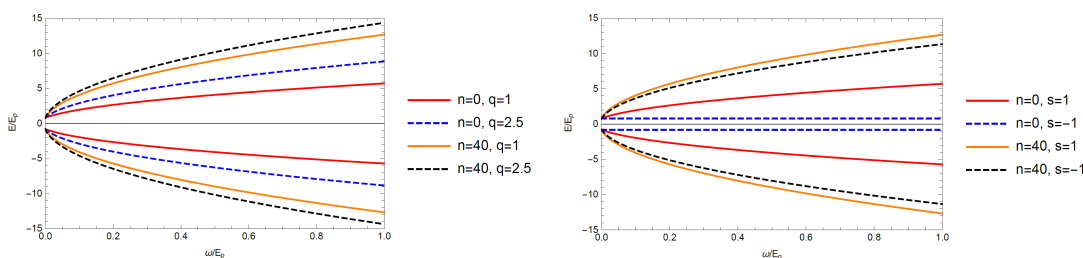
در بخش‌های بعدی نوسانگر دیراک را در پس زمینه توصیف شده توسط المان خطی (۸۴.۳) در نظر می‌گیریم تا ترازهای انرژی مربوط به آن را که توسط توابع رنگین کمائی تعمیم می‌یابند مشاهده کنیم. در مرجع [۵۳]، ترازهای انرژی نوسانگر دیراک در پس زمینه ریسمان کیهانی از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$E_{\sigma} = \pm \sqrt{m^2 + 4m\omega \left[ n + \frac{|\nu|}{2\eta} - s \frac{\nu}{2\eta} \right]} \quad (85.3)$$

که  $\omega$  فرکانس نوسانگر دیراک و  $m$  جرم می‌باشد.  $\sigma = (n, l, s)$  مجموعه اعداد کوانتومی است که مقادیر  $n = 0, 1, 2, \dots$ ،  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  و  $s = \pm 1$  را اختیار می‌کند. پارامتر  $\nu$  توسط رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\nu = l + \frac{1}{q} (1 - s) + \frac{s}{q} (1 - \eta) \quad (86.3)$$

بنابراین می‌توان مشاهده کرد که ترازهای انرژی ذکر شده نه تنها به اعداد کوانتومی، جرم و فرکانس بستگی دارند بلکه به پارامتر فضا زمان ریسمان کیهانی  $\eta$  نیز وابسته هستند. در محدوده  $\eta \rightarrow 1$ ، نوسانگر دیراک در فضا زمان مینکوفسکی به دست می‌آید [۵۳].



شکل ۲.۳: نمودار ترازهای انرژی (۸۵.۳) نوسانگر دیراک در فضا زمان ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک. برای هر دو نمودار  $\frac{m}{E_p} = 0.8$  و  $\eta = \frac{1}{q}$  در نظر گرفته می‌شود.

ترازهای انرژی (۸۵.۳) در شکل ۲.۳ در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس نوسانگر دیراک به انرژی پلانک رسم شده است. برای هر دو نمودار  $\frac{m}{E_p} = 0.8$  در نظر گرفته می‌شود. نمودار سمت چپ منحنی‌های مقارنی را به ازای مقادیر  $s = 1$  و  $l = -10$  نشان می‌دهد. واضح است که اگر پارامتر ریسمان کیهانی  $\eta = \frac{1}{q}$  کاهش یابد، انرژی‌های مثبت و منفی به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند. از طرف دیگر، نمودار سمت راست منحنی‌های مقارنی را به ازای مقادیر  $q = 1$  و  $l = -10$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که برای مقادیر یکسان  $n$  بسته به این که  $s = 1$  یا  $s = -1$  باشد، انرژی به ترتیب بزرگتر یا کوچکتر می‌شود. همچنین می‌توان مقادیر مختلفی را برای اعداد کوانتومی  $n$  و  $l$  در نظر گرفت که فقط انرژی کاهش یا افزایش می‌یابد و نمودار به همان شکل حفظ می‌شود. وقتی  $\omega = 0$  باشد، انرژی مقادیر غیر صفر را اختیار می‌کند.

### ۱.۵.۳ حالت اول برای رنگین کمان گرانشی

برای بررسی رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی از توابع رنگین کمانی زیر استفاده می‌کنیم [۵۴، ۵۵]

$$g_0(x) = g_1(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon x} \quad (۸۷.۳)$$

که باید  $\varepsilon$  را یک پارامتر مرتبه اول در نظر بگیریم. در این بررسی با استفاده از توابع رنگین کمانی در معادله (۸۷.۳)، المان خطی ریسمان کیهانی (۸۱.۳) برحسب (۸۴.۳) به صورت زیر تعمیم می‌یابد.

$$ds^2 = -(1 - \varepsilon x)^2 dt^2 + (1 - \varepsilon x)^2 [dr^2 + \eta^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2] \quad (۸۸.۳)$$

بنابراین می‌توانیم با در نظر گرفتن  $\varepsilon \rightarrow 0$  المان خطی ریسمان کیهانی (۸۱.۳) را به دست آوریم. می‌توانیم با استفاده از تئوری اسپینور در فضای خمیده ادامه دهیم. در این روش، اسپینورها با معرفی یک پایه  $\hat{\theta}^a = e_\mu^a(x) dx^\mu$  تعریف می‌شوند که مؤلفه‌های تتراد نامیده می‌شوند و چارچوب مرجع موضعی ناظران را می‌دهند. تتراد از رابطه زیر تبعیت می‌کند

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab} \quad (۸۹.۳)$$

که  $\eta_{ab}$  تانسور مینکوفسکی است. همچنین معکوس تتراد را داریم که از رابطه

$$dx^\mu = e_a^\mu(x) \hat{\theta}^a \quad (۹۰.۳)$$

به دست می‌آید، به گونه‌ای که رابطه  $e_\mu^a(x) e_b^\mu(x) = \delta_b^a$  برقرار باشد. بنابراین از المان خطی تغییر یافته فضا زمان ریسمان کیهانی در معادله (۸۸.۳)، می‌توانیم تترادها را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^0 &= (1 - \varepsilon x) dt \\ \hat{\theta}^1 &= (1 - \varepsilon x) dr \\ \hat{\theta}^2 &= \eta r (1 - \varepsilon x) d\varphi \\ \hat{\theta}^3 &= (1 - \varepsilon x) dz \end{aligned} \quad (۹۱.۳)$$

سپس با حل معادلات ساختار مورر-کارتان<sup>۸</sup> در غیاب پیچش،

$$d\hat{\theta}^a + \omega_b^a \wedge \hat{\theta}^b = 0 \quad (۹۲.۳)$$

که  $\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a(x) dx^\mu$  می‌باشد اتصال اسپینی محاسبه می‌شود  $\eta$   $\omega_{\varphi 1}(x) = -\omega_{\varphi 2}(x)$  بنابراین اتصال اسپینوری  $\Gamma_\mu(x) = \frac{i}{\eta} \omega_{\mu ab}(x) \Sigma^{ab}$  با  $\Sigma^{ab} = \frac{i}{\eta} [\gamma^a, \gamma^b]$  دارای مؤلفه زیر می‌باشد.

$$\Gamma_\varphi(x) = -\frac{i}{\eta} \eta \Sigma^3 \quad (۹۳.۳)$$

<sup>۸</sup>Maurer-Cartan structure

ماتریس‌های  $\gamma^a$  را در چارچوب مرجع موضعی تعریف می‌کنیم که بیانگر ماتریس‌های دیراک در فضا زمان مینکوفسکی هستند.

$$(94.3) \quad \gamma^{(0)} = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(i)} = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

$\vec{\Sigma}$  بردار اسپین است. ماتریس‌های  $\sigma^i$  ماتریس‌های پائولی هستند و از رابطه  $\frac{1}{2}(\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i) = \delta^{ij}$  تبعیت می‌کنند. ماتریس‌های  $\gamma^\mu$  طبق رابطه  $\gamma^\mu = e_a^\mu(x) \gamma^a$  با ماتریس‌های  $\gamma^a$  در ارتباط هستند.

نوسانگر دیراک یک مدل نسبیتی برای نوسانگر هماهنگ است که با معادله دیراک از طریق جفت شدگی  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - im\omega \cdot r \gamma^{(0)} \hat{r}$  معرفی می‌شود. با این جفت شدگی، معادله دیراک در هر دو مختصات فضایی و تکانه به صورت خطی باقی می‌ماند. بنابراین، فرم هموردای معادله دیراک برای این نوسانگر کوانتوم نسبیتی به صورت زیر است

$$(95.3) \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\gamma^\mu \Gamma_\mu(x) \psi + im\omega \gamma^\mu X_\mu \gamma^{(0)} \psi = m\psi$$

و  $X_\mu = (0, r, 0, 0)$  را در نظر می‌گیریم. در این روش، با استفاده از معادلات (91.3)، (93.3) و (94.3) معادله دیراک برای نوسانگر دیراک به معادله زیر تبدیل می‌شود. ( $\hbar = c = 1$ )

$$(96.3) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = m(1 - \epsilon x) \gamma^{(0)} \psi - i\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + m\omega r \gamma^{(0)} \right) \psi - i \frac{\gamma^{(0)} \gamma^{(2)}}{\eta} r \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - i\gamma^{(3)} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

جواب معادله دیراک به فرم زیر است

$$(97.3) \quad \psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

که  $\phi_1$  و  $\phi_2$  اسپینورهای دو مؤلفه‌ای هستند. سپس دو معادله جفت شده برای  $\phi_1$  و  $\phi_2$  به دست می‌آوریم که معادله اول به صورت

$$(98.3) \quad [E - m(1 - \epsilon x)] \phi_1 = -i\sigma^1 \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - m\omega r \right] \phi_2 - \frac{i\sigma^2}{\eta r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$$

و معادله جفت شده دوم نیز به فرم زیر می‌باشد.

$$(99.3) \quad [E + m(1 - \epsilon x)] \phi_2 = -i\sigma^1 \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + m\omega r \right] \phi_1 - \frac{i\sigma^2}{\eta r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$$

با از بین بردن  $\phi_2$  در معادلات (98.3) و (99.3)، معادله زیر را برای  $\phi_1$  به دست می‌آوریم.

$$(100.3) \quad [E^2 - m^2(1 - \epsilon x)^2] \phi_1 = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{1}{\eta^2 r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{i\sigma^3}{\eta r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{4r^2} \phi_1 + m^2 \omega^2 r^2 \phi_1 - m\omega \phi_1 + \frac{2m\omega}{\eta} i\sigma^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} - 2m\omega r i\sigma^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$$

مشاهده می‌کنیم  $\sigma^3 \phi_1 = \pm \phi_1 = s \phi_1$  که  $s = \pm 1$  و  $\phi_1 = (f_+(r) \ f_-(r))^T$  می‌باشد. علاوه براین، به علت تقارن استوانه‌ای می‌توانیم بنویسیم  $\phi_1 = e^{i(l+1/2)\varphi} e^{ip_z z} (f_+(r) \ f_-(r))^T$  که  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  و  $-\infty < p_z < \infty$  است. از اینجا به بعد،  $p_z = 0$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را برای هر دو  $f_+(r)$  و  $f_-(r)$  به دست می‌آوریم

$$f_s'' + \frac{1}{r} f_s' - \frac{\nu^2}{\eta^2 r^2} f_s - m^2 \omega^2 r^2 f_s + \beta f_s = 0 \quad (10.1.3)$$

و پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \beta &= E^2 - m^2 (1 - \varepsilon x)^2 + 2sm\omega \frac{\gamma_s}{\eta} + 2m\omega \\ \nu &= l + \frac{1}{2} (1 - s) + \frac{s}{2} (1 - \eta) \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

با تعریف  $\xi = m\omega r^2$ ، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\xi f_s'' + f_s' - \frac{\nu^2}{4\eta^2 \xi} f_s - \frac{\xi}{4} f_s + \frac{\beta}{4m\omega} f_s = 0 \quad (10.3.3)$$

جواب این معادله به صورت زیر می‌باشد

$$f_s(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|\nu|/2} {}_1F_1 \left( \frac{|\nu|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega}, \frac{|\nu|}{2} + 1; \xi \right) \quad (10.4.3)$$

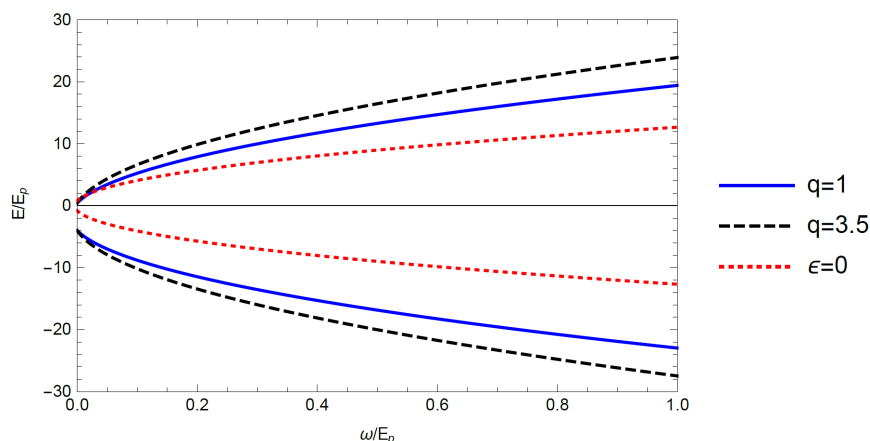
که  ${}_1F_1 \left( \frac{|\nu|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega}, \frac{|\nu|}{2} + 1; \xi \right)$  تابع فوق هندسی کانفلوئنت است. به منظور به دست آوردن جواب‌های حالات مقید برای معادله دیراک نیاز داریم که  $a = -n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ )، یعنی باید  $-\frac{|\nu|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega} = -n$  باشد. بنابراین از رابطه  $-\frac{|\nu|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega} = -n$  به رابطه زیر می‌رسیم

$$E^2 + \frac{2\varepsilon m^2}{E_p \left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right)} E - \frac{(m^2 + \lambda)}{\left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right)} = 0 \quad (10.5.3)$$

که  $\lambda = 4m\omega \left[ n + \frac{|\nu|}{2} - s \frac{\nu}{2} \right]$  است. مشاهده می‌کنیم که معادله (10.5.3) یک معادله جبری درجه دوم برای  $E$  است. بنابراین، انرژی‌های مجاز سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\varepsilon m^2}{E_p \left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right)} \\ &\pm \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right)} \sqrt{\left(m^2 + 4m\omega \left[ n + \frac{|\nu|}{2} - s \frac{\nu}{2} \right]\right) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right) + \frac{\varepsilon^2 m^4}{E_p^2}} \end{aligned} \quad (10.6.3)$$

از مقایسه طیف انرژی با (۸۵.۳)، می‌توان مشاهده کرد که پس زمینه فضا زمان ریسمان کیهانی تعمیم یافته، طیف انرژی نوسانگر دیراک را توسط انرژی‌های مجاز به دست آمده



شکل ۳.۳: نمودار ترازهای انرژی (۱۰۶.۳) نوسانگر دیراک در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک. برای این نمودار  $\frac{m}{E_p} = 0.8$  و  $\eta = \frac{1}{q}$  در نظر گرفته می‌شود. منحنی‌های قرمز رنگ (به ازای  $q = 1$ ) ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی توصیف می‌کند در حالی که منحنی‌های دیگر ترازهای انرژی را با رنگین کمان گرانشی نشان می‌دهند.

(۱۰۶.۳) تغییر می‌دهد. اثراتی که ناشی از توپولوژی ریسمان کیهانی است با حضور پارامتر  $\eta$  در انرژی‌های مجاز (۱۰۶.۳) به دست می‌آید. با در نظر گرفتن حد  $\eta \rightarrow 1$  در معادله (۱۰۶.۳) داریم:

$$E = -\frac{\varepsilon m^2}{E_p \left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right)} \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right)} \sqrt{\left(m^2 + 4m\omega \left[n + \frac{|\bar{\gamma}|}{2} - s\frac{\bar{\gamma}}{2}\right]\right) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2 m^2}{E_p^2}\right) + \frac{\varepsilon^2 m^4}{E_p^2}} \quad (107.3)$$

که  $\bar{\gamma} = l + \frac{1}{q}(1-s)$  است. در این حالت، پس زمینه تعمیم یافته فضا زمان مینکوفسکی را داریم.

در شکل ۳.۳ ترازهای انرژی نوسانگر دیراک (۱۰۶.۳) در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک با در نظر گرفتن مقادیر  $l = -10$  و  $n = 40$  رسم شده است. همچنین برای این نمودار  $\frac{m}{E_p} = 0.8$  و  $\eta = \frac{1}{q}$  را در نظر می‌گیریم. منحنی‌های قرمز رنگ با  $q = 1$ ، ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی و منحنی‌های دیگر ترازهای انرژی را با اصلاحات رنگین کمان گرانشی نشان می‌دهند. واضح است که در مقایسه با منحنی‌های قرمز رنگ، ترازهای انرژی توصیف شده با منحنی آبی رنگ (برای  $q = 1$ ) در زمینه رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی افزایش و کاهش می‌یابد. برای منحنی مشکی رنگ (مربوط به  $q = 3/5$ ) نیز به همین صورت است. جالب است

که زمانی که رنگین کمان گرانشی حاصل از توابع رنگین کمانی را در نظر می‌گیریم، منحنی‌ها برای ترازهای انرژی مثبت در جهت عمودی جابه‌جا می‌شوند. بنابراین تقارن نشان داده شده در شکل ۲.۳ بین منحنی‌ها برای ترازهای انرژی مثبت و منفی از بین رفته است. این اتفاق به دلیل وجود جمله اول در معادلات (۱۰۶.۳) و (۱۰۷.۳) رخ می‌دهد. از معادلات (۱۰۶.۳) و (۱۰۷.۳) مشخص است که اگر  $\omega = 0$  باشد، منحنی‌ها به سمت صفر می‌روند.

### ۲.۵.۳ حالت دوم برای رنگین کمان گرانشی

در این بخش، رفتار نوسانگر دیراک را در حالت دیگری از رنگین کمان گرانشی بررسی می‌کنیم. بنابراین حالت دوم رنگین کمان گرانشی که می‌خواهیم در نظر بگیریم، با توابع رنگین کمانی زیر تعریف می‌شود [۵۴، ۵۵].

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \sqrt{1 - \varepsilon x^2} \quad (108.3)$$

با در نظر گرفتن توابع رنگین کمانی (۱۰۸.۳)، المان خطی فضا زمان ریسمان کیهانی در زمینه رنگین کمان گرانشی (۸۴.۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{(1 - \varepsilon x^2)} [dr^2 + \eta^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2] \quad (109.3)$$

با المان خطی (۱۰۹.۳)، تترادها را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^0 &= dt \\ \hat{\theta}^1 &= \frac{1}{(1 - \varepsilon x^2)^{1/2}} dr \\ \hat{\theta}^2 &= \frac{\eta r}{(1 - \varepsilon x^2)^{1/2}} d\varphi \\ \hat{\theta}^3 &= \frac{1}{(1 - \varepsilon x^2)^{1/2}} dz \end{aligned} \quad (110.3)$$

سپس با حل دوباره معادلات ساختار مورر- کارتان در غیاب پیچش،  $\omega_{\varphi 1}(x) = -\omega_{\varphi 2}(x) = -\eta$  و اتصال اسپینوری (۹۳.۳) را به دست می‌آوریم. در این صورت معادله دیراک فرم زیر را می‌گیرد.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= m \gamma^0 \psi - i (1 - \varepsilon x^2)^{1/2} \gamma^0 \gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + m \omega r \gamma^0 \right) \psi - i (1 - \varepsilon x^2)^{1/2} \frac{\gamma^0 \gamma^2}{\eta r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ &\quad - i (1 - \varepsilon x^2)^{1/2} \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (111.3)$$

سپس با در نظر گرفتن جوابی برای معادله دیراک (۹۷.۳)، معادلات جفت شده زیر را برای  $\phi_1$  و  $\phi_2$  به دست می‌آوریم

$$\left[ \frac{E - m}{\sqrt{1 - \varepsilon x^2}} \right] \phi_1 = -i \sigma^1 \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - m \omega r \right] \phi_2 - i \frac{\sigma^2}{\eta r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} - i \sigma^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad (112.3)$$

که معادله جفت شده دوم به صورت زیر است.

$$\left[ \frac{E + m}{\sqrt{1 - \varepsilon x^2}} \right] \phi_2 = -i\sigma^1 \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + m\omega r \right] \phi_1 - i\frac{\sigma^2}{\eta r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \quad (113.3)$$

با از بین بردن  $\phi_2$  در معادلات (۱۱۲.۳) و (۱۱۳.۳)، معادله زیر را برای  $\phi_1$  به دست می‌آوریم.

$$\left[ \frac{E^2 - m^2}{(1 - \varepsilon x^2)} \right] \phi_1 = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{1}{\eta^2 r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{i\sigma^3}{\eta r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{4r^2} \phi_1 + m^2 \omega^2 r^2 \phi_1 - m\omega \phi_1 + \frac{2m\omega}{\eta} i\sigma^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} - 2m\omega r i\sigma^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \quad (114.3)$$

از این رو، با انجام محاسباتی مشابه بخش قبلی، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

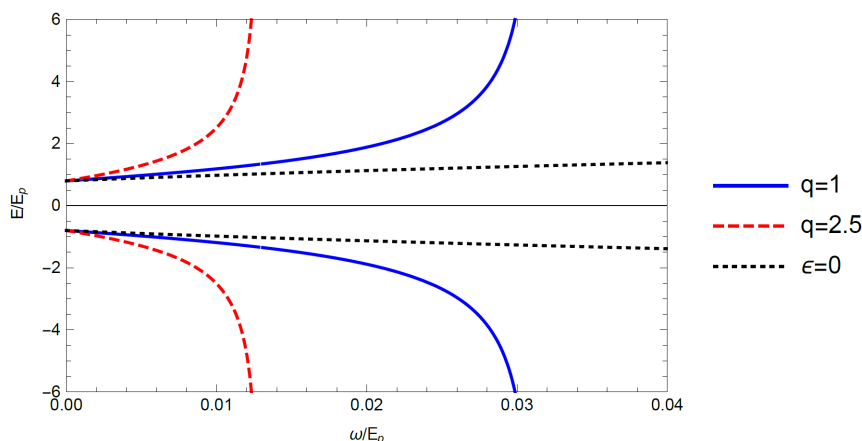
$$E = \pm \sqrt{\frac{m^2 + 4m\omega \left[ n + \frac{|\nu|}{\eta} - s\frac{\nu}{\eta} \right]}{\left( 1 - \frac{4m\omega\varepsilon}{E_p^2} \left[ n + \frac{|\nu|}{\eta} - s\frac{\nu}{\eta} \right] \right)}} \quad (115.3)$$

که طیف انرژی نوسانگر دیراک در فضا زمان ریسمان کیهانی تعمیم یافته می‌باشد. در مقایسه با ترازهای انرژی نوسانگر دیراک در فضا زمان ریسمان کیهانی که در مرجع [۵۳] به دست آمده، طیف انرژی متفاوتی را برای نوسانگر دیراک توسط اثرات رنگین کمان گرانشی حاصل از توابع رنگین کمانی داریم. همچنین می‌توانیم مشاهده کنیم که این طیف انرژی نسبت به آنچه در معادله (۱۰۶.۳) به دست آمده است، متفاوت می‌باشد. بنابراین حالت‌های مختلف رنگین کمان گرانشی، طیف انرژی متفاوتی را برای نوسانگر دیراک نتیجه می‌دهند. در معادله (۱۱۵.۳) مشاهده می‌کنیم که اثرات توپولوژی ریسمان کیهانی نیز با حضور پارامتر  $\eta$  به دست می‌آید. با در نظر گرفتن حد  $\eta \rightarrow 1$  در معادله (۱۱۵.۳)، پس زمینه تعمیم یافته را برای فضا زمان مینکوفسکی داریم. بنابراین رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$E = \pm \sqrt{\frac{m^2 + 4m\omega \left[ n + \frac{|\bar{\gamma}|}{\bar{\nu}} - s\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\nu}} \right]}{\left( 1 - \frac{4m\omega\varepsilon}{E_p^2} \left[ n + \frac{|\bar{\gamma}|}{\bar{\nu}} - s\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\nu}} \right] \right)}} \quad (116.3)$$

که  $\bar{\gamma} = l + \frac{1}{q}(1 - s)$  می‌باشد. بنابراین می‌توانیم اثرات رنگین کمان گرانشی را در ترازهای انرژی نوسانگر دیراک مشاهده کنیم. سرانجام با در نظر گرفتن  $\varepsilon \rightarrow 0$  در معادله (۱۱۵.۳)، ترازهای انرژی نوسانگر دیراک در فضا زمان ریسمان کیهانی یعنی معادله (۸۵.۳) به دست می‌آید.

در شکل ۴.۳ ترازهای انرژی نوسانگر دیراک (۱۱۵.۳) در رنگین کمانی گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک به ازای مقادیر  $s = 1$ ،  $l = -10$  و  $n = 0$  رسم شده است. برای این نمودار نیز  $\frac{m}{E_p} = 0.8$  و  $\eta = \frac{1}{q}$  را در نظر می‌گیریم. در اینجا نتایج مشابه نتایج در شکل ۳.۳ است که منحنی‌های سیاه رنگ (با  $q = 1$ ) ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی توصیف می‌کند و منحنی‌های رنگی



شکل ۴.۳: نمودار ترازهای انرژی نوسانگر دیراک (۱۱۵.۳) در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک. برای این نمودار  $\frac{m}{E_p} = \frac{1}{8}$  و  $\eta = \frac{1}{q}$  در نظر گرفته می‌شود. منحنی‌های مشکی رنگ (به ازای  $q = 1$ )، ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی توصیف می‌کند در حالی که منحنی‌های رنگی ترازهای انرژی را در حضور رنگین کمان گرانشی نشان می‌دهند.

ترازهای انرژی را در حضور رنگین کمان گرانشی نشان می‌دهند. در مقایسه با منحنی‌های مشکی رنگ، ترازهای انرژی توصیف شده با منحنی‌های آبی رنگ (برای  $q = 1$ ) در زمینه رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی افزایش (کاهش) می‌یابند و برای منحنی قرمز رنگ به ازای  $q = 2/5$  نیز به همین صورت است. در این حالت منحنی‌ها برای ترازهای انرژی مثبت، مانند شکل ۳.۳ جابه‌جا نمی‌شوند و به این خاطر است که در اینجا جمله‌ای شبیه جمله اول در معادله (۱۰۶.۳) نداریم. بنابراین، منحنی‌های نشان داده شده در شکل ۴.۳ تقارن بین ترازهای انرژی مثبت و منفی را حفظ می‌کند. در این حالت، واضح است که برای  $\omega = 0$ ، منحنی‌ها به سمت صفر نمی‌روند.

### ۳.۵.۳ حالت سوم برای رنگین کمان گرانشی

در این بخش، رفتار نوسانگر دیراک را در حضور توابع رنگین کمانی زیر بررسی می‌کنیم.

$$g_0(x) = \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon x}, \quad g_1(x) = 1 \quad (117.3)$$

با در نظر گرفتن توابع رنگین کمانی (۱۱۷.۳)، المان خطی فضا زمان ریسمان کیهانی در زمینه رنگین کمان گرانشی (۸۴.۳) به صورت زیر می‌باشد.

$$ds^2 = -\frac{\varepsilon^2 x^2}{(e^{\varepsilon x} - 1)^2} dt^2 + dr^2 + \eta^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (118.3)$$



با المان خطی (۱۱۸.۳)، تتراده‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^0 &= \frac{\varepsilon x}{(e^{\varepsilon x} - 1)} dt \\ \hat{\theta}^1 &= dr \\ \hat{\theta}^2 &= \eta r d\varphi \\ \hat{\theta}^3 &= dz\end{aligned}\quad (119.3)$$

سپس با حل دوباره معادلات ساختار مورر- کارتان در غیاب پیچش،  
 $\omega_{\varphi 21}(x) = -\omega_{\varphi 12}(x) = -\eta$  و اتصال اسپینوری (۹۳.۳) را به دست می‌آوریم. در این صورت معادله دیراک فرم زیر را می‌گیرد:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= m\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)\gamma^0\psi - i\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)\gamma^0\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + m\omega r\gamma^0\right)\psi - i\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)\frac{\gamma^0\gamma^2}{\eta r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \\ &- i\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)\gamma^0\gamma^3\frac{\partial\psi}{\partial z}\end{aligned}\quad (120.3)$$

سپس با در نظر گرفتن جوابی برای معادله دیراک (۹۷.۳)، معادلات جفت شده زیر را برای  $\phi_1$  و  $\phi_2$  به دست می‌آوریم

$$\left[\frac{E}{\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)} - m\right]\phi_1 = -i\sigma^1\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - m\omega r\right]\phi_2 - i\frac{\sigma^2}{\eta r}\frac{\partial\phi_2}{\partial\varphi} - i\sigma^3\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\quad (121.3)$$

که معادله جفت شده دوم به صورت زیر است:

$$\left[\frac{E}{\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)} + m\right]\phi_2 = -i\sigma^1\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + m\omega r\right]\phi_1 - i\frac{\sigma^2}{\eta r}\frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi} - i\sigma^3\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\quad (122.3)$$

با از بین بردن  $\phi_2$  در معادلات (۱۲۱.۳) و (۱۲۲.۳)، معادله زیر را برای  $\phi_1$  به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\left[\frac{E^2}{\left(\frac{\varepsilon x}{e^{\varepsilon x} - 1}\right)^2} - m^2\right]\phi_1 &= -\frac{\partial^2\phi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial r} - \frac{1}{\eta^2 r^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} + \frac{i\sigma^3}{\eta r^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\phi_1 \\ &+ m^2\omega^2 r^2\phi_1 - m\omega\phi_1 + \frac{2m\omega}{\eta}i\sigma^3\frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi} - 2m\omega r i\sigma^2\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\end{aligned}\quad (123.3)$$

مشاهده می‌کنیم  $\sigma^3\phi_1 = \pm\phi_1 = s\phi_1$ ، که  $s = \pm 1$  و  $\phi_1 = (u_+(r) \quad u_-(r))^T$  می‌باشد. علاوه بر این، به علت تقارن استوانه‌ای سیستم می‌توانیم بنویسیم  $\phi_1 = e^{i(l+1/2)\varphi} e^{ip_z z} (u_+(r) \quad u_-(r))^T$  که  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  و  $-\infty < p_z < \infty$ . از اینجا به بعد،  $p_z = 0$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را برای هر دو  $u_+(r)$  و  $u_-(r)$  به دست می‌آوریم

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - \frac{v^2}{\eta^2 r^2}u(r) - m^2\omega^2 r^2 u(r) + \beta u(r) = 0\quad (124.3)$$

و پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\beta = \frac{E^2 (e^{\varepsilon x} - 1)^2}{\varepsilon^2 x^2} - m^2 + 2sm\omega \frac{\gamma s}{\eta} + 2m\omega$$

$$\nu = l + \frac{1}{\eta} (1 - s) + \frac{s}{\eta} (1 - \eta) \quad (125.3)$$

با تعریف  $\rho = m\omega r^2$ ، معادله زیر حاصل می‌شود

$$\rho u''(\rho) + u'(\rho) - \frac{\nu^2}{4\eta^2 \rho} u(\rho) - \frac{\rho}{4} u(\rho) + \frac{\beta}{4m\omega} u(\rho) = 0 \quad (126.3)$$

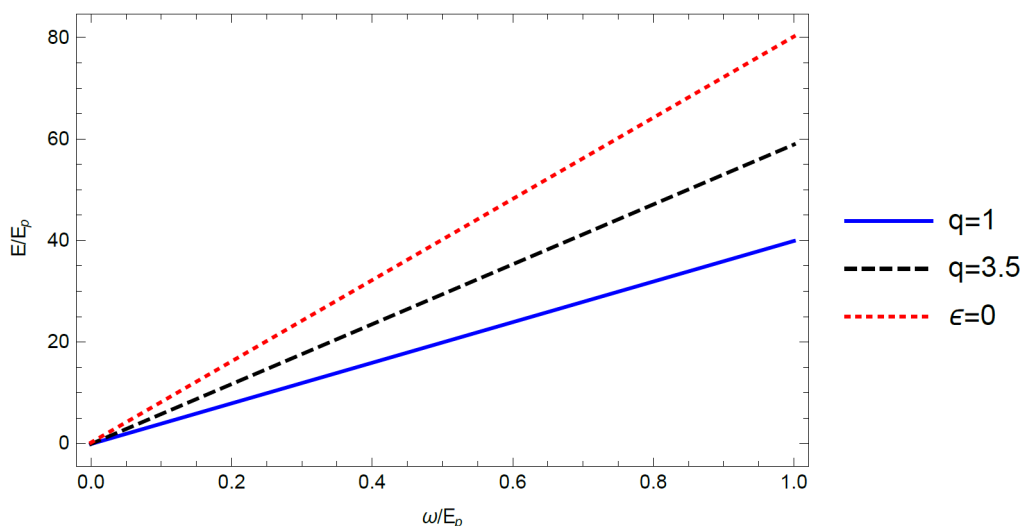
جواب این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$u(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^{|\nu|/2} {}_1F_1 \left( \frac{|\nu|}{2\eta} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega}, \frac{|\nu|}{2\eta} + 1; \rho \right) \quad (127.3)$$

که  ${}_1F_1 \left( \frac{|\nu|}{2\eta} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega}, \frac{|\nu|}{2\eta} + 1; \rho \right)$  تابع فوق هندسی کانفلوئنت است. به منظور به دست آوردن جواب‌های حالات مقید برای معادله دیراک، نیاز داریم که  $a = -n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ )، یعنی باید  $-\frac{|\nu|}{2\eta} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega} = -n$  باشد. بنابراین از رابطه  $-\frac{|\nu|}{2\eta} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4m\omega} = -n$  به رابطه زیر می‌رسیم

$$E = \frac{\varepsilon}{4E_p} (m^2 + \lambda) - \frac{E_p}{4\varepsilon} \quad (128.3)$$

که  $\lambda = 4m\omega \left[ n + \frac{|\nu|}{2\eta} - s \frac{\nu}{2\eta} \right]$  است.



شکل ۵.۳: نمودار ترازهای انرژی (۱۲۸.۳) نوسانگر دیراک در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک.

در شکل ۵.۳ نمودار ترازهای انرژی (۱۲۸.۳) نوسانگر دیراک در رنگین کمان گرانشی ریسمان کیهانی، در واحدهای انرژی پلانک، برحسب نسبت فرکانس  $\omega$  به انرژی پلانک به ازای مقادیر  $n = 40$ ،  $l = -10$  و  $s = 1$  رسم شده است. برای این نمودار نیز  $\frac{m}{E_p} = 0.8$  و  $\eta = \frac{1}{q}$  را در نظر می‌گیریم. منحنی قرمز رنگ (به ازای  $q = 1$ ) ترازهای انرژی را در غیاب رنگین کمان گرانشی توصیف می‌کند در حالی که منحنی‌های دیگر ترازهای انرژی را در حضور رنگین کمان گرانشی نشان می‌دهند.

# فصل ۴

## تابع هیون در بررسی فرمیون‌های بدون جرم

### ۱.۴ معادله ویل

در سال ۱۹۵۰ هرمان ویل<sup>۱</sup> اولین شخصی بود که نتایج جرم صفر را در معادله دیراک بررسی کرد که مفهوم آن بقای پاریتته<sup>۲</sup> است. در نظریه میدان کوانتومی، معادله ویل یک معادله موج نسبیتی برای توصیف ذرات بدون جرم با اسپین  $\frac{1}{2}$  است. این ذرات فرمیون‌های ویل نامیده می‌شوند و حامل بارند. برخلاف الکترون‌ها، فرمیون‌های ویل بدون جرم هستند و تحرک زیادی دارند. اسپین یک فرمیون ویل می‌تواند هم در راستای حرکت و هم در خلاف راستای حرکت آن باشد.

ویل در طول عمرش چنین ذره‌ای را مشاهده نکرد. بعدها فرمیون ویل برای توصیف نوترینو پیشنهاد شد که اکنون نوترینو به صورت ذره‌ای دارای جرم شناخته می‌شود. هیچ کاندیدی برای فرمیون ویل در آزمایش‌های انرژی بالا یافت نشد تا این که در سال ۲۰۱۵ تیمی بین المللی به رهبری دانشگاه پرینستون موفق شدند فرمیون ویل را مشاهده کنند. ذره بدون جرمی که ۸۵ سال پیش، از لحاظ نظری پیش بینی شده بود. بنابراین فرمیون ویل وارد قلمرو

<sup>1</sup>Hermann Weyl

<sup>2</sup>Parity

فیزیک ماده چگال<sup>۳</sup> شد. این ذره باعث افزایش سرعت و کارایی وسایل الکترونیک خواهد شد زیرا می‌تواند درون یک کریستال به هر دو صورت ماده و پادماده رفتار کند.

## ۲.۴ معادله ویل در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی در فضا زمان ریسمان کیهانی

معادله ویل در حضور یک میدان الکترومغناطیسی خارجی در فضا زمان خمیده به صورت زیر نوشته می‌شود [۵۶]

$$i \sigma^a e_a^\mu (\nabla_\mu + i e A_\mu) \psi = 0 \quad (1.4)$$

و مشتق هم‌وردا برابر است با :

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \quad (2.4)$$

متریک یک ریسمان کیهانی در مختصات استوانه‌ای توسط المان خطی زیر معرفی می‌شود

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (3.4)$$

که  $-\infty < (t, z) < \infty$  ،  $r \geq 0$  و  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  است. پارامتر  $\alpha = 1 - 4\tilde{m}/c^2$  زاویه کاستی است و در محدوده  $(0, 1]$  می‌باشد.  $\tilde{m}$  چگالی جرم خطی ریسمان کیهانی را نشان می‌دهد. مؤلفه‌های  $e_\mu^{(a)}$  تتراد نامیده می‌شوند و از شرط زیر تبعیت می‌کنند [۶۶، ۵۷].

$$g^{\mu\nu}(x) = e_{(a)}^\mu(x) e_{(b)}^\nu(x) \eta^{ab} \quad (4.4)$$

تانسور  $\eta^{ab} = \text{diag}(-+++)$  تانسور متریک فضا زمان مینکوفسکی است. تتراد و معکوسش به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\alpha r \sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \alpha r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_a^\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \phi}{\alpha r} & \frac{\cos \phi}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

با جایگذاری تتراد در معادله (۴.۴) داریم :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

اتصال اسپینی را نشان می‌دهد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega_{\mu}^a{}_b = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\bar{v}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\bar{v}} - \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{v}} \partial_{\mu} e_{\bar{c}}^{\bar{v}} \quad (7.4)$$

$\Gamma_{\sigma\mu}^{\bar{v}}$  نمادهای کریستوفل نوع دوم هستند و از فرم زیر به دست می‌آیند [۵۸]:

$$\Gamma_{ij}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu k} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] \quad (8.4)$$

مؤلفه‌های غیرصفر اتصال اسپینی برابر است با:

$$\omega_{\phi}^1{}_2 = -\omega_{\phi}^2{}_1 = 1 - \alpha \quad (9.4)$$

$\Gamma_{\mu}$  اتصال دهنده اسپینوری از فرم زیر به دست می‌آید

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{\lambda} \omega_{\mu}^a{}_b [\sigma^a, \sigma^b] \quad (10.4)$$

و مؤلفه غیرصفر آن برابر است با:

$$\Gamma_{\phi} = -i \frac{(1 - \alpha)}{2} \sigma^z \quad (11.4)$$

$\sigma^a$  ماتریس‌های پائولی هستند. میدان مغناطیسی و پتانسیل برداری را در مختصات دکارتی به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\vec{B} = B_0 \hat{k}, \quad A_x = -\frac{y B_0}{2}, \quad A_y = \frac{x B_0}{2}, \quad A_z = 0 \quad (12.4)$$

$A_{\mu}$  پتانسیل چاربردار الکترومغناطیسی در مختصات استوانه‌ای است و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$A_{\mu} = (0, 0, A_{\phi}, 0) \quad A_{\phi} = \frac{r B_0}{2} \quad (13.4)$$

بنابراین معادله ویل فرم زیر را می‌گیرد.

$$(14.4)$$

$$i \sigma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \sigma^1 \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{i \sin \phi}{\alpha r} \frac{\omega_{\phi}^1{}_2}{2} \sigma^3 - \frac{i \sin \phi}{\alpha r} e A_{\phi} \right) \psi$$

$$+ i \sigma^2 \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i \cos \phi}{\alpha r} \frac{\omega_{\phi}^1{}_2}{2} \sigma^3 + \frac{i \cos \phi}{\alpha r} e A_{\phi} \right) \psi + i \sigma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

برای حل معادله (۱۴.۴) فرم زیر را برای تابع موج در نظر می‌گیریم:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} = e^{-iEt + im\phi + ikz} \begin{pmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \end{pmatrix} \quad (15.4)$$

با جایگذاری معادله (۱۵.۴) در معادله (۱۴.۴) ، دو معادله دیفرانسیل جفت شده زیر به دست می آیند :

$$E\varphi_1 + i e^{-i\phi} \partial_r \varphi_2 + \frac{im e^{-i\phi}}{\alpha r} \varphi_2 - \frac{i e^{-i\phi}}{2r} \varphi_2 + \frac{i e^{-i\phi}}{2\alpha r} \varphi_2 + \frac{e \sin \phi B_0}{2\alpha} \varphi_2 + \frac{ie \cos \phi B_0}{2\alpha} \varphi_2 - k\varphi_1 = 0 \quad (16.4)$$

$$E\varphi_2 + i e^{i\phi} \partial_r \varphi_1 - \frac{im e^{i\phi}}{\alpha r} \varphi_1 - \frac{i e^{i\phi}}{2r} \varphi_1 + \frac{i e^{i\phi}}{2\alpha r} \varphi_1 + \frac{e \sin \phi B_0}{2\alpha} \varphi_1 - \frac{ie \cos \phi B_0}{2\alpha} \varphi_1 + k\varphi_2 = 0 \quad (17.4)$$

می توانیم این معادلات را بر حسب  $\varphi_1(r)$  به صورت زیر بنویسیم

$$\varphi_1''(r) + \left(\frac{a}{r}\right) \varphi_1'(r) + \left(\frac{1 - 4m^2 - 4\alpha + 4\alpha m + 2\alpha^2}{4\alpha^2 r^2} - \frac{meB_0}{\alpha^2 r} + \frac{-e^2 B_0^2 - 4k^2 \alpha^2 + 4E^2 \alpha^2}{4\alpha^2}\right) \varphi_1(r) = 0 \quad (18.4)$$

که  $a = \frac{1-\alpha}{\alpha}$  می باشد. با استفاده از تغییر متغیر

$$\varphi_1(r) = r^{\frac{1-a}{2}} u(r) \quad (19.4)$$

معادله (۱۸.۴) به صورت زیر درمی آید :

$$u''(r) + \left(\frac{1}{r}\right) u'(r) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{(-a^2 + 2a + 2)\alpha^2 + 1 - 4m^2 - 4\alpha + 4\alpha m}{4\alpha^2} + \left(\frac{-meB_0}{\alpha^2}\right) r + \left(\frac{-e^2 B_0^2 - 4k^2 \alpha^2 + 4\alpha^2 E^2}{4\alpha^2}\right) r^2 \right] u(r) = 0 \quad (20.4)$$

برای حل معادله بالا ، از روش  $NU$  استفاده می کنیم [۱۸ ، ۱۹] و جواب معادله (۲۰.۴) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{du(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} (-\xi_1 r^2 + \xi_2 r - \xi_3) u(r) = 0, \quad (21.4)$$

که پارامترهای  $\xi_1$  ،  $\xi_2$  و  $\xi_3$  به صورت زیر می باشند.

$$\xi_1 = \frac{e^2 B_0^2 + 4k^2 \alpha^2 - 4\alpha^2 E^2}{4\alpha^2}, \quad (22.4)$$

$$\xi_2 = \frac{-meB_0}{\alpha^2}, \quad (23.4)$$

$$\xi_3 = \frac{(a^2 - 2a - 2)\alpha^2 - 1 + 4m^2 + 4\alpha - 4\alpha m}{4\alpha^2}, \quad (24.4)$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = \alpha_9 = \xi_1$$

$$\alpha_7 = -\xi_2, \quad \alpha_8 = \xi_3, \quad \alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\xi_3} \quad (25.4)$$

$$\alpha_{11} = 2\sqrt{\xi_1}, \quad \alpha_{12} = \sqrt{\xi_3}, \quad \alpha_{13} = -\sqrt{\xi_1}$$

معادله ویژه مقداری انرژی برابر است با :

$$\frac{\alpha (2n+1) \sqrt{e^2 B_0^2 - 4\alpha^2 E^2 + 4\alpha^2 Ek + 4Ek - 4k^2 + 2meB_0}}{2\alpha^2} +$$

$$\frac{\sqrt{((a^2 - 2 - 2a)\alpha^2 - 1 + 4m^2 + 4\alpha - 4\alpha m) (e^2 B_0^2 - 4\alpha^2 E^2 + 4\alpha^2 Ek + 4Ek - 4k^2)}}{2\alpha^2} = 0$$

تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید :

$$u(r) = r\sqrt{\xi_3} e^{-\sqrt{\xi_1}r} L_n^{2\sqrt{\xi_3}}(2\sqrt{\xi_1}r) \quad (27.4)$$

بنابراین با استفاده از  $\varphi_1(r) = r^{\frac{1-a}{2}} u(r)$  داریم :

$$\varphi_1(r) = r^{\left(\frac{1-a+2\sqrt{\xi_3}}{2}\right)} e^{-\sqrt{\xi_1}r} L_n^{2\sqrt{\xi_3}}(2\sqrt{\xi_1}r) \quad (28.4)$$

$$\varphi_2(r) = \left( \frac{i e^{i\phi} \partial_r - \frac{im e^{i\phi}}{ar} - \frac{i e^{i\phi}}{2r} + \frac{i e^{i\phi}}{2ar} + \frac{e \sin \phi B_0}{2\alpha} - \frac{ie \cos \phi B_0}{2\alpha}}{-E - k} \right)$$

$$\left( r^{\left(\frac{1-a+2\sqrt{\xi_3}}{2}\right)} e^{-\sqrt{\xi_1}r} L_n^{2\sqrt{\xi_3}}(2\sqrt{\xi_1}r) \right) \quad (29.4)$$

که تابع موج برحسب چند جمله‌ایهای لاگر  $L_n^4$  به دست می‌آید. تبهگنی طیف فضایی مینکوفسکی در گذار از فضای مینکوفسکی به فضای ریمان کیهانی شکسته می‌شود. در اینجا ذرات با اسپین نیم صحیح را در حضور میدان‌های گرانشی ریمان کیهانی در نظر گرفتیم و جواب معادله ویل را در فضای خمیده در مختصات استوانه‌ای به دست آوردیم. بعد از تعیین مؤلفه‌های مشتق هم‌وردا و با استفاده از یک فرم حدسی برای تابع موج، یک معادله دیفرانسیل صریح برحسب یک مؤلفه از تابع موج یافت شد. همچنین معادله انرژی و تابع موج را با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر به دست آوردیم.

### ۳.۴ فرمیون‌های ویل در فضا زمان‌های گودل گونه

در این بخش معادله دیراک در فرم ویل روی یک فضای خمیده معرفی می‌شود. به دنبال تئوری اسپینورها در فضا زمان خمیده، باید مشتق جزئی  $\partial_\mu$  به مشتق هم‌وردا  $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu(x)$  تعمیم

<sup>4</sup>Laguerre polynomials



یابد. به گونه‌ای که می‌توان معادلات را برای میدان بدون جرم با اسپین  $\frac{1}{2}$  به روش زیر نوشت [۵۶]

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi &= 0 \\ (1 + \gamma^5)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (30.4)$$

که  $\gamma^\mu = \gamma^a e_a^\mu(x)$  ماتریس‌های گاما در نمایش ویل هستند و  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  می‌باشد. فرمیون‌ها را در یک فضا زمان گودل گونه در نظر می‌گیریم. متریک این فضا زمان خمیده توسط معادله زیر

$$ds^2 = - \left( dt + \frac{H(r)}{D(r)} d\phi \right)^2 + \frac{1}{D^2(r)} \left( dr^2 + J^2(r) d\phi^2 \right) + dz^2 \quad (31.4)$$

به دست می‌آید. اگر بخواهیم دینامیک نسبیتی فرمیون‌ها را در فضا زمان گودل گونه بررسی کنیم، باید اسپینورها را در یک فضا زمان خمیده معرفی کنیم. برای این هدف، اسپینورها را با یک پایه  $\hat{\theta}^a = e_a^\mu(x) dx^\mu$  تعریف خواهیم کرد که مؤلفه‌های تتراد  $e_a^\mu(x)$  باید از رابطه  $g_{\mu\nu} = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab}$  تبعیت کنند. تانسور  $\eta_{ab} = \text{diag}(-+++)$  تانسور مینکوفسکی است. می‌توانیم تتراد معکوس را از رابطه  $dx^\mu = e_a^\mu(x) \hat{\theta}^a$  تعریف کنیم، به گونه‌ای که روابط  $e_\mu^a(x) e_b^\mu(x) = \delta_b^a$  و  $e_\mu^a(x) e_a^v = \delta_\mu^v$  برقرار باشند. بنابراین برای متریک

$$ds^2 = - \left( dt + \frac{H(r)}{D(r)} d\phi \right)^2 + \frac{1}{D^2(r)} \left( dr^2 + J^2(r) d\phi^2 \right) + dz^2 \quad (32.4)$$

تتراد و معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{H(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_a^\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{H(r)}{J(r)}r & 0 \\ 0 & D(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(r)}{J(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33.4)$$

$\omega_{\mu b}^a(x)$  اتصال اسپینوری است.

$$\omega_{\mu b}^a = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{\nu}}^a e_b^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma\mu}^{\bar{\nu}} - \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{\nu}}^a \partial_\mu e_b^{\bar{\nu}} \quad (34.4)$$

بنابراین، مؤلفه‌های غیرصفر اتصال‌های اسپینوری عبارتند از:

$$\begin{aligned} \omega_{\phi 1}^0(x) &= -\omega_{\phi 0}^1(x) = \frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{H}{D} \right) \\ \omega_{r 2}^0(x) &= -\omega_{r 0}^2(x) = -\frac{D}{rJ} \frac{d}{dr} \left( \frac{H}{D} \right) \\ \omega_{t 2}^1(x) &= -\omega_{t 1}^2(x) = -\frac{D^2}{rJ} \frac{d}{dr} \left( \frac{H}{D} \right) \\ \omega_{\phi 2}^1(x) &= -\omega_{\phi 1}^2(x) = - \left[ \frac{DH}{rJ} \frac{d}{dr} \left( \frac{H}{D} \right) + D \frac{d}{dr} \left( \frac{J}{D} \right) \right] \end{aligned} \quad (35.4)$$

اتصال دهنده اسپینی نیز به صورت زیر خواهد بود

$$\Gamma_{\mu}(x) = \frac{1}{\lambda} \omega_{\mu ab}(x) [\sigma^a, \sigma^b] \quad (36.4)$$

که  $\sigma^a$  ماتریس‌های پائولی هستند و  $\omega_{\mu ab}(x)$  توسط معادلات بالا به دست می‌آیند. بنابراین مشتق هم‌وردا برابر است با :

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{1}{\lambda} \omega_{\mu ab}(x) [\sigma^a, \sigma^b] \quad (37.4)$$

در نتیجه معادله ویل فرم زیر را می‌گیرد.

$$i\sigma^a e_a^{\mu} (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}) \psi = 0 \quad (38.4)$$

سپس معادله ویل را در فضا زمان گودل گونه به فرم زیر به دست می‌آوریم:

$$i\sigma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\sigma^1 \left( D(r) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{D(r)}{J(r)} \omega_{\phi r}^1 + \frac{H(r)}{J(r)} \omega_{t r}^1 \right) \psi + i\sigma^2 \left( \frac{D(r)}{J(r)} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{H(r)}{J(r)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi + i\sigma^3 \left( \frac{\partial}{\partial z} - i\nu A_z \right) \psi = 0 \quad (39.4)$$

این معادله را می‌توان برای هر سه حالت ممکن توابع  $H(r)$ ،  $J(r)$  و  $D(r)$  برای فضا زمان‌های گودل گونه محاسبه کرد.

## ۴.۴ معادله ویل در فضا زمان سام ریچادری در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی

در این بخش جواب معادله ویل را در فضا زمان سام ریچادری با در نظر گرفتن یک میدان الکترومغناطیسی خارجی بررسی می‌کنیم. سپس ویژه مقادیر انرژی و تابع موج را با استفاده از روش حدسی به دست می‌آوریم. همچنین نشان می‌دهیم که حضور نقص توپولوژیکی تبهگنی ترازهای انرژی را از بین می‌برد.

معادله ویل را در فضا زمان ریسمان کیهانی معرفی می‌کنیم و فرمیون‌ها را در یک فضا زمان گودل گونه در نظر می‌گیریم. متریک این فضا زمان خمیده از رابطه زیر به دست می‌آید : [۵۶، ۵۹]

$$ds^2 = - \left( dt + \frac{H(r)}{D(r)} d\phi \right)^2 + \frac{1}{D^2(r)} \left( dr^2 + J^2(r) d\phi^2 \right) + dz^2 \quad (40.4)$$

که برای  $H(r)$ ،  $J(r)$ ،  $D(r)$  توابع مختلفی داریم. تتراد و معکوسش به صورت زیر تعریف

می شوند :

$$e_{\mu}^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{H(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J(r)}{D(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_a^{\mu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{H(r)}{J(r)}r & 0 \\ 0 & D(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(r)}{J(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41.4)$$

معادله ویل را در فضا زمان سام ریچادری بررسی می کنیم. برای فضا زمان سام ریچادری توابع را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$D(r) = 1, \quad H(r) = \alpha\Omega r^2, \quad J(r) = \alpha r. \quad (42.4)$$

متریک این فضا زمان از رابطه زیر

$$ds^2 = -(dt + \alpha\Omega r^2 d\phi)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (43.4)$$

با در نظر گرفتن  $-\infty < (t, z) < \infty$  ،  $r \geq 0$  ،  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  به دست می آید. پارامتر  $\Omega$  پیش از این فضا زمان را تعیین می کند و  $\alpha = 1 - 4\tilde{m}/c^2$  زاویه کاستی است و در بازه  $(0, 1]$  تغییر می کند. پارامتر  $\tilde{m}$  بیانگر چگالی جرم خطی ریسمان کیهانی است. مؤلفه های  $e_{\mu}^a(x)$  تتراد نامیده می شوند که از رابطه زیر تبعیت می کنند

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a(x)e_{\nu}^b(x)\eta_{ab} \quad (44.4)$$

به گونه ای که داریم:

$$e_{\mu}^a(x)e_b^{\mu}(x) = \delta_b^a$$

$$e_{\mu}^a(x)e_a^{\nu}(x) = \delta_{\mu}^{\nu}$$

تانسور  $\eta_{ab} = diag(-+++)$  ، تانسور متریک فضا زمان مینکوفسکی است. تتراد و معکوس آن به صورت زیر به دست می آیند.

$$e_{\mu}^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_a^{\mu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (45.4)$$

با قرار دادن تتراد در معادله (44.4) داریم :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha\Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha\Omega r^2 & 0 & \alpha^2 r^2 - (\alpha\Omega r^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + r^2\Omega^2 & 0 & -\frac{\Omega}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega}{\alpha} & 0 & \frac{1}{r^2\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (46.4)$$

$\omega_{\mu b}^a$  اتصال اسپینی را نشان می‌دهد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega_{\mu b}^a = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\sigma} e_b^{\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} - \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_b^{\nu} \partial_{\mu} e_{\bar{c}}^{\nu}. \quad (47.4)$$

$\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu}$  نمادهای کریستوفل نوع دوم هستند و می‌توانند از رابطه زیر به دست بیایند:

$$\Gamma_{ij}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu k} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right]. \quad (48.4)$$

که مؤلفه‌های غیرصفر نمادهای کریستوفل عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = r\Omega^2 \\ \Gamma_{r\phi}^t &= \Gamma_{\phi r}^t = r^3 \alpha \Omega^3 \\ \Gamma_{t\phi}^r &= \Gamma_{\phi t}^r = r\alpha\Omega \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= r\alpha^2 (-1 + 2r^2 \Omega^2) \\ \Gamma_{tr}^{\phi} &= \Gamma_{rt}^{\phi} = -\frac{\Omega}{r\alpha} \\ \Gamma_{r\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r} - r\Omega^2 \end{aligned} \quad (49.4)$$

بنابراین مؤلفه‌های غیرصفر اتصال اسپینی به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \omega_{\phi 1}^{\circ}(x) &= -\omega_{\phi^{\circ}}^1(x) = \alpha\Omega r \\ \omega_{r 2}^{\circ}(x) &= -\omega_{r^{\circ}}^2(x) = \Omega \\ \omega_{t 2}^1(x) &= -\omega_{t^1}^2(x) = -\Omega \\ \omega_{\phi 2}^1(x) &= -\omega_{\phi^1}^2(x) = -(\alpha\Omega^2 r^2 + \alpha) \end{aligned} \quad (50.4)$$

$\Gamma_{\mu}$  اتصال دهنده‌های اسپینی از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{\Lambda} \omega_{\mu b}^a(x) [\sigma^a, \sigma^b] \quad (51.4)$$

و  $\sigma^a$  ماتریس‌های پائولی هستند. مؤلفه‌های غیرصفر اتصال دهنده‌های اسپینی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= \frac{i\Omega}{2} \sigma^z, \\ \Gamma_r &= -\frac{\Omega}{2} \sigma^{\phi}, \\ \Gamma_{\phi} &= -\frac{\alpha\Omega r}{2} \sigma^r + \left( \frac{i\alpha\Omega^2 r^2}{2} + \frac{i\alpha}{2} \right) \sigma^z \end{aligned} \quad (52.4)$$

معادله ویل به صورت زیر است:

$$i\sigma^a e_a^{\mu} \nabla_{\mu} \psi = 0 \quad (53.4)$$

در فضا زمان خمیده، مشتق پاره‌ای  $\partial_{\mu}$  باید توسط مشتق هموردای یک اسپینور که از رابطه  $\partial_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}(x)$  به دست می‌آید، تغییر کند که  $\Gamma_{\mu}$  اتصال دهنده اسپینی است.

با تبدیل کانونیک تکانه ،  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$  ، معادله ویل به صورت زیر در می‌آید:

$$i\sigma^\alpha e_a^\mu (\nabla_\mu + ieA_\mu)\psi = 0 \quad (54.4)$$

میدان مغناطیسی و پتانسیل برداری در سیستم مختصات دکارتی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\vec{B} = B_0 \hat{k}, \quad A_x = -\frac{yB_0}{r}, \quad A_y = \frac{xB_0}{r}, \quad A_z = 0. \quad (55.4)$$

$A_\mu$  پتانسیل چاربردار الکترومغناطیسی در مختصات استوانه‌ای است و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi, 0), \quad A_\phi = \frac{rB_0}{r}. \quad (56.4)$$

معادله ویل در فضا زمان سام ریچداری فرم زیر را به خود می‌گیرد.

$$i\sigma^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\Omega}{r} \sigma^z \right) \psi + i\sigma^1 \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\Omega}{r} \sigma^\phi \right) \psi + i\sigma^2 \left( -\Omega r^2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\Omega^2 r^2}{r} \sigma^z + \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\Omega}{r} \sigma^r + \frac{i\Omega^2 r}{r} \sigma^z + \frac{i}{r} \sigma^z + \frac{ieB_0}{\alpha} \right) \psi + i\sigma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (57.4)$$

از آنجایی که برهمکنش مستقل از زمان است ، می‌توانیم اسپینور را به صورت  $\psi(r) = e^{-iEt+im\phi+ikz} \varphi(r)$  بنویسیم که  $E$  انرژی سیستم ،  $m$  عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای و  $k$  عدد موج است. اسپینور دو مؤلفه‌ای  $\varphi(r)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi(r) = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \end{pmatrix} \quad (58.4)$$

دو معادله دیفرانسیل جفت شده زیر استخراج می‌شود.

$$E\varphi_1 - \frac{\Omega}{r} \varphi_1 + i\partial_r \varphi_2 + i\Omega r^2 E\varphi_2 + \frac{i\Omega^2 r^2}{r} \varphi_2 + \frac{im}{\alpha r} \varphi_2 - \frac{i\Omega^2 r}{r} \varphi_2 - \frac{i}{r} \varphi_2 + \frac{ieB_0}{\alpha} \varphi_2 - k\varphi_1 = 0, \quad (59.4)$$

$$E\varphi_2 + \frac{\Omega}{r} \varphi_2 + i\partial_r \varphi_1 - i\Omega r^2 E\varphi_1 + \frac{i\Omega^2 r^2}{r} \varphi_1 - \frac{im}{\alpha r} \varphi_1 - \frac{i\Omega^2 r}{r} \varphi_1 - \frac{i}{r} \varphi_1 - \frac{ieB_0}{\alpha} \varphi_1 + k\varphi_2 = 0. \quad (60.4)$$

معادله زیر را برای مؤلفه اول اسپینور دیراک ،  $\varphi_1$  ، به دست می‌آوریم.

$$\varphi_1''(r) + \left( -\frac{1}{r} - r\Omega^2 + r^2\Omega^2 \right) \varphi_1'(r) + \frac{(-4e^2 B_0^2 - \lambda \alpha e r^2 B_0 \Omega E + r^2 \Omega^4 \alpha^2 + 2r\Omega^2 \alpha^2 + r^4 \Omega^4 \alpha^2 - 2r^3 \Omega^4 \alpha^2 - \Omega^2 \alpha^2 - \lambda \alpha m r \Omega E)}{4\alpha^2} + \frac{-4m^2 + 4\alpha m + 3\alpha^2}{4\alpha^2 r^2} - \frac{2meB_0}{\alpha^2 r} - 2r\Omega E - r^4 \Omega^2 E^2 + E^2 - k^2 - k\Omega \varphi_1(r) = 0 \quad (61.4)$$

تغییر متغیر  $\varphi_1(r) = re^{\left(\frac{3\Omega^2 r^2 - 2\Omega^2 r^3}{12}\right)} u(r)$  را در نظر می‌گیریم. سپس معادله (۶۱.۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$u''(r) + \left(\frac{1}{r}\right) u'(r) + \left[-\frac{\Omega^2}{4} - \frac{1}{4r^2} - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} - \frac{e^2 B_0^2}{\alpha^2} + \frac{-2eB_0 \Omega E r^2 - 2m \Omega E r}{\alpha} - \frac{2meB_0}{\alpha^2 r} + \frac{m}{\alpha r^2} - 2\Omega E r - r^4 \Omega^2 E^2 + E^2 - k^2 - k\Omega\right] u(r) = 0 \quad (62.4)$$

برای حل معادله بالا، از تغییر متغیر  $u(r) = r^{-\frac{1}{2}} f(r)$  استفاده می‌کنیم و معادله (۶۲.۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f''(r) - \left[\frac{\Omega^2}{4} + \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{e^2 B_0^2}{\alpha^2} + \frac{2eB_0 \Omega E r^2 + 2m \Omega E r}{\alpha} + \frac{2meB_0}{\alpha^2 r} - \frac{m}{\alpha r^2} + 2\Omega E r + r^4 \Omega^2 E^2 - E^2 + k^2 + k\Omega\right] f(r) = 0. \quad (63.4)$$

به منظور حل معادله (۶۳.۴)، فرض می‌کنیم  $f(r) = e^{g(r)}$  باشد که

$$f''(r) - [g'' + g'^2] f(r) = 0 \quad (64.4)$$

و  $g(r)$  از رابطه  $g(r) = \lambda r^3 + \beta r + \gamma \ln r$  به دست می‌آید.

$$g' = 3\lambda r^2 + \beta + \frac{\gamma}{r}$$

$$g'^2 = 9\lambda^2 r^4 + \beta^2 + 6\lambda\beta r^2 + 6\lambda\gamma r + \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\beta\gamma}{r} \quad (65.4)$$

$$g'' = 6\lambda r - \frac{\gamma}{r^2}$$

معادله (۶۴.۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$f''(r) - \left[6\lambda r - \frac{\gamma}{r^2} + 9\lambda^2 r^4 + \beta^2 + 6\lambda\beta r^2 + 6\lambda\gamma r + \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\beta\gamma}{r}\right] f(r) = 0 \quad (66.4)$$

از مقایسه معادلات (۶۳.۴) و (۶۶.۴) به معادلات زیر می‌رسیم.

$$\frac{2eB_0 \Omega E}{\alpha} = 6\lambda\beta \quad (67.4 \text{ آ})$$

$$\Omega^2 E^2 = 9\lambda^2 \quad (67.4 \text{ ب})$$

$$2\Omega E + \frac{2m \Omega E}{\alpha} = 6\lambda + 6\lambda\gamma \quad (67.4 \text{ ج})$$

$$\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{m}{\alpha} = -\gamma + \gamma^2 \quad (67.4 \text{ د})$$

$$\frac{2meB_0}{\alpha^2} = 2\beta\gamma \quad (67.4 \text{ ه})$$

$$\frac{\Omega^2}{4} + \frac{e^2 B_0^2}{\alpha^2} - E^2 + k^2 + k\Omega = \beta^2 \quad (67.4 \text{ و})$$

سپس ضرایب ثابت  $\lambda$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  را به ترتیب از معادلات (۶۷.۴) ب، (۶۷.۴) و (۶۷.۴) به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \frac{\Omega E}{\sqrt{3}} \\ \beta &= \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} + \frac{e^2 B_0^2}{\alpha^2} - E^2 + k^2 + k\Omega} \\ \gamma &= \left| \frac{m}{\alpha} \right| \end{aligned} \quad (68.4)$$

همانطور که در معادله (۴۰.۴) گفته شد، پارامتر  $\alpha$  در بازه  $[0, 1)$  تغییر می‌کند که یک انحنای مثبت و یک زاویه کاستی تخت مربوط به فضا زمان مخروطی را نشان می‌دهد. از سوی دیگر،  $\alpha > 1$  یک انحنای منفی و یک زاویه تخت اضافی مربوط به فضا زمان پادمخروطی را نشان می‌دهد. سرانجام  $\alpha = 1$  مربوط به فضای تخت است. در اینجا ما روی فضا زمان مخروطی متمرکز می‌شویم.

ترازهای انرژی نسبی می‌توانند از رابطه زیر به دست بیایند.

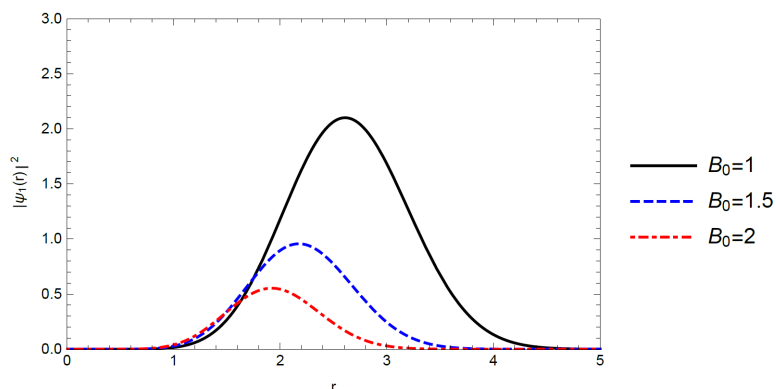
$$E = \pm \frac{\sqrt{-4eB_0\Omega^2 + 4e^2B_0^2\Omega^2 + 4k^2\alpha^2\Omega^2 + 4k\alpha^2\Omega^3 + \alpha^2\Omega^4}}{2\alpha\Omega} \quad (69.4)$$

مؤلفه‌های اول و دوم اسپینور می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

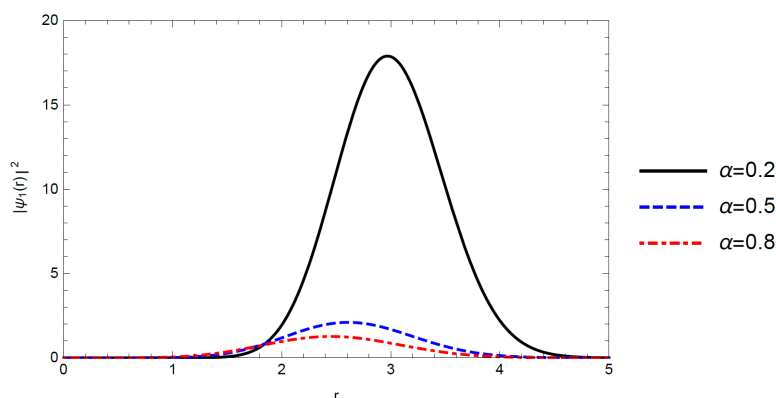
$$\varphi_1(r) = r^{(\gamma + \frac{1}{\sqrt{3}})} e^{\left(\frac{2\Omega^2 r^2 - 2\Omega^2 r^3}{12} + \lambda r^3 + \beta r\right)} \quad (70.4)$$

$$\varphi_2(r) = \left( \frac{i\partial_r - i\Omega r^2 E + \frac{i\Omega^2 r^2}{\sqrt{3}} - \frac{im}{ar} - \frac{i\Omega^2 r}{\sqrt{3}} - \frac{i}{r} - \frac{ieB_0}{\alpha}}{-E - k - \frac{\Omega}{\sqrt{3}}} \right) r^{(\gamma + \frac{1}{\sqrt{3}})} e^{\left(\frac{2\Omega^2 r^2 - 2\Omega^2 r^3}{12} + \lambda r^3 + \beta r\right)} \quad (71.4)$$

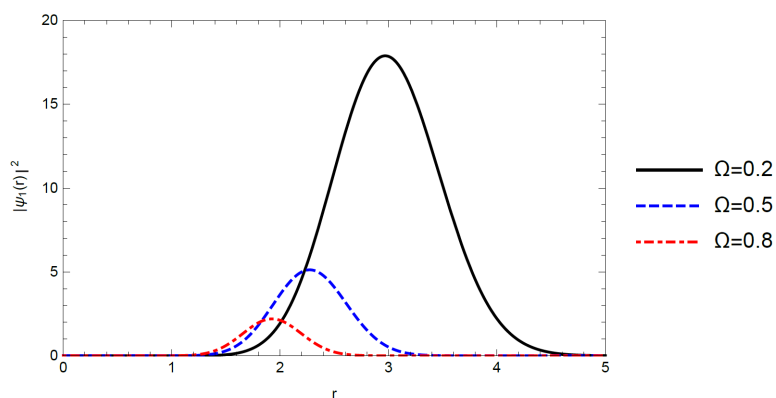
در شکل ۱.۴ چگالی احتمال به صورت تابعی از  $r$  برای  $m = e = k = 1$  و  $\alpha = 0.5$  به ازای مقادیر مختلف  $B_0$  رسم می‌شود. مشاهده می‌کنیم که با افزایش  $B_0$  قله به سمت مقادیر کمتر  $r$  جابه‌جا می‌شود و مقدار بیشینه  $|\Psi_1(r)|^2$  کاهش می‌یابد. در شکل ۲.۴ چگالی احتمال به صورت تابعی از  $r$  برای  $m = e = k = 1$  و  $\Omega = 0.2$  برای مقادیر مختلف  $\alpha$  رسم می‌شود. همچنین می‌توانیم مشاهده کنیم که با افزایش  $\alpha$  قله به سمت مقادیر کمتر  $r$  جابه‌جا می‌شود و مقدار بیشینه  $|\Psi_1(r)|^2$  کاهش می‌یابد. در شکل ۳.۴ چگالی احتمال به صورت تابعی از  $r$  برای  $m = e = k = B_0 = 1$  و  $\alpha = 0.2$  برای مقادیر مختلف  $\Omega$  رسم می‌شود. در این مورد همانطور که  $\alpha$  افزایش می‌یابد، قله به سمت مقادیر کمتر  $r$  جابه‌جا می‌شود و مقدار بیشینه  $|\Psi_1(r)|^2$  کاهش می‌یابد.



شکل ۱.۴: ویژه توابع  $|\Psi_1(r)|^2$  برای  $\alpha = 0.5$  و  $\Omega = 0.2$  برای مقادیر مختلف  $B_0$ .



شکل ۲.۴: ویژه توابع  $|\Psi_1(r)|^2$  برای  $B_0 = 1$  و  $\Omega = 0.2$  برای مقادیر مختلف  $\alpha$ .



شکل ۳.۴: ویژه توابع  $|\Psi_1(r)|^2$  برای  $B_0 = 1$  و  $\alpha = 0.2$  برای مقادیر مختلف  $\Omega$ .



## ۵.۴ معادله دیراک-ویل در گرافن در حضور میدان‌های مغناطیسی

گرافن<sup>۶</sup> اولین بار توسط آندره جیم<sup>۷</sup> و کنستانتین نووسلو<sup>۸</sup> در سال ۲۰۰۴ کشف شد [۶۰]. گرافن دارای ساختار لانه زنبوری شش گوشه با لایه‌ای از اتم‌های کربن است که به دلیل ساختار دوبعدی و الکترون‌های بدون جرمش در فیزیک ماده چگال بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۶۱].

هامیلتونی<sup>۹</sup> دیراک - ویل در مختصات دکارتی<sup>۱۰</sup> به صورت زیر می‌باشد [۶۲]

$$H_D = v_F (\sigma \cdot p) \quad (72.4)$$

که پارامترهای  $v_F = c/300$ ،  $c$ ،  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$  و  $p = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$  به ترتیب سرعت فرمی مؤثر، سرعت نور، ماتریس‌های پائولی و عملگر تکانه هستند. معادله دیراک - ویل مستقل از زمان زیر

$$v_F (\sigma \cdot p) \Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (73.4)$$

برهمکنش الکترون دیراک با میدان مغناطیسی را توصیف می‌کند. در اینجا عملگر تکانه  $p$  را به صورت  $p + eA/c$  در نظر می‌گیریم. اگر پتانسیل برداری در مختصات دکارتی به صورت زیر باشد

$$\vec{A} = (0, A_y(x), 0) \quad (74.4)$$

معادله (۷۳.۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$v_F \left[ \sigma \cdot \left( p + \frac{e}{c} A \right) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (75.4)$$

بنابراین به معادله زیر می‌رسیم

$$-i \left[ \sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y + \frac{ie}{c\hbar} \sigma_y A_y \right] \Psi(x, y) = \varepsilon \Psi(x, y) \quad (76.4)$$

که  $\varepsilon = E/\hbar v_F$  می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع موج به صورت

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (77.4)$$

<sup>6</sup>Graphene

<sup>7</sup>Andre Geim

<sup>8</sup>Konstantin Novoselov

<sup>9</sup>Hamiltonian

<sup>10</sup>Cartesian coordinate

دو معادله دیفرانسیل جفت شده زیر را به دست می‌آوریم.

$$-i \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eA_y}{\hbar c} \right) \phi_2(x, y) = \varepsilon \phi_1(x, y) \quad (78.4)$$

$$-i \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eA_y}{\hbar c} \right) \phi_1(x, y) = \varepsilon \phi_2(x, y) \quad (79.4)$$

با قرار دادن ویژه اسپینورهای زیر

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \end{pmatrix} = e^{iky} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ i\phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (80.4)$$

در معادلات (78.4) و (79.4)، به معادلات زیر می‌رسیم.

$$\left( \frac{d}{dx} + k + \frac{eA_y}{\hbar c} \right) \phi_2(x) = \varepsilon \phi_1(x) \quad (81.4)$$

$$\left( -\frac{d}{dx} + k + \frac{eA_y}{\hbar c} \right) \phi_1(x) = \varepsilon \phi_2(x) \quad (82.4)$$

با استفاده از معادلات (81.4) و (82.4) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2 \phi_2(x)}{dx^2} + \left[ \frac{e}{\hbar c} \left( \frac{dA_y}{dx} \right) - k^2 - \frac{2ekA_y}{\hbar c} - \frac{e^2 A_y^2}{c^2 \hbar^2} + \varepsilon^2 \right] \phi_2(x) = 0 \quad (83.4)$$

این معادله را برای سه پتانسیل برداری متفاوت محاسبه می‌کنیم. بسته به نوع انتخاب پتانسیل برداری، ویژه توابع برحسب توابع فوق هندسی یا توابع هیون به دست می‌آیند.

## ۱.۵.۴ حالت اول برای پتانسیل برداری

پتانسیل برداری را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$A_y(x) = \frac{B_0}{\alpha} - \frac{B_0}{\alpha} e^{-\alpha x} \quad (84.4)$$

میدان مغناطیسی به صورت  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\vec{B} = B_0 e^{-\alpha y} \hat{k} \quad (85.4)$$

معادله (83.4) به فرم زیر در می‌آید.

$$\frac{d^2 \phi_2(x)}{dx^2} + \left[ \frac{eB_0 e^{-\alpha x}}{\hbar c} - k^2 - \frac{2ekB_0}{\hbar c \alpha} + \frac{2ekB_0 e^{-\alpha x}}{\hbar c \alpha} - \frac{e^2}{c^2 \hbar^2} \left( \frac{B_0}{\alpha} - \frac{B_0 e^{-\alpha x}}{\alpha} \right)^2 + \varepsilon^2 \right] \phi_2(x) = 0 \quad (86.4)$$

برای حل معادله بالا از تغییر متغیر  $s = e^{-\alpha x}$  و روش  $NU$  استفاده می‌کنیم و به معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2 \phi_2(s)}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\phi_2(s)}{ds} + \frac{1}{s^2} \left( -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \right) \phi_2(s) = 0 \quad (87.4)$$

که پارامترهای  $\xi_1$ ،  $\xi_2$  و  $\xi_3$  به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} \\ \xi_2 &= \frac{eB_0}{c\hbar\alpha^2} + \frac{2ekB_0}{c\hbar\alpha^3} + \frac{2e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} \\ \xi_3 &= \frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{2ekB_0}{c\hbar\alpha^3} - \frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (88.4)$$

با استفاده از معادله ویژه مقادیر انرژی زیر

$$(2n+1) \sqrt{\xi_1} - \xi_2 + 2\sqrt{\xi_3 \xi_1} = 0 \quad (89.4)$$

$$(2n+1) \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} - \frac{eB_0}{c\hbar\alpha^2} - \frac{2ekB_0}{c\hbar\alpha^3} - \frac{2e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} + 2\sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} \left( \frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{2ekB_0}{c\hbar\alpha^3} - \frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^4} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \right)}} = 0 \quad (90.4)$$

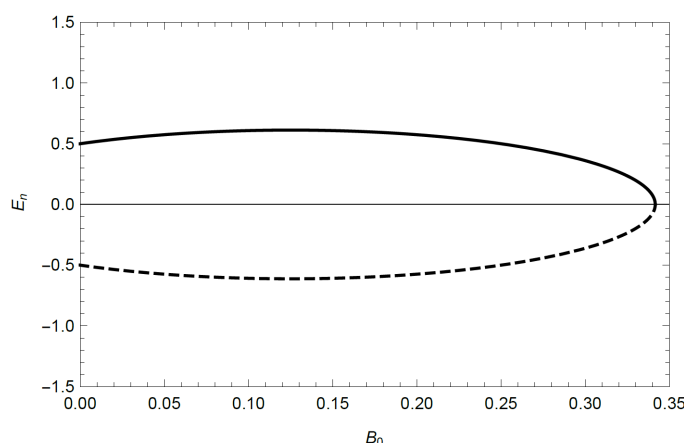
ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم.

$$E_{\pm, n} = \pm \hbar v_F \sqrt{-n^2 \alpha^2 + 2nk\alpha - \frac{2e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 \alpha^2} + \frac{2neB_0}{c\hbar}} \quad (91.4)$$

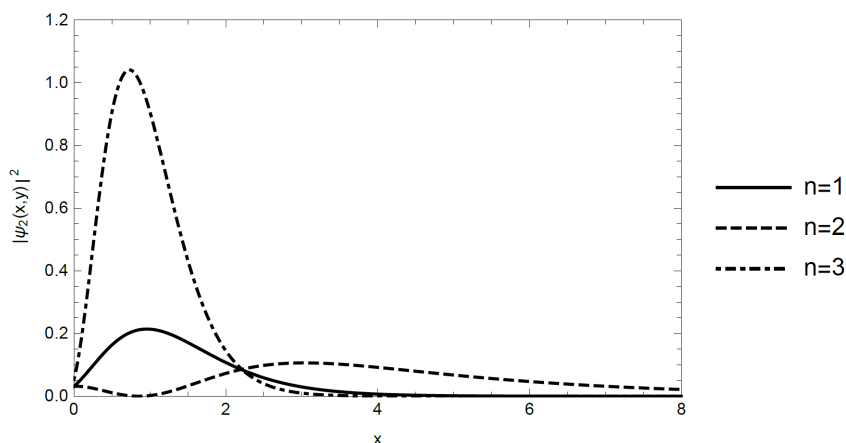
تابع موج نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$\phi_{\pm}(x) = e^{(-\alpha x \sqrt{\xi_2 - \sqrt{\xi_1}} e^{-\alpha x})} L_n^{\pm \sqrt{\xi_2}} \left( 2\sqrt{\xi_1} e^{-\alpha x} \right) \quad (92.4)$$

در شکل ۴.۴ انرژی به صورت تابعی از  $B_0$  رسم شده است. مشاهده می‌کنیم که در  $B_0 = 0.34T$ ، مقدار انرژی به صفر می‌رسد بنابراین یک میدان مغناطیسی بحرانی  $B_{0c}$  داریم. چگالی احتمال  $|\Psi_{\pm}(x, y)|^2$  نسبت به  $x$  برای مقادیر مختلف  $n$  در شکل ۵.۴ نشان داده شده است.



شکل ۴.۴: انرژی برحسب  $B_0$  برای  $n = 1$  با پارامترهای  $v_F = 1$ ،  $c = \hbar = e = 1$ ،  $\alpha = k = 0.5$ .



شکل ۵.۴: چگالی احتمال  $|\Psi_n(x, y)|^2$  نسبت به  $x$  با پارامترهای  $v_F = 1, c = \hbar = 1$ ،  $B_0 = \alpha = e = 1$  و  $k = 0/8$  برای مقادیر مختلف  $n$ .

## ۲.۵.۴ حالت دوم برای پتانسیل برداری

پتانسیل برداری و میدان مغناطیسی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$A_y(x) = -\frac{B_0}{x+a} \quad (۹۳.۴)$$

$$\vec{B} = \frac{B_0}{(x+a)^2} \hat{k} \quad (۹۴.۴)$$

این سیستم را در محدوده  $(0, +\infty)$  بررسی می‌کنیم. معادله (۸۳.۴) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} + \left[ \frac{eB_0}{c\hbar(x+a)^2} - k^2 + \frac{2ekB_0}{c\hbar(x+a)} - \frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2 (x+a)^2} + \varepsilon^2 \right] \phi_n(x) = 0 \quad (۹۵.۴)$$

با در نظر گرفتن  $s = x + a$  و استفاده از روش  $NU$ ، به معادله زیر می‌رسیم.

$$\frac{d^2 \phi_n(s)}{ds^2} + \frac{1}{s^2} \left( -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \right) \phi_n(s) = 0 \quad (۹۶.۴)$$

پارامترهای  $\xi_1$ ،  $\xi_2$  و  $\xi_3$  به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= k^2 - \varepsilon^2 \\ \xi_2 &= \frac{2ekB_0}{c\hbar} \\ \xi_3 &= \frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2} - \frac{eB_0}{c\hbar} \end{aligned} \quad (۹۷.۴)$$

از معادله ویژه مقداری انرژی زیر

$$(2n+1) \sqrt{\xi_1} - \xi_2 + 2 \sqrt{\left( \xi_3 + \frac{1}{4} \right) \xi_1} = 0 \quad (۹۸.۴)$$

$$(\nu n + 1) \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} - \frac{\nu e k B_0}{c \hbar} + \nu \sqrt{\left( \frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2} - \frac{e B_0}{c \hbar} + \frac{1}{4} \right)} (k^2 - \varepsilon^2) = 0 \quad (99.4)$$

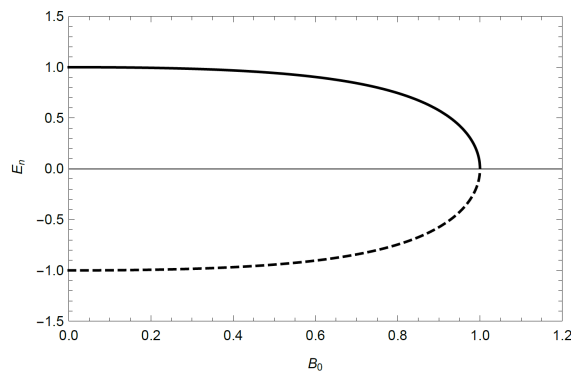
ویژه مقادیر انرژی به دست می‌آید.

$$E_{\pm, n} = \pm \hbar v_F \sqrt{k^2 - \frac{4 e^2 k^2 B_0^2 / c^2 \hbar^2}{\left( \nu n + 1 + \nu \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{c^2 \hbar^2} - \frac{e B_0}{c \hbar} + \frac{1}{4}} \right)^2}} \quad (100.4)$$

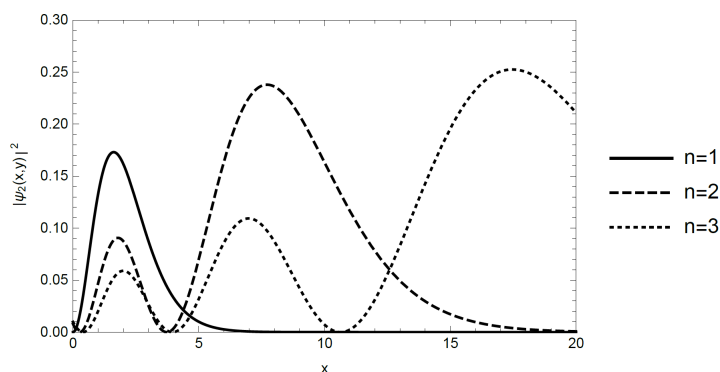
تابع موج نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$\phi_\nu(x) = (x + a)^{\left( \frac{1}{\nu} + \sqrt{\xi_1 + \frac{1}{\nu}} \right)} e^{-\sqrt{\xi_1}(x+a)} L_n^{\nu \sqrt{\xi_1 + \frac{1}{\nu}}} \left( \nu \sqrt{\xi_1} (x + a) \right) \quad (101.4)$$

در شکل ۶.۴ انرژی بر حسب  $B_0$  برای  $n = 1$  رسم شده است و مشاهده می‌کنیم که در میدان مغناطیسی بحرانی  $B_{0c} = 1T$  مقدار انرژی برابر با صفر است. همچنین چگالی احتمال  $|\Psi_\nu(x, y)|^2$  نسبت به  $x$  برای مقادیر مختلف  $n$  در شکل ۷.۴ رسم شده است.



شکل ۶.۴: انرژی بر حسب  $B_0$  برای  $n = 1$  با پارامترهای  $c = \hbar = e = k, v_F = 1$ .



شکل ۷.۴: چگالی احتمال  $|\Psi_\nu(x, y)|^2$  نسبت به  $x$  با پارامترهای  $v_F = 1, c = \hbar = 1$  و  $a = 1, B_0 = \alpha = k = e = 1$  برای مقادیر مختلف  $n$ .

### ۳.۵.۴ حالت سوم برای پتانسیل برداری

پتانسیل برداری را به صورت پتانسیل کرنل در نظر می‌گیریم.

$$A_y(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (102.4)$$

بنابراین معادله (۸۳.۴) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d^2 \phi_2(x)}{dx^2} + \left( \varepsilon_1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + A_3 x - A_4 x^2 \right) \phi_2(x) = 0 \quad (103.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{ea}{c\hbar} - k^2 - \frac{2e^2 ab}{c^2 \hbar^2} + \varepsilon^2 \\ A_1 &= -\frac{2ekb}{c\hbar} \\ A_2 &= -\frac{eb}{c\hbar} - \frac{e^2 b^2}{c^2 \hbar^2} \\ A_3 &= -\frac{2eka}{c\hbar} \\ A_4 &= \frac{e^2 a^2}{c^2 \hbar^2} \end{aligned} \quad (104.4)$$

به منظور به دست آوردن فرم ساده‌تری برای معادله (۱۰۳.۴) تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\phi_2(x) = |x|^p e^{-qx^2 - rx} f(x), \quad p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4A_2} \quad (105.4)$$

با قرار دادن تابع موج در معادله (۱۰۳.۴) و با در نظر گرفتن شرط  $A_4 = \frac{e^2 a^2}{c^2 \hbar^2} = 1$  به معادله دیفرانسیل هیون بای کانفلوئنت می‌رسیم.

$$(106.4)$$

$$x f''(x) + (2p - 2rx - 4qx^2) f'(x) + [(-4pq - 2q + r^2 + \varepsilon_1)x - (2pr - A_1)] f(x) = 0$$

جواب این معادله با استفاده از سری‌های توانی و روش فروبنیوس برحسب توابع هیون به دست می‌آید، زمانی که شرط زیر برقرار باشد.

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{4} A_3^2 - 2p - 1 = 2n \quad (107.4)$$

بنابراین حالات مقید سیستم و ویژه توابع را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &\sim |x|^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4A_2}} e^{\frac{1}{4} (A_3 x - x^2)} \\ &\times HB \left( \sqrt{1 - 4A_2}, \frac{2eka}{c\hbar}, \frac{e^2 k^2 a^2}{c^2 \hbar^2} + \varepsilon_1, \frac{4ekb}{c\hbar}, x \right) \end{aligned} \quad (108.4)$$

$$E_n = \pm \hbar v_F \sqrt{\frac{-ea}{c\hbar} + \frac{2e^2 ab}{c^2 \hbar^2} - \frac{e^2 k^2 a^2}{c^2 \hbar^2} + k^2 + 2 + 2n} + \sqrt{1 - 4 \left( -\frac{eb}{c\hbar} - \frac{e^2 b^2}{c^2 \hbar^2} \right)} \quad (10.9.4)$$

ملاحظه می‌شود که میدان‌های مغناطیسی متغیر تبه‌گنی ترازهای انرژی را از بین می‌برند.

# فصل ۵

## نتیجه‌گیری

توابع هیون جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم هیون با چهار نقطه تکین منظم هستند و در بسیاری از زمینه‌های فیزیک همچون فیزیک ذرات، هسته‌ای، کلاسیک و مکانیک کوانتوم کاربرد دارند. این توابع به دلیل کاربردهای فراوان در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته‌اند. بررسی ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی برای بسیاری از پتانسیل‌ها منجر به معادله دیفرانسیل هیون می‌شود که با شناخت معادله دیفرانسیل هیون و در نتیجه توابع هیون، می‌توان ویژه توابع و ویژه مقادیر چنین سیستم‌هایی را مشخص نمود. یکی دیگر از کاربردهای مهم تابع هیون در فضا زمان خمیده است. در این مطالعه پس از معرفی تابع هیون و انواع آن، به معرفی فضا زمان خمیده پرداختیم. امروزه بررسی ذرات نسبیتی در فضا زمان‌های ایجاد شده توسط نواقص هندسی توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. یکی از مهم‌ترین نواقص هندسی ریسمان‌های کیهانی هستند که در طی یک گذار فاز در جهان اولیه شکل گرفته‌اند. تابع هیون در سیستم‌های نسبیتی توسط معادلات کلاین-گوردون و دی کی پی برای ذرات با اسپین صفر، معادله دیراک برای ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$  و معادله ویل برای ذرات بدون جرم با اسپین  $\frac{1}{2}$  در فضا زمان‌های مختلف شامل ریسمان کیهانی، ریسمان کیهانی چرخان، فضا زمان‌های با اثرات غیر اینرسی و فضا زمان‌های گودل گونه مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. برای حل این معادلات روش‌های حدسی و  $NU$  استفاده گردید.



در بررسی صورت گرفته دریافتیم که حضور نقص توپولوژیکی، تبهگنی ترازهای انرژی سیستم را از بین می‌برد و باعث می‌شود که ذره و پادذره انرژی‌های متفاوتی داشته باشند. همچنین معادله ویل برای توصیف فرمیون‌های بدون جرم در حضور میدان‌های مغناطیسی متغیر بررسی شد و مشاهده شد که میدان‌های مغناطیسی متغیر منجر به از بین رفتن تبهگنی ترازهای انرژی می‌شوند. با محاسبه انرژی و تابع پارش می‌توان کمیت‌های ترمودینامیکی سیستم را به دست آورد. استفاده از توابع هیون به صورت سری‌های توانی راهکاری مناسب برای یافتن طیف ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی است که کم‌تر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

# مراجع

- [1] Hortaçsu M. (2012), " Heun functions and their uses in physics " **J. Math. Phys**, pp 23
- [2] Ishkhanyan A. M. (2018), " Schrödinger potentials solvable in terms of the general Heun functions " **Ann. Phys. (N. Y.)**, 388, pp 456
- [3] Heun K. (1888), " Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten " **Math. Annalen**, 33,2, pp 161
- [4] Arda A., Tezcan C. and Sever R. (2017), " Thermodynamics Quantities for the Klein-Gordon Equation with a Linear plus Inverse-linear Potential: Biconfluent Heun functions " **PRAMANA-J PHYS.**, 88,2, pp 39
- [5] de Castro A. S. (2004), " Exact solution for a fermion in the background of a scalar inversely linear potential " **Phys. Lett. A** , 328,4, pp 289
- [6] de Souza Dutra A. and Jia C. S. (2006), " Classes of exact Klein–Gordon equations with spatially dependent masses: regularizing the one-dimensional inversely linear potential " **Phys. Lett. A**, 352,6, pp 484
- [7] Cheb-Terrab E. S. (2004), " Solutions for the general, confluent and biconfluent Heun equations and their connection with Abel equations " **J. Phys. A** , 37,42, pp 9923
- [8] da Silva Leite L. G., Filgueiras C., Cogollo D. and Silva E. O. (2015), " Influence of spatially varying pseudo-magnetic field on a 2D electron gas in graphene " **Phys. Lett. A** , 379,10, pp 907
- [9] Moritz M. J., Eltschka C. and Friedrich H. (2001), " Near-threshold quantization and level densities for potential wells with weak inverse-square tails " **Phys. Rev. A**, 64,2, pp 022101
- [10] Pacheco M. H., Landim R. R. and Almeida C. A. S. (2003), " One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath " **Phys. Lett. A** , 311,2, pp 93

- [11] Pacheco M. H., Maluf R. V., Almeida C. A. S. and Landim R. R. (2014), " Three-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath " **EPL** , 108,1, pp 10005
- [12] Ölmez S., Mandic V. and Siemens X. (2010), " Gravitational-wave stochastic background from kinks and cusps on cosmic strings " **Phys. Rev. D**, 81,10, pp 104028.
- [13] Konno K. and Takahashi R. (2012), " Spacetime rotation-induced Landau quantization " **Phys. Rev. D**, 85,6, pp 061502
- [14] Hosseinpour M. and Hassanabadi H. (2015), " DKP equation in a rotating frame with magnetic cosmic string background " **Eur. Phys. J. Plus**, 130,11, pp 236
- [15] Ambruş V. E. and Winstanley E. (2016), " Rotating fermions inside a cylindrical boundary " **Phys. Rev. D**, 93,10, pp 104014
- [16] Mashhoon B. (1988), " Neutron interferometry in a rotating frame of reference " **Phys. Rev. Lett.**, 61,23, pp 2639
- [17] Santos L. C. N., Barros C. C. (2018), " Relativistic quantum motion of spin-0 particles under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime " **Eur. Phys. J.C**, 78,1, pp 13
- [18] Hassanabadi H., Derakhshani Z. and Zarrinkamar S. (2016), " Commutative vs. Noncommutative Space Statistical Properties of Two-Dimensional Harmonic Oscillator in Magnetic Field " **Acta Phys. Pol. A**, 129,1, pp 3
- [19] Hassanabadi H., Hosseini S. S. and Zarrinkamar S. (2014), " Dirac oscillator in noncommutative space " **Chin. Phys. C**, 38,6, pp 063104
- [20] Sobhani H., Hassanabadi H. and Chung W. S. (2018), " Investigation of Bohr Hamiltonian in presence of Killingbeck potential using bi-confluent Heun functions " **Nucl. Phys. A**, 973, pp 33
- [21] Wang B. Q., Long Z. W., Long C. Y. and Wu S. R. (2018), " Klein–Gordon oscillator with position-dependent mass in the rotating cosmic string spacetime " **Mod. Phys. Lett. A**, 33,4, pp 1850025
- [22] Mirza B. and Mohadesi M. (2004), " The Klein-Gordon and the Dirac oscillators in a non-commutative space " **Commun. Theor. Phys.**, 42,5, pp 664

- 
- [23] De Saavedra F. A., Boronat J., Polls A. and Fabrocini A. (1994), " Effective mass of one  ${}^4\text{He}$  atom in liquid  ${}^3\text{He}$  " **Phys. Rev. B**, 50,6, pp 4248
- [24] de Oliveira L. P. (2016), " Quantum dynamics of relativistic bosons through nonminimal vector square potentials " **Ann. Phys. (N. Y.)**, 372, pp 320
- [25] Nedjadi Y. and Barrett R. C. (1993), " On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation " **J. Phys. G**, 19,1, pp 87
- [26] Guertin R. F. and Wilson T. L. (1977), " Noncausal propagation in spin-0 theories with external field interactions " **Phys. Rev. D**, 15,6, pp 1518
- [27] Gödel K. (1949), " An Example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation " **Rev. Mod. Phys.**, 21, pp 447
- [28] Andrade F. M. and Silva E. O. (2014), " Effects of spin on the dynamics of the 2D Dirac oscillator in the magnetic cosmic string background " **Eur. Phys. J. C**, 74,12, pp 3187
- [29] Arda A. and Sever R. (2015), " Approximate Solutions of Dirac Equation with Hyperbolic-type Potential " **Commun. Theor. Phys**, 64,3, pp 269
- [30] Dong S., Garcia-Ravelo J. and Dong S. H. (2007), " Analytical approximations to the l-wave solutions of the Schrödinger equation with an exponential-type potential " **Phys. Scr.**, 76,4, pp 393
- [31] Jia C. S., Chen T. and Cui L. G. (2009), " Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the generalized Pöschl–Teller potential including the pseudo-centrifugal term " **Phys. Lett. A** , 373,18, pp 1621
- [32] Ginocchio J. N. (1997), " Pseudospin as a relativistic symmetry " **Phys. Rev. Lett.** 78,3, pp 436
- [33] Ginocchio J. N. and Leviatan A. (1998), " On the relativistic foundations of pseudospin symmetry in nuclei " **Phys. Lett. B**, 425,1, pp 1
- [34] Ginocchio J. N. (2004), " Relativistic harmonic oscillator with spin symmetry " **Phys. Rev. C**, 69,3, pp 034318
- [35] Zhou S. G., Ring P. and Meng J. (2003), " Spin symmetry in the Dirac sea of nuclei " **Phys. Rev. Lett.**, 91,0304067, pp 262501

- [36] Meng J., Sugawara-Tanabe K., Yamaji S., Ring P. and Arima A. (1998), " Pseudospin symmetry in relativistic mean field theory " **Phys. Rev. C**, 58,2, pp R628
- [37] Downing C. A. (2013), " On a solution of the Schrödinger equation with a hyperbolic double-well potential. Journal of Mathematical Physics " **J. Phys. A**, 54,7, pp 072101
- [38] Fa-Kai W., Zhan-Ying Y., Chong L., Wen-Li Y. and Yao-Zhong Z. (2014), " Exact polynomial solutions of Schrödinger equation with various hyperbolic potentials " **Commun. Theor. Phys.**, 61,2, pp 153
- [39] Christiansen H. R. and Cunha M. S. (2013), " Solutions to position-dependent mass quantum mechanics for a new class of hyperbolic potentials " **J. Math. Phys.**, 54,12, pp 122108
- [40] Heun K. (1888), " Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten " **Math. Ann.**, 33,2, pp 161
- [41] Hartmann R. R. (2014), " Bound states in a hyperbolic asymmetric double-well " **J. Math. Phys.**, 55,1, pp 012105
- [42] Fiziev P. P. (2009), " Novel relations and new properties of confluent Heun's functions and their derivatives of arbitrary order " **J. Phys. A**, 43,3, pp 035203
- [43] Hosseinpour M. and Hassanabadi H. (2015), " Scattering states of Dirac equation in the presence of cosmic string for Coulomb interaction " **Int. J. Mod. Phys. A**, 30,21, pp 1550124
- [44] Vilenkin A. (1985), " Cosmic strings and domain walls " **Phys. Rep.**, 121,5, pp 263
- [45] Linet B. (1985), " The static metrics with cylindrical symmetry describing a model of cosmic strings " **Gen. Relativ. Gravit.**, 17,11, pp 1109
- [46] Bakke K. and Furtado C. (2009), " Relativistic Landau quantization for a neutral particle " **Phys. Rev. A**, 80,3, pp 032106
- [47] Schluter P., Wietschorke K. H. and Greiner W. (1983), " The Dirac equation in orthogonal coordinate systems. I. The local representation " **J. Phys. A**, 16,9, pp 1999
- [48] Maior de Sousa M. S., Freire Ribeiro R. and Bezerra de Mello E. R. (2017), " Fermionic vacuum polarization by an Abelian magnetic tube in the cosmic string spacetime " **Phys. Rev. D**, 95,4, pp 045005
- [49] de Sousa M. M., Ribeiro R. F. and de Mello E. B. (2016), " Induced fermionic current by a magnetic tube in the cosmic string spacetime " **Phys. Rev. D**, 93,4, pp 043545

- [50] Magueijo J. and Smolin L. (2004), " Gravity's rainbow " **Class. Quant. Grav.**, 21,7, pp 1725
- [51] Amelino-Camelia G. (2013), " Quantum-spacetime phenomenology " **Living Rev. Rel.**, 16,1, pp 5
- [52] Bakke K. and Mota H. (2018), " Dirac oscillator in the cosmic string spacetime in the context of gravity's rainbow " arXiv preprint arXiv:1802.08711
- [53] Bakke K. and Furtado C. (2013), " On the interaction of the Dirac oscillator with the Aharonov–Casher system in topological defect backgrounds " **Annals Phys.**, 336 pp 489
- [54] Khodadi M., Nozari K. and Sepangi, H. R. (2016), " More on the initial singularity problem in gravity's rainbow cosmology " **Gen. Rel. Grav.**, 48,12, pp 166
- [55] Bezerra V. B., Mota H. F. and Muniz C. R. (2017), " Casimir effect in the rainbow Einstein's universe " **EPL**, 120,1, pp 10005
- [56] Garcia G. Q., Oliveira J. D. S. and Furtado C. (2017), " Weyl fermions in a family of Gödel-type spacetimes " arXiv preprint arXiv:1705.10631
- [57] de Mello E. B., Medeiros E. F. and Saharian A. A. (2013), " Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in anti-de Sitter spacetime " **Class. Quantum Grav.**, 30,17, pp 175001
- [58] Castro L. B. (2015), " Quantum dynamics of scalar bosons in a cosmic string background " **Eur. Phys. J. C**, 75,6, pp 287
- [59] Garcia G. Q., Oliveira J. D. S., Bakke K. and Furtado C. (2017), " Fermions in Gödel-type background space-times with torsion and the Landau quantization " **Eur. Phys. J. Plus**, 132,3, pp 123
- [60] Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D. A., Zhang Y., Dubonos S. V. and Firsov A. A. (2004), " Electric field effect in atomically thin carbon films " **science**, 306,5696, pp 666
- [61] Yeşiltaş Ö. (2014), " Supersymmetric analysis of the Dirac-Weyl operator within PT symmetry " **J. Math. Phys.**, 55,8, pp 082106
- [62] Kuru Ş., Negro J. and Nieto L. M. (2009), " Exact analytic solutions for a Dirac electron moving in graphene under magnetic fields " **J. Phys. Condens. Matter**, 21,45, pp 455305

- 
- [63] Landau L. D. and Lifshitz E. M. (1977), "**Quantum Mechanics**", Vol. 3, Pergamon Press, Oxford
- [64] Bransden B. H. and Joachain C. J. (1989), "**Introduction to Quantum Mechanics**", Longman Scientific and Technical, New York
- [65] Greiner W. (2000), "**Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations**", Springer Verlag: Berlin, Heidelberg
- [66] Nakahara M. (1998), "**Geometry, Topology and Physics**", Institute of Physics, Bristol
- [67] Carroll S. M. (2003), "**Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**", Addison-Wesley
- [68] Birrell P. and Davies P. (1982), "**Quantum Fields in Curved Space**", Cambridge University Press
- [69] Kleinert H. (1989), "**Gauge Fields in Condensed Matter**", Vol. 2, (World Scientific, Singapore, pp 1550124
- [70] Bjorken J. M. and Drell S. D. (1964), "**Relativistic Quantum Mechanics**", McGraw-Hill Book Company, New York

## **Abstract**

Heun functions are solutions of the Heun differential equation which is a generalization of the hypergeometric equation. The Heun differential equation is the most general second-order equation having four regular singular points that in recent years it has attracted considerable attention. Now, this differential equation appears in many fields such as particle physics, nuclear physics, quantum mechanics and is used to describe a wide range of physical phenomena. Heun differential equation in the study of relativistic and non-relativistic particles appears for many potentials and its eigenfunctions are defined in terms of Heun functions. One of the important applications of the Heun equation is in the general relativity and cosmology. In this research we introduce Heun function and their confluent forms, then we study this function in the relativistic systems by Dirac equation for spin half particles, Weyl equation for spin half massless particles, Klein-Gordon equation and DKP equation for spin 0 particles. Today, the study of relativistic particles in space-times created by topological defects has attracted much attention. A cosmic string is one of the most important examples of topological defects. In this research, we introduce different space-times such as cosmic string, spinning cosmic string, space-time with noninertial effects and Gödel-type space-times and we study the influence of topological defect on the energy spectrum of relativistic particles. We also study the Weyl equation in the presence of variable magnetic fields and investigate the influence of these fields on the energy spectrum of particles. The purpose of calculating energy is to obtain the thermodynamic quantities of the system.

**Keywords:** Heun functions, Klein- Gordon equation, DKP equation, Dirac equation, Weyl equation, Cosmic string, space-time Gödel type





**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics and Nuclear Engineering**

**MSc Thesis in: Nuclear Physics**

# **Survey of Heun functions in Boson and fermion systems**

**By: Mahsa Alsadat Hosseini**

## **Supervisors**

**Dr. Hassan Hassanabadi  
Dr. Somayeh Hassanabadi**

**July 2018**