

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

رشته فیزیک ، گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ترمودینامیک درهم تنیدگی در ولگشت‌های کوانتومی $U(2)$

نگارنده: زهرا شکاری

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

بهمن ۱۳۹۶

شماره: ۴,۹۹۴۷
تاریخ: ۱۵, ۱۲, ۹۷

باسمه تعالی



دانشگاه علمی کاربردی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای زهرا شکاری با شماره دانشجویی ۹۴۱۰۴۰۴ رشته فیزیک گرایش ذرات بنیادی تحت عنوان ترمودینامیک در هم تنیدگی در ولگشت U(2) که در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: ~~جمله~~ ~~مختصر~~ ~~بسیار~~) مردود
نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر مصطفی عنابستانی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احسان ابراهیمی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مرتضی رفیعی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر علی حسینی منصور	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی مؤمنی



تاریخ و امضاء و مهر دانشکده
تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیز تر از جانم که
در تمام مراحل زندگی حامی و پشتیبانم
بودند...

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌پایان پروردگار جهانیان که توانایی عطا فرمود تا بتوانم قدمی در زندگی پیش بگذارم.

اینک که با لطف خداوند متعال تدوین این پایان‌نامه را به اتمام رسانده‌ام، لازم می‌دانم از استاد برجسته و گرانقدرم جناب آقای **دکتر مصطفی عنابستانی** که با راهنمایی‌های فراوان مرا در به پایان رسانیدن این تحقیق یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان نیز از دوستان عزیزم، به خاطر حمایت‌هایشان در تمام طول این دوره تشکر و قدردانی می‌نمایم.

زهرا شکاری

بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب زهرا شکاری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک و مهندسی هسته ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **ترمودینامیک درهم تنیدگی در ولگشت های کوانتومی (۲) U**، تحت راهنمایی **مصطفی عنابستانی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهرا شکاری

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

ولگشت کوانتومی نسبت به همتای کلاسیکی خود مزیت‌های زیادی دارد. کاربرد ولگشت کوانتومی در ساخت الگوریتم‌های پیشرفته و همچنین در بسیاری از علوم دیگر باعث شده تا مطالعات گسترده‌ای بر روی آن انجام شود. این مطالعات جنبه‌های مختلفی دارند مانند ابعاد، درهم‌تنیدگی بین فضاها، واریانس، تابع توزیع، سرعت پخش و ... که مطالعه بر روی آن‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است زیرا خواص ویژه مکانیک کوانتومی را در ولگشت‌های کوانتومی نشان می‌دهد. یکی از پارامترهایی که اخیراً مورد توجه قرار گرفته دمای درهم‌تنیدگی است که به نوعی یکی از پارامترهایی است که به ولگشت کوانتومی نسبت داده شده است. در ولگشت‌های کوانتومی نشان داده شده که ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی ولگشت‌های کوانتومی، با گذشت زمان به یک حالت پایا میل خواهد کرد که می‌توان این حالت را با یک سیستم در تعادل گرمایی مقایسه کرد و یک سیستم ترمودینامیکی در نظر گرفت. با مقایسه‌ی ماتریس چگالی سکه با ماتریس چگالی سیستم‌هایی که برهم‌کنش دمایی با محیط دارند، می‌توان دمایی به ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی ولگشت کوانتومی نسبت داد که این دما به ویژه مقادیر و درهم‌تنیدگی فضای سکه و مکان مربوط می‌شود. در این پایان‌نامه مولفه‌های ترمودینامیکی ولگشت کوانتومی، به خصوص دمای درهم‌تنیدگی را مورد بررسی قرار داده و به صورت ویژه دمای درهم‌تنیدگی را برای سیستم‌های یک بعدی و دایره معرفی کرده‌ایم و پس از به‌دست آوردن فرمالیزم آن، با تغییر فضای سکه به عنوان ماتریس $U(2)$ تاثیر اثر سکه بر دمای درهم‌تنیدگی را بررسی کرده‌ایم. پس از آن ولگشت کوانتومی موبیوس را بررسی کرده که یکی از تعمیم‌های ولگشت بر روی دایره می‌باشد، نشان داده شده است که این مدل از ولگشت کوانتومی موجب بهبود در برخی از پارامترهای قابل بررسی در ولگشت‌های کوانتومی از جمله توزیع حدی نسبت به ولگشت کوانتومی روی دایره می‌شود. در پایان دمای گذار درهم‌تنیدگی را برای این نوع از ولگشت محاسبه کرده و آن را با دمای گذار درهم‌تنیدگی بر روی دایره مقایسه کرده‌ایم.

کلید واژه‌ها: ولگشت کوانتومی یک بعدی، ماتریس چگالی کاهش‌یافته، دمای درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان، ولگشت کوانتومی روی دایره، ولگشت کوانتومی موبیوس، دمای گذار درهم‌تنیدگی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. بررسی دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت‌های کوانتومی با عملگر سکه $U(2)$ ، ارائه شده در دومین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی، شهریور ماه ۱۳۹۶، دانشگاه صنعتی شاهرود
۲. بررسی عددی دمای گذار در ولگشت کوانتومی موبیوس، ارائه شده در کنفرانس ملی فیزیک ریاضی، دی ماه ۱۳۹۶، دانشگاه صنعتی قم

مقدمه

ولگشت تصادفی کلاسیکی^۱ یک مدل با سابقه‌ی قابل توجه است که بینشی برای بسیاری از مشکلات فیزیک، از جمله حرکت براونی^۲ و انتشار^۳ را فراهم کرده است و بسیاری از علوم دیگر نیز کاربرد دارد از جمله محیط زیست، و علوم کامپیوتر که در آن ولگشت تصادفی اساس ساخت الگوریتم‌ها را تشکیل می‌دهد. اصطلاح ولگشت تصادفی کلاسیکی برای اولین بار در مقاله‌ای تحت عنوان Nature که در سال ۱۹۰۵ به چاپ رسید، بیان شد و در آن کارول پیرسون،^۴ اصطلاح ”راه رفتن در حالت مستی”^۵ را مطرح کرد[۱].

شبهه هر سیستم کلاسیکی ایده‌آل، ولگشت تصادفی کلاسیکی نیز می‌تواند در یک فرم مکانیک کوانتومی و در نتیجه ولگشت کوانتومی ارائه شود. اشاره به مفهوم ولگشت کوانتومی برای اولین بار در سال ۱۹۴۶ در رابطه با انتگرال‌های مسیر فاینمن^۶ برای حل معادله‌ی دیراک^۷ مطرح شد[۲]. با این حال این نام تا زمانی که آهارنوف،^۸ دیویدویچ^۹ و زگوری^{۱۰} مدل خود را از ولگشت کوانتومی زمان گسسته در سال ۱۹۹۳ معرفی کردند، پیشرفت چندانی نداشت [۳].

ایده‌ی اصلی ولگشت کوانتومی (شکل کوانتومی ولگشت تصادفی کلاسیکی) به ۱۹۵۸ می‌رسد[۴]. اما این مفهوم به طور رسمی در سال ۱۹۹۰ توسعه یافت[۳، ۵، ۶]. در شرایط یک بعدی، یک ولگشت کوانتومی در فضای مکان، به دلیل تداخل دامنه‌های مسیره‌های چندگانه، به طور تساعدی از همتای کلاسیکی خود سریع‌تر می‌باشد [۷، ۸] که باعث تولید الگوریتم‌های به مراتب کارآمدتر نسبت به ولگشت تصادفی کلاسیکی می‌شود [۹-۱۲]. همچنین ولگشت کوانتومی ابزاری موفق برای همدوسی کوانتومی^{۱۱} بر روی اتم‌ها و انتقال فازهای کوانتومی^{۱۲} [۱۳]، توضیح پدیده‌های شکست^{۱۳} در سیستم‌های الکتریکی، [۱۴] و همچنین ارائه شواهد تجربی مستقیم برای انتقال انرژی موج در سیستم‌های فتوسنتزی^{۱۴} [۱۵، ۱۶]، و تولید درهم‌تنیدگی فضایی [۱۷]، و ایجاد فازهای توپولوژیکی^{۱۵} می‌باشد [۱۸]. انجام آزمایش‌های ولگشت کوانتومی با استفاده از تشدید مغناطیسی هسته‌ای^{۱۶} [۱۹، ۲۰]، تونل‌زنی پیوسته میدان‌های نوری از طریق شبکه‌های موج‌بر^{۱۷} [۲۱]، فضای فاز یون‌های به دام افتاده [۲۲]،

^۱ Classical random walk

^۲ Brownian

^۳ Diffusion

^۴ Karl Pearson

^۵ Drunkard's walk

^۶ Feynman

^۷ Dirac

^۸ Aharonov

^۹ Davidovich

^{۱۰} Zagury

^{۱۱} Coherent quantum

^{۱۲} Quantum phase transitions

^{۱۳} Breakdown phenomena

^{۱۴} Photosynthetic

^{۱۵} Topological

^{۱۶} Nuclear magnetic resonance (NMR)

^{۱۷} Continuous tunneling of light fields through waveguide lattices

[۲۳]، اتم خنثی به دام افتاده [۲۴]، تک اتم‌ها [۲۵، ۲۶]، و سیستم‌های دو فوتونی [۲۷]، گزارش شده است. تمام این پیشرفت‌ها باعث می‌شود که حوزه‌ی ولگشت کوانتومی همانند همتای کلاسیکی آن ابزاری بسیار مفید باشد.

ولگشت کوانتومی به طور گسترده به دو صورت بیان می‌شود:

ولگشت کوانتومی زمان گسسته^{۱۸}، و ولگشت کوانتومی زمان پیوسته^{۱۹}.
که ما در این پایان‌نامه در مورد ولگشت کوانتومی زمان گسسته بحث خواهیم کرد و به‌ویژه بر دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت کوانتومی زمان گسسته تمرکز خواهیم کرد.

^{۱۸}Discrete-time quantum walks

^{۱۹}Continuous-time quantum walks

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ انواع ولگشت
۱	۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی
۱	۱.۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی زمان گسسته بر روی خط
۲	۲.۱.۱ محاسبه ی تابع توزیع احتمال
۴	۳.۱.۱ مقدار میانگین و انحراف استاندارد
۶	۲.۱ ولگشت کوانتومی
۷	۱.۲.۱ ولگشت کوانتومی زمان گسسته بر روی خط $^{\circ}2(DQWL)$
۸	۲.۲.۱ ساختار اساسی یک DQWL
۹	۳.۲.۱ نمودار توزیع احتمال در ولگشت کوانتومی یک بعدی
۹	۴.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی
۱۵	۵.۲.۱ ولگشت کوانتومی بر روی چرخه
۱۹	۲ دما در ولگشت کوانتومی
۲۱	۱.۲ عملگر تحول یکانی و معادله کلی برای عملگر سکه
۲۲	۲.۲ دما و درهم‌تنیدگی بر روی خط
۲۵	۱.۲.۲ تاثیر شرایط اولیه بر دمای درهم‌تنیدگی بر روی خط
۳۱	۳.۲ محاسبه‌ی دمای ولگشت کوانتومی بر روی چرخه
۳۴	۴.۲ دما و درهم‌تنیدگی بر روی چرخه
۳۷	۱.۴.۲ تاثیر شرایط اولیه بر دمای درهم‌تنیدگی بر روی چرخه
۴۰	۲.۴.۲ دمای گذار درهم‌تنیدگی
۴۳	۳.۴.۲ نسخه‌ی مارکوفی ولگشت کوانتومی بر روی چرخه
۴۷	۳ تعیین دمای درهم‌تنیدگی و دمای گذار
۴۷	۱.۳ روش ماتریس مشخصه برای به‌دست آوردن ماتریس چگالی کاهش‌یافته
۴۸	۲.۳ محاسبه‌ی دما با استفاده از عملگر سکه متفاوت

^۲Discrete quantum walk on line

۵۵	بررسی عددی دمای گذار در ولگشت کوانتومی موبیوس	۳.۳
۵۶	نمودار توزیع دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت کوانتومی روی چرخه	۴.۳
۵۷	ولگشت کوانتومی موبیوس	۵.۳
۶۱	۴ نتیجه‌گیری	
۶۳	مراجع	
۶۷	آ محاسبه‌ی پارامترهای دمای درهم‌تنیدگی	
۶۸	محاسبه‌ی Π_R	۱.آ
۷۰	محاسبه‌ی Q_0	۲.آ
۷۲	محاسبه‌ی χ	۳.آ

فهرست تصاویر

۴	نمودار تابع توزیع ولگشت تصادفی کلاسیکی با $n = 100$ و $p = 1/2$	۱.۱
۱۰	نمودار تابع توزیع احتمال برای حالت اولیه $ 0\rangle_c \otimes 0\rangle_s$	۲.۱
۱۰	نمودار تابع توزیع احتمال برای حالت اولیه $ 1\rangle_c \otimes 0\rangle_s$	۳.۱
۱۶	نمودار ولگشت کوانتومی بر روی چرخه با 10 گره	۴.۱
۲۶	منحنی تابع ترمودینامیکی بدون بعد به عنوان تابعی از χ	۱.۲
۲۸	منحنی تغییرات دما بر حسب γ و φ	۲.۲
۲۹	منحنی تغییرات دما شکل (۲.۲)، نشان داده شده به صورت کوهی بلاخ	۳.۲
۳۲	منحنی خطوط دما بر حسب θ و γ	۴.۲
۴۰	منحنی خطوط دما بر حسب θ و γ بر روی چرخه	۵.۲
۴۱	دمای درهم‌تنیدگی به عنوان تابعی از زمان	۶.۲
۴۲	زمان اختلال بر روی چرخه به عنوان تابعی از N	۷.۲
۵۰	منحنی تغییرات آنروپی برای حالت ۶.۳	۱.۳
۵۱	منحنی تغییرات آنروپی برای حالت ۱۲.۳	۲.۳
۵۳	منحنی سه بعدی تغییرات آنروپی برای حالت ۱۸.۳	۳.۳
۵۴	دمای درهم‌تنیدگی، برای حالت اولیه ۶.۳ منحنی نقطه‌چین، برای حالت اولیه ۱۲.۳ منحنی خط‌چین، و حالت اولیه ۱۸.۳ منحنی خط‌صاف	۴.۳
۵۴	نمودار سمت چپ دمای درهم‌تنیدگی بر حسب α, θ ، نمودار سمت راست خطوط دمای ثابت به ازای تغییرات α, θ . برای حالت اولیه ۱۸.۳	۵.۳
۵۵	دمای درهم‌تنیدگی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با 10 جایگاه و حالت اولیه $\frac{1}{\sqrt{4}}(0\rangle + i 1\rangle)$	۶.۳
۵۶	نسبت دمای گذار ولگشت کوانتومی موبیوس با $\alpha = \frac{1}{4}$ به ولگشت کوانتومی روی دایره با 10 جایگاه و حالت اولیه 30.3	۷.۳
۵۸	نسبت دمای گذار ولگشت کوانتومی موبیوس با $\alpha = \frac{1}{4}$ به ولگشت کوانتومی روی دایره؛ 10 جایگاه و 50 گام	۸.۳
۵۹	زمان آمیختگی برای ولگشت کوانتومی موبیوس با 10 جایگاه و حالت اولیه $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{4}}(0\rangle + i 1\rangle)$	۹.۳
۵۹		

فهرست جداول

۱.۱ [جدول توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی] ۲

فصل ۱

انواع ولگشت

۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی

ولگشت کلاسیکی زمان گسسته یک نوع خاص از فرایندهای تصادفی می باشد که نقش کلیدی در بسیاری از الگوریتمها بازی می کند. ولگشت تصادفی کلاسیکی در بسیاری از علوم از جمله فیزیک، زیست شناسی، علوم کامپیوتر و شبیه سازی کاربرد دارد [۲۸].

۱.۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی زمان گسسته بر روی خط

ساده ترین مثال از ولگشت تصادفی کلاسیکی حرکت یک ذره بر روی یک خط است که به وسیله ی پرتاب سکه مشخص می شود اگر سکه خط باشد ذره یک واحد به سمت راست حرکت خواهد کرد و اگر شیر باشد یک واحد به سمت چپ حرکت خواهد کرد. این فرایند در هر واحد زمان تکرار خواهد شد. چون این فرایند احتمالی است ما نمی توانیم مطمئن باشیم که ذره در زمان بعدی در کجا قرار خواهد داشت، اما می توانیم احتمال آن را که ذره طی n گام در نقطه ی k باشد، محاسبه کنیم.

فرض کنید ذره در زمان $t = 0$ در مبدا باشد آن گاه $P(n = 0, k = 0) = 1$.

برای $n = 1$ ذره می تواند با احتمال $1/2$ در مکان $k = -1$ و با احتمال $1/2$ در مکان $k = 1$ قرار گیرد. در این مرحله احتمال آن را که ذره در مکان $k = 0$ قرار گیرد، صفر است. پس از این استدلال ما می توانیم بگوییم که همه ی حالات مطابق جدول ۱.۱ توصیف می شوند. حال این سوال به وجود می آید که ذره پس از n گام در کجا قرار می گیرد و تابع توزیع احتمال آن چگونه است.

جدول ۱.۱: [جدول توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی]

k/n	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
۰				۱			
۱			۱/۲		۱/۲		
۲		۱/۴		۱/۲		۱/۴	
۳	۱/۸		۳/۸		۳/۸		۱/۸

۲.۱.۱ محاسبه ی تابع توزیع احتمال

فرض کنید که در هر گام (n) احتمال حرکت ذره به سمت راست p و احتمال حرکت آن به سمت چپ $q = 1 - p$ باشد. هر گام توسط توزیع برنولی متغییر تصادفی طراحی می شود و احتمال پیدا کردن ذره در مکان k پس از n گام و موقعیت اولیه ی $z = 0$ به وسیله ی توزیع دوجمله ای

$$p_r(z_n = k | z_0 = 0) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}(k+n)} p^{\frac{1}{2}(k+n)} q^{\frac{1}{2}(n-k)}, & \frac{1}{2}(k+n) \in N \cup \{0\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.1)$$

تعیین می شود [۲۸]. که در آن $\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!}$ می باشد. این معادله نشان می دهد که احتمال یافتن ذره در تعداد گام های زوج (فرد) در نقاط فرد (زوج) صفر خواهد بود.

در معادله ی ۱.۱ نشان داده شده، که برای یک ولگشت کلاسیکی زمان گسسته بر روی یک خط، با فرض اینکه سکه متوازن باشد یعنی $p = q = 1/2$ باشد و احتمال اینکه ذره به سمت راست حرکت کند با احتمال این که ذره به سمت چپ حرکت کند برابر باشد آن گاه

$$p_r(k) = \frac{\binom{n}{\frac{1}{2}(k+n)}}{2^n} = \frac{n!}{2^{n(\frac{n+k}{2})! (\frac{n-k}{2})!}} \quad (2.1)$$

با استفاده از تقریب استرلینگ

$$\ln N! = N \ln N - N + \ln \sqrt{2\pi N}$$

و کمی عملیات جبری داریم:

$$\begin{aligned} \ln p_r(k) &= \ln(n!) - n \ln(2) - \ln\left(\frac{n+k}{2}\right)! - \ln\left(\frac{n-k}{2}\right)! \\ &= n \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi n}) - n \ln(2) - \left(\frac{n+k}{2}\right) \ln\left(\frac{n+k}{2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{n-k}{2}\right) \ln\left(\frac{n-k}{2}\right) - \ln \sqrt{2\pi \left(\frac{n+k}{2}\right)} + \frac{n+k}{2} \\ &\quad - \ln \sqrt{2\pi \left(\frac{n-k}{2}\right)} + \frac{n-k}{2} \end{aligned}$$

که این رابطه به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \ln p_r(k) &= n \ln n - \left(\frac{n+k}{2}\right) \ln\left(\frac{n+k}{2}\right) - \left(\frac{n-k}{2}\right) \ln\left(\frac{n-k}{2}\right) \\ &\quad + \ln \sqrt{\frac{2\pi n}{\pi^2 \sqrt{(n^2 - k^2)}}} - n \ln 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

رابطه‌ی ۳.۱ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \ln p_r(k) &= \left(-\frac{n}{2}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k}{n}\right) \right] + \left(\frac{k}{n}\right) \ln\left(\frac{1 - \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}}\right) \\ &\quad + \ln \sqrt{\frac{2}{\pi n \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}} - \left(\frac{k}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) + \ln \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \\ &= \ln \left[\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \right] + \ln \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

با فرض اینکه $n \gg k$ و با استفاده از بسط تیلور داریم:

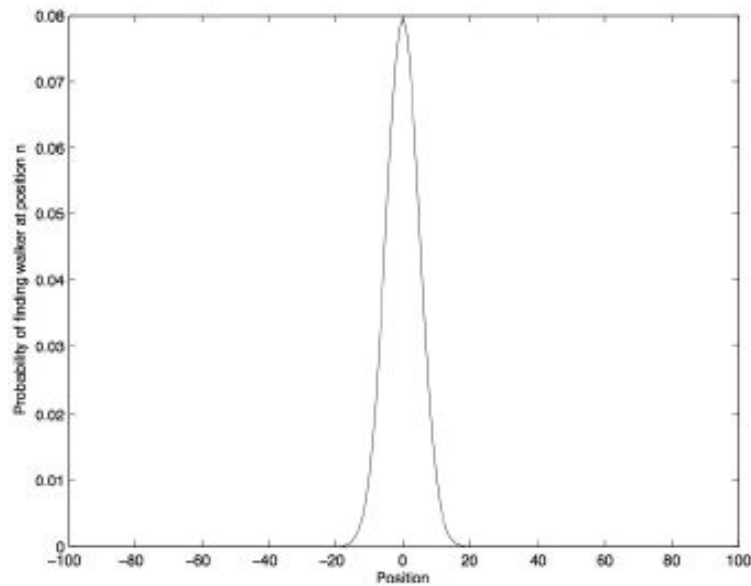
$$\ln p_r(k) = \ln \left[\left(\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\right) \left(e^{-\frac{k^2}{2n}}\right) \right] \Rightarrow p_r(k) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\right) e^{-\frac{k^2}{2n}} \quad (5.1)$$

از این رابطه مشخص است که توزیع احتمال تابعی از n و به شکل یک توزیع دوجمله‌ای است [۳۲].

شکل ۱.۱ قسمتی از معادله‌ی ۱.۱ را نشان می‌دهد (البته فقط برای نقاط غیر صفر رسم شده است).

همانطور که از نمودار مشخص است تابع توزیع احتمال گاوسی می‌باشد در این نمودار می‌توان دید که ارتفاع از نقطه‌ی میانی منحنی به صورت تابعی از زمان کاهش می‌یابد، در حالی که عرض افزایش پیدا می‌کند. این طبیعی است که بگوییم فاصله از مبداء ناشی از توزیع احتمال می‌باشد.

انتظار می‌رود که فاصله یک مقدار آماری باشد که برابر است با انحراف معیار استاندارد، وقتی که توزیع متقارن باشد [۲۹].



شکل ۱.۱: نمودار تابع توزیع ولگشت تصادفی کلاسیکی با $n = 100$ و $p = 1/2$

۳.۱.۱ مقدار میانگین و انحراف استاندارد

محاسبه‌ی مقدار میانگین و انحراف استاندارد در ولگشت تصادفی اهمیت زیادی دارد. همانطور که از قبل می‌دانیم مقدار میانگین برای متغیرهای گسسته به صورت

$$\langle k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k p_r(k) \quad (6.1)$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum k^2 p_r(k)$$

می‌باشد. و همچنین انحراف استاندارد به صورت

$$\sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} \quad (7.1)$$

می‌باشد. راه دیگر برای محاسبه‌ی انحراف استاندارد به وسیله‌ی تبدیل توزیع دوجمله‌ای به صورت یک عبارت می‌باشد که تحلیل آن آسان‌تر است. برای این کار از تابع مولد استفاده می‌کنیم که برای حالت‌های گسسته به صورت

$$p_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n(k) e^{ikx} \quad (8.1)$$

است. در اینجا چون حالت گسسته است واگرایی سری‌ها را نداریم، بنابراین

$$p_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n(k) e^{kx} \quad (9.1)$$

در نتیجه با مقایسه کردن رابطه‌ی ۶.۱ با رابطه‌ی ۹.۱ داریم:

$$p_n(x) = \langle e^{kx} \rangle \quad (10.1)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۹.۱ داریم:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kp_n(k)e^{kx} \quad (11.1)$$

اگر در رابطه‌ی فوق $x = 0$ قرار دهیم آن‌گاه

$$\left. \frac{dp_n(x)}{dx} \right|_{x=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kp_n(k) = \langle k \rangle \quad (12.1)$$

$$\left. \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 p_n(k) = \langle k^2 \rangle \quad (13.1)$$

بدین ترتیب با استفاده از تابع مولد می‌توان مقدار میانگین و انحراف استاندارد را به‌دست آورد. با قرار دادن تابع توزیع از رابطه‌ی ۱.۱ و جایگذاری آن در رابطه‌ی ۹.۱ تابع مولد به‌صورت

$$p_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{\frac{1}{q}(k+n)} p^{\frac{1}{q}(n+k)} q^{\frac{1}{q}(n-k)} e^{kx} \quad (14.1)$$

به‌دست می‌آید.

اگر تعداد دفعاتی را که ذره به سمت راست می‌رود r ، و تعداد دفعاتی را که ذره به سمت چپ می‌رود با l نشان دهیم آن‌گاه

$$\begin{aligned} k &= r - l, \\ n &= r + l \end{aligned} \quad (15.1)$$

حال با استفاده از روابط ۱۵.۱ مقدار k را در رابطه‌ی ۱۴.۱ جایگذاری می‌کنیم در نتیجه

$$p_n(x) = \sum_{r-l=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{r} p^r q^l e^{xr} e^{-xl} \quad (16.1)$$

با توجه به آن که r تعداد دفعاتی است که ذره به سمت راست حرکت می‌کند، در نتیجه مقدار آن در بازه‌ی $0 \leq r \leq n$ تغییر می‌کند. در نتیجه

$$p_n(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (pe^x)^r (qe^{-x})^{n-r} \quad (17.1)$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای داریم

$$p_n(x) = (pe^x + qe^{-x})^n \quad (18.1)$$

بدین ترتیب با استفاده از تابع مولد به‌دست آمده در رابطه‌ی فوق مقدار میانگین و واریانس را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \left. \frac{dp_n(x)}{dx} \right|_{x=0} = n(pe^x - qe^{-x})(pe^x + qe^{-x})^{n-1} \Big|_{x=0} \\ &= n(p - q) \end{aligned} \quad (19.1)$$

که در آن $p + q = 1$ می‌باشد. و انحراف معیار:
(۲۰.۱)

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} \right|_{x=0} \\ &= n \left[(pe^x + qe^{-x}) (pe^x + qe^{-x})^{n-1} + (n-1)(pe^x - qe^{-x})^2 (pe^x + qe^{-x})^{n-2} \right] \Big|_{x=0} \\ &= n \left(1 + (n-1)(p-q)^2 \right) \end{aligned}$$

می‌باشد. و در نهایت واریانس به صورت:

$$\sigma^2 = 4npq \quad (21.1)$$

به دست می‌آید.

۲.۱ ولگشت کوانتومی

ولگشت کوانتومی نوع کوانتومی ولگشت تصادفی کلاسیکی می‌باشد [۲۸]. از آن جایی که ولگشت تصادفی کلاسیکی در توسعه‌ی الگوریتم‌های کلاسیکی بسیار موفق ظاهر شد و یکی از موضوعات اصلی در محاسبات کوانتومی ایجاد الگوریتم‌های کوانتومی است که بسیار موفق‌تر از نوع کلاسیکی خود هستند، علاقمندان زیادی از گذشته تاکنون در این زمینه وجود داشته است. علاوه بر آن استفاده از ولگشت کوانتومی در علوم کامپیوتر، عامل ظهور فن‌آوری‌هایی نو برای ساخت کامپیوترهای کوانتومی می‌باشد.

ولگشت کوانتومی یک موضوع نسبتاً جدید است [۳۰]. در حال حاضر دو نوع ولگشت کوانتومی وجود دارد:

۱. ولگشت کوانتومی زمان گسسته

۲. ولگشت کوانتومی زمان پیوسته

حالت ولگشت کوانتومی زمان گسسته متشکل از دو سیستم مکانیک کوانتومی به نام ولگشت^۱ و سکه^۲ است. و همچنین در هر گام عملگر تحول^۳ بر سکه و ولگشت اعمال می‌شود. ساختار ریاضی این عملگر از طریق یک عملگر یکانی^۴ (واحد) تعیین می‌شود. به طور مثال:

$$|\psi\rangle_{t_2} = \hat{U}|\psi\rangle_{t_1}$$

ولگشت کوانتومی زمان پیوسته متشکل از ذره و عملگر تحول سیستم است. یعنی بدون هیچ محدودیت زمانی در هر زمان حرکت می‌کند. ساختار ریاضی این عملگر از طریق معادله‌ی شرودینگر می‌باشد [۲۸].

^۱ Walker

^۲ Coin

^۳ Evolution

^۴ Unitary

در هر دو مدل گسسته و پیوسته هندسه‌ی ولگشت کوانتومی و ویژگی‌هایشان توسط نمودارهای مجزا محاسبه می‌شود، این عمدتاً به دلیل کاربرد نمودارها در علوم کامپیوتر و ایجاد الگوریتم‌های کوانتومی بر اساس ولگشت کوانتومی می‌باشد.

در این پایان‌نامه ما ولگشت کوانتومی یک بعدی زمان گسسته را به کار خواهیم برد [۲۸]. ولگشت کوانتومی ممکن است به خواص جالب ریاضی برای توسعه‌ی الگوریتم منجر شود. ایده‌ی اصلی برای ساخت الگوریتم‌های کوانتومی با مقداردهی اولیه‌ی مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها و سپس اعمال عملگرهای تحول آغاز شد. اندازه‌گیری‌ها بدین صورت است که در پایان، فرایند محاسبه انجام می‌شود.

مقداردهی اولیه‌ی کیوبیت‌ها، اعمال اپراتورهای تحول، و اندازه‌گیری برای محاسبه‌ی نتیجه نهایی الگوریتم می‌باشد.

در واقع ثابت شده است که این روش به خودی خود برای ساختن چندین الگوریتم مفید بوده است [۳۱].

در این فصل پس از معرفی اجزای اصلی ولگشت کوانتومی یک بعدی زمان گسسته در یک خط، به دنبال یک تجزیه و تحلیل دقیق از ولگشت کوانتومی هادامارد در یک خط بی‌نهایت، با استفاده از یک روش مبتنی بر تبدیل فوری که به عنوان روش شرودینگر شناخته شده است، هستیم. این تجزیه و تحلیل شامل قضایایی است که به خوبی محسّنات استفاده از ولگشت کوانتومی هادامارد را در یک خط بی‌نهایت در مقایسه با همتهای کلاسیکی خود نشان می‌دهد. سپس به معرفی ولگشت کوانتومی زمان گسسته بر روی چرخه خواهیم پرداخت.

۱.۲.۱ ولگشت کوانتومی زمان گسسته بر روی خط^۵ (DQWL)

ولگشت کوانتومی زمان گسسته بر روی یک خط (DQWL)، همانطور که از نام آن پیداست نوع گسسته ولگشت کوانتومی می‌باشد. یک ولگشت کوانتومی گسسته‌ی یک بعدی شامل دو سیستم کوانتومی سکه و ولگشت همراه با عملگر یکانی (یک بار پرتاب سکه) و یک عملگر شرطی (جهت جابجایی ولگشت به سمت چپ و راست) می‌باشد. ولگشت کوانتومی را می‌توان یک ذره‌ی کوانتومی در نظر گرفت که دارای دو فضای هیلبرت است. یکی فضای هیلبرت سکه H_c ، که دو بعدی می‌باشد و پایه‌های آن $|0\rangle$ و $|1\rangle$ هستند و دیگری فضای هیلبرت مربوط به فضای مکان $|i\rangle$ که با H_s نشان می‌دهیم و می‌باشد که در آن

$$\sum |\alpha_i|^2 = 1$$

است. و فضای هیلبرت کلی به صورت

$$H_t = H_c \otimes H_s \quad (22.1)$$

می‌باشد.

مطالعه‌ی ولگشت کوانتومی یک بعدی به چند دلیل حائز اهمیت می‌باشد:

۱. برای گسترش ولگشت کوانتومی بر روی سازه‌های پیچیده‌تر مانند دایره و نمودار

^۵Discrete quantum walk on line

۲. مدلی ساده برای کشف، پیدا کردن و درک خواص مربوط به ولگشت‌های کوانتومی برای پیشرفت الگوریتم‌های کوانتومی
۳. ابزاری موفق برای تست کوانتومی بودن، از نقطه نظر تجربی، کامپیوترهای کوانتومی.

۲.۲.۱ ساختار اساسی یک DQWL

$DQWL$ شامل یک ذره و عملگرهای تحول و مجموعه‌ای از مشاهدات می‌باشد.

فضای مکان و فضای سکه

فضای مکان یک فضای هیلبرت بی‌نهایت بعدی، اما قابل شمارش، است. این فضا را با H_s نمایش می‌دهیم. برای این کار از بردارهای متعارف که مکان ذره را مشخص می‌کنند استفاده

می‌کنیم ($|i\rangle$). بنابراین مکان ذره به صورت

$$\sum_i \alpha_i |i\rangle_s \quad (23.1)$$

است که در آن

$$\sum |\alpha_i|^2 = 1$$

می‌باشد. این حالت‌ها بیانگر اعداد صحیح هستند.

سکه یک سیستم کوانتومی است که در یک فضای هیلبرت دو بعدی قرار می‌گیرد این فضا را با H_c نمایش می‌دهیم و پایه‌های این فضا $|0\rangle$ و $|1\rangle$ می‌باشد.

عملگر تحول

تحول در ولگشت کوانتومی شامل دو قسمت است که بسیار شبیه ولگشت تصادفی کلاسیکی می‌باشد، در حالت کلاسیکی شانس نقش کلیدی در تحول سیستم ایفا می‌کند. اما در مورد کوانتومی، معادل فرایند قبلی است که از اعمال عملگر تحول بر حالت سکه، استفاده می‌شود. عملگر تحول شامل یک عملگر شرطی است که پس از اعمال عملگر سکه، بر حالت ولگشت عمل می‌کند. نقش عملگر سکه ایجاد یک حالت برهم‌نهی از حالت سکه ولگشت است. در میان عملگرهای سکه که عمدتاً به صورت \hat{c} نشان داده می‌شوند عملگر هادامارد به صورت گسترده به کار برده می‌شود:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_c \langle 0| + |0\rangle_c \langle 1| + |1\rangle_c \langle 0| - |1\rangle_c \langle 1|) \quad (24.1)$$

و یا به صورت:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان داده می‌شود. عملگر شرطی به کار برده شده متشکل از یک عملگر یکانی است که با توجه به حالت سکه، اجازه جابجایی ذره را به چپ یا راست می‌دهد. به طور مثال برای حالت $|0\rangle$ یک گام به جلو حرکت کند.

یک عملگر شرطی مناسب به صورت

$$\hat{S} = |\circ\rangle_c \langle \circ| \otimes \sum_i |i+1\rangle_s \langle i+1|_c \langle 1| \otimes \sum_i |i-1\rangle_s \langle i| \quad (25.1)$$

است. در نتیجه عملگر در فضای هیلبرت کلی به صورت

$$\hat{U} = \hat{S}.(\hat{c} \otimes I_s) \quad (26.1)$$

می باشد و یک نمایش ریاضی از یک ولگشت کوانتومی یک بعدی گسسته پس از t گام، به صورت

$$|\psi\rangle_t = (\hat{U})^t |\psi\rangle_{ini} \quad (27.1)$$

است.

۳.۲.۱ نمودار توزیع احتمال در ولگشت کوانتومی یک بعدی

نمودار ۲.۱ و ۳.۱ توزیع احتمال برای $n = 100$ در $DQWL$ را نشان می دهد. که به ترتیب مطابق حالت کوانتومی اولیه $|\circ\rangle_c \otimes |\circ\rangle_s$ و $|\circ\rangle_c \otimes |\circ\rangle_s$ می باشد. به عنوان اولین ویژگی از ولگشت کوانتومی، در هر دو نمودار نوعی عدم تقارن دیده می شود که اثر نا متقارن بودن عملگر سکه روی دو حالت $|\circ\rangle$ و $|\circ\rangle$ است. به طور کلی دو روش برای مطالعه $DQWL$ استفاده شده است:

۱. روش شرودینگر: در این مورد ما یک حالت اختیاری

$$|\psi\rangle_n = (\alpha|\circ\rangle_c + \beta|\circ\rangle_c) \otimes |n\rangle_s$$

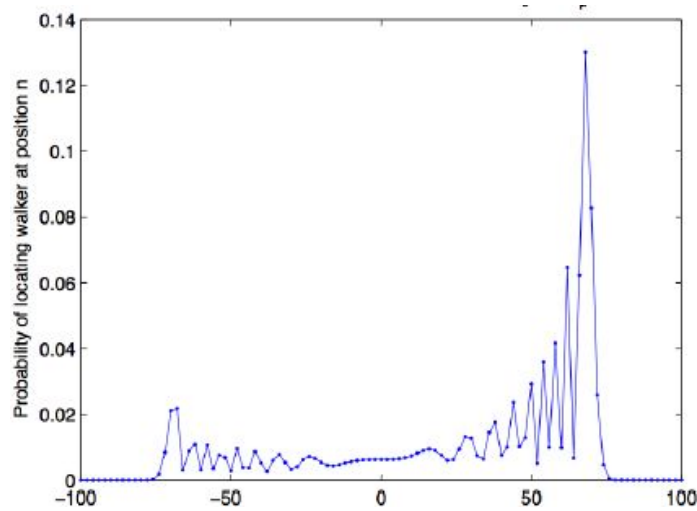
را برای ولگشت کوانتومی در نظر می گیریم، ماتریس حاصل شامل اجزای سکه و مکان ذره می باشد.

۲. روش ترکیبی: در این روش دامنه را برای یک حالت خاص $|n\rangle_p$ ، توسط جمع بندی دامنه های تمام مسیرهایی که در شرایط اولیه و نهایی قرار داده شده اند، محاسبه می کنیم. این روش می تواند به عنوان یک نسخه ی گسسته از انتگرال مسیر در نظر گرفته شود.

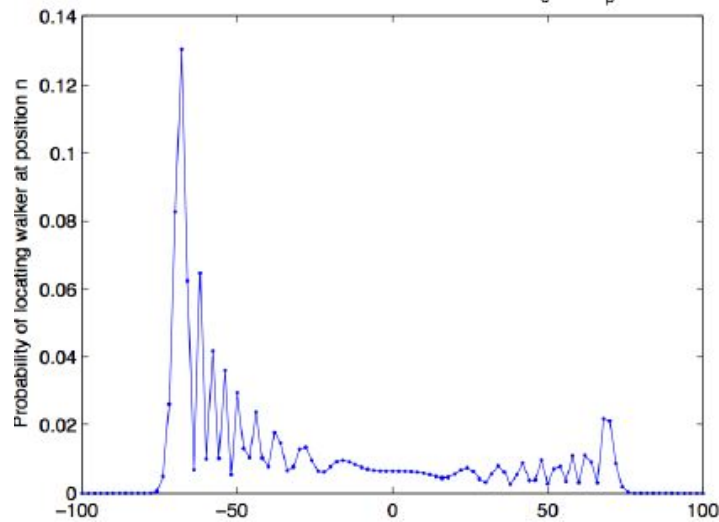
در این زمینه فعالیت های زیادی توسط محققان انجام شده است. ما در اینجا فقط حل تحلیلی ولگشت کوانتومی را با استفاده از روش شرودینگر بیان می کنیم.

۴.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی

حل تحلیلی $DQWL$ که مبتنی بر تبدیل فوریه و با استفاده از تجزیه و تحلیل پیچیده است، اولین بار توسط نایاک و ویش و اناد ارائه گردید. و به دنبال آن تحقیقات گسترده ای در این زمینه انجام شد [۲۸].



شکل ۲.۱: نمودار تابع توزیع احتمال برای حالت اولیه $|\circ\rangle_c \otimes |\circ\rangle_s$



شکل ۳.۱: نمودار تابع توزیع احتمال برای حالت اولیه $|\circ\rangle_c \otimes |\circ\rangle_s$

همانطور که قبلاً گفته‌ایم، حالت یک ولگشت کوانتومی در یک خط بی‌نهایت پس از t گام به صورت

$$|\psi\rangle_t = U^t |\psi\rangle_{ini}$$

نوشته می‌شود (معادله ۲۷.۱). و یا به صورت

$$\sum_k [a_k |\circ\rangle_c + b_k |\circ\rangle_s] |k\rangle_s \quad (28.1)$$

که در آن $|\circ\rangle_c$ و $|\circ\rangle_s$ حالت سکه‌ی مربوطه و $|k\rangle_s$ مکان ذره‌ی کوانتومی می‌باشد. برای مثال

$$|\psi\rangle_0 = |\circ\rangle_c \otimes |\circ\rangle_p \quad (29.1)$$

را به عنوان حالت اولیه‌ی ولگشت کوانتومی، و معادله ۲۴.۱ و ۲۵.۱ را به عنوان عملگر سکه و شرطی در نظر می‌گیریم. بنابراین در اولین گام ولگشت کوانتومی می‌تواند به صورت زیر نوشته

شود:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c|1\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c|-1\rangle_s, \\
 |\psi\rangle_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c + |1\rangle_c\right)|2\rangle_s + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c\right)|0\rangle_s \\
 &\quad + (|0\rangle_c - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c)|-2\rangle_s, \\
 |\psi\rangle_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}|0\rangle_c + |1\rangle_c\right)|3\rangle_s + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}|1\rangle_c\right)|1\rangle_s \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}|0\rangle_c + |1\rangle_c\right)|-1\rangle_s + (|0\rangle_c + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}|1\rangle_c)|-3\rangle_s.
 \end{aligned} \tag{30.1}$$

این روابط نشان می‌دهد که وجود برهم‌نهی کوانتومی در مکانیک کوانتومی باعث می‌شود که ذره در مکان‌های مختلف با یکدیگر تداخل سازنده یا ویرانگر انجام داده و توزیع احتمال متفاوتی نسبت به حالت کلاسیکی ایجاد کنند. در عملگر جابجایی شرطی که به صورت:

$$\hat{S} = |0\rangle_c \langle 0| \otimes \sum_i |i+1\rangle_p \langle i+1|_c \langle 1| \otimes \sum_i |i-1\rangle_p \langle i| \tag{31.1}$$

می‌باشد. ملاحظه می‌کنیم که این عبارت مانند ماتریس واحدی است که قطر اصلی آن یک واحد به سمت پایین، و همچنین یک واحد به سمت بالا شیفیت پیدا کرده است. همانطور که مشاهده می‌کنیم ماتریس‌ها غیر قطری هستند بنابراین ماتریس \hat{S} و در نتیجه \hat{U} نیز غیر قطری خواهند بود بنابراین محاسبه‌ی $|\psi\rangle_t$ عملاً بسیار پیچیده خواهد بود. نشان می‌دهیم که استفاده از تبدیل فوریه می‌تواند پیچیدگی محاسبات را تا حد بسیار زیادی کم کند.

حل تحلیلی: همانطور که می‌دانیم $|\psi\rangle_t$ حالت سیستم بعد از t گام است، که یک قسمت مکانی و یک قسمت سکه دارد. حال اگر نگاه خود را معطوف به یک نقطه‌ی خاص مثل n کنیم داریم:

$$\psi(n, t) = \langle n | \psi_t \rangle = \psi_L(n, t) |1\rangle + \psi_R(n, t) |0\rangle \tag{32.1}$$

آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{t+1}\rangle &= U |\psi_t\rangle = \left(\sum_i |i+1\rangle \langle i| \otimes |0\rangle \langle 0| + \sum_i |i-1\rangle \langle i| \otimes |1\rangle \langle 1|\right) (I_n \otimes H) |\psi_t\rangle \\
 \langle n | \psi_{t+1}\rangle &= \left(\sum_i \langle n | i+1\rangle \langle i| \otimes |0\rangle \langle 0| H + \sum_i \langle n | i-1\rangle \langle i| \otimes |1\rangle \langle 1| H\right) |\psi_t\rangle
 \end{aligned}$$

حال با قرار دادن:

$$\begin{aligned}
 M_+ &= |0\rangle \langle 0| H \\
 M_- &= |1\rangle \langle 1| H
 \end{aligned} \tag{33.1}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 \langle n | \psi_{t+1}\rangle &= M_+ \langle n-1 | \psi_t \rangle + M_- \langle n+1 | \psi_t \rangle \\
 \psi(n, t+1) &= M_+ \psi(n-1, t) + M_- \psi(n+1, t)
 \end{aligned}$$

این یک رابطه‌ی بازگشتی است که نشان می‌دهد تابع موج یک مکان خاص n ، در هر گام به مکان‌های قبل و بعد آن گام وابسته است. اگر چه این رابطه‌ی بازگشتی رابطه‌ی مناسبی برای به‌دست آوردن حالت سیستم در هر مکان مشخص است اما بیشتر مناسب کارهای عددی است و رابطه‌ی مناسبی برای کارهای تحلیلی به‌دست نمی‌دهد.

تبدیل فوریه: در این تبدیل تابع گسسته‌ای مثل $f(n)$ که $n \in z$ می‌باشد به تابع پیوسته متناهی مثل $\tilde{f}(k)$ تبدیل می‌شود. اگر فرض کنیم f تابعی از $z \rightarrow c$ و \tilde{f} تابعی از $c \rightarrow [-\pi, \pi]$ باشند به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{ink}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(k)e^{-ink}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t+1) &= \sum_n \psi(n, t+1)e^{ink} \\ &= \sum_n (M_+ \psi(n-1, t)e^{ink} + M_- \psi(n+1, t)e^{ink}) \\ &= M_+ e^{ik} \sum_n \psi(n-1, t)e^{i(n-1)k} + M_- e^{-ik} \sum_n \psi(n+1, t)e^{i(n+1)k} \end{aligned}$$

با قرار دادن:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t) &= \sum_n \psi(n-1, t)e^{i(n-1)k}, \\ \tilde{\psi}(k, t) &= \sum_n \psi(n+1, t)e^{i(n+1)k}. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = (M_+ e^{ik} + M_- e^{-ik}) \tilde{\psi}(k, t)$$

با قرار دادن:

$$U_k = M_+ e^{ik} + M_- e^{-ik}$$

خواهیم داشت:

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = U_k \tilde{\psi}(k, t) \rightarrow \tilde{\psi}(k, t) = U_k^t \tilde{\psi}(k, 0) \quad (34.1)$$

که $\tilde{\psi}(k, 0)$ حالت اولیه است که ما در اینجا فرض می‌کنیم.

$$\tilde{\psi}(k, 0) = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین مسئله‌ی ما از حل یک ماتریس بی‌نهایت بعدی گسسته در پایه‌ی مکان، تبدیل به مسئله‌ای می‌شود که در آن U_k یک ماتریس 2×2 پیوسته در فضای k است. بنابراین کافی است U_k را قطری کنیم.

U_k به شکل زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 U_k &= e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_- \\
 &= e^{ik} |0\rangle \langle 0| H + e^{-ik} |1\rangle \langle 1| H \\
 &= \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{ik} & e^{ik} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & e^{ik} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{۳۵.۱}$$

حال ابتدا باید ماتریس U_k را قطری کنیم و ویژه مقادیر و ویژه کتهای این ماتریس را بیابیم و آن گاه به توان t برسانیم. در نتیجه:

$$U_k = \lambda_1 |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| + \lambda_2 |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2|$$

آن گاه:

$$U_k^t = \lambda_1^t |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| + \lambda_2^t |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2| \tag{۳۶.۱}$$

برای به دست آوردن ویژه مقادیر داریم:

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= 0 \\
 A &= \begin{pmatrix} \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \det \begin{vmatrix} \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
 &= \left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} - \lambda\right) \left(-\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} - \lambda\right) - \left(\frac{e^{ik} e^{-ik}}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow \lambda^2 - i\sqrt{2} \sin(k)\lambda - 1 = 0
 \end{aligned}$$

با کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{-i\sqrt{2} \sin(k) \pm \sqrt{2 \sin^2(k) + 4}}{2} \\
 &= \frac{-i \sin(k)}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{-\left(\frac{\sin(k)}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \\
 \Rightarrow \lambda &= \pm \cos(\omega) - i \sin(\omega) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = e^{-i\omega} \\ \lambda_2 = -e^{i\omega} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{۳۷.۱}$$

که در آن:

$$\sin(\omega) = \frac{\sin(k)}{\sqrt{2}}$$

می باشد.

برای به دست آوردن ویژه بردارها داریم:

$$U_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (38.1)$$

با قرار دادن $\lambda_1 = e^{-i\omega}$ و ماتریس U_k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= e^{-i\omega} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\alpha e^{-ik}}{\sqrt{2}} + \beta \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha e^{ik}}{\sqrt{2}} - \beta \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\omega} \\ \beta e^{-i\omega} \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \left(\frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - e^{-i\omega} \right) + \frac{\beta e^{-ik}}{\sqrt{2}} = 0 \\ \beta \left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} + e^{-i\omega} \right) + \frac{\alpha e^{ik}}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \frac{\beta e^{-ik}}{\sqrt{2}} = -\alpha \left(\frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - e^{-i\omega} \right) \\ \Rightarrow \beta = -\alpha \left(\frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - e^{-i\omega} \right) \sqrt{2} e^{ik} &= -\alpha (1 - \sqrt{2} e^{i(k-\omega)}) = \alpha (\sqrt{2} e^{i(k-\omega)} - 1) \end{aligned}$$

از طرفی داریم $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ بنابراین:

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\alpha|^2 (-1 + \sqrt{2} e^{-i(\omega-k)})^2 &= 1 \Rightarrow \\ |\alpha|^2 &= \frac{1}{1 + (-1 + \sqrt{2} e^{-i(\omega-k)})^2} \\ &= \frac{1}{1 + [(-1 + \sqrt{2} \cos(\omega - k) - \sqrt{2}i \sin(\omega - k))(-1 + \sqrt{2} \cos(\omega - k) + \sqrt{2}i \sin(\omega - k))]} \\ &= \frac{1}{1 + [2 - 2\sqrt{2} \cos(\omega - k)]} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2} \cos(\omega - k)} \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2} \cos(\omega - k)}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2(\sqrt{2} - \sin^2(k) \cos(k) + \sin^2(k))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2(k) - \cos(k))} \sqrt{1 + \cos^2(k)}} \Rightarrow \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2(k) - \cos(k))} \sqrt{1 + \cos^2(k)}} (\sqrt{2} e^{i(k-\omega)} - 1) \end{aligned} \quad (39.1)$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^{-i\omega} \\ \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2(k) - \cos(k))} \sqrt{1 + \cos^2(k)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} e^{i(k-\omega)} - 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (40.1)$$

و به همین ترتیب:

$$\begin{cases} \lambda_2 = -e^{i\omega} \\ \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2(k) + \cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)})}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}e^{i(k+\omega)} - 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (41.1)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی ۳۶.۱ داریم:

$$U_k^t = e^{-i\omega t} |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| + (-1)^t e^{i\omega t} |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2|$$

و

$$\tilde{\psi}(k, t) = U_k^t \tilde{\psi}(k, 0)$$

و همچنین قرار می‌دهیم:

$$N_{\pm}^{\mp} = 2(1 + \cos^2(k) \pm \cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)})$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t) &= e^{-i\omega t} \langle \varphi_1 | \tilde{\psi}(k, 0) | \varphi_1 \rangle + (-1)^t e^{i\omega t} \langle \varphi_2 | \tilde{\psi}(k, 0) | \varphi_2 \rangle \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{N_-^{\mp}} \left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}e^{-i(k-\omega)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}e^{i(k-\omega)} - 1 \end{pmatrix} \right] \\ &+ \frac{(-1)^t e^{i\omega t}}{N_+^{\mp}} \left[\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}e^{-i(k+\omega)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}e^{i(k+\omega)} - 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left(\frac{e^{-i\omega t}}{N_-^{\mp}} (\sqrt{2}e^{i(k-\omega)} - 1) - \frac{(-1)^t e^{i\omega t}}{N_+^{\mp}} (\sqrt{2}e^{i(k+\omega)} - 1) \right) \\ &= \left(\frac{e^{-i\omega t}}{N_-^{\mp}} + \frac{(-1)^t e^{i\omega t}}{N_+^{\mp}} \right) \end{aligned}$$

بعد از کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\tilde{\psi}(k, t) = \left(\frac{ie^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2(k)}} [e^{-i\omega t} - (-1)^t e^{i\omega t}] \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos(k)}{\sqrt{1 + \cos^2(k)}} e^{-i\omega t} + \frac{(-1)^t e^{i\omega t}}{2} \left(1 - \frac{\cos(k)}{\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \right) \right) \right) \quad (42.1)$$

این‌ها مولفه‌های تابع موج در فضای k هستند که به راحتی می‌توان عکس تبدیل فوریه را اعمال کرد و $\psi_L(n, t)$ و $\psi_R(n, t)$ (یعنی مولفه‌های تابع موج در فضای مکان) را به دست آورد و در نتیجه تابع توزیع احتمال نیز به راحتی به دست می‌آید.

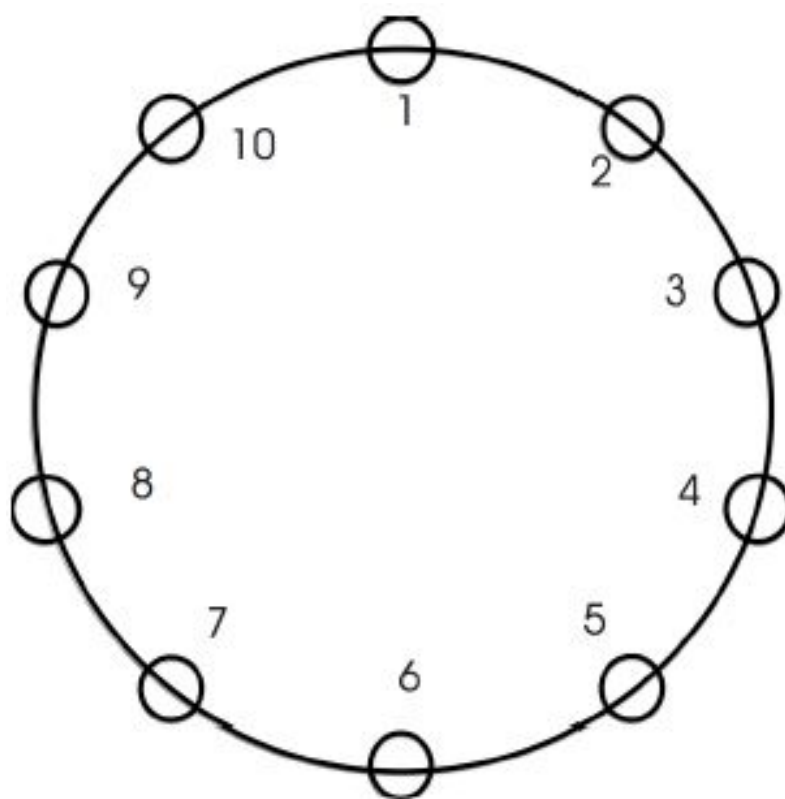
۵.۲.۱ ولگشت کوانتومی بر روی چرخه

مفهوم ولگشت کوانتومی همانطور که در بخش قبل ذکر شد، حالت کلی ولگشت تصادفی کلاسیکی می‌باشد که می‌تواند به عنوان یک زیر ناحیه در محاسبات و اطلاعات کوانتومی

در نظر گرفته شود [۳۱، ۳۲]. یکی از ویژگی‌های برجسته‌ی ولگشت کوانتومی بر روی شبکه، قابلیت گسترش آن در شبکه به طور خطی با زمان می‌باشد، که به عنوان انحراف معیار $\sigma(t) \sim t$ مشخص می‌شود، در حالی که در ولگشت تصادفی کلاسیکی انحراف معیار متناسب با ریشه دوم زمان $\sigma(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد [۳۰]. همچنین ولگشت کوانتومی ویژگی‌های تداخلی متفاوتی در مقایسه با هم‌تای کلاسیکی خود دارد.

زمان اختلال: حداقل زمان لازم برای اینکه یک توزیع احتمال به یک توزیع حدی به اندازه‌ی کافی نزدیک شود.

ولگشت کوانتومی بر روی چرخه، ولگشت کوانتومی بر روی خط، با دوره تناوب مناسب می‌باشد. در یک بعد، شبکه به یک حلقه خم می‌شود، به طوری که اولین مکان و $^{\circ}$ آخرین مکان یکی باشند. شکل (۴.۱). در ولگشت کوانتومی بر روی چرخه با d گره [۳۳] می‌توان



شکل ۴.۱: نمودار ولگشت کوانتومی بر روی چرخه با 10 گره

فضای گره‌ها را با بردار $|S\rangle$ نشان داد که $S = 0, 1, \dots, d-1$ این گره‌ها در فضای هیلبرت H_s توصیف می‌شوند. با در نظر گرفتن فضای سکه به عنوان یک فضای دو بعدی به صورت $|c\rangle$ که $c = 0, 1$ ، می‌توان حالت اولیه به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_0\rangle = \sum_{c,s} \alpha_{cs} |c, s\rangle \quad (43.1)$$

که در فضای هیلبرت زیر:

$$H_t = H_c \otimes H_s$$

تعریف می‌شود. عملگر شرطی در ولگشت کوانتومی بر روی چرخه با d گره را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$s = \sum_{c,s} |c\rangle \langle c| \otimes |s + 2c - 1(\text{mod } d)\rangle \langle s| \quad (44.1)$$

در نهایت بعد از n گام احتمال حضور در مکان s را می‌توان به شکل زیر نوشت که تابع توزیع احتمال است.

$$p_n(s) = \sum_c |\langle c, s | \psi_n \rangle|^2 \quad (45.1)$$

تابع توزیع احتمال بر روی چرخه در گام‌های زیاد همگرا نمی‌شود، اما می‌توان کمیتی به شکل زیر

$$\bar{p}_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_n(s) \quad (46.1)$$

را تعریف کرد که به نوعی میانگین زمانی احتمال حضور در مکان خاص s است که این کمیت همگراست. ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی ولگشت کوانتومی نیز همانند توزیع احتمال به مقدار مشخصی میل نمی‌کند بنابراین میانگین زمانی آن را در نظر می‌گیریم. که در ادامه با استفاده از این ماتریس چگالی کاهش‌یافته کمیت‌هایی همچون دمای درهم‌تنیدگی و دمای گذار را محاسبه خواهیم کرد.

فصل ۲

دما در ولگشت کوانتومی

مفهوم سیستم‌های ایزوله یک نقش اساسی را در تدوین مکانیک کوانتومی بازی می‌کنند، مفاهیمی مانند تعادل ترمودینامیکی غیر ممکن به نظر می‌رسد که با نظریه‌ی سیستم‌های کوانتومی ایزوله ارتباط پیدا کنند، زیرا حالت کوانتومی چنین سیستم‌هایی از یک تحول یکانی که در نهایت به یک حالت ثابت نهایی نمی‌رسند، پیروی می‌کنند. بر این اساس به نظر می‌رسد که ساختن یک سیستم ایزوله کوانتومی مورد توجه بسیاری از محققان باشد زیرا که بسیاری از سیستم‌هایی که پدیده‌های مختلفی را نمایش می‌دهند ممکن است ایزوله باشند [۳۴]. بر این اساس، سوالی که وجود دارد این است که آیا می‌توانیم برای سیستم‌های کوانتومی ایزوله که در یک فضای هیلبرت مرکب گسترش پیدا می‌کنند، مفهوم دما را وارد کنیم؟

در سیستم‌های ترمودینامیکی که با محیط خود برهم‌کنش دارند، حالت سیستم بعد از تبادل گرمایی با محیط پس از گذشت زمانی مشخص به حالت تعادل می‌رسند، که می‌توان به آن دما نسبت داد، در ولگشت کوانتومی حالت موضعی سکه با ردگیری روی کل فضای مکان به دست می‌آید که مشخص گردیده است این ماتریس کاهش یافته در زمان‌های حدی طولانی به یک حالت ثابت میل خواهند کرد که بستگی به شرایط اولیه مسئله دارد. از مقایسه حالت گرمایی و حالت سکه کاهش یافته می‌توان دمایی به سیستم کاهش یافته نسبت داد که از روی ویژه‌مقادیر ماتریس کاهش یافته به دست می‌آید این مقادیر به نوعی در آن‌تروپی فن‌نویمن بیانگر درهم‌تنیدگی بین فضای سکه و فضای مکان ولگشت کوانتومی می‌باشد، از این رو به نوعی می‌توان ارتباطی میان درهم‌تنیدگی کوانتومی و دمای نسبت داده شده به آن، یافت.

همانطور که در بخش‌های قبل دیده‌ایم، ولگشت کوانتومی یک بعدی در یک فضای هیلبرت مرکب به صورت $H_s \otimes H_c$ تولید می‌شود که H_s فضای هیلبرت وابسته به مکان و H_c فضای هیلبرت سکه می‌باشد. در این فضای هیلبرت، ذره در مراحل گسسته زمانی $t \in \mathbb{N}$ ، در امتداد

یک بردار یکه بعدی از مجموعه‌های $K \in Z$ حرکت می‌کند، که جهت حرکت وابسته به حالت سکه با ویژه‌مقادیر L و R .

عملگر یکانی در ولگشت کوانتومی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(\theta) = \{T_- \otimes |L\rangle\langle L| + T_+ \otimes |R\rangle\langle R|\} \circ \{I \otimes K(\theta)\} \quad (1.2)$$

که در آن می‌توان

$$K(\theta) = \sigma_z \cos(\theta) + \sigma_x \sin(\theta)$$

را تعریف کرد البته $K(\theta)$ را می‌توان با هر ماتریس یکانی $U()$ جایگزین کرد اما برای پرهیز از پیچیدگی‌های محاسبه ما آن را به شکل $K(\theta)$ در نظر می‌گیریم که طیف گسترده‌ای از حالات را پوشش می‌دهد. I عملگر یکانی در H_s و σ_z و σ_x ماتریس‌های پائولی هستند. و همچنین T_- و T_+ عملگرهای مکانی هستند که ذره را یک واحد جابجا می‌کنند. بر روی هر حالت، در هر گام زمانی عملگر یکانی $U(\theta)$ به صورت زیر عمل می‌کند:

$$|\psi(t+1)\rangle = U(\theta) |\psi(t)\rangle \quad (2.2)$$

اگر تابع موج را به صورت زیر بیان کنیم:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{bmatrix} |k\rangle \quad (3.2)$$

که مولفه بالا(پایین) وابسته به حالت سکه L (R) دارد. و همچنین در آن احتمال پیدا کردن ذره در (k, t) و سکه در R و L به ترتیب به صورت $P_{kL}(t) = |a_k(t)|^2$ و $P_{kR}(t) = |b_k(t)|^2$ می‌باشد. بدین ترتیب احتمال پیدا کردن ذره به صورت

$$P(k, t) = \langle \psi_{k,t} | \psi_{k,t} \rangle = |a_k(t)|^2 + |b_k(t)|^2$$

می‌باشد که $\sum_k P(k, t) = 1$.

بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} |a_k(t+1)\rangle &= U(\theta) |a_k(t)\rangle \\ |b_k(t+1)\rangle &= U(\theta) |b_k(t)\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (4.2)$$

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)a_k(t) + \sin(\theta)b_k(t) \\ \sin(\theta)a_k(t) - \cos(\theta)b_k(t) \end{pmatrix}$$

با اعمال عملگرهای سکه، که فقط روی قسمت سکه اثر می‌کنند داریم:

$$|\psi(t+1)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta)a_{k+1}(t) + \sin(\theta)b_{k+1}(t) \\ \sin(\theta)a_{k-1}(t) - \cos(\theta)b_{k-1}(t) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

در نتیجه با استفاده از ۴.۲ داریم:

$$\begin{aligned} a_k(t+1) &= a_{k+1}(t) \cos(\theta) + b_{k+1}(t) \sin(\theta), \\ b_k(t+1) &= a_{k-1}(t) \sin(\theta) - b_{k-1}(t) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (6.2)$$

که $\theta = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ، پارامتر تعیین پرتاب سکه می باشد. ($\theta = \frac{\pi}{4}$ در واقع سکه هامارد می باشد)

۱.۲ عملگر تحول یکانی و معادله کلی برای عملگر سکه

در این کار، یک توزیع احتمال جدید، GCD^1 (توزیع دستبندی عمومی)، که این توزیع مستقل از حالت ذره می باشد، را در نظر می گیریم. مشخص گردیده که این توزیع در زمان های طولانی به یک مقدار حدی میل می کند که ما این حدی بودن را با آنتروپی درهم تنیدگی میان فضای سکه و فضای مکان مرتبط می کنیم.

رفتار حدی GCD یک نتیجه ی غیر منتظره دارد. زیرا با توجه به عملگر یکانی ولگشت کوانتومی به هیچ حالت ثابتی همگرا نمی شود. در نتیجه باید یک حالت مارکوفی در ولگشت کوانتومی وجود داشته باشد. به منظور نشان دادن این نتایج ما معادله تحول ولگشت کوانتومی را به عنوان مجموع دو اصطلاح مختلف، یکی معتبر برای بخش کلاسیکی، و دیگری برای بخش کوانتومی [۳۵]، در نظر می گیریم.

مشخص گردیده که اولین اصطلاح فوق به عنوان فرایند مارکوفی خواهد بود و دومین اصطلاح شامل عملگر یکانی کوانتومی خواهد بود.

با استفاده از روش GCD و بکارگیری معادله ۴.۲ و همچنین تعریف توزیع شیر یا خط، به ترتیب به عنوان $P_{kL}(t) = |a_k(t)|^2$ و $P_{kR}(t) = |b_k(t)|^2$ ، ما یک معادله کلی برای عملگر سکه به دست خواهیم آورد.

با استفاده از توضیحات فوق و با کمی عملیات جبری داریم:

$$\begin{aligned} P_{k,L}(t+1) &= P_{k+1,L}(t)\cos^2(\theta) + P_{k+1,R}(t)\sin^2(\theta) + \beta_{k+1}(t)\sin(2\theta), \\ P_{k,R}(t+1) &= P_{k-1,L}(t)\sin^2(\theta) + P_{k-1,R}(t)\cos^2(\theta) - \beta_{k-1}(t)\sin(2\theta). \end{aligned} \quad (7.2)$$

که در آن

$$\beta_k = \text{Re}[a_k(t)b_k^*(t)]$$

و احتمال شیر و خط بودن سکه نیز با رابطه ی زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} P_L(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{kL}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k(t)|^2, \\ P_R(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{kR}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k(t)|^2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$P_R(t) + P_L(t) = 1. \text{ که}$$

و همچنین GCD توزیع شکل گرفته به وسیله ی جفت، $\begin{bmatrix} P_L(t) \\ P_R(t) \end{bmatrix}$ می باشد.

با بکارگیری معادله ۸.۲ در معادله ۷.۲ داریم:

$$\begin{bmatrix} P_L(t+1) \\ P_R(t+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_L(t) \\ P_R(t) \end{bmatrix} + \text{Re}[Q(t)]\sin(2\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

¹Global chirality distribution

که در آن $Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t)b_k^*(t)$ می باشد.

ماتریس دو بعدی در معادله ۹.۲ در حالت کلی $Q(t)$ همراه با $P_L(t)$ و $P_R(t)$ توابع وابسته زمانی هستند که در زمان های طولانی مقدار حدی دارند، که به وسیله ی شرایط اولیه ی معادله ۴.۲ تعیین می شوند.

معادله ۹.۲ در مقدار حدی به صورت:

$$\begin{aligned} \Pi_L &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P_L(t) \equiv P_L(t \rightarrow \infty), \\ \Pi_R &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) \equiv P_R(t \rightarrow \infty), \\ Q_\circ &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \equiv Q(t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (10.2)$$

تعریف می شود. بنابراین با استفاده از رابطه ی ۷.۲ داریم:

$$\begin{cases} \Pi_L(\infty) = \cos^2(\theta)\Pi_L(\infty) + \sin^2(\theta)\Pi_R(\infty) + \operatorname{Re}(Q(\infty)) \sin(2\theta) \\ \Pi_R(\infty) = \cos^2(\theta)\Pi_R(\infty) + \sin^2(\theta)\Pi_L(\infty) - \operatorname{Re}(Q(\infty)) \sin(2\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_L(\infty) = \Pi_R(\infty) + \frac{2 \operatorname{Re}(Q_\circ)}{\tan(\theta)} \\ \Pi_R(\infty) = \Pi_L(\infty) - \frac{2 \operatorname{Re}(Q_\circ)}{\tan(\theta)} \end{cases}$$

از طرفی:

$$\Pi_L(\infty) + \Pi_R(\infty) = 1$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \Pi_L \\ \Pi_R \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2 \operatorname{Re}(Q_\circ)}{\tan(\theta)} \\ 1 - \frac{2 \operatorname{Re}(Q_\circ)}{\tan(\theta)} \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

می باشند. این نتیجه جالب برای ولگشت کوانتومی نشان می دهد که در زمان های طولانی احتمال پیدا کردن سیستم در سکه چپ یا راست به صورت حدی (تقریبی) به دست می آید.

۲.۲ دما و درهم تنیدگی بر روی خط

مفهوم درهم تنیدگی یک عنصر مهم در توسعه ارتباطات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و محاسبات کوانتومی می باشد. در این زمینه نویسندگان متعدد رابطه میان درهم تنیدگی مجانبی و شرایط اولیه ی مختلف در ولگشت کوانتومی را بررسی کرده اند، برخی دیگر ولگشت کوانتومی را به عنوان ابزاری برای توسعه ی الگوریتم های کوانتومی و به عنوان یک تولید کننده درهم تنیدگی مفید، برای آزمایش سخت افزار کوانتومی پیشنهاد کرده اند [۳۶-۴۴].

تحول یکانی ولگشت کوانتومی، درهم تنیدگی کلی میان فضای سکه و فضای مکان در ولگشت کوانتومی می باشد. درهم تنیدگی کوانتومی به عنوان یک کمیت منحصر به فرد کوانتومی بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است این درهم تنیدگی را می توان به وسیله ی آنترپی فن نویمان با محاسبه ی ویژه مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته در حالات خالص به دست آورد.

آنتروپی فن‌نویمن به صورت:

$$S_N(\rho) = -tr(\rho \log \rho) \quad (12.2)$$

می‌باشد که در آن $\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ ، ماتریس چگالی سیستم کوانتومی می‌باشد. با توجه به دینامیک یکانی ولگشت کوانتومی، سیستم در حالت خالص، باقی می‌ماند و این آنتروپی به صفر می‌رسد. با این حال، برای این حالات خالص درهم‌تنیدگی بین فضای سکه و فضای مکان در ولگشت کوانتومی را می‌توان به وسیله‌ی آنتروپی فن‌نویمن تعیین کرد.

$$S(\rho) = -tr(\rho_c \log(\rho_c)) \quad (13.2)$$

که در آن $\rho_c = tr_x(\rho)$ ، جمع روی همه حالات را می‌دهد. با استفاده از معادله تابع موج ۱.۲ و خواص نرمالیزه کردن، ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت:

$$\begin{aligned} \rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \Rightarrow \rho_c &= \begin{bmatrix} a_k(t) \\ a_k(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k^*(t) & b_k^*(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a_k|^2 & a_k(t)b_k^*(t) \\ a_k^*(t)b_k(t) & |b_k|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_L(t) & Q(t) \\ Q^*(t) & P_R(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

به دست می‌آید. و همچنین ویژه‌مقادیر این ماتریس چگالی به صورت

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4(P_L(t)P_R(t) - |Q(t)|^2)} \right] \quad (15.2)$$

می‌باشد. بنابراین آنتروپی درهم‌تنیدگی با استفاده از این دو ویژه‌مقدار به صورت

$$S(\rho) = -\lambda_+ \log(\lambda_+) - \lambda_- \log(\lambda_-) \quad (16.2)$$

به دست می‌آید. این ویژه‌مقادیر زمانی که $t \rightarrow \infty$ ، به صورت $\Lambda_{\pm} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda_{\pm}$ می‌باشند. که در نتیجه:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4(\Pi_L \Pi_R - |Q_0|^2)} \right] \quad (17.2)$$

تبدیل می‌شوند. از طرفی

$$\begin{bmatrix} \Pi_L \\ \Pi_R \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{Q_0}{\tan(\theta)} \\ 1 - 2 \operatorname{Re} \frac{Q_0}{\tan(\theta)} \end{bmatrix}. \quad (18.2)$$

$$\Pi_L \Pi_R = \frac{1}{4} - \left(\frac{\operatorname{Re}(Q_0)}{\tan(\theta)} \right)^2 \quad (19.2)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۱۷.۲ و ۱۹.۲ داریم:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\chi} \quad (20.2)$$

که در آن

$$\chi = |Q_0|^2 + \left(\frac{\text{Re}(Q_0)}{\tan(\theta)}\right)^2 \quad (21.2)$$

می باشد. باید توجه داشت که

$$\circ < \Lambda_+ \Lambda_- < 1,$$

$$\circ < \chi < \frac{1}{4}.$$

می باشند. و همچنین مقدار حدی آنروپی درهم تنیدگی به صورت

$$S_0 = -\Lambda_+ \log \Lambda_+ - \Lambda_- \log \Lambda_- \quad (22.2)$$

می باشد که فقط وابسته به شرایط اولیه مسئله است. بنابراین همانطور که مشاهده می کنیم ولگشت کوانتومی بعد از یک مرحله گذرا به یک تعادل ترمودینامیکی بین فضای سکه و فضای مکان می رسد. به منظور ایجاد یک توصیف کامل تری از این تعادل لازم است که این ویژه مقادیر ρ_c را با ویژه مقادیر عملگر هامیلتونی مرتبط با آن ها، H_c ، مرتبط کنیم. سیستم های ترمودینامیکی که با محیط خود برهم کنش دارند پس از مدتی به یک حالت حدی میل خواهند کرد به عبارتی

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0 \quad (23.2)$$

در این صورت با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ داریم:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H_c, \rho_c] + \Gamma \rho_c \quad (24.2)$$

که در آن $\Gamma \rho_c$ نشان دهنده ی حرکت براونی است که توسط نویز (نیروهای نوسانی) به سیستم اعمال می شود. با در نظر گرفتن $\Gamma \rho_c = 0$ خواهیم داشت

$$[H_c, \rho_c] = 0 \quad (25.2)$$

بنابراین H_c و ρ_c ویژه مقادیر مشترک دارند، اگر ویژه مقادیر H_c را $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$ بگیریم و همچنین ویژه مقادیر ρ_c $\pm \Lambda$ باشند، آن گاه بین این دو ویژه مقدار ارتباطی وجود دارد، ارتباط بین این دو، به وسیله ی نوع آنسامبلی که انتخاب می کنیم مشخص می شود. ما در اینجا آنسامبل را کانونیک در نظر گرفته ایم، بنابراین

$$\Lambda_{\pm} \equiv \frac{e^{\pm\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}} \quad (26.2)$$

که در آن β به عنوان معکوس دما به صورت $\beta = \frac{1}{T}$ تعریف می شود. از آن جایی که ماتریس چگالی کاهش یافته برای ولگشت کوانتومی به ماتریس چگالی پایایی میل می کند بنابراین با مقایسه ی حالاتی که در برهم کنش دمایی با محیط هستند، می توان به ماتریس چگالی کاهش یافته دما نسبت داد که این دما از روی ویژه مقادیر ماتریس چگالی به دست می آید:

$$\rho_c = \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}} \begin{pmatrix} e^{\beta\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (27.2)$$

بر طبق معادله ۲۷.۲، می‌توان برای درهم‌تنیدگی ولگشت کوانتومی، ترمودینامیک در نظر گرفت. تابع تقسیم معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Z = e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon} = 2 \cosh(\beta\varepsilon) \quad (28.2)$$

و در نهایت دمای درهم‌تنیدگی با استفاده از معادله ۱۷.۲ و ۲۶.۲ به صورت:

$$T = \frac{2\varepsilon}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{\chi}}{1-\sqrt{\chi}}\right)} \quad (29.2)$$

نوشت. همچنین انرژی آزاد هلموهلتز به صورت

$$A = -\frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta\varepsilon)] = \frac{T}{4} \ln\left(\frac{1}{\chi} - \chi\right) \quad (30.2)$$

و انرژی درونی به صورت

$$U = -\varepsilon \tanh(\beta\varepsilon) = -2\varepsilon\sqrt{\chi} \quad (31.2)$$

و سرانجام آنروپی به وسیله‌ی

$$S_0 = \beta U - \beta A \quad (32.2)$$

نمایش داده می‌شوند. که این تعریف ترمودینامیکی برای آنروپی، در نمودار ۱.۲ نشان داده شده است.

در این منحنی به ترتیب از بالا به پایین، خط پررنگ $\beta\varepsilon$ ، خط نقطه‌چین آنروپی S_0 ، خط کم‌رنگ انرژی βU و خط نقطه‌چین بزرگ انرژی آزاد هلموهلتز βA را نشان می‌دهد.

۱.۲.۲ تاثیر شرایط اولیه بر دمای درهم‌تنیدگی بر روی خط

در بخش قبل مشاهده کردیم که ترمودینامیک درهم‌تنیدگی وابسته به Q_0 می‌باشد. همانطور که بیان شد این کمیت فقط به شرایط اولیه وابسته می‌باشد، از این رو در ادامه‌ی این بخش ما دمای درهم‌تنیدگی را بر حسب شرایط اولیه‌ی مختلف در یک بعد بررسی خواهیم کرد.

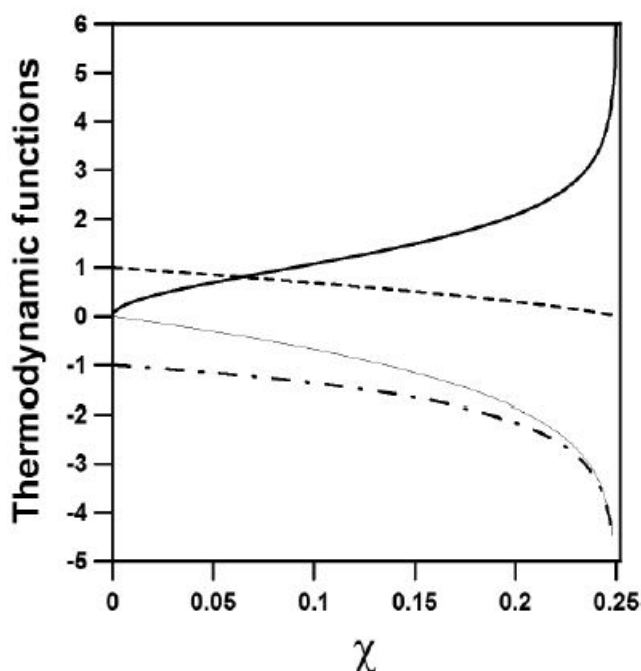
۲ حالت موضعی

در این مورد حالت اولیه‌ی ما، در یک فاز نسبی تغییرات دارد:

$$|\psi(\circ)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ e^{i\varphi} \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} |\circ\rangle, \quad (33.2)$$

که در آن $\gamma = [0, \pi]$ و $\varphi = [0, 2\pi]$ می‌باشند. حال Q_0 را با استفاده از رابطه‌ی ۱۰.۲ و با شرایط اولیه‌ی معادله‌ی ۳۳.۲ به دست می‌آوریم.

^۲Localized initial conditions



شکل ۱.۲: منحنی تابع ترمودینامیکی بدون بعد به عنوان تابعی از χ

برای به دست آوردن $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ از حل تحلیلی ولگشت کوانتومی مبتنی بر تبدیل فوریه که در فصل ۱ بیان شد، استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب از قبل داریم:

$$\lambda_1 = e^{-i\omega t}, \lambda_2 = (-1)^t e^{i\omega t}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{N_-} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} e^{i(k-\omega)} - 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \frac{1}{N_+} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} e^{i(k+\omega)} - 1 \end{pmatrix}$$

که

$$N_{\pm}^2 = 2(1 + \cos^2(k) \pm \cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)})$$

می باشد. بنابراین:

$$\tilde{\psi}(k, t) = e^{-i\omega t} \langle \varphi_1 | \tilde{\psi}(k, 0) | \varphi_1 \rangle + (-1)^t e^{i\omega t} \langle \varphi_2 | \tilde{\psi}(k, 0) | \varphi_2 \rangle$$

در نتیجه برای این حالت خواهیم داشت:

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{N_-^2} \left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} e^{-i(k-\omega)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} e^{i(k-\omega)} - 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$+ \frac{(-1)^t e^{i\omega t}}{N_+^2} \left[\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} e^{-i(\omega+k)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} e^{i(\omega+k)} - 1 \end{pmatrix} \right]$$

بعد از کمی عملیات جبری داریم:

$$\tilde{a}_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}(\cos \frac{\gamma}{2} + (\sqrt{2}e^{-i(k-\omega)} - 1) \sin \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi})}{2 + 2\cos^2(k) - 2\cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)}} - \frac{(-1)^t e^{i\omega t}(-\cos \frac{\gamma}{2} + (\sqrt{2}e^{-i(k+\omega)} + 1) \sin \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi})}{2 + 2\cos^2(k) + 2\cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \quad (34.2)$$

و همچنین:

$$\tilde{b}_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}(\cos \frac{\gamma}{2} + (\sqrt{2}e^{-i(k-\omega)} - 1) \sin \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi})(\sqrt{2}e^{i(k-\omega)} - 1)}{2 + 2\cos^2(k) - 2\cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)}} - \frac{(-1)^t e^{i\omega t}(-\cos \frac{\gamma}{2} + (\sqrt{2}e^{-i(k+\omega)} + 1) \sin \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi})(\sqrt{2}e^{i(k+\omega)} + 1)}{2 + 2\cos^2(k) + 2\cos(k)\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \quad (35.2)$$

با بکار بردن تبدیل فوریه داریم:

$$Q(t) = \sum_k a_k(t)b_k^*(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}_k(t)\tilde{b}_k^*(t) \quad (36.2)$$

بنابراین با بکار بردن روابط ۳۴.۲ و ۳۵.۲ و همچنین با قرار دادن $\sin \omega = \frac{\sin(k)}{\sqrt{2}}$ و کمی عملیات جبری داریم:

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{1 + \cos^2(k)} (\sin(\gamma)\cos^2(k)\cos(\varphi) + \cos^2(k)\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\sin(k)\cos(k)\sin(\varphi) - i\sin(\gamma)\cos(k)\sin(k)\cos(\varphi) + i\sin(\gamma)\cos^2(k)\sin(\varphi) - i\sin(\gamma)\sin(\varphi) - i\sin(k)\cos(k)\cos(\gamma)) \right)$$

در نتیجه:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) ((-\cos(\varphi) + i\sqrt{2}\sin(\varphi))\sin(\gamma) - \cos(\gamma)) \quad (37.2)$$

با بکار بردن رابطه‌ی ۳۷.۲ در رابطه‌ی ۲۱.۲ داریم:

$$\chi = -\frac{1}{16} \frac{1}{\sin^2(\theta)} ((-2 + \sqrt{2})^2 (\cos^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)\cos(\gamma)) - 2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta) + 2\cos^2(\varphi)\cos^2(\gamma)\cos^2(\theta) - 2\cos(\varphi)\cos(\gamma)\sin(\gamma) - 2 + \cos^2(\gamma) + 2\cos^2(\theta) - 2\cos^2(\gamma)\cos^2(\theta))$$

سکه در حالت

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

قرار دارد بنابراین:

$$\chi = \chi_0 (2\sin(\gamma)\cos(\varphi)\cos(\gamma) + 1) \quad (38.2)$$

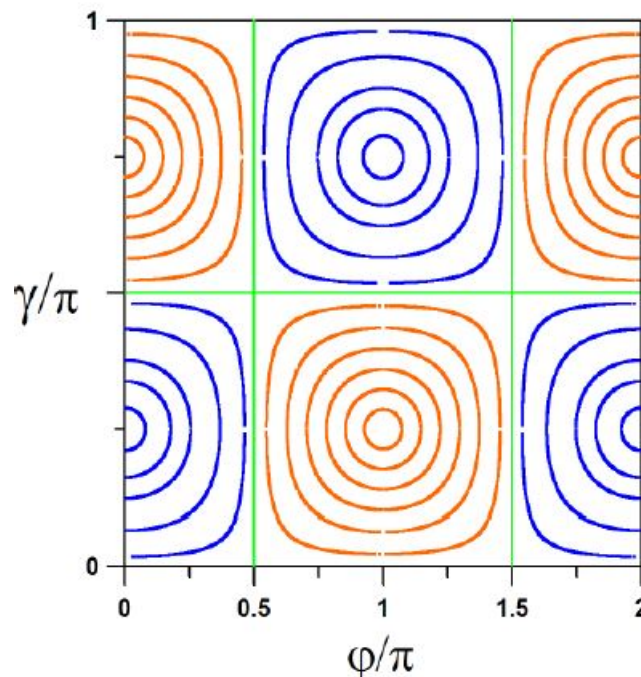
که در آن

$$\chi_0 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

همچنین می‌توان دما را با استفاده از کمیت χ_0 بیان کرد:

$$T_0 = \frac{2}{\ln\left(\frac{1+2\sqrt{\chi_0}}{1-2\sqrt{\chi_0}}\right)} \quad (39.2)$$

شکل ۲.۲ نمودار تغییرات دما بر حسب γ و φ را نشان می‌دهد.

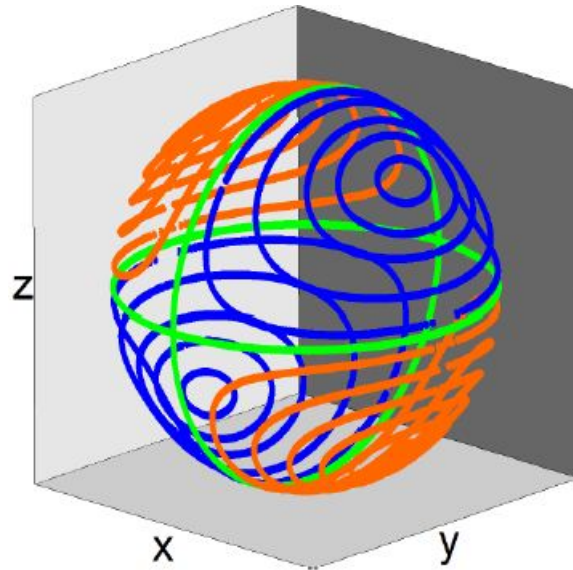


شکل ۲.۲: منحنی تغییرات دما بر حسب γ و φ

با توجه به تقارن چرخش زاویه‌ی φ چهار منطقه مشخص هستند: دو ناحیه سرد و دو ناحیه گرم. نواحی گرم دارای شش خط دمایی می‌باشند که به ترتیب از داخل به خارج دمای آن‌ها $1/1, 1/3, 1/6, 2/2, 3/2, 6/5$ می‌باشد. نواحی سرد دارای پنج خط دمایی هستند که دمای آن‌ها به ترتیب $1/1, 1/3, 1/6, 2/2, 3/2, 6/5$ می‌باشد. خط راست متناسب با $T/T_0 = 1$ می‌باشد.

شکل ۳.۲ کره‌ی بلاخ^۳ در این حالت را نشان می‌دهد. هر دو شکل چهار منطقه را نشان می‌دهند، دو تا از مناطق متناسب با دمای $T > T_0$ (خطوط نارنجی) و دو منطقه‌ی دیگر متناسب با دمای $T < T_0$ (خطوط آبی) را نشان می‌دهند. بیشترین دما (خطوط سبز) متناسب با $T = T_0$ و حالت در $\pi, \pi/2, 0$ و $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$ می‌باشد.

^۳Bloch sphere



شکل ۳.۲: منحنی تغییرات دما شکل (۲.۲)، نشان داده شده به صورت کره‌ی بلاخ

حالت ناموضعی^۴

در بررسی ولگشت کوانتومی با شرایط اولیه‌ی $|\psi_0\rangle$ ، وقتی که شرایط اولیه غیرموضعی در نظر گرفته شوند ویژگی‌های جدیدی ظاهر می‌شود [۴۴]. ولگشت کوانتومی در حالت‌های تعمیم‌یافته مورد توجه بسیاری از محققان بوده و در این زمینه مطالعات زیادی انجام شده است [۳۶]. در این قسمت دمای درهم‌تنیدگی را در چنین مواردی بررسی خواهیم کرد. توزیع گاوسی زیر برای این کار انتخاب شده است:

$$a_k^\circ \equiv \left[\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma_0^2}\right) \right]^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\gamma}{4}\right) \quad (40.2)$$

$$b_k^\circ \equiv e^{i\varphi} \left[\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma_0^2}\right) \right]^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{\gamma}{4}\right) \quad (41.2)$$

که در آن σ_0 انحراف معیار استاندارد، و $\gamma \in [0, \pi]$ نسبت پرتاب سکه چپ با سکه راست را تعیین می‌کند و $\varphi \in [0, 2\pi]$ فاز عمومی می‌باشد.

با بکار بردن این شرایط (روابط ۴۰.۲ و ۴۱.۲) مقدار تقریبی $Q(t)$ با استفاده از معادلات

^۴Distributed initial conditions

۱۰.۲ و ۳۶.۲ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t) = & \frac{e^{-i\omega t}}{N_{-}^{\Upsilon}} \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{\Upsilon} e^{-i(k-\omega)} - 1 \end{array} \right) \right. \\ & \times \left(\begin{array}{c} \left(\frac{1}{\sigma_{\circ} \sqrt{\Upsilon} \pi} \exp\left(-\frac{k^{\Upsilon}}{\Upsilon \sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right) \right)^{\frac{1}{\Upsilon}} \cos\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) \\ e^{i\varphi} \left(\frac{1}{\sigma_{\circ} \sqrt{\Upsilon} \pi} \exp\left(-\frac{k^{\Upsilon}}{\Upsilon \sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right) \right)^{\frac{1}{\Upsilon}} \sin\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{\Upsilon} e^{-i(k-\omega)} - 1 \end{array} \right) \Big] \\ & + \frac{e^{i\omega t} (-1)^t}{N_{+}^{\Upsilon}} \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ -\sqrt{\Upsilon} e^{-i(k+\omega)} - 1 \end{array} \right) \right. \\ & \times \left(\begin{array}{c} \left(\frac{1}{\sigma_{\circ} \sqrt{\Upsilon} \pi} \exp\left(-\frac{k^{\Upsilon}}{\Upsilon \sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right) \right)^{\frac{1}{\Upsilon}} \cos\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) \\ e^{i\varphi} \left(\frac{1}{\sigma_{\circ} \sqrt{\Upsilon} \pi} \exp\left(-\frac{k^{\Upsilon}}{\Upsilon \sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right) \right)^{\frac{1}{\Upsilon}} \sin\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\sqrt{\Upsilon} e^{-i(k+\omega)} - 1 \end{array} \right) \Big] \end{aligned}$$

مشابه قبل داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(t) = & \frac{e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\Upsilon} \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \cos\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) + \frac{1}{\Upsilon} (\sqrt{\Upsilon} e^{-i(k-\omega)} - 1) \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \sin\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) e^{i\varphi} \right)}{\Upsilon + \Upsilon \cos^{\Upsilon}(k) - \Upsilon \cos(k) \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon}(k)}} \\ & - \frac{(-1)^t e^{i\omega t} \left(-\frac{1}{\Upsilon} \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \cos\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) + \frac{1}{\Upsilon} (\sqrt{\Upsilon} e^{-i(k+\omega)} - 1) \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \sin\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) e^{i\varphi} \right)}{\Upsilon + \Upsilon \cos^{\Upsilon}(k) + \Upsilon \cos(k) \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon}(k)}} \end{aligned} \quad (۴۲.۲)$$

۹

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k(t) = & \left(\frac{1}{\Upsilon} \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \cos\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) + \frac{1}{\Upsilon} (\sqrt{\Upsilon} e^{-i(k-\omega)} - 1) \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \sin\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) e^{i\varphi} \right) \\ & \times \left(\frac{e^{-i\omega t} (\sqrt{\Upsilon} e^{i(k-\omega)} - 1)}{\Upsilon + \Upsilon \cos^{\Upsilon}(k) - \Upsilon \cos(k) \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon}(k)}} \right) \\ & + \left(-\frac{1}{\Upsilon} \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \cos\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) + \frac{1}{\Upsilon} (\sqrt{\Upsilon} e^{-i(k+\omega)} - 1) \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{\Upsilon} e^{\left(-\frac{1}{\Upsilon} \frac{k^{\Upsilon}}{\sigma_{\circ}^{\Upsilon}}\right)}}{\sigma_{\circ} \sqrt{\pi}}} \sin\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\right) e^{i\varphi} \right) \\ & \times \left(\frac{(-1)^t e^{i\omega t} (\sqrt{\Upsilon} e^{i(k+\omega)} + 1)}{\Upsilon + \Upsilon \cos^{\Upsilon}(k) + \Upsilon \cos(k) \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon}(k)}} \right) \end{aligned} \quad (۴۳.۲)$$

با بکار بردن رابطه‌ی ۳۶.۲ و با استفاده از رابطه‌ی ۱۰.۲ داریم:

$$Q_0 = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda \sigma_0 \pi^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{k^2}{\sigma_0^2}}}{1 + \cos^2(k)} (-\sin(\gamma) \cos^2(k) \cos(\varphi) - \cos^2(k) \cos(\gamma)) \right. \right. \\ \left. \left. - i \sin(\gamma) \cos^2(k) \sin(\varphi) + i \sin(\gamma) \sin(\varphi) \right) dk \right)$$

بنابراین با در نظر گرفتن:

$$\sigma_0 \gg 1$$

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) \sin(\gamma) \quad (44.2)$$

مشابه قبل، با جایگذاری رابطه‌ی ۴۴.۲ در رابطه‌ی ۲۱.۲ داریم:

$$\chi = \left(\frac{\cos(\gamma)}{2 \cos(\theta)} \right)^2 \quad (45.2)$$

و با استفاده از رابطه‌ی ۲۹.۲ داریم:

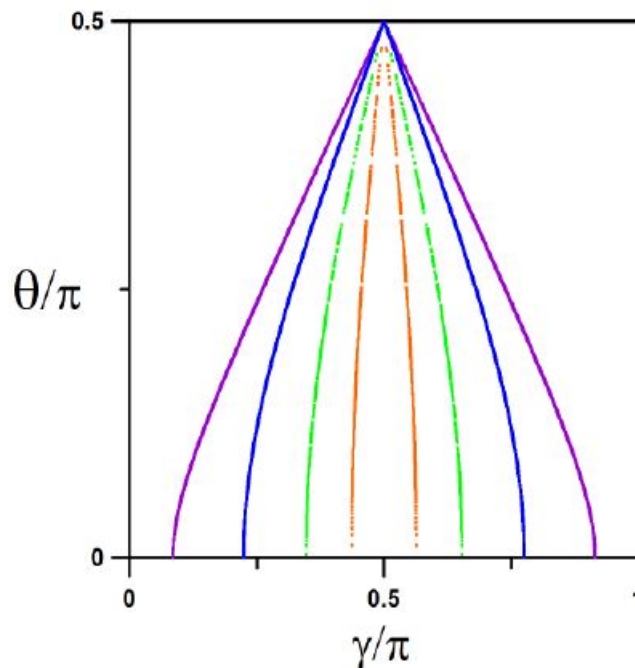
$$\beta \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{|\cos(\theta)| + |\cos(\gamma)|}{|\cos(\theta)| - |\cos(\gamma)|} \right) \quad (46.2)$$

توابع Q_0, χ, β برای $\gamma = \frac{\pi}{2}$ صفر می‌شوند، و همزمان آن‌تروپی (رابطه‌ی ۲۲.۲) ماکزیمم مقدار خود در $S_0 = 0$ به دست می‌آورد. تحت این شرایط، سیستم یک رفتار مانند فرایند مارکوفی^۵ کلاسیکی دارد [۴۰]. به عبارتی دیگر شرایط اولیه γ و φ مستقل نیستند و برای هر مقدار γ فقط یک مقدار برای T وجود دارد، سپس برای θ ثابت، خطوط دمایی به عنوان تابعی از γ و φ نیست. در عوض دمای درهم‌تنیدگی به θ و γ وابسته است. انتخاب بر پایه‌ی پرتاب سکه θ یا شرایط مناسب سکه γ می‌تواند باعث به دست آوردن دمای درهم‌تنیدگی یکسان شود. شکل ۴.۲ خطوط دمایی را بر حسب θ و γ را نشان می‌دهد. در نمودار، چهار منحنی (با خطوط رنگی مختلف) معرفی شده است. هر منحنی دو شاخه به صورت متقارن، و هر دو مجموعه $\gamma = \frac{\pi}{2}$ و $T = \infty$ قرار گرفته است. مقادیر T به وسیله‌ی معادله‌ی ۴۶.۲ داده شده است. از چپ به راست مقادیر T با $\varepsilon = 1$: ۵/۵، ارغوانی، ۱، آبی، ۲، سبز، و ۵ نارنجی می‌باشند. در ولگشت کوانتومی در زمانی گذرا یک درهم‌تنیدگی میان فضای سکه و فضای مکان وجود دارد. در این صورت ما می‌توانیم مفهوم دمای درهم‌تنیدگی را بیان کنیم.

۳.۲ محاسبه‌ی دمای ولگشت کوانتومی بر روی چرخه

همانطور که قبلاً اشاره شد، ولگشت کوانتومی استاندارد بر روی خط متناظر با یک تحول یک بعدی از یک سیستم کوانتومی (ذره) که وابسته به شرایط اولیه‌ی سکه، چپ (راست) می‌باشد. فضای هیلبرت این سیستم متشکل از تانسور $H_s \otimes H_c$ است که H_s فضای هیلبرت فرض شده برای فضای مکان بر روی خط و H_c فضای هیلبرت مربوط به سکه می‌باشد. $T_-(T_+)$ را عملگرهایی در H_s می‌نامیم که باعث حرکت ذره به سمت چپ یا راست می‌شوند. و همچنین

^۵Markov



شکل ۴.۲: منحنی خطوط دما بر حسب θ و γ

عملگرهای مربوط به فضای سکه در H_c می‌باشند. عملگر یکانی نیز به صورت زیر بیان شد:

$$U(\theta) = \{T_- \otimes |L\rangle\langle L| + T_+ \otimes |R\rangle\langle R|\} \circ \{I \otimes K(\theta)\} \quad (47.2)$$

که در آن I عملگر یکانی در H_s و σ_x و σ_z ماتریس‌های پائولی در H_c می‌باشند. عملگر یکانی $U(\theta)$ ، حالت را در گام‌های زمانی مختلف تغییر می‌دهد. یعنی $|\psi(t+1)\rangle = U(\theta)|\psi(t)\rangle$ و تابع موج به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{bmatrix} |k\rangle \quad (48.2)$$

که $a_k(t)$ دامنه حالت $|R\rangle$ و $b_k(t)$ دامنه حالت $|L\rangle$ فرض شده است. تحول یکانی معادله ۴۳.۲، مشابه قبل، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\left. \begin{aligned} |a_k(t+1)\rangle &= U(\theta) |a_k(t)\rangle \\ |b_k(t+1)\rangle &= U(\theta) |b_k(t)\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)a_k(t) + \sin(\theta)b_k(t) \\ \sin(\theta)a_k(t) - \cos(\theta)b_k(t) \end{pmatrix}$$

با اعمال عملگرهای سکه، که فقط روی قسمت سکه اثر می‌کنند داریم:

$$|\psi(t+1)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta)a_{k+1}(t) + \sin(\theta)b_{k+1}(t) \\ \sin(\theta)a_{k-1}(t) - \cos(\theta)b_{k-1}(t) \end{pmatrix} \quad (49.2)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a_k(t+1) = \cos(\theta)a_{k+1}(t) + \sin(\theta)b_{k+1}(t) \\ b_k(t+1) = \cos(\theta)a_{k-1}(t) - \sin(\theta)b_{k-1}(t) \end{cases} \quad (50.2)$$

که در آن $\theta = [\frac{0}{\pi}, \frac{\pi}{4}]$ پارامتری است که بر اساس پرتاب سکه مشخص می‌شود. ($\theta = \frac{\pi}{4}$ ، سکه هادامارد می‌باشد).

حال به بررسی معادلات چرخه بر این اساس می‌پردازیم. در یک بعد، شبکه در حالت بسته به صورت یک حلقه می‌باشد بنابراین اولین سایت نزدیک به آخرین سایت می‌باشد. اگر شبکه را از 0 تا $N-1$ گسترش دهیم، آنگاه ما معادلات تحول یکانی برای چرخه را به دست می‌آوریم تحول هادامارد بر روی چرخه در [۴۵] نشان داده شده است. برای به دست آوردن $a_k(t)$ و $b_k(t)$ ، دو گام زمانی را در نظر می‌گیریم و متناظر با آن معادلات تحول را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_k(t+1) - a_k(t-1) = \cos(\theta) [a_{k+1}(t) - a_{k-1}(t)] \\ b_k(t+1) - b_k(t-1) = \cos(\theta) [b_{k+1}(t) - b_{k-1}(t)] \end{cases} \quad (51.2)$$

که در آن $0 \leq k \leq N-1$ می‌باشد. توجه داشته باشید که پس از تبدیل دومی، ملاحظه می‌کنیم که هر دو مولفه‌ی فضای سکه معادل می‌باشند. این معادلات را می‌توان در فرم ماتریسی قرار داد:

$$\begin{aligned} \vec{A}(t+1) - \vec{A}(t-1) &= M\vec{A}(t), \\ \vec{B}(t+1) - \vec{B}(t-1) &= M\vec{B}(t), \end{aligned} \quad (52.2)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \vec{A}(t) &= [a_0(t), \dots, a_{N-1}(t)]^T, \\ \vec{B}(t) &= [b_0(t), \dots, b_{N-1}(t)]^T, \end{aligned}$$

و ماتریس M :

$$\cos(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (53.2)$$

بدین ترتیب، M یک ماتریس مربعی چرخه‌ای است با بعد $N \times N$. که در [۴۶] نشان داده شده است. ویژه مقادیر و ویژه بردار این ماتریس به ترتیب، به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2i \cos(\theta) \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right) \\ v_{kl} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{\sqrt{2}i\pi kl}{N}\right) \end{aligned} \quad (54.2)$$

که در آن v_{kl} عنصر l ام از ویژه بردار مربوط به ویژه مقدار λ_k را نشان می دهد. و شاخص k و l از 0 تا $N-1$ تغییر می کنند. اکنون می خواهیم معادلات ۵۰.۲ را حل کنیم، در حالتی که ماتریس M مورب می باشد. برای انجام این کار، دو طرف معادلات ۵۰.۲ را در v_{kl} ضرب می کنیم، و بردار $c_k^{L,R}(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} c_k^L(t) &= \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl}^* a_l(t) \\ c_k^R(t) &= \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl}^* b_l(t) \end{aligned} \quad (55.2)$$

که در آن مزدوج مختلط v_{kl} می باشد. بنابراین دامنه های $c_k^{L,R}(t)$ بر طبق معادله اساسی زیر بیان می شوند:

$$c_k^{L,R}(t+1) - c_k^{L,R}(t-1) = \lambda_k c_k^{L,R}(t) \quad (56.2)$$

اگر $c_k^{L,R}(0)$ و $c_k^{L,R}(1)$ دامنه های ارزیابی شده در دو گام زمانی متوالی اولیه، سپس وابسته زمانی باشند آنگاه معادله ۵۴.۲ به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} c_k^{L,R}(t) &= \alpha_k^{L,R} e^{i\Omega_k t} + (-1)^t \beta_k^{L,R} e^{-i\Omega_k t}, \\ \sin(\Omega_k) &\equiv \cos(\theta) \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right) = \frac{\lambda_k}{\sqrt{2}i}, \\ \alpha_k^{L,R} &\equiv \frac{c_k^{L,R}(1) + c_k^{L,R}(0)e^{-i\Omega_k}}{\sqrt{2}\cos(\Omega_k)}, \\ \beta_k^{L,R} &\equiv \frac{c_k^{L,R}(0)e^{-i\Omega_k} - c_k^{L,R}(1)}{\sqrt{2}\cos(\Omega_k)}. \end{aligned} \quad (57.2)$$

با بکارگیری ویژگی تعامد داریم:

$$\sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} v_{kl}^* = \delta_{kk'}$$

که در آن مزدوج ترانهادی v_{kl} می باشد. بدین ترتیب با بکار بردن تبدیل معکوس می توانیم به متغیرهای اولیه برگردیم بنابراین با استفاده از معادله ۵۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned} a_k(t) &= \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} c_l^L(t), \\ b_k(t) &= \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} c_l^R(t) \end{aligned} \quad (58.2)$$

۴.۲ دما و درهم تنیدگی بر روی چرخه

می دانیم که تحول یکانی ولگشت کوانتومی، یک درهم تنیدگی بین فضای سکه و فضای مکان ایجاد می کند. این درهم تنیدگی می تواند به وسیله ی آنتروپی فن نویمان برای ماتریس چگالی کاهش یافته بیان شود [۴۷]. که آنتروپی درهم تنیدگی تعریف می شود. بنابراین:

$$S(t) = -tr [\rho_c(t) \ln \rho_c(t)] \quad (59.2)$$

که در آن:

$$\rho_c(t) = \text{tr}_x(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) \quad (۶۰.۲)$$

و ردگیری جزئی بر روی مکان می‌باشد. با بکار بردن ۴۴.۲ داریم:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| &= \begin{pmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k(t) & b_k(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a_k(t)|^2 & a_k(t)b_k^*(t) \\ b_k(t)a_k^*(t) & |b_k(t)|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\rho_c(t) = \begin{pmatrix} p_L(t) & Q(t) \\ Q(t)^* & p_R(t) \end{pmatrix} \quad (۶۱.۲)$$

که احتمال سکه چپ و راست به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} p_L(t) &\equiv \sum_{k=0}^{N-1} |a_k(t)|^2, \\ p_R(t) &\equiv \sum_{k=0}^{N-1} |b_k(t)|^2, \end{aligned} \quad (۶۲.۲)$$

با $p_R(t) + p_L(t) = 1$ و همچنین

$$Q(t) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t)b_k^*(t). \quad (۶۳.۲)$$

در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم که در تحول یکانی سیستم‌های بسته، توزیع احتمال $p_L(t)$ و $p_R(t)$ وقتی که زمان به سمت بی‌نهایت میل کند، همگرا نیستند. اما می‌توان نشان داد متوسط زمانی احتمال به شکل زیر همگرا است.

$$\bar{p}_L(t) = \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} p_L(t') \quad (۶۴.۲)$$

به همین ترتیب $\bar{p}_R(t)$ و $\bar{Q}(t)$ نیز به دست می‌آیند. این تعریف متناظر با مفهوم اساسی نمونه‌گیری یک سیستم، زمانی که اندازه‌گیری سیستم در یک زمان تصادفی انتخاب شده در فاصله‌ی $[0, t]$ باشد، نتیجه‌ی توزیع دقیقاً میانگین توزیع احتمال می‌باشد. بنابراین میانگین ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{\rho}_c(t) \equiv \begin{pmatrix} \bar{p}_L(t) & \bar{Q}(t) \\ \bar{Q}^*(t) & \bar{p}_R(t) \end{pmatrix} \quad (۶۵.۲)$$

و حد آن زمانی که $t \rightarrow \infty$:

$$\bar{\rho}_c(\infty) \equiv \begin{pmatrix} \Pi_L & Q_\circ \\ Q_\circ^* & \Pi_R \end{pmatrix} \quad (۶۶.۲)$$

که در آن Π_L و Π_R و Q_\circ توزیع احتمال حدی، که به ترتیب از $\bar{p}_L(t)$ و $\bar{p}_R(t)$ و $\bar{Q}(t)$ به دست می‌آیند، زمانی که $t \rightarrow \infty$ بنابراین داریم:

$$\Pi_L = \sum_{k=\circ}^{N-1} \left\{ |\alpha_k^L|^2 + |\beta_k^L|^2 \right\}, \quad (۶۷.۲)$$

$$\Pi_R = \sum_{k=\circ}^{N-1} \left\{ |\alpha_k^R|^2 + |\beta_k^R|^2 \right\}, \quad (۶۸.۲)$$

$$Q_\circ = \sum_{k=\circ}^{N-1} \left\{ \alpha_k^{R*} \alpha_k^L + \beta_k^R \beta_k^L \right\}. \quad (۶۹.۲)$$

با استفاده از روابط ۵۷.۲:

$$\Pi_L = \sum_{k=\circ}^{N-1} \frac{|c_k^L(1)|^2 + |c_k^L(\circ)|^2}{\Upsilon \cos^2 \Omega_k} + \sum_{k=\circ}^{N-1} \frac{i \sin \Omega_k [c_k^L(1)c_k^{L*}(\circ) - c_k^{L*}(1)c_k^L(\circ)]}{\Upsilon \cos^2 \Omega_k} \quad (۷۰.۲)$$

$$\Pi_R = \sum_{k=\circ}^{N-1} \frac{|c_k^R(1)|^2 + |c_k^R(\circ)|^2}{\Upsilon \cos^2 \Omega_k} + \sum_{k=\circ}^{N-1} \frac{i \sin \Omega_k [c_k^R(1)c_k^{R*}(\circ) - c_k^{R*}(1)c_k^R(\circ)]}{\Upsilon \cos^2 \Omega_k} \quad (۷۱.۲)$$

$$Q_\circ = \sum_{k=\circ}^{N-1} \frac{c_k^L(\circ)c_k^{R*}(\circ) + c_k^L(1)c_k^{R*}(1)}{\Upsilon \cos^2 \Omega_k} + \sum_{k=\circ}^{N-1} \frac{i \sin \Omega_k [c_k^L(1)c_k^{R*}(\circ) - c_k^{L*}(\circ)c_k^R(1)]}{\Upsilon \cos^2 \Omega_k} \quad (۷۲.۲)$$

به دست می‌آیند. و همچنین رابطه‌ی ۶۵.۲ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\bar{\rho}_c(t) = \bar{\rho}_c(\infty) + \frac{\Upsilon}{t} \begin{pmatrix} \xi(t) & \zeta(t) \\ \zeta^*(t) & -\zeta(t) \end{pmatrix} \quad (۷۳.۲)$$

که در آن $\xi(t)$ و $\zeta(t)$ توابعی از t هستند که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\xi(t) \equiv \sum_{k=\circ}^{N-1} \text{Re} \{ \alpha_k^L \beta_k^{L*} \text{Im}_k(t) \}, \quad (۷۴.۲)$$

$$\zeta(t) \equiv \frac{1}{\Upsilon} \sum_{k=\circ}^{N-1} \{ \alpha_k^L \beta_k^{R*} \text{Im}_k(t) + \beta_k^L \alpha_k^{R*} \text{Im}_k^*(t) \}, \quad (۷۵.۲)$$

$$\text{Im}_k(t) = \frac{1 - e^{i(\Upsilon \Omega_k + \pi)t}}{1 + e^{\Upsilon i \Omega_k}} \quad (۷۶.۲)$$

که $\text{Re} \{x\}$ قسمت حقیقی x می‌باشد. رابطه‌ی ۷۳.۲ نشان‌دهنده‌ی آن است که همگرایی $\bar{\rho}_c(t)$ به صورت $\frac{1}{t}$ است.

۱.۴.۲ تاثیر شرایط اولیه بر دمای درهم‌تنیدگی بر روی چرخه

برای به‌دست آوردن دمای درهم‌تنیدگی بر روی چرخه همانند بخش (۲.۲) عمل می‌کنیم. ویژه‌مقادیر ماتریس $\bar{\rho}_c(t)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \Pi_L - \lambda & Q_0 \\ Q_0^* & \Pi_R - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (\Pi_L - \lambda)(\Pi_R - \lambda) - |Q_0|^2 &= 0 \\ \Pi_L \Pi_R + \lambda^2 - \lambda(\Pi_L + \Pi_R) - |Q_0|^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\Lambda}^\pm = \frac{1}{\chi} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4(\Pi_L \Pi_R - |Q_0|^2)} \right] \quad (77.2)$$

همانطور که در بخش (۲.۲) نیز گفته شد. می‌توان ویژه‌مقادیر را به‌صورت:

$$\bar{\Lambda}^\pm = \frac{1}{\chi} \pm \sqrt{\chi} \quad (78.2)$$

به‌دست آورد. که در آن χ طبق رابطه‌ی ۲۰.۲ به‌دست می‌آید. و همچنین با بکارگیری روابط ۲۳.۲ و ۲۴.۲ و ۲۵.۲ و یک هامیلتونی دو حالتی با سطح انرژی E_0 ، داریم:

$$\bar{\Lambda}^\pm = \frac{e^{\pm \beta E_0}}{e^{\beta E_0} + e^{-\beta E_0}} \quad (79.2)$$

که در آن $\beta = \frac{1}{T}$. بنابراین با مقایسه روابط ۷۷.۲ و ۷۸.۲، دمای درهم‌تنیدگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{2E_0}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{\chi}}{1-\sqrt{\chi}}\right)} \quad (80.2)$$

بنابراین با به‌دست آوردن χ می‌توانیم دمای درهم‌تنیدگی را تعیین کنیم. به منظور تجزیه و تحلیل این دما بر روی N چرخه و نشان دادن تفاوت آن با دمای درهم‌تنیدگی بر روی خط در بی‌نهایت، ولگشت کوانتومی روی N چرخه، با شرایط اولیه‌ی موضعی را در نظر می‌گیریم. یعنی موقعیت اولیه‌ی ذره در مبدأ، با سکه دلخواه انجام گیرد. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a_k(\circ) \\ b_k(\circ) \end{bmatrix} = \delta_{k\circ} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{\chi}\right) \\ e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\gamma}{\chi}\right) \end{bmatrix}, \quad (81.2)$$

که در آن $\gamma \in [0, \pi]$ و $\varphi \in [0, 2\pi]$ یک نقطه در کره‌ی بلاخ سه بعدی می‌باشد. حال می‌توان با استفاده از روابط فوق توزیع احتمال حدی را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\Pi_L = 1 - \Pi_R, \quad (82.2)$$

$$\begin{cases} a_k(t) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} c_l^L(t) \\ b_k(t) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} c_l^R(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} c_l^L(\circ) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl}^* a_k(\circ) \\ \sum_{l=0}^{N-1} c_l^R(\circ) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl}^* b_k(\circ) \end{cases} \quad (۸۳.۲)$$

و با استفاده از تبدیل فوریه داریم:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{ink} \Rightarrow \begin{cases} c_k^L(\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l^L(\lambda) e^{ilk} \\ c_k^L(\circ) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l^L(\circ) e^{ilk} \end{cases} \quad (۸۴.۲)$$

$$\begin{cases} c_k^R(\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l^R(\lambda) e^{ilk} \\ c_k^R(\circ) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l^R(\circ) e^{ilk} \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۵۰.۲ به یک رابطه‌ی بازگشتی می‌رسیم:

$$\begin{cases} a_k(\lambda) = a_{k+1}(\circ) \cos(\theta) + b_{k+1}(\circ) \sin(\theta) \\ b_k(\lambda) = a_{k-1}(\circ) \sin(\theta) - b_{k-1}(\circ) \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} c_l^L(\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} \exp\left(\frac{\gamma \pi i l}{N}\right) \cos(\theta) c_l^L(\circ) + \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} \exp\left(\frac{\gamma \pi i l}{N}\right) \sin(\theta) c_l^R(\circ) \\ \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} c_l^R(\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} \exp\left(\frac{-\gamma \pi i l}{N}\right) \sin(\theta) c_l^L(\circ) - \sum_{l=0}^{N-1} v_{kl} \exp\left(\frac{-\gamma \pi i l}{N}\right) \cos(\theta) c_l^R(\circ) \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a_k(\lambda) = a_{k+1}(\circ) \cos(\theta) + b_{k+1}(\circ) \sin(\theta) \\ b_k(\lambda) = a_{k-1}(\circ) \sin(\theta) - b_{k-1}(\circ) \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} c_l^L(\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(\frac{\gamma \pi i l}{N}\right) \cos(\theta) c_l^L(\circ) + \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(\frac{\gamma \pi i l}{N}\right) \sin(\theta) c_l^R(\circ) \\ \sum_{l=0}^{N-1} c_l^R(\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-\gamma \pi i l}{N}\right) \sin(\theta) c_l^L(\circ) - \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-\gamma \pi i l}{N}\right) \cos(\theta) c_l^R(\circ) \end{cases} \quad (۸۵.۲)$$

بنابراین با استفاده از روابط فوق (توضیحات در ضمیمه‌ی ۱.آ):

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\gamma \theta) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2(\theta) \cos(\gamma) \right] f(N, \theta) \\ & + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\gamma \theta) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right] g(N, \theta) \end{aligned} \quad (۸۶.۲)$$

و به همین ترتیب (توضیحات در ضمیمه‌ی ۲.آ) داریم:

$$\begin{aligned} Q_{\circ} = & \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\gamma) e^{i\varphi} \sin^2(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\gamma \theta) \cos(\gamma)) h(N, \theta) \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\gamma) e^{-i\varphi} \sin^2(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\gamma \theta) \cos(\gamma)) f(N, \theta) \end{aligned} \quad (۸۷.۲)$$

با در نظر گرفتن سکه پرتابی به صورت $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه می‌توانیم نشان دهیم که:

$$f(N, \theta) = \begin{cases} \frac{(1+\sqrt{2})^N + (1-\sqrt{2})^N}{(1+\sqrt{2})^N - (1-\sqrt{2})^N} \sqrt{2} & N = 2K \\ \frac{(1+\sqrt{2})^{\frac{N}{2}} + (1-\sqrt{2})^{\frac{N}{2}}}{(1+\sqrt{2})^{\frac{N}{2}} - (1-\sqrt{2})^{\frac{N}{2}}} \sqrt{2} & N = 2K + 1 \end{cases} \quad (88.2)$$

که در آن K عدد صحیح می‌باشد. علاوه بر این، زمانی که $N \rightarrow \infty$ ، داریم:

$$f(N, \theta) \rightarrow \frac{1}{\sin(\theta)}$$

برای θ ثابت، خطوط تقریبی دما به عنوان تابعی از شرایط اولیه هستند که به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر تعیین می‌شوند:

$$\chi = |Q_0|^2 + \left(\frac{\text{Re}(Q_0)}{\tan(\theta)} \right)^2$$

بدین ترتیب با استفاده از روابط فوق (توضیحات در ضمیمه‌ی آ.۳):

$$\chi = \frac{1}{16} [h(N, \theta) - f(N, \theta)]^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\gamma) \sin^4(\theta) + \frac{1}{16} [h(N, \theta) + f(N, \theta)]^2 (\cos(\varphi) \sin(\gamma) \sin(\theta) + \cos(\gamma) \cos(\theta))^2 \quad (89.2)$$

اگر ما همزمان $\gamma \rightarrow \pi - \gamma$ و $\varphi + \pi \rightarrow \varphi$ در معادله‌ی ۸۹.۲ تعویض کنیم تغییری ایجاد نمی‌شود. زوایای φ و γ سکه اولیه بر روی کره‌ی بلاخ تعریف می‌کنند، و این تغییر ناپذیری نشان می‌دهد که رفتار تقریبی آن نسبت به مبدا تقارن دارد. این بدان معنی است که هر نقطه در کره‌ی بلاخ دارای ویژگی زیر است:

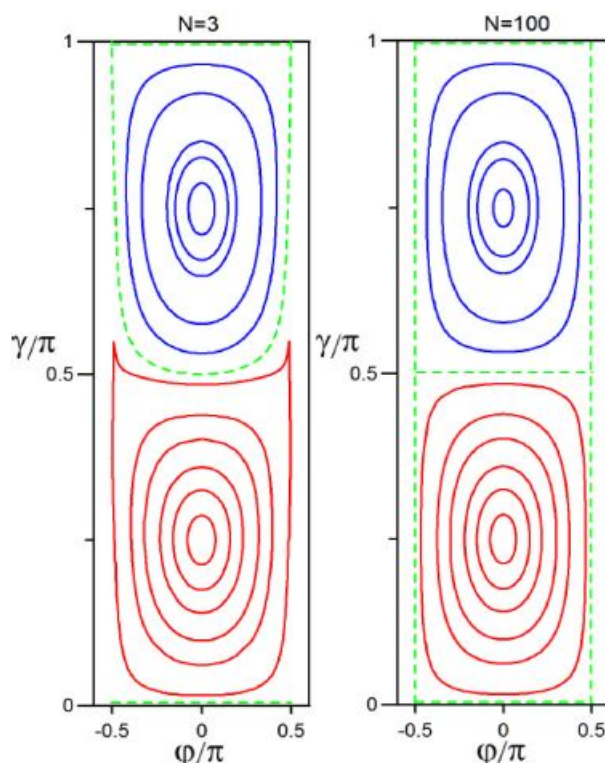
$$[X(\varphi + \pi, \pi - \gamma), Y(\varphi + \pi, \pi - \gamma), Z(\varphi + \pi, \pi - \gamma)] = -[X(\varphi, \gamma), Y(\varphi, \gamma), Z(\varphi, \gamma)]. \quad (90.2)$$

بنابراین، با استفاده از این ویژگی، کافی است خطوط دمایی را به عنوان تابعی از شرایط اولیه (۸۱.۲) برای $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ و $\gamma \in [0, \pi]$ در نظر بگیریم. با قرار دادن $\gamma = \pi$ در معادله‌ی ۸۹.۲ داریم:

$$\chi_0 \equiv [h(N, \theta) + f(N, \theta)]^2 \frac{\cos^2(\theta)}{16} \quad (91.2)$$

این مقدار χ_0 ، با استفاده از رابطه‌ی ۸۰.۲، مقدار T_0 را تعیین می‌کند. سپس دمای درهم‌تنیدگی سیستم نسبت به T_0 می‌تواند بیان شود. شکل ۵.۲ منحنی خطوط دمایی را برای دمای درهم‌تنیدگی به عنوان تابعی از شرایط اولیه‌ی ولگشت کوانتومی، برای دو ولگشت کوانتومی بر روی چرخه با $N = 3$ (چپ) و $N = 100$ (راست) را نشان می‌دهد.

حالت اولیه به وسیله‌ی زوایای χ_0 و γ مشخص می‌شوند. مجموعه چپ و راست از شکل نشان دهنده‌ی دو منطقه می‌باشد، یکی متناظر با دمای $T > T_0$ (خطوط نارنجی، نمودار پایین‌تر) و دیگری متناظر با $T < T_0$ (خطوط آبی، نمودار بالاتر) می‌باشند. خطوط سبز متناظر با دمای $T = T_0$ می‌باشند که شرایط اولیه آنها در $\gamma = \pi$ می‌باشد. در هر دو قسمت سکه‌ی پرتابی متناسب با $\theta = \frac{\pi}{4}$ می‌باشد. با توجه به تقارن چرخش زاویه‌ی φ تنها دو



شکل ۵.۲: منحنی خطوط دما بر حسب θ و γ بر روی چرخه

منطقه مشخص می‌شود: یکی سرد و یکی گرم. برای منطقه‌ی گرم شش خط دمایی نشان داده شده است که دمای آن‌ها از داخل به خارج به ترتیب $\frac{T}{T_0} = \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{06}$ می‌باشد. در نواحی سرد پنج خط دمایی مشخص شده که به ترتیب از داخل به خارج $\frac{T}{T_0} = \frac{0}{9}, \frac{0}{8}, \frac{0}{7}, \frac{0}{68}, \frac{0}{66}$ می‌باشد.

از این شکل مشخص است که وابستگی به اندازه‌ی N چرخه بسیار ضعیف می‌باشد. این در حقیقت برای این است که $h(N, \theta)$ و $f(N, \theta)$ در معادله‌ی $??$ به سرعت به همگرایی با N می‌رسند. در $\infty \rightarrow N$ رفتار تقریبی ولگشت کوانتومی در [۴۹] نشان داده شده است.

۲.۴.۲ دمای گذار درهم‌تنیدگی

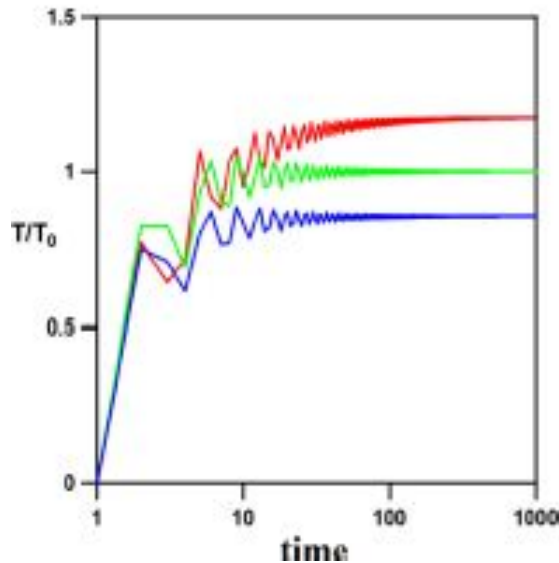
از آنجایی که ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی ولگشت‌های کوانتومی با گذشت زمان به یک حالت پایا میل می‌کند لذا درهم‌تنیدگی بین فضای سکه و دمای درهم‌تنیدگی نیز به مقدار ثابتی میل خواهد کرد. زمان گذار حداقل زمانی است که باید سپری شود تا دمای درهم‌تنیدگی به مقدار کافی به مقدار نهایی خود نزدیک شود. در این صورت ما اجازه داریم که مفهوم دمای درهم‌تنیدگی را معرفی کنیم. در اینجا ما رفتار گذار دمایی را برای N چرخه بررسی می‌کنیم. با توصیف کردن رفتار دما به عنوان تابعی از زمان، با بکار بردن ارتباط یکسان میان ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش‌یافته و ویژه‌مقادیر انرژی در یک هامیلتونی دو حالت در زمان t ، دمای

گذار درهم‌تنیدگی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$T(t) = \frac{E_0}{\ln \left[\frac{\bar{\Lambda}^+(t)}{\bar{\Lambda}^-(t)} \right]} \quad (92.2)$$

که در آن $\bar{\Lambda}^\pm(t)$ ویژه‌مقادیر ماتریس $\bar{\rho}_c(t)$ می‌باشند. که در اینجا فرض می‌کنیم $\Lambda^+(t) > \Lambda^-(t)$ باشد.

شکل ۶.۲، سه منحنی برای دمای درهم‌تنیدگی به عنوان تابعی از زمان را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۲: دمای درهم‌تنیدگی به عنوان تابعی از زمان

که در تعداد گام $N = 3$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ اندازه‌گیری شده است. از پایین به بالا دما $\frac{T}{T_0} = 0.8, 1, 1.1$ می‌باشد. محاسبات براساس معادله‌ی ۵۰.۲ می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که دما به شدت در $t \sim 100$ به یک مقدار حدی میل می‌کند. اکنون ما این فرایند گرمایی شدن را با همگرایی توزیع چگالی مرتبط می‌کنیم. زمان آمیختگی ماتریس چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_\varepsilon(N) = \min \{ \tilde{t} \mid \forall t \geq \tilde{t}, \|\bar{\rho}_c(t) - \bar{\rho}_c(\infty)\| \leq \varepsilon \}, \quad (93.2)$$

که ε یک عدد مثبت کوچک دلخواه می‌باشد. برای بهنجار کردن رابطه‌ی فوق تعریف می‌کنیم:

$$\|\bar{\rho}_c(t_1) - \bar{\rho}_c(t_2)\| \equiv |\bar{\Lambda}^+(t_1) - \bar{\Lambda}^+(t_2)| \quad (94.2)$$

که یک رابطه‌ی سر راست است. که نشان می‌دهد که این تعریف با یک تعریف تا حدی نرمال مواجه شده است. عنصر ماتریس چگالی $\bar{\rho}_c(t)$ متناظر با $\bar{\rho}_c(\infty)$ همگرا می‌شود. علاوه بر این، به غیر از مجموعه‌ای از شرایط اولیه با اندازه‌گیری \circ ، $\bar{\Lambda}^+(t_1) = \bar{\Lambda}^+(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$ می‌باشد. این نشان می‌دهد که نتایج تحول زمانی به صورت گسسته می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی ۹۴.۲ می‌تواند به عنوان یک بهنجارش درست برای زمان آمیختگی در رابطه‌ی ۹۳.۲ بیان شود. بنابراین با استفاده از قبل ما داریم:

$$\bar{\Lambda}^\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4 [\bar{p}_L(t)\bar{p}_R(t) - |\bar{Q}(t)|^2]} \right\} \quad (95.2)$$

و با استفاده از رابطه‌ی ۹۲.۲ داریم:

$$\tanh(\beta(t)E_0) = \sqrt{1 - 4(\bar{P}_L(t)\bar{P}_R(t) - |Q_0|^2)} \quad (۹۶.۲)$$

که در آن $\beta(t) = \frac{1}{T(t)}$ می‌باشد.

$$\bar{\Lambda}^+(t) - \bar{\Lambda}^+(\infty) = \frac{1}{4} \{ \tanh[\beta(t)E_0] - \tanh[\beta(\infty)E_0] \}. \quad (۹۷.۲)$$

که $\Delta\beta = \beta(t) - \beta(\infty)$ قرار می‌دهیم. $\Delta\beta$ را از t در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\bar{\Lambda}^+(t) - \bar{\Lambda}^+(\infty) = \frac{E_0}{c} \Delta\beta + O(\Delta\beta^2) \quad (۹۸.۲)$$

که

$$c = 2 \cosh^2[\beta(\infty)E_0] \quad (۹۹.۲)$$

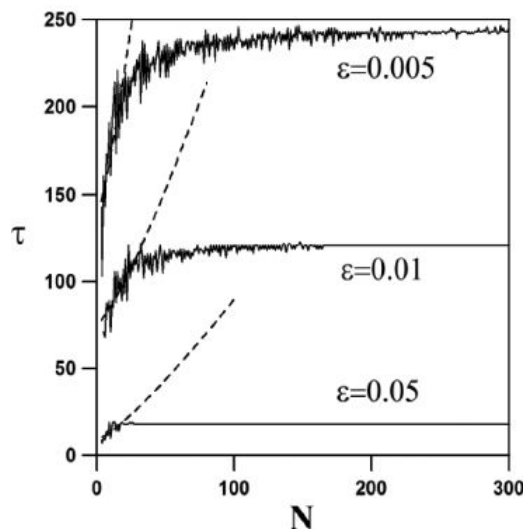
اگر ما اکنون زمان گرمایی شدن ترمودینامیکی را که حداقل زمانی است که یک حالت فیزیکی از طریق تعامل متقابل به یک تعادل گرمایی می‌رسد، را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\bar{\tau}_\varepsilon(N) \equiv \min \{ \tilde{t} \mid \forall t \geq \tilde{t}, E_0 |\beta(t) - \beta(\infty)| \leq \varepsilon \} \quad (۱۰۰.۲)$$

مشاهده می‌کنیم که زمان آمیختگی و زمان گرمایی شدن به صورت زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$\tau(N) \simeq \bar{\tau}_{c\varepsilon}(N) \quad (۱۰۱.۲)$$

برای t های بزرگ، که $\bar{\tau}_{c\varepsilon}(N)$ به وسیله‌ی معادله‌ی ۱۰۰.۲ تعریف می‌شود، می‌توان ε را با $c\varepsilon$ جایگزین کرد. زمان آمیختگی متناسب با هر ε و N می‌باشد. شکل ۷.۲ زمان آمیختگی را به عنوان تابعی از N برای چندین ε نشان می‌دهد.



شکل ۷.۲: زمان اختلال بر روی چرخه به عنوان تابعی از N

توجه داشته باشید که τ_ε برای N های بزرگ، به N وابسته نمی‌باشد. با این حال، برای N های کوچک به N وابسته می‌باشد، و وقتی که ε خیلی کوچک باشد، τ_ε مستقل از N ، برای N های بزرگ می‌باشد. علاوه بر این، شکل ۷.۲ نشان می‌دهد که $\tau_\varepsilon = O(\frac{1}{\varepsilon})$ برای N های بزرگ می‌باشد. این رفتار نتیجه‌ی مستقیم از معادله‌ی ۷۳.۲ می‌باشد، که نشان دهنده‌ی $\|\bar{\rho}_c(t) - \bar{\rho}_c(\infty)\| \sim \frac{1}{t}$ می‌باشد. با بکار بردن این نتیجه به دست می‌آوریم:

$$\tau_\varepsilon \simeq \frac{\bar{\tau}_\varepsilon}{c} \quad (102.2)$$

بنابراین یک رابطه‌ی خطی میان زمان آمیختگی و زمان گرمایی شدن وجود دارد، و این کمیت وابسته به اندازه‌ی سیستم وقتی که N خیلی بزرگ باشد در حالی که ε ثابت می‌باشد، نیست. عبارت c داده شده در معادله‌ی ۹۹.۲ مشاهده می‌کنیم که برای مقادیر کوچک از دمای درهم‌تنیدگی متعادل، زمان آمیختگی یک تابع کوچک از زمان گرمایی می‌باشد.

۳.۴.۲ نسخه‌ی مارکوفی ولگشت کوانتومی بر روی چرخه

از قبل می‌دانیم که P_L و P_R به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} P_L(t+1) \\ P_R(t+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_L(t) \\ P_R(t) \end{bmatrix} + \text{Re}[Q(t)] \sin(2\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (103.2)$$

این معادله برای هر دو ولگشت کوانتومی بر روی خط و ولگشت کوانتومی بر روی چرخه معتبر می‌باشد، و همچنین مشخص است که در آن $Q(t)$ عامل تداخل می‌باشد. وقتی که $Q(t)$ نداشته باشیم رفتار $[P_L(t), P_R(t)]$ می‌تواند به عنوان فرایند مارکوفی کلاسیکی تعریف شوند. بنابراین، مشابه کلاسیکی، ولگشت کوانتومی بر روی چرخه به وسیله‌ی معادله‌ی زیر داده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} P_{mL}(t+1) \\ P_{mR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{mL}(t) \\ P_{mR}(t) \end{bmatrix} \quad (104.2)$$

که شاخص اضافی m به عنوان مشخص کننده‌ی مارکوفی بودن در این توزیع می‌باشد. با توجه به اینکه:

$$\begin{bmatrix} p_{mL}(t+1) \\ p_{mR}(t+1) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} p_{mL}(t) \\ p_{mR}(t) \end{bmatrix} \quad (105.2)$$

می‌باشد در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱۰۴.۲ داریم:

$$U = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (106.2)$$

بنابراین برای به دست آوردن $\begin{bmatrix} p_{mL}(t) \\ p_{mR}(t) \end{bmatrix}$ مشابه قبل، طبق رابطه‌ی ۸۱.۲، که در فصل قبل بیان شد، ابتدا باید ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ماتریس U ، را محاسبه کرده و سپس به توان t برسانیم.

برای به دست آوردن ویژه مقادیر و ویژه بردارها داریم:

$$\begin{aligned} \det(U - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow (\cos^2(\theta) - \lambda)^2 - \sin^2(\theta) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 - 2\sin^2(\theta) \end{cases} \\ U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\lambda=1} \begin{cases} \alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) - \alpha = 0 \\ \beta \cos^2(\theta) + \alpha \sin^2(\theta) - \beta = 0 \end{cases} &\rightarrow \alpha = \beta \\ , |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \\ \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \xrightarrow{\lambda=1-2\sin^2(\theta)} \begin{cases} \alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) - (1 - 2\sin^2(\theta))\alpha = 0 \\ \beta \cos^2(\theta) + \alpha \sin^2(\theta) - (1 - 2\sin^2(\theta))\beta = 0 \end{cases} &\rightarrow \alpha = -\beta \\ , |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \\ \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} U^t &= (1)^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (1 - 2\sin^2(\theta))^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos^t(2\theta) & 1 - \cos^t(2\theta) \\ 1 - \cos^t(2\theta) & 1 + \cos^t(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

می باشد. و:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{mL}(t) \\ p_{mR}(t) \end{bmatrix} &= U^t \begin{bmatrix} p_{mL}(0) \\ p_{mR}(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos^t(2\theta) & 1 - \cos^t(2\theta) \\ 1 - \cos^t(2\theta) & 1 + \cos^t(2\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{mL}(0) \\ p_{mR}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (107.2)$$

که رفتار حدی آن از شرایط اولیه مستقل است.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{mL}(t) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_{mR}(t) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (108.2)$$

اگر فرض کنیم که تعادل میان فضای مکان و فضای سکه برقرار است، آن گاه می توانیم مشابه قبل دمای گذار وابسته به زمان تعریف کنیم. همانطور که قبلا بیان شد این دما از روی ویژه مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته به دست می آید. که این ویژه مقادیر با توجه به نوع

آنسامبلی که انتخاب می‌کنیم مشخص می‌شوند در اینجا ما آنسامبل کانونیک در نظر گرفته‌ایم. بدین ترتیب ماتریس چگالی کاهش‌یافته در این مورد به صورت:

$$\rho_{mc}(t) = \begin{pmatrix} P_{mL}(t) & \circ \\ \circ & P_{mR}(t) \end{pmatrix} \quad (109.2)$$

می‌باشد. بنابراین برای این فرایند مارکوفی داریم:

$$\begin{aligned} P_{mL}(t) &\equiv \frac{e^{\beta_m E_\circ}}{e^{\beta_m E_\circ} + e^{-\beta_m E_\circ}}, \\ P_{mR}(t) &\equiv \frac{e^{-\beta_m E_\circ}}{e^{\beta_m E_\circ} + e^{-\beta_m E_\circ}}. \end{aligned} \quad (110.2)$$

در نتیجه:

$$\beta_m(t) = \frac{1}{2E_\circ} \ln \left\{ \frac{1 + \cos^t(\gamma\theta) [P_{mL}(\circ) - P_{mR}(\circ)]}{1 - \cos^t(\gamma\theta) [P_{mL}(\circ) - P_{mR}(\circ)]} \right\} \quad (111.2)$$

معادله‌ی بالا نشان می‌دهد که در حد تقریبی از t ‌های بزرگ دما بی‌نهایت، و مستقل از شرایط اولیه، و سکه توزیع شده میان چپ و راست می‌باشد. با بکار بردن ۱۰۰.۲ داریم:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(N) \approx \frac{\ln \varepsilon - \ln |P_{mL}(\circ) - P_{mR}(\circ)|}{\ln |\cos(\gamma\theta)|} \quad (112.2)$$

برای ε کوچک. یادآوری می‌کنیم که، متفاوت با موارد کوانتومی، $\tilde{\tau}_\varepsilon(N)$ وابسته به N نیست حتی برای N ‌های کوچک، و این برای هر دو ولگشت کوانتومی بر روی چرخه و ولگشت کوانتومی بر روی خط معتبر است. و همچنین یادآوری می‌کنیم که بر طبق معادله‌ی ۱۰۴.۲، برای $\theta = \circ$ احتمال $P_{L,R}(t)$ ثابت می‌باشند. بنابراین در این مورد، برای $\theta = \frac{\pi}{4}$ که متناظر با ولگشت هادامارد می‌باشد، زمان گرمایی شدن از بین می‌رود. برای $\theta = \frac{\pi}{4}$ احتمال $P_{L,R}(t)$ همگرا نخواهند بود، بنابراین سیستم به حالت گرمایی نمی‌رسد. برای مقادیر دیگر θ زمان گرمایی شدن به صورت $\tilde{\tau}_\varepsilon(N) = O(\ln \frac{1}{\varepsilon})$ می‌باشد.

فصل ۳

تعیین دمای درهم‌تنیدگی و دمای گذار

در این فصل در ابتدا، با در نظر گرفتن کلی‌ترین حالت عملگر سکه به شکل $U(2)$ ، تاثیر تغییرات عملگر سکه بر روی دمای درهم‌تنیدگی برای حالات مختلف را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ روش ماتریس مشخصه برای به‌دست آوردن ماتریس چگالی کاهش‌یافته

همانطور که در فصل قبل اشاره شد عملگر تحول یک گام از ولگشت کوانتومی را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$U = S(U_C \otimes I) \quad (1.3)$$

که در آن U_C ، ماتریس یکانی می‌باشد. از آن جایی که عملگر سکه در ولگشت کوانتومی می‌تواند هر عملگر یکانی باشد، برای حالتی که عملگر سکه ماتریس یکانی $U(2)$ به شکل زیر باشد:

$$U_C = U_{\theta, \alpha, \beta} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos(\theta) & e^{i\beta} \sin(\theta) \\ e^{-i\beta} \sin(\theta) & -e^{-i\alpha} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

مشخص شده است که ماتریس چگالی کاهش‌یافته حدی ولگشت کوانتومی را می‌توان از روی ماتریس ثابتی که به صورت زیر می‌باشد، به دست آورد. [۴۷]:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \sin(\theta) & f^* & f^* & g^* \\ f & \sin(\theta) & \sin(\theta) & -f^* \\ f & \sin(\theta) & \sin(\theta) & -f^* \\ g & -f & -f & \sqrt{2} - \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} f &= \tan(\theta)(1 - \sin(\theta))e^{i(\alpha-\beta)}, \\ g &= \frac{\sin(\theta)(\sin(\theta) - 1)}{\sin(\theta) + 1} e^{2i(\alpha-\beta)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

می‌باشند. برای به دست آوردن ماتریس چگالی داریم:

$$\rho_c = \text{tr}_1(p_0 \otimes IC) = \text{tr}_2(I \otimes p_0 C) \quad (5.3)$$

که در آن $p_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ حالت اولیه را مشخص می‌کند بنابراین ما از ماتریس C استفاده خواهیم کرد و ماتریس چگالی حدی را برای هر حالت $U(2)$ به دست خواهیم آورد. [۴۹].

۲.۳ محاسبه‌ی دما با استفاده از عملگر سکه متفاوت

در این قسمت می‌خواهیم بدانیم با تغییر پارامترهای ماتریس $U(2)$ ، در رابطه‌ی ۲.۳، دمای درهم‌تنیدگی برای حالات مختلف چه تغییری می‌کند. ما سه مدل مختلف از حالت‌های اولیه را در نظر گرفته‌ایم. در حالت اول:

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

بنابراین:

$$p_0 \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

و با بکار بردن ماتریس C از رابطه‌ی ۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned} p_0 \otimes IC = & \left[\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta), -\frac{e^{-i(\alpha-\beta)} \sin(\theta)(\sin(\theta) - 1)}{\sqrt{2} \cos(\theta)}, -\frac{e^{-i(\alpha-\beta)} \sin(\theta)(\sin(\theta) - 1)}{\sqrt{2} \cos(\theta)}, \right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{e^{-2i(\alpha-\beta)} \sin(\theta)(\sin(\theta) - 1)^2}{\sqrt{2} \cos^2(\theta)} \right], \left[-\frac{e^{-i(\alpha-\beta)} \sin(\theta)(\sin(\theta) - 1)}{\sqrt{2} \cos(\theta)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta), \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta), \frac{e^{-i(\alpha-\beta)} \sin(\theta)(\sin(\theta) - 1)}{\sqrt{2} \cos(\theta)} \right], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0] \right] \end{aligned}$$

در نتیجه بر طبق رابطه‌ی ۵.۳، برای ماتریس چگالی داریم:

$$\rho_c = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i(\alpha-\beta)}(\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1)}{\cos(\theta)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i(\alpha-\beta)}(\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1)}{\cos(\theta)} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (۸.۳)$$

برای به دست آوردن ویژه‌مقادیر ماتریس فوق داریم:

$$\det |\rho_c - \lambda I| = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\theta) + \sqrt{2} \sin(\theta) \lambda^2 - \sqrt{2} \lambda + \sqrt{2} \lambda^2 - \sqrt{2} \sin(\theta) \lambda}{1 + \sin(\theta)} = 0$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sin(\theta) + \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{1 + \sin(\theta)} \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sin(\theta) - \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{1 + \sin(\theta)} \end{cases} \quad (۹.۳)$$

و آنتروپی درهم‌تنیدگی به صورت:

$$S(\rho) = -\lambda_1 \log \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2 \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(1 + \sin(\theta) + \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + \sin(\theta) + \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{1 + \sin(\theta)}\right)\right)}{(1 + \sin(\theta)) \ln \sqrt{2}} \right] \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(1 + \sin(\theta) - \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + \sin(\theta) - \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{1 + \sin(\theta)}\right)\right)}{(1 + \sin(\theta)) \ln \sqrt{2}} \right]$$

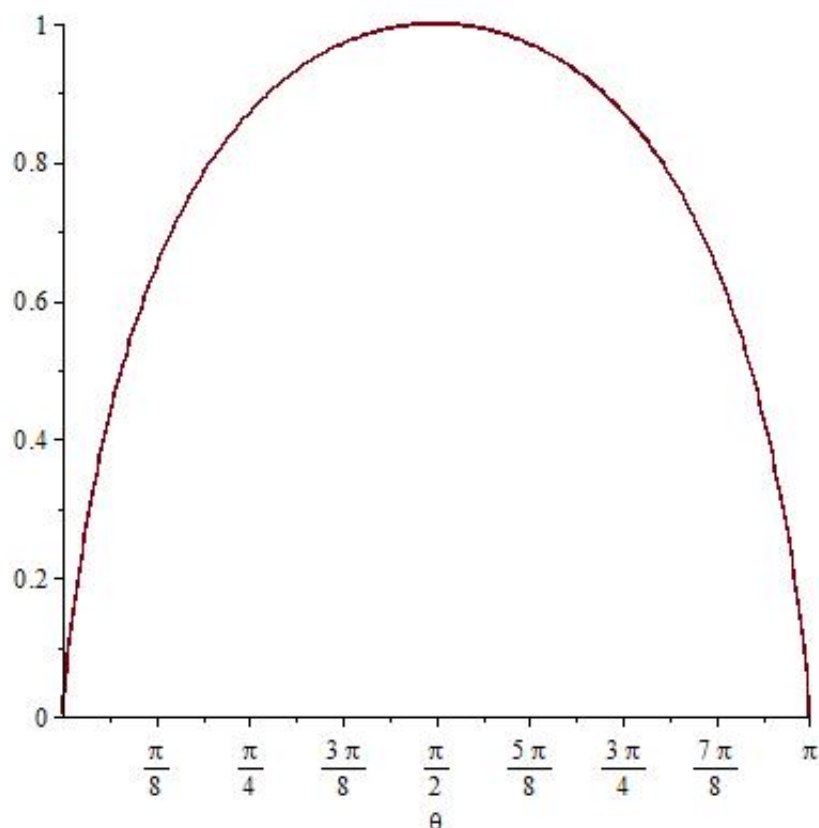
می‌باشد. شکل ۱.۳ منحنی تغییرات آنتروپی را برای این حالت نشان می‌دهد. که در آن $\theta = [0, \pi]$ در نظر گرفته‌ایم. سپس با استفاده از رابطه‌ی ۷۸.۲ داریم:

$$\sqrt{2} \sqrt{\chi} = \lambda_+ - \lambda_- \\ \Rightarrow \chi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{1 + \sin(\theta)} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \sin^2(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^2} \right) \quad (۱۰.۳)$$

و در نهایت دمای درهم‌تنیدگی با استفاده از رابطه‌ی ۸۰.۲ برابر است با:

$$T = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{\ln\left(\frac{1 + \sqrt{2} \sqrt{\chi}}{1 - \sqrt{2} \sqrt{\chi}}\right)} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{\ln\left(\frac{1 + \sin(\theta) + \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{1 + \sin(\theta) - \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}\right)} \\ = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{\ln(\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)})} \quad (۱۱.۳)$$

منحنی خطوط دمایی برای این حالت مطابق شکل ۴.۳، منحنی نقطه‌چین می‌باشد. در این حالت مشخص است که دمای درهم‌تنیدگی فقط به پارامتر θ بستگی دارد و به α و β بستگی



شکل ۱.۳: منحنی تغییرات آنروپی برای حالت ۶.۳

ندارد. و دمای بیشینه (بی‌نهایت) در $\theta = \frac{\pi}{4}$ اتفاق می‌افتد. از طرفی دمای کمینه صفر در $0, \pi$ اتفاق می‌افتد. در حالت دوم:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ I \end{bmatrix} \Rightarrow p_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & I \\ I & -1 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

و در نتیجه مشابه حالت قبل، ماتریس چگالی به صورت:

$$\begin{aligned} \rho_c &= \text{tr}_1(p_0 \otimes IC) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{I \sin(\theta)}{2(1+\sin(\theta))} \\ \frac{I \sin(\theta)}{2(1+\sin(\theta))} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.3)$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن ویژه‌مقادیر ماتریس فوق نیز مشابه قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \det(\rho_c - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{-2 \sin(\theta) + 2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 2 - 3 \cos^2(\theta) + 4 \lambda \cos^4(\theta) - 4 \lambda^2 \cos^4(\theta)}{4 \cos^4(\theta)} &= 0 \end{aligned}$$

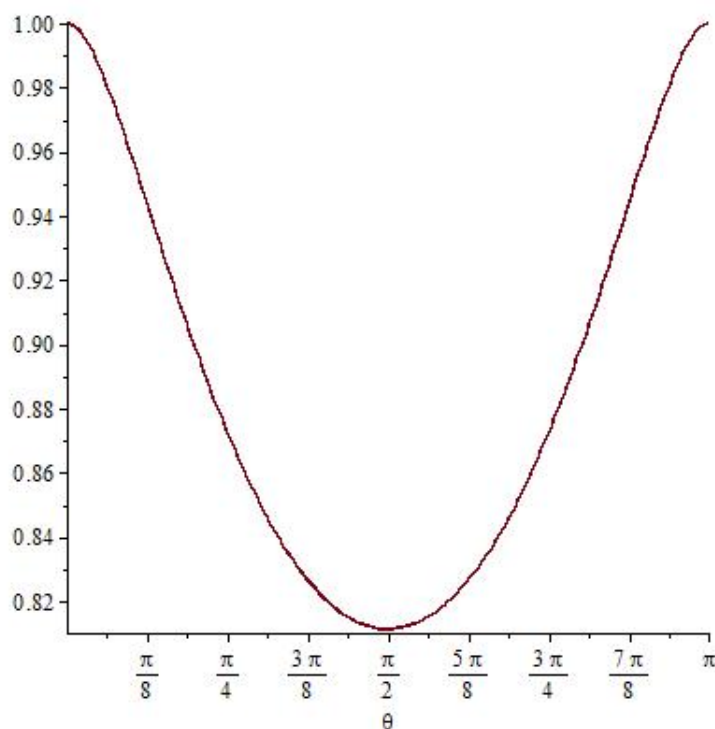
در نتیجه:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \sin(\theta))}} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2} \sin(\theta) + 1}{\sqrt{2(\sin(\theta) + 1)}} \end{cases} \quad (14.3)$$

می‌باشند. بنابراین آنروپی درهم‌تنیدگی به صورت:

$$S(\rho) = -\frac{1}{\sqrt{2(\sin(\theta) + 1)} \ln 2} \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2(\sin(\theta) + 1)}} \right) \right) - \frac{(\sqrt{2} \sin(\theta) + 1)}{\sqrt{2(\sin(\theta) + 1)} \ln 2} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{2} \sin(\theta) + 1}{\sqrt{2(\sin(\theta) + 1)}} \right) \right) \quad (15.3)$$

به دست می‌آید. نمودار تغییرات آنروپی برای این حالت در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. و



شکل ۲.۳: منحنی تغییرات آنروپی برای حالت ۱۲.۳

همچنین با استفاده از رابطه‌ی ۱۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \chi &= \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\sin(\theta)}{1 + \sin(\theta)} \right)^2 \end{aligned} \quad (16.3)$$

بنابراین دمای درهم‌تنیدگی به صورت:

$$T = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{\ln \left(\frac{1 + (-\frac{\sin(\theta)}{1 + \sin(\theta)})}{1 - (-\frac{\sin(\theta)}{1 + \sin(\theta)})} \right)} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{\ln \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2} \sin(\theta)} \right)} \quad (17.3)$$

می‌باشد. در شکل ۴.۳ دما را با استفاده از رابطه‌ی ۱۷.۳ رسم کرده‌ایم. (منحنی خط‌چین). همانطور که مشاهده می‌کنیم در این حالت نیز ویژه‌مقادیر فقط به θ وابسته هستند و به α, β بستگی ندارند. و کمینه دما هرگز به صفر نمی‌رسد یعنی سیستم در حالت کلی به ازای تمام θ ها گرم‌تر از حالت قبل خواهد بود. و در $\theta = 0, \pi$ بیشینه‌ی دما را داریم.

و در نهایت در حالت سوم داریم:

$$|\psi_0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \Rightarrow p_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (18.3)$$

بنابراین ماتریس چگالی:

$$\rho_c = \left[\begin{aligned} & \frac{2 \cos(\theta) - \sqrt{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1)}{\Lambda \cos(\theta)} \\ & + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{-i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1)}{\Lambda \cos(\theta)}, \\ & \frac{\sqrt{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{-i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1)}{\Lambda \cos(\theta)} \\ & - \frac{e^{-i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{-i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1))}{\Lambda (1 + \sin(\theta))} \end{aligned} \right], \\ \left[\begin{aligned} & - \frac{e^{i(\alpha-\beta)} (-\sqrt{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1))}{\Lambda (1 + \sin(\theta))} \\ & - \frac{e^{i(\alpha-\beta)} (-\sqrt{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + e^{i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1))}{\Lambda (1 + \sin(\theta))}, \\ & - \frac{(-\sqrt{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1))}{\Lambda \cos(\theta)} \\ & - \frac{-\sqrt{2} \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2} e^{-i(\alpha-\beta)} (\sin(\theta) + \cos^2(\theta) - 1)}{\Lambda \cos(\theta)} \end{aligned} \right]$$

و مشابه قبل ویژه‌مقادیر به صورت:

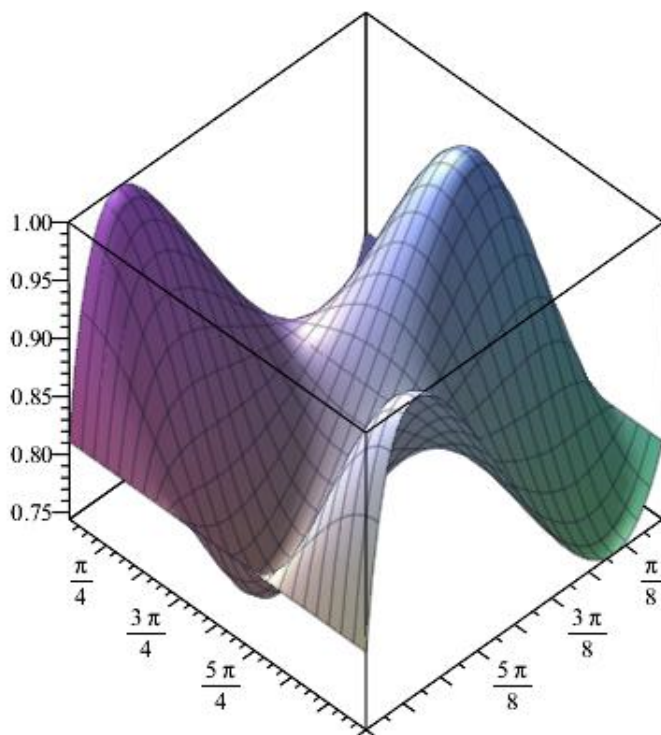
$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{2} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{1 + \sin(\theta)} \\ \lambda_2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{2} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{1 + \sin(\theta)} \end{cases} \quad (19.3)$$

می‌باشد. این ویژه‌مقادیر نشان می‌دهد که ماتریس چگالی کاهش یافته و در نتیجه دما، در حالت سوم به $\alpha - \beta$ بستگی دارد، یعنی به فاز نسبی بین آن‌ها بستگی دارد و به تک تک فازها

وابسته نیست. و همچنین آنروپی درهم‌تنیدگی:

$$S(\rho) = - \frac{\sin(\theta) + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{2(1 + \sin(\theta)) \ln 2} \ln \left(\frac{\sin(\theta) + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{2(1 + \sin(\theta))} \right) - \frac{\sin(\theta) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{2(1 + \sin(\theta)) \ln 2} \ln \left(\frac{\sin(\theta) + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{2(1 + \sin(\theta))} \right) \quad (20.3)$$

می‌باشد. که نمودار سه بعدی آنروپی درهم‌تنیدگی در این حالت در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. برای به دست آوردن دمای درهم‌تنیدگی مشابه قبل، ابتدا با استفاده از رابطه‌ی ۲۰.۲،



شکل ۳.۳: منحنی سه بعدی تغییرات آنروپی برای حالت ۱۸.۲

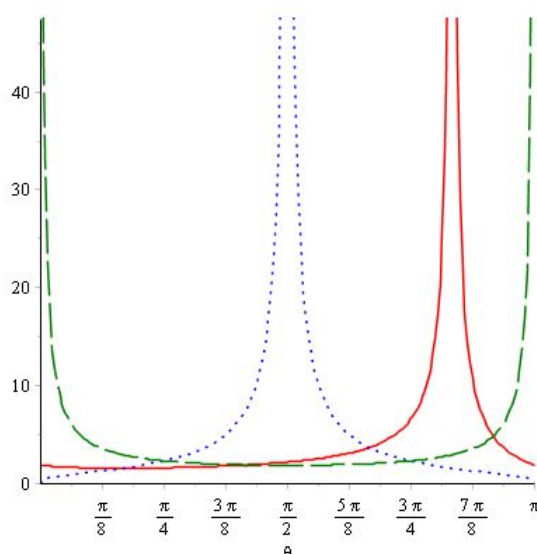
داریم:

$$\chi = \frac{1}{16} \left(\frac{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}{(1 + \sin(\theta))^2} \right) \quad (21.3)$$

سپس:

$$T = \frac{2\varepsilon}{\ln \left(\frac{2 + 2 \sin(\theta) + \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}}{2 + 2 \sin(\theta) - \sqrt{2 \sin^2(\theta) + 1 + 2\sqrt{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\alpha - \beta)}} \right)} \quad (22.3)$$

به دست می‌آید. برای رسم نمودار حالت سوم در شکل ۴.۳، برای مقایسه با دو حالت قبل، ما $\alpha = 0, \beta = 0$ قرار می‌دهیم، و نمودار را رسم می‌کنیم. (منحنی خط‌صاف). در این حالت نیز مانند حالت قبل کمینه دما هرگز به صفر نمی‌رسد و بیشینه دما در $\theta \simeq \frac{7\pi}{8}$ اتفاق می‌افتد. در شکل ۵.۳، سمت چپ، نمودار سه بعدی تغییرات دمای درهم‌تنیدگی را برای حالت سوم نشان می‌دهد. که در آن $\beta = 0$ قرار داده‌ایم. همانطور که مشاهده می‌کنیم در برخی از نقاط بسته به نوع تغییرات α, θ ، ما بیشینه دما (بی‌نهایت) را مشاهده می‌کنیم و در برخی مناطق دما تقریباً یکنواخت می‌باشد.

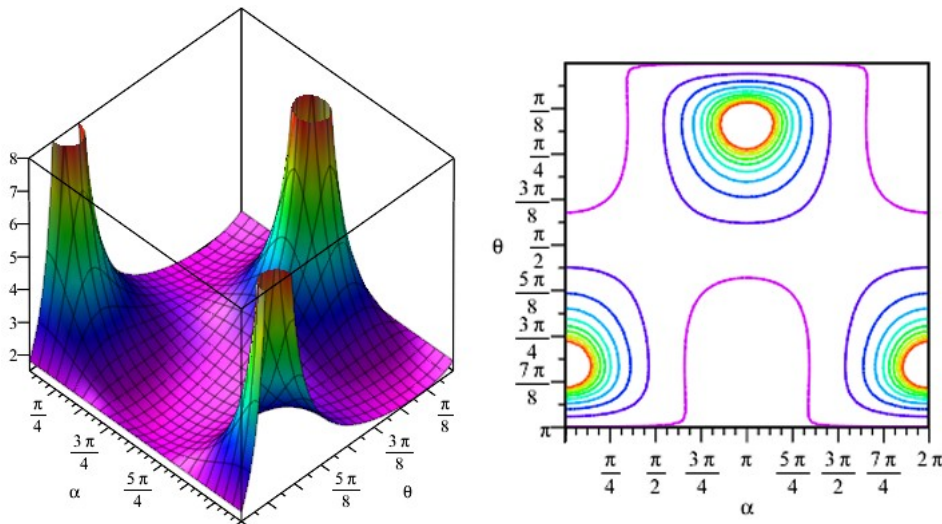


شکل ۴.۳: دمای درهم‌تنیدگی، برای حالت اولیه ۶.۳ منحنی نقطه‌چین، برای حالت اولیه ۱۲.۳ منحنی خط‌چین، و حالت اولیه ۱۸.۳ منحنی خط‌صاف

در شکل ۵.۳، سمت راست، منحنی‌های دمای ثابت در حوالی نقاطی با دمای بالا بسیار به هم نزدیک هستند در حالی که در نقاط دورتر خطوط دور از هم و دما تقریباً یکنواخت می‌باشد. این نمودار نشان می‌دهد که دما در نقاط مشخصی با شیب بسیار زیادی افزایش می‌یابد. همانطور که مشاهده می‌شود دما در نقاط خاصی سریع افزایش می‌یابد (نقاط تکین)، ولی در بقیه نقاط دما افت و خیز بسیار پایینی دارد و تقریباً یکنواخت است.

بنابراین در این فصل با در نظر گرفتن کلی‌ترین شکل ماتریس یکانی $U(2)$ ، ماتریس چگالی کاهش‌یافته را برای شرایط اولیه مختلف محاسبه کردیم و سپس با استفاده از ویژه‌مقادیر این ماتریس کاهش‌یافته، دما را محاسبه کردیم و با محاسبه دما ملاحظه کردیم که در حالت‌هایی مثل حالت ۱۲.۳ دمای درهم‌تنیدگی فقط به θ وابسته است (این امر در مورد تمام حالاتی که به شکل برهم‌نهی نیستند نیز صادق است). دمای درهم‌تنیدگی برای حالاتی که برهم‌نهی مساوی از $|0\rangle, |1\rangle$ هستند مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که در حالت کلی، $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$ نیز دمای درهم‌تنیدگی به فاز نسبی آن‌ها (φ) بستگی ندارد. دمای درهم‌تنیدگی برای مورد خاص $\varphi = \frac{\pi}{4}$ را برای حالت ۱۲.۳ مورد بررسی قرار گرفت و نقاط بیشینه و کمینه دما برای آن مشخص گردید.

همچنین در حالت کلی مشخص گردید در حالاتی که برهم‌نهی مساوی از حالات اولیه نیست



شکل ۵.۳: نمودار سمت چپ دمای درهم‌تنیدگی بر حسب α, θ ، نمودار سمت راست خطوط دمای ثابت به ازای تغییرات α, θ . برای حالت اولیه ۱۸.۳

دمای درهم‌تنیدگی به $\alpha - \beta$ بستگی دارد. ما این کار را برای کلی‌ترین حالت یعنی $\begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ e^{i\varphi} \sin(\gamma) \end{pmatrix}$ انجام دادیم و محاسبات ما نشان داد این حالات هم دمای درهم‌تنیدگی نیز به $\alpha - \beta$ بستگی دارد یعنی به فاز نسبی این دو بستگی دارد. علاوه بر آن با مشخص کردن منحنی‌های دمای ثابت مشخص شد که دمای درهم‌تنیدگی در نقاطی بیشینه است و در این نقاط شدت تغییر دما بسیار زیاد است و خطوط دما به هم بسیار نزدیک است ولی در خارج از این ناحیه دما تقریباً یکنواخت است. شکل ۲.۳

۳.۳ بررسی عددی دمای گذار در ولگشت کوانتومی موبیوس

ولگشت‌های کوانتومی از قریب به دو دهه پیش که برای اولین بار معرفی شدند، به سرعت در حوزه اطلاعات و محاسبات کوانتومی مورد توجه قرار گرفتند. انواع مختلفی از ولگشت‌های کوانتومی معرفی شده و تفاوت‌های آن‌ها با ولگشت‌های کلاسیکی و با سایر انواع ولگشت کوانتومی مورد بررسی قرار گرفت. یکی از انواع ولگشت کوانتومی که اخیراً معرفی شده است، ولگشت کوانتومی موبیوس است که در واقع نوعی بهینه‌سازی روی ولگشت‌های کوانتومی روی چرخه است. نشان داده شده است که این مدل از ولگشت کوانتومی موجب بهبود در بعضی از پارامترهای قابل بررسی در ولگشت‌های کوانتومی، از جمله توزیع حدی نسبت به ولگشت کوانتومی روی چرخه می‌شود. در این بخش در نظر داریم که دمای گذار درهم‌تنیدگی در ولگشت کوانتومی موبیوس را بررسی کرده و با دمای گذار درهم‌تنیدگی ولگشت کوانتومی روی چرخه مقایسه خواهیم کرد.

برخی پارامترهای حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. از جمله مشخص شده است که توزیع احتمال در ولگشت کوانتومی روی چرخه به مقدار مشخصی میل نمی‌کند، اما میانگین زمانی این توزیع مورد بررسی قرار گرفته و مشخص شده است که

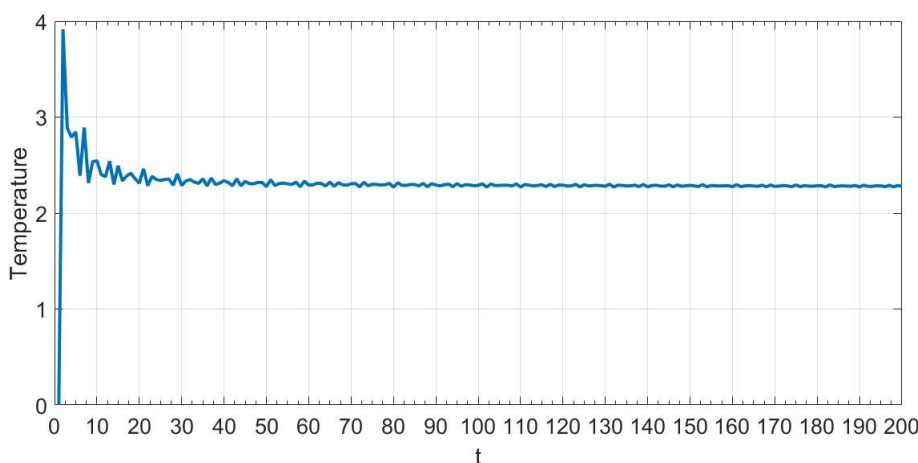
به شکلی مشخص میل می‌کند. از دیگر پارامترهای حدی که برای ولگشت کوانتومی روی چرخه مورد بررسی قرار گرفته‌اند، ماتریس چگالی کاهش‌یافته است. همانند توزیع احتمال، این کمیت نیز به مقدار مشخصی میل نمی‌کند اما میانگین زمانی آن به مقداری مشخص همگرا می‌شود که به حالت اولیه ولگشت بستگی دارد [۴۷]. با استفاده از ماتریس چگالی کاهش‌یافته می‌توان کمیت‌هایی چون درهم‌تنیدگی، دمای درهم‌تنیدگی و دمای گذار را مورد مطالعه قرار داد.

۴.۳ نمودار توزیع دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت کوانتومی روی چرخه

در ولگشت کوانتومی روی چرخه، متوسط زمانی ماتریس چگالی کاهش‌یافته $\bar{\rho}_c$ به ماتریس مشخصی میل می‌کند

$$\bar{\rho}_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} Tr_x(\rho(t)) \quad (23.3)$$

که در آن t تعداد گام‌ها و Tr_x ردگیری روی فضای مکان است [۵۰]. نشان داده شده است که دمای درهم‌تنیدگی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه به یک مقدار حدی میل می‌کند، شکل ۶.۳. همانطور که در فصل قبل بیان شد دمای گذار درهم‌تنیدگی به صورت:



شکل ۶.۳: دمای درهم‌تنیدگی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با 1° جایگاه و حالت اولیه $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$

$$T(t) = \frac{E_0}{\ln \left[\frac{\bar{\Lambda}^+(t)}{\bar{\Lambda}^-(t)} \right]} \quad (24.3)$$

تعریف می‌شود. که در آن $\bar{\Lambda}^\pm(t)$ ویژه مقادیر ماتریس $\bar{\rho}_c(t)$ می‌باشند.

۵.۳ ولگشت کوانتومی موبیوس

ولگشت کوانتومی موبیوس یک درجه آزادی بیشتر به صورت یک فضای هیلبرت دوبعدی، نسبت به ولگشت کوانتومی روی چرخه دارد. $H = H_C \otimes H_R \otimes H_P$ که در آن H_C و H_P به ترتیب فضاهای هیلبرت متعلق به سکه و مکان هستند که در ولگشت روی دایره نیز وجود دارند. فضای هیلبرت چرخش H_R نامیده می‌شود. در این ولگشت، ذره علاوه بر حرکت روی مسیر دایره‌ای، حول مسیر حرکت خود نیز دوران می‌کند، یعنی ولگشت موبیوسی در هر گام علاوه بر جابجایی در مسیر خود بر روی محیط دایره، همزمان یک حرکت وضعی دارد [۵۱]. بنابراین حالت ولگشت در هر گام به صورت:

$$|\psi(\circ)\rangle = \sum_{s,R,v} a_{s,R,v}(t) |s, R, v\rangle \quad (25.3)$$

است. که در آن $|s\rangle$ و $|\varphi\rangle$ به ترتیب حالت ولگشت در فضای سکه و مکان هستند و $|R\rangle$ حالت ولگشت در فضای چرخش. مقدار این چرخش توسط پارامتری به نام فاکتور موبیوس تعیین می‌شود که تعداد دوران‌های کامل حول مسیر حرکت در هر چرخه است. بنابراین میزان دوران در هر گام

$$\theta = \frac{2\pi\alpha}{N} \quad (26.3)$$

است که در آن N تعداد جایگاه‌ها است. همچنین عملگر جابجایی شرطی S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = |\circ\rangle\langle\circ| \otimes RCW \otimes \sum_{v=0}^{N-1} |v+1\rangle\langle v+1| \otimes RCCW \otimes \sum_{v=0}^{N-1} |v-1\rangle\langle v| \quad (27.3)$$

که در آن RCW و $RCCW$ عملگرهای دوران ساعتگرد و پادساعتگرد به اندازه θ حول مسیر حرکت ولگشت هستند. بنابراین عملگر تحول برای ولگشت موبیوسی به صورت:

$$U = S(H \otimes I_R \otimes I_P) \quad (28.3)$$

خواهد بود که H عملگر هادامارد، I_R ماتریس یک به ابعاد فضای چرخش و I_P ماتریس یک به ابعاد فضای مکان است.

وجه تمایز ولگشت موبیوسی و ولگشت کوانتومی روی دایره، فاکتور موبیوس α است. نشان داده شده است که مدل موبیوسی در موارد بسیاری رسیدن به نتایج مطلوب‌تر نسبت به ولگشت کوانتومی روی چرخه را ممکن می‌کند، از جمله توزیع حدی یکنواخت برای هر تعداد جایگاه (چه فرد و چه زوج) [۵۱]، در حالی که در ولگشت کوانتومی روی چرخه، تنها برای تعداد فرد جایگاه امکان رسیدن به توزیع یکنواخت وجود دارد. این نتایج مطلوب‌تر، انگیزه مناسبی برای بررسی سایر پارامترهای مرتبط با ولگشت موبیوسی ایجاد می‌کند. بنابراین به تاثیر پارامتر α بر دمای گذار در ولگشت موبیوسی و مقایسه آن با ولگشت کوانتومی روی چرخه می‌پردازیم.

چون در ولگشت کوانتومی موبیوس علاوه بر فضای سکه و مکان، فضای چرخش هم وجود دارد، می‌توان دو نوع ماتریس چگالی کاهش‌یافته در نظر گرفت. در این مقاله ما به بررسی

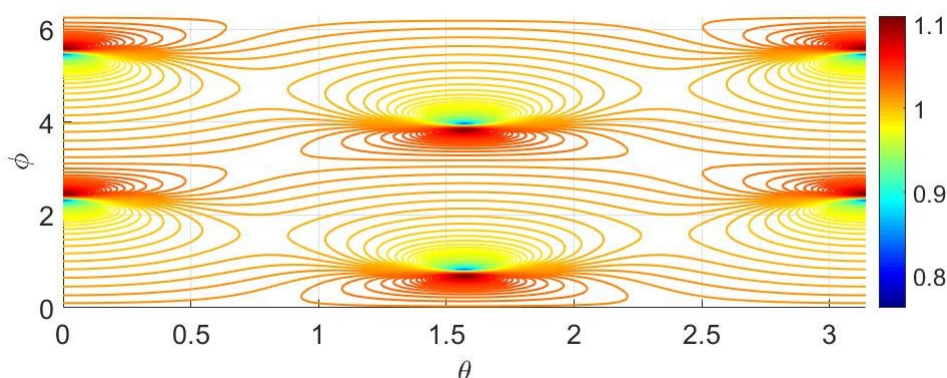
ماتریس چگالی کاهش‌یافته فضای سکه می‌پردازیم. با توجه به آن که فضا سکه یک فضای دوبعدی است، بنابراین ماتریس چگالی کاهش‌یافته یک ماتریس 2×2 خواهد بود:

$$\rho_{Red}(t) = Tr_{Rx}(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) \quad (29.3)$$

که Rx معرف ردگیری روی مکان x و فضای دوران R است. با تعیین ویژه‌مقادیر این ماتریس در هر گام، می‌توان دمای گذار را تعیین کرد. نتایج شبیه‌سازی ما نشان داده است که وجود پارامتر α در تعداد گام کم، باعث بروز تغییراتی در دمای گذار در ولگشت کوانتومی موبیوس نسبت به ولگشت کوانتومی روی چرخه می‌شود. برای بررسی این موضوع دمای درهم‌تنیدگی را برای ولگشت موبیوسی با کلی‌ترین حالت اولیه‌ی

$$|\psi(\circ)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ e^{i\phi} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (30.3)$$

محاسبه کرده و با دمای ولگشت کوانتومی مقایسه می‌کنیم. شکل ۷.۳ در شکل ۷.۳ مشخص است که اگرچه دما در تمام نقاط شبیه دما در ولگشت کوانتومی روی

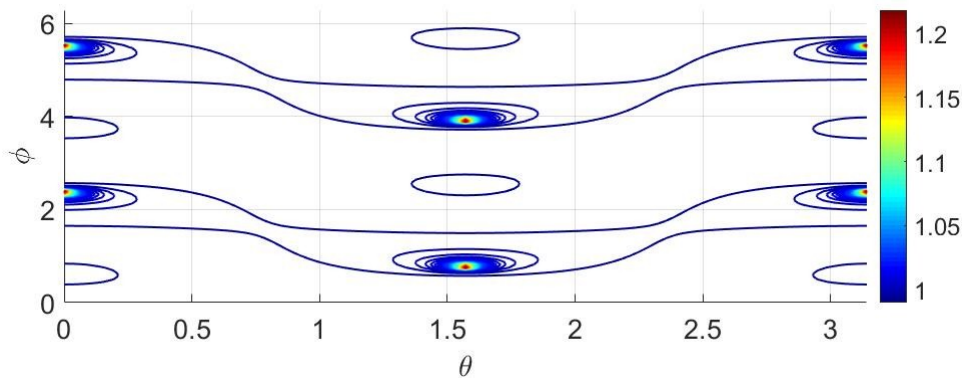


شکل ۷.۳: نسبت دمای گذار ولگشت کوانتومی موبیوس با $\alpha = \frac{1}{4}$ به ولگشت کوانتومی روی دایره با 1° جایگاه و حالت اولیه‌ی ۳۰.۳

دایره است، اما تغییرات دمایی بسته به حالت اولیه وجود دارد. به عبارتی خطوط هم‌دما نزدیک به یکدیگرند.

نتایج شبیه‌سازی ما نشان می‌دهند که برای تعداد گام‌های بیشتر، دمای درهم‌تنیدگی ولگشت کوانتومی موبیوس در اکثر نقاط با دمای ولگشت کوانتومی روی دایره یکسان می‌شود اما تغییرات دمایی در نقاط خاص بیشتر می‌شود شکل ۸.۳. بنابراین این سوال مطرح است که دمای ولگشت موبیوسی با چه سرعتی به دمای ولگشت کوانتومی روی چرخه نزدیک می‌شود. برای این منظور به بررسی تغییرات دمای گذار بر حسب α می‌پردازیم. مشخص شده است که سرعت نزدیک شدن به دمای درهم‌تنیدگی با زمان آمیختگی ارتباط دارد [۵۰]. همانطور که قبلاً بیان شد زمان آمیختگی حداقل زمانی است که باید بگذرد تا میانگین زمانی ماتریس چگالی در یک همسایگی دلخواه از ماتریس چگالی حدی قرار بگیرد [۵۲]:

$$\tau_\varepsilon(N) \equiv \min \{ \tilde{t} | \forall t \geq \tilde{t}, \|\bar{\rho}_c(t) - \bar{\rho}_c(\infty)\| \leq \varepsilon \} \quad (31.3)$$

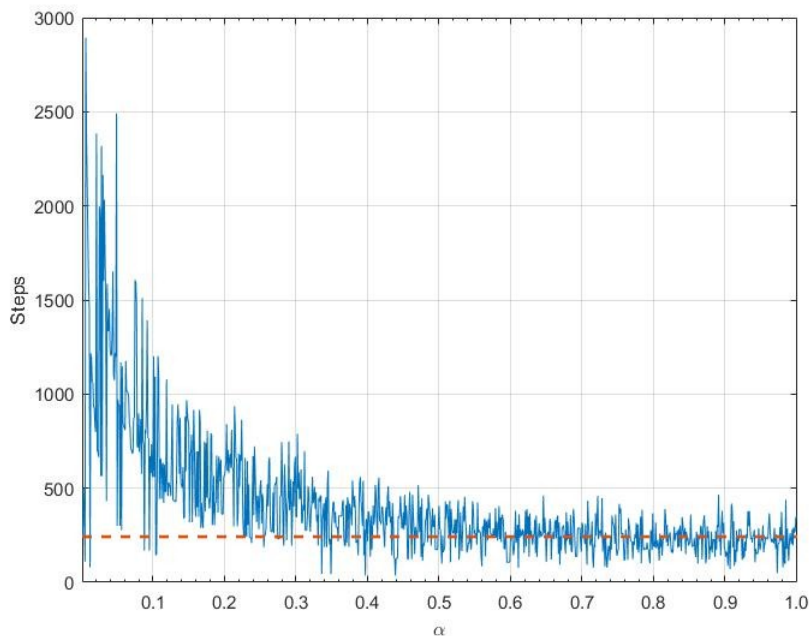


شکل ۸.۳: نسبت دمای گذار ولگشت کوانتومی موبیوس با $\alpha = \frac{1}{4}$ به ولگشت کوانتومی روی دایره؛ 1° جایگاه و 5° گام.

که در آن ε عدد مثبتی است که به اندازه لازم کوچک انتخاب می‌شود. می‌توان نشان داد در سیستم‌های 2×2 :

$$\|\bar{\rho}_c(t_1) - \bar{\rho}_c(t_2)\| \equiv |\bar{\Lambda}^+(t_1) - \bar{\Lambda}^+(t_2)| \quad (32.3)$$

که در آن $\bar{\Lambda}^+(t)$ ویژه‌مقدار بزرگتر ماتریس چگالی در گام t ام است [۵۱]. اکنون می‌توانیم با استفاده از این رابطه و شبیه‌سازی، به بررسی سرعت همگرا شدن دمای



شکل ۹.۳: زمان آمیختگی برای ولگشت کوانتومی موبیوس با 1° جایگاه و حالت اولیه $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$

گذار ولگشت کوانتومی موبیوس به دمای درهم‌تنیدگی بپردازیم. برای این کار تعداد گام نسبتاً

زیادی (10^5 گام) را انتخاب کرده و برای آن ویژه‌مقدار بزرگ‌تر میانگین زمانی ماتریس چگالی را محاسبه می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن همسایگی $10^{-6} \times 5$ حداقل تعداد گام‌های لازم برای قرار گرفتن $\bar{\Lambda}^+(t)$ در همسایگی ε از $\bar{\Lambda}^+(T)$ را محاسبه می‌کنیم. نتیجه در شکل ۹.۳ ارائه شده است. از این شکل مشخص است که در α های کوچک زمان آمیختگی نسبت به ولگشت روی چرخه بزرگ‌تر می‌شود اما برای α های بزرگ‌تر زمان آمیختگی در محدود زمان آمیختگی چرخه قرار می‌گیرد، اما همان‌طور که از روی شکل معلوم است، همیشه می‌توان α هایی برگزید که زمان آمیختگی نسبت به چرخه بسیار کمتر شود.

خط چین زمان آمیختگی را برای ولگشت کوانتومی روی دایره ($\alpha = 0$) نشان می‌دهد. بنابراین در این بخش به مقایسه دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت موبیوسی و ولگشت کوانتومی روی دایره پرداختیم و مشخص گردید که جز حالات اولیه خاصی در تمام حالات اولیه دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت موبیوس با سرعت زیادی به دمای درهم‌تنیدگی ولگشت کوانتومی روی چرخه میل می‌کند. همچنین مشخص گردید سرعت رسیدن به دمای ولگشت کوانتومی روی دایره به پارامتر α بستگی دارد و به شدت نسبت به تغییرات این پارامتر حساس است. نکته قابل توجه این است که همیشه می‌توان مقدار مناسبی برای پارامتر α یافت تا زمان رسیدن به دمای درهم‌تنیدگی کاهش یابد.

فصل ۴

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه ما با در نظر گرفتن کلی‌ترین شکل ماتریس یکانی $U(2)$ ، ماتریس چگالی کاهش‌یافته را برای شرایط اولیه مختلف محاسبه کردیم و سپس با استفاده از ویژه‌مقادیر این ماتریس کاهش‌یافته، دما را محاسبه کردیم و با محاسبه دما ملاحظه کردیم که در حالت‌هایی مثل حالت ۶.۳ دمای درهم‌تنیدگی فقط به θ وابسته است (این امر در مورد تمام حالاتی که به شکل برهم‌نهی نیستند نیز صادق است). دمای درهم‌تنیدگی برای حالاتی که برهم‌نهی مساوی از $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$ هستند مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که در حالت کلی، $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$ نیز دمای درهم‌تنیدگی به فاز نسبی آن‌ها (φ) بستگی ندارد. دمای درهم‌تنیدگی برای مورد خاص $\varphi = \frac{\pi}{4}$ را برای حالت ۱۲.۳ مورد بررسی قرار گرفت و نقاط بیشینه و کمینه دما برای آن مشخص گردید. همچنین در حالت کلی مشخص گردید در حالاتی که برهم‌نهی مساوی از حالات اولیه نیست دمای درهم‌تنیدگی به $\alpha - \beta$ بستگی دارد. ما این کار را برای کلی‌ترین حالت یعنی $\begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ e^{i\varphi} \sin(\gamma) \end{pmatrix}$ انجام دادیم و محاسبات ما نشان داد این حالات هم دمای درهم‌تنیدگی نیز به $\alpha - \beta$ بستگی دارد یعنی به فاز نسبی این دو بستگی دارد. علاوه بر آن با مشخص کردن منحنی‌های دمای ثابت مشخص شد که دمای درهم‌تنیدگی در نقاطی بیشینه است و در این نقاط شدت تغییر دما بسیار زیاد است و خطوط دما به هم بسیار نزدیک است ولی در خارج از این ناحیه دما تقریباً یکنواخت است.

در ادامه به مقایسه دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت موبیوسی و ولگشت کوانتومی روی چرخه پرداختیم و مشخص گردید به جز حالات اولیه خاصی در تمام حالات اولیه دمای درهم‌تنیدگی در ولگشت موبیوس با سرعت زیادی به دمای درهم‌تنیدگی ولگشت کوانتومی روی چرخه میل می‌کند. همچنین مشخص گردید سرعت رسیدن به دمای ولگشت کوانتومی روی چرخه به

پارامتر α بستگی دارد و به شدت نسبت به تغییرات این پارامتر حساس است. نکته قابل توجه این است که همیشه می‌توان مقدار مناسبی برای پارامتر α یافت تا زمان رسیدن به دمای درهم‌تنیدگی کاهش یابد.

مراجع

- [1] Khoo, T.J., Disorder, Localization and Decay in Quantum walks (Doctoral dissertation, Williams College).
- [2] Schweber SS. Feynman and the visualization of space-time processes. *Reviews of Modern Physics*. 1986 Apr 1;58(2):449.
- [3] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks. *Physical Review A*. 1993 Aug 1;48(2):1687.
- [4] Riazanov GV. The Feynman path integral for the Dirac equation. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1958;6:1107.
- [5] Meyer DA. From quantum cellular automata to quantum lattice gases. *Journal of Statistical Physics*. 1996 Dec 1;85(5-6):551-74.
- [6] Farhi E, Gutmann S. Quantum computation and decision trees. *Physical Review A*. 1998 Aug 1;58(2):915.
- [7] Ambainis A, Bach E, Nayak A, Vishwanath A, Watrous J. *Proceeding of the 33rd ACM Symposium on Theory of Computing*.
- [8] Nayak A, Vishwanath A. Quantum walk on the line. *arXiv preprint quant-ph/0010117*. 2000 Oct 31.
- [9] Ambainis A. Quantum walks and their algorithmic applications. *International Journal of Quantum Information*. 2003 Dec;1(04):507-18.
- [10] Childs AM, Cleve R, Deotto E, Farhi E, Gutmann S, Spielman DA. Exponential algorithmic speedup by a quantum walk. In *Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing 2003 Jun 9* (pp. 59-68). ACM.
- [11] Shenvi N, Kempe J, Whaley KB. Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*. 2003 May 23;67(5):052307.
- [12] Ambainis A, Kempe J, Rivosh A. Coins make quantum walks faster. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms 2005 Jan 23* (pp. 1099-1108). Society for Industrial and Applied Mathematics.

-
- [13] Chandrashekar CM, Laflamme R. Quantum phase transition using quantum walks in an optical lattice. *Physical Review A*. 2008 Aug 11;78(2):022314.
- [14] Oka T, Konno N, Arita R, Aoki H. Breakdown of an electric-field driven system: a mapping to a quantum walk. *Physical review letters*. 2005 Mar 18;94(10):100602.
- [15] Engel GS, Calhoun TR, Read EL, Ahn TK, Mančal T, Cheng YC, Blankenship RE, Fleming GR. Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems. *Nature*. 2007 Apr;446(7137):782.
- [16] Mohseni M, Rebentrost P, Lloyd S, Aspuru-Guzik A. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of chemical physics*. 2008 Nov 7;129(17):11B603.
- [17] Chandrashekar CM, Goyal SK, Banerjee S. Entanglement generation in spatially separated systems using quantum walk. *arXiv preprint arXiv:1005.3785*. 2010 May 20.
- [18] Kitagawa T, Rudner MS, Berg E, Demler E. Exploring topological phases with quantum walks. *Physical Review A*. 2010 Sep 24;82(3):033429.
- [19] Du J, Li H, Xu X, Shi M, Wu J, Zhou X, Han R. Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm. *Physical Review A*. 2003 Apr 22;67(4):042316.
- [20] Ryan CA, Laforest M, Boileau JC, Laflamme R. Experimental implementation of a discrete-time quantum random walk on an NMR quantum-information processor. *Physical Review A*. 2005 Dec 9;72(6):062317.
- [21] Perets HB, Lahini Y, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Silberberg Y. Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices. *Physical review letters*. 2008 May 2;100(17):170506.
- [22] Schmitz H, Matjeschk R, Schneider C, Glueckert J, Enderlein M, Huber T, Schaetz T. Quantum walk of a trapped ion in phase space. *Physical review letters*. 2009 Aug 28;103(9):090504.
- [23] Zähringer F, Kirchmair G, Gerritsma R, Solano E, Blatt R, Roos CF. Realization of a quantum walk with one and two trapped ions. *Physical review letters*. 2010 Mar 9;104(10):100503.
- [24] Karski M, Förster L, Choi JM, Steffen A, Alt W, Meschede D, Widera A. Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. *Science*. 2009 Jul 10;325(5937):174-7.
- [25] Schreiber A, Cassemiro KN, Potoček V, Gábris A, Mosley PJ, Andersson E, Jex I, Silberhorn C. Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations. *Physical review letters*. 2010 Feb 4;104(5):050502.

- [26] Broome MA, Fedrizzi A, Lanyon BP, Kassal I, Aspuru-Guzik A, White AG. Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence. *Physical review letters*. 2010 Apr 16;104(15):153602.
- [27] Owens JO, Broome MA, Biggerstaff DN, Goggin ME, Fedrizzi A, Linjordet T, Ams M, Marshall GD, Twamley J, Withford MJ, White AG. Two-photon quantum walks in an elliptical direct-write waveguide array. *New Journal of Physics*. 2011 Jul 13;13(7):075003.
- [28] Venegas-Andraca SE. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*. 2012 Oct 1;11(5):1015-106.
- [29] Portugal R. *Quantum walks and search algorithms*. Springer Science Business Media; 2013 Feb 16.
- [30] Ambainis A, Kempe J, Rivosh A. Coins make quantum walks faster. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms 2005* Jan 23 (pp. 1099-1108). Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [31] Kempe J. Quantum random walks: an introductory overview. *Contemporary Physics*. 2003 Jul 1;44(4):307-27.
- [32] Venegas-Andraca SE. Quantum walks for computer scientists. *Synthesis Lectures on Quantum Computing*. 2008 Jan 1;1(1):1-19.
- [33] Aharonov D, Ambainis A, Kempe J, Vazirani U. Quantum walks on graphs. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing 2001* Jul 6 (pp. 50-59). ACM.
- [34] Romanelli A. The quantum walk temperature. *arXiv preprint arXiv:1108.5730*. 2011 Aug 27.
- [35] Romanelli A. Distribution of chirality in the quantum walk: Markov process and entanglement. *Physical Review A*. 2010 Jun 30;81(6):062349.
- [36] Carneiro I, Loo M, Xu X, Girerd M, Kendon V, Knight PL. Entanglement in coined quantum walks on regular graphs. *New Journal of Physics*. 2005 Jul 12;7(1):156.
- [37] Konno N. Quantum walks. In *Quantum potential theory 2008* (pp. 309-452). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [38] Annabestani M, Abolhasani MR, Abal G. Asymptotic entanglement in 2d quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2010 Jan 27;43(7):075301.
- [39] Omar Y, Paunković N, Sheridan L, Bose S. Quantum walk on a line with two entangled particles. *Physical Review A*. 2006 Oct 3;74(4):042304.

- [40] Liu C, Petulante N. One-dimensional quantum random walks with two entangled coins. *Physical Review A*. 2009 Mar 12;79(3):032312.
- [41] Venegas-Andraca SE, Ball JL, Burnett K, Bose S. Quantum walks with entangled coins. *New Journal of Physics*. 2005 Oct 17;7(1):221.
- [42] Bracken AJ, Ellinas D, Tsohantjis I. Pseudo memory effects, majorization and entropy in quantum random walks. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004 Feb 11;37(8):L91.
- [43] Maloyer O, Kendon V. Decoherence versus entanglement in coined quantum walks. *New Journal of Physics*. 2007 Apr 11;9(4):87.
- [44] Abal G, Siri R, Romanelli A, Donangelo R. Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions. *Physical Review A*. 2006 Apr 4;73(4):042302.
- [45] Bednarska M, Grudka A, Kurzyński P, Łuczak T, Wójcik A. Quantum walks on cycles. *Physics Letters A*. 2003 Oct 13;317(1-2):21-5.
- [46] Berlin T, Kac M. The spherical model of a ferromagnet. *Physical Review*. 1952 Jun 15;86(6):821.
- [47] Carneiro I, Loo M, Xu X, Girerd M, Kendon V, Knight PL. Entanglement in coined quantum walks on regular graphs. *New Journal of Physics*. 2005 Jul 12;7(1):156.
- [48] Romanelli A. Thermodynamic behavior of the quantum walk. *Physical Review A*. 2012 Jan 20;85(1):012319.
- [49] Alejandro Romanelli Instituto de Física, Facultad de Ingeniería Universidad de la República C.C. 30, C.P. 11300, Montevideo, Uruguay (Dated: August 31, 2011)
- [50] Díaz N, Donangelo R, Portugal R, Romanelli A. Transient temperature and mixing times of quantum walks on cycles. *Physical Review A*. 2016 Jul 5;94(1):012305.
- [51] Moradi M, Annabestani M. Möbius quantum walk. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2017 Nov 22;50(50):505302.
- [52] Aharonov D, Ambainis A, Kempe J, Vazirani U. Quantum walks on graphs. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing* 2001 Jul 6 (pp. 50-59). ACM.

پیوست آ

محاسبه‌ی پارامترهای دمای درهم‌تنیدگی

۱.آ محاسبه‌ی Π_R

$$\begin{aligned}
 \Pi_R &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{|c_l^R(\lambda)e^{ilk}|^2 + |c_l^R(\circ)e^{ilk}|^2}{\Upsilon \cos^2(\Omega_k)} \right. \\
 &\quad \left. + i \sin(\Omega_k) \frac{c_l^R(\lambda)e^{ilk}c_l^{R*}(\circ)e^{-ilk} - c_l^{R*}(\lambda)e^{-ilk}c_l^R(\circ)e^{ilk}}{\Upsilon \cos^2(\Omega_k)} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{c_l^R(\lambda)c_l^{R*}(\lambda) + c_l^R(\circ)c_l^{R*}(\circ)}{\Upsilon \cos^2(\Omega_k)} + i \sin(\Omega_k) \frac{c_l^R(\lambda)c_l^{R*}(\circ) - c_l^{R*}(\lambda)c_l^R(\circ)}{\Upsilon \cos^2(\Omega_k)} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\Upsilon \cos^2(\Omega_k)} \left[\sum_{l=0}^{N-1} \left(\exp\left(\frac{-\Upsilon \pi il}{N}\right) \sin(\theta) v_{kl}^* a_k(\circ) - \exp\left(\frac{-\Upsilon \pi il}{N}\right) \cos(\theta) v_{kl}^* b_k(\circ) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(\exp\left(\frac{\Upsilon \pi il}{N}\right) \sin(\theta) v_{kl} a_k^*(\circ) - \exp\left(\frac{\Upsilon \pi il}{N}\right) \cos(\theta) v_{kl} b_k^*(\circ) \right) + v_{kl}^* b_k(\circ) v_{kl} b_k^*(\circ) \right. \\
 &\quad \left. + i \sin(\Omega_k) \sum_{l=0}^{N-1} \left(\exp\left(\frac{-\Upsilon \pi il}{N}\right) (\sin(\theta) v_{kl}^* a_k(\circ) - \cos(\theta) v_{kl}^* b_k(\circ)) (v_{kl} b_k^*(\circ)) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\exp\left(\frac{\Upsilon \pi il}{N}\right) \sin(\theta) v_{kl} a_k^*(\circ) - \exp\left(\frac{\Upsilon \pi il}{N}\right) \cos(\theta) v_{kl} b_k^*(\circ) \right) (v_{kl}^* b_k(\circ)) \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\Upsilon \cos^2(\Omega_k) N} [(\sin(\theta) a_k(\circ) - \cos(\theta) b_k(\circ)) (\sin(\theta) a_k^*(\circ) - \cos(\theta) b_k^*(\circ)) \\
 &\quad + (b_k(\circ) b_k^*(\circ)) + i \sin(\Omega_k) \sum_{l=0}^{N-1} \left(\exp\left(\frac{-\Upsilon \pi il}{N}\right) (\sin(\theta) a_k(\circ) - \cos(\theta) b_k(\circ)) b_k^*(\circ) \right)
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$v_{kl} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{\sqrt{2}\pi ikl}{N}\right)$$

بنابراین با در نظر گرفتن حالت اولیه‌ی ۸۱.۲:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N \cos^2(\Omega_k)} \left[\cos^2(\theta) \cos^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) + \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ & - \cos(\theta) \sin(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ & + i \sin(\Omega_k) \left(\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\pi il}{N}\right) (e^{-i\varphi} \sin(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) - \cos(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)) \right. \\ & \left. \left. - \exp\left(\frac{\sqrt{2}\pi il}{N}\right) (e^{i\varphi} \sin(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) - \cos(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)) \right) \right] \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن:

$$\begin{aligned} \sin(\Omega_k) &= \cos(\theta) \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right) \Rightarrow \\ \cos^2(\Omega_k) &= 1 - \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right) \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2}N(1 - \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right))} \left[\sum_{l=0}^{N-1} \left(\sin^2(\theta) \cos^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) + \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right. \right. \\ & - \sin(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) e^{i\varphi} - \sin(\theta) \cos(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) e^{-i\varphi} \\ & + i \sin(\Omega_k) \sum_{l=0}^{N-1} \left(\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\pi il}{N}\right) (\sin(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) e^{-i\varphi} - \cos(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)) \right. \\ & \left. \left. - \exp\left(\frac{\sqrt{2}\pi il}{N}\right) (\sin(\theta) \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) e^{i\varphi} - \cos(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)) \right) \right] \end{aligned}$$

بعد از کمی عملیات جبری داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2}N(1 - \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right))} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2(\theta) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \cos^2(\theta) \cos(\gamma) \right. \\ & \left. + \sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\pi k}{N}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2(\theta) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right) \right] \end{aligned}$$

در نهایت داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2(\theta) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2(\theta) \cos(\gamma) \right] f(N, \theta) \\ & + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2(\theta) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right] g(N, \theta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

که در آن از روابط زیر استفاده کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} f(N, \theta) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 - \cos^{\gamma}(\theta) \sin^{\gamma}(\frac{\gamma \pi k}{N})}, \\ g(N, \theta) &= \frac{1}{\cos^{\gamma}(\theta)} [f(N, \theta) - 1], \\ h(N, \theta) &= \frac{\gamma}{\cos^{\gamma}(\theta)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\cos^{\gamma}(\theta)}\right) f(N, \theta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

۲.آ محاسبه‌ی Q_{\circ}

$$\begin{aligned} Q_{\circ} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\gamma(1 - \cos^{\gamma}(\theta) \sin^{\gamma}(\frac{\gamma \pi k}{N}))} \left[\sum_{l=0}^{N-1} (c_l^L(\circ) e^{ikl} \cdot c_l^{R*}(\circ) e^{-ikl} + c_l^L(1) e^{ikl} \cdot c_l^{R*}(1) e^{-ikl}) \right. \\ &\quad \left. + i \sin(\Omega_k) \left(\sum_{l=0}^{N-1} (c_l^L(1) e^{ikl} \cdot c_l^{R*}(\circ) e^{-ikl} - c_l^L(\circ) e^{ikl} \cdot c_l^{R*}(1) e^{-ikl}) \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\gamma(1 - \cos^{\gamma}(\theta) \sin^{\gamma}(\frac{\gamma \pi k}{N}))} \left[\sum_{l=0}^{N-1} (\exp(\frac{\gamma \pi l i}{N}) (\cos(\theta) a_k(\circ) v_{kl}^* + \sin(\theta) b_k(\circ) v_{kl}^*)) \right. \\ &\quad \left. + v_{kl}^* a_k(\circ) \cdot v_{kl} b_k^*(\circ) + i \sin(\Omega_k) \left(\sum_{l=0}^{N-1} \exp(\frac{\gamma \pi l i}{N}) (\cos(\theta) a_k(\circ) v_{kl}^* + \sin(\theta) b_k(\circ) v_{kl}^*) (b_k^*(\circ) v_{kl}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (a_k(\circ) v_{kl}^*) \exp(\frac{\gamma \pi l i}{N}) (\sin(\theta) a_k^*(\circ) v_{kl} - \cos(\theta) b_k^*(\circ) v_{kl}) \right) \right] \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} Q_{\circ} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\gamma N (1 - \cos^{\gamma}(\theta) \sin^{\gamma}(\frac{\gamma \pi k}{N}))} \left[e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) + \sum_{l=0}^{N-1} (\cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) \cos(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) \sin(\theta) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{i\varphi} + i \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \cos(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) + i \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \sin(\theta) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{i\varphi} \right. \\ &\quad \times (\cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) \sin(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) - \cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) \cos(\theta) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{-i\varphi} + i \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \sin(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) \\ &\quad \left. - i \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \cos(\theta) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{-i\varphi} + \sum_{l=0}^{N-1} \left[i \cos(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \cos(\theta) \sin(\theta) \sin^{\gamma}(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) - \cos^{\gamma}(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \cos(\theta) \sin(\theta) \sin^{\gamma}(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) - i \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^{\gamma}(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \cos^{\gamma}(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \cos(\frac{\gamma \pi l}{N}) + \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^{\gamma}(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos^{\gamma}(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\gamma}) \sin(\frac{\gamma}{\gamma}) e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma \pi k}{N}) \sin(\frac{\gamma \pi l}{N}) \right] \right] \end{aligned}$$

که در آن حالت اولیه مطابق با رابطه‌ی ۸۱.۲ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned}
 Q_0 = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N(1 - \cos^2(\theta) \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}))}} \left[e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) + \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\theta) \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\theta) \right. \\
 & - \cos^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) - \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{-i\varphi} \\
 & - \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{i\varphi} + \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{i\varphi} \\
 & - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{i\varphi} - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 & + \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{i\varphi} + \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\theta) \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\theta) \\
 & - \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\theta) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\theta) - \sqrt{\varphi} \cos(\theta) \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) \\
 & - \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{i\varphi} + \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{i\varphi} + i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\theta) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\theta) \\
 & + \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{-i\varphi} \cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{-i\varphi} \\
 & - \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos(\theta) \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\theta) + \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\theta) \cos(\theta) \\
 & \left. - \cos(\theta) \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\theta) - \sqrt{\varphi} \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \cos^2(\theta) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) e^{-i\varphi} \right]
 \end{aligned}$$

با کمی عملیات جبری داریم:

$$\begin{aligned}
 Q_0 = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N(1 - \cos^2(\theta) \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}))}} \left[(-1 + \sqrt{\varphi} \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) - \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N})) \right. \\
 & \times (\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cos^2(\theta) \sin(\gamma) e^{-i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(\gamma) e^{i\varphi} \cos^2(\theta) - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(\gamma) e^{i\varphi} - \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(2\theta)) \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} (\sin(2\theta) - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \sqrt{\varphi} \sin(\gamma) e^{-i\varphi} \cos^2(\theta)) (-\sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) + i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N})) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \\
 & \left. + e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \right]
 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 Q_0 = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N(1 - \cos^2(\theta) \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}))}} \left[-(1 - \sqrt{\varphi} \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N})) (\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cos^2(\theta) \sin(\gamma) e^{-i\varphi} \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cos^2(\theta) \sin(\gamma) e^{i\varphi} - \sin(\gamma) e^{i\varphi} - \sin(2\theta) \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(2\theta)) - \sqrt{\varphi} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \\
 & \times (\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cos^2(\theta) \sin(\gamma) e^{-i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(\gamma) e^{i\varphi} \cos^2(\theta) - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(\gamma) e^{i\varphi} - \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin(2\theta)) \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sin^2(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) (\sin(2\theta) - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \sqrt{\varphi} \sin(\gamma) e^{-i\varphi} \cos^2(\theta)) + e^{-i\varphi} \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \\
 & + \sin(2\theta) - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \sqrt{\varphi} \sin(\gamma) e^{-i\varphi} \cos^2(\theta) - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \sqrt{\varphi} \sin(\gamma) e^{-i\varphi} \cos^2(\theta) \\
 & \left. - (\sin(2\theta) + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} i \cos(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) \sin(\frac{\sqrt{\pi k}}{N}) (\sin(2\theta) - \sqrt{\varphi} \cos^2(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}}) \sin(2\theta) + \sqrt{\varphi} \sin(\gamma) e^{-i\varphi} \cos^2(\theta))) \right]
 \end{aligned}$$

با کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$Q_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2N(1 - \cos^2(\theta)\sin^2(\frac{2\pi k}{N}))} \left[(1 - 2\sin^2(\frac{2\pi k}{N})) \left(\frac{1}{4} \sin(\gamma)e^{i\varphi}\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta)\cos(\gamma) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{4} \sin(\gamma)e^{-i\varphi}\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta)\cos(\gamma) \right) \right]$$

با در نظر گرفتن روابط ۲.آ داریم:

$$Q_0 = \frac{1}{4}(\sin(\gamma)e^{i\varphi}\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta)\cos(\gamma))h(N, \theta) \tag{3.آ} \\ + \frac{1}{4}(\sin(\gamma)e^{-i\varphi}\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta)\cos(\gamma))f(N, \theta)$$

۳.آ محاسبه‌ی χ

$$\chi = \left[\frac{1}{4}(e^{-i\varphi}\sin(\gamma)\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \cos(\gamma)\sin(2\theta))f(N, \theta) + \frac{1}{4}(e^{i\varphi}\sin(\gamma)\sin^2(\theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cos(\gamma)\sin(2\theta))h(N, \theta) \right] \times \left[\frac{1}{4}(e^{i\varphi}\sin(\gamma)\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \cos(\gamma)\sin(2\theta))f(N, \theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(e^{-i\varphi}\sin(\gamma)\sin^2(\theta) + \frac{1}{4} \cos(\gamma)\sin(2\theta))h(N, \theta) \right] \\ + \frac{1}{\tan^2(\theta)} \left[\frac{1}{4}f(N, \theta)(\sin(\gamma)\sin^2(\theta)\cos(\varphi) + \frac{1}{4} \cos(\gamma)\sin(2\theta)) \right. \\ \left. + f(N, \theta)(\sin(\gamma)\sin^2(\theta)\cos(\varphi) + \frac{1}{4} \cos(\gamma)\sin(2\theta)) \right]^2$$

بعد از کمی عملیات جبری داریم:

$$\chi = \left[\frac{1}{16} \sin(\gamma)\sin^3(\theta)e^{i\varphi}\cos(\gamma)\cos(\theta) + \frac{1}{16} \sin^2(\theta)\cos^2(\gamma)\cos^2(\theta) + \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\theta)\cos^2(\gamma)\cos^2(\theta)}{\tan^2(\theta)} \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\gamma)\sin^4(\theta)\cos^2(\varphi)}{\tan^2(\theta)} + \frac{1}{8} \frac{\sin(\gamma)\sin^3(\theta)\cos(\varphi)\cos(\gamma)\cos(\theta)}{\tan^2(\theta)} + \frac{1}{16} \sin^2(\gamma)\sin^4(\theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \frac{\sin(\gamma)\sin^3(\theta)\cos(\gamma)\cos(\theta)}{e^{i\varphi}} \right] f^2(N, \theta) + \left[\frac{1}{8} \frac{\sin(\gamma)\sin^3(\theta)\cos(\varphi)\cos(\gamma)\cos(\theta)}{\tan^2(\theta)} \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \sin(\gamma)\sin^3(\theta)e^{i\varphi}\cos(\gamma)\cos(\theta) + \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\theta)\cos^2(\gamma)\cos^2(\theta)}{\tan^2(\theta)} + \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\gamma)\sin^4(\theta)\cos^2(\varphi)}{\tan^2(\theta)} \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \sin^2(\theta)\cos^2(\gamma)\cos^2(\theta) + \frac{1}{16} \sin^2(\gamma)\sin^4(\theta) + \frac{1}{16} \frac{\sin(\gamma)\sin^3(\theta)\cos(\gamma)\cos(\theta)}{e^{i\varphi}} \right] h^2(N, \theta) \\ + \left[\frac{1}{16} (e^{i\varphi})^2 \sin^2(\gamma)\sin^4(\theta) + \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\gamma)\sin^4(\theta)}{(e^{i\varphi})^2} + \frac{1}{8} \cos^2(\gamma)\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{\sin^2(\gamma)\sin^4(\theta)\cos^2(\varphi)}{\tan^2(\theta)} + \frac{1}{8} \frac{\sin(\gamma)\sin^3(\theta)\cos(\gamma)\cos(\theta)}{e^{i\varphi}} + \frac{1}{8} \cos(\gamma)\sin^3(\theta)\sin(\gamma)\cos(\theta)e^{i\varphi} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{\cos^2(\gamma)\sin^3(\theta)\cos^2(\theta)}{\tan^2(\theta)} + \frac{1}{4} \frac{\sin(\gamma)\sin^3(\theta)\cos(\gamma)\cos(\theta)\cos(\varphi)}{\tan^2(\theta)} \right] hf$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \chi = & \left[-\frac{1}{16} \cos^f(\theta) \cos^v(\gamma) - \frac{1}{\lambda} \cos^v(\theta) + \frac{1}{16} \cos^f(\theta) - \frac{1}{16} \cos^v(\gamma) + \frac{1}{16} \cos^v(\varphi) \cos^v(\theta) \right. \\ & - \frac{1}{16} \cos^v(\theta) \cos^v(\gamma) \cos^v(\varphi) + \frac{1}{\lambda} \sin(\gamma) \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\theta) + \frac{1}{16} \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta) \\ & \left. - \frac{1}{16} \cos^f(\theta) \cos^v(\gamma) \cos^v(\varphi) + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos^v(\varphi) \cos^f(\theta) \right] f^v(N, \theta) + \left[-\frac{1}{16} \cos^v(\gamma) + \frac{1}{16} \right. \\ & - \frac{1}{\lambda} \cos^v(\theta) + \frac{1}{16} \cos^f(\theta) + \frac{1}{16} \cos^v(\varphi) \cos^v(\theta) - \frac{1}{16} \cos^v(\varphi) \cos^f(\theta) - \frac{1}{16} \cos^f(\theta) \cos^v(\gamma) \\ & + \frac{1}{\lambda} \sin(\gamma) \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\theta) - \frac{1}{16} \cos^f(\theta) \cos^v(\gamma) \cos^v(\varphi) + \frac{1}{16} \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta) \\ & \left. - \frac{1}{16} \cos^v(\theta) \cos^v(\gamma) \cos^v(\varphi) \right] h^v(N, \theta) + \left[-\frac{1}{4} \cos^v(\varphi) \cos^v(\theta) + \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \cos^v(\gamma) \right. \\ & + \frac{1}{4} \cos^v(\varphi) \cos^v(\theta) \cos^v(\gamma) - \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta) - \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \cos^v(\theta) \cos^v(\gamma) \\ & + \frac{1}{4} \sin(\gamma) \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\theta) + \frac{1}{\lambda} \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta) + \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \cos^v(\theta) + \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \cos^f(\theta) + \frac{1}{\lambda} \cos^v(\varphi) \cos^f(\theta) \cos^v(\gamma) \right] hf \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} \Rightarrow \chi = & \left[-\frac{1}{\lambda} \cos^v(\theta) + \frac{1}{16} \cos^f(\theta) + \frac{1}{16} \sin^v(\gamma) \sin^v(\theta) + \frac{1}{16} \sin^v(\theta) \sin^v(\gamma) \cos^v(\varphi) \right. \\ & + \frac{1}{\lambda} \sin(\gamma) \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\theta) + \frac{1}{16} \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta) - \frac{1}{16} \sin^f(\theta) + \frac{1}{16} \\ & \left. + \frac{1}{16} \sin^f(\theta) \sin^v(\gamma) \sin^v(\varphi) - \frac{1}{16} \sin^v(\theta) \sin^v(\gamma) \sin^v(\varphi) \right] f^v(N, \theta) + \left[-\frac{1}{\lambda} \cos^v(\theta) \right. \\ & + \frac{1}{16} \cos^f(\theta) + \frac{1}{16} \sin^v(\gamma) \sin^v(\theta) + \frac{1}{16} \sin^v(\theta) \sin^v(\gamma) \cos^v(\varphi) + \frac{1}{16} \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta) \\ & + \frac{1}{\lambda} \sin(\gamma) \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\theta) - \frac{1}{16} \sin^f(\theta) + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \sin^v(\theta) \sin^v(\gamma) \sin^v(\varphi) \\ & \left. + \frac{1}{16} \sin^f(\theta) \sin^v(\gamma) \sin^v(\varphi) \right] h^v(N, \theta) + \left[-\frac{1}{\lambda} (\sin^v(\theta) - 1 + \cos^v(\theta)) (\sin^v(\theta) - 1 \right. \\ & + 2 \sin^v(\gamma) - \cos^v(\theta) - 4 \sin^v(\varphi) \sin^v(\gamma)) + \frac{1}{16} (\cos^v(\varphi) \sin^v(\gamma) \sin^v(\theta) + \cos^v(\gamma) \cos^v(\theta)) \\ & \left. + 2 \sin(\gamma) \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\theta) - \sin^v(\varphi) \sin^f(\theta) \sin^v(\gamma) \right] 2hf \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{16} [h(N, \theta) - f(N, \theta)]^v \sin^v(\varphi) \sin^v(\gamma) \sin^f(\theta) \\ & + \frac{1}{16} [h(N, \theta) + f(N, \theta)]^v (\cos(\varphi) \sin(\gamma) \sin(\theta) + \cos(\gamma) \cos(\theta))^v \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aabstract

Quantum walk has many advantages to its counterpart, classical random walk. The application of quantum walk in designing advanced algorithms as well as in many other sciences has caused extensive studies made on it. These studies have different aspects, such as dimensions, entanglement between spaces, variance, distribution function, rate of propagation, etc., which are very important for studying because they represent special properties of quantum mechanics in quantum walks. One of the parameters which has been considered recently is entanglement temperature which has been attributed to quantum walk. It has been shown in quantum walks that the reduced density matrix will take an asymptotic form over time, which can be compared with a thermal equilibrium and can be considered as a thermodynamic system. By comparing the matrix of reduced density with the density matrix of systems interacting with the thermal bath, one can introduce a temperature to the reduced density matrix of quantum walk. This temperature is related to the coin- position entanglement and depends on eigenvalues of the reduced density matrix. In this thesis, we examined the thermodynamic components of quantum walks, especially the entanglement temperature. And in particular, the entanglement temperature for circle and one-dimensional systems. We have obtained a formalism for entanglement temperature and then, by changing the coin state by $U(2)$ operator, we have investigated the effect of the coin on the entanglement temperature. We have also investigated entanglement temperature and transient temperature in Mobius quantum walk (MQW), which is generalization of quantum walk on a cycle.

keywords: Quantum walk; reduced density matrix; entanglement temperature; quantum walk on the cycle; Mobius quantum walk; entanglement transient temperature



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in: Particles Physics

**Thermodynamics of entanglement in $U(2)$
quantum walk**

By: Zahra Shekari

Supervisor

Mostafa Annabestani

January 2018