

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی ناهم‌خوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی

نگارنده: علیرضا اسراری

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

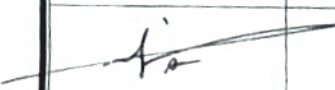

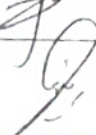

بهمن ۱۳۹۶

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای علیرضا اسراری با شماره دانشجویی ۹۴۰۲۰۲۴ رشته فیزیک گرایش ذرات بنیادی تحت عنوان: بررسی ناهمخوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته‌ی ولگست کوانتومی با سکه‌های دوبعدی که در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه:): مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر مصطفی عباسستانی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احسان ابراهیمی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مرتضی رفیعی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر علی حسینی منصور	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی مؤمنی



تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تصوه: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد باید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به حقیقی‌ترین حقیقت زندگی‌ام
فرود خسروی

تشکر فراوان از زحمات دکتر مصطفی عنابستانی که در
این پایان نامه مرا بسیار کمک کردند.

علیرضا اسراری
بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب علیرضا اسراری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی ناهم‌خوانی کوانتومی در ماتریس کاهش‌یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی**، تحت راهنمایی مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علیرضا اسراری

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ناهم‌خوانی کوانتومی نوعی همبستگی کوانتومی ورای درهم‌تنیدگی کوانتومی است. این مفهوم بصورت تفاضل همبستگی‌های کلاسیکی از اطلاعات دوطرفه که نماینده‌ی کلیه‌ی همبستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی است، شناخته می‌شود. این مقدار می‌تواند برای حالت‌هایی با درهم‌تنیدگی صفر، غیر صفر باشد. پس جدایی‌پذیر بودن ماتریس چگالی دلیل بر صفر بودن همبستگی‌های کوانتومی و صفر بودن درهم‌تنیدگی ضامن صفر بودن همبستگی‌های کوانتومی نیست.

فرم مجانبی ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی بسته به اینکه سکه‌ی ولگشت کوانتومی چگونه باشد ممکن است X -گونه و یا متفاوت باشد، مثلاً ولگشت کوانتومی با سکه‌ی بل ماتریس کاهش یافته‌ای به شکل X -گونه دارد در حالی که گراور و هادامارد ماتریس‌هایی 4×4 با عناصر غیر صفر هستند، اما مشخص شده که در مورد ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی تعداد پارامترهای مستقل زیاد نیست.

در این پایان‌نامه با در نظر گرفتن سکه‌های مختلف به صورت بل، هادامارد، گراور، همبستگی‌های کوانتومی در مورد زیرسیستم‌های آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت، برای مثال درهم‌تنیدگی بین فضای سکه و مکان، همچنین درهم‌تنیدگی و ناهم‌خوانی کوانتومی بین زیرفضاهای سکه در مورد این سه عملگر بررسی شده‌اند.

کلمات کلیدی: ناهم‌خوانی کوانتومی، ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی، سکه‌های دوبعدی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. بررسی ناهمخوانی کوانتومی در ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌ی بل، اسراری، علیرضا، عنابستانی، مصطفی، دومین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی ایران، ۲۱ شهریور ۱۳۹۶، شاهرود.
۲. بررسی ناهمخوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌های دوبعدی، اسراری، علیرضا، عنابستانی، مصطفی، کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، ۷ دی ۱۳۹۶، قم.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	آشنایی با ناهمخوانی کوانتومی و کلیات ۱
۱	۱.۱ مقدمه ۱
۱	۲.۱ تاریخچه ۱
۳	۳.۱ آمار و احتمالات ۳
۴	۱.۳.۱ مجموعه‌ها ۴
۵	۲.۳.۱ روابط حاکم بر مجموعه‌ها ۵
۵	۳.۳.۱ چند اصل موضوع ۵
۷	۴.۳.۱ قانون بیز ۷
۸	۴.۱ تابع توزیع احتمال ۸
۹	۵.۱ آشنایی با بعضی مفاهیم نظریه‌ی اطلاعات ۹
۹	۱.۵.۱ آنتروپی شانون ۹
۹	۲.۵.۱ آنتروپی شرطی ۹
۱۰	۳.۵.۱ اطلاعات متقابل ۱۰
۱۰	۴.۵.۱ برخی از خواص ابزارهای نظریه اطلاعات ۱۰
۱۲	۶.۱ ناهمخوانی کوانتومی ۱۲
۱۳	۱.۶.۱ همبستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی ۱۳
۱۶	۷.۱ بررسی روش بدست آوردن ناهمخوانی کوانتومی در یک نگاه ۱۶
۱۹	۲ محاسبه ناهمخوانی ۱۹
۱۹	۱.۲ معرفی کار ۱۹
۲۰	۲.۲ حالت‌های دوکیوبیته ۲۰
۲۰	۳.۲ بررسی ماتریس چگالی سیستم‌های دوکیوبیته ۲۰
۲۴	۴.۲ فرم کلی اندازه‌گیری ۲۴
۳۳	۵.۲ حالت‌های X-گونه ۳۳

۳۹	۶.۲ محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی یک حالت خاص براساس فرم X-گونه‌ی آن
۴۷	۳ محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی برای چند حالت خاص
۴۸	۱.۳ حالت‌های بل
۵۲	۱.۱.۳ بررسی دقیق‌تر حالتها بل
۵۴	۲.۱.۳ حالت ورنر
۵۹	۴ بررسی ارتباطات کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی
۵۹	۱.۴ ولگشت کوانتومی
۶۳	۲.۴ محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی
۶۳	۱.۲.۴ ناهم‌خوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته با سکه‌ی بل
	۲.۲.۴ ناهم‌خوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته با سکه‌ی گراور و
۶۹	هادامارد
۷۷	۵ نتیجه‌گیری
۷۹	مراجع

فهرست تصاویر

۱۱	وضعیت آنتروپی X, Y و آنتروپی شرطی X, Y نسبت به هم	۱.۱
۱۷	مراحل محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی	۲.۱
۲۹	نمودار رفتار همبستگی‌های کلاسیکی به‌ازای مقادیر مختلف متغییر c	۱.۲
۳۲	مقایسه ناهم‌خوانی کوانتومی و همبستگی‌های کلاسیکی	۲.۲
۴۴	نمودار تابع $h(w)$	۳.۲
۵۵	نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی δ برای یک حالت ورنر برحسب مقادیر مختلف c	۱.۳
۵۵	نمودار \bar{c} برای حالت ورنر بر حسب مقادیر مختلف c	۲.۳
۵۶	نمودار درهم‌تنیدگی کوانتومی (E) برای یک حالت ورنر برحسب مقادیر مختلف c	۳.۳
۵۶	نمودار همبستگی‌های کوانتومی برای یک حالت ورنر برحسب مقادیر مختلف c باهم	۴.۳
۵۷	نمودار وضعیت ناهم‌خوانی کوانتومی در محدوده‌ی جدایی‌پذیر و درهم‌تنیده برای یک حالت ورنر، نمودار قرمز ناهم‌خوانی و خط‌چین مرز جدایی‌پذیر و درهم‌تنیدگی	۵.۳
۶۴	نمودار بررسی σ_z بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل	۱.۴
۶۵	نمودار سه بعدی بررسی σ_z بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل	۲.۴
۶۶	نمودار بررسی σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل	۳.۴
۶۶	نمودار سه بعدی بررسی σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل	۴.۴
۶۷	نمودار بررسی شرط لازم برای استفاده از σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل	۵.۴
۶۸	نمودار سه بعدی بررسی امکان استفاده از σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل	۶.۴
۶۹	نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی برای هردو حالت اولیه و سکه‌ی بل	۷.۴
۷۰	نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه‌ی گراور با مکان	۸.۴
۷۱	نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی برای هردو حالت اولیه بین زیرفضاهای سکه‌ی گراور با $\phi = 0$	۹.۴

-
-
- ۱۰.۴ نمودار درهم‌تنیدگی بین زیرفضاهای سکه‌ی گراور و هردو حالت اولیه با $\phi = 0$ ۷۱
- ۱۱.۴ نمودار درهم‌تنیدگی و ناهم‌خوانی گراور ۷۲
- ۱۲.۴ نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان هادامارد ۷۲
- ۱۳.۴ نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان هادامارد ۷۳
- ۱۴.۴ نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان هادامارد برای هردو حالت اولیه . . ۷۳
- ۱۵.۴ نمودار ناهم‌خوانی هادامارد ۷۴
- ۱۶.۴ نمودار ناهم‌خوانی هادامارد ۷۴
- ۱۷.۴ نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی برای هردو حالت اولیه‌ی سکه‌ی هادامارد . . ۷۵

فصل ۱

آشنایی با ناهم‌خوانی کوانتومی و کلیات

۱.۱ مقدمه

آنچه در این مجموعه‌ی گردآوری شده به خوانندگان ارائه خواهد شد چیزی نیست به‌جز مفهومی تازه متولد شده در دل نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی تحت عنوان ناهم‌خوانی کوانتومی، بنابراین همانند هر موضوع دیگری قبل از شکل‌گیری کامل آن مقدمات و زمینه‌های زیادی برای پیدایش آن وجود داشته که اشاره نکردن به آن‌ها بوضوح می‌تواند باعث بدفهمی این مبحث گردد. بدین ترتیب سعی بر آن است حتی‌الامکان فصل اول به‌گونه‌ای باشد که خواننده را با دغدغه‌های ذهنی و سپس در فصل‌های بعد نحوه‌ی محاسبه‌ی آن و ملموس‌تر شدن هرچه بیشتر آن آشنا کند.

و بالاخره با توجه به‌اینکه یکی از بهترین راه‌های ورود به هر موضوعی ذکر تاریخچه‌ی آن می‌باشد در ابتدا سعی بر آن است تاریخچه‌ی ارائه گردد.

۲.۱ تاریخچه

آنچه در سال ۲۰۰۱ رسماً بعنوان ناهم‌خوانی کوانتومی به جهان فیزیک ارائه گردید، نتیجه‌ی تحقیقات دو گروه دونفره، یکی واقع در اروپا و دیگری واقع در آمریکا بود که به‌صورت جداگانه در دو ژورنال معتبر [۱]، [۲] به چاپ رسید. آن‌ها موفق به کشف یک نوع جدید از همبستگی‌های

کوانتومی شده بودند که با مفهوم درهم‌تنیدگی و جدایی‌پذیر بودن فرق داشت. آن‌ها به‌سادگی استدلال کردند که اگر همبستگی‌های کلاسیکی را از همبستگی‌های کل کم کنیم همبستگی‌های کوانتومی باقی می‌ماند و از طرفی می‌دانیم روش‌هایی برای اندازه‌گیری همبستگی‌های کلاسیکی و همبستگی‌های کل در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی در نظر گرفته شده.

هرچند ما در ادامه مفصل به این مفاهیم و استدلال‌ها خواهیم پرداخت ولی برای مقدمه و آشنایی، روش استدلال آن‌ها را در اینجا ذکر می‌کنیم که چگونه منجر به تولد ناهمخوانی کوانتومی گردید. البته واقعیت این است که زورک قبل از کار سال ۲۰۰۱ خود با همکاری الیویر^۱ در مقاله‌ی [۱]، از واژه‌ی ناهمخوانی کوانتومی استفاده کرده بود [۲]. اما به‌رحال نکته‌ای که باعث می‌شود ودرال^۲ و هندرسون^۳ را هم در کنار اولیویر و زورک قرار بدهند، نحوه‌ی متفاوت نزدیک شدن آن‌ها به یک دغدغه‌ی واحد بین آن‌ها و تیم واقع در آمریکا متشکل از زورک و الیویر است [۲]. در واقع گروه واقع در اروپا اینگونه استدلال کردند که چون بر طبق نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی فرم متقارن اطلاعات متقابل^۴، نمایانگر کلیه‌ی همبستگی‌های^۵ بین حالت‌های کوانتومی^۶ می‌باشد، پس طبیعی است اگر همبستگی‌های کوانتومی را که با درهم‌تنیدگی کوانتومی^۷ نمایش و اندازه می‌گیریم با همبستگی‌های کلاسیکی که به پیشنهاد خود آن‌ها در مقاله‌ی مشترک‌شان بصورت فرم غیرمتقارن اطلاعات متقابل (عبارتی شامل آنتروپی شرطی)^۸، جمع شوند مجموعه‌ی این دو عبارت به صورت کلیه‌ی همبستگی‌ها که با فرم متقارن اطلاعات متقابل هم ارز است برابر خواهد شد.

ولی آن‌چنان که آن‌ها با ذکر چند مثال در مقاله خود نشان دادند اینطور نیست و این اتفاق نمی‌افتد، و بدین ترتیب آن‌ها نتیجه گرفتند که یا :

اطلاعات متقابل نماینده‌ی خوبی برای کلیه‌ی همبستگی‌های موجود^۹ بین زیرسیستم‌ها نیست و نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی^{۱۰} باید بازبینی شود و یا اینکه :

$$(1.1) \quad \text{درهم‌تنیدگی} + \text{همبستگی‌های کلاسیکی} \neq \text{کلیه‌ی همبستگی‌ها}$$

اما گروه واقع در آمریکا و شاید عمدتاً بتوان گفت زورک با اعتماد بر مفاهیم نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی به این جمع‌بندی رسیدند که برای فرار از این وضعیت کافی است :

$$(2.1) \quad \text{درهم‌تنیدگی} \geq \text{همبستگی‌های کوانتومی}$$

^۱H.Ollivier

^۲V.Vedral

^۳L.Henderson

^۴mutual information

^۵correlation

^۶quantum states

^۷quantum entanglement

^۸conditional entropy

^۹total correlation

^{۱۰}quantum information theory

درواقع تفاضل کلیه‌ی همبستگی‌های کلاسیکی از کلیه‌ی همبستگی‌ها را به صورت کلیه‌ی همبستگی‌های کوانتومی در نظر گرفتند [۱]. دو سال بعد این بار هم زورک در مقاله‌ی نامدارش نشان داد چگونه این مفهوم تازه متولد شده می‌تواند در ترمودینامیک وارد شود [۴]. همچنین در سال‌های بعد مقالات متعددی در همبستگی باناهم‌خوانی کوانتومی نوشته شد [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳] ... تا اینکه این بار در سال ۲۰۱۰ میلادی این و درال بود که با همکاری داکیک^{۱۱} از روش جدیدی اندازه‌گیری ناهم‌خوانی کوانتومی صحبت به میان آورد [۱۴]، [۱۵] و بدین ترتیب دیگر می‌توان نتیجه گرفت استدلال زورک در مورد اینکه همبستگی‌های کوانتومی تنها از نوع درهم‌تنیدگی کوانتومی نیستند به خوبی پذیرفته شده است.

۳.۱ آمار و احتمالات

این قسمت جهت آشنایی با مفاهیم آمار و احتمالات که زیربنای مکانیک کوانتومی است آورده شده و ضرورت زیادی وجود ندارد که خواننده آن‌ها را قبل از نظریه‌ی اطلاعات و اطلاعات کوانتومی مطالعه‌ی دقیق بکند.

در بسیاری از موارد ما با شرایطی روبرو هستیم که یا برای سیستم مورد بررسی خود اطلاعی از شرایط اولیه نداریم، یا تعداد ذرات آن چنان زیاد است که نمی‌توان آن‌ها را مورد بررسی دقیق قرارداد (قضیه‌ای در ریاضیات وجود دارد که بررسی دقیق سیستم‌های سه ذره‌ای و بیشتر را ناممکن می‌داند)، یا رفتار سیستم مورد بررسی ذاتاً تصادفی است، یا استفاده از روش تحلیلی بسیار بسیار دشوار است و یا کوچکترین تغییر در شرایط اولیه می‌تواند وضعیت نهایی را بسیار عوض کند و رفتار آشوبناک است، همچنین سیستم‌هایی مانند سکه و تاس که پس از هر آزمایش نتیجه به کلی از آزمایش‌های قبلی مستقل است را سیستم‌های مارکوفی^{۱۲} می‌نامند که در هر آزمایش حافظه‌ی قبلی سیستم به کلی پاک می‌شود، در کلیه‌ی این موارد ما ناچار به استفاده از آمار و احتمالات هستیم. در واقع کار آمار و احتمالات کمیت بخشیدن به میزان ناآگاهی ما است و هر زمان پای ناآگاهی به میان می‌آید احتمال به میان می‌آید. روش کار معمولاً به این صورت است که ما همواره با یک تعداد حالت ممکن روبرو هستیم که نمی‌دانیم کدامیک قرار است در آزمایش حاصل شود، مثلاً ما در پرتاب سکه با دو رخداد روبرو هستیم که به این مجموعه فضای نمونه یا فضای رخدادها می‌گوییم:

$$S = \{\text{خط, شیر}\} \quad (3.1)$$

اگر برای راحتی در محاسبات و انجام عملیات ریاضی و نسبت دادن تابع‌های ریاضی بدنبال نمادگذاری بهتری باشیم می‌توانیم با نگاشتنی از فضای نمونه به مجموعه‌ی اعداد حقیقی به

^{۱۱}Dakic

^{۱۲}markovian systems

صورت کاملا انتخابی انجام دهیم که مثلا:

$$S = \{x_i\} \quad (۴.۱)$$

$$x_۱ = \text{خط}, x_۲ = \text{شیر} \quad (۵.۱)$$

و x_i را متغییر تصادفی^{۱۳} بنامیم. احتمال وقوع هر x_i بصورت:

$$P_X(x_i) = \frac{n_i}{N} \quad (۶.۱)$$

N می تواند تعداد کل حالت ها باشد که در این جا دو مورد است یا تعداد کل آزمایش ها. همچنین n_i تعداد کل x_i مورد نظر و یا تعداد بدست آوردن x_i در N آزمایش است. مثلا برای یک تاس شش بار آزمایش انجام دادن برای محاسبه ی احتمال وقوع یک عدد خاص هم ارز با شش تاس را باهم ریختن است.

۱.۳.۱ مجموعه ها

مجموعه ها را بصورتی در نظر می گیریم که شامل عناصر x_i باشند و در دو دسته ی متناهی یا نامتناهی و همچنین شما را یا ناشما را دسته بندی می کنیم و بطور منطقی مجموعه های ناشما را نامتناهی نیز هستند.

۱. زیرمجموعه بصورت $B \subset A$ نشان داده می شود.

۲. اجتماع بصورت $S = A \cup B$ نشان داده می شود.

۳. اشتراک بصورت $S = A \cap B$ نشان داده می شود.

۴. تفاضل بصورت $C = A/B$ نشان داده می شود.

۵. متمم بصورت A^c نشان داده می شود.

^{۱۳} random variable

۲.۳.۱ روابط حاکم بر مجموعه‌ها

$$\begin{aligned}
 A \cup A &= A \\
 A \cap A &= A \\
 (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
 (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
 A \cup \emptyset &= A \\
 A \cap \emptyset &= \emptyset \\
 A \cup U &= U \\
 A \cap U &= A \\
 A \cup A^c &= U \\
 A \cap A^c &= \emptyset \\
 (A^c)^c &= A \\
 U^c &= \emptyset \\
 \emptyset^c &= U \\
 (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
 (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
 \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

مجموعه‌ی حاصلضرب را بصورت

$$C = A \times B \tag{۸.۱}$$

و تعداد اعضای آن $n_a \times n_b$

افراز را نیز بصورت تقسیم یک مجموعه به زیرمجموعه‌های مجزا و ناتهی در نظر می‌گیریم.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{2, 4\} \tag{۹.۱}$$

۳.۳.۱ چند اصل موضوع

۱. احتمال وقوع هر رویداد مقداری بصورت:

$$0 \leq P \leq 1 \tag{۱۰.۱}$$

۲. احتمال وقوع مجموعه‌ی همه‌ی حالتها همواره مقداره واحد بصورت زیر است:

$$P(S) = 1 \quad (11.1)$$

۳. رویدادهای ناسازگار رویدادهایی هستند که هیچ اشتراکی باهم ندارند و بصورت زیر قابل تعریف هستند:

$$A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n = \emptyset \quad (12.1)$$

برای این رویدادها خواهیم داشت:

$$P(A_1 \cup A_2 \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (13.1)$$

۴. برای مثال برای دو رویداد ناسازگار زیر:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (14.1)$$

۵. احتمال وقوع مجموعه‌ی تهی را به صورت اصل موضوع تعریف می‌کنیم:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (15.1)$$

از آنجایی که اگر دو مجموعه را از هم کم کنیم آن‌گاه تفاضل این دو با هم هیچ اشتراکی نخواهند داشت، می‌توانیم هر مجموعه را بصورت اجتماع بین تفاضل آن از مجموعه‌ی دیگر با اشتراک بین آن‌ها تعریف کنیم:

$$A = (A/B) \cup (A \cap B) \quad (16.1)$$

چون مجموعه‌ی حاصل از تفاضل با مجموعه‌ی اشتراک ناسازگارند خواهیم داشت:

$$P(A) = P(A/B) + P(A \cap B)$$

$$A \cup B = (A/B) \cup B \quad (17.1)$$

$$P(A \cup B) = P(A/B) + P(B)$$

بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (18.1)$$

این رابطه در آینده برای محاسبه‌ی اطلاعات متقابل به کمک ما خواهد آمد.
احتمالات شرطی بصورت:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (19.1)$$

احتمال رویداد A به شرط وقوع رویداد B . که از تقسیم روابط زیر بر یکدیگر بدست می‌آید.

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} \quad (20.1)$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|S|} \quad (21.1)$$

همچنین:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B) \quad (22.1)$$

و:

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1}) \quad (23.1)$$

۴.۳.۱ قانون بیز

در نظریه‌ی احتمال، قانون بیز^{۱۴} احتمال وقوع یک رویداد را براساس آگاهی قبلی از شرایطی که ممکن است مربوط به رویداد باشد، توصیف می‌کند. به عنوان مثال، اگر سرطان با سن ارتباط داشته باشد، با استفاده از قضیه‌ی بیز، سن را می‌توان برای ارزیابی احتمال ابتلا به سرطان در مقایسه با ارزیابی احتمال ابتلا به سرطان بدون اطلاع از سن فرد استفاده کرد. فرض کنید یک مجموعه را به چند مجموعه‌ی کوچک A_i افراز کنیم و در دل آن‌ها مجموعه‌ای دلخواه بنام B را داشته باشیم:

$$A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = S$$

$$A_i \cap A_j = A_j \delta_{i,j}$$

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) \cap B$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \quad (24.1)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

و نهایتاً رابطه‌ای که به قانون بیز معروف است:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) \dots P(A_n)P(B|A_n)} \quad (25.1)$$

مثالی را در پایان این بخش برای آشنایی هرچه بیشتر با قانون بیز ذکر می‌کنیم: فرض کنیم یک کارخانه برای تولید محصولاتش سه دستگاه دارد که دستگاه A ۵۰ و B ۳۰ و C ۲۰ درصد

^{۱۴} bayes rule

محصولات را تولید می‌کنند و دستگاه اول و دوم و سوم به ترتیب: ۳، ۴، ۵ درصد محصولاتش خراب باشد. احتمال اینکه یک محصول را برداریم و خراب باشد چقدر است؟ احتمال اینکه از دستگاه A انتخاب شده باشد چقدر است؟ پاسخ:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C) \\ &= 0.5 \times 0.03 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.05 \\ &= 0.07 \end{aligned} \quad (26.1)$$

$$P(A|X) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)} = \frac{15}{37} \quad (27.1)$$

۴.۱ تابع توزیع احتمال

همانطور که اشاره شد تعریف متغیر تصادفی برای یک فضای رخ داده‌های محتمل دست ما را برای انجام محاسبات ریاضی با این داده‌ها باز می‌کند چرا که کار کردن با شیر و خط به کار کردن با x_1, x_2 جایگزین می‌شود. به این ترتیب می‌توان تابع توزیعی برای خروجی‌های آزمایش تعریف کرد که بصورت $P_x(x)$ نوشته و در شرط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(x) dx = 1 \quad (28.1)$$

به این ترتیب برای آزمایش‌هایی که خروجی‌ها هم احتمال باشند میانگین به صورت:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad (29.1)$$

و برای حالت‌های غیرهم‌احتمال تابع توزیع بصورت وزنی:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_i x_i n_i \quad (30.1)$$

که:

$$\frac{n_i}{n} = P_i \quad (31.1)$$

پس خواهیم داشت:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_i x_i P_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \quad (32.1)$$

درنهایت واریانس را بصورت:

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= \sigma^2(x) \\ &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ &= \int (x - \langle x \rangle)^2 P(x) dx \quad (33.1) \\ &= \int (x^2 + \langle x \rangle^2 - 2 \langle x \rangle x) P(x) dx \\ &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \end{aligned}$$

۵.۱ آشنایی با بعضی مفاهیم نظریه‌ی اطلاعات

مرجع این بخش عمدتاً کتاب نیلسن - چوانگ [۱۶] می‌باشد. پس از مقاله‌ی سال ۱۹۴۸ شانون^{۱۵} و تولد نظریه‌ی اطلاعات کلاسیک و [۱۷] پس از آن شکل‌گیری فرم کوانتومی آن، ابزارهای جدیدی برای اندازه‌گیری اطلاعات و عدم قطعیت و آگاهی و... ارائه گردید که مختصر به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱.۵.۱ آنروپی شانون

این مفهوم که مفهوم کلیدی نظریه‌ی اطلاعات است دو تعریف متفاوت اما هم‌ارز دارد:

۱. میزان متوسط اطلاعاتی که ما پیرامون X که یک متغیر تصادفی است بدست می‌آوریم اگر آن را بدانیم.

۲. ما چه مقدار پیرامون X عدم آگاهی داریم تا قبل از آنکه آن را بدانیم؟

اگر متغیر تصادفی X_i دارای توزیع احتمالی P_i باشد مانند یک چشمه‌ی تولید سیگنال با فرکانس‌های تصادفی، آن‌گاه نمایش آنروپی شانون آن بصورت:

$$S(x) = - \sum P_i \log_2 P_i \quad (34.1)$$

درواقع چشمه‌ای که X را تولید می‌کند تنها یک تعریف عام پیدا کرده و آن‌چنان که در ادامه خواهیم دید متغیر بودن X فقط آن‌را عام‌تر می‌کند، در ادامه در مثال‌ها روشن‌تر خواهد شد.

۲.۵.۱ آنروپی شرطی

فرض کنید ما دو متغیر تصادفی X و Y داریم و البته X را می‌دانیم به این ترتیب ما از این دو متغیر X و Y که میزان اطلاعات آن را با $S(X, Y)$ نشان داده، به مقدار $S(X)$ بیت اطلاعات

^{۱۵}C.Shannon

داریم (واحد اندازه‌گیری اطلاعات کلاسیک بیت و اطلاعات کوانتومی کیوبیت است). میزان عدم قطعیت باقیمانده پیرامون این جفت معادل $S(Y)$ خواهد بود. پس آنتروپی Y با دانستن X بصورت :

$$S(Y|X) = S(X, Y) - S(X) \quad (۳۵.۱)$$

که به آن آنتروپی Y به شرط X گفته می‌شود.

۳.۵.۱ اطلاعات متقابل

میزان اطلاعات مشترک بین X و Y با این مفهوم نمایش داده می‌شود. با توجه به اینکه اگر X و Y بصورت مشترک اطلاعات داشته باشند $S(X, Y)$ خواهد بود که معادل با هم در نظر گرفتن آن‌هاست، و اگر جداگانه در نظر گرفته شوند اطلاعات مشترکشان دوبار محاسبه خواهد شد پس:

$$I(X : Y) = S(X) + S(Y) - S(X, Y) \quad (۳۶.۱)$$

که به یک فرم متقارن برای اطلاعات متقابل منجر می‌شود و با جایگذاری از قسمت قبل و تعویض جای متغیرها به فرمی غیرمتقارن از این مفهوم خواهیم رسید بصورت :

$$J(X : Y) = S(X) - S(X|Y) \quad (۳۷.۱)$$

۴.۵.۱ برخی از خواص ابزارهای نظریه اطلاعات

۱. آنتروپی فون‌نویمن موجودی متقارن است و نسبت به دو متغیر یکسان رفتار می‌کند:

$$S(X, Y) = S(Y, X) \quad (۳۸.۱)$$

۲. اطلاعات متقابل نیز موجودی متقارن نسبت به دو متغیری است که می‌خواهیم اطلاعات متقابل را بین آن‌ها اندازه بگیریم:

$$I(X : Y) = I(Y : X) \quad (۳۹.۱)$$

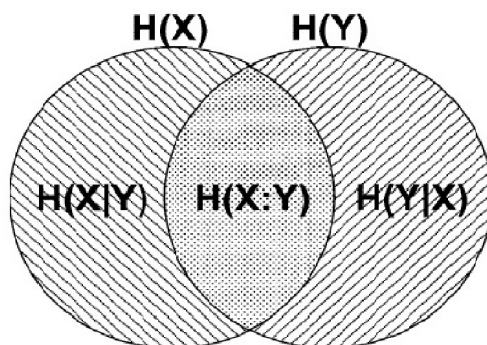
۳. رابطه‌ی معروف زیر جمع‌پذیری^{۱۶} بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(X, Y) \leq S(X) + S(Y) \quad (۴۰.۱)$$

^{۱۶}subadditivity

۴. آنتروپی شرطی همواره کمتر از آنتروپی غیره شرطی یک موجود است و این منجر به این می‌شود که همبستگی‌های کلاسیکی همواره بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$S(Y|X) \leq S(Y) \rightarrow J(X : Y) \geq 0 \quad (41.1)$$



شکل ۱.۱: وضعیت آنتروپی X, Y و آنتروپی شرطی X, Y نسبت به هم

همچنین شکل بالا تاحدودی می‌تواند به درک هر چه بیشتر این مفاهیم کمک کند. حال برای رسیدن به فرم کوانتومی باید توزیع‌های احتمالی جایشان را به ماتریس‌های چگالی و آنتروپی شانون جای خود را به آنتروپی فون نویمان^{۱۷} بدهد، همچنین جمع روی توزیع‌های احتمالی با رد^{۱۸} جایگزین می‌شود.

$$S(X) \rightarrow S(\rho_x) = -tr(\rho_x \log_2 \rho_x) \quad (42.1)$$

$$I(X : Y) \rightarrow I(X : Y) = S(\rho_x) + S(\rho_y) - S(\rho_{x,y}) \quad (43.1)$$

اما بدست آوردن فرم غیرممتقارن آن اندکی فرق دارد و دشوارتر است و نمی‌توان به این سادگی انجام داد چراکه:

$$J(X : Y) = S(\rho_x) - ? \quad (44.1)$$

درواقع ما برای بدست آوردن فرم کوانتومی آنتروپی شرطی می‌خواهیم این مفهوم را بازنویسی کنیم که مقدار متوسط عدم قطعیت ما پیرامون X علی‌رغم دانستن Y چقدر است؟ بدین ترتیب ما مجبور به استفاده از یک روش اندازه‌گیری هستیم. ما از تصویرگرهای یک بعدی

^{۱۷} von neumann entropy

^{۱۸} trace

که بصورت Π_j^y نشان داده می‌شوند استفاده خواهیم کرد. اندیس پایین شمارنده‌ی خروجی است از بین مجموعه‌ی حالتها و اندیس بالا زیرسیستی که اندازه‌گیری روی آن اعمال می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$\rho_{x|\Pi_j^y} = \frac{\text{tr}_y [(I \otimes \Pi_j^y) \rho_{x,y} (I \otimes \Pi_j^y)]}{P_j} \quad (45.1)$$

همچنین:

$$P_j = \text{tr}_{x,y} \{ (I \otimes \Pi_j^y) \rho_{x,y} (I \otimes \Pi_j^y) \} \quad (46.1)$$

پس به‌ازای یک اندازه‌گیری کامل خواهیم داشت:

$$S(X|\{\Pi_j^y\}) = \sum_j P_j S(\rho_{x|\{\Pi_j^y\}}) \quad (47.1)$$

پس مطابق انتظار از جمع آنتروپی‌های شرطی ضرب در احتمال وقوعشان به تعریف کامل معادله‌ی ۳۷.۱ می‌رسیم.

$$J(X : Y) = S(\rho_x) - \min_{\{\Pi_j^y\}} S(X|\{\Pi_j^y\}) \quad (48.1)$$

کمینه بودن آنتروپی شرطی در رابطه‌ی بالا از آن‌جا ناشی می‌شود که جدای از استدلال‌های مفصل بانیان آن [۱]، [۲] ما به‌دنبال پیدا کردن کمترین میزان همبستگی کوانتومی هستیم [۱۸]. تا این‌جای کار ما توانسته‌ایم گامی بلند برای بدست آوردن ناهم‌خوانی کوانتومی برداریم. حال نشان می‌دهیم چگونه با این مقدمات می‌توانیم به این مفهوم عمیق برسیم.

۶.۱ ناهم‌خوانی کوانتومی

دو عبارت اطلاعات متقابل که بصورت فرم متقارن و غیرمتقارن می‌باشند کاملاً درجهان کلاسیک معادل هستند، اما فرم کوانتومی آن‌ها معادل نیست در واقع فرم متقارن آن‌چنان که از تعریفش پیداست معادل وضعیتی است که دو موجود را جدا جدا و سپس باهم در نظر بگیریم، و از تفاضل این دو وضعیت به همبستگی بین آن‌ها پی ببریم.

برای مثال فرض کنید ما از یک کتاب دونسخه کپی داریم، حال میزان اطلاعات نهفته در هر کتاب را با $S(X)$ و $S(Y)$ و چون هر دو کتاب یکسان هستند:

$$S(X) + S(Y) = 2S(X) \quad (49.1)$$

همچنین اگر آن‌ها را باهم در نظر بگیریم:

$$S(X, Y) = S(X) \quad (50.1)$$

پس طبیعی است که داشته باشیم:

$$I(X, Y) = 2S(X) - S(X) = S(X) \quad (51.1)$$

درواقع همانطور که از نتیجه پیداست همبستگی بین این دو کتاب به میزان یک کتاب کامل خواهد بود.

در نتیجه میزان اطلاعات متقابل به ما خواهد گفت این دو کتاب کاملاً یکسان هستند [۴]. ولی شاید حالا بهترین زمان ممکن برای پرداختن به یک مفهوم کلیدی باشد.

۱.۶.۱ همبستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی

درواقع همبستگی^{۱۹} واژه‌ی کلیدی مورد بحث در نظریه‌ی اطلاعات می‌باشد، به این صورت که برای مثال اطلاعات متقابل که در حال حاضر در حال بررسی آن هستیم میزان همبستگی بین دو بخش یا دو قسمت یک سیستم دو بخشی را اندازه می‌گیرد. اما آیا ترجمه‌ی این واژه تنها بصورت همبستگی کافی است؟

واقعیت اینجاست که در [۱۹] و اکثر توضیحات پیرامون معنای این واژه داریم: همبستگی‌ای که الزاماً علی نباشد. در واقع می‌توان بین دو موجود همبستگی پیدا کرد بدون اینکه بین آن‌ها الزاماً رابطه‌ی علت و معلولی وجود داشته باشد. برای مثال بین روز و شب و روشن شدن چراغ خانه‌ها همبستگی هست اما نه یک رابطه‌ی الزام آور و علت و معلولی. همین‌طور است وضعیت بین سرمای هوا و بیماری سرماخوردگی. حال در ادامه‌ی مسیر به بررسی $J(X : Y)$ می‌پردازیم، آن‌چنان که بحث شد این رابطه در بردارنده‌ی $S(X)$ و $S(X|Y)$ است یعنی از طرفی X را نمی‌دانیم و از طرفی Y را می‌دانیم حال می‌خواهیم بدانیم $S(X) - S(X|Y)$ که معادل میزان اطلاعات و همبستگی نهفته در Y پیرامون X است چقدر است؟

در واقع دانستن Y چه تاثیری در کاهش عدم قطعیت و آگاهی ما پیرامون X دارد؟ آن‌چنان که در روح این سوال دیده می‌شود ما در دل این تعریف یک فرض کلیدی داریم و آن

^{۱۹}correlation

اینکه X وجود دارد و ما می‌خواهیم با دانستن Y هرچه بیشتر X را بدانیم. افراد آشنا با مکانیک کوانتومی به خوبی دو نکته را می‌دانند:

۱. دانستن Y از طریق اندازه‌گیری آن ممکن است، آن‌چنان که در ۴۵.۱ رابطه‌ی مربوط به آن را بدست آوردیم.

۲. وجود X و افزایش دانش ما پیرامون آن و کاهش عدم قطعیت پیرامون آن به قیمت اندازه‌گیری Y به معنای این است که وجود X درگرو و مرتبط با Y نیست، و به بیان مقاله معروف اینشتین [۲۰] X عنصری از واقعیت است و ...

درواقع در منطق کلاسیک و موضعیت هیچ منعی برای این وضعیت وجود ندارد و دانستن $X - Y$ را مختل نخواهد کرد، تنها علم ما را پیرامون آن بیشتر خواهد کرد پس همانطور که در [۲] مفصل به آن اشاره و توضیح داده شده این تعریف می‌تواند معیار بسیار خوبی برای اندازه‌گیری همبستگی کلاسیکی باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned} I(X : Y) &= S(X) + S(Y) - S(X, Y) \\ S(X|Y) &= S(X, Y) - S(Y) \rightarrow \\ S(X, Y) &= S(X|Y) + S(Y) \\ I(X : Y) &= S(X) + S(Y) - S(X|Y) - S(Y) \\ &= S(X) - S(X|Y) \\ &= J(X : Y) \end{aligned} \tag{۵۲.۱}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} I(X : Y) &= \text{Total Correlations} \\ J(X : Y) &= \text{Classical Correlations} \end{aligned}$$

پس طبیعی است :

$$\begin{aligned} \delta(x : y) &= I(X : Y) - J(X : Y) \\ &= S(Y) - S(X, Y) + S(X|Y) \end{aligned} \tag{۵۳.۱}$$

در فرم کوانتومی خواهیم داشت :

$$\delta(X : Y)_{\{\Pi_j^y\}} = S(\rho_y) - S(\rho_{x,y}) + S(X|\{\Pi_j^y\}) \tag{۵۴.۱}$$

این عبارت که در ادامه درباره خواص آن بیشتر بحث خواهیم کرد چیزی نیست به جز ناهمخوانی کوانتومی بدیهی است آن‌چه از این تفاضل باقی می‌ماند معادل کلیه‌ی همبستگی‌های کوانتومی خواهد بود.

در واقع آن‌چنان که در فصل بعد با ذکر مثال‌های متعدد نشان خواهیم داد بدست آوردن همبستگی‌های کوانتومی از این روش بسیار عام‌تر از روش‌های قبلی مبتنی بر درهم‌تنیدگی کوانتومی است.

آن‌چنان که خوانندگان می‌دانند تا قبل از ظهور ناهم‌خوانی کوانتومی تنها سیستم‌های در هم‌تنیده که ماتریس چگالی آن‌ها ^{۲۰} جدایی‌پذیر ^{۲۱} نباشد دارای همبستگی‌های کوانتومی در نظر گرفته می‌شدند، اما از این پس ما یک معیار جدیدتر از درهم‌تنیدگی داریم تحت عنوان ناهم‌خوانی کوانتومی و در واقع شرط عدم وجود همبستگی‌های کوانتومی و ناموضعی، صفر شدن ناهم‌خوانی کوانتومی بین آن موجودات خواهد بود.

بدیهی است برای سیستم‌هایی که ناهم‌خوانی کوانتومی آن‌ها صفر باشد ما با یک وضعیت کاملاً کلاسیکی روبرو هستیم. بدین ترتیب درک ما از کلاسیک هم دوباره مرور خواهد شد. شرط کلاسیکی بودن عدم وجود هرگونه همبستگی‌های کوانتومی و ناموضعی خواهد شد.

حال طبیعی به نظر می‌رسد خواننده از خود بپرسد حقیقتاً ناموضعی چیست و به چه معنا است؟؟

این شرط برای چیست؟؟ برای توضیح این سوال باید مجدداً به مقاله معروف اینشتین [۲۰] رجوع کرد.

ناموضعی

اگر ما مشاهده‌پذیری را نتوانیم با قطعیت پیش‌گویی کنیم در واقع هیچ راه‌حل علی برای توضیح آن مشاهده‌پذیر وجود نخواهد داشت و به این ترتیب ما هیچ دسترسی به آن نداریم و چون آن‌چنان که روابط عدم قطعیت و جابه‌جاگری بین عملگرها بیان می‌دارند، این عدم دسترسی از کمبود آگاهی نیست و مشاهده‌پذیری که مانند مکان و تکانه باهم جابه‌جا نمی‌شوند باهم وجود نخواهند داشت، و این خود اولین انگیزه برای مطرح شدن همبستگی‌های کوانتومی بود [۲۰].

هر موجودی که با محیط اطرافش دچار درهم‌تنیدگی شود بخاطر وجود این همبستگی مرموز وجود مستقلی نخواهد داشت [۱] و انجام هر آزمایشی روی جفت درهم‌تنیده‌ی آن، مشاهده‌پذیر متناظر اندازه‌گیری شده روی جفت دیگر را از بین برهنه‌ی ^{۲۲} حالتها برخواهد گزید. این با تجربه‌ی روزمره‌ی ما کاملاً در تضاد است.

هیچ‌کدام از ما در طول زندگی روزمره خود مشاهده نکرده ایم که برای مثال دیواری در

^{۲۰} density matrix

^{۲۱} separable

^{۲۲} superposition

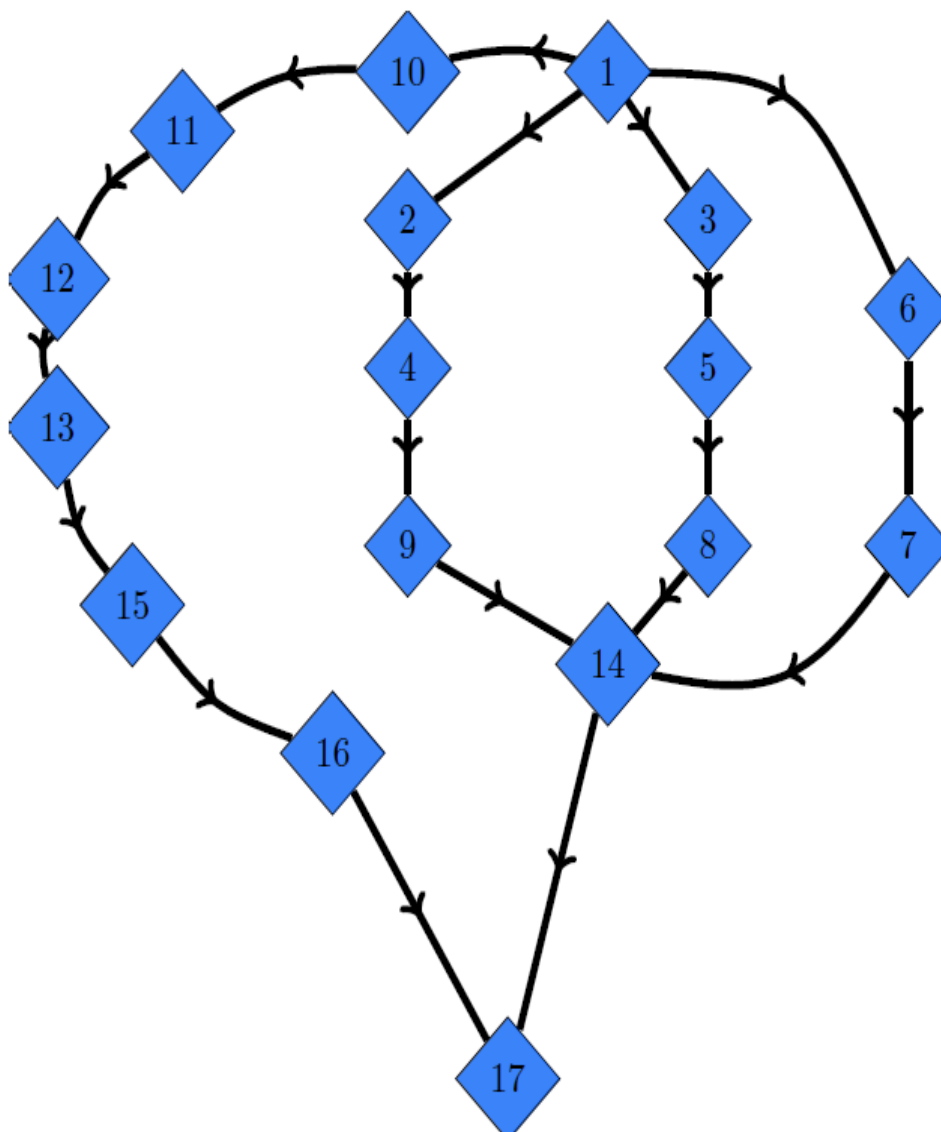
اتاقمان ظاهر شود و یا چهره‌ی دوستان ناگهان عوض شود، و اتفاقاتی از این دست بیفتند بدون اینکه کوچکترین واسطه یا سیگنالی و یا چیزی اصابت بکند ... اما درجهان کوانتومی آن‌چنان که بل در نامساوی‌های معروف خود [۲۱] نشان داد بدون هیچ سیگنال و ... می‌تواند موجودی از موجود دیگری در آن سوی کیهان تاثیر بگیرد. پس روشن است که ادعا کنیم جهان کلاسیک جهان همبستگی‌های موضعی و کلاسیک است و نه کوانتومی و غیر موضعی.

بدین ترتیب به نقطه‌ای رسیده‌ایم که بگوییم حالت‌های جهان کلاسیک با محیط اطرافشان دچار درهم‌تنیدگی نمی‌شوند [۱] اما حالا خواننده به خوبی می‌داند با معرفی معیار جدید یعنی ناهم‌خوانی کوانتومی دیگر به خوبی و شکلی نوین می‌تواند آن‌را بعنوان معیار جدید ظهور کلاسیک از دل جهان کوانتومی در نظر بگیرد. حالت‌های با ناهم‌خوانی کوانتومی صفر کاملاً مستقل هستند و کلاسیکی. پس جمع‌بندی وضعیت اینطور که شما با دیگری در همبستگی هستید اگر او بتواند چیزی را از خود به شما برساند و یا اینکه عامل مشترکی بین شما و او باشد که هر دو بتوانید از آن عامل مشترک برای تاثیر دیدن و یا تاثیر گذاشتن روی اطراف خود استفاده کنید.

این تنها نوع همبستگی در جهان کلاسیک است اما در جهان کوانتومی بازهم وضعیت متفاوت است و بدین ترتیب تفاوت‌های جهان کلاسیک بیشتر و بیشتر مشخص شدند.

۷.۱ بررسی روش بدست آوردن ناهم‌خوانی کوانتومی در یک نگاه

در این بخش که بخش پایانی این فصل است سعی می‌شود چشم‌اندازی کلی از آنچه در فصل بعد تحت عنوان روش محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی آورده خواهد شد عرضه گردد. مطابق شکل ۲.۱ می‌بینیم که مراحل در گرافی رسم و توضیحات مربوط به هر مرحله در زیر آورده شده است.



شکل ۲.۱: مراحل محاسبه‌ی ناهمخوانی کوانتومی

۱. ماتریس کلی $\rho^{a,b}$
۲. بدست آوردن ρ^a
۳. بدست آوردن ρ^b
۴. بدست آوردن ویژه مقادیر ρ^a ، λ_i برای محاسبه‌ی آنتروپی آن
۵. بدست آوردن ویژه مقادیر ρ^b ، λ_i برای محاسبه‌ی آنتروپی آن
۶. بدست آوردن ویژه مقادیر $\rho^{a,b}$ ، λ_i برای محاسبه‌ی آنتروپی آن
۷. محاسبه‌ی آنتروپی $\rho^{a,b}$
۸. محاسبه‌ی آنتروپی ρ^b

۹. محاسبه‌ی آنتروپی ρ^a
۱۰. اعمال اندازه‌گیری روی زیرسیستم موردنظر a یا b
۱۱. محاسبه‌ی احتمال هر حالت اندازه‌گیری شده با محاسبه‌ی رد ماتریس مرحله ۱۰
۱۲. بدست آوردن ویژه مقادیر ماتریس حاصل از تقسیم ماتریس مرحله‌ی ۱۰ بر عدد حاصل از مرحله‌ی ۱۱
۱۳. محاسبه‌ی اطلاعات متقابل
۱۴. محاسبه‌ی آنتروپی شرطی و کمینه کردن آن
۱۵. کم کردن مقدار مرحله‌ی ۱۴ از مقدار مرحله‌ی ۸ یا ۹ بسته به انتخاب ما از ابتدای کار
۱۶. بدست آوردن همبستگی‌های کلاسیکی
۱۷. محاسبه‌ی ناهمخوانی کوانتومی با کم کردن ۱۶ از ۱۳

فصل ۲

محاسبه ناهمخوانی

۱.۲ معرفی کار

عمده‌ی محاسبات و نمادگذاری‌های این فصل براساس مرجع [۲۲] و [۲۳] بنا شده است.

همان‌طور که در فصل قبل با تاریخچه‌ی شکل‌گیری ناهم‌خوانی کوانتومی آشنا شدیم و به مرور با دغدغه‌های شکل‌گیری آن، دیدیم که ناهم‌خوانی کوانتومی چیزی نیست به‌جز اختلاف موجود بین فرم کوانتومی دو تعریف یکسان کلاسیکی از اطلاعات متقابل. اما همان‌طور که اشاره شد عمده‌ی کار محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی چیزی نیست جز کمینه کردن آنتروپی شرطی و متقابلاً کردن همبستگی‌های کلاسیکی و در نهایت کم کردن آن از کلیه‌ی همبستگی‌های موجود و بدست‌آوردن ناهم‌خوانی کوانتومی.

در این فصل سعی می‌کنیم ساده‌ترین کارهای انجام‌شده در پژوهش‌های پیرامون محاسبه ناهم‌خوانی کوانتومی را بررسی و با نحوه‌ی انجام کار آشنا شویم.

۲.۲ حالت‌های دوکیوبیته

سیستم های دوکیوبیته^۱ ساده‌ترین نوع سیستم‌های مرکب است. در این فصل سعی بر آن است برای خانواده‌ی جالبی از سیستم‌های دوکیوبیته بصورت تحلیلی^۲، ناهمخوانی کوانتومی محاسبه گردد.

۳.۲ بررسی ماتریس چگالی سیستم‌های دوکیوبیته

هرحالت دلخواه برای یک سیستم دو کیوبیتی می‌تواند در پایه‌ی $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ بصورت:

$$\tau = \frac{1}{4} \left\{ I + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes I + I \otimes \vec{v} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{j,k=1}^3 W_{i,j} \sigma_j \otimes \sigma_k \right\} \quad (1.2)$$

نوشت که در واقع بصورت:

$$\rho_a = \frac{1}{2} (I + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.2)$$

$$\rho_b = \frac{1}{2} (I + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.2)$$

که نهایتاً از ضرب آن‌ها خواهیم داشت:

$$\tau' = \frac{1}{4} \{ I + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes I + I \otimes \vec{v} \cdot \vec{\sigma} \} \quad (4.2)$$

$$\tau = \rho^a \otimes \rho^b + \sum_{j,k=1}^3 W_{i,j} \sigma_j \otimes \sigma_k \quad (5.2)$$

و جمله‌ی آخر از رابطه‌ی ۱.۲ جمله‌ی همبستگی نام دارد [۲۴] و [۲۵]. از طرفی می‌توانیم هر ماتریس پائولی را تحت ماتریس‌های یکانی U, V عضو گروه $U(2)$ بصورت:

$$U \sigma_j U^\dagger = \sum_{m=1}^3 O_{j,m}^a \sigma_m, \quad V \sigma_k V^\dagger = \sum_{n=1}^3 O_{j,n}^a \sigma_n \quad (6.2)$$

^۱two-qubit
^۲analytic

که در این روابط O^a, O^b ماتریس‌های نرمال و متعامدی عضو گروه $O(3)$ هستند بنویسیم. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U \otimes V \left(\sum_{j,k=1}^3 W_{j,k} \sigma_j \sigma_k \right) U^\dagger \otimes V^\dagger \\ &= \sum_{j,k=1}^3 W_{j,k} (U \sigma_j U^\dagger) \otimes (V \sigma_k V^\dagger) \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 W_{j,k} O_{j,m}^a O_{n,k}^b \right) \sigma_m \otimes \sigma_n \\ &= \sum_{m=1}^3 c_m \sigma_m \otimes \sigma_m \end{aligned} \quad (7.2)$$

با در نظر داشتن:

$$\sum_{j,k=1}^3 O_{j,m}^a W_{j,k} O_{n,k}^b = \delta_{m,n} c_n \quad (8.2)$$

پس نهایتاً همواره می‌توانیم حالت سیستم‌های متشکل از دو کیوبیت را به صورت زیر بنویسیم:

$$\gamma = \frac{1}{4} \left\{ I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes I + I \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{j=1}^3 c_j \cdot \sigma_j \otimes \sigma_j \right\} \quad (9.2)$$

همانطور که در [۲۲]، [۲۵]، [۱۳] اشاره شده فرم کلی ماتریس چگالی سیستم‌های دو کیوبیته بصورت فرم بالا خواهد بود. برای سادگی هرچه بیشتر ما با سیستم‌هایی که آنسامبل آن‌ها کاملاً آمیخته باشند^۳ محاسباتمان را پیش می‌بریم، به این معنی که حالت زیرسیستم‌ها دارای ماتریس‌های چگالی ای هستند که فقط دارای عناصر قطری و کاملاً برابر هستند و در ادامه در ۲۱.۲ این وضعیت را خواهیم دید. پس به فرم زیر خواهیم رسید:

$$\rho = \frac{1}{4} \left(I + \sum_{j=1}^3 c_j \cdot \sigma_j \otimes \sigma_j \right) \quad (10.2)$$

c_j ها اعداد حقیقی ثابتی هستند که ماتریس چگالی ما را خوش تعریف می‌کنند [۲۲]. همانطور که ملاحظه می‌شود حالا ما با یک ماتریس چگالی به شکل بالا روبرو هستیم و می‌خواهیم ناهم‌خوانی کوانتومی را برای آن محاسبه کنیم. همانطور که از تعریف ناهم‌خوانی کوانتومی می‌دانیم باید آنتروپی فون‌نویمان را برای زیرسیستم دلخواه a یا b بسته به اینکه ناهم‌خوانی کوانتومی را از روی اندازه‌گیری روی کدام زیرسیستم

^۳maximally marginally mixed

بدست بیاوریم حساب کنیم، چراکه همانطوری که می‌دانیم در قسمت آنتروپی شرطی باید مشخص کنیم کدام زیرسیستم را برای اندازه‌گیری مدنظر داریم؟ همچنین برای محاسبه‌ی

$$S(\rho^{a,b}) \quad (11.2)$$

باید ویژه مقادیر ماتریس مربوطه را بدانیم بدین ترتیب داریم:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

که همان ماتریس‌های معروف پائولی هستند و همچنین ماتریس همانی بصورت:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.2)$$

پس بوضوح ماتریس کلی را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\rho^{a,b} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c_3 + 1 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

با محاسبه‌ی ویژه مقادیر خواهیم داشت:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(1 - c_1 - c_2 - c_3) \quad (16.2)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(1 - c_1 + c_2 + c_3) \quad (17.2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(1 + c_1 + c_2 - c_3) \quad (18.2)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}(1 + c_1 - c_2 + c_3) \quad (19.2)$$

همچنین می‌توان ماتریس چگالی را به صورت نمادگذاری دیراک بصورت:

$$\begin{aligned} \rho^{a,b} = & \frac{1}{4}((c_3 + 1)|00\rangle\langle 00| + (c_1 - c_2)|11\rangle\langle 00| \\ & + (1 - c_3)|01\rangle\langle 01| + (c_1 + c_2)|10\rangle\langle 01| \\ & + (c_1 + c_2)|01\rangle\langle 10| + (1 - c_3)|10\rangle\langle 10| \\ & + (c_1 - c_2)|00\rangle\langle 11| + (1 + c_3)|11\rangle\langle 11|) \end{aligned} \quad (20.2)$$

حال می‌توانیم با ردگیری جزئی^۴ ماتریس چگالی ρ^a و ρ^b را بصورت:

$$\rho^a = \rho^b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (21.2)$$

در رابطه‌ی ۴۲.۱ دیدیم چگونه می‌توان آنتروپی فون نویمان را برای یک ماتریس چگالی حساب کنیم اما فرم دیگر محاسبه‌ی آنتروپی بر حسب ویژه‌مقادیر بصورت:

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (22.2)$$

بکار ما خواهد آمد [۱۶]. پس برای ρ^a, ρ^b خواهیم داشت:

$$- \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = 1 \quad (23.2)$$

$$\begin{aligned} I(\rho^{a,b}) = & 2 + \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \\ = & 2 + \frac{(1 - c_1 - c_2 - c_3)}{4} \log_2 \frac{(1 - c_1 - c_2 - c_3)}{4} + \\ & \frac{(1 - c_1 + c_2 + c_3)}{4} \log_2 \frac{(1 - c_1 + c_2 + c_3)}{4} + \\ & \frac{(1 + c_1 + c_2 - c_3)}{4} \log_2 \frac{(1 + c_1 + c_2 - c_3)}{4} + \\ & \frac{(1 + c_1 - c_2 + c_3)}{4} \log_2 \frac{(1 + c_1 - c_2 + c_3)}{4} \end{aligned} \quad (24.2)$$

^۴ partial trace

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 I(\rho^{a,b}) = & 2 + \frac{(1 - c_1 - c_2 - c_3)}{4} \log_2((1 - c_1 - c_2 - c_3) - 4) \\
 & + \frac{(1 - c_1 - c_2 - c_3)}{4} \log_2((1 - c_1 - c_2 - c_3) - 4) \\
 & + \frac{(1 - c_1 + c_2 + c_3)}{4} \log_2((1 - c_1 + c_2 + c_3) - 4) \quad (25.2) \\
 & + \frac{(1 + c_1 + c_2 - c_3)}{4} \log_2((1 + c_1 + c_2 - c_3) - 4) \\
 & + \frac{(1 + c_1 - c_2 + c_3)}{4} \log_2((1 + c_1 - c_2 + c_3) - 4)
 \end{aligned}$$

در نتیجه به رابطه‌ی:

$$\begin{aligned}
 I(\rho^{a,b}) = & \frac{(1 - c_1 - c_2 - c_3)}{4} \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \\
 & + \frac{(1 - c_1 - c_2 - c_3)}{4} \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \quad (26.2) \\
 & + \frac{(1 + c_1 + c_2 - c_3)}{4} \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) \\
 & + \frac{(1 + c_1 - c_2 + c_3)}{4} \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3)
 \end{aligned}$$

می‌رسیم که همان اطلاعات متقابل برای این ماتریس چگالی دو بخشی است. برای مثال در ادامه خواهیم دید این ماتریس به‌ازای

$$c_1 = c_2 = c_3 = -c \quad (27.2)$$

به حالت ورنر^۵ تبدیل خواهد شد.

۴.۲ فرم کلی اندازه‌گیری

اگر

$$\Pi_k = |k\rangle\langle k| \quad : k = 0, 1 \quad (28.2)$$

برای $V \in U(2)$ فرم کلی اندازه‌گیری بصورت:

$$B_k = V \Pi_k V^\dagger \quad : k = 0, 1 \quad (29.2)$$

$$V = t.I + i.y.\sigma \quad (30.2)$$

که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \quad (31.2)$$

^۵werner state

درواقع به دلیل یکانی بودن ماتریس V این شرط برقرار شده:

$$V.V^\dagger = V^\dagger.V = I \quad (۳۲.۲)$$

پس داریم:

$$\begin{bmatrix} t - iy_3 & -iy_1 - y_2 \\ -iy_1 + y_2 & t + iy_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t + iy_3 & iy_1 + y_2 \\ iy_1 - y_2 & t - iy_3 \end{bmatrix} = I \quad (۳۳.۲)$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} t^2 - (iy_1)^2 - (iy_3)^2 + y_2^2 & 0 \\ 0 & t^2 - (iy_1)^2 - (iy_3)^2 + y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳۴.۲)$$

پس شرط ۳۱.۲ منطقی به نظر می‌رسد. به هر حال این ماتریس بصورت:

$$V = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i.y_1 \\ i.y_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ -y_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i.y_3 & 0 \\ 0 & -i.y_3 \end{bmatrix} \quad (۳۵.۲)$$

$$V = \begin{bmatrix} t + i.y_3 & y_2 + i.y_1 \\ i.y_1 - y_2 & t - i.y_3 \end{bmatrix} \quad (۳۶.۲)$$

و همچنین:

$$V^\dagger = \begin{bmatrix} t - i.y_3 & -i.y_1 - y_2 \\ y_2 - i.y_1 & t + i.y_3 \end{bmatrix} \quad (۳۷.۲)$$

پس برای این ماتریس‌ها به ازای $k=0$ خواهیم داشت:

$$\Pi_0 = |\circ\rangle\langle\circ| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۸.۲)$$

در نتیجه:

$$B_0 = \begin{bmatrix} t + i.y_3 & y_2 + i.y_1 \\ i.y_1 - y_2 & t - i.y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - i.y_3 & -i.y_1 - y_2 \\ y_2 - i.y_1 & t + i.y_3 \end{bmatrix} \quad (۳۹.۲)$$

بنابراین:

$$B_0 = V\Pi_0 V^\dagger = \begin{bmatrix} (t + i.y_3)(t - i.y_3) & (t + i.y_3)(-i.y_1 - y_2) \\ (i.y_1 - y_2)(t - i.y_3) & (i.y_1 - y_2)(-i.y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (۴۰.۲)$$

حالت کلی ما تحت اندازه‌گیری روی یکی از بخش‌هایش بصورت زیر تغییر خواهد یافت و خواهیم داشت:

$$\rho_k = \frac{(I \otimes B_k) \rho^{a,b} (I \otimes B_k)}{P_k} \quad (41.2)$$

که مشابه ۴۵.۱ ولی عام‌تر و همچنین از ۴۶.۱ مخرج کسر قابل محاسبه است. حال به دنبال محاسبه‌ی عبارت فوق هستیم بدین ترتیب عبارت زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P_k \rho_k &= (I \otimes B_k) \rho^{a,b} (I \otimes B_k) \\ &= (I \otimes (VII_k V^\dagger)) \rho^{a,b} (I \otimes (VII_k V^\dagger)) \\ &= (I \otimes V) (I \otimes \Pi_k) (I \otimes V^\dagger) \rho^{a,b} (I \otimes V) (I \otimes \Pi_k) (I \otimes V^\dagger) \\ &= \frac{1}{4} (I \otimes V) (I \otimes \Pi_k) \left\{ (III) \otimes (V^\dagger IV) + \sum_{j=1}^3 c_j (I \sigma_j I) \otimes (V^\dagger \sigma_j V) \right\} \\ &\quad (I \otimes \Pi_k) (I \otimes V^\dagger) \\ &= \frac{1}{4} (I \otimes V) (I \otimes \Pi_k) \left\{ I \otimes I + \sum_{j=1}^3 c_j \cdot \sigma_j \otimes (V^\dagger \sigma_j V) \right\} \\ &\quad (I \otimes \Pi_k) (I \otimes V^\dagger) \end{aligned} \quad (42.2)$$

حال برای ساده‌سازی هرچه بیشتر روابط زیر را که در ماتریس چگالی ما ظاهر شدند حساب می‌کنیم:

$$V^\dagger \sigma_1 V = \begin{bmatrix} -2 \cdot t \cdot y_2 + 2 \cdot y_1 \cdot y_3 & (i \cdot y_1 + y_2)(-i \cdot y_1 - y_2) + (t + i \cdot y_3)^2 \\ (t - i \cdot y_3)^2 + (i \cdot y_1 - y_2)(-i \cdot y_1 + y_2) & 2 \cdot t \cdot y_2 - 2 \cdot y_1 \cdot y_3 \end{bmatrix} \quad (43.2)$$

که داریم:

$$V^\dagger \sigma_1 V = (t^2 + y_1^2 - y_2^2 + y_3^2) \sigma_1 + 2(t \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2) \sigma_2 + 2(y_1 \cdot y_3 - t \cdot y_2) \sigma_3 \quad (44.2)$$

همچنین برای حالت‌های مشابه دیگر خواهیم داشت:

$$V^\dagger \sigma_2 V = 2(-t \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2) \sigma_1 + (t^2 + y_2^2 - y_1^2 - y_3^2) \sigma_2 + 2(t \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3) \sigma_3 \quad (45.2)$$

$$V^\dagger \sigma_3 V = 2(t \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3) \sigma_1 + 2(-t \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3) \sigma_2 + (t^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2) \sigma_3 \quad (46.2)$$

همچنین برای نزدیک و نزدیک‌تر شدن به جواب روابط زیر را نیز باید حساب کنیم:

$$\begin{aligned}
 \Pi_0 \sigma_3 \Pi_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \Pi_0
 \end{aligned} \tag{۴۷.۲}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 \sigma_3 \Pi_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= -\Pi_1
 \end{aligned} \tag{۴۸.۲}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_0 \sigma_1 \Pi_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{۴۹.۲}$$

پس می‌توان نتیجه‌ی کلی زیر را گرفت که:

$$\Pi_j \sigma_k \Pi_j = 0 \quad \text{for } j = 0, 1 \quad k = 1, 2 \tag{۵۰.۲}$$

پس به‌ازای حالت‌های سه‌گانه z و $k=0$ خواهیم داشت:

$$\rho_0 = \frac{1}{4} \{I + c_1 \cdot z_1 \cdot \sigma_1 + c_2 \cdot z_2 \cdot \sigma_2 + c_3 \cdot z_3 \cdot \sigma_3\} \otimes (VII_1 V^\dagger) \tag{۵۱.۲}$$

این درحالی است که ما تعاریف زیر را به‌کار برده‌ایم:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \sqrt{-t \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3} \\
 z_2 &= \sqrt{t \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3} \\
 z_3 &= (t^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2)
 \end{aligned} \tag{۵۲.۲}$$

پس می‌توان احتمال این حالت که $\frac{1}{4}$ است را به راحتی با گرفتن رد از ۵۱.۲ حساب کرد و نتیجه گرفت:

$$\rho_0 = \frac{1}{4} \{I + c_1.z_1.\sigma_1 + c_2.z_2.\sigma_2 + c_3.z_3.\sigma_3\} \otimes (VII_0 V^\dagger) \quad (53.2)$$

و به همین ترتیب برای $k=1$ داریم:

$$\rho_1 = \frac{1}{4} \{I - c_1.z_1.\sigma_1 - c_2.z_2.\sigma_2 - c_3.z_3.\sigma_3\} \otimes (VII_1 V^\dagger) \quad (54.2)$$

که با محاسبه ویژه مقادیر برای این ماتریس ویژه مقادیری بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\left\{ \circ, \circ, \frac{1 + \sqrt{|c_1.z_1|^2 + |c_2.z_2|^2 + |c_3.z_3|^2}}{2}, \frac{1 - \sqrt{|c_1.z_1|^2 + |c_2.z_2|^2 + |c_3.z_3|^2}}{2} \right\} \quad (55.2)$$

$$\left\{ \circ, \circ, \frac{1 + \Theta}{2}, \frac{1 - \Theta}{2} \right\} \quad (56.2)$$

رابطه‌ی بالا با تعریف زیر امکان‌پذیر خواهد بود:

$$\Theta = \sqrt{|c_1.z_1|^2 + |c_2.z_2|^2 + |c_3.z_3|^2} \quad (57.2)$$

حال در موقعیتی هستیم که بتوانیم روابط موردنیاز برای محاسبه‌ی آنتروپی‌های لازمه را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} S(\rho_0) &= -\frac{1+\Theta}{4} \log_2 \frac{1+\Theta}{4} - \frac{1-\Theta}{4} \log_2 \frac{1-\Theta}{4} \\ &= -\frac{1+\Theta}{4} \{\log_2((1+\Theta)-2)\} - \frac{1-\Theta}{4} \{\log_2((1-\Theta)-2)\} \\ &= -\frac{1+\Theta}{4} \log_2(1+\Theta) - \frac{1-\Theta}{4} \log_2(1-\Theta) + 2 \end{aligned} \quad (58.2)$$

همین وضعیت با اندکی تفاوت برای $k=1$ بصورت:

$$\left\{ \circ, \circ, \frac{1+\Theta}{2}, \frac{1-\Theta}{2} \right\} \quad (59.2)$$

و آنتروپی مربوط به آن بصورت:

$$= -\frac{1-\Theta}{4} \log_2(1+\Theta) - \frac{1+\Theta}{4} \log_2(1-\Theta) + 2 \quad (60.2)$$

$$C(\rho) = \sup_{\{B_k\}} I(\rho|\{B_k\}) = S(\rho^a) - S(\rho|\{B_k\}) \quad (61.2)$$

همانطور که در [۲۳] و [۲۲] دیدیم:

$$S(\rho^a) = 1 \quad (62.2)$$

پس در رابطه‌ی آنتروپی شرطی به شکل زیر هم خواهیم داشت:

$$S(\rho|\{B_k\}) = P_0 S(\rho_0) + P_1 S(\rho_1) \quad (۶۳.۲)$$

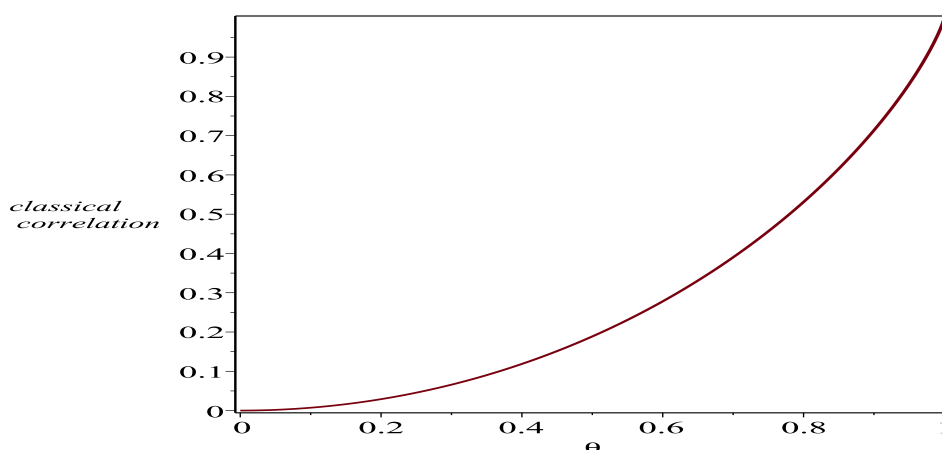
و همانطور که با گرفتن رد از ۵۱.۲ دیدیم:

$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2} \quad (۶۴.۲)$$

در نتیجه طبیعی است:

$$S(\rho|\{B_k\}) = 1 - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1+\theta}{2} \log_2 \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2} \log_2 \frac{1-\theta}{2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1+\theta}{2} \log_2 \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2} \log_2 \frac{1-\theta}{2} \right\} \quad (۶۵.۲)$$

نمودار این عبارت به صورت ۱.۲:



شکل ۱.۲: نمودار رفتار همبستگی‌های کلاسیکی به‌ازای مقادیر مختلف متغیر تتا

پس نهایتاً به رابطه‌ی زیر برای فرم غیرممتقارن اطلاعات متقابل می‌رسیم:

$$J = \frac{1-\theta}{2} \log_2(1-\theta) + \frac{1+\theta}{2} \log_2(1+\theta) \quad (۶۶.۲)$$

می‌توان به راحتی نشان داد رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 \Leftrightarrow \quad (۶۷.۲)$$

$$(-2ty_2 + 2y_1y_3)^2 + (2ty_1 + 2y_2y_3)^2 + (t^2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2)^2 \quad (۶۸.۲)$$

$$t^4 + 2t^2 y_1^2 + 2t^2 y_2^2 + 2t^2 y_3^2 + y_1^4 + 2y_1^2 y_2^2 + 2y_1^2 y_3^2 + y_2^4 + 2y_2^2 y_3^2 + y_3^4 \quad (۶۹.۲)$$

$$(t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 = 1 \quad (۷۰.۲)$$

حال تا بدست آوردن ناهمخوانی کوانتومی تنها کمینه کردن عبارت آنتروپی شرطی را لازم داریم که با فرض زیر خواهیم داشت:

$$c := \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\} \quad (۷۱.۲)$$

پس به طور بدیهی همواره خواهیم داشت:

$$\Theta \leq \sqrt{|c|^2 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)} = c \quad (۷۲.۲)$$

که بدین ترتیب :

$$\sup_{\{B_k\}} = \sup_V = c \quad (۷۳.۲)$$

پس ما به رابطه‌ی سرراست زیر رسیده‌ایم:

$$C(\rho) = \frac{1-c}{2} \log_2(1-c) + \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) \quad (۷۴.۲)$$

حال به بررسی شرایط وقوع این حالتها کمینه برای آنتروپی شرطی و به همان نسبت شدن همبستگی‌های کلاسیکی می‌پردازیم:

۱.

$$\text{اگر } c = |c_1| \rightarrow |z_1| = 1, z_2 = z_3 = 0 \rightarrow |t| = |y_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۷۵.۲)$$

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} y_1 = y_3 = 0 \rightarrow z_1 = 2(-t \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3) \quad (۷۶.۲)$$

اثبات کامل است.

۲.

$$\text{اگر } c = |c_2| \rightarrow |z_2| = 1, z_1 = z_3 = 0 \rightarrow |t| = |y_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۷۷.۲)$$

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} y_2 = y_3 = 0 \rightarrow z_2 = 2(t \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3) \quad (۷۸.۲)$$

اثبات کامل است.

$$\text{اگر } c = |\alpha_3| \rightarrow |z_3| = 1, z_1 = z_2 = 0 \rightarrow |t| = |y_3| = \frac{1}{\sqrt{4}} \quad (79.2)$$

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} y_1 = y_2 = 0 \rightarrow z_3 = t^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2 \quad (80.2)$$

اثبات کامل است.

$$\begin{aligned} \delta_{(a:b)} &= I(\rho) - C(\rho) \\ &= \frac{1}{4}((1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \\ &\quad + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3) \\ &\quad + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\ &\quad + (1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3)) \\ &\quad - \frac{1-c}{4} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{4} \log_2(1+c) \end{aligned} \quad (81.2)$$

بدین ترتیب در ۸۱.۲ توانستیم به فرمول عام برای این خانواده از حالت‌های دو بخشی که با ماتریس چگالی ۹.۲ نشان داده می‌شوند دست‌یابیم.

حال برای مثال به حالت خاص و بسیار معروف ورنر^۶ می‌پردازیم:

$$\rho = \frac{(1-c)}{4} I + c |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| \quad (82.2)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{\{|^0 1\rangle - |1 0\rangle\}}{\sqrt{2}} \quad (83.2)$$

در نتیجه ناهم‌خوانی کوانتومی برای این حالت بصورت:

$$\delta = \frac{1-c}{4} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{4} \log_2(1+c) + \frac{1+3c}{4} \log_2(1+3c) \quad (84.2)$$

همچنین برای حالت‌های بل به‌سادگی داریم:

$$\rho = |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| \quad (85.2)$$

$$I(\rho) = 2, \quad C(\rho) = 1, \quad \rightarrow \delta = 1 \quad (86.2)$$

همانطور که دیده می‌شود ناهم‌خوانی کوانتومی و همبستگی‌های کلاسیکی کاملاً مساوی در سیستم تقسیم شده‌اند.

^۶ werner state

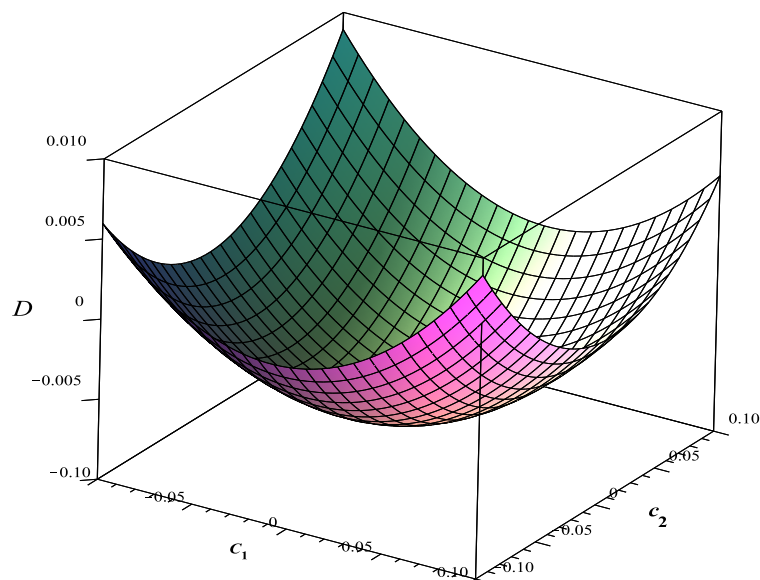
اما برای اینکه مشخص شود آیا همواره می‌توان گفت همبستگی‌های کلاسیکی بزرگتر مساوی از همبستگی‌های کوانتومی هستند در مقاله [۲۲] بررسی به این ترتیب صورت گرفت که موجودی بصورت:

$$D(\rho) = \delta - C(\rho) \quad (۸۷.۲)$$

که اختلاف همبستگی‌های کلاسیکی از کوانتومی است معرفی و همانطور که به راحتی اینجا در رابطه و شکل نشان می‌دهیم این استدلال درست نیست و می‌توان وضعیتی را دید که در آن وضعیت به‌عکس باشد و همبستگی‌های کوانتومی از کلاسیکی بیشتر شوند.

$$\begin{aligned} D = & 1/4 \frac{(1/1 - c_1 - c_2) \ln(1/1 - c_1 - c_2)}{\ln(2)} \\ & + 1/4 \frac{(0/9 - c_1 + c_2) \ln(0/9 - c_1 + c_2)}{\ln(2)} \\ & + 1/4 \frac{(0/9 + c_1 - c_2) \ln(0/9 + c_1 - c_2)}{\ln(2)} \\ & + 1/4 \frac{(1/1 + c_1 + c_2) \ln(1/1 + c_1 + c_2)}{\ln(2)} \\ & - 0/9 \frac{\ln(0/9)}{\ln(2)} - 1/1 \frac{\ln(1/1)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

$$C = -C_3 = 0.1$$



شکل ۲.۲: مقایسه ناهمخوانی کوانتومی و همبستگی‌های کلاسیکی

همچنین برای این حالت‌ها همانطور که از معیار تلاقی^۷ بدست می‌آید در فصل بعدی با بررسی چند مثال خواهیم دید چطور می‌توان نشان داد ناهم‌خوانی کوانتومی معیاری جامع‌تر از درهم‌تنیدگی کوانتومی است.

آنچه در رابطه با حالت ورنر و بل در بالا محاسبه گردید در فصل بعد مفصلاً مورد بررسی و تحلیل با رسم نمودارهای متعدد قرار خواهد گرفت.

۵.۲ حالت‌های X-گونه

ما در ابتدای این فصل یک قدم رو به جلو برداشتیم و برای یک خانواده‌ی کوچک اما در نوع خود با اهمیت از حالت‌های فیزیکی ناهم‌خوانی کوانتومی را محاسبه کردیم. اگر به شکل کلی ۱۵.۲ نگاه کنید به شباهت این ماتریس چگالی به حرف X در زبان انگلیسی پی خواهید برد. در واقع این شباهت که در کار سال ۲۰۰۸ لوو^۸ دیده شد انگیزه‌ای بود برای فیزیکدانانی که علاقه‌مند به محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی بودند تا به مطالعه‌ی شکل عام چنین ماتریس‌هایی تحت عنوان X-گونه^۹ بپردازند [۲۳]. همانطور که انتظار می‌رود شکل کلی این حالت‌ها بصورت:

$$\rho^{a,b} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \circ & \circ & \rho_{14} \\ \circ & \rho_{22} & \rho_{23} & \circ \\ \circ & \rho_{32} & \rho_{33} & \circ \\ \rho_{41} & \circ & \circ & \rho_{44} \end{bmatrix} \quad (۸۸.۲)$$

و ویژه مقادیر آن بصورت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1/2 \rho_{22} + 1/2 \rho_{33} + 1/2 \sqrt{\rho_{22}^2 - 2 \rho_{22} \rho_{33} + 4 \rho_{23} \rho_{32} + \rho_{33}^2} \\ \lambda_2 = 1/2 \rho_{22} + 1/2 \rho_{33} - 1/2 \sqrt{\rho_{22}^2 - 2 \rho_{22} \rho_{33} + 4 \rho_{23} \rho_{32} + \rho_{33}^2} \\ \lambda_3 = 1/2 \rho_{11} + 1/2 \rho_{44} + 1/2 \sqrt{\rho_{11}^2 - 2 \rho_{11} \rho_{44} + 4 \rho_{14} \rho_{41} + \rho_{44}^2} \\ \lambda_4 = 1/2 \rho_{11} + 1/2 \rho_{44} - 1/2 \sqrt{\rho_{11}^2 - 2 \rho_{11} \rho_{44} + 4 \rho_{14} \rho_{41} + \rho_{44}^2} \end{array} \right\} \quad (۸۹.۲)$$

حال تا محاسبه‌ی اطلاعات متقابل در فرم کلیه‌ی همبستگی‌های (فرم متقارن) تنها محاسبه‌ی ماتریس‌های جزئی را کم داریم که بصورت:

$$\begin{aligned} \rho^b &= tr_a \rho^{a,b} \\ \rho^a &= tr_b \rho^{a,b} \end{aligned} \quad (۹۰.۲)$$

^۷concurrence

^۸S.Lou

^۹X-state

نتیجه می‌گیریم:

$$\rho^a = \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \circ \\ \circ & \rho_{33} + \rho_{44} \end{bmatrix}, \rho^b = \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \circ \\ \circ & \rho_{22} + \rho_{44} \end{bmatrix} \quad (91.2)$$

حال دیگر بدست آوردن کلیه‌ی همبستگی‌های موجود برای محاسبه‌ی ناهمخوانی کوانتومی بدیهی است.

$$\begin{aligned} I(\rho^{a,b}) &= S(\rho^a) + S(\rho^b) - S(\rho^{a,b}) \\ &= -(\rho_{11} + \rho_{22}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{22}) - (\rho_{33} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{33} + \rho_{44}) \\ &\quad - (\rho_{11} + \rho_{33}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{33}) - (\rho_{22} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{22} + \rho_{44}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{11} + \rho_{44}) + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + |\rho_{14}|^2} \right] \right) \\ &\quad \times \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{11} + \rho_{44}) + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + |\rho_{14}|^2} \right] \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{11} + \rho_{44}) - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + |\rho_{14}|^2} \right] \right) \\ &\quad \times \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{11} + \rho_{44}) - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + |\rho_{14}|^2} \right] \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + |\rho_{23}|^2} \right] \right) \\ &\quad \times \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + |\rho_{23}|^2} \right] \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{22} + \rho_{33}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + |\rho_{23}|^2} \right] \right) \\ &\quad \times \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\rho_{22} + \rho_{33}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + |\rho_{23}|^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (92.2)$$

درواقع ماتریس ۸۸.۲ ماتریسی با ۷ پارامتر حقیقی بصورت ۳ تا در قطر اصلی و ۲ عدد مرکب^{۱۰} یا ۴ عدد حقیقی در خارج قطر اصلی است [۲۳].

به‌سراغ محاسبه‌ی همبستگی‌های کلاسیکی می‌رویم، درواقع تنها باید آنتروپی شرطی را محاسبه کرد و ناهمخوانی کوانتومی را سریعاً بدست آورد بدین منظور مانند روال قبلی کار خواهیم کرد.

باید ماتریس حالت اندازه‌گیری شده $\rho_{\{B_k\}}$ را بدست بیاوریم. بوضوح می‌توان نشان داد اگر عملیات قسمت ۴.۲ را برای ماتریس ۸۸.۲ انجام دهیم و باگرفتن رد آن ماتریس برای بدست آوردن احتمال به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} P_0 &= [(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l] \\ P_1 &= [(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k] \end{aligned} \quad (93.2)$$

^{۱۰}complex number

که روابط بالا با تعاریف زیر خلاصه نویسی شده‌اند:

$$\begin{aligned} k &= t^2 + y_4^2 & l &= y_1^2 + y_4^2 \\ m &= (ty_1 + y_2y_3)^2 & n &= (ty_2 - y_1y_3)(ty_1 + y_2y_3) \end{aligned} \quad (94.2)$$

همچنین ویژه مقادیر ماتریس‌های ρ_0 و ρ_1 بصورت:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1 \pm \theta}{2} \\ \rho_1 &= \frac{1 \pm \theta'}{2} \end{aligned} \quad (95.2)$$

خواهد بود، که θ و θ' بصورت زیر جهت ساده سازی محاسبات تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})k + (\rho_{22} - \rho_{44})l]^2 + \Theta}{[(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l]^2}} \\ \theta' &= \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})l + (\rho_{22} - \rho_{44})k]^2 + \Theta}{[(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k]^2}} \end{aligned} \quad (96.2)$$

که Θ بصورت:

$$\begin{aligned} \Theta &= 4kl [|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2 + 2\varphi(\rho_{14}\rho_{23})] \\ &\quad - 16m\varphi(\rho_{14}\rho_{23}) + 16n\Phi(\rho_{14}\rho_{23}) \end{aligned} \quad (97.2)$$

که φ و Φ بترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی عدد مرکب z هستند. البته آنچه در بالا بسیار خلاصه نوشته شده چیزی نیست جز روابط بسیار طولانی و کسل کننده‌ای که در ادامه خواهد آمد.

پس از اعمال ماتریس اندازه‌گیری ۴۰.۲ روی زیرسیستم موردنظر و ضرب تانسوری آن در ماتریس همانی برای بی تغییرگذاشتن زیرسیستمی که قرار نیست اندازه‌گیری روی آن انجام شود و تقسیم کردن ماتریس حاصل بر رد یا رد آن که در واقع احتمال وقوع حالت اندازه‌گیری شده را به ما خواهد داد به ρ_0 و به شکل مشابه آنچه گفتیم به ρ_1 می‌رسیم که با محاسبه‌ی ویژه مقادیر آن‌ها قادر به محاسبه‌ی آنتروپی‌های آن‌ها و با ضرب هرکدام در احتمال وقوعشان نهایتاً به جمله‌ی آنتروپی شرطی می‌رسیم که پس از کمینه کردن آن می‌توانیم ادعا کنیم ناهم‌خوانی کوانتومی را برای حالت‌های X-گونه بطور تحلیلی و جامع و کامل و دقیق حساب کرده‌ایم. آنچه در بالا اشاره شد به این ترتیب قابل محاسبه است:

$$(I \otimes (V\Pi_k V^\dagger)) \rho^{a,b} (I \otimes (V\Pi_k V^\dagger)) \quad (98.2)$$

$$(I \otimes (V\Pi_k V^\dagger)) \begin{bmatrix} \rho_{11} & \circ & \circ & \rho_{14} \\ \circ & \rho_{22} & \rho_{23} & \circ \\ \circ & \rho_{32} & \rho_{33} & \circ \\ \rho_{41} & \circ & \circ & \rho_{44} \end{bmatrix} (I \otimes (V\Pi_k V^\dagger)) \quad (99.2)$$

با ردگیری از این ماتریس خواهیم داشت:

$$(100.2) \quad \left((\rho_{11} + \rho_{33})(t^2 + y_3^2) + (y_1^2 + y_2^2)(\rho_{22} + \rho_{44}) \right)^{-1}$$

که با استفاده از روابط ۹۴.۲ به رابطه‌ی P_0 در ۹۳.۲ می‌رسیم. حال با تقسیم کردن ۹۹.۲ بر ۱۰۰.۲ به ماتریسی 4×4 می‌رسیم که ۱۶ عنصره آن در زیر خواهد آمد.

ذکر چند نکته:

بدلیل بسیار بزرگ بودن این ماتریس از نوشتن آن بصورت ماتریسی خودداری شده و عناصر آن تک تک نوشته شده‌اند. آن چنان که در ادامه در محاسبه‌ی ویژه مقادیر این ماتریس خواهیم دید ساده‌سازی‌های بسیار بسیار زیادی صورت گرفته تا شکل سراسر ساده و قابل تحلیل ۹۵.۲ و ۹۶.۲ بدست آمده.

$$\begin{aligned}
 \rho_{11} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{11} + (iy_3 + t) (-iy_1 - y_2) \rho_{22} (iy_1 - y_2) (-iy_3 + t)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{12} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_3 + t) \rho_{11} (-iy_1 - y_2) + (iy_3 + t) (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{22} (iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{13} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_1 - y_2) \rho_{33} (-iy_3 + t) + (iy_3 + t) (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{14} (iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{14} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{33} + (iy_3 + t) (-iy_3 + t) \rho_{14} (iy_1 - y_2) (-iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{21} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{11} (iy_3 + t) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_1 - y_2) \rho_{22} (-iy_3 + t)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{22} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_3 + t) \rho_{11} (iy_3 + t) (-iy_1 - y_2) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{22}}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{23} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_1 - y_2) \rho_{33} (iy_3 + t) (-iy_3 + t) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{14}}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{24} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{33} (iy_3 + t) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_3 + t) \rho_{14} (-iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{31} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_1 - y_2) \rho_{41} (-iy_3 + t) + (iy_3 + t) (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{32} (iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{32} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{41} + (iy_3 + t) (-iy_3 + t) \rho_{32} (iy_1 - y_2) (-iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{33} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{33} + (iy_3 + t) (-iy_1 - y_2) \rho_{44} (iy_1 - y_2) (-iy_3 + t)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{34} &= \frac{(iy_3 + t)^{\gamma} (-iy_3 + t) \rho_{33} (-iy_1 - y_2) + (iy_3 + t) (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{44} (iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{41} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_1 - y_2) \rho_{41} (iy_3 + t) (-iy_3 + t) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{32}}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{42} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{41} (iy_3 + t) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_3 + t) \rho_{32} (-iy_1 - y_2)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{43} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_3 + t)^{\gamma} \rho_{33} (iy_3 + t) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_1 - y_2) \rho_{44} (-iy_3 + t)}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})} \\
 \rho_{44} &= \frac{(iy_1 - y_2) (-iy_3 + t) \rho_{33} (iy_3 + t) (-iy_1 - y_2) + (iy_1 - y_2)^{\gamma} (-iy_1 - y_2)^{\gamma} \rho_{44}}{(\rho_{11} + \rho_{33}) (t^{\gamma} + y_3^{\gamma}) + (y_1^{\gamma} + y_2^{\gamma}) (\rho_{22} + \rho_{44})}
 \end{aligned}$$

(۱۰۱.۲)

ویژه مقادیر این ماتریس بصورت:

$$\left\{ 0, 0, \frac{1 \pm \theta}{2}, \frac{1 \pm \theta'}{2} \right\} \quad (۱۰۲.۲)$$

که با ساده سازی و عملیات کسل کننده به رابطه‌ی ۹۶.۲ منجر خواهد شد.

مطابق روال قبل باید روابط زیر جایگذاری و سازی روی آن‌ها انجام شود:

$$\begin{aligned} C(\rho^{a,b}) &= S(\rho^a) - S(\rho^a | \{B_k\}) \\ &= S(\rho^a) - \{P_0 S(\rho_0) + P_1 S(\rho_1)\} \end{aligned} \quad (103.2)$$

همچنین برای محاسبه‌ی عبارت بالا داریم:

$$\begin{aligned} S(\rho_0) &= -\frac{1+\theta}{2} \log_2 \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2} \log_2 \frac{1-\theta}{2} \\ S(\rho_1) &= -\frac{1+\theta'}{2} \log_2 \frac{1+\theta'}{2} - \frac{1-\theta'}{2} \log_2 \frac{1-\theta'}{2} \end{aligned} \quad (104.2)$$

حالا ما تا محاسبه‌ی ناهمخوانی کوانتومی برای این خانواده‌ی بزرگ‌تر از حالت‌های کوانتومی تنها و تنها کمینه کردن آنتروپی شرطی را پیش‌روی خود داریم:

$$\min_{\{B_i\}} S(\rho_x | \{B_i\}) \quad (105.2)$$

همانطور که مشاهده می‌شود آنتروپی شرطی که باید کمینه گردد شامل k, l, m, n می‌باشد. پس همانطور که انتظار می‌رود باید مشتق آن نسبت به مؤلفه‌های یاد شده مساوی صفر قرار داده شود تا نقاط اکسترمم شناسایی و نهایتاً کمینه‌ی آن حساب و ناهمخوانی کوانتومی محاسبه گردد.

جالب اینجاست که با اندکی زیرکی از سوی نویسندگان مقاله [۲۳] کار بسیار ساده‌تر شده به این صورت که:

عبارت مورد نظر تحت تعویض جای k, l تغییرناپذیر و متقارن است پس تابعی فرد از $(k - l)$ است، در نتیجه نقاط اکسترمم آن یا نقاط ابتدا و انتهای هستند یا

$$k = l = 1/2 \quad (106.2)$$

همچنین با توجه به تعریف، در نقاط ابتدایی و انتهایی داریم:

$$t = y_3 = 0 \quad \text{or} \quad y_1 = y_2 = 0 \quad (107.2)$$

بنابراین در صورتی که کمینه آنتروپی شرطی در این نقاط باشد m, n قطعاً صفر خواهد بود (با توجه به تعریف) و با جایگذاری محاسبه تمام است.

در حالت دیگر که کمینه در $k = l = 1/2$ باشد $\theta = \theta'$ و در نتیجه

$$S(\rho_0) = S(\rho_1) \quad (108.2)$$

و کمینه کل آنتروپی شرطی برابر با کمینه هر یک از آنتروپی‌های $S(\rho_0)$ or $S(\rho_1)$ خواهد بود. همچنین در این حالت عبارت Θ تنها وابستگی خطی به m, n دارد در نتیجه کمینه آن‌ها قطعاً باید در نقاط ابتدایی و یا انتهایی‌شان اتفاق بیفتد.

بدین ترتیب با پیدا کردن کران تغییرات k, l, m, n می‌توانیم پایان محاسبه‌ی تحلیلی ناهم‌خوانی کوانتومی برای حالت‌های X-گونه را اعلام کنیم.

$$\begin{aligned}
 k + l = 1 &\Leftrightarrow t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \\
 k &\in [0, 1] \\
 m &\in [0, 1/4] \\
 n &\in [-1/8, 1/8]
 \end{aligned}
 \tag{۱۰۹.۲}$$

همچنین همبستگی بین k, m, n با ۵۲.۲ بصورت :

$$\begin{aligned}
 k - l &= z_3 \\
 4n &= -z_1 \cdot z_2 \\
 4m &= z_2^2
 \end{aligned}
 \tag{۱۱۰.۲}$$

بدین ترتیب عملیات محاسبه به پایان رسیده است. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان ناهم‌خوانی کوانتومی را برای حالت ۱۵.۲ برحسب فرم عام بررسی شده در ۵.۲ بدست آورد.

۶.۲ محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی یک حالت خاص براساس فرم X-گونه‌ی آن

همانطور که پیش‌تر بررسی شد ما باحالتی به فرم:

$$\rho^{a,b} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c_3 + 1 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{bmatrix}
 \tag{۱۱۱.۲}$$

کار را آغاز کردیم و با استفاده از روش پیشنهاد شده در سال ۲۰۰۸ میلادی توسط لو ناهم‌خوانی کوانتومی را برای آن محاسبه کردیم. حال قصد داریم باتوجه به فرم این ماتریس که X-گونه است نشان دهیم چگونه می‌توان از فرم کلی‌تر بررسی شده در قسمت قبل استفاده کرد و به نوعی معتبر بودن روابط بدست آمده در قسمت قبل (توسط تیم سه نفره [۲۳] در سال ۲۰۱۰) را تحقیق کرد.

بدین منظور داریم:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= [(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l] \\
 P_1 &= [(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k] \\
 P_0 &= \left[\left(\frac{1 + \alpha_3}{4} + \frac{1 - \alpha_3}{4} \right) k \left(\frac{1 - \alpha_3}{4} + \frac{1 + \alpha_3}{4} \right) l \right] \\
 &= \left[\left(\frac{2k + 2l}{4} \right) \right] = 1/2 \quad (112.2) \\
 P_1 &= \left[\left(\frac{1 - \alpha_3}{4} + \frac{1 + \alpha_3}{4} \right) l + \left(\frac{1 - \alpha_3}{4} + \frac{1 + \alpha_3}{4} \right) k \right] \\
 &= \left[\left(\frac{2k + 2l}{4} \right) \right] = 1/2
 \end{aligned}$$

تا اینجای کار احتمالات بدست آمده در قسمت ۴.۲ بر احتمالات بدست آمده در اینجا منطبق است.

حال به محاسبه‌ی ویژه مقادیر موردنیاز در آنتروپی شرطی می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= \frac{1 \pm \theta}{2} \\
 \rho_1 &= \frac{1 \pm \theta'}{2}
 \end{aligned} \quad (113.2)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}
 \theta &= \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})k + (\rho_{22} - \rho_{44})l]^2 + \Theta}{[(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l]^2}} \\
 \theta' &= \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})l + (\rho_{22} - \rho_{44})k]^2 + \Theta}{[(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k]^2}}
 \end{aligned} \quad (114.2)$$

و :

$$\begin{aligned}
 \Theta &= 4kl \left[|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2 + 2\varphi(\rho_{14}\rho_{23}) \right] \\
 &\quad - 16m\varphi(\rho_{14}\rho_{23}) + 16n\Phi(\rho_{14}\rho_{23})
 \end{aligned} \quad (115.2)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \sqrt{\frac{\left((\alpha_3 k - \alpha_3 l)^2 / 4 + m c_3^2 + (kl - m) c_1^2 \right)}{1/4}} \\
 &= \sqrt{c_3^2 (k - l)^2 + 4m c_3^2 + (kl - m) c_1^2} \\
 &= \sqrt{c_1^2 z_1^2 + c_3^2 z_3^2 + c_3^2 z_3^2}
 \end{aligned} \quad (116.2)$$

که با ۵۷.۲ در توافق کامل است.

در نتیجه ما با بررسی یک ویژه مقدار از این حالت و بدست آوردن احتمالات درستی روابط را

تحقیق و جامع بودن و دقیق بودن محاسبات مربوط به حالتها X-گونه‌ی قسمت قبل را نشان دادیم.

این پایان کار نیست و حالت‌های X-گونه توجه بیشتری را می‌طلبند. پس از اینکه در سال ۲۰۱۰ در [۲۳] انجام شد بافاصله‌ی اندکی و تنها چندماه بعد در [۲۶] نشان داده شد سازی همبستگی‌های کلاسیکی انجام شده در پژوهش قبلی چندان هم جامع نبوده و باید نگاه دقیق‌تری به آن داشت. استدلال آن‌ها بدین ترتیب بود که چون می‌توان با عملیات موضعی عناصر خارج از قطر اصلی ماتریس‌های X-گونه را به حقیقی تبدیل کرد بدون اینکه در همبستگی‌های کوانتومی حاضر بین زیر سیستم‌های آن دست برد، پس در واقع ما با ماتریس‌هایی با تنها پنج عنصر حقیقی روبرو هستیم و به شیوه‌ی مرسوم می‌توان متغیرهای مستقل در این ماتریس‌ها را به شکل زیر تعریف کرد.

$$\begin{aligned} x &= \rho_{00} + \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} = Tr(\sigma_z^a \rho) \\ y &= \rho_{00} - \rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} = Tr(\sigma_z^b \rho) \\ t &= \rho_{00} - \rho_{11} - \rho_{22} + \rho_{33} = Tr(\sigma_z^a \sigma_z^b \rho) \\ s &= 2(\rho_{12} + \rho_{03}) = Tr(\sigma_x^a \sigma_x^b \rho) \\ u &= 2(\rho_{12} - \rho_{03}) = Tr(\sigma_y^a \sigma_y^b \rho) \end{aligned} \quad (117.2)$$

در واقع این پنج متغیر مستقل که همگی در بازه‌ی $[-1, 1]$ تغییر می‌کنند و تعدادشان با متغیرای مستقلی که از شکل ماتریس انتظار داشتیم (چهار عدد حقیقی روی قطر اصلی و دو عدد حقیقی خارج قطر اصلی که رد ماتریس برابر واحد باشد مجموع پنج عدد مستقل حقیقی می‌دهند) از روی تعریف زیر بدست آمده‌اند:

$$\rho = \frac{I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} ; r_{i,j} = \frac{Tr(\sigma_i \otimes \sigma_j \rho)}{2} \quad (118.2)$$

همچنین مثبت بودن ^{۱۱} ماتریس چگالی حکم می‌کند که:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = -t/4 + 1/4 + 1/4 \sqrt{s^2 + 2su + u^2 + x^2 - 2xy + y^2} \\ \lambda = -t/4 + 1/4 - 1/4 \sqrt{s^2 + 2su + u^2 + x^2 - 2xy + y^2} \\ \lambda = t/4 + 1/4 + 1/4 \sqrt{s^2 - 2su + u^2 + x^2 + 2xy + y^2} \\ \lambda = t/4 + 1/4 - 1/4 \sqrt{s^2 - 2su + u^2 + x^2 + 2xy + y^2} \end{array} \right] \quad (119.2)$$

$$(1 \pm t)^2 \geq (x \pm y)^2 + (s \mp u)^2 \quad (120.2)$$

بافرض

$$|s| > |u| \quad (121.2)$$

^{۱۱}positivity

نشان دادند:

$$(|\rho_{۱۲}| + |\rho_{۰۳}|)^2 \leq (\rho_{۰۰} - \rho_{۱۱})(\rho_{۳۳} - \rho_{۲۲}) \quad (۱۲۲.۲)$$

σ_z مشاهده‌پذیری است که آنتروپی شرطی را به شرط اندازه‌گیری روی زیر سیستم a کمینه می‌کند. برای سادگی داریم:

$$\begin{aligned} t^2 - s^2 - y^2 &= -(\rho_{۱,۲} + \rho_{۰,۳})^2 + (\rho_{۰,۰} - \rho_{۱,۱} - \rho_{۲,۲} + \rho_{۳,۳})^2 \\ &\quad - (\rho_{۰,۰} - \rho_{۱,۱} + \rho_{۲,۲} - \rho_{۳,۳})^2 \\ &= -۴\rho_{۰,۰}\rho_{۲,۲} + ۴\rho_{۰,۰}\rho_{۳,۳} - ۴\rho_{۰,۳}^2 \\ &\quad - ۸\rho_{۱,۲}\rho_{۰,۳} + ۴\rho_{۱,۱}\rho_{۲,۲} - ۴\rho_{۱,۱}\rho_{۳,۳} - ۴\rho_{۱,۲}^2 \\ &= (-۴\rho_{۲,۲} + ۴\rho_{۳,۳})\rho_{۰,۰} + (۴\rho_{۲,۲} - ۴\rho_{۳,۳})\rho_{۱,۱} \\ &\quad - ۴\rho_{۰,۳}^2 - ۸\rho_{۱,۲}\rho_{۰,۳} - ۴\rho_{۱,۲}^2 \end{aligned} \quad (۱۲۳.۲)$$

پس می‌توان نتیجه گرفت رابطه‌ی ۱۲۲.۲ معادل:

$$t^2 \geq y^2 + s^2 \quad (۱۲۴.۲)$$

است و برای اثبات آن داریم: با در نظر گرفتن یک عملگره اندازه‌گیری عام \mathcal{M} بصورت:

$$\mu_k(\mathbb{1} + \vec{n}_k \vec{\sigma}^a), \quad k = 1..K, \quad K \leq ۴ \quad (۱۲۵.۲)$$

و اعمال آن روی کیوبیت اول و در نظر داشتن خواص:

$$\sum_k \mu_k = ۱, \quad \vec{n}_k^2 = ۱, \quad \sum_k \mu_k \vec{n}_k = \vec{0} \quad (۱۲۶.۲)$$

ما به آنسامبلی با احتمال خروجی:

$$p_k = \mu_k(\mathbb{1} + x n_{kz}) \quad (۱۲۷.۲)$$

که ماتریس ۶.۲ بصورت:

$$\begin{bmatrix} \mu_k(\mathbb{1} + n_{k,z}) & \circ & \mu_k(-in_{k,y} + n_{k,x}) & \circ \\ \circ & \mu_k(\mathbb{1} + n_{k,z}) & \circ & \mu_k(-in_{k,y} + n_{k,x}) \\ \mu_k(in_{k,y} + n_{k,x}) & \circ & \mu_k(\mathbb{1} - n_{k,z}) & \circ \\ \circ & \mu_k(in_{k,y} + n_{k,x}) & \circ & \mu_k(\mathbb{1} - n_{k,z}) \end{bmatrix} \quad (۱۲۸.۲)$$

و ماتریس چگالی:

$$\rho_{b|k} = \frac{1 + x.n_{kz} + s.n_{kx}.\sigma_x^b + u.n_{ky}.\sigma_y^b + (y + n_{kz}.t)\sigma_z^b}{2(1 + x.n_{kz})} \quad (129.2)$$

که نهایتاً به شکل:

$$\begin{bmatrix} \frac{n_{kz}t + xn_{kz} + y + 1}{2xn_{kz} + 2} & \frac{sn_{kx} - iun_{ky}}{2xn_{kz} + 2} \\ \frac{sn_{kx} + iun_{ky}}{2xn_{kz} + 2} & \frac{-n_{kz}t + xn_{kz} - y + 1}{2xn_{kz} + 2} \end{bmatrix} \quad (130.2)$$

و ویژه مقادیری بصورت:

$$\begin{bmatrix} \frac{xn_{kz} + 1 + \sqrt{n_{kx}^2 s^2 + n_{ky}^2 u^2 + n_{kz}^2 t^2 + 2n_{kz}ty + y^2}}{2xn_{kz} + 2} \\ \frac{xn_{kz} + 1 - \sqrt{n_{kx}^2 s^2 + n_{ky}^2 u^2 + n_{kz}^2 t^2 + 2n_{kz}ty + y^2}}{2xn_{kz} + 2} \end{bmatrix} \quad (131.2)$$

و با جایگذاری:

$$n_{kx} = \sqrt{1 - n_{ky}^2 - n_{kz}^2} \quad (132.2)$$

به فرم جدیده ویژه مقادیر بصورت:

$$\begin{bmatrix} \frac{xn_{kz} + 1 + \sqrt{(-n_{ky}^2 - n_{kz}^2 + 1)s^2 + n_{ky}^2 u^2 + n_{kz}^2 t^2 + 2n_{kz}ty + y^2}}{2xn_{kz} + 2} \\ \frac{xn_{kz} + 1 - \sqrt{(-n_{ky}^2 - n_{kz}^2 + 1)s^2 + n_{ky}^2 u^2 + n_{kz}^2 t^2 + 2n_{kz}ty + y^2}}{2xn_{kz} + 2} \end{bmatrix} \quad (133.2)$$

در زیر رادیکال داریم:

$$(-n_{ky}^2 - n_{kz}^2 + 1)s^2 + n_{ky}^2 u^2 + n_{kz}^2 t^2 + 2n_{kz}ty + y^2 \quad (134.2)$$

که با ساده‌سازی بصورت:

$$(n_{kz}t + y)^2 + (-s^2 + u^2)n_{ky}^2 + (-n_{kz}^2 + 1)s^2 \quad (135.2)$$

که اگر

$$|s| > |u| \quad (136.2)$$

عبارت زیر رادیکال کوچک می‌شود، و در غیر اینصورت بزرگ خواهد شد. از طرفی بعنوان تعریف برای سادگی داریم:

$$w = \frac{\sqrt{(n_{kz}t + y)^2 + (-s^2 + u^2)n_{ky}^2 + (-n_{kz}^2 + 1)s^2}}{2xn_{kz} + 2} \quad (137.2)$$

که اگر تابع زیر را برای آن تعریف کنیم:

$$h(w) = -\frac{1+w}{2} \log_2\left(\frac{1+w}{2}\right) - \frac{1-w}{2} \log_2\left(\frac{1-w}{2}\right) \quad (138.2)$$

دقیقا آنتروپی شرطی را به ازای ویژه مقادیر ماتریس مورد نظر به ما خواهد داد، حال با مساوی صفر قرار دادن n_{ky} که باعث شدن قطعی w و پیرو آن کمینه شدن آنتروپی شرطی نسبت به وضعیت قبل است به ویژه مقادیری بصورت:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{xn_{kz} + 1 + \sqrt{(1-n_{kz})^2 s^2 + (n_{kz}t + y)^2}}{\sqrt{xn_{kz} + 2}} \\ \frac{xn_{kz} + 1 - \sqrt{(1-n_{kz})^2 s^2 + (n_{kz}t + y)^2}}{\sqrt{xn_{kz} + 2}} \end{array} \right] \quad (139.2)$$

می‌رسیم. در مرجع [۲۶] برای انجام ساده‌سازی‌های لازم، موجودی بصورت:

$$\Delta_k = (1 - n_{kz})^2 s^2 + (y + n_{kz}t)^2 \quad (140.2)$$

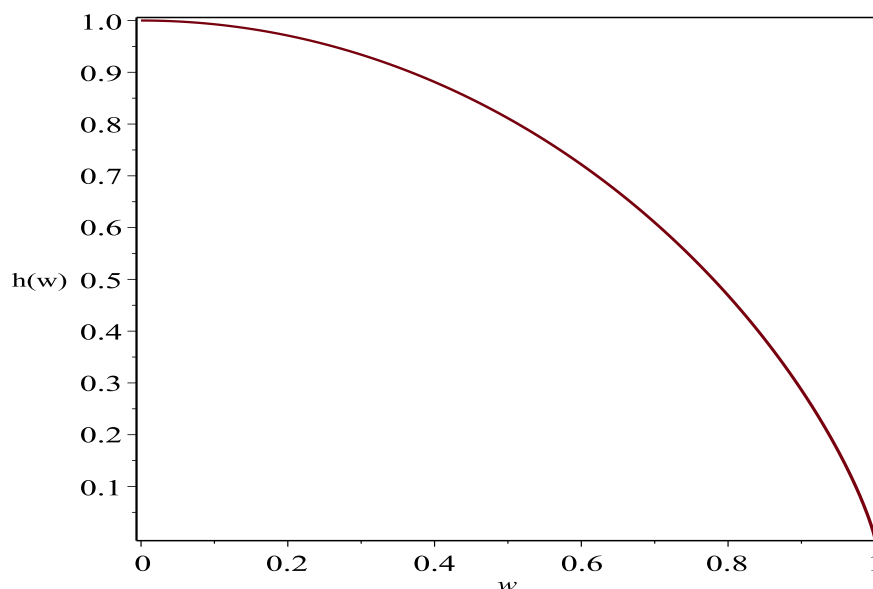
تعریف شده که از بکار بردن آن به این رابطه برای w خواهیم رسید:

$$w = \frac{\mu_k(\sqrt{\Delta_k})}{p_k} \quad (141.2)$$

آنتروپی شرطی کل بصورت:

$$\sum_k p_k S(\rho_{b|k}) \geq \sum_k p_k h\left(\frac{\mu_k \sqrt{\Delta_k}}{p_k}\right) := S_\rho \quad (142.2)$$

بزرگتر مساوی در رابطه‌ی بالا ناشی از این واقعیت است که $h(w)$ به‌ازای $w \geq 0$ تابعی نزولی است، شکل ۳.۲.



شکل ۳.۲: نمودار تابع $h(w)$

تساوی در این نامساوی به‌ازای $n_{ky} = 0$ اتفاق می‌افتد. $\vec{n} = (\sqrt{1-n_z}, 0, n_z)$ و بدین ترتیب کمینه‌ی اندازه‌گیری به ازای اندازه‌گیری در صفحه‌ی $x-z$ اتفاق خواهد افتاد، بدین

معنی که هر مشاهده‌پذیری بصورت: σ_n^a که در صفحه‌ی $x-z$ باشد نسبت به هر مشاهده‌پذیری که در این صفحه نباشد بهینه‌تر است بدین ترتیب یک قدم به پیدا کردن مشاهده‌پذیر کننده‌ی همبستگی‌های کلاسیک نزدیک‌تر شده‌ایم. حالا فقط با یک متغیر n_z روبرو هستیم

با تعریف:

$$\begin{aligned}
 S_\rho &= \sum_k p_k h\left(\frac{\mu_k \sqrt{\Delta}}{p_k}\right) \\
 &= p_k \left\{ -\frac{1 + \frac{\mu_k \sqrt{\Delta}}{p_k}}{\sqrt{2}} \log_2\left(-\frac{1 + \frac{\mu_k \sqrt{\Delta}}{p_k}}{\sqrt{2}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1 - \frac{\mu_k \sqrt{\Delta}}{p_k}}{\sqrt{2}} \log_2\left(-\frac{1 - \frac{\mu_k \sqrt{\Delta}}{p_k}}{\sqrt{2}}\right) \right\} \\
 &= \sum_k p_k \left\{ -\frac{\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \log_2\left(-\frac{\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \log_2\left(-\frac{\frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) \right\} \\
 &= \sum_k p_k \left\{ -\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k} \log_2\left(-\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k} \log_2\left(-\frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k}\right) \right\} \\
 &= \sum_k -\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2\left(-\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k}\right) \\
 &\quad - \frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2\left(-\frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k}\right) \\
 &= \sum_k -\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2\left(\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k}\right) \\
 &\quad - \frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2\left(\frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2} p_k}\right) \\
 &= \sum_k -\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2(p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}) \\
 &\quad - \frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2(p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k} + p_k) \log_2(\sqrt{2} p_k) \\
 &= \sum_k -\frac{p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2(p_k + \mu_k \sqrt{\Delta_k}) \\
 &\quad - \frac{p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}}{\sqrt{2}} \log_2(p_k - \mu_k \sqrt{\Delta_k}) + p_k \log_2(\sqrt{2} p_k) \\
 &= \sum_k -\lambda_{k+} \log_2(\lambda_{k+}) + \lambda_{k+} \log_2(\sqrt{2}) - \lambda_{k-} \log_2(\lambda_{k-}) \\
 &\quad + \lambda_{k-} \log_2(\sqrt{2}) + p_k \log_2(p_k) - p_k \log_2(\sqrt{2}) \\
 &= -\sum_{k\pm} \lambda_{k\pm} \log_2(\lambda_{k\pm}) + \sum_k \lambda_k \log_2(\lambda_k)
 \end{aligned} \tag{۱۴۳.۲}$$

که در آن:

$$\lambda_k = \lambda_{k+} + \lambda_{k-} \quad (144.2)$$

و

$$\lambda_{k\pm} = \mu_k(1 + xn_{kz} \pm \sqrt{\Delta})/2 \quad (145.2)$$

و در نهایت با تعریف زیر خواهیم داشت:

$$\frac{w_{i,j}}{\ln(\gamma)} = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^i \lambda_k^j}{\lambda_k} - \sum_{k=1,\pm}^K \frac{\lambda_{k,\pm}^i \lambda_{k,\pm}^j}{\lambda_{k,\pm}} - \sum_{k\pm} \lambda_{k\pm}^{ij} \ln \lambda_{k\pm} \quad (146.2)$$

که در نهایت بصورت:

$$\begin{aligned} &= - \sum_{k=1}^K \frac{\Lambda_k^i \Lambda_k^j}{\lambda_k \lambda_{k+} \lambda_{k-}} - \frac{s^2(t^2 - y^2 - s^2)}{2} \\ &\left(\frac{\delta_{i,j} \mu_i}{\sqrt{\Delta_i^2}} \ln \frac{\lambda_{i,+}}{\lambda_{i,-}} + \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_K \sqrt{\Delta_K^2}} \ln \frac{\lambda_{K,+}}{\lambda_{K,-}} \right) \end{aligned} \quad (147.2)$$

$$\lambda_{k\pm}^i = \frac{\partial \lambda_{k\pm}}{\partial n_i}, \quad \lambda_{k\pm}^{ij} = \frac{\partial^2 \lambda_{k\pm}}{\partial n_i \partial n_j}, \quad \Lambda_k^i = \lambda_{k-} \lambda_{k+}^i - \lambda_{k+} \lambda_{k-}^i \quad (148.2)$$

که در صورت برقرار بودن:

$$t^2 \geq y^2 + s^2 \quad (149.2)$$

عبارتی همواره منفی است و این یعنی مشتق دوم تابعی همواره منفی باشد و این موجود تقعر دارد که باعث می شود کمینه های آن روی کران های آن یعنی $-1, +1$ اتفاق بیفتد که در این شرایط به ازای هر i وقتی برقرار است که مشاهده پذیر ما σ_z باشد. مورد مشابه این اثبات نیز برای وضعیت زیر به خواننده واگذار می شود:

$$|\sqrt{\rho_{00}\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}| \leq |\rho_{12}| + |\rho_{03}| \quad (150.2)$$

در نتیجه مشاهده پذیر کننده ی همبستگی های کلاسیکی σ_x خواهد بود.

در فصل بعد با بررسی دقیق تر چند مثال و رسم چند نمودار و مقایسه با مفاهیمی چون درهم تنیدگی کار را دنبال می کنیم.

فصل ۳

محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی برای چند حالت خاص

همانطور که در دوفصل پیش اشاره گردید ناهم‌خوانی کوانتومی بیانگره غیرکلاسیکی بودن همبستگی‌های است. پس طبیعتاً در برقراری همبستگی‌های و محاسبات کوانتومی کاربردهایی دارد (بدون اینکه حتی درهم‌تنیدگی کوانتومی وجود داشته باشد [۲۷]). در نظام قبلی مبتنی برحالتها درهم‌تنیده و جدایی‌پذیر آن‌چنان که قبلاً اشاره شد حالت‌های درهم‌تنیده ناموضعی را از خودبروز می‌دهند و نامساوی بل را نقض می‌کنند [۱۵]. براین‌پایه درهم‌بستگی‌های از آن‌ها استفاده می‌کنند.

همچنین می‌توان در تسریع دادن به محاسبات حتی بیشتر از قوی‌ترین الگوریتم کلاسیکی روی آن‌ها حساب کرد آن‌چنان که الگوریتم‌های کوانتومی بسیار مورد بحث و بررسی قرارگرفته‌اند [۱۶]، [۲۸].

درمقابل حالت‌های جدایی‌پذیر کاملاً کلاسیکی در نظرگرفته می‌شوند. بطوری‌که نامساوی بل را نقض نمی‌کنند و می‌توان آن‌ها را تحت عملیات موضعی و همبستگی‌های کلاسیکی^۱ بوجود آورد [۱۵]، [۱۸].

اما این سوال قابل پرسش بود که آیا حالت‌های کاملاً مخلوط^۲ و بخصوص حالت‌های

^۱ local operation - classical communication

^۲ highly mixed states

جدایی پذیر^۳ به کلی در محاسبات و همبستگی‌های کوانتومی ناکارآمدند؟ این‌ها همان انگیزه‌های شکل‌گیری ناهم‌خوانی کوانتومی بودند که تا به این لحظه کارهای بسیار زیادی در این زمینه انجام شده که در ادامه به آن‌ها پرداخته خواهد شد.

۱.۳ حالت‌های بل

همان‌طور که می‌دانیم چهارحالت با بیشترین درجه‌ی درهم‌تنیدگی وجود دارند که به حالت‌ها بل معروف هستند و کاربردهای بسیاری در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی دارند. این چهارحالت بصورت [۱۶]:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|\circ\circ\rangle + |\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.3)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{|\circ\circ\rangle - |\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.3)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|\circ\mathbb{1}\rangle + |\mathbb{1}\circ\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|\circ\mathbb{1}\rangle - |\mathbb{1}\circ\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

حال هدف محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی برای این حالت‌های چهارگانه است:

۱. محاسبه به روش مستقیم

۲. استفاده از الگوریتم بدست آمده در فصل قبل رابطه‌ی ۸۱.۲

برای مثال حالت ۱.۳ را به هردوروش مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که این دو روش به یک جواب منجر خواهند شد. ماتریس چگالی بصورت:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|\circ\circ\rangle + |\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\rho = \frac{\{|\circ\circ\rangle\langle\circ\circ| + |\circ\circ\rangle\langle\mathbb{1}\mathbb{1}| + |\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle\langle\circ\circ| + |\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle\langle\mathbb{1}\mathbb{1}|\}}{2}$$

$$\rho^{a,b} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

^۳ separable states

ویژه مقادیر این ماتریس بصورت:

$$\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ ۱ \end{pmatrix} \quad (۶.۳)$$

با ردگیری جزئی خواهیم داشت:

$$\rho^a = \rho^b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix} \quad (۷.۳)$$

ویژه مقادیر این ماتریس بصورت:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (۸.۳)$$

پس برای محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی ابتدا

$$\begin{aligned} I &= S(\rho^a) + S(\rho^b) - S(\rho^{a,b}) \\ &= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \\ &\quad - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \\ &\quad + \circ \log_2 \circ + \circ \log_2 \circ + \circ \log_2 \circ + ۱ \log_2 ۱ \\ &= ۲ \end{aligned}$$

حال به سراغ $C(\rho)$ می‌رویم:

$$C(\rho) = S(\rho^a) - S(\rho^a|\{B_k\}) \quad (۹.۳)$$

قسمت اول که بدیهی است:

$$S(\rho^a) = -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = ۱ \quad (۱۰.۳)$$

اما برای محاسبه‌ی بخش دوم:

$$S(\rho^a|\{B_k\}) = P_\circ S(\rho^a|\{B_\circ\}) + P_۱ S(\rho^a|\{B_۱\})$$

که داریم:

$$\begin{aligned} P_j &= tr_{a,b} \left\{ (I \otimes B_k) \rho^{a,b} (I \otimes B_k) \right\} \\ P_j &= tr_{a,b} \left\{ (I \otimes V \Pi_j V^\dagger) \rho_{x,y} (I \otimes V \Pi_j V^\dagger) \right\} \quad j = \circ, ۱ \end{aligned}$$

ماتریس اندازه‌گیری که روی بخش دوم اندازه‌گیری می‌کند اما بخش اول را بدون تغییر می‌گذارد:

$$\begin{bmatrix} (t + iy_3)(t - iy_3) & (t + iy_3)(-iy_1 - y_2) & \circ & \circ \\ (iy_1 - y_2)(t - iy_3) & (iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) & \circ & \circ \\ \circ & \circ & (t + iy_3)(t - iy_3) & (t + iy_3)(-iy_1 - y_2) \\ \circ & \circ & (iy_1 - y_2)(t - iy_3) & (iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

پس کافی است ماتریس چگالی حالت بل موردنظر را بین این عملگر ساندویچ کنیم:

$$\begin{bmatrix} (t + iy_3)(t - iy_3) & (t + iy_3)(-iy_1 - y_2) & \circ & \circ \\ (iy_1 - y_2)(t - iy_3) & (iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) & \circ & \circ \\ \circ & \circ & (t + iy_3)(t - iy_3) & (t + iy_3)(-iy_1 - y_2) \\ \circ & \circ & (iy_1 - y_2)(t - iy_3) & (iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \circ & \circ & 1/2 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1/2 & \circ & \circ & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (t + iy_3)(t - iy_3) & (t + iy_3)(-iy_1 - y_2) & \circ & \circ \\ (iy_1 - y_2)(t - iy_3) & (iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) & \circ & \circ \\ \circ & \circ & (t + iy_3)(t - iy_3) & (t + iy_3)(-iy_1 - y_2) \\ \circ & \circ & (iy_1 - y_2)(t - iy_3) & (iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

با ردگیری از این ماتریس خواهیم داشت:

$$(11.3)$$

$$1/2 (t + iy_3)^2 (t - iy_3)^2 + (t + iy_3)(t - iy_3)(iy_1 - y_2)(-iy_1 - y_2) + 1/2 (iy_1 - y_2)^2 (-iy_1 - y_2)^2$$

که با فاکتورگیری به عبارت زیر خواهیم رسید:

$$1/2 (t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 \quad (12.3)$$

و همانطور که از رابطه‌ی قسمت ۳۱.۲ می‌دانیم خواهیم داشت:

$$P_0 = \frac{1}{4} \quad (13.3)$$

پس ماتریس جدیدی که به دلیل زیادبودن عناصر و جاگیربودن از نوشتن آن خودداری به عمل آمده و خواننده می‌تواند به راحتی با جای‌گذاری روابط قبل آن را بدست بیاورد خواهیم رسید. همان‌طور که پیداست این ماتریس با فاکتورگیری و استفاده از نرم‌افزارهای محاسبات ریاضی ویژه‌مقادیری بصورت :

(۱۴.۳)

$$\xrightarrow{\text{eigenvalues}} \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ t^4 + 2t^2y_1^2 + 2t^2y_2^2 + 2t^2y_3^2 + y_1^4 + 2y_1^2y_2^2 + 2y_1^2y_3^2 + y_2^4 + 2y_2^2y_3^2 + y_3^4 \end{array} \right\}$$

که معادل:

$$\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{array} \right\} \quad (15.3)$$

می‌توان نشان داد تمام این عملیات برای

$$k = 1 \xrightarrow{VII, V^t} \quad (16.3)$$

نیز برقرار است:

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta_{(a,b)} &= I(\rho^{a,b}) - C(\rho) \\ &= 2 - \left\{ 1 - \frac{1}{4} (1 \log_2 1 - \circ - \circ - \circ) \right\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (17.3)$$

حال می‌توانیم تمام این راه‌پریچ‌وخم را به راحتی با استفاده از الگوریتم ۸۱.۲ به یکباره بدست‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 \delta_{(a:b)} &= I(\rho) - C(\rho) \\
 &= \frac{1}{4} \{ (1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \} \\
 &\quad + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3) \\
 &\quad + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\
 &\quad + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\
 &\quad - \frac{1-c}{4} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{4} \log_2(1+c) \\
 &\xrightarrow{|\Phi^+\rangle} \frac{1}{4} \{ \circ + \circ + \circ + 4 \log_2 4 - \circ - 1 \} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

این درشرایطی است که ابتدا برای استفاده از الگوریتم لو باید:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases} \tag{۱۹.۳}$$

به منظوره تبدیله:

$$\rho^{a,b} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c_3 + 1 & \circ & \circ & c_1 - c_2 \\ \circ & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & \circ \\ \circ & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & \circ \\ c_1 - c_2 & \circ & \circ & 1 + c_3 \end{bmatrix} \tag{۲۰.۳}$$

به

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \tag{۲۱.۳}$$

برای سه حالت دیگر بل نیز وضع به همین منوال خواهد بود.

۱.۱.۳ بررسی دقیق‌تر حالتها بل

همانطور که می‌دانیم یکی از معیارهای اندازه‌گیری میزان کوانتومی و یا کلاسیکی بودن معیارتلاقی^۴ است که از روی آن می‌توان درجه‌ی درهم‌تنیدگی^۵ یک حالت را بررسی کرد بصورتی که در

^۴ concurrence

^۵ entanglement

[۲۸]:

$$\tilde{C}(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (22.3)$$

آن چنان که:

$$\rho(Y \otimes Y) \rho^\dagger(Y \otimes Y) \quad (23.3)$$

ماتریسی خواهد بود که ویژه مقادیر آن در رابطه‌ی ۲۲.۳ وارد خواهند شد. و در نهایت:

$$E(\rho) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \tilde{C}(\rho)^2}}{2} \right) \quad (24.3)$$

که $h()$ نمایانگر باینری آنترپی^۶ است. پس برای حالت بل مورد بحث خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (26.3)$$

ویژه مقادیر بصورت:

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\} \quad (27.3)$$

پس:

$$\tilde{C}(\rho) = \max \{0, 0 - 0 - 0 - (-1)\} \quad (28.3)$$

$$= 1 \quad (29.3)$$

^۶ binary entropy

$$E(\rho) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (1)^2}}{2} \right) \quad (30.3)$$

$$E(\rho) = -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \quad (31.3)$$

$$= 1 \quad (32.3)$$

پس همانطور که می‌بینیم برای این حالت‌ها درجه‌ی درهم‌تنیدگی با ناهم‌خوانی کوانتومی برابر است [۲۳].

۲.۱.۳ حالت ورنر

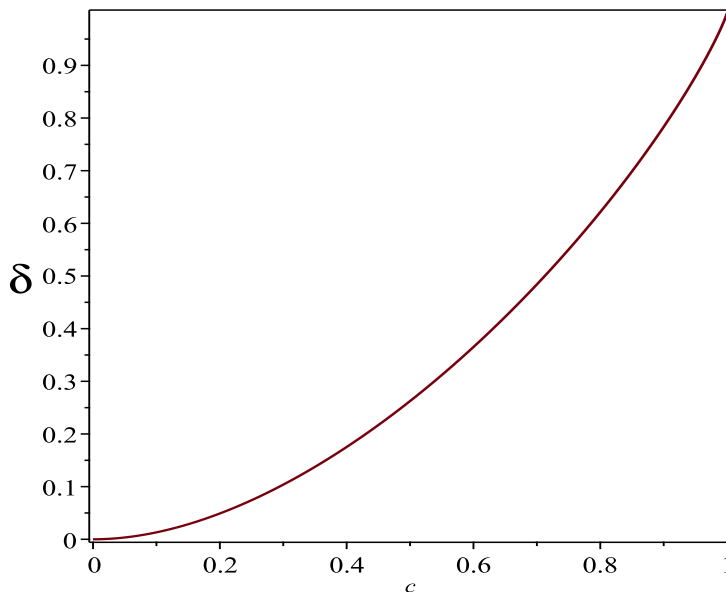
با قراردادن $c_1 = c_2 = c_3 = -c$ در ۱۰.۲ به ماتریس چگالی حالت ورنر خواهیم رسید که بصورت:

$$\begin{bmatrix} 1/4 - c/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 + c/4 & -c/2 & 0 \\ 0 & -c/2 & 1/4 + c/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 - c/4 \end{bmatrix} \quad (33.3)$$

می‌رسیم، همانطور که در قسمت ۴.۲ و رابطه ۸۲.۲ این حالت را معرفی و مورد بررسی قرار دادیم در ادامه همراه با رسم نمودارهای مختلف آن‌ها را بررسی دقیق‌تر می‌کنیم. در ۳.۲ نشان دادیم ناهم‌خوانی برای یک حالت ورنر می‌تواند از رابطه‌ی زیر بدست آید:

$$1/4 \frac{(1-c) \ln(1-c)}{\ln(2)} - 1/2 \frac{(1+c) \ln(1+c)}{\ln(2)} + 1/4 \frac{(1+3c) \ln(1+3c)}{\ln(2)} \quad (34.3)$$

نمودار این عبارت به‌ازای مقادیر مختلف c بصورت زیر خواهد بود:

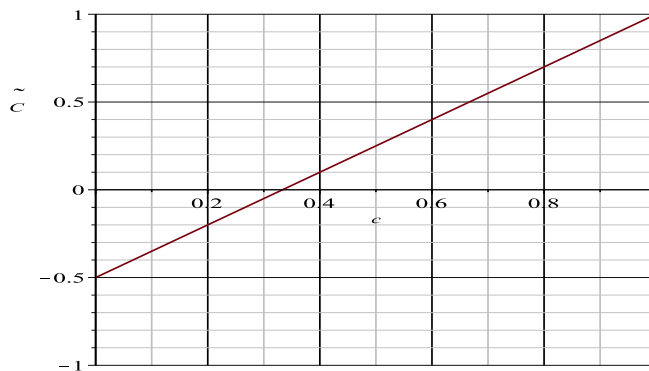


شکل ۱.۳: نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی δ برای یک حالت ورنر بر حسب مقادیر مختلف c

همچنین با استفاده از معیار تلاقی و استفاده از رابطه‌ی ۲۴.۳ برای این حالت می‌توانیم درهم‌تنیدگی کوانتومی را بصورت رابطه‌ی زیر به‌ازای مقادیر مختلف c نشان دهیم رابطه‌ی ۲۳.۳ بصورت:

$$\tilde{C} = -\frac{1+3c}{2} \quad (۳۵.۳)$$

و در نتیجه:



شکل ۲.۳: نمودار \tilde{C} برای حالت ورنر بر حسب مقادیر مختلف c

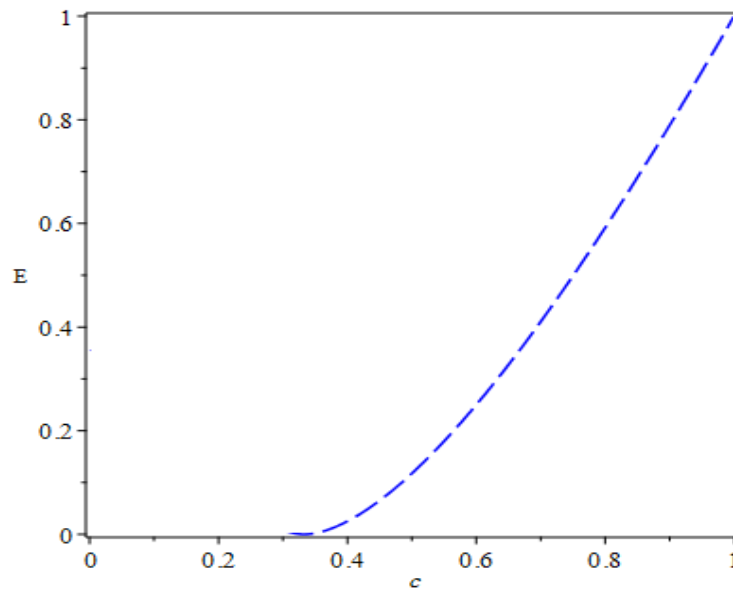
با استفاده از رابطه‌ی:

$$E(\rho) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \tilde{C}(\rho)^2}}{2} \right) \quad (۳۶.۳)$$

و در نهایت درهم‌تنیدگی را بصورت:

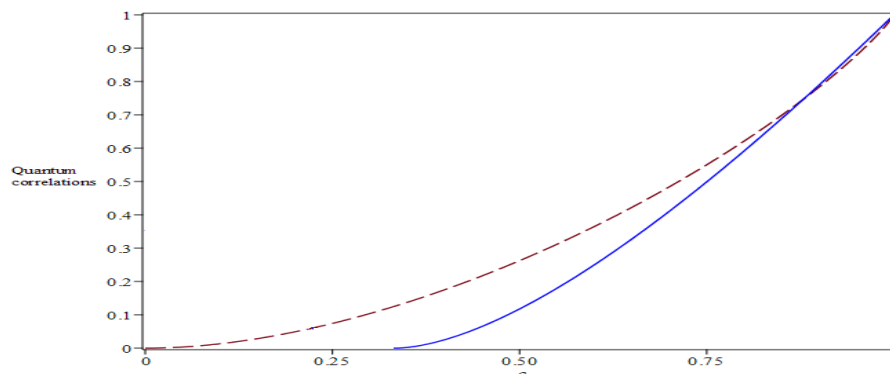
$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{-9c^2 + 6c + 3}\right) \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{-9c^2 + 6c + 3}\right)}{\ln(2)} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{-9c^2 + 6c + 3}\right) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{-9c^2 + 6c + 3}\right)}{\ln(2)} \quad (37.3)$$

نمودار این عبارت با در نظر گرفتن رابطه ۲۲.۳ بصورت زیر است:



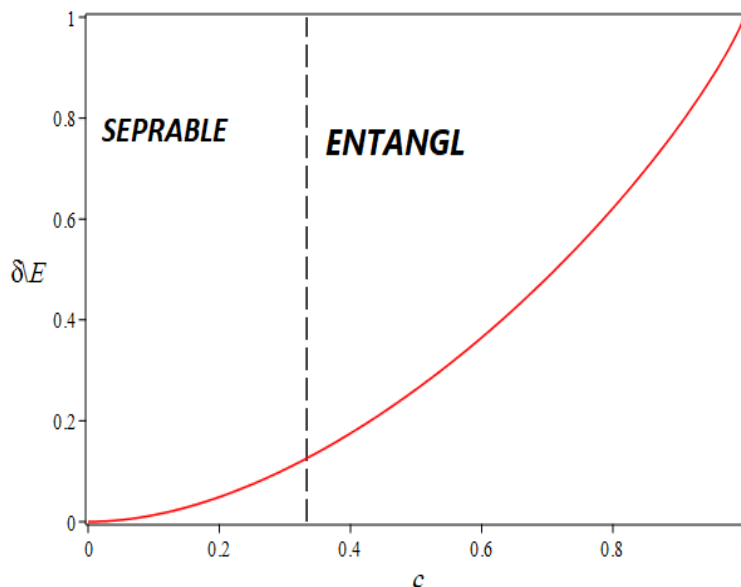
شکل ۳.۳: نمودار درهم‌تنیدگی کوانتومی (E) برای یک حالت ورنر برحسب مقادیر مختلف c

و همانطور که دیدیم حالا اگر هر دو نمودار را در کنار هم داشته باشیم شکل زیر بدست می‌آید:



شکل ۴.۳: نمودار همبستگی‌های کوانتومی برای یک حالت ورنر برحسب مقادیر مختلف c باهم.

همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار یکدیگر را در $c = ۰.۸۷۸۷۵۳۰۸۷۹$ قطع می‌کنند که با عدد بدست آمده در [۲۲] در توافق کامل است. در شکل زیر ما وضعیت درهم‌تنیدگی را با ناهم‌خوانی کوانتومی برای یک حالت ورنر مشاهده می‌کنیم:



شکل ۵.۳: نمودار وضعیت ناهم‌خوانی کوانتومی در محدوده‌ی جدایی‌پذیری و درهم‌تنیده برای یک حالت ورنر، نمودار قرمز ناهم‌خوانی و خط‌چین مرز جدایی‌پذیری و درهم‌تنیدگی

مشاهده می‌شود که در سمت چپ قسمت مشخص شده با خط‌چین که ما حالت کاملاً جدایی‌پذیر داریم و درهم‌تنیدگی کوانتومی کاملاً صفر است ناهم‌خوانی کوانتومی غیر صفر است. بدین ترتیب بررسی ناهم‌خوانی کوانتومی را بصورت تحلیلی و به روش به کاررفته در [۲۲]، [۲۳] بانمودارهایی که حتی الامکان مفاهیم را شهودی‌تر کرده باشند به پایان می‌بریم.

فصل ۴

بررسی ارتباطات کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی

۱.۴ ولگشت کوانتومی

در ولگشت‌های کوانتومی معمولاً یک فضا بعنوان سکه و یک فضای معمولاً نامتناهی بعنوان فضای مکان در نظر گرفته میشود. ولگشت کوانتومی با استفاده از حالت در فضای سکه، که جهت حرکت در فضای مکان را مشخص می‌کند اتفاق می‌افتد، با ادامه‌ی این روند و تداخل‌های کوانتومی بین حالت‌های مختلف در مکان‌های مختلف تابع توزیع احتمال برای مکان‌های مختلف بدست می‌آید که بسیار متفاوت از ولگشت‌های کلاسیک است. در نظر گرفتن عملگره سکه‌ی متفاوت باعث تعریف ولگشت‌های کوانتومی متعددی خواهد شد، در مورد ولگشت‌های کوانتومی فضای سکه چهار بعدی و فضای مکان را با دو بعد x, y روی صفحه در نظر می‌گیرند، بنابراین ولگشت کوانتومی با چهار حالت مختلف در راستاهای مختلف حرکت و تداخل‌های کوانتومی باعث ایجاد حالتها مختلف می‌شود. نشان داده شده است که حالت موضعی سکه بعد از تعداد گام‌های زیاد به یک ماتریس چگالی حدی میل خواهد کرد که این ماتریس چگالی را می‌توان با یک ماتریس ثابت با ابعاد دوبرابر فضای سکه بطور کامل مشخص کرد [۲۹].

ما در این فصل به بررسی کوانتومی در زیرفضای سکه خواهیم پرداخت، بنابراین ماتریس چگالی کاهش یافته سه عملگره متفاوت سکه مثل بل-گراور-هادامارد ماتریس دوبعدی را

مورد بررسی قرار می‌دهیم. ماتریس کاهش‌یافته‌ی ولگشت کوانتومی دو بعدی را می‌توان از رابطه‌ی زیر بدست آورد:

$$\rho_c = Tr_1[(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes I_{4 \times 4}) C] \quad (1.4)$$

که در آن $|\psi_0\rangle$ حالت اولیه است و C یک ماتریس ثابت 16×16 است که بسته به عملگر سکه‌ی ما متفاوت است، برای مثال برای سکه‌ی بل گراور و هادامارد این ماتریس بصورت زیر است، ماتریس 16×16 بل بصورت:

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & f \\ \circ & b & c & \circ & b & \circ & \circ & c & c & \circ & \circ & -d & \circ & c & -d & \circ \\ \circ & c & b & \circ & c & \circ & \circ & d & b & \circ & \circ & -c & \circ & d & -c & \circ \\ \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ \\ \circ & b & c & \circ & b & \circ & \circ & c & c & \circ & \circ & -d & \circ & c & -d & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & a & \circ & \circ & \circ & \circ & f & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & c & d & \circ & c & \circ & \circ & b & d & \circ & \circ & -c & \circ & b & -c & \circ \\ \circ & c & b & \circ & c & \circ & \circ & d & b & \circ & \circ & -c & \circ & d & -c & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ & e & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & f & \circ & \circ & \circ & \circ & a & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -d & -c & \circ & -d & \circ & \circ & -c & -c & \circ & \circ & b & \circ & -c & b & \circ \\ \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & e & \circ & \circ \\ \circ & c & d & \circ & c & \circ & \circ & b & d & \circ & \circ & -c & \circ & b & -c & \circ \\ \circ & -d & -c & \circ & -d & \circ & \circ & -c & -c & \circ & \circ & b & \circ & -c & b & \circ \\ f & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & a \end{bmatrix}$$

که در آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi-1}{2.\pi}, & f &= \frac{-3+\pi}{2.\pi}, & d &= -\frac{\pi-4}{4.\pi}, & b &= \frac{1}{4}, \\ c &= \frac{-2+\pi}{4.\pi}, & e &= \frac{1}{2.\pi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix}
 a & b & b & c & b & d & e & f & b & e & d & f & c & f & f & k \\
 b & h & -c & -b & h & b & -b & -c & -c & -b & f & g & -b & -c & g & f \\
 b & -c & h & -b & -c & f & -b & g & h & -b & b & -c & -b & g & -c & f \\
 c & -b & -b & j & -b & e & i & -b & -b & i & e & -b & j & -b & -b & c \\
 b & h & -c & -b & h & b & -b & -c & -c & -b & f & g & -b & -c & g & f \\
 d & b & f & e & b & a & c & b & f & c & k & f & e & b & f & d \\
 e & -b & -b & i & -b & c & j & -b & -b & j & c & -b & i & -b & -b & e \\
 f & -c & g & -b & -c & b & -b & h & g & -b & f & -c & -b & h & -c & b \\
 b & -c & h & -b & -c & f & -b & g & h & -b & b & -c & -b & g & -c & f \\
 e & -b & -b & i & -b & c & j & -b & -b & j & c & -b & i & -b & -b & e \\
 d & f & b & e & f & k & c & f & b & c & a & b & e & f & b & d \\
 f & g & -c & -b & g & f & -b & -c & -c & -b & b & h & -b & -c & h & b \\
 c & -b & -b & j & -b & e & i & -b & -b & i & e & -b & j & -b & -b & c \\
 f & -c & g & -b & -c & b & -b & h & g & -b & f & -c & -b & h & -c & b \\
 f & g & -c & -b & g & f & -b & -c & -c & -b & b & h & -b & -c & h & b \\
 k & f & f & c & f & d & e & b & f & e & d & b & c & b & b & a
 \end{bmatrix}$$

که در آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{۳۲.\pi - ۳}{\lambda \pi}, & b &= -\frac{۱ - ۲ + \pi}{\lambda \pi}, & c &= -\frac{۱ - ۵ + ۲.\pi}{\lambda \pi} \\
 d &= \frac{۱ - ۵۳ + ۱۸.\pi}{۲۴ \pi}, & e &= \frac{۱ - ۱۳ + ۴.\pi}{\lambda \pi}, & f &= \frac{۵ \ ۳.\pi - ۱۰}{۲۴ \pi} \\
 g &= \frac{۱ - ۱۷ + ۶.\pi}{۲۴ \pi}, & h &= \frac{۵}{\lambda.\pi}, & i &= \frac{۱}{\lambda.\pi}, & j &= \frac{۱۲.\pi - ۱}{\lambda \pi}, & k &= \frac{۱ - ۹۱ + ۳۰.\pi}{۲۴ \pi}
 \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

و ماتریس 16×16 هادا نیز بصورت:

$$\begin{bmatrix}
 a & b & b & c & b & d & c & e & b & c & d & e & c & e & e & g \\
 b & j & c & h & j & -b & h & -c & c & h & e & -c & h & -c & -c & -e \\
 b & c & j & h & c & e & h & -c & j & h & -b & -c & h & -c & -c & -e \\
 c & h & h & i & h & -c & i & -h & h & i & -c & -h & i & -h & -h & c \\
 b & j & c & h & j & -b & h & -c & c & h & e & -c & h & -c & -c & -e \\
 d & -b & e & -c & -b & a & -c & b & e & -c & g & -e & -c & b & -e & d \\
 c & h & h & i & h & -c & i & -h & h & i & -c & -h & i & -h & -h & c \\
 e & -c & -c & -h & -c & b & -h & j & -c & -h & -e & c & -h & j & c & -b \\
 b & c & j & h & c & e & h & -c & j & h & -b & -c & h & -c & -c & -e \\
 c & h & h & i & h & -c & i & -h & h & i & -c & -h & i & -h & -h & c \\
 d & e & -b & -c & e & g & -c & -e & -b & -c & a & b & -c & -e & b & d \\
 e & -c & -c & -h & -c & -e & -h & c & -c & -h & b & j & -h & c & j & -b \\
 c & h & h & i & h & -c & i & -h & h & i & -c & -h & i & -h & -h & c \\
 e & -c & -c & -h & -c & b & -h & j & -c & -h & -e & c & -h & j & c & -b \\
 e & -c & -c & -h & -c & -e & -h & c & -c & -h & b & j & -h & c & j & -b \\
 g & -e & -e & c & -e & d & c & -b & -e & c & d & -b & c & -b & -b & a
 \end{bmatrix}$$

نهایتاً برای این ماتریس نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{\lambda}, & b &= \frac{5}{\lambda} - \frac{3\sqrt{2}}{\lambda}, & c &= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{\lambda}, \\
 d &= -\sqrt{2} + \frac{11}{\lambda}, & e &= -\frac{5\sqrt{2}}{\lambda} + \frac{7}{\lambda}, & f &= \frac{17}{\lambda} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\
 g &= -\frac{1}{\lambda} + \frac{\sqrt{2}}{\lambda}, & h &= \frac{1}{\lambda}, & i &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ما حالت‌های اولیه را به دو فرم زیر که طیف وسیعی از حالت‌ها، از جدایی پذیر تا بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی را در برمی‌گیرند در نظر می‌گیریم:

$$initial \ 1 = |\psi_0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \circ \\ \circ \\ \sin(\theta) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad initial \ 2 = |\psi'_0\rangle = \begin{bmatrix} \circ \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) e^{i\phi} \\ \circ \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

با بکار بردن رابطه‌ی ۱.۴ و بکار بردن آن برای حالت $|\psi_0\rangle$ از حالت‌های ۵.۴ برای حالت خاص با $\phi = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= \frac{\cos^2(\theta)(\pi - 1)}{2\pi} + \frac{\sin^2(\theta)}{2\pi} \\ \rho_{03} &= \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\pi} + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)(-3 + \pi)}{2\pi} \\ \rho_{11} &= \frac{\cos^2(\theta)}{4} + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)(-2 + \pi)}{2\pi} + \frac{\sin^2(\theta)}{4} \\ \rho_{12} &= \frac{\cos^2(\theta)(-2 + \pi)}{4\pi} - \frac{\sin^2(\theta)(-2 + \pi)}{4\pi} \\ \rho_{22} &= \frac{\cos^2(\theta)}{4} - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)(-2 + \pi)}{2\pi} + \frac{\sin^2(\theta)}{4} \\ \rho_{33} &= \frac{\sin^2(\theta)(\pi - 1)}{2\pi} + \frac{\cos^2(\theta)}{2\pi} \end{aligned} \quad (6.4)$$

که برای این حالت خاص کاملاً X-گونه است و با روش‌هایی که در فصل ۳ معرفی شدند بصورت تحلیلی در قسمت بعد به محاسبه‌ی همبستگی‌های کوانتومی موجود در آن و همچنین بین مکان با این موجود خواهیم پرداخت.

۲.۴ محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی

۱.۲.۴ ناهم‌خوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته با سکه‌ی بل

در این بخش از روش صفحات ۴۱-۴۶ استفاده شده و خواننده باید به خوبی با استدلال بکار رفته در این بخش آشنا باشد.

در شکل ۱.۴ و ۲.۴ شرط ۱۲۲.۲ بصورت:

$$(|\rho_{12}| + |\rho_{03}|)^2 \leq (\rho_{00} - \rho_{11})(\rho_{33} - \rho_{22}) \quad (7.4)$$

۶۴ بررسی ارتباطات کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی

را بصورت نموداری برای رابطه زیر با عناصر ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌ی بل:

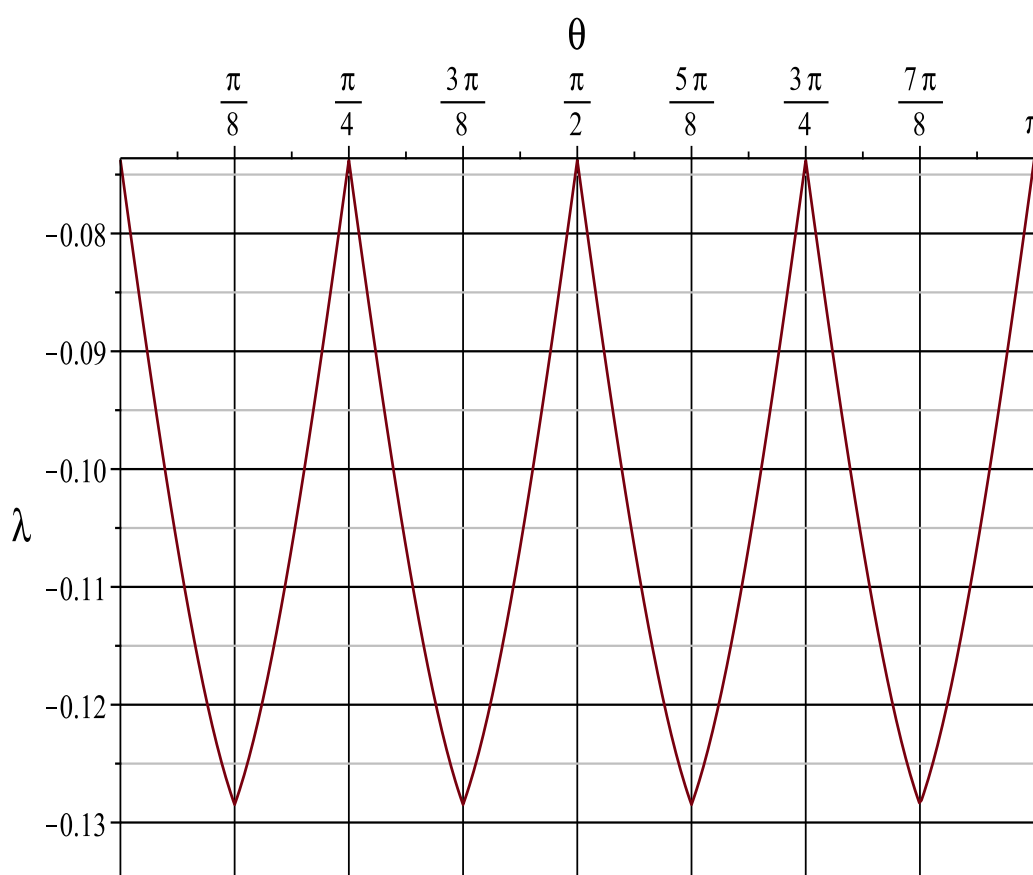
$$((\rho_{00} - \rho_{11})(\rho_{33} - \rho_{22})) - (|\rho_{12}| + |\rho_{03}|)^2 \geq 0 \quad (۸.۴)$$

بررسی می‌کنیم.

با تعریف:

$$((\rho_{00} - \rho_{11})(\rho_{33} - \rho_{22})) - (|\rho_{12}| + |\rho_{03}|)^2 = \lambda \quad (۹.۴)$$

خواهیم داشت:



شکل ۱.۴: نمودار بررسی σ_z بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل

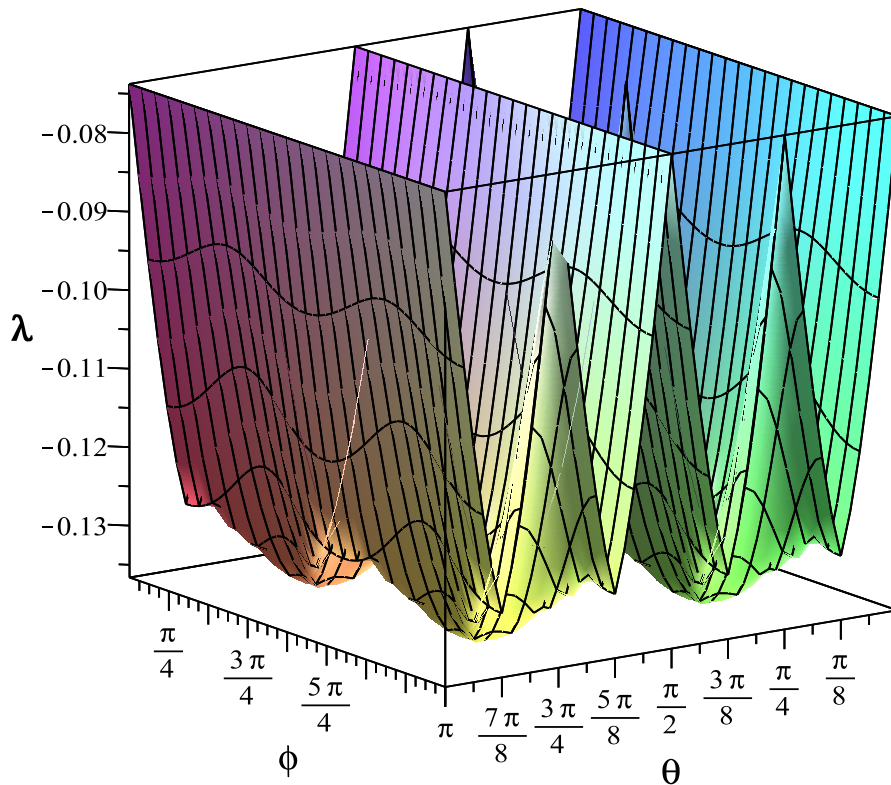
همانطور که از شکل پیداست شرط ۸.۴ برای فرم مجانبی ماتریس کاهش یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌ی بل هیچگاه برقرار نیست و، σ_z نمی‌تواند در

$$\rho = \frac{I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} \quad (۱۰.۴)$$

با

$$r = \pm 1 \quad (۱۱.۴)$$

همانطور که در فصل ۳ دیدیم، مشاهده‌پذیری باشد که بیشینه‌ی اطلاعات کلاسیکی را برای محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی در اختیار ما قرار دهد، ما در شکل ۱.۴ و ۲.۴ وضعیت دو بعدی و سه بعدی شرط ۱۲۲.۲ را به‌زای زاویای مختلف θ و ϕ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۲.۴: نمودار سه بعدی بررسی σ_z بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل

در شکل ۳.۴ و ۴.۴ به بررسی شرط ۱۵۰.۲ که بصورت زیر بود:

$$|\sqrt{\rho_{00}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}| \leq |\rho_{12}| + |\rho_{03}| \quad (12.4)$$

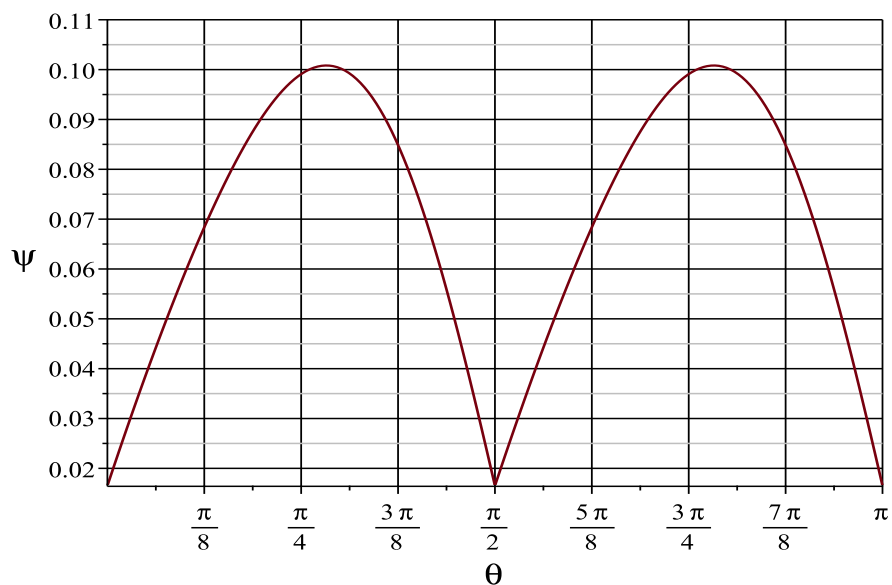
بصورت نموداری برای رابطه زیر با عناصر ماتریس کاهش‌یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌ی بل:

$$(|\rho_{12}| + |\rho_{03}|) - |\sqrt{\rho_{00}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}| \geq 0 \quad (13.4)$$

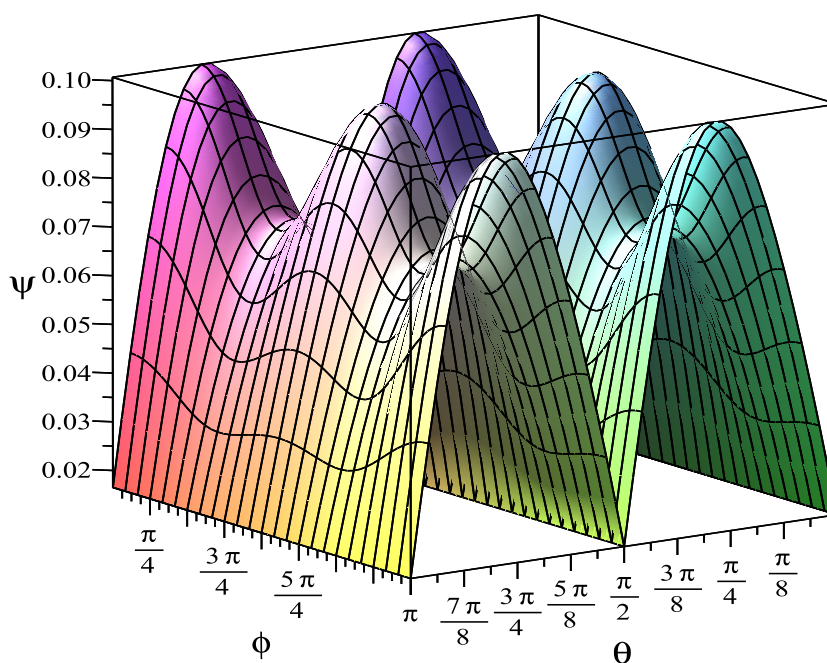
بصورت دو بعدی و سه بعدی پراخته‌ایم.
با تعریف:

$$(|\rho_{12}| + |\rho_{03}|) - |\sqrt{\rho_{00}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}| = \Psi \quad (14.4)$$

خواهیم داشت:



شکل ۳.۴: نمودار بررسی σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل



شکل ۴.۴: نمودار سه بعدی بررسی σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل

همانطور که مشاهده می‌شود شرط ۱۳.۴ همواره برای کلیه مقادیر θ و ϕ برقرار است

محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی ۶۷

و می‌توان برای محاسبه‌ی تحلیلی ناهم‌خوانی کوانتومی از σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر کننده‌ی کلاسیکی استفاده کرد. در شکل ۵.۴ و شکل ۶.۴ به بررسی شرط ۱۲۱.۲ که با رابطه زیر نشان دادیم:

$$|s| > |u| \quad (15.4)$$

به صورت دو بعدی و سه بعدی برای رابطه زیر با عناصر ماتریس کاهش‌یافته‌ی ولگشت کوانتومی با سکه‌ی بل

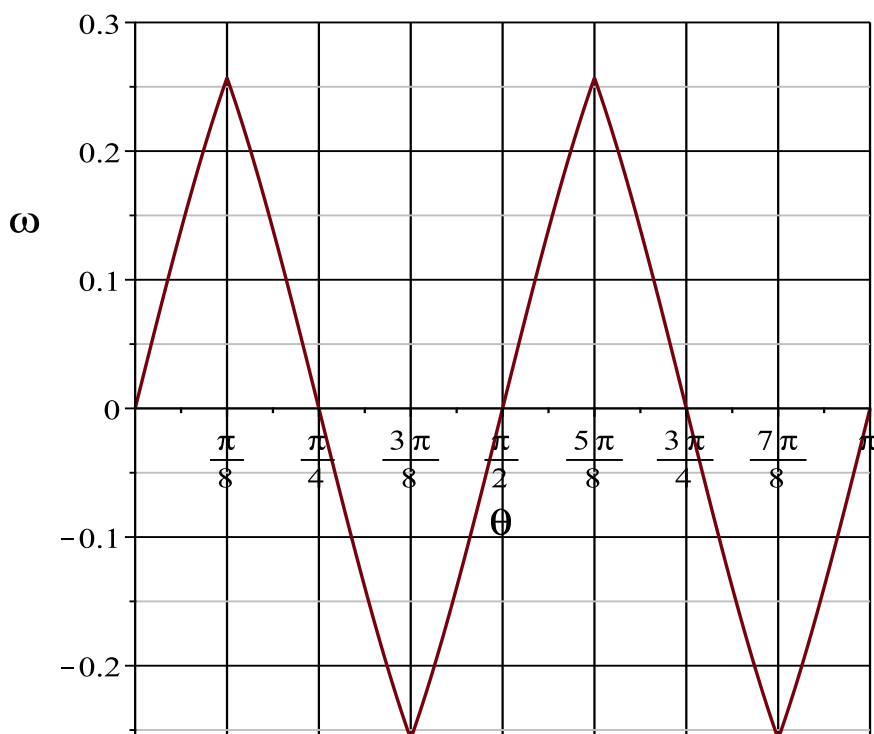
$$|s| - |u| > 0 \quad (16.4)$$

پرداخته شده.

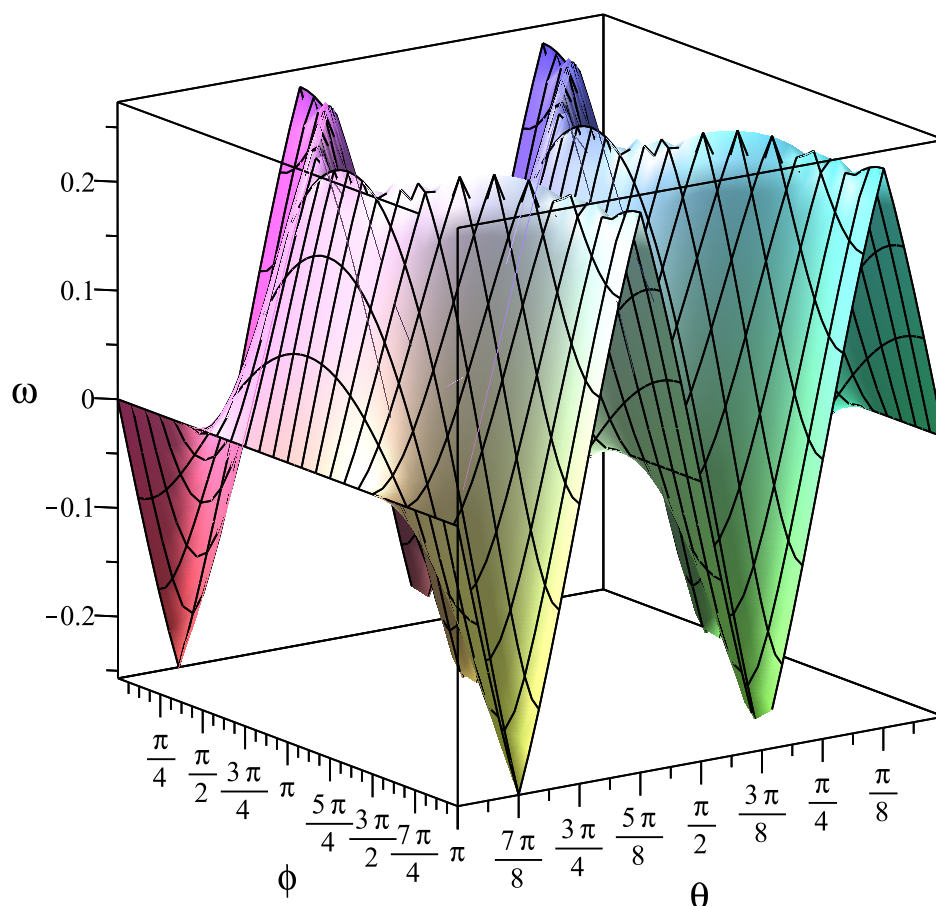
با تعریف:

$$|s| - |u| = \omega \quad (17.4)$$

خواهیم داشت:

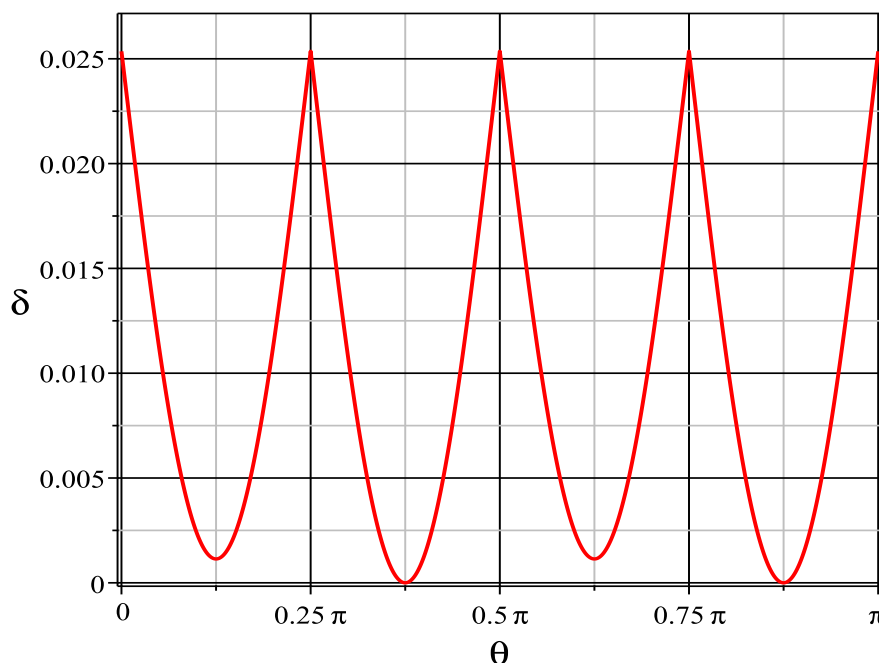


شکل ۵.۴: نمودار بررسی شرط لازم برای استفاده از σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل



شکل ۶.۴: نمودار سه بعدی بررسی امکان استفاده از σ_x بعنوان مشاهده‌پذیر ایده‌آل

در واقع این مورد فقط به ما نشان می‌دهد در قسمت‌هایی که شرط ۱۶.۴ برقرار نیست تنها باید علامت ρ_{03} را تغییر داد تا قسمت‌هایی منفی و زیر نمودار به مثبت منتقل شوند. در واقع همانطور که در [۲۶] به این موضوع اشاره شده که همواره می‌توان علامت ρ_{03} را با انجام یک عملیات موضعی که تاثیری در مقدار ناهم‌خوانی کوانتومی ندارد تغییر داد. در شکل ۷.۴ نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی را به ازای زاویه‌ی $\phi = 0$ و مقادیر مختلف θ برای سکه بل رسم کرده‌ایم.



شکل ۷.۴: نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی برای هردو حالت اولیه و سکه‌ی بل

با استفاده از معیاره تلاقی که برای محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌ها بکار می‌رود مشاهده شد که این مقدار صفر است، علی‌رغم صفر بودن درهم‌تنیدگی بین این زیر سیستم‌ها مقدار ناچیزی ناهم‌خوانی کوانتومی وجود دارد. گفتنی است مقدار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان برای حالت بل و هردو حالت اولیه پیشنهادی با $\phi = 0$ و استفاده از معیاره آنتروپی فون‌نویمان، برابر با $1/9 \times 25$ و مستقل از زوایای θ و ϕ برای حالت‌های اولیه پیشنهادی می‌باشد.

۲.۲.۴ ناهم‌خوانی کوانتومی در ماتریس کاهش یافته با سکه‌ی گراور و هادامارد

با توجه به اینکه فرم این‌ها X-گونه نیست ناهم‌خوانی کوانتومی بصورت تحلیلی قابل بررسی نیست و با روش‌های عددی محاسبات مربوط به محاسبه‌ی ناهم‌خوانی کوانتومی بین زیر سیستم‌های این‌ها صورت گرفته‌است. درهم‌تنیدگی همواره با معیار تلاقی^۱ برای حالت‌های مخلوط^۲ بین زیر سیستم‌های سکه (Coin-Coin-Entanglement = CCE) و آنتروپی فون‌نویمان^۳ برای حالت‌های خالص^۴ بین سکه و مکان (Coin-Position- = CPE) Entanglement (بکار رفته‌است).

^۱ concurrence

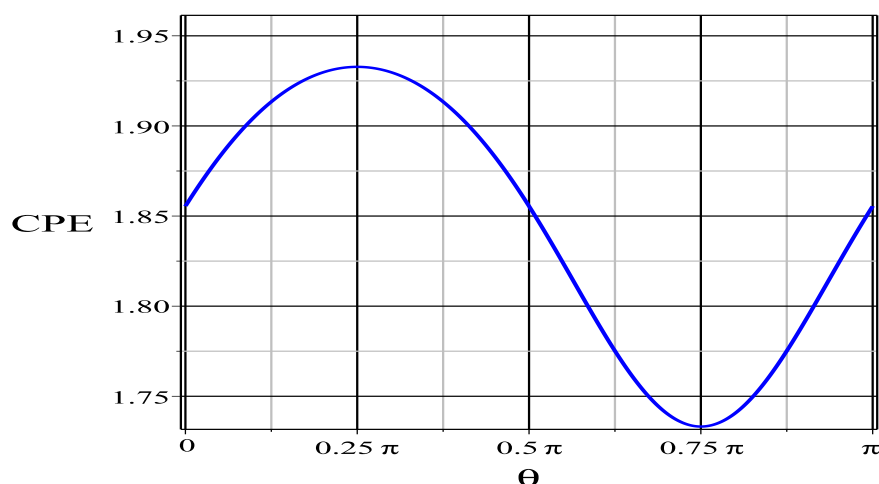
^۲ mixed-state

^۳ von-neuman entropy

^۴ pure

۷۰ بررسی ارتباطات کوانتومی در ولگشت کوانتومی با سکه‌های دو بعدی

در شکل ۸.۴ درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان^۵ برای وضعیتی که سکه‌ی مورد استفاده گراور باشد رسم شده است.



شکل ۸.۴: نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه‌ی گراور با مکان

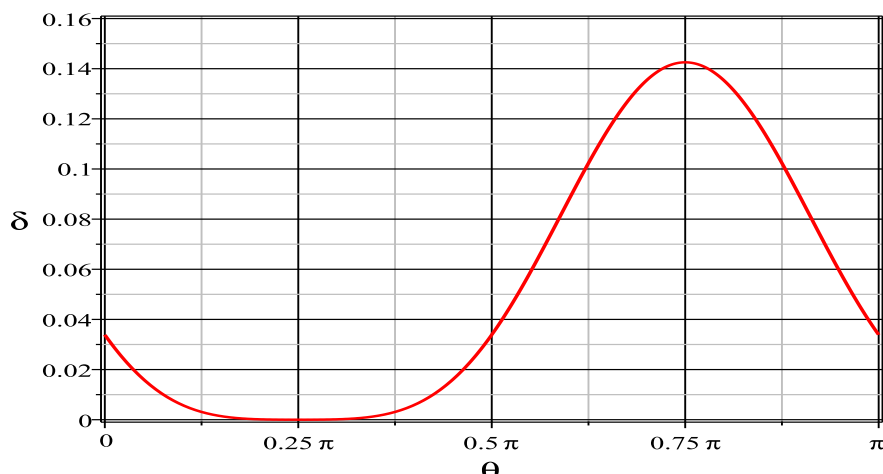
همانطور که مشاهده می‌شود مقدار قابل ملاحظه‌ای نیز دارد و برای هر دو حالت از حالت‌های اولیه‌ی $|\psi_0\rangle$ پیشنهادی بکاررفته در رابطه‌ی ۱.۴ بصورت:

$$\rho_c = \text{Tr}_1[(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes I_{4 \times 4})C] \quad (18.4)$$

یکسان می‌باشد.

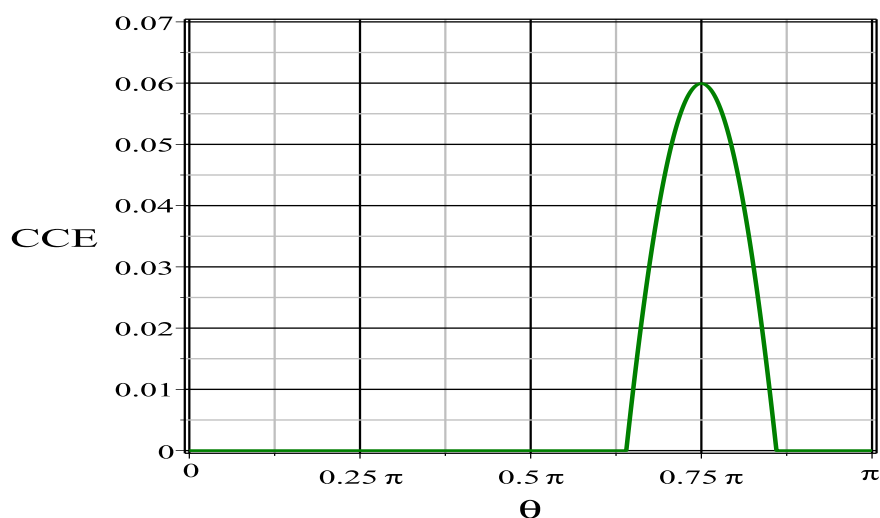
شکل ۹.۴ ناهم‌خوانی کوانتومی را بین زیر سیستم‌های سکه، وقتی گراور عملگر مورد استفاده باشد نشان می‌دهد که نسبت به حالت بل بسیار چشمگیر است و برای هر دو حالت از حالت‌های اولیه‌ی بکاررفته در رابطه‌ی ۱.۴ یکسان می‌باشد.

^۵cpe: coin-position-entanglement



شکل ۹.۴: نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی برای هر دو حالت اولیه بین زیرفضاهای سکه‌ی گراور با $\phi = 0$

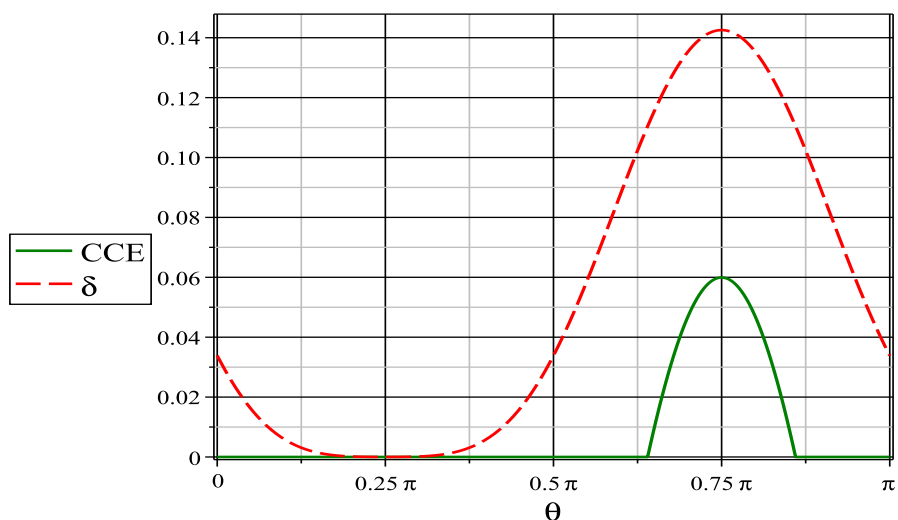
شکل ۱۰.۴: درهم‌تنیدگی کوانتومی را بین زیر سیستم‌های سکه ϕ وقتی گراور باشد نشان می‌دهد که نسبت به حالت بل غیر صفر و برای هر دو حالت از حالت اولیه‌ی بکاررفته در رابطه‌ی ۱.۴ یکسان ولی در بسیاری از نقاط صفر است.



شکل ۱۰.۴: نمودار درهم‌تنیدگی بین زیرفضاهای سکه‌ی گراور و هر دو حالت اولیه با $\phi = 0$

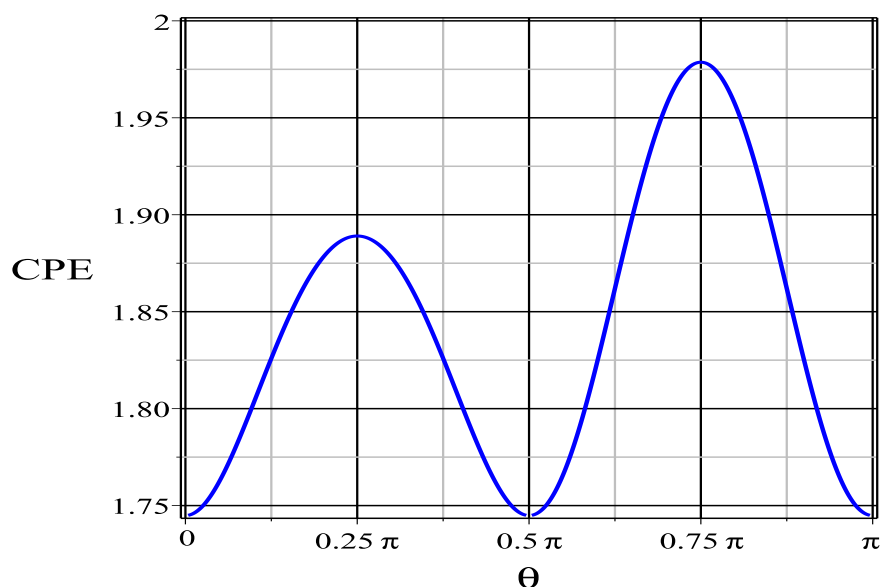
شکل ۱۱.۴: ناهم‌خوانی و درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های کاهش یافته با سکه‌ی گراور را در کنار هم نشان می‌دهد.

^۶cce: coin-coin-entanglement



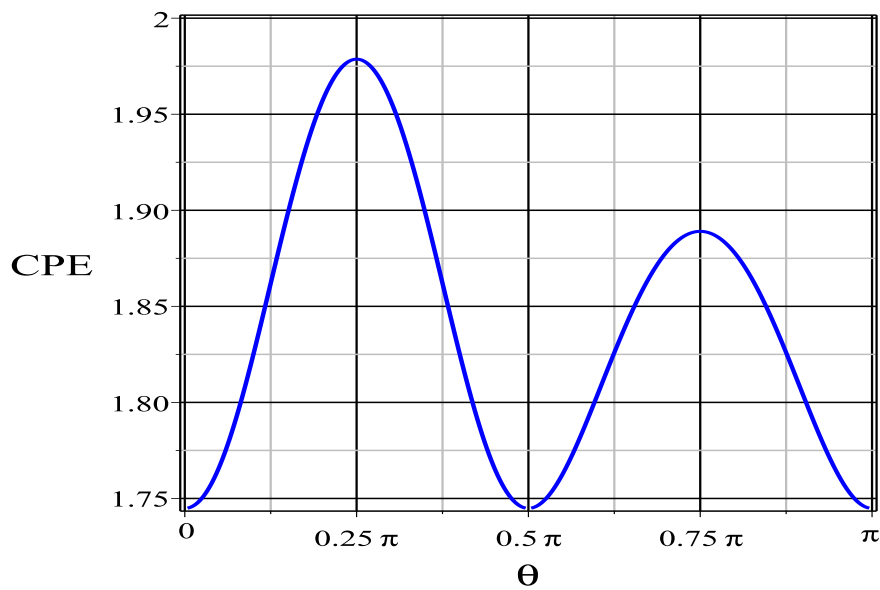
شکل ۱۱.۴: نمودار درهم‌تنیدگی و ناهم‌خوانی گراور

شکل ۱۲.۴ در هم‌تنیدگی بین سکه و مکان را برای حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ برای سکه‌ی هادا نشان می‌دهد.



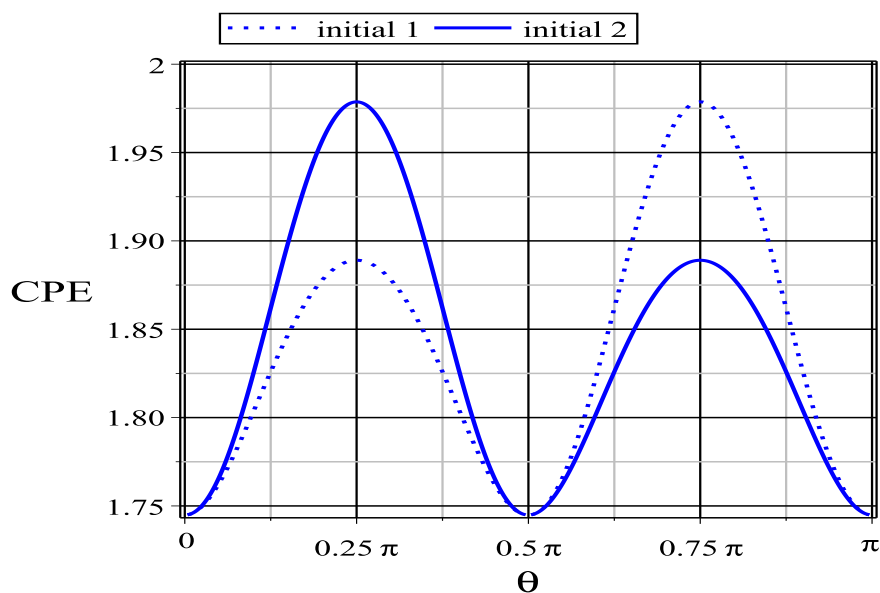
شکل ۱۲.۴: نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان هادامارد

شکل ۱۳.۴ در هم‌تنیدگی بین سکه و مکان را برای حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ برای سکه‌ی هادامارد نشان می‌دهد.



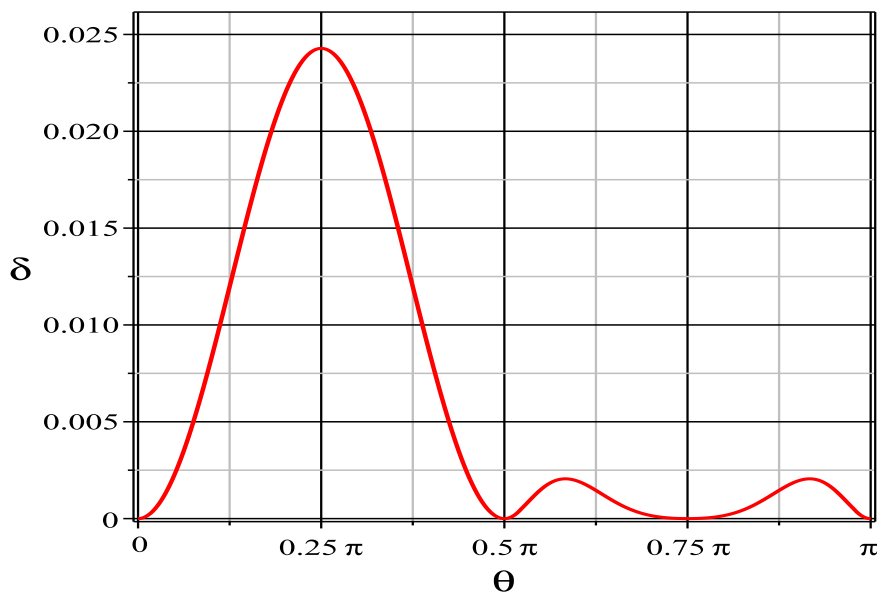
شکل ۱۳.۴: نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان هادامارد

نهایتاً هر دو نمودار را برای درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان برای حالت‌های اولیه‌ی مختلف بکار رفته برای سکه‌ی هادامارد در کنار هم در شکل ۱۴.۴ مشاهده می‌کنیم.



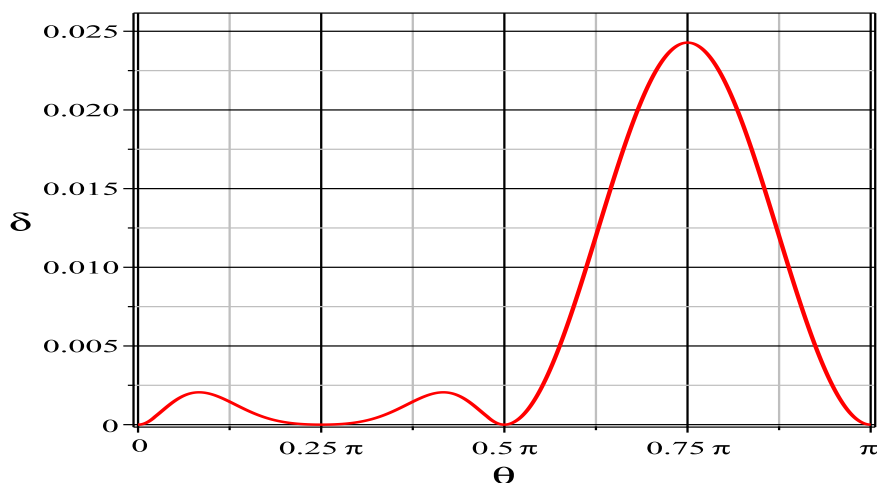
شکل ۱۴.۴: نمودار درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان هادامارد برای هر دو حالت اولیه

شکل ۱۵.۴ ناهم‌خوانی کوانتومی بین سکه و مکان را برای حالت اولیه‌ی $|\psi_0\rangle$ برای سکه‌ی هادامارد نشان می‌دهد.



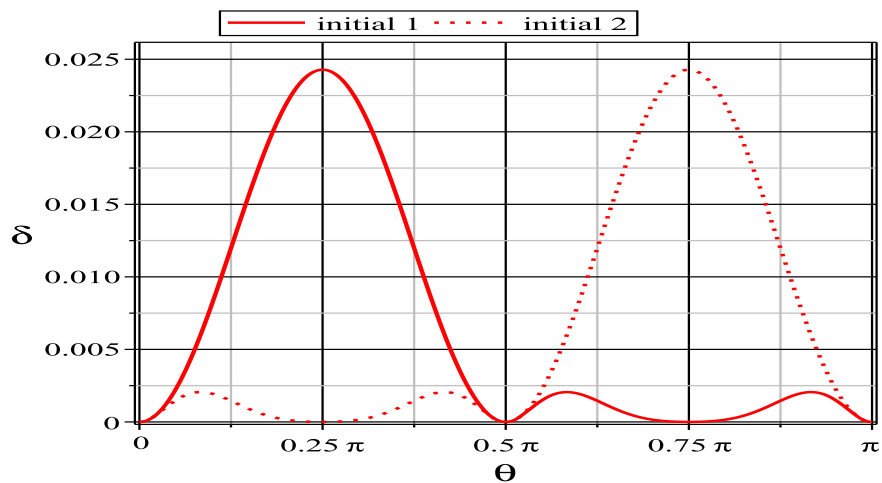
شکل ۱۵.۴: نمودار ناهمخوانی هادامارد

شکل ۱۶.۴ ناهمخوانی کوانتومی بین سکه و مکان را برای حالت اولیه $|\psi'\rangle$ برای سکه‌ی هادامارد نشان می‌دهد.



شکل ۱۶.۴: نمودار ناهمخوانی هادامارد

در نهایت هر دو نمودار را برای ناهمخوانی کوانتومی بین زیر سیستم‌های سکه برای وضعیتی که سکه‌ی ما هادامارد باشد به ازای حالت‌های اولیه‌ی مختلف در کنار هم در شکل ۱۷.۴ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۱۷.۴: نمودار ناهم‌خوانی کوانتومی برای هر دو حالت اولیه‌ی سکه‌ی هادامارد

فصل ۵

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه با در نظر گرفتن سه عملگره سکه‌ی متفاوت مثل سکه‌ی بل، گراور و هادامارد دو بعدی، درهم‌تنیدگی بین مکه و سکه برای دو حالت اولیه‌ی مختلف مورد بررسی قرار گرفت و مشخص گردید درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان در ولگشت‌های کوانتومی بل و گراور برای هر دو حالت پیشنهادی ما یکسان است و درهم‌تنیدگی آن قابل توجه است. این درهم‌تنیدگی بین مکان و سکه در مورد سکه‌ی هادامارد نیز اگرچه مقدار چشمگیری است ولی برای حالت‌های پیشنهادی ما متفاوت است. از آنجایی که چگالی کاهش‌یافته‌ی ولگشت‌های دو بعدی 4×4 است درهم‌تنیدگی و کوانتومی زیرسیستم‌ها بصورت دو زیر فضای دو بعدی قابل بررسی است، ما این همبستگی را بصورت درهم‌تنیدگی و ناهم‌خوانی بین زیر فضاها مشخص کردیم و دیدیم در اکثر مواقع درهم‌تنیدگی بین زیر فضاها صفر (بل و هادامارد) و در محدوده‌ی مشخصی غیر صفر ولی نزدیک صفر است (گراور) از طرفی مشخص گردید اگرچه درهم‌تنیدگی در اکثر مواقع صفر و ناچیز است اما ناهم‌خوانی برای تمام حالتها غیر صفر و وابسته به حالت اولیه است. نکته‌ی جالب اینکه، بنظر می‌رسد اکسترمم‌های ناهم‌خوانی بین زیرفضاهای کاهش‌یافته با اکسترمم‌های درهم‌تنیدگی بین فضای سکه و مکان در نقاط مشترکی هستند به این معنا که حالتها کوانتومی که باعث ایجاد درهم‌تنیدگی بیشینه در بین سکه و مکان می‌شوند باعث ناهم‌خوانی بیشینه در فضای سکه هم می‌شوند (هادامارد) اما در مواردی حالت‌های کوانتومی که باعث ایجاد درهم‌تنیدگی در بین سکه و مکان می‌شوند باعث ناهم‌خوانی کمینه در بین زیرفضاهای سکه می‌شوند (گراور). نکته‌ی پایانی اینکه می‌توان با ولگشت‌های کوانتومی

دوبعدی حالتهایی را تولید کرد که با وجود اینکه درهم‌تنیدگی بین زیرفضاها صفر است اما دارای ناهم‌خوانی غیر صفر هستند.

مراجع

- [1] Harold Ollivier and Wojciech H Zurek . (2001), ” Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations ” **Physical review letters** , 88(1): 017901
- [2] Leah Henderson and Vlatko Vedral. (2001), ”classical quantum and total correlations ” **Journal of physics A: mathematical and general** , 34(35): 6899
- [3] Wojciech H Zurek . (2000), ” Einselection and decoherence from an information theory perspective ” **arXiv preprint quantph** , 0011039
- [4] Wojciech H Zurek . (2003), ” Quantum discord and maxwell’s demons ” **Physical Review A** , 67(1): 012320
- [5] Animesh Datta, Anil Shaji, and Carlton M Caves. (2008), ” Quantum discord and the power of one qubit ” **Physical review letters**, 100(5): 050502
- [6] MS Sarandy . (2009), ” Classical correlation and quantum discord in critical systems ” **Physical Review A** , 80(2): 022108
- [7] Werlang, T., et al. (2009), ” Robustness of quantum discord to sudden death”**Physical Review A**, 80.2: 024103
- [8] Sarandy, M. S. (2009), ” Classical correlation and quantum discord in critical systems”**Physical Review A**, 80.2 : 022108.
- [9] Madhok, Vaibhav, and Animesh Datta. (2011), ” Interpreting quantum discord through quantum state merging”**Physical Review A**, 83.3: 032323.
- [10] Wang, B., Xu, Z.Y., Chen, Z.Q. and Feng, M. (2010), ” Non-Markovian effect on the quantum discord”**Physical Review A**, 81(1), 014101.
- [11] Dakić, B., Lipp, Y.O., Ma, X., Ringbauer, M., Kropatschek, S., Barz, S., Paterek, T., Vedral, V., Zeilinger, A., Brukner, Č. and Walther, P. (2012), ” Quantum discord as resource for remote state preparation”**Nature Physics**, 8(9), p.666.

- [12] Streltsov, A., Kampermann, H. and Bruß, D. (2011), " Linking quantum discord to entanglement in a measurement" **Physical review letters**, 106(16), p.160401.
- [13] S Javad Akhtarshenas, Hamidreza Mohammadi, Fahimeh S Mousavi, and Vahid Nasajpour. (2015), " Progression quantum discord of two-qubit states: optimization and upper bound" **International Journal of Theoretical Physics**, 54(1): 72–84.
- [14] Luo, Shunlong, and Shuangshuang Fu. (2010), " Geometric measure of quantum discord" **Physical Review A**, 82.3: 034302
- [15] Borivoje Dakić, Vlatko Vedral, and Āaslav Brukner. (2010), " Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord" **Physical review letters**, 105(19): 190502
- [16] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. (2002), "**Quantum computation and quantum information** "
- [17] Claude Elwood Shannon . (2001), " A mathematical theory of communication " **ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review** , 5(1): 3–55
- [18] Alexander Streltsov and Wojciech H Zurek . (2001), " Quantum discord cannot be shared " **Physical review letters** , 111(4): 040401
- [19] The Oxford English Dictionary. (1933), "**Oxford English Dictionary**", 12 Vols. JSTOR
- [20] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. (1935), " Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? " **Physical review** , 47(10): 777
- [21] Jun John Sakurai, San-Fu Tuan, and Eugene D Commins. (1995), "**Modern quantum mechanics, revised edition**"
- [22] Shunlong Luo . (2008), " Quantum discord for two-qubit systems " **Physical Review A** , 77(4): 042303
- [23] Mazhar Ali, ARP Rau, and Gernot Alber. (2010), " Quantum discord for two-qubit x states " **Physical Review A**, 81(4): 042105
- [24] Xiao-Ming Lu, Jian Ma, Zhengjun Xi, and Xiaoguang Wang . (2011), " Optimal measurements to access classical correlations of two-qubit states " **Physical Review A** , 83(1): 012327
- [25] Ugo Fano. (1983), " Pairs of two-level systems " **Reviews of Modern Physics** , 55(4):855

- [26] Qing Chen, Chengjie Zhang, Sixia Yu, XX Yi, and CH Oh. (2011), "Quantum discord of two-qubit x states" **Physical Review A**, 84(4): 042313
- [27] Borivoje Dakić, Yannick Ole Lipp, Xiaosong Ma, Martin Ringbauer, Sebastian Kropatschek, Stefanie Barz, Tomasz Paterek, Vlatko Vedral, Anton Zeilinger, Časlav Brukner, et al. (2012), "Quantum discord as resource for remote state preparation" **Nature Physics**, 8(9): 666–670
- [28] Mikio Nakahara and Tetsuo Ohmi. (2008), "**Quantum computing: from linear algebra to physical realizations**", CRC press
- [29] M Annabestani. (2010) "Reduced density matrix after long time walking", international conference on quantum information, Stockholm

Abstract

Quantum discord is a kind of correlation beyond the quantum entanglement. It is defined as the difference between mutual information and classical correlations.

Quantum discord can be nonzero even for the cases without any entanglement. So separable density matrices are not sufficient reason for zero discord and zero entanglement does not imply absence of the quantum correlations.

Considering the coins being used, asymptotic reduced density matrix of the quantum walks may be X-state or not. For example, quantum walk with the Bell-coin has reduced density matrix in the form of X-state, while for quantum walk with Grover and Hadamard is not, but doesn't have more independent variable.

In this work we consider different types of coins such as Bell, Grover and Hadamard and study all types of the quantum correlations for them. We also consider correlation between coin and the position as well as quantum discord between subsystems.

Key words: quantum discord, reduced density matrix, two dimensional coins



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics and Nuclear Engineering

M.Sc. Thesis in Particle Physics

**Study of quantum discord in reduced density
matrix of quantum walk with
two-dimensional coins**

By: Alireza Asrari

Supervisor

Mostafa Annabestani

january 2018