

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

موضوع

**محاسبه گشتاور دو قطبی مغناطیسی دوترون**

**بر اساس مدل کواریکی**

نگارش:

**مریم پیری**

استاد راهنما:

**پرفسور علی اکبر رجبی**

استاد مشاور:

**دکتر محمد رضا شجاعی**

بهمن ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

## تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و کرم بی کرانش اینجانب را نیز در بر گرفت تا به وسع توان خویش گامی کوچک در گستره علم و معرفت بردارم و میسر گشت تا از خرمن دانش و تجربه بزرگان و نیک اندیشان خوشه چینی کرده باشم.

اکنون به یاری خداوند متعال، این دوره پر خاطره از دوران تحصیلم را به پایان رسانده‌ام هر چند واژه-ها را یارای آن نیست که لطف و محبت و بزرگواریشان را که در تمام دوران زندگی ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب می‌دانم زحمات پدر و مادر مهربانم که هواره راه گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده اند ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی و باطنی خویش را از الطاف و مهربانی های آنها ابراز دارم. همچنین لازم می‌دارم که از زحمات فراوان استاد توانمندم جناب آقای پرفسور علی اکبر رجبی که با راهنمایی ها و نظرات ارزنده و صبر و حوصله فراوان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم، بی تردید انجام این پایان نامه بدون همکاری و راهنمایی ایشان هرگز ممکن نبود. از استاد بزرگوایم آقای دکتر محمد رضا شجاعی که مشاوره این پروژه را به عهده داشتند، کمال تشکر را دارم. همچنین از دوستان بزرگوایم که مایه دلگرمی این جانب بوده و محتمل زحمات زیادی شدند نهایت سپاسگذاری و امتنان را دارم.

## چکیده:

در فیزیک هسته‌ای، دوترون به صورت سیستم دو ذره‌ای در نظر گرفته شده است که از حل معادله‌ی شرودینگر برای این سیستم، ویژگی‌های استاتیکی آنها از جمله گشتاور دوقطبی مغناطیسی را بررسی نموده‌اند. اما در این کار، دوترون را که شامل کوارکهای  $u$  و  $d$  می‌باشد به عنوان یک سیستم نسبیتی در نظر می‌گیریم و روشی ریاضی برای حل معادله‌ی دیراک سیستم ارائه می‌کنیم. در این روش که با هارمونیک‌های فوق کروی سر و کار دارد فرض شده است که پتانسیل فوق مرکزی، فقط به شعاع فوق کره بستگی دارد. با استفاده از پتانسیل  $u(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$  و حل تحلیلی معادله‌ی دیراک، برای سیستم شش ذره‌ای دوترون، تابع موج و در نهایت گشتاور دوقطبی مغناطیسی را به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: دوترون، معادله‌ی دیراک، مختصات فوق کروی، مختصات ژاکوبی، گشتاور دوقطبی

مغناطیسی

## فهرست مطالب

ب	عنوان .....
ج	تقدیم اثر .....
د	تقدیر و تشکر .....
ه	چکیده .....
و	فهرست مطالب .....
ح	فهرست جداول .....
ط	فهرست شکل‌ها .....

### فصل اول (فیزیک ذرات بنیادی)

۳	۱-۱- باریونها .....
۳	۱-۲- کوارکها .....
۸	۱-۲-۱- مدل کوارکی .....
۱۰	۱-۲-۲- کوارکهای رنگی .....
۱۱	۱-۳- نیروهای چهارگانه .....
۱۲	۱-۳-۱- الکترودینامیک کوانتومی (QED) .....
۱۴	۱-۳-۲- کرومودینامیک کوانتومی (QCD) .....
۱۶	۱-۳-۳- برهم‌کنشهای ضعیف .....
۱۸	۱-۴- واکنشها و قوانین پایستگی .....

### فصل دوم (دوترون و برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون)

۲۶	۱-۲- مقدمه .....
۲۶	۲-۲- دوترون .....
۲۷	۱-۲-۲- خواص دوترون .....
۳۰	۲-۲-۲- برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون در دوترون .....
۳۱	۳-۲-۲- اثرهای اصل طرد پاولی .....
۳۵	۳-۲- خواص نیروی نوکلئون-نوکلئون .....
۳۸	۴-۲- نظریه‌ی مزونی .....
۴۰	۵-۲- نظریه‌ی یوکاوا .....

## فصل سوم (معادله‌ی دیراک)

- ۳-۱- معادله‌ی دیراک برای ذره‌ی آزاد ..... ۴۷
- ۳-۲- معادلات دیراک با پتانسیل‌های اسکالر و برداری ..... ۵۱
- ۳-۳- معادلات شعاعی دیراک ..... ۵۳

## فصل چهارم (محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون)

- ۴-۱- هماهنگ‌های فوق کروی ..... ۵۵
- ۴-۲- پتانسیل پیشنهادی ..... ۵۸
- ۴-۳- حل معادله‌ی دیراک با پتانسیل پیشنهادی ..... ۵۹
- ۴-۴- گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون ..... ۶۵
- ۴-۵- بحث و نتیجه‌گیری ..... ۶۸
- پیوست ..... ۶۹
- منابع ..... ۷۳

## فهرست جداول

- ۱-۱-ده گانه‌ی باریون ..... ۸
- ۱-۲-نه گانه‌ی مزون ..... ۹
- ۱-۴-محاسبه‌ی گشتاور دو قطبی مغناطیسی دوترون به ازای مقادیر مختلف  $a_1$ ،  $b_1$ ،  $m$  ..... ۶۷



## فهرست شکل‌ها

- ۱-۱- هشت‌گانه‌ی باریون و مزون ..... ۵
- ۱-۲- ده‌گانه‌ی باریون ..... ۶
- ۱-۳- کوارک‌ها و پاد کوارک‌ها ..... ۷
- ۱-۴- گره بنیادی برهم‌کنش الکترومغناطیسی ..... ۱۲
- ۱-۵- نمودار فاینمن برهم‌کنش دو الکترون یا یک الکترون و یک پوزیترون ..... ۱۳
- ۱-۶- نمودار فاینمن برهم‌کنش دو الکترون با چهار گره ..... ۱۴
- ۱-۷- گره بنیادی برهم‌کنش قوی ..... ۱۴
- ۱-۸- نمودار فاینمن برهم‌کنش دو کوارک ..... ۱۵
- ۱-۹- نمودار فاینمن برهم‌کنش گلوئون‌ها ..... ۱۵
- ۱-۱۰- گره باردار بنیادی برهم‌کنش ضعیف ..... ۱۶
- ۱-۱۱- نمودار فاینمن برهم‌کنش  $\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu$  ..... ۱۶
- ۱-۱۲- گره خنثی بنیادی برهم‌کنش ضعیف ..... ۱۷
- ۱-۱۳- نمودار فاینمن واکنش  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$  ..... ۱۷
- ۱-۱۴- نمودار فاینمن برهم‌کنش دو الکترون از دو طریق ضعیف و الکترومغناطیسی ..... ۱۸
- ۱-۲- نمودار فاینمن برهم‌کنش نوکلئون‌ها بر اساس مبادله‌ی مزون‌ها

## مقدمه

با استفاده از مدل کواری می‌توان به بررسی ویژگی‌های هادرونها پرداخت، در واقع مدل کواری نقش بسیار مهمی در این زمینه دارد. ما در این پایان‌نامه، گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون را براساس این مدل بررسی خواهیم کرد.

فیزیک ذرات بنیادی به بررسی این پرسش می‌پردازد که ماده از چه ساخته شده است؟ آن هم در بنیادی‌ترین سطح، یعنی کوچکترین مقیاس اندازه‌گیری. این یک واقعیت شایان توجه است که ماده در سطح زیر اتمی از ذرات بسیار کوچک تشکیل شده بنابراین در فصل اول به معرفی ذرات تشکیل دهنده دوترون یعنی کواریها و نیز باریونها پرداخته و علت پیدایش مدل کواری را شرح می‌دهیم. همچنین در این فصل به این مطلب خواهیم پرداخت که اندرکنش این ذرات با یکدیگر چگونه است و در ادامه به قوانین حاکم بر برهم‌کنش‌هایی که این ذرات در آنها شرکت دارند می‌پردازیم.

در فصل دوم به معرفی دوترون و خواص آن خواهیم پرداخت و از آنجائیکه دوترون نقش بسیار مهمی در مطالعه برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون دارد خواص این نیرو را بیان می‌کنیم و سرانجام به نظریه‌های مربوط به نیروی نوکلئون-نوکلئون یعنی نظریه‌های مزونی و یوکاوا خواهیم پرداخت.

در فصل سوم به معرفی معادله کلاین-گوردون خواهیم پرداخت و سپس به معادله دیراک برای ذره آزاد و نیز در حضور پتانسیل‌های مرکزی اسکالر و برداری می‌پردازیم. و معادلات شعاعی دیراک را بدست می‌آوریم.

در فصل چهارم، در ابتدا به هماهنگ‌های فوق‌کروی پرداخته سپس دوترون را به عنوان یک سیستم شش ذره‌ای در نظر گرفته و به معرفی پتانسیل‌های پیشنهادی برای این سیستم خواهیم پرداخت و معادله دیراک را در حضور این پتانسیل‌ها حل کرده و تابع موج دوترون را بدست می‌آوریم. به کمک تابع موج بدست آمده گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون را بدست می‌آوریم و مقدار بدست آمده را با مقدار تجربی مقایسه خواهیم کرد.

## فصل اول

# فیزیک ذرات بنیادی

- باریونها
- کوارکها
- نیروهای چهارگانه
- واکنشها و قوانین پایستگی

## ۱-۱-باریونها<sup>۱</sup>

دسته‌ای از هادرونها که اسپین نیمه درست دارند، باریون نامیده می‌شوند. پروتون (p)، نوترون (n)، ذرات  $\Lambda^0$ ،  $\Sigma^+$ ،  $\Sigma^0$ ،  $\Sigma^-$ ،  $\Delta^{++}$ ،  $\Delta^+$ ،  $\Delta^0$ ،  $\Delta^-$  و ... پاد ذرات آنها، خانواده‌ی باریونها را تشکیل می‌دهند. سبکترین باریون، پروتون است که جرم آن  $938Mev/c^2$  و بار آن  $+e$  است. به طور کلی هادرونها ذرات بنیادی واقعی نیستند بلکه از ذرات بنیادی‌تر به نام کوارک ساخته شده‌اند.

## ۱-۲-کوارکها<sup>۲</sup>

در قرون وسطی مردم براین عقیده بودند که جهان از چهار عنصر هوا، خاک، آتش و آب تشکیل شده است. در قرن هفدهم، با پیشرفت علوم به خصوص علم شیمی، دانشمندان دریافتند که بسیاری از اجسام، ترکیباتی از چند عنصر اصلی، مانند سدیم، کالر، اکسیژن و غیره‌اند. دالتون پیشنهاد کرد که هر عنصری متشکل از اتمهاست. اتمهای سدیم، سدیم را و اتمهای کالر، کالر را می‌سازند و اتمهای سدیم و کالر با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا کلروسدیم (نمک معمولی) را به وجود آورند. در اوائل قرن گذشته، دانشمندان انواع گوناگون اتمها را می‌شناختند و امروزه در حدود ۱۰۰ عنصر، از هیدروژن، هلیوم، لیتیم گرفته تا اورانیوم و غیره را جدا ساخته‌اند.

بنابراین اگر در قرن نوزدهم، نام و تعداد اجزا ساختمانی بنیادی را می‌پرسیدید، در جواب گفته می‌شد که اتمها هستند و فهرستی طولانی از آنها در اختیارتان گذاشته می‌شد. از اینکه طبیعت، این همه اجزای ساختمانی بنیادی را به کار گرفته است، ممکن بود احساس ناراحتی کنید. احتمالاً شما نیز مانند دمیتری مندلیف ممکن بود از روی بصیرت دریابید که برخی از عناصر خواص شیمیایی و فیزیکی بسیار مشابهی دارند و کاملاً مستقل از یکدیگر به نظر نمی‌آیند. به علاوه اگر عناصر را به

---

<sup>1</sup> Baryons

<sup>2</sup> Quarks

ترتیب افزایش جرم فهرست می‌کردید، متوجه می‌شدید که خواص مشابه به طور تناوبی ظاهر می‌گردند این موضوع بعدها با کشف اینکه اتمها برآستی بنیادی نیستند، بلکه خود از الکترونیایی که به دور هسته می‌گردند ساخته شده‌اند، توضیح داده شد.

سپس دانشمندان پی بردند که هسته‌ها نیز از پروتونها و نوترونهایی ساخته شده‌اند که نیرویی به نام نیروی قوی آنها را به یکدیگر می‌پیوندد. بار الکتریکی پروتونها مثبت است و الکترونها بار منفی دارند و نوترونها بدون بار هستند. تنها تفاوت میان یک اتم و اتم دیگر در تعداد الکترونها و پروتونهای آنهاست. هیدروژن یک پروتون و یک الکترون دارد، اکسیژن دارای هشت الکترون است که به دور هشت پروتون می‌گردند و غیره. در سالهای دهه ۱۹۳۰، الکترون، پروتون و نوترون را ذرات بنیادی می‌دانستند.

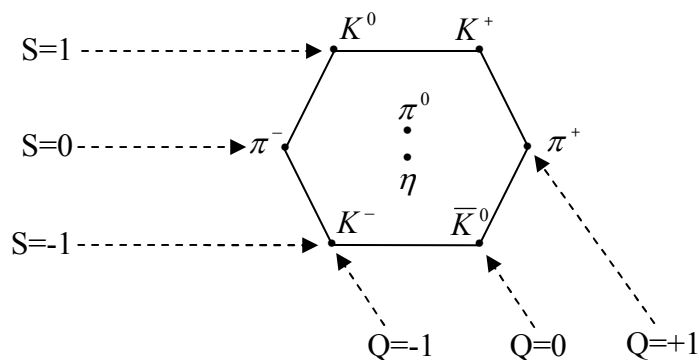
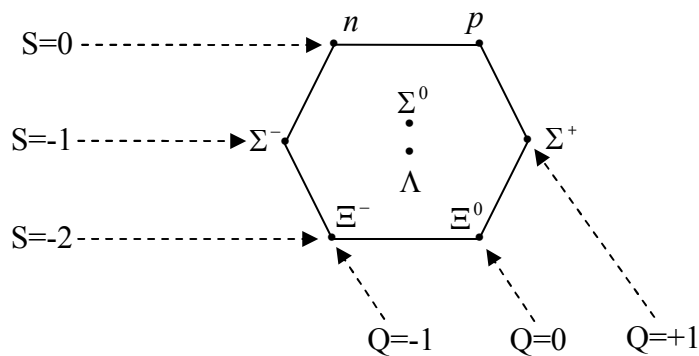
دیری نگذشت که تلاشی بتا کشف شد. دانشمندان دریافتند که تلاشی نوترون، ذره‌ی دیگری را نیز، همراه با الکترون ایجاد می‌کند. این ذره را نوترینو نام نهادند. همانطور که نوترون ظاهراً برادر بی‌بار پروتون است، نوترینو نیز همچون برادر بی‌بار الکترون به نظر می‌رسد.

بنابراین در سالهای دهه‌ی ۱۹۳۰ تصویر نسبتاً متقارنی از ذرات بنیادی پدید آمده بود. مجموعاً چهار ذره‌ی بنیادی در دو خانواده‌ی دوتایی وجود داشت. الکترون و نوترینو که جفتی به نام لپتونها را تشکیل می‌دادند و پروتون و نوترون که جفتی به نام هادرونها را به وجود می‌آوردند. از سال ۱۹۴۵ تا ۱۹۷۴ فیزیکدانان بیش از ۱۰۰ نوع ذره یافتند که از کنش متقابل قوی متاثر می‌شدند و هادرون نامیده می‌شدند، درحالیکه فقط دو نمونه‌ی جدید لپتون یعنی میون و نوترینوی میون را کشف کردند. پیدا کردن بیش از ۱۰۰ هادرون، نگران کننده بود. در نتیجه فیزیکدانان، توجه خود را بر روی نیروی قوی و هادرونها متمرکز کردند تا بفهمند چرا تعداد هادرونها اینقدر زیاد است. در جریان مطالعه‌ی نیروی قوی، الگوهای منظم در میان هادرونها پدیدار شد که به راه هشت‌گانه معروفند.

مورای گلن که مندلیف ذرات بنیادی بود اصطلاح راه هشت‌گانه‌ی خود را در سال ۱۹۶۱ ارائه

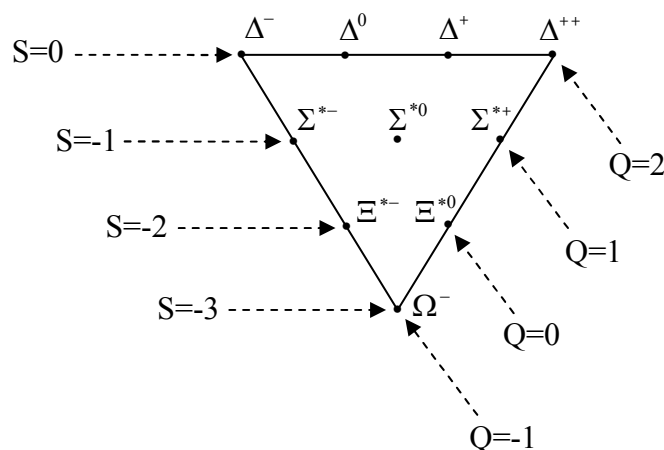
کرد. در راه هشت‌گانه، باریون‌ها و مزون‌ها بسته به بار الکتریکی و شگفتی خود به شکل‌های هندسی مرتب می‌شوند [2].

در شکل (۱-۱) هشت باریون سبکتر در یک آرایه شش ضلعی قرار گرفته و دو ذره در مرکز واقع می‌شود. این گروه را هشت‌تایی باریونی می‌نامند. توجه داشته باشید که ذراتی که دارای بار مشابه‌اند در طول خط قطری با شیب به سمت پایین قرار می‌گیرند: برای پروتون و  $\Sigma^+$  با  $Q=+1$  (در واحد بار پروتون) و برای نوترون،  $\Lambda$ ،  $\Sigma^0$  و  $\Xi^0$  با  $Q=0$  و برای  $\Sigma^-$  و  $\Xi^-$  با  $Q=-1$  می‌باشد. خطوط افقی مربوط به ذراتی است که دارای شگفتی برابر با  $S=0$  برای پروتون و نوترون،  $S=-1$  برای خط وسط و  $S=-2$  برای دو  $\Xi$  ها.



شکل (۱-۱) هشت‌گانه‌ی باریون و مزون [2]

هشت مزون سبکتر، یک شش ضلعی مشابه را پر می‌کنند و هشت تایی مزونی را تشکیل می‌دهند. دوباره خطوط قطری مورب، بار الکتریکی و خطوط افقی، شگفتی را مشخص می‌کند. اما این بار، خط بالایی  $S=1$  را دارد، خط میانی  $S=0$  و خط پایینی  $S=-1$ . شش ضلعی‌ها تنها شکل‌های مجاز برای راه هشت‌گانه نبودند، برای مثال، یک آرایه‌ی مثلثی وجود داشت که ۱۰ باریون سنگین‌تر را در بر می‌گرفت - یعنی ده‌گانه‌ی باریون (شکل (۲-۱)).

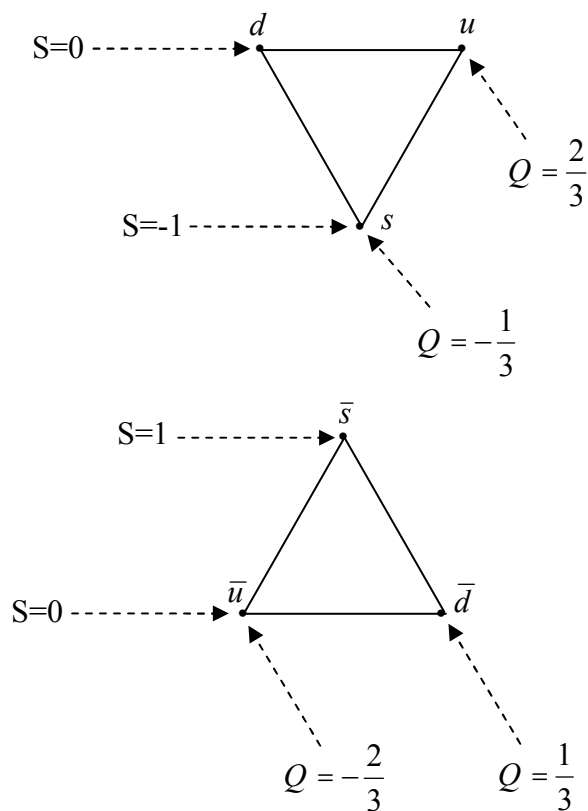


شکل (۲-۱) ده‌گانه‌ی باریون [2]

گلمن هنگامی که این ذرات را در ده‌گانه جا می‌داد، چیز جالبی روی داد ۹ عدد از ذرات با آزمایش شناخته شده بودند، ولی در آن زمان ذره‌ی دهم که در پایین واقع می‌شد و بار آن  $-1$  و شگفتی آن  $-3$  بود، گم شده بود. هیچ ذره‌ای با این ویژگی‌ها در آزمایشگاه شناخته نشده بود. گلمن با شجاعت پیش‌بینی کرده بود که چنین ذره‌ای پیدا شدنی است و به آزمایشگران گفته بود که دقیقاً آنرا چگونه تولید کنند از این گذشته، او جرم و عمر آن را محاسبه کرده بود و در سال ۱۹۶۴ ذره‌ی یاد شده، امگا منفی، دقیقاً به همان صورت که گلمن پیش‌بینی کرده بود کشف شد.

از هنگام کشف امگا منفی، هیچ کس به طور جدی درباره‌ی درست بودن راه هشت‌گانه شک نکرده است. در ده سال پس از آن، هر هادرون جدید جایگاهی در یکی از ابرچندگانه‌های راه هشت‌گانه پیدا کرد.

افزون بر هشت و ده تایی باریون، و غیره، یک هشت و ده تایی پاد باریون، و غیره نیز با بار و شگفتی مخالف وجود دارد. اما در مورد مزون‌ها، پادذرات در همان ابر چندگانه قرار دارند. اما خود راه هشت-گانه این پرسش را بر می‌انگیزد: چرا هادرون‌ها در این الگوهای شگفت‌آور جای می‌گیرند؟ درک راه هشت‌گانه در سال ۱۹۶۴ بدست آمد. گلמן و شوایگ مستقلاً پیشنهاد کردند که تمام هادرون‌ها در واقع از ذرات بنیادی‌تر به نام کوارک تشکیل شده‌اند. کوارک‌ها بر سه نوع (یا سه طعم) هستند که یک الگوی راه هشت‌گانه‌ی مثلثی را تشکیل می‌دهند که در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.



شکل (۳-۱) کوارک‌ها و پادکوارک‌ها [2]

کوارک  $u$  دارای بار  $\frac{2}{3}$  و شگفتی صفر است، کوارک  $d$  دارای بار  $-\frac{1}{3}$  و شگفتی صفر است و کوارک  $s$

دارای بار  $-\frac{1}{3}$  و شگفتی  $-1$  است. به ازای هر کوارک ( $q$ ) یک پاد کوارک ( $\bar{q}$ ) با بار مخالف و شگفتی

مخالف وجود دارد.



## ۱-۲-۱-مدل کوارکی

بنابر مدل کوارکی، هر باریون از سه کوارک (و هر پاد باریون از سه پاد کوارک) تشکیل شده است و هر مزون از یک کوارک و یک پاد کوارک تشکیل شده است. بنابراین برای نمونه، می‌توان ده‌تایی باریون و هشت‌تایی مزون را ساخت. کافی است ترکیب‌های سه کوارک یا زوج کوارک-پاد کوارک را فهرست کرده و بارها و شگفتیهای آنها را با هم جمع کنیم.

جدول (۱-۱) ده‌گانه‌ی باریون [2]

$qqq$	Q	S	Baryon
$uuu$	2	0	$\Delta^{++}$
$uud$	1	0	$\Delta^+$
$udd$	0	0	$\Delta^0$
$ddd$	-1	0	$\Delta^-$
$uus$	1	-1	$\Sigma^{*+}$
$uds$	0	-1	$\Sigma^{*0}$
$dds$	-1	-1	$\Sigma^{*-}$
$uus$	0	-1	$\Xi^{*0}$
$dss$	-1	-2	$\Xi^{*-}$
$sss$	-1	-3	$\Omega^-$

در جدول (۱-۱) ۱۰ ترکیب از ۳ کوارک وجود دارد. برای مثال، سه  $u$  هر یک در  $Q = \frac{2}{3}$  بار کل  $+2$  را تشکیل می‌دهند و شگفتی آنها صفر است. این ذره  $\Delta^{++}$  است. همین‌طور تا پایین جدول ادامه می‌دهیم و تمام اعضای ده‌تایی را پیدا می‌کنیم. (آخرین آنها  $\Omega^-$  می‌باشد که از سه کوارک  $s$  تشکیل شده است).

شمارش مشابهی از ترکیبهای کوارک-پاد کوارک، جدول (۲-۱) را تشکیل می‌دهد.

جدول (۲-۱) نه‌گانه‌ی مزون [2]

$q\bar{q}$	Q	S	Meson
$u\bar{u}$	0	0	$\pi^0$
$u\bar{d}$	1	0	$\pi^+$
$d\bar{u}$	-1	0	$\pi^-$
$d\bar{d}$	0	0	$\eta$
$u\bar{s}$	1	1	$K^+$
$d\bar{s}$	0	1	$K^0$
$s\bar{u}$	-1	-1	$K^-$
$s\bar{d}$	0	-1	$\bar{K}^0$
$s\bar{s}$	0	0	??

در اینجا نه ترکیب و فقط هشت ذره در هشت‌تایی مزون وجود دارد. مدل کوارک مستلزم آن است که یک مزون سوم (علاوه بر  $\pi^0$  و  $\eta$ ) با  $S=0$  و  $Q=0$  وجود داشته باشد. معلوم شد که این ذره در آزمایش پیدا شده و  $\eta'$  است. بنابر مدل کوارک، این، همراه با هشت مزون دیگر، یک نه‌تایی مزون را تشکیل می‌دهد. پاد مزون‌ها خود به خود در همان ابر چندگانه جای می‌گیرند که مزون‌ها هستند. در اینجا، دیگر صحبتی از هشت‌تایی باریون نکرده‌ام. در واقع تمام ابر چندگانه‌ها به صورت طبیعی از مدل کوارک نتیجه می‌شوند.

## ۱-۲-۲- کوارکهای رنگی

کوارکها اسپین  $\frac{1}{2}$  دارند، بنابراین از اصل طرد پائولی طبیعت می‌کنند. به عبارت دیگر هیچ دو کوارک یکسانی را نمی‌توان در حالت کوانتومی یکسان یافت. سه باریونی که در گوشه‌های نمودار مثلثی شکل (۱-۲) هستند را در نظر بگیرید. پیکر بندی کوارکی آنها به صورت  $uuu, ddd, sss$  است. در اینجا به نظر می‌رسد که سیستمهایی متشکل از سه کوارک یکسان که در یک تراز فرض شده‌اند داریم که در ظاهر با اصل طرد پائولی جور در نمی‌آید. در سال ۱۹۶۴، گرینبرگ راهی برای حل این معما یافت. وی می‌گفت که کوارکها نه تنها سه طعم ( $s, d, u$ ) دارند بلکه هر طعم نیز به سه رنگ گوناگون (قرمز، سبز و آبی) ظاهر می‌شود. برای ساختن یک باریون، کافی است از هر رنگ یک کوارک برداریم. در این صورت، سه  $u$  در  $\Delta^{++}$  دیگر یکسان نیستند (یکی قرمز است، یکی سبز و دیگری آبی) بنابراین این اشکال (نقض اصل طرد پائولی) برطرف می‌شود. بسیاری از افراد فرضیه‌ی رنگ را آخرین چاره‌ی مدل کوارک می‌دانستند. قرمزی، آبی بودن و سبز بودن، سه اسم است و برای نامیدن سه ویژگی به کار رفته که کوارکها افزون بر بار الکتریکی و شگفتی، آنها را دارا می‌باشند. کوارک قرمز، یک واحد قرمزی، هیچ واحد آبی بودن و هیچ واحد سبز بودن دارد و غیره. می‌شد نام‌های دیگری بر این ویژگی‌ها گذاشت، ولی نتیجه، تفاوتی نمی‌کرد تمام ذرات طبیعی بی رنگ هستند. منظورم از بی-رنگی این است که یا مقدار کل هر رنگ صفر است یا هر سه رنگ به مقدار مساوی موجودند.

به همین دلیل است که نمی‌توان یک ذره را از دو کوارک یا چهار کوارک ساخت و دلیل اینکه کوارکها در طبیعت به صورت جداگانه ظاهر نمی‌شوند، همین است. تنها ترکیبات بی‌رنگی که می‌توانید تشکیل دهید،  $q\bar{q}$  (مزون‌ها)،  $qqq$  (باریون‌ها) و  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$  (پاد باریون‌ها) هستند. (البته می‌توانستید شش کوارک داشته باشید ولی آنگاه آنرا به عنوان حالت مقید دو باریون در نظر می‌گرفتیم).

### ۱-۳- نیروهای چهارگانه

همه‌ی ما می‌دانیم که چهار نیروی اصلی در طبیعت وجود دارد قوی، الکترومغناطیس، ضعیف و گرانش.

به هر یک از این نیروها یک تئوری فیزیکی تعلق می‌گیرد. البته تئوری کلاسیکی غیر نسبیتی گرانش، قانون‌های جاذبه‌ی نیوتون است. نتیجه‌ی تعمیم نسبیتی آن، تئوری نسبیت عام انشتین است. برای دستیابی به یک تئوری کوانتومی گرانش، باید هنوز کار کرد، ولی فعلاً بیشتر مردم فرض می‌کنند که گرانش چون خیلی ضعیف است، بنابراین نقش مهمی در فیزیک ذرات بنیادی ندارد.

تئوری فیزیکی که نیروهای الکترومغناطیس را توصیف می‌کند، الکترودینامیک نامیده می‌شود. فرمول کلاسیک الکترودینامیک صدها سال پیش بوسیله‌ی ماکسول کشف شد. تئوری ماکسول و تئوری نسبیت خاص با هم سازگاری داشتند. تئوری کوانتومی الکترومغناطیس در سال ۱۹۴۰ بوسیله‌ی توماناگا و فاینمن و شوینگر تکمیل شد.

نیروهای ضعیفی که نحوه‌ی واپاشی هسته‌ای بتا را توصیف می‌کنند برای فیزیک کلاسیک امری ناشناخته محسوب می‌شدند و توصیف تئوریک آنها از همان ابتدا فرمول کوانتوم نسبیتی را ارائه داد. نخستین تئوری نیروهای ضعیف در سال ۱۹۳۳ بوسیله‌ی فرمی ارائه شد این تئوری در دهه‌ی ۵۰ بوسیله‌ی لی<sup>۱</sup> و یانگ<sup>۲</sup>، فاینمن<sup>۳</sup> و گلن<sup>۴</sup> و دیگران مورد بازنگری و اصلاح قرار گرفت و در دهه‌ی ۶۰ بوسیله‌ی گلاشو، واینبرگ و سلام بصورت کنونی خود ارائه شد. در برخی موردها از تئوری‌های واکنش ضعیف به عنوان دینامیک طعم یاد می‌شود که آنرا تئوری گلاشو واینبرگ و سلام (GWS) نیز می‌نامند. مدل GWS واکنش‌های ضعیف و الکترومغناطیس را به عنوان جلوه‌های متفاوت یک نیروی واحد الکتروضعیف به شمار می‌آورد و بدین ترتیب چهار نیروی یاد شده به سه نیرو کاهش می‌یابد.

هر کدام از این نیروها ذرات واسط را بین خود متبادل می‌کنند واسطه‌ی نیروی گرانش گراویتون<sup>۵</sup> نامیده می‌شود و نیروهای الکترومغناطیس با کمک فوتون‌ها، نیروهای قوی با کمک گلوئون و نیروهای ضعیف با ذرات واسط  $Z^0$  و  $W^\pm$  منتقل می‌شوند. این واسطه‌ها نیروی موجود بین یک کوارک و لپتون

---

<sup>1</sup> Lee

<sup>2</sup> Yang

<sup>3</sup> Feynman

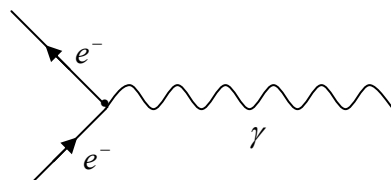
<sup>4</sup> Gellman

<sup>5</sup> Gravition

را جابه‌جا می‌کنند. در این فصل به طور خلاصه نشان می‌دهیم که چگونه هر یک از این نیروهای مربوطه بین هر یک از کوارک‌ها و لپتون‌ها اثر می‌کنند.

### ۱-۳-۱- الکترودینامیک کوانتومی (QED)<sup>۱</sup>

الکترودینامیک کوانتومی کهن‌ترین و ساده‌ترین تئوری در زمینه‌ی دینامیک است و سایر تئوری‌ها نیز براساس همین تئوری طرح‌ریزی شده‌اند. فرایند اصلی برهم‌کنش الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

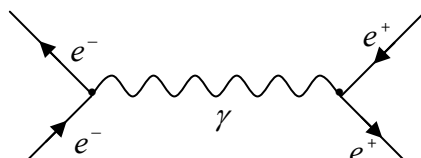
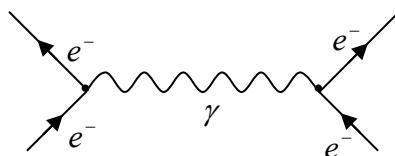


شکل (۴-۱) گره بنیادی برهم‌کنش الکترومغناطیسی [2]

و این شکل بیان می‌کند: ذره‌ی باردار  $e^-$  وارد می‌شود و فوتون را جذب یا دفع می‌کند و سپس خارج می‌شود. در این مورد، ذره‌ی باردار را یک الکترون فرض کرده‌ایم که می‌تواند به نوبه‌ی خود، یک کوارک یا یکی از انواع لپتون‌ها به غیر از نوترینو باشد (نوترینو خنثی می‌باشد و بدون هرگونه نیروی الکترومغناطیسی است).

برای توضیح در مورد مراحل پیچیده‌تر، ما دو یا چند گره اولیه را به هم وصل می‌کنیم به عنوان مثال شکل (۵-۱) را در نظر بگیرید.

<sup>۱</sup> Quantum Electrodynamics

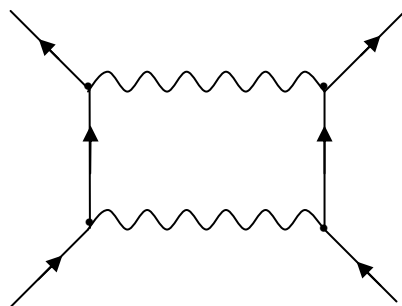


شکل (۵-۱) نمودار فاینمن برهم کنش دو الکترون یا یک الکترون و یک پوزیترون [2]

در شکل بالایی، دو الکترون وارد می‌شوند و یک فوتون از بین آنها عبور می‌کند و سپس هر دو خارج می‌شوند که برهم کنش ما بین دو الکترون را نشان می‌دهد و در تئوری کلاسیک، آنرا دافعه‌ی کولنی در بارهای همنام می‌گوئیم. در QED، این فرایند، پراکندگی مولر نام دارد.

خط حاوی ذره در زمان به سمت عقب حرکت می‌کند، ولی در مورد پاد ذرات این خط، به سمت جلو حرکت می‌کند. بنابراین، در این مرحله (که در شکل پایینی نشان داده شده است)، یک الکترون و یک پوزیترون خنثی می‌شوند تا یک فوتون را تشکیل دهند و این فوتون نیز به نوبه‌ی خود یک جفت الکترون و پوزیترون دیگر تولید می‌کند. این پدیده، بر همکنش بین دو بار گوناگون را نمایش می‌دهد. و در تئوری کلاسیک، آنرا جاذبه‌ی کولنی در بارهای ناهمنام می‌گوئیم در QED این فرایند، پراکندگی باهاها نامیده می‌شود.

اگر ما گره‌های بیشتری را وارد کنیم، امکان تشکیل نمودارهای گوناگون به سرعت افزایش می‌یابد به عنوان مثال، با کاربرد ۴ راس، ۴ شکل بدست می‌آید که یک مورد از آن در شکل (۶-۱) نشان داده شده است که رانش بارهای همنام را نشان می‌دهد.

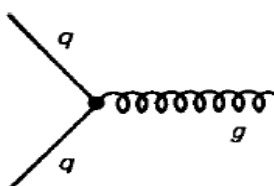


شکل (۶-۱) نمودار فاینمن برهم کنش دو الکترون با چهار گره [2]

می توان به جای الکترون و پوزیترون، کوارکها و پادکوارکها را در نظر گرفت زیرا تمام کوارکها و پادکوارکها دارای بار هستند.

### ۱-۳-۲- کرومودینامیک کوانتومی (QCD)<sup>۱</sup>

رنگهای کرومودینامیک، نقش بار الکتریکی را بازی می کنند و فرایند اصلی آن بصورت  $q \rightarrow q + g$  بیان می شود.

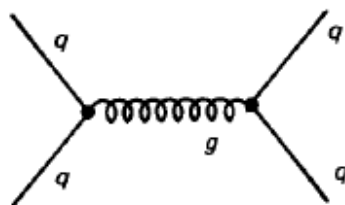


شکل (۷-۱) گره بنیادی برهم کنش قوی [2]

و از آنجایی که لپتونها نمی توانند رنگها را با خود حمل کنند، پس در برهم کنشهای قوی شرکت نمی کنند. مانند قبل، برای نشان دادن مراحل پیچیده تر ما دو یا چند گره را با هم ترکیب می کنیم به

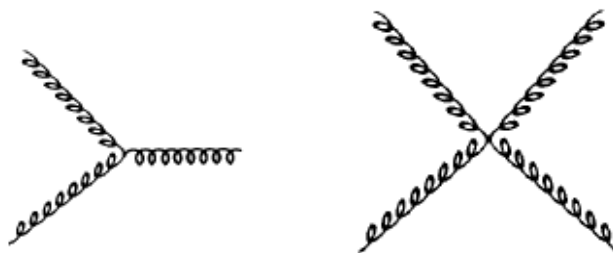
<sup>۱</sup> Quantum Chromodynamics

عنوان مثال نیروی بین دو کوارک، در پایین‌ترین مرتبه در نمودار (۸-۱) نمایش داده شده و ما می‌گوییم که نیروی بین دو کوارک به وسیله‌ی تبادل گلوئون<sup>۱</sup>، تامین می‌شود.



شکل (۸-۱) نمودار فاینمن برهم‌کنش دو کوارک [2]

در پدیده‌ی  $q \rightarrow q + g$  رنگ کوارک ممکن است تغییر یابد که گلوئون این تفاوت رنگ را برطرف می‌کند ولی طعم آن ثابت است. از آنجایی که گلوئون به خودی خود حامل رنگ است (برخلاف فوتون که از نظر الکتریکی خنثی است)، پس با گلوئون‌های دیگر برهم‌کنش می‌کند و بنابراین، افزون بر گره‌های کوارک-گلوئون اولیه گره‌های گلوئون-گلوئون اولیه هم وجود دارند که در حقیقت دو نوع گره داریم. ۱- گره‌های سه گلوئونی ۲- گره‌های چهار گلوئونی



شکل (۹-۱) نمودار فاینمن برهم‌کنش گلوئونها [2]

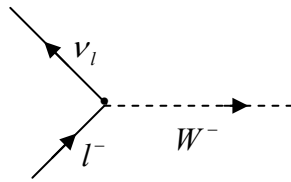
### ۳-۳-۱- برهم‌کنش‌های ضعیف

<sup>۱</sup> Gloun



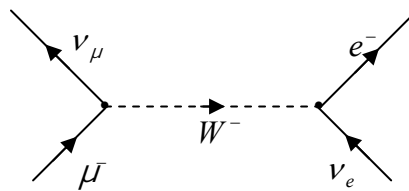
نام خاصی برای "مواد اولیه" که نیروی ضعیف را تولید می‌کنند وجود ندارد، آنهم به صورتی که بار الکتریکی، نیروی الکترومغناطیسی و رنگ، نیروی قوی را ایجاد می‌کند. برخی از مردم آن را "بار ضعیف" می‌نامند. هر واژه‌ای که استفاده کنید، تمامی کوارک‌ها و لپتون‌ها دارای این بار هستند. دو نوع برهم‌کنش ضعیف وجود دارد: دارای بار (با واسطه‌ی  $W^\pm$ ) و خنثی (با واسطه‌ی  $Z^0$ ).

در مورد لپتون‌ها گره باردار بنیادی به شکل زیر است:



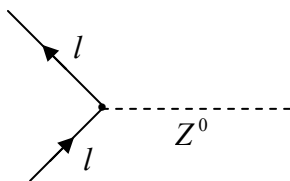
شکل (۱۰-۱) گره باردار بنیادی برهم‌کنش ضعیف [2]

یک لپتون منفی (که شاید  $e^-$ ,  $\mu^-$  یا  $\tau^-$  باشد) به ذره‌ی نوترینوی مربوطه‌اش، تبدیل می‌شود با تابش  $W^-$  (یا جذب  $W^+$ ). همانند همیشه، گره‌های اولیه را به یکدیگر پیوند می‌زنند تا واکنش‌های پیچیده‌تری تولید کنند. به عنوان مثال، مرحله‌ی  $\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu$  بوسیله‌ی دیاگرام زیر ارائه می‌شود.



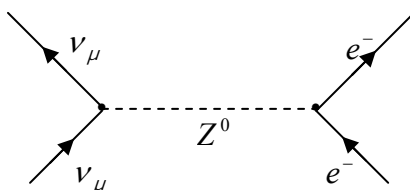
شکل (۱۱-۱) نمودار فاینمن واکنش  $\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu$  [2]

گره خنثی بنیادی عبارت است از:



شکل (۱۲-۱) گره خنثی بنیادی برهم کنش ضعیف [2]

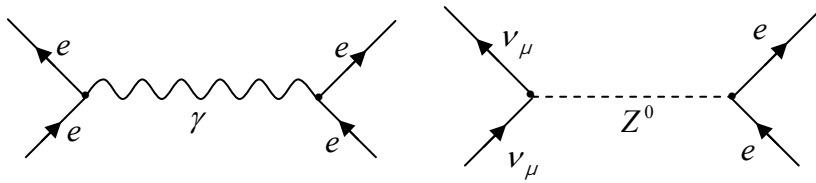
در این مورد،  $l$  می تواند هر لپتونی (از جمله ذره های نوترینو) باشد.  $Z^0$  واسطه ی چنین روندهایی همچون پراکندگی نوترینو-الکترون می باشد ( $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ ).



شکل (۱۳-۱) نمودار فاینمن واکنش  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$  [2]

در مورد کوارکها قانون های همانندی اعمال می شوند که دیگر وارد جزئیات آن نخواهیم شد.

اگر چه فرایندهای ضعیف باردار از آغاز مشخص شده بودند (وایشی بتا، نیز خود یک فرایند باردار است)، احتمال تئوری فرایندهای ضعیف خنثی تا سال ۱۹۵۸ مد نظر نبوده است. دلیل اینکه فرایند ضعیف خنثی دیر کشف شد، دو جنبه دارد: (۱) هیچ کس در پی یافتن آنها نبود و (۲) آنها تحت تاثیر پوشش شدیدتر الکترومغناطیس قرار می گیرند به عنوان مثال،  $Z^0$  می تواند میان دو الکترون مبادله شود. اما فوتونها نیز به همین ترتیب می توانند مبادله شوند.



شکل (۱۴-۱) نمودار فاینمن برهم کنش دو الکترون از دو طریق ضعیف و الکترومغناطیس [2]

## ۴-۱- واکنشها و قوانین پایستگی

ذرات بنیادی از طریق واپاشی و یا واکنش با دیگر ذرات، ذرات دیگری تولید می‌کنند. برهم‌کنشهای آنها را با استفاده از تعدادی قوانین پایستگی می‌توان تحلیل و تعبیر کرد. بعضی از این قوانین، ظاهراً مطلق هستند و در تمام موارد و در تمام فرایندها رعایت می‌شوند و بعضی دیگر در پاره‌ای از فرایندها برقرارند و در پاره‌ای دیگر برقرار نیستند. در زیر به تعدادی از این قوانین اشاره کرده‌ایم.

### ۱- انرژی و تکانه

تمام واپاشیها و واکنشها از پایستگی انرژی و تکانه‌ی کل نسبیتی تبعیت می‌کنند. مثلاً در یک فرایند واپاشی به یک حالت نهایی دو ذره‌ای به صورت  $A \rightarrow B + C$ ، قوانین پایستگی انرژی و تکانه در چارچوب در حال سکون A را به این صورت می‌نویسیم:

$$p_B = p_C \quad (1-1)$$

$$E_i = E_B + E_C \quad (2-1)$$

که  $E_B + E_C$  انرژی سیستم پس از واپاشی و  $E_i$  انرژی سیستم قبل از واپاشی است و برابر است با:

$$E_i = m_A c^2 \quad (3-1)$$

که  $m_A$  جرم در حال سکون A است. انرژی کل نسبیتی ذرات B و C برابر است با:

$$E = T + m_0 c^2 \quad (۴-۱)$$

که T انرژی جنبشی و  $m_0$  جرم در حال سکون ذرات B و C است.

### ۲- تکانه‌ی زاویه‌ای کل

در تمام واکنشها و واکنشها، تکانه‌ی زاویه‌ای کل نیز پایسته می‌ماند. مثلا در مورد واکنش دو ذره‌ای  $A \rightarrow B + C$  با فرض آنکه  $S_C, S_B$  نمایانگر اسپینهای ذاتی ذرات B و C و نیز  $j_i$  نمایانگر تکانه‌ی زاویه‌ای کل قبل از واکنش باشد داریم:

$$|\vec{j}_i| = |\vec{S}_B + \vec{S}_C + \vec{L}_{B,C}| \quad (۵-۱)$$

که در آن  $L_{B,C}$  تکانه‌ی زاویه‌ای مداری نسبی مجموعه‌ی BC است.

### ۳- پاریتته

عملگر پاریتته  $\pi$  بیانگر رفتار تابع فضایی ذره تحت تبدیل  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  است.

$$\pi\psi(r) \rightarrow \psi(-r) = \psi(r) \quad \text{پاریتته زوج} \quad (۶-۱)$$

$$\pi\psi(r) \rightarrow \psi(-r) = -\psi(r) \quad \text{پاریتته فرد}$$

چون با کاربرد دوباره‌ی عملگر پاریتته باید به تابع موج اولیه برگردیم، پس  $\pi^2 = 1$  و  $\pi = \pm 1$  است.

آشناترین کاربرد این نتیجه در مورد حالات تکانه‌ی زاویه‌ای مداری با پاریتته‌ی  $(-1)^l$  است. ذره دارای یک پاریتته‌ی ذاتی هم می‌باشد، در آن صورت پاریتته‌ی کل برابر حاصلضرب پاریتته‌ی فضایی نسبی و پاریتته‌ی ذاتی آن خواهد بود.

پاریتته در تمام برهم‌کنشهای قوی یا الکترومغناطیسی کاملا پایستگی دارد، اما در برهم‌کنشهای ضعیف نقض می‌شود. پاریتته‌ی خالص در هر طرف یک واکنش یا فرایند واکنش از حاصلضرب پاریتته‌ی ذاتی و پاریتته‌ی فضایی نسبی محاسبه می‌شود. مثلا واکنش (گیراندازی) زیر که در حالت  $l=0$  اتفاق می‌افتد.

$$\pi^- + {}^2H \rightarrow n + n \quad (7-1)$$

تکانه‌ی زاویه‌ای کل قبل از واکنش برابر است با:

$$j_i = j_{\pi^-} + j_{2H} = 0 + 1 = 1 \quad (8-1)$$

از شرط پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای کل، تکانه‌ی زاویه‌ای کل ذرات، پس از واکنش برابر است با:

$$\vec{j}_f = \vec{l} + \vec{s} = 1 \quad (9-1)$$

که  $\vec{s}$  برآیند اسپین دو نوترون است. اگر اسپینها، پاد موازی باشند، صفر است و اگر موازی باشند، یک است.  $l$  مقادیر ۰ و ۱ و ۲... را داراست. با توجه به رابطه‌ی زیر:

$$|\vec{l} - \vec{s}| \leq \vec{j} \leq |\vec{l} + \vec{s}| \quad (10-1)$$

چهار حالت می‌تواند اتفاق بیافتد.

$$s=1, l=0 \quad \text{الف}$$

$$s=0, l=1 \quad \text{ب}$$

$$s=1, l=1 \quad \text{ج}$$

$$s=1, l=2 \quad \text{د}$$

از میان حالات فوق، فقط حالت (ج) قابل قبول است، زیرا تابع موج دو تا نوترون (فرمیون) باید پاد متقارن باشد. از شرط پایستگی پاریته داریم:

$$\pi_{\pi^-} \pi_{2H} (-1)^{l=0} = \pi_n \pi_n (-1)^{l=1} \quad (11-1)$$

$$\pi_{\pi^-} (+1) = (+1)(+1)(-1) \quad (12-1)$$

$$\pi_{\pi^-} = -1 \quad (13-1)$$

بنابراین پاریته‌ی پایون فرد است.

#### ۴- بار الکتریکی

هر سه برهم کنش، اصل بقای بار الکتریکی را رعایت می کنند. در مورد برهم کنش های ضعیف، لپتون یا کوارک خروجی ممکن است بارهای یکسانی با لپتونها یا کوارکهای ورودی نداشته باشند، که در این صورت،  $W^\pm$  این تفاوت رنگ را برطرف می کنند.

#### ۵- رنگ

واکنش های الکترومغناطیسی و ضعیف، بر رنگ تاثیر نمی گذارند ولی در یک برهم کنش قوی، رنگ کوارک ممکن است تغییر یابد که گلوئون این تفاوت رنگ را برطرف می کند. به هر حال از آنجا که تمام ذرات طبیعی بی رنگ هستند، بقای رنگ کاملاً بدیهی است: صفر داخل - صفر خارج.

#### ۶- طعم

طعم در برهم کنش های قوی یا الکترومغناطیسی حفظ شده است، اما در برهم کنش ضعیف چنین نیست، از آنجایی که نیروهای ضعیف، بسیار ضعیف می باشند، بر این باوریم که تقریباً طعم های گوناگونی بقا داشته باشند.

#### ۷- عدد باریونی

طبق قرارداد، به تمام باریونها، عدد باریونی  $B=+1$  و به پاد باریونها  $B=-1$ ، به تمام غیر باریونها (مزونها، لپتونها و ذرات میدانی)،  $B=0$  را نسبت می دهیم.

تجربه نشان داده است که حاصل جمع عدد باریونی در دو طرف تمام فرایندهای واپاشی یا واکنش برابر است. بنابراین در تمام واپاشی ها و واکنشها، عدد باریونی کل  $B$  پایسته می ماند. مثلاً برای تولید پاد پروتون در برخورد های پروتون-پروتون لازم است که سه پروتون در حالت نهایی موجود باشد.

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (14-1)$$

$$B = +1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1 \quad (15-1)$$

و مقدار خالص  $B=2$  در هر طرف واکنش حفظ می‌شود. به طور مشابه در واکنش زیر عدد باریونی پایسته می‌ماند.



$$B = 0 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 \quad (17-1)$$

اما واپاشی زیر، به دلیل نقض پایستگی عدد باریونی، ممنوع است و هرگز اتفاق نمی‌افتد.



$$B = -1 \rightarrow 1 + 0 \quad (19-1)$$

### ۸- ایزواسپین<sup>۱</sup>

استقلال از بار نیروهای هسته‌ای، بدان معنی است که در اکثر حالات نیازی نداریم بین نوترونها و پروتونها، تمایزی قائل شویم. این امر موجب می‌شود که آنها را به صورت اعضای یک خانواده‌ی مشترک به نام نوکلئونها، گروه بندی کنیم. البته برهم‌کنش الکترومغناطیسی مورد استثنایی است که در آن می‌توانیم بین پروتونها و نوترونها تمایزی قائل شویم. اگر نیروی هسته‌ای قوی را به تنهایی در نظر بگیریم تقارن بین پروتونها و نوترونها معتبر باقی می‌ماند.

نوترونها و پروتونها را به صورت دو حالت متفاوت از یک ذره‌ی منفرد، یعنی نوکلئون<sup>۲</sup> در نظر می‌گیریم. به هر نوکلئون یک بردار ایزواسپین نسبت می‌دهیم. وقتی که عدد کوانتومی ایزواسپین یک نوکلئون به صورت  $t=1/2$  باشد، برای پروتون و نوترون به ترتیب خواهیم داشت:  $m_t = 1/2$  و  $m_t = -1/2$ . ایزواسپین از قواعد معمول بردارهای تکانه‌ی زاویه‌ای پیروی می‌کند، بنابراین یک بردار ایزواسپین  $t$  به طول  $\sqrt{t(t+1)}\hbar$  را که تصاویر محور ۳ آن به صورت  $t_3 = m_t\hbar$  هستند به کار می‌بریم.

<sup>1</sup> Isospin  
<sup>2</sup> Nucleon

به این ترتیب ذرات بنیادی را، براساس خواص یکسان آنها در برهم کنش قوی و جرمهای تقریباً یکسان و خواص متفاوت آنها در برهم کنشهای الکترومغناطیسی، به چند تایه‌های ایزواسپینی به صورت  $(n, p), (\rho^+, \rho^0, \rho^-), (\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-), (\pi^+, \pi^0, \pi^-), (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), (k^+, k^0)$  و غیره تقسیم‌بندی می‌کنیم. از ایزواسپین به عنوان راهی برای برچسب‌زنی اعضای چندتایه استفاده می‌کنیم. کمیت  $T_3$  را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$T_3 = (Q/e) - (\bar{Q}/e) \quad (20-1)$$

که  $Q$  بارالکتریکی یک ذره و  $\bar{Q}$  بارمتوسط چندتایه است که از جمع بستن تمام بارها و تقسیم کردن به تعداد ذرات به دست آمده است. توجه کنید که بعضی از چند تایه‌ها بارهایشان  $(-1, 0, +1)$ ، حول صفر متقارن و بعضی هم نامتقارن هستند. به عنوان مثال برای دوتایه  $(n, p)$  داریم:

$$\bar{Q} = (e + 0)/2 = e/2 \quad (21-1)$$

$$\begin{cases} T_3(p) = (e/e) - (e/2e) = 1/2 \\ T_3(n) = (0) - (e/2e) = -1/2 \end{cases} \quad (22-1)$$

و بردار  $T$  ایزواسپین دوتایه‌ها  $\frac{1}{2}$  است. برای سه تایه‌ها مانند  $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), (\pi^+, \pi^0, \pi^-), (\rho^+, \rho^0, \rho^-)$  بردار  $T$  ایزواسپین ۱ است. برای چهارتایه‌ها مانند  $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-), T = \frac{3}{2}$ ، و برای تک تایه‌ها مانند  $\Lambda^0, \Phi, \omega, \eta$ ،  $T=0$  است.

ایزواسپین در تمام واکنشهای هسته‌ای در غیاب نیروهای الکترومغناطیسی و ضعیف، پایسته می‌ماند.

برای سیستمی متشکل از چند نوکلئون، ایزواسپین از قواعد جفت شدگی مشابه با قواعد بردارهای تکانه‌ی زاویه‌ای پیروی می‌کند. مثلاً هر سیستم دو نوکلئونی می‌تواند ایزواسپین کل مساوی با صفر یا یک را دارا باشد، که به سمتگیرهای موازی یا پاد موازی دو بردار ایزواسپین  $\frac{1}{2}$  مربوط می‌شود.



مولفه‌ی محور سوم بردار ایزواسپین کل، حاصل جمع مولفه‌های محور سوم ایزواسپین نوکلئونهای منفرد است. به عبارت دیگر:

$$|1/2 - 1/2| \leq T \leq |1/2 + 1/2| \quad (23-1)$$

بنابراین ایزواسپین کل دو نوکلئون صفر یا یک است.

$$\begin{cases} T = 0, T_3 = 0 \\ T = 1, T_3 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \end{cases} \quad (24-1)$$

سیستمهای دو نوکلئونی دو پروتون  $p-p$ ، یک پروتون و یک نوترون  $(1/\sqrt{2})[(p-n) + (n-p)]$  و دو نوترون  $n-n$  را با  $T=1$  نشان می‌دهیم، سیستم پروتون-پروتون متناظر با  $T_3 = 1$ ، سیستم نوترون-پروتون متناظر با  $T_3 = 0$  و سیستم نوترون-نوترون متناظر با  $T_3 = -1$  است. حالت  $T=0$  فقط سیستم نوترون-پروتون را شامل می‌شود.

با توجه به مطالبی که ذکر شد، مولفه‌ی سوم ایزواسپین هسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_3 = (1/2)(Z - N) \quad (25-1)$$

برای هر هسته‌ی مشخص، مولفه سوم ایزواسپین با استفاده از تعداد پروتونها و نوترونها تعیین می‌شود.

## فصل دوم

### دوترون و برهم کنش

### نوکلئون-نوکلئون

- مقدمه
- دوترون
- خواص نیروی نوکلئون-نوکلئون
- نظریه‌ی مزونی
- نظریه‌ی یوکاوا

## ۲-۱- مقدمه

ساده‌ترین موردی که نیروی هسته‌ای در آن اثر می‌کند هنگامی است که تنها دو نوکلئون بر هم-کنش داشته باشند. در عمل دو وضعیت پیش می‌آید که چنین است: (۱) هنگامی که نوترون و پروتون به هم مقیدند (دوترون<sup>۱</sup>). (۲) در برخوردهای میان دو نوکلئون که معمولاً به آنها فرایندهای پراکندگی گفته می‌شود. دوترون تنها سیستم مقید دو نوکلئونی در طبیعت است که یک پروتون و یک نوترون را شامل می‌شود. امکانات دیگر عبارتند از سیستم‌های متشکل از دو پروتون و دو نوترون که به هم مقید نمی‌مانند. مطالعات درباره‌ی دوترون روشن کرده است که دوترون هیچ حالت برانگیخته‌ای ندارد و به سرعت به نوترون و پروتون تبدیل نمی‌شود، بنابراین در میان سه سیستم دو نوکلئونی ممکن، تنها یک حالت مقید وجود دارد.

## ۲-۲- دوترون

دوترون هسته‌ی هیدروژن سنگین است که از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است و برای متخصصان فیزیک هسته‌ای همان نقشی را دارد که اتم هیدروژن برای متخصصان فیزیک اتمی داشته است. اما تفاوت آنها در این است که اتم هیدروژن دارای حالت‌های برانگیخته نیز هست و گذار الکترون از حالت برانگیخته به حالت زمینه و یا به حالت برانگیخته‌ی دیگر، می‌تواند به درک ساختار هیدروژن کمک کند اما دوترون دارای هیچ حالت برانگیخته‌ای نیست. بستگی این سیستم چنان ضعیف است که حالت برانگیخته‌ی آن فقط به صورت پروتون و نوترون آزاد در سیستم نامقید ظاهر می‌شود.

---

<sup>1</sup> Deuteron

## ۲-۱-۲- خواص دوترون

دوترون دارای خصوصیات زیر است:

۱- انرژی بستگی آن  $B=2.224\text{Mev}$  است [3]. این انرژی را می‌توان با محاسبه‌ی جرم از بین رفته در واکنش زیر محاسبه نمود.

$$p + n \rightarrow d + \gamma \quad (1-2)$$

$$\Delta m = m_d - m_p - m_n \quad (2-2)$$

با استفاده از جرمهای دوترون، پروتون و نوترون، می‌توان جرم کاهش یافته را محاسبه و از آنجا انرژی بستگی دوترون را به دست آورد [25].

$$B = \Delta mc^2 = 2.224\text{Mev} \quad (3-2)$$

با نزدیک سازی یک پروتون و یک نوترون و تشکیل دوترون و اندازه‌گیری انرژی فوتون پرتو گامای گسیل شده در این فرایند نیز می‌توانیم انرژی بستگی دوترون را تعیین کنیم.

انرژی بستگی دوترون در مقایسه با هسته‌های دیگر بسیار کم است و بنابراین پروتون و نوترون با قید ضعیفی به هم وابسته‌اند.

۲- اسپین کل اندازه‌گیری شده‌ی دوترون،  $I=1$  است [4]. از سوی دیگر اسپین کل دوترون برابر با برابند اسپین‌های ذاتی پروتون و نوترون و تکانه‌ی زاویه‌ای 1 نوکلئونها حول مرکز جرم مشترکشان است. به عبارت دیگر:

$$\vec{I} = \vec{s}_p + \vec{s}_n + \vec{l} \quad (4-2)$$

چون اسپینهای پروتون و نوترون یا با هم موازی (اسپین ۱) و یا پادموازی (اسپین ۰) هستند، بردارهای  $\vec{s}_n, \vec{s}_p, \vec{l}$  به چهار صورت می‌توانند با هم جمع شوند به طوری که نتیجه‌ی I برابر ۱ شود:

$$l = 0, \bar{s} = 1 \quad \text{(الف)}$$

$$l = 1, \bar{s} = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$l = 1, \bar{s} = 1 \quad \text{(ج)}$$

$$l = 2, \bar{s} = 1 \quad \text{(د)}$$

که  $\bar{s}$  برابری اسپین پروتون و نوترون است.

۳- پارته‌ی کل دوترون، زوج است [4]. از مطالعه‌ی واکنشهایی که دوترون در آن شرکت دارد و بررسی خواص فوتون گسیل شده در طی تشکیل دوترون، پارته‌ی آن را بدست می‌آورند.

پارته‌ی منتسب به حرکت مداری به صورت  $l(-1)^l$  قابل تعیین است که  $l$  تکانه‌ی زاویه‌ای مداری است. یعنی برای  $l=1$  (حالت‌های s) و  $l=2$  (حالت‌های d) و... پارته زوج است و برای  $l=1$  (حالت‌های p) و... پارته فرد است. با توجه به نتیجه‌ی تجربی زوج بودن پارته دوترون، از چهار ترکیب ذکر شده در فوق، فقط ترکیب‌های (الف) و (د) قابل قبول هستند و ترکیب‌های (ب) و (ج) که در آنها پارته فرد است قابل حذف‌اند.

۴- گشتاور دوقطبی مغناطیسی اندازه‌گیری شده‌ی دوترون  $\mu = 0.85\mu_N$  است [4]. اگر فرض  $l=0$  برای دوترون درست باشد، حرکت مداری هیچ‌گونه سهمی در گشتاور مغناطیسی نباید داشته باشد و می‌توانیم گشتاور مغناطیسی کل را حاصل ترکیب گشتاورهای مغناطیسی نوترون و پروتون تلقی کنیم.

$$\mu = \mu_p + \mu_n \quad (5-2)$$

از طرفی گشتاور دوقطبی مغناطیسی نوکلئون از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید: (پیوست)

$$\mu_{nucl} = (g_l l + g_s s)\mu_N \quad (6-2)$$

با توجه به این رابطه، گشتاور مغناطیسی نوکلئونها در حالت  $l=0$  برابر است با:

$$\mu_{nucl} = g_s s \mu_N \quad (7-2)$$

که S عدد کوانتومی اسپین است. با جایگذاری رابطه‌ی (7-2) در رابطه‌ی (5-2) خواهیم داشت:

$$\mu = (g_{sp} s_p + g_{sn} s_n) \mu_N \quad (8-2)$$

و یا

$$\mu = 1/2(g_{sp} + g_{sn}) \mu_N \quad (9-2)$$

با جایگذاری مقادیر  $g_{sp} = 5.58569$  و  $g_{sn} = -3.82608$  به دست می‌آوریم [4]:

$$\mu = 0.87 \mu_N \quad (10-2)$$

که سازگاری خوبی با مقدار تجربی دارد. این موضوع مجدداً موازی بودن اسپینهای پروتون و نوترون و فرض  $l=0$  را تأیید می‌کند. اختلاف کوچک میان مقدار تئوری و تجربی گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون را می‌توان ناشی از وجود سهم کوچکی از حالت  $d$  ( $l=2$ ) در تابع موج دوترون در نظر گرفت. به عبارت دیگر تابع موج دوترون را می‌توان به صورت ترکیبی از تابع موج حالت  $s$  ( $l=0$ ) و حالت  $d$  ( $l=2$ ) نوشت:

$$\psi = a_s \psi(l=0) + a_d \psi(l=2) \quad (11-2)$$

گشتاور مغناطیسی دوترون به کمک این تابع موج، چنین به دست می‌آید:

$$\mu = a_s^2 \mu(l=0) + a_d^2 \mu(l=2) \quad (12-2)$$

مقدار مشاهده شده‌ی گشتاور مغناطیسی، با  $|a_s|^2 = 0.94$  و  $|a_d|^2 = 0.06$  سازگار است [4]، یعنی دوترون از ترکیب 94% حالت  $l=0$  و فقط 6% حالت  $l=2$  حاصل می‌شود. به این ترتیب معلوم می‌شود که فرض حالت خالص  $l=0$ ، فرضی نسبتاً خوب است ولی خیلی کامل نیست.

۵- گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون  $Q = 0.00282 \text{ barn}$  است ( $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ ) [3]. که مقدار بسیار کوچکی است اما صفر نیست. چون نوترون و پروتون به طور جداگانه هیچ‌گونه گشتاور

چهار قطبی الکتریکی ندارند پس هر مقدار غیر صفری که از اندازه‌گیری گشتاور چهار قطبی به دست آید، باید ناشی از حرکت مداری تلقی شود. در این صورت گشتاور چهار قطبی حاصل از تابع موج  $l=0$  خالص برابر صفر خواهد شد. محاسبه‌ی گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون با تابع موج (۲-۱۱) مجدداً نتایج  $a_s^2 = 0.94$  و  $a_d^2 = 0.06$  را تأیید می‌کند. مقدار مثبت گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون نشان می‌دهد که توزیع بار هسته‌ی بیشتری در امتداد محور  $Z'$  قرار گرفته است و بنابراین هسته‌ی دوترون، غیرکروی کشیده است (پیوست)، اما از آنجائیکه مقدار گشتاور چهار قطبی دوترون، کوچک است، این کشیدگی خیلی زیاد نیست.

## ۲-۲-۲- برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون در دوترون (پتانسیل هسته‌ای در دوترون)

در این بخش، با استفاده از برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون در دوترون برخی از خواص نیروی هسته‌ای را بررسی می‌کنیم. برای سهولت این بررسی، پتانسیل نوکلئون-نوکلئون را به صورت یک چاه مربعی سه بعدی نشان می‌دهیم

$$V(r) = -V_0 \quad r < R$$

$$= 0 \quad r > R \quad (۱۳-۲)$$

در این جا،  $r$  فاصله‌ی جدایی بین پروتون و نوترون و  $R$  اندازه‌ی شعاع دوترون را مشخص می‌کند. اگر بخش شعاعی تابع موج  $\psi(r)$  را به صورت  $\frac{u(r)}{r}$  نشان دهیم می‌توانیم معادله‌ی شرودینگر را به این صورت بنویسیم [24]:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) - E \right\} u(r) = 0 \quad (۱۴-۲)$$

که  $\mu$  عبارت است از جرم کاهش یافته‌ی  $\mu = M_p M_n / (M_p + M_n)$  که برابر با نصف جرم نوکلئون است.

برای ناحیه‌ی  $r < R$  جواب  $u(r) = A \sin k_1 r + B \cos k_1 r$  و برای ناحیه‌ی  $r > R$  جواب

$$u(r) = C e^{-k_2 r} + D e^{+k_2 r} \text{ را خواهیم داشت. که در آنها } k_1 = \frac{\sqrt{2\mu(V_0 + E)}}{\hbar} \text{ و } k_2 = \frac{\sqrt{-2\mu E}}{\hbar}$$

است.

برای آنکه تابع، به ازای  $r \rightarrow \infty$  متناهی بماند لازم است که  $D = 0$  باشد و برای آنکه تابع به ازای

$r \rightarrow 0$  متناهی بماند باید  $B = 0$  شود. با اعمال شرایط پیوستگی  $u$  و  $\frac{du}{dr}$  در  $r = R$ ، به دست

می‌آوریم:

$$\cot k_1 R = -\frac{k_2}{k_1} \quad (۱۵-۲)$$

با قرار دادن  $\mu = \frac{1}{2} M_p$  و  $E = -2.224 \text{ Mev}$  و  $R \cong 2.31 \text{ fm}$  در رابطه‌ی (۱۵-۲) و حل عددی آن

خواهیم داشت  $V_0 = 35 \text{ Mev}$ . پهنا و عمق این چاه مربعی نشان می‌دهد که: ۱- برد نیروی هسته‌ای

کوتاه است. ۲- عمق چاه پتانسیل خیلی بیشتر از پتانسیل کولنی در این فواصل است (در این فاصله

نیروی هسته‌ای قویتر از کولنی بین دو پروتون است). ۳- در مقایسه با عمق چاه، انرژی بستگی دوترون

خیلی کوچک است یعنی دوترون سست است.

## ۲-۲-۳- اثرهای اصل طرد پائولی

در این بخش به این موضوع می‌پردازیم که چرا سیستم‌های دو نوترونی و دو پروتونی حالت‌های

پایدار ندارند. برای درک مسئله باید اصل طرد پائولی را به حساب بیاوریم.



عموما در دروس مقدماتی علوم مدارس گفته می‌شود که "هیچ دو جسمی دقیقا همانند نیستند" ولی این موضوع در دنیای اتمی و هسته‌ای حقیقت ندارد. یک اصل پایه‌ی فیزیک کوانتومی این است که تمامی آنچه را که می‌توان درباره‌ی یک سیستم دانست تابع موج آن است، و مسلما تابع موجهای تمام اتمهای هیدروژن دقیقا شبیه به هم هستند. بنابراین دو اتم هیدروژن در اصل غیر قابل تشخیص از یکدیگرند. تشخیص تفاوت میان آن دو نه تنها مشکل بلکه مطلقا غیرممکن است.

آنها کاملا شبیه به هم‌اند همان‌گونه که دو الکترون، دو پروتون، دو نوترون، دو دوترون، و غیره به هم شباهت دارند.

در بسیاری از موارد، این واقعیت که دو ذره یا دو سیستم ذرات همانند یکدیگرند هیچ مشکلی را موجب نمی‌شود زیرا آنها را می‌توان در مکانشان از هم جدا نگه داشت، دو الکترون اتم هلیوم را در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه الکترون ۱ در  $(r_1, \theta_1, \phi_1)$  و الکترون ۲ در  $(r_2, \theta_2, \phi_2)$  باشد متناسب با مربع تابع موج  $\psi(r_1, \theta_1, \phi_1, r_2, \theta_2, \phi_2)$  است. برای اختصار آن را  $\psi(1,2)$  می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر پتانسیل را چاه مربعی و ناحیه‌ی  $r < R$  را در نظر بگیریم، تابع موج چنین می‌شود:

$$\psi = A \frac{\sin k_1 r_1}{r_1} \frac{\sin k_2 r_2}{r_2} \quad (۱۶-۲)$$

که  $k_1$  و  $k_2$  متناظر با انرژیهای  $E_1$  و  $E_2$  اند. توجه کنید که تابع موج را به صورت حاصلضرب زیر گرفته‌ایم:

$$\psi = \psi_1(r_1)\psi_2(r_2) \quad (۱۷-۲)$$

این مطلب را می‌توان چنین درک کرد که احتمال وجود الکترون ۱ در  $r_1$  و الکترون ۲ در  $r_2$  عبارت است از حاصلضرب تک تک احتمالهای الکترون ۱ در  $r_1$  و الکترون ۲ در  $r_2$ ، که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\psi^2 = \psi_1^2(r_1)\psi_2^2(r_2) \quad (۱۸-۲)$$

از آنجا که نمی‌توانیم میان ذرات ۱ و ۲ تفاوتی قائل شویم، تابع موج باید توزیع احتمال یکسانی را برای هر دو ذره به دست دهد نه توزیع احتمالهای متفاوت به طوری که در رابطه‌ی (۲-۱۶) دیده می‌شود. یعنی اگر جای ذره‌ی ۱ و ۲ را در  $\psi$  عوض کنیم، همان  $\psi^2$  را باید به دست بیاوریم، یا

$$[\psi(1,2)]^2 = [\psi(2,1)]^2 \quad (۲-۱۹)$$

این رابطه در صورتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$\psi(1,2) = \pm\psi(2,1) \quad (۲-۲۰)$$

به دلایلی که بروشنی شناخته نیست، برای الکترونها، پروتونها، نوترونها، و ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$  در رابطه‌ی (۲-۲۰) علامت منفی انتخاب شده است. معمولاً چنین گفته می‌شود که "تابع موج باید نسبت به مبادله‌ی هر دو ذره‌ی مشابه با اسپین  $\frac{1}{2}$  پادمتقارن باشد". این اساسیترین بیان اصل طرد پاولی است.

اگر رابطه‌ی (۲-۱۷) به صورت زیر اصلاح شود، اصل طرد پاولی برقرار است.

$$\psi = \psi_1(r_1)\psi_2(r_2) - \psi_2(r_1)\psi_1(r_2) \quad (۲-۲۱)$$

که در مورد مثال ما چنین می‌شود:

$$\psi = A \left( \frac{\sin k_1 r_1 \sin k_2 r_2}{r_1 r_2} - \frac{\sin k_2 r_1 \sin k_1 r_2}{r_1 r_2} \right) \quad (۲-۲۲)$$

مشاهده می‌شود که اگر  $r_1$  و  $r_2$  در رابطه‌ی (۲-۲۱) یا رابطه‌ی (۲-۲۲) جابه‌جا شوند، تابع موج بجز تغییر در علامت، یکسان باقی می‌ماند.

اما هنگامی که  $\psi_1$  و  $\psi_2$  هر دو یک تابع باشند، یا در مورد مثال ما، هنگامی که  $k_1 = k_2$  باشد، این روش با شکست روبرو می‌شود. در این موارد، از روش ما  $\psi = 0$  به دست می‌آید. بنابراین درمی‌-

یابیم که "هیچ دو ذره‌ی همانندی نمی‌توانند حالت یکسان داشته باشند". این همان شکل متداول اصل طرد پاولی است.

یک تابع موج کامل باید شامل اسپین نیز باشد. در واقع باید حاصلضرب تابع موج فضایی  $\psi(r, \theta, \phi)$  و تابع موج اسپین  $\chi(\uparrow)$  یا  $\chi(\downarrow)$  باشد که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی اسپین بالا و اسپین پایین است. پس معادله (۲۲-۲) را می‌توان به صورت زیر کامل و قابل قبول کرد:

$$\psi = A \left( \frac{\sin k_1 r_1 \sin k_2 r_2}{r_1 r_2} - \frac{\sin k_2 r_1 \sin k_1 r_2}{r_1 r_2} \right) \chi_1(\uparrow) \chi_2(\uparrow) \quad (۲۳-۲)$$

که نشان می‌دهد هر دو ذره دارای اسپین بالا هستند. اما، یک تابع موج مناسب دیگر می‌تواند چنین باشد:

$$\psi = A \left( \frac{\sin k_1 r_1 \sin k_2 r_2}{r_1 r_2} + \frac{\sin k_2 r_1 \sin k_1 r_2}{r_1 r_2} \right) [\chi_1(\uparrow) \chi_2(\downarrow) - \chi_1(\downarrow) \chi_2(\uparrow)] \quad (۲۴-۲)$$

مشاهده می‌کنیم که دو راه برای ساختن تابع موج پادمتقارن برحسب مبادله‌ی دو ذره برای برقرار ساختن اصل طرد پاولی وجود دارد. تابع موج می‌تواند در اسپین متقارن و در مختصات فضایی پاد متقارن باشد، نظیر رابطه‌ی (۲۳-۲)، یا می‌تواند در اسپین پاد متقارن و در مختصات فضایی متقارن باشد، مانند رابطه‌ی (۲۴-۲). توجه داریم که در رابطه‌ی (۲۴-۲) هیچ مشکلی با  $k_1 = k_2$  پیش نمی‌آید، بنابراین دو ذره‌ی مشابه، ممکن است دارای تابع موج فضایی یکسان باشند به شرط اینکه تابع موج اسپین آنها پادمتقارن باشد در حقیقت، وضعیت دو الکترون اتم معمولی هلیوم چنین است.

تابع موج اسپین در رابطه‌ی (۲۴-۲) همان چیزی است که قبلاً از آن به عنوان حالتی از اسپین پادموازی یا  $S=0$  یاد کرده‌ایم. تابع موج اسپین در رابطه‌ی (۲۳-۲) یکی از حالت‌های ممکن اسپین موازی است که مربوط به  $S=1$ ،  $m_s = +1$  می‌شود. همچنین تابع موج‌های دیگر  $S=1$ ، یعنی تابع موج‌های با  $m_s = 0$  و  $m_s = -1$  نسبت به مبادله‌ی دو ذره متقارنند. بنابراین قاعده‌ی زیر را داریم: حالت‌های  $S=1$  در مختصات اسپین متقارن و حالت‌های  $S=0$  پادمتقارن‌اند.

قسمت فضایی تابع موج سیستم‌های دو نوکلئونی چنین است:

$$\psi_s \sim \frac{u_l(r)}{r} P_{l_{m_l}}(\theta) e^{im_l \phi} \quad (25-2)$$

به علت تبدیل مرکز جرم، دیگر صریحا  $r_1$  و  $r_2$  نخواهیم داشت. در این حالت، مبادله‌ی دو ذره همچون انعکاس حول مبدا است، که در آن متقارن یا پادمتقارن بودن قسمت فضایی تابع موج بستگی به این دارد که آیا تابع موج با این تبدیل، تغییر علامت می‌دهد یا خیر؟ تابع موج در مختصات فضایی برای 1 زوج، متقارن و برای 1 فرد، پادمتقارن است.

از ترکیب نتایج دو بند آخر، مشاهده می‌کنیم که تنها تابع موجهای با 1 زوج و  $s=0$  یا 1 فرد و  $s=1$ ، اصل طرد پاولی را برای نوکلئونهای مشابه برقرار می‌سازند. اما از آنجائیکه سیستم پروتون-نوترون (دوترون) شامل دو ذره‌ی مشابه نمی‌شود احتیاجی به برقرار بودن اصل طرد پاولی ندارد. حالت پایه‌ی دوترون در وضعیت  $l=0$  و  $s=1$  قرار دارد. پایینترین انرژی حالت دوترون ( $s=0, l=0$ ) نامقید است. بنابراین تعجب‌آور نیست که پایینترین انرژی حالت‌های سیستم‌های دو نوترونی و دو پروتونی نیز نامقید باشند. این امر که در سیستم‌های دونوترونی و دوپروتونی حالت‌های مقید وجود ندارد بدان معنی نیست که نیروی هسته‌ای میان نوترون و پروتون با نیروی هسته‌ای میان دو نوترون و دو پروتون متفاوت است. این تنها نشانه‌ای از وجود اصل طرد پاولی است.

## ۲-۳- خواص نیروی نوکلئون-نوکلئون

در این بخش، نیروی هسته‌ای میان دو نوکلئون را مطالعه می‌کنیم و برای بررسی بعضی از خواص آن، از خواص دوترون کمک می‌گیریم. نیروی نوکلئون-نوکلئون دارای خصوصیات زیر است:

۱. این نیرو در فواصل کوتاه قویتر از نیروی کولنی است زیرا نیروی هسته‌ای می‌تواند بر نیروی دافعه‌ی کولنی پروتونها در هسته غلبه کند.

۲. نیروی هسته‌ای دارای برد کوتاهی است و در فواصل بلندی که در حدود ابعاد اتمی باشند، به حدی ضعیف می‌شود که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. انرژی بستگی بر نوکلئون  $(\frac{B}{A})$  برای همه‌ی هسته‌ها مقدار تقریباً ثابتی را داراست. به عبارت دیگر، انرژی لازم برای کندن یک نوکلئون با افزایش تعداد نوکلئون‌ها (A) تقریباً ثابت می‌ماند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر نوکلئون فقط با تعداد معینی نوکلئون برهم‌کنش دارد به عبارت دیگر، برد نیروی هسته‌ای کوتاه است. این خاصیت را اشباع نیروی هسته‌ای می‌گوئیم.

۳. بعضی از ذرات تحت تاثیر نیروی هسته‌ای قرار نمی‌گیرند. برای نمونه، هیچ دلیلی از ساختار اتمی در دست نیست که نیروی هسته‌ای تاثیر روی الکترون‌ها داشته باشد.

۴. نیروی نوکلئون-نوکلئون تقریباً مستقل از نوع نوکلئون‌هاست. به عبارت دیگر نیروی میان نوترون-نوترون با نیروی میان نوترون-پروتون و یا پروتون-پروتون (با چشم‌پوشی از برهم‌کنش کولنی میان پروتون‌ها) تقریباً با هم برابر است. این خاصیت را استقلال از بار نیروی هسته‌ای می‌گویند. مطالعه‌ی هسته‌های آینه‌ای، استقلال باری نیروهای هسته‌ای را تائید می‌کند. هسته‌های آینه‌ای، هسته‌هایی هستند که عدد جرمی یکسان دارند و تعداد پروتون‌ها در یکی از هسته‌ها با تعداد نوترون‌ها در هسته‌ی دیگر برابر است به عنوان مثال  $(^{17}_8O, ^{17}_9F)$  و یا  $(^{23}_{12}Mg, ^{23}_{11}Na)$  هسته‌های آینه‌ای هستند. انرژی لازم برای کندن یک پروتون از هسته‌ی  $^{23}_{12}Mg$  با انرژی لازم برای کندن یک نوترون از هسته‌ی  $^{23}_{11}Na$  یکسان است. به عبارت دیگر، نیرویی را که پروتون را به مغزی نوکلئون‌ها (۱۱ پروتون و ۱۱ نوترون) مقید نگه می‌دارد با نیرویی که نوترون را به این مغزی مقید می‌کند، برابر است.

۵. نیروی نوکلئون-نوکلئون به موازی یا پاد موازی بودن اسپین نوکلئون‌ها بستگی دارد. این خاصیت از مطالعه‌ی سیستم‌های دو نوکلئونی زیر به دست می‌آید.

$$p \uparrow - p \downarrow$$

$$n \uparrow - n \downarrow$$

$$p \uparrow -n \downarrow$$

$$p \uparrow -n \uparrow$$

سیستمهای  $p \uparrow -p \uparrow$  و  $n \uparrow -n \uparrow$  مطابق اصل طرد پائولی ممنوع هستند. زیرا دو ذره با اسپین یکسان را نمی‌توان در حالات کوانتومی یکسان قرار داد. بنابراین فقط، چهار سیستم دو نوکلئونی فوق امکان‌پذیر است. واز این میان، تنها سیستم دو نوکلئونی  $p \uparrow -n \uparrow$  (که اسپینهای موازی دارند) مقید است و سه سیستم دیگر (که اسپینهای پاد موازی دارند) نامقیدند. این موضوع نشان می‌دهد که نیروی هسته‌ای به موازی یا پادموازی بودن اسپین نوکلئونها بستگی دارد. به عبارت دیگر، نیروی هسته‌ای قویا وابسته به اسپین است.

۶. نیروی نوکلئون-نوکلئون دارای یک مغزی دافعه است که نوکلئونها را در فاصله‌ی متوسط معینی از یکدیگر نگه می‌دارد.

۷. نیروی نوکلئون-نوکلئون دارای یک مولفه‌ی تانسوری یا غیر مرکزی است. این خاصیت را با استفاده از گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون ثابت می‌کنیم. دیدیم که گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون  $Q = 0.00282 \text{ barn}$  است. از آنجا که  $Q > 0$  است توزیع بار هسته بیشتر در امتداد محور  $z$  قرار گرفته است و بنابراین هسته‌ی دوترون، غیر کروی کشیده است، اما این کشیدگی خیلی زیاد نیست. دیدیم تابع موج دوترون را می‌توان، بصورت ترکیبی از تابع موج (حالت  $s$ )  $l=0$  و (حالت  $d$ )  $l=2$  نوشت، رابطه‌ی (۲-۱۱). دوترون ۹۴٪ اوقات را در حالت  $l=0$  و ۶٪ اوقات را در حالت  $l=2$  می‌گذراند. بنابراین تکانه زاویه‌ای مداری، پایسته نیست. با توجه به رابطه‌ی

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{l}}{dt} \quad (۲-۲۶)$$

گشتاور نیروی هسته‌ای ( $\bar{\tau}$ ) صفر نیست و در نتیجه نیروی هسته‌ای مرکزی نیست. به عبارت دیگر، نیروی هسته‌ای علاوه بر  $r$  به  $\theta$  هم بستگی دارد.

## ۲-۴- نظریه‌ی مزونی نیروهای هسته‌ای

تا قبل از قرن نوزدهم تصور می‌شد که برهم‌کنش میان ذرات از طریق کنش از راه دور صورت می‌گیرد به عبارت دیگر اگر دو الکترون به فاصله‌ای از یکدیگر قرار داده شوند بلافاصله نیروی کولنی را تجربه می‌کنند. در قرن نوزدهم ماکسول<sup>۱</sup> نشان داد که اندرکنش میان دو بار الکتریکی آنی و به طور مستقیم صورت نمی‌گیرد بلکه اولاً هر بار در اطراف خود یک میدان نیرو (میدان الکترومغناطیسی) تولید می‌کند و این میدان به بار دیگر نیرو وارد می‌کند ثانیاً این نیرو آنرا منتقل نمی‌شود بلکه با سرعت نور انتقال می‌یابد. در قرن بیستم با کشف مکانیک کوانتومی و اینکه انتقال انرژی، توسط بسته‌های کوچک انرژی با انرژی  $\hbar\omega$  صورت می‌گیرد، پایه‌های نظریه‌ی کوانتومی میدان پی‌ریزی شد. براساس این نظریه جسم اول در اطراف خودش میدان کلاسیک تولید نمی‌کند بلکه هر ذره از خود کوانتوم میدان گسیل می‌کند و ذره‌ی دوم این کوانتوم میدان را جذب می‌کند و بعد به طرف ذره‌ی اول باز پس می‌فرستد و با این مبادله‌ی کوانتوم‌های میدان، دو جسم به هم نیرو وارد می‌کنند و بنا-براین به طور مستقیم با کوانتوم‌های میدان و به طور غیر مستقیم با یکدیگر برهمکنش می‌کنند. به عنوان مثال، برهمکنش الکترومغناطیسی میان دو الکترون، از طریق مبادله‌ی فوتون صورت می‌گیرد. فوتون ذره‌ای بی‌بار با جرم در حال سکون صفر و اسپین ۱ است که با سرعت نور حرکت می‌کند. فوتون کوانتوم میدان الکترومغناطیسی است. به این ترتیب الکترون اول یک فوتون گسیل می‌کند و الکترون دوم فوتون مزبور را جذب می‌کند و مجدداً آنرا به طرف الکترون اول باز پس می‌فرستد و با این عمل، دو الکترون نیروی الکترومغناطیسی را تجربه می‌کنند.

بر اساس نظریه‌ی میدانهای کوانتومی، نیروی هسته‌ای میان دو نوکلئون، از طریق مبادله‌ی مزونهای  $\pi$  صورت می‌گیرد. مزونهای  $\pi$  کوانتوم میدان هسته‌ای هستند. در مورد خصوصیات آنها می‌توانیم بگوئیم:

---

<sup>۱</sup> Maxwell

پیونها<sup>۱</sup> حامل بار الکتریکی  $+e$ ،  $0$  یا  $-e$  هستند به این ترتیب به صورت  $\pi^+$ ،  $\pi^0$  یا  $\pi^-$  نشان داده می‌شوند، چون سه نوع پیون موجود است چندتاییگی  $2T+1$  ایجاب می‌کند که  $T=1$  باشد که برای  $\pi^+$  داریم  $T_3 = +1$  و برای  $\pi^0$  و  $\pi^-$  به ترتیب  $T_3 = 0$  و  $T_3 = -1$  را منظور می‌کنیم. پیونها مانند تمام مزونهای دیگر دارای اسپین صحیح هستند و پاریته‌ی فرد دارند. و نیز ساده‌ترین راه تولید این ذرات، برخورد  $p$  ها با هدفهای هسته‌ای است.

بعد از یافتن مزونهای  $\pi$  تصور می‌شد که حامل نیروی هسته‌ای را یافته‌اند اما بعدها فهمیدند که مزونهای بیشتر با جرم بیشتری هستند که به نیروی نوکلئون-نوکلئون کمک می‌کنند [18]. که جرم مزونهای  $\omega$ ،  $\rho$ ،  $\eta$  در زیر آمده است [3].

$$M_{\eta} = 549 \frac{Mev}{c^2} \quad (27-2)$$

$$M_{\rho} = 769 \frac{Mev}{c^2} \quad (28-2)$$

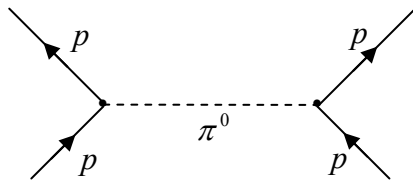
$$M_{\omega} = 783 \frac{Mev}{c^2} \quad (29-2)$$

در برهمکنش میان دو نوترون یا دو پروتون، نوع بی بار مزون  $\pi$  مبادله می‌شود و در برهمکنش میان یک نوترون و یک پروتون نوع باردار آن. نمودارهای فاینمن تعدادی از این برهم‌کنش‌ها را در شکل (۳-۱) نشان داده‌ایم.

---

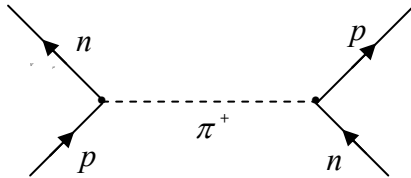
<sup>۱</sup> Pions





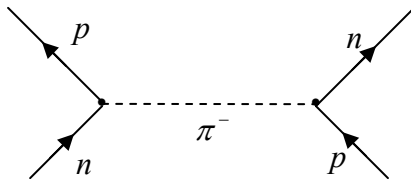
$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0$$

$$p_2 + \pi^0 \rightarrow p_2$$



$$p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+$$

$$n_2 + \pi^+ \rightarrow p_2$$



$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^-$$

$$p_2 + \pi^- \rightarrow n_2$$

شکل (۱-۲) نمودار فاینمن برهم‌کنش نوکلئونها بر اساس مبادله‌ی مزونهای  $\pi$

در واقع، نوکلئون را به صورتی فرض می‌کنیم که با ابری از مزونهای مجازی  $\pi$  احاطه شده است که به طور پیوسته گسیل و جذب می‌شوند. بیشینه مسافتی که این مزونها قبل از جذبشان می‌پیمایند برد نیروی هسته‌ای را مشخص می‌کند.

## ۲-۵- نظریه‌ی یوکاوا

در سال ۱۹۳۵ یوکاوا<sup>۱</sup> فیزیکدان ژاپنی، اولین عقیده را در مورد ماهیت برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون مطرح کرد. او فرض کرد که برهم‌کنش قوی بین دو نوکلئون توسط یک کوانتوم میدان صورت می‌-

<sup>۱</sup> Yukawa

گیرد [18]، درست مانند بر همکنش بین ذرات باردار توسط تبادل یک فوتون. او جرم ذره‌ی مبادله شده را به این صورت تخمین زد: اگر  $m$  جرم در حال سکون ذره‌ی مبادله شده باشد، آنگاه تا زمانیکه  $t$  بزرگتر از آنچه رابطه‌ی عدم قطعیت مجاز می‌شمارد نباشد، یک ذره‌ی مجازی می‌تواند خلق شود و برای مدت زمان  $t$  دوام داشته باشد.

$$t = \frac{\hbar}{mc^2} \quad (۳۰-۲)$$

در این صورت بزرگترین مسافتی که ذره می‌تواند حرکت کند چنین است:

$$x = ct = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{200 \text{Mev} \cdot \text{fm}}{mc^2} \quad (۳۱-۲)$$

و بنابراین، برای برد ۱ فرمی، جرم ذره‌ی مبادله شده از مرتبه‌ی  $200 \text{Mev}/c^2$  است [4]. از سوی دیگر، فوتونها دارای جرم در حال سکون صفر و برد نامحدود هستند.

جرم محاسبه شده، حدود ۳۰۰ برابر جرم الکترون و حدود یک ششم جرم پروتون است چون این ذره بین الکترون و پروتون واقع می‌شد آنرا مزون (یعنی ذره‌ی میانه) نامیدند. در زمان ارائه‌ی فرضیه‌ی یوکاوا، شتابدهنده‌ها برای تولید مزونها، قدرت کافی نداشتند. به همین دلیل جستجوهای اولیه برای مزونها، در میان ذراتی که توسط پرتو کیهانی ایجاد می‌شدند انجام می‌شد. نتایج حاصل از مطالعات پرتو کیهانی، شواهدی دال بر وجود ذره‌ای به جرم حدود  $100 \text{Mev}/c^2$  نزدیک به تخمین یوکاوا بدست داد، اما کار بیشتر نشان داد که این ذرات برد زیادی در ماده‌ی جامد دارند. این برد طولانی با فرضیه‌ی یوکاوا ناسازگار بود. و به این دلیل در اینکه این ذرات همان مزون یوکاوا باشند تا حدی مشکوک بودند. سرانجام پاول<sup>۱</sup> و همکارانش ثابت کردند که در واقع دو نوع مزون در پرتوهای کیهانی وجود دارد: یک نوع مزون سنگینتر ( $\sim 150 \text{Mev}/c^2$ ) که به مزون نوع سبکتر ( $\sim 100 \text{Mev}/c^2$ ) واپاشیده می‌شد [4]. مزون سنگینتر همان ذره‌ی یوکاوا است که اکنون به عنوان مزون  $\pi$  شناخته

---

<sup>۱</sup> Pauli

می‌شود. ذره‌ی سبکتر یک میون است. اگر چه در ابتدا مزون  $\mu$  نامیده شد اما در واقع اصلا از نوع مزون نیست (زیرا به صورت قوی برهمکنش نمی‌کند و اسپین آن  $\frac{1}{2}$  است) بلکه یک ذره‌ی بنیادی واقعی از خانواده‌ی لپتون است.

یوکاوا پتانسیلی را به منظور نمایش برهمکنش نوکلئون-نوکلئون پیشنهاد کرد. ترتیب کار به همان صورتی بود که پتانسیل‌ها و میدان‌های الکترومغناطیسی، تبادل فوتونها را که منجر به نیروی الکترومغناطیسی می‌شوند توصیف می‌کنند.

تفاوت اصلی بین برهمکنش الکترومغناطیسی و برهمکنش هسته‌ای قوی، برد نامحدود نیروی الکترومغناطیسی در مقایسه با برد کوتاه حدود  $1$  فرمی نیروی هسته‌ای است. قبل از به‌دست آوردن پتانسیل یوکاوا، ابتدا پتانسیل الکترومغناطیسی را محاسبه می‌کنیم.

همانطور که می‌دانیم، معادلات اساسی میدانهای الکترومغناطیسی معادلات ماکسول هستند که به صورت معادلات موجی درمی‌آیند و از حل آنها میدانهایی حاصل می‌شوند که چگونگی انتشار فوتونها را مشخص می‌کنند، فوتونها ذراتی با جرم در حال سکون صفر هستند. بنابراین داریم:

$$E = pc \quad (32-2)$$

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0 \quad (33-2)$$

با توجه به اینکه در مکانیک کوانتومی داریم:

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (34-2)$$

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (35-2)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی (33-2) و اثر دادن بر تابع  $\phi$  به‌دست می‌آوریم:

$$(-i\hbar\nabla)^2\phi - \frac{1}{c^2}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\phi = 0 \quad (36-2)$$

$$-\hbar^2 \nabla^2 \phi + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (37-2)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (38-2)$$

که معادله‌ی موج ماکسول است. یک ذره‌ی باردار در حال حرکت، پتانسیلی به وجود می‌آورد که تغییر زمانی آن بصورت  $e^{-i\omega t}$  است. اگر ذره‌ی باردار در مبدا مختصات ساکن باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (39-2)$$

به علت تقارن،  $\phi$  فقط تابع  $r$  است و بنابراین داریم:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (40-2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (41-2)$$

با تغییر متغیر

$$\chi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (42-2)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{2}{r} \chi = 0 \quad (43-2)$$

و یا:

$$\frac{\partial \chi}{\chi} = -\frac{2}{r} \partial r \quad (44-2)$$

$$\chi = er^{-2} \quad (45-2)$$

در نتیجه پتانسیل یک ذره‌ی باردار اینگونه حاصل می‌شود:

$$\phi = k \frac{e}{r} \quad (۴۶-۲)$$

که  $e$  بار الکتریکی الکترون است.

واضح است که معادلات میدان الکترومغناطیسی نمی‌توانند برای میدان هسته‌ای بکار روند زیرا در این صورت ذرات میدان بدون جرم هستند. معادله‌ای مورد نیاز است که با رابطه‌ی اساسی نسبیتی که انرژی کل و جرم در حال سکون را پیوند می‌دهد سازگار باشد.

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (۴۷-۲)$$

با جانشینی روابط (۳۴-۲) و (۳۵-۲) در رابطه‌ی (۴۷-۲) به معادله‌ی نسبیتی شبیه به معادله‌ی موج می‌رسیم که معادله‌ی کلاین-گوردون نامیده می‌شود.

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \phi = [(-i\hbar \nabla)^2 c^2 + m^2 c^4] \phi \quad (۴۸-۲)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi + m^2 c^4 \phi \quad (۴۹-۲)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (۵۰-۲)$$

(در حالت حدی  $m = 0$ ، این معادله به صورت معادله‌ی موج آشنای میدان الکترومغناطیسی در می‌آید). برای شروع، به دنبال پتانسیل استاتیک خواهیم بود که جواب مستقل از زمان معادله‌ی زیر باشد:

$$(k = \frac{mc}{\hbar})$$

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = 0 \quad (۵۱-۲)$$

از آنجائیکه  $\phi$  فقط تابع  $r$  است، با انتخاب  $\phi = \frac{u}{r}$  بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{u}{r}\right) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r}\right) - k^2 \left(\frac{u}{r}\right) = 0 \quad (۵۲-۲)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u \right) - k^2 \frac{u}{r} = 0 \quad (53-2)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = k^2 u \quad (54-2)$$

جواب آن عبارت است از:

$$u = g e^{-kr} \quad (55-2)$$

بنابراین پتانسیل تبادل مزونی (پتانسیل یوکاوا) برابر است با:

$$\phi = g \frac{e^{-kr}}{r} \quad (56-2)$$

که  $g$  در میدان هسته‌ای مشابه  $e$  در میدان الکترومغناطیسی است. بنابراین همانگونه که انرژی پتانسیل در نظریه‌ی الکترومغناطیس  $e\phi$  است، در نظریه‌ی مزونی  $g\phi$  است.

## فصل سوم

# معادله‌ی دیراک

- معادله‌ی دیراک برای ذره‌ی آزاد
- معادلات دیراک با پتانسیل‌های اسکالر و برداری
- معادلات شعاعی دیراک

### ۳-۱- معادله‌ی دیراک برای ذره‌ی آزاد

همانطور که می‌دانید در کوانتوم غیر نسبیتی، ذرات با معادله‌ی شرودینگر بیان می‌شوند و در کوانتوم نسبیتی، ذرات با اسپین صفر از معادله‌ی کلاین-گوردون و ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$  از رابطه‌ی دیراک و ذرات اسپین ۱ با معادله‌ی پروکا محاسبه می‌شوند.

معادله‌ی شرودینگر برای ذره‌ی آزاد را با استفاده از رابطه‌ی کلاسیک انرژی-اندازه حرکت به دست می‌آورند:

$$\frac{p^2}{2m} = E \quad (۱-۳)$$

با استفاده از روابط

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (۲-۳)$$

و اثر دادن بر تابع موج  $\psi$  داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{معادله‌ی شرودینگر}) \quad (۳-۳)$$

رابطه‌ی کلاین-گوردون را می‌توان به طور دقیق به همین ترتیب به دست آورد و با رابطه‌ی انرژی-تکانه نسبیتی شروع کرد:

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۳)$$

اگر طرفین معادله‌ی فوق را به توان دو برسانیم در این حالت داریم:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (۵-۳)$$

یا



$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \quad (۶-۳)$$

از طرفی

$$p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu \quad (\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}) \quad (۷-۳)$$

رابطه‌ی (۷-۳) را در رابطه‌ی (۶-۳) قرار داده و با اثر دادن روی تابع  $\psi$ ، به دست می‌آوریم:

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad (۸-۳)$$

یا

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi \quad (\text{معادله‌ی کلاین-گوردون}) \quad (۹-۳)$$

معادله‌ی پیوستگی از معادله‌ی بالا به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (۱۰-۳)$$

که در آن  $J$  و  $\rho$  به شکل زیرند:

$$\rho = \frac{i\hbar}{c^2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (۱۱-۳)$$

$$J = \frac{\hbar}{ic} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (۱۲-۳)$$

معادله‌ی کلاین-گوردون دارای دو اشکال می‌باشد. یکی آن که، چگالی احتمال با توجه به رابطه‌ی بالا می‌تواند منفی شود. دیگر آن که برای ذره‌ی آزاد انرژی منفی نیز به دست می‌آید که از نظر فیزیکی قابل توجیه نیست. سرچشمه‌ی اصلی مشکلات را به درجه‌ی دوم بودن معادله‌ی کلاین-گوردون برحسب زمان نسبت داده‌اند بنابراین دیراک تصمیم گرفت تا معادله‌ای را پیدا کند که با انرژی-تکانه نسبیتی سازگار باشد و برحسب زمان از درجه‌ی اول باشد. دیراک از معادله‌ی کلاین-گوردون شروع کرده و آن را به صورت زیر نوشت:

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\beta^k p_k + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \quad (13-3)$$

که باید ضرایب را پیدا کنیم. با ضرب کردن طرف راست خواهیم داشت:

$$\beta^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - mc(\beta^k - \gamma^k) p_k - m^2 c^2 \quad (14-3)$$

از مساوی قرار دادن دو رابطه‌ی بالا به نتایج زیر می‌رسیم:  $(\beta^k = \gamma^k)$

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \text{ for } \mu \neq \nu \end{aligned} \quad (15-3)$$

به طوریکه

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 1 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (16-3)$$

به عنوان یک معادله‌ی ماتریس  $4 \times 4$  رابطه‌ی نسبیتی انرژی-اندازه حرکت فاکتور پذیر است.

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^k p_k + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad (17-3)$$

با حذف یک عبارت ما به معادله‌ی دیراک می‌رسیم.

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \quad (18-3)$$

با جایگذاری  $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$  و اثر دادن نتیجه‌ی کار بر تابع موج  $\psi$  داریم:

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc \psi = 0 \quad (\text{معادله‌ی دیراک}) \quad (19-3)$$

که  $\psi$  یک ماتریس  $4 \times 1$  است.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (20-3)$$

ما این را، دو اسپینور یا اسپینور دیراک می‌نامیم.

با توجه به رابطه‌ی  $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$ ، می‌توان معادله‌ی دیراک برای ذره‌ی آزاد را به این شکل نوشت:

$$H\psi(x) = \varepsilon\psi(x) \quad (21-3)$$

که در آن

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 \quad (22-3)$$

بطوریکه

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (23-3)$$

که روابط زیر بین آنها برقرار است:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad (24-3)$$

با قرار دادن  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  در معادله‌ی (21-3) داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi = (c\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi + mc^2\varphi \\ \varepsilon\chi = (c\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi - mc^2\chi \end{cases} \quad (25-3)$$

حال با استفاده از معادله‌ی دیراک، معادله‌ی پیوستگی را تعیین می‌کنیم. معادله‌ی دیراک برای ذره‌ی آزاد را به این صورت می‌نویسیم:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2)\psi(x,t) \quad (26-3)$$

همیوگ مختلط معادله‌ی فوق را می‌نویسیم:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(x,t)}{\partial t} = \psi^\dagger (i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2) \quad (27-3)$$

از این دو معادله داریم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i\hbar c (\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi^\dagger) \quad (28-3)$$

در این صورت معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (29-3)$$

به طوریکه

$$J = \psi^\dagger \alpha \psi \quad \text{و} \quad \rho = \psi^\dagger \psi \quad (30-3)$$

که در این رابطه چگالی احتمال همواره مثبت است. انرژی منفی را نیز برای پادذرات در نظر می‌گیریم.

### ۳-۲- معادلات دیراک با پتانسیل‌های اسکالر و برداری

ذره‌ای به جرم  $m$  در نظر می‌گیریم که در پتانسیل‌های مرکزی برداری  $V$  و اسکالر  $U$  قرار دارد. در این صورت معادله‌ی دیراک به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m + U_0) + V_0] \psi = \varepsilon \psi \quad (31-3)$$

اگر قرار دهیم  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ ، داریم:

$$\begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi + (m + U_0 + V_0) \varphi = \varepsilon \varphi \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi - (m + U_0 - V_0) \chi = \varepsilon \chi \end{cases} \quad (32-3)$$

برای معادله‌ی شرودینگر، در پتانسیل‌های مرکزی، عملگرهای انرژی و  $L^2$  و  $L_z$  ثابت‌های حرکت‌اند بنابراین، اعداد کوانتومی  $l$  و  $m$  اعداد کوانتومی خوبی هستند، اما برای معادله‌ی دیراک در پتانسیل-

های مرکزی، عملگرهای  $L^2$  و  $L_z$  ثابت حرکت نیستند و علاوه بر انرژی، عملگرهای  $J^2$  و  $J_z$  و  $K$  ثابت‌های حرکت‌اند.

$$K = \beta(1 + \vec{\Sigma} \cdot \vec{L}) \quad \text{و} \quad \vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \quad \text{و} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (33-3)$$

اگر  $\kappa$  - ویژه مقدار عملگر  $K$  باشد.

$$K\psi = -\kappa\psi \quad (34-3)$$

بنابراین

$$\beta(1 + \vec{\Sigma} \cdot \vec{L})\psi = -\kappa\psi \quad (35-3)$$

اگر  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  را وارد کنیم داریم:

$$\begin{cases} (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})\varphi = -\kappa\varphi \\ (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})\chi = \kappa\chi \end{cases} \quad (36-3)$$

برای معادله‌ی دیراک در حضور پتانسیل‌های مرکزی تابع موج به این صورت است:

$$\psi_{j_3}(r) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) Y_{j_3}^{j_3}(\hat{r}) \\ if_{\kappa}(r) Y_{j_3}^{j_3'}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (37-3)$$

می‌توان نوشت:

$$K^2 = J^2 + \frac{1}{4} \quad (38-3)$$

ویژه مقدار عملگر  $J^2$  برابر است با  $j(j+1)$  بنابراین ویژه مقدار عملگر  $K^2$  عبارت است از:

$$\kappa = \pm(j + \frac{1}{2}) \quad (39-3)$$

### ۳-۳- معادلات شعاعی دیراک

یکی از معادلات دیراک را در نظر می‌گیریم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi - (m + U_0 - V_0)\chi = \varepsilon\chi \quad (40-3)$$

در این معادله،  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi$  را به این شکل می‌نویسیم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g_\kappa(r)Y_{jl}^{j_3} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r^2} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})]g_\kappa(r)Y_{jl}^{j_3} \quad (41-3)$$

از طرفی داریم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = (\vec{r} \cdot \vec{p}) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \quad (42-3)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{L})\phi = -(\kappa + 1)\phi \quad (43-3)$$

بنابراین با استفاده از معادلات بالا و قرار دادن  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$  خواهیم داشت:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g_\kappa(r)Y_{jl}^{j_3} = -i\left[\frac{dg_\kappa}{dr} + (\kappa + 1)\frac{g_\kappa}{r}\right](\vec{\sigma} \cdot \hat{r})Y_{jl}^{j_3} \quad (44-3)$$

برای معادله‌ی دیگر دیراک از همین روابط استفاده می‌کنیم با این تفاوت که  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L})\chi = (\kappa - 1)\chi$ .

بنابراین با توجه به این روابط و رابطه‌ی  $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})Y_{jl}^{j_3} = -Y_{jl}^{j_3}$  [6] می‌توانیم معادلات شعاعی دیراک را

به این صورت به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{dg_\kappa}{dr} + \frac{(\kappa + 1)}{r}g_\kappa - (m + U_0 - V_0)f_\kappa &= \varepsilon f_\kappa \\ \frac{df_\kappa}{dr} + \frac{(1 - \kappa)}{r}f_\kappa - (m + U_0 + V_0)g_\kappa &= -\varepsilon g_\kappa \end{aligned} \quad (45-3)$$

## فصل چهارم

# محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی

## مغناطیسی دوترون

- هماهنگ‌های فوق کروی
- پتانسیل پیشنهادی
- حل معادله‌ی دیراک با پتانسیل پیشنهادی
- گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون
- بحث و نتیجه‌گیری

## ۴-۱- هماهنگ‌های فوق‌کروی

اگر یک فضای  $D$  بعدی با مختصات دکارتی  $x_1, x_2, \dots, x_d$  را بررسی کنیم، چند جمله‌ای همگن  $h_\lambda$  از مرتبه  $\lambda$  وقتی هماهنگ است که در معادله‌ی لاپلاس صدق کند:

$$\nabla^2 h_\lambda = 0 \quad (1-4)$$

جائیکه  $\nabla^2$  با رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\nabla^2 \equiv \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) \equiv \sum_{j=1}^N \nabla_j^2 \quad (2-4)$$

چند جمله‌ای‌های هماهنگ در یک فضای  $D$  بعدی به هامونیک‌های فوق‌کروی توسط رابطه‌ی

$$h_\lambda = x^\lambda Y_\lambda \quad (3-4)$$

وابسته‌اند. که  $Y_\lambda$ ، هامونیک‌های فوق‌کروی هستند و  $\lambda$  مرتبه‌ی آنها را مشخص می‌کند و  $x$  فوق‌شعاع است که برای  $N$  ذره، با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [22, 26]:

$$x^2 \equiv \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i^2 \quad (4-4)$$

و  $\eta_i$  مختصات ژاکوبی در فضای فوق‌کروی هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند [11]:

$$\bar{\eta}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( \vec{r}_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j \right) \quad (5-4)$$

بنابراین، فوق‌شعاع  $x$ ، تابعی از مکانهای نسبی ذرات است.

عملگر تکانه‌ی زاویه‌ای کل  $L^2$  در یک فضای  $D$  بعدی توسط رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود [21]:

$$L^2 = -x^2 \nabla^2 + \sum_{i,j=1}^D r_i r_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} + (D-1) \sum_{i=1}^D r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \quad (6-4)$$

که  $\nabla^2$  عملگر لاپلاس کل است:



$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^D \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} \quad (۷-۴)$$

برای هر چند جمله‌ای همگن  $f_n$  از مرتبه‌ی  $n$  می‌توان ثابت کرد که [21]:

$$\sum_{i=1}^D r_i \frac{\partial f_n}{\partial r_i} = n f_n \quad \text{و} \quad \sum_{i,j=1}^D r_i r_j \frac{\partial^2 f_n}{\partial r_i \partial r_j} = n(n-1) f_n \quad (۸-۴)$$

از روابط (۶-۴) و (۸-۴) داریم:

$$L^2 f_n = -x^2 \nabla^2 f_n + n(n+D-2) f_n \quad (۹-۴)$$

بعلاوه، اگر  $L^2$  بر  $h_\lambda$  اثر کند، (۹-۴) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$L^2 h_\lambda = \lambda(\lambda+D-2) h_\lambda \quad (۱۰-۴)$$

بنابراین هر چند جمله‌ای هارمونیک از مرتبه‌ی  $\lambda$  در فضای  $D$  بعدی ویژه تابعی از  $L^2$  متناظر با ویژه مقدار  $\lambda(\lambda+D-2)$  است. در مورد  $D=3$ ، به ویژه مقادیر تکانه‌ی زاویه‌ای مداری کل  $l(l+1)$  تبدیل می‌شود (در صورتیکه  $l \rightarrow \lambda$ ). از تعریف فوق شعاع (رابطه‌ی (۴-۴)) داریم:

$$x \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^D r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \quad (۱۱-۴)$$

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \sum_{i,j=1}^D r_i r_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \quad (۱۲-۴)$$

این دو رابطه را در رابطه‌ی (۶-۴) قرار می‌دهیم و عبارتی برای عملگر لاپلاس کل بر حسب فوق شعاع و  $L^2$  به دست می‌آوریم.

$$\nabla^2 = \sum_{j=1}^D \frac{\partial^2}{\partial r_j^2} = \frac{1}{x^{D-1}} \frac{\partial}{\partial x} x^{D-1} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{L^2}{x^2} \quad (۱۳-۴)$$

برای مثال، وقتیکه  $D=3$  باشد، این رابطه، به رابطه‌ی آشنای زیر تبدیل می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{L^2}{x^2} \quad (14-4)$$

در یک فضای  $D$  بعدی، عنصر حجم با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$dr_1 dr_2 \dots dr_D = x^{D-1} dx d\Omega \quad (15-4)$$

$d\Omega$  عنصر زاویه‌ای فضایی است که به این صورت ارزیابی می‌شود: از  $e^{-x^2}$  روی کل فضا انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^\infty dx x^{D-1} e^{-x^2} \int d\Omega = \prod_{j=1}^D \int_{-\infty}^\infty dr_j e^{-r_j^2} \quad (16-4)$$

طرف چپ رابطه‌ی (16-4)، انتگرال، برحسب فوق شعاع و فوق زاویه است در حالیکه طرف راست برحسب مختصات دکارتی نوشته شده است. انتگرال روی فوق شعاع می‌تواند برحسب تابع گاما نوشته شود:

$$\int_0^\infty dx x^{D-1} e^{-x^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{2} \quad (17-4)$$

و به‌طور مشابه، برای هر کدام از انتگرال‌ها در طرف راست داریم:

$$\int_{-\infty}^\infty dr_j e^{-r_j^2} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} \quad (18-4)$$

از روابط (16-4)-(18-4)، عبارتی برای عنصر فضایی به‌دست می‌آوریم:

$$\int d\Omega = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \equiv I(0) \quad (19-4)$$

برای مثال، وقتی که  $D = 3$  باشد، نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$I(0) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 4\pi \quad (20-4)$$

در حالیکه اگر  $D = 4$  باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$I(0) = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \quad (21-4)$$

## ۲-۴- پتانسیل پیشنهادی

در مدل کوارکی، دوترون شامل شش کوارک است، بنابراین از سیستم فوق‌کروی استفاده می‌کنیم که حرکت کوارکها توسط مختصات  $\eta_5, \eta_4, \eta_3, \eta_2, \eta_1$  توضیح داده می‌شود [9, 12]. در این مدل فرض می‌کنیم که پتانسیل فوق مرکزی فقط به فوق شعاع  $x$  وابسته است. فوق شعاع  $x$  به این صورت تعریف می‌شود [15]:

$$x = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 + \eta_5^2} \quad (22-4)$$

به‌طوریکه:

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{\eta}_2 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{\sqrt{6}}$$

$$\bar{\eta}_3 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 - 3\vec{r}_4}{\sqrt{12}} \quad (23-4)$$

$$\bar{\eta}_4 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - 4\vec{r}_5}{\sqrt{20}}$$

$$\bar{\eta}_5 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5 - 5\vec{r}_6}{\sqrt{30}}$$

اولین پتانسیلی که بین کوارکهای درون دوترون پیشنهاد می‌کنیم به شکل پتانسیل کولنی یعنی به شکل  $-\frac{c}{x}$  است [10]. وجود این پتانسیل به این خاطر است که برای هر کوارک یک رنگ تعریف می‌شود، در واقع، نقش رنگ در کرومودینامیک کوانتومی، همانند نقش بار در الکتروپینامیک کوانتومی است. پتانسیل دومی که در نظر می‌گیریم پتانسیلی است که باعث محبوسیت کوارک می‌شود و مانع از دور شدن کوارکها از یکدیگر می‌شود و با زیاد شدن فاصله، این پتانسیل نیز بزرگ می‌شود این موضوع باعث می‌شود که کوارک آزاد در طبیعت وجود نداشته باشد، این پتانسیل محدود کننده را به صورت  $bx$  در نظر می‌گیریم. و اما سومین پتانسیل، مربوط به حرکت نوسانی کوارکها حول نقطه‌ی تعادلشان است، بنابراین این پتانسیل، به شکل پتانسیل نوسانگر ساده یعنی  $ax^2$  است [23]. بنابراین پتانسیل پیشنهادی ما به شکل  $u(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$  خواهد بود. با استفاده از این پتانسیل پیشنهادی و با در نظر گرفتن جواب پیشنهادی برای تابع موج دیراک و حل معادله‌ی دیراک، تابع موج دوترون و نهایتاً گشتاور دوقطبی مغناطیسی آنرا محاسبه خواهیم کرد.

### ۴-۳- حل معادله‌ی دیراک با پتانسیل پیشنهادی

دوترون را به صورت یک سیستم شش ذره‌ای (سیستمی متشکل از شش کوارک) در نظر گرفته و معادله‌ی دیراک را برای این سیستم می‌نویسیم:

$$[\vec{\alpha}_i \cdot \vec{p}_i + \beta(m_i + U_0(x))]\psi_i(x) = (\varepsilon_i - V_0(x))\psi_i(x) \quad (۲۴-۴)$$

که  $i=1..6$  در اینجا  $\varepsilon_i$ ، انرژی کوارکهای تشکیل دهنده‌ی دوترون و  $m_i$  جرم آنها و نیز

$$\psi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix}$$

تابع موج مربوط به آنها می‌باشد. با به کار بردن شکل ماتریسی  $\alpha$  و  $\beta$  و نیز، تابع

موج به صورت:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (25-4)$$

در معادله‌ی (۲۴-۴) به معادلات جفت شده‌ی دیراک برای مولفه‌های بالا و پایین می‌رسیم [5, 8]:

$$\begin{cases} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i) \chi + (m + U_0(x) + V_0(x)) \varphi = \varepsilon \varphi \\ (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i) \varphi - (m + U_0(x) - V_0(x)) \chi = \varepsilon \chi \end{cases} \quad (26-4)$$

در این معادلات، از رابطه‌ی  $\psi_1(x) \otimes \psi_2(x) \otimes \dots \otimes \psi_6(x) = \psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  استفاده شده است و

برای سادگی جرم و انرژی کوآرکها را یکسان گرفته‌ایم. اکنون پتانسیل‌های اسکالر و برداری را با هم برابر در نظر می‌گیریم:

$$U_0(x) = V_0(x) = \frac{1}{2} A(x) \quad (27-4)$$

که در این رابطه [1, 12]:

$$A(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x} \quad (28-4)$$

و اگر از معادلات (۲۶-۴)  $\chi$  را برحسب  $\varphi$  بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i) \varphi}{\varepsilon + m} \quad (29-4)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ای بر حسب  $\varphi$  معادله‌ی (۲۹-۴) را در معادله‌ی بالایی (۲۶-۴) جایگزین

می‌کنیم. (با در نظر داشتن  $U_0(x) = V_0(x) = \frac{1}{2} A(x)$ ).

$$\frac{p_i^2 \varphi}{(m + \varepsilon)} + (m - \varepsilon + A(x)) \varphi = 0 \quad (30-4)$$

که در این رابطه، از  $(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i)^2 = p_i^2$  استفاده کرده‌ایم. بنابراین:

$$p^2 \varphi + 6(m^2 - \varepsilon^2) \varphi + 6A(x)(m + \varepsilon) \varphi = 0 \quad (31-4)$$

که  $p^2 = \sum_{i=1}^6 p_i^2$  برای حل معادله‌ی (۳۱-۴)، از مختصات فوق‌گروی استفاده می‌کنیم بنابراین طبق

رابطه‌ی (۱۳-۴) عملگر  $p^2$  را در فضای ۱۵ بعدی به این صورت می‌نویسیم: ( $\hbar = c = 1$ )

$$p^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{14}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right) \quad (۳۲-۴)$$

بنابراین، مولفه‌ی بالایی تابع موج دوترون از حل معادله‌ی:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{14}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right]\varphi - 6(m^2 - \varepsilon^2)\varphi - 6\left(ax^2 + bx - \frac{c}{x}\right)(m + \varepsilon)\varphi = 0 \quad (۳۳-۴)$$

بدست می‌آید. اکنون تابع موج را به این صورت می‌نویسیم:

$$\varphi = g_\gamma(x) Y_{[\gamma]l_{\eta_1}l_{\eta_2}\dots l_{\eta_5}}(\Omega, t) \quad (۳۴-۴)$$

که  $g_\gamma(x)$  قسمت شعاعی و  $Y_{[\gamma]l_{\eta_1}l_{\eta_2}\dots l_{\eta_5}}(\Omega, t)$  قسمت زاویه‌ای تابع موج است.  $\Omega$  یکی از مختصات زاویه‌ای  $\Omega_{\eta_1}, \dots, \Omega_{\eta_5}$  و  $t$  فوق‌زاویه می‌باشد. از طرف دیگر، طبق رابطه‌ی (۱۰-۴) در فضای ۱۵ بعدی داریم:

$$L^2(\Omega) Y_{[\gamma]l}(\Omega, t) = \gamma(\gamma + 13) Y_{[\gamma]l}(\Omega, t) \quad (۳۵-۴)$$

$\gamma$  عدد کوانتومی زاویه‌ای کل است و به صورت  $\gamma = 2n + l_{\eta_1} + l_{\eta_2} + l_{\eta_3} + l_{\eta_4} + l_{\eta_5}$  تعریف می‌شود. در اینجا،  $n$  عدد صحیح مثبت و  $l_{\eta_i}$  تکانه‌ی زاویه‌ای متناظر با مختصه‌ی  $\eta_i$  است.

با قرار دادن روابط (۳۴-۴) و (۳۵-۴) در معادله‌ی (۳۳-۴) خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{14}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma(\gamma + 13)}{x^2}\right]g_\gamma(x) - 6(m^2 - \varepsilon^2)g_\gamma(x) - 6\left(ax^2 + bx - \frac{c}{x}\right)(m + \varepsilon)g_\gamma(x) = 0 \quad (۳۶-۴)$$

که  $Y_{[\gamma]l}(\Omega, t)$  را از طرفین حذف کرده‌ایم. اکنون تغییر متغیرهای زیر را منظور می‌کنیم:

$$a_1 = 6(\varepsilon + m)a$$

$$b_1 = 6(\varepsilon + m)b \quad (37-4)$$

$$c_1 = 6(\varepsilon + m)c$$

و به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{14}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right]g_\gamma(x) + [6(\varepsilon^2 - m^2) - a_1x^2 - b_1x + \frac{c_1}{x}]g_\gamma(x) = 0 \quad (38-4)$$

$\gamma$  را برابر صفر قرار داده‌ایم زیرا دوترون در حالت پایه قرار دارد. برای سادگی، از تغییر متغیر:

$$g_\gamma(x) = x^{-7}j(x) \quad (39-4)$$

استفاده می‌کنیم [17]. با قرار دادن رابطه‌ی (39-4) در معادله‌ی (38-4) خواهیم داشت:

$$j''(x) = [6(m^2 - \varepsilon^2) + a_1x^2 + b_1x - \frac{c_1}{x} + \frac{42}{x^2}]j(x) \quad (40-4)$$

حالا یک جواب برای ویژه تابع  $j(x)$  پیشنهاد می‌کنیم [16]:

$$j(x) = \exp(h(x)) \quad (41-4)$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \delta \ln x \quad (42-4)$$

بنابراین:

$$j''(x) = -\left(\alpha + \frac{\delta}{x^2}\right)j(x) + \left(-\alpha x + \beta + \frac{\delta}{x}\right)^2 j(x) =$$

$$\left[-\alpha - \frac{\delta}{x^2} + \alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 + \frac{2\delta\beta}{x} - 2\alpha\delta + \frac{\delta^2}{x^2}\right]j(x) \quad (43-4)$$

با مقایسه‌ی روابط (40-4) و (43-4) ضرایب مجهول را بر حسب یکدیگر به دست می‌آوریم:

$$\alpha^2 = a_1 \quad (44-4)$$

$$-2\alpha\beta = b_1$$

$$2\delta\beta = -c_1$$

$$-\alpha + \beta^2 - 2\alpha\delta = 6(m^2 - \varepsilon^2)$$

$$\delta^2 - \delta = 42$$

از روابط (۴-۴۴) می‌توانیم رابطه‌ی بین  $b_1$  و  $c_1$  را به صورت  $\frac{b_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{c_1}{7}$  به دست آوریم و نیز انرژی

یک کوآرک در حالت پایه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 15\sqrt{a_1} - \frac{b_1^2}{4a_1} + 6m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۴۵-۴)$$

با توجه به ضرایب به دست آمده،  $g(x)$  را بر حسب ضرایب پتانسیل می‌نویسیم:

$$g_\gamma(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{a_1}x^2 - \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}}x\right) \quad (۴۶-۴)$$

و بنابراین:

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{a_1}x^2 - \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}}x\right) Y_{[0],0}(\Omega, t) \quad (۴۷-۴)$$

اکنون برای به دست آوردن مولفه‌ی پایینی تابع موج، رابطه‌ی (۴-۲۹) را برای تمام مولفه‌ها با هم جمع می‌کنیم.

$$\chi = \frac{\sum_{i=1}^6 (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i) \varphi}{6(\varepsilon + m)} \quad (۴۸-۴)$$

$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  را به این شکل می‌نویسیم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{x^2} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \varphi \quad (۴۹-۴)$$

با استفاده از رابطه‌ی برداری:



$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (50-4)$$

خواهیم داشت:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{x^2} [\vec{x} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})]\varphi \quad (51-4)$$

از آنجائیکه  $\vec{x} \times \vec{p} = \vec{L}$  و  $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ، به رابطه‌ی

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi = -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{x^2} \left[ x \frac{d}{dx} - \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] \varphi \quad (52-4)$$

می‌رسیم. با استفاده از تعریف بردار یکه  $\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|x|}$  رابطه‌ی بالا را بر حسب  $\vec{\sigma} \cdot \hat{x}$  می‌نویسیم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi = -i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} \left[ \frac{d}{dx} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{x} \right] \varphi \quad (53-4)$$

در نتیجه: ( $l=0$ )

$$\chi = -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{6(\varepsilon + m)} \frac{d\varphi}{dx} \quad (54-4)$$

بنابراین، تابع موج دوترون به صورت

$$\psi = N \left( \begin{array}{c} \varphi \\ -i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} \frac{d\varphi}{dx} \\ 6(\varepsilon + m) \end{array} \right) \quad (55-4)$$

خواهد شد. N ثابت بهنجارش تابع موج و از رابطه‌ی

$$N^2 \int_0^\infty (|\phi|^2 + |\chi|^2) x^{14} dx = 1 \quad (56-4)$$

محاسبه می‌شود. تابع موج به دست آمده بر حسب ضرایب پتانسیل است که همگی مجهولند و برای به-

دست آوردن گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون باید این ضرایب را به دست آورد.

## ۴-۴- گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون

در الکترومغناطیس، گشتاور دوقطبی مغناطیسی  $\mu$  به علت توزیع جریان الکتریکی  $\vec{j}_e(\vec{x})$ ، با رابطه‌ی زیر داده می‌شود: (پیوست)

$$\vec{\mu} = (1/2) \int (\vec{r} \times \vec{j}_e(\vec{x})) dv \quad (57-4)$$

در مدل کواریکی، جریان الکتریکی یک کواریک در حالت  $\psi_{jj_3}$  با این رابطه داده می‌شود:

$$\vec{j}_e(\vec{x}) = e_q \psi_{jj_3}^\dagger(x) \alpha \psi_{jj_3}(x) = e_q \vec{j}(\vec{x}) \quad (58-4)$$

و گشتاور دوقطبی مغناطیسی به شکل

$$\vec{\mu} = \frac{e_q}{2} \int (\vec{x} \times \vec{j}) dv \quad (59-4)$$

خواهد بود. با توجه به  $\psi_{jj_3}(x) = \begin{pmatrix} g_\kappa(x) Y_{jl}^{j_3}(\hat{x}) \\ if_\kappa(x) Y_{jl}^{j_3}(\hat{x}) \end{pmatrix}$  می‌توان نشان داد که:

$$j(x) = -if_\kappa g_\kappa (Y_{jl}^{j_3})^\dagger [\vec{\sigma}(\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) - (\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) \vec{\sigma}] Y_{jl}^{j_3} \quad (60-4)$$

$$= \frac{2}{\pi} f_\kappa g_\kappa (Y_{jl}^{j_3})^\dagger (\vec{x} \times \vec{\sigma}) Y_{jl}^{j_3}$$

با توجه به این رابطه، در فضای ۱۵ بعدی اثبات می‌شود که [7, 19]:

$$\mu_q = -\frac{2}{3} e_q \int fgx^{15} dx \quad (61-4)$$

از طرفی [7]:

$$\mu_d = \sum_{i=1}^6 \mu_{q_i} \quad (62-4)$$

در نتیجه:

$$\mu_d = -\frac{2}{3} e_d \int_0^\infty f g x^{15} dx \quad (۶۳-۴)$$

در این رابطه،  $f$  و  $g$  قسمت شعاعی تابع موج دیراک هستند. که در رابطه‌ی (۴۶-۴) به دست آمده است. با توجه به روابط (۴۷-۴) و (۵۴-۴) و نیز روابط

$$\chi = i f_\gamma(x) Y_{[l_\gamma] l_{\eta_1} l_{\eta_2} \dots l_{\eta_s}}(\Omega, t) \quad (۶۴-۴)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) Y_{j_l}^{j_3} = -Y_{j_l}^{j_3'} \quad (۶۵-۴)$$

برای  $f$  داریم:

$$f = \frac{1}{6(\varepsilon + m)} \left( -\sqrt{a_1} x - \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right) \exp\left( -\frac{1}{2} \sqrt{a_1} x^2 - \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} x \right) \quad (۶۶-۴)$$

با جایگذاری روابط (۴۶-۴) و (۶۸-۴) در رابطه‌ی (۶۵-۴) خواهیم داشت:

$$\mu_d = -\frac{1}{9(\varepsilon + m)} e_d \int_0^\infty \left( -\sqrt{a_1} x - \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \right) \exp\left( -\sqrt{a_1} x^2 - \frac{b_1}{\sqrt{a_1}} x \right) x^{15} dx \quad (۶۷-۴)$$

از طریق برنامه‌ی میپل و با دادن انتگرال (۶۷-۴) و نیز مقادیر  $a_1$ ،  $b_1$ ،  $m$ ،  $\varepsilon = 1.58 fm^{-1}$  و  $e_d = 19 fm^{-1}(n.m)$  به آن، مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون به دست می‌آید. جدول (۴-۱) مقادیر گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون را به ازای  $a_1$  و  $b_1$  و  $m$  های مختلف نشان می‌دهد. که در آن  $\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  جذر میانگین مربعی شعاع دوترون می‌باشد. همانطور که از جدول مشاهده می‌شود بهترین جواب برای گشتاور دو قطبی مغناطیسی دوترون حدود  $\mu_d = 0.92 n.m$  است که به ازای  $a_1 = 1 fm^{-4}$ ،  $b_1 = 7.2 fm^{-3}$  و  $m = 290 Mev$  به دست می‌آید.

جدول (۱-۴) محاسبه‌ی گشتاور دو قطبی مغناطیسی دوترون به ازای مقادیر مختلف  $a_1$ ،  $b_1$ ،  $m$ .

$m$ (Mev)	$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ (fm)	$\mu_d$ (n.m)	$a_1$ (fm <sup>-4</sup> )	$b_1$ (fm <sup>-3</sup> )
۲۴۶	۲/۷۳	۰/۹۹	۱/۳۴	۱۰/۱۸
۲۴۸	۱/۸۱	۰/۹۸۷	۱/۳۱	۹/۸۵
۲۸۰	۳/۹۳	۰/۹۸۹	۱/۲	۹/۳۳
۲۹۰	۲/۸۴	۰/۹۸۷۶	۱/۱	۸/۰۸
۲۹۰	۲/۳۷	۰/۹۲	۱	۷/۲
۲۹۲	۱/۷۴	۰/۹۸	۰/۹	۶/۱۴
۲۹۳	۳/۷۳	۲/۹۸۷	۰/۸	۵/۱۲
۲۹۵	۳/۰۲	۰/۹۷۹۶	۰/۷	۴/۹۶

## ۴-۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، با استفاده از معادله‌ی دیراک و حل آن با پتانسیل‌هایی که در ارتباط با کوارک‌های دوترون می‌باشند ( $u(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$ )، تابع موج دوترون را محاسبه کرده‌ایم که جواب ما در محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون به واقعیت نزدیک می‌باشد. همچنین به این مطلب رسیده‌ایم که با توجه به مدل کوارکی می‌توانیم دوترون را به صورت یک سیستم شش ذره‌ای در نظر گرفته و به جواب قابل قبولی برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون برسیم. که این جواب نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی ما برای محاسبه‌ی گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون مدل بسیار خوبی است.

تفاوت در جواب بدست آمده و مقدار تجربی را می‌توان به علت حذف حرکت مرکز جرم، در نظر نگرفتن تمام پتانسیل‌هایی که درون دوترون وجود دارند و نیز در نظر نگرفتن سهم کوچک  $l = 2$  در تابع موج دوترون و... دانست بنابراین به عنوان پیشنهاد می‌توان این موارد را وارد کرد و به جوابهای نزدیکتری برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون رسید.

## پیوست

### گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی و چهار قطبی الکتریکی هسته

در بیشتر کتابهای الکترومغناطیس نشان داده می‌شود که هر توزیع بار الکتریکی، ایجاد یک پتانسیل الکتریکی می‌کند که می‌توان آن را در فواصل بزرگ  $r$  و در جهت  $z$  به صورت زیر بسط داد:

$$V(r) = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[ \frac{1}{r} \int_V dv' \rho(r') + \frac{1}{r^2} \int_V dv' z' \rho(r') + \frac{1}{r^3} \int_V dv' (3z'^2 - r'^2) \rho(r') + \dots \right] \quad (1)$$

که در آن  $\rho$  چگالی بار است و انتگرال گیری روی ناحیه‌ای انجام می‌شود که شامل بار الکتریکی است. متغیر  $r'$  مربوط به ناحیه‌ای است که در آن بار الکتریکی وجود دارد و  $r$  نقطه‌ای است که در آنجا پتانسیل را حساب می‌کنیم که  $r$  بسیار بزرگتر از  $r'$  است. سومین جمله،

یعنی  $\frac{1}{r^3} \int_V dv' (3z'^2 - r'^2) \rho(r')$  پتانسیل مربوط به گشتاور چهار قطبی الکتریکی است و کمیت:

$$Q = \int_V dv' (3z'^2 - r'^2) \rho(r') \quad (2)$$

گشتاور چهار قطبی الکتریکی نامیده می‌شود.

از آنجائیکه هسته یک سیستم کوانتومی است کافی است در رابطه‌ی فوق به جای  $\rho$ ،  $e|\psi(r)|^2$  را قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$Q = \int_V dv' e \psi^* (\vec{r}') (3z'^2 - r'^2) \psi(\vec{r}') \quad (3)$$

گشتاور چهار قطبی الکتریکی هسته مشخص می‌کند که آیا هسته کروی است یا غیر کروی.

اگر هسته تقارن کروی داشته باشد در آن صورت داریم:

$$\langle x'^2 \rangle = \langle y'^2 \rangle = \langle z'^2 \rangle = \langle r'^2 \rangle / 3 \quad (4)$$

بنابراین:

$$3\langle z'^2 \rangle = \langle r'^2 \rangle \quad (5)$$

و با توجه به رابطه‌ی (۳) گشتاور چهارقطبی الکتریکی صفر می‌شود. اما اگر مقدار بیشتری از چگالی بار هسته در امتداد محور  $z'$  قرار گرفته باشد به بیان دیگر اگر داشته باشیم:

$$3\langle z'^2 \rangle > \langle r'^2 \rangle \quad (6)$$

در آن صورت  $Q > 0$  می‌شود و هسته را غیر کروی کشیده می‌نامند. اگر چگالی بار کمتری در امتداد محور  $z'$  قرار گرفته باشد به بیان دیگر اگر داشته باشیم:

$$3\langle z'^2 \rangle < \langle r'^2 \rangle \quad (7)$$

آنگاه  $Q < 0$  می‌شود و هسته را غیر کروی پخت می‌نامند.

حال فرض کنید که در ناحیه‌ی معینی از فضا، توزیع جریان الکتریکی وجود دارد توزیع جریان توسط چگالی جریان  $\vec{J}(\vec{r}')$  مشخص می‌شود. بردار  $\vec{r}'$  نقطه‌ی مشخصی از توزیع جریان را نسبت به مبدا نشان می‌دهد. برای محاسبه‌ی میدان مغناطیسی  $\vec{B}$  ناشی از توزیع جریان  $\vec{J}$ ، ابتدا پتانسیل برداری  $\vec{A}(\vec{r})$  را با انتگرال‌گیری روی تمام جریانهای نمونه حساب می‌کنیم.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8)$$

سپس میدان مغناطیسی را توسط رابطه‌ی زیر حساب می‌کنیم.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9)$$

پس از کمی عملیات ریاضی که می‌توان آن را در کتابهای استاندارد الکترومغناطیسی یافت، می‌توانیم پتانسیل برداری را به صورت زیر بنویسیم.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \int \vec{J}(\vec{r}') dv' + \frac{1}{r^3} \int \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') dv' + \dots \right] \quad (10)$$

و یا

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (11)$$

که در آن  $\vec{\mu}$  گشتاور دو قطبی مغناطیسی است و برابر است با:

$$\vec{\mu} = (1/2) \int dv' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (12)$$

قسمت زیر انتگرال  $\vec{\mu}$  شامل چگالی بار و حاصلضرب برداری  $\vec{r}' \times \vec{v}'$  است که در مورد ذره‌ای به جرم

$m$  برابر  $\frac{\vec{l}}{m}$  می‌شود که در آن  $\vec{l}$  تکانه زاویه‌ای مداری است. چگالی بار، به صورت  $e|\psi(r)|^2$  است.

بنابراین، می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mu = \frac{e}{2m} \int dv' \psi^*(\vec{r}') \vec{l} \psi(\vec{r}') \quad (13)$$

اگر تابع موج در پایه‌ی توابع ویژه  $l_z$  نوشته شده باشد. در این صورت فقط مولفه‌ی  $z$  انتگرال غیر صفر

است و داریم:

$$\mu_z = \frac{e}{2m} \int dv' \psi^*(\vec{r}') l_z \psi(\vec{r}') \quad (14)$$

$$\mu_z = \frac{e\hbar}{2m} m_l \quad (15)$$

که در آن  $\langle l_z \rangle = m_l \hbar$  است.

چیزی که در آزمایشگاه به عنوان گشتاور دو قطبی مغناطیسی مشاهده می‌کنیم، بنا به تعریف،

مقدار  $\mu_z$  است که متناظر با مقدار بیشینه‌ی  $l + 1$  است و بنابراین گشتاور دو قطبی مغناطیسی  $\mu$

عبارت است از:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m} l \quad (16)$$



کمیت  $\mu = \frac{e\hbar}{2m}$  دارای بعد گشتاور دو قطبی مغناطیسی است. اگر به جای  $m$  جرم پروتون را قرار دهیم، مگنتون هسته‌ای  $\mu_N$  به دست می‌آید.

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15245 \times 10^{-8} \text{ ev/T} \quad (17)$$

با در نظر گرفتن اسپین ذاتی که مشابه کلاسیک ندارد، معادله‌ی (۱۶) را بسادگی تعمیم می‌دهیم.

$$\mu_{nucl} = (g_l l + g_s s) \mu_N \quad (18)$$

که  $l$  و  $s$  اعداد کوانتومی تکانه‌ی زاویه‌ای مداری و اسپینی هستند و  $g_l$  و  $g_s$  مولفه‌های مداری و ذاتی ضریب  $g$  در برابر  $\mu$  هستند که برای پروتون و نوترون چنین است:

$$\text{برای پروتونها} \begin{cases} g_l = 1 \\ g_s = 5.585 \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{برای نوترونها} \begin{cases} g_l = 0 \\ g_s = -3.826 \end{cases} \quad (20)$$

1. Tegen. R, Brockmann. R and Weise. W. (1982) "**Electromagnetic Properties of Relativistic Quarks in Confining Potentials**" Z. Phys. A- Atoms and Nuclei 307, pp 339-350.
2. Griffiths D. J. (1984), "**Introduction to Elementary Particles**", John Wiley & Sons, Inc, pp. 27.
3. Bernard L. Cohen. (1971), "**Concepts of Nuclear Physics**", Mc Graw-Hill, pp. 18-36.
4. Kenneth S. Krane. (1988), "**Introductory Nuclear Physics**", John Wiley & Sons, pp. 10-29.
5. F. E Close. (1979), "**An Introduction to Quarks and Partons**", academic press, London New York San Francisco, pp. 494.
6. F. Gross. (1994), "**Relativistic to Quantum Mechanics and Field Theory**", John Wiley & Sons, Inc, pp. 168.
7. R. K. Bahaduri. (1988), "**Models of the Nucleon from Quarks to Soliton**", Wesley publ. Co, Inc, pp. 120.
8. Halzen. F & Martin D. (1984), "**Quarks and leptons**", John Wiley, pp. 168-169.
9. Giannini M M, E Santopinto & Vassallo A. (2001) "**hypercentral constituent quark model and isospin dependence**" Eur. Phys J, A12, pp 447.
10. A. A. Rajabi. (2003) "**Static properties of hadrons from MIT bag model with interacting quarks**" Indian Journal of Pure & Applied Physics, vol. 41, pp 89-94.
11. A. A. Rajabi. (2007) "**A Method to solve the Schrodinger Equation for Any Power Hypercentral Potentials**" Theor. Phys, Vol. 48, No. 1, pp 151-158.
12. A. A. Rajabi. (2004) "**IMPROVED MIT BAG MODEL WITH HYPERCENTRAL INTERACTING POTENTIAL**" Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. 28, No. A2, pp 257-266.
13. A. A. Rajabi. (2005) "**Hypercentral Constituent Quark Model and Isospin for the Baryon Static Properties**" Journal of science, Islamic Republic of Iran, 16 (1), pp 73-79.
14. A. A. Rajabi. (2006) "**Determining the Relation between Effective Coupling Constant and Quark Mass in the Parton Model Using Massive Nucleonic Quarks in Hyper Central Potential**" Indian Journal of Pure & Applied Physics, Vol. 44, No. 7, pp 512-518.
15. Giannini M M, E Santopinto & Vassallo A. (2003) "**An Overview of the Hypercentral Constituent Quark Model**" nucl-th/0301017v1, pp 1-10.
16. Znojil M and Yanovich D. (2004) "**New Type of Exact Solvability and of a Hidden Nonlinear Dynamical Symmetry in Anharmonic Oscillators**" J Math Phys, vol. 50, pp 1010-1017.

17. Shi-Hai Dong. (2002) "**On the Solutions of the Schrodinger Equation with some Anharmonic Potentials: Wave Function Ansatz**" Physica Scripta. Vol. 65, pp 289-295.
18. A Faessler. (1991) "**The Quark Model, Deuteron Properties and Magnetic Moments**" Chinese Journal of Physics, Vol. 29, No. 6, pp 533-552.
19. Henry M. (1940) "**Relativistic Magnetic Moment of a Charged Particle**" Phys Rev, Vol. 57, pp 383-386.
20. M. G. Mayer and J. H. D. Jensen. (1955) "**Elementary Theory of Nuclear Shell Structure**" Wiley, New York, pp 231.
21. J Avery. (2002), "**Hyperspherical Harmonics and Generalized Sturmians**", H. C. Orsted Institute, University of Copenhagen. Copenhagen, Denmark, Vol. 4, pp. 102.
22. M. Fabre de la Ripelle, H. Fiedeldey, and S. A. Sofianos. (1998) "**Integrodifferential equation for few-and many-body systems**" physical Review C, Vol. 38, pp 449-466.
23. M. Ferraris, M. M. Giannini, M. Pizzo, E. Santopinto and L. Tiator. (1995) "**A three-body force model for the baryon spectrum**" Physics Letters B, Vol. 364, pp 231-238.
24. A. Sitenko and V. Tartakovskii. (1997), "**Theory of Nucleus**", Theoretical of Physics, pp. 6.
25. H. S. Hans. (2001), "**Nuclear Physics**", New Age International, pp. 101.
26. R. Krivec. (1998) "**Hyperspherical-Harmonics Methods for Few-Body Problems**" Few-Body Systems 25, pp 199-238.

## **Abstract**

In nuclear physics deuteron is considered as a two-body system, that solving Schrödinger equation for this system gives static features including magnetic moment. But in this work deuteron which including u and d quarks, is considered as a relativistic system and a mathematical method is presented for solving the Dirac equation system. In this way, that treated within the hyperspherical harmonics, the hypercentral potential is assumed to depend on the hyperradius only. Using the central potential  $u(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$  and analytical solution of Dirac equation for six-body deuteron system, we find eigenfunction and magnetic moment.

Keywords: deuteron, Dirac equation, hyperspherical coordinate, Jacobian coordinate, magnetic moment



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics

**Calculation Magnetic Moment of Deuteron  
Based on Quark Model**

by

**Maryam Piri**

Supervisor:

**Prof. A. A. Rajabi**

Advisor:

**Dr. M. R. Shojae**

Feb 2010