

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی همبستگی‌های کوانتومی بین کیوبیت‌های بار در جفت نقاط کوانتومی

نگارنده: مرضیه بتوندی پور

استادان راهنما

دکتر حسین موحدیان
دکتر مرتضی رفیعی

شهریور ۱۳۹۶

تشکر و قدردانی...

این پژوهش را اگر شایسته باشد تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش آلام زمینی‌ام است

به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پرمهر پدرم
به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم
که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانی‌تان را
سپاس نتوانم بگویم.

امروز هستی‌ام به امید شماست و فردای کلید باغ بهشت‌م رضای شماست.
ره‌آوری گران سنگ‌تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم‌گونه،
غبار خستگی‌تان را بزدايد.

تقدیم به خواهر و برادرانم، همراهان همیشگی و آنان که آفتاب مهرشان در آستانه قلبم هرگز غروب نخواهد
کرد.

سپاس‌گزاری...

سپاس‌ خدایی را که از شدت حضور ناپیداست. او که اندیشه نیکو در دل نگاشت. او را می‌ستایم به خاطر لحظه لحظه حس بودنش در کنارم. ستایش می‌کنم او را که آثار قدرتش بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. نهال را “باران” باید، تا سیرابش کند از آب حیات و “آفتاب” باید تا بتاباند نیرو را و محکم کند شاخه‌های تازه روییده را؛ بسی شایسته است از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر “مرتضی رفیعی” که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است.

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر “حسین موحدیان” آموزگاری که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

با سپاس بی دریغ خدمت دوستان گران‌مایه ام که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده اند بسیار سپاسگذارم.

و در انتها با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند کمال تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب مرضیه بتوندی پور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی همبستگی‌های کوانتومی بین کیوبیت‌های بار در جفت نقاط کوانتومی، تحت راهنمایی حسین موحدیان متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه بتوندی پور

شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

درهم‌تنیدگی یک مشخصه بنیادی مکانیک کوانتومی است. این مفهوم که اولین بار با طرح مقاله معروف *EPR* توسط شرودینگر مطرح شد، همبستگی غیرموضعی بین دو یا چند سیستم کوانتومی را توصیف می‌کند که این نوع همبستگی‌ها صرفاً کوانتومی است و مشابه کلاسیکی ندارد. این نوع همبستگی کوانتومی یکی از منابع اصلی برای فعالیت‌های پردازش و محاسبات کوانتومی است. بررسی حالت‌های درهم‌تنیده در سیستم‌های مورد استفاده در اطلاعات و محاسبات کوانتومی مورد مطالعه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. در اغلب سیستم‌های کوانتومی برهم‌کنش سیستم با محیط (سیستم کوانتومی باز) اجتناب ناپذیر است. درهم‌تنیدگی در اثر این نوع برهم‌کنش به صورت غالب کاهش می‌یابد ولی در مواردی با توجه به هندسه برهم‌کنش با محیط و نوع برهم‌کنش می‌توان به ایجاد یا حفظ درهم‌تنیدگی در این سیستم‌های کوانتومی باز دست یافت. برای بررسی دینامیک سیستم‌های باز کوانتومی، می‌توان از روش معادله اساسی (مارکوفی یا غیرمارکوفی) و یا ابرعملگرها استفاده کرد. از سیستم‌های مورد علاقه در ایجاد کیوبیت‌ها می‌توان به نقطه‌های کوانتومی اشاره نمود. بدین منظور با به‌دام اندازی یک الکترون در نقطه کوانتومی و کنترل برهم‌کنش آن با نقطه‌های کوانتومی دیگر می‌توان به ساختار تجربی یک کیوبیت دست یافت. در عین حال جفت نقطه‌های کوانتومی با یک الکترون به‌دام افتاده در آن نیز نقش یک کیوبیت را ایفا می‌نماید. در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی مفاهیم اولیه مربوط به نظریه اطلاعات کوانتومی می‌پردازیم و سپس به معرفی جفت نقطه‌های کوانتومی، ساختار آن‌ها و چگونگی دستیابی به یک کیوبیت توسط آن‌ها می‌پردازیم. در ادامه به معرفی دقیق‌تر سیستم کوانتومی باز پرداخته و با معرفی دینامیک مارکوفی، معادله اساسی مارکوفی را برای یک سیستم کوانتومی باز به دست می‌آوریم. در انتها ضمن معرفی مدل مورد بررسی که شامل دو جفت نقطه کوانتومی است که با حمام گرمایی مشترک برهم‌کنش می‌کنند، با استفاده از معادله اساسی مارکوفی، به بررسی دینامیک همبستگی کوانتومی می‌پردازیم. در این بررسی، دینامیک درهم‌تنیدگی به ازای حالت‌های اولیه مختلف و در دماهای متفاوت مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: همبستگی کوانتومی، درهم‌تنیدگی، درهم‌تنیدگی تشکیل، نقطه کوانتومی، جفت نقطه‌های کوانتومی، سیستم باز کوانتومی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. بتوندی پور، مرضیه؛ رفیعی، مرتضی؛ موحدیان، حسین، (۱۳۹۶) ”دینامیک همبستگی کوانتومی در دو جفت نقطه‌های کوانتومی” ، دومین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی، دانشگاه صنعتی شاهرود

۲. بتوندی پور، مرضیه؛ رفیعی، مرتضی؛ موحدیان، حسین، (۱۳۹۶) ”بررسی درهم‌تنیدگی در جفت نقطه‌های کوانتومی در حضور و عدم حضور اتلاف” ، کنفرانس فیزیک ایران، دانشگاه یزد

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	۱ مفاهیم
۱	۱.۱ حالت کوانتومی
۱	۲.۱ نظریه اطلاعات کوانتومی
۲	۱.۲.۱ ماتریس چگالی
۲	۲.۲.۱ ماتریس چگالی کاهش یافته
۳	۳.۲.۱ دینامیک یک زیر سیستم به عنوان یک نگاشت مثبت
۵	۴.۲.۱ بیت کلاسیکی
۵	۵.۲.۱ کیوبیت (بیت کوانتومی)
۷	۶.۲.۱ چندکیوبیتی
۷	۳.۱ حالت‌های همبسته کوانتومی
۸	۱.۳.۱ آنترویی وان- نیومن
۸	۲.۳.۱ آنترویی وان- نیومن
۹	۳.۳.۱ درهم‌تنیدگی و وضعیت
۹	۴.۳.۱ سنجه درهم‌تنیدگی
۱۰	۴.۱ کامپیوترهای کوانتومی
۱۳	۲ نقطه‌های کوانتومی و بررسی انرژی الکترواستاتیکی در جفت نقطه‌های کوانتومی
۱۳	۱.۲ نقطه‌های کوانتومی (QD_s)
۱۶	۲.۲ جفت نقطه‌های کوانتومی (DQD)
۱۷	۳.۲ مدل مداری سیستم جفت نقطه کوانتومی
۲۵	۳ سیستم‌های باز کوانتومی و اثر آن بر همبستگی‌های کوانتومی
۲۵	۱.۳ مقدمه
۲۵	۲.۳ دینامیک سیستم باز کوانتومی
۲۶	۳.۳ فرآیندهای مارکوفی
۳۴	۴.۳ معادله اساسی اپتیک کوانتومی

۳۴	ماده در میدان‌های تابشی کوانتیده	۱.۴.۳
۳۷	انجام تقریب بورن-مارکوفی	۲.۴.۳
۳۸	محیط گرمایی	۳.۴.۳
۴۳		بررسی دینامیک همبستگی کوانتومی کیوبیت‌های بار در جفت نقطه‌های کوانتومی	۴
۴۳	مقدمه	۱.۴
۴۳	حل معادلات تحول یک سیستم جفت نقطه کوانتومی	۲.۴
۵۰	دینامیک همبستگی‌های کوانتومی <i>DQDs</i>	۳.۴
۵۰	بررسی درهم‌تنیدگی تشکیل در عدم حضور اتلاف	۱.۳.۴
۵۲	بررسی درهم‌تنیدگی تشکیل در حضور اتلاف و برهم‌کنش‌های مختلف	۲.۳.۴
۵۷			مراجع

فهرست تصاویر

۶	کیوبیت (بیت کوانتومی)	۱.۱
۶	برهم نهی حالت‌های $ 0\rangle, 1\rangle$	۲.۱
۱۵	نقطه کوانتومی با تونل‌زنی تک الکترونی	۱.۲
	یک بازبینی از شکل ۱.۲ می‌باشد. با توجه به اینکه ولتاژ گیت‌ها تنها برای ارجاع نشان داده شده‌اند. گیت‌ها در سطح نقطه‌های کوانتومی قرار نمی‌گیرند	۲.۲
۱۵	یک جفت نقطه کوانتومی و حالت‌های اسپینی هر الکترون حبس شده در هر نقطه کوانتومی [۳۱]	۳.۲
۱۶	این تصویر یک عکس از سیستم DQD می‌باشد که توسط توسط گروه چانگ در دانشگاه Duke استفاده شده است	۴.۲
۱۷	این شکل مدل مداری سیستم جفت نقطه‌های کوانتومی است که برای انجام محاسبات الکترواستاتیکی استفاده می‌شود. از متغیرهای استفاده شده در شکل، در معادلات نیز از آن‌ها استفاده شده است	۵.۲
۱۸	معرفی شماتیک دو جفت DQD با یک الکترون جایگزیده در سمت راست و سمت چپ DQD	۱.۴
۴۴	همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی $J = 4\Delta(a)$ ، $J = 4\Delta(b)$ و $J = \frac{\Delta}{4}(c)$ ، $\eta = 0$	۲.۴
۵۱	همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $k, T = 0.2, 0.5$ و $\eta = 0.1$	۳.۴
۵۲	همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $k, T = 0.2, 0.5$ و $\eta = 0.05$	۴.۴
۵۳	همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $k, T = 0.2, 0.5$ و $\eta = 0.1$	۵.۴
۵۴	همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $k, T = 0.2, 0.5$ و $\eta = 0.05$	۶.۴
۵۴	همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $k, T = 0.2, 0.5$ و $\eta = 0.05$	۶.۴

۷.۴ همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌زای
دماهای مختلف $k = 0.1, 0.5, 1$ و $T = 0.1$ و $\eta = 0.1$ ۵۵

فصل ۱

مفاهیم

در این فصل ابتدا به معرفی مختصری از مفاهیم مانند اطلاعات کوانتومی و همبستگی‌های کوانتومی می‌پردازیم. در ابتدا اطلاعات کوانتومی را بیان می‌کنیم، سپس درهم‌تنیدگی کوانتومی را که یکی از انواع همبستگی‌های کوانتومی است را معرفی می‌کنیم و پس از آن به معرفی سنج‌های درهم‌تنیدگی می‌پردازیم.

۱.۱ حالت کوانتومی

حالت کوانتومی (*quantum state*) که به اختصار حالت نیز نامیده می‌شود، توصیف کاملی از یک دستگاه فیزیکی است که در مکانیک کوانتومی، حالت یک سیستم کوانتومی را می‌توان با بردار حالت $|\psi\rangle$ در یک فضای هیلبرت نمایش داد. بردار حالت جای سرعت و مکان در فیزیک کلاسیک را می‌گیرد.

۲.۱ نظریه اطلاعات کوانتومی

در دنیای شگفت انگیز مکانیک کوانتومی اتفاق‌هایی که در حین یک فرآیند برای یک سامانه کوانتومی رخ می‌دهد اهمیت چندانی ندارد و تنها حالت‌های اولیه و نهایی سامانه از اهمیت برخوردارند [۱]. در نظریه اطلاعات کوانتومی سیستم‌های متغییر پیوسته کاربردهای فراوانی دارند از جمله در انتقال اطلاعات و کدگذاری به کار می‌روند. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که حالت کوانتومی شامل چه مقدار اطلاعات است؟

فرض می‌کنیم یک سیستم فیزیکی را در یک حالت معین آماده کرده‌ایم و می‌خواهیم به طریقی سیستم را مورد آزمون قرار دهیم. قبل از اینکه نتیجه را به صورت تجربی به دست آوریم، ما تنها می‌توانیم احتمال‌های موجود را برای نتیجه‌های ممکن حدس بزنیم. اما بعد از اندازه‌گیری یکی از نتیجه‌های ممکن به طور حتم اتفاق افتاده و ما اطلاعات کامل از حالت سیستم به دست می‌آوریم. میزان اطلاعات موجود در یک حالت، به معنی مقدار اطمینان ما از پیشگویی مقدماتی برای نتیجه هر آزمون، بر روی آن حالت است [۳].

۱.۲.۱ ماتریس چگالی

در دنیای واقعی، اطلاعات ما از حالت سامانه بعد از اندازه‌گیری کامل نیست و در ضمن هیچ سامانه‌ای به طور کامل از محیط پیرامون خود مستقل نیست. ماتریس چگالی زبان مناسبی برای توصیف سیستم‌های کوانتومی که کاملاً شناخته شده نیستند به حساب می‌آید. حالت یک دستگاه در فضای هیلبرت با یک ماتریس هرمیتی نمایش داده می‌شود، این ماتریس که ماتریس چگالی نامیده می‌شود شامل تمام اطلاعات مهم فیزیکی دستگاه است. ماتریس چگالی گاهی عملگر چگالی نامیده می‌شود. ارزش انتظاری هر مشاهده‌پذیر که با عملگر هرمیتی A داده می‌شود، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle A \rangle_\rho = Tr(A\rho) \quad (1.1)$$

یک عملگر، عملگر چگالی است اگر و تنها اگر دارای خواص زیر باشد:

۱. ρ یک ماتریس هرمیتی است. ($\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$)

۲. ρ یک ماتریس مثبت است. ($\hat{\rho} \geq 0$)

۳. رد ماتریس ρ برابر واحد است. ($Tr(\hat{\rho}) = 1$)

ماتریس چگالی در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.1)$$

که در آن بردارهای حالت دستگاه و P_i احتمال حضور دستگاه در حالت $|\psi_i\rangle$ و $\sum_i P_i = 1$ است. برای حالت آمیخته $1 < Tr(\hat{\rho}^2)$ و $\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ است. اگر در رابطه (۲.۱) یکی از احتمالات غیر صفر باشد در این حالت می‌گوییم ذره در یک حالت خالص $1 = Tr(\hat{\rho}^2)$ و $\hat{\rho} = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ است.

۲.۲.۱ ماتریس چگالی کاهش یافته

برای به دست آوردن حالت یک بخش از سامانه چندبخشی باید بر روی درجه‌های آزادی بخش‌های دیگر ردگیری نماییم. نتیجه این ردگیری جزئی ماتریس چگالی کاهش یافته مورد نظر است [۳]. ماتریس

چگالی (عملگر چگالی) کاهش یافته برای توصیف زیر دستگاه‌های یک دستگاه کوانتومی به کار می‌رود [۴] در حالت کلی ماتریس چگالی متشکل از دو زیر دستگاه A, B به صورت $\hat{\rho}_{AB}$ توصیف می‌شود. ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho}_{AB}) \quad (3.1)$$

در واقع با عمل ردگیری نسبت به جز دیگر، اطلاعات مربوط به آن را حذف کرده‌ایم، با فرض اینکه فضای هیلبرت سیستم A, B دو بعدی است، ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر اعمال می‌شود [۵]:

$$\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho}_{AB}) = \langle b_1 | \hat{\rho}_{AB} | b_1 \rangle + \langle b_2 | \hat{\rho}_{AB} | b_2 \rangle \quad (4.1)$$

که در آن $|b_1\rangle$ و $|b_2\rangle$ پایه‌های راست هنجار در فضای حالت B هستند [۴].

۳.۲.۱ دینامیک یک زیر سیستم به عنوان یک نگاشت مثبت

حالت یک سامانه کوانتومی یعنی ψ مطابق با معادله زیر در زمان تحول می‌یابد [۲]:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (5.1)$$

که در آن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی برهم‌کنش به دست می‌آید. این رابطه البته تا موقعی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالت خالص توصیف شود. در غیر این صورت یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نیست و بایک ماتریس چگالی توصیف می‌شود، چنانکه در مکانیک آماری دیده‌ایم این ماتریس چگالی بر طبق رابطه زیر در زمان تحول می‌یابد:

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (6.1)$$

این رابطه تحول زمانی ماتریس چگالی را تنها در یک حالت خاص بیان می‌کند و آن هنگامی است که برهم‌کنش سیستم با محیط صفر و یا خیلی ضعیف است. برای آنکه این موضوع را بخوبی دریابیم فرض کنیم در لحظه صفر، حالت سیستم که آن را با A نشان می‌دهیم و محیط که با B نشان می‌دهیم به صورت زیر باشد:

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A \otimes \rho_B \quad (7.1)$$

حال اگر هامیلتونی سامانه و محیط به شکل زیر باشد:

$$H_{AB} = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B \quad (8.1)$$

در این صورت عملگر تحول سامانه و محیط به شکل زیر بیان می شود.

$$\begin{aligned} U_{AB}(t, t_0) &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_{AB}(t-t_0)} = e^{-\frac{i}{\hbar} (H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B)(t-t_0)} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_A(t-t_0)} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar} H_B(t-t_0)} = U_A(t, t_0) \otimes U_B(t, t_0) \end{aligned} \quad (9.1)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) &= U_{AB}(t, t_0) \rho_{AB} U_{AB}^\dagger(t, t_0) \\ &= (U_A(t, t_0) \otimes U_B(t, t_0)) \rho_{AB} (U_A^\dagger(t, t_0) \otimes U_B^\dagger(t, t_0)) \\ &= U_A(t, t_0) \rho_A(t_0) U_A^\dagger(t, t_0) \otimes U_B(t, t_0) \rho_B(t_0) U_B^\dagger(t, t_0) \end{aligned} \quad (10.1)$$

در نتیجه ماتریس چگالی سامانه بعد از گذشت زمان t برابر می شود با

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = U_A(t, t_0) \rho_A(t_0) U_A^\dagger(t, t_0) \quad (11.1)$$

که همان معادله (۶.۱) است. بنابراین ماتریس چگالی سامانه فقط موقعی به این صورت ساده تحول می یابد که برهم کنش بین محیط و سامانه صفر باشد و یا اینکه فوق العاده کوچک باشد. حالت اخیر همانی است که در مکانیک آماری با آن مواجه هستیم. در ادامه دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهم کنش بین محیط و سامانه کوچک نیست بررسی می کنیم. اهمیت این موضوع بدین سبب است که در کامپیوترهای کوانتومی و به طور کلی در سامانه های کوانتومی ای که در سال ها و دهه های آینده با آن سروکار خواهیم داشت، یک سامانه کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند اتم یا یون تشکیل شده باشد برهم کنش های بین سامانه و محیط به همان اندازه مهم هستند که برهم کنش های درون سامانه مهم هستند. برای آنکه دینامیک کلی یک سامانه را بررسی نماییم فرض می کنیم در لحظه صفر سامانه در یک حالت $\rho_A(0)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد. تحت این شرایط چگالی سامانه و محیط در لحظه t برابر خواهد بود با

$$\rho_{AB}(t) = U(t) (\rho_A(0) \otimes |e\rangle \langle e|) U^\dagger(t) \quad (12.1)$$

که در آن $U(t)$ عملگر تحول سامانه و محیط است. ماتریس چگالی سامانه با محاسبه رد جزئی بر روی درجه های آزادی محیط به دست می آید. در نتیجه به دست می آوریم:

$$\rho_A(t) = tr_B(U(t) (\rho_A(0) \otimes |e\rangle \langle e|) U^\dagger(t)) \quad (13.1)$$

می توان طرف راست معادله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_A(t) = \sum_n M_n \rho_A(0) M_n^\dagger \quad (14.1)$$

که در آن

$$M_n = \langle m| U(t) |e\rangle \quad (15.1)$$

و $\{|m\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای محیط است. عملگرهای M_n بر روی سامانه اثر می‌کنند و به این ترتیب دینامیک عمومی سامانه به‌دست می‌آید. عملگرهای M_n عملگرهای کراوس نامیده می‌شوند و تعداد آن‌ها حداکثر برابر با بعد فضای هیلبرت محیط است. از تعریف عملگرهای کراوس یعنی رابطه (۱۵.۱) به راحتی می‌توان نشان داد که دارای خاصیت زیر هستند:

$$\sum_n M_n^\dagger M_n = 1 \quad (16.1)$$

در فصل (۳) به مطالعه دینامیک کوانتومی باز که با محیط برهم‌کنش می‌کند و اثر آن بر همبستگی کوانتومی می‌پردازیم. در مفهومی از تکنولوژی اطلاعات، سامانه کوانتومی می‌تواند به‌عنوان حامل‌های اطلاعات به‌کار رود. برای درک اثرهای متفاوت از سامانه کلاسیکی و کوانتومی بر روی تئوری اطلاعات، مناسب است با در نظر گرفتن اینکه چگونه اطلاعات کدگذاری می‌شوند، شروع کنیم. در رفتار استاندارد تئوری اطلاعات، اطلاعات در واحدهای ذخیره‌سازی گسسته که بیت نامیده می‌شوند کدگذاری می‌شوند.

۴.۲.۱ بیت کلاسیکی

در یک سامانه کلاسیکی، بیت به عنوان واحد بنیادی اطلاعات معرفی می‌شود که شامل دو مقدار ۰ و ۱ است. هر بیت در هر لحظه یا در حالت صفر و یا در حالت یک است. یک بیت کلاسیکی را می‌توان به راحتی اندازه‌گیری کرد و اطلاعات مورد نظر را به‌دست آورد بدون اینکه حالت دستگاه از بین برود.

۵.۲.۱ کیوبیت (بیت کوانتومی)

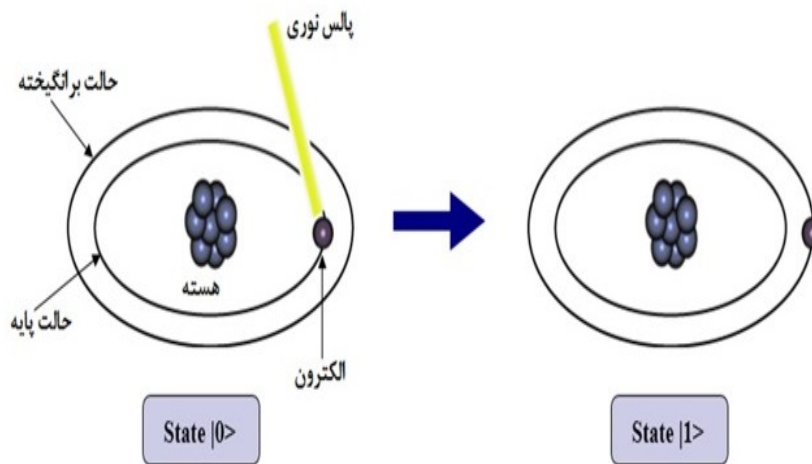
کیوبیت کوچکترین واحد ذخیره اطلاعات استاندارد و معیاری از مقدار اطلاعات کوانتومی است که در یک حالت کوانتومی بسته به نوع استفاده کیوبیت‌ها، می‌توانند به صورت کت‌های $|e\rangle$ یا $|g\rangle$ (حالت‌های پایه یا برانگیخته اتم)، $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ (حالت‌های فوتون)، $|+\rangle$ یا $|-\rangle$ (قطبش حالت‌های فوتون) و $|\downarrow\rangle$ یا $|\uparrow\rangle$ (حالت‌های اسپینی اسپین $\frac{1}{2}$) الکترون نمایش داده شوند. بیت کوانتومی (کیوبیت) در واقع یک سامانه کوانتومی دو حالتی است. یعنی سامانه‌ای که توسط مکانیک کوانتومی قابل توصیف است و هنگام اندازه‌گیری یکی از دو حالت ممکن خود را اختیار می‌کند، که به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

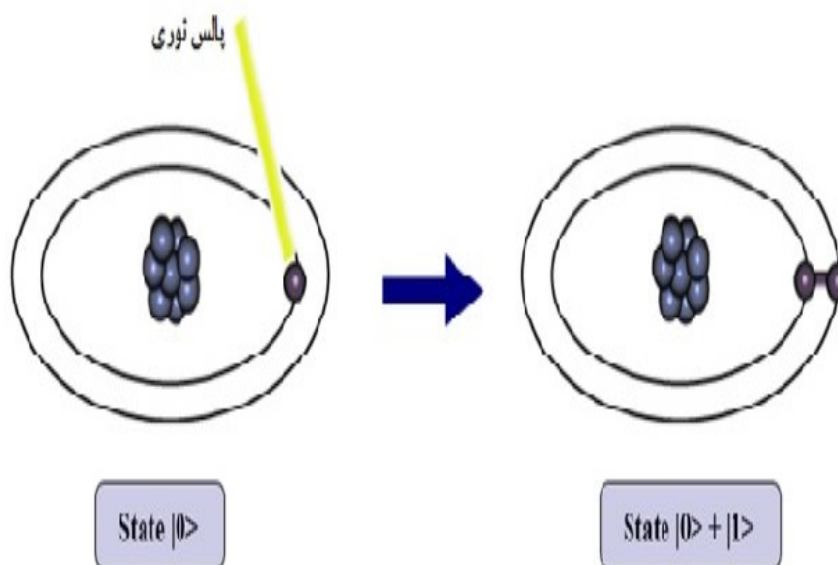
$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

کیوبیت‌ها به‌طور بالقوه می‌توانند بیش از دو حالت داشته باشند. بدین منظور که یک بیت کوانتومی می‌تواند حالت $|1\rangle$ و حالت $|0\rangle$ و یا برهم‌نهی از حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را داشته باشد کیوبیت‌ها می‌توانند

شکل ۱.۱: کیوبیت (بیت کوانتومی)



شکل ۲.۱: برهم نهی حالت‌های $|0\rangle, |1\rangle$



کارهایی انجام دهند که بیت‌های کلاسیکی نمی‌توانند [۶].

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

که در آن a, b در حالت کلی مختلط هستند هنگامی که کیوبیت را اندازه‌گیری می‌کنیم احتمال یافتن $|1\rangle$ برابر $|b|^2$ و $|0\rangle$ برابر $|a|^2$ می‌باشد چون $|a|^2 + |b|^2 = 1$ است. فرآیند و پردازش اطلاعات کوانتومی

همانند اطلاعات کلاسیکی توسط عملگرهای اولیه موسوم به مدارهای منطقی یا گیت توصیف می‌شوند. گیت‌های کوانتومی تبدیلات یکانی یا اندازه‌گیری‌ها در فضای هیلبرت H_2 هستند.

۶.۲.۱ چندکیوبیتی

یک سیستم کوانتومی n کیوبیتی متشکل از مجموعه n کیوبیت است، که در اینجا فرض می‌کنیم $n = 2$ باشد. یک حالت خاص دوکیوبیتی در پایه‌های راست هنجار $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ و در فضای هیلبرت $D^2 \otimes D^2 = D^4$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|\psi\rangle = \beta_1 |00\rangle + \beta_2 |01\rangle + \beta_3 |10\rangle + \beta_4 |11\rangle$$

که در آن $B_i \in D$ و $\sum |B_i|^2 = 1$ است.

۳.۱ حالت‌های همبسته کوانتومی

یکی از موضوعات مهم در بحث محاسبات و اطلاعات کوانتومی همبستگی‌های کوانتومی می‌باشند. می‌دانیم که وجود همبستگی بین اجزای سیستم می‌تواند باعث به‌وجود آمدن خواص فیزیکی کاملاً جدیدی در سیستم مرکب شود که هر کدام از زیر سیستم‌ها به‌طور مجزا وجود ندارد. یکی از انواع همبستگی کوانتومی، درهم‌تنیدگی می‌باشد که هنگام برهم‌کنش فیزیکی دو یا چند ذره مانند دو یا چند الکترون یا دو چند فوتون به‌وجود می‌آید. تعریف مجرد حالت درهم‌تنیده به این صورت است که به‌طور کلی یک حالت آمیخته را درهم‌تنیدگی گویند اگر نتوان آن را به صورت جمع محدبی از حالت‌های ضربی نوشت، در غیر این صورت حالت را جداپذیر یا به‌طور کلاسیکی، غیر وابسته گویند [۷، ۸، ۹]. در میان حالت‌هایی درهم‌تنیده، حالت‌های بل دوکیوبیتی با بیشینه درهم‌تنیدگی از ویژگی خاصی برخوردار هستند. حالت‌های بل، حالت‌های کوانتومی دوکیوبیتی با پایه‌های متعامد $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ در فضای چهاربعدي با بیشینه در هم تنیدگی هستند، این حالت‌ها به دلایل بیشینه بودن در هم تنیدگی آن‌ها، اهمیت خاصی در اطلاعات کوانتومی دارند، چهار بردار راست هنجارند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۴]:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (18.1)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad (19.1)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (20.1)$$

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (21.1)$$

که ۳ حالت اول تحت تعویض دو کیوبیت متقارن و حالت آخر پادمقارن می باشد. اگر حالت سیستم آمیخته باشد وضعیت دشوارتر است چون در این حالت ممکن است حالت‌هایی وجود داشته باشند که نتوان به صورت محلی آماده‌سازی کرد ولی آن‌ها نامساوی بل را ارضا می‌کنند. علت این امر وجود هر دو نوع همبستگی کلاسیکی و کوانتومی در حالت آمیخته است. بررسی جدایی‌پذیری حالت‌های آمیخته به تمایز بین این دو همبستگی ارتباط دارد.

۱.۳.۱ آنروپی وان- نیومن

اولین عملیات در نظریه اطلاعات کلاسیکی تعیین میزان اطلاعات درون یک پیام است. مفهوم اساسی نظریه اطلاعات کلاسیک آنروپی شانون است. این مسئله اولین بار توسط شانون در سال ۱۹۴۸ حل شد. با فرض اینکه x یک متغیر تصادفی باشد، آنروپی شانون بیان می‌کند که به‌طور متوسط، با دانستن مقدار x چه مقدار اطلاعات به دست می‌آوریم. در دیدگاه دیگر آنروپی شانون نشان‌دهنده این مطلب است که چقدر ابهام در مورد x ، قبل از مشاهده آن وجود دارد. با توجه به اینکه آنروپی شانون میزان اطلاعات متوسط موجود در یک توزیع احتمال کلاسیک را نشان می‌دهد، برای حالت‌های کوانتومی هم می‌توان به شیوه‌ای مشابه و با جایگزینی عملگر چگالی (ماتریس چگالی) با توزیع احتمال، مفهوم آنروپی را تعمیم داد. در واقع آنروپی وان نیومن تعمیم کوانتومی آنروپی شانون است. آنروپی وان نیومن ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (22.1)$$

که در آن $S(\rho)$ معرف سنجه قطعی درهم‌تنیدگی برای حالت‌های خالص است و λ_i ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته است. هرگاه ρ به صورت زیر قطری شود،

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \quad (23.1)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i \quad (24.1)$$

به این ترتیب آنروپی وان نیومن برابر است با همان آنروپی شانون برای توزیع احتمالی که از ویژه مقادیر ماتریس چگالی تشکیل شده است.

۲.۳.۱ خواص آنروپی وان- نیومن

۱. هرگاه ρ یک حالت خالص باشد، $S(\rho) = 0$.
۲. هرگاه $\rho' = U\rho U^\dagger$ که در آن U تبدیل یکانی است آنگاه $S(\rho') = S(\rho)$.
۳. هرگاه فضای هیلبرت ρ ، d بعدی باشد، $S(\rho) \leq \log_2 d$.

۳.۳.۱ درهم‌تنیدگی و موضعییت

وقتی دو سیستم فیزیکی باهم برهم‌کنش داشته باشند، همبستگی خاصی که ماهیت کوانتومی دارد بین آن دو سیستم ایجاد می‌شود که حتی ارتباط دو سیستم قطع می‌شود، باقی می‌ماند. این همبستگی غیرموضعی در صورتی که که حالت کوانتومی کل سیستم درهم‌تنیده باشد اتفاق می‌افتد [۱۱]. اگر یک اندازه‌گیری روی یک مشاهده‌پذیر مربوط به دستگاه اول انجام شود، می‌توان اطلاعاتی را نیز راجع به مشاهده‌پذیر مربوط به سیستم دوم بدون اندازه‌گیری روی آن به دست آورد. مسئول این عمل همبستگی کوانتومی است که ما آن را به عنوان درهم‌تنیدگی می‌شناسیم [۱۲]. درهم‌تنیدگی کوانتومی از همبستگی کوانتومی بین زیرسیستم‌های جدا از هم ناشی می‌شود. درهم‌تنیدگی کوانتومی یک ویژگی بنیادی مکانیک کوانتومی است که تفاوت اساسی بین فیزیک کوانتومی و کلاسیک را بیان می‌کند. درهم‌تنیدگی در بسیاری از برنامه‌های پردازش اطلاعات کوانتومی نظیر، محاسبات کوانتومی و رمزنگاری به کار می‌رود [۱۳، ۱۴].

۴.۳.۱ سنجه درهم‌تنیدگی

اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی و یافتن سنجه مناسب برای مقدار درهم‌تنیدگی یک مسئله گسترده در نظریه اطلاعات کوانتومی است. یک سنجه خوب و مناسب برای درهم‌تنیدگی حالت‌ها باید بتواند بین همبستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی تمایز قائل شود. روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی موجود در سامانه‌های کوانتومی پیشنهاد شده است:

۱. درهم‌تنیدگی دوبخشی در حالت خالص
۲. درهم‌تنیدگی دوبخشی در حالت آمیخته

سه نمایش برای تعیین مقدار درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته وجود دارد که عبارت‌اند از بهای درهم‌تنیدگی (E_C)، درهم‌تنیدگی تقطیرپذیر (E_D) [۱۵] و درهم‌تنیدگی تشکیل (E_F) [۱۶]. درهم‌تنیدگی تشکیل عبارت است از تعداد حالت‌های خالص مورد نیاز برای ایجاد حالت آمیخته مورد نظر. [۱۷]. مشکل مفهومی در مورد E_F وجود بینهایت تجزیه متفاوت از یک ماتریس چگالی است. بنابراین حتی در صورت دانستن مقدار درهم‌تنیدگی جفتی در حالت خالص، امکان استفاده راحت و آسان آن برای حالت‌های آمیخته وجود ندارد.

درهم‌تنیدگی تشکیل برای یک ماتریس چگالی ρ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$E_F(\rho) = \min \sum_i p_i S(\rho_{A,i}) \quad (25.1)$$

که در آن عملیات کمینه کردن بر روی همه حالت‌های $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ انجام می‌شود و $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ انجام می‌شود و $S(\rho_{A,i})$ آنروپی وان نیومن از ماتریس چگالی کاهش یافته $\rho_{A,i} = \text{tr}_B(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|)$ است. برای یک سامانه دو کیوبیتی رابطه درهم‌تنیدگی تشکیل به صورت زیر می‌باشد:

$$EoF = -f(c) \log_2 f(c) - (1 - f(c)) \log_2 (1 - f(c)) \quad (26.1)$$

که در آن $f(c) = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2}$ و C به تلاقی موسوم است [۱۸]. از آنجایی که E_F یک تابع یکنوا از کمیت تلاقی است بنابراین خود کمیت تلاقی نیز می‌تواند به‌عنوان سنج تلاقی برای میزان درهم‌تنیدگی به کار رود.

تلاقی برای یک ماتریس چگالی کاهش یافته دوبخشی عبارت است از:

$$C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (27.1)$$

که در آن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ ویژه مقادیر ماتریس

$$R = \sqrt{\rho}(\sigma^y \otimes \sigma^y)\rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y)\sqrt{\rho} \quad (28.1)$$

هستند.

۳. درهم‌تنیدگی چند بخشی

در این پژوهش سیستمی که مورد بررسی می‌باشد یک سیستم دو بخشی است، بدین منظور از روش دوم استفاده شده است.

۴.۱ کامپیوترهای کوانتومی

کامپیوترهای کوانتومی دستگاهی است که یک پدیده فیزیکی را براساس قوانین مکانیک کوانتومی به صورت منحصر به فردی در می‌آورد تا به صورت حالت جدید از پردازش، اطلاعات را تشخیص دهد. اینکه کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند در یک زمان چندین حالت داشته باشند به آن‌ها این امکان را می‌دهد که میلیون بار قدرتمندتر از کامپیوترهای فعلی کار کنند. چند حالت پذیری کیوبیت‌ها همان دلیلی است که باعث می‌شود کامپیوتر کوانتومی چندین محاسبه را در یک زمان انجام دهد، در حالی که در کامپیوترهای فعلی فقط یک محاسبه در یک لحظه امکان پذیر است. از زمانی که محققان از فواید احتمالی محاسبات کوانتومی آگاه شده‌اند تلاش بسیاری برای تحقق بخشیدن به یک کامپیوتر کوانتومی عملی صورت گرفته است [۱۹]. چند قانون کلی راهنمای محققان تجربی بوده است. نیلسون و چوانگ ۴ ابزار اساسی را برای دسترسی به یک کامپیوتر کوانتومی به صورت زیر بیان کرده‌اند:

۱. نمایش فیزیکی کیوبیت‌ها

۲. توانایی انجام عملیات واحد کنترل

۳. آماده سازی حالت اولیه کیوبیت‌ها

۴. درستی و دقت در اندازه‌گیری کیوبیت‌ها (خروجی محاسبات) سیستم‌های فیزیکی مختلفی وجود دارد که به‌طور بالقوه، پاسخگوی این نیازها می‌باشند. از جمله تله‌های یونی، اسپین هسته، اتصالات ابررسانا، ساختارهای نقطه‌های کوانتومی. یکی از معروف‌ترین سامانه‌هایی که توانسته ما را یک گام به تحقق ساخت کامپیوتر کوانتومی نزدیک کند توسط لاس و دیوینچنزو در سال ۱۹۹۸ معرفی شد که در آن اسپین الکترون‌های حبس شده در نقاط کوانتومی به‌عنوان کیوبیت در نظر گرفته شده است [۲۰، ۲۱، ۲۲].

فصل ۲

نقطه‌های کوانتومی و بررسی انرژی الکترواستاتیکی در جفت نقطه‌های کوانتومی

۱.۲ نقطه‌های کوانتومی (QD_s)

ساخت و تولید نقطه‌های کوانتومی یکی از زمینه‌های اصلی در تکنولوژی نانو است. نقطه‌های کوانتومی^۱ نانوساختارهای نیمه رسانایی هستند که در بعضی مواقع به عنوان اتم‌های ساختگی (مصنوعی) یا جزایر باری معرفی می‌شوند [۲۳]. نقطه‌های کوانتومی (نانوساختارها) به شدت به اندازه و شکل (هندسه) وابسته هستند. دیگر ساختارهای حالت جامد ($AlGaAs/GaAs$) با الکترون‌های به دام انداخته شده در یک صفحه‌ی دو بعدی در سطح فلز ساخته می‌شود (که گاز الکترونی دو بعدی $2DEG$ نامیده می‌شوند). در ساختارهای حالت جامد ($AlGaAs/GaAs$) رشد نقطه‌های کوانتومی به صورت لایه‌های روی هم و دو بعدی انجام می‌شود همانطور که در شکل ۱.۲ می‌بینید، به این شیوه رشد، روش فرانک فن در مرو گفته می‌شود. نقطه‌های کوانتومی به دلیل ویژگی منحصر به فرد از جمله طیف وابسته به اندازه [۲۴، ۲۵] و قطبش [۲۶] کاربردهای فوق العاده‌ای در زمینه علوم و مهندسی دارند. از جمله این کاربردها می‌توان در سلول‌های خورشیدی، لیزرها [۲۷]، اطلاعات کوانتومی [۲۸] و پزشکی [۲۹] اشاره کرد.

الکترون‌ها در مواد نیمه‌رسانا، در اندازه‌های بسیار بزرگتر از 10^9 نانومتر، بازه مشخصی از انرژی را دارند. وقتی یک الکترون انرژی متفاوتی از الکترون دیگر دارد، گفته می‌شود که در یک تراز انرژی متفاوت قرار

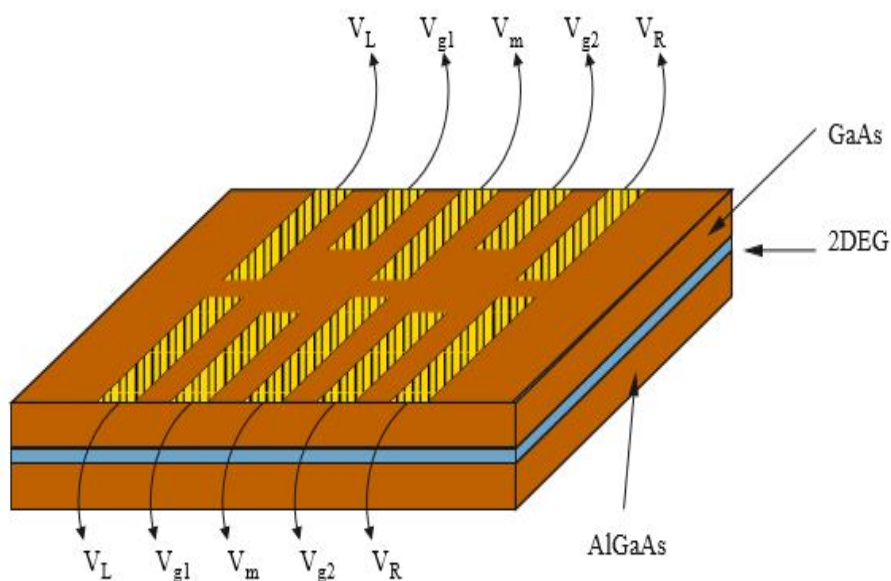
^۱quantum dots

دارد. خاصیت ذاتی الکترون‌ها باعث می‌شود که بیش از دو الکترون نتواند در یک تراز انرژی قرار بگیرند. در یک توده بزرگ از ماده نیمه‌رسانا، ترازهای انرژی بسیار نزدیک هم هستند، آنقدر نزدیک که به صورت یک بازه پیوسته توصیف می‌شوند، یعنی تفاوت انرژی دو تراز مجاور در حد صفر است. خاصیت دیگر مواد نیمه‌رسانا این است که درون بازه پیوسته انرژی‌های یک گپ (فاصله، شکاف) وجود دارد، یعنی الکترون‌ها مجاز به داشتن انرژی در این گپ نیستند. الکترون‌هایی که ترازهای پایین گپ را اشغال می‌کنند الکترون‌های ظرفیت در باند ظرفیت و الکترون‌های ترازهای بالای گپ الکترون‌های رسانش در باند رسانش نامیده می‌شوند. در یک نیمه‌رسانا وقتی حرکت الکترون در نوار رسانش و یا یک حفره در نوار ظرفیت در محدوده کوچکی از مرتبه طول موج دو بروی یا طول همدوسی فاز قرار می‌گیرد، نوار رسانش و نوار ظرفیت به زیر نوارهای دیگر که به بعد محدودسازی ساختار وابسته است، شکافته می‌شوند. در یک فضای بسیار کوچک، گسسته شدن انرژی و یا تکانه زاویه‌ای افزایش یافته و اثرهای کوانتومی مشهودتر می‌شوند. این پدیده به اثر کوانتیدگی اندازه موسوم است [۱].

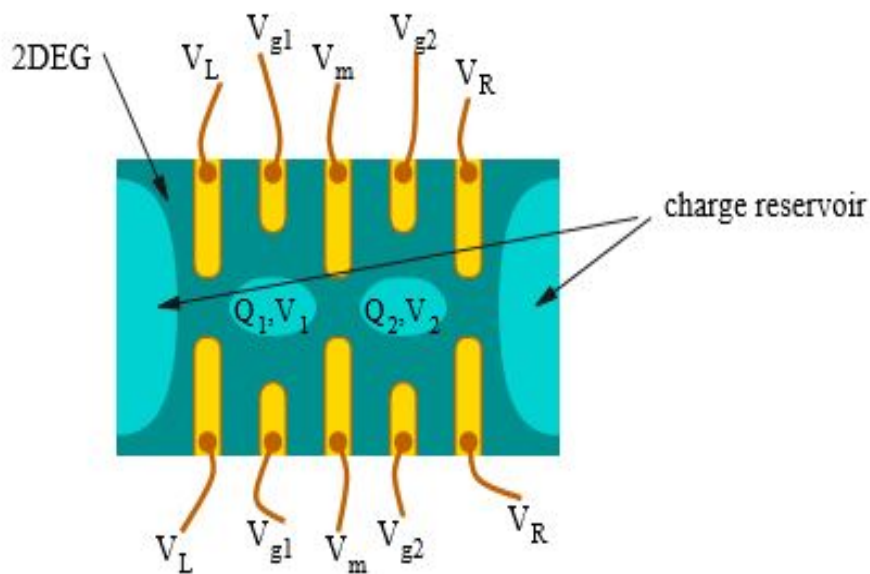
در مواد نیمه‌رسانا به حالت توده‌ای، درصد بسیار کمی از الکترون‌ها در نوار رسانش قرار می‌گیرند و بیشتر الکترون‌ها در نوار ظرفیت قرار می‌گیرند، به طوری که آن‌ها را تقریباً پر می‌کنند. همین پدیده باعث می‌شود که مواد نیمه‌رسانا در حالت عادی (غیر برانگیخته) نارسانای جریان الکتریکی باشند. اگر الکترون‌های بیشتری بخواهند در باند رسانش قرار گیرند، باید انرژی کافی برای بالا رفتن از گپ انرژی را دریافت کنند. تحریک با نور، میدان الکتریکی یا گرما می‌تواند تعدادی از الکترون‌ها را از نوار ظرفیت به نوار رسانش بفرستد. در این حالت، تراز ظرفیتی که خالی می‌شود، حفره نام دارد. زیرا در طی این رویداد، یک حفره موقت در نوار ظرفیت به وجود می‌آید. جفت شدگی بین الکترون‌های رسانشی و حفره‌ها را اکسیژون گویند.

اگر محدودسازی تنها در یک جهت صورت پذیرد، ساختار تشکیل شده یک ساختار دوبعدی موسوم به چاه کوانتومی است [۱]. از این ساختارها برای ساخت ابزارهای تونل‌زنی تک الکترونی استفاده می‌شوند. در اتصالات ریز امکان تونل‌زنی تک الکترونی وجود دارد در واقع به علت وجود میدان الکترواستاتیکی بار الکترون نمی‌تواند از این اتصال‌های خیلی کوچک عبور کند که این پدیده به بلوکه کردن کلومبی موسوم است. تنها هنگامی که انرژی الکترواستاتیکی بار در اثر تونل‌زنی کاهش یابد، امکان تونل‌زنی برقرار می‌شود. به لحاظ کمی وقتی که ظرفیت خازنی اتصال کمتر از $\frac{e^2}{k_B T}$ باشد (e بار الکترون، k_B ثابت بولتزمن و T دما است) تونل‌زنی اتفاق می‌افتد [۱]. یک نمای کلی از ساخت یک نقطه کوانتومی توسط این ساختارها در شکل ۲.۲ نشان داده شده است.

شکل ۱.۲: نقطه کوانتومی با تونل‌زنی تک الکترونی



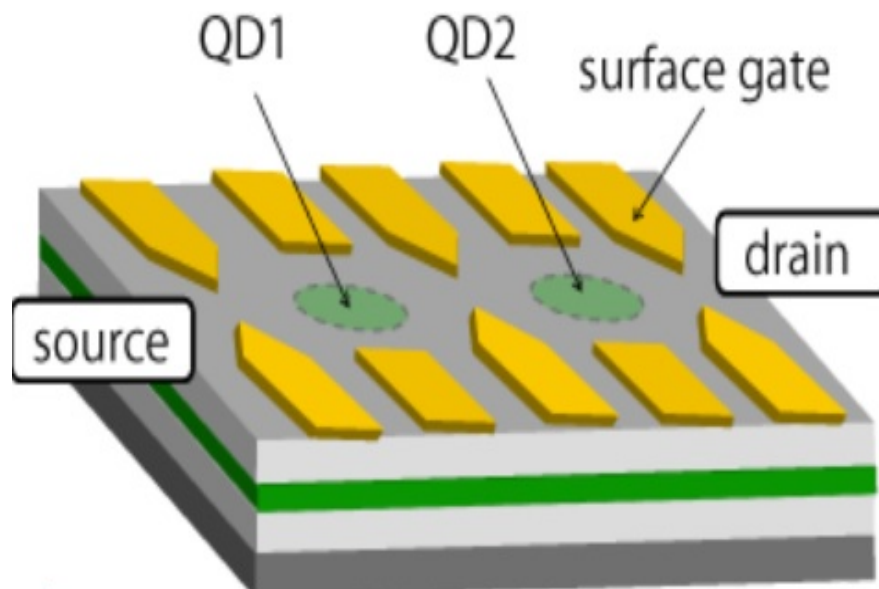
شکل ۲.۲: یک بازبینی از شکل ۱.۲ می‌باشد. با توجه به اینکه ولتاژ گیت‌ها تنها برای ارجاع نشان داده شده‌اند. گیت‌ها در سطح نقطه‌های کوانتومی قرار نمی‌گیرند



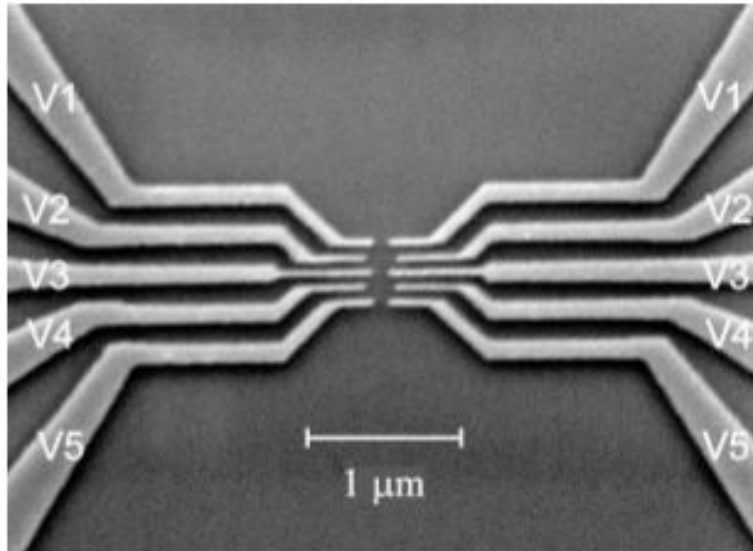
۲.۲ جفت نقطه‌های کوانتومی (DQD)

اسپین یک الکترون منفرد در یک نقطه کوانتومی، یک سیستم دو سطحی ذاتی است که به عنوان یک کیوبیت (بیت کوانتومی) در نظر گرفته می‌شود. کیوبیت اسپینی در ساختارهای نقطه کوانتومی می‌تواند یک روش برای محاسبات کوانتومی باشد، اما مسائل مهندسی در حال حاضر مانع قابل توجهی می‌باشد. در شبکه‌های اسپینی برهم‌کنش اسپینی بین اسپین‌ها قابل کنترل است [۳۰]. شکل ۳.۲ دو الکترون محبوس شده در جفت نقطه کوانتومی را نشان می‌دهد که با اعمال ولتاژ به گیت‌های بالایی، پتانسیل محبوس‌سازی الکترون‌ها را در یک گاز الکترونی دوبعدی ($2DEG$) فراهم می‌آورد. دستکاری اسپین الکترون در یک نقطه کوانتومی نیازمند کنترل دقیق ویژگی‌های مغناطیسی مواد می‌باشد. اعمال یک ولتاژ منفی به گیت‌های پشتی باعث تهی شدن $2DEG$ شده و بدین ترتیب می‌توان تعداد الکترون‌های موجود در هر نقطه کوانتومی را کنترل کرد. در رژیم تک الکترونی می‌توان به تعداد یک الکترون در هر نقطه کوانتومی دست یافت [۳۱] و با اعمال یک میدان مغناطیسی و استفاده از جفت‌شدگی اسپین الکترون با میدان مغناطیسی می‌توان حالت اولیه را ایجاد کرد. از طرفی چون کیوبیت‌ها به‌طور غیر مستقیم و فقط از طریق برهم‌کنش‌های اسپین-مدار به درجات آزادی بار در نقطه کوانتومی جفت می‌شوند، افت و خیزهای محیط الکترونی محیط الکترونی تأثیری در حالت آن‌ها ندارد و بنابراین واهمدوسی اسپین الکترون‌ها نسبتاً طولانی است.

شکل ۳.۲: یک جفت نقطه کوانتومی و حالت‌های اسپینی هر الکترون حبس شده در هر نقطه کوانتومی [۳۱]



شکل ۴.۲: این تصویر یک عکس از سیستم DQD می باشد که توسط گروه چانگ در دانشگاه Duke استفاده شده است



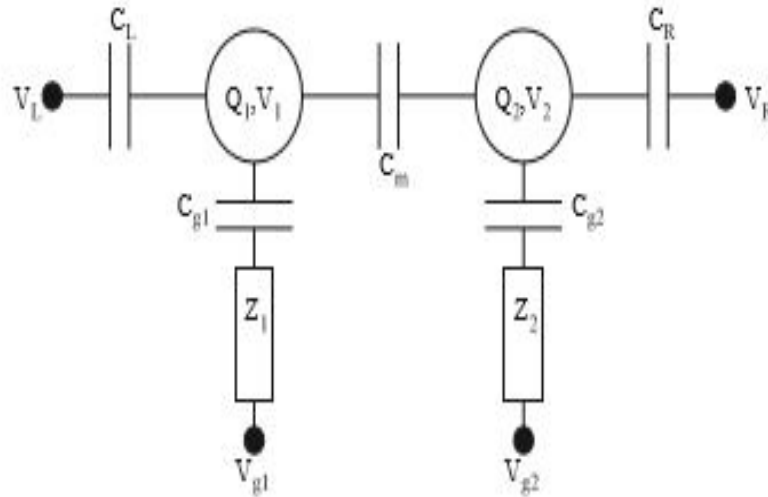
۳.۲ مدل مداری سیستم جفت نقطه کوانتومی

سیستم جفت نقطه کوانتومی (DQD) در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. این سیستم را می توان با نمودار مداری ۵.۲ نمایش داد. در شکل ۵.۲ سد تونلزی بین دو نقطه و بین هر نقطه و مخزن، توسط خازن ها نمایش داده می شود. منبع (چشمه) از طریق ظرفیت خازن C_l به اولین نقطه جفت می شود. همچنین چشمه دارای ولتاژ V_l می باشد. تخلیه دومین ولتاژ از طریق ظرفیت خازن C_R با ولتاژ V_R جفت می شود هر دو این نقطه ها با یک سد تونلزی به هم جفت می شوند که با C_m و ولتاژ گیت $V_{g_1(2)}$ نمایش داده می شود. در اینجا نوسانات ولتاژ گیت توسط امپدانس های وابسته به فرکانس $Z_{1(2)}(w)$ نمایش داده می شود. تعداد الکترون ها در نقطه $1(2)$ را با $N_{1(2)}$ نمایش می دهیم. این تعداد الکترون ها توسط ولتاژ $V_{1(2)}$ با مقدار کل $Q_{1(2)}$ کنترل می شوند. انرژی الکتروستاتیکی مستقیم جفت نقطه کوانتومی، با استفاده از نمودار ۵.۲ و روش هایی که در ادامه بیان می شوند، محاسبه می شوند انرژی الکتروستاتیکی به عنوان انتگرال حجم روی مربع میدان الکتریکی تعریف می شود.

$$u = \frac{U}{v}$$

$$U = uv = \int u dv \quad (1.2)$$

شکل ۵.۲: این شکل مدل مداری سیستم جفت نقطه‌های کوانتومی است که برای انجام محاسبات الکترواستاتیکی استفاده می‌شود. از متغیرهای استفاده شده در شکل، در معادلات نیز از آن‌ها استفاده شده است



که در اینجا u چگالی انرژی، U انرژی الکترواستاتیکی و v حجم است. در کلاسیک چگالی انرژی برای یک خازن به صورت زیر تعریف می‌شود پس

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.2)$$

که در یکای گاوس

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$$

پس

$$u = \frac{1}{8\pi} E^2 \quad (3.2)$$

با جایگذاری رابطه (۳.۲) در (۱.۲) داریم

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dv \quad (4.2)$$

که می‌توان انرژی الکترواستاتیکی را به صورت زیر به ظرفیت و ولتاژ وابسته کرد

$$U = \begin{cases} \frac{1}{2} QV \\ \frac{1}{2} CV^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

از طرفی

$$Q = CV \quad (۶.۲)$$

معادله (۵.۲) و (۶.۲) معادله زیر را ارضا می‌کند.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} V C V \\ &= \frac{1}{2} Q \frac{1}{C} Q \\ &= \frac{1}{2} Q C^{-1} Q \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

در اینجا ماتریس C ظرفیت خازن است. C و Q به صورت زیر می‌توان تعریف شوند:

$$C_{jj} = \sum_{k=0, k \neq j}^N c_{jk} \quad (۸.۲)$$

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{k=0}^N q_{jk} \\ &= \sum_{k=0}^N c_{jk} (V_j - V_k) \end{aligned} \quad (۹.۲)$$

C_{jj} ظرفیت بین رسانای j ام و k ام و Q_j بار کل است.

چون سه خازن C_m و C_{g1} و C_l از یک منبع تغذیه می‌کنند و این منبع دارای بار الکتریکی Q_1 می‌باشد، پس مجموع بار الکتریکی روی هر سه خازن برابر با بار الکتریکی Q_1 می‌باشد و همچنین چون سه خازن C_m و C_{g2} و C_R از منبع Q_2 تغذیه می‌کنند، پس بار الکتریکی هر سه خازن برابر با Q_2 می‌باشد. با استفاده از معادله (۹.۲) و شکل ۵.۲ معادله‌ای برای بار کل $Q_{1(2)}$ روی نقطه (۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q_l = C_l (V_1 + V_2)$$

$$Q_{g1} = C_{g1} (V_1 - V_{g1})$$

$$Q_m = C_m (V_1 - V_2)$$

$$Q_1 = Q_l + Q_{g1} + Q_m$$

با استفاده از معادله‌های فوق بار Q_1 را محاسبه می‌کنیم

$$Q_1 = C_l (V_1 - V_l) + C (V_1 - V_{g1}) + C_m (V_1 - V_2) \quad (۱۰.۲)$$

و برای بار Q_2 مشابه بار Q_1 عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Q_2 &= C_R(V_2 + V_R) \\ Q_m &= C_m(V_2 - V_1) \\ Q_{g2} &= C_{g2}(V_2 - V_{g2}) \\ Q_2 &= Q_{g2} + Q_R + Q_m \end{aligned}$$

$$Q_2 = C_2(V_2 - V_R) + C(V_2 - V_{g2}) + C_m(V_2 - V_1) \quad (11.2)$$

معادله‌های (۱۰.۲) و (۱۱.۲) را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_l V_1 - C_l V_l + C_{g1} V_1 - C_{g1} V_{g1} + C_m V_1 - C_m V_2 \\ Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} &= C_l V_1 + C_{g1} V_1 + C_m(V_1 - V_2) \\ &= V_1(C_l + C_{g1} + C_m) - C_m V_2 \end{aligned} \quad (12.2)$$

و

$$\begin{aligned} Q_2 &= C_R V_2 - C_R V_R + C_{g2} V_2 - C_{g2} V_{g2} + C_m V_2 - C_m V_1 \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} &= C_R V_2 + C_{g2} V_2 + C_m(V_2 - V_1) \\ &= V_2(C_R + C_{g2} + C_m) - C_m V_1 \end{aligned} \quad (13.2)$$

معادله (۱۲.۲) و (۱۳.۲) را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & -C_m \\ -C_m & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

که

$$C_1 = C_l + C_{g1} + C_m \quad (15.2)$$

$$C_2 = C_R + C_{g2} + C_m$$

فرض کنیم معادله (۱۴.۲)

$$A = BV \quad (16.2)$$

در یک B^\dagger ضرب کرده

$$B^\dagger A = B^\dagger BV \quad (17.2)$$

باتوجه به این نکته که $B^\dagger B = ۱$ می باشد پس:

$$B^\dagger A = V \quad (۱۸.۲)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} C_1 & -C_m \\ -C_m & C_2 \end{pmatrix} \quad (۱۹.۲) \\ \mathbf{B}^{-۱} &= \frac{۱}{|\mathbf{B}|} \begin{pmatrix} C_1 & -C_m \\ -C_m & C_2 \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{B}^{-۱} &= \frac{۱}{\|\mathbf{B}\|} \begin{pmatrix} C_2 & C_m \\ C_m & C_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که $\|\mathbf{C}\|$ دترمینان ماتریس ظرفیت است.

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{C}\| = C_2 C_1 - C_m^2$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{۱}{\|\mathbf{C}\|} \begin{pmatrix} C_2 & C_m \\ C_m & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} \end{pmatrix} \quad (۲۰.۲)$$

در معادله (۵.۲) تعریف کردیم که انرژی الکتروستاتیکی به صورت زیر می باشد.

$$U = \frac{۱}{۲} QV \quad (۲۱.۲)$$

حال اگر معادله (۲۰.۲) را در معادله فوق قرار دهیم

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\|C\|} \begin{pmatrix} C_2 & C_m \\ C_m & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\|C\|} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & C_m \\ C_m & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} \end{pmatrix} \quad (22.2)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\|C\|} \begin{pmatrix} Q_1 C_2 + Q_2 C_m & Q_1 C_m + Q_2 C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1} \\ Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2} \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\|C\|} [(Q_1 C_2 + Q_2 C_m)(Q_1 + C_l V_l + C_{g1} V_{g1}) + (Q_1 C_m + Q_2 C_1)(Q_2 + C_R V_R + C_{g2} V_{g2})]$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\|C\|} [Q_1^2 C_2 + Q_1 C_2 C_l V_l + Q_1 C_2 C_{g1} V_{g1} + Q_2 C_m Q_1 + Q_2 C_m C_l V_l + Q_2 C_m C_{g1} V_{g1} + Q_1 C_m Q_2 + Q_1 C_m C_R V_R + Q_1 C_m C_{g2} V_{g2} + Q_2^2 C_1 + Q_2 C_1 C_R V_R + Q_2 C_1 C_{g2} V_{g2}] \quad (23.2)$$

برای ساده کردن این معادله‌ها از جایگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q_{12} = -N_{1(2)} |e|$$

$$E_{C1} = \frac{e^2 C_2}{2 \|C\|}$$

$$E_{C2} = \frac{e^2 C_1}{2 \|C\|}$$

$$E_{cm} = \frac{e^2 C_m}{2} \quad (24.2)$$

اگر ولتاژ بایاس با ولتاژ پایه صفر باشد یعنی $V_R = V_l = 0$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{\sqrt{\|C\|}} \left[((N_1 |e\rangle)^2) \left(\frac{E_{C1} \sqrt{\|VC\|}}{e^2} \right) + ((N_2 |e\rangle)^2) \left(\frac{E_{C2} \sqrt{\|C\|}}{2} \right) \right. \\
 & + \circ + 2((-N_1 |e\rangle)(-N_2 |e\rangle) \left(\frac{E_{Cm} \sqrt{\|C\|}}{e^2} \right)) \\
 & + ((-N_1 |e\rangle) \left(\frac{E_{Cm} \sqrt{\|C\|}}{e^2} \right) V_{g1} C_{g1}) + \circ \\
 & + ((-N_1 |e\rangle) \left(\frac{E_{Cm} \sqrt{\|C\|}}{e^2} \right) C_{g2} V_{g2}) \\
 & + ((-N_2 |e\rangle) \left(\frac{E_{Cm} \sqrt{\|C\|}}{e^2} \right) C_{g1} V_{g1}) + \circ \\
 & \left. + ((-N_2 |e\rangle) \left(\frac{E_{Cm} \sqrt{\|C\|}}{e^2} \right) C_{g2} V_{g2}) \right] \quad (25.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U = & E_{C1} N_1^2 + E_{C2} N_2^2 + 2E_{Cm} N_1 N_2 \\
 & - |e\rangle N_1 (C_2 C_{g1} V_{g1} + C_m C_{g2} V_{g2}) \\
 & - |e\rangle N_2 (C_m C_{g1} V_{g1} + C_1 C_{g2} V_{g2}) \quad (26.2)
 \end{aligned}$$

فصل ۳

سیستم‌های باز کوانتومی و اثر آن بر همبستگی‌های کوانتومی

۱.۳ مقدمه

سیستمی که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است دارای یک جفت نقطه کوانتومی است و همانطور که امروزه مشاهده می‌کنیم سیستم کوانتومی به معنای واقعی ایزوله نیستند و با یک سیستم بزرگتر که با مفهوم محیط از آن یاد می‌کنیم برهم‌کنش دارند. بدین‌منظور ما برای بررسی دینامیک خود باید دینامیک سیستم باز کوانتومی را بدانیم.

۲.۳ دینامیک سیستم باز کوانتومی

به‌صورت کلی یک سامانه باز کوانتومی، یک سیستمی (S) است که با سامانه بزرگتر (B) دیگری که محیط نامیده می‌شود برهم‌کنش می‌کند. مجموعه سامانه و محیط آن یک مجموعه بسته در نظر گرفته می‌شوند، در نتیجه سیستم باز یک زیر سیستم از سامانه کل $S + B$ را نشان می‌دهد. حالت زیرسیستم S ، در نتیجه دینامیک داخلی آن و برهم‌کنش با محیط آن تحول می‌یابد. این برهم‌کنش منجر به همبستگی‌های خاص بین محیط و سامانه می‌شود [۱]. به‌طوریکه تحول سیستم‌های باز بوسیله یک تحول یکانی قابل توصیف نمی‌باشند. هامیلتونی کل را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد [۲۲]:

$$H(t) = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I(t) \quad (1.3)$$

که در آن H_S هامیلتونی سامانه، H_B هامیلتونی مربوط به محیط، I_S و I_B به ترتیب عملگرهای یکانی در فضای هیلبرت H_B و H_S و H_I هامیلتونی برهم‌کنشی بین محیط و سامانه را نشان می‌دهد. اگر سامانه S را به تنهایی مورد بررسی قرار دهیم با این واقعیت که همه مشاهدات به این زیر سیستم اشاره دارد، مشاهده‌پذیرهای سامانه به صورت $A \otimes I_B$ می‌باشد که A عملگری است که در فضای هیلبرت H_S عمل می‌کند [۱]. اگر حالت سامانه کل با ماتریس چگالی ρ نشان داده شود، آنگاه مقدار انتظاری عملگر A با فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= tr_S(A\rho_S) \\ \rho_S &= tr_B\rho \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

ρ_S ماتریس چگالی کاهش‌یافته سامانه کوانتومی باز S است. در اینجا tr_B و tr_S مفهوم ردگیری جزئی بر روی درجه‌های آزادی محیط و سامانه را بیان می‌کند. ماتریس چگالی سیستم کل ρ_s به شکل زیر می‌باشد:

$$\rho_S(t) = tr_B(U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)) \quad (۳.۳)$$

در نتیجه معادله حرکت لیویل-وان نیومن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -tr_B[H(t), \rho(t)] \quad (۴.۳)$$

که در بخش بعد با استفاده از معادله فرآیند مارکوفی به حل معادله فوق خواهیم پرداخت.

۳.۳ فرآیندهای مارکوفی

مهمترین مشخصه یک فرآیند کلاسیکی مارکوفی، خاصیت نیم‌گروهی است که به صورت معادله دیفرانسیلی چاپمن-کلمن گووف بیان می‌شود. تعمیم این خاصیت به مکانیک کوانتومی منجر به مفهوم دینامیک کوانتومی نیم‌گروه و فرآیند کوانتومی مارکوفی می‌شود. معمولاً دینامیک ماتریس چگالی کاهش یافته توسط معادله (۴.۱) بیان می‌شود، تحت شرایط کوچک بودن زمان مشخصه همبستگی‌های محیط نسبت به زمان مشخصه تحول سامانه، می‌توان از تاثیر حافظه صرف نظر نمود و دینامیک سامانه را توسط یک دینامیک کوانتومی نیم‌گروه توصیف نمود. به دست آوردن معادله دینامیکی نیم‌گروه که دینامیک سامانه را توصیف می‌کند، اهمیت دارد. در ابتدا با در نظر گرفتن برهم‌کنش ضعیف بین سامانه و محیط، هامیلتونی کل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱].

$$H(t) = H_S(t) + H_B(t) + H_I(t) \quad (۵.۳)$$

که H_S هامیلتونی آزاد سیستم و H_B هامیلتونی محیط و H_I توصیف کننده برهم‌کنش بین سامانه و محیط است. در تصویر برهم‌کنش معادله لیویل-وان نیومن برای ماتریس چگالی کل عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_I(t), \rho(t)] \quad (۶.۳)$$

و فرم انتگرال ماتریس چگالی به شکل زیر است:

$$\rho(t) = \rho(\circ) - i \int_{\circ}^t ds [H_I(s), \rho(s)] \quad (۷.۳)$$

با جایگذاری رابطه (۷.۳) در (۶.۳) معادله حرکت سامانه در تصویر برهم کنش با ردگیری جزئی بر روی درجه‌های آزادی محیط، به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_I(t) &= tr_B(-i[H_S(t), \rho_S(\circ) - i \int_{\circ}^t ds [H_I(s), \rho(s)]) \\ &= -i tr_B[H_I(t), \rho(\circ)] - tr_B \int_{\circ}^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]] \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که

$$tr_B[H_I(t), \rho(\circ)] = \circ \quad (۹.۳)$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = - \int_{\circ}^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]] \quad (۱۰.۳)$$

اگر فرض کنیم که برهم کنش بین سیستم و محیط ضعیف باشد به گونه‌ای که تاثیر سیستم بر روی محیط قابل صرف نظر کردن باشد، بنابراین ماتریس چگالی محیط با گذشت زمان بدون تغییر می‌ماند.

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B \quad (۱۱.۳)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱.۳) در رابطه (۱۰.۳) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = - \int_{\circ}^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]] \quad (۱۲.۳)$$

به منظور ساده سازی بیشتر تقریب مارکوف را با جایگذاری $\rho_S(s)$ با $\rho_S(t)$ انجام می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = - \int_{\circ}^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]] \quad (۱۳.۳)$$

این معادله، معادله ردفیلد نامیده می‌شود. این معادله در زمان جایگزیده است. ولی هنوز یک معادله مارکوفی نیست. به این منظور آرگومان s را به $t - s$ جایگزین نموده و اجازه می‌دهیم که حد بالای انتگرال به سمت بی نهایت میل کند [۱].

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = - \int_{\circ}^{\infty} dstr_B[H_I(t), [H_I(t - s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]] \quad (۱۴.۳)$$

هامیلتونی برهم کنش بین سیستم و محیط را در تصویر شرودینگر به صورت زیر بیان می‌نماییم:

$$H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha} \quad (۱۵.۳)$$

که در آن $A_\alpha = A_\alpha^\dagger$ و $B_\alpha = B_\alpha^\dagger$ و ویژه‌فضای H_S را با $\pi(\varepsilon)$ نمایش می‌دهیم. عملگرهای فضای H_S را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} H_S |\varepsilon\rangle &= \varepsilon |\varepsilon\rangle \\ \pi(\varepsilon) &= |\varepsilon\rangle \langle\varepsilon| \\ H_S \pi(\varepsilon) &= \varepsilon |\varepsilon\rangle \langle\varepsilon| = \varepsilon \pi(\varepsilon) \end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

تجزیه طیفی اپراتور:

$$\begin{aligned} A_\alpha(w) &= \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') \\ A_\alpha^\dagger(w) &= \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon) A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon') \\ [H_S, A_\alpha(w)] &= -w A_\alpha(w) \\ \pi(w) &= |\varepsilon\rangle \langle\varepsilon| \end{aligned} \quad (۱۷.۳)$$

اولین نتیجه عبارت است از:

$$\begin{aligned} H_S \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') - \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') H_S &= \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} H_S \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') - \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') H_S &= \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} [\varepsilon \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') - \varepsilon' \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon')] &= \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} (\varepsilon - \varepsilon') \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') = -w \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon) A_\alpha \pi(\varepsilon') &= -w A_\alpha(w) \end{aligned} \quad (۱۸.۳)$$

$$\begin{aligned} [H_S, A_\alpha^\dagger(w)] &= H_S \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) - \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) H_S = \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} H_S \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) - \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) H_S &= \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} [\varepsilon' \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) - \varepsilon \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon)] &= \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} (\varepsilon' - \varepsilon) \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) = w \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon') A_\alpha^\dagger \pi(\varepsilon) &= w A_\alpha(w) \end{aligned} \quad (۱۹.۳)$$

که در آن عملگرهای $A_\alpha(w)$ و $A_\alpha^\dagger(w)$ به ترتیب عملگرهای H_S وابسته به فرکانس‌های $\pm w$ هستند بنابراین در تصویر برهم‌کنش داریم:

$$\exp(iG\lambda) A \exp(-iG\lambda) = A + i\lambda [G, A] + \left(\frac{i\lambda^2}{2}\right) [G[G, A]] + \dots \quad (۲۰.۳)$$

$$\begin{aligned} G &= H_s \\ A &= A_\alpha(w) \\ \lambda &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(iHst)A_\alpha(w)\exp(-iHst) &= A_\alpha(w) + it[H_S, A_\alpha(w)] + \\ & \left(\frac{i^2 t^2}{2!}\right)[H_S[H_S, A_\alpha(w)]] + \left(\frac{i^3 t^3}{3!}\right)[H_S, [H_S, [H_S, A_\alpha(w)]]] + \dots \\ A_\alpha(w) + itwA_\alpha^\dagger(w) - \frac{t^2}{2!}w^2 A_\alpha(w) + \frac{it^3}{3!}w^3 A_\alpha(w) &= \\ A_\alpha(w)[1 - itw + (i^2) \frac{w^2}{2!}t^2 + \frac{it^3}{3!}w^3 + \dots] &= A_\alpha(w)\exp(-iwt) \end{aligned} \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned} G &= H_S \\ A &= A_\alpha^\dagger(w) \\ \lambda &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(iHst)A_\alpha^\dagger(w)\exp(-iHst) &= A_\alpha^\dagger(w) + it[H_S, A_\alpha^\dagger(w)] + \\ & \frac{(it)^2}{2!}[H_S, [H_S, A_\alpha^\dagger(w)]] + \frac{(it)^3}{3!}[H_S, [H_S, [H_S, A_\alpha^\dagger(w)]]] = \\ A_\alpha^\dagger(w) + itwA_\alpha^\dagger(w) - \frac{w^2}{2!}t^2 A_\alpha^\dagger(w) + \frac{it^3}{3!}w^3 A_\alpha^\dagger(w) + \dots &= \\ A_\alpha^\dagger(w)[1 + itw - \frac{(it)^2}{2!}w^2 + \frac{(tw)^3}{3!}i + \dots] &= A_\alpha^\dagger(w)\exp(iwt) \end{aligned} \quad (22.2)$$

و در نهایت به دو رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} [H_S, A_\alpha^\dagger(w), A_\beta(w)] &= 0 \\ [H_S, A_\alpha^\dagger(w), A_\beta(w)] &= 0 \end{aligned} \quad (23.2)$$

9

$$\begin{aligned} A_\alpha^\dagger(w) &= A_\alpha(-w) \\ \left[\sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon)A_\alpha\pi(\varepsilon') \right]^\dagger &= \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon)A_\alpha^\dagger\pi(\varepsilon) = \\ \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = w} \pi(\varepsilon')A_\alpha\pi(\varepsilon) &= A_\alpha(w) \end{aligned} \quad (24.2)$$

چون $A_\alpha = A_\alpha^\dagger$ است. با جمع بندی رابطه (۱۷.۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sum_w A_\alpha^\dagger(w) = \sum_w A_\alpha(-w) = A_\alpha \quad (25.3)$$

بنابراین هامیلتونی برهم‌کنشی سامانه و محیط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_I = \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha(\omega) \otimes B_\beta = \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha^\dagger(\omega) \otimes B_\beta \quad (26.3)$$

معادله فوق را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H_I &= \sum_{\alpha,w} e^{-i\omega t} A_\alpha(w) \otimes B_\alpha(t) \\ H_I &= \sum_{\alpha,w} e^{i\omega t} A_\alpha^\dagger(w) \otimes B_\alpha^\dagger(t) \end{aligned} \quad (27.3)$$

که در آن

$$B_\alpha(t) = e^{iH_B(t)} B_\alpha e^{-iH_B t} \quad (28.3)$$

عملگرهای محیط در تصویر برهم‌کنش هستند فرض رابطه (۹.۳) منجر به نتیجه زیر می‌شود:

$$\langle B_\alpha(t) \rangle = \text{tr} \langle B_\alpha(t) \rho_\beta \rangle = 0 \quad (29.3)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= - \int_0^\infty dstr_B[H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]] \\
 &= - \int_0^\infty dstr_B[H_I(t), [(H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B - \rho_S(t)\rho_B H_I(t-s))] \\
 &= - \int_0^\infty dstr_B[H_I(t), H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B] \\
 &\quad + \int_0^\infty dstr_B[H_I(t), H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B]^\dagger \\
 &= - \int_0^\infty dstr_B(H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B - H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B H_I(t)) \\
 &\quad + \int_0^\infty dstr_B(H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B - H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B H_I(t))^\dagger \\
 &= \int_0^\infty dstr_B(H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B H_I(t) - H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B) \\
 &\quad + \int_0^\infty dstr_B(\rho_B \rho_S(t) H_I^\dagger(t-s) H_I^\dagger(t) - H_I^\dagger(t) \rho_B \rho_S(t) H_I^\dagger(t-s)) \\
 &= \int_0^\infty dstr_B \left(\sum_{\beta, \omega} \exp(-i\omega(t-s)A_\beta(\omega)B_\beta(t-s)\rho_S(t)\rho_B) \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\alpha, \omega'} \exp(i\omega'(t)A_\alpha^\dagger(\omega')B_\alpha^\dagger(t) - \sum_{\alpha, \omega'} \exp(i\omega'(t)A_\alpha^\dagger(\omega')B_\alpha^\dagger(t) \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\beta, \omega} \exp(-i\omega(t-s)A_\beta(\omega)B_\beta(t-s)\rho_S(t)\rho_B + \right. \\
 &\quad \left. \int_0^\infty dstr_B(\rho_B \rho_S(t)) \sum_{\beta, \omega} \exp(+i\omega(t-s))B_\beta^\dagger(t-s)A_\beta^\dagger(\omega) \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\alpha, \omega'} \exp(-i\omega't)B_\alpha(t)A_\alpha(\omega') - \sum_{\alpha, \omega'} \exp(-i\omega't)B_\alpha(t)A_\alpha(\omega')\rho_B \rho_S(t) \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\beta, \omega} \exp(+i\omega(t-s)B_\beta^\dagger(t-s)A_\beta^\dagger(\omega) \right)
 \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

$A^\dagger = A$ و $B^\dagger = B_\alpha$ و جابجایی در رد عملگر امکان پذیر است.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \int_0^\infty dstr_B \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\beta, \alpha} \exp(i(\omega' - \omega)t) \exp(i\omega s) \\ &([A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega')B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s)\rho_B] \\ &- [A_\alpha^\dagger(\omega')A_\beta(\omega)\rho_S(t)B_\alpha(t)B_\beta^\dagger(t-s)\rho_B]) \end{aligned} \quad (31.3)$$

$$+ \int_0^\infty dstr_B \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\beta, \alpha} \exp(i(\omega - \omega')t) \exp(-i\omega s)$$

$$([A_\beta^\dagger(\omega)\rho_S(t)A_\alpha(\omega')B_\alpha(t)B_\beta^\dagger(t-s)\rho_B]$$

$$- [\rho_S(t)A_\alpha(\omega')A_\beta^\dagger(\omega)B_\alpha(t)B_\beta^\dagger(t-s)\rho_B])$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \left[\sum_{\omega, \omega'} \sum_{\beta, \alpha} \exp(i(\omega' - \omega)t) ([A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega') - A_\alpha^\dagger(\omega')A_\beta(\omega)\rho_S(t)] \right]$$

$$+ \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\beta, \alpha} \exp(i(\omega - \omega')t) ([A_\beta^\dagger(\omega)\rho_S(t)A_\alpha(\omega') - \rho_S(t)A_\alpha(\omega')A_\beta^\dagger(\omega)])]$$

$$\int_0^\infty ds \exp(i\omega s) \text{tr}_B(B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s)\rho_B)$$

(32.3)

$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ به صورت زیر تبدیل فوریه توابع همبستگی محیط تعریف شده است:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \int_0^\infty ds \exp(i\omega s) \langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle \quad (33.3)$$

و

$$\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle = \text{tr}(B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rho_B) \quad (34.3)$$

مقیاس زمانی τ_S برای تحول ذاتی سامانه که از مرتبه $|\omega' - \omega|^{-1}$ و $\omega \neq \omega'$ است را در نظر می‌گیریم.

اگر T_S از زمان T_R بزرگتر باشد، جملاتی از معادله (۳۱.۳) که شامل $\omega \neq \omega'$ هستند در بازه زمانی T_R خیلی سریع نوسان می‌کنند و می‌توان از آن‌ها صرف نظر نمود. این شرط موسوم به تقریب موج چرخان در سامانه‌های اپتیک است [۱]. بنابراین

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_{\omega} \sum_{\beta, \alpha} \Gamma_{\alpha, \beta}(\omega) (A_{\beta}(\omega)\rho_S(t)A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - A_{\alpha}^{\dagger}(\omega)A_{\beta}(\omega)\rho_S(t)) \quad (۳۵.۳)$$

$$+ \sum_{\omega} \sum_{\beta, \alpha} \Gamma_{\alpha, \beta}^*(\omega) (A_{\beta}^{\dagger}(\omega)\rho_S(t)A_{\alpha}(\omega') - \rho_S(t)A_{\alpha}(\omega')A_{\beta}^{\dagger}(\omega))$$

مرسوم است که تبدیل فوریه توابع همبستگی را به دو بخش حقیقی و موهومی تجزیه نماییم:

$$\Gamma_{\alpha, \beta}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) + iS_{\alpha, \beta}(\omega) \quad (۳۶.۳)$$

که برای مقادیر ثابت ω ضرایب فوق عبارتند از:

$$S_{\alpha, \beta}(\omega) = \frac{1}{\hbar i} (\Gamma_{\alpha, \beta}(\omega) - \Gamma_{\alpha, \beta}^*(\omega)) \quad (۳۷.۳)$$

و

$$\gamma_{\alpha, \beta}(\omega) = \Gamma_{\alpha, \beta}(\omega) + \Gamma_{\alpha, \beta}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega t} \langle B_{\alpha}^{\dagger}(s)\beta(\circ) \rangle \quad (۳۸.۳)$$

با استفاده از ضرایب فوق، معادله اساسی مارکوفی به صورت رابطه زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) + iS_{\alpha, \beta}(\omega) \{A_{\beta}(\omega)\rho_S(t)A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - A_{\alpha}^{\dagger}(\omega)A_{\beta}(\omega)\rho_S(t)\} \\ &+ \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) - iS_{\alpha, \beta}(\omega) \{A_{\beta}^{\dagger}(\omega)\rho_S(t)A_{\alpha}(\omega) - \rho_S(t)A_{\alpha}(\omega)A_{\beta}^{\dagger}(\omega)\} \\ &= \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) \right. \\ &+ iS_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - iS_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) \} \\ &+ \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\beta}^{\dagger}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}(\omega) - \frac{1}{\hbar} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}(\omega) A_{\beta}^{\dagger}(\omega) \right. \\ &- iS_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\beta}^{\dagger}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}(\omega) + iS_{\alpha, \beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}(\omega) A_{\beta}^{\dagger}(\omega) \} \\ &= \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) \left(A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{\hbar} \{A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t)\} \right) \\ &+ \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \left(iS_{\alpha, \beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}(\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - iS_{\alpha, \beta}(\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) \right) \\ \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= iS_{\alpha, \beta} [H_{Ls}, \rho_S(t)] + D(\rho_S) \end{aligned} \quad (۳۹.۳)$$

که در آن

$$D(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left(A_{\beta}(\omega) \rho_S A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{\nu} \{A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega), \rho_S\} \right) \quad (40.3)$$

۴.۳ معادله اساسی اپتیک کوانتومی

برهم‌کنش ماده با تابش الکترومغناطیس در حد اپتیک کوانتومی، یک میدان معمولی را برای کاربرد شبه گروه‌های دینامیکی کوانتومی و معادلات اصلی مارکوفی ایجاد می‌کند. دلیل این واقعیت این است که در یک سامانه اپتیک کوانتومی معمولی، شرایط فیزیکی تقریب مارکوفی بسیار رضایت بخش هستند. و با نتایج تجربی توافق مناسبی دارند. چندمثال در این بخش مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱.۴.۳ ماده در میدان‌های تابشی کوانتیده

یک سامانه کوانتومی محدود برای مثال یک اتم یا یک مولکول را در نظر می‌گیریم که با یک میدان تابش کوانتیده واکنش می‌دهد. میدان تابش محیطی با درجات آزادی نامحدود را ارائه کرده و سامانه محدود، سامانه کاهش یافته‌ای است که به دنبال آن هستیم. اتم یا مولکول مجزا با هامیلتونی H_S بیان می‌شود در حالی که میدان تابش کوانتیده آزاد با هامیلتونی H_B ارائه می‌شود.

$$H = \frac{1}{\nu} \int (E^{\nu} + B^{\nu}) dv$$

$$E = -\frac{1}{C} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (41.3)$$

$$\omega = ck = c \left| \vec{k} \right|$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_k \sum_{\lambda} \left(\frac{\hbar c^{\nu}}{\nu v \omega_k} \right)^{\frac{1}{\nu}} e_{\lambda}(\vec{k}) (b_{\lambda}(k) e^{i(k.x - \omega_k t)} + b_{\lambda}^*(k) e^{-i(k.x - \omega_k t)}) \\ E &= -\frac{1}{c} \sum_k \sum_{\lambda} \left(\frac{\hbar c^{\nu}}{\nu v \omega_k} \right)^{\frac{1}{\nu}} e_{\lambda}(\vec{k}) (b_{\lambda}(k) \frac{\partial}{\partial t} e^{i(k.x - \omega_k t)} + b_{\lambda}^*(k) \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(k.x - \omega_k t)}) \\ &= \sum_k \sum_{\lambda} \left(\frac{\hbar c^{\nu}}{\nu v \omega_k} \right)^{\frac{1}{\nu}} e_{\lambda}(\vec{k}) (b_{\lambda}(k) (-i\omega_k) e^{i(k.x - \omega_k t)} + b_{\lambda}^*(k) (+i\omega_k) e^{-i(k.x - \omega_k t)}) \\ &= i \sum_k \sum_{\lambda} \left(\frac{\hbar \omega_k}{\nu v} \right)^{\frac{1}{\nu}} e_{\lambda}(k) [b_{\lambda}(k) e^{i(k.x - \omega_k t)} - b_{\lambda}^*(k) e^{-i(k.x - \omega_k t)}] \end{aligned} \quad (42.3)$$

$$B = \nabla \times A \quad (43.3)$$

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_k \sum_\lambda \left(\frac{\hbar c^\gamma}{\sqrt{v\omega_k}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(\vec{k}) (b_\lambda(k) \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k.x-\omega_k t)} + b_\lambda^*(k) \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(k.x-\omega_k t)}) \\
 &= \sum_k \sum_\lambda \left(\frac{\hbar c^\gamma}{\sqrt{v\omega_k}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(\vec{k}) (b_\lambda(k) (-ik) e^{i(k.x-\omega_k t)} + b_\lambda^*(k) (+ik) e^{-i(k.x-\omega_k t)}) \\
 &= i \sum_k \sum_\lambda \left(\frac{\hbar}{\sqrt{v\omega_k}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(k) (ck) [b_\lambda(k) e^{i(k.x-\omega_k t)} - b_\lambda^*(k) e^{-i(k.x-\omega_k t)}] \\
 &= i \sum_k \sum_\lambda \left(\frac{\hbar\omega_k}{\sqrt{v}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(k) [b_\lambda(k) e^{i(k.x-\omega_k t)} - b_\lambda^*(k) e^{-i(k.x-\omega_k t)}]
 \end{aligned} \tag{۴۴.۳}$$

پس $E = B$ است در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 H_{rad} &= \frac{1}{\sqrt{v}} \int (E^\gamma + B^\gamma) dv \\
 &= \frac{1}{\sqrt{v}} \int (E^\gamma + E^\gamma) dv = \int E^\gamma dv
 \end{aligned} \tag{۴۵.۳}$$

$$\begin{aligned}
 H_{rad} &= (i \sum_k \sum_\lambda \left(\frac{\hbar\omega_k}{\sqrt{v}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(k) [b_\lambda(k) e^{i(k.x-\omega_k t)} - b_\lambda^*(k) e^{-i(k.x-\omega_k t)}]) \\
 &\quad (i \sum_k \sum_\lambda \left(\frac{\hbar\omega_k}{\sqrt{v}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(k) [b_\lambda(k) e^{i(k.x-\omega_k t)} - b_\lambda^*(k) e^{-i(k.x-\omega_k t)}]) \\
 &= - \int \sum_{k,k'} \sum_{\lambda\lambda'} \frac{\hbar}{\sqrt{v}} (\omega_k)^{\frac{1}{\gamma}} (\omega_{k'})^{\frac{1}{\gamma}} e_\lambda(k) e_{\lambda'}(k') dv \\
 &\quad (b_\lambda(k) b_{\lambda'}(k') e^{i(k.x-\omega_k t)} e^{i(k'.x-\omega_{k'} t)} - b_\lambda(k) b_{\lambda'}^*(k') e^{i(k.x-\omega_k t)} e^{-i(k'.x-\omega_{k'} t)} - \\
 &\quad (b_\lambda^*(k) b_{\lambda'}(k') e^{-i(k.x-\omega_k t)} e^{i(k'.x-\omega_{k'} t)} - b_\lambda^*(k) b_{\lambda'}^*(k') e^{-i(k.x-\omega_k t)} e^{-i(k'.x-\omega_{k'} t)})
 \end{aligned} \tag{۴۶.۳}$$

با فرض اینکه $k = k'$ و $\lambda = \lambda'$ و رابطه‌های زیر H_{rad} به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 \sum_x e^{ik.x} e^{-ik'.x} &= \delta_{k,k'} \\
 \sum_x e^{ik.x} e^{ik'.x} &= \delta_{k,-k'} \\
 \sum_x e^{-ik.x} e^{-ik'.x} &= \delta_{k,-k'}
 \end{aligned} \tag{۴۷.۳}$$

و در نهایت :

$$\begin{aligned} H_{rad} &= \sum_k \sum_{\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2v} \sqrt{2} b_{\lambda}^*(k) b_{\lambda}(k) \int dv \\ &= \sum_k \sum_{\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2v} \sqrt{2} b_{\lambda}^*(k) b_{\lambda}(k) v \\ &= \sum_k \sum_{\lambda} \hbar\omega_k b_{\lambda}^*(k) b_{\lambda}(k) \end{aligned} \quad (48.3)$$

در این بخش همه ثابت‌های فیزیکی مانند ثابت پلانک \hbar و سرعت نور c را مجدداً تعریف می‌کنیم. برای سادگی، میدان تابش را به مدهای فوریه در جعبه‌ای به حجم v که شرایط مرزی دوره‌ای به آن اعمال می‌شود تجزیه می‌کنیم. این مدها با بردار موج \vec{k} و دو بردار قطبی واحد عرضی متناظرش $\vec{e}_{\lambda}(\vec{k})$ مشخص می‌شوند، به‌طوریکه:

$$\vec{k} \cdot \vec{e}_{\lambda}(\vec{k}) = 0 \quad (49.3)$$

$$\vec{e}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{e}_{\lambda'}(\vec{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (50.3)$$

$$\sum_{\lambda=1,2} e_{\lambda}^i(\vec{k}) e_{\lambda}^j(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (51.3)$$

رابطه پراکندگی به این صورت است:

$$\omega_k = ck = c|\vec{k}| \quad (52.3)$$

عملگرهای میدان $b_{\lambda}(\vec{k})$ و $b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k})$ خلق و نابودی فوتون را با بردار موج k و قطبی سازی $\vec{e}_{\lambda}(\vec{k})$ توصیف می‌کنند. آن‌ها از روابط جابجایی پیروی می‌کنند.

$$\begin{aligned} \left[b_{\lambda}(\vec{k}), b_{\lambda'}(\vec{k}') \right] &= \left[b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \right] = 0 \\ \left[b_{\lambda}(\vec{k}), b_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \right] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (53.3)$$

در پایان، فرض می‌کنیم که برهم‌کنش هامیلتونی در تقریب دو قطبی به صورت زیر داده می‌شود:

$$H_I = -\vec{D} \cdot \vec{E} \quad (54.3)$$

که D عملگر دو قطبی سیستم مورد بررسی و E عملگر میدان الکتریکی در تصویر شرودینگر هستند:

$$\vec{E} = i \sum_k \sum_{\lambda=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \vec{e}_{\lambda}(\vec{k}) (b_{\lambda}(\vec{k}) - b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k})) \quad (55.3)$$

۲.۴.۳ انجام تقریب بورن-مارکوفی

عملگر دو قطبی D را به عملگرهای ویژه H_S تجزیه می‌کنیم:

$$\vec{A}(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \hbar\omega} \Pi(\varepsilon) \vec{D} \Pi(\varepsilon') \quad (۵۶.۳)$$

$$[H_S, \vec{A}(\omega)] = -\hbar\omega \vec{A}(\omega) \quad (۵۷.۳)$$

$$[H_S, \vec{A}^\dagger(\omega)] = \hbar\omega \vec{A}^\dagger(\omega) \quad (۵۸.۳)$$

و

$$A^\dagger(\omega) = \vec{A}(-\omega) \quad (۵۹.۳)$$

بلافاصله می‌توانیم معادله حرکت را مشابه با معادله (۳۵.۳) بنویسیم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_s(t) = & \sum_{\omega, \omega'} \sum_{i, j} e^{i(\omega' - \omega)t} \Gamma_{ij}(\omega) \left(A_j(\omega) \rho_S A_i^\dagger(\omega') - A_i^\dagger(\omega') A_j(\omega) \rho_S \right) \\ & + \sum_{\omega', \omega} \sum_{i, j} e^{i(\omega - \omega')t} \Gamma_{ij}^*(\omega) \left(A_j^\dagger(\omega) \rho_S A_i(\omega') - \rho_S A_i(\omega') A_j^\dagger(\omega) \right) \end{aligned} \quad (۶۰.۳)$$

و تبدیل‌های فوریه یک طرفه آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Gamma_{ij}(\omega) \equiv \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \langle E_i(t) E_j(t-s) \rangle \quad (۶۱.۳)$$

ماتریس $\Gamma_{ij}(\omega)$ این ماتریس به طور کلی به t وابسته است. در واقع، بدون فرض بیشتر درباره وضعیت محیط داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\omega) = & \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{k'}}{V}} e_{\lambda}^i(\vec{k}) e_{\lambda'}^j(\vec{k}') \\ & \times \int_0^{\infty} ds \left[\left\langle b_{\lambda}(\vec{k}) b_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \right\rangle \exp [i(\omega_{k'} - \omega_k)t - i(\omega_{k'} - \omega)s] \right. \\ & + \left\langle b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \right\rangle \exp [-i(\omega_{k'} - \omega_k)t + i(\omega_{k'} + \omega)s] \\ & - \left\langle b_{\lambda}(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \right\rangle \exp [-i(\omega_{k'} + \omega_k)t + i(\omega_{k'} + \omega)s] \\ & \left. - \left\langle b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) b_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \right\rangle \exp [+i(\omega_{k'} + \omega_k)t - i(\omega_{k'} - \omega)s] \right] \end{aligned} \quad (۶۲.۳)$$

۳.۴.۳ محیط گرمایی

حال اولین مثال ما به ما اجازه می‌دهد که محیط مدهای تابشی را در وضعیت تعادل در دمای T در نظر بگیریم:

$$\rho_B = \frac{1}{Z_B} \exp [-\beta H_B] \quad (۶۳.۳)$$

که $\beta = \frac{1}{k_B T}$ و Z_B تابع پارش محیط است. توجه کنید که $\langle \vec{E}(t) \rangle = 0$ زیرا عملگر میدان در عملگرهای خلق و نابودی خطی است. از آنجایی که وضعیت تعادل حرارتی با توجه به دینامیک محیط ثابت است، توابع همبستگی محیط در زمان همگن بوده و داریم:

$$\langle E_i(t) E_j(t-s) \rangle = \langle E_i(s) E_j(0) \rangle \quad (۶۴.۳)$$

نتیجه می‌شود که $\Gamma_{ij}(\omega)$ به t وابسته نیست. در نتیجه، اگر تقریب موج چرخان را در معادله (۱.۴) اجرا کنیم تنها عبارت قطری $\omega = \omega'$ از مجموع دوگانه در فرکانس‌های سامانه باقی مانده و رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_s(t) = & \sum_{\omega} \sum_{i,j} \Gamma_{ij}(\omega) \left(A_j(\omega) \rho_S A_i^{\dagger}(\omega) - A_i^{\dagger}(\omega) A_j(\omega) \rho_S \right) \\ & + \sum_{\omega} \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^*(\omega) \left(A_j^{\dagger}(\omega) \rho_S A_i(\omega) - \rho_S A_i(\omega) A_j^{\dagger}(\omega) \right) \end{aligned} \quad (۶۵.۳)$$

حال تبدیل فوریه توابع همبستگی را تعیین می‌کنیم. به این منظور از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left\langle b_{\lambda}(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \right\rangle = \left\langle b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) b_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \right\rangle = 0 \quad (۶۶.۳)$$

$$\left\langle b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right\rangle = \delta_{\vec{k} \vec{k}'} \delta_{\lambda \lambda'} (\lambda + N(\omega_k)) \quad (۶۷.۳)$$

$$\left\langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \right\rangle = \delta_{\vec{k} \vec{k}'} \delta_{\lambda \lambda'} N(\omega_k) \quad (۶۸.۳)$$

که

$$N(\omega_k) = \frac{1}{\exp[\beta \hbar \omega_k] - 1} \quad (۶۹.۳)$$

توزیع پلانک را نشان می‌دهد که تعداد میانگین فوتون‌ها در یک مد با فرکانس ω_k است. در ادامه حد پیوستگی را اجرا می‌کنیم:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3 c^3} \int d\omega_k \omega_k^2 \int d\Omega \quad (۷۰.۳)$$

انتگرال پیرامون زاویه فضایی $d\Omega$ بردار موج k با کمک رابطه زیر انجام می‌شود:

$$\int d\Omega \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (۷۱.۳)$$

بنابراین معادله (۷۱.۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\omega) &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \frac{2\pi \hbar \omega_k}{V} e_\lambda^i(\vec{k}) e_\lambda^j(\vec{k}) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} ds \left[\left\langle b_\lambda(\vec{k}) b_\lambda^\dagger(\vec{k}) \right\rangle \exp[-i(\omega_k - \omega)s] \right. \\ &\left. + \left\langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_\lambda(\vec{k}) \right\rangle \exp[i(\omega_k + \omega)s] \right] \quad (۷۲.۳) \\ &= \frac{2\pi \omega_k}{\hbar} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e_\lambda^i(\vec{k}) e_\lambda^j(\vec{k}) \int_{-\infty}^{\infty} ds \left[\left\langle b_\lambda(\vec{k}) b_\lambda^\dagger(\vec{k}) \right\rangle \right. \\ &\left. \exp[-i(\omega_k - \omega)s] + \left\langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_\lambda(\vec{k}) \right\rangle \exp[i(\omega_k + \omega)s] \right] \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\hbar\pi}{\hbar(\hbar\pi)\hbar c^3} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 \int_0^\infty ds [(\hbar + N(\omega)) \exp(-i(\omega_k - \omega)s) + N(\omega_k) \exp(i(\omega_k + \omega)s)] \int d\Omega (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|k|^2}) \quad (73.3)$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\hbar\pi}{\hbar(\hbar\pi)\hbar c^3} \frac{\hbar\pi}{\hbar} \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 [(\hbar + N(\omega)) \int_0^\infty ds \exp(-i(\omega_k - \omega)s) + N(\omega_k) \int_0^\infty ds \exp(i(\omega_k + \omega)s)]$$

با استفاده از رابطه

$$\int_0^\infty ds \exp(-i\varepsilon s) = \pi\delta(\varepsilon) - ip_r \frac{1}{\varepsilon} \quad (74.3)$$

که p_r تابع مقدار اصلی است.
در نهایت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\omega) &= \frac{\hbar\pi}{\hbar\pi\hbar c^3} \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 [(\hbar + N(\omega)) \int_0^\infty ds \exp(-i(\omega_k - \omega)s) + N(\omega_k) \int_0^\infty ds \exp(i(\omega_k + \omega)s)] \\ &= \frac{\hbar\pi}{\hbar\pi\hbar c^3} \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 [(\hbar + N(\omega)) (\pi\delta(\omega_k - \omega) - ip_r \frac{1}{\omega_k - \omega}) + N(\omega_k) (-\pi\delta(\omega_k + \omega) + ip_r \frac{1}{\omega_k + \omega})] \\ &= \frac{\hbar\pi}{\hbar\pi\hbar c^3} \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 [(\hbar + N(\omega)) \pi\delta(\omega_k - \omega) + ip_r \frac{\hbar + N(\omega)}{\omega - \omega_k} - N(-\omega_k) \pi\delta(\omega_k - \omega) + ip_r \frac{N(\omega_k)}{\omega_k + \omega}] \\ &= \frac{\hbar\pi}{\hbar\pi\hbar c^3} \delta_{ij} \hbar\pi (\hbar + N(\omega)) \omega_k^3 \int_0^\infty d\omega_k \delta(\omega_k - \omega) + \frac{\hbar\pi}{\hbar\pi\hbar c^3} \delta_{ij} ip_r \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 [\frac{\hbar + N(\omega)}{\omega - \omega_k} + \frac{N(\omega_k)}{\omega_k + \omega}] \end{aligned} \quad (75.3)$$

در پایان به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\Gamma_{ij}(\omega) = \delta_{ij} (\frac{\hbar}{\hbar} \gamma(\omega) + iS(\omega)) \quad (76.3)$$

که کمیت‌های زیر را معرفی می‌کنیم

$$\gamma(\omega) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} (1 + N(\omega)) \quad (77.3)$$

و

$$S(\omega) = \frac{2}{3\pi\hbar c^3} p \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 \left[\frac{1 + N(\omega)}{\omega - \omega_k} + \frac{N(\omega_k)}{\omega_k + \omega} \right] \quad (78.3)$$

توجه داشته باشید که $N(-\omega) = -(1 + N(\omega))$ بنابراین $\gamma(\omega) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} (1 + N(\omega))$ برای $\omega > 0$ و $\gamma(\omega) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} N(\omega)$ برای $\omega < 0$ می‌باشد. با خلاصه کردن نتایج، یک معادله اساسی کوانتوم مارکوفی را برای درجات آزادی اصلی که اغلب معادله اساسی اپتیک کوانتومی نامیده می‌شود به دست می‌آوریم که می‌توان آن را به شکل لیندبلاد نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_s &= \gamma(\omega) + iS(\omega)(A(\omega)\rho_s A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega)A(\omega)\rho_s) \\ &+ \gamma^*(\omega) - iS(\omega)(A^\dagger(\omega)\rho_s A(\omega) - \rho_s A^\dagger(\omega)A(\omega)) \\ &= \gamma(\omega)(A(\omega)\rho_s A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega)A(\omega)\rho_s) + iS(\omega)A(\omega)\rho_s A^\dagger(\omega) \\ &- iS A^\dagger(\omega)(A(\omega)\rho_s + \gamma^*(\omega)A^\dagger(\omega)\rho_s(A(\omega) - \gamma^*(\omega)\rho_s A^\dagger(\omega)(A(\omega) \\ &- iS(\omega)A^\dagger(\omega)\rho_s A(\omega) + iS(\omega)\rho_s A^\dagger(\omega)A(\omega) \end{aligned} \quad (79.3)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_s = -\frac{i}{\hbar} [H_{LS}, \rho_s(t)] + D(\rho_s(t)) \quad (80.3)$$

هامیلتونی

$$H_{LS} = \sum_{\omega} \hbar S(\omega) \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega) \quad (81.3)$$

منجر به نرمال سازی مجدد هامیلتون سیستم HS می‌شود که با نوسانات خلا میدان تابش (جابجایی لمب) و با فرآیند القای حرارتی (جابجایی اشتارک) القا می‌شود. ضریب اتلاف معادله اساسی کوانتومی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} D(\rho_s) &= \sum_{\omega > 0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} (1 + N(\omega)) \left(\vec{A}(\omega)\rho_s \vec{A}^\dagger(\omega) - \frac{1}{4} \left\{ \vec{A}^\dagger(\omega) \vec{A}(\omega), \rho_s \right\} \right) \\ &+ \sum_{\omega < 0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} N(\omega) \left(\vec{A}^\dagger(\omega)\rho_s \vec{A}(\omega) - \frac{1}{4} \left\{ \vec{A}(\omega) \vec{A}^\dagger(\omega), \rho_s \right\} \right) \end{aligned} \quad (82.3)$$

فصل ۴

بررسی دینامیک همبستگی کوانتومی کیوبیت‌های بار در جفت نقطه‌های کوانتومی

۱.۴ مقدمه

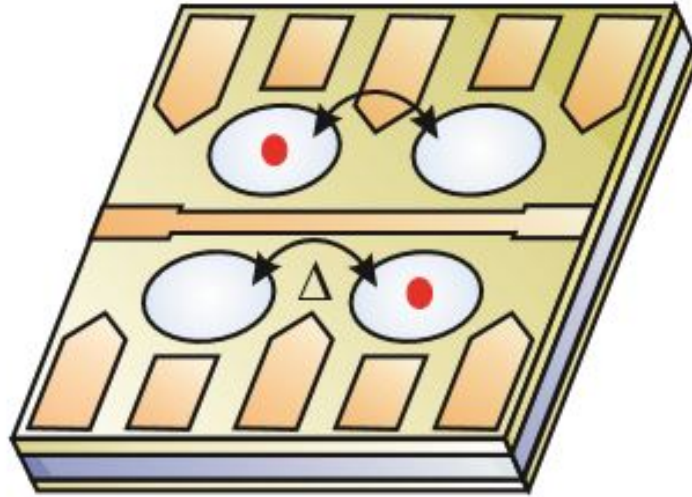
در صورتی که تحول زمانی یک اتم چند ترازه و یا هر سیستم کوانتومی دیگر مورد مطالعه باشد باید تمام عوامل مؤثر بر تحول آن سیستم را در نظر گرفت. در این فصل سیستمی شامل دو جفت نقطه کوانتومی جفت شده (نشان داده شده در شکل ۱.۴) را در نظر گرفته که تحت تأثیر برهم‌کنش‌های مختلف قرار گرفته است. با استفاده از معادله اساسی، همبستگی کوانتومی را در زمان‌های مختلف محاسبه و دینامیک آن را به دست می‌آوریم. بدین منظور، درهم‌تنیدگی تشکیل در شرایط مختلف و به ازای حالت‌های اولیه مختلف بر حسب زمان با استفاده از حل عددی به دست آورده شده است. در نهایت به مقایسه نتایج حاصل برای حالت‌های مختلف می‌پردازیم.

۲.۴ حل معادلات تحول یک سیستم جفت نقطه کوانتومی

در این کار، دو جفت نقطه کوانتومی ($DQDs$)، دارای یک الکترون اضافی موضعی شده در دو سمت چپ $|L\rangle$ راست $|R\rangle$ ، مورد بررسی قرار گرفته است. دینامیک این سیستم توسط هامیلتونی شبه اسپین زیر توصیف می‌شود ($\hbar = 1$).

$$H_s = \Delta(\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}) + J\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \quad (1.4)$$

شکل ۱.۴: معرفی شماتیک دو جفت DQD با یک الکترون جایگزیده در سمت راست و سمت چپ DQD .



که در آن Δ انرژی تونل‌زنی، J قدرت برهم‌کنش تبادلی و σ^i ماتریس‌های پائولی در راستای x و z هستند. حالت‌های چپ و راست مانند یکی از حالت‌های اسپینی هستند و بنابراین $|L\rangle \equiv |\downarrow\rangle$ و $|R\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ در نظر می‌گیریم. هر کدام از این جفت نقطه‌ها مشابه یک کیوبیت هستند. جفت نقطه‌های کوانتومی با حمام مشترک دمایی متشکل از نوسانگرهای هماهنگ برهم‌کنش نموده و بنابراین هامیلتونی کل عبارت است از:

$$H = H_S + (\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)})\ell + H_B \quad (2.4)$$

که در آن جمله دوم برهم‌کنش کیوبیت‌ها با حمام مشترک است به گونه‌ایکه

$$\ell = B + B^\dagger \quad (3.4)$$

و

$$B = \sum_k g_k a_k \quad (4.4)$$

a_k عملگر نابودی بوزونی و g_k قدرت برهم‌کنش آن است) و همچنین

$$H_B = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (5.4)$$

هامیلتونی حمام با فرکانس ω_k است. معادله اساسی که توصیف کننده دینامیک سیستم است به این صورت به دست می‌آید [۳۵]:

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = - \int_0^t dt' \text{tr}_B \{ [H_I(t), [H_I(t'), \rho_B \rho_I(t)]] \} \quad (6.4)$$

که $H_I(t)$ هامیلتونی برهم‌کنشی در تصویر برهم‌کنش می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_I(t) = U_S^\dagger(t)U_B^\dagger\{(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)})\ell\}U_B(t)U_S(t) \quad (۷.۴)$$

که در آن

$$U_B(t) = \exp(-iH_B t) \quad (۸.۴)$$

و

$$U_S(t) = \exp(-iH_S t) \quad (۹.۴)$$

می‌باشد. صریحاً تحول یکانی $U_s(t)$ به صورت زیر داده می‌شود: با استفاده از رابطه‌ی (۲.۱) برای اثبات معادله (۱۰.۱) از بسط تیلور استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} U_s &= \exp[-i(\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J\sigma_z^1\sigma_z^2)t] \\ U_s &= 1 - i(\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J\sigma_z^1\sigma_z^2)t + \frac{(-i)^2}{2!}[\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J\sigma_z^1\sigma_z^2]^2 t^2 \\ &+ \frac{(-i)^3}{3!}[\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J\sigma_z^1\sigma_z^2]^3 t^3 = 1 - i\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)t - iJ\sigma_z^1\sigma_z^2 t \\ &- \frac{1}{2}\{\Delta^2\sigma_x^1\sigma_x^2 + \Delta^2\sigma_x^2\sigma_x^1 + \Delta^2\sigma_x^1\sigma_x^1 + \Delta^2\sigma_x^2\sigma_x^2 + \Delta J\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_z^2 \\ &+ \Delta J\sigma_x^2\sigma_x^1\sigma_z^2 + \Delta J\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_x^1 + \Delta J\sigma_z^2\sigma_z^1\sigma_x^2 + J^2\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_x^1\sigma_x^2\}t^2 \\ &+ \frac{i}{3!}\{2\Delta^3(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + 2\Delta^3\sigma_x^1\sigma_x^2(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J^2\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\ &+ 2\Delta^2 J\sigma_z^1\sigma_z^2 + 2\Delta^2 J\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_z^1\sigma_z^2 + J^3\sigma_z^1\sigma_z^2\}t^3 \\ &= 1 - i\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)t - iJ\sigma_z^1\sigma_z^2 t - \frac{1}{2}\{\Delta^2 + 2\Delta^2\sigma_x^1\sigma_x^2 + \Delta^2 \\ &+ \Delta J(\sigma_z^1\sigma_x^1 + \sigma_x^1\sigma_z^1)\sigma_z^2 + \Delta J(\sigma_z^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2\sigma_z^2)\sigma_z^1 + J^2\}t^2 \\ &+ \frac{i}{3!}\{2\Delta^3(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + 2\Delta^3\sigma_x^1\sigma_x^2(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J^2\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\ &+ 2\Delta^2 J\sigma_z^1\sigma_z^2 + 2\Delta^2 J\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_z^1\sigma_z^2 + J^3\sigma_z^1\sigma_z^2\}t^3 \\ &= 1 - i(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)t - iJ\sigma_z^1\sigma_z^2 t - \frac{1}{2}\{2\Delta^2 + 2\Delta^2\sigma_x^1\sigma_x^2 + J^2\}t^2 \\ &+ \frac{i}{3!}\{2\Delta^3(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + 2\Delta^3\sigma_x^1\sigma_x^2(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + J^2\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\ &+ 2\Delta^2 J\sigma_z^1\sigma_z^2 + 2\Delta^2 J\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_z^1\sigma_z^2 + J^3\sigma_z^1\sigma_z^2\}t^3 \\ &= 1 - i\Delta(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)t - iJ\sigma_z^1\sigma_z^2 t - \Delta^2 t^2 - \Delta^2\sigma_x^1\sigma_x^2 t^2 \\ &- \frac{1}{2}J^2 t^2 + 2i\frac{\Delta^3}{3!}(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)t^3 + 2i\frac{\Delta^3}{3!}(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)t^3 + \frac{i}{3!}J^2\Delta(\sigma_x^1\sigma_x^2) \\ &+ \frac{2i}{3!}\Delta^2 J\sigma_z^1\sigma_z^2 t^3 + \frac{J^3}{3!}\sigma_z^1\sigma_z^2 t^3 + \frac{2\Delta^2}{3!}J\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_z^1\sigma_z^2 t^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \Delta^2 t^2 - \frac{1}{2} J^2 t^3 + \dots \\
 &+ (-i\Delta t + \frac{4i\Delta}{3!} t^3 + \frac{i}{3!} J^2 \Delta + \dots)(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + (-\Delta^2 t^2 + \dots)\sigma_x^1 \sigma_x^2 \\
 &+ (-iJt + \frac{2i}{3!} \Delta^2 J t^3 + \frac{J^3}{3!} t + \dots)\sigma_z^1 \sigma_z^2 + (-\frac{2i\Delta^2 J}{3!} + \dots)\sigma_y^1 \sigma_y^2 \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

جمله اول:

$$\begin{aligned}
 1 - \Delta^2 t^2 - \frac{1}{2} J^2 t^3 + \dots &= \frac{1}{2} \{2 - 2\Delta^2 t^2 - J^2 t^3 + \dots\} \\
 &= \frac{1}{2} \{1 + 1 - \frac{4}{2} \Delta^2 t^2 - \frac{J^2 t^3}{2} - \frac{J^2 t^3}{2} + \dots\} \\
 &= \frac{1}{2} \{1 + 1 - \frac{\Omega^2 t^2}{2} - \frac{J^2 t^3}{2} + \dots\} \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \frac{\Omega^2 t^2}{2} + \dots + 1 - \frac{J^2 t^3}{2} + \dots) = \frac{1}{2} (\cos(\Omega t) + \cos(Jt))
 \end{aligned}$$

جمله دوم:

$$\begin{aligned}
 &(-i\Delta t + \frac{4i\Delta^3 t^3}{3!} + \frac{i}{3!} \Delta J^2 t^3 + \dots)(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\
 &= (-i\Delta t + \frac{i\Delta}{3!} (d\Delta^2 + J^2) t^3 + \dots)(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\
 &= i\Delta (t - \frac{\Omega^2 t^3}{3!} + \dots)(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) = -\frac{i\Delta}{\Omega} (\Omega t - \frac{\Omega^3 C^3}{3!} + \dots)(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\
 &= -\frac{i\Delta}{\Omega} \sin(\Omega t) (\sigma_x^1 + \sigma_x^2)
 \end{aligned}$$

جمله سوم:

$$\begin{aligned}
 (-\Delta^2 t^2 + \dots)\sigma_x^1 \sigma_x^2 &= \frac{1}{2} (1 - 1 - \frac{4\Delta^2 t^2}{2} - \frac{J^2 t^3}{2} + \frac{J^2 t^3}{2} + \dots)\sigma_x^1 \sigma_x^2 \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \frac{\Omega^2 t^2}{2} - 1 + \frac{J^2 t^3}{2} + \dots)\sigma_x^1 \sigma_x^2 \quad (11.4) \\
 &= +\frac{1}{2} (\cos(\Omega t) - \cos(Jt))\sigma_x^1 \sigma_x^2
 \end{aligned}$$

جمله چهارم:

$$\begin{aligned}
 & (-iJt + \frac{2i}{3!}\Delta^2 Jt^3 + \frac{J^3}{3!}t^3 + \dots)\sigma_z^1\sigma_z^2 \\
 &= -\frac{i}{2}t + (2Jt - \frac{4}{3!}\Delta^2 Jt^3 - \frac{2J^3}{3!}t^3 + \dots)\sigma_z^1\sigma_z^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(Jt - \frac{J^3}{3!}t^3 + Jt - \frac{4}{3!}\Delta^2 Jt^3 - \frac{J^3}{3!}t^3 + \dots)\sigma_z^1\sigma_z^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) + J(t - \frac{4}{3!}\Delta^2 t^3 - \frac{J^2}{3!}t^3) + \dots)\sigma_z^1\sigma_z^2 \quad (12.4) \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) + J(t - \frac{\Omega^2}{3!}t^3 + \dots))\sigma_z^1\sigma_z^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) + \frac{J}{\Omega}(\Omega t - \frac{\Omega^3}{3!}t^3 + \dots))\sigma_z^1\sigma_z^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) + \frac{J}{\Omega}\sin(\Omega t))\sigma_z^1\sigma_z^2
 \end{aligned}$$

جمله پنجم:

$$\begin{aligned}
 & (-\frac{2i\Delta^2 J}{3!} + \dots)\sigma_y^1\sigma_y^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(Jt - Jt - \frac{J^3}{3!}t^3 + \frac{J^3}{3!}t^3 + \frac{4}{3!}\Delta^2 Jt^3 + \dots)\sigma_y^1\sigma_y^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) - Jt + \frac{J^3}{3!}t^3 + \frac{4}{3!}\Delta^2 Jt^3 + \dots)\sigma_y^1\sigma_y^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) - J(t + \frac{J^2}{3!}t^3 - \frac{4}{3!}\Delta^2 t^3 + \dots))\sigma_y^1\sigma_y^2 \quad (13.4) \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) - J(t - \frac{\Omega^2}{3!}t^3 + \dots))\sigma_y^1\sigma_y^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) - \frac{J}{\Omega}(t\Omega - \frac{\Omega^3}{3!}t^3 + \dots))\sigma_y^1\sigma_y^2 \\
 &= -\frac{i}{2}(\sin(Jt) - \frac{J}{\Omega}\sin(\Omega t))\sigma_y^1\sigma_y^2
 \end{aligned}$$

و در نهایت:

$$\begin{aligned}
 U_S(t) &= \frac{1}{2}(\cos(\Omega t) + \cos(Jt)) \\
 &\quad - \frac{i\Delta}{\Omega}\sin(\Omega t)(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\cos(\Omega t) - \cos(Jt))\sigma_x^1\sigma_x^2 \quad (14.4) \\
 &\quad - \frac{i}{2}(\sin(Jt) - \frac{J}{\Omega}\sin(\Omega t))\sigma_y^1\sigma_y^2 \\
 &\quad - \frac{i}{2}(\sin(Jt) + \frac{J}{\Omega}\sin(\Omega t))\sigma_z^1\sigma_z^2
 \end{aligned}$$

که در آن $\Omega = \sqrt{J^2 + 4\Delta^2}$ و $\rho_B = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_B)$ است.

$$Z = \text{tr}_B [\exp(-\beta H_B)] \quad (15.4)$$

که Z تابع پارش، $\beta = \frac{1}{K_B T}$ ، ثابت بولتزمن و T دمای مطلق محیط است. هامیلتونی برهم‌کنشی را در تصویر برهم‌کنش با تعریف

$$\Lambda(t) = U_S^\dagger(t)(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)})U_S(t) \quad (16.4)$$

و

$$U_B^\dagger(t)\ell U_B(t) = \tilde{\ell}(t) \quad (17.4)$$

می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم:

$$H_I(t) = \Lambda(t)\tilde{\ell}(t) \quad (18.4)$$

بنابراین معادله کلی به صورت زیر به دست می‌آید [۳۶]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_I(t) &= - \int_0^t dt' \text{tr} \{ [H_I(t), [H_I(t'), \rho_B \rho_I(t) - \rho_B \rho_I(t) H_I(t')]] \} \\ &= - \int_0^t dt' \text{tr}_B \{ [H_I(t), H_I(t') \rho_B \rho_I(t)] - [H_I(t), \rho_B \rho_I(t) H_I(t')] \} \\ &= - \int_0^t dt' \text{tr}_B \{ (H_I(t) H_I(t') \rho_B \rho_I(t) - H_I(t') \rho_B \rho_I(t) H_I(t)) \\ &\quad - (H_I(t) \rho_B \rho_I(t) H_I(t') - \rho_B \rho_I(t) H_I(t') H_I(t)) \} \\ &= \int_0^t dt' \text{tr}_B \{ (H_I(t) \rho_B \rho_I(t) H_I(t') - \rho_B \rho_I(t) H_I(t') H_I(t)) \\ &\quad - (H_I(t) H_I(t') \rho_B \rho_I(t) - H_I(t') \rho_B \rho_I(t) H_I(t)) \} \end{aligned} \quad (19.4)$$

با قرار دادن معادله (۹.۱) و (۱۰.۱) در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_I(t) = & \int_{\circ}^t dt' Tr_B \{ \Lambda(t) U_B^\dagger(t) \ell U_B(t) \rho_B \rho_I(t) \Lambda(t') U_B^\dagger(t') \ell U_B(t') \\ & - \rho_B \rho_I(t) \Lambda(t') U_B^\dagger(t') \ell U_B(t') \Lambda(t) U_B^\dagger(t) \ell U_B(t) \\ & - \Lambda(t) U_B^\dagger(t) \ell U_B(t) \Lambda(t') U_B^\dagger(t') \ell U_B(t') \rho_B \rho_I(t) \\ & + \Lambda(t') U_B^\dagger(t') \ell U_B(t') \rho_B \rho_I(t) \Lambda(t) U_B^\dagger(t) \ell U_B(t) \} \end{aligned} \quad (۲۰.۴)$$

با جایگذاری معادله ۲.۴ در معادله فوق داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_I(t) = & \int_{\circ}^t dt' Tr \{ (\Lambda(t) U_B^\dagger(t) (B + B^\dagger) U_B(t) \rho_B \rho_I(t) \Lambda(t') U_B^\dagger(t') (B + B^\dagger) U_B(t')) \\ & - (\rho_B \rho_I(t) \Lambda(t') U_B^\dagger(t') (B + B^\dagger) U_B(t') \Lambda(t) U_B^\dagger(t) (B + B^\dagger) U_B(t)) \\ & - (\Lambda(t) U_B^\dagger(t) (B + B^\dagger) U_B(t) \Lambda(t') U_B^\dagger(t') (B + B^\dagger) U_B(t') \rho_B \rho_I(t)) \\ & + (\Lambda(t') U_B^\dagger(t') (B + B^\dagger) U_B(t') \rho_B \rho_I(t) \Lambda(t) U_B^\dagger(t) (B + B^\dagger) U_B(t)) \} \\ \frac{d}{dt}\rho_I(t) = & \int_{\circ}^t dt' D(t, t') [\Lambda(t), \rho_I(t) \Lambda(t')] + \int_{\circ}^t dt' D^*(t, t') [\Lambda(t') \rho_I(t), \Lambda(t)] \end{aligned} \quad (۲۱.۴)$$

که در آن $D(t, t') = T_\downarrow(t, t') + T_\uparrow(t, t')$ و

$$T_\downarrow(t, t') = tr_B \{ \tilde{B}(t) \tilde{\rho}_B \tilde{B}^\dagger(t') \} \quad (۲۲.۴)$$

و

$$T_\uparrow(t, t') = tr_B \{ \tilde{B}^\dagger(t) \tilde{\rho}_B \tilde{B}(t') \} \quad (۲۳.۴)$$

که در این معادلات $\tilde{B}(t) = U_B^\dagger(t) B U_B(t)$ ، $\tilde{\rho}_B = U_B^\dagger(t) \rho_B U_B(t)$ و n_k عدد اشغال میانگین k امین مد می باشد.

$$n_k = \frac{1}{\exp(\beta \omega_k) - 1} \quad (۲۴.۴)$$

با تعریف معمول تابع طیفی زیر

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) \quad (25.4)$$

جمع بالا را می‌توان به صورت انتگرالی زیر جایگزین کنیم

$$T_{\downarrow}(t) = \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) n(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (26.4)$$

و

$$T_{\uparrow}(t) = \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) n(\omega) \exp(i\omega t) [n(\omega) + 1] \quad (27.4)$$

اگر ما یک چگالی طیفی اهمی برای خازن فرض کنیم، $J(\omega) = \eta \omega \exp(-\frac{\omega}{\omega_c})$ می‌توانیم صریحا انتگرال‌های بالا را تحول دهیم و به صورت زیر به دست بیاوریم:

$$D(t, t') = \frac{\eta \omega_c}{[1 + i\omega_c(t, t')]^2} + \frac{\eta}{\beta^2} \text{Re} \left\{ \psi^{(1st)} \left(1 + \frac{1}{\beta \omega_c} - \frac{i(t-t')}{\beta} \right) \right\} \quad (28.4)$$

که $\psi^{(1st)}$ تابع پلی گامای اول و η ضریب اتلاف می‌باشد.

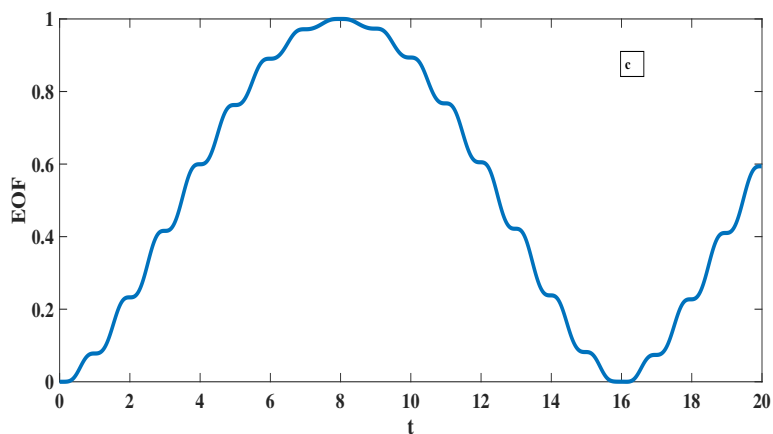
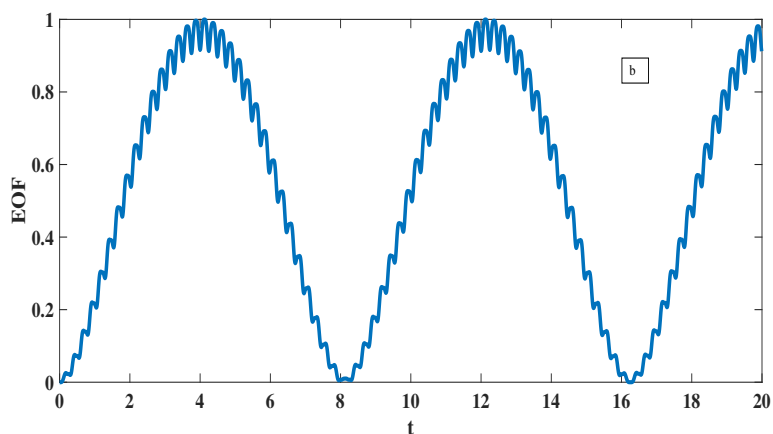
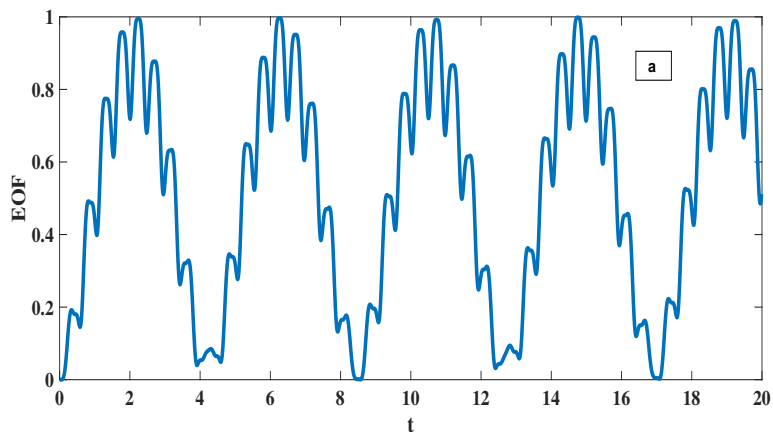
روشن است که حل معادله فوق به روش تحلیلی امکان پذیر نیست. لذا باید به روش عددی با اعمال مقادیری برای پارامترها مسأله را حل کنیم.

۳.۴ دینامیک همبستگی‌های کوانتومی $DQDs$

۱.۳.۴ بررسی درهم‌تنیدگی تشکیل در عدم حضور اتلاف

در محاسبات عددی، $\Delta = \frac{\pi \hbar}{4\tau}$ و فرکانس قطع $\omega_c = \frac{2e\phi}{\tau}$ در نظر می‌گیریم، که $\tau = 10^{-10} s$ است [۳۷]. این مقادیر متناظر با مقادیر تجربی در $DQDs$ ساخته شده از $GaAs/ALGaAs$ هستند [۳۸]. در این بخش به بررسی درهم‌تنیدگی در عدم حضور اتلاف می‌پردازیم. در ابتدا فرض می‌کنیم که دو $DQDs$ در ابتدا غیر وابسته هستند، حالت جداپذیر $|\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow|$ را به عنوان حالت اولیه در نظر می‌گیریم. همبستگی کوانتومی (اندازه‌گیری شده توسط معیار درهم‌تنیدگی تشکیل) در عدم حضور اتلاف و به‌ازای برهم‌کنش‌های مختلف $J = 4\Delta$ ، $J = 8\Delta$ ، $J = \frac{\Delta}{4}$ و $\eta = 0$ در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. به دلیل وجود برهم‌کنش بین کیوبیت‌ها همبستگی‌های کوانتومی بین دو کیوبیت ایجاد شده و منجر به درهم‌تنیدگی بین آن‌ها می‌شود. به دلیل تبادل اطلاعات کوانتومی بین دو کیوبیت ناشی از برهم‌کنش، درهم‌تنیدگی رفتار افزایشی و کاهش‌ی دارد.

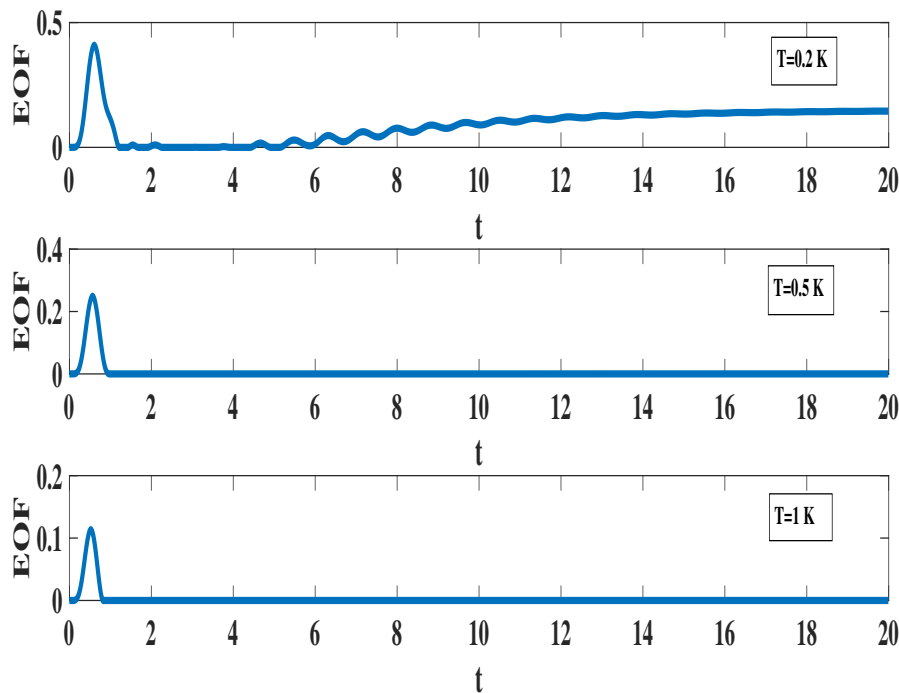
شکل ۲.۴: همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EOF) برای جفت شدگی $J = ۴\Delta(a)$ ، $J = ۸\Delta(b)$ ، $J = \frac{\Delta}{۴}(c)$ و $\eta = ۰$



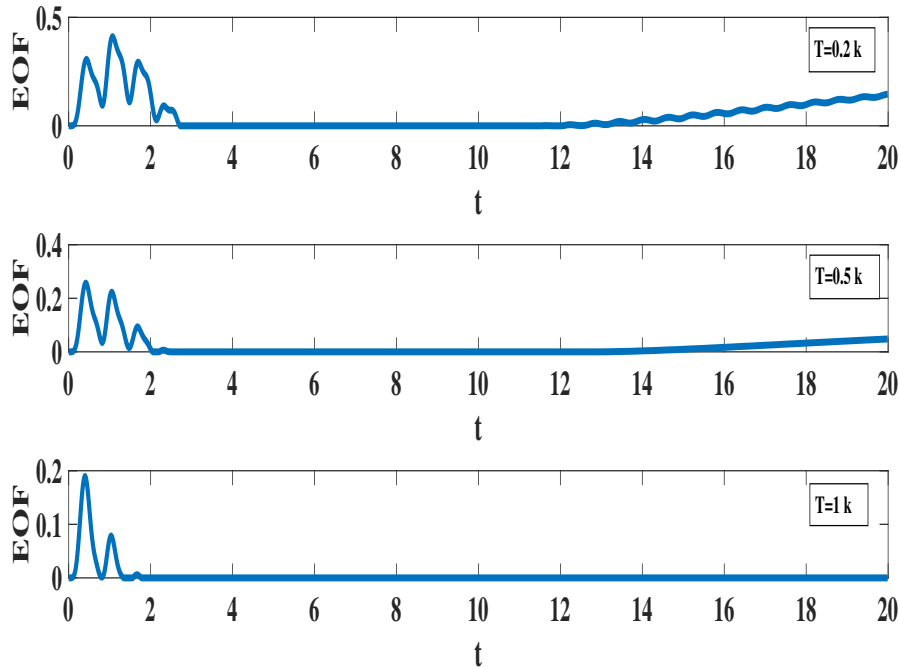
۲.۳.۴ بررسی درهم‌تنیدگی تشکیل در حضور اتلاف و برهم‌کنش‌های مختلف

دینامیک درهم‌تنیدگی تشکیل برای حالت اولیه فوق به ازای دماهای مختلف و ضرایب میرایی متفاوت محاسبه شده است. این همبستگی کوانتومی به ازای ضریب میرایی $\eta = 0.1$ در شکل ۲.۴ و به ازای $\eta = 0.05$ در شکل ۴.۴ در دماهای $T = 0.2, 0.5, 1 K$ رسم شده است. اگرچه حالت اولیه حالت جداپذیر بوده و درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت در لحظه $t=0$ برابر صفر بوده ولی به علت برهم‌کنش و وجود حمام مشترک، درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت به وجود می‌آید [۳۳]. وجود همبستگی‌های کوانتومی به شدت به ضریب میرایی (برهم‌کنش سیستم با محیط) و دما حساس است. به گونه‌ای که افزایش هرکدام از آن‌ها منجر به کاهش درهم‌تنیدگی می‌شود که مقایسه بیشینه درهم‌تنیدگی به دست آمده در شکل ۴.۴ آن را تایید می‌نماید و همچنین با توجه به شکل ۲.۴ درهم‌تنیدگی پایا در حد دماهای پایین و ضریب میرایی کم به وجود می‌آید.

شکل ۳.۴: همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EOF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به ازای دماهای مختلف $T = 0.2, 0.5, 1 k$ و $\eta = 0.1$

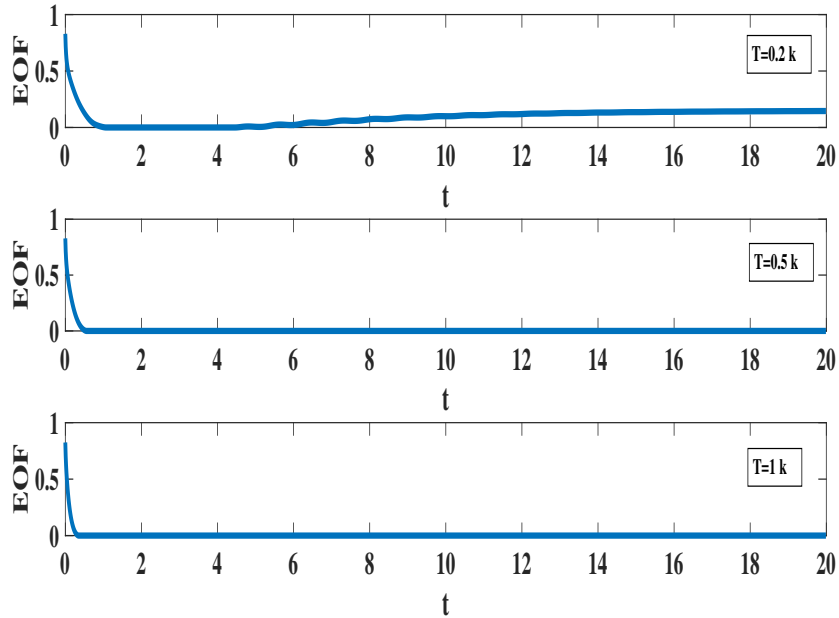


شکل ۴.۴: همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $T = 0.2, 0.5, 1k$ و $\eta = 0.005$

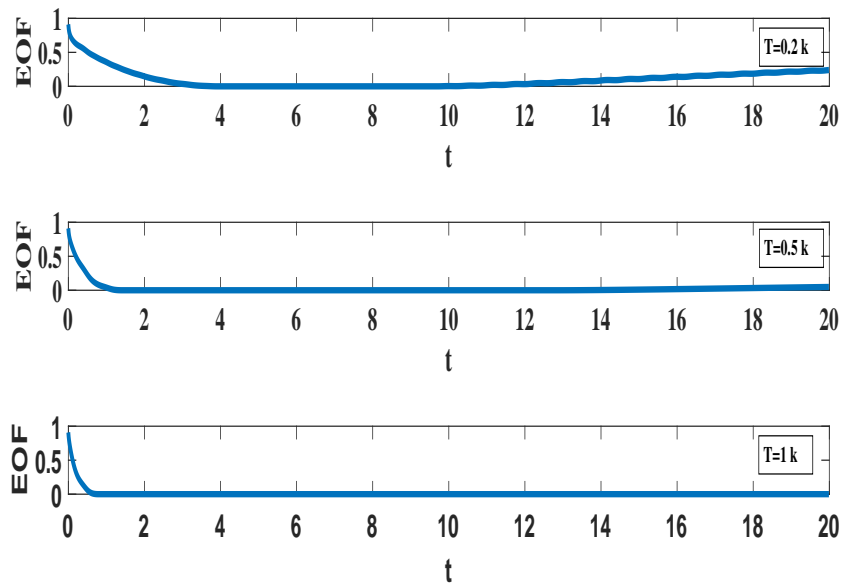


در عین حال به‌منظور بررسی تاثیرات برهم‌کنش بین کیوبیت‌ها و حمام مشترک خود در این سیستم، حالت‌های اولیه با درهم‌تنیدگی بیشینه را نیز در نظر می‌گیریم. بدین‌منظور محاسبات قبل را برای حالت‌های اولیه $|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ و $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ تکرار کرده که نتایج آن به‌ترتیب در شکل‌های ۶.۴ و ۷.۴ بیان شده است. همانطور که از نتایج مشخص است، ناشی از برهم‌کنش بین کیوبیت‌ها و وجود حمام مشترک، درهم‌تنیدگی حالت جداپذیر اولیه افزایش می‌یابد [۳۳]. با افزایش دما میزان این درهم‌تنیدگی شکل‌یافته کاهش می‌یابد و در نهایت به صفر میل خواهد کرد. با توجه به شکل ۶.۴ درهم‌تنیدگی از بین رفته ولی پس از مدتی ناشی از اثر محیط مشترک، مجدداً اطلاعات به سامانه بازمی‌گردد و منجر به بازتولید درهم‌تنیدگی می‌شود. در دماهای بالاتر این امر خیلی کمتر یا اصلاً رخ نخواهد داد. در شکل ۷.۴ مشاهده می‌کنیم که حالت $|\psi^-\rangle$ یک حالت مقاوم در برابر اتلاف گرمایی مشترک است. یکی از دلایل آن را می‌توان به تفاوت حالت‌های بل نسبت داد به‌گونه‌ای که حالت اول تحت تعویض دو کیوبیت متقارن و حالت دوم پادمتقارن می‌باشد.

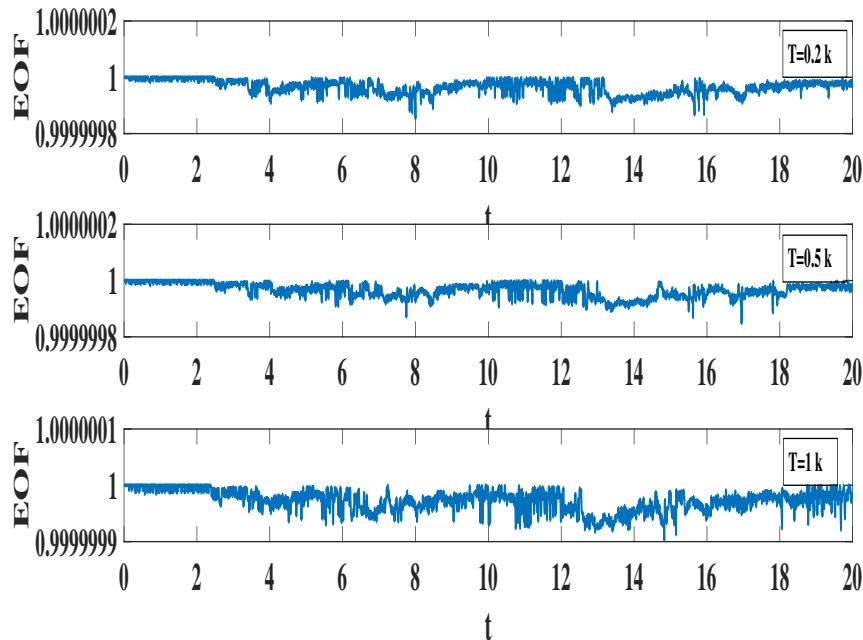
شکل ۵.۴: همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $T = 0.2, 0.5, 1k$ و $\eta = 0.01$



شکل ۶.۴: همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $T = 0.2, 0.5, 1k$ و $\eta = 0.005$



شکل ۷.۴: همبستگی‌های کوانتومی دو کیوبیتی (EoF) برای جفت شدگی قوی $J = 4\Delta$ به‌ازای دماهای مختلف $T = 0.2, 0.5, 1k$ و $\eta = 0.1$



نتیجه‌گیری

اتلاف و افزایش دما عموماً باعث کاهش درهم‌تنیدگی خواهد شد ولی در شرایطی خاص با وجود حمام مشترک امکان ایجاد درهم‌تنیدگی توسط محیط وجود دارد. در محاسبات انجام شده بر روی جفت نقطه‌های کوانتومی که با حمام مشترک خود در برهم‌کنش بوده، نشان داده شده است علاوه بر امکان ایجاد درهم‌تنیدگی از یک حالت جداپذیر اولیه، میزان و حفظ درهم‌تنیدگی به‌وجود آمده به دما و ضریب میرایی سامانه وابسته است. همچنین نشان داده شده است که با افزایش دما درهم‌تنیدگی به شدت کاهش می‌یابد و یا اصلاً به‌وجود نخواهد آمد. همچنین در حد دماهای پایین و ضریب میرایی کم و با توجه به برهم‌کنش موجود، امکان ایجاد درهم‌تنیدگی پایا نیز وجود دارد.

مراجع

- [۱] رفیعی م، (۱۳۹۱)، پایان‌نامه دکتری: ”پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی به‌وسیله زنجیره‌های اسپینی متشکل از اسپین‌های حبس‌شده در نقاط کوانتومی”، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد،
- [۲] کریمی‌پور و، (۱۳۹۰)، ”درسنامه نظریه اطلاع‌رسانی کوانتومی” دانشگاه صنعتی شریف
- [3] Peres. A. (2006), ”**Quantum theory: concepts and methods**”, Vol. 57, Springer Science , Business Media.
- [4] Myhr G. O. (2004), ” Measures of entanglement in quantum mechanics”**arXiv preprint quant-ph**, 0408094.
- [5] Sakurai J. J. and Napolitano J. J. (2014), ” Modern quantum mechanics. Pearson Higher” Ed.
- [6] Nielsen M. A. and Chuang I. L. (2000), ”**Quantum computation and Quantum information**”, p. 337, Cambridge University Press India.
- [7] Werner R. F. (1989), ” Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model”**Physical Review A**, 40(8), 4277.
- [8] Audretsch J. (2007), ” Entangled Systems” **New Directions in Theoretical Quantum Physics**.
- [9] Kraus B., Cirac J. I., Karnas S . and Lewenstein M. (2000), ” Separability in $2 \times N$ composite quantum systems”**Physical Review A**, 61(6), 062302.
- [10] Eisert J. (2001), ” Entanglement in Information Theory” **Doctoral dissertation, Ph. D. thesis, The University of Postdam** unpublished.
- [11] Huang Z. , Wang H. and Kais S. (2006), ” Entanglement and electron correlation in quantum chemistry calculations”**Journal of Modern Optics**, 53,2543-2558.

- [12] Valerie C. , Kundu J. and Wootters W. K. (2000), "Distributed entanglement " **Physical review A**, 61.5, 052306
- [13] Holt R. , Shimony A. , Horne M. and Clauser J. (1969), "Proposed experiment to test local hidden-variable theories " **Physical review Letters**23, 880-884
- [14] Shi Li. Y. , Song Z. and Sun C.P. (2005), "Quantum state transmission via a spin ladder as a robust data bus " **Physical review A**, 71 , 022301
- [15] Bennett C. H., Bernstein H. J., Popescu S., and Schumacher B. (1996), " Concentrating partial entanglement by local operations" **Physical Review A**, 53(4), 2046.
- [16] Bennett C. H., DiVincenzo D. P., Smolin J. A. and Wootters W. K. (1996), " Mixed-state entanglement and quantum error correction" **Physical Review A**, 54(5), 3824.
- [17] Vidal G., Dür W. and Cirac J. I. (2002), " Entanglement cost of bipartite mixed states" **Physical review letters**, 89(2), 027901.
- [18] Wootters W. K. (1998), " Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits " **Physical Review Letters**, 80(10), 2245.
- [19] Divincenzo D. P. (2000), " The physical implementation of quantum computation" **arXiv preprint ph**, 0002077.
- [20] Loss D. and DiVincenzo D. P. (1998), " Quantum computation with quantum dots" **Physical Review A**, 57(1), 120.
- [21] DiVincenzo D. P. (1995), " Two-bit gates are universal for quantum computation" **Physical Review A**, 51(2), 1015.
- [22] Burkard G., Loss D. and DiVincenzo D. P. (1999), " Coupled quantum dots as quantum gates" **Physical Review B**, 59(3), 2070.
- [23] Watanabe S., Pelucchi E., Leifer K., Malko A., Dwir B., and Kapon E.,(2005)," Patterning of confined-state energies in site-controlled semiconductor quantum dots" **Applied Physics Letters** vol. 86, p. 243105
- [24] Moreels I., Justo Y., De Geyter B., Haustraete K., Martins J. C., and Hens Z.,(2011), "Size-tunable, bright, and stable PbS quantum dots: a surface chemistry study" **Acs Nano**, vol. 5, pp. 2004-2012

- [25] Walavalkar S. , Homyk A. P., Hofmann C. E., Henry M. D., Shin C., Atwater H. A., et al.,(2011)" Size tunable visible and near-infrared photoluminescence from vertically etched silicon quantum dots"**Applied Physics Letters** vol. 98, pp. 153114-153114-3.
- [26] Zibik E., Grange T., Carpenter B., Porter N., Ferreira R., Bastard G., et al.,(2009)," Long lifetimes of quantum-dot intersublevel transitions in the terahertz range"**Nature materials**, vol. 8, pp. 803-807.
- [27] Liu H., Wang T., Jiang Q., Hogg R., Tutu F., Pozzi F., et al.,(2011), " Longwavelength InAs/GaAs quantum-dot laser diode monolithically grown on Ge substrate" **Nature Photonics** vol. 5, pp. 416-419.
- [28] Herz L. M. and Phillips R. T.,(2002) " Quantum computing: Fine lines from dots"**Nature Materials**, vol. 1, pp. 212-213.
- [29] Ye L., Yong K.-T., Liu L., Roy I., Hu R., Zhu J., et al.,(2012), " A pilot study in non-human primates shows no adverse response to intravenous injection of quantum dots"**Nature Nanotechnology**, vol. 7, pp. 453-458
- [30] Bose, S. (2003), " Quantum communication through an unmodulated spin chain"**Physical review letters**, 91(20), 207901.
- [31] Tarucha S., Austing D. G., Honda T., Van der Hage R. J., and Kouwenhoven, L. P. (1996), " Shell filling and spin effects in a few electron quantum dot"**Physical Review Letters**, 77(17), 3613.
- [32] Breuer H. P., and Petruccione F. (2002), "**The theory of open quantum systems**", Oxford University Press on Demand.
- [33] Braun D. (2002)," Creation of entanglement by interaction with a common heat bath"**Physical review letters**, 89(27), 277901.
- [34] Rafiee M., Lupo C., Mokhtari H., and Mancini S. (2012), " Stationary and uniform entanglement distribution in qubit networks with quasilocal dissipation" **Physical Review A**, 85(4), 042320.
- [35] Shibata F., Takahashi Y., and Hashitsume N. (1977), " A generalized stochastic liouville equation. Non-Markovian versus memoryless master equations"**Journal of Statistical Physics**, 17(4), 171-187.

-
- [36] Fanchini F. F., Castelano L. K., and Caldeira A. O. (2010),” Entanglement versus quantum discord in two coupled double quantum dots”**New Journal of Physics**, 12(7), 073009.
- [37] Contreras-Pulido L. D. and Aguado R. (2008),” Entanglement between charge qubits induced by a common dissipative environment” **Physical Review B**, 77(15), 155420.
- [38] Shinkai G., Hayashi T., Ota T., and Fujisawa T. (2009), ” Correlated coherent oscillations in coupled semiconductor charge qubits”**Physical review letters**, 103(5), 056802.

Aabstract

Entanglement is a characteristic of basic quantum-mechanics. This concept which was firstly mentioned in EPR essay by Einstein, Podolski, and Rojen is used to describe non-focal correlation between two or more quantum systems that such correlation is merely quantum and does not have any classical equivalent. Such kind of quantum correlation is one of the main resources of processing activities and quantum calculations. Studying entanglement states in systems applied in information and quantum calculations has been surveyed by most of the scientists. In most of quantum systems, the interaction between the system and environment (open quantum system) is unavoidable. The entanglement is highly decreased due to such interaction but in some cases the entanglement can be created or preserved in such open quantum system by considering the geometry of interaction with environment and the type of interaction. To study the dynamic of open quantum systems, the main equation (Markov or non-Markov) or super operators can be used. Quantum dots can be mentioned as favorite system in creating Qbits. To this end, the experimental construction of one Qbit can be achieved by trapping one electron in the quantum dot and controlling its interactions with other quantum dots. Meanwhile, double quantum dots along with a trapped electron within it play role as one Qbit. In this study, we firstly introduce the basic notions of quantum data and then double quantum dots, their structures, and the way of achieving to one Qbit through them are going to be discussed. Further, the quantum system is going to be discussed in more details and the main Markov equation for an open quantum system is achieved by introducing Markov dynamic. Finally, by introducing the surveyed model contained two doubled quantum dots interacting with mutual heating bath, the quantum correlation dynamic is studied by making use of basic Markov equation. In this study, the entanglement dynamic is surveyed per different initial states and in different temperatures.

keywords: quantum correlation, entanglement, entanglement of formation, quantum dot, double quantum dots, open quantum system



Shahrood University of Technology

Faculty Of physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in: Basic Particles

**Investigation of the quantum correlations
between charge qubits in double quantum
dots**

By: Marzieh Batvandipoor

Supervisors

Dr. H. Movahedian

Dr. M. Rafiee

Septamber 2017