

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک ذرات بنیادی

نظریه تصمیم و احتمال‌های کوانتومی

نگارنده:

الهام خراطزاده

استاد راهنما:

دکتر حسین موحدیان

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۸۸

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است

به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم

## تشکر و قدرانی

سپاس بیکران پروردگار یکتا که به ما هستی بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون شد. سپاس خدایی که ما را به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نمود.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگارم بر خود لازم می دانم سپاسگزار تمام عزیزانی باشم که در برابر سختی های روزگار یاریم نمودند. از استاد بزرگوارم جناب دکتر حسین موحدیان که راهنمایی این پایان نامه بر عهده ایشان بود کمال سپاسگزاری و تقدیر را دارم. همچنین مراتب سپاس صمیمانه خود از پدر و مادر عزیزم و برداران مهربانم احسان و امیر حسین دارم که در تمامی مراحل زندگی همواره حامی و پشتیبان من بوده اند.

## چکیده:

به طور کلی احتمال، ویژگی ذاتی مکانیک کوانتومی می‌باشد. این مفهوم جزء لاینفک مکانیک کوانتومی است و قابل حذف نمی‌باشد. یکی از تحقیقاتی که برای حذف احتمال از مکانیک کوانتومی انجام شده است بررسی‌های دوچ است که جزئیات این بحث در این تحقیق به تفصیل توضیح داده می‌شود. همچنین با توجه به این که نظریه بازی یک نظریه تصمیم‌گیری است تمایل زیادی برای تعمیم این نظریه به حوزه احتمالات کوانتومی وجود دارد. در نظریه بازی، بازی‌های زیادی می‌توان نام برد که این بازی‌ها جنبه و نمودهای زیادی از جمله فرابرد کوانتومی، رمز نگاری، توزیع کلیدهای کوانتومی و... دارند. بعضی از این بازی‌ها مانند بازی پرتاب سکه PQ ساختاری شبیه به مسائل پیشگویی برای الگوریتم‌های کوانتومی شناخته شده مانند الگوریتم جستجوی گراور دارند. در اینجا بازی‌هایی مانند پرتاب سکه PQ و بازی معمای زندانیان از لحاظ کلاسیکی و کوانتومی مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشاهده می‌شود، بازی‌هایی که با راهبردهای کوانتومی انجام می‌شوند مطلوب‌تر می‌باشند. همچنین کاربرد بازی پرتاب سکه PQ در الگوریتم جستجوی کوانتومی توضیح داده می‌شود. حال ما با تعمیم فضای دو بُعدی به فضای سه بُعدی و تعمیم هر یک از بازی‌های ذکر شده در حالت کیوبیتی به حالت کیوتریتی یک الگوی جدید ایجاد کرده و هر یک بازی‌ها را در حالت کیوبیتی و کیوتریتی با هم مقایسه می‌کنیم. به این صورت که در بازی پرتاب سکه PQ در حالت کوانتومی عملگر هادامارد را برای یک سیستم کیوتریتی به دست آورده و با کمک این عملگر بازی را در حالت کیوتریتی بررسی می‌کنیم و همچنین در بازی معمای زندانیان کوانتومی رابطه‌ایی که با استفاده از آن پاداش‌های بازیکنان تعیین می‌شود را در حالت کیوتریتی به دست آورده و مقدار هر یک از این پاداش‌ها به ازای راهبردهای مختلف در سیستم کیوتریتی محاسبه می‌شوند.

کلمات کلیدی: مکانیک کوانتومی- درهم‌تنیدگی- اطلاعات کوانتومی - محاسبات کوانتومی- جستجوی کوانتومی- الگوریتم گراور- نظریه بازی- نظریه تصمیم-

## فهرست مطالب

### فصل ۱- مبانی مکانیک کوانتومی

مقدمه.....	۲
۱-۱- اصول مکانیک کوانتومی.....	۲
۱-۱-۱- حالت‌ها.....	۲
۱-۱-۲- مشاهده‌پذیرها.....	۳
۱-۱-۳- اندازه‌گیری.....	۳
۱-۱-۴- دینامیک سیستم.....	۴
۱-۲- کیوبیت.....	۵
۱-۳- ماتریس چگالی.....	۶
۱-۴- کره بلاخ.....	۸
۱-۵- ماتریس چگالی کاهش یافته و حالت زیر سیستم.....	۱۰
۱-۶- تجزیه اشمیت برای حالت‌های خالص.....	۱۰
۱-۷- درهم‌تنیدگی.....	۱۲
۱-۸- تحذب یا کوژ.....	۱۳

### فصل ۲- کامپیوتر کوانتومی

مقدمه.....	۱۵
۱-۲- گیت کلاسیکی.....	۱۵
۲-۲- گیت کوانتومی.....	۱۸
۳-۲- الگوریتم جستجوی کوانتومی.....	۲۲
۴-۲- الگوریتم گراور.....	۲۴

### فصل ۳- بررسی احتمال‌های کوانتومی از نظریه تصمیم

مقدمه.....	۲۹
۱-۳- نظریه تصمیم.....	۲۹

۳۱	۲-۳- بخش احتمالی و غیر احتمالی نظریه تصمیم
۳۲	۳-۳- نظریه دوچ
۳۳	۴-۳- روش دوچ
۳۶	۵-۳- فرض مخفی
۳۹	۶-۳- رابطه ارجحیت و احتمال
۴۰	۷-۳- نقص‌های بحث دوچ

## فصل ۴- نظریه بازی

۴۳	مقدمه
۴۳	۱-۴- نظریه بازی
۴۵	۲-۴- بازی کوانتومی و راهبرد کوانتومی
۴۸	۳-۴- بازی پرتاب سکه PQ
۵۲	۴-۴- کاربرد بازی پرتاب سکه PQ در الگوریتم جستجوی کوانتومی
۵۴	۵-۴- عملگر هادامارد در سیستم کیوتریتی
۵۶	۶-۴- تعمیم بازی پرتاب سکه PQ کیوبیتی به حالت کیوتریتی
۵۸	۷-۴- بازی معمای زندانیان
۶۱	۸-۴- الگو فیزیکی معمای زندانیان کیوبیتی
۶۳	۹-۴- مجموعه راهبردها و راه‌حل‌های مربوطه
۶۴	۱-۹-۴- مجموعه راهبردهای یک پارامتری
۶۸	۲-۹-۴- مجموعه راهبردهای دو پارامتری
۷۶	۱۰-۴- ساختار معمای زندانیان به صورت تابعی از میزان درهم‌تنیدگی
۸۰	۱۱-۴- الگو فیزیکی معمای زندانیان کیوتریتی بر مبنای الگو کیوبیتی

۱۰۲	منابع
-----	-------

## فهرست اشکال

شکل ۱-۱- نمایش کیوبیت در کره بلاخ.....	۹
شکل ۱-۲- گیت NOT.....	۱۶
شکل ۲-۲- گیت AND.....	۱۶
شکل ۳-۲- گیت OR.....	۱۶
شکل ۴-۲- گیت XOR.....	۱۷
شکل ۵-۲- گیت NAND.....	۱۷
شکل ۶-۲- گیت NOR.....	۱۸
شکل ۷-۲- گیت هادمارد.....	۱۹
شکل ۸-۲- گیت Controlled-U.....	۲۰
شکل ۹-۲- گیت C-NOT.....	۲۱
شکل ۱۰-۲- مدار یک گیت f-gate.....	۲۲
شکل ۱۱-۲- مدار الگوریتم گراور.....	۲۵
شکل ۱۲-۲- مدار داخلی عملگر گراور.....	۲۵
شکل ۱-۴- ساختار کلی بازی کوانتومی.....	۴۵
شکل ۲-۴- شبکه کوانتومی بازی معمای زندانیان.....	۶۲
شکل ۳-۴- نمودار پاداش آلیس برای بازی‌های مجزا در حالت کیوبیتی.....	۷۰
شکل ۴-۴- نمودار پاداش آلیس برای بازی با ماکزیمم درهم‌تنیدگی در حالت کیوبیتی.....	۷۱
شکل ۵-۴- مقایسه نمودار پاداش آلیس با راهبردهای کلاسیکی و کوانتومی در حالت کیوبیتی.....	۷۶
شکل ۶-۴- نمودار پاداش آلیس در حالت کیوتربیتی با راهبرد M برای آلیس و $U(\theta)$ برای باب.....	۸۷
شکل ۷-۴- نمودار پاداش آلیس در حالت کیوتربیتی با راهبرد کلاسیکی C آلیس و راهبرد $U(\theta)$ باب.....	۸۸
شکل ۸-۴- نمودار پاداش آلیس در حالت کیوتربیتی با راهبرد کلاسیکی D آلیس و با راهبرد $U(\theta)$ باب.....	۸۸



## فهرست جداول

- جدول ۴-۱- ماتریس پاداش بازی دو نفره با جمع-صفر ..... ۴۹
- جدول ۴-۲- ماتریس پاداش آلیس در معمای زندانیان کیوبیتی ..... ۶۰
- جدول ۴-۳- جدول پاداش آلیس و باب در حالت کیوبیتی با مجموع راهبرد دو پارامتری ..... ۷۱
- جدول ۴-۴- جدول پاداش آلیس و باب در حالت کیوتریتی با مجموع راهبرد یک پارامتری ..... ۸۴
- جدول ۴-۵- جدول پاداش آلیس و باب در حالت کیوتریتی با مجموع راهبرد دو پارامتری ..... ۸۶

## فهرست پیوست‌ها

۹۱.....	پیوست ۱
۹۷.....	پیوست ۲
۹۹.....	پیوست ۳

# فصل ۱

## مبانی مکانیک کوانتومی

## مقدمه:

بنا بر اصول مکانیک کوانتومی حالت یک سیستم بسته با یک بردار در فضای هیلبرت مشخص می‌شود. این بردار توسط یک عملگر یونیتاری<sup>۱</sup> در طول زمان تحول می‌یابد و اندازه‌گیری هر مشاهده‌پذیر، این بردار را به ویژه بردارهای آن عملگر متناظر با آن مشاهده‌پذیر تصویر می‌کند. در عمل یک سیستم کوانتومی به ندرت می‌تواند از محیط اطراف خود مستقل باشد. در بسیاری از اوقات نیز، نه به کلیت یک سیستم کوانتومی بلکه به اجزای آن علاقمندیم. در حالی که سیستم کوانتومی بسته با یک بردار حالت توصیف می‌شود، باید دید که اجزای آن سیستم در چه حالتی هستند و چگونه می‌بایست آن‌ها را توصیف کرد.

## ۱-۱- اصول<sup>۲</sup> مکانیک کوانتومی:

به طور کلی مکانیک کوانتومی یک الگو ریاضی از جهان فیزیکی می‌باشد. در اینجا یک شرح کلی در مورد اصول مکانیک کوانتومی آورده شده است. این اصول ارتباطی بین جهان فیزیکی و فرمالیزم ریاضی مکانیک کوانتومی برقرار می‌کنند.

### ۱-۱-۱- حالت‌ها:

یک حالت، توصیف کامل یک سیستم فیزیکی است. در مکانیک کوانتومی یک حالت یک شعاع<sup>۳</sup> در فضای هیلبرت می‌باشد. این حالت که با  $|\Psi\rangle$  نمایش داده می‌شود شامل تمام اطلاعاتی است که درباره یک سیستم می‌توان به دست آورد.

---

<sup>1</sup> unitary  
<sup>2</sup> axiom  
<sup>3</sup> ray

## ۱-۱-۲ - مشاهده پذیرها:

یک مشاهده پذیر یک خاصیت یک سیستم فیزیکی است که این خاصیت قابل اندازه گیری می باشد. در مکانیک کوانتومی یک مشاهده پذیر با یک عملگر خود الحاقی<sup>۱</sup> نمایش داده می شود. یک عملگر یک نگاشت خطی است که یک بردار را روی خودش می نگارد.

(۱-۱)

$$A: |\Psi\rangle \Rightarrow A|\Psi\rangle; A(a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle) = aA|\Psi_1\rangle + bA|\Psi_2\rangle$$

عملگر خود الحاقی  $A$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle \varphi | A\Psi \rangle = \langle A^\dagger \varphi | \Psi \rangle \quad (۲-۱)$$

به عملگر  $A$  خود الحاقی می گویند اگر  $A = A^\dagger$  باشد. یک عملگر در فضای هیلبرت  $H$  به صورت یک طیف نمایش داده می شود، و ویژه حالتها در پایه های متعامد و بهنجار<sup>۲</sup> کامل در فضای  $H$ ، می باشند. عملگر خود الحاقی  $A$  می تواند به صورت زیر بسط داده شود:

$$A = \sum_n a_n p_n \quad (۳-۱)$$

که  $a_n$  ویژه مقادیر  $A$  می باشد و  $p_n$  متناظر با تصویرهای عمود در فضای ویژه بردارها با ویژه مقادیر  $a_n$  است و  $p_n$  ها در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} p_n p_m &= \delta_{nm} p_n \\ p_n^\dagger &= p_n \end{aligned} \quad (۴-۱)$$

---

<sup>۱</sup>Self adjont  
<sup>۲</sup> orthonormal

### ۱-۱-۳- اندازه گیری:

در مکانیک کوانتومی خروجی اندازه گیری مشاهده پذیر  $A$ ، ویژه مقدار  $A$  می باشد. بعد از اندازه گیری، حالت کوانتومی یک ویژه حالت  $A$ ، با ویژه مقدار اندازه گیری شده می باشد. اگر حالت کوانتومی پیش از اندازه گیری  $|\Psi\rangle$  باشد خروجی  $a_n$  با احتمال زیر به دست می آید:

$$prob(a_n) = \|p_n|\Psi\rangle\|^2 \quad (5-1)$$

حالت کوانتومی بهنجار به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{p_n|\Psi\rangle}{(\langle\Psi|p_n|\Psi\rangle)^{1/2}} \quad (6-1)$$

باید به این نکته توجه کرد که اگر بلافاصله (قبل از آن که سیستم متحول شود) اندازه گیری مجدد انجام شود بر طبق این قانون همان خروجی قبل با احتمال ۱ دوباره به دست می آید. در اینجا  $p_n$  عملگر تصویر می باشد.

### ۱-۱-۴- دینامیک سیستم:

تحول زمانی یک سیستم کوانتومی با یک تبدیل یونیتاری توصیف می شود. این تبدیل توسط یک عملگر خود الحاقی بیان می شود و این عملگر هامیلتونی سیستم نامیده می شود. تحول در تصویر شرودینگر با معادله شرودینگر به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \frac{-iH}{\hbar}|\Psi(t)\rangle \quad (7-1)$$

که  $H$  در اینجا هامیلتونی سیستم می باشد و  $\hbar$  ثابت پلانک است که در این تحقیق برابر ۱ فرض می شود. حالت سیستم بسته در زمان دلخواه  $t$  از روی حالت سیستم در زمان اولیه به دست می آید. با فرض  $\hbar = 1$  داریم:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi(0)\rangle \quad (8-1)$$

حال اگر این معادله به اندازه بی‌نهایت کوچک بر حسب  $t$  بسط داده شود در این صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|\Psi(t + dt)\rangle = (1 - iHdt)|\Psi(t)\rangle \quad (9-1)$$

عملگر  $U(dt) = 1 - iHdt$  با تقریب مرتبه اول یک عملگر یونیتاری است. به دلیل این که  $H$  یک عملگر هرمیتی است و  $U(dt)$  در شرط  $U^\dagger U = 1$  صدق می‌کند. بنابراین با دانستن حالت اولیه سیستم و همچنین هامیلتونی حاکم بر سیستم می‌توان تحول سیستم را به صورت دقیق در زمان مشخص نمود. پس عملگر تحول زمانی برای یک سیستم به صورت زیر می‌باشد [۱ و ۲ و ۳]:

$$U = e^{-iHt} \quad (10-1)$$

## ۲-۱- کیوبیت:

اطلاعات کلاسیکی به آن دسته از اطلاعاتی گفته می‌شود که توسط کامپیوترهای معمولی پردازش می‌شوند، و اطلاعات کوانتومی به آن دسته از اطلاعات گفته می‌شود که توسط کامپیوترهای کوانتومی پردازش می‌شوند. بیت به عنوان یک مفهوم بنیادی در محاسبات و نظریه اطلاعات کلاسیکی شناخته شده است و حاوی اطلاعات دیجیتالی ۰ و ۱ می‌باشد. یک بیت کوانتومی را کیوبیت می‌گویند و واحد اصلی اطلاعات کوانتومی می‌باشد و معادل یک حالت کوانتومی  $|\Psi\rangle$  است. در این قسمت خواص آن را مورد بررسی قرار داده و تفاوت آن با بیت کلاسیکی مشخص می‌شود. کیوبیت‌ها را می‌توان به صورت مفاهیم ریاضی و یا مفهومی که توسط سیستم‌های فیزیکی پیاده سازی می‌شوند مورد بررسی قرار داد. یک کیوبیت مقدار ۰ و ۱ یا ترکیب خطی از این دو را هم زمان اختیار می‌کند. توانایی اختیار کردن ترکیب خطی ۰ و ۱ در کیوبیت پایه توانایی محاسبات کوانتومی می‌باشد. در واقع تفاوت اصلی بین کیوبیت‌ها و بیت‌های کلاسیکی در توانایی اختیار کردن ترکیب خطی ۰ و ۱ است. در

مکانیک کوانتومی اطلاعات به صورت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  نمایش داده می‌شود و به زبان جبر خطی متناظر با

بردارهای  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  می‌باشند. در حالت کلی یک کیوبیت با عبارت کلی زیر توصیف می‌شود:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (11-1)$$

که اعداد  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط دلخواه هستند. با توجه به مکانیک کوانتومی مقدماتی، اگر حالت کوانتومی فوق اندازه‌گیری شود، نتیجه‌ی حاصل با احتمال  $|\alpha|^2$  در حالت  $|0\rangle$  و با احتمال  $|\beta|^2$  در حالت  $|1\rangle$  می‌باشد. با توجه به بقای احتمال تنها شرط موجود روی ضرائب  $\alpha$  و  $\beta$  به این صورت است که:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (12-1)$$

کیوبیت‌ها در دنیای واقعی و در آزمایشگاه توسط سیستم‌های فیزیکی مختلف پیاده سازی می‌شوند. سیستم‌های فیزیکی که اغلب برای پیاده سازی کیوبیت‌ها به کار می‌روند عبارتند از: فوتون‌ها و اسپین هسته‌ها [۴۳].

### ۳-۱- ماتریس چگالی:

تاکنون فرض شده است که حالت سیستم کوانتومی با بردار  $|\Psi\rangle$  مشخص می‌شود، بنا بر فرضیه‌های<sup>۱</sup> کوانتومی این امر مستلزم آن است که اولاً از آخرین اندازه‌گیری که روی سیستم کوانتومی انجام شده و طی آن حالت سیستم مشخص شده است مطلع باشیم. ثانیاً در طی این اندازه‌گیری، سیستم کوانتومی از محیط اطراف خود منزوی باقی مانده باشد. برای سیستم‌های واقعی هیچ کدام از این دو فرض صحیح نیستند. به عنوان مثال باریکه‌ای از اتم‌ها که از بخار ناشی از یک فیلامان گرم شده، به وجود آمده‌اند و سپس به وسیله همسو کننده‌ها در یک راستا جمع شده‌اند، یک سیستم رایج کوانتومی می‌باشد. همچنین باریکه‌ای از فوتون‌ها که از هیچ پولاریزیدی رد نشده‌اند و قطبش آن‌ها

---

<sup>۱</sup> postulates



مشخص نیست نیز یک سیستم کوانتومی است. در چنین شرایطی تنها می‌توان گفت که کسر  $P_i$  از اتم‌ها در حالت  $|\Psi_i\rangle$  هستند. معمولاً این کسر‌ها از یک سری اصول مکانیک کوانتومی به دست می‌آید. در غیاب هر گونه اطلاعات که یک حالت را بر دیگر حالت‌ها ترجیح دهد می‌توان با اطمینان قید کرد که توزیع اتم‌ها روی حالات مختلف کاملاً یکنواخت است. مثل وقتی که به بررسی قطبش یک باریکه از فوتون‌ها پرداخته می‌شود می‌توان گفت: که ۵۰ درصد آن‌ها جهت قطبش  $x$  و ۵۰ درصد آن‌ها جهت قطبش  $y$  را دارند. در این حالت اگر ذره‌ای از این آنسامبل جدا شود حالت آن را نمی‌توان با یک حالت کوانتومی یکتا توصیف نمود. برای توصیف حالت کوانتومی این ذره از ماتریس چگالی استفاده می‌شود:

$$\rho = p_1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + p_2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \dots + p_n|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \quad (13-1)$$

که هر یک از حالت‌های  $|\Psi_i\rangle$  یک حالت کوانتومی بهنجار است و تنها شرط موجود برای احتمال‌های  $p_i$  نیز بقای احتمال می‌باشد:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (14-1)$$

در حالتی که بیش از یکی از احتمال‌های  $p_i$  غیر صفر باشد حالت را آمیخته<sup>۱</sup> یا مخلوط می‌نامند در غیر این صورت حالت خالص<sup>۲</sup> است. فرض کنید خاصیتی مثل خاصیت  $M$  قرار است اندازه‌گیری شود. برای یک سیستم آمیخته متوسط خاصیت  $M$  به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

$$\langle M \rangle = \sum_i p_i \langle \Psi_i | M | \Psi_i \rangle = \text{tr}(\rho M) \quad (15-1)$$

که در آن  $\rho$  عبارت است از:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \quad (16-1)$$

که این یک ماتریس چگالی سیستم کوانتومی خوانده می‌شود. برای فهم بهتر این مسئله می‌توان یک مثال بیان کرد. یک سیستم دو کیوبیتی آمیخته، که فقط یک کیوبیت آن قابل مشاهده است را مانند

<sup>1</sup> Mix  
<sup>2</sup> pure

زیر در نظر بگیرید. حال اگر عملگر  $\hat{M}$ ، که تنها روی کیوبیت  $A$  عمل می‌کند، روی این سیستم اندازه‌گیری شود. پس داریم:

$$|\Psi_{AB}\rangle = a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (17-1)$$

$$\langle \Psi_{AB} | M_A \otimes 1_B | \Psi_{AB} \rangle = (a^* \langle 0|_A \otimes \langle 0|_B + b^* \langle 1|_A \otimes \langle 1|_B) (M_A \otimes 1_B) (a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) =$$

$$|a|^2 \langle 0| M_A |0\rangle_A + |b|^2 \langle 1| M_A |1\rangle_A$$

$$\langle M_A \rangle = \text{tr}(M_A \rho_A)$$

$$\rho_A = |a|^2 |0\rangle_A \langle 0| + |b|^2 |1\rangle_A \langle 1|$$

(18-1)

$\rho_A$ : تفسیر آنسامبلی از حالت‌های کوانتومی ممکن است که هر اتفاقی یک احتمال خاص دارد.

بنابراین حالت چنین سیستمی به جای آن که با یک بردار حالت مشخص شود با یک ماتریس چگالی مشخص می‌شود. این ماتریس چگالی در بردارنده تمام اطلاعاتی است که می‌توان از سیستم کوانتومی به دست آورد [۲ و ۳ و ۴].

خواص ریاضی ماتریس چگالی عبارتند از:

$$(1) \text{ ماتریس چگالی هرمیتی باشد } \rho^\dagger = \rho.$$

$$(2) \text{ ردّ ماتریس چگالی برابر واحد است } \text{tr}(\rho) = 1.$$

$$(3) \text{ ماتریس چگالی همواره مثبت است } \langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0, \forall |\varphi\rangle.$$

## ۱-۴- کره بلاخ<sup>۱</sup>:

در مکانیک کوانتومی کره بلاخ یک نمایش هندسی فضای حالت خالص یک سیستم کوانتومی دو حالتی است، که نام خود را از فیزیکدانی به نام فلیکس بلاخ<sup>۲</sup> گرفته است. این کره در حالت کلی ممکن است به فضای مشابه یک سیستم کوانتومی  $n$  حالتی نیز اشاره کند و یک ابزار مناسب برای

<sup>1</sup> Bloch sphere

<sup>2</sup> Felix Bloch

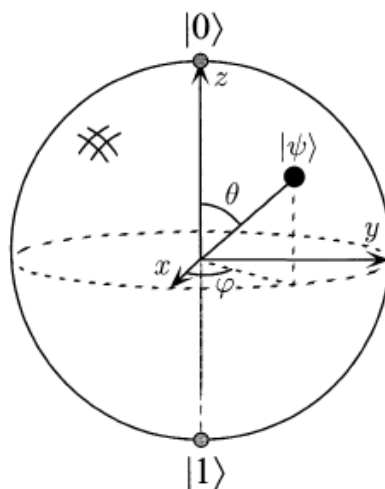
نشان دادن کیوبیت‌ها می‌باشد. یک تصویر مفید از کیوبیت‌ها از طریق بازنویسی حالت  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  با توجه به شرط  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  آن است که حالت یک کیوبیت دلخواه به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \right) \quad (19-1)$$

که  $\theta$  و  $\varphi$  و  $\gamma$  اعداد حقیقی هستند. با توجه به مکانیک کوانتومی مقدماتی فاز  $\gamma$  هیچ اثر قابل مشاهده‌ای ندارد، لذا می‌توان از آن صرف نظر کرد و حالت کوانتومی دلخواه را به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (20-1)$$

که  $\theta \in [0, \pi]$  و  $\varphi \in [0, 2\pi]$  در واقع زوایایی هستند که در یک کره سه بُعدی با شعاع واحد قابل نمایش می‌باشند. بنابراین همه حالت‌های ممکن را با تغییر  $\theta$  و  $\varphi$  می‌توان از رابطه فوق به دست آورد، شکل (۱-۱) را کره بلاخ می‌نامند و هر نقطه روی سطح آن توصیف کننده یک حالت منحصر به فرد کوانتومی است. با توجه به این که روی سطح کره بلاخ بی‌نهایت نقطه وجود دارد، لذا به نظر می‌رسد که یک کیوبیت برخلاف بیت‌های کلاسیکی که تنها دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند قادر است بی‌نهایت مقدار اطلاعات بگیرد و در نتیجه اطلاعات بسیار زیادی را ذخیره نماید [۴و۱].



شکل ۱-۱- نمایش کره بلاخ [۶]

## ۱-۵- ماتریس چگالی کاهش یافته و حالت زیر سیستم:

عمیق‌ترین کاربرد ماتریس چگالی را می‌توان در کاربرد آن‌ها برای توصیف زیر سیستم دانست. این توصیف با ماتریس چگالی کاهش یافته صورت می‌گیرد. اگر سیستم فیزیکی دارای دو قسمت A و B باشد و کل مجموعه توسط  $\rho_{AB}$  توصیف شود ماتریس چگالی کاهش یافته توصیف کننده‌ی زیر سیستم A، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) \quad (۲۱-۱)$$

که  $tr_B$  نگاشتی است که به صورت ردگیری جزئی شناخته می‌شود و ماتریس چگالی مربوط به سیستم AB را به فضای ماتریس چگالی A می‌نگارد. ردگیری جزئی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad (۲۲-۱)$$

ردگیری سمت راست در معادله (۲۲-۱) را می‌توان به صورت  $tr(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2 | b_1 \rangle$  بازنویسی کرد.

## ۱-۶- تجزیه اشمیت<sup>۱</sup> برای حالت‌های خالص:

حالت کوانتومی مربوط به دو سیستم مختلف با فضای هیلبرت  $H_A$  و  $H_B$  را در نظر بگیرید. در حالت کلی بُعد فضای هیلبرت A و B با هم متفاوت است و به ترتیب با  $N_A$  و  $N_B$  مشخص می‌شود. حالت کوانتومی توصیف کننده سیستم A و B در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{m=1}^{N_A} \sum_{n=1}^{N_B} a_{mn} |U_m\rangle_A |V_n\rangle_B \quad (۲۳-۱)$$

که  $|U_m\rangle$ ها و  $|V_n\rangle$ ها پایه‌های متعامد سیستم A و B می‌باشند. تجزیه اشمیت حالت خالص  $|\Psi\rangle_{AB}$  نشان می‌دهد که این حالت را می‌توان بر حسب حاصل جمع دسته بردارهای متعامد با یک اندیس نمایش داد:

<sup>۱</sup> Schmidt decomposition

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_p C_p |U'_p\rangle_A |V'_p\rangle_B \quad (24-1)$$

که ضرائب  $C_p$  و بردارهای متعامد  $|U'_p\rangle$  و  $|V'_p\rangle$  به صورت زیر به دست آورده می‌شوند. بدون این که به کلیت مسئله ایرادی وارد شود فرض کنید  $N_B > N_A$  باشد. با دنبال کردن مراحل زیر بسط اشمیت به دست می‌آید:

(۱) ماتریس چگالی توصیف کننده سیستم AB به صورت زیر می‌شود:

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi| = \sum_{nm} \sum_{pq} a_{mn} a_{pq}^* |U_m\rangle_A \langle U_p| \otimes |V_n\rangle_B \langle V_q| \quad (25-1)$$

(۲) ماتریس چگالی کاهش یافته زیر فضای A را با ردگیری جزئی روی ماتریس چگالی AB به صورت زیر می‌شود:

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) = \sum_{nm} \sum_p a_{mn} a_{pn}^* |U_m\rangle_A \langle U_p| \quad (26-1)$$

(۳) مرحله اصلی یافتن بسط اشمیت قطری کردن ماتریس چگالی زیر سیستم A می‌باشد. اگر فرض شود که  $|U'_m\rangle$  پایه‌های قطری کننده ماتریس  $\rho_A$  باشند در آن صورت  $\rho_A$  به صورت زیر می‌شود:

$$\rho_A = \sum_{m=1}^{N_A} |C_m|^2 |U'_m\rangle \langle U'_m| \quad (27-1)$$

حال حالت خالص اولیه  $|\Psi\rangle_{AB}$  بر حسب این پایه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{m=1}^{N_A} \sum_{n=1}^{N_B} a'_{mn} |U'_m\rangle |V_n\rangle \quad (28-1)$$

که ضرائب  $a'_{mn}$  در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^{N_B} a'_{mn} a'_{pn}^* = \delta_{mp} |C_m|^2 \quad (29-1)$$

(۴) در این مرحله می‌توان ترکیب خطی زیر را از پایه‌های متعامد  $|V_n\rangle$  ساخت:

$$|V'_i\rangle = \sum_{n=1}^{N_B} \frac{a'_{in}}{C_i} |V_n\rangle \quad (30-1)$$

لذا  $|V'_i\rangle$  پایه‌های جدید فضای B می‌باشند.

(۵) در این مرحله بسط اشمیت با استفاده از پایه‌های جدید فضای B به دست آمد:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_p |C_p\rangle |U'_p\rangle |V'_p\rangle \quad (۳۱-۱)$$

نکته مهم در بسط اشمیت ماتریس‌های چگالی کاهش یافته‌ی مربوط به زیر سیستم A و B است که هر دو قطری و طیف یکسانی دارند [۱ و ۳ و ۴]:

$$\rho_A = \sum_p |C_p|^2 |U'_p\rangle \langle U'_p| \quad (۳۲-۱)$$

$$\rho_B = \sum_p |C_p|^2 |V'_p\rangle \langle V'_p| \quad (۳۳-۱)$$

### ۷-۱- درهم‌تنیدگی:

درهم‌تنیدگی نوعی همبستگی کوانتومی بین بخش‌های مختلف یک سیستم است که معادل کلاسیکی آن وجود ندارد. درهم‌تنیدگی در کنار امکان وجود برهم‌نهی حالت‌های مختلف کوانتومی به عنوان ویژگی‌های اصلی مکانیک کوانتومی محسوب می‌شوند. در این قسمت به معرفی درهم‌تنیدگی و نحوه کمی نمودن آن پرداخته می‌شود. برای حالت خالص دوتایی می‌توان از بسط اشمیت برای تعریف درهم‌تنیدگی استفاده کرد. عدد اشمیت که به یک حالت خالص نسبت داده می‌شود تعداد جملات موجود در تجزیه اشمیت است. اگر  $|\Psi_{AB}\rangle$  دارای عدد اشمیت بزرگتر از یک ۱ باشد آن را درهم‌تنیده می‌گویند و حالت‌هایی به صورت زیر را که دارای عدد اشمیت ۱ می‌باشند جداپذیر یا ضربی هستند.

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\Psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B \quad (۳۴-۱)$$

هر حالتی که ضربی نباشد لزوماً درهم‌تنیده است.

## ۱-۸- تحدب یا کوژ<sup>۱</sup>:

همان طور که گفته شد یک عملگر هرمیتی  $\rho$  که در فضای هیلبرتی  $H$  عمل کند اگر سه ویژگی زیر را داشته باشد می‌توان آن را به عنوان عملگر چگالی تفسیر کرد این ویژگی‌ها عبارتند از:

(۱)  $\rho$  خود الحاقی باشد. (۲)  $\rho$  غیر منفی باشد. (۳)  $tr(\rho) = 1$  باشد.

حال با توجه به دو ماتریس چگالی  $\rho_1$  و  $\rho_2$  دلخواه می‌توان یک ماتریس چگالی دیگر به عنوان یک ترکیب خطی محدب از هر دو به صورت زیر ساخت:

$$\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 \quad (35-1)$$

این رابطه یک ماتریس چگالی برای هر  $\lambda$  حقیقی است که در شرط  $0 \leq \lambda \leq 1$  صدق می‌کند. می‌توان دید که  $\rho(\lambda)$  در ویژگی (۱) و (۳) صدق می‌کند. برای بررسی ویژگی (۲) رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle \Psi | \rho(\lambda) | \Psi \rangle = \lambda \langle \Psi | \rho_1 | \Psi \rangle + (1-\lambda) \langle \Psi | \rho_2 | \Psi \rangle \geq 0; \quad (36-1)$$

$\rho(\lambda)$  قطعاً غیر منفی خواهد بود. زیرا  $\rho_1$  و  $\rho_2$  غیر منفی هستند [۴و۱].

---

<sup>1</sup> Convexity

## فصل ۲

# کامپیوتر کوانتومی

---



## مقدمه:

کامپیوتر کوانتومی ابزاری برای پردازش است و برای اجرای اعمالی بر روی داده‌ها، از ویژگی‌های مکانیک کوانتومی نظیر برهم‌نهی و درهم‌تنیدگی استفاده می‌کند. اصل اساسی در پردازش کوانتومی این است که از ویژگی‌های کوانتومی می‌توان برای بیان داده‌ها و انجام عملیاتی بر روی این داده‌ها استفاده کرد. هر چند پردازش کوانتومی هنوز در بدو تولد خود به سر می‌برد، آزمایش‌هایی انجام شده است که در آن اعمال محاسباتی کوانتومی در تعداد بسیار کمی از کیوبیت‌ها اجرا شده است (ارقام باینری کوانتومی). هم تحقیقات نظریه و هم تحقیقات عملی در این زمینه در حال انجام است. بسیاری از دولت‌ها و موسسات ارتشی از تحقیقات در زمینه محاسبات کوانتومی برای توسعه کامپیوترهای کوانتومی با اهداف امنیت ملی و مدنی حمایت می‌کنند. کامپیوترهای کوانتومی بسیاری از مسائل واقعی مانند الگوریتم جستجوی کوانتومی را بسیار سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیکی حاضر حل می‌کنند. بدون وجود برخی ویژگی‌های مکانیک کوانتومی نظیر درهم‌تنیدگی نمی‌توان گفت یک کامپیوتر کوانتومی بر یک کامپیوتر کلاسیکی برتری دارد. به طور کلی یک کامپیوتر کوانتومی با  $N$  کیوبیت می‌تواند تا  $2^N$  حالت مختلف داشته باشد. این چنین کامپیوترهایی با یک رشته از گیت‌های منطقی کوانتومی عمل می‌کنند [۴].

## ۲-۱- گیت کلاسیکی:

همان طور که گفته شد در کامپیوترهای کلاسیک تمام اطلاعات به صورت رشته‌ای از متغیرهای ۰ و ۱ ذخیره می‌شوند. پردازش داده‌ها از هر نوع که باشند، چیزی جز انجام اعمال منطقی روی این رشته‌ها نیست. هر نوع پردازش اطلاعات یک سلسله توابع می‌باشند که پشت سر هم روی یک رشته ورودی با طول معین انجام می‌شود. تمام این توابع را می‌توان با ترکیب توابع مقدماتی‌ای که تنها روی یک بیت یا دو بیت اثر می‌کنند، ساخت. ساده‌ترین توابع مقدماتی عبارتند از توابع NOT و OR و

AND و XOR، که عملکرد آن‌ها توضیح داده می‌شود. هر کدام از این توابع مقدماتی را اصطلاحاً دروازه یا گیت می‌نامند. گیت‌های کلاسیکی بر اساس تعداد ورودی‌ها به دو دسته گیت‌های با تک ورودی و گیت‌های با دو ورودی تقسیم می‌شوند در زیر چند نمونه از گیت‌های کلاسیکی معرفی می‌شود [۴ و ۵].

### (۱) گیت NOT :

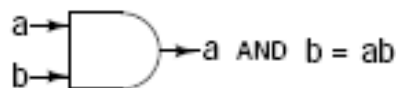
این گیت مقدار بیت ورودی را از ۰ به ۱ تغییر می‌دهد.



شکل ۱-۲- گیت NOT

### (۲) گیت AND :

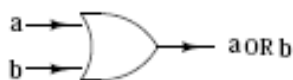
این گیت یک بیت ساده خروجی را از دو بیت ورودی تولید می‌کند. اگر هر دو ورودی ۱ باشد خروجی هم ۱ است در غیر این صورت خروجی ۰ است.



شکل ۲-۲- گیت AND

### (۳) گیت OR :

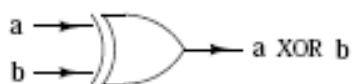
در این گیت اگر هر دو ورودی ۰ باشند خروجی هم ۰ است در غیر این صورت خروجی ۱ است.



شکل ۳-۲- گیت OR

#### گیت XOR (۴):

در این گیت اگر یکی از ورودی‌ها ۰ و دیگری ۱ باشد در این صورت خروجی ۱ است در غیر این صورت خروجی ۰ است.



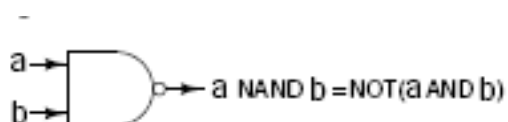
شکل ۲-۴- گیت XOR

یک شماتیک کلی از ورودی‌ها و خروجی‌های گیت‌هایی با دو ورودی را، به صورت زیر می‌توان نشان داد:

a	b	AND	OR	XOR
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

#### گیت NAND (۵):

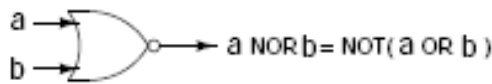
این گیت از ترکیب گیت NOT و گیت AND درست شده است.



شکل ۲-۵- گیت NAND

#### گیت NOR (۶):

این گیت از ترکیب گیت NOT و گیت OR درست شده است.



شکل ۲-۶- گیت NOR

## ۲-۲- گیت کوانتومی:

همان طور که بیت‌های کلاسیکی توسط گیت‌های کلاسیکی تغییر داده می‌شوند، گیت‌های کوانتومی کیوبیت‌ها را تغییر می‌دهند. این گیت‌ها توسط یک عملگر یونیتاری مطابق با قوانین مکانیک کوانتومی توضیح داده می‌شوند. در این صورت برای هر گیت کوانتومی یک عملگر  $U$  وجود دارد. پس یک گیت کوانتومی روی یک حالت چند کیوبیتی به صورت زیر عمل می‌کند:

$$|\Psi_{in}\rangle \rightarrow |\Psi_{out}\rangle = U|\Psi_{in}\rangle \quad (1-2)$$

حالت ورودی ممکن است به صورت زیر بازسازی شود:

$$|\Psi_{in}\rangle = U^\dagger |\Psi_{out}\rangle \quad (2-2)$$

یک گیت کوانتومی توسط عملکردش روی پایه‌های مناسب توضیح داده می‌شود. برای یک کیوبیت مناسب‌ترین انتخاب، پایه‌های محاسباتی  $|0\rangle, |1\rangle$  می‌باشند. در مورد حالت‌های چند کیوبیتی پایه‌های محاسباتی از تانسور کردن بردارهای پایه محاسباتی تک کیوبیتی به دست می‌آیند. در زیر برخی از گیت‌های تک کیوبیتی و دو کیوبیتی و عملکرد آن‌ها روی بردارهای پایه محاسباتی توضیح داده می‌شود:

### ۱) گیت کوانتومی NOT(X):

درست مانند گیت NOT کلاسیکی برای گیت NOT کوانتومی داریم:

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle \quad \text{and} \quad |1\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (3-2)$$

که یک حالت پایه را به حالت پایه دیگر تغییر می‌دهد. این گیت متناظر با ماتریس یونیتاری زیر است:

$$X = \begin{pmatrix} \langle 0|X|0\rangle & \langle 0|X|1\rangle \\ \langle 1|X|0\rangle & \langle 1|X|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

گیت Z :

در این عمل پایه‌های محاسباتی به صورت زیر داده می‌شوند و این گیت متناظر با ماتریس یونیتاری زیر است:

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow -|1\rangle \quad (5-2)$$

$$Z = \begin{pmatrix} \langle 0|Z|0\rangle & \langle 0|Z|1\rangle \\ \langle 1|Z|0\rangle & \langle 1|Z|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6-2)$$

گیت Hadamard :

بی‌شک این یکی از مهم‌ترین گیت‌های کوانتومی است که عملکرد این گیت روی پایه‌های محاسباتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (7-2)$$

این گیت متناظر با ماتریس یونیتاری زیر می‌باشد:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle 0|H|0\rangle & \langle 0|H|1\rangle \\ \langle 1|H|0\rangle & \langle 1|H|1\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8-2)$$

و با نماد زیر نشان داده می‌شود [۵].



شکل ۷-۲- گیت Hademard

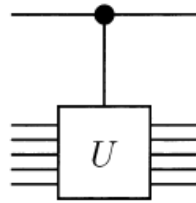
#### ۴) گیت‌های Controlled-U :

گیت‌های Controlled-U گیت‌های دو یا چند کیوبیتی هستند و بین کیوبیت‌های ورودی ایجاد درهم تنیدگی می‌کنند. ورودی این گیت‌ها شامل یک کیوبیت کنترل ( $|x\rangle$ ) و یک کیوبیت هدف<sup>۱</sup> ( $|y\rangle$ ) است. کیوبیت کنترل تعیین می‌کند که آیا عمل یونیتاری مشخص روی کیوبیت هدف انجام می‌شود یا خیر؟

عملکرد این گیت‌ها به طور کلی به صورت زیر است :

(۱) در صورتی که کیوبیت کنترل در حالت  $|0\rangle$  باشد، گیت هیچ عملی روی کیوبیت هدف انجام نمی‌دهد. یعنی:  $|0\rangle|y\rangle \rightarrow |0\rangle|y\rangle$

(۲) در صورتی که کیوبیت کنترل در حالت  $|1\rangle$  باشد، گیت عملگر  $U$  را بر کیوبیت هدف اثر می‌دهد. یعنی:  $|1\rangle|y\rangle \xrightarrow{U} |1\rangle(U|y\rangle)$



شکل ۲-۸- گیت Controlled-U

اگر عمل عملگر  $U$  مشخص باشد آن‌گاه نمایش ماتریسی این گیت دو کیوبیتی را در پایه‌های

محاسباتی  $\{|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$  می‌توان این گونه تعیین کرد:

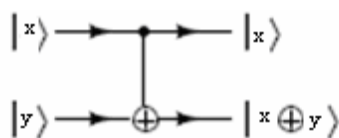
$$U = \begin{pmatrix} \langle 00|U|00\rangle & \langle 00|U|01\rangle & \langle 00|U|10\rangle & \langle 00|U|11\rangle \\ \langle 01|U|00\rangle & \langle 01|U|01\rangle & \langle 01|U|10\rangle & \langle 01|U|11\rangle \\ \langle 10|U|00\rangle & \langle 10|U|01\rangle & \langle 10|U|10\rangle & \langle 10|U|11\rangle \\ \langle 11|U|00\rangle & \langle 11|U|01\rangle & \langle 11|U|10\rangle & \langle 11|U|11\rangle \end{pmatrix}$$

در ادامه چند مورد از گیت‌های Controlled-U معرفی می‌شود.

<sup>1</sup> target

## ۵) گیت (C-NOT) Controlled NOT:

این گیت به گیت XOR نیز معروف است. این گیت کیوبیت کنترل را با کیوبیت هدف جمع می‌کند و باقی‌مانده تقسیم این جمع بر دو را به عنوان خروجی هدف بیرون می‌دهد. به عبارت دیگر اگر کیوبیت کنترل  $|1\rangle$  باشد، کیوبیت هدف را معکوس می‌کند و اگر کیوبیت کنترل  $|0\rangle$  باشد، آن را بدون تغییر می‌گذارد.



شکل ۹-۲ گیت C-NOT

$$|x, y\rangle \xrightarrow{C-NOT} |x, x \oplus y\rangle \quad (9-2)$$

که در آن  $\oplus$  به معنای باقی‌مانده تقسیم جمع بر ۲ است.

$$\begin{aligned} \langle 00|U|00\rangle = \langle 00|00\rangle = 1 & \quad \langle 01|U|01\rangle = \langle 01|01\rangle = 1 \\ \langle 10|U|11\rangle = \langle 10|10\rangle = 1 & \quad \langle 11|U|10\rangle = \langle 11|11\rangle = 1 \end{aligned}$$

با همین روش بقیه درایه‌های ماتریس  $U$  می‌شود. نمایش ماتریسی این گیت به صورت زیر است:

$$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10-2)$$

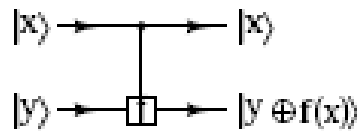
در حالتی که کیوبیت کنترل به صورت بر هم نهی از از کیوبیت‌های  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  باشد، خروجی گیت C-NOT این گونه خواهد بود:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle : |\Psi\rangle|0\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta|1,0\rangle \xrightarrow{C-NOT} \alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle \quad (11-2)$$

## ۶) گیت (f-gate)FUNCTION :

یکی از مهم‌ترین گیت‌ها از نوع controlled-U گیت‌های f-gate هستند. عملکرد این گیت در پایه‌های

محاسباتی به صورت زیر نشان داده می‌شود:



شکل ۲-۱۰- گیت FUNCTION

این گیت ورودی کنترل را به صورت تابعی از  $f$  بر کیوبیت هدف می‌نگارد:

$$f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} \quad (۲-۱۲)$$

عملکرد این گیت برای  $y = 0$  به صورت زیر است:

$$|x,0\rangle = |x,f(x)\rangle \quad (۲-۱۳)$$

اگر کیوبیت کنترل در یک حالت دلخواه  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  باشد در این صورت با عملکرد این گیت

نتیجه به صورت زیر می‌شود [۴ و ۵ و ۶]:

$$|\Psi\rangle|0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|1,0\rangle \rightarrow \alpha|0,f(0)\rangle + \beta|1,f(1)\rangle \quad (۲-۱۴)$$

## ۲-۳- الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی:

یکی از مسائلی که توسط الگوریتم‌های کوانتومی در زمان کوتاه‌تری نسبت به الگوریتم‌های کلاسیکی

حل می‌شوند مسائل مربوط به جستجو<sup>۱</sup> می‌باشند. به صورت مجرد یک مسئله جستجو را به شکل زیر

می‌توان بیان کرد. مجموعه  $S := \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  شامل  $N$  شیء است. تابعی مثل  $f : S \rightarrow \{0,1\}$

روی این مجموعه تعریف شده است. مقدار تابع  $f$  تنها روی یکی از عناصر این مجموعه که با  $w$

نشان داده می‌شود برابر با یک است و روی دیگر عناصر مجموعه  $S$  مقدار این تابع برابر با صفر است.

<sup>۱</sup> search



$w$  یکی از  $x_i$  هاست ولی مشخص نیست کدام یک از آن‌هاست. در غیاب هر گونه اطلاعات اضافه‌ای، تنها کاری که باید کرد، آن است که  $x_i$  های مختلف را یک به یک به تابع داد و خروجی تابع را نگاه کرد، هر گاه خروجی تابع برابر با یک شد پس عنصر داده شده به تابع  $w$  بوده است. به طور متوسط می‌بایست تابع را  $O(\frac{N}{2})$  بار خواند تا بتوان به  $w$  دسترسی پیدا کرد. اما گراور<sup>۱</sup> به روش هوشمندانه‌ای با استفاده از اصل برهم‌نهی این مقدار را به  $O(\sqrt{N})$  مرتبه تقلیل داد که برای  $N$  های بزرگ کاهش قابل ملاحظه‌ای است. برای مثال مقادیر  $x$  می‌توانند لیست نامرتبی از شماره تلفن‌ها باشند. حال اگر به خواهیم از میان این شماره‌ها دنبال یک شماره خاص به گردیم، واضح است که برای پیدا کردن این شماره کفایت تا فقط اندیس مربوط به آن را پیدا کرد. برای جستجوی کوانتومی شماره تلفن‌ها (یا هر چیز دیگر) را با کت‌های  $n$  کیوبیتی اندیس گذاری می‌کنند. هر کدام از این کت‌ها پایه‌ای از فضای  $2^n$  بُعدی است. یک سیستم  $n$  کیوبیتی می‌تواند  $N = 2^n$  شماره تلفن را اندیس گذاری کند. برای مثال فرض کنید  $N = 8$  شماره تلفن وجود دارد، برای اندیس گذاری این هشت شماره، نیاز به یک سیستم سه کیوبیتی است زیرا در این سیستم می‌توان هشت پایه تشکیل داد و هر پایه را اندیس یک شماره تلفن قرار داد:

$$|x\rangle_{\text{اندیس‌ها}} : |000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle, |111\rangle, |110\rangle, |011\rangle, |001\rangle$$

بنابراین مسئله جستجوی کوانتومی عبارت از پیدا کردن یک حالت پایه خاص در میان  $2^n$  حالت موجود است. این حالت خاص که همان جواب مسئله است،  $|w\rangle$  نامیده می‌شود. در حالت کلاسیکی انتظار می‌رود در این  $N = 2^n$  مورد،  $\frac{N}{2}$  بار جستجو انجام شود تا بتوان شماره مورد نظر را با احتمال  $\frac{1}{2}$  به دست آورد. اما گراور نشان داد کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند، مشابه این موارد را با انجام  $O(\sqrt{N})$  مرتبه جستجو با احتمالی نزدیک به ۱، به دست آورند [۷ و ۸ و ۹].

<sup>۱</sup> L.Grover

## ۲-۴- الگوریتم گراور:

در الگوریتم جستجوی گراور اولین مرحله تشکیل یک کت حالت است که حاصل برهم نهی تمامی پایه‌های فضای  $n$  بُعدی (که به عنوان اندیس بکار گرفته می‌شوند) می‌باشد که آن را با  $|\Psi_s\rangle$  نشان می‌دهند:

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \quad (15-2)$$

این حالت با اعمال عملگر  $H^{\otimes n}$  روی کت  $|0^{\otimes n}\rangle$  به دست می‌آید:

$$H^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \quad (16-2)$$

هدف کلی در الگوریتم گراور افزایش تدریجی دامنه  $(|w\rangle)$  و کاهش دامنه  $|x\rangle$  های دیگر است تا جایی که اندازه دامنه جواب بسیار زیاد و اندازه دامنه دیگر بسیار کم شود. در این صورت با اندازه‌گیری حالت سیستم، جواب مسئله جستجو با احتمال بالایی به دست می‌آید. برای این کار بعد از اولین مرحله، الگوریتم حلقه خود را که شامل چهار مرحله است بارها و بارها تکرار می‌کند.

(۱) عملگر  $U_{f_a}$  را اثر بده.

(۲) عملگر والش هادمارد<sup>۱</sup>  $H^{\otimes n}$  را اثر بده.

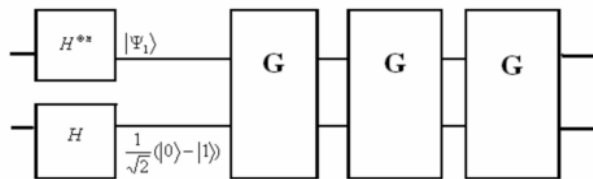
(۳) عملگر  $U_{f_0}$  را اثر بده.

(۴) دوباره عملگر والش هادمارد  $H^{\otimes n}$  را اثر بده.

---

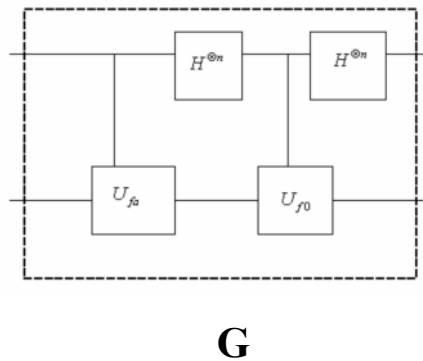
<sup>۱</sup> در مقاله گراور عملگر  $H^{\otimes n}$  به نام walsh hadmard معرفی شده است.

حال به بررسی اجزای فوق پرداخته و نشان داده می‌شود که این حلقه که به حلقه تکرار گراور یا عملگر گراور معروف است در هر بار تکرار ابتدا دامنه جواب را منفی کرده و سپس تمامی دامنه‌ها را نسبت به میانگینشان انعکاس می‌دهد که سبب افزایش دامنه جواب و کاهش دامنه دیگر می‌شود. مداری که برای اجرای الگوریتم گراور استفاده می‌شود به شکل زیر است.



شکل ۱۱-۲- مدار الگوریتم گراور [۹]

که در آن هر جعبه G یک مدار عملگر گراور است که ساختار داخلی آن به شکل زیر است:



**G**

شکل ۱۲-۲- مدار داخلی عملگر گراور [۹]

اکنون مدار G و عملکرد آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.  $U_f$  در واقع یک f-gate است که این f-gate ضریب  $|x\rangle$  هایی که جواب مسئله جستجو است ( $|w\rangle$ ) را منفی می‌کند و ضریب  $|x\rangle$  هایی که جواب نیستند بدون تغییر باقی می‌گذارد. یک f-gate که کیوبیت هدف آن  $(|0\rangle - |1\rangle)$  باشد، در کل به این صورت عمل می‌کند [۹]:

$$|x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right] \xrightarrow{U_f} (-1)^{f(x)} |x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right] \quad (17-2)$$

که در این رابطه اگر  $f(x)$  با  $f_a(x)$  مشخص شود، تبدیل یونیتاری  $U_f$  به صورت  $U_{f_a}$  می‌شود. پس بنابراین همانند قبل داریم:

$$|x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \xrightarrow{U_{f_a}} (-1)^{f_a(x)} |x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \quad (18-2)$$

$$\Rightarrow \sum_x a_x |x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \xrightarrow{U_f(x)} \sum_x (-1)^{f(x)} a_x |x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \quad (19-2)$$

در عملگر گراور:  $U_f(x) = \delta_{x,f}$  در نتیجه:

$$|x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \xrightarrow{U_{f(x)=\delta_{x,f}}} \sum_x (-1)^{\delta_{x,f}} |x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \quad (20-2)$$

همان طور که مشاهده شد کیوبیت هدف بعد از عمل  $U_f(x)$ ، هم چنان بدون تغییر باقی مانده است و از آنجا که در ادامه نیز هرگز تغییر نمی‌کند، می‌توان آن را در محاسبات نادیده گرفت و حذف کرد.

شکل عملگری  $U_f$  که آن را  $I_f$  می‌نامند را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$I_f = 1 - 2|f\rangle\langle f| \quad (21-2)$$

اجزای دیگر عملگر گراور، شامل دو عملگر والش-هادمارد ( $H^{\otimes n}$ ) و یک عملگر f-gate دیگر ( $U_{f_0}$ )

است.  $U_{f_0}$  همانند  $U_{f_a}$  عمل می‌کند با این تفاوت که ضریب همه  $|x\rangle$ ها را به جز  $|0^{\otimes n}\rangle$  منفی می‌کند. یعنی:

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{1+\delta_{x,0}} |x\rangle \quad (22-2)$$

با توجه به آنچه گفته شد، اکنون می‌توان عملگر گراور را تشکیل داد

$$G = -H^{\otimes n} I_0 H^{\otimes n} I_f = -H^{\otimes n} (1 - 2|0^{\otimes n}\rangle\langle 0^{\otimes n}|) H^{\otimes n} (1 - 2|f\rangle\langle f|) \quad (23-2)$$

که در آن  $U_{f_0}$  عملگری است که ضریب بقیه  $|x\rangle$ ها را بدون تغییر باقی می‌گذارد:

$$U_{f_0} = 1 - 2|0^{\otimes n}\rangle\langle 0^{\otimes n}| \quad (24-2)$$

از طرفی چون  $|\Psi_s\rangle = H^{\otimes n}|0^{\otimes n}\rangle$  و همچنین  $H^{\otimes n}H^{\otimes n} = 1$  خواهیم داشت:

$$G = (2|\Psi_s\rangle\langle \Psi_s| - 1)(1 - 2|f\rangle\langle f|) = I_s I_f \quad (25-2)$$

که در آن:  $I_s = 2|\Psi_s\rangle\langle\Psi_s| - 1$ .

می‌توان نشان داد که عملگر  $I_s$  دامنه‌های هر حالت دلخواه  $|\Psi'\rangle = \sum_x a_x |x\rangle$  را حول مقدار

متوسط دامنه‌ها انعکاس می‌دهد:

$$I_s |x\rangle = (2|\Psi_s\rangle\langle\Psi_s| - 1)|x\rangle = 2|\Psi_s\rangle\langle\Psi_s|x\rangle - |x\rangle \quad (26-2)$$

داریم:  $\langle\Psi_s|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ، در نتیجه:

$$I_s |x\rangle = 2 \frac{1}{\sqrt{N}} |\Psi_s\rangle - |x\rangle \quad (27-2)$$

$$\Rightarrow I_s |\Psi'\rangle = \sum_x a_x I_s |x\rangle = 2 \frac{\sum_x a_x}{N} \sum_x |x\rangle - \sum_x a_x |x\rangle \quad (28-2)$$

در عبارت بالا  $\frac{\sum_x a_x}{N}$  مقدار میانگین دامنه‌ها است و آن را می‌توان با  $\langle a \rangle$  نشان داد در نتیجه:

$$I_s |\Psi'\rangle = \sum_x (2\langle a \rangle - a_x) |x\rangle \quad (29-2)$$

که این نشان می‌دهد  $I_s$ ، دامنه‌ها را حول متوسط‌اشان انعکاس می‌دهد.

پس با اجرای عملگر گراور در اولین حلقه دامنه‌های جواب به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته اما

دامنه‌های دیگر چون اختلاف کمی با مقدار میانگین داشتند، به مقدار کمی کاهش یافتند. با تکرار

عملگر گراور، دامنه‌های جواب بیشتر و بیشتر و دامنه‌های دیگر کمتر و کمتر می‌شوند [۳ و ۷ و ۸ و ۹].

## فصل ۳

# احتمال کوانتومی و نظریه تصمیم

---

## مقدمه:

به طور کلی مکانیک کوانتومی دارای ماهیت احتمالی می‌باشد، تلاش‌های زیادی برای حذف مفهوم احتمال از آن انجام شده است. ولی نتایج تحقیقات نشان داد که مکانیک کوانتومی در طبیعت خود احتمالی است و نمی‌توان این مفهوم را از آن حذف کرد. یکی از کارهایی که در این زمینه انجام شد تحقیقات دوچ<sup>۱</sup> بود. او یک مشاهده‌پذیر غیر تبه‌گن  $X$  در حالت خالص<sup>۲</sup>  $|\Psi\rangle$  در سیستم  $S$  را اندازه‌گیری کرد و نتیجه اندازه‌گیری را با احتمال  $|\langle x|\Psi\rangle|^2$  به دست آورد [۱۰]. او گفت ضرورتی ندارد که پیش‌بینی‌های احتمالی مکانیک کوانتومی را با اصول احتمالی خاص به دست آورد. بلکه می‌توان آن‌ها را از اصول بخش غیر احتمالی مکانیک کوانتومی و بخش غیر احتمالی نظریه تصمیم به دست آورد. مبانی مکانیک کوانتومی در فصل ۱ شرح داده شده، و نظریه تصمیم در بخش بعد به صورت مختصر توضیح داده می‌شود. بعد از این که دوچ تحقیقات خود را کامل کرد دانشمندانی به نام‌های کیوز<sup>۳</sup>، بارنوم<sup>۴</sup>، فینکلشتین<sup>۵</sup>، فوکس<sup>۶</sup> و ساک<sup>۷</sup> نشان دادند که بررسی‌های او به دلیل وجود فرض‌های احتمالی مخفی ناقص است. یعنی نمی‌توان احتمال در مکانیک کوانتومی را با استفاده از اصول بخش غیراحتمالی مکانیک کوانتومی و بخش غیر احتمالی نظریه تصمیم به دست آورد [۱۱].

## ۳-۱- نظریه تصمیم:

نظریه تصمیم نتیجه تلاش مشترک اقتصاددانان، ریاضیدانان، فلاسفه، متخصصان علوم اجتماعی و آمار می‌باشد. این نظریه در جهت درک این مطلب می‌باشد که چگونه افراد و گروه‌ها تصمیم‌گیری می‌کنند و یا این که چگونه باید تصمیم‌گیری کنند. کاربردهای این نظریه از نظریات بسیار انتزاعی فلاسفه

---

<sup>1</sup> Deutsch

<sup>2</sup> pure

<sup>3</sup> C.M. Caves

<sup>4</sup> H. Barnum

<sup>5</sup> J. Finkelstein

<sup>6</sup> C.A. Fuchs

<sup>7</sup> R. Schack

درباره عوامل ایده‌ال گرفته، تا نصایح عملی تحلیل‌گران تصمیم که در مدارس تجاری تربیت یافته‌اند، گسترده شده است. پس تحقیق درباره نظریه تصمیم بسیار متنوع و گسترده می‌باشد.

نظریه پردازان تصمیم ترجیح می‌دهند که نتایج منطقی قواعد مختلف برای تصمیم‌گیری را جستجو و بررسی کنند. یا این که به کشف ویژگی ریاضی توصیف‌های متفاوت رفتار عقلانی بپردازند. از طرف دیگر متخصصان علوم اجتماعی که علاقمند به نظریه تصمیم هستند اغلب تحقیقاتی انجام می‌دهند که هدف آن‌ها کشف این مطلب است که افراد (و نه عامل‌های عقلانی ایده‌ال) چگونه در موقعیت‌های تصمیم‌گیری رفتار می‌کنند. به همین دلیل مرسوم است که نظریه تصمیم را به دو شاخه اصلی نظریه تصمیم تجویزی<sup>۱</sup> و نظریه تصمیم توصیفی<sup>۲</sup> تقسیم کنند. نظریه تصمیم توصیفی می‌گوید که تصمیمات چگونه گرفته می‌شوند. در صورتی که نظریه تصمیم تجویزی می‌گوید چگونه باید تصمیم گرفت. این نظریه تجویزی به مطالعه عامل‌های عاقل ایده‌ال می‌پردازد. لازم به ذکر است که تفاوت بین این دو شاخه نظریه تصمیم مصنوعی می‌باشد زیرا اطلاعات و آگاهی درباره رفتار واقعی افراد در هنگام تصمیم‌گیری ممکن است به تجویزهایی مربوط باشد که از قبل درباره چگونگی تصمیم‌گیری به آن‌ها گفته شده است [۱۲ و ۱۳ و ۱۴].

در این تحقیق نظریه کلاسیکی تصمیم با توجه به آنچه که دوچ در ذهن دارد و آنچه که در بحث خود می‌خواهد بکار ببرد، ساخته می‌شود. در این نظریه دوچ یک تصمیم‌گیرنده عاقل<sup>۳</sup> (RDM) یا یک عامل در نظرمی‌گیرد [۱۱ و ۱۵]. تصمیم‌گیرنده در نظریه تصمیم استاندارد باید عاقلانه رفتار کند. عقلانیت در این مفهوم خاص بدین معنا است که RDM با توجه به محدودیت‌هایی که در برابر انتخاب اولویت‌های پیش‌روی خود دارد به بهترین و سازگارترین شکل ممکن عمل کند. به عنوان مثال یکی از محدودیت‌هایی او این است که انتخاب‌های او باید بر حسب ارجحیت تعدتی بیان شوند و این ارجحیت‌ها می‌توانند با یک عدد، یا یک پاداش<sup>۴</sup> (سود) مشخص شوند. یعنی اگر A را به B و B را به

---

<sup>1</sup> Normative (or prescriptive)

<sup>2</sup> descriptive

<sup>3</sup> Rational decision maker

<sup>4</sup> Utility or payoff



C ترجیح دهد، باید A را هم به C ترجیح دهد. رفتار RDM در فیزیک کلاسیک در مواقعی که اطلاعات و دانش از وضعیت موجود کامل است، یعنی همه متغیرها، سیستم اندازه‌گیری، اثر متغیرها روی سیستم اندازه‌گیری و خروجی اندازه‌گیری دقیقاً مشخص است، کاملاً تحت تاثیر نوع انتخاب او از میان چندین گزینه با نتایج متعدد می‌باشد. او گزینه‌ای را انتخاب می‌کند که بر طبق محاسباتش باعث بیشترین نتیجه ممکن شود. در مقابل در فیزیک کوانتوم نمی‌توان گزینه‌ای انتخاب کرد که باعث بیشترین خروجی شود به دلیل این که با انتخاب یک گزینه یک گستره از خروجی‌های ممکن را می‌توان ساخت و حتی دانش کامل از شرایط به کسی اجازه نخواهد داد که به تواند پیشگویی کند که کدام یک از خروجی‌ها به دست خواهد آمد و در اینجاست که به طور قراردادی احتمال معرفی می‌شود [۱۰].

### ۳-۲- بخش احتمالی و غیر احتمالی نظریه تصمیم:

با توجه به این که نظریه بازی که فصل بعد به تفصیل توضیح داده می‌شود یک نظریه تصمیم‌گیری است. پس برای بررسی بخش احتمالی نظریه تصمیم یک بازی در نظر گرفته می‌شود. هر بازی با یک مجموعه رویدادهایی توضیح داده می‌شود که هر یک از این رویدادها با اندیس  $j$  برچسب زده می‌شوند و عامل اعتقاد دارد که هر کدام با احتمال  $p_j$  اتفاق می‌افتند. مقداری که عامل به هر یک از رویدادها نسبت می‌دهد با سود یا پاداش  $x_j$  کمی می‌شوند. نظریه تصمیم در واقع می‌خواهد در بین بازی‌ها، بازی را انتخاب کند که بیشترین سود چشمداشتی را دارد که این سود چشمداشتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\langle x_j \rangle = \sum_j p_j x_j \quad (۱-۳)$$

این، در واقع بیان بخش احتمالی نظریه تصمیم است. حال به بررسی بخش غیر احتمالی نظریه تصمیم پرداخته می‌شود. یکی از اصول غیراحتمالی نظریه تصمیم اصل جایگزینی<sup>۱</sup> می‌باشد که این اصل مقادیر بازی‌های مرکب (بازی مرکب بازی است که شامل چند زیر بازی می‌باشد) را محدود می‌کند. این اصل نشان می‌دهد که اگر یک بازی جایگزین یک زیر بازی شود، و این بازی‌ها دارای ارزش یکسان باشند در مقدار بازی مرکب هیچ تغییری به وجود نمی‌آید و این نیز یک فرض قائم‌به‌ذات<sup>۲</sup> است و فرض احتمالی نمی‌باشد. اصل دیگری که از نظریه تصمیم احتیاج است به بازی‌های دو نفره با جمع-صفر مربوط می‌شود. در این بازی‌ها هر بازیکن می‌تواند یکی از دو نقش A و B را با ویژگی زیر فرض کند:

اگر بازیکن در نقش A باشد پاداش  $x$  و اگر در نقش B باشد پاداش  $-x$  را دریافت می‌کند. این یک قضیه در نظریه کلاسیکی تصمیم است که اگر  $v_A$  و  $v_B$  به ترتیب ارزش‌های بازی در نقش A و B باشند. پس داریم:

$$v_A + v_B = 0 \quad (۲-۳)$$

که  $v[\Psi]$  ارزش یک بازی است که در بخش (۳-۴) تعیین می‌شود. اکنون از آنجایی که معادله (۳-۲) ارزش‌های بازی‌های متفاوت محدود می‌کند و این ارزش‌ها به احتمال مربوط نمی‌باشند می‌توان آن را به عنوان یک اصل بخش غیراحتمالی نظریه تصمیم در نظر گرفت و دوچ آن را قانون جمع-صفر نام‌گذاری کرد [۱۱].

### ۳-۳- نظریه دوچ:

دوچ تلاش کرد که بخش احتمالی مکانیک کوانتومی را از بخش غیراحتمالی مکانیک کوانتومی و بخش غیراحتمالی نظریه تصمیم به دست آورد. به عبارت دیگر او گفت: اگر شخصی بخش احتمالی

<sup>1</sup> substitutibility

<sup>2</sup> substantive

مکانیک کوانتومی را قبول نداشته باشد اما بخش غیراحتمالی مکانیک کوانتومی را قبول داشته باشد الزاماً مجبور می‌شود تصمیم‌هایی بگیرد که گویی مفهوم احتمال را قبول دارد.

### ۳-۴- روش دوچ:

در مواردی که مکانیک کوانتومی پیش‌بینی کند که هر اندازه‌گیری یک نتیجه خاص خواهد داشت، بر طبق مفهوم احتمال این نتیجه می‌تواند احتمال ۱ داشته باشد. ولی چون تصمیم‌گیرنده معنای احتمال را نمی‌داند با توجه به بخش غیراحتمالی مکانیک کوانتومی می‌تواند پیش‌بینی کند که اگر عملگر  $\hat{X}$  در ویژه حالت  $|x\rangle$  اندازه‌گیری شود، نتیجه‌ی اندازه‌گیری با ویژه مقدار  $x$  متناظر خواهد بود. اگر در یک بازی سیستم  $S$  با حالت خالص  $|\Psi\rangle$  تهیه شود. با اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر  $X$  در این سیستم، یک خروجی به دست می‌آید. با توجه به نتیجه به دست آمده، RDM یک پاداش دریافت خواهد کرد. برای راحتی کار بازی‌هایی در نظر گرفته می‌شود که در آن‌ها نتیجه‌ی اندازه‌گیری شده‌ی مشاهده‌پذیر  $X$  از نظر عددی با پاداش که به بازیکن داده می‌شود، برابر باشد. در این بازی فقط بازیکنانی در نظر گرفته می‌شود که برای آن‌ها سودهای ممکن را بتوان به گونه‌ای تعیین کرد که خاصیت جمع‌پذیری داشته باشند. یعنی برای یک بازیکن فرقی نداشته باشد که پاداش  $x_1$  و  $x_2$  را به صورت مجزا یا یک تک پاداش  $x_1 + x_2$  را دریافت کند.

در واقع روش دوچ تحلیل کردن رفتار RDM (کسی که در بین نتایج اندازه‌گیری شده در مکانیک کوانتومی تصمیم‌گیری می‌کند) است. به این صورت که او هر آنچه در بخش غیراحتمالی نظریه تصمیم دید، خارج کرد و در مکانیک کوانتومی به کار برد. این فرض او مبنی بر این است که بخش غیراحتمالی نظریه تصمیم، قابل کاربرد در یک جهان کوانتومی است یک فرض قائم به ذات می‌باشد. و همچنین با توجه به نظریه تصمیم هیچ تحلیلی در فیزیک تاکنون نتوانسته تعیین کند که چه کاری عاقلانه است و یا این که چه استدلالی برای هر تصمیم‌گیری می‌تواند وجود داشته باشد.

دوچ کار خود را به این صورت ادامه داد و گفت: هر بازی توسط مجموعه رویدادهائی تفسیر می‌شود که این رویدادها به عنوان نتایج اندازه‌گیری یک عملگر هرمیتی می‌باشند و ویژه حالت  $|x_j\rangle$  را دارند. همچنین  $\nu$  زامین خروجی سود  $x_j$  را دارد.

بنابراین بازی کوانتومی در روش دوچ توسط حالت کوانتومی و سود مشخص می‌شود که به نتیجه اندازه‌گیری انجام شده روی آن حالت وابسته است. در نهایت دوچ ارزش یک بازی را به صورت  $\nu[|\Psi\rangle]$  نمایش داد:

$$\nu[|\Psi\rangle] = \langle \Psi | \hat{X} | \Psi \rangle \quad (3-3)$$

حالت  $|\Psi\rangle$  یک حالت کوانتومی بهنجار به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |x_j\rangle \quad (4-3)$$

از آنجایی که داریم:

$$\langle \Psi | \hat{X} | \Psi \rangle = \sum_j \left| \langle x_j | \Psi \rangle \right|^2 x_j \quad (5-3)$$

در این رابطه سیگما جمع روی مجموعه کامل  $|x_j\rangle$  از ویژه‌حالت‌های  $\hat{X}$  است. این رابطه به این معنا خواهد بود که در تصمیم‌گیری درباره نتایج اندازه‌گیری، RDM به‌گونه‌ای رفتار می‌کند که گویی اعتقاد دارد که هر نتیجه ممکن  $x_j$  با احتمال  $\left| \langle x_j | \Psi \rangle \right|^2$  اتفاق می‌افتد و این نتیجه‌گیری معنای واقعی احتمال در مکانیک کوانتومی است.

دوچ  $|\Psi\rangle$  را یک ویژه حالت  $|x\rangle$ ، مربوط به عملگر  $\hat{X}$  در نظر گرفت و با توجه به فرض غیراحتمالی پیش‌بینی کرد که نتیجه اندازه‌گیری  $\hat{X}$  یک ویژه مقدار  $x$  می‌باشد. در این صورت داریم:

$$\nu[|x\rangle] = x \quad (6-3)$$

که این رابطه مورد خاصی از رابطه (3-3) می‌باشد.

ساده‌ترین مثالی که می‌توان در نظر گرفت این است که  $|\Psi\rangle$  بر هم‌نهی ازدو ویژه حالت عملگر  $\hat{X}$  به صورت زیر باشد:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \quad (7-3)$$

در این صورت ارزش بازی به صورت زیر می‌شود:

$$v[|\Psi\rangle] = \langle\Psi|\hat{X}|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle X_1| + \langle X_2|)\right)(\hat{X})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|X_1\rangle + |X_2\rangle)\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (8-3)$$

حال یک حالت کلی‌تر بررسی می‌شود حالتی که سیگما جمع روی همه ویژه مقادیر عملگر  $\hat{X}$  می‌باشد:

$$v\left[\sum_j \lambda_j |x_j + k\rangle\right] = k + v\left[\sum_j \lambda_j |x_j\rangle\right] \quad (9-3)$$

که در رابطه (۹-۳)،  $\{\lambda_j\}$  دامنه‌های دلخواه و  $k$  یک ثابت دلخواه می‌باشد.

رابطه بالا را به صورت زیر می‌توان اثبات کرد:

$$\begin{aligned} v\left[\sum_j \lambda_j |x_j + k\rangle\right] &= \sum_j |\lambda_j|^2 \langle x_j + k | \hat{X} | x_j + k \rangle = \sum_j |\lambda_j|^2 (x_j + k) \langle x_j + k | x_j + k \rangle = \\ &= \sum_j |\lambda_j|^2 (x_j + k) = \sum_j |\lambda_j|^2 x_j + k = k + \sum_j x_j \\ \sum_j |\lambda_j|^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$k + v\left[\sum_j \lambda_j |x_j\rangle\right] = k + |\lambda_j|^2 \langle x_j | \hat{X} | x_j \rangle = k + \sum_j |\lambda_j|^2 x_j \langle x_j | x_j \rangle = k + \sum_j x_j$$

خاصیت جمع-صفر (۲-۳) برای یک حالت کلی‌تر که جمع روی تمام ویژه مقادیر باشد به این صورت

است که ارزش بازی با ایفای نقش به عنوان یک دریافت کننده<sup>۱</sup> در یکی از بازی‌ها، منفی ارزش بازی

اصلی است. یعنی دریافت پاداش  $-x_j$  وقتی که نتیجه اندازه‌گیری  $x_j$  است. به عبارت دیگر:

<sup>۱</sup> banker

$$v \left[ \sum_j \lambda_j |x_j\rangle \right] + v \left[ \sum_j \lambda_j |-x_j\rangle \right] = 0 \quad (10-3)$$

با در نظر گرفتن (10-3) و (9-3) و  $K = -x_1 - x_2$  روابط زیر به دست می‌آیند:

$$-v \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle + |x_2\rangle) \right] = -x_1 - x_2 + v \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle + |x_2\rangle) \right] \quad (11-3)$$

$$v \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle + |x_2\rangle) \right] = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \quad (12-3)$$

که در این رابطه ارزش یک بازی که نتیجه آن نامعین است، مشخص شده است و دوچ این را به عنوان نتیجه اصلی بحث خود در نظر گرفت.

### ۳-۵- فرض مخفی:

در نمادگذاری که دوچ برای تعیین ارزش یک بازی به کار برد، برای بازی‌هایی که با سودهای متفاوت تحت بررسی بودند یک سردرگمی ایجاد می‌کرد به این صورت که در معادله (9-3) طرف چپ معادله با حالت  $\sum_j \lambda_j |x_j + k\rangle$  در حالی که طرف راست معادله با حالت  $\sum_j \lambda_j |x_j\rangle$  مشخص شده که واضح نیست دو طرف معادله به حالت کوانتومی متفاوت مربوط می‌شوند یا با یک تک حالت با عملگرهای سود متفاوت مشخص شده‌اند. به همین دلیل دانشمندانی به نام‌های کیوز، بارنوم، فینکلشتین، فوکس و ساک یک نمادگذاری واضح‌تر به کار بردند و عملگر سود هرمیتی را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\hat{X} = \sum_j x_j |x_j\rangle \langle x_j| \quad (13-3)$$

در نتیجه با نمادگذاری جدید ارزش یک بازی به صورت زیر می‌شود:

$$v(\Psi; \hat{X}) = \langle \Psi | \hat{X} | \Psi \rangle \quad (14-3)$$

که شامل هر دو ساختار یک بازی یعنی حالت کوانتومی  $|\Psi\rangle$  و عملگر سود  $\hat{X}$  می‌باشد. اکنون با این نمادگذاری نتیجه اصلی بحث دوچ بررسی می‌شود:

$$\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); \hat{X}\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (15-3)$$

در بررسی نتیجه اصلی، دوچ دو خاصیت را برای مقدار تابع کوانتومی در نظر گرفت.

(۱) خاصیت جابه‌جایی<sup>۱</sup>:

$$\nu\left(\sum_j \lambda_j |x_j\rangle; \sum_j (x_j + k) |x_j\rangle\langle x_j|\right) = k + \nu\left(\sum_j \lambda_j |x_j\rangle; \sum_j x_j |x_j\rangle\langle x_j|\right) \quad (16-3)$$

(۲) خاصیت جمع-صفر:

$$\nu\left(\sum_j \lambda_j |x_j\rangle; \sum_j (-x_j) |x_j\rangle\langle x_j|\right) = -\nu\left(\sum_j \lambda_j |x_j\rangle; \sum_j x_j |x_j\rangle\langle x_j|\right) \quad (17-3)$$

در این نمادگذاری هر دو طرف معادله به طور صریح به حالت کوانتومی یکسان و عملگرهای سود متفاوت مربوط می‌شوند. در واقع این ابهامی که در بحث دوچ بود او را مجبور کرده بود که به صورت اتفاقی مقدار دو بازی را مساوی فرض کند که مقدار دو بازی را نمی‌توان یکسان نشان داد مگر این‌که یک فرض اضافی وجود داشته باشد. برای بررسی فرض اضافی در نتیجه‌ی بحث دوچ (معادله (۳-۱۲)) حالت  $|\Psi\rangle$  به صورت برهم‌نهی از دو ویژه حالت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\Psi\rangle = \lambda_1 |x_1\rangle + \lambda_2 |x_2\rangle \quad (18-3)$$

عملگر  $\prod_i$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{\prod}_i = |x_i\rangle\langle x_i| \quad (19-3)$$

دامنه‌های  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  در نشان دادن فرض مخفی به ما کمک می‌کند و اگر رابطه (۳-۱۰) در مورد خاص

$K = -x_1 - x_2$  به کار گرفته شود می‌توان به روابط زیر رسید:

$$\nu\left(|\Psi\rangle; x_1 \hat{\prod}_1 + x_2 \hat{\prod}_2\right) - x_1 - x_2 = \nu\left(|\Psi\rangle; -x_1 \hat{\prod}_2 - x_2 \hat{\prod}_1\right) \quad (20-3)$$

<sup>1</sup> displacement

$$\nu\left(|\Psi\rangle; x_2 \hat{\Pi}_1 + x_1 \hat{\Pi}_2\right) + \nu\left(|\Psi\rangle; x_1 \hat{\Pi}_1 + x_2 \hat{\Pi}_2\right) = x_1 + x_2 \quad (21-3)$$

$$\nu\left(|\Psi\rangle; x_2 \hat{\Pi}_1 + x_1 \hat{\Pi}_2\right) = (\lambda_1 \langle x_1 | + \lambda_2 \langle x_2 |)(|x_2\rangle \langle x_1| + |x_1\rangle \langle x_2|)(\lambda_1 |x_1\rangle + \lambda_2 |x_2\rangle) =$$

$$|\lambda_1|^2 x_2 + |\lambda_2|^2 x_1$$

$$\nu\left(|\Psi\rangle; x_1 \hat{\Pi}_1 + x_2 \hat{\Pi}_2\right) = (\lambda_1 \langle x_1 | + \lambda_2 \langle x_2 |)(|x_1\rangle \langle x_1| + |x_2\rangle \langle x_2|)(\lambda_1 |x_1\rangle + \lambda_2 |x_2\rangle) =$$

$$|\lambda_1|^2 x_1 + |\lambda_2|^2 x_2$$

$$\nu\left(|\Psi\rangle; x_2 \hat{\Pi}_1 + x_1 \hat{\Pi}_2\right) + \nu\left(|\Psi\rangle; x_1 \hat{\Pi}_1 + x_2 \hat{\Pi}_2\right) = |\lambda_1|^2 x_2 + |\lambda_2|^2 x_1 + |\lambda_1|^2 x_1 + |\lambda_2|^2 x_2 =$$

$$|\lambda_1|^2 (x_1 + x_2) + |\lambda_2|^2 (x_1 + x_2) = x_1 + x_2$$

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$$

دوچ این نتایج را برای موردی که  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  باشد، به کار برد:

$$\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_2 \hat{\Pi}_1 + x_1 \hat{\Pi}_2\right) + \nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_1 \hat{\Pi}_1 + x_2 \hat{\Pi}_2\right) = x_1 + x_2 \quad (22-3)$$

در این نمادگذاری دوچ با ارزش دو تا بازی در معادله به صورت یکسانی برخورد کرد و آن‌ها را مساوی فرض کرد:

$$\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_2 \hat{\Pi}_1 + x_1 \hat{\Pi}_2\right) = \nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_1 \hat{\Pi}_1 + x_2 \hat{\Pi}_2\right) \quad (23-3)$$

با در نظر گرفتن این فرض می‌توان به نتیجه اصلی بحث دوچ رسید و این معادله فرض مخفی در بحث دوچ می‌باشد.



### ۳-۶- رابطه ارجحیت و احتمال:

به طور کلی ارجحیت (تصمیم‌گیری با عدم قطعیت) به این موضوع اشاره دارد که احتمال در نظریه تصمیم کاملاً ضروری است. اگر ارجحیت در بین بازها با مقدار تابع  $v$  کمی شود و سود  $x_j$  به  $F(x_j)$  انتقال یابد، با توجه به این که رویدادهای هر بازی با احتمال  $p_j$  اتفاق می‌افتند پس ارزش چشمداشتی بازی به صورت زیر می‌شود:

$$v(|\Psi\rangle; \hat{X}) = F^{-1}\left(\sum_j p_j F(x_j)\right) \quad (24-3)$$

$F$  در معادله (۳-۲۴) یک تابع کاملاً افزایشی می‌باشد.

رابطه بالا را به صورت زیر می‌توان اثبات کرد:

$$v(|\Psi\rangle; \hat{X}) = \sum_j p_j x_j$$

$$x_j \rightarrow F(x_j) \Rightarrow F^{-1}(x_j) = F^{-1}(F(x_j)) = x_j$$

$$x_j p_j \rightarrow F(x_j p_j) \Rightarrow F^{-1}(x_j p_j) = F^{-1}(F(x_j p_j)) = F^{-1}(F(F^{-1}(x_j) p_j)) = F^{-1}(x_j) p_j$$

با توجه به این که  $F^{-1}(x_j p_j) = F^{-1}(x_j) p_j$  است. پس نتیجه می‌دهد که  $F^{-1}$  فقط روی  $x_j$  اثر می‌گذارد پس می‌توان نوشت:

$$v(|\Psi\rangle; \hat{X}) = \sum_j x_j p_j = F^{-1}\left(\sum_j p_j F(x_j)\right)$$

پس ارزش یک بازی را به صورت زیر می‌توان تعیین کرد:

$$\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_1\hat{\Pi}_1 + x_2\hat{\Pi}_2\right) = F^{-1}(p_1F(x_1) + p_2F(x_2))$$

$$\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_1\hat{\Pi}_1 + x_2\hat{\Pi}_2\right) = |\lambda_1|^2 x_1 + |\lambda_2|^2 x_2 = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (25-3)$$

$$x_j \rightarrow F(x_j)$$

$$\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle); x_1\hat{\Pi}_1 + x_2\hat{\Pi}_2\right) = p_1F(x_1) + p_2F(x_2)$$

با توجه به فرض مخفی معادله (۲۳-۳) می توان نوشت:

$$p_1F(x_2) + p_2F(x_1) = p_1F(x_1) + p_2F(x_2) \quad (26-3)$$

اگر این رابطه برای هر  $x_1, x_2$  دلخواه درست باشد در واقع از این که  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  باشد، تبعیت می کند. پس یکی از نتایج اصلی نظریه تصمیم این است که اگر کسی ارجحیت تعدتی در بین بازی ها با اصول غیر احتمالی نظریه تصمیم را فرض کند می تواند به صورت همزمان تابع سود و مجموعه احتمالات را تعیین کند.

### ۳-۷ - نقص های بحث دوچ:

در این بخش نقص های بحث دوچ بررسی می شود بحث دوچ به دو دلیل ناقص بود. یکی این که معادله (۲۳-۳) شامل معرفی یک فرض احتمالی می باشد به این صورت که در معادله (۲۲-۳) برای به دست آوردن نتیجه ی اندازه گیری باید  $|x_1\rangle$  همیشه اتفاق بیفتد. در این صورت در بازی اول سود  $x_2$  و در بازی دوم سود  $x_1$  را می دهد و در معادله (۲۲-۳) صدق می کند و همان طور که می دانیم اتفاق افتادن یک حالت بیانگر فرض احتمالی می باشد که این نقص کار دوچ را نشان می دهد به دلیل این که هدف دوچ بررسی احتمال با استفاده از اصول غیر احتمالی بود. یک دلیل دیگر که نقص کار دوچ را نشان می داد این بود که فرض ارجحیت تعدتی (که در بخش قبل بحث شد) در بحث او سرآغازی برای فرض احتمالی بود. اگر چه بحث دوچ ناقص بود و نمی توانست احتمال را از مکانیک کوانتومی حذف کند، ممکن است هیچ وقت نتوان یک تفسیر احتمالی خاص از مکانیک کوانتومی فراهم کرد و باید به

این نکته توجه کرد که این فرض اضافی نه تنها یک فرض جزئی در بحث دوچ نیست بلکه باید آن را به عنوان یکی از فرض‌های اصلی بحث او در نظر گرفت. پس مشاهده شد که اگر بخش غیراحتمالی نظریه کلاسیکی تصمیم و بخش غیر احتمالی مکانیک کوانتومی در نظر گرفته شوند آن‌گاه عملاً به معرفی بخش احتمالی پرداخته شده است. پس وقتی که نظریه کوانتومی به نتایج غیر قطعی می‌پردازد باید احتمال‌ها را معرفی کرد زیرا که آن‌ها تنها زبان برای اندازه‌گیری عدم قطعیت هستند.

منابع استفاده شده از بخش ۳-۳ تا ۷-۳: [۱۰ و ۱۱]

# تئوری بازی

## مقدمه:

نظریه بازی کوانتومی یک ابزار جدید قابل توجه برای مطالعه موقعیت‌های رقابتی یا تعارض گونه در حیطه کوانتومی است. این نظریه در درک ما از اطلاعات کوانتومی نقش دارد و این قابلیت را دارد که در حوزه‌هایی همچون کنترل کوانتومی، الگوریتم کوانتومی، ارتباطات کوانتومی<sup>۱</sup> و دیگر کارهای محاسباتی به کار گرفته شود. در هر مورد، نمایش در یک سیستم کوانتومی مزیت‌هایی بر سیستم‌های کلاسیکی دارد. پروتکل‌های کوانتومی برای توزیع کلیدی، که توسط وایزner<sup>۲</sup>، بنت<sup>۳</sup>، براسر<sup>۴</sup> و اکرت<sup>۵</sup> اختراع شده‌اند از لحاظ کیفیت مطمئن‌تر از هر سیستم رمزنگاری می‌باشند. در اینجا نظریه بازی به لیستی اضافه می‌شود که در آن راهبردهای کوانتومی می‌توانند موفق‌تر از راهبردهای کلاسیکی باشند. در حالی که این نتیجه ممکن است مبهم یا شگفت‌انگیز به نظر برسد، اما در حقیقت این گونه نیست. مثلاً موقعیت‌های رمزنگاری می‌توانند به عنوان بازی تصور شوند [۱۶] یا می‌توان گفت رابطه نزدیکی بین نظریه بازی و نظریه ارتباط کوانتومی وجود دارد. در حقیقت هر گاه یک بازیکن تصمیماتش را برای بازیکن دیگر یا داور بازی بفرستد، اطلاعاتی را با آن‌ها در میان می‌گذارد، که می‌توان آن‌ها را اطلاعات کوانتومی بر شمرد [۱۷]. در این فصل حرکت‌های راهبردی با عمل‌های کوانتومی توضیح داده می‌شوند و سپس بازی‌های کوانتومی در حالت کیوبیتی و کیوتریتی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

## ۴-۱- نظریه بازی:

نظریه بازی در عصر مدرن در دست نوشته‌های ریاضیدان آلمانی به نام ارنست زرملو<sup>۶</sup> در سال ۱۹۱۳ مورد توجه قرار گرفت. زرملو ثابت کرد، هر بازی رقابتی دو نفره دارای یک راهبرد است که برای هر دو

---

<sup>۱</sup> Quantum communication

<sup>۲</sup> Wiesner

<sup>۳</sup> Bennett

<sup>۴</sup> Brassard

<sup>۵</sup> Ekert

<sup>۶</sup> Ernst Zermelo

بازیکن به عنوان بهترین راهبرد تلقی می‌شود. به شرطی که هر دو بازیکن درباره نیت و مقاصد یکدیگر اطلاعات کافی داشته باشند. منظور از راهبرد یک بازیکن طرح کاری کامل برای هر گونه موقعیتی است که ممکن است، به وجود آید. راهبردهای می‌توانند خالص یا آمیخته باشند. راهبرد خالص تعریف کاملی از چگونگی بازی یک بازیکن ارائه می‌دهد. همچنین این راهبرد، حرکتی را که یک بازیکن برای هر موقعیت پیش‌رو اتخاذ می‌کند، را تعیین می‌کند. منظور از راهبرد آمیخته تعیین احتمال برای هر راهبرد خالص است. این راهبرد به هر بازیکن اجازه می‌دهد تا به صورت تصادفی یک راهبرد خالص انتخاب کند و از آنجایی که احتمال‌ها پیوسته هستند، راهبردهای آمیخته‌ی زیادی پیش روی یک بازیکن است. بهترین راهبرد در هر بازی را راهبرد غالب می‌گویند که این راهبرد همواره و بدون توجه به راهبردهای بازیکنان دیگر موجب سود یک بازیکن می‌شود

به طور کلی نظریه بازی یک نظریه تصمیم‌گیری است و در واقع ابزاری قدرتمند برای تحقیق درباره موقعیت‌هایی است که در آن چندین بخش بر اساس علائق شخصی‌یشان تصمیم‌گیری می‌کنند. این نظریه به تشریح این مطلب می‌پردازد که چگونه قسمت‌های مختلف در موقعیت‌های شامل مبارزه، رقابت یا کشمکش تصمیم‌گیری می‌کنند. چنین تصمیم‌گیری‌های در رابطه با دیگر علوم، نظیر علوم اجتماعی، زیست‌شناسی، یا اقتصاد نیز یافت می‌شود. یکی از علائق ویژه این نظریه، بازی‌های اطلاعات ناقص<sup>۱</sup> است که در آن قسمت‌های مختلف ممکن است نوع کار خود را با آگاهی عقلانی از موقعیت انتخاب کنند، بدون این که از تصمیم‌گیری واقعی دیگر قسمت‌ها آگاهی داشته باشند. اطلاعات کامل<sup>۲</sup> عبارتی است که در نظریه بازی استفاده می‌شود. اطلاعات کامل در واقع یک موقعیت بازی را توصیف می‌کند که در آن دانش و آگاهی درباره دیگر بازیکنان واضح است. یعنی هر بازیکن از پاداش و راهبرد موجود برای دیگر بازیکنان آگاه است. اگر یک بازی اطلاعات آن کامل نباشد آن گاه تک تک بازیکنان قادر نخواهند بود که تاثیر عملکردشان را روی دیگر بازیکنان پیشگویی کنند.

---

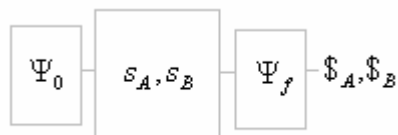
<sup>1</sup> incomplete information

<sup>2</sup> Complete information

این نظریه به صورت واضح و شفاف به چگونگی انتقال اطلاعات به هنگام اتخاذ تصمیم نمی‌پردازد. باید توجه کرد که به کارگیری عملی هر بازی کلاسیک به طور اجتناب ناپذیر از طریق تبادل برگه‌ها، فاکس، ایمیل و آرا استفاده می‌شود [۱۸ و ۴]. به طور کلی بازی‌ها، به دو دسته بازی‌های با جمع صفر و بازی‌های با جمع غیرصفر تقسیم می‌شوند. بازی پرتاب سکه PQ یک نمونه بازی با جمع-صفر می‌باشد و بازی معمای زندانیان<sup>۱</sup> را می‌توان به عنوان یک نمونه از بازی‌های با جمع-غیر صفر نام برد. حال هریک از بازی‌ها توضیح داده می‌شوند و از نظر کلاسیکی و کوانتومی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

## ۲-۴- بازی‌های کوانتومی و راهبردهای کوانتومی:

هر سیستم کوانتومی که به تواند توسط دو یا چند نفر تغییر کند و سودها به صورت عاقلانه به شکل عددی تعیین شوند به عنوان یک بازی کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. یک بازی کوانتومی دو نفره به صورت  $\Gamma = (H, \Psi_0, S_A, S_B, \$_A, \$_B)$  مشخص می‌شود که می‌توان آن را در یک ساختار کلی به صورت زیر نمایش داد.



شکل ۱-۴ ساختار کلی یک بازی کوانتومی

که در این ساختار،  $H$ : بیانگر فضای هیلبرت سیستم،  $\Psi_0$ : حالت اولیه سیستم،  $S_A, S_B$ : عمل‌های کوانتومی مجاز دو بازیکن،  $\Psi_f$ : حالت نهایی سیستم،  $\$_A, \$_B$ : تابع‌های سود هر دو بازیکن یا جمع پاداش هر بازیکن که با توجه به حالت نهایی سیستم تعیین می‌شوند.

<sup>۱</sup> prisoner's dilemma

یک راهبرد کوانتومی  $s_A \in S_A$  و  $s_B \in S_B$  یک عمل کوانتومی می‌باشد، یعنی یک نگاشت با رتبه ثابت<sup>۱</sup> که فضای حالت را روی خودش می‌نگارد. این رویکرد یعنی ایده شناسایی حرکت‌های راهبردی با عمل‌های کوانتومی به دو دلیل سودمند می‌باشد:

(۱) چندین کاربردی که اخیراً در نظریه اطلاعات کوانتومی پیشنهاد شده است، می‌تواند به عنوان موقعیت‌های رقابتی تصور شود که در آن چندین بخش یا قسمت با هدف نسبتاً مخالف با یکدیگر بر هم کنش می‌کنند. در این قسمت می‌توان عمل‌های کوانتومی را روی یک سیستم کوانتومی به کار گرفت. در شرایط مشابه در رمزنگاری کوانتومی استراق سمع را می‌توان به عنوان یک بازی بین شنونده و فرستنده تصور کرد [۱۸].

(۲) با توجه به این که نظریه بازی با احتمالات کوانتومی در ارتباط می‌باشد. در چنین شرایطی به جستجوی راه‌حل‌های<sup>۲</sup> قابل حصول در صورت مجاز بودن بر هم نهی راهبردها پرداخته می‌شود [۱۷]. در نظریه بازی مفهوم راه‌حل یک قانون رسمی برای پیشگویی چگونگی اجرای بازی است. این پیشگویی‌ها را راه‌حل می‌نامند که به توصیف این مطلب می‌پردازد که چه راهبردهایی توسط بازیکنان اجرا خواهد شد، و در نهایت نتیجه بازی را پیشگویی می‌کند. رایج‌ترین مفهوم راه‌حل که مورد استفاده قرار می‌گیرد، مفهوم تعادل است که مشهورترین آن‌ها تعادل نش<sup>۳</sup> می‌باشد. با توجه به مفهوم راه‌حل ممکن است برای یک بازی چندین راه‌حل وجود داشته باشد و این امر باعث می‌شود هر یک از راه‌حل‌ها مورد شک و تردید قرار گیرد. بنابراین یک نظریه پرداز بازی ممکن است یک تکنیک برای محدود کردن راه‌حل بازی‌ها به کار گیرد [۱۷ و ۴]. در نظریه بازی، تعادل نش یک مفهوم راه‌حل در بازی است که شامل دو یا چند بازیکن است. در این بازی فرض بر این هست که هر بازیکن راهبردهای تعادلی دیگر بازیکنان را می‌داند و هیچ بازیکنی با تغییر راهبرد خودش به صورت یک طرفه نمی‌تواند چیزی به دست آورد. اگر هر بازیکن یک راهبرد انتخاب کرده باشد و هیچ بازیکنی

---

<sup>1</sup> trace- preserving

<sup>2</sup> solution

<sup>3</sup> Nash



نتواند با تغییر راهبردش به صورت یک طرفه سود ببرد، آن گاه مجموعه راهبردهای انتخابی و پاداش‌های مربوطه یک تعادل نش را تشکیل می‌دهند. با این حال، تعادل نش لزوماً به معنای بهترین پاداش برای بازیکنان درگیر در بازی نیست. در بسیاری از موارد همه بازیکنان ممکن است پاداش‌شان را بهبود بخشند. اگر به توانند به نحوی در مورد راهبردهای متفاوت با تعادل نش به توافق برسند.

به ترکیب راهبردهای  $(s_A, s_B)$  تعادل نش گفته می‌شود. اگر:

$$\begin{aligned} \$_A(s_A, s_B) &\geq \$_A(s'_A, s_B), \\ \$_B(s_A, s_B) &\geq \$_B(s_A, s'_B) \end{aligned} \quad (1-4)$$

که برای همه  $s'_A \in S_A, s'_B \in S_B$  صدق می‌کند.

بر اساس بینش ساده زیر بنایی نش اگر تصمیمات تصمیم‌گیرنده‌ها در محیط ایزوله مورد تحقیق قرارگیرد نمی‌توان نتیجه انتخاب‌های آن‌ها را پیشگویی کرد. نش ثابت کرد که برای هر بازی حداقل یک تعادل وجود دارد. می‌توان تعادل‌های نش را به دو دسته خالص و آمیخته تقسیم کرد. تعادل نش خالص، تعادلی است که همه بازیکنان با راهبردهای خالص بازی می‌کنند و تعادل نش آمیخته تعادلی است که در آن حداقل یک بازیکن با راهبرد آمیخته بازی کند.

همان طور که در مقدمه گفته شد بازی‌ها به دو دسته بازی‌های با جمع-صفر و بازی‌های با جمع-غیرصفر تقسیم می‌شوند. در این نظریه، بازی جمع-صفر موقعیتی را توصیف می‌کند، که آنچه یک بازیکن به دست می‌آورد یا از دست می‌دهد، دقیقاً مساوی با آنچه باشد که بازیکن دیگر از دست می‌دهد یا به دست می‌آورد. اگر همه آنچه که بازیکنان به دست می‌آورند با هم جمع شوند و از مجموع آنچه که از دست می‌دهند کم شوند، جمع آن‌ها صفر می‌شود. یکی از ویژگی‌های بازی با جمع-صفر این است که هر نتیجه این بازی بهینه پارتو<sup>1</sup> است. بهینه پارتو یک مفهوم مهم می‌باشد که کاربردهای فراوان در نظریه بازی، مهندسی و علوم اجتماعی دارد. این عبارت برگرفته از نام ویلفرد پارتو<sup>2</sup> اقتصاددان ایتالیایی است. در نظریه بازی به جفت راهبردهای  $(s_A, s_B)$  بهینه پارتو می‌گویند،

<sup>1</sup> Pareto optimal

<sup>2</sup> Vilfredo Pareto

اگر امکان افزایش پاداش یک بازیکن بدون کاهش پاداش بازیکن دیگر موجود نباشد. پس در صورتی یک بازی کوانتومی، بازی با جمع-صفر نامیده می‌شود، که جمع پاداش چشمداشتی برای همه جفت راهبردهای بازیکنان صفر شود. یعنی:

$$\$_A(s_A, s_B) = -\$_B(s_A, s_B) \quad (2-4)$$

که برای همه  $s_A \in S_A, s_B \in S_B$  صدق می‌کند. در غیر این صورت بازی با جمع-غیر صفر نامیده می‌شود. همان‌طور که گفته شد  $S_A, S_B$ : عمل‌های کوانتومی مجاز دو بازیکن و  $\$_A, \$_B$ : تابع‌های سود هر دو بازیکن می‌باشند. بازی با جمع-غیر صفر موقعیتی را توصیف می‌کند که بازیکنان در آن بازی جمع مقدار آنچه که به دست می‌آورند و از دست می‌دهند بیشتر یا کمتر از صفر باشد [۴].

### ۳-۴- بازی پرتاب سکه PQ:

این بازی برای بررسی کارایی راهبردهای کوانتومی در مقابل کلاسیکی می‌باشد. در این بازی یک سکه است که این سکه در نظر یکی از بازیکنان کلاسیکی و در نظر دیگری بر هم نهی کوانتومی دلخواهی از شیر<sup>۱</sup> و خط<sup>۲</sup> می‌باشد.

#### پرتاب سکه PQ:

تشکیلات Starship<sup>۳</sup> با فاجعه حتمی مواجه شده بود. در این هنگام Q بر روی پل ظاهر می‌شود و برای کمک اعلام آمادگی می‌کند، به شرط اینکه کاپیتان پیکارد (P) به تواند او را در بازی پرتاب یک سکه شکست دهد. کاپیتان پیکارد یک سکه را به صورت شیر در یک جعبه قرار می‌دهد و بعد به

<sup>1</sup> headup  
<sup>2</sup> tail

<sup>3</sup> Starship سریال تلویزیونی معروف آمریکایی است که کاپیتان پیکارد (P) و Q بازیگرهای این سریال می‌باشند.

ترتیب Q، P و Q بدون این که به توانند آن را مشاهده کنند می‌توانند آن را تغییر دهند<sup>۱</sup> و یا تغییر ندهند<sup>۲</sup>. اگر زمانی که جعبه باز می‌شود سکه به صورت شیر باشد Q برنده است. این یک بازی دو نفره جمع-صفر است که می‌توان آن را با ماتریس پاداش زیر تحلیل کرد.

جدول ۱-۴ ماتریس پاداش بازی دو نفره جمع-صفر [۱۶]

	<i>NN</i>	<i>NF</i>	<i>FN</i>	<i>FF</i>
<i>N</i>	-1	1	1	-1
<i>F</i>	1	-1	-1	1

که در این جدول ردیف‌ها و ستون‌ها به ترتیب با راهبردهای خالص P و Q نامگذاری شده‌اند، F بیانگر پرتاب کردن سکه و N نشان دهنده پرتاب نکردن سکه می‌باشد. عدد ۱ در جدول پاداش P (جدول فوق) به برنده و عدد -۱ به بازنده اشاره دارد. جدول پاداش Q با تغییر علامت جدول فوق به دست می‌آید. برای مثال به ستون دوم خانه بالای این جدول از چپ توجه کنید. لازم به ذکر است که راهبردها از راست به چپ خوانده می‌شوند، به این ترتیب که راهبرد Q در اولین تغییر، پرتاب کردن سکه، و در دومین تغییر پرتاب نکردن سکه است. این در حالی است که راهبرد P در کل بازی به این صورت است که سکه را پرتاب نکنند. در نتیجه وضعیت سکه به ترتیب از چپ به راست H,T,T,T می‌شود. در این وضعیت P برنده بازی است. در این بازی اگر پیکارد حالت سکه را تغییر ندهد یعنی سکه را پرتاب نکند، آن گاه اگر Q به تعداد زوج مرتبه سکه را پرتاب کند یا زوج مرتبه سکه را پرتاب نکند، P شکست می‌خورد. با توجه به این که این بازی از نوع بازی‌های با جمع-صفر می‌باشد پس هر نتیجه این بازی بهینه پارتو است. همچنین هیچ راه حل قطعی و هیچ تعادل نش قطعی در این بازی وجود ندارد. به عبارت دیگر هیچ جفت راهبرد برای هیچ بازیکنی وجود ندارد به

<sup>1</sup> flip

<sup>2</sup> Not flip

طوری که بازیکن به تواند نتیجه‌ی بازی را با تغییر راهبرد خودش به صورت یک طرفه بهبود بخشد. اما ون نیومان<sup>۱</sup> ثابت کرد که باید چنین راهبرد وجود داشته باشد. چون این یک بازی راهبردی جمع-صفر دو نفره است که فقط تعداد راهبردهای محدودی برای آن هست. پس حتماً یک راه حل احتمالی برای آن وجود دارد. در این بازی پیکارد با آگاهی از این موضوع که شانس پیروزی او  $\frac{1}{2}$  است شروع به بازی می‌کند اما شکست می‌خورد. قوانین بازی به Q اجازه می‌دهد تا دو حرکت انجام دهد. هر چند که P می‌داند که در حرکت دوم برای Q هیچ مزیت و برتری وجود ندارد. با این حال اصرار دارد که چندین بار دیگر بازی کند و در نهایت تعجب، Q با این مسئله موافقت می‌کند و بازی را ادامه می‌دهد و تا ۹ بار دیگر P را دوباره شکست می‌دهد. P مطمئن است که Q در بازی تقلب می‌کند. آیا واقعاً این گونه است؟

برای درک این موضوع که Q واقعاً چه کاری انجام می‌دهد یک بار دیگر بازی پرتاب سکه PQ را از لحاظ توالی پرتاب‌ها در شکل گسترده آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. کاملاً طبیعی است که بتوان یک فضای برداری دو بُعدی V با پایه‌های (H,T) تعریف کرد. راهبردهای بازیکنان را می‌توان با توالی ماتریس‌های  $2 \times 2$  به صورت زیر نشان داد. یعنی ماتریس‌های:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۳-۴)$$

این ماتریس‌ها به ترتیب به راهبردهای پرتاب کردن سکه و پرتاب نکردن سکه اشاره دارند. یک استرژژی آمیخته کلاسیکی شامل یک ترکیب خطی محدب F و N است که به صورت یک ماتریس

استوکستیک  $2 \times 2$  به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad (۴-۴)$$

<sup>۱</sup> Von Neumann  
<sup>۲</sup> stochastic

این در صورتی است که بازیکنان سکه را با احتمال  $p \in [0,1]$  پرتاب کنند. در نمادگذاری استاندارد دیراک پایه‌های  $V$  به صورت  $(|H\rangle, |T\rangle)$  نوشته می‌شوند. یک حالت کوانتومی خالص برای سکه یک ترکیب خطی،  $a|H\rangle + b|T\rangle$  است و  $a, b \in C, a\bar{a} + b\bar{b} = 1$  می‌باشد.  $\bar{a}, \bar{b}$  مزدوج مختلط  $a, b$  می‌باشند. پس اگر در جعبه باز باشد سکه با احتمال  $a\bar{a}$  در حالت  $|H\rangle$  است. توالی عمل‌های آمیخته سکه را در حالت ترکیب خطی محدب  $(1-p)|H\rangle + p|T\rangle$  قرار می‌دهد. حالت‌های آمیخته را برای راحتی کار به صورت ماتریس چگالی نمایش می‌دهند. ماتریس چگالی برای یک حالت خالص  $|\Psi\rangle \in V$ ، ماتریس تصویری  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ ، و ماتریس چگالی برای یک حالت آمیخته متناظر با یک ترکیب خطی کوژ ماتریس‌های چگالی خالص است. حال  $Q$  برای پرتاب سکه از یک راهبرد کوانتومی یعنی یک توالی از ماتریس‌های یونیتاری به صورت زیر استفاده می‌کند:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}(a, b) := \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

با توجه به این که سکه در ابتدا حالت خالص  $\rho_0 = |H\rangle\langle H|$  قرار دارد. پس اولین عمل  $Q$  آن را در حالت خالص زیر قرار می‌دهد:

$$\rho_1 = \hat{U}_1 \rho_0 \hat{U}_1^\dagger = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (6-4)$$

کاپیتان پیکارد یا  $P$  همچنان از راهبرد کلاسیکی احتمالی استفاده می‌کند. عمل آمیخته  $P$  به صورت ترکیب خطی کوژ، روی این ماتریس چگالی به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\rho_2 = pF\rho_1F^\dagger + (1-p)N\rho_1N^\dagger = \begin{pmatrix} pb\bar{b} + (1-p)a\bar{a} & pb\bar{a} + (1-p)a\bar{b} \\ pa\bar{b} + (1-p)b\bar{a} & pa\bar{a} + (1-p)b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (7-4)$$

سپس اگر  $Q$  دوباره راهبرد  $U(a, b)$  را روی حالت  $\rho_2$  به کار گیرد حالت سیستم به صورت  $\rho_3 = \hat{U} \rho_2 \hat{U}^\dagger$  می‌شود که با بررسی وضعیت‌های مختلف برای  $a, b, p$  می‌توان پاداش‌ها را در شرایط مختلف برای پیکارد و  $Q$  بررسی کرد [۱۶]. حال اگر استراتژی کوانتومی  $Q$  در یک حالت خاص ماتریس یونیتاری  $\hat{U}(a, b)$  به صورت زیر به کار گرفته شود:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \hat{U}_3$$

اولین عملکرد Q سکه را در حالتی با ویژه مقدار ۱ و ویژه حالتی از F و N قرار می‌دهد. که این حالت تحت هر راهبرد آمیخته پیکارد  $pF + (1-p)N$  تغییر نمی‌کند سپس اگر دوباره Q راهبرد  $U_3 = U_1$  را به کار می‌گیرد حالت سیستم به صورت،  $\rho_3 = |H\rangle\langle H|$  می‌شود که در این صورت سکه با احتمال ۱ در حالت شیر است. در نتیجه Q هیچ کاری بهتر از این برای برنده شدن با احتمال ۱ نمی‌تواند انجام دهد. پس این یک راهبرد کوانتومی بهینه برای او محسوب می‌شود و می‌توان آن را با عملگر هادمارد<sup>۱</sup> به صورت زیر نشان داد:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (۸-۴)$$

همه جفت‌های  $\left[ \hat{U}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \hat{U}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$ ،  $[pF + (1-p)N]$  تعادل‌های کوانتومی آمیخته با ویژه مقدار ۱- برای P هستند. در واقع به همین علت است که P در هر بازی شکست می‌خورد. باید توجه کرد که اگر Q با راهبردهای کلاسیکی بازی می‌کرد. یعنی فقط راهبردهای N و F را در هر بار پرتاب کردن سکه به کار می‌برد. او فقط می‌توانست در نیمی از دفعات برنده بازی شود. ولی با بازی با یک راهبرد کوانتومی می‌تواند همیشه برنده بازی باشد. بازی پرتاب سکه PQ یک بازی ساده است. اما از لحاظ ساختاری شبیه به مسائل پیشگویی<sup>۲</sup> برای الگوریتم‌های شناخته شده از جمله الگوریتم جستجوی کوانتومی می‌باشد [۸ و ۱۶ و ۱۹].

#### ۴-۴- کاربرد بازی پرتاب سکه PQ در الگوریتم جستجوی کوانتومی:

بازی پرتاب سکه PQ یک بازی ساده است. اما با بازی P در نقش یک پیشگو ساختار آن شبیه مسائل پیشگویی برای بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی از جمله الگوریتم جستجوی گراور است. در علم

<sup>۱</sup> Hadmard

<sup>۲</sup> Oracle problem

کامپیوتر یک پیشگو یک تابع است. به عنوان مثال تابع مشخصه  $\{0,1\}$  :  $x \in S \rightarrow U_f(x)$ ، که به ازای

$$x = a, U_f(a) = 1 \text{ می شود در غیر این صورت برای } x \neq a, U_f(x) = 0 \text{ می باشد [۱۱].}$$

در این بازی،  $Q$  می گوید که اگر پیکارد هر عددی بین  $0$  و  $N-1$  انتخاب کند. او می تواند آن را با  $K$  بار حدس زدن پیدا کند. در اینجا پیکارد که با الگوریتم جستجو آشنایی دارد و نقش یک پیشگو را

بازی می کند، می داند که  $Q$  از بین  $N = 2^n$  عدد، به  $\frac{N}{2}$  بار تکرار احتیاج دارد تا به تواند عددش

(عدد پیکارد) را با احتمال  $50\%$  درصد حدس بزند. در این بازی  $Q$  از پیکارد به عنوان یک پیشگو (یک

تابع مشخصه  $U_f(x)$  در علم کامپیوتر) استفاده می کند تا به او در پیدا کردن عدد  $a$  کمک کند. به

هر حال  $Q$  قصد دارد از الگوریتم جستجوی گراور استفاده کند و به  $k = \sqrt{N}$  مرتبه حدس بیشتر

احتیاج ندارد.  $Q$  برای جستجوی عدد  $a$  با الگوریتم گراور، با راهبرد زیر شروع به بازی می کند:

$$|0\rangle|0\rangle \dots |0\rangle|0\rangle \otimes |0\rangle \quad (9-4)$$

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \quad (10-4)$$

$$H\sigma_x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (11-4)$$

$$Q \xrightarrow{H^{\otimes n} \otimes H\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (12-4)$$

در مرحله بعد  $P$  تبدیل یونیتاری  $U_f(x)$  را به کار می گیرد و همان طور که می دانیم [۸و۹]:

$$|x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \xrightarrow{U_{fa}} (-1)^{f_a(x)} |x\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \quad (13-4)$$

پس می توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$picard \xrightarrow{u_{fa}} U_{fa}(|\Psi_s\rangle \otimes H\sigma_x|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{f_a(x)} (|0\rangle - |1\rangle) = \quad (14-4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{f_a(x)} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

در مرحله بعد  $Q$  اجزای دیگر عملگر گراور، که شامل دو عملگر والش هادامارد ( $H^{\otimes n}$ ) و یک  $f$ -gate دیگر ( $U_{f0}$ ) است را اجرا می‌کند.  $U_{f0}$  همانند  $U_{fa}$  عمل می‌کند با این تفاوت که ضریب همه  $|x\rangle$ ها را به جز  $|0^{\otimes n}\rangle$  منفی می‌کند. در اینجا  $a \in [0, N-1]$  عددی است که  $P$  جستجو می‌کند. تمامی مراحل الگوریتم گراور به اندازه  $\sqrt{N}$  مرتبه تکرار می‌شوند و حالت نهایی  $|\Psi_f\rangle$  است که با احتمالی نزدیک به ۱،  $|\Psi_f\rangle = |a\rangle$  می‌شود. در یک جمله منظور از الگوریتم جستجوی گراور این است که حالت برهم نهیده اولیه  $|\Psi_s\rangle$  حول محور مبدا دوران داده شود تا به حالت ممکن  $|a\rangle$  نزدیک شود [۸]. پس  $Q$  با الگوریتم جستجوی گراور با استفاده از اصل برهم نهی کوانتومی  $a$  را با احتمال بالایی تعیین کرد. باید به این نکته توجه کرد که اگر  $Q$  یک بازیکن کلاسیکی بود انتظار می‌رفت  $\frac{N}{2}$  بار جستجو انجام شود تا عدد  $a$  با احتمال ۵۰ درصد پیدا شود. اما با بازی  $Q$  با راهبرد کوانتومی در الگوریتم گراور با تعداد  $\sqrt{N}$  بار جستجو با احتمالی نزدیک به ۱ عدد  $a$  پیدا می‌شود [۸ و ۲۱].

#### ۴-۵- سیستم‌های کیوتریتی:

یک کیوتریت یک سیستم سه حالته است که در این سیستم بردارهای حالت آن سه بُعدی می‌باشند. برای یک سیستم کیوتریتی یک ذره با اسپین ۱ را می‌توان نام برد. بردارهای پایه در این سیستم را می‌توان با  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  نشان داد. پس حالت کلی یک کیوتریت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle \quad (۴-۱۵)$$

حال عملگر هادامارد را در حالت کیوتریتی به دست آورده می‌شود. عملگر هادامارد عملگری است که ویژه‌حالت‌های عملگر  $\hat{Z}$  را به ویژه‌حالت‌های عملگر  $\hat{X}$  تبدیل می‌کند. ویژه‌حالت‌های هر یک از این عملگرها در حالت کیوتریتی به صورت زیر به دست می‌آیند. ویژه‌حالت‌های عملگر  $\hat{Z}$  در حالت کیوتریتی بردارهای پایه سیستم ما می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

برای به دست آوردن ویژه حالت‌های عملگر  $\hat{X}$  در یک سیستم کیوتریتی از ویژگی‌های این عملگر در سیستم کیوبیتی استفاده می‌شود. به این صورت که بر طبق ویژگی‌های عملگر  $\hat{X}$  در حالت کیوبیتی داریم:

$$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{X}|1\rangle = |0\rangle \quad (16-4)$$

$$\hat{X}^2 = I \quad (17-4)$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18-4)$$

ویژه مقادیر این عملگر +1 و -1 می‌باشند و ویژه حالت‌های متناظر با آن‌ها عبارتند از:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (19-4)$$

همچنین در حالت کیوبیتی داریم:

$$\hat{X}|+\rangle = |+\rangle, \quad \hat{X}|-\rangle = -|-\rangle \quad (20-4)$$

حال با توجه به ویژگی‌های عملگر  $\hat{X}$  در کیوبیتی برای حالت کیوتریتی می‌توان نوشت:

$$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{X}|1\rangle = |2\rangle, \quad \hat{X}|2\rangle = |0\rangle \quad (21-4)$$

$$\hat{X}^3 = I \quad (22-4)$$

پس عملگر  $\hat{X}$  در حالت کیوتریتی به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23-4)$$

که ویژه مقادیر این عملگر  $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ,  $e^{\frac{4\pi i}{3}}$  و 1 می‌باشند و ویژه حالت‌های متناظر با آن‌ها به عبارتند از:

$$|\alpha 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24-4)$$

$$|\alpha 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (25-4)$$

$$|\alpha 3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (26-4)$$

پس داریم:

$$\hat{H}|0\rangle = |\alpha 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \quad (27-4)$$

$$\hat{H}|1\rangle = |\alpha 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}} |1\rangle + e^{\frac{4\pi i}{3}} |2\rangle) \quad (28-4)$$

$$\hat{H}|2\rangle = |\alpha 3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + e^{\frac{4\pi i}{3}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}} |2\rangle) \quad (29-4)$$

پس عملگر هادمارد در حالت کیوتربیتی به صورت زیر می‌شود [۴۳]:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (30-4)$$

#### ۴-۶- تعمیم بازی پرتاب سکه PQ کیوبیتی به حالت کیوتربیتی :

این بازی در حالت کیوتربیتی همانند حالت کیوبیتی در نمادگذاری استاندارد دیراک در پایه‌های  $V$  به صورت  $|E\rangle, |T\rangle, |H\rangle$  نوشته می‌شود. این بردارها به زبان جبر خطی به ترتیب متناظر با بردارهای

می‌باشند. در حالت کیوتزیتی یک حالت کوانتومی خالص برای سکه، ترکیب خطی از  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a|H\rangle + b|T\rangle + c|E\rangle$  می‌باشد که  $a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = 1$  می‌باشد و  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  مزدوج مختلط  $a, b, c$  می‌باشند. همان طور که گفته شد حالت سکه در ابتدا  $|H\rangle$  می‌باشد و اولین راهبرد کوانتومی  $\hat{Q}$  یک عمل یونیتاری به صورت  $\hat{U}(a, b)$  می‌باشد که علیرغم تلاش‌های زیادی که کردیم برای این که به توانیم این عملگر را در نمایش ماتریسی در حالت کیوتزیتی بر حسب پارامترهای  $a, b, c$  به دست بیاوریم، ولی حتی با استفاده از نرم‌افزارهای مختلف موفق به پیدا کردن چنین ماتریسی در حالت کلی نشدیم. پس عملگر هادمارد در حالت کیوتزیتی به عنوان ماتریس یونیتاری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود که چگونگی به دست آوردن این عملگر در بخش قبل توضیح داده شده است.

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi i} & \frac{1}{4\pi i} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}. \quad (31-4)$$

از آنجایی که سکه در ابتدا در حالت خالص  $\rho_0 = |H\rangle\langle H|$  قرار دارد پس اولین عمل  $Q$  آن را در حالت  $\rho_1$  به صورت زیر قرار می‌دهد:

$$\rho_0 = |H\rangle\langle H| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32-4)$$

$$\hat{H}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{-2\pi i} & \frac{1}{-4\pi i} \\ 1 & e^{\frac{-2\pi i}{3}} & e^{\frac{-4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{-4\pi i}{3}} & e^{\frac{-2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (33-4)$$

$$\rho_1 = \hat{H}\rho_0\hat{H}^\dagger = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (34-4)$$

عمل آمیخته پیکارد به صورت یک ترکیب خطی کوژ روی این ماتریس چگالی به صورت زیر عمل می‌کند. در اینجا حالت خاصی از  $N, F$  در حالت کیوتریتی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود و  $\rho_2$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (35-4)$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36-4)$$

$$\rho_2 = pF\rho_1F^\dagger + (1-p)N\rho_1N^\dagger \quad (37-4)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (38-4)$$

همان طور که مشاهده شد عمل آمیخته پیکارد حالت سیستم را عوض نمی‌کند. حال اگر  $Q$  دوباره این عملگر یعنی عملگر  $\hat{H}$  را روی حالت سیستم یعنی  $\rho_2$  به کار گیرد با احتمال ۱، سکه را در حالت  $\rho_3 = \hat{H}\rho_2\hat{H}^\dagger = |H\rangle\langle H|$  به دست خواهد آورد. پس در حالت کیوتریتی هم این یکی از بهترین راهبردهای کوانتومی برای  $Q$  می‌باشد. بنابراین با تعمیم این بازی به حالت کیوتریتی می‌توان در آینده به بررسی کاربردهای این بازی در الگوریتم‌های کوانتومی مانند الگوریتم جستجوی کوانتومی در حالت کیوتریتی پرداخت.

## ۴-۷- بازی معمای زندانیان:

بازی معمای زندانیان یک مسئله در نظریه بازی است که توسط مریل<sup>۱</sup>، فلود<sup>۲</sup>، و ملوین<sup>۳</sup> در سال ۱۹۵۰ مطرح شد. آلبرت<sup>۴</sup> بازی را با پاداش‌های مجازات زندانیان شکل داد و نام معمای زندانیان را روی آن گذاشت. معمای زندانیان کلاسیکی به صورت زیر است:

دو متهم توسط یک پلیس بازداشت می‌شوند. چون پلیس مدرک کافی برای مجازات آن‌ها ندارد هنگامی که با آن‌ها ملاقات می‌کند پیشنهادات یکسانی به آن‌ها می‌دهد. باید به این نکته توجه داشت که هر دو متهم جدا از یکدیگر می‌باشند. پیشنهاد پلیس به قرار زیر است:

اگر یکی از مجرمین جرم خود را انکار کند<sup>۵</sup> و دیگری به جرمش اعتراف کند<sup>۶</sup>. فردی که انکار کرده آزاد می‌شود و متهمی که به جرم اعتراف کرده ۱۰ سال زندانی می‌شود. اگر هر دو اعتراف کنند، هر کدام فقط ۶ ماه زندانی می‌شوند، و در صورتی که هر دو انکار کنند هر کدام ۵ سال زندانی می‌شوند. حال هر دو متهم باید انتخاب کنند که می‌خواهند اعتراف کنند یا انکار کنند. هر دو مطمئن هستند که دیگری درباره تصمیم آن‌ها چیزی نمی‌داند. حال متهم چطور باید عمل کند؟ [۴]

در این بازی هر دو بازیکن آلیس<sup>۷</sup> و باب<sup>۸</sup> باید مستقلاً تصمیم بگیرند که آیا می‌خواهند اعتراف کنند یعنی راهبرد  $\hat{C}$  را انتخاب کنند یا این که انکار کنند و راهبرد  $\hat{D}$  را انتخاب کنند. هر بازیکن با توجه به نوع انتخابش یک پاداش خاص به دست می‌آورد. این پاداش یک ویژگی کمی از تمایلات شخصی بازیکنان را فراهم می‌کند. این گونه تصوّر می‌شود که هر دو بازیکن می‌خواهند پاداش شخصی خود را ماکزیمم کنند.

جدول (۴-۲) ماتریس پاداش آلیس و باب را نشان می‌دهد.

---

<sup>1</sup> Merrill

<sup>2</sup> Flood

<sup>3</sup> Melvin

<sup>4</sup> Albert W, Tucker

<sup>5</sup> deny

<sup>6</sup> confess

<sup>7</sup> Alice

<sup>8</sup> Bob

		Bob $s_B$	
		C	D
Alice $s_A$	C	(3,3)	(0,5)
	D	(5,0)	(1,1)

جدول ۴-۲- ماتریس پاداش در معمای زندانیان، در هر خانه اولین عدد پاداش آلیس و دومین عدد پاداش باب می‌باشد. اگر هر دو بازیکن اعتراف کنند هر کدام ۳ واحد پاداش دریافت می‌کنند و اگر یکی از بازیکنان اعتراف کند و دیگری انکار کند باشد بازیکنی که انکار است ۵ واحد پاداش دریافت می‌کند و بازیکنی که اعتراف کرده است هیچ گونه پاداش دریافت نمی‌کند. اگر هر دو بازیکن انکار کنند هر کدام ۱ واحد پاداش دریافت می‌کنند. [۱۸]

یک نامه کوتاه که در آن معما در اینجا به این صورت مطرح می‌شود. که استدلال منطقی از چنین موقعیتی بازیکنان را وادار می‌کند تا هر دو انکار کنند. یعنی با راهبرد  $\hat{D}$  بازی کنند هر چند هر دو ممکن است از اعتراف کردن به جرم، یعنی بازی با راهبرد  $\hat{C}$  سود ببرند. اگر آلیس صرف نظر از انتخاب باب با راهبرد  $\hat{D}$  سود بیشتری به دست آورد، آن گاه با راهبرد  $\hat{D}$  عمل خواهد کرد و به دلیل متقارن بودن بازی همین قضیه درباره باب نیز به کار می‌رود. بازی متقارن بازی است که نتیجه و سود حاصل از یک راهبرد تنها به راهبرد انتخابی بازیکن دیگر وابسته است و از این که کدام بازیکن این راهبرد را در پیش گرفته مستقل است. اساساً آلیس و باب دو انتخاب اصلی دارند. یعنی باید از میان دو راهبرد اعتراف کردن و انکار کردن یکی را انتخاب کنند. به طور کلی این بازی یک مثال خاص از بازی‌های کلاسیکی است که کاربردهای فراوانی در سایر زمینه‌های علوم دارد. در این بازی هر دو طرف باید با یک وکیل از طریق صحبت کردن یا نوشتن تصمیماتشان نشان داده شده، ارتباط برقرار کنند. با در نظر گرفتن این نکته که بازی درباره انتقال اطلاعات است منطقی به نظر می‌رسد که سوال شود، اگر حامل‌های اطلاعات به عنوان سیستم‌های کوانتومی در نظر گرفته شوند چه اتفاقی می‌افتد؟ باید به این نکته توجه کرد که اطلاعات کوانتومی یک مفهوم اطلاعاتی بنیادی محسوب می‌شوند. پس بنابراین یک بازی از یک سو به وسیله راهبردهای احتمالی و از سوی دیگر توسط تعیین پاداش‌ها مشخص می‌شود. این پاداش‌ها زمانی تعیین می‌شوند که ترکیبی از راهبردهای انتخابی  $(s_A, s_B)$  معلوم باشند. یعنی یک نگاشت برای هر  $(s_A, s_B)$  به یک عدد وجود دارد. این پاداش‌ها ارجحیت

بازیکنان را به صورت کمی نشان می‌دهند. از نظر کلاسیکی یک بازی دو نفره، دوتایی<sup>۱</sup> ممکن است به طریق زیر اجرا شود:

یک داور دو سکه می‌گیرد و به هر کدام از بازیکنان یک سکه می‌دهد. بازیکنان سکه‌هایشان را در حالت شیر دریافت می‌کنند. آن‌ها ممکن است آن را به همان صورت نگه دارند یا آن را به حالت خط درآورند. حالت شیر سکه را در معمای زندانیان با راهبرد  $\hat{C}$  و حالت خط سکه را با راهبرد  $\hat{D}$  نمایش می‌دهند. هر دو بازیکن سکه‌ها را به داور برمی‌گردانند و داور پاداش نهایی را مطابق با ترکیبی از راهبردهای بازیکنان محاسبه می‌کند. در اینجا سکه‌ها به عنوان حاملان فیزیکی اطلاعات به کار می‌روند. در نسخه کوانتومی چنین بازی سیستم‌های کوانتومی به عنوان حاملان اطلاعاتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال در یک بازی دونفره دوتایی، یک سیستم شامل دو کیوبیت را به عنوان حاملان فیزیکی اطلاعات در نظر می‌گیرند [۴ و ۱۸].

#### ۴-۸- الگو فیزیکی معمای زندانیان کیوبیتی:

در این بخش با نمایش یک الگو فیزیکی از معمای زندانیان، کوانتیزه کردن بازی‌هایی با جمع-غیر صفر نشان داده می‌شود. در این بازی می‌توان نشان داد که اگر راهبردهای کوانتومی به کار گرفته شود، معما از بین می‌رود یا به عبارت دیگر با راهبردهای کوانتومی بازیکنان می‌توانند از زندان فرار کنند.

علاوه بر این باید ثابت کرد که:

(۱) یک جفت راهبردهای کوانتومی خاص وجود دارد که این جفت راهبرد همیشه به بازیکنان جایزه می‌دهد و همچنین یک تعادل نش نیز می‌باشند.

---

<sup>۱</sup> binary

۲) یک راهبرد کوانتومی خاص وجود دارد که اگر برخلاف هر راهبرد کلاسیکی بازی شود. همیشه به بازیکن جایزه می‌دهد.

این الگو فیزیکی شامل اجزای زیر است:

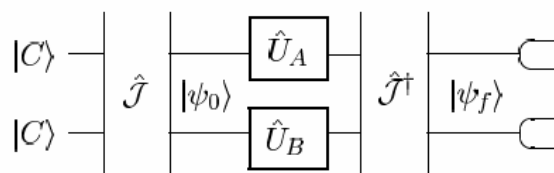
(۱) یک منبع دوبیتی، که هر بیت برای یک بازیکن است.

۲) یک مجموعه ابزارهای فیزیکی که بازیکنان با این ابزارها قادرند بیت‌هایشان را در رفتار راهبردی تغییر دهند.

۳) یک وسیله اندازه‌گیری فیزیکی که پاداش بازیکنان را از حالت دوبیتی تعیین می‌کند.

هر دو بازیکن همه این سه عامل، منبع، ابزارهای فیزیکی، و وسیله اندازه‌گیری پاداش را می‌دانند. در فرمول‌بندی کوانتومی برای تعیین نتایج ممکن، حالت‌هایی را که بازیکنان در حالت کلاسیکی می‌توانند انتخاب کنند به صورت بردارهای پایه  $|C\rangle$  و  $|D\rangle$  در فضای هیلبرت یک سیستم دو حالتی یعنی یک کیوبیت مشخص می‌شوند. برای مثال حالت یک بازی توسط یک بردار در فضای تانسور حاصل ضرب به صورت  $|CC\rangle$ ،  $|CD\rangle$ ،  $|DD\rangle$  و  $|DC\rangle$  مشخص می‌شود. در این حالت‌ها اولین حالت کیوبیت آلیس و دومی کیوبیت باب می‌باشد.

شکل (۲-۴) یک بازی کوانتومی را با یک شبکه ساده کوانتومی نشان می‌دهد..



شکل ۲-۴- شبکه کوانتومی بازی معمای زندانیان [۱۷].

حالت اولیه بازی به صورت  $|\Psi_0\rangle = \hat{J}|CC\rangle$  است که  $\hat{J}$  عملگر یونیتاری می‌باشد و هر دو بازیکن آن را می‌دانند. راهبردهای  $\hat{U}_A$  و  $\hat{U}_B$  روی جفت کیوبیت‌ها اجرا می‌شوند. باید توجه کرد که حرکت‌های آلیس و باب که از فضای راهبردی  $\mathcal{S}$  انتخاب شده‌اند، به ترتیب به عملگرهای یونیتاری  $\hat{U}_A$  و  $\hat{U}_B$



مربوط می‌باشند. هر کدام از این عملگرها به ترتیب روی کیوبیت خودشان اثر می‌گذارند. فضای راهبردی  $S$  با بعضی از زیر مجموعه‌های ماتریس یونیتاری  $2 \times 2$  تعیین می‌شود که در بخش بعد توضیح داده می‌شوند. این حرکت‌ها سیستم را در حالت  $\hat{J}|CC\rangle$  ( $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$ ) قرار می‌دهد. در مرحله بعد آلیس و باب کیوبیت‌هایشان را برای اندازه‌گیری نهایی و تعیین پاداش به یک گیت دوبیتی  $\tilde{J}$  می‌فرستند که  $\tilde{J} = J^\dagger$  می‌باشد پس حالت نهایی به صورت زیر می‌شود:

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger (\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B) \hat{J} |CC\rangle \quad (39-4)$$

از آنجایی که نظریه کوانتومی اساساً احتمالی می‌باشد، تنها اطلاعات، پاداش بازیکنان می‌باشد. پاداش آلیس به صورت زیر داده می‌شود:

$$(40-4)$$

$$S_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD}$$

که در معادله فوق  $P_{\sigma\sigma'}$  احتمال‌های ضربی<sup>۱</sup> هستند و  $\sigma, \sigma'$  با  $C, D$  نامگذاری شده‌اند. احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{\sigma\sigma'} = \left| \langle \sigma\sigma' | \Psi_f \rangle \right|^2 \quad (41-4)$$

هر یک از مقادیر  $r$  و  $p$  و  $t$  و  $s$  به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$r = 3 \quad p = 1$$

$$t = 5 \quad s = 0$$

پاداش باب با جا به جا کردن  $s \leftrightarrow t$  به دست می‌آید. باید توجه کرد که پاداش آلیس  $S_A$  هم به راهبرد  $\hat{U}_A$  و هم به راهبرد  $\hat{U}_B$  وابسته است [۱۷].

---

<sup>1</sup> joint

#### ۴-۹- مجموعه راهبردها و راه‌حل‌های مربوط :

اکنون به بررسی مفاهیم راه حل برای مشابه کوانتومی معمای زندانیان پرداخته می‌شود. در جدول (۲-۴) مجموعه راهبردهای مجاز کلاسیک (اعتراف کردن، انکار کردن) گنجانده شده‌اند. در اینجا دو مجموعه راهبرد جالب و راه‌حل‌های مرتبط با آن‌ها توضیح داده می‌شود. هر یک از این دو مجموعه شامل عملگرهای یونیتاری می‌باشند.

#### ۴-۹-۱- مجموعه راهبردهای یک پارامتری:

اولین مجموعه راهبردهای کوانتومی،  $(S^{cl})$  شامل عمل‌های کوانتومی  $S_A$  و  $S_B$  می‌باشد، که چرخش‌های محلی<sup>۱</sup> با یک پارامتر را نمایش می‌دهند. نمایش ماتریسی متناظر با عملگرهای یونیتاری به صورت زیر است:

$$\hat{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (۴۲-۴)$$

که در معادله (۴۲-۴)،  $\theta \in [0, \pi]$  است. در این نمونه ساده انتخاب راهبردهای  $S_A$  و  $S_B$  به معنای انتخاب دو زاویه  $\theta_A$  و  $\theta_B$  می‌باشد. راهبردهای کلاسیکی اعتراف کردن و انکار کردن در معمای زندانیان در مجموعه راهبردهای ممکن،  $C \sim U(0)$  و  $D \sim U(\pi)$  قرار دارند و هر یک از این راهبردها به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{C} \approx \hat{U}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} \approx \hat{U}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۴۳-۴)$$

راهبرد  $\hat{C}$  حالت سیستم را تغییر نمی‌دهد ولی راهبرد  $\hat{D}$  حالت سیستم را تغییر می‌دهد. در نظریه بازی راهبردهای احتمالی از این نوع، راهبردهای آمیخته نامیده می‌شوند.

گیت درهم‌تنیده  $J$  در این بازی به صورت زیر می‌باشد.

<sup>۱</sup> local

$$\hat{J} = \exp(i\gamma\hat{D} \otimes \hat{D}/2)$$

که  $\gamma \in [0, \pi/2]$ ، یک پارامتر حقیقی است و مقیاسی برای میزان درهم‌تنیدگی بازی می‌باشد. برای بازی‌های مجزا  $\gamma = 0$  می‌باشد و احتمال‌های ضربی  $P_{\sigma\sigma'}$  برای همه جفت راهبردهای  $\hat{U}_A$  و  $\hat{U}_B$  به  $P_{\sigma\sigma'} = P_{\sigma}^{(A)} P_{\sigma'}^{(B)}$  تجزیه می‌شوند. به منظور تضمین یک نمایش کاملاً درست از معمای زندانیان یک سری شرایط اضافی به صورت زیر ایجاد می‌شود:

$$[\hat{J}, \hat{D} \otimes \hat{D}] = 0, \quad [\hat{J}, \hat{D} \otimes \hat{C}] = 0, \quad [\hat{J}, \hat{C} \otimes \hat{D}] = 0 \quad (44-4)$$

این شرایط تضمین می‌کنند که معمای زندانیان کوانتومی شامل معمای زندانیان کلاسیکی می‌باشد. در چنین شرایطی پاداش آلیس و باب به صورت زیر تعیین می‌شوند [۱۷ و ۱۸].

$$S_A(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = 3|\cos(\theta_A/2)\cos(\theta_B/2)|^2 + 5|\cos(\theta_B/2)\sin(\theta_A/2)|^2 + |\sin(\theta_A/2)\sin(\theta_B/2)|^2$$

$$S_B(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = 3|\cos(\theta_A/2)\cos(\theta_B/2)|^2 + 5|\sin(\theta_B/2)\cos(\theta_A/2)|^2 + |\sin(\theta_A/2)\sin(\theta_B/2)|^2$$

(45-4)

که این روابط را به صورت زیر می‌توان اثبات کرد.

$$S_A(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = 3P_{CC} + P_{DD} + 5P_{DC}$$

$$|C\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |D\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger (\hat{U}(\theta_A) \otimes \hat{U}(\theta_B)) J |CC\rangle$$

$$\hat{J} = \exp(i\gamma\hat{D} \otimes \hat{D}/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n}}{2n!} \left(\frac{\gamma}{2}\right) (\hat{D} \otimes \hat{D})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2n+1} (\hat{D} \otimes \hat{D})^{2n+1}$$

$$(\hat{D} \otimes \hat{D})^2 = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{D} \otimes \hat{D})^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D \otimes D$$

$$J = I \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i(D \otimes D) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}(\theta_A) \otimes \hat{U}(\theta_B) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|CC\rangle \equiv |\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$P_{CC} = \left| \langle CC | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2$$

$$P_{DD} = \left| \langle DD | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2$$

$$P_{DC} = \left| \langle DC | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2$$

$$P_{CD} = \left| \langle CD | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2$$

$$\$_A(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = 3|\cos(\theta_A/2)\cos(\theta_B/2)|^2 + 5|\cos(\theta_B/2)\sin(\theta_A/2)|^2 + |\sin(\theta_A/2)\sin(\theta_B/2)|^2$$

$$\$_B(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = 3|\cos(\theta_A/2)\cos(\theta_B/2)|^2 + 5|\sin(\theta_B/2)\cos(\theta_A/2)|^2 + |\sin(\theta_A/2)\sin(\theta_B/2)|^2$$

تحلیل پاداش‌های فوق‌الذکر بازی معمای زندانیان کلاسیکی را نشان می‌دهد.

تابع‌های پاداش مساوی با تابع‌های مشابه در معمای زندانیان کلاسیکی با راهبردهای آمیخته می‌باشند. در معما اعتراف کردن با احتمال کلاسیک  $P^{(C)}$  و انکار کردن با احتمال  $P^{(D)}$  به صورت زیر انتخاب شده‌اند.

$$P^{(C)} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$P^{(D)} = 1 - P^{(C)} = 1 - \cos^2(\theta/2) = \sin^2(\theta/2)$$

نامساوی‌های

$$\$_A(\hat{D}, s_B) \geq \$_A(s_A, s_B),$$

(۴۶-۴)

$$\$_B(s_A, \hat{D}) \geq \$_B(s_A, s_B)$$

برای تمام  $s_A, s_B \in S^{cl}$  صدق می‌کنند. بنابراین،  $(\hat{D}, \hat{D})$  تنها تعادل نش بازی می‌باشد. ولی از آنجایی که  $\$_A(\hat{D}, \hat{D}) = \$_B(\hat{D}, \hat{D}) = 1$  است، این تعادل کارآمد نمی‌باشد. باید توجه کرد که در اینجا پاداش بهینه پارتو، ۳ است. که برای به دست آوردن چنین پاداش در معمای زندانیان هر دو متهم باید اعتراف کنند پس انتخاب راهبرد  $\hat{D}$  برای هر دو بازیکن بهترین راه حل نمی‌باشد.

#### ۴-۹-۲- مجموعه راهبردهای دو پارامتری:

یک مجموعه کلی تر از راهبردها مجموعه راهبردهای دو پارامتری ( $S^{(TP)}$ ) می باشد. نمایش ماتریسی عملگرهای متناظر با راهبردهای کوانتومی به صورت زیر می باشد:

$$\hat{U}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (47-4)$$

که  $\theta \in [0, \pi]$  و  $\varphi \in [0, \pi/2]$  است. انتخاب راهبردهای  $s_A$  و  $s_B$  به معنی انتخاب زوایای  $\theta_A, \varphi_A$  و  $\theta_B, \varphi_B$  می باشد. راهبردهای خالص کلاسیکی  $\hat{C}, \hat{D}$  در این مجموعه به صورت زیر می باشند:

$$\hat{C} \sim \hat{U}(0,0) \quad , \quad \hat{D} \sim \hat{U}(\pi,0)$$

در این مجموعه پاداش آلیس به صورت زیر تعیین می شود:

$$\begin{aligned} S_A(\hat{U}(\theta_A, \varphi_A), \hat{U}(\theta_B, \varphi_B)) = & 3|\cos(\varphi_A + \varphi_B) \cos(\theta_A/2) \cos(\theta_B/2)|^2 + \\ & 5|\sin(\varphi_A) \cos(\theta_A/2) \sin(\theta_B/2) - \cos(\varphi_B) \cos(\theta_B/2) \sin(\theta_A/2)|^2 + \\ & |\sin(\varphi_A + \varphi_B) \cos(\theta_A/2) \cos(\theta_B/2) + \sin(\theta_A/2) \sin(\theta_B/2)|^2 \end{aligned} \quad (48-4)$$

که رابطه بالا به صورت زیر اثبات می شود:

$$\hat{U}_A(\theta_A, \varphi_A) \otimes \hat{U}_B(\theta_B, \varphi_B) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_A} \cos(\frac{\theta_A}{2}) & \sin(\frac{\theta_A}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta_A}{2}) & e^{-i\varphi_A} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\varphi_B} \cos(\frac{\theta_B}{2}) & \sin(\frac{\theta_B}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta_B}{2}) & e^{-i\varphi_B} \cos(\frac{\theta_B}{2}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{i(\varphi_A + \varphi_B)} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) & e^{i\varphi_A} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) & e^{i\varphi_B} \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) & \sin(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) \\ -e^{i\varphi_A} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) & e^{i(\varphi_A - \varphi_B)} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) & -\sin(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) & e^{-i\varphi_B} \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \\ -e^{i\varphi_B} \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) & -\sin(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) & e^{i(\varphi_B - \varphi_A)} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) & e^{-i\varphi_A} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) \\ \sin(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) & -e^{-i\varphi_B} \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) & -e^{-i\varphi_A} \sin(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\frac{\theta_A}{2}) & e^{-i(\varphi_A + \varphi_B)} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{J} = I \cos(\frac{\gamma}{2}) + i(\hat{D} \otimes \hat{D}) \sin(\frac{\gamma}{2}) \Rightarrow \hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\varphi_A + \varphi_B) \\ -\cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\varphi_A) + \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \sin(\varphi_B) \\ \sin(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\varphi_A) - \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\varphi) \\ \sin(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) + \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \sin(\varphi_A + \varphi_B) \end{pmatrix}$$

$$P_{CC} = \left| \langle CC | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\varphi_A + \varphi_B) \right|^2$$

$$P_{DC} = \left| \sin(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\varphi_A) - \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\varphi) \right|^2$$

$$P_{DD} = \left| \sin(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) + \cos(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \sin(\varphi_A + \varphi_B) \right|^2$$

$$P_{CD} = \left| -\cos(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\frac{\theta_B}{2}) \cos(\varphi_A) + \sin(\frac{\theta_A}{2}) \cos(\frac{\theta_B}{2}) \sin(\varphi_B) \right|^2$$

$$\begin{aligned} \$_A(\hat{U}(\theta_A, \varphi_A), \hat{U}(\theta_B, \varphi_B)) &= 3 \left| \cos(\varphi_A + \varphi_B) \cos(\theta_A/2) \cos(\theta_B/2) \right|^2 + \\ &5 \left| \sin(\varphi_A) \cos(\theta_A/2) \sin(\theta_B/2) - \cos(\varphi_B) \cos(\theta_B/2) \sin(\theta_A/2) \right|^2 + \\ &\left| \sin(\varphi_A + \varphi_B) \cos(\theta_A/2) \cos(\theta_B/2) + \sin(\theta_A/2) \sin(\theta_B/2) \right|^2 \end{aligned}$$

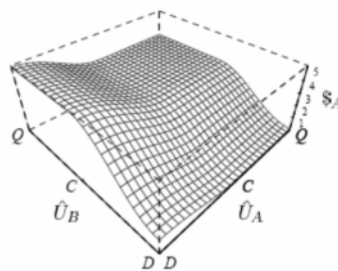
این رابطه نشان می‌دهد تعادل نش قبلی از  $S^{cl}$  یعنی  $(\hat{D}, \hat{D})$  دیگر یک راه حل تعادلی نیست. به دلیل این که هر دو بازیکن با انحراف از راهبرد  $\hat{D}$  می‌توانند سود ببرند و با حذف این راه حل تعادلی یک تعادل جدید  $(\hat{Q}, \hat{Q})$  ظاهر می‌شود. راهبرد  $\hat{Q}$  با ماتریس زیر نمایش داده می‌شود:

$$\hat{Q} \sim \hat{U}(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (49-4)$$

این تعادل منحصر به فرد می‌باشد و تنها راه حل قابل قبول بازی می‌باشد، به دلیل این که بازیکنان با به کار بردن این راهبرد پاداش به صورت زیر به دست می‌آورند:

$$\$_A(\hat{Q}, \hat{Q}) = \$_B(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3 \quad (50-4)$$

این پاداش بهینه پارتو نیز می‌باشد. یعنی هیچ بازیکنی بدون کم کردن پاداش بازیکن دیگر نمی‌تواند چیزی به دست آورد و در این صورت می‌توان گفت معما به طور کامل از بین رفته است. در صورتی که در بازی کلاسیک تنها اعتراف کردن دو بازیکن بهینه پارتو بود که این جفت راهبرد یک تعادل نش نبودند. باید این نکته را ذکر کرد که در مجموعه راهبردهای دو پارامتری اگر  $\gamma = 0$  باشد یعنی در هم تنیدگی بین کیوبیت‌های بازیکنان وجود نداشته باشد در این صورت راهبرد  $\hat{D} \otimes \hat{D}$  دارای خاصیت تعادل نش و راهبرد  $\hat{Q} \otimes \hat{Q}$  دارای خاصیت بهینه پارتو می‌باشد و در اینجا با وجود مجموعه راهبردهای دو پارامتری هنوز معما از بین نرفته است چون نقطه تعادل نش و بهینه پارتو بر هم منطبق نمی‌شوند. شکل (۳-۴) پاداش آلیس را برای  $\gamma = 0$  در یک مجموعه راهبرد دو پارامتری نشان می‌دهد.



شکل ۳-۴- نمودار پاداش آلیس به ازای راهبردهای  $\hat{D}$  و  $\hat{C}$  و  $\hat{Q}$  برای آلیس و باب در یک بازی مجزا [۱۷].

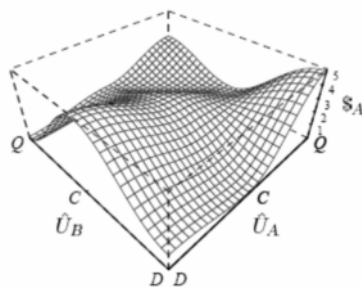


جدول (۳-۴) ماتریس پاداش آلیس و باب در معمای زندانیان هنگامی که راهبرد کوانتومی  $\hat{Q}$  ظاهر می‌شود را نشان می‌دهد [۲۰].

جدول ۳-۴- پاداش آلیس و باب با مجموعه راهبرد دو پارامتری [۲۰]

Alice/Bob	C	D	Q
C	(3,3)	(0,5)	(1,1)
D	(5,0)	(1,1)	(0,5)
Q	(1,1)	(5,0)	(3,3)

شکل (۴-۴) پاداش آلیس در معمای زندانیان که تابعی از  $\hat{U}_A, \hat{U}_B$  می‌باشد را در حالت ماکزیمم درهم تنیدگی نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴- نمودار پاداش آلیس با راهبردهای  $\hat{D}$  و  $\hat{C}$  و برای آلیس و باب در یک بازی با ماکزیمم درهم تنیدگی [۱۷].

همان طور که در جدول (۳-۴) نشان داده شده اگر باب راهبرد  $\hat{D}$  را انتخاب کند، در این صورت بهترین جواب آلیس به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{Q} = \hat{U}(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (۵۱-۴)$$

اگر باب با راهبرد  $\hat{C}$  بازی کند در این صورت بهترین جواب آلیس  $\hat{D}$  خواهد بود. از آنجایی که بازی متقارن است این قضیه برای آلیس نیز برقرار است. پس همان طور که گفته شد  $\hat{D} \otimes \hat{D}$  دیگر یک

تعداد در بازی نمی‌باشد. با از بین رفتن تعداد  $\hat{D} \otimes \hat{D}$  یک تعداد نش جدید  $\hat{Q} \otimes \hat{Q}$  با پاداش

$$\$_A(\hat{Q}, \hat{Q}) = \$_B(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3 \text{ ظاهر می‌شود [۱۷ و ۱۸].}$$

این روابط را به صورت زیر می‌توان اثبات کرد:

$$\$_A(\hat{Q}, \hat{Q}) = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD}$$

$$\$_B(\hat{Q}, \hat{Q}) = rP_{CC} + pP_{DD} + sP_{DC} + tP_{CD}$$

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger(\hat{Q} \otimes \hat{Q})\hat{J}|CC\rangle$$

$$\hat{Q} \otimes \hat{Q} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{CC} = \left| \langle CC | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 1$$

$$P_{CD} = \left| \langle CD | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 0$$

$$P_{DC} = \left| \langle DC | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 0$$

$$P_{DD} = \left| \langle DD | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 0$$

$$S_A(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3p_{cc} = 3$$

$$S_B(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3P_{CC} = 3$$

همچنین رابطه زیر برای همه  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi/2]$  برقرار می‌باشد.

$$S_A[\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{Q}] = \cos^2(\theta/2)(3 \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \leq 3 \quad (52-4)$$

که این رابطه به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger (\hat{U}(\theta, \varphi) \otimes \hat{Q}) \hat{J} |CC\rangle$$

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(\theta, \varphi) \otimes \hat{Q} = \begin{pmatrix} ie^{i\varphi} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & i \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & -ie^{i\varphi} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & -i \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -i \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & ie^{-i\varphi} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & i \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & -ie^{i\varphi} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\varphi) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$P_{DD} = \left| \langle DD | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\varphi) \right|^2$$

$$P_{CD} = \left| \langle CD | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2$$

$$P_{DC} = \left| \langle DC | \Psi_f \rangle \right|^2 = 0$$

$$P_{CC} = \left| \langle CC | \Psi_f \rangle \right|^2 = \left| -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\varphi) \right|^2$$

$$S_A = 3 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(\varphi) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2(\varphi) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \leq 3$$

به طور مشابه برای همه‌ی  $U_B \in S$  می‌توان اثبات کرد که:

$$S_B(\hat{Q}, \hat{U}_B) \leq S_B(\hat{Q}, \hat{Q})$$

$$S_B(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3$$

$$S_B(\hat{Q}, \hat{U}(\theta, \varphi)) = rP_{CC} + pP_{DD} + sP_{DC} + tP_{CD}$$

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger (\hat{Q} \otimes \hat{U}(\theta, \varphi)) \hat{J} |CC\rangle$$

$$\hat{Q} \otimes \hat{U}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} ie^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 \\ -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & ie^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ie^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & 0 & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -ie^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$P_{CC} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(\varphi)$$

$$P_{DD} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2(\varphi)$$

$$P_{CD} = 0$$

$$P_{DC} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\$B(\hat{Q}, \hat{U}(\theta, \varphi)) = 3 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(\varphi) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2(\varphi) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \leq 3$$

پس همان‌طور که مشاهده می‌کنیم زمانی که  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است انتخاب راهبرد  $\hat{Q}$  برای هر دو بازیکن منجر به تعادل نش یکتا در بازی با پاداشی مساوی با پاداش بازیکنان با انتخاب راهبرد  $\hat{C}$  می‌باشد. نشان داده می‌شود که این مشاهدات نادرست هستند و این اشتباه از آنجا ناشی می‌شود که راهبردهای انتخابی به فضای دو بعدی  $U(\theta, \varphi)$  محدود می‌باشد و این در حالی است که با در نظر گرفتن یک مجموعه کامل از عمل‌های یونیتاری محلی<sup>۱</sup> ویژگی‌های بازی کاملاً متفاوت می‌شود و دیگر راهبرد  $\hat{Q}$  با پاداشی برابر با پاداش‌های کلاسیکی نقطه تعادل نش در حالت کوانتومی نیست [۲۲].

تاکنون بازی‌های عادلانه<sup>۲</sup> بررسی شده‌اند. یعنی بازی‌هایی که هر دو بازیکن فضای راهبردی در اختیار دارند. اما اکنون بازی‌های ناعادلانه<sup>۳</sup> مورد بررسی قرار می‌گیرند. بازی ناعادلانه بازی است که یک بازیکن از راهبرد کوانتومی استفاده می‌کند. در حالی که بازیکن دیگر به راهبرد کلاسیکی با  $\varphi = 0$  یعنی مجموعه راهبردهای یک پارامتری محدود است. بازیکن کوانتومی با انتخاب راهبرد  $\hat{M}$  که ایزرت<sup>۴</sup> نام حرکت جادویی<sup>۵</sup> به آن داده است صرف نظر از این که بازیکن کلاسیکی چه راهبرد را انتخاب می‌کند می‌تواند نتیجه بازی را تا حدودی به نفع خود پایان بخشد. راهبرد  $\hat{M}$  به صورت زیر می‌باشد:

---

<sup>1</sup> local unitary operation

<sup>2</sup> fair

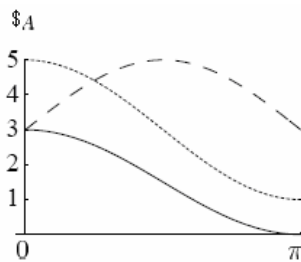
unfair<sup>3</sup>

<sup>4</sup> Eisert

<sup>5</sup> Miracle move

$$\hat{M} = \hat{U}(\pi/2, \pi/2) \quad , \quad \hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad (53-4)$$

همان طور که در شکل (5-4) مشاهده می‌شود برای هر  $\theta \in [0, \pi]$  ،  $\$A[\hat{M}, \hat{U}(\theta, 0)] \geq 3$  و  $\$B[\hat{M}, \hat{U}(\theta, 0)] \leq 1/2$  می‌باشد. این راهبرد حداقل پاداش به ازای  $r = 3$  را به آلیس جایزه می‌دهد.



شکل 4-5- نمودار پاداش آلیس که راهبرد کلاسیکی را در مقابل کوانتومی نشان می‌دهد. در اینجا باب با راهبردهای کلاسیکی  $\hat{U}(\theta, 0)$  یعنی  $\hat{C}, \hat{D}$  بازی می‌کند. در این نمودار اگر آلیس با راهبرد  $\hat{C}$  بازی کند نمودار او با خط ممتد مشخص شده، اگر راهبرد او  $\hat{D}$  باشد نمودار او به صورت نقطه چین و اگر با راهبرد  $\hat{M}$  بازی کند نمودار او خط چین است [17]

از این رو اگر در یک بازی ناعادلانه<sup>1</sup> آلیس مطمئن باشد که باب با راهبرد  $\hat{U}(\theta, 0)$  بازی می‌کند، او مطمئناً همیشه راهبرد  $\hat{M}$  را انتخاب خواهد کرد [17].

#### 4-10- ساختار معما به صورت تابعی از میزان درهم تنیدگی:

در این بخش دانشمندی به نام دوو<sup>2</sup> نتیجه معمای زندانیان را به یک ماتریس پاداش متغیر تعمیم داد. او گفت: که میزان مزیت کوانتومی به میزان درهم تنیدگی بین کیوبیت‌ها بستگی دارد. مزیت دسترسی به مجموعه کامل راهبردهای کوانتومی پایین‌تر از یک سطح خاص از درهم‌تنیدگی از بین می‌رود و راهحل تعادل نش برای بازی کوانتومی مساوی با تعادل نش بازی کلاسیک می‌شود. او نشان داد که

<sup>1</sup> unfair  
<sup>2</sup> DU

ساختار بازی تابعی از میزان درهم تنیدگی با دو آستانه می باشد که سه منطقه کلاسیکی، میانی و کاملاً کوانتومی را مجزا می کند. ساختار معما از  $\gamma = 0$ ، (بازی درهم ناتنیده) تا  $\gamma = \pi/2$  (بازی با ماکزیمم درهم تنیدگی) تغییر می کند. این بازی دارای دو آستانه  $\gamma_{th1} = \arcsin(1/\sqrt{5})$  و  $\gamma_{th2} = \arcsin(\sqrt{2/5})$  می باشد.

همان طور که در شکل (۴-۲) دیده می شود در نسخه کوانتومی این معما ورودی های سیستم حاصل ضرب  $|C\rangle|C\rangle$  می باشد. این ورودی ها وارد گیت درهم تنیده  $\hat{J}$  می شوند. عملگر  $\hat{J}$  به صورت تابعی از میزان درهم تنیدگی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\hat{J} = \exp(i\gamma\hat{D} \otimes \hat{D} / 2) \quad (۴-۵۴)$$

که همان طور که گفته شد  $\gamma \in [0, \pi/2]$  می باشد و مقیاسی از درهم تنیدگی حالت اولیه سیستم است.

پس حالت اولیه سیستم به صورت زیر می شود:

$$|\Psi_i\rangle = \hat{J}|CC\rangle = \cos(\gamma/2)|CC\rangle + i \sin(\gamma/2)|DD\rangle \quad (۴-۵۵)$$

اکنون بازیکنان عملگرهای محلی یونیتاری  $\hat{U}_A$  و  $\hat{U}_B$  را روی کیوبیت هایشان به کار می گیرند و نتیجه وارد گیت درهم ناتنیده  $J^\dagger$  می شود و چهار خروجی  $|CC\rangle$  و  $|DD\rangle$  و  $|DC\rangle$  و  $|CD\rangle$  را بیرون می دهد. بازی های کوانتومی با  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{th1}$  کاملاً کلاسیکی رفتار می کنند. یعنی فقط  $\hat{D} \otimes \hat{D}$  تعادل نش می باشد و پاداش برای هر دو بازیکن ۱ می باشد که مشابه بازی کلاسیکی می باشد.

حال فرض کنید راهبرد باب  $\hat{D} = \hat{U}(\pi, 0)$  باشد. در این صورت بهترین راهبرد برای آلیس  $\hat{Q} = \hat{U}(0, \pi/2)$  با پاداش  $\$_A(\hat{Q}, \hat{D}) = 5 \sin^2 \gamma$  می باشد. در حالی که راهبرد باب  $\hat{Q}$  باشد بهترین جواب آلیس  $\hat{D}$  با پاداش  $\$_A(\hat{D}, \hat{Q}) = 5 \cos^2 \gamma$  می باشد. از آنجایی که این بازی متقارن است همین قضیه برای باب نیز برقرار است.

هر یک از روابط بالا را به صورت زیر اثبات می‌شوند:

$$S_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD}$$

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}'(\hat{Q} \otimes \hat{D})\hat{J}|CC\rangle$$

$$\hat{J} = \exp(i\gamma\hat{D} \otimes \hat{D}/2) = I \cos(\frac{\gamma}{2}) + i(\hat{D} \otimes \hat{D})\sin(\frac{\gamma}{2}) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & i \sin(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) & -i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ 0 & -i \sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q} \otimes \hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|CC\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_A(\hat{Q}, \hat{D}) = 3 \left| (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -i \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 +$$

$$\left| (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -i \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 + 5 \left| (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -i \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 5 \sin^2(\gamma)$$



$$\hat{D} \otimes \hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \hat{J}'(\hat{D} \otimes \hat{Q})\hat{J}|CC\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\gamma) \\ -i \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A(\hat{D}, \hat{Q}) &= 3 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\gamma) \\ -i \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 + \\ &\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\gamma) \\ -i \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 + 5 \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\gamma) \\ -i \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 5 \cos^2(\gamma) \end{aligned}$$

بنابراین  $\hat{D} \otimes \hat{D}$  دیگر تعادل نش نمی‌باشد. به دلیل این که هر بازیکن می‌تواند با تغییر یک طرفه راهبردش از  $\hat{D}$ ، پاداش خود را تغییر دهد و اگر  $\gamma_{th1} \leq \gamma \leq \gamma_{th2}$  باشد در این صورت دو تعادل نش جدید  $\hat{D} \otimes \hat{Q}$  و  $\hat{Q} \otimes \hat{D}$  ظاهر می‌شود.

با توجه به روابط

$$\mathcal{S}_A(\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{D}) = \sin^2(\theta/2) + 5 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\varphi) \sin^2(\gamma) \quad (56-4)$$

$$\mathcal{S}_A(\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{Q}) = 4 - \cos(\theta) + (-3 + 2 \cos(\theta) - \cos^2(\theta/2)) \cos(2\varphi) \quad (57-4)$$

برای همه  $\theta \in [0, \pi]$  و  $\varphi \in [0, \pi/2]$  می‌توان نوشت:

$$\mathcal{S}_A(\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{D}) \leq 5 \sin^2(\gamma) = \mathcal{S}_A(\hat{Q}, \hat{D}) \quad (58-4)$$

$$\mathcal{S}_A(\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{Q}) \leq 5 \cos^2(\gamma) = \mathcal{S}_A(\hat{Q}, \hat{D}) \quad (59-4)$$

به طور مشابه روابط زیر را نیز می‌توان به دست آورد:

$$\$_B(\hat{D}, \hat{U}_B) \leq \$_B(\hat{D}, \hat{Q}) = 5 \sin^2(\gamma) \quad (60-4)$$

$$\$_B(\hat{Q}, \hat{U}_B) \leq \$_B(\hat{Q}, \hat{D}) = 5 \cos^2(\gamma) \quad (61-4)$$

بنابراین  $\hat{D} \otimes \hat{Q}$  و  $\hat{Q} \otimes \hat{D}$  دو تعادل نش می‌باشند. در چنین ناحیه‌ای بازی کوانتومی نمی‌تواند معما را حل کند. اما برای  $\gamma > \gamma_{th2}$  راهبردهای کوانتومی دوباره معما را حل می‌کنند. این ساختار شبیه بازی با ماکزیمم درهم‌تنیدگی می‌باشد. از این رو یک تعادل نش جدید با پاداش  $\$_A(\hat{Q}, \hat{Q}) = \$_B(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3$  ایجاد می‌شود که دارای خاصیت بهینه پارتو می‌باشد. پس به محض این که میزان درهم‌تنیدگی بازی از آستانه  $\gamma_{th2} = \arcsin(\sqrt{2/5}) \approx 0.685$  بیشتر شود، معما از بین می‌رود. در نتیجه هنگامی که میزان درهم‌تنیدگی کمتر از آستانه باشد در ناحیه کلاسیکی قرار داریم. در صورت که بین دو آستانه باشیم یک منطقه عبوری است که رفتاری بین کلاسیکی و کوانتومی دارد و منطقه آخر هم برای  $\gamma \geq \gamma_{th2}$  یک منطقه کاملاً کوانتومی می‌باشد [۲۳].

#### ۴-۱۱- الگو فیزیکی معمای زندانیان کیوتریتی بر مبنای الگو کیوبیتی :

در این قسمت یک الگو فیزیکی جدید برای معمای زندانیان کیوتریتی، بر مبنای الگو معمای زندانیان کیوبیتی ارائه داده می‌شود. روشی که به کار گرفته می‌شود به این صورت است که فضای راهبردی مجموعه ماتریس‌های دو پارامتری یونیتاری  $3 \times 3$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

به ازای  $j_z = 1, j_y = 1$  ماتریس دوران دو پارامتری  $\hat{U}(\theta, \varphi)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{U}(\theta, \varphi) = e^{\frac{-ij_z \varphi}{\hbar}} e^{\frac{-ij_y \theta}{\hbar}} e^{\frac{-ij_z \varphi}{\hbar}} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2i\varphi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin(\theta) & e^{2i\varphi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (62-4)$$

با توجه به این که در فرمول بندی کوانتومی در حالت کیوبیتی، حالات  $|C\rangle$  و  $|D\rangle$  با راهبردهای  $\hat{C} \equiv \hat{U}(0) = I$  و  $\hat{D} \equiv \hat{U}(\pi)$  همراه می‌شوند. پس در حالت کیوتریتی هم، هر یک از حالات کوانتومی که با  $|C\rangle$  و  $|D\rangle$  و  $|E\rangle$  نمایش داده می‌شوند با راهبردهای  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  و  $\hat{E}$  به صورت زیر همراه می‌شوند:

$$\hat{C} = \hat{U}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D} = \hat{U}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{E} = \hat{U}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

حالت  $|E\rangle$  با یک دوران دلخواه به اندازه  $\hat{E} \equiv \hat{U}\left(\frac{\pi}{2},0\right)$  همراه می‌کنیم. هر یک از حالت‌های  $|C\rangle$  و

$|D\rangle$  و  $|E\rangle$  به زبان جبر خطی به ترتیب متناظر با بردارهای  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  می‌باشند. پس

حالت کلی یک کیوتریت با عبارت کلی زیر توصیف می‌شود:

$$|\Psi\rangle = \alpha|C\rangle + \beta|D\rangle + \gamma|E\rangle \quad (۶۳-۴)$$

که  $\alpha, \beta, \gamma$  اعداد مختلط دلخواه هستند. با توجه به بقای احتمال تنها شرط موجود روی ضرایب

$\alpha, \beta, \gamma$  به این صورت است که :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

الگو پیشنهادی که نمودار آن در شکل (۴-۲) نمایش داده شده است، در سیستم کیوتریتی نیز به کار گرفته می‌شود. در این سیستم یکی از ۹ حالت ورودی، وارد گیت درهم‌تنیده  $\hat{J}$  می‌شود. عمل‌های راهبردی  $s_A$  و  $s_B$  برای آلیس و باب، که متناظر با عملگرهای یونیتاری  $\hat{U}_A$  و  $\hat{U}_B$  می‌باشند، هر کدام روی کیوتریت مربوط به خودش اثر می‌گذارند و نتیجه وارد گیت درهم‌ناتنیده  $\hat{J}^\dagger$  می‌شود.  $\hat{J}, \hat{J}^\dagger$  عملگرهای یونیتاری مشابه با عملگرهای به کار گرفته شده در معمای زندانیان کیوبیتی می‌باشند با این تفاوت که در فضای ۳ بُعدی عمل می‌کنند. این عملگر در سیستم کیوتریتی به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{J} = \exp\left(\frac{i\gamma\hat{D} \otimes \hat{D}}{2}\right) = I \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i(\hat{D} \otimes \hat{D}) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\hat{D} \otimes \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نهایت پاداش‌های چشمداشتی آلیس و باب در یک سیستم کیوتریتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\$ _A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD} + kP_{CE} + mP_{EC} + nP_{DE} + gP_{ED} + fP_{EE} \quad (۶۴-۴)$$

$$\$ _B = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{CD} + sP_{DC} + kP_{EC} + mP_{CE} + nP_{ED} + gP_{DE} + fP_{EE} \quad (۶۵-۴)$$

که  $P_{\sigma\sigma'}$  همان جمله احتمالی در حالت کیوبیتی است با این تفاوت که تمام حالت‌ها در اینجا در فضای سه بُعدی می‌باشند. پس همان‌طور که مشاهده می‌شود برای محاسبه پاداش چشمداشتی آلیس و باب در حالت کیوتزیتی علاوه بر جملات احتمالی در حالت کیوبیتی یک سری جملات احتمالی دیگر با ضرائب جدید نیز داریم. پس پاداش آلیس و باب با مجموعه راهبرد تک پارامتری به صورت زیر محاسبه می‌شود. محاسبات در پیوست ۱ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \$ _A(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = & r \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + \frac{p}{4} \left| \sin(\theta_A) \sin(\theta_B) \right|^2 + \frac{t}{2} \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\theta_B) \right|^2 \\ & + \frac{s}{2} \left| \sin(\theta_A) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + k \left| \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + m \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2 + \frac{n}{2} \left| \sin(\theta_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2 + \\ & \frac{g}{2} \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \right|^2 + f \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (۶۶-۴)$$

هر یک از ضرائب  $r, s, m, t, k, p, f, n, g$  به گونه‌ای تعیین می‌شوند که پاداش آلیس (رابطه فوق) با مطلوبیت (یعنی هر یک از ضرائب  $r, s, m, t, k, p, f, n, g$ ) جمله احتمالی متناظر با راهبردهای انتخابی آلیس و باب برابر باشد. به عنوان مثال اگر آلیس و باب راهبرد  $\hat{C}, \hat{C}$  را انتخاب می‌کنند، پاداش آلیس برابر با مطلوبیت جمله احتمالی  $P_{CC}$  است. یعنی در این حالت پاداش آلیس باید برابر با  $r$  شود. پس در نهایت هر یک از مطلوبیت‌ها در حالت کیوتزیتی به صورت زیر محاسبه می‌شوند. محاسبات در پیوست ۲ می‌باشد.

$$r = 3, \quad s = m = 9, \quad t = k = 6, \quad p = f = 4.6, \quad n = 5.3, \quad g = 5.2$$

جدول پاداش چشمداشتی آلیس و باب در حالت کیوتریتی با مجموعه راهبردهای تک پارامتری به صورت زیر است.

جدول (۴-۴) پاداش آلیس و باب در حالت کیوتریتی که اعداد اول در هر یک از خانه‌ها به پاداش آلیس و اعداد دوم به پاداش باب مربوط می‌شوند. راهبردهای عمودی بیانگر راهبردهای آلیس و راهبردهای افقی بیانگر راهبردهای باب می‌باشند.

باب \ آلیس	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$
$\hat{C}$	۳ و ۳	۹ و ۶	۶ و ۶/۷۵
$\hat{D}$	۶ و ۹	۴/۶ و ۴/۶	۵/۳ و ۶/۰۵
$\hat{E}$	۹ و ۷/۵	۵/۲ و ۴/۵	۴/۶ و ۴/۶

با محاسبه پاداش‌های آلیس و باب مشاهده می‌شود که در حالت کیوتریتی مانند حالت کیوبیتی بازی متقارن نمی‌باشد. مقدار هر یک از پاداش‌ها نسبت به حالت کیوبیتی افزایش یافته، تعادل نش و بهینه پارتو تغییر کرده‌اند. تعادل نش مانند حالت کیوبیتی یکتا نیست. دو تعادل  $(\hat{E}, \hat{C})$  و  $(\hat{C}, \hat{E})$  وجود دارد. حال اگر یک حالت کلی‌تر یعنی مجموعه راهبردهای دو پارامتری در نظر گرفته شود. در این صورت پاداش آلیس به صورت زیر می‌شود. محاسبات در پیوست ۳ می‌باشد.

$$\$_A(\hat{U}(\theta_A, \varphi_A), \hat{U}(\theta_B, \varphi_B)) = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD} + kP_{CE} + mP_{EC} + nP_{DE} + gP_{ED} + fP_{EE}$$

$$\begin{aligned}
S_A(\hat{U}(\theta_A, \varphi_A), \hat{U}(\theta_B, \varphi_B)) = & 3 \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + 2\varphi_A) \right|^2 + \\
& \frac{9}{2} \left| \sin(\theta_A) \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\varphi_A) + \sin(\theta_A) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 + \\
& \frac{6}{2} \left| \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B + 2\varphi_A) + \sin(\theta_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B) \right|^2 + \\
& \frac{4.6}{4} \left| \sin(\theta_B) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_B + \varphi_A) - \sin(\theta_B) \sin^2(\theta_A) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 + \\
& 9 \left| -\cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_B) + 2 \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(2\varphi_A) \right|^2 + \\
& 6 \left| \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) - \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_A) \right|^2 + \\
& \frac{5.3}{2} \left| \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B + 2\varphi_A) + \sin(\varphi_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) \right|^2 + \\
& \frac{5.2}{2} \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_A) + \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \sin(2\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 + \\
& 4.6 \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \right|^2
\end{aligned}$$

(۶۷-۴)

در مجموعه راهبردهای دو پارامتری، راهبرد کوانتومی  $\hat{Q}$  به صورت زیر می‌شود.

$$\hat{Q} = \hat{U}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

جدول پاداش چشمداشتی آلیس و باب در حالت کیوتزیتی هنگامی که راهبرد کوانتومی  $\hat{Q}$  ظاهر

می‌شود به صورت زیر است:

جدول (۴-۵) پاداش چشمداشتی آلیس و باب در حالت کیوتربیتی، اعداد اول پاداش آلیس، اعداد دوم پاداش باب می‌باشند. راهبردهای افقی استراتژی‌های باب و راهبردهای عمودی راهبرد آلیس می‌باشند.

باب \ آلیس	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$	$\hat{Q}$
$\hat{C}$	۳ و ۳	۹ و ۶	۶ و ۶/۷۵	۷/۶ و ۷/۶
$\hat{D}$	۶ و ۹	۴/۶ و ۴/۶	۵/۳ و ۶/۰۵	۰ و ۰
$\hat{E}$	۹ و ۷/۵	۵/۲ و ۴/۵	۴/۶ و ۴/۶	۱۰/۹ و ۷/۹
$\hat{Q}$	۳ و ۳	۳۶ و ۲۴	۱۳/۹ و ۱۲/۴	۳ و ۳

پس با ظاهر شدن راهبرد کوانتومی  $\hat{Q}$  راهبردهای تعادلی قبلی از بین می‌روند و راهبردهای تعادلی جدید مانند  $\hat{Q} \otimes \hat{D}$  ظاهر می‌شود که این راهبرد دارای خاصیت تعادل نش می‌باشد. پس به طور کلی در حالت کیوتربیتی اکثر پاداش‌ها در مقایسه با حالت کیوبیتی افزایش یافته است و در اینجا دیگر پاداش دو بازیکن با به کار گرفتن راهبردهای کوانتومی  $\hat{Q} \otimes \hat{Q}$  منجر به بهترین راه حل برای هر دو بازیکن نمی‌شود و با انحراف یک طرفه از این راهبرد می‌توان پاداش بازیکنان را افزایش داد. در یک سیستم کیوتربیتی روابطی مانند زیر برقرار نمی‌باشند:

$$\$_B(\hat{Q}, \hat{U}_B) \leq \$_B(\hat{Q}, \hat{Q}) \quad (۶۸-۴)$$

$$\$_A(\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{Q}) \leq 3 \quad (۶۹-۴)$$

مقادیر هر یک از این روابط در یک سیستم کیوتربیتی به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \$_A(\hat{U}(\theta, \varphi), \hat{Q}) = & 3 \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\pi + 2\varphi_A) \right|^2 + \frac{9}{2} \left| \sin(\theta_A) \cos(\pi + \varphi_A) \right|^2 + \\ & \frac{5.2}{2} \left| \sin(\theta_A) \sin(\pi + \varphi_A) \right|^2 + 4.6 \left| -\cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_A\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (۷۰-۴)$$



$$\begin{aligned} \$_B(\hat{Q}, \hat{U}_B) = & 3 \left| \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(\pi + 2\varphi_B) \right|^2 + \frac{9}{2} \left| \cos(\pi + \varphi_B) \sin(\theta_B) \right|^2 \\ & + 24 \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + 4.6 \left| -\cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_B\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (71-4)$$

می‌شوند. تاکنون بازی‌های عادلانه در حالت کیوتیریتی بررسی شده است. حال بازی‌های ناعادلانه

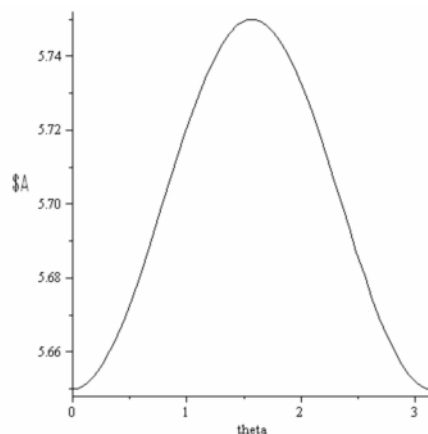
مورد بررسی قرار می‌گیرد، حرکت جادویی  $\hat{M}$  در حالت کیوتیریتی به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{M} = \hat{U}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (72-4)$$

به ازای  $\theta \in [0, \pi]$  پاداش آلیس زمانی که با راهبرد  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  و  $\hat{M}$  بازی می‌کند به صورت زیر

محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \$_A[\hat{M}, \hat{U}(\theta, 0)] = & \frac{3}{4} \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \frac{9}{8} |\sin(\theta)|^2 + 3 \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 \\ & + \frac{4.6}{4} |\sin(\theta)|^2 + \frac{6}{4} \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \frac{9}{4} \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \\ & \frac{5.3}{2} \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \frac{5.2}{8} |\sin(\theta)|^2 + \frac{4.6}{4} \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (73-4)$$

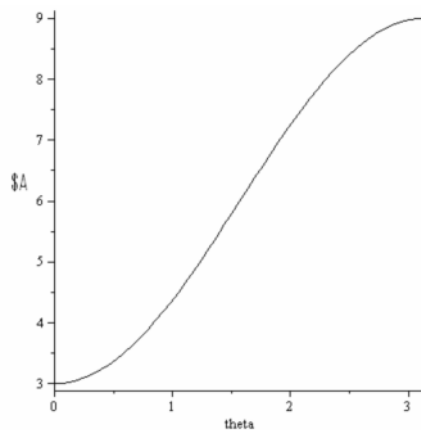


شکل (۴-۶) نمودار پاداش آلیس در صورتی که راهبرد آلیس  $\hat{M}$ ، و راهبرد باب  $\hat{U}(\theta)$  باشد.

همان طور که مشاهده می‌شود در حالت کیوتربیتی حداقل پاداش برای آلیس از  $r = 3$  در حالت کیوبیتی افزایش یافته و تقریباً از  $5/65$  شروع می‌شود و پیک نمودار هم از پیک نمودار حالت کیوبیتی بیشتر شده است.

شکل زیر پاداش آلیس در حالت کیوتربیتی هنگامی که آلیس با راهبرد  $\hat{C}$  و باب با راهبرد  $\hat{U}(\theta)$  بازی می‌کند را نشان می‌دهد.

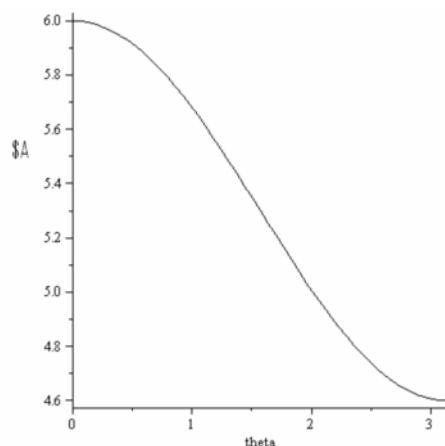
$$S_A(\hat{C}, \hat{U}(\theta)) = 3 \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \frac{6}{2} |\sin(\theta)|^2 + 9 \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 \quad (74-4)$$



شکل (74-4) نمودار پاداش آلیس در صورتی که راهبرد آلیس  $\hat{C}$  و راهبرد باب  $\hat{U}(\theta)$  باشد.

شکل زیر پاداش آلیس را هنگامی که آلیس با راهبرد  $\hat{D}$  و باب با راهبرد  $\hat{U}(\theta)$  بازی می‌کند را نشان می‌دهد.

$$S_A(\hat{D}, \hat{U}(\theta)) = 6 \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \frac{5.3}{2} |\sin(\theta)|^2 + 4.6 \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 \quad (75-4)$$



شکل (۸-۴) نمودار پاداش آلیس در صورتی که راهبرد آلیس  $\hat{D}$  و راهبرد باب  $\hat{U}(\theta)$  باشد

مقایسه سه نمودار (۶-۴) و (۷-۴) و (۸-۴) نشان می‌دهد که در حالت کیوتریتی هم، زمانی که آلیس با راهبرد کوانتومی  $\hat{M}$  بازی می‌کند صرف نظر از این که باب با چه راهبرد بازی می‌کند یک حداقل پاداش به دست می‌آورد که این حداقل پاداش از حداقل پاداش بازیکنان در حالت کیوبیتی بیشتر می‌باشد. پس با در نظر گرفتن یک سیستم کیوتریتی و سه بُعدی کردن فضای راهبردی، می‌توان پاداش‌هایی بهتر از پاداش‌ها در معمای زندانیان کیوبیتی به دست آورد و همچنین حتی شاید بتوان با تغییر زوایای  $\theta$  و  $\varphi$  راهبردهای کوانتومی جدیدی پیدا کرد که منجر به پاداش‌های مطلوب‌تر برای هر یک از بازیکنان شود. بنابراین در آینده می‌توان به بررسی کاربردهای بازی معمای زندانیان در محاسبات کوانتومی پرداخت و از نتایج به دست آمده در محاسبات کوانتومی در حالت کیوتریتی استفاده کرد.

# پیوست

## پیوست ۱:

محاسبه پاداش آلیس در حالت کیوتریتی زمانی که آلیس و باب با راهبرد  $U(\theta_A)$  و  $U(\theta_B)$  بازی می‌کنند.

$$S_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD} + kP_{CE} + mP_{EC} + nP_{DE} + gP_{ED} + fP_{EE}$$

$$P_{\sigma\sigma'} = \left| \langle \sigma\sigma' | \Psi_f \rangle \right|^2$$

$$|\Psi_f\rangle = J^\dagger (U(\theta_A) \otimes U(\theta_B)) J |CC\rangle$$

$$j_z = 1 \quad j_y = 1$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2i\varphi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin(\theta) & e^{2i\varphi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$U(\theta, \varphi) = e^{\frac{-ij_z\varphi}{\hbar}} e^{\frac{-ij_y\theta}{\hbar}} e^{\frac{-ij_z\varphi}{\hbar}} =$$

$$\varphi_A = \varphi_B = 0$$

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$|D\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |C\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |E\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|CC\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|DD\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|EE\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|CD\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|DC\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|DE\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|ED\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|EC\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|CE\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C} = \hat{U}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{E} = \hat{U}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D} = \hat{U}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \exp\left(\frac{i\gamma\hat{D} \otimes \hat{D}}{2}\right) = I \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i(\hat{D} \otimes \hat{D}) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{D} \otimes \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\hat{J}|CC\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = J^\dagger(U(\theta_A) \otimes U(\theta_B))J|CC\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos^2(\frac{\theta_A}{2}) \cos^2(\frac{\theta_B}{2}) \\ \sqrt{2} \sin(\theta_A) \cos^2(\frac{\theta_B}{2}) \\ 2 \sin^2(\frac{\theta_A}{2}) \cos^2(\frac{\theta_B}{2}) \\ \sqrt{2} \cos^2(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\theta_B) \\ \sin(\theta_A) \sin(\theta_B) \\ \sqrt{2} \sin(\theta_B) \sin^2(\frac{\theta_A}{2}) \\ 2 \sin^2(\frac{\theta_B}{2}) \cos^2(\frac{\theta_A}{2}) \\ \sqrt{2} \sin^2(\frac{\theta_B}{2}) \sin(\theta_A) \\ 2 \sin^2(\frac{\theta_B}{2}) \sin^2(\frac{\theta_A}{2}) \end{pmatrix}$$

$$P_{CC} = |\langle CC | \Psi_f \rangle|^2 = \left| \cos^2(\frac{\theta_A}{2}) \cos^2(\frac{\theta_B}{2}) \right|^2$$

$$P_{DC} = |\langle DC | \Psi_f \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \cos^2(\frac{\theta_A}{2}) \sin(\theta_B) \right|^2$$

$$P_{CD} = |\langle CD | \Psi_f \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \sin(\theta_A) \cos^2(\frac{\theta_B}{2}) \right|^2$$

$$P_{DD} = \frac{1}{4} |\langle DD | \Psi_f \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left| \sin(\theta_A) \sin(\theta_B) \right|^2$$

$$P_{DE} = \frac{1}{2} \left| \sin(\theta_B) \sin^2(\frac{\theta_A}{2}) \right|^2$$

$$P_{ED} = \frac{1}{2} \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \right|^2$$

$$P_{EE} = \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2$$

$$P_{EC} = \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2$$

$$P_{CE} = \left| \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A(\hat{U}(\theta_A), \hat{U}(\theta_B)) = & r \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + \frac{p}{4} \left| \sin(\theta_A) \sin(\theta_B) \right|^2 + \frac{t}{2} \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\theta_B) \right|^2 \\ & + \frac{s}{2} \left| \sin(\theta_A) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + k \left| \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right|^2 + m \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2 + \frac{n}{2} \left| \sin(\theta_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2 + \\ & \frac{g}{2} \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \right|^2 + f \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

## پیوست ۲:

### محاسبه مقدار مطلوبیت‌ها در حالت کیوتریتی:

اگر مقدار پاداش آلیس را به ازای راهبردهای متفاوت آلیس و باب حساب کنیم و مقدار هر یک از این پاداش‌ها را برابر با مطلوبیت، بازیکنان در هر یک از حالت‌های متناظر با راهبردهای انتخابی قرار دهیم به روابطی مانند زیر می‌رسیم که با قرار دادن مقدار  $r = 3$  به دلخواه می‌توان بقیه مطلوبیت‌ها را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\$_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD} + kP_{CE} + mP_{EC} + nP_{DE} + gP_{ED} + fP_{EE}$$

راهبرد های آلیس و باب به ترتیب	مقدار پاداش‌های آلیس در حالت کیوتریتی
$\hat{C}, \hat{C}$	$\$_A = r$
$\hat{C}, \hat{D}$	$\$_A = m = s$
$\hat{D}, \hat{C}$	$\$_A = k = t$
$\hat{D}, \hat{D}$	$\$_A = f = p$
$\hat{C}, \hat{E}$	$\$_A = \frac{r}{4} + \frac{t}{2} + \frac{s}{4} = k = t$
$\hat{E}, \hat{C}$	$\$_A = \frac{r}{4} + \frac{t}{2} + \frac{s}{4} = m = s$
$\hat{D}, \hat{E}$	$\$_A = \frac{p}{4} + \frac{n}{2} + \frac{t}{4} = n$
$\hat{E}, \hat{D}$	$\$_A = \frac{p}{4} + \frac{n}{2} + \frac{t}{4} = g$
$\hat{E}, \hat{E}$	$\$_A = \frac{r}{16} + \frac{p}{16} + \frac{s}{8} + \frac{t}{8} + \frac{s}{16} + \frac{t}{16} + \frac{s}{16} + \frac{t}{16} + \frac{n}{8} + \frac{g}{8} = p = f$

با حل روابط بالا به صورت دستگاه معادلات به صورت زیر مقدار هر یک از مطلوبیت‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 3 \\ k = t \\ p = f \\ s - t = 3 \\ 2t - s = 3 \\ 2n - p = 6 \\ s = m \\ 4p - 7g = 18 \\ 2n + 2g + 15p = 48 \end{array} \right.$$

$$r = 3, s = m = 9, t = k = 6, p = f = 4.6, n = 5.3, g = 5.2$$

### پیوست ۳:

محاسبه پاداش چشمداشتی آلیس زمانی که آلیس راهبرد  $\hat{U}(\theta_A, \varphi_A)$  و باب راهبرد  $\hat{U}(\theta_B, \varphi_B)$  را به کار می‌گیرد به صورت زیر است:

$$S_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD} + kP_{CE} + mP_{EC} + nP_{DE} + gP_{ED} + fP_{EE}$$

$$|\Psi_f\rangle = J^\dagger (U(\theta_A, \varphi_A) \otimes U(\theta_B, \varphi_B)) J |CC\rangle$$

ماتریس دوران در حالت سه بُعدی به صورت زیر است:

$$U(\theta, \varphi) = e^{\frac{-ij_z\varphi}{\hbar}} e^{\frac{-ij_y\theta}{\hbar}} e^{\frac{-ij_z\varphi}{\hbar}} = \begin{bmatrix} e^{-2i\varphi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin(\theta) & e^{2i\varphi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + 2\varphi_A) \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\theta_A) \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\varphi_A) + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\theta_A) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + \varphi_A) \\ 2 \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) - 2 \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_A) \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B + 2\varphi_A) + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\theta_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B) \\ \sin(\theta_B) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_B + \varphi_A) - \sin(\theta_B) \sin(\theta_A) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B + 2\varphi_A) + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) \\ - 2 \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_B) + 2 \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(2\varphi_A) \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_A) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \sin(2\varphi_B + \varphi_A) \\ 2 \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \end{pmatrix}$$

$$P_{CC} = \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + 2\varphi_A) \right|^2$$

$$P_{CD} = \frac{1}{2} \left| \sin(\theta_A) \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\varphi_A) + \sin(\theta_A) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + \varphi_A) \right|^2$$

$$P_{DC} = \frac{1}{2} \left| \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B + 2\varphi_A) + \sin(\theta_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B) \right|^2$$

$$P_{DD} = \frac{1}{4} \left| \sin(\theta_B) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_B + \varphi_A) - \sin(\theta_B) \sin(\theta_A) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \right|^2$$

$$P_{EC} = \left| -\cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_B) + \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(2\varphi_A) \right|^2$$

$$P_{CE} = \left| \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) - \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_A) \right|^2$$

$$P_{DE} = \frac{1}{2} \left| \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B + 2\varphi_A) + \sin(\varphi_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) \right|^2$$

$$\begin{aligned}
P_{ED} &= \frac{1}{2} \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_A) + \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \sin(2\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 \\
P_{EE} &= \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 \\
S_A(U(\theta_A, \varphi_A), U(\theta_B, \varphi_B)) &= 3 \left| \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + 2\varphi_A) \right|^2 + \\
&\frac{9}{2} \left| \sin(\theta_A) \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\varphi_A) + \sin(\theta_A) \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos(2\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 + \\
&\frac{6}{2} \left| \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B + 2\varphi_A) + \sin(\theta_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B) \right|^2 + \\
&\frac{4.6}{4} \left| \sin(\theta_B) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_B + \varphi_A) - \sin(\theta_B) \sin^2(\theta_A) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 + \\
&9 \left| -\cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_B) + 2 \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(2\varphi_A) \right|^2 + \\
&6 \left| \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) - \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(2\varphi_A) \right|^2 + \\
&\frac{5.3}{2} \left| \sin(\theta_B) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B + 2\varphi_A) + \sin(\varphi_B) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos(\varphi_B) \right|^2 + \\
&\frac{5.2}{2} \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \cos(\varphi_A) + \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin(\theta_A) \sin(2\varphi_B + \varphi_A) \right|^2 + \\
&4.6 \left| \sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin(\varphi_B + \varphi_A) \right|^2
\end{aligned}$$

- [1] John Perskill, (1988), "**Lecture notes for physics 229:Quantum Information and Computation**", California Institute of Technology.
- [2] J.J.Sakurai,(revised edition 1999), "**Modern quantum mechanics**", Addison-Wesley,USA.
- [3] [www.http//karimipour.com](http://karimipour.com).
- [4] [www.http//wikipedia-the free encyclopedia.com](http://wikipedia-the free encyclopedia.com).
- [5] Ashok Chatterjee,(2003), "Introduction to Quantum Computation", **Saha Institute of Nuclear Physics, Kolkata,India**,e-print:quant-ph/0312111.
- [6] M. Nielsen, I. Chuang, (2000), "**Quantum Computation and Quantum Information**",Cambridge, United Kingdom.
- [7] L.grover,(1996), "Afast quantum mechanical algorithm for database search", **In Proceedings of 28<sup>th</sup> Annual ACM Symposium on Theory of Computing**, pp 212-219.
- [8] J.Orlin Grabbe, (2005), "An Introduction to Quantum Game Theory" **arxiv: quant-ph/0506219 V1 27 Jun 2005**
- [9] مجیدی ع،(۱۳۸۸)، پایان نامه ارشد: "جستجوی کوانتومی"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [10] David Deutsch,(1999), "Quantum Theory of Probability and Decision " Proc. R.Soc.Lond. A, **arxiv: quant-ph/9906015**.
- [11] H. Barnum, C. M. Caves, J.Finkelstein, C.A.Fuch, R.Schack , (1999), "Quantum Probability from Decision Theory?",**arxiv: quanta-ph/9907024V1**.



- [12] J. von Neumann and O. Morgenstern,( 1947), “**Theory of Games and Economic Behavior**”, 2 nd Ed,Princeton University Press, Princeton.
- [13] Michael D. Resnik,(1987),“**CHOICES AN INTRODUCTION TO DECISION THEORY**” University of Minnesota Press Minnea Polis London.
- [14] Anthony Kelly, (2003), “**Decision Making Using Game Theory**” Cabridge University Press.
- [15] Herman Chernoff & Lincolne Moses,(1959), “ **Elementary Decision Theory**” Dover Publications, Inc Newyork.
- [16] D. A. Meye(1999),“Quantum Strategy” ,**Phys. Rev. Lett.** 82, 1052.
- [17] Eisert, J., Wilkens, M. And Lewenstein, M.(1999). “Quantum Games and Quantum Strategies”, **physical Review Letters** 83 3077.
- [18] Jens Eisert and Martin Wilkens,(2000),“Quantum Games”,Institut fur Phzsik, Universitat Potsdam, 14469 Potsdam,Germany. **arxiv:quant-ph/000407**.
- [19] Edward W. Piotrowski,(2002),“An invitation to Quantum Game Theory”, Institute of Physics, University of Silesia, Uniwersytecka 4, P1 4007 Katowice, Polan **arxiv:quant-ph/0211191**.
- [20] S. J. van Enk and R.Pik,(2002),“Classical rules in quantum games” **Phys.Rev.A** 66,024306.
- [21] David A.Meyer,“Quantum Game and Quantum Algorithms”,2002 **American Mathematical Society**.
- [22] Simon C. Benjamin and Patrick M. Hayden, (2000), Coment on “ Quantum Games and Quantum Strategy” **arxiv: quant-ph/0003036V1**.

[23] Du, J. et al ,(2002), “Experimental realization of quantum games on a quantum computer” **Physical Review Letters** 88, 137902 .



Shahrood University of Technology

Faculty of physics

**MSc thesis**

# **Decision Theory and Quantum Probability**

By:

**Elham Kharatzadeh**

Supervisors:

**Dr.H. Movahhedian**

February 2010

