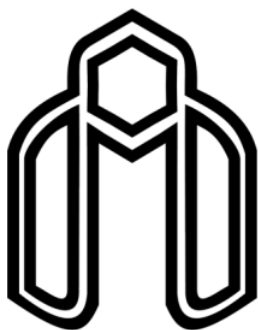


بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رساله دکترای فیزیک هسته‌ای

مطالعه سیستم‌های مقید هسته‌ای در نمایش امواج پاره‌ای به روش یاکوبوفسکی

نگارنده: اسکندر احمدی پویا

استاد راهنما

دکتر علی اکبر رجبی

رساله ارائه شده برای دریافت درجه دکترای فیزیک

گرایش هسته‌ای

تیر ۱۳۹۶

صحنه مربوط به نمره و صورت جلسه

تقدیم به

...

تنهایی‌های بی صدایِ مادرم

...

خستگی‌های بی انتهایِ پدرم

...

## قدردانی و سپاس‌گذاری

برای هر دانشجوی موفق ورود به مقطع تحصیلات تکمیلی این فرصت را فراهم می‌آورد تا با انسان‌های بسیار زیادی، با فرهنگ‌ها و شخصیت‌های متفاوت و منحصر به فرد، آشنا شده و همکاری داشته باشد. بدون شک ورود به مقطع دکتری برای من، ورود به یکی از بهترین دوران زندگی‌ام بوده است. ناب‌ترین ره‌آورد این دوره برای من شانس کار کردن با بهترین معلم زندگی‌ام بوده است. جناب پروفیسور علی اکبر رجبی نه تنها یک همکار خوب در دوران تحصیل من، بلکه یک اتفاق ناب در دوران زندگی‌ام، به عنوان یک دوست و همراه بوده‌اند. زندگی در شاهرود و در دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود بخشی غیر قابل توصیف از دوران زندگی من بوده است. تجربه‌های مختلف و حس‌های ناب و اصیلی که هیچ‌گاه فراموش نمی‌شوند. نمی‌دانم از کجا شروع کنم!

تصویر شب‌های خاص و حساسی که در دانشگاه و خوابگاه به صبح رسیدند، هنوز در ذهنم بیدار است! مسیرهای اشتباه فرمول‌بندی و ارزیابی معادلات، در کنار برنامه‌های محاسباتی‌ای که گاه تنها خروجی‌شان پیام خطا بود و دکتر رجبی به من آموخت اندیشیدن را، صبور بودن را، که صبورتر باشم و دوباره دقیق‌تر و با دقت و حوصله بیشتر ادامه دهم و برنامه‌هایی که اکثراً به نقطه توقف می‌رسیدند و تنها راه چاره‌شان جدیت و سخت‌کوشی بیش از پیش من بود. پروفیسور رجبی طی سال‌های تحصیل به من آموخت که خوب و امیدوار فکر کنم و در مقابل مشکلات مختلف، حتی در ظاهر حل‌نشده؛ صبور و پخته رفتار کنم.

نگارش مقالات و انجام مکاتبات مربوط به آن‌ها برایم مهارتی ارزنده و تجربه‌ای ارزشمند بوده و خواهد بود که تنها با اعتماد و حمایت معنوی پروفیسور رجبی امکان پذیر شده است. در همین جا نهایت سپاس خود را از توصیه‌های فکری داوران و سردبیران مجلات مختلف، به‌خصوص مجله‌های *Act. Eur. Phys. J. Plus*، *Phys. Pol. B* و *Int. J. Mod. Phys. E* ابراز می‌دارم. نهایت دقت و سرعت آن‌ها در مکاتبات و پاسخ‌گویی‌ها به بحث‌ها و توصیه‌ها، نشان از تعهد علمی انسان‌های آزاد اندیش دارد.

خاطرات خوش سفرهای گوناگون و تجربه حضور در کنفرانس‌ها و کارگاه‌های مختلف ملی و بین‌المللی، به‌خصوص دعوت به عنوان سخنران در کنفرانس سالانه فیزیک سال ۹۴ در دانشگاه فردوسی مشهد، کنفرانس سالانه فیزیک سال ۹۵ در دانشگاه شیراز، کنفرانس بهار فیزیک سال ۹۵ و ۹۶ در پژوهشکده دانش‌های بنیادی، کارگاه FAIR Days در دانشگاه تهران در سال ۹۶ و همچنین پذیرش کتبی مقالات در کنفرانس محاسباتی فیزیک-ریاضی ایران سال ۹۵ در دانشگاه صنعتی قم، بدون شک مدیون بزرگ نظری‌ها و کمک‌های فراوان پروفیسور رجبی بوده است. بر خود لازم می‌دانم که از برگزارکنندگان این کنفرانس‌ها و کارگاه‌ها به خاطر

حمایت‌های مالی‌شان سپاس‌گذاری نمایم. بهترین دستاورد این کنفرانس‌ها و ره‌آوردها برایم در کنار آشنایی و تبادل نظر با آدم‌های بسیار زیادی از نقاط مختلف دنیا، تجربه دیدن فرهنگ‌ها، آداب و رسوم اتباع مختلف داخلی و خارجی بوده است و دانستن این نکته که بُرد نیروی انسانیت بسیار فراتر از مرزهایی است که سیاست مداران به دور انسان‌ها کشیده‌اند.

جناب پروفیسور علی اکبر رجبی به عنوان یک استاد ایده‌آل، همیشه و در همه حال برای بحث‌های مختلف مرتبط با زندگی یک جوان، از زندگی اجتماعی گرفته تا زندگی علمی، در دسترس و آماده بوده‌اند. هنگامی که من فرمول‌بندی سیستم‌های مقید هسته‌ای را روی سیستم‌های بالاتر از سه-نوکلئونی به صورت جدی آغاز نمودم، تنها انگیزه من برای ادامه کار، توجه و اعتمادی بود که دکتر رجبی به من هدیه می‌داد و ادامه کار را با تمامی مشکلات کوچک و بزرگش هموارتر می‌نمود.

پروفیسور رجبی عزیز؛

به خاطر همه اعتمادی که به من داشتید، همه چیزهایی که به من آموختید، همه لحظات نابی که به من هدیه دادید و همه آن چه را که در گفتن نمی‌گنجد، صمیمانه و با همه وجودم سپاس‌گذارم و به حکم ادب و احترام دستان-تان را می‌بوسم و به گرمی می‌فشارم. بدون شک دور شدن از دانشکده فیزیک و شهر شاهرود مرا بسیار دل‌تنگ شما خواهد نمود!

سپاس فراوان خود را به هیأت داوران به خاطر خواندن صبورانه این رساله و ارائه نظرات ارزشمندشان در بهبود آن تقدیم می‌دارم. از دکتر مهدی مؤمنی رئیس دانشکده فیزیک، دکتر حسن حسن آبادی دوست داشتنی، دکتر محمدرضا شجاعی عزیز، دکتر حسین توکلی عنبران و دکتر کاظم بی‌تقصیر فدافن مدیرگروه دانشکده فیزیک، به خاطر کمک‌های بی‌شائبه و دلسوزانه‌شان بسیار سپاس‌گذارم. در دوره دکتری روزهای بسیاری به آموختن گذشت. مراتب سپاس خود را از اعضای هیأت علمی دانشکده فیزیک و به طور خاص از اعضای گروه هسته‌ای که به من بسیار آموختند ابراز می‌دارم. دکتر شجاعی با شخصیتی آرام، با زکاوت و متین و درعین حال با شجاعت مثال‌زدنی، در بیشتر اوقات دوستی بسیار صمیمی برای حرف‌های خودمانی بوده‌اند؛ همچنین دکتر توکلی عزیز با قلبی مهربان و دلسوز و با ضمیری امیددهنده، همواره برای من الگوی یک استاد فراموش‌نشده خواهند بود. بی‌شک دل‌تنگ همگی‌شان خواهم شد!

در بین دانشجویان دوره دکتری، مهدی اصلان زاده تنها کسی بود که همیشه برای من، یک دوست واقعی بود و حرف‌هایش به من امید می‌داد. تنها کسی بود که سختی‌های راهم را می‌فهمید و دلداری‌هایش در کنار روحیه شاداب و غیر قابل‌توصیفش، خستگی و ناراحتی مرا ولو به مدت کوتاه به باد فراموشی می‌سپرد. با مهدی حضور در نماز جماعت دانشگاه همواره آرامش خاصی به ما هدیه می‌داد، بعد از آن گشت و قدم زدن شبانه در محیط

زیبای شب های دانشگاه و بحث های علمی که در واقع برای ما تنها و در عین حال بهترین اوقات فراغت محسوب می شد، بهترین تصاویری بودند که تا سال ها در ذهنم خواهند ماند. مهدی اصلان زاده به عنوان یک دوست قدیمی با پیشینه ای از همکاری در دوره کارشناسی ارشد در دانشگاه تهران، کسی بود که به عنوان فرد قابل اعتماد در پاسخ به سوال های بنیادی فیزیک به ویژه حوزه فیزیک هسته ای در دسترس بود. او بسیار باهوش، صبور، پرتلاش و البته مرد لحظه های خاص است. سپاس ویژه خود را از مهدی به خاطر لحظات شادی که با ایشان داشته ام و همچنین چیزهای فراوانی که از او آموختم و لذت برده ام، ابراز می دارم. آروزی قلبی من موفقیت مهدی در انجام کارهای تحقیقاتی ارزشمند و چشم گیر پیش روی اوست.

من چندین سال در دانشگاه صنعتی شاهرود زندگی کرده ام. بدون شک خاطرات این سالها و دوستان و اساتید دوره دکتری برای همیشه در ذهنم جاودانه خواهد ماند. از محمد محمودی، محدثه گلشنیان، سارا پارسایی، نیلوفر ذوقی، بهنام درخشان، حسین شهامت، مهدی قاسمی، مجید ایران پور، هادی ثبتي به خاطر همه لحظات و خاطرات تلخ و شیرینی که در کنارشان، در روزهای دور از خانه داشته ام، بی نهایت سپاس گذارم.

طبیعت زیبای شهر شاهرود، صمیمیت بی پایان مردمان این خطه سر سبز، شب های زیبا و غیر قابل وصف ایام محرم و صفر، و عرض ارادت های خاص و ناب این مردم به ائمه اطهار علیها سلام، هرگز از ذهنم فراموش نخواهد شد. روزهای گرفته و غمگینی که در ایستگاه قطار شاهرود منتظر صدای صوت قطار برای بازگشت به خانه بودم هرگز از گوشم قطع نمی شود. از همه مردمان فهیم، صمیمی و مهمان نواز شهر فوق العاده شاهرود کمال سپاس را ابراز می دارم.

شاید باید زودتر از این ها به این پاراگراف می رسیدم. آخرین واژه های قدردانی را به دو فرشته زیبای زندگی ام تقدیم می کنم. هیچ واژه ای نمی تواند بیانگر احساسات ناب من نسبت به پدر و مادر مهربان و رنج دیده ام باشد و هیچ چیزی در این دنیا نمی تواند زحمات و سختی هایی که آن ها برای موفقیت من به جان خریدند را جبران کند. هیچ چیزی در این دنیا جز لبخند آن ها، برایم شیرین نیست. نگاه و دعای مادرم در زندگی من هر لحظه و هر کجا که باشم همواره جاریست. اولیای عزیزم دستان تان را به رسم فرزندی و نوکری می بوسم. امیدوارم فرزند شایسته و با لیاقتی برای شما باشم، ان شاء الله. برایتان از خداوند یکتای بی همتا آسودگی پس از سال ها رنج و مشقت خواستارم. برادرانم حسین و محسن و خواهرم ندای عزیز، به خاطر همه اذیت ها و اوقات تلخی هام، در مقابل مهربانی هایتان بی نهایت قدردانم، خدا نگه دار همگی تان باشد.

اسکندر احمدی پویا

تیر ماه یک هزار و سی صد و شش خورشیدی

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود

## تعهد نامه

اینجانب اسکندر احمدی پویا دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک گرایش هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله "مطالعه سیستم‌های مقید هسته‌ای در نمایش امواج پاره‌ای به روش یاکوبوفسکی" تحت راهنمایی آقای دکتر علی اکبر رجبی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

### تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.



## چکیده رساله

به منظور مطالعه و بررسی ماهیت برهم‌کنش‌های داخلی حاکم بر سیستم‌های سبک هسته‌ای، و همچنین مطالعه ویژگی‌های ساختاری حالت‌های مقید آنها، در این رساله سیستم‌های مقید هسته‌ای، از هسته‌های بالاتر از سه نوکلئونی تا شش نوکلئونی<sup>۱</sup>، بر اساس روش فدیف-یاکوبوفسکی<sup>۲</sup> در نمایش فضای تکانه خطی و بر اساس تکانه‌های ژاکوبی<sup>۳</sup>، در دو تحلیل، یکی روش امواج پاره‌ای<sup>۴</sup> و دیگری روش دیدگاه سه بُعدی<sup>۵</sup>، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. فرمالیزم حل معادله شرودینگر به روش یاکوبوفسکی، نمایش عملگری مولفه‌های تابع موج، موسوم به عملگر گذار لیمن-شوئینگر<sup>۶</sup> و رسیدن به معادلات جفت شده بر مبنای مولفه‌های مستقل یاکوبوفسکی می‌باشد. چون این تکنیک برای سیستم‌های مقید دو-نوکلئونی و سه-نوکلئونی چه در فضای پیکربندی<sup>۷</sup> و چه در فضای تکانه، برای حالت‌های مقید و پراکندگی<sup>۸</sup>، نتایج جالب توجهی به همراه داشته است، بنابراین یکی از دلایل مناسب انتخاب این تکنیک برای پیاده‌سازی سیستم‌های بالاتر هسته‌ای، یعنی سیستم‌های مقید چهار-، پنج- و به‌خصوص شش-نوکلئونی نیز می‌باشد. در کنار مطالعه برهم‌کنش مدل-های گوناگون هسته‌ای مستقل و وابسته به اسپین روی ساختار هسته‌ها، دلیل اصلی مطالعه سیستم مقید شش-نوکلئونی، انتخاب و ارزیابی ساختار کاربردی و هاله‌ای شکل آن نیز می‌باشد که محوری‌ترین و در عین حال مهم‌ترین دستاورد این پروژه به حساب می‌آید. به طور نمونه هسته هلیوم-۶، کوچکترین هسته هاله‌ای شکل محسوب می‌شود که از دو نوترون با تقید ضعیف در اطراف هسته چهار-نوکلئونی پایدار آلفا تشکیل یافته است. ما در این تحقیقات، سیستم شش-نوکلئونی مقید را به شکل ساختار سه-جسمی موثر با مرکزیت ذره آلفا در نظر گرفته و عبارت "هاله-ساختار موثر"<sup>۹</sup> را روی آن نام گذاری کرده‌ایم. دلیل نام‌گذاری این عبارت، بر هم‌کنش موثر سه-جسمی "آلفا+نوکلئون+نوکلئون" محتمل موجود در این نوع سیستم می‌باشد.

معادلات به دست آمده بر پایه فرمالیزم کارآمد یاکوبوفسکی، برای سیستم‌های سبک چند جسمی<sup>۱۰</sup>، یک سری معادلات جفت شده‌اند که بنابر نمایش‌های انتگرالی و تحلیلی ویژه، نمایش امواج پاره‌ای و نمایش دیدگاه سه بُعدی، آرزنده است که معادله‌ها در فضای تکانه تصویر و ارزیابی شوند، زیرا با تصویر نمودن مولفه‌های یاکوبوفسکی در پایه‌های فضای تکانه، بر اساس تکانه‌های ژاکوبی، به سهولت می‌توان آن‌ها را به شکل معادلات انتگرالی کارآمد برای پیاده‌سازی محاسبات عددی آماده‌سازی نمود.

---

<sup>1</sup> Four- and six-nucleon bound systems

<sup>2</sup> Faddeev-Yakubovsky Method

<sup>3</sup> Jacobi momenta

<sup>4</sup> Partial-waves approach

<sup>5</sup> Three-dimensional scheme

<sup>6</sup> Lippmann-Schwinger

<sup>7</sup> Configuration space

<sup>8</sup> Bound and scattering states

<sup>9</sup> Effective halo structure

<sup>10</sup> Few-body systems

در بخش پیاده‌سازی تکنیک حل عددی، معادلات انتگرالی را با استفاده از تکنیک متعامد سازی لنگسوز<sup>۱۱</sup> و به روش معروف گاوس- لژاندر<sup>۱۲</sup> جهت انتگرال گیری عددی، گسسته سازی می‌کنیم. در همین راستا، معادلات انتگرالی ارزیابی و گسسته‌سازی شده، در یک معادله ویژه مقداری انرژی قرار گرفته و در نهایت، با حل این معادله نسبتاً پرحجم، گام آخر محاسبات به نتایج انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- نوکلئونی (ساختار آلفا)، پنج- نوکلئونی (ساختار آلفا+ نوکلئون) و شش- نوکلئونی (ساختار آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون) منجر خواهند شد.

برای وارد نمودن پایه‌های نمایش سه بُعدی در فضای تکانه در این رساله، می‌بایست سیستم مورد نظر هسته‌ای را مستقل از درجات آزادی اعداد کوانتومی اسپین و ایزواسپین در نظر گرفت، زیرا تجزیه و تحلیل فرمالیزم یاکوبوفسکی و در ادامه پیاده‌سازی محاسبات عددی به‌خصوص روی سیستم مقید شش- نوکلئونی به خاطر وجود سهم برهم‌کنش نوکلئون- های پنجم و ششم، بسیار پیچیده و حجیم خواهد بود که هم نیاز به فضای ذخیره بالای داده‌ها و هم نیاز به پردازش سریع، از ملزومات اصلی این کار می‌باشد. لازم به ذکر است که این سناریو (خاموش نمودن اثرات اسپینی) در اولین تلاش محاسباتی در این پروژه برای حل سیستم‌های هسته‌ای بالاتر در حوزه سیستم‌های سَبک هسته‌ای، یک قرارداد قابل قبول و پذیرفتنی محسوب می‌شود، به همین دلیل است که از نمایش دیدگاه سه بُعدی در کنار نمایش امواج پاره‌ای بهره برده‌ایم. در ادامه پروژه، وارد نمودن درجات آزادی اعداد کوانتومی اسپینی، ایزواسپینی<sup>۱۳</sup> و همچنین استفاده از پتانسیل‌های پدیده شناختی<sup>۱۴</sup> واقعی‌تر، در نمایش امواج پاره‌ای، نتایج محاسبات را به طور چشم‌گیری بهبود بخشیده است و انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار-، پنج- و شش- نوکلئونی به‌دست آمده در این محاسبات را تا حدودی به داده‌های تجربی نزدیک‌تر ساخته است.

نتایج و دستاوردهای بی‌نظیر این تکنیک، با توجه به پتانسیل‌های مدل هسته‌ای به کار گرفته شده در محاسبات (مستقل و وابسته به اسپین)، در مقایسه با نتایج بدست آمده توسط روش‌های معتبر دیگر، مقادیر قابل قبول و ارزنده‌ای به همراه داشته است. به منظور تست درستی محاسبات و بررسی خطاهای محاسباتی در این پروژه، همگرایی ویژه مقدار انرژی پیاده‌سازی شده است و همچنین به طور مستقیم مقادیر چشم‌داشتی هامیلتونی سیستم مقید شش- نوکلئونی نیز محاسبه شده است. تطابق خیلی خوب و قابل انتظار مقدار چشم- داشتی هامیلتونی و ویژه مقدار انرژی که هر دو، دستاوردهای مختلف انرژی بستگی سیستم مقید هسته‌ای محسوب می‌شوند، پایان بخش هر فصل، در پروژه تحقیقاتی و محاسباتی این رساله می‌باشد.

کلمات کلیدی:

سیستم‌های مقید هسته‌ای، نمایش امواج پاره‌ای، روش یاکوبوفسکی.

---

<sup>11</sup> Lanczos Technique

<sup>12</sup> Gauss-Legendre

<sup>13</sup> Spin and isospin quantum numbers

<sup>14</sup> Phenomenological interactions

## فهرست مطالب

فصل اول	انگیزش و پیش‌گفتار
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲-۱ تاریخچه سیستم‌های سبک هسته‌ای.....	۲
۱-۲-۱ سیستم‌های مقید چند نوکلئونی.....	۲
۲-۲-۱ مقایسه تکنیک فدیف-یاکوبوفسکی با سایر تکنیک‌ها.....	۵
۳-۱ سبک‌ترین هسته هاله‌ای شکل.....	۹
۴-۱ نمایش امواج پاره‌ای.....	۱۰
۵-۱ نمایش دیدگاه سه بُعدی.....	۱۱
۶-۱ چارچوب کلی رساله.....	۱۲
فصل دوم	سیستم مقید سه- نوکلئونی
۱-۲ مقدمه.....	۱۶
۲-۲ فرمالیزم فدیف برای سیستم مقید سه- نوکلئونی.....	۱۶
۳-۲ نمایش انتگرالی معادله فدیف در فضای تکانه.....	۱۸
۴-۲ تکنیک محاسبات.....	۲۴
۵-۲ نتایج محاسبات.....	۲۵
فصل سوم	سیستم مقید چهار- نوکلئونی
۱-۳ مقدمه.....	۳۰
۲-۳ معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی.....	۳۱
۳-۳ حالت‌های پایه در فضای تکانه.....	۳۲
۴-۳ نمایش انتگرالی معادلات در فضای تکانه.....	۳۴
۵-۳ تکنیک محاسبات.....	۳۶
۶-۳ نتایج محاسبات.....	۳۷
فصل چهارم	سیستم مقید پنج- نوکلئونی

۴-۱	مقدمه.....	۴۴
۴-۲	فرمالیزم یاکوبوفسکی برای سیستم پنج- نوکلئونی.....	۴۵
۴-۲-۱	پایه سازی ماهیت نوکلئون ها.....	۴۸
۴-۲-۲	حالت های پایه در فضای تکانه.....	۴۹
۴-۳	ساختار موثر "آلفا+ نوکلئون" در چارچوب سیستم پنج- نوکلئونی.....	۵۱
۴-۴	تکنیک محاسبات.....	۵۳
۴-۵	نتایج محاسبات.....	۵۶
۴-۶	تست درستی و دقت محاسبات.....	۵۸
	فصل پنجم	
	سیستم مقید شش- نوکلئونی	
۵-۱	مقدمه.....	۶۱
۵-۲	معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم مقید شش- نوکلئونی.....	۶۳
۵-۲-۱	حالت های پایه در فضای تکانه.....	۶۷
۵-۳	معادلات یاکوبوفسکی در نمایش امواج پاره ای.....	۷۰
۵-۴	معادلات یاکوبوفسکی در نمایش دیدگاه سه بعدی.....	۷۲
۵-۵	تکنیک محاسبات.....	۷۴
۵-۶	نتایج محاسبات.....	۷۶
۵-۶-۱	نتایج محاسبات به روش امواج پاره ای.....	۷۶
۵-۶-۲	نتایج محاسبات به روش دیدگاه سه بعدی.....	۸۰
۵-۶-۳	تست درستی و دقت محاسبات.....	۸۲
	جمع بندی و نگاه به آینده.....	۸۴
	پیوست الف (حل عددی معادله ویژه مقداری به روش گسسته سازی گاوس- لژاندر ).....	۸۶
	پیوست ب (درون یابی به روش اسپلاین های کیویک- هرमित).....	۸۸
	پیوست پ (ریشه ها و توابع وزن نقطه ای چند جمله ای های لژاندر نوع اول).....	۹۰
	مراجع.....	۹۴

## فهرست شکل‌ها

---

- شکل (۱-۱): نمایش ساختار هاله‌ای شکل هسته مقید شش- نوکلئونی  ${}^6\text{He}$  ..... ۱۰
- شکل (۱-۳): نمایش پیکربندی بردارهای تکانه ژاکوبی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی ..... ۳۳
- شکل (۱-۴): نمایش جامع تکانه های ژاکوبی برای چهار مولفه مستقل یک سیستم مقید پنج- نوکلئونی ..... ۴۹
- شکل (۲-۴): نمایش پیکربندی ساختار موثر پنج- نوکلئونی آلفا+ نوکلئون ..... ۵۲
- شکل (۳-۴): انتخاب دستگاه مختصات مناسب برای کاهش درجات آزادی مسئله پنج- نوکلئونی ..... ۵۴
- شکل (۴-۴): رفتار پتانسیل‌های وارد در محاسبات در دو فضای مختصه و تکانه ..... ۵۶
- شکل (۱-۵): نمایش شماتیک پنج نوع پیکربندی یاکوبوفسکی برای سیستم مقید شش- نوکلئونی ..... ۶۵
- شکل (۲-۵): نمایش مولفه‌های یاکوبوفسکی سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون ..... ۶۸

## فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۱): تعداد معادلات امواج پاره‌ای در حالت‌های مختلف اعداد کوانتومی یک سیستم سه-نوکلئونی، برای ترایتون..... ۲۵
- جدول (۲-۲): نتایج انرژی بستگی سیستم مقید سه-نوکلئونی با حضور پتانسیل‌های مستقل از اسپین و بارالکتریکی ارائه شده..... ۲۶
- جدول (۳-۲): نتایج انرژی بستگی سیستم مقید ترایتون با حضور پتانسیل‌های هسته‌ای وابسته به اسپین و بار..... ۲۶
- جدول (۱-۳): ضرایب پتانسیل یاماگوچی. که در آن  $\lambda$  پارامتر برد پتانسیل و  $\beta$  پارامتر قدرت می‌باشد..... ۳۹
- جدول (۲-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار-نوکلئونی با حضور پتانسیل یاماگوچی..... ۴۰
- جدول (۳-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار-نوکلئونی با حضور پتانسیل بیکر..... ۴۰
- جدول (۴-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار-نوکلئونی با حضور پتانسیل ولکاو..... ۴۰
- جدول (۵-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار-نوکلئونی با حضور مالفلیت-تیجن ۵..... ۵۰
- جدول (۱-۴): پارامترهای بُرد و قدرت پتانسیل‌های به کار گرفته شده در محاسبات..... ۵۶
- جدول (۲-۴): انرژی بستگی سیستم مقید پنج-نوکلئونی با حضور پتانسیل ولکاو..... ۵۷
- جدول (۳-۴): انرژی بستگی سیستم مقید پنج-نوکلئونی با حضور مالفلیت-تیجن ۵..... ۵۷
- جدول (۴-۴): مقادیر چشم‌داشتی انرژی کل سیستم مقید پنج-نوکلئونی..... ۵۸
- جدول (۵-۴): تست همگرایی ویژه مقدار انرژی با وجود نقاط شبکه برای تکانه‌های ژاکوبی و همچنین زوایای معرفی شده در بخش تکنیک محاسبات..... ۵۹
- جدول (۱-۵): نمایش تمامی پارامترهای موجود در پتانسیل‌های وابسته به اسپین..... ۷۷
- جدول (۲-۵): انرژی بستگی سیستم مقید چهار-نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل یاماگوچی. داخل پراوتز نتایج سیستم مقید شش-نوکلئونی ارائه شده است..... ۷۷

جدول (۳-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل

گأوسی شکل آفنان- تانگ..... ۷۸

جدول (۴-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل

مالفلیت- تیجن ۳/۱..... ۷۸

جدول (۵-۵): انرژی بستگی سیستم مقید شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل

یاماگوچی..... ۸۰

جدول (۶-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل

گأوسی شکل بیکر..... ۸۰

جدول (۷-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل

گأوسی شکل ولکاو..... ۸۱

جدول (۸-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب  $MeV$  برای پتانسیل یوکاوا

شکل مالفلیت- تیجن ۵..... ۸۱

جدول (۹-۵): همگرایی ویژه مقدار  $\eta$  با توجه به شمارش عدد تکرار تکانه‌ها در کنار زوایای وارد در مسئله..... ۸۲

جدول (۱۰-۵): نتایج مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی سیستم مقید هاله- ساختار شش- نوکلئونی. ترم‌های آزاد  $\langle H_0 \rangle$  و ترم

های وابسته  $\langle V \rangle$  نیز محاسبه شده و اختلاف این دو مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی را به ما می‌دهد. در این محاسبه از

پتانسیل مالفلیت- تیجن ۵ بهره برده‌ایم..... ۸۳

(نتایج و دستاوردهای رساله)  
لیست مقالات برگرفته شده از رساله دکتری

---

الف - مقالات چاپ شده در مجلات علمی \_ پژوهشی ISI.

۱- عنوان مقاله: Solution of the specific model of the five-body problem to investigate the effective alpha-

nucleon interaction in a partial-wave analysis, DOI:10.5506/APhysPolB.48.819

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

نام مجله: Acta Physica Polonica B

تاریخ انتشار: Accepted in 18 May 2017

۲- عنوان مقاله: Yakubovsky Scheme to study the 4- and 5-Nucleon systems in the case of Alpha-state

Structure with Spin-Dependent Nucleon-Nucleon Potentials, DOI: S2405-609X(17)30082-9

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

نام مجله: Karbala International Journal of Modern Science

تاریخ پذیرش: Accepted in 22 Jun 2017

۳- عنوان مقاله: Three-dimensional study of the six-body bound-state for the case of effective three-body

configuration model DOI: 10.1142/S0218301316500725

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

نام مجله: International Journal of Modern Physics E

تاریخ پذیرش: Accepted in 2 August 2016

۴- عنوان مقاله: Solution of the 6N bound system problem for the case of effective halo structure with the

spin/isospin-dependent NN potential models

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

نام مجله: European Physical Journal Plus

تاریخ پذیرش: Accepted in June 2017

ب- مقالات علمی \_ پژوهشی ارائه شده در کنفرانس ها.

۱- عنوان مقاله: مطالعه ساختار هسته ای  $\alpha + n + n$  با حضور بر هم کنش های تفکیک پذیر نوکلئون- نوکلئون. انتشار در مقاله

نامه کنفرانس صفحات: 2316- 2319.

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

عنوان کنفرانس - سال برگزاری: کنفرانس سالانه فیزیک سال ۹۵، ۲ - ۴ شهریور، دانشگاه شیراز.



۲- عنوان مقاله: حل معادله ویژه مقداری سیستم مقید شش جسمی  ${}^6\text{He}$  بر پایه تکانه های ژاکوبی در دیدگاه سه بُعدی. انتشار در مقاله نامه کنفرانس.

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس ریاضی- فیزیک ایران، ۱۳ آبان ۹۵، دانشگاه صنعتی قم.

۳- عنوان مقاله: فرمالیزم حل معادله شرودینگر برای سیستم های مقید پنج- جسمی بر اساس تکنیک یاکوبوفسکی.

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا، علی اکبر رجبی، مهدی اصلان زاده

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس ریاضی- فیزیک ایران، ۱۳ آبان ۹۵، دانشگاه صنعتی قم.

۴- عنوان مقاله: فرمالیزم سیستم های مقید پنج-کواری بر پایه تکنیک یاکوبوفسکی. انتشار در مقاله نامه کنفرانس

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا، علی اکبر رجبی، مهدی اصلان زاده

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس بهاره فیزیک (پژوهشگاه دانش های بنیادی IPM) سال ۹۵، ۲۶ اردیبهشت.

۵- عنوان مقاله: Structural properties of symmetric bound nuclei in the effective 3-body model within the Faddeev Approach

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس ریاضی- فیزیک ایران، ۱۳ آبان ۹۵، دانشگاه صنعتی قم.

۶- عنوان مقاله: محاسبات انرژی تفکیک نوترون لایه والانس هسته های مقید نامتقارن زوج -فرد.

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا، علی اکبر رجبی، مهدی اصلان زاده

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس سالانه فیزیک سال ۹۵، ۲ تا ۴ شهریور.

۷- عنوان مقاله: اثرات ضریب جفت شدگی هسته های متقارن فرد- فرد درحالت شبه اسکالر ( $T=0$ ) و شبه بردار  $T=1$  بر اساس مدل سه جسمی

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس سالانه فیزیک سال ۹۴، ۱۷ تا ۲۰ شهریور، دانشگاه فردوسی مشهد.

۸- عنوان مقاله: محاسبات حالت مقید سیستم شش نوکلئونی در حالت "هاله ساختار موثر" با حضور پتانسیلهای مدل هسته ای وابسته به اسپین ایزواسپین. انتشار در مقاله نامه کنفرانس

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس بهاره فیزیک (پژوهشگاه دانش های بنیادی IPM) سال ۹۶- ۳ و ۴ خرداد.

۹- عنوان مقاله: بررسی کنش موثر آلفا- نوکلئون در چارچوب یک سیستم مقید پنج نوکلئونی به روش یاکوبوفسکی در نمایش امواج پاره ای. انتشار در مقاله نامه کنفرانس

نام نویسندگان: اسکندر احمدی پویا و علی اکبر رجبی

عنوان کنفرانس- سال برگزاری: کنفرانس بهاره فیزیک (پژوهشگاه دانش های بنیادی IPM) سال ۹۶- ۳ و ۴ خرداد



## فصل اول

### انگیزش و پیش‌گفتار

## ۱-۱ مقدمه

از حدود ۷۰ سال پیش تا به امروز یکی از مسائل مهم و اساسی در حوزه فیزیک هسته-ای یافتن پاسخ این سوال بوده است که ساختار داخلی هسته‌ها چگونه و بر چه اساسی از برهم کنش بین نوکلئون‌ها نتیجه می‌شوند. البته امروزه همه می‌دانند که نوکلئون‌ها از کوارک‌ها تشکیل یافته‌اند، اما تاکنون برهم‌کنش‌های هسته‌ای به طور موفقیت آمیزی از برهم‌کنش‌های بنیادی بین کوارک‌ها استنتاج نشده‌اند.

بر خلاف مسأله دو- نوکلئونی که به آسانی و با دقت قابل حل است، هسته‌های با بیش از دو نوکلئون، به دلیل وابستگی قوی برهم کنش‌های هسته‌ای به اثرات اسپینی و همچنین وجود نیروهای دو نوکلئونی<sup>۱۵</sup> و سه نوکلئونی<sup>۱۶</sup> در واقع کار را با پیچیدگی‌های بسیاری همراه می‌سازد. تاکنون گروه‌های بسیاری در نقاط مختلف دنیا سیستم‌های مقید سبک هسته‌ای را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. تکنیک‌های متعددی برای محاسبه انرژی بستگی این سیستم‌ها، با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های دو نوکلئونی و سه نوکلئونی، توسعه یافته‌اند. در ادامه به طور خلاصه در کنار تاریخچه سیستم‌های چند- جسمی هسته‌ای، به سوال‌های بنیادی و اساسی که بیانگر انگیزش و تمایل پژوهشگر از انجام این پروژه است، پرداخته می‌شود.

## ۱-۲ تاریخچه سیستم‌های سبک هسته‌ای

### ۱-۲-۱ سیستم‌های مقید چند نوکلئونی

همان‌طور که مشخص شده است امروزه سیستم‌های برهم‌کنشی دو نوکلئونی به طور کامل و موفقیت آمیزی توصیف شده‌اند. از سال 1935 میلادی که هایدکی یوکاوا<sup>۱۷</sup> نظریه مزونی خود را ارائه داد [1] تا به امروز پیشرفت بسیار چشم‌گیری در توسعه مدل‌های برهم‌کنشی هسته‌ای صورت گرفته است. مطالعه برهم‌کنش‌های هسته‌ای سبک به دو شکل

---

<sup>15</sup> Two-Nucleon Forces

<sup>16</sup> Three-Nucleon Forces

<sup>17</sup> Hideki Yukawa

اکتشاف برهم کنش‌های کایرال<sup>۱۸</sup> در کنار مطالعه برهم کنش‌های پدیده شناختی<sup>۱۹</sup> مرتبط ترین موضوعات در حوزه فیزیک هسته‌ای مدرن به شمار می‌آیند. به طوری که مدل‌های پدیده شناختی واقعی روی برهم کنش‌های دو نوکلئونی، براساس برآزش<sup>۲۰</sup> داده‌های پراکندگی نوکلئون- نوکلئون و همچنین خواص دوترون بنا نهاده شده و گسترش یافته‌اند. در نقطه مقابل در سال‌های اخیر برهم کنش‌های مستقل از مدل برآزشی نیز بر اساس نظریه اختلالی کایرال<sup>۲۱</sup> توسعه یافته‌اند. امروزه از مهم‌ترین مدل‌های پدیده شناختی با بهترین دستاوردها می‌توان به AV18<sup>۲۲</sup>، نیخمگن 1 و 2<sup>۲۳</sup> در فضای پیکربندی<sup>۲۴</sup> و بُن وابسته به بار (CD – Bonn)<sup>۲۵</sup> در فضای تکانه اشاره نمود.

در ادامه توصیف حالت‌های مقید و پراکندگی سه- نوکلئونی با استفاده از مدل‌های برهم کنشی دو نوکلئونی در دستور کار قرار گرفت. نتایج محاسبات با حضور این مدل‌ها نشان داد که اختلاف‌های قابل توجهی با مقادیر تجربی وجود دارد. ریشه این اختلاف‌ها در دو چیز پیش‌بینی شد: اثر نیروی سه جسمی و همچنین اثرات نسبیتی<sup>۲۶</sup>. بر این اساس تلاش برای توسعه تکنیکی آزمایش‌های مختلفی که به‌توانند داده‌های تجربی مفیدی را فراهم نمایند آغاز شد. به موازات آن گروه‌های مختلفی شروع به توسعه مدل‌های گوناگون با استفاده از این داده‌ها نمودند. بر این اساس پس از کشف حالت برانگیخته نوکلئون، ذره دلتا، در آزمایش پراکندگی  $\pi N$  در سال 1950 میلادی، جان ایچی فوجیتا<sup>۲۷</sup> و هیروناری مایازاوا<sup>۲۸</sup> برای اولین

---

18 Chiral

19 Phenomenological

20 Fit

21 Chiral Perturbation Theory

22 Argonne V18

23 Nijmegen I,II

24 Configuration Space

25 Charge Dependent Bonn

26 Relativistic effects

27 Jun-Ichi Fujita

28 Hironari Miyazawa

بار در سال 1957 میلادی یک مدل نیروی سه- نوکلئونی بر اساس تبادل دو پایونی ارائه دادند [2].

سال‌های بعد به تدریج مدل‌های پدیده شناختی کامل‌تری همچون توکسان - ملبرن (TM)<sup>۲۹</sup>، اوربانا 9<sup>۳۰</sup>، ایلینویز<sup>۳۱</sup>، برزیل<sup>۳۲</sup>، تگزاس<sup>۳۳</sup> و روهر<sup>۳۴</sup> توسعه یافت. اخیراً نیز نیروهای نیروهای سه نوکلئونی کایرال نیز گسترش چشم‌گیری یافته‌اند. لازم به ذکر است که کار بر روی نیروهای سه نوکلئونی و چهار نوکلئونی، در کنار نیروهای جفتی، هم به صورت نظری و هم به صورت تجربی در حال انجام است.

بعد از مطالعه روی برهم‌کنش‌های پدیده شناختی دو نوکلئونی و سه نوکلئونی و حضور آن‌ها در محاسبات زمان مطالعه و بررسی حالت‌های مقید و پراکندگی روی سیستم‌های چهار- نوکلئونی و بالاتر بود که مورد توجه قرار گرفت. بررسی این سیستم‌ها با ترکیبات مختلفی از برهم‌کنش‌های جفتی و سه‌تایی صورت گرفته است و باز هم اختلاف نتایج نظری نسبت به داده‌های تجربی حاکی از ناکامل بودن مدل‌های برهم‌کنشی استفاده شده در محاسبات می‌باشد. بنابراین بررسی این سیستم‌ها می‌تواند عرصه بسیار خوبی برای سنجش اعتبار نیروهای دو- نوکلئونی و سه نوکلئونی گوناگونی باشد، چرا که بررسی خواص و ویژگی‌های حالت مقید این سیستم‌ها کمک بسیاری به درک بهتر و توسعه برهم‌کنش‌های هسته‌ای خواهد نمود.

نمونه‌ای از نتایج محاسبات انجام شده با روش GFMC<sup>۳۵</sup> در سال 2000 میلادی با پتانسیل برهم‌کنش جفتی AV18 با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن برهم‌کنش سه‌تایی Illinois - 2 برای ترازهای انرژی هسته‌های سبک تا  $A = 10$  در کنار نتایج تجربی آنها محاسبه شده است. در این محاسبات، اختلاف بین داده‌های تجربی و نتایج نظری برای هسته-

---

<sup>29</sup> Tucson-Melbourne

<sup>30</sup> Urbana IX

<sup>31</sup> Illinois

<sup>32</sup> Brazil

<sup>33</sup> Texas

<sup>34</sup> Ruhr

<sup>35</sup> Green Function Monte Carlo

های سنگین تر بیشتر می‌باشد که پیش‌بینی می‌شود با در نظر گرفتن تصحیحات نسبی و همچنین در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های سه نوکلئونی واقعی‌تر این اختلاف کاهش یابد. در راستای بهبود نتایج محاسبات با روش GFMC در سال 2012 میلادی با جزئیات کامل‌تری تا هسته‌های  $A = 12$  ارائه و باز نمایی شد، که در آن تعدادی ایزوتوپ‌های معمول، به-خصوص ایزوتوپ‌های هسته هلیوم در حالت تراز انرژی و شعاع هسته‌ای، با هم مورد مقایسه قرار گرفته است.

### ۲-۲-۱ مقایسه تکنیک فیدیف-یاکوبوفسکی با سایر تکنیک‌ها

همان‌طور که در بالا اشاره شد، در طی چند سال گذشته روش‌های بسیاری به منظور حل دقیق معادله شرودینگر غیر نسبی برای سیستم‌های مقید چند-نوکلئونی با استفاده از پتانسیل‌های مدل هسته‌ای مختلف توسعه یافته‌اند. در ادامه مطالب به مرور کلی تکنیک‌های مختلف روی سیستم‌های سبک هسته‌ای اشاره شده است.

در حدود سه دهه قبل، آنتونیو کارلوس دِسافونسکا<sup>۳۶</sup> حالت‌های مقید و پراکندگی چهار-نوکلئونی را با استفاده از معادلات فیدیف-یاکوبوفسکی<sup>۳۷</sup>  $(F - Y)$  در فضای تکانه مطالعه کرد [5]. او برای کاهش تعداد متغیرهای مستقل در محاسبات از تقریب‌های تفکیک‌پذیر<sup>۳۸</sup> برای ماتریس‌های گذار وارد شده در فرمالیزم فیدیف-یاکوبوفسکی استفاده کرد. همان‌طور که در مرجع [6] نشان داده شده است تابع موج سیستم سه-نوکلئونی حاصل از تقریب EST<sup>۳۹</sup> در ماتریس گذار دو نوکلئونی قابل مقایسه با تابع موج حاصل از محاسبات، کامل و بدون تقریب است. مشکل کار فونسکا این بود که نیروهای تفکیک‌پذیر تنها در امواج پاره‌ای پائین رفتار مناسبی از خود نشان می‌دهند، لذا تنها حالت‌های بسیار کمی در برهم‌کنش‌های دو

---

<sup>36</sup> Antonio Carlos De Sa Fonseca

<sup>37</sup> Faddeev-Yakubovsky

<sup>38</sup> Separable Approximation

<sup>39</sup> Ernst-Shakin-Thaler

نوکلئونی وارد محاسبات می‌شوند. بنابراین همان طور که انتظار می‌رفت محاسبات کاملاً واقعی هرگز با روش او قابل انجام نبود.

در حدود ۲۵ سال پیش، اولین نتایج حاصل از حل عددی معادلات چهار- نوکلئونی به روش یاکوبوفسکی، بدون استفاده از تقریب تفکیک، ارائه شد. در آن زمان هیرویوکی کامادا<sup>۴۰</sup> و والتر گلوکله<sup>۴۱</sup> محاسباتی با مدل‌های پتانسیلی مناسب در فضای تکانه انجام دادند [3]. یک سال بعد آن‌ها امکان وارد شدن نیروهای سه‌تایی در فرمول‌بندی را فراهم نموده و نتایج اولیه مناسبی از انرژی بستگی ذره آلفا با حضور توأم برهم‌کنش‌های جفتی و سه‌تایی در محاسبات ارائه نمودند [7]. چند سال بعد کار آن‌ها توسط آندریاس نوگا<sup>۴۲</sup> با انجام محاسبات روی سیستم‌های مقید سه- و چهار- نوکلئونی و هایپر- نوکلئونی، با پتانسیل‌های مدل واقعی‌تر دنبال شد [8]. نوگا امکان وارد نمودن برهم‌کنش‌های هسته‌ای جفتی و سه‌تایی واقعی‌تر را با همه پیچیدگی‌هایش، همانند نیروی تانسوری و جملات وابسته به تکانه، فراهم نمود [9]. مسأله‌ای که او در محاسبات با آن مواجه بود این بود که برای دستیابی به همگرایی در نتایج محاسبات خود، باید امواج پاره‌ای بسیار زیادی را در نظر می‌گرفت که این خود ابعاد مسأله را بسیار بزرگ و انجام محاسبات را نیز به همان نسبت پیچیده می‌نمود. او ترکیبات مختلفی از برهم‌کنش‌های جفتی و سه‌تایی را در محاسبات وارد نمود و نشان داد که اثر نیروی چهار جسمی در انرژی بستگی ذره آلفا باید چیزی حدود 1.87 درصد باشد، در حالی که اثر نیروهای سه جسمی در انرژی بستگی ذره آلفا در حدود 13.75 درصد می‌باشد، لذا او استنتاج نمود که می‌توان از نیروهای چهار جسمی در مقابل نیروهای سه جسمی چشم‌پوشی نمود [9]. لازم به ذکر است که محاسبات انجام شده به روش تکنیک فیدیف- یاکوبوفسکی در نمایش فضای تکانه، تا قبل از اجرای این پروژه تنها برای سیستم‌های تا  $A = 4$  انجام شده بود [3].

---

<sup>40</sup> Hiroyuki Kamada

<sup>41</sup> Walter Glockle

<sup>42</sup> Andreas Nogga



نتایج محاسبات با استفاده از تکنیک فیدیف- یاکوبوفسکی در فضای پیکربندی اولین بار توسط نیکولاس ویلم شلینگرهاوت<sup>43</sup> در مرجع [10] ارائه شد. متأسفانه انجام محاسبات در فضای پیکربندی بیش از این ادامه پیدا نکرد و تنها در سال 1998 گروه گرینوبل<sup>44</sup> محاسباتی در فضای پیکربندی با برهم کنش‌های واقعی دو نوکلئونی انجام دادند [11]. اما بر اساس الگوریتم خاصی که آن‌ها استفاده کرده بودند، محاسبات حالت مقید سیستم چهار جسمی تنها با تعداد کمی از امواج پاره‌ای انجام شده است. علاوه بر روش فیدیف- یاکوبوفسکی روش‌های متعدد دیگری نیز برای بررسی سیستم‌های مقید سه- و چهار- نوکلئونی توسعه یافته‌اند که در این روش‌ها مستقیماً معادله شرودینگر حل می‌شود.

پیش از همه همکاری آرگون- لوس آلاموس<sup>45</sup> تکنیک GFMC را برای بررسی سیستم‌های مقید هسته‌ای گسترش دادند [12,13]. برهم کنش‌هایی که این گروه از آن استفاده نمودند تنها محدود به برهم کنش جفتی AV18 و برهم کنش‌های سه تایی اوربانا 9 و ایلینویز بوده است و امکان بررسی برهم کنش‌های هسته‌ای دیگر در این روش فراهم نشده است. علاوه بر این، دسترسی به تابع موج کل در این روش برای ارزیابی مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای مختلف، نظیر عملگرهای جریان الکترومغناطیسی، امکان‌پذیر نیست. این تکنیک تاکنون با موفقیت برای تعیین هسته‌های تا  $A = 12$  استفاده شده است.

همچنین روش SVM<sup>46</sup> توسط کالمن وارگا<sup>47</sup> و یاسویوکی سوزوکی<sup>48</sup> توسعه یافته شده است [14,15]. آن‌ها این روش را برای هسته‌های مقید تا  $A = 4$  به کار برده‌اند. نتایج آن‌ها بسیار دقیق است، اما روش آن‌ها تاکنون تنها به پتانسیل AV18 محدود شده است.

نمایشی مشابه با روش SVM از تابع موج توسط امیکوهی یاما<sup>49</sup> و ماسایاسو کامیمورا<sup>50</sup> به کار برده شده است. روش آن‌ها، CRCGV<sup>51</sup>، نیز برای یافتن پاسخ‌هایی از سیستم‌های

---

<sup>43</sup> Nicolaas Willem Schellingerhout

<sup>44</sup> Grenoble

<sup>45</sup> Argonne-Los Alamos

<sup>46</sup> Stochastic Variational Monte-carlo

<sup>47</sup> Kalman Varga

<sup>48</sup> Yasuyuki Suzuki

مقیّد هسته‌ای و هایپر هسته‌ای تا  $A = 4$  به کار بُرده شده است [16,17]. در این روش نیز همانند روش SVM استفاده از برهم کنش‌های واقعی، در عمل کار را بسیار مشکل می‌نمود.

همچنین گروه پیزا<sup>۵۲</sup> روشی با استفاده از بسط CHH<sup>۵۳</sup> از تابع موج گسترش داده‌اند [18,19]. آن‌ها قادرند با این روش معادله شرودینگر را برای سیستم‌های مقیّد سه- و چهار- نوکلئونی و همچنین حالت‌های پراکندگی، لااقل تا زیر آستانه تفکیک سه جسمی یعنی  $E_{Bound} = 0$  حل نمایند. به‌خاطر بسط تابع موج، محاسبات آن‌ها نیز به برهم‌کنش‌های AV18 و U-IX محدود شده است. در کنار این روش، روشی مشابه توسط نیربرنه آ<sup>۵۴</sup> با استفاده از بسط EIHH<sup>۵۵</sup> توسعه یافته است که همان محدودیت‌های گروه پیزا در انجام محاسبات را دارا می‌باشد [20, 21].

اخیراً پترناوراتیل<sup>۵۶</sup> و بروک ر. برت<sup>۵۷</sup> روش NCSM<sup>۵۸</sup> را برای حل معادلات حالت مقیّد چند نوکلئونی توسعه داده‌اند [22,23]. این روش امکان وارد نمودن نیروی سه جسمی را فراهم آورده است و نتایج آن نیز بسیار امیدوار کننده است، چرا که امکان تعمیم آن به سیستم‌های هسته‌ای بالاتر و پیچیده‌تر وجود دارد.

بنابراین با وجود در دسترس بودن گستره وسیعی از انواع مختلف برهم‌کنش‌های پدیده شناختی دو نوکلئونی، برهم‌کنش‌های سه نوکلئونی، مبتنی بر تبادل دو پایونی و همچنین برهم‌کنش‌های کایرال دو نوکلئونی و سه نوکلئونی، اکثر روش‌های اشاره شده بالا تنها برای تعدادی از این برهم‌کنش‌ها قابل استفاده هستند و یا توانایی وارد کردن برهم‌کنش‌های سه تایی را ندارد. همان‌طور که گفته شد روش فدیف-یاکوبوفسکی که تاکنون تنها محدود به

---

<sup>49</sup> Emiko Hiyama

<sup>50</sup> Masayasu Kamimura

<sup>51</sup> Coupled-Rearrangement-Channel Gaussian-Basis Variational

<sup>52</sup> Pisa

<sup>53</sup> Correlated Hyperspherical Harmonic

<sup>54</sup> Nir Barnea

<sup>55</sup> Effective Interaction Hyperspherical Harmonic

<sup>56</sup> Petr Navratil

<sup>57</sup> Bruce R. Barrett

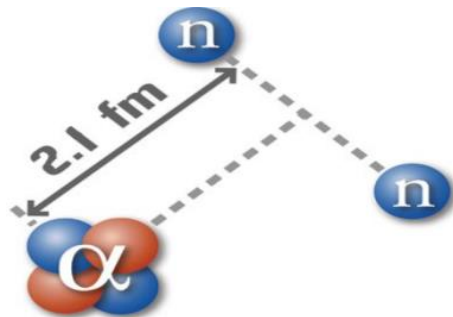
<sup>58</sup> No-Core Shell Model

سیستم‌های مقید چهار- نوکلئونی بوده است با وارد نمودن نوکلئون‌های بالاتر می‌تواند به عنوان یک تکنیک تعمیم پذیر و در عین حال قدرتمند و جالب توجه در دستور کار قرار گیرد. این تکنیک آزادی عمل بیشتری برای وارد کردن ترکیبات مختلف برهم‌کنش‌های جفتی و سه تایی جهت مطالعه اثر آنها روی سیستم‌های مقید چند- نوکلئونی را دارد و همچنین به عنوان یکی از بهترین روش‌های حل دقیق و بدون تقریب، برای ساختارهای موثر در پیکربندی‌های مختلف تابع موج هسته‌های سَبک، به نظر از این جنبه‌ها یکی از ارزشمندترین تکنیک‌ها نیز به شمار می‌آید. به علاوه تحلیل‌های مختلف روی پایه‌های فضای تکانه، یعنی نمایش دیدگاه سه بُعدی در کنار نمایش استاندارد امواج پاره‌ای، می‌تواند به سهولت در پیاده سازی فرمالیزم فیدیف- یاکوبوفسکی و به تبع آن پیاده‌سازی تکنیک محاسبات برای سیستم‌های نوکلئونی بالاتر منجر شود.

### ۳-۱ سَبک‌ترین هسته هاله‌ای شکل

در سال‌های اخیر روش‌های تجربی مختلفی در سرتاسر دنیا به مطالعه و حل حالت‌های مقید و پراکندگی سیستم‌های چند- نوکلئونی، پرداخته‌اند. در این میان بررسی سیستم‌های مقید بالاتر از چهار- نوکلئون، به‌خصوص سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت ساختار  ${}^6\text{He}$  به دلیل دارا بودن دو نوترون سست مقید در اطراف هسته آلفا، از کاربرد و اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. رساله حاضر، حاصل کار پژوهشی و مطالعه بر روی سیستم‌های مقید چهار- پنج- و شش- نوکلئونی می‌باشد و ره آورد مهم آن فرمول‌بندی و پیاده‌سازی تکنیک یاکوبوفسکی و حل عددی معادلات آن برای سیستم‌های بالاتر از چهار- نوکلئونی در نمایش امواج پاره‌ای و همچنین نمایش دیدگاه سه بُعدی می‌باشد. سیستم مقید شش- نوکلئونی همان- طور که در شکل (1.1) نشان داده شده است شامل دو هاله- نوترون است که حول هسته آلفا مقید شده‌اند. نخستین نتایج محاسبات در این پروژه نشان می‌دهد که اختلاف اندک مقدار انرژی بستگی سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت ساختار "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون"،

نسبت به مقدار انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی در حالت "آلفا"، نشانگر هاله- ساختار بودن سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون" می‌باشد.



شکل (۱-۱): نمایش ساختار هاله‌ای شکل هسته مقید شش- نوکلئونی  ${}^6\text{He}$  ( $1\text{fm} \equiv 10^{-15}\text{m}$ ).

همان‌طور که می‌دانیم، سیستم مقید شش- نوکلئونی هلیوم-۶ کوچک‌ترین هسته هاله‌ای شکل به شمار می‌آید، که برای کار تحقیقاتی ما در این پروژه بسیار مورد علاقه و مرتبط بوده و هدف اصلی این رساله مطالعه ویژگی‌های ساختاری این سیستم هاله‌ای شکل، در کنار مطالعه حالت مقید آن، براساس تکنیک فیدیف- یاکوبوفسکی در نمایش امواج پاره‌ای و همچنین دیدگاه سه‌بعدی می‌باشد.

#### ۴-۱ نمایش امواج پاره‌ای

بیشتر روش‌های محاسباتی اشاره شده در بخش قبل بر پایه تجزیه و تحلیل امواج پاره‌ای (PW)<sup>۵۹</sup> بنا نهاده شده‌اند، هرچند در روش GFMC مستقیماً بردارهای مکان در فضای پیکربندی به کار گرفته شده‌اند. محاسبات حالت مقید انجام شده بر پایه تکنیک فیدیف- یاکوبوفسکی به صورت استاندارد و با حل معادلات فیدیف و یاکوبوفسکی در نمایش امواج پاره‌ای انجام شده است، به طوری که فرمول‌بندی این معادلات به مجموعه‌ای معین از معادلات جفت شده منجر می‌شود. این محاسبات با استفاده از پتانسیل‌های پدیده شناختی در فضای تکانه [3,24] و فضای پیکربندی [25,26] انجام شده است. البته محاسبات حالت مقید اخیراً

<sup>59</sup> Partial Wave

با پتانسیل‌های کایرال در فضای تکانه نیز انجام شده است [27,28]. تجربه محاسبات حالت مقید سه- نوکلئونی نشان می‌دهد که استفاده از دیدگاه امواج پاره‌ای کاملاً موفقیت‌آمیز و در عین حال پیچیده است، چرا که برای رسیدن به دقت بالا در محاسبات ارزیابی هر عملگر مستلزم وارد کردن عباراتی پیچیده ناشی از اعداد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری می‌باشد [29, 30]. محاسبات یاکوبوفسکی بر مبنای تجزیه و تحلیل استاندارد امواج پاره‌ای، که شامل درجات آزادی اسپین و ایزواسپین است، بعد از محدود کردن امواج پاره‌ای به مجموعه‌ای از تعداد معینی معادله جفت شده با دامنه‌هایی شامل دو متغیر برای سیستم‌های چهار- نوکلئونی و حالت هاله ساختار برای سیستم‌های شش- نوکلئونی می‌باشد که حل آن‌ها و دستیابی به همگرایی در نتایج، مستلزم در نظر گرفتن امواج پاره‌ای زیادی است. خوشبختانه در مطالعه و بررسی سیستم‌های سبک هسته‌ای در حالت پایه، موسوم به حالت موج S، به روش فیدیف- یاکوبوفسکی در نمایش امواج پاره‌ای، به طور مرسوم می‌توان در گام نخست محاسبات، از درجات آزادی اسپین و ایزواسپین نوکلئون‌ها، برای کمتر نمودن پیچیدگی معادلات و همچنین ساده سازی محاسبات چشم‌پوشی نمود [31]. در ضمن، در گام بعد ما توانسته‌ایم با وارد نمودن درجات آزادی اسپینی در فرمالیزم یاکوبوفسکی و همچنین در محاسبات، نتایج محاسبات را تا حدودی بهبود بخشیم.

## ۱-۵ نمایش دیدگاه سه بُعدی

تجربه محاسبات برای حالت مقید سیستم‌های چهار- نوکلئونی و هسته‌های بالاتر هاکی از این است که بر خلاف مسأله سه- نوکلئونی، تعداد امواج پاره‌ای لازم برای دستیابی به همگرایی در نتایج بسیار زیادتر، در حدود 1580 ترکیب اسپین- ایزواسپین و تکانه زاویه‌ای برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی [3,30] و خیلی بالاتر آن برای پیش بینی سیستم مقید شش- نوکلئونی می‌باشد. بنابراین کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد که در یک ره ورود موازی، از نمایش امواج پاره‌ای اجتناب شود و مستقیماً با متغیرهای برداری کار ادامه یابد. به این ترتیب

کار با متغیرهای برداری، در اینجا بردارهای تکانه، ایجاب می‌کند که همه اعداد کوانتومی تکانه زاویه‌ای به طور خودکار در فرمول‌بندی معادلات و به تبع آن در محاسبات عددی وارد شوند. همچنین برای مطالعه سیستم‌های چهار-، پنج- و شش- نوکلئونی، نمایش عملگرهای گذار دو- نوکلئونی و ارزیابی عناصر ماتریسی نیروهای سه- نوکلئونی و حالت‌های گذار در پیکربندی‌ها در نمایش امواج پاره‌ای ممکن ولی به عبارات بسیار پیچیده‌ای منجر می‌شود که در نقطه مقابل در نمایش دیدگاه سه‌بُعدی به عبارات ساده‌تری می‌انجامد. به علاوه، در نمایش دیدگاه سه‌بُعدی به طور مرسوم از درجات آزادی اسپین و آیزواسپین نوکلئون‌ها صرف‌نظر می‌شود.

## ۱-۶ چارچوب کلی رساله

این رساله دارای چهار بخش عمده می‌باشد. در گام نخست، سیستم مقید سه- نوکلئونی به روش فیدیف فرمول‌بندی و نتایج انرژی بستگی آن برای هسته‌های سه- نوکلئونی به‌دست آمده است. در گام بعد، معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی در نمایش انتگرالی به دو روش امواج پاره‌ای و دیدگاه سه‌بُعدی مورد ارزیابی و حل عددی قرار گرفته است. در محاسبات انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی از پتانسیل‌های مدل مستقل از اسپین بهره برده‌ایم. در گام سوم، به منظور بررسی برهم‌کنش بین یک ذره آلفای ساکن و یک نوکلئون جاذب، فرمالیزم یاکوبوفسکی برای نخستین بار روی سیستم پنج- نوکلئونی پیاده سازی و به شکل معمول، معادلات جفت شده مورد ارزیابی و بررسی قرار گرفته‌اند. در اولین گام محاسبات، انواع مختلفی از پتانسیل‌های مدل نوکلئون- نوکلئون هم مستقل از اسپین و هم وابسته به اسپین به کار گرفته شده‌اند و نتایج عددی مناسبی برای سیستم پنج- نوکلئونی مقید در حالت "آلفا+ نوکلئون" جاذب به‌دست آمده است. گام آخر بررسی‌ها، مطالعه حالت مقید سیستم شش- نوکلئونی در حالت پیکربندی آلفا- هسته با دو نوترون سست مقید در اطراف آن می‌باشد که معادلات آن نیز در دو نمایش امواج پاره‌ای (با حضور پتانسیل‌های مدل وابسته به

اثرات اسپینی) و نمایش دیدگاه سه بُعدی (با حضور پتانسیل‌های مدل مستقل از اسپین)، ارزیابی و محاسبه شده‌اند. نتایج انرژی بستگی هر سیستم مقید هسته‌ای در پایان هر فصل در کنار معرفی پتانسیل‌های مدل مستقل و وابسته به اسپین نوکلئون- نوکلئون وارد در محاسبات، ارائه و به منظور مقایسه با نتایج روش‌های دیگر، در جداول مشخصی لیست شده‌اند. بخش اصلی رساله، در کنار مطالعه سیستم‌های سه- و چهار- نوکلئونی، مطالعه و بررسی ماهیت برهم کنش‌های داخلی موثر در درون سیستم‌های پنج- و شش- نوکلئونی در حالت آلفا- ساختار با حضور پتانسیل‌های مدل مستقل و وابسته به اسپین نوکلئون- نوکلئون می‌باشد. نتایج محاسبات برای انرژی بستگی هسته‌های مقید چهار-، پنج- و شش- نوکلئونی و توافق بسیار مناسب این نتایج در مقایسه با نتایج روش‌های معتبر دیگر، حاکی از ارزیابی منطقی و مناسب پیکربندی‌های مختلف در فرمالیزم یاکوبوفسکی و انتخاب ساختارهای موثر، از جمله ساختار هاله‌ای شکل "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون"، در این رساله می‌باشد.





## فصل دوّم

سیستم مقیّد سه - نوکلئونی

مطالعه سیستم‌های مقید سه- نوکلئونی اولین گامی بود که محققان برای دانستن برهم-کنش‌های بیش از دو- نوکلئونی برداشتند. دلیل انتخاب سیستم‌های سه- نوکلئونی و بررسی برهم‌کنش‌های داخلی آن‌ها، یافتن ماهیت اثر نیروهای سه تایی بوده است که می‌تواند در کنار نیروهای جفتی در ترم‌های وابسته هامیلتونی وارد شده و نتایج محاسبات را به طور چشم‌گیری بهبود بخشد. قابل ذکر است که با وجود گذشت دهه‌های متمادی از اولین حل معادله سه-جسمی به روش فیدیف [32]، هنوز هم این روش تا به امروز یکی از معتبرترین و در عین حال موفق‌ترین تکنیک‌ها برای حل سیستم‌های سه-جسمی، چه در حالت مقید و چه در حالت پراکندگی، از جمله سیستم‌های هسته‌ای و سیستم‌های کوارکی سازنده به شمار می‌آید که حتی روش‌های مُدرن محاسباتی امروزی نیز براساس تکنیک فیدیف، معادلات حرکت سیستم‌های سه- جسمی را تجزیه تحلیل می‌کنند. در این فصل به مرور یک سیستم مقید سه- نوکلئونی به روش کارآمد فیدیف پرداخته‌ایم و نتایج انرژی بستگی سیستم‌های مقید هسته‌ای، از جمله هسته  ${}^3\text{H}$  و  ${}^3\text{He}$  را بر پایه این تکنیک نمایش داده‌ایم.

## ۲-۲ فرمالیزم فیدیف برای سیستم مقید سه- نوکلئونی

همان‌طور که می‌دانیم یک سیستم سه جسمی، دارای سه تا برهم‌کنش متفاوت جفتی و منحصر به فرد می‌باشد. بنابراین جمله هامیلتونی مربوط به آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left( H_0 + \sum_{i < j} V_{ij} \right) \Psi = E \Psi, \quad (1.2.2)$$

که در آن جملات پتانسیل به شکل  $\sum V_{ij} \equiv V_{12} + V_{13} + V_{23}$  سهم برهم‌کنش نیروهای جفتی و  $H_0$  جمله انرژی جنبشی وابسته به تکانه نوکلئون‌ها می‌باشد. بر اساس فرمالیزم فیدیف، معادله (1.2.2) به شکل معادله انتگرالی همگن (حالت مقید) بازنویسی می‌شود:

$$\Psi = G_0 \sum V_{ij} \Psi, \quad (2.2.2)$$

در اینجا  $G_0$  نقش انتشارگر آزاد سیستم را به خود اختصاص داده است که در مطالعه حالت پراکندگی به شکل  $G_0 = [E - H_0 \pm i\varepsilon]^{-1}$  وارد فرمالیزم می‌شود. ولی در مطالعه حالت‌های مقید، نیازی به وارد نمودن  $i\varepsilon$  و تفکیک نقاط تکینه نیست، زیرا در مطالعه سیستم‌های مقید، انرژی بستگی همواره منفی ( $E < 0$ ) می‌باشد. همان‌طور که می‌دانیم تابع موج کل سیستم سه-نوکلئونی از جمع تک تک توابع موج حالت‌های جفتی تشکیل یافته است، بنابراین داریم:

$$\Psi = \sum_{i < j} \psi_{ij} = \psi_{12} + \psi_{13} + \psi_{23}, \quad (3.2.2)$$

که با وارد نمودن آن در سمت چپ رابطه (2.2.2) خواهیم داشت:

$$\psi_{ij} \equiv G_0 V_{ij} \Psi, \quad (4.2.2)$$

همچنین با استفاده از رابطه (3.2.2)، مؤلفه تابع موج رابطه (4.2.2) به صورت زیر بیان می‌شود، که در سمت راست آن سهم تابع موج مشابه را از بقیه جملات جدا نموده‌ایم:

$$\psi_{ij} \equiv G_0 V_{ij} \psi_{ij} + G_0 V_{ij} \sum_{kl \neq ij} \psi_{kl}, \quad (5.2.2)$$

در ادامه با فاکتورگیری از جمله همسان  $\psi_{ij}$  در سمت راست رابطه بالا و انتقال آن به سمت دیگر و استفاده از بسط دو جمله ای  $(1 - x)^{-1} = 1 + x + O(x^2)$ ، مؤلفه فیدیف تابع موج برای زیر سیستم  $\psi_{ij}$  به صورت رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\psi_{ij} = G_0 t_{ij} \sum_{kl \neq ij} \psi_{kl}, \quad (6.2.2)$$

که در آن عملگر گذار دو-جسمی است که از معادله لیمن-شوئینگر به صورت زیر پیروی می‌کند:

$$t_{ij} \equiv V_{ij} + V_{ij} G_0 t_{ij}, \quad (7.2.2)$$

به دلیل رفتار فرمیونی نوکلئون‌ها، تابع موج کل سیستم، یک تابع موج پادمتقارن خواهد بود. با

وارد نمودن ماهیت نوکلئون‌ها در رابطه (6.2.2) خواهیم داشت:

$$\psi_{12} = G_0 t_{12} (\psi_{13} + \psi_{23}), \quad (8.2.2)$$

همچنین با نوشتن توابع موج دوم و سوم بر حسب تابع موج اول با استفاده از عملگرهای جایگشت مناسب، رابطه بالا به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\psi_{12} = G_0 t_{12} (P_{13} P_{23} + P_{12} P_{23}) \psi_{12}, \quad (9.2.2)$$

در اینجا با تعریف عملگر جایگشت  $P \equiv P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}$  به عنوان یک عملگر مناسب زیر سیستم سه-نوکلئونی، معادله انتگرالی فیدیف به صورت فشرده و معمول نتیجه می‌شود:

$$\psi_{12} = G_0 t_{12} P \psi_{12}, \quad (10.2.2)$$

$$\psi = G_0 t P \psi, \quad (11.2.2)$$

در ادامه، تابع موج کل مجموع تک تک توابع موج جفتی که بر اساس رابطه (3.2.2) از سه جمله تشکیل یافته است، به صورت خلاصه شده زیر منجر می‌شود:

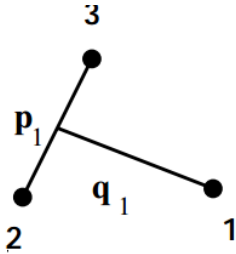
$$\Psi = \psi_{12} + \psi_{13} + \psi_{23} = (1 + P) \psi_{12}, \quad (12.2.2)$$

بنابراین تنها مولفه مستقل فیدیف همان تابع  $\psi_{12}$  می‌باشد که تحت جابجایی نوکلئون‌ها رفتار پادتقارنی دارد ( $\psi_{12} = -P_{12} \psi_{21}$ ). در بخش بعد حالت‌های پایه در فضای تکانه برای هر سه مولفه فیدیف معرفی شده و شکل انتگرالی معادله فیدیف (11.2.2) در دو نمایش امواج پاره‌ای و همچنین دیدگاه سه بُعدی، ارزیابی خواهد شد.

## ۲-۳ نمایش انتگرالی معادله فیدیف در فضای تکانه

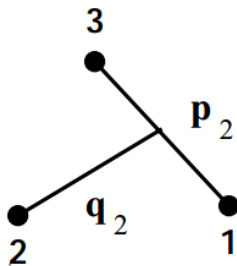
در این بخش برای معرفی حالت‌های پایه در فضای تکانه و به منظور کاهش قیدهای مسئله، طبیعی است که از تکانه‌های ژاکوبی مربوط به یک سیستم مقید سه-نوکلئونی بهره ببریم. در واقع یک سیستم مقید سه-نوکلئونی، در فضای تکانه دارای ۹ درجه آزادی می‌باشد که به منظور ساده‌سازی مسئله با رفتن در چارچوب تکانه‌های ژاکوبی درجات سیستم به ۶

درجه تقلیل خواهد یافت. برای معرفی و نمایش تکانه های ژاکوبی، در یک سیستم سه-نوکلئونی، به طور معمول سه نوع پیکربندی مختلف ژاکوبی به صورت زیر وجود دارد:



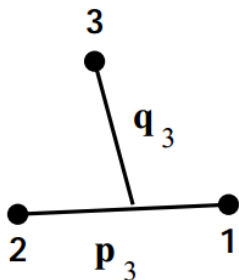
$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \frac{1}{2} (\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\ \vec{q}_1 &= \frac{2}{3} (\vec{k}_1 - \frac{1}{2} (\vec{k}_2 + \vec{k}_3)), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

که تکانه ژاکوبی متناظر با تابع موج  $\psi_{23}$  می باشد. همچنین تکانه ژاکوبی متناظر با تابع موج  $\psi_{13}$  نتیجه می دهد:



$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= \frac{1}{2} (\vec{k}_3 - \vec{k}_1) \\ \vec{q}_2 &= \frac{2}{3} (\vec{k}_2 - \frac{1}{2} (\vec{k}_3 + \vec{k}_1)) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

و همچنین تکانه ژاکوبی متناظر با تابع موج  $\psi_{12}$  می شود:



$$\begin{aligned} \vec{p}_3 &= \frac{1}{2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ \vec{q}_3 &= \frac{2}{3} (\vec{k}_3 - \frac{1}{2} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

تکانه های ژاکوبی متناظر با تابع موج  $\psi_{12}$  را تکانه های ژاکوبی پایه در نظر می گیریم و بقیه حالت های دیگر را برحسب ترکیب خطی این تکانه ها بازنویسی می کنیم. در زیر تکانه های مختلف توابع موج جفتی وارد بر رابطه (12.2.2) را برحسب حالت های دیگر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \vec{p}_2(\vec{p}_1, \vec{q}_1) &\equiv \vec{p}_2 = -\frac{1}{2} \vec{p}_1 - \frac{3}{4} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2(\vec{p}_1, \vec{q}_1) &\equiv \vec{q}_2 = \vec{p}_1 - \frac{1}{2} \vec{q}_1 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\vec{p}_3(\vec{p}_1, \vec{q}_1) \equiv \vec{p}_3 = -\frac{1}{2} \vec{p}_1 + \frac{3}{4} \vec{q}_1 \quad (5.3.2)$$

$$\vec{q}_3(\vec{p}_1, \vec{q}_1) \equiv \vec{q}_3 = -\vec{p}_1 - \frac{1}{2} \vec{q}_1$$

همچنین رابطه معکوس بین تکانه‌ها به قرار زیر است:

$$\vec{p}_1 = -\frac{1}{2} \vec{p}_2 + \frac{3}{4} \vec{q}_2 \quad (6.3.2)$$

$$\vec{q}_1 = -\vec{p}_2 - \frac{1}{2} \vec{q}_2$$

$$\vec{p}_1 = -\frac{1}{2} \vec{p}_3 - \frac{3}{4} \vec{q}_3 \quad (7.3.2)$$

$$\vec{q}_1 = \vec{p}_3 - \frac{1}{2} \vec{q}_3$$

در اولین تلاش محاسباتی، در نمایش دیدگاه سه بُعدی، به طور مرسوم از درجات آزادی اسپینی و ایزواسپینی نوکلئون‌ها صرف نظر می‌کنیم، در این صورت تنها بردارهای سه بُعدی تکانه وارد حالت‌های پایه می‌شوند. این ساده سازی در نمایش دیدگاه سه بُعدی کاملاً مرسوم می‌باشد و در نمایش امواج پاره‌ای با محدود نمودن تمام پاره موج‌ها به حالت موج  $s$  می‌توان از درجات آزادی مداری چشم پوشی نمود، دلیل محدود نمودن سیستم‌ها در حالت موج  $s$ ، در نظر گرفتن سیستم‌های سبک هسته‌ای در حالت پایه می‌باشد نه در حالت‌های برانگیخته، زیرا پتانسیل‌های مدل مستقل از اسپین به کار گرفته شده در این محاسبات، عمدتاً در حالت پایه اثرات عمده تری دارند. پایه‌ها در دیدگاه سه بُعدی برای هر مولفه از تابع موج، بر اساس تکانه‌های  $\vec{p}_i$  و  $\vec{q}_i$  به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$|\vec{p}_i \vec{q}_i\rangle \equiv |\vec{p}_i\rangle |\vec{q}_i\rangle \quad (8.3.2)$$

که در آن حالت‌های پایه در فضای سه-جسمی هیلبرت<sup>60</sup>، راست-هنجار<sup>61</sup> هستند:

<sup>60</sup> Hilbert Space

<sup>61</sup> Orthonormal

$$\langle \vec{p}'_i \vec{q}'_i | \vec{p}_i \vec{q}_i \rangle = \delta(\vec{p}'_i - \vec{p}_i) \delta(\vec{q}'_i - \vec{q}_i) \quad (9.3.2)$$

$$\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dp p^2 \int_0^{\infty} dq q^2 |pq\alpha\rangle \langle pq\alpha| = \mathbf{1} \quad (10.3.2)$$

انرژی جنبشی غیر نسبیتی برای یک سیستم سه-جسمی در حالت کلی از رابطه زیر پیروی می‌کند. جرم-های هر نوکلئون نیز مطابق رابطه جرم کاهش یافته و پیکربندی‌های ژاکوبی اشاره شده بالا، به صورت زیر وارد محاسبات می‌شوند:

$$H_0 = \sum_i \frac{k_i^2}{2m} = \frac{K^2}{2M} + \frac{p_{\ell}^2}{2\mu_{\ell}} + \frac{q_{\ell}^2}{2M_{\ell}} \quad (11.3.2)$$

$$M = 3m; \quad M_{\ell} = \frac{2}{3}m; \quad \mu_{\ell} = \frac{1}{2}m,$$

با در نظر گرفتن سیستم در دستگاه مرکز جرم، جمله انرژی مرکز جرم، همان جمله اول بالا برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. حال به منظور ارزیابی معادله فیدیف سه-نوکلئونی، رابطه (11.2.2) را در پایه تکانه ژاکوبی تصویر نموده و با وارد نمودن پایه‌های کامل معرفی شده در رابطه (10.3.2)، به شکل مناسب در بین عملگرها، معادله انتگرالی فیدیف در نمایش دیدگاه سه بُعدی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\langle \vec{q} \vec{p} | \psi \rangle = \int d^3p' \int d^3p'' d^3q'' \frac{1}{E - \frac{p'^2}{m} - \frac{3}{4m}q''^2} \langle \vec{p} | \hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2) | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' \vec{q} | P | \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle \langle \vec{p}'' \vec{q}'' | \psi \rangle \quad (12.3.2)$$

به منظور ارزیابی معادله انتگرالی بالا، بایستی ترم‌های موجود در سمت راست انتگرال مورد ارزیابی قرار گیرند. ماتریس گذار  $\mathbf{t}$  مطابق رابطه زیر، وابسته به انرژی زیر سیستم دو-نوکلئونی است و عملگر جایگشت  $\mathbf{P}$  نیز از دو جمله مجزا تشکیل یافته است. بنابراین ارزیابی عملگرها در نمایش دیدگاه سه بُعدی به صورت زیر صورت می‌گیرد:

$$\langle \vec{p} \vec{q} | t(E) | \vec{p}' \vec{q}' \rangle = \delta(\vec{q} - \vec{q}') \langle \vec{p} | \hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2) | \vec{p}' \rangle \quad (13.3.2)$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p}' \vec{q} | P | \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle &= {}_1 \langle \vec{p}' \vec{q} | P | \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle_1 \\
&= {}_1 \langle \vec{p}' \vec{q} \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle_2 + {}_1 \langle \vec{p}' \vec{q} | \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle_3 \\
&= \langle \vec{p}' \vec{q} | \left( -\frac{1}{2} \vec{p}'' + \frac{3}{4} \vec{q}'' \right); \left( -\vec{p}'' - \frac{1}{2} \vec{q}'' \right) \rangle \\
&\quad + \langle \vec{p}' \vec{q} | \left( -\frac{1}{2} \vec{p}'' - \frac{3}{4} \vec{q}'' \right); \left( \vec{p}'' - \frac{1}{2} \vec{q}'' \right) \rangle \\
&= \delta \left( \vec{p}' + \frac{1}{2} \vec{p}'' - \frac{3}{4} \vec{q}'' \right) \delta \left( \vec{q} + \vec{p}'' + \frac{1}{2} \vec{q}'' \right) \\
&\quad + \delta \left( \vec{p}' + \frac{1}{2} \vec{p}'' + \frac{3}{4} \vec{q}'' \right) \delta \left( \vec{q} - \vec{p}'' + \frac{1}{2} \vec{q}'' \right)
\end{aligned} \tag{14.3.2}$$

که ارزیابی جملات مستقیماً بر اساس بردارهای سه بُعدی تکانه انجام می‌پذیرد. با وارد نمودن جملات ارزیابی شده بالا به روش دیدگاه سه بُعدی، معادله انتگرالی فیدیف به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p} \vec{q} | \psi \rangle &= \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m} q^2} \int d^3 \vec{q}'' \\
&\times \left\{ \langle \vec{p} | \hat{t} \left( E - \frac{3}{4m} q^2 \right) | -\frac{1}{2} \vec{q} - \vec{q}'' \rangle \langle \vec{q} + \frac{1}{2} \vec{q}''; \vec{q}'' | \psi \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \vec{p} | \hat{t} \left( E - \frac{3}{4m} q^2 \right) | \frac{1}{2} \vec{q} + \vec{q}'' \rangle \langle -\vec{q}' - \frac{1}{2} \vec{q}''; \vec{q}'' | \psi \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{15.3.2}$$

در نهایت، معادله انتگرالی فیدیف در نمایش دیدگاه سه بُعدی برای پیاده سازی حل عددی به شکل بالا در دسترس می‌باشد. قابل ذکر است که پایه‌های دیدگاه سه بُعدی به شکل برداری رفتار می‌کنند، در صورتی که در نمایش امواج پاره‌ای با متغیرهای نرده ای سرو کار داریم. در ادامه معادله فیدیف سه- نوکلئونی را در نمایش امواج پاره‌ای پیاده سازی می‌کنیم. حالت‌های پایه مولفه تابع موج فیدیف در نمایش امواج پاره‌ای در فضای تکانه، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$| pq (ls) j (\lambda \frac{1}{2}) J JM (t \frac{1}{2}) T M_T \rangle \tag{16.3.2}$$

که در آن  $\mathbf{p}$  و  $\mathbf{q}$  تکانه های ژاکوبی،  $\mathbf{l}$  سهم تکانه مداری زیر سیستم دو- نوکلئونی او ۲،  $\mathbf{s}$  سهم مربوط به مجموع اسپین نوکلئون‌های او ۲،  $\lambda$  تکانه مداری نوکلئون سوم و  $1/2$  هم سهم



اسپین نوکلئون سوم می باشد. در این نمایش از جمع تک تک پاره موج ها استفاده می شود. این تکنیک برای بررسی حالت های پراکندگی کاربرد دارد که می توان از آن برای مطالعه حالت های مقید سیستم های هسته ای نیز بهره بُرد. با تصویر نمودن پایه های کامل در جاهای مناسب معادله فدیف، نهایتاً رابطه (11.2.2) در نمایش امواج پاره ای، به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} \langle p q \alpha | \psi \rangle &= \langle p q \alpha | G_0 t P | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m} q^2} \langle p q \alpha | t P | \psi \rangle \\ &= \sum_{\alpha'} \int dp' p'^2 \int dq' q'^2 \langle p q \alpha | t | p' q' \alpha' \rangle \langle p' q' \alpha' | P | \psi \rangle \end{aligned} \quad (17.3.2)$$

به منظور ارزیابی معادله انتگرالی بالا، ترم های موجود در انتگرال به روش امواج پاره ای مورد ارزیابی قرار می گیرند. ماتریس گذار  $t$  مطابق رابطه زیر، وابسته به انرژی جنبشی زیر سیستم دو- نوکلئونی  $\alpha$  است. و همچنین عملگر جایگشت  $P$  نیز ارزیابی می شوند:

$$\langle p q \alpha | t(E) | p' q' \alpha' \rangle = \frac{\delta(q - q')}{qq'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{JJ'} \hat{t}_{ll'}^{sjt}(p, p', E - \frac{3}{4m} q^2) \quad (18.3.2)$$

$$\langle p q \alpha | P | p' q' \alpha' \rangle = \int_{-1}^{-1} dx G_{\alpha\alpha'}(q q' x) \frac{\delta(p - \pi_1)}{\pi_1^{l+2}} \frac{\delta(p' - \pi_2)}{\pi_2^{l'+2}} \quad (19.3.2)$$

در ارزیابی عملگر جایگشت  $P$ ، تکانه های جابجا شده بر اساس تکانه های اولیه نوشته می شوند. تکانه های جابجا شده تنها به اندازه بردارهای تکانه اولیه و زاویه بین آن ها بستگی دارند. همان طور که در قبل اشاره شد در نمایش امواج پاره ای تنها با اندازه بردارهای تکانه سر و کار داریم. بنابراین تکانه های جابجا شده در نمایش امواج پاره ای به صورت روابط زیر رفتار می کنند:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + q'^2 + qq'x} \quad (20.3.2)$$

$$\pi_2 = \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} q'^2 + qq'x} \quad (21.3.2)$$

در نهایت معادله فیدیف در نمایش امواج پاره‌ای به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle p q \alpha | \psi \rangle &= \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} \sum_{l'} \sum_{\alpha''} \int_0^\infty dq'' q''^2 \\ &\times \int_{-1}^1 dx \frac{\hat{t}_{ll'}^{sjt}(p, \pi_1, E - \frac{3}{4m}q^2)}{\pi_1^{l'}} G_{\bar{\alpha}\alpha''}(q, q'', x) \frac{\langle \pi_2 q'' \alpha'' | \psi \rangle}{\pi_2^{l''}} \end{aligned} \quad (22.3.2)$$

در بخش بعد پیاده سازی تکنیک محاسبات و همچنین بحث در این زمینه برای حل معادله فیدیف ارائه خواهد شد. در گام آخر این فصل نیز نتایج محاسبات به منظور دستیابی به انرژی بستگی سیستم مقید سه- نوکلئونی به خصوص ترایتون ( ${}^3\text{H}$ ) ارائه شده است.

## ۲-۴ تکنیک محاسبات

در این بخش به منظور پیاده سازی حل عددی معادله انتگرالی فیدیف در نمایش امواج پاره‌ای نتیجه شده در بخش قبل، ابتدا با استفاده از روش گاوس- لژاندر<sup>۶۲</sup> فضا را گسسته نموده و سپس این معادله انتگرالی را به صورت یک معادله ویژه مقداری بیان می‌کنیم. همچنین به منظور حل انتگرالی معادله فیدیف در نمایش دیدگاه سه بُعدی لازم است دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب کنیم که بردار تکانه  $\vec{p}$  در جهت محور قائم و بردار تکانه  $\vec{q}$  در صفحه افق- قائم قرار گیرد، بنابراین زاویه بین دو بردار همان زاویه گُروی می‌باشد که در بازه  $[0, \pi]$  قرار می‌گیرد. بنابراین نمایش شماتیک معادله ویژه مقداری فیدیف، به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\eta(E)\psi = k(E)\psi \quad (1.4.2)$$

در اینجا  $E$  انرژی بستگی سیستم مقید سه- نوکلئونی با ویژه مقدار  $\eta(E)$  است. همچنین کرنل  $k(E)$  وابستگی مستقیمی به انرژی بستگی سیستم مربوطه دارد و  $\psi$  نیز تابع موج معادله انتگرالی فیدیف را تشکیل می‌دهد. برای ارزیابی سیستم مقید ترایتون در نمایش امواج پاره‌ای باید قیده‌های موجود در اعداد کوانتومی اسپینی و ایزواسپینی را وارد پایه ها نمود و برای بررسی انرژی حالت پایه، شرایط امواج پاره‌ای را در حالت پایه بررسی نمود. در مرجع [32]

<sup>62</sup> Gauss-Legendre

جدولی برای نمایش اعداد کوانتومی و تعداد معادلات امواج پاره‌ای به شکل زیر ارائه شده است که در محاسبات نیز وارد می‌شوند.

جدول (۲-۱): تعداد معادلات امواج پاره‌ای در حالت‌های مختلف اعداد کوانتومی یک سیستم سه-نوکلئونی، برای ترایتون.

$\alpha$	l	s	j	$\lambda$	J	$ \mathcal{J}^\pi = 1/2^+$
1	0	0	0	0	1/2	
2	0	1	1	0	1/2	
3	2	1	1	0	1/2	
4	0	1	1	2	3/2	
5	2	1	1	2	3/2	

باید بدانیم که بُعد ماتریس ویژه مقداری چند است. از رابطه پایه‌های فضای تکانه در نمایش امواج پاره‌ای علی‌القاعده یک ماتریس سه بعدی داریم به قرار زیر:

$$N = N_p N_q N_\alpha ; \quad \begin{matrix} N_p = 34 \\ N_q = 20 \end{matrix} \quad (2.4.2)$$

در نهایت با استفاده از روش‌های عددی تکرار و الگوریتم متعامد سازی تکنیک لنگسوز<sup>۶۳</sup> و با شروع از توابع موج اولیه گاوسی شکل دلخواه به حل عددی معادله فدیف می‌پردازیم. به منظور محاسبه دقیق انرژی بستگی فیزیکی سیستم مقید سه-نوکلئونی که متناظر با ویژه مقدار  $\eta(E) = 1$  است، می‌توان با دادن سه و یا چهار انرژی در همسایگی انرژی بستگی مقید سیستم مورد بررسی، ویژه مقادیر  $\eta(E)$  متناظر با این انرژی را به دست آورد. سپس با درون-یابی، انرژی بستگی دقیق سیستم را محاسبه نمود.

## ۲-۵ نتایج محاسبات

در این بخش نتایج انرژی بستگی برای یک سیستم مقید سه-نوکلئونی با پتانسیل‌های معرفی شده در جدول (2.2) و (2.3) ارائه شده‌اند که در آن لیستی از تمامی پتانسیل‌های

<sup>63</sup> Lanczos-type technique

نوکلئون- نوکلئون وابسته به درجات اسپینی و ایزواسپینی در کنار نتایج انرژی بستگی سیستم مقید سه- نوکلئونی مربوطه آورده شده‌اند.

جدول (۲-۲): نتایج انرژی بستگی سیستم مقید سه-نوکلئونی با حضور پتانسیل‌های مستقل از اسپین و بارالکتریکی ارائه شده برحسب  $MeV$ .

Potential	$j_{max}$				
	1	2	3	4	5
Paris	7.30	7.38	7.44	7.46	7.46
Nijm78	7.49	7.54	7.62	7.63	-
Nijm II(np)	7.65	7.75	-	7.89	-
AV14	7.45	7.58	7.67	7.68	-
Bonn B	8.17	8.10	8.13	8.14	8.14
Ruhrpot	7.59	7.56	7.62	7.64	-

نتایج بدست آمده بالا در مقایسه با داده‌های تجربی انرژی بستگی سیستم‌های  ${}^3H$  و  ${}^3He$  (ترایتون)، از تطابق خیلی خوبی برخوردارند که دلیل کارآمدی تکنیک فیدیف را نتیجه می‌دهد. مقدار تجربی انرژی بستگی  ${}^3H$  برابر  $-8.48[MeV]$  می‌باشد.

جدول (۳-۲): نتایج انرژی بستگی سیستم مقید ترایتون با حضور پتانسیل‌های هسته‌ای وابسته به اسپین و بار برحسب  $MeV$ .

Potential	$E_{3H} (j_{max} = 4)$
Nijm93 (cd)	7.66
Nijm I (cd)	7.73
Njm II (cd)	7.64
AV18 (cd)	7.65
Bonn (cd)	8.00

در این فصل به منظور تاکید بر کارآمدی تکنیک فیدیف و دلیل ارتقاء عملکردی آن روی سیستم‌های هسته‌ای با عدد جرمی بالاتر، مروری بر حل معادله فیدیف روی سیستم‌های سه-نوکلئونی انجام پذیرفت. شایان ذکر است که وجود نوکلئون‌های بالاتر در یک سیستم هسته‌ای

ارزیابی‌ها و تحلیل محاسبات را برای یافتن انرژی بستگی بسیار دشوار می‌سازد. اما با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتری در سال‌های اخیر گروه‌های مختلفی به طور موفقیت آمیزی نه به روش فدیف-یاکوبوفسکی، روی سیستم‌های بیش از سه-نوکلئونی مطالعه نموده‌اند و نتایج مناسبی را به دست آورده‌اند. این روش‌ها در بخش مقدمه به اجمال معرفی شده‌اند. در فصل ارتقاء و پیاده‌سازی همین تکنیک (فدیف-یاکوبوفسکی) روی سیستم‌های چهار-نوکلئونی ارائه می‌شود و در نهایت انرژی بستگی ذره آلفا (هسته اتم  $^4\text{He}$ ) با حضور مدل‌های پتانسیلی مستقل و وابسته به اسپین پیاده‌سازی و نتیجه خواهد شد.



## فصل سوم

سیستم مقید چهار- نوکلئونی

تکنیک معادلات یاکوبوفسکی [33] برای مطالعه سیستم‌های مقید بیش از سه نوکلئون، یک روش قدیمی معتبر و در عین حال قدرتمند محسوب می‌شود. این تکنیک تا قبل از انجام این پروژه نهایتاً برای سیستم‌های مقید چهار- نوکلئونی [3] معرفی و حل شده بود. دلیل آن هم پیچیدگی‌های معمول وارد در مطالعه سیستم‌های  $A \geq 4$  هسته‌ای بوده است. در این پروژه به منظور مطالعه و حل حالت‌های مقید سیستم‌های پنج- و شش- نوکلئونی به روش یاکوبوفسکی، مبنی بر حضور موثر ساختار چهار- نوکلئونی "آلفا- هسته"، معادلات یاکوبوفسکی را برای سیستم‌های مقید چهار- نوکلئونی (آلفا)، پنج- نوکلئونی (آلفا+ نوکلئون) و شش- نوکلئونی (آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون) پیاده سازی نموده‌ایم و نتایج قابل قبولی را در مقایسه با نتایج روش‌های معتبر دیگر به دست آورده‌ایم. بنابراین لازم می‌دانیم در این فصل ابتدا به مرور خلاصه‌ای از فرمالیزم یاکوبوفسکی روی سیستم مقید چهار- نوکلئونی پردازیم و در ادامه معادلات جفت شده حاصل از نتایج فرمول‌بندی را در هر دو نمایش امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی ارزیابی نمائیم. در ادامه با اشاره به پیاده سازی تکنیک‌های عددی و با حضور پتانسیل‌های مدل نوکلئون- نوکلئون، معادلات انتگرالی یاکوبوفسکی را به شکل یک رابطه ویژه مقداری نوعی حل می‌کنیم تا به نتایج انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی دست یابیم. دلیل اصلی پرداختن به سیستم مقید چهار- نوکلئونی، تنها مقایسه نتایج آن با نتایج و دستاوردهای بدست آمده از حل معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم‌های مقید پنج- و شش- نوکلئونی می‌باشد که تاکید می‌شود در این پروژه، برای اولین بار در حوزه فیزیک هسته‌ای و در زمینه سیستم‌های چند- نوکلئونی سَبک<sup>۶۴</sup>، تلاش برای حل سیستم‌های بالاتر از چهار- نوکلئونی، هم در نمایش امواج پاره‌ای و هم در نمایش دیدگاه سه بُعدی، صورت پذیرفته است و در نهایت نتایج مناسب و قابل قبولی به دست آمده است. مطالعه روی سیستم‌های هسته‌ای

---

<sup>64</sup> Few-body systems



بالا تر از چهار- نوکلئونی، با استفاده از تکنیک یاکوبوفسکی، به ترتیب در فصل های چهارم و پنجم پیاده سازی و ارائه شده است.

### ۲-۳ معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی

در فرمول بندی معادلات یاکوبوفسکی برای یک سیستم مقید چهار- نوکلئونی از فرمالیزم استاندارد بخش نخست فصل قبل بهره می بریم. بنابراین، بر اساس مرجع [3] معادلات چهار- نوکلئونی جفت شده یاکوبوفسکی بر اساس دو مولفه مستقل  $\psi_{12;123}^{1234}$  و  $\psi_{12;12+34}^{1234}$  در نهایت به شکل زیر منجر می شوند [3]:

$$\psi_{12;123}^{1234} = -G_0 T^{123} P_{34} \psi_{12;123}^{1234} + G_0 T^{123} \psi_{12;12+34}^{1234}, \quad (1.2.3)$$

$$\psi_{12;12+34}^{1234} = G_0 T^{12+34} (1 - P_{34}) \psi_{12;123}^{1234}, \quad (2.2.3)$$

که در آن  $\psi_{12;123}^{1234}$  و  $\psi_{12;12+34}^{1234}$  به ترتیب مولفه های تابع موج یاکوبوفسکی در حالت خوشه های دو- تکه ای ۱+۳ و ۲+۲ هستند (شکل (۱-۳)). همچنین عملگر  $G_0$  انتشارگر آزاد یا همان تابع گرین سیستم مقید چهار- نوکلئونی است. عملگرهای  $T^{123}$  و  $T^{12+34}$  عملگرهای گذار چهار- نوکلئونی هستند که از روابط زیر پیروی می کنند [37]:

$$T^{123} \equiv t_{12} P + P G_0 t_{12} T^{123}, \quad (3.2.3)$$

$$T^{12+34} \equiv t_{12} \tilde{P} + \tilde{P} G_0 t_{12} T^{12+34}, \quad (4.2.3)$$

دو معادله جفت شده بالا، بر اساس فرمالیزم معمول یاکوبوفسکی نتیجه شده اند که از دو مولفه مستقل تشکیل یافته اند. در مرجع [3] این دو مولفه به شکل  $\psi_1 \equiv \psi_{12;123}^{1234}$  و  $\psi_2 \equiv \psi_{12;12+34}^{1234}$  نمایش داده شده اند. به منظور سهولت در ارزیابی معادلات، دو معادله جفت شده بالا را بر حسب عملگرهای گذار دو- نوکلئونی بازنویسی می کنیم. بنابراین معادلات چهار- نوکلئونی یاکوبوفسکی ارائه شده در مرجع [3] به شکل ماتریسی زیر بازنویسی می شوند [37]:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_0 T^{123} P_{34} & G_0 T^{123} \\ G_0 T^{12+34} (1 - P_{34}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.2.3)$$

برای ماتریس گذار بالا، بر اساس روابط برقرار شده زیر، می‌توان ماتریس را تقلیل نمود [3]:

$$(1 + G_0 T P)(1 - G_0 t_{12} P) \equiv 1, \quad (6.2.3)$$

$$(1 + G_0 \tilde{T} \tilde{P})(1 - G_0 t_{12} \tilde{P}) \equiv 1. \quad (7.2.3)$$

که در آن  $P = P_{12} P_{13} + P_{12} P_{23}$  و  $\tilde{P} = P_{13} P_{24}$ ، عملگرهای جایگشت بین نوکلئون ها هستند. بنابر روابط اشاره شده بالا، تساوی زیر حاکم می‌شود [37].

$$\begin{pmatrix} G_0 t_{12} P (1 - P_{34}) & G_0 t_{12} P \\ G_0 t_{12} \tilde{P} (1 - P_{34}) & G_0 t_{12} \tilde{P} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -G_0 T^{123} P_{34} & G_0 T^{123} \\ G_0 T^{12+34} (1 - P_{34}) & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2.3)$$

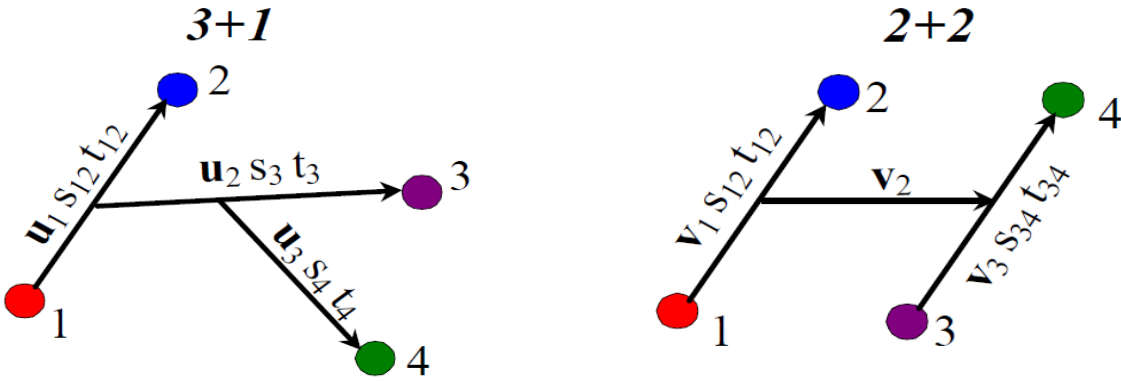
بنابراین معادلات جفت شده یاکوبوفسکی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با توجه به رابطه (8.2.3) به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 t_{12} P (1 - P_{34}) & G_0 t_{12} P \\ G_0 t_{12} \tilde{P} (1 - P_{34}) & G_0 t_{12} \tilde{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (9.2.3)$$

حال در گام بعد به دنبال نمایش و معرفی تکانه‌های ژاکوبی متناظر با هر مولفه هستیم تا بتوانیم پایه‌های مناسب مولفه‌ها چه در نمایش امواج پاره‌ای (فرم اسکالر با حضور اعداد کوانتومی مداری و یا حالت پایه، موسوم به موج s) و چه در نمایش دیدگاه سه بُعدی (فرم برداری و بدون تجزیه اعداد کوانتومی) را معرفی نمائیم.

### ۳-۳ حالت‌های پایه در فضای تکانه

به منظور نمایش معادلات جفت شده یاکوبوفسکی در فضای تکانه در این بخش مجموعه بردارهای تکانه ژاکوبی متناظر با مولفه‌های  $\psi_1$  و  $\psi_2$  که به ترتیب بیانگر ساختار  $3+1$  و  $2+2$  هستند را معرفی می‌کنیم.



شکل (۳-۱): نمایش پیکربندی بردارهای تکانه ژاکوبی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی.

برای خوشه های ۳+۱ بردارهای تکانه ژاکوبی  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  و برای خوشه های ۲+۲ بردارهای تکانه ژاکوبی  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_1 &= \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} & \vec{v}_1 &= \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} \\
 \vec{u}_2 &= \frac{2}{3} \left( \vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \right) & \vec{v}_2 &= \frac{2}{3} \left( \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} - \frac{\vec{k}_3 + \vec{k}_4}{2} \right) \\
 \vec{u}_3 &= \frac{3}{4} \left( \vec{k}_4 - \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3}{3} \right) & \vec{v}_3 & \\
 &= \frac{3}{4} \left( \frac{\vec{k}_3 - \vec{k}_4}{2} \right) & &
 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

که در آن  $k_i$  تکانه مربوط به هر نوکلئون منفرد است. در ادامه انرژی جنبشی سیستم مقید چهار- نوکلئونی برحسب مجموعه بردارهای تکانه های ژاکوبی بیان می شود. برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی هر نوکلئون ۳ درجه آزادی دارد، بنابراین در کل ۱۲ درجه آزادی داریم. با رفتن از تکانه های منفرد به تکانه های ژاکوبی، درجه آزادی نوکلئون ها با داشتن ۳ بردار تکانه به ۹ درجه آزادی تقلیل می یابد. هامیلتونی آزاد عبارت است از:

$$H_0 = \sum_{i=1}^4 \frac{k_i^2}{2m} \tag{2.3.3}$$

که بر حسب تکانه‌های متناظر با خوشه‌های ۳+۱ در چارچوب مرکز جرم، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_0 = \frac{u_1^2}{m} + \frac{3u_2^2}{4m} + \frac{2u_3^2}{3m} \quad (3.3.3)$$

به طور مشابه انرژی جنبشی بر حسب تکانه‌های ژاکوبی متناظر با خوشه‌های ۲+۲ در چارچوب مرکز جرم، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_0 = \frac{v_1^2}{m} + \frac{v_2^2}{2m} + \frac{v_3^2}{m} \quad (4.3.3)$$

۳-۴ نمایش انتگرالی معادلات در فضای تکانه

در این بخش معادلات جفت شده سیستم مقید چهار-نوکلئونی، رابطه (9.2.3)، را در پایه‌های فضای تکانه، در هر دو نمایش امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی، تصویر و ارزیابی می‌کنیم. حالت‌های پایه برای سیستم مقید چهار-نوکلئونی بر اساس بردارهای تکانه ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شوند، که در نمایش دیدگاه سه بُعدی فرم برداری آن‌ها وارد معادلات می‌شود:

$$|u_1 u_2 u_3, \alpha\rangle = |u\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 |\vec{u}\rangle \quad (1.4.3)$$

$$|v_1 v_2 v_3, \beta\rangle = |v\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 |\vec{v}\rangle \quad (2.4.3)$$

در اینجا  $\alpha$  و  $\beta$  سهم برهم کنش اعداد کوانتومی مداری، اسپینی و ایزواسپینی می‌باشند که در شکل (1.3) در حالت پایه ( $L = 0$ ) نمایش داده شده‌اند. هر کدام از حالت‌های پایه مولفه یاکوبوفسکی در هر دو نمایش، در فضای هیلبرت چهار-نوکلئونی راست-هنجار هستند. حالت‌های پایه سیستم مقید چهار-نوکلئونی در نمایش امواج پاره‌ای، به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\sum_{\alpha} \int u^2 Du |u\rangle\langle u| = \sum_{\alpha} \iiint u_1^2 du_1 u_2^2 du_2 u_3^2 du_3 |u_1 u_2 u_3, \alpha\rangle\langle u_1 u_2 u_3, \alpha| = 1 \quad (3.4.3)$$

$$\sum_{\beta} \int v^2 Dv |v\rangle\langle v| = \sum_{\beta} \iiint v_1^2 dv_1 v_2^2 dv_2 v_3^2 dv_3 |v_1 v_2 v_3, \beta\rangle\langle v_1 v_2 v_3, \beta|$$

$$= 1 \quad (4.4.3)$$

حالت‌های پایه سیستم چهار- نوکلئونی در نمایش دیدگاه سه بُعدی مشابه روابط (1.4.3) و (2.4.3) رفتار می‌کنند با این تفاوت که تمامی تکانه‌ها رفتار برداری دارند و به طور معمول در نمایش دیدگاه سه بُعدی می‌توان از اثرات اسپینی این پایه‌ها نیز چشم پوشی نمود. این پایه‌ها بر اساس مرجع [34] به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\sum_{\alpha} \int D^3 u |\bar{u}\rangle\langle \bar{u}| = \sum_{\alpha} \iiint d^3 u_1 d^3 u_2 d^3 u_3 |\bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3, \alpha\rangle\langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3, \alpha|$$

$$= 1 \quad (5.4.3)$$

$$\sum_{\beta} \int D^3 v |\bar{v}\rangle\langle \bar{v}| = \sum_{\beta} \iiint d^3 v_1 d^3 v_2 d^3 v_3 |\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3, \beta\rangle\langle \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3, \beta|$$

$$= 1 \quad (6.4.3)$$

بنابراین با تصویر نمودن هر مولفه در پایه متناظر خودش، و با وارد نمودن پایه‌های کامل مناسب بین عملگرها، دو معادله جفت شده یاکوبوفسکی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی به ترتیب در نمایش امواج پاره‌ای [3] و همچنین دیدگاه سه بُعدی [34]، به صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$\langle u|\psi_1\rangle = \sum_{\alpha'\alpha''} \int u'^2 Du' \int u''^2 Du'' \langle u|G_0 tP|u'\rangle\langle u'|1 - P_{34}|u''\rangle\langle u''|\psi_1\rangle$$

$$+ \sum_{\alpha'\beta'} \int u'^2 Du' \int v^2 Dv' \langle u|G_0 t\tilde{P}|u'\rangle\langle u'|v'\rangle\langle v'|\psi_2\rangle$$

$$(7.4.3)$$

$$\langle v|\psi_2\rangle = \sum_{\alpha'\beta'} \int v'^2 Dv' \int u'^2 Du' \langle v|G_0 tP|v'\rangle\langle v'|1 - P_{34}|u'\rangle\langle u'|\psi_1\rangle$$

$$+ \sum_{\beta'} \int v'^2 Dv' \langle v|G_0 t\tilde{P}|v'\rangle\langle v'|\psi_2\rangle$$

$$(8.4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{u}} | \psi_1 \rangle = & \sum_{\alpha' \alpha''} \int D^3 \mathbf{u}' \int D^3 \mathbf{u}'' \langle \bar{\mathbf{u}} | \mathbf{G}_0 t \mathbf{P} | \bar{\mathbf{u}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{u}}' | \mathbf{1} - \mathbf{P}_{34} | \bar{\mathbf{u}}'' \rangle \langle \bar{\mathbf{u}}'' | \psi_1 \rangle \\ & + \sum_{\alpha' \beta'} \int D^3 \mathbf{u}' \int D^3 \mathbf{v}' \langle \bar{\mathbf{u}} | \mathbf{G}_0 t \tilde{\mathbf{P}} | \bar{\mathbf{u}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{u}}' | \bar{\mathbf{v}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{v}}' | \psi_2 \rangle \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{v}} | \psi_2 \rangle = & \sum_{\alpha' \beta'} \int D^3 \mathbf{v}' \int D^3 \mathbf{u}' \langle \bar{\mathbf{v}} | \mathbf{G}_0 t \mathbf{P} | \bar{\mathbf{v}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{v}}' | \mathbf{1} - \mathbf{P}_{34} | \bar{\mathbf{u}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{u}}' | \psi_1 \rangle \\ & + \sum_{\beta'} \int D^3 \mathbf{v}' \langle \bar{\mathbf{v}} | \mathbf{G}_0 t \tilde{\mathbf{P}} | \bar{\mathbf{v}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{v}}' | \psi_2 \rangle \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

با ارزیابی هر یک از جملات بالا، چه به روش امواج پاره ای [3] و چه به روش دیدگاه سه بعدی [34]، معادلات انتگرالی جفت شده، برای حل عددی و رسیدن به مقادیر انرژی بستگی سیستم چهار- نوکلئونی آماده می‌شوند. در این فصل پیاده سازی تکنیک یاکوبوفسکی برای سیستم مقید چهار- نوکلئونی به دلیل اهمیت نتایج محاسبات انرژی بستگی به منظور مقایسه با نتایج سیستم‌های بالاتر هسته‌ای، مورد مطالعه و ارزیابی قرار گرفته‌اند. بنابراین در این بخش به دلیل اهمیت نتایج محاسبات حالت مقید سیستم چهار- نوکلئونی، ارزیابی جملات انتگرالی بالا را به مراجع خودشان موكول می‌نمائیم و در گام بعد با اشاره به تکنیک محاسبات، به بخش ارائه نتایج محاسبات برای انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی خواهیم پرداخت.

### ۳-۵ تکنیک محاسبات

به منظور پیاده سازی تکنیک محاسبات برای دو معادله انتگرالی یاکوبوفسکی در نمایش دیدگاه سه بعدی، نتیجه شده در بخش قبل، ابتدا با استفاده از روش گاوس- لژاندر<sup>۶۵</sup> [35] فضا را گسسته نموده تا این معادله انتگرالی به یک معادله ویژه مقدراری منجر شود. در ارزیابی نمایش دیدگاه سه بعدی به منظور سهولت در محاسبات اگر بردار سوم تکانه ژاکوبی را در راستای محور  $Z$  و بردار دوم را در صفحه  $X-Z$  در نظر بگیریم، همچنین بردار اول را آزاد فرض کنیم، در این صورت ابعاد مسئله از ۹ درجه آزادی به ۶ درجه تقلیل خواهد یافت. به این صورت که سه متغیر مستقل اندازه تکانه  $N_{jac}$ ، دو درجه دیگر تعداد زاویه‌های

<sup>65</sup> Gauss-Legendre

کروی  $N_{sph}$  و یک درجه زاویه سمتی  $N_{pol}$  می باشد. بنابراین ماتریس ویژه مقدراری به شکل زیر نتیجه می شود:

$$N = N_{jac}^3 \times N_{sph}^2 \times N_{pol} \times 2 \quad (1.5.3)$$

در اینجا  $N_{jac}$  مربوط به تکانه های ژاکوبی،  $N_{sph}$  مربوط به زاویه های قطبی و  $N_{pol}$  مربوط به زاویه های سمتی می باشد. بنابراین ماتریس ویژه مقدراری یک ماتریس ۶ بعدی خواهد بود. نمایش شماتیک این معادله ویژه مقدراری به شکل زیر است:

$$\eta(E)\psi = k(E)\psi \quad (2.5.3)$$

در اینجا  $E$  انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با ویژه مقدر  $\eta(E)$  می باشد. کرنل  $k(E)$  وابستگی مستقیمی به انرژی بستگی سیستم دارد و  $\psi$  نیز تابع موج ستونی معادلات انتگرالی یاکوبوفسکی را تشکیل می دهد. در حل عملگر گذار که از رابطه لیپمن- شوئینگر پیروی دارد، با توجه به پتانسیل تفکیک پذیر یاماگوچی، عملگر گذار از رابطه زیر پیروی می کند [56]:

$$\tau(\varepsilon) = \left[ \frac{m}{\lambda} - 4\pi \int_0^\infty u_1^2 du_1 \frac{(u_1^2 + \beta^2)^{-2}}{\varepsilon - \frac{u_1^2}{m}} \right]^{-1}, \quad (3.5.3)$$

$$\tau(\varepsilon^*) = \left[ \frac{m}{\lambda} - 4\pi \int_0^\infty v_1^2 dv_1 \frac{(v_1^2 + \beta^2)^{-2}}{\varepsilon^* - \frac{v_1^2}{m}} \right]^{-1}, \quad (4.5.3)$$

حال معادلات ارزیابی شده، نیاز به تعداد بیشماری درون یابی دارند، که ما از درون یابی کیوبیک-هرمیت<sup>۶۶</sup> [36] بهره برده ایم. در گام بعد نتایج محاسبات روی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل های مستقل از اسپین ارائه شده است.

### ۳-۶ نتایج محاسبات

<sup>66</sup> Cubic-Hermit Spline

در اولین گام پیاده سازی محاسبات از پتانسیل‌های مدل نوکلئون- نوکلئون مستقل از اسپین بهره برده‌ایم و نتایج محاسبات را با نتایج به دست آمده توسط روش‌های دیگر مقایسه نموده‌ایم. این مدل‌های پتانسیلی به نام‌های پتانسیل تفکیک پذیر یاماگوچی، پتانسیل گأوسی- شکل بیکر، پتانسیل گأوسی- شکل وُلکاو و همچنین پتانسیل یوکاوا- شکل مالفلیت- تیجن ۵، به شکل زیر در محاسبات به کار گرفته شده‌اند.

(۱) پتانسیل تفکیک پذیر یاماگوچی [38]:

$$V(r, r') = -\frac{\lambda\pi^2}{2m\beta^2} \exp[-\beta r] \exp[-\beta r'] [MeV]; \quad \lambda, \beta > 0, \quad (1.6.3)$$

که تبدیل فوریه آن در فضای تکانه می‌شود:

$$V(k, k') = -\frac{\lambda}{m} g(k) g(k') [MeV \cdot fm^3]; \quad g(k) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)} [fm^2]. \quad (2.6.3)$$

(۲) پتانسیل گأوسی- شکل بیکر [39]:

$$V(r) = -V_0 \exp[-\mu r^2] [MeV], \quad (3.6.3)$$

در فضای تکانه:

$$V(k, k') = -\frac{V_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (4\mu^2 + (k - k')^2)^{\frac{3}{2}}} [MeV \cdot fm^3]; \quad (4.6.3)$$

$$V_0 = 51.5 [MeV]; \quad \mu = 0.3906 [fm^{-2}],$$

(۳) پتانسیل یوکاوا- شکل وُلکاو [40]:

$$V(r) = V_R \exp[-\mu_R r^2] - V_A \exp[-\mu_A r^2] [MeV], \quad (5.6.3)$$

که در فضای تکانه داریم:



$$V(k, k') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{V_R}{(4\mu_R^2 + (k - k')^2)^{3/2}} - \frac{V_A}{(4\mu_A^2 + (k - k')^2)^{3/2}} \right) [MeV \cdot fm^3], \quad (6.6.3)$$

$$V_R = 144.86 [MeV]; V_A = 83.34 [MeV]; \mu_R = 1.487 [fm^{-2}]; \mu_A = 0.3906 [fm^{-2}].$$

۴) پتانسیل یوکاوا- شکل مالفیت-تیجن ۵ [41]:

$$V(r) = V_R \frac{\exp[-\mu_R r]}{r} - V_A \frac{\exp[-\mu_A r]}{r} [MeV], \quad (7.6.3)$$

متعاقباً در فضای تکانه خواهیم داشت:

$$V(k, k') = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{V_R}{(k - k')^2 + \mu_R^2} - \frac{V_A}{(k - k')^2 + \mu_A^2} \right) [MeV \cdot fm^3], \quad (8.6.3)$$

$$V_R = 1458.05 [MeV \cdot fm]; V_A = 578.09 [MeV \cdot fm];$$

$$\mu_R = 3.11 [fm^{-1}]; \mu_A = 1.55 [fm^{-1}].$$

در پتانسیل تفکیک پذیر یاماگوچی، جرم نوکلئون از رابطه  $m^{-1} = 41.470 [MeV \cdot fm^2]$  پیروی دارد. با نگاهی عمیق به نمایش در فضای تکانه پتانسیل های هسته ای بالا، به تبادل مزونی به صورت  $1/((k - k')^2 - \mu^2)$  پی خواهیم بُرد که در آن جرم مزون مبادله شده، همان ضریب ثابت  $\mu$  می باشد. ضرایب چهار نوع پتانسیل یاماگوچی در جدول (1.3) آورده شده است.

جدول (۳-۱): ضرایب پتانسیل یاماگوچی که در آن پارامتر بُرد پتانسیل و  $\beta$  پارامتر قدرت می باشد [38].

Potential	$\lambda [fm^{-3}]$	$\beta [fm^{-1}]$
YP-1	0.415	1.45
YP-2	0.353	1.45
YP-3	0.182	1.15
YP-4	0.179	1.15

پتانسیل های حضور یافته در محاسبات رایج ترین و به دلیل داشتن نتایج قابل قبول روی سیستم های دو- و سه- نوکلئونی، در عین حال بهترین نوع پتانسیل های نوکلئون- نوکلئون

مستقل از اسپین محسوب می‌شوند. نتایج آن‌ها برای انرژی بستگی یک سیستم مقید چهار- نوکلئونی در جداول زیر ارائه و لیست شده است.

جدول (۲-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل یاماگوچی.

Method	YP-1	YP-2	YP-3	YP-4
SKFR [42]	-84.66			
SKFR [43]	-90.10			
SKFR [5]	-89.74			
FY(PW) [3]	-89.90			
FY(3D) [34]	-89.8	-54.5	-38.2	-36.2
2DI [38]	-89.6	-54.5	-38.3	-36.3
This work	-89.9	-54.7	-38.4	-36.3

جدول (۳-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل بیکر.

Method	$E_4$
VAR [44]	$-39.1 \pm 0.1$
VAR [45]	-40.03
HHE [46]	-40.05
DFY [25]	-40.0
FY(PW) [3]	-40.03
FY(3D) [34]	-40.0
This work	-40.1

جدول (۴-۳): انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل وُلکاو.

Method	$E_4$
VAR [47]	-30.317
FY(PW) [3]	-30.27
FY(3D) [34]	-30.2
HHE [46]	-30.3988
DFY [25]	-30.2
HH [19,48]	-30.420
SVM [14]	-30.424

This work	-30.3
-----------	-------

جدول (۳-۵): انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور مالفلیت- تیجن ۵.

Method	$E_4$
CRCGBV [49]	-31.357
ATMS [50]	-31.36
GFMC [51]	$-31.3 \pm 0.2$
CCE [52]	-31.24
VAR [47]	$-31.19 \pm 0.05$
IDEA [53]	-30.98
DMC [54]	-31.5
FY(PW) [3]	-31.36
FY(3D) [34]	-31.3
EIHH [55]	-31.358
HH [19]	-31.347
SVM [14]	-31.360
This work	-31.4

نتایج محاسبات به روش دیدگاه سه بُعدی روی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل‌های مستقل از اسپین در جداول بالا ارائه شده است. قابل ذکر است که در پتانسیل‌های مدل یوکاوا- شکل یعنی وُلکاو و مالفلیت- تیجن ۵، نتایج به طور قابل قبولی به داده‌های تجربی مقدار ( $E_{exp}^{\alpha} = -28.295 \text{ MeV}$ ) بسیار نزدیک می‌باشند. دلیل آن وجود هر دو سهم برهم کنشی یعنی هم سهم دافعه و هم سهم جاذبه در جملات پتانسیلی می‌باشد. در پتانسیل تفکیک‌پذیر یا ماگوچی به دلیل کارایی آن تنها در حالت‌های پاره موجی پائین، یعنی حالت موج S و همچنین عدم وجود ترم مغزی دافعه، نتایجی به ما می‌دهد که با داده‌های تجربی اختلاف قابل ملاحظه‌ای دارد ولی نتایج محاسبات با حضور این پتانسیل، نسبت به نتایج تکنیک‌های دیگر در توافق بسیار مناسبی می‌باشد.

نظر به نتایج کسب شده برای انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی و در نظر گرفتن ساختار پایدار هسته آلفا به عنوان سیستم مورد نظر چهار- نوکلئونی، این مطالعه گامی

به سوی تلاش و مطالعه برای سیستم‌های بالاتر هسته‌ای به‌خصوص هسته‌های مقید شش-نوکلئونی است که در ساختار هاله‌ای شکل خود، ساختار منطقی و قابل قبولی از هسته  ${}^6\text{He}$  در این مطالعه به نتیجه خواهد رساند. اولین تلاش برای مطالعه سیستم‌های بالاتر هسته‌ای، یعنی هسته‌های  $A \geq 5$  به روش یاکوبوفسکی از فصل بعد آغاز می‌شود. در گام بعد مطالعه و بررسی روی سیستم‌های مقید پنج-نوکلئونی ادامه داده می‌شود.

بعد از پیاده‌سازی تکنیک یاکوبوفسکی و حل معادلات آن روی سیستم مقید چهار-نوکلئونی، دلیل ورود به فرمالیزم پنج-نوکلئونی به روش یاکوبوفسکی مطالعه و بررسی برهم‌کنش موثر ذره ساکن چهار-نوکلئونی آلفا و یک نوکلئون جاذب در چارچوب یک سیستم مقید پنج-نوکلئونی در حالت ساختار آلفا+ نوکلئون می‌باشد.

## فصل چہارم

سیستم مقید پنج - نوکلئونی

از دیدگاه فیزیک مکانیک کوانتومی، فرمول‌بندی و پیاده‌سازی محاسبات کوانتومی، چه نسبی و چه غیر نسبی، در مقابل روش‌های پدیده‌شناختی، یکی از بهترین تکنیک‌های استاندارد برای مطالعه سیستم‌های زیر اتمی و هادرونی به شمار می‌آید. به همین منظور در سال‌های اخیر محاسبات مربوط به تشدید و پراکندگی سیستم‌های چند نوکلئونی از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. به‌خصوص سیستم‌های بالاتر از سه- و چهار- نوکلئونی که تاکنون به دلیل پیچیدگی در پیاده‌سازی معادلات یاکوبوفسکی و همچنین حجم زیاد محاسبات ظاهراً دست نیافتنی بوده است. قابل ذکر است که مطالعه روی سیستم‌های چند نوکلئونی به روش یاکوبوفسکی تاکنون نهایتاً روی سیستم‌های چهار- نوکلئونی صورت پذیرفته است. در همین راستا، در این گام مطالعه یک سیستم پنج- نوکلئونی می‌تواند به عنوان یک انگیزش علمی، مورد تجزیه تحلیل قرار گیرد. همان‌طور که مشخص است هیچ سیستم پنج- نوکلئونی واقعی در طبیعت یافت نمی‌شود که شرایط حالت مقید را فراهم سازد، ولی در این مطالعه به منظور بررسی برهم‌کنش موثر ذره آلفا با یک نوکلئون جاذب به شکل پیکربندی "آلفا+ نوکلئون" در چارچوب یک سیستم مقید پنج- نوکلئونی مقید [57]، در این گام ما از مدل‌های پتانسیلی پدیده‌شناختی استفاده می‌کنیم که یک حالت مقیدی برای این سیستم فراهم می‌آورد. این نوع پتانسیل‌ها با روش‌های معتبر دیگر نیز به طور مشابه روی سیستم‌های پنج- نوکلئونی ساده، پیاده‌سازی شده‌اند [14] و در انتهای این فصل با نتایج محاسبات ما مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. تطابق مناسب و بسیار خوب نتایج به‌دست آمده توسط تکنیک یاکوبوفسکی روی سیستم مقید پنج- نوکلئونی در مقایسه با نتایج روش‌های دیگر، بیانگر قدرت و دقت بالای این تکنیک می‌باشد. همچنین در این مطالعه اختلاف انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی

در حالت پیکربندی "آلفا" و انرژی بستگی سیستم مقید پنج- نوکلئونی در حالت "آلفا+ نوکلئون" بیانگر این است که برهم کنش موثر ذره آلفا با نوکلئون پنجم یک نوع برهم کنش جاذبه و در حدود مقدار  $13 \text{ MeV}$  می باشد.

#### ۲-۴ فرمالیزم یاکوبوفسکی برای سیستم مقید پنج- نوکلئونی

در ابتدا بر اساس مدل خوشه‌ای استاندارد استفاده شده در مرجع [57]، یک سیستم پنج- نوکلئونی دارای خوشه‌بندی چهار تکه‌ای، سه تکه‌ای و دو تکه‌ای می باشد. برجسب‌های  $(a_4)$ ،  $(a_3)$  و  $(a_2)$  به ترتیب معرف زیر سیستم‌های چهار-، سه- و دو- تکه‌ای هستند. هدف ما از پیاده‌سازی معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم پنج- نوکلئونی به شکل زیرشاخه‌های دو تکه‌ای، رسیدن به ساختار موثر و دو تکه‌ای "آلفا+ نوکلئون" می باشد. اگر نوکلئون‌ها را شماره دار کنیم و در زیر سیستم اول (اولین خوشه)، ذره شماره یک و دو باهم اندرکنش کنند، یک زیر شاخه چهار تکه‌ای  $a_3$  به شکل  $12 + 3 + 4 + 5 \equiv 12$  خواهیم داشت. در ادامه خوشه سه تکه‌ای متناظر با خوشه چهار تکه‌ای  $a_4$ ، به صورت  $a_3 \equiv 123 + 4$  معرفی می شود (شکل (۴-۱)). در ادامه فرمالیزم از نمایش برجسب شاخه‌ای روی نوکلئون منفرد صرف نظر می کنیم. بنابراین معادله شرودینگر برای یک سیستم پنج- نوکلئونی با حضور پتانسیل برهم کنش جفتی، به صورت زیر معرفی می شود.

$$\left( H_0 + \sum_{a_4} V_{a_4} \right) \Phi = E \Phi, \quad (1.2.4)$$

در گام نخست، به منظور پیاده سازی فرمالیزم یاکوبوفسکی، به کمک هاملیتونی رابطه (1.2.4)، تابع موج سیستم پنج- نوکلئونی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\Phi = G_0 \sum_{a_4} V_{a_4} \Phi, \quad (2.2.4)$$

که در آن  $G_0 \equiv [E - H_0]^{-1}$  انتشارگر آزاد (تابع گرین) سیستم پنج- نوکلئونی و  $V_{a_4}$  معرف پتانسیل زیر سیستم دو- نوکلئونی به شکل  $a_4 \equiv 12$  می‌باشد. می‌دانیم تابع موج کل سیستم پنج- نوکلئونی از جمع تک تک توابع موج جفتی (۱۰ جمله منحصر به فرد) تشکیل یافته است، بنابراین داریم:

$$\Phi = \sum_{a_4} \varphi_{a_4} \equiv \varphi_{12} + \dots + \varphi_{45} \quad (3.2.4)$$

که با وارد نمودن آن در سمت چپ رابطه (2.2.4) خواهیم داشت:

$$\varphi_{a_4} \equiv G_0 V_{a_4} \Phi \quad (4.2.4)$$

همچنین با استفاده از رابطه (3.2.4)، مؤلفه تابع موج رابطه (4.2.4) را به صورت تفکیک شده زیر می‌نویسیم:

$$\varphi_{a_4} \equiv G_0 V_{a_4} \varphi_{a_4} + G_0 V_{a_4} \sum_{b_4} \bar{\delta}_{a_4 b_4} \varphi_{b_4}. \quad (5.2.4)$$

در اینجا  $\bar{\delta}_{a_4 b_4} = (1 - \delta_{a_4 b_4})$  معرف تابع پاد دلتای دیراک است. در ادامه با فاکتورگیری از جمله همسان  $\varphi_{a_4}$  در سمت راست رابطه (5.2.4) و انتقال آن به سمت دیگر و استفاده از بسط دو جمله- ای  $(1 - x)^{-1} = 1 + x + O(x^2)$ ، مؤلفه یاکوبوفسکی تابع موج زیر سیستم  $\varphi_{a_4}$  به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$\varphi_{a_4} \equiv G_0 t_{a_4} \sum_{b_4} \bar{\delta}_{a_4 b_4} \varphi_{b_4}, \quad (6.2.4)$$

که در آن عملگر گذار دو- نوکلئونی است که از معادله لیپمن- شوئیנגر [6] پیروی می‌کند:

$$t_{a_4} = V_{a_4} + V_{a_4} G_0 t_{a_4} \quad (7.2.4)$$

در اینجا  $b_4 \subset a_3$  یعنی خوشه چهار تایی  $a_4$  شامل زیر شاخه های خوشه سه تایی  $a_3$  می‌باشد. به وضوح می‌توان نوشت:



$$\varphi_{a_4 a_3} = G_0 t_{a_4} \sum_{b_4 \subset a_3} \bar{\delta}_{a_4 b_4} \varphi_{b_4}, \quad (8.2.4)$$

با قراردادن رابطه (7.2.4) در رابطه (8.2.4) خواهیم داشت:

$$\varphi_{a_4 a_3} = G_0 t_{a_4} \sum_{b_4 \subset a_3} \bar{\delta}_{a_4 b_4} \sum_{b_4 \subset b_3} \varphi_{b_4 b_3}, \quad (9.2.4)$$

با فاکتور گیری  $\varphi_{a_4 a_3}$  از دو طرف معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} \varphi_{a_4 a_3} - G_0 t_{a_4} \sum_{b_4 \subset a_3} \bar{\delta}_{a_4 b_4} \varphi_{b_4 a_3} \\ = G_0 t_{a_4} \sum_{b_4 \subset a_3} \bar{\delta}_{a_4 b_4} \sum_{b_4 \subset b_3} \bar{\delta}_{a_3 b_3} \varphi_{b_4 b_3}, \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

در ادامه جهت سهولت در فرمول‌بندی به روش لیپمن - شوئیگر و رسیدن به زیر شاخه‌های نهایی، توابع  $\varphi^{a_3}$  و  $\varphi^{(a_3)}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi^{a_3} = (1 - G_0 M^{a_3})^{-1} G_0 M^{a_3} \varphi^{(a_3)} \equiv G_0 \mathcal{J}^{a_3} \varphi^{(a_3)}. \quad (11.2.4)$$

که نمایش ماتریسی رابطه (10.2.4) می‌باشد. با انجام عملیات ریاضی مشابه رابطه (8.2.4) روی معادله بالا خواهیم داشت:

$$\varphi_{a_4 a_3} = G_0 \sum_{b_4 \subset a_3} \mathcal{J}_{a_4 b_4}^{a_3} (\varphi^{a_3})_{a_4} = G_0 \sum_{b_4 \subset a_3} \mathcal{J}_{a_4 b_4}^{a_3} \sum_{b_4 \subset b_3} \bar{\delta}_{a_3 b_3} \varphi_{b_4 b_3}, \quad (12.2.4)$$

آخرین تجزیه تابع موج رابطه (12.2.4) به تابع موج خوشه دو تکه‌ای به شکل زیر منجر می‌شود:

$$\varphi_{a_4, a_3}^{a_2} = G_0 \sum_{b_4 \subset a_3} \mathcal{J}_{a_4 b_4}^{a_3} \sum_{\substack{b_4 \subset b_3 \\ b_3 \subset a_2}} \bar{\delta}_{a_3 b_3} \varphi_{b_4 b_3}. \quad (13.2.4)$$

در گام بعد با پیاده سازی ماهیت نوکلئون‌ها به معادلات جفت شده یاکوبوفسکی بر اساس مولفه‌های مستقل و دو تکه‌ای تابع موج سیستم مقید پنج- نوکلئونی خواهیم رسید. دلیل

پیشروی فرمالیزم یاکوبوفسکی تا تابع موج خوشه‌های دو تکه‌ای، یافتن پیکربندی‌های مناسبی است که تقریب موثر "آلفا+ نوکلئون" در آن موثق و مطابق با این نوع پیکربندی‌ها باشد.

#### ۴-۲-۱ پیاده‌سازی ماهیت نوکلئون‌ها

در این گام به منظور دست‌یابی به معادلات جفت شده یاکوبوفسکی برای سیستم مقید پنج-نوکلئونی، با قرار دادن  $a_4 = 12$  و همچنین  $a_3 = 123$  و  $a_4 = 12$  در رابطه (12.2.4) و در نهایت با اندکی تجزیه تحلیل [57]، به چهار معادله جفت شده بر اساس چهار مولفه مستقل برای سیستم مقید پنج-نوکلئونی به شکل زیر دست خواهیم یافت:

$$\varphi_{12;123}^{1234} = G_0 \mathcal{T}^{123} \left( (P_{34} P_{45} - P_{34}) \varphi_{12;123}^{1234} - P_{34} \varphi_{12,123}^{123+45} + (\varphi_{12,12+34}^{125+34} + \varphi_{12,12+34}^{12+345}) + \varphi_{12;12+34}^{1234} \right), \quad (14.2.4)$$

$$\varphi_{12;12+34}^{1234} = G_0 \mathcal{T}^{12+34} \left( (1 - P_{34}) \left( (1 - P_{45}) \varphi_{12;123}^{1234} \right) + (1 - P_{34}) \varphi_{12,123}^{123+45} \right), \quad (15.2.4)$$

$$\varphi_{12,123}^{123+45} = G_0 \mathcal{T}^{123} (-P_{35}) \left( (\varphi_{12,12+34}^{125+34} + \varphi_{12,12+34}^{12+345}) + \varphi_{12;12+34}^{1234} \right), \quad (16.2.4)$$

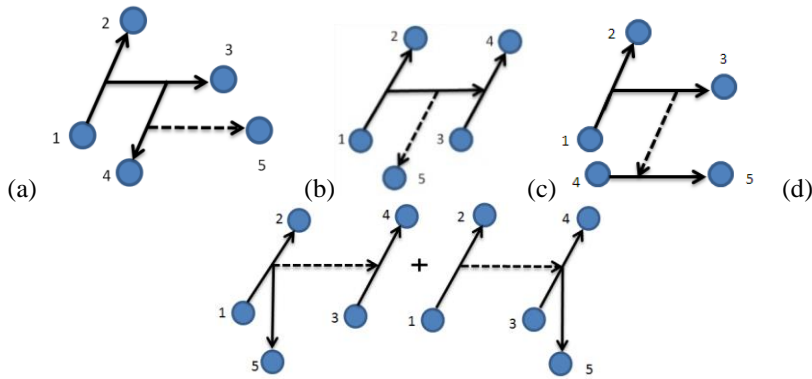
$$\begin{aligned} & \varphi_{12,12+34}^{125+34} + \varphi_{12,12+34}^{12+345} = \\ & G_0 \mathcal{T}^{12+34} \left( (-P_{35} - P_{45}) (\varphi_{12,12+34}^{125+34} + \right. \\ & \left. \varphi_{12,12+34}^{12+345}) - P_{45} (1 - P_{34}) \varphi_{12;12+34}^{1234} - P_{35} \left( (1 - P_{34}) \varphi_{12;123}^{1234} + \varphi_{12,123}^{123+45} \right) \right), \quad (17.2.4) \end{aligned}$$

همان‌طور که از تکنیک یاکوبوفسکی انتظار می‌رود، در معادلات جفت شده بالا، به ترتیب مولفه‌های  $\varphi_{12;123}^{1234}$ ،  $\varphi_{12,12+34}^{1234}$ ،  $\varphi_{12,12+34}^{125+34} + \varphi_{12,12+34}^{12+345}$  به عنوان چهار مولفه مستقل یاکوبوفسکی برای سیستم مقید پنج-نوکلئونی می‌باشند که هر کدام بیانگر پیکربندی خاص و منحصر به فردی از سیستم مقید پنج-نوکلئونی به شمار می‌آیند. در ادامه به بررسی این چهار پیکربندی می‌پردازیم و همچنین مولفه‌های متناظر با پیکربندی‌های حالت

موثر "آلفا+ نوکلئون" را به منظور بررسی برهمکنش موثر بین ذره آلفا و نوکلئون، انتخاب و مطالعه می کنیم.

### ۲-۲-۴ حالت‌های پایه در فضای تکانه

به منظور حل معادلات جفت شده بالا در فضای تکانه، ما تکانه های ژاکوبی استاندارد برای چهار مولفه مذکور را در شکل (1.4) نمایش می دهیم.



شکل (۱-۴): نمایش جامع تکانه های ژاکوبی برای چهار مولفه مستقل یک سیستم مقید پنج- نوکلئونی.

تکانه های ژاکوبی متناظر با ساختار (a) به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_1 &= 1/2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 \vec{a}_2 &= 1/3(2\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 \vec{a}_3 &= 1/4(3\vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \\
 \vec{a}_4 &= 1/5(4\vec{p}_5 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)
 \end{aligned}
 \tag{18.2.4}$$

بر اساس تعریف بالا، پایه مناسب در نمایش امواج پاره ای برای ساختار (a) به این صورت می باشد:

$$|a\rangle \equiv \left| \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 a_4; (l_1 s_{12}) j_1 \left( l_2 \frac{1}{2} \right) j_2 (j_1 j_2) I_3 \left( l_3 \frac{1}{2} \right) j_3 \\ \left( l_4 \frac{1}{2} \right) j_4 (j_3 j_4) I_4 (I_3 I_4) J, M_J \\ \otimes \left( t_{12} \frac{1}{2} \right) t_3 \left( t_3 \frac{1}{2} \right) t_4 \left( t_4 \frac{1}{2} \right) T, M_T \end{array} \right.$$

(19.2.4)

همچنین برای ساختار (b) داریم:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= 1/2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
\vec{b}_2 &= 1/2(\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
\vec{b}_3 &= 1/2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
\vec{b}_4 &= 1/5(4\vec{p}_5 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)
\end{aligned} \tag{20.2.4}$$

که پایه مناسب آن:

$$|b\rangle \equiv \left| \begin{array}{l} b_1 b_2 b_3 b_4; (l_1 s_{12}) j_1 (l_2 s_{34}) j_2 (j_1 j_2) S (l_3 S) I_4 \\ (l_4 \frac{1}{2}) j_4 (I_4 j_4) J, M_J \end{array} \right\rangle \otimes |(t_{12} t_{34}) t_4 (t_4 \frac{1}{2}) T, M_T\rangle \tag{21.2.4}$$

می باشد. برای ساختار (c) داریم:

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= 1/2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
\vec{c}_2 &= 1/3(2\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
\vec{c}_3 &= 1/2(\vec{p}_4 - \vec{p}_5) \\
\vec{c}_4 &= 1/2(3(\vec{p}_4 + \vec{p}_5) - 2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3))
\end{aligned} \tag{22.2.4}$$

پایه متناظر با آن:

$$|c\rangle \equiv \left| \begin{array}{l} c_1 c_2 c_3 c_4; (l_1 s_{12}) j_1 (l_2 \frac{1}{2}) j_2 (j_1 j_2) I_3 (l_3 s_{45}) j_3 \\ (l_4 j_3) I_4 (I_3 I_4) J, M_J \end{array} \right\rangle \otimes |(t_{12} \frac{1}{2}) t_3 (t_3 t_{45}) T, M_T\rangle \tag{23.2.4}$$

می باشد. برای ساختار (d) به صورت مجزا داریم:

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1 &= 1/2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
\vec{d}_2 &= 1/3(2\vec{p}_5 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
\vec{d}_3 &= 1/2(\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
\vec{d}_4 &= 1/2(3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) - 2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_5))
\end{aligned} \tag{24.2.4}$$

پایه متناظر آن:

$$|d\rangle \equiv \left| \begin{array}{l} d_1 d_2 d_3 d_4; (l_1 s_{12}) j_1 (l_2 \frac{1}{2}) j_2 (j_1 j_2) I_3 (l_3 s_{34}) j_3 \\ (l_4 j_3) I_4 (I_3 I_4) J, M_J \end{array} \right\rangle \otimes |(t_{12} \frac{1}{2}) t_3 (t_3 t_{34}) T, M_T\rangle \tag{25.2.4}$$

همین طور:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= 1/2(\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
\vec{e}_2 &= 1/3(2\vec{p}_5 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
\vec{e}_3 &= 1/2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
\vec{e}_4 &= 1/2(3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) - 2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_5))
\end{aligned}
\tag{26.2.4}$$

پایه متناظر آن:

$$|e\rangle \equiv \left| \begin{array}{c} e_1 e_2 e_3 e_4; (l_1 s_{34}) j_1 \left( l_2 \frac{1}{2} \right) j_2 (j_1 j_2) I_3 (l_3 s_{12}) j_3 \\ (l_4 j_3) I_4 (I_3 I_4) J, M_J \end{array} \right\rangle
\tag{27.2.4}$$

$$\otimes \left| \left( t_{34} \frac{1}{2} \right) t_3 (t_3 t_{12}) T, M_T \right\rangle$$

در هر پایه سهم تکانه هر نوکلئون  $p_i$ ، اعداد کوانتومی مداری، اسپینی و ایزواسپینی هر ذره کوانتومی نیز وارد شده است. به طور نمونه  $S_{ij}$  معادل مجموع اسپین زیر سیستم دو-جسمی  $i, j$ ، همچنین  $l_i$  بیانگر تکانه زاویه‌ای مداری تکانه ژاکوبی  $l_i$ ،  $J$  معادل تکانه کل زیر سیستم  $i$  - جسمی و  $J$  معادل تکانه کل سیستم پنج جسمی با تصویر  $M_J$  است. سهم پایه‌های ایزواسپین هم از همین تناظر نیز پیروی می‌کند. حالت‌های پایه معرفی شده بالا در فضای هیلبرت پنج جسمی<sup>۶۷</sup> راست-هنجار<sup>۶۸</sup> نیز هستند.

### ۳-۴ ساختار موثر "آلفا+ نوکلئون" در چارچوب سیستم پنج- نوکلئونی

حال در این گام با نگاهی به چهار پیکربندی مختلف یاکوبوفسکی در شکل (۱.۴) و با در نظر گرفتن ساختارهای سیستم مقید چهار- نوکلئونی (شکل (۱.۳)) تنها دو ساختار اول شکل (1.4) مناسب تقریب موثر آلفا- نوکلئون هستند و به تبع آن در ادامه محاسبات از حضور مولفه‌های دیگر در فرمالیزم یاکوبوفسکی صرف نظر می‌شود. بنابراین تنها دو معادله جفت شده اول یعنی معادلات (۱۴.۲.۴) و (۱۵.۲.۴) با حذف مولفه‌های غیر مرتبط در فرمالیزم باقی خواهند ماند. با این تفاسیر چهار معادله جفت شده یاکوبوفسکی برای حالت مقید آلفا+ نوکلئون به دو معادله جفت شده به شکل زیر تقلیل می‌یابد:

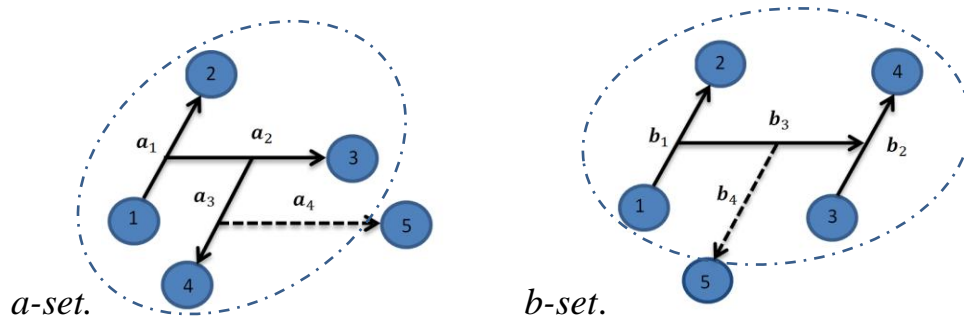
<sup>67</sup> Five-body Hilbert space

<sup>68</sup> Orthonormal basis states

$$\varphi_{12;123}^{1234} = G_0 \mathcal{J}^{123} (P_{34} P_{45} - P_{34}) \varphi_{12;123}^{1234} + \varphi_{12;12+34}^{1234}, \quad (1.3.4)$$

$$\varphi_{12;12+34}^{1234} = G_0 \mathcal{J}^{12+34} (1 - P_{45} - P_{34} + P_{34} P_{45}) \varphi_{12;123}^{1234}. \quad (2.3.4)$$

ساختار موثر آلفا+ نوکلئون مقید از شکل (۲.۴) پیروی می کند که با حذف سهم برهم کنش نوکلئون پنجم، معادله های کاهش یافته بالا نیز به معادله های معمول یک سیستم مقید چهار- نوکلئونی منجر خواهند شد [3] که دلیل کافی و بسیار مناسبی برای انتخاب دو ساختار شکل زیر از پیکربندی های معرفی شده در شکل (۱.۴)، به عنوان یک سیستم مقید پنج- نوکلئونی در حالت موثر آلفا+ نوکلئون می باشد.



شکل (۲-۴): نمایش پیکربندی ساختار موثر پنج- نوکلئونی آلفا+ نوکلئون.

حالت های پایه برای سیستم مقید پنج- نوکلئونی، بر اساس پیکربندی ها و بردارهای تکانه ژاکوبی معرفی شده بالا، به صورت زیر تعریف می شوند، که در نمایش دیدگاه سه بعدی فرم برداری آن ها وارد معادلات می شود:

$$|a_1 a_2 a_3 a_4, \alpha\rangle = |a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)^4 |\vec{a}\rangle \quad (3.3.4)$$

$$|b_1 b_2 b_3 b_4, \beta\rangle = |b\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)^4 |\vec{b}\rangle \quad (4.3.4)$$

در دیدگاه سه بعدی از اثرات اسپینی چشم پوشی نموده ایم و تنها بردارهای تکانه در هر پایه بدون اثرات اسپینی وارد معادلات خواهند شد. با تصویر نمودن دو مولفه باقی مانده از معادلات جفت شده سیستم پنج- نوکلئونی آلفا+ نوکلئون مقید، در پایه متناظر خودش، نمایش انتگرالی معادلات در نمایش دیدگاه سه بعدی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{a} | \varphi_{12;123}^{1234} \rangle \\
&= \int d^3 a' \int d^3 a'' \langle \vec{a} | G_0 \mathcal{T}^{123} | \vec{a}' \rangle \langle \vec{a}' | (P_{34} P_{45} - P_{34}) | \vec{a}'' \rangle \langle \vec{a}'' | \varphi_{12;12+34}^{1234} \rangle \\
&+ \int d^3 a' \int d^3 b' \langle \vec{a} | G_0 \mathcal{T}^{123} | \vec{a}' \rangle \langle \vec{a}' | \vec{b}' \rangle \langle \vec{b}' | \varphi_{12;123}^{1234} \rangle,
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

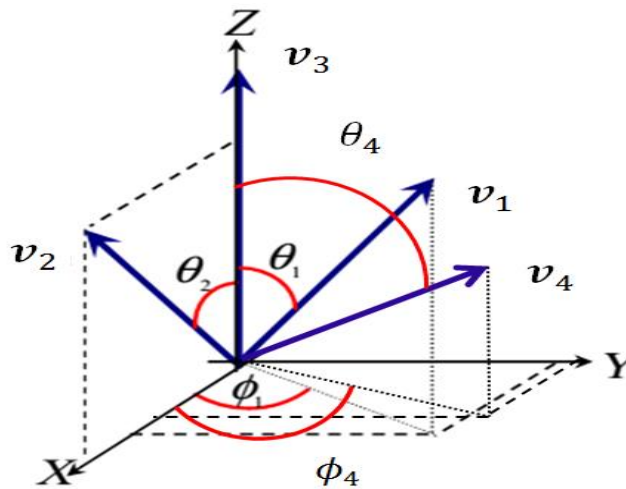
$$\begin{aligned}
& \langle \vec{b} | \varphi_{12;12+34}^{1234} \rangle \\
&= \int d^3 b' \int d^3 a' \langle \vec{b} | G_0 \mathcal{T}^{12+34} | \vec{b}' \rangle \langle \vec{b}' | (1 - P_{45} - P_{34} + P_{34} P_{45}) | \vec{a}' \rangle \langle \vec{a}' | \varphi_{12;123}^{1234} \rangle,
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

جملات ارزیابی شده هر معادله انتگرالی بالا در مرجع [57] به طور کامل ارزیابی شده اند. در اولین گام محاسبات از اثرات اسپینی صرف نظر نموده ایم، ولی بازهم اصل طرد پائولی در این معادلات حلکم است، به همین منظور است که تمامی جملات عملگرهای جایشگت بین نوکلئون‌ها با علامت منفی همراه است.

#### ۴-۴ تکنیک محاسبات

در این بخش به بیان جزئیات مربوط به حل عددی دو معادله انتگرالی جفت شده خواهیم پرداخت. گام اول در حل عددی این معادلات گسسته‌سازی انتگرال‌ها روی متغیرهای پیوسته تکانه و زاویه است. روشی که برای گسسته‌سازی انتگرال‌ها انتخاب کردیم روش گأوس-لژاندر<sup>۶۹</sup> است [35] است، چرا که اولاً دارای دقت خوبی است، و ثانیاً نسبت به روش‌های عددی دیگر به تعداد نقاط شبکه کمتری نیاز داریم که این موضوع در صرفه جویی حافظه در محاسبات مربوط به سیستم‌های چند جسمی اهمیت بسیار زیادی دارد [56]. همچنین به منظور تقلیل درجات آزادی مسئله از ۱۲ به ۹ از دستگاه مختصات مناسب استفاده می‌کنیم (شکل (۳-۴)). به گونه‌ای که بردار تکانه سوم را در راستای محور قائم، بردار تکانه دوم را در صفحه افق-قائم و بردارهای اول و چهارم رو به شکل دلخواه در فضا در نظر می‌گیریم.

<sup>69</sup> Gauss-Legendre



شکل (۴-۳): انتخاب دستگاه مختصات مناسب برای تقلیل درجات آزادی مسئله پنج-نوکلئونی. در اینجا  $v_i$  بیانگر بردارهای مربوط به  $a_i$  و  $b_i$  می‌باشد.

بنابراین معادله ویژه مقداری مرتبط با مسئله دارای یک ماتریس نه بعدی خواهد بود. چهار بعد مربوط به اندازه تکانه های ژاکوبی، سه بعد مربوط به زاویه های کروی و دو بعد مربوط به زاویه های سمتی می‌باشد. معادله شماتیک ویژه مقداری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\eta(E) \varphi = k(E) \varphi; \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{12;123}^{1234} \\ \varphi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix}, \quad (1.4.4)$$

در اینجا  $\eta(E)$  ویژه مقدار متناظر با یک است،  $k(E)$  عملگر کرنل و  $\varphi$  ویژه تابع مورد نظر است. با حل عددی معادله ویژه مقداری برای انرژی های مختلف، باید انرژی را جستجو کنیم که بزرگ ترین ویژه مقدار مثبت حاصل از این کرنل<sup>۷۰</sup> برابر یک شود. به طوری که انرژی متناظر با این ویژه مقدار، انرژی فیزیکی سیستم مورد نظر خواهد بود. مالفلیت و تیجن<sup>۷۱</sup> [41] برای حل معادلات فیدیف (سه-نوکلئونی) و یاکوبوفسکی (چهار-نوکلئونی) از تکنیک ساده ای به نام روش نسبت<sup>۷۲</sup> استفاده کردند. این روش براین اساس واقع شده است که با یک تعداد تکرار عملگر کرنل، بر روی یک تابع اولیه دلخواه همیشه به ویژه حالتی که متناظر با بزرگ-

<sup>70</sup> Kernel

<sup>71</sup> Malfliet and Tjon

<sup>72</sup> Ratio method



ترین ویژه مقدار است، همگرا می‌شود، به طوری که برای انرژی بستگی فیزیکی سیستم، هیچ ویژه مقدار، بزرگ‌تر از یک وجود ندارد. هر چند در مواردی که پتانسیل دارای دو قسمت جاذبه و دافعه است وجود قسمت دافعه در پتانسیل ممکن است سبب ایجاد ویژه مقادیر منفی شود که در این ویژه مقادیر به لحاظ اندازه بزرگ‌تر از یک هستند به طوری که دیگر این مقادیر متناظر با انرژی بستگی فیزیکی سیستم نخواهد بود. در این صورت تسلسل تکرارهای کرنل در روش نسبت به جای اینکه به مولفه های یاکوبوفسکی متناظر با انرژی بستگی سیستم هسته‌ای همگرا شود به یک پاسخ نادرست همگرا می‌شود. برای اجتناب از این مشکل دو راه می‌توان ارائه کرد. راه حل اول: در این تکرار این حالت ها را تعیین کنیم. سپس حالت اولیه‌ای را عمود بر آنها، برای استفاده در روش نسبت بسازیم [41]. راه حل دوم: یک مقدار ثابت به کرنل اضافه کنیم به طوری که طیف ویژه مقدار جابجا شده، بزرگ‌ترین ویژه مقدار شود که این ویژه مقدار، همان ویژه مقدار فیزیکی متناظر با انرژی بستگی سیستم است [37]. ویژه توابع دلخواه را به شکل معمول توابع گاوسی استفاده می‌کنند. روشی که برای مسئله های مان در هر گام استفاده می‌کنیم براساس ساختن پایه‌های بهینه شده با ابعاد کوچک برای قطری کردن یک ماتریس بزرگ استوار است، که به این روش متعامد سازی گرام-اشمیت [35] می‌گویند که این روش شباهت زیادی به روش الگوریتم لنگسوز [58,59] دارد. جزئیات روش گرام-اشمیت در مرجع [35] آمده است. بنابراین از جزئیات آن صرف نظر نموده و کار را با این فرض ادامه می‌دهیم. ماتریس متناظر با انرژی بستگی فیزیکی سیستم، ماتریسی است که بزرگ‌ترین ویژه مقدار این ماتریس به ازای آن انرژی، یک شود. بنابراین با ورودی انرژی های مختلف، انرژی بستگی را جستجو می‌کنیم که بزرگ‌ترین ویژه مقدار متناظر با آن یک شود [3]. به منظور محاسبه دقیق انرژی بستگی فیزیکی سیستم که متناظر با ویژه مقدار یک است، می‌توان با دادن سه و یا چهار انرژی در همسایگی انرژی بستگی مقید سیستم‌های مورد بررسی، ویژه مقادیر متناظر با این انرژی هارا به دست آورد. سپس با درونیابی و یا برون‌یابی انرژی دقیق سیستم پنج-نوکلئونی که متناظر با یک است را محاسبه کنیم.

## ۴-۵ نتایج محاسبات

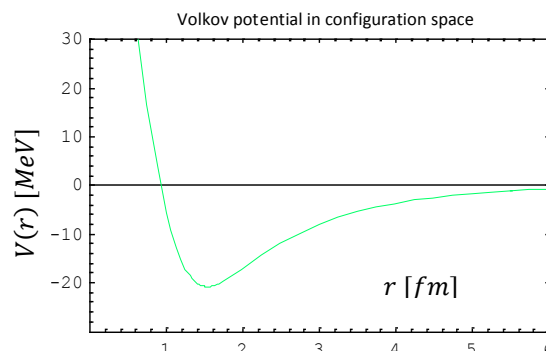
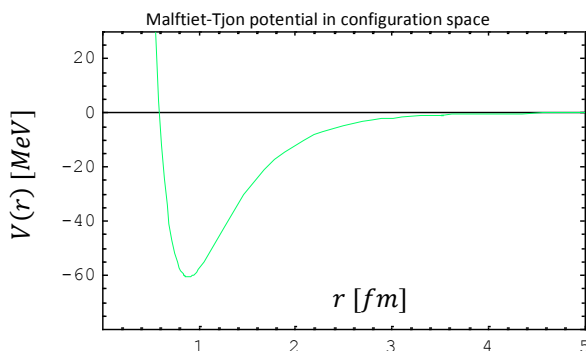
در این بخش نتایج محاسبات سیستم مقید پنج- نوکلئونی به روش یاکوبوفسکی در نمایش دیدگاه سه بعدی با نتایج روش‌های دیگر ارائه شده و مورد مقایسه قرار گرفته است. ما در محاسبات از دو نوع پتانسیل به ترتیب زیر مدل‌های گاوسی - شکل (ولکاو پتانسیل) و پتانسیل یوکاوا- شکل (مالفلیت- تیجن (۵) بهره برده‌ایم.

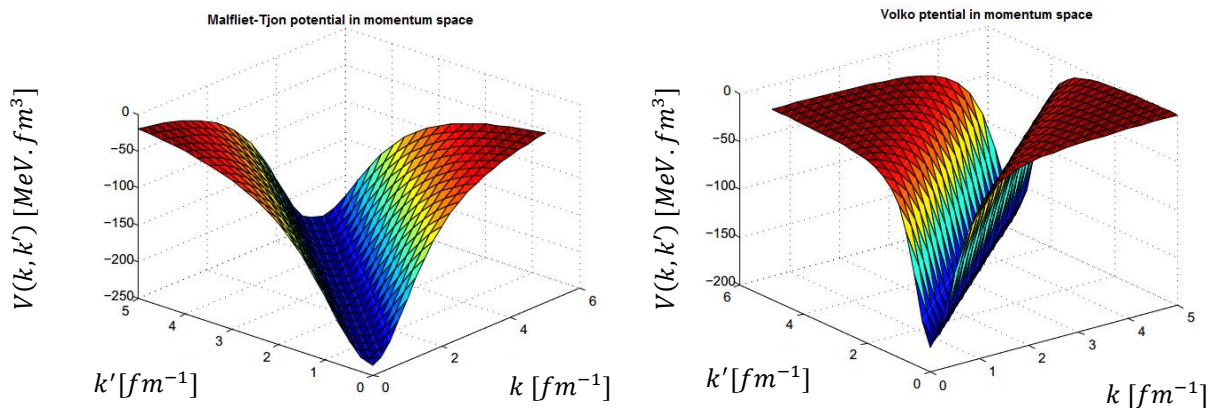
$$V(r) = V_R \exp[-\mu_R r^2] - V_A \exp[-\mu_A r^2] \text{ [MeV]}, \quad (1.5.4)$$

$$V(r) = V_R \frac{\exp[-\mu_R r]}{r} - V_A \frac{\exp[-\mu_A r]}{r} \text{ [MeV]}, \quad (2.5.4)$$

جدول (۴-۱): پارامترهای بُرد و قدرت پتانسیل‌های به کار گرفته شده در محاسبات. برچسب‌های  $R, A$  به ترتیب نمایانگر بخش جاذبه و دافعه جملات پتانسیلی می‌باشند.

Potential	Type	$V_R$	$\mu_R$	$V_A$	$\mu_A$
Volko [15]	Gauss	144.86	1.487	83.34	0.3906
Malfliet-Tjon V [16]	Yukawa	1458.05	3.11	578.09	1.55





شکل (۴-۴): رفتار پتانسیل‌های وارد در محاسبات در دو فضای مختصه و تکانه.

فرم پتانسیل‌های مورد استفاده در این بخش در فصل قبل هم در فضای مختصه و هم در فضای تکانه نمایش داده شده است. بنابراین ما در جداول زیر نتایج محاسبات با این پتانسیل‌ها را ارائه می‌کنیم.

جدول (۲-۴): انرژی بستگی سیستم مقید پنج- نوکلئونی با حضور پتانسیل ولکاو.

Method	$E_5$
HH [48]	-43.032
HH [48]	-42.38
SVM [14]	-43.00
This work	-44.02

جدول (۳-۴): انرژی بستگی سیستم مقید پنج- نوکلئونی با حضور مالفلیت-تیجن ۵.

Method	$E_5$
VMC [13]	-42.98
SVM [14]	-43.48
This work	-44.30

نتایج انرژی بستگی برای سیستم مقید پنج- نوکلئونی نتایج مناسب و قابل قبولی به همراه دارد. در بالا می‌توان تطابق خوب و ارزنده‌ای میان نتایج محاسبات مان با نتایج تکنیک‌های معتبر دیگر به‌خصوص تکنیک SVM مشاهده نمود.

قابل ذکر است که نتایج انرژی بستگی یک سیستم مقید پنج- نوکلئونی در حالت مقید "آلفا+ نوکلئون" برای اولین بار به روش یاکوبوفسکی در این پروژه به انجام رسیده است. در ضمن اختلاف انرژی بستگی سیستم مقید پنج- نوکلئونی "آلفا+ نوکلئون" و انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی "آلفا" بیانگر این است که برهمکنش موثر آلفا و نوکلئون در این مطالعات از نوع جاذبه و حدود ۱۳ MeV می باشد. به جداول بالا و همچنین به جداول نتایج فصل قبل مراجعه کنید.

#### ۴-۶ تست درستی و دقت محاسبات

در این بخش به منظور بررسی درستی محاسبات و بررسی تست همگرایی معادله ویژه مقداری اشاره شده در بخش تکنیک محاسبات، مقدار چشم داشتی انرژی کل که معادل نتایج ویژه مقدار انرژی بستگی می باشد را محاسبه نماییم و همچنین همگرایی توابع موج یاکوبوفسکی را روی معادله ویژه مقداری بررسی کنیم. در محاسبات مقدار چشم داشتی انرژی بستگی از پتانسیل مالیفلیت-تیجن ۵ بهره برده ایم. در مرجع [69] تابع موج کل سیستم مقید پنج- نوکلئونی محاسبه شده است که دارای ۹۰ مولفه می باشد. در رابطه زیر ۶۰ تای آن مربوط به مولفه اول و ۳۰ تای آن مربوط به مولفه دوم می باشد:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &\equiv \langle \Psi_{\alpha-n} | H | \Psi_{\alpha-n} \rangle = \langle \Psi_{\alpha-n} | H_0 | \Psi_{\alpha-n} \rangle + \langle \Psi_{\alpha-n} | V_{ij} | \Psi_{\alpha-n} \rangle \\ &= (60 \langle \psi_{12;123}^{1234} | H_0 | \Psi_{\alpha-n} \rangle + 30 \langle \psi_{12;12+34}^{1234} | H_0 | \Psi_{\alpha-n} \rangle) \\ &\quad + 10 \langle \Psi_{\alpha-n} | V_{ij} | \Psi_{\alpha-n} \rangle, \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

نتایج مقدار چشم داشتی از رابطه بالا قابل دستیابی می باشد که در جدول زیر به آن نتایج اشاره شده است.

جدول (۴-۴): مقادیر چشم داشتی انرژی کل سیستم مقید پنج- نوکلئونی.

Method	$\langle H_0 \rangle$	$\langle V \rangle$	$\langle H \rangle$	$E$
Malfliet-Tjon	72.43	-118.71	-46.28	-44.30

همان طور که در جدول (۴-۴) مشخص است تطابق بسیار مناسب بین نتایج ویژه مقدار انرژی و مقدار چشم داشتی هامیلتونی بیانگر دقت بالای محاسبات می باشد.

جدول (۴-۵): تست همگرایی ویژه مقدار انرژی با وجود نقاط شبکه برای تکانه های ژاکوبی و همچنین زوایای معرفی شده در بخش تکنیک محاسبات.

$N_{jac}^a$	$N_{jac}^b$	$N_{sph} = N_{azi}$	$\eta$
10	10	14	0.926
14	10	14	0.963
16	14	14	0.987
20	16	14	0.998
20	20	14	1.000

در جدول (۴-۵) تست همگرایی ویژه مقدار انرژی نیز بررسی شده است. در جدول بالا اگر تعداد نقاط شبکه را افزایش دهیم، به طبع تطابق در نتایج محاسبات در جدول (۴-۳) نیز بهتر خواهد شد.

اهمیت مطالعه و بررسی روی سیستم‌های پنج- نوکلئونی بیشتر به دلیل حالت‌های پراکندگی سیستم به شکل پراکندگی آلفا+ نوکلئون می‌باشد. همچنین مطالعه این سیستم پُلی است برای رفتن به سوی سیستم‌های بالاتر هسته‌ای بر مبنای روش یاکوبوفسکی. یادآور می‌شویم که قبل از انجام این پروژه مطالعه روش یاکوبوفسکی تنها روی هسته‌های چهار- نوکلئونی مقید ختم می‌شد، که این پروژه توانست با روش‌های مناسب حل تحلیلی در کنار حل عددی، رفتار هسته‌های بالاتر از چهار- نوکلئونی را برای اولین بار به صورت رفتار هسته- های سَبک بر مبنای تکنیک یاکوبوفسکی مطالعه و بررسی نماید. انتخاب این تکنیک و نتایج بسیار مناسب به دست آمده در محاسبات آن، تائیدی بر کارآمدی این تکنیک روی سیستم‌های شش- نوکلئونی نیز می‌باشد، به خصوص سیستم هاله ای شکل  ${}^6\text{He}$ . بنابراین در فصل بعد با داشتن معادلات یاکوبوفسکی مربوط به سیستم مقید شش- نوکلئونی، به دنبال رسیدن به نتایج مناسب انرژی بستگی این سیستم در حالت "هاله- ساختار موثر" یعنی ساختار "آلفا+ نوکلئون + نوکلئون" خواهیم پرداخت.



## فصل پنجم

سیستم مقید شش - نوکلئونی

تاکنون محاسبات مربوط به تابع موج و انرژی بستگی سیستم‌های هسته‌ای، چه به روش استاندارد امواج پاره‌ای و چه به روش مُدرن دیدگاه سه بُعدی، با حل معادلات فیدیف و یاکوبوفسکی برای سیستم‌های مقید حداکثر چهار- نوکلئونی انجام شده بود. یکی از دلایل عدم پیشرفت در این زمینه را می‌توان حجم بالای محاسبات و نیاز به سیستم‌های محاسباتی سریع دانست. در این میان بررسی سیستم‌های مقید شش- نوکلئونی، به‌خصوص سیستم هاله‌ای شکل هسته  ${}^6\text{He}$  اخیراً مورد توجه قرار گرفته‌اند. به دلیل فرمول‌بندی استاندارد تکنیک یاکوبوفسکی که فرمالیزم آن قابل ارتقاء به سیستم‌های بالاتر از  $A = 4$  نیز می‌باشد، و همچنین در ادامه با حذف تعدادی از مولفه‌های یاکوبوفسکی تابع موج، به منظور توصیف حالت‌های خاصی از سیستم مقید شش- نوکلئونی، می‌توان از سختی و پیچیدگی های معادلات یاکوبوفسکی مربوط به سیستم مقید شش- نوکلئونی اجتناب نمود و معادلات یاکوبوفسکی را برای سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت موثر "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون" حل نمود [56,37].

هدف ما در این فصل، حل معادلات یاکوبوفسکی برای یک سیستم مقید شش- نوکلئونی در فضای تکانه، به روش امواج پاره‌ای و همچنین دیدگاه سه بُعدی با استفاده از نمایش تکانه‌های ژاکوبی می‌باشد. هر دو روش یعنی امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی، امتیازها و سهولت‌های خاص خود را دارند که به تفضیل در بخش اول مورد بحث قرار گرفته شد. علاوه بر دستاوردهای مناسب سیستم پنج- نوکلئونی در فصل قبل با این روش [57,69]، یکی دیگر از محوری‌ترین دستاورد این رساله پیاده‌سازی تکنیک‌های عددی مناسب به منظور دستیابی به انرژی بستگی ساختار خاصی از سیستم مقید شش- نوکلئونی به نام "هاله- ساختار موثر" در دو دیدگاه مختلف، دیدگاه امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی، می‌باشد. به طوری که با حذف سهم برهم کنش نوکلئون‌های پنجم و ششم، این پیکربندی‌ها به ساختار معمول و پیکربندی رایج سیستم چهار- نوکلئونی به صورت ذره آلفا تقلیل می‌یابند. بنابراین انتخاب دو مولفه مناسب توصیف کننده سیستم هاله- ساختار موثر، از پنج مولفه مستقل



یاکوبوفسکی، یک انتخاب معقول و منطقی برای ساده سازی در مطالعه سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت هاله- ساختار موثر به شمار می آید [56,37]. در گام بعد با ارزیابی معادلات انتگرالی در دو دیدگاه اشاره شده بالا، دو معادله مربوط به حالت هاله- ساختار موثر را برای حل عددی آماده می کنیم. در نهایت با استفاده از پتانسیل های مدل مستقل و همچنین وابسته به اسپین، نتایج حالت مقید این سیستم به دست خواهد آمد. به منظور ارزیابی تست درستی و دقت محاسبات، در گام آخر این فصل همانند فصل قبل، مقدار چشم داشتی هامیلتونی سیستم را نیز بدست آورده و با ویژه مقدار انرژی مقایسه می نمائیم. نتایج به دست آمده در این پروژه چه با پیاده سازی فرمالیزم یاکوبوفسکی مستقل از اسپین و چه با پیاده سازی فرمالیزم یاکوبوفسکی وابسته به اسپین، در مقایسه با نتایج روش های معتبر و پیشرفته دیگر، مقادیر قابل قبولی را به همراه دارد.

## ۵-۲ معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم مقید شش- نوکلئونی

برای پیاده سازی یک سیستم شش- نوکلئونی مقید بر مبنای تکنیک معادلات یاکوبوفسکی، ابتدا از فرمالیزم استاندارد خوشه ای که از آن در پیاده سازی سیستم مقید پنج- نوکلئونی که در فصل قبل معرفی نمودیم، بهره می بریم. نتایج معادلات یاکوبوفسکی برای یک سیستم مقید شش- نوکلئونی، پنج معادله جفت شده براساس پنج مولفه مستقل یاکوبوفسکی می باشد [60] که به شکل زیر نتیجه می شوند:

$$\begin{pmatrix} \psi_{12;123}^{1234} \\ \psi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix} - G_0 \begin{pmatrix} T^{123}(-P_{34}) & T^{123} \\ T^{12+34}(1-P_{34}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{12;123}^{1234} \\ \psi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix} \\ = G_0 \begin{pmatrix} T^{123}(-P_{34}) & T^{123} \\ T^{12+34}(1-P_{34}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(P_{45} + P_{46})\psi_{12;123}^{1234} + (1 - P_{56} - P_{46}) \psi_{12;123}^{123+45} \\ (1 - P_{56})(\psi_{12;12+34}^{125+34} + \psi_{12;12+34}^{12+345}) + \psi_{12;12+34}^{12+34+56} \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{12;123}^{123+45} - G_0 T^{123} & \left( -(1 - P_{36}) P_{53} (\psi_{12;12+34}^{125+34} + \psi_{12;12+34}^{12+345}) \right) \\ & = -G_0 T^{123} P_{35} (\psi_{12;12+34}^{1234} + \psi_{12;12+34}^{12+34+56}) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} & (\psi_{12;12+34}^{125+34} + \psi_{12;12+34}^{12+345}) - G_0 T^{12+34} (P_{35} P_{56} - P_{35} - P_{46} - P_{45}) (\psi_{12;12+34}^{125+34} + \psi_{12;12+34}^{12+345}) \\ & = G_0 T^{12+34} \left( \begin{aligned} & (1 - P_{36} - P_{34} - P_{46}) P_{34} P_{35} \psi_{12;123}^{1234} \\ & + (1 - P_{34}) P_{46} P_{35} \psi_{12;123}^{123+45} - (P_{45} + P_{35}) \psi_{12;12+34}^{1234} - P_{35} \psi_{12;12+34}^{12+34+56} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

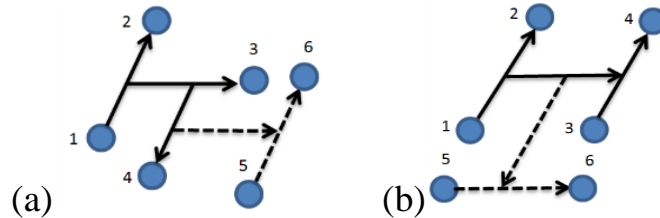
$$\begin{aligned} & \psi_{12;12+34}^{12+34+56} - G_0 T^{12+34} P_{35} P_{46} \psi_{12;12+34}^{12+34+56} \\ & = G_0 T^{12+34} \left( P_{35} P_{46} \psi_{12;12+34}^{1234} \right. \\ & \quad \left. + (1 - P_{34}) P_{35} P_{46} (\psi_{12;12+34}^{125+34} + \psi_{12;12+34}^{12+345}) \right) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

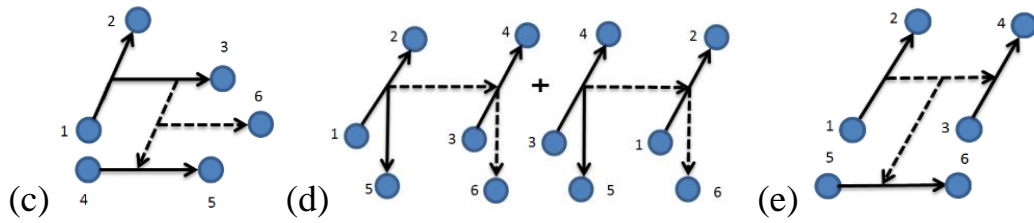
پنج معادله جفت شده یا کوبوفسکی اشاره شده بالا برای یک سیستم مقید شش-نوکلئونی بر اساس پنج مولفه مستقل یا کوبوفسکی تشکیل یافته‌اند که به ترتیب ظاهر شدن در معادلات مولفه‌های  $\psi_{12,123}^{123+45}$ ،  $\psi_{12,12;34}^{12+345}$ ،  $\psi_{12;12+34}^{125+34}$ ،  $\psi_{12;12+34}^{12+34+56}$ ،  $\psi_{12,12+34}^{1234}$ ،  $\psi_{12,123}^{1234}$  هستند. در این معادلات ماتریس‌های گذار شش-نوکلئونی از روابط زیر پیروی می‌کنند [60]:

$$T^{12+34} = T_{12;12}^{12+34} + T_{12;34}^{12+34} \tilde{P} \quad (5.2.5)$$

$$T^{123} = T_{12;12}^{123} + T_{12;23}^{123} P_{12} P_{23} + T_{12;31}^{123} P_{13} P_{23} \quad (6.2.5)$$

پنج مولفه مستقل یا کوبوفسکی، از پنج پیکربندی مختلف به صورت شکل (1.5) پیروی می‌کنند که این پیکربندی‌ها در مختصات ژاکوبی نمایش داده شده است.





شکل (۵-۱): نمایش شماتیک پنج نوع پیکربندی یاکوبوفسکی که به ترتیب ساختار  $\psi_{12,123}^{1234}$ ,  $\psi_{12,12+34}^{1234}$

را نمایش می‌دهد. خطوط مورب بیانگر نوکلئون‌های سست مقید می‌باشد.  $\psi_{12,123}^{123+45}$ ,  $\psi_{12,12;34}^{12+345}$ ,  $\psi_{12;12+34}^{125+34}$ ,  $\psi_{12;12+34}^{12+34+56}$

قابل ذکر است که تمامی مولفه‌های یاکوبوفسکی اشاره شده بالا اهمیت یکسانی دارند و برای حل کامل این سیستم مقید هسته‌ای با در نظر گرفتن تمامی پیکربندی‌های موجود، نیاز به سیستم‌های محاسباتی فوق پیشرفته است. ولی به منظور تلاش برای رسیدن به ویژگی‌های حالت مقید یک سیستم هسته‌ای واقعی، مانند سیستم مقید شش- نوکلئونی  ${}^6\text{He}$  در حالت "هاله- ساختار موثر" یعنی همان پیکربندی "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون"، ما در ادامه کار تنها به دو مؤلفه اول از مؤلفه‌های یاکوبوفسکی تابع موج نیاز داریم، به عبارت دیگر تنها مولفه‌های توصیف کننده سیستم هاله‌ای شکل اشاره شده بالا، دو مولفه اول یاکوبوفسکی یعنی مولفه‌های  $\psi_{12,123}^{1234}$  و  $\psi_{12,12+34}^{1234}$  می‌باشند که در ادامه به آن سرو کار داریم. بنابراین مولفه‌های دیگر را خاموش می‌کنیم. در این صورت معادلات یاکوبوفسکی به دو معادله جفت شده به شکل زیر منجر می‌شود:

$$G_0 \begin{pmatrix} \psi_{12;123}^{1234} \\ \psi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{123}(-P_{34}) & T^{123} \\ T^{12+34}(1-P_{34}) & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \psi_{12;123}^{1234} \\ \psi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(P_{45} + P_{46})\psi_{12;123}^{1234} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (7.2.5)$$

با توجه به رابطه (8.2.3) در تناسب حاصل شده در فصل سوم، یعنی تناسب ماتریس گذار از نمایش  $T^{123}$  و  $T^{12+34}$  به نمایش  $t_{12}$  مناسب است که این تقلیل در مسئله شش- نوکلئونی نیز برقرار باشد. بنابراین با معادل قرار دادن رابطه (8.2.3) در رابطه (7.2.5)، مطابق رابطه

زیر به دو معادله جفت شده برای سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون" موثر می‌رسیم:

$$\begin{pmatrix} \psi_{12,123}^{1234} \\ \psi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 t_{12} P (1 - P_{34}) & G_0 t_{12} P \\ G_0 t_{12} \tilde{P} (1 - P_{34}) & G_0 t_{12} \tilde{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{12,123}^{1234} \\ \psi_{12;12+34}^{1234} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(P_{45} - P_{46}) \psi_{12,123}^{1234} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.2.5)$$

که در آن طبق روال تعاریف گفته شده در فصل‌های قبل  $P = P_{12}P_{13} + P_{12}P_{23}$  عملگر جایگشت روی زیر سیستم سه- نوکلئونی و  $\tilde{P} = P_{13}P_{24}$  عملگر جایگشت روی زیر سیستم چهار- نوکلئونی روی مولفه‌های باقی‌مانده یاکوبوفسکی می‌باشند. شکل خطی معادلات جفت شده ماتریسی رابطه (8.2.5)، به صورت زیر بیان می‌شود [37]:

$$\psi_{12,123}^{1234} = G_0 t_{12} P [(1 - P_{34})(1 - P_{45} - P_{46}) \psi_{12,123}^{1234} + \psi_{12;12+34}^{1234}], \quad (9.2.5)$$

$$\psi_{12;12+34}^{1234} = G_0 t_{12} \tilde{P} [(1 - P_{34})(1 - P_{45} - P_{46}) \psi_{12,123}^{1234} + \psi_{12;12+34}^{1234}]. \quad (10.2.5)$$

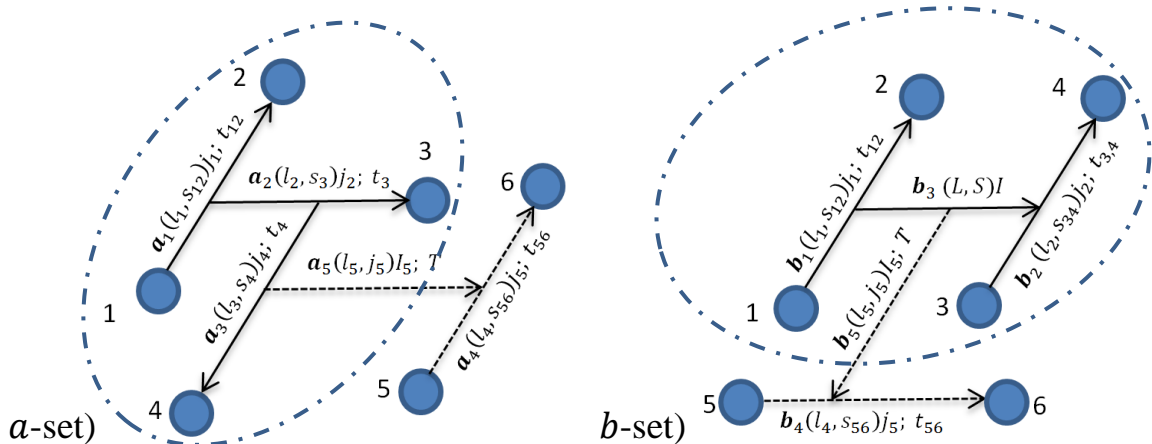
در سیستم‌های هسته‌ای همان‌طور که می‌دانیم نوکلئون‌ها از دینامیک فرمیونی پیروی می‌کنند. به هر حال در این گام به منظور بررسی نوکلئون‌ها با حضور پتانسیل‌های مستقل از درجات اسپینی، تمامی علامت‌های منفی روابط بالا مثبت تلقی می‌شود [34,56]. ولی در گام بعد با حضور پتانسیل‌های نوکلئونی واقعی وابسته به اسپین، علامت‌های معادلات بالا تغییری ننموده و اصل طرد پائولی رعایت می‌شود [61]. این سناریو برای ساده سازی سیستم‌های نوکلئونی در حوزه فیزیک سیستم‌های چند- نوکلئونی قابل پذیرش می‌باشد. ضمناً در نمایش امواج پاره‌ای می‌توان به جای وارد ساختن تمامی اعداد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری، تمامی نوکلئون‌ها را در حالت موج S بررسی نمود، در این حالت نیز نوکلئون‌ها رفتار بوزونی از خود نشان می‌دهند. این ساده‌سازی برای سیستم‌های بس- ذره‌ای به دلیل آمار کوانتومی فرمیونی و همچنین اصل طرد پائولی، ناکارآمد و غیر قابل قبول می‌باشد.

## ۵-۲-۱ حالت‌های پایه در فضای تکانه

به منظور نمایش معادلات جفت شده یاکوبوفسکی در فضای تکانه، در این بخش مجموعه بردارهای تکانه ژاکوبی متناظر با خوشه‌های مربوط به مولفه‌های اول و دوم یاکوبوفسکی را معرفی می‌کنیم (شکل (۵-۲) را مشاهده کنید). سیستم مقید شش-نوکلئونی چه در فضای تکانه و چه در فضای مکان دارای ۱۸ درجه آزادی است که با تبدیل تکانه‌های منفرد به تکانه‌های ژاکوبی درجات آزادی سیستم به ۱۵ درجه تقلیل خواهد یافت. به عبارت دیگر شش بردار تکانه مربوط به هر نوکلئون بر حسب پنج بردار تکانه ژاکوبی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 \\ \vec{a}_5 \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 \\ \vec{k}_3 \\ \vec{k}_4 \\ \vec{k}_5 \\ \vec{k}_6 \end{pmatrix}, \quad (11.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \vec{b}_4 \\ \vec{b}_5 \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 \\ \vec{k}_3 \\ \vec{k}_4 \\ \vec{k}_5 \\ \vec{k}_6 \end{pmatrix}. \quad (12.2.5)$$



شکل (۵-۲): نمایش مولفه‌های یاکوبوفسکی سیستم مقید شش- نوکلئونی در حالت آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون.

همچنین در ادامه انرژی جنبشی سیستم مقید شش- نوکلئونی برحسب مجموعه بردارهای تکانه‌های ژاکوبی بیان می‌شود. برای سیستم مقید شش- نوکلئونی همان طور که گفته شد هر نوکلئون ۳ درجه آزادی دارد، بنابراین در کل ۱۸ درجه آزادی داریم. با انتخاب تکانه‌های ژاکوبی انرژی جنبشی مرکز جرم برابر صفر خواهد شد و درجه آزادی نوکلئون‌ها در پایه‌های تکانه ژاکوبی با داشتن ۵ بردار تکانه به ۱۵ درجه آزادی تقلیل می‌یابد. هامیلتونی آزاد سیستم عبارت است از:

$$H_0 = \sum_{i=1}^6 \frac{k_i^2}{2m} \quad (13.2.5)$$

که برحسب تکانه‌های متناظر با خوشه‌های **a-set** در چارچوب مرکز جرم، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_0 = \frac{a_1^2}{m} + \frac{3a_2^2}{4m} + \frac{2a_3^2}{3m} + \frac{a_4^2}{m} + \frac{3a_5^2}{8m} \quad (14.2.5)$$

به طور مشابه انرژی جنبشی برحسب تکانه‌های ژاکوبی متناظر با خوشه‌های **b-set** در چارچوب مرکز جرم، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_0 = \frac{b_1^2}{m} + \frac{b_2^2}{m} + \frac{b_3^2}{2m} + \frac{b_4^2}{m} + \frac{3b_5^2}{8m} \quad (15.2.5)$$

حالت‌های پایه برای هر کدام از مولفه‌های باقی مانده یاکوبوفسکی براساس تکانه‌های ژاکوبی به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
|a\rangle &\equiv |a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \alpha^J \alpha^T\rangle \\
&\equiv \left| a_1 a_2 a_3 a_4 a_5; (l_1 s_{12}) j_1 \left( l_2 \frac{1}{2} \right) j_2 (j_1 j_2) I_3 \left( l_3 \frac{1}{2} \right) j_4 (I_3 j_4) I_4 (l_4 s_{56}) j_5 \right. \\
&\quad \left. (l_5 j_5) I_5 (I_4 I_5) J, M_J \right\rangle
\end{aligned} \tag{16.2.5}$$

$$\otimes \left| \left( t_{12} \frac{1}{2} \right) t_3 \left( t_3 \frac{1}{2} \right) t_4 (t_4 t_{56}) T, M_T \right\rangle,$$

$$\begin{aligned}
|b\rangle &\equiv |b_1 b_2 b_3 b_4 b_5, \beta^J \beta^T\rangle \\
&\equiv |b_1 b_2 b_3 b_4 b_5; (l_1 s_{12}) j_1 (l_2 s_{34}) j_2 (j_1 j_2) S(LS) I(l_4 s_{56}) j_5 (l_5 j_5) I_5 (I I_5) J, M_J\rangle \\
&\otimes |(t_{12} t_{34}) t_4 (t_4 t_{56}) T, M_T\rangle,
\end{aligned} \tag{17.2.5}$$

در نمایش امواج پاره‌ای تمامی پایه‌ها رفتاری اسکالر دارند. محدود نمودن این پایه‌ها در حالت موج S به ما این امکان را می‌دهد که سیستم مقید شش-نوکلئونی را در حالت پایه ارزیابی کنیم. بنابراین نمایش حالت پایه به شکل زیر می‌باشد که در آن تمامی اعداد کوانتومی تکانه-های زاویه‌ای به صورت زیر تقلیل می‌یابند:

$$\begin{aligned}
|a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \alpha^S \alpha^T\rangle &\equiv \\
&\delta_{s_{12} j_1} \delta_{j_2 \frac{1}{2}} \delta_{j_4 \frac{1}{2}} \delta_{j_5 I_5} \delta_{j_5 s_{56}} |a_1 a_2 a_3 a_4 a_5\rangle \left( s_{12} \frac{1}{2} \right) I_3 \left( I_3 \frac{1}{2} \right) I_4 (I_4 s_{56}) J, M_J, \\
&\left| \left( t_{12} \frac{1}{2} \right) t_3 \left( t_3 \frac{1}{2} \right) t_4 (t_4 t_{56}) T, M_T \right\rangle,
\end{aligned} \tag{18.2.6}$$

$$\begin{aligned}
|b_1 b_2 b_3 b_4 b_5, \beta^S \beta^T\rangle &\equiv \\
&\delta_{s_{12} j_1} \delta_{s_{34} j_2} \delta_{s_{I_1}} \delta_{j_5 I_5} \delta_{s_{56} j_5} |b_1 b_2 b_3 b_4 b_5\rangle (s_{12} s_{34}) S(S s_{56}) J, M_J \\
&\left| (t_{12} t_{34}) t_{1-4} (t_{1-4} t_{56}) T, M_T \right\rangle.
\end{aligned} \tag{19.2.5}$$

نمایش دیدگاه سه بُعدی برای حالت‌های پایه از روابط زیر پیروی می‌کند که در آن رابطه بین پایه‌ها در نمایش امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی به صورت زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$|a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \alpha\rangle = |a, \alpha\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \right)^5 |\vec{a}, \alpha\rangle \tag{20.2.5}$$

$$|b_1 b_2 b_3 b_4 b_5, \beta\rangle = |b, \beta\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \right)^5 |\vec{b}, \beta\rangle \tag{21.2.5}$$

که هر کدام از پایه‌ها در فضای هیلبرت شش-نوکلئونی، راست-هنجار هستند:

$$\sum_{\alpha} \int A^2 DA |A_1 A_2 A_3 A_4 A_5; \alpha^S, \alpha^T \rangle \langle A_1 A_2 A_3 A_4 A_5; \alpha^S, \alpha^T | = 1 \quad (22.2.5)$$

$$A^2 DA \equiv A_1^2 dA_1 A_2^2 dA_2 A_3^2 dA_3 A_4^2 dA_4 A_5^2 dA_5 \quad (23.2.5)$$

ضرب داخلی پایه‌ها نیز در نمایش امواج پاره‌ای از شرط بهنجارش پیروی می‌کند:

$$\begin{aligned} & \langle A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 | A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A'_5 \rangle \\ &= \frac{\delta(A_1 - A'_1)}{A_1^2} \frac{\delta(A_2 - A'_2)}{A_2^2} \frac{\delta(A_3 - A'_3)}{A_3^2} \frac{\delta(A_4 - A'_4)}{A_4^2} \frac{\delta(A_5 - A'_5)}{A_5^2} \end{aligned} \quad (24.2.5)$$

و در نمایش دیدگاه سه بُعدی شرط بهنجارش به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{A}_1 \vec{A}_2 \vec{A}_3 \vec{A}_4 \vec{A}_5 | \vec{A}'_1 \vec{A}'_2 \vec{A}'_3 \vec{A}'_4 \vec{A}'_5 \rangle \\ &= \delta^3(\vec{A}_1 - \vec{A}'_1) \delta^3(\vec{A}_2 - \vec{A}'_2) \delta^3(\vec{A}_3 - \vec{A}'_3) \delta^3(\vec{A}_4 - \vec{A}'_4) \delta^3(\vec{A}_5 - \vec{A}'_5) \end{aligned} \quad (25.2.5)$$

در گام بعد نمایش معادلات انتگرالی جفت شده یاکوبوفسکی، در دو نمایش امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی، بررسی و ارزیابی خواهند شد. در نمایش دیدگاه سه بُعدی از اثرات اسپینی به طور مرسوم صرف نظر می‌شود. بنابراین پتانسیل‌های وارد در محاسبات در دیدگاه سه بُعدی از نوع پتانسیل‌های مدل مستقل از اسپین انتخاب می‌شوند.

### ۳-۵ معادلات یاکوبوفسکی در نمایش امواج پاره‌ای

در این گام، به وضوح مولفه اول یاکوبوفسکی متناظر با معادله رابطه (9.2.5) را باید در

پایه  $|a, \alpha\rangle$  تصویر نمود و معادله رابطه (10.2.5) را باید در پایه  $|b, \beta\rangle$  تصویر نمود:

$$\begin{aligned} \langle a, \alpha | \psi_{12,123}^{1234} \rangle &= \sum_{\gamma'} \int a'^2 Da' \sum_{\alpha''} \int a''^2 Da'' \\ & \langle a, \alpha | G_0 t_{12} P | a', \gamma' \rangle \langle a', \gamma' | (1 - P_{45} - P_{46} - P_{34} + P_{34} P_{45} + P_{34} P_{46}) | a'', \alpha'' \rangle \langle a'', \alpha'' | \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\ & + \sum_{\gamma'} \int a'^2 Da' \sum_{\beta'} \int b'^2 Db' \langle a, \alpha | G_0 t_{12} P | a', \gamma' \rangle \langle a', \gamma' | b', \beta' \rangle \langle b', \beta' | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$



$$\begin{aligned}
\langle b, \beta | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle &= \sum_{\gamma'} \int b'^2 D b' \sum_{\alpha'} \int a'^2 D a' \\
\langle b, \beta | G_0 t_{12} \tilde{P} | b', \gamma' \rangle \langle b', \gamma' | (1 - P_{45} - P_{46} - P_{34} + P_{34} P_{45} + P_{34} P_{46}) | a', \alpha' \rangle \langle a', \alpha' | \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\
&+ \sum_{\gamma' \beta'} \int b'^2 D b' \langle b, \beta | G_0 t_{12} \tilde{P} | b', \gamma' \rangle \langle \gamma' | \beta' \rangle \langle b', \beta' | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle, \tag{2.3.5}
\end{aligned}$$

با ارزیابی جملات و ترم‌های ظاهر شده در سمت راست هر دو معادله در نمایش امواج پاره‌ای که در بخش پیوست مرجع [61] به تفصیل ارائه شده است، شکل نهایی معادلات جفت شده یاکوبوفسکی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \alpha | \psi_{12,123}^{1234} \rangle &= \frac{1}{E - \frac{a_1^2}{m} - \frac{3a_2^2}{4m} - \frac{2a_3^2}{3m} - \frac{a_4^2}{m} - \frac{3a_5^2}{8m}} \\
&\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty a'^2 da' \sum_{\gamma' \gamma''} G_{\alpha \gamma''} \delta_{m_{s'_3} m_{s''_1}} \delta_{m_{s'_4} m_{s''_4}} \delta_{m_{s'_5} m_{s''_5}} \delta_{m_{s'_6} m_{s''_6}} \\
&\times \delta_{m_{t'_3} m_{t''_1}} \delta_{m_{t'_4} m_{t''_4}} \delta_{m_{t'_5} m_{t''_5}} \delta_{m_{t'_6} m_{t''_6}} \langle a_1, m_{s''_1} m_{s''_2} m_{t''_1} m_{t''_2} | t_{(\varepsilon)} | \pi_2, m_{s''_1} m_{s''_2} m_{t''_1} m_{t''_2} \rangle \\
&\times \int_{-1}^1 d\hat{a}_{22} \left[ \left\{ \sum_{\alpha''} G_{\alpha'' \gamma'} \langle \pi_1, a'_2, a_3, a_4, a_5 | \psi_{12,123}^{1234} \rangle - \sum_{\alpha''} G_{\alpha'' \gamma'} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{45} \right. \right. \\
&\langle \pi_1, a'_2, \left| \frac{1}{4} \vec{a}_3 + \frac{3}{4} \vec{a}_4 + \frac{9}{16} \vec{a}_5 \right|, \left| \frac{1}{2} \vec{a}_3 + \frac{1}{2} \vec{a}_4 - \frac{3}{8} \vec{a}_5 \right|, \left| \vec{a}_3 - \vec{a}_4 + \frac{1}{4} \vec{a}_5 \right| \left| \psi_{12,123}^{1234} \right\rangle \\
&- \sum_{\alpha''} G_{\alpha'' \gamma'} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{45} \\
&\left. \langle \pi_1, a'_2, \left| \frac{1}{4} \vec{a}_3 - \frac{3}{4} \vec{a}_4 + \frac{9}{16} \vec{a}_5 \right|, \left| -\frac{1}{2} \vec{a}_3 + \frac{1}{2} \vec{a}_4 + \frac{3}{8} \vec{a}_5 \right|, \left| \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \frac{1}{4} \vec{a}_5 \right| \left| \psi_{12,123}^{1234} \right\rangle \right. \\
&- \sum_{\alpha''} G_{\alpha'' \gamma'} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{34} \langle \pi_1, \left| \frac{1}{3} \vec{a}'_2 + \frac{8}{9} \vec{a}_3 \right|, \left| \vec{a}'_2 - \frac{1}{3} \vec{a}_3 \right|, a_4, a_5 \left| \psi_{12,123}^{1234} \right\rangle \\
&+ \sum_{\alpha''} G_{\alpha'' \gamma'} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{23} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{24} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{25} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{45} \\
&\left. \langle \pi_1, \left| \frac{1}{3} \vec{a}'_2 + \frac{8}{9} \vec{a}_3 \right|, \left| \frac{1}{4} \vec{a}'_2 - \frac{1}{12} \vec{a}_3 + \frac{3}{4} \vec{a}_4 + \frac{9}{16} \vec{a}_5 \right|, \left| \frac{1}{2} \vec{a}'_2 - \frac{1}{6} \vec{a}_3 + \frac{1}{2} \vec{a}_4 - \frac{3}{8} \vec{a}_5 \right|, \left| \vec{a}'_2 - \frac{1}{3} \vec{a}_3 - \vec{a}_4 - \frac{1}{4} \vec{a}_5 \right| \left| \psi_{12,123}^{1234} \right\rangle \right. \\
&+ \sum_{\alpha''} G_{\alpha'' \gamma'} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{23} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{24} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{25} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{a}_{45} \\
&\left. \langle \pi_1, \left| \frac{1}{3} \vec{a}'_2 + \frac{8}{9} \vec{a}_3 \right|, \left| \frac{1}{4} \vec{a}'_2 - \frac{1}{12} \vec{a}_3 - \frac{3}{4} \vec{a}_4 + \frac{9}{16} \vec{a}_5 \right|, \left| -\frac{1}{2} \vec{a}'_2 + \frac{1}{6} \vec{a}_3 + \frac{1}{2} \vec{a}_4 + \frac{3}{8} \vec{a}_5 \right|, \left| \vec{a}'_2 - \frac{1}{3} \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \frac{1}{4} \vec{a}_5 \right| \left| \psi_{12,123}^{1234} \right\rangle \right\} \\
&- \sum_{\beta'} G_{\beta' \gamma'} \langle \pi_1, \left| \frac{1}{3} \vec{a}'_2 - \frac{2}{3} \vec{a}_3 \right|, \left| -\vec{a}'_2 - \frac{2}{3} \vec{a}_3 \right|, a_4, a_5 \left| \psi_{12;12+34}^{1234} \right\rangle \Bigg], \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle b_1 b_2 b_3 b_4 b_5, \beta | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle &= \frac{1}{E - \frac{b_1^2}{m} - \frac{b_2^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{b_3^2}{m} - \frac{b_4^2}{m} - \frac{3}{8} \frac{b_5^2}{m}} \\
\left( \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty b'^2 db'_2 \sum_{\gamma' \gamma''} G_{\beta \gamma' \gamma''} \delta_{m_{s'_3} m_{s''_1}} \delta_{m_{s'_4} m_{s''_2}} \delta_{m_{s'_5} m_{s''_5}} \delta_{m_{s'_6} m_{s''_6}} \\
&\times \delta_{m_{t'_3} m_{t''_1}} \delta_{m_{t'_4} m_{t''_2}} \delta_{m_{t'_5} m_{t''_5}} \delta_{m_{t'_6} m_{t''_6}} \langle b_1, m_{s''_1} m_{s''_2} m_{t''_1} m_{t''_2} | t_{(\epsilon^*)} | b'_2, m_{s''_1} m_{s''_2} m_{t''_1} m_{t''_2} \rangle \\
&\times \left[ \left\{ \sum_{\alpha'} G_{\alpha \gamma'} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{32} \left\langle b_2, \left| \frac{2}{3} \vec{b}'_2 - \frac{2}{3} \vec{b}_3 \right|, \left| -\vec{b}'_2 - \frac{1}{2} \vec{b}_3 \right|, b_4, b_5 \right| \psi_{12,123}^{1234} \right\rangle \right. \\
&- \sum_{\alpha'} G_{\alpha \gamma' 123546} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{32} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{42} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{52} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{45} \\
&\left\langle b_2, \left| \frac{2}{3} \vec{b}'_2 - \frac{2}{3} \vec{b}_3 \right|, \left| -\frac{1}{4} \vec{b}'_2 - \frac{1}{8} \vec{b}_3 + \frac{3}{4} \vec{b}_4 + \frac{9}{16} \vec{b}_5 \right|, \left| -\frac{1}{2} \vec{b}'_2 - \frac{1}{4} \vec{b}_3 + \frac{1}{2} \vec{b}_4 - \frac{3}{8} \vec{b}_5 \right|, \left| -\vec{b}'_2 - \frac{1}{2} \vec{b}_3 - \vec{b}_4 + \frac{1}{4} \vec{b}_5 \right| \right| \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\
&- \sum_{\alpha'} G_{\alpha \gamma' 123654} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{32} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{42} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{52} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{45} \\
&\left\langle b_2, \left| \frac{2}{3} \vec{b}'_2 - \frac{2}{3} \vec{b}_3 \right|, \left| -\frac{1}{4} \vec{b}'_2 - \frac{1}{8} \vec{b}_3 - \frac{3}{4} \vec{b}_4 + \frac{9}{16} \vec{b}_5 \right|, \left| \frac{1}{2} \vec{b}'_2 + \frac{1}{4} \vec{b}_3 + \frac{1}{2} \vec{b}_4 + \frac{3}{8} \vec{b}_5 \right|, \left| -\vec{b}'_2 - \frac{1}{2} \vec{b}_3 + \vec{b}_4 + \frac{1}{4} \vec{b}_5 \right| \right| \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\
&- \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{\alpha'} G_{\alpha \gamma' 124356} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{32} \left\langle b_2, \left| -\frac{2}{3} \vec{b}'_2 - \frac{2}{3} \vec{b}_3 \right|, \left| \vec{b}'_2 - \frac{1}{2} \vec{b}_3 \right|, b_4, b_5 \right| \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\
&+ \sum_{\alpha'} G_{\alpha \gamma' 124536} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{32} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{42} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{52} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{45} \\
&\left\langle b_2, \left| -\frac{2}{3} \vec{b}'_2 - \frac{2}{3} \vec{b}_3 \right|, \left| \frac{1}{4} \vec{b}'_2 - \frac{1}{8} \vec{b}_3 + \frac{3}{4} \vec{b}_4 + \frac{9}{16} \vec{b}_5 \right|, \left| \frac{1}{2} \vec{b}'_2 - \frac{1}{4} \vec{b}_3 + \frac{1}{2} \vec{b}_4 - \frac{3}{8} \vec{b}_5 \right|, \left| \vec{b}'_2 - \frac{1}{2} \vec{b}_3 - \vec{b}_4 + \frac{1}{4} \vec{b}_5 \right| \right| \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\
&+ \sum_{\alpha'} G_{\alpha \gamma' 124536} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{32} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{42} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{52} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{34} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{35} \int_{-1}^1 d\hat{b}_{45} \\
&\left\langle b_2, \left| -\frac{2}{3} \vec{b}'_2 + \frac{2}{3} \vec{b}_3 \right|, \left| \frac{1}{4} \vec{b}'_2 - \frac{1}{8} \vec{b}_3 - \frac{3}{4} \vec{b}_4 + \frac{9}{16} \vec{b}_5 \right|, \left| -\frac{1}{2} \vec{b}'_2 + \frac{1}{4} \vec{b}_3 + \frac{1}{2} \vec{b}_4 + \frac{3}{8} \vec{b}_5 \right|, \left| \vec{b}'_2 - \frac{1}{2} \vec{b}_3 + \vec{b}_4 + \frac{1}{4} \vec{b}_5 \right| \right| \psi_{12,123}^{1234} \rangle \left. \right\} \\
&- \sum_{\beta'} G_{\beta' \gamma'} \langle b_1, b'_2, b_3, b_4, b_5 | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle, \tag{4.3.5}
\end{aligned}$$

معادلات انتگرالی جفت شده روابط بالا به روش امواج پاره‌ای بررسی و ارزیابی شده‌اند. این معادلات برای حل عددی آماده هستند. در بخش بعد نمایش دیدگاه سه بعدی معادلات یاکوبوفسکی جفت شده یعنی روابط (9.2.5) و (10.2.5) را بررسی و ارزیابی خواهیم نمود.

## ۴-۵ معادلات یاکوبوفسکی در نمایش دیدگاه سه بعدی

در این دیدگاه حالت‌های پایه مستقیماً با بردارهای تکانه سه بعدی معرفی خواهند شد. در این نمایش چون پایه‌های مربوط به هر مولفه یاکوبوفسکی سه بعدی هستند، بنابراین تمامی اعداد کوانتومی مداری در جهت‌گیری فضایی بردارها به طور خودکار حضور خواهند یافت. در

نمایش دیدگاه سه بُعدی به طور مرسوم از درجات آزادی اسپینی چشم پوشی می شود، بنابراین روابط (21.2.5) و (22.2.5) به شکل زیر منجر می شوند:

$$|\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{a}_4 \vec{a}_5\rangle \equiv |\vec{a}\rangle, \quad (1.4.5)$$

$$|\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 \vec{b}_4 \vec{b}_5\rangle \equiv |\vec{b}\rangle. \quad (2.4.5)$$

با تصویر نمودن پایه های اشاره شده بالا روی توابع موج یاکوبوفسکی در معادلات جفت شده، یعنی روابط (9.2.5) و (10.2.5)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} | \psi_{12,123}^{1234} \rangle &= \int D^3 a' \int D^3 a'' \\ \langle \vec{a} | G_0 t_{12} P | \vec{a}' \rangle \langle \vec{a}'' | (1 + P_{45} + P_{46} + P_{34} + P_{34} P_{45} + P_{34} P_{46}) | \vec{a}'' \rangle \langle \vec{a}'' | \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\ + \int D^3 a' \int D^3 b' \langle \vec{a} | G_0 t_{12} P | a' \rangle \langle \vec{a}' | \vec{b}' \rangle \langle \vec{b}' | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{b} | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle &= \int D^3 b' \int D^3 a' \\ \langle \vec{b} | G_0 t_{12} \tilde{P} | \vec{b}' \rangle \langle b' | (1 + P_{45} + P_{46} + P_{34} + P_{34} P_{45} + P_{34} P_{46}) | \vec{a}' \rangle \langle \vec{a}' | \psi_{12,123}^{1234} \rangle \\ + \int D^3 b' \langle \vec{b} | G_0 t_{12} \tilde{P} | \vec{b}' \rangle \langle \vec{b}' | \psi_{12;12+34}^{1234} \rangle, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

در واقع تمامی پایه های بالا، بردار هستند و بر خلاف روش امواج پاره ای رفتار عددی ندارد. با ارزیابی جملات این معادلات به روش دیدگاه سه بُعدی (مرجع [37])، شکل نهایی دو معادله جفت شده در نمایش دیدگاه سه بُعدی با انتخاب مناسب دستگاه مختصات، به منظور حل عددی نتیجه می شود. اگر در پایه های فضای تکانه، در هر دو دیدگاه، بردار سوم را در راستای قائم و بردار چهارم را در صفحه افق - قائم و بقیه بردارها را در فضای دلخواه در نظر بگیریم، تکنیک محاسبات به سهولت پیاده سازی خواهد شد و قید مسئله به حداقل مقدار خود خواهد رسید. تکنیک محاسبات در گام بعد به منظور حل عددی معادلات ارزیابی شده بالا، چه در نمایش امواج پاره ای و چه در نمایش دیدگاه سه بُعدی، ما به پیاده سازی تکنیک محاسبات عددی و روش های معمول آن می پردازیم.

## ۵-۵ تکنیک محاسبات

در این بخش به بیان جزئیات مربوط به حل عددی معادلات خواهیم پرداخت. پس از انتخاب دستگاه مختصات مناسب، گام اول در حل عددی این معادلات گسسته‌سازی انتگرال‌ها روی متغیرهای پیوسته تکانه و زاویه است. روشی که برای گسسته‌سازی انتگرال‌ها انتخاب کردیم روش گاوس-لژاندر است [35] که در فصل‌های پیشین نیز از این تکنیک گسسته‌سازی استفاده نمودیم، چرا که اولاً دارای دقت خوبی است، و ثانیاً نسبت به روش‌های عددی دیگر به تعداد نقاط شبکه کمتری نیاز داریم که این موضوع در صرفه‌جویی حافظه در محاسبات مربوط به سیستم‌های چند جسمی اهمیت بسیار زیادی دارد [37]. به علت کوتاه برد بودن نیروهای هسته‌ای تابع موج سیستم شش-نوکلئونی برای تکانه‌های بزرگ‌تر از تکانه قطع<sup>۷۳</sup>، سهم بسیار ناچیزی است که کنار گذاشته می‌شود و بر اساس نتایج تجربی روی سیستم‌های سبک هسته‌ای تکانه قطع در محدود  $\Lambda_{cut} = 30 \text{ MeV}$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در حل عددی معادلات کوپل شده یاکوبوفسکی در فضای تکانه، بازه‌های مربوط به متغیرهای تکانه را که از  $(0, \infty)$  است، به بازه  $(0, \text{Cutoff})$  تبدیل می‌کنیم. در اولین گام برای پیاده‌سازی عددی انتگرال‌ها به روش گاوس-لژاندر، باید بازه‌های انتگرال‌گیری را از  $(0, \text{Cutoff})$  به بازه  $[-1, 1]$  تبدیل کنیم. برای این کار تغییر متغیری به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\vec{a} = \frac{\Lambda_{cut}}{2} (1 + \vec{x}) \quad (1.5.5)$$

که  $\vec{a}$  در این رابطه متغیر تکانه خطی و  $\vec{x}$  نیز زاویه بردار تکانه  $\vec{a}$  با محور قائم دستگاه مختصات است. پس از تغییر متغیر بالا، با استفاده از روش گاوس-لژاندر هر رابطه انتگرالی با بازه  $[-1, 1]$  را می‌توان به صورت زیر گسسته‌سازی نمود:

$$\int_{-1}^1 F(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (2.5.5)$$

که در آن ریشه‌های تابع لژاندر نوع اول مرتبه  $N$  و  $w_i$  نیز توابع وزن نقطه‌ای هستند، به

<sup>73</sup>Momentum Cut-off

طوری که در این جا  $\sum_{i=1}^N w_i = 2$  می باشد. بنابراین با به کار بُردن روش عددی گاوس- لژاندر برای متغیرهای تکانه و زاویه، معادلات جفت شده یاکوبوفسکی در فضای تکانه، گسسته سازی می شوند. با انتخاب مناسب دستگاه مختصات برای پایه ها، ابعاد مسئله از ۱۵ درجه به ۱۰ درجه تقلیل خواهد نمود. که سهم اندازه تکانه ها ۵ درجه، زوایای کروی ۳ درجه و زوایای قطبی ۲ درجه به قرار زیر خواهد بود [56]:

$$N = N_{jac}^5 \times N_{sph}^3 \times N_{pol}^2 \times 2 \quad (3.5.5)$$

همان طور که در بخش قبل اشاره شد در حل عددی معادلات یاکوبوفسکی به معادله ویژه مقداری با فرم کلی زیر نیاز است، که در آن ویژه تابع مربوطه یک تابع ستونی از همان دو تابع موج یاکوبوفسکی در معادلات جفت شده معرفی شده در بخش قبل می باشد:

$$K(E) \psi_E = \lambda(E) \psi_E \quad (4.5.5)$$

ویژه مقدار  $\lambda(E)$  مربوط به ویژه تابع  $\psi_E$  متناظر با عملگر  $K(E)$  است. بنابراین با حل عددی معادله (4.5.5) برای انرژی های مختلف  $E$ ، باید انرژی خاصی را جستجو کنیم که بزرگ ترین ویژه مقدار مثبت حاصل از این کرنل<sup>۷۴</sup> عدد یک شود یعنی  $\lambda(E) = 1$ . به طوری که انرژی متناظر با این ویژه مقدار، انرژی فیزیکی سیستم خواهد بود. مالفلیت و تیجن<sup>۷۵</sup> [41] برای حل معادلات فیدیف (سه- نوکلئونی) و یاکوبوفسکی (چهار- نوکلئونی) از تکنیک ساده ای به نام روش نسبت<sup>۷۶</sup> استفاده کردند. این روش بر این اساس واقع شده است که با یک تعداد تکرار عملگر  $K(E)$  بر روی یک تابع اولیه دلخواه همیشه به ویژه حالتی که متناظر با بزرگ ترین ویژه مقدار است، همگرا می شود، به طوری که برای انرژی بستگی فیزیکی سیستم، هیچ ویژه مقدار  $\lambda(E)$  بزرگ تر از یک وجود ندارد. هر چند در مواردی که پتانسیل دارای دو قسمت جاذبه و دافعه است وجود قسمت دافعه در پتانسیل ممکن است سبب ایجاد ویژه مقادیر منفی شود که در این ویژه مقادیر به لحاظ اندازه بزرگ تر از یک هستند به طوری که دیگر این مقادیر متناظر با انرژی بستگی فیزیکی سیستم نخواهد بود.

<sup>74</sup>Kernel

<sup>75</sup>Malfliet and Tjon

<sup>76</sup>Ratio method

روشی که برای مسائل شش- نوکلئونی استفاده می‌کنیم براساس ساختن پایه‌های بهینه شده با ابعاد کوچک برای قطری کردن یک ماتریس بزرگ استوار است، که به این روش متعامد سازی گرام- اشمیت می‌گویند که این روش شباهت زیادی به روش الگوریتم اُنگسوز [58,59] دارد. بنابراین از جزئیات آن صرف‌نظر نموده و کار را با این فرض ادامه می‌دهیم. ماتریس متناظر با انرژی بستگی فیزیکی سیستم، ماتریسی است که بزرگ‌ترین ویژه مقدار این ماتریس به ازای آن انرژی، یک شود. بنابراین با ورودی انرژی‌های مختلف، انرژی بستگی را جستجو می‌کنیم که بزرگ‌ترین ویژه مقدار متناظر با آن برابر یک شود. به منظور محاسبه دقیق انرژی بستگی فیزیکی سیستم که متناظر با ویژه مقدار  $\lambda(E) = 1$  است، می‌توان با دادن سه و یا چهار انرژی در همسایگی انرژی بستگی مقید سیستم‌های مورد بررسی، ویژه مقادیر  $\lambda(E)$  متناظر با این انرژی‌ها را به دست آورد. سپس با درونیابی و یا برونیابی انرژی دقیق سیستم شش- نوکلئونی که متناظر با  $\lambda(E) = 1$  است را محاسبه کنیم. درونیابی را معمولاً با توابع گاوسی به شکل زیر پیاده می‌کنند:

$$F_K(a_2 a_3 a_4 a_5) = \text{Exp} \left( - \left[ \frac{3}{4} a_2^2 + \frac{2}{3} a_3^2 + a_4^2 + \frac{3}{8} a_5^2 \right] \right), \quad (5.5.5)$$

$$F_H(b_2 b_3 b_4 b_5) = \text{Exp} \left( - \left[ b_2^2 + \frac{1}{2} b_3^2 + b_4^2 + \frac{3}{8} b_5^2 \right] \right). \quad (6.5.5)$$

در نهایت با درونیابی به روش اسپلین‌های کیوبک- هرمیت، معادله ویژه مقداری حل می‌شود. در گام بعد تمامی نتایج انرژی بستگی سیستم مقید شش- نوکلئونی در هر دو روش را ارائه و لیست نموده‌ایم.

## ۵-۶ نتایج محاسبات

### ۵-۶-۱ نتایج محاسبات در نمایش امواج پاره‌ای

به منظور مقایسه نتایج محاسبات با نتایج تکنیک‌های دیگر، به ترتیب از پتانسیل‌های مدل نوکلئون- نوکلئون وابسته به اسپین به فرم زیر بهره برده‌ایم:

(۱) پتانسیل تفکیک پذیر یا ماگوچی [38]:

$$V(r, r') = \sum_i V_{si} \frac{\xi_i^2 \pi^2}{2m\mu_{si}^2} \exp[-\mu_{si} r] \exp[-\mu_{si} r'] [MeV]; \quad \xi_i, \mu_{si} > 0, \quad (1.6.5)$$

که نمایش آن در فضای تکانه به شکل زیر می باشد:

$$V(p, p') = \sum_i V_{si} \frac{\xi_i^2}{m} g(p)g(p')(pp')^{2i-2}; [MeV \cdot fm^3] g(p) = \frac{1}{(p^2 + \mu_{si}^2)^i}; \quad (2.6.5)$$

$$m^{-1} = 41.470 [MeV \cdot fm^2]. \xi_1 = 1.000 \text{ and } \xi_2 = 2.9499$$

(۲) پتانسیل گاوسی شکل آفنان-تانگ [62]:

$$V(r) = \sum_i V_{si} \exp[-\mu_{si} r^2] [MeV], \quad (3.6.5)$$

که نمایش آن در فضای تکانه به شکل:

$$V(p, p') = \sum_i \frac{V_{si}}{(2\pi)^{3/2} (4\mu^2 + (p - p')^2)^{3/2}}, \quad (4.6.5)$$

(۳) پتانسیل یوکاوا-شکل مالفلیت-تیجن ۳/۱ [41]:

$$V(r) = \sum_i V_{si} \frac{\exp[-\mu_{si} r]}{r} [MeV], \quad (5.6.5)$$

که نمایش آن در فضای تکانه به شکل:

$$V(p, p') = \sum_i \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{V_{si}}{(p - p')^2 + 4\mu_{si}^2} \right). \quad (6.6.5)$$

به منظور یک پارچگی در ارائه پارامترهای مختلف پتانسیل های اشاره شده بالا، تمامی پارامترها

را در جدول زیر لیست نموده‌ایم که هر کدام در روابط پتانسیلی خودشان وارد خواهند شد.

جدول (۵-۱): نمایش تمامی پارامترهای موجود در پتانسیل‌های وابسته به اسپین. اندیس صفر برای حالت یگانه اسپینی دو نوکلئون برهم کنشی و اندیس یک برای حالت سه گانه اسپینی می باشد. اندیس  $i$  برای شمارش جملات هر پتانسیل وارد می شود.

Potential	Type	$i$	$V_{0i}$	$\mu_{0i}$	$V_{1i}$	$\mu_{1i}$
YS-I	Yamaguchi [38]	1	-0.1490	1.165	-0.4160	1.540
YS-II		1	-0.1430	1.150	-0.3815	1.406
YS-III		1	-0.1323	1.130	-0.3815	1.406
YS-IV		1	-0.1323	1.130	-0.3628	1.406
ATS3	Gauss [62]	1	1000.0	3.00	1000.0	3.00
		2	-166.0	0.80	-326.7	1.05
		3	-23.0	0.40	-43.0	0.60
MT-I/III	Yukawa [41]	1	7.39	3.110	7.39	3.110
		2	-2.64	1.555	-3.22	1.555

در ادامه نتایج به دست آمده انرژی بستگی برای هر نوع پتانسیل به طور مجزا در جدول‌های (۵-۲) تا (۵-۴) ارائه شده‌اند. قابل ذکر است که نتایج به دست آمده‌هاکی از تطابق خوب سیستم مقید چهار- نوکلئونی و تطابق منصفانه سیستم مقید شش- نوکلئونی با نتایج به دست آمده از روش‌های معتبر دیگر است.

جدول (۵-۲): انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل یاماگوچی. داخل پرانتز نتایج سیستم مقید شش- نوکلئونی ارائه شده است.

Method	YS-I	YS-II	YS-III	YS-IV
SKFR [42]	-45.73			
SKFR [43]	-45.59			
SKFR [5]	-45.32			
FY (PW) [3]	-45.87			
FY (3D) [34]	-45.9	-44.4	-42.4	-37.8
2DI [38]	-45.7	-44.2	-42.3	-37.7
This work	-45.9 (-90.3)	-44.3 (-85.9)	-42.3 (-70.6)	-37.7 (-70.0)



جدول (۳-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل گأوسی شکل آفان- تانگ.

Method	$E_4^\alpha$	$E_6(L, S)J^\pi$
VAR [47]	-26.47	
CRC [63]	-28.74	
HHE [64]	-26.01	
SVM [14]	-30.37	-70.65 (0,1)1 <sup>+</sup>
DFY [10]	-28.79	
FY(PW) [3]	-28.80	
FY(3D) [65]	-28.8	
This work	-28.84	-66.54 (0,0)0 <sup>+</sup>

جدول (۴-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل مالفلیت-تیجن ۳/۱.

Method	$E_4^\alpha$	$E_6(L, S)J^\pi$
SKFR [66]	-29.6	
SKFR [67]	-30.36	
SIDE [53]	-29.74	
HH [19]	-30.33	
IDEA [68]	-30.20	
DFY [10]	-30.31	
DFY(PW) [10]	-30.312	
FY(PW) [3]	-30.29	
FY(3D) [34]	-30.3	
EIHH [20]	-30.71	
This work	-30.36	-66.35 (0,0)0 <sup>+</sup>

بحث در مورد نتایج را به فصل جمع بندی موكول می‌کنیم. در بخش بعد نتایج محاسبات را برای نمایش دیدگاه سه بعدی ارائه می‌کنیم. در نمایش دیدگاه سه بعدی به دلیل خاموش نمودن اثرات اسپینی، پتانسیل‌های حضور یافته در محاسبات نیز از نوع مستقل از اسپین می-باشند.

## ۵-۶-۲ نتایج محاسبات در نمایش دیدگاه سه بُعدی

متعاقباً به منظور مقایسه نتایج محاسبات با نتایج تکنیک‌های دیگر، به روش دیدگاه سه بعدی، انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی که پتانسیل‌های متناظرش را در فصل مربوط به سیستم مقید چهار- نوکلئونی (فصل سوم) به تفصیل ارائه شد، ارائه و در جدول‌های زیر لیست نموده‌ایم. در فصل چهار نتایج انرژی بستگی سیستم مقید چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل‌های مستقل از اسپین ارائه شده است. در این‌جا برای مقایسه اختلاف انرژی بین دو سیستم مقید چهار- و شش- نوکلئونی، در کنار نتایج سیستم مقید شش- نوکلئونی هاله- ساختار موثر، نتایج سیستم چهار- نوکلئونی با حضور پتانسیل‌های وابسته به اسپین را نیز ارائه نموده‌ایم.

جدول (۵-۵): انرژی بستگی سیستم مقید شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل یاماگوچی.

Potential	YP-1	YP-2	YP-3	YP-4
Present work	-92.3	-86.4	-70.7	-70.2

جدول (۵-۶): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل

گأوسی شکل بیکر.

Method	$E_4$	$E_6$
VAR [44]	$-39.1 \pm 0.1$	
VAR [45]	-40.03	
HHE [46]	-40.05	
DFY [25]	-40.0	
FY(PW) [3]	-40.03	
FY(3D) [34]	-40.0	
Present work	-40.1	-70.8

جدول (۷-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل گاوسی شکل ولکاو.

Method	$E_4$	$E_6$
VAR [47]	-30.317	
FY(PW) [3]	-30.27	
FY(3D) [34]	-30.2	
HHE [46]	-30.3988	
DFY [25]	-30.2	
HH [19,48]	-30.420	-66.491
SVM [14]	-30.424	-66.25
Present work	-30.3	-68.2

جدول (۸-۵): انرژی بستگی سیستم‌های مقید چهار- و شش- نوکلئونی به دست آمده بر حسب MeV برای پتانسیل یوکاوا شکل مالفلیت-تیجن ۵.

Method	$E_4$	$E_6$
CRCGBV [49]	-31.357	
ATMS [50]	-31.36	
GFMC [51]	$-31.3 \pm 0.2$	
CCE [52]	-31.24	
VAR [47]	$-31.19 \pm 0.05$	
IDEA [53]	-30.98	
DMC [54]	-31.5	
FY(PW) [3]	-31.36	
FY(3D) [34]	-31.3	
EIHH [55]	-31.358	
HH [19]	-31.347	
SVM [14]	-31.360	-66.30
Present work	-31.4	-68.3

با نگاهی عمیق به نتایج برخی از پتانسیل‌های ارائه شده در محاسبات، پی می‌بریم که اختلاف انرژی بستگی بین سیستم مقید چهار- نوکلئونی و سیستم آلفا- هسته مقید شش- نوکلئونی، تاییدی بر هاله- ساختار بودن این نوع سیستم مقید شش- نوکلئونی می‌باشد. همچنین تطابق خوب نتایج محاسبات ما در مقایسه با روش‌های معتبر دیگر و مقایسه پتانسیل‌های مستقل از اسپین در مقایسه با نتایج محاسبات با پتانسیل‌های وابسته به اسپین در محاسبات، نشان می‌دهد

که وجود اثرات اسپینی، نتایج محاسبات را به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌بخشد [61] و این نتایج را به نتایج تجربی بسیار نزدیک می‌سازد. در گام آخر محاسبات به منظور ارزیابی درستی و دقت محاسبات، همگرایی ویژه مقدار را در کنار محاسبه مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی سیستم مقید شش - نوکلئونی با حضور جملات آزاد و وابسته آن، بررسی می‌کنیم.

### ۳-۶-۵ تستِ درستی و دقت محاسبات

در این گام به منظور تست درستی محاسبات، مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی کل سیستم مقید شش - نوکلئونی در حالت هاله-ساختار موثر را بدست آورده‌ایم. نمایش پایداری این محاسبات با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش تکنیک محاسبات در جدول (۹-۵) نمایش داده شده است. در این محاسبات مقدار خطا را در حدود  $10^{-4}$  در نظر گرفته ایم.

جدول (۹-۵): همگرایی ویژه مقدار  $\eta$  با توجه به شمارش عدد تکرار تکانه ها در کنار زوایای وارد در مسئله.

$N_{jac}^a$	$N_{jac}^b$	$N_{sph} = N_{pol}$	$\eta$
10	10	14	0.9786
14	10	14	0.9874
14	14	14	0.9947
16	14	14	0.9983
20	16	14	0.9997
20	20	14	1.0000

حال با وجود داشتن تابع موج کل سیستم هاله- ساختار، نتایج مقدار چشم‌داشتی در زیر ارائه شده است. این محاسبه نشان می‌دهد که تطابق بسیار خوبی بین انرژی بستگی محاسبه شده از طریق معادله ویژه مقداری در مقایسه با محاسبه مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی وجود دارد.

جدول (۵-۱۰): نتایج مقدار چشم داشتی هامیلتونی سیستم مقید هاله- ساختار شش- نوکلئونی. ترم های آزاد  $\langle H_0 \rangle$  و ترم های وابسته  $\langle V \rangle$  نیز محاسبه شده و اختلاف این دو مقدار چشم داشتی هامیلتونی را به ما می دهد. در این محاسبه از پتانسیل مالفلییت-تیجن ۵ بهره برده ایم.

Method	$\langle H_0 \rangle [MeV]$	$\langle V \rangle [MeV]$	$\langle H \rangle [MeV]$	$E [MeV]$
YP	74.3	-142.9	-68.6	-68.3

در جدول بالا تطابق بسیار خوبی بین نتایج انرژی بستگی و نتایج مقدار چشم داشتی برای سیستم مقید شش- نوکلئونی هاله ساختار بدست آمد. دلیل اختلاف این نتایج با مقادیر تجربی را می توان عدم اثر تمامی مولفه های یاکوبوفسکی و همچنین توانایی پتانسیل های به کار بسته شده در این تکنیک ها دانست. کسب این نتایج و دستاوردها، تطابق خوبی با روش های معتبری از جمله GFMC، SVM و HH که از تکنیک های معتبر و موثق به شمار می آیند با این اولین تلاش ها برای مطالعه سیستم های هسته ای شش- نوکلئونی مقید که قبل از این پروژه، تاکنون به دلایل اشاره شده در مقدمه این فصل به انجام نرسیده بود به ثمر نشست. مهم ترین دستاورد این پروژه در کنار فرمول بندی دقیق معادلات یاکوبوفسکی برای سیستم های بالاتر از چهار- نوکلئون، رسیدن به نتایج انرژی بستگی مناسب و معتبری که با روش های دیگر به خوبی قابل مقایسه است. این تکنیک که برگ برنده اش حل تحلیلی در کنار حل محاسباتی دقیق می باشد، از برخی روش های دیگر اختلالی با درجات آزادی بالاتر، نتایج بهتری را به ارمغان آورده است. این فصل از پروژه اولین گام موثر به منظور نزدیک شدن به ویژگی های ساختاری و هاله ای شکل سیستم مقید شش- نوکلئونی  ${}^6\text{He}$  می باشد.

## جمع بندی و نگاه به آینده

مطالعه سیستم‌های هسته‌ای سَبک و همچنین مطالعه و بررسی نیروهای کایرال، در کنار برهم‌کنش‌های پدیده شناختی، یکی از مرتبط‌ترین موضوعات در فیزیک هسته‌ای مُدرن به شمار می‌آید. تحقیقات زیادی به واسطه روش‌های مختلف روی سیستم‌های چند نوکلئونی صورت پذیرفته است که اعتبار آنها به دلیل کارآمدی در نتایج و دستاوردهای قابل قبول آنهاست. تاکنون فرمول‌بندی و محاسبات مربوط به تابع موج و انرژی بستگی سیستم‌های چند نوکلئونی مقید، چه به روش استاندارد امواج پاره‌ای و چه به روش جدید دیدگاه سه بُعدی، با حل معادلات انتگرالی به روش یاکوبوفسکی حداکثر برای سیستم‌های مقید چهار- نوکلئونی پیاده‌سازی شده است و سیستم‌های بالاتر هسته‌ای به دلیل پیچیدگی در پیاده‌سازی حل معادلات و در نتیجه حجم بالای محاسبات کامپیوتری، قبل از این پروژه تاکنون تحقق نیافته بود.

در سال‌های اخیر روش‌های مختلفی در سرتاسر دنیا به مطالعه و حل (حالت‌های مقید و پراکندگی) سیستم‌های مقید چند نوکلئونی، به‌خصوص سیستم‌های مورد توجه از جمله سیستم مقید چهار- نوکلئونی پایدار هلیوم<sup>4</sup> و همچنین سیستم مقید شش- نوکلئونی هلیوم<sup>6</sup> به دلیل پیکربندی هاله‌ای شکل آن، پرداخته‌اند. ما در این رساله به مطالعه سیستم‌های مقید چهار- تا شش- نوکلئونی بر اساس تکنیک معادلات یاکوبوفسکی پرداخته‌ایم. در این رساله فرمالیزم جامع معادلات انتگرالی یاکوبوفسکی روی سیستم‌های مقید چهار- نوکلئونی در حالت "آلفا"، پنج- نوکلئونی در حالت "آلفا+ نوکلئون" و شش- نوکلئونی در حالت "آلفا+ نوکلئون+ نوکلئون" در پایه فضای تکانه و براساس تکانه‌های ژاکوبی در نمایش امواج پاره‌ای پیاده‌سازی و حل شده‌اند. با توجه به تطابق مناسب دستاوردهای این رساله در مقایسه با نتایج به‌دست آمده توسط تکنیک‌های دیگر، در خواهیم یافت که با استفاده از قابلیت‌های کامپیوترهای امروزی (سرعت محاسباتی بالا) و همچنین انتخاب ساختارهای مناسب و قابل حل اشاره شده

بالا در راستای ساده سازی فرمالیزم یاکوبوفسکی به منظور توانمندی و اجرای محاسبات روش مطمئن و کارآمد یاکوبوفسکی روشی مناسب برای مطالعه سیستم‌های مقید هشت- نوکلئونی در حالت هاله-ساختار به شکل هسته هلیوم ۸ نیز می‌تواند باشد.

در هرگام از مطالعه سیستم‌های چهار- تا شش- نوکلئونی، ابتدا با شروع از معادله ویژه مقداری هامیلتونی برای یک سیستم مقید و حل آن به روش معادلات انتگرالی شوئینگر، موسوم به تکنیک یاکوبوفسکی کار را آغاز نموده‌ایم. نتیجه فرمول‌بندی، تعدادی معادله جفت شده براساس مؤلفه‌های مستقل یاکوبوفسکی بوده است که بیانگر برهم‌کنش موثر نوکلئون- هاست. به منظور رسیدن به انرژی بستگی سیستم‌های مقید اشاره شده، ما معادلات جفت شده را در دو نمایش امواج پاره‌ای و دیدگاه سه بُعدی بر حسب تکانه‌های ژاکوبی تصویر و فرم انتگرالی معادلات جفت شده را ارزیابی نموده‌ایم. در نهایت با پیاده‌سازی حل عددی به صورت یک معادله ویژه مقداری برای کرنل هامیلتونی، به نتایج انرژی بستگی سیستم‌های مقید هسته‌ای رسیده‌ایم. با توجه به توانایی پتانسیل‌های مورد استفاده در محاسبات، ویژه مقادیر انرژی به دست آمده نتایج قابل قبولی در مقایسه با نتایج تکنیک‌های دیگر به همراه دارد.

در ره آورد دیگری در ادامه این پروژه فرمول‌بندی سیستم‌های پنج و شش- نوکلئونی با حضور نیروهای سه تایی، در کنار نیروهای جفتی و همچنین در نظر گرفتن تمامی مولفه‌های تابع موج به منظور حل کامل و واقعی یک سیستم مقید هسته‌ای با تمامی پیکربندی‌هایش، می‌تواند ادامه کار رساله در این ره آورد ارزشمند به حساب آید. همچنین با توجه به کشف سیستم‌های کوارکی مقید از جمله تتراکوارک‌ها، پنتاکوارک‌ها و حتی هگزاکووارک‌ها، می‌توان از این فرمالیزم ارزشمند و کارآمد در عرصه فیزیک ذرات بنیادی و کووارک‌های متشکله استفاده نمود.

## پیوست الف (حل معادله ویژه مقداری به روش لنگسوز)

همان طور که در متن رساله اشاره شد، حل عددی معادلات یاکوبوفسکی به معادله ای با فرم کلی زسر منجر می شود:

$$K(E) \psi = \psi \quad (A.1)$$

این معادله را می توان به فرم کلی زیر نوشت:

$$K(z) \psi_z = \eta(z) \psi_z \quad (A.2)$$

این معادله حالت خاصی از معادله ویژه مقداری (A.1) است. در اینجا  $\eta(z)$  مربوط به ویژه حالت  $\psi_z$  است. به طوری که با جایگذاری  $E$  به جای متغیر  $z$  در این رابطه، به معادله ویژه مقداری (A.1) منجر می شود. بنابراین با حل معادله (A.2) برای انرژی های مختلف  $z$ ، باید انرژی را جستجو کنیم که بزرگترین ویژه مقدار مثبت حاصل از این کرنل برابر یک شود. به طوری که انرژی متناظر با این ویژه مقدار، انرژی فیزیکی سیستم خواهد بود.

مالفلیت و تیجن [41] برای حل معادلات انتگرالی فدیف از یک تکنیک ساده به نام روش نسبت استفاده کردند. این روش بر این اساس است که با یک تعداد عملگر  $K(E)$  بر روی یک تابع اولیه دلخواه همیشه به ویژه حالتی که متناظر با بزرگترین ویژه مقدار است، همگرا می شود، به طوری که برای انرژی بستگی فیزیکی سیستم، هیچ ویژه مقدار  $\eta(z)$  بزرگتر از یک وجود ندارد.

هر چند در مواردی که پتانسیل دارای دو قسمت جاذبه و دافعه است وجود قسمت دافعه در پتانسیل ممکن است سبب ایجاد ویژه مقادیر منفی شود که این ویژه مقادیر به لحاظ اندازه بزرگتر از یک هستند به طوری که دیگر این ویژه مقادیر متناظر با انرژی بستگی فیزیکی سیستم نخواهد بود. در این صورت تسلسل تکرارهای کرنل  $K(E)$  در روش نسبت به جای اینکه به مولفه های یاکوبوفسکی متناظر با انرژی بستگی سیستم مورد نظر همگرا شود به یک پاسخ نادرست همگرا می شود. برای اجتناب از این مشکل دو راه می توان پیشنهاد نمود. راه حل اول: در اولین تکرار این حالتها را تعیین کنیم. سپس حالت اولیه ای را عمود بر آنها برای استفاده در روش نسبت بسازیم [70]. راه حل دوم: یک مقدار ثابت به



کرنل  $K(E)$  اضافه کنیم به طوری که طیف ویژه مقدار جابه جا شده، بزرگترین ویژه مقدار شود. که این ویژه مقدار، همان ویژه مقدار فیزیکی متناظر با انرژی بستگی سیستم است [35].

روشی که ما برای حل مسائل چند-نوکلئونی استفاده می کنیم بر اساس ساختن پایه های بهینه شده با ابعاد کوچک برای قطری کردن یک ماتریس بزرگ استوار است. که به این روش متعامد سازی گرام-اشمیت [35] گفته می شود که همان الگوریتم لنگسوز [58] می باشد.

حال به بیان جزئیات تکنیک لنگسوز و همچنین گسسته سازی فضا به روش گاوس-لژاندر برای حل معادلات یاکوبوفسکی می پردازیم. برای حل این معادلات از روش تکرار استفاده می کنیم. به این صورت که با در نظر گرفتن یک تابع آزمون به صورت  $|\phi^1\rangle$ ، و تاثیر عملگر کرنل  $K(E)$  بر این آزمون، تابع  $|\phi^2\rangle$  حاصل شود. سپس با تاثیر عملگر کرنل  $K(E)$  بر تابع  $|\phi^2\rangle$ ، تابع  $|\phi^3\rangle$  حاصل می شود. به این ترتیب با ادامه دادن این کار توابع را گام به گام محاسبه می کنیم. بنابراین تاثیر عملگر کرنل  $K(E)$  بر توابع در هر مرحله را می توان با فرم کلی زیر توصیف نمود:

$$|\phi^{i+1}\rangle = K|\phi^i\rangle \quad (\text{A.3})$$

$$|\phi^i\rangle = K^i|\phi^1\rangle \quad (\text{A.4})$$

این تکرار بعد از  $N$  مرتبه متوقف می شود. به این معنی که با  $N$  تابع محاسبه شده در بالا، با استفاده از تمینم متعامد سازی لنگسوز می توان  $N+1$  تابع متعامد ساخت. ادامه جزئیات روش متعامد سازی در مرجع [35] بیان شده است.

پیوست ب (درون یابی تعمیم یافته به روش اسپلاین های کیوبیک - هرمیت)

همان طور که در متن رساله نیز اشاره شده است، محاسبات حالت مقید سیستم های سبک هسته ای مستلزم حل معادلات انتگرالی یاکوبوفسکی است که درون یابی بخش غیرقابل تفکیک آن است. از آن جا که در محاسبات به درون یابی های چندگانه بسیار زیادی نیاز است، لذا استفاده از روش مرسوم اسپلاین های پایه [32] در زمانی معقول آن قدر کارایی ندارد که قابل بهره برداری باشد. بنابراین به الگوریتم درون یابی کارآمدتری نیاز است. چنین الگوریتمی را می توان در روش اسپلاین های کیوبیک - هرمیت [71] یافت که در این پیوست به طور اختصار به معرفی آن در محاسبات پرداخته شده است. با انتخاب چهار نقطه شبکه  $x_0, x_1, x_2, x_3$  به طوری که  $x_1 \leq x \leq x_2$  باشد، در این صورت توابع تعمیم یافته اسپلاین ها به صورت زیر حاصل می شوند:

$$S_0(x) = -\phi_3(x) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} \frac{1}{x_2 - x_0} \quad (\text{B.1})$$

$$S_1(x) = \phi_1(x) + \phi_3(x) \left( \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} - \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} \right) \frac{1}{x_2 - x_0} - \phi_4(x) \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \frac{1}{x_3 - x_1} \quad (\text{B.2})$$

$$S_2(x) = \phi_2(x) + \phi_3(x) \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} \frac{1}{x_2 - x_0} + \phi_4(x) \left( \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \right) \frac{1}{x_3 - x_1} \quad (\text{B.3})$$

$$S_3(x) = \phi_4(x) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \frac{1}{x_3 - x_1} \quad (\text{B.4})$$

به طوری که در آن توابع به شکل زیر وارد می شوند:

$$\phi_1(x) = \frac{(x_2 - x)^2}{(x_2 - x_1)^3} ((x_2 - x_1) + 2(x - x_1)) \quad (\text{B.5})$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x_1 - x)^2}{(x_2 - x_1)^3} ((x_2 - x_1) + 2(x_2 - x)) \quad (\text{B.6})$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)^2}{(x_2 - x_1)^2} \quad (\text{B.7})$$

$$\phi_4(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)}{(x_2 - x_1)^2} \quad (\text{B.8})$$

پیوست پ (ریشه ها و توابع وزن نقطه‌ای چند جمله‌ای های لژاندر نوع اول)

	$n = 2$	
$x_1 = 0.577350269189626$		$a_1 = 1.0000000000000000$
	$n = 3$	
$x_0 = 0.0000000000000000$		$a_0 = 0.8888888888888889$
$x_1 = 0.774596669241483$		$a_1 = 0.5555555555555556$
	$n = 4$	
$x_1 = 0.339981043584856$		$a_1 = 0.652145154862546$
$x_2 = 0.861136311594053$		$a_2 = 0.347854845137454$
	$n = 5$	
$x_0 = 0.0000000000000000$		$a_0 = 0.5688888888888889$
$x_1 = 0.538469310105683$		$a_1 = 0.478628670499366$
$x_2 = 0.906179845938664$		$a_2 = 0.236926885056189$
	$n = 6$	
$x_1 = 0.238619186083197$		$a_1 = 0.467913934572691$
$x_2 = 0.661209386466265$		$a_2 = 0.360761573048139$
$x_3 = 0.932469514203152$		$a_3 = 0.171324492379170$
	$n = 7$	
$x_0 = 0.0000000000000000$		$a_0 = 0.417959183673469$
$x_1 = 0.405845151377397$		$a_1 = 0.381830050505119$
$x_2 = 0.741531185599394$		$a_2 = 0.279705391489277$
$x_3 = 0.949107912342759$		$a_3 = 0.129484966168870$

$n = 8$

$x_1 = 0.183434642495650$   
 $x_2 = 0.525532409916329$   
 $x_3 = 0.796666477413627$   
 $x_4 = 0.960289856497536$

$a_1 = 0.362683783378362$   
 $a_2 = 0.313706645877887$   
 $a_3 = 0.222381034453374$   
 $a_4 = 0.101228536290376$

$n = 9$

$x_0 = 0.000000000000000$   
 $x_1 = 0.324253423403809$   
 $x_2 = 0.613371432700590$   
 $x_3 = 0.836031107326636$   
 $x_4 = 0.968160239507626$

$a_0 = 0.330239355001260$   
 $a_1 = 0.312347077040003$   
 $a_2 = 0.260610696402935$   
 $a_3 = 0.180648160694857$   
 $a_4 = 0.081274388361574$

$n = 10$

$x_1 = 0.148874338981631$   
 $x_2 = 0.433395394129247$   
 $x_3 = 0.679409568299024$   
 $x_4 = 0.865063366688985$   
 $x_5 = 0.973906528517172$

$a_1 = 0.295524224714753$   
 $a_2 = 0.269266719309996$   
 $a_3 = 0.219086362515982$   
 $a_4 = 0.149451349150581$   
 $a_5 = 0.066671344308688$

$n = 11$

$x_0 = 0.000000000000000$   
 $x_1 = 0.269543155952345$   
 $x_2 = 0.519096129110681$   
 $x_3 = 0.730152005574049$   
 $x_4 = 0.887062599768095$   
 $x_5 = 0.978228658146057$

$a_0 = 0.272925086777901$   
 $a_1 = 0.262804544510247$   
 $a_2 = 0.233193764591990$   
 $a_3 = 0.186290210927734$   
 $a_4 = 0.125580369464905$   
 $a_5 = 0.055668567116174$

$n = 12$

$x_1 = 0.125333408511469$   
 $x_2 = 0.367831498918180$   
 $x_3 = 0.587317954286617$   
 $x_4 = 0.769902674194305$   
 $x_5 = 0.904117256370475$   
 $x_6 = 0.981560634246719$

$a_1 = 0.249147045813403$   
 $a_2 = 0.233492536538355$   
 $a_3 = 0.203167426723066$   
 $a_4 = 0.160078328543346$   
 $a_5 = 0.106939325995318$   
 $a_6 = 0.047175336386512$

$n = 13$

$x_0 = 0.0000000000000000$   
 $x_1 = 0.230458315955135$   
 $x_2 = 0.448492751036447$   
 $x_3 = 0.642349339440340$   
 $x_4 = 0.801578090733310$   
 $x_5 = 0.917598399222978$   
 $x_6 = 0.984183054718588$

$a_0 = 0.232551553230874$   
 $a_1 = 0.226283180262897$   
 $a_2 = 0.207816047536889$   
 $a_3 = 0.178145980761946$   
 $a_4 = 0.138873510219787$   
 $a_5 = 0.092121499837728$   
 $a_6 = 0.040484004765316$

$n = 14$

$x_1 = 0.108054948707344$   
 $x_2 = 0.319112368927890$   
 $x_3 = 0.515248636358154$   
 $x_4 = 0.687292904811685$   
 $x_5 = 0.827201315069765$   
 $x_6 = 0.928434883663574$   
 $x_7 = 0.986283808696812$

$a_1 = 0.215263853463158$   
 $a_2 = 0.205198463721296$   
 $a_3 = 0.185538397477938$   
 $a_4 = 0.157203167158194$   
 $a_5 = 0.121518570687903$   
 $a_6 = 0.080158087159760$   
 $a_7 = 0.035119460331752$

$n = 15$

$x_0 = 0.0000000000000000$   
 $x_1 = 0.201194093997435$   
 $x_2 = 0.394151347077563$   
 $x_3 = 0.570972172608539$   
 $x_4 = 0.724417731360170$   
 $x_5 = 0.848206583410427$   
 $x_6 = 0.937273392400706$   
 $x_7 = 0.987992518020485$

$a_0 = 0.202578241925561$   
 $a_1 = 0.198431485327111$   
 $a_2 = 0.186161000015562$   
 $a_3 = 0.166269205816994$   
 $a_4 = 0.139570677926154$   
 $a_5 = 0.107159220467172$   
 $a_6 = 0.070366047488108$   
 $a_7 = 0.030753241996117$

$n = 16$

$x_1 = 0.095012509837637$   
 $x_2 = 0.281603550779259$   
 $x_3 = 0.458016777657227$   
 $x_4 = 0.617876244402644$   
 $x_5 = 0.755404408355003$   
 $x_6 = 0.865631202387832$   
 $x_7 = 0.944575023073233$   
 $x_8 = 0.989400934991650$

$a_1 = 0.189450610455069$   
 $a_2 = 0.182603415044924$   
 $a_3 = 0.169156519395003$   
 $a_4 = 0.149595988816577$   
 $a_5 = 0.124628971255534$   
 $a_6 = 0.095158511682493$   
 $a_7 = 0.062253523938648$   
 $a_8 = 0.027152459411754$

- 
- [1] H Yukawa (1935) "*On the Interaction of Elementary Particle Japan Physics and Mathematics Journal*" Prog. Phys. Math. Sec. Jpn 17, 48.
- [2] J Fujita et al. (1957) "*Pion Theory of Three-Body Forces*" Prog. Theor. Phys. 17, 360.
- [3] H Kamada and W Glöckle (1992) "*Solutions of the Yakubovsky equations for four-body model systems*" Nucl. Phys. A 548, 205.
- [4] P Navratil, J P Vary and B R Barret (2000) "*Large-basis ab-initio no-core shell model and its application to  $^{12}\text{C}$* " Phys. Rev. C 62, 054311.
- [5] A C Fonseca (1984) "*Four-body calculation of the four-nucleon system: Binding energies and scattering results*" Phys. Rev. C 30, 35.
- [6] W Schadow, W Sandhas, J Haidenbauer and A Nogga (2000) "*Comparison of triton bound state properties using different separable representations of realistic potentials*" Few-Body Syst. 28, 241.
- [7] W Glöckle and H Kamada (1993) "*On the inclusion of 3N-forces into the 4N-Yakubovsky equations*" Nucl. Phys. A 560, 541.
- [8] A Nogga (2001) "*The Few-Nucleon bound state Calculations based on modern nuclear forces*" Ph.D. thesis, Ruhr-Universität, Bochum.
- [9] A Nogga, H Kamada, W Glöckle and B R Barrett (2002) "*The  $\alpha$ -particle based on modern nuclear forces*" Phys. Rev. C 65, 054003.
- [10] N W Schellingerhout, J J Schut and L P Kok (1992) "*Configuration-space Yakubovsky calculations*" Phys. Rev. C 46, 1192.
- [11] R Lazauskas and J Carbonell (2004) "*Testing nonlocal nucleon-nucleon interactions in four-nucleon systems*" Phys. Rev. C 70, 044002.
- [12] J Carlson (1987) "*Green's function Monte Carlo study of light nuclei*" Phys. Rev. C 36, 2026.
- [13] R B Wiringa et al. (2000) "*Quantum Monte Carlo calculations of  $A=8$  nuclei*" Phys. Rev. C 62, 014001.
- [14] K Varga and Y Suzuki (1995) "*Precise solution of few-body problems with the stochastic variational method on a correlated Gaussian basis*" Phys. Rev. C 52, 2885.



- [15] J Usukura, K Varga and Y Suzuki (1999) "*Stability of two- and three-dimensional excitonic complexes*" Phys. Rev. B 59,5652.
- [16] M Kamimura (1988) "*Nonadiabatic coupled-rearrangement-channel approach to muonic molecules*" Phys. Rev. A 38, 621.
- [17] E Hiyama et al. (2000) " *$A$   $N$  Spin-Orbit Splittings in  $B$   $A$  9  $e$  and  $C$   $A$  13 Studied with One-Boson-Exchange  $A$   $N$  Interactions*" Phys. Rev. Lett. 85, 270.
- [18] M Viviani, A Kievsky and S Rosati (1995) "*Variational Calculation on  $A = 3$  and 4 Nuclei with Non-Local Potentials*" Few Body Syst. 18, 25.
- [19] M Viviani, A Kievsky and S Rosati (2005) "*Calculation of the  $\alpha$ -particle ground state within the hyperspherical harmonic basis*" Phys. Rev. C 71, 024006.
- [20] N Barnea, W Leidemann and G Orlandini (2000) "*State dependent effective interaction for the hyperspherical formalism*" Phys. Rev. C 61, 054001.
- [21] N Barnea, W Leidemann and G Orlandini (2003) "*Improved effective interaction for the hyperspherical formalism*" Phys. Rev. C 67, 054003.
- [22] P Navratil, H B Geyer and T T S Kuo (1993) "*Harmonic oscillator basis in few-body systems*" Phys. Lett. B 315, 1.
- [23] P Navratil et al. (2000) "*Few-nucleon systems in a translationally invariant harmonic oscillator basis*" Phys. Rev. C 63, 054311.
- [24] A Nogga, H Kamada, W Glöckle and B R Barrett (2002) " *$\alpha$ -particle photoabsorption with a realistic nuclear force*" Phys. Rev. C 65, 054003.
- [25] S B Merkuriew, S L Yakovlev and C Gignoux (1984) "*Calculations of Scattering Lengths in Four-Nucleon System on the Basis of Cluster Reduction Method for Yakubovsky Equations*" Nucl. Phys. A 431,125.
- [26] R Lazauskas and J Carbonell (2004) "*Testing nonlocal nucleon-nucleon interactions in four-nucleon systems*" Phys. Rev. C 70, 044002.
- [27] P F Bedaque, H W.Hammer and U Van Kolck (2000) "*Effective theory of the triton*" Nucl. Phys. A 676, 357.
- [28] E Epelbaum (2006) "*Few-Nucleon Forces and Systems in Chiral Effective Field Theory*" Prog. Part. Nucl. Phys. 57, 654.

- [29] F Sammarruca, D P Xu and R Machleidt (1992) "*Relativistic corrections to the triton binding energy*" Phys. Rev. C 46, 1636.
- [30] J L Friar, G L Payne, V G J Stoks and J J De Swart (1993) "*Triton calculations with the new Nijmegen potentials*" Phys. Lett. B 311, 4.
- [31] S Bayegan, M R Hadizadeh and W Glockle (2008) "*A Realistic Formalism for 4N Bound State in a Three-Dimensional Yakubovsky Scheme*" Prog.Theor. Phys, 120, 887.
- [32] W Glöckle et al (1982) "*The Quantum Mechanical Few-Body Problem*" Z. Phys.A 305, 217.
- [33] O A Yakubovsky (1967) "*Four-body bound systems study within the Schwinger Integral Equation*" Sov. J. Nucl. Phys. 5, 937.
- [34] M R Hadizadeh and S Bayegan (2007) "*Four-body bound state calculations in three-dimensional approach*" Few-Body Syst. 40, 171.
- [35] A Stadler, W Glockle and P U Saur (1991) "*Faddeev equations with three-nucleon force in momentum space*" Phys. Rev. C 44 2319.
- [36] D Huber, H Witala, A Nogga, W Glöckle and H Kamada (1997) "*A New Look into the Partial-Wave Decomposition of Three-Nucleon Forces*" Few-Body Syst. 22, 107.
- [37] E Ahmadi Pouya, A A Rajabi (2016) "*Three-dimensional study of the six-body bound-state for the case of effective three-body configuration model*" Int. J. Mod. Phys. E 25, 1650072.
- [38] B F Gibson and D R Lehman (1977) "*Four-body bound states from the Schrödinger equation with separable potentials*" Phys. Rev. C 15, 2257.
- [39] G A Baker, J L Gammel, B J Hill and J G Wills (1962) "*Exact Numerical Solution of a Three-Body Ground-State Problem*" Phys. Rev. 125. 1754.
- [40] A B Volkov (1965) "*Equilibrium deformation calculations of the ground state energies of 1p shell nuclei*" Nucl. Phys. 74, 33.
- [41] R A Malfliet and J A Tjon (1969) "*Separable-Expansion Method for the Three-Nucleon System*" Nucl. Phys. A 127, 161.
- [42] V F Kharchenko and V E Kuzmichev (1972) "*Nucleus-nucleus total reaction cross sections*" Nucl. Phys. A 183.

- [43] I M Narodetsky, E S Galpern and V N Lyakhovitsky (1973) "*Bound states of  $^4\text{He}$* " Phys. Lett. B 46.
- [44] Y C Tang and R C Herndon (1967) "*Upper and lower bounds of the eigenvalue of a four-body system*" Nucl. Phys. A 93, 692.
- [45] S Fantoni, L Panattoni and S Rosati, (1970) "*Nonuniqueness of solutions in quantum field theory*" Nuovo Cimento, Nucl. Phys. A 69.
- [46] J A Ballot (1981) "*On four-particle system ground state with hyperspherical methods*" Z. Phys. A 302, 347.
- [47] J Carlson and V R Pandharipande (1981) "*A study of three-nucleon interaction in three- and four-body nuclei*" Nucl. Phys. A 371, 301.
- [48] M Gattobigio, A Kievsky and M Viviani (2011) "*Nonsymmetrized hyperspherical harmonic basis for an A-body system*" Phys. Rev. C 83, 024001.
- [49] H Kameyama, M Kamimura and Y Fukushima (1989) "*Coupled-rearrangement-channel Gaussian-basis variational method for trinucleon bound states*" Phys. Rev. C 40, 974.
- [50] Y Akaishi (1986) "*Precise solution of few-body problems with the stochastic variational method*" Lect. Notes Phys. 273, 324.
- [51] J Lomnitz-Adler, V R Pandharipande and R A Smith (1981) "*Monte Carlo calculations of triton and  $^4\text{He}$  nuclei with the Reid potential*" Nucl. Phys. A 361, 399.
- [52] J G Zabolitzky (1981) "*On the ground-state of the alpha-particle and verification of the coupled-cluster method*" Phys. Lett. B 100, 5.
- [53] W Oehm, S A Sofianos, H Fiedeldey and M Fabre de la Ripelle (1990) "*Integrodifferential equation approach. I. Triton and  $\alpha$ -particle binding energies*" Phys. Rev. C 42, 2322.
- [54] R F Bishop, M F Flynn, M C Bosca, E Buendia and R Guardiola (1990) "*Translationally invariant coupled cluster theory for simple finite systems*" Phys. Rev. C 42 1341.
- [55] N Barnea, W Leidemann and G Orlandini (2000) "*State dependent effective interaction for the hyperspherical formalism*" Phys. Rev. C 61, 054001.
- [56] E Ahmadi Pouya and A A Rajabi (2016) "*Six-body bound system calculations in the case of effective  $\alpha$ -core structure*" Eur. Phys. J. Plus, 131: 240.

- [57] E Ahmadi Pouya and A A Rajabi (2017) "*Solution of the specific model of five-body system to investigate the effective alpha-nucleon interaction in a partial-wave analysis*" Act. Phys. Pol. B, 48, 5, 819.
- [58] C R Chen, G L Payne, J L Friar, and B F Gibson (1986) "*Rigorous Faddeev calculations for elastic neutron-deuteron scattering*" Phys. Rev C 33, 174.
- [59] G L Payne (1998) "*In Modula and Methods in Few-Body Physics*", Springer-Verlag.
- [60] W Glöckle and H Witala (2011) "*The Six-Nucleon Yakubovsky Equations for  ${}^6\text{He}$* " Few-Body Syst. 51 27–44.
- [61] E Ahmadi Pouya and A A Rajabi (2017) "*Solution of the Six-Nucleon Bound State Equations by Using Spin-Dependent Nucleon-Nucleon Potential Models*" In Preparation.
- [62] I R Afnan and Y C Tang (1968) "*Investigation of Nuclear Three- and Four-Body Systems with Soft-Core Nucleon-Nucleon Potentials*" Phys. Rev. 175, 1337.
- [63] K Khaldi, Ch Elster and W Glockle (2001) "*Effective theory for the two-nucleon system*", arXiv: nucl-th/1006.5705v2.
- [64] J A Ballot (1986) "*Hyperspherical calculations for four-nucleon systems*" Few-Body Syst. Suppl. 1, 140.
- [65] M R Hadizadeh, L Tomio and S Bayegan (2011) "*Solutions of the bound-state Faddeev-Yakubovsky equations in three dimensions by using NN and 3Npotential models*" Phys. Rev. C 83, 054004.
- [66] J A Tjon (1976) "*Low energy nucleon-trinucleon scattering in the integral equation approach*" Phys. Lett. B 63, 391.
- [67] S A Sofianos, H Fiedeldey, H Haberzettl and W Sandhas (1982) "*Separable pole expansions in four-nucleon bound state calculations*" Phys. Rev. C 26, 228.
- [68] G G Ellerkmann, W Sandhas, S A Sofianos and H Fiedeldey (1996) "*Integral equation calculations for the photodisintegration process  ${}^4\text{He}(\gamma, n){}^3\text{He}$* " Phys. Rev. C 53, 2638.
- [69] E Ahmadi Pouya and A A Rajabi (2017) "*Yakubovsky Scheme to study the 4- and 5-Nucleon systems in the case of Alpha-state Structure with Spin-Dependent Nucleon-Nucleon Potentials*" Karbala International Journal of Modern Science. <http://dx.doi.org/10.1016/j.kijoms.2017.06.002>.
- [70] W Glockle (1982) "*Three-body continuum wave functions with a box boundary conditions* ", Nucl Phys A 381, 383.

[71] H Späth (1990) "*Eindimensionale Spline-Interpolations-Algorithmen*" R. oldenbourg Verlag, Munchen Wien.

## Abstract

In order to investigate the identity of the governing internal nuclear interactions of the few-nucleon systems, and the study of structural properties of bound state of these nuclei, in this thesis we have solved the few-nucleon bound systems from 3-nucleon up to 6-nucleon bound systems within the Faddeev-Yakubovsky (F-Y) approach in momentum space representation, in both Partial-Wave (PW) and Three-Dimensional (3D) formalism with the inclusion of spin-independent and spin-dependent Nucleon-Nucleon potential models. The F-Y formalism by applying the Schrodinger equation, transforms to some coupled equations in terms of some independent amplitudes. The achievements of 2-nucleon and 3-nucleon systems within the F-Y methods, demonstrate that a direct treatment of 5-nucleon and 6-nucleon systems is accessible on today's computers with high computational speed. Therefore, in order to solve the 6-nucleon problem, we feel that an accurate and old reliable method, the exact solution within the Yakubovsky equations, is now desirable.

In addition, we have solved the coupled F-Y equations for 5-nucleon and 6-nucleon bound systems in case of the effective  $\alpha$ -core structure in partial-wave and three-dimensional representation implemented in the basis of momentum variables. We formulated the coupled Yakubovsky equations first for spinless particles as function of Jacobi momenta, namely the magnitudes of the momenta and the angles between them. The coupled integral equations for a bound-state can be handled in partial-wave representation and solved by a numerically reliable standard method. Our numerical results for spin-independent NN interaction potential are in good agreement with results of other methods in the first step calculations and the little obtained binding energy difference between 4-, 5- and 6-nucleon bound systems, confirms the halo structure of six-body bound system in case of effective  $\alpha$ -core structure.

The Yakubovsky equations for light nuclei are some coupled equations in terms of some Yakubovsky components that can be represented in momentum space based on the Jacobi coordinate, in PW and 3D formalism. Our aim in this thesis is to extend the F-Y approach on the basis of PW and 3D representation with basis states in terms of the Jacobi momenta for exact solution of the 5N and 6N bound-state problem with NN interactions. We have found it natural to use the standard PW and 3D representation essentially because of dealing with scalar variables. We investigate the 5N in the picture of effective alpha-nucleon structure and 6N effective halo structure bound systems, namely an inert  $\alpha$ -core and two loosely bound nucleons.

In the numerical implementations, the technical performance in PW and 3D decomposition is implemented, different set Jacobi momenta as well as a necessary multi-dimensional interpolation scheme are given, like modified cubic Hermit splines. In order to solve the high dimensional energy eigenvalue problem of the coupled equations for the systems in case of effective  $\alpha$ -core structure, we point to the Lanczos-type algorithm, which turned out to be very efficient in the 3- and 4-nucleon problems, using typical iteration method.

The achievements and outcomes of this thesis with respect to the regarded some spin-independent and also spin-dependent NN potential models, in comparison of obtained from other methods, confirms that the study of few-nucleon bound systems based on the Yakubovsky scheme is successful and desirable. Also, in order to test our numerical calculations we have investigated the convergence of eigenvalue results and also calculated the expectation value energy. This calculation and test of numerical calculations is the final step to the study of few-nucleon bound systems in our thesis.

Keywords:

Few-Nucleon bound systems, Yakubovsky Scheme, Partial-Wave Representation.



Shahrood University of Technology  
Faculty of Physics and Nuclear Engineering

Ph.D Thesis in Theoretical Nuclear Physics

The Study of the Few-Nucleon Bound Systems in a  
Partial-Wave Representation based on  
the Yakubovsky Approach

By:  
Eskandar Ahmadi Pouya

Supervisor:  
Prof. Ali Akbar Rajabi

July 2017