بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک ذرات بنیادی

بازفرمول‌بندی نظریه‌ی کوانتومی با استفاده از احتمالات مشروط مختلط

نگارنده: لیلا موسوی

استاد راهنما

دکتر حسین موحدیان

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن ، عبارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به خانواده عزیزم و بهترین دوستم که در تمام مشکلات همواره در کنار م بودند و مشوقم در طی مسیر.

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

و با تشکر و سپاس از استاد گرامی آقای دکتر حسین موحدیان که در نوشتن پایان نامه یاریم کردند. همچنین از استاد ارجمند آقای دکتر عنابستانی که ضمن داوری این کار از راهنمایی‌های شان استفاده کردم، سپاسگزارم.

تعهد نامه

اینجانب **لیلا موسوی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **فیزیک گرایش ذرات بنیادی** دانشکده **فیزیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **باز فرمولبندی نظریهی کوانتومی با استفاده از احتمالات شرطی مختلط** تحت راهنمائی **آقای دکتر حسین موحدیان** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

نتایج به‌دست آمده از اندازه‌گیری‌های کوانتومی (مثل اندازه‌گیری ضعیف) نشان می‌دهد که روابط اساسی بین هر سه ویژگی فیزیکی یک سیستم را می‌توان با احتمالات شرطی مختلط نمایش داد. این روابط بر پایه‌ی یک چارچوب جهانی و قطعی از مکانیک کوانتومی بنا نهاده شده است. با ترکیب قوانین نظریه‌ی احتمال بیزین[1] و قانون ساده‌ی فازهای احتمالات مختلط می‌توان مکانیک کوانتومی را بدست آورد. این قانون مطرح شده قانونی از ارگودیک کوانتومی است و بر این پایه بنا شده است که؛ مشاهده‌ی واقعیت ویژگی‌های فیزیکی جدا از دینامیک حاصل از برهم‌کنش اندازه‌گیری نیست. فازهای مختلط، ساختار دینامیکی انتقال بین ویژگی‌های مختلف را نشان می‌دهند.

قانون ارگودیک کوانتومی، رابطه‌ی اصلی بین احتمالات ارگودیک به‌دست آمده از متوسط گیری دینامیکی و روابط قطعی بین سه ویژگی بیان شده در احتمالات شرطی مختلط را توصیف می‌کند. با کمک قانون ارگودیک کوانتومی، فرمول‌بندی کامل مکانیک کوانتومی بدون استفاده از فرضیات ریاضی تقریبی و بردارهای حالت برهم‌نهی می‌تواند به‌دست آید.

کلمات کلیدی: اندازه‌گیری ضعیف، مقدار ضعیف، فضای هیلبرت، احتمالات شرطی مختلط، ارگودیک کوانتومی

[1] - Bayesian

فهرست مطالب

فصل ۱ ..... ۱

نظریه کوانتومی ۱

۱-۱ مقدمه: ۲

۱-۲ نظریه‌ی ماتریس هایزنبرگ ۳

۱-۲-۱ مقدار ویژه در فضای ماتریس‌ها ۴

۱-۳ نظریه‌ی موجی شرودینگر ۷

۱-۳-۱ مقدار ویژه در فضای توابع ۸

۱-۴ تفسیر کپنهاگی ۹

۱-۵ نظریه‌ی بوهم ۱۰

۱-۵-۱ نظریه‌ی دوبروی-بوهم ۱۱

فصل ۲ ..... ۱۳

اندازه گیری درنظریه‌ی کوانتومی ۱۳

۲-۱ مقدمه ۱۴

۲-۲توصیف حالت درمکانیک کوانتومی ۱۴

۲-۲-۱ ماتریس چگالی ۱۵

۲-۳ بیت‌های اندازه‌گیری ۱۸

۲-۴ قانون بورن ۱۹

۲-۴ -۱ قانون تعمیم‌یافته‌ی بورن ۲۱

۲-۵ گیت های یک کیوبیتی ۲۱

۲-۶ اندازه‌گیری‌های POVM ۲۳

۲-۶-۱ اندازه‌گیری ضعیف ۲۷

فصل۳ ..... ۳۱

احتمالات شرطی ۳۱

۳-۱ مقدمه..... ۳۲

۳-۲ واقعیت فیزیکی..... ۳۲

۳-۲-۱ واقعیت فیزیکی از دید EPR ۳۳

۳-۳ احتمالات شرطی..... ۳۴

۳-۴ نظریه‌ی آشوب ۳۸

۳-۵ نظریه‌ی ارگودیک..... ۳۹

۳-۶ ارگودیک کوانتومی..... ۴۰

۳-۷ جبر گرایی در مکانیک کوانتومی ۴۱

۳-۸ متغیر مستقل..... ۴۱

فصـــل۴ ..... ۴۳

شرح تئوری کوانتوم با احتمالات شرطی مختلط ۴۳

۴-۱ مقدمه..... ۴۴

۴-۲ واقعیت تجربی و نقش عدم قطعیت اندازه‌گیری..... ۴۴

۴-۳ ضرورت استفاده از احتمالات شرطی مختلط..... ۴۶

۴-۴ احتمالات شرطی مختلط..... ۴۷

۴-۵ قوانین ارگودیک کوانتوم..... ۵۲

۴-۶ ظاهر فضای هیلبرت..... ۵۶

۴-۷ تابع موج ۵۸

۴-۸رابطه بین قوانین جهانی و شواهد آماری ۶۰

۴-۹ ارگودیک کوانتومی و ویژگی‌های حالت‌های مانا..... ۶۱

۴-۱۰ زمان و حرکت..... ۶۳

فصل ۵ خلاصه و نتیجه گیری..... ۶۵

منابع:..... ۶۹

فصـــل ۱

نظریـــه کـــوانتـــومی

۱-۱ مقدمه:

در اوایل قرن بیستم، انقلاب‌های علمی در حال شکل‌گیری و تکوین بودند. مهم‌ترین این انقلاب‌ها در ساختارهای اساسی فیزیک نظری اتفاق افتاد. انقلاب‌هایی که نتیجه آنها تغییر تصور امروزی از مفاهیم بنیادی مثل فضا، زمان، علیت، واقعیت و... است. از زمان توضیح تابش جسم سیاه به‌وسیله‌ی پلانک و خلق مفهوم کوانتومی بودن انرژی تا زمان صورت‌بندی مکانیک ماتریسی و مکانیک موجی تعداد زیادی از پدیده‌های فیزیکی کشف شده بودند که به وسیله‌ی مکانیک کلاسیک (نیوتنی) قابل توجیه نبودند. هر چند تعدادی از آنها توسط بزرگان فیزیک توجیه شده بود، ولی توضیح واحدی وجود نداشت. در سال‌های ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷ هایزنبرگ[۱] و شرودینگر[۲] به توضیح جامع برای پدیده‌های کوانتومی دست پیدا کردند. هایزنبرگ از ماتریس‌ها و شرودینگر از پایه‌های فضای هیلبرت استفاده کردند. سال بعد دیراک نشان داد که این دو رهیافت یکی است.

از آن زمان به بعد بحث‌های فلسفی در دنیا درگرفت. بحث‌های بسیار عمیق درباره‌ی نتایج مکانیک کوانتومی که سردمداران آنها بور و اینیشتین بودند. بور طرفدار مکانیک کوانتومی و مدافع اول آن به حساب می‌آمد و بسیاری از بزرگان هم‌عصر بور در مؤسسه‌ی فیزیک نظری با او همکار بودند. نسل بعد و حتی نسل بعد از آن هم به‌شدت تحت تأثیر بور بودند به همین دلیل این دیدگاه مکانیک کوانتومی رواج بیشتری یافت که به این دیدگاه، دیدگاه کپنهاگی مکانیک کوانتومی گویند. اینیشتین مخالف تعبیرهای فلسفی بور از نتایج مکانیک کوانتومی بود. او معتقد بود که مکانیک کوانتومی ناقص است. بعد از آن، بوهم کتابی عمیق و دقیق درزمینه -ی مکانیک کوانتومی نوشت و اینیشتین ازکتاب او استقبال کرد. به این ترتیب این ارتباط باعث شدکه به تحقیق در این زمینه تشویق شود. حاصل این تحقیقات «نظریه‌ی کوانتومی بوهم» بود که از نظریه‌های متغیر نهان است. در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی چند

[1]-Heisenberg
[2]-Shorodinger

تفسیر مکانیک کوانتومی پرداخته می‌شود. سپس یک تعبیر جدید از احتمالات بیان شده و تشریح می‌گردد.

در ادامه نگاهی گذرا داریم به چند نظریه‌ی معروف که مورد توجه بزرگان فیزیک بوده است.

۱-۲ نظریه‌ی ماتریس هایزنبرگ

ورنر هایزنبرگ چارچوبی نظری مبتنی بر اشیاء ریاضی نسبتا ناشناخته‌ای موسوم به ماتریس‌ها ارائه کرد. ماتریس‌ها خاصیتی دارند که در نگاه نخست قدری آشفته‌کننده به نظر می‌رسد. وقتی می‌خواهید آنها را در هم ضرب کنید با هم جابه‌جا نمی‌شوند. وقتی دو عدد را در هم ضرب می‌کنید، فرقی نمی‌کند چه ترتیبی را برای آن لحاظ کنید: ۳ ضرب در ۴ همان ۴ ضرب در ۳ است. اما اگر بخواهید ماتریس A را در ماتریسB ضرب کنید، آن وقت اغلب، نتیجه متفاوت از زمانی است که بخواهید ماتریسB را در ماتریسA ضرب کنید. فیزیک‌دانان امروزه با این ایده‌ی ناجابه‌جایی کنار آمده‌اند؛ ولی در آن زمان مکانیک ماتریس هایزنبرگ خیلی هم جالب به نظر نمی‌آمد. این عدم پذیرش تا حدی از آن جهت بود که ویژگی ناجابه‌جایی به پیامدهای بسیار بسیار عجیب منتهی می‌شد: یعنی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ. در نظریه‌ی هایزنبرگ یک ماتریس ممکن است نمایانگر خصوصیتی از یک ذره باشد که می‌توان آن را اندازه گرفت: مثلاً مکان، انرژی، قطبش، تکانه یا مشاهده‌پذیر دیگر. در این چارچوب چنانچه دو تا از این ماتریس‌ها با هم جابه‌جا نشوند، اتفاق غیرمعمولی رخ می‌دهد: اطلاعات آنها به طریقی بسیار نابسامان به هم مرتبط می‌شود. به‌طور مثال تکانه و مکان دو مشاهده‌پذیری هستند که ماتریس‌هایشان جابه‌جا نمی‌شوند. به بیان فیزیکی، مکان و تکانه‌ی ذره مکمل یکدیگرند.

ریاضیات این نظریه نشان می‌دهد که جمع‌آوری اطلاعات درباره‌ی یکی از این مشاهده‌پذیرهای مکمل باعث می‌شود اطلاعات درباره‌ی مشاهده‌پذیر دیگر را از دست بدهیم. پس اگر بخواهیم مکان ذره‌ای را اندازه بگیریم، ناگزیر اطلاعاتی درباره‌ی تکانه را از دست خواهیم داد. برعکس اگر بخواهیم اطلاعاتی درباره‌ی تکانه ذره کسب کنیم، یعنی اگر عدم قطعیت خود را درباره‌ی میزان تکانه‌ای که دارد

کاهش دهیم، آنگاه عدم قطعیت درباره‌ی این‌که ذره کجاست، بالا برده‌ایم. به بیان دیگر، اگر قادر باشیم با دقت صد درصد تعیین کنیم که تکانه‌ی یک ذره چه مقدار است، آن وقت هیچ چیز راجع به مکان آن نمی‌دانیم. ذره ممکن است هرجایی در این عالم باشد. این همان اصل «عدم قطعیت» است.

برای فیزیک‌دانان کلاسیک، این اصل چندان جالب و جذاب نبود. این اصل بیان می‌کند که کاملاً غیرممکن است بتوان اطلاعات کامل و تمام عیاری راجع‌به مشاهده‌پذیر مکمل در یک زمان داشت. نمی‌توانیم به‌طور هم‌زمان هم تکانه و هم مکان یک اتم را بدانیم. هرچند چارچوب ریاضی هایزنبرگ به زیبایی، دنیای شگفت‌انگیز اشیای کوانتومی را توضیح داد، اما نظریه‌ی ماتریسی در موارد زیادی با عقل در تعارض بود، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ خارق‌العاده بود و اصل برهم‌نهی نیز بسیار تأثیرگذار. این نظریه دشمنان زیادی از جمله اروین شرودنیگر داشت.

در مکانیک کوانتومی فرمو ل‌بندی به گونه ای است که کمیات قابل مشاهده به عنوان مقادیر ویژه‌ی مناسب شناخته و محاسبه می‌گردند. علت تبدیل معادلات حاکم بر سیستم به معادلات مقدار ویژه آن است که با اتخاذ فرم مناسب می‌توان مقادیر ویژه‌ی حقیقی و حالات پایه‌ی متعامد بدست آورد که توصیف ریاضی سیستم را خیلی آسان می‌نماید.

۱-۲-۱ مقدار ویژه در فضای ماتریس‌ها

یک فرمول‌بندی به فرم یک معادله‌ی مقدار ویژه‌ی ماتریسی است که در آن ماتریس‌های مربع معرف کمیت‌ها و مقادیر ویژه‌ی آنها متناظر با حالات پایه هستند. همچنین بردارهای ویژه مبین حالات پایه‌ی سیستم خواهند بود. به این رویکرد در مکانیک کوانتومی، مکانیک ماتریس هایزنبرگ گفته می‌شود. به عنوان مثال چنانچه مجموعه مقادیر ممکن کمیت مورد نظر با $\lambda_j , j = 1.....n$ نمایش داده شوند می‌توان متناظر با آن ماتریس مربعی مانند L و با بعد لازم مانند n مجسم کرد به گونه ای که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$Lx = \lambda x_{\lambda} \qquad (۱-۱)$$

که در آن $\mathbf{x}_\lambda$ بردار ویژه ی متناظر با مقدار ویژه ی λ است. در حالت کلی مقادیر ویژه‌ی $\lambda_j , j = 1.....n$ می‌توانند مختلط باشند، ولی برای یک کمیت قابل درک فیزیکی و قابل مشاهده ضروری است که تمامی مقادیر ویژه حقیقی باشند. که این منجر به هرمیتی بودن ماتریس L می‌شود:

$$L^\dagger = (L^*)^t = L \qquad (۲-۱)$$

که در آن بالانویس t معرف ماتریس ترانهاده است و بالانویس خنجر † معرف دوگان هرمیتی است.در نتیجه درایه های مقابل قطر باید مزدوج مختلط باشند و بنابراین درایه های قطری حقیقی محض خواهند بود. تحت این شرایط تمامی بردارهای ویژه متعامدند و می‌توان طول همگی را به واحد بهنجار کرد.

هنگامی که یک ماتریس مانند k هرمیتی است ضرب داخلی دو بردار نسبت به آن، که به یک عدد نرده ای مختلط می انجامد، را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$x.(ky) = x^\dagger ky = (k^\dagger x).y = (kx).y \qquad (۳-۱)$$

به بیان دیگر در محاسبه‌ی ضرب داخلی دو بردار نسبت به ماتریس k، ترتیب اثر دادن ماتریس بر بردارها بی اثر است. در تعریف ضرب داخلی ضرورتی ندارد $\mathbf{x}$ و y بردارهای ویژه‌ی k باشند. در رابطه ی (۱-۳) به تفاوت ضرب ماتریس ها و ضرب داخلی توجه کنید. پس شرط تعامد باکمک جایگزینی k با ماتریس یکانی I در تعریف ضرب داخلی (۱-۳) حاصل می‌شود و عبارتست از:

$$x_\mu . x_\lambda = x^\dagger{}_\mu x_\lambda = \delta_{\mu\lambda} \qquad (۴-۱)$$

در (۱-۴) $\delta_{\mu\lambda}$ دلتای کرونکر است. همچنین نُرم بردار را تعریف می‌کنیم $\|x\| = \sqrt{x.x}$ که به وضوح عددی حقیقی و نامنفی است؛ اگر برداری دارای نُرم واحد باشد بهنجار نامیده می شود. حال به عنوان مثال ماتریس مربع زیر را در نظر بگیرید:

$$L = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta & \alpha + j\frac{1}{\sqrt{2}}\beta \\ \alpha - j\frac{1}{\sqrt{2}}\beta & \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \end{bmatrix} \qquad (۵-۱)$$

که در آن $\alpha,\beta \in R$ پارامتر هایی حقیقی هستند و نیز $j = \sqrt{-1}$ برای سادگی فرض می کنیم $\alpha^2 + \beta^2 = ۱$ بدیهی است که ماتریس(۱-۵) شرط هرمیتی بودن (۱-۲) را ارضا می‌کند و چون دارای بعد n=۲ است پس دارای دو مقدار ویژه خواهد بود. می‌توان به سادگی مقادیر ویژه‌ی (۱-۵) را از حل معادله‌ی مشخصه‌ی

$$L-\lambda I = 0 \qquad (۱-۶)$$

بدست آورد که در آن I ماتریس واحد است. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta - \lambda & \alpha + j\frac{1}{\sqrt{2}}\beta \\ \alpha - j\frac{1}{\sqrt{2}}\beta & \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda - \beta^2 = 0$$

(۱-۷)

در نتیجه مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\lambda_{\pm} = \alpha \pm 1$$

که هر دو حقیقی هستند. بردارهای ویژه‌ی نابهنجار از حل مستقیم (۱-۱) عبارتند از:

$$x_{\pm} = \begin{bmatrix} \beta \pm \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\alpha - j\beta \end{bmatrix} \qquad (۱-۹)$$

می توان به سادگی با جایگزینی دید که:

$$Lx_{\pm} = \lambda_{\pm} x_{\pm} \qquad (۱-۱۰)$$

برقرار است. همچنین بردارهای پایه متعامدند به گونه‌ای که:

$$x_{+}.x_{-} = \begin{bmatrix} \beta + \sqrt{2} & \sqrt{2}\alpha + j\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\alpha - j\beta \end{bmatrix} = 0 \qquad (۱-۱۱)$$

می توان بردارهای پایه را بهنجار کرد. برای این منظور ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$\|x_{\pm}\| = \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}\beta} \qquad (۱۲-۱)$$

در این صورت بردارهای ویژ ه‌ی بهنجار عبارتند از:

$$x_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}\beta}} \begin{bmatrix} \beta \pm \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\alpha - j\,\beta \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۱)$$

و در نتیجه(۱-۴) برقرار است.

همواره به تعداد برابر با بعد ماتریس n بردار ویژه می‌توان یافت که مستقل خطی باشند، و عموماً به ازای هر بردار ویژه تنها یک مقدار ویژه‌ی منحصر به فرد وجود دارد. ولی گاهی دو یا چند بردار ویژه یک مقدارویژه را به اشتراک می‌گذارند که در این صورت آن دسته از بردارها تبهگن نامیده می‌شوند.گرچه بردارهای ویژه‌ی تبهگن کماکان مستقل خطی هستند، ولی دیگر لزوماً شرط تعامد را ارضا نمی‌کنند. تحت این شرایط با تبدیل خطی مناسب می‌توان بردارهای ویژه‌ی تبهگن را متعامد نمود.

۱-۳ نظریه‌ی موجی شرودینگر

برخلاف چارچوب هایزنبرگ، مدل شرودینگر از نظریه‌ی کوانتومی مبتنی برمعادلات انتگرالی و دیفرانسیلی بود درست مانند مکانیک نیوتنی و معادلات ماکسول. که فیزیک‌دانان با آنها بیشتر آشنا بودند.

او به‌جای ماتریس‌ها، ازساختار ریاضی بهره گرفت که مانند موج رفتار می‌کرد، که آن را تابع موج نامیدکه تمام خصوصیات مکانیک کوانتومی را توصیف می‌کند. اما بنای جدید مکانیک کوانتومی بر حسب مکانیک موجی هم نتوانست منجر به خلاصی از اصل عدم قطعیت و برهم‌نهی شود.

چند سال بعد از آن‌که شرودینگر نظریه‌ی خود را ارائه کرد؛ فیزیک‌دانان ثابت کردند که نظریه‌ی هایزنبرگ و شرودینگر یکی است؛ هرچند از ریاضیات متفاوت استفاده کرده‌اند. آنها از اساس با هم فرقی نداشتند؛ بنابراین، تمام اعجاب و شگفتی اصول عدم قطعیت و برهم‌نهی در این نظریه هم دیده می‌شود.

۱-۳-۱ مقدار ویژه در فضای توابع

در این فرمول‌بندی از معادلات دیفرانسیل برای توصیف مسائل ویژه مقداری استفاده می‌شود. معادله‌ی مقدار- ویژه در این وضعیت شکلی همانند زیر دارد:

$$L\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda \qquad (۱۴-۱)$$

که در آن λ مقدار ویژه متناظر با توابع ویژه ψ_λ و L یک عملگر خطی است. در این‌جا دو اصل موضوعه در مکانیک کوانتومی ذکر می‌گردد.

الف) حالت هر سیستم، مشتمل بر چیدمان دقیق تمام اجزاء، با یک تابع موج قابل بیان است.

ب) مربع قدر مطلق توابع موجی که نرمالیزه هستند، همواره چگالی توزیع احتمال را به‌دست می‌دهد.

حال عملگر L را هرمیتی یا خودالحاقی می‌نامیم و نمایش می دهیم:

$$L^\dagger = L \qquad (۱۵-۱)$$

یک عملگر هرمیتی دارای این ویژگی است که تمامی مقادیر ویژه‌ی آن لزوماً حقیقی هستند معمولا رابطه‌ی (۱-۱۴) مقید به شرایط مرزی یا اولیه‌ی مناسب نیز می‌تواند باشد، که به کمک آن ها حل (۱-۱۴) ممکن می گردد. با اتخاذ تعریف مناسبی برای ضرب داخلی دو تابع نسبت به عمل گر خودالحاقی L به شکل

$$\psi_\lambda(L\psi_\nu) = (L^\dagger\psi_\lambda)^\dagger\psi_\nu = (L\psi_\lambda)^\dagger\psi_\nu \qquad (۱۶-۱)$$

که به یک عمل گر نرده ای مختلط منجر می‌شود، می توان دید که تعامد دو تابع از (۱-۱۶) با جایگزینی L با عدد واحد بدست می آید:

$$\psi_\lambda.\psi_\nu = \delta_{\lambda\nu} \qquad (۱۷-۱)$$

بسته به فرم ریاضی یک عملگر خودالحاقی L، مجموعه مقادیر ویژه‌ی ممکن $S = \{\lambda\}$ یا طیف عملگر L، معمولا از اجتماع تعدادی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی R به فرم $S = \{\cup_h s_k : \forall k_j s_h \subset R\}$ بدست می‌آید. اگر یک زیرمجموعه ی S_m دارای تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی N باشد (یا به بیان دیگر شمارش پذیر باشد)، آنگاه طیف مقادیر ویژه‌ی مربوطه گسسته و در غیر این صورت پیوسته است. گاه طیف عملگرها مخلوطی از زیر دامنه‌های پیوسته و گسسته است و شرایط مرزی نقش اساسی در تبیین گسستگی یا پیوستگی طیف دارند. اگر طیف عمگر پیوسته باشد، آنگاه معمولا $\delta_{\lambda\nu} = \delta(\lambda - \nu)$

مبین دلتای دیراک خواهد بود.. عموماً طیف عملگرها ، اجتماعی از زیرمجموعه های گسسته و پیوسته است در این صورت تعامد نیازمند استفاده از دلتای دیراک و دلتای کرونکر مانند $\psi_\lambda^n . \psi_\nu^m = \delta_{nm}\delta(\lambda - \nu)$ خواهد بود.[۱]

۱-۴ تفسیر کپنهاگی

تعبیر کپنهاگ، تعبیر استاندارد مکانیک کوانتومی است که توسط «نیلز بوهر» و «ورنر هایزنبرگ» فرمول‌بندی شد. آنها تعبیر احتمالاتی تابع موج را که در ابتدا توسط «مکس بورن» پیشنهاد شده بود، گسترش دادند. در این تعبیر سؤالاتی مانند «قبل از این‌که من موقعیت این ذره را اندازه‌گیری کنم این ذره کجا بود؟» را بی‌معنا می‌دانند. فرآیند اندازه‌گیری به‌صورت تصادفی دقیقاً یکی از احتمالات ممکن را که تابع موج حالت آنها اجازه می‌دهد، برمی‌گزیند. چگونگی این انتخاب هم با احتمالات متناظر با هر حالت ممکن تطابق دارد. بر اساس این تعبیر، برهم‌کنش یک مشاهده‌گر با یک وسیله که خارج از سیستم کوانتومی است، سبب فرو ریختن تابع موج می‌شود. پس به قول هایزنبرگ «واقعیت در مشاهده‌ها است و نه مثلا در الکترون».

«بوهر» اصرار داشت که تنها طریق معنادار بودن ریاضیات نظریه‌ی کوانتوم این است که فرض کنیم هیچ چیز تا هنگامی که اندازه گیری نشود وجود ندارد. ما نمی‌توانیم درباره واقعیت عینی مستقل از مشاهده‌گران سخن بگوییم؛ زیرا مشاهده‌های ما آن‌چه را که خواهیم دید متفاوت خواهد کرد.[۲]

۱-۵ نظریه‌ی بوهم

نتایج تجربی نظریات بوهم، همان‌هاست که مکانیک کوانتومی پیش‌بینی می‌کند؛ اما این نظریه بر -خلاف کوانتوم بر مبنای مفاهیم کلاسیکی ساخته شده است. هر ذره در این نظریه، مکان کاملاً مشخصی دارد که به‌کمک این نظریه می‌توان نحوه‌ی تحول مکان را بیان کرد.

پدیده‌ها دراین نظریه با قطعیت پیش‌بینی می‌شوند و عدم اطلاع، از حالت دقیق ذره به عنوان احتمال وارد می‌شود؛ همان‌گونه که در مکانیک آماری کلاسیک با احتمال مواجه هستیم. علاوه بر ذرات و نیروها در این نظریه، تابع موج وجود دارد. تابع موج ذره چیزی شبیه به میدان نیرو است که ذره را با خود می‌برد و تعیین می‌کند مکان آتی ذره کجا باشد؛ پس «در این نظریه هر دو حالت موج و ذره پذیرفته شده است».

قانون تحول توابع موج، همان معادله‌ی موج مکانیک کوانتومی شرودینگر است؛ ولی در اینجا تابع موج کلی دستگاه دیگر «رمبش» نمی‌یابد ولی تابع موجهای جزئی بصورت موثر رمبش می‌یابند.

بر خلاف مکانیک کوانتومی که توابع موج صرفاً توابع ریاضی مفید هستند، در این نظریه تابع موج یک موجود فیزیکی واقعی است.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \qquad \frac{dq}{dt}=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) \qquad (۱۸-۱)$$

که در این رابطه q نمایش مکان است، در این نظریه، سرعت ذره با یک تابع سرعت $V(x)$ تعیین می شود. این سرعت را می‌توان از تابع موج ذره در همان زمان با استفاده از الگوریتم خاصی حساب کرد.

مکان و تابع موج ذره را در هر لحظه‌ی دلخواه می‌توان با دانستن مکان و تابع موج اولیه ذره به‌صورت قطعی تعیین کرد. حال اگر مجموعه‌ای از ذرات با شرایط اولیه متفاوت داشته باشیم، می‌توانیم مکان نهایی ذرات این مجموعه را تعیین کنیم.

اگر مکان اولیه ذره را نداشتیم و تابع موج اولیه را داشته باشیم، آن‌گاه احتمال اینکه آن ذره در مکان دلخواهی باشد، مساوی با مجذور تابع موج اولیه در آن نقطه است.

تابع موج کلی دستگاه هیچ‌گاه رمبش نمی‌یابد، ولی تابع موج‌های جزئی به‌صورت مؤثر رمبش می‌یابند.

کل آینده‌ی دستگاه را می‌توان با داشتن تابع موج اولیه ذره (که تابعی از مکان اولیه ذره است) تعیین کرد.

۱-۵-۱ نظریه‌ی دوبروی–بوهم

دوبروی تصور می‌کرد که موج واقعی با ذرات همراه است. این تابع موج به‌ظاهر رفتار موج‌گونه دارد، بدون این‌که امواج واقعی فیزیک را نشان دهد. با این حال، با کمک بوهم به تفسیر مستقیم فیزیکی و واقعی از ماده-موج دست یافت. نظریه‌ی دوبروی-بوهم امروزه تنها تفسیری از وضعیت واقعی موج و ماده ارائه می‌دهد و پیش‌بینی‌های نظریه‌ی کوانتومی را نشان می‌دهد، اما از آن زمان تا به حال، دارای اشکالاتی است و نمی‌تواند بیش از تفسیر کپنهاگی پیش‌بینی کند.

آن‌چه که مشخص است، از گذشته تا حال، اندازه‌گیری یک اصطلاح گمراه کننده است که حدود سه چهارم یک قرن توسط فیزیک‌دانان کوانتومی از آن استفاده شده و استفاده کردن از آن در محاسبات کوانتومی اجتناب‌ناپذیر است.

در فصل‌های بعد به روش‌های ارائه شده در اندازه‌گیری احتمالاتی می‌پردازیم و قوانین حاکم بر این اندازه‌گیری را شرح می‌دهیم. در فصل ۴، روش اندازه‌گیری با کمک احتمالات شرطی مختلط را معرفی و بررسی خواهیم کرد.

فصـــل ۲

انـــدازه گیـــری درنظریه‌ی کـــوانتـــومی

۲-۱ مقدمه

در مکانیک کوانتومی به‌طور دقیق نمی‌توانیم اطلاعاتی درباره‌ی ویژگی‌های ذره بیان کنیم؛ زیرا در اثر اندازه‌گیری اطلاعات اولیه از بین می‌رود. پس به‌طور احتمالی پیش‌بینی می‌کنیم نتیجه‌ی اندازه‌گیری چه خواهد شد.

جنبه های کوانتومی اندازه‌گیری تقریباً قدمتی برابر با خود مکانیک کوانتومی دارند. زمانی که در سال ۱۹۳۲فون نیومن[۱] دیدگاه خودش را درمورد مکانیک کوانتومی در مقاله‌ای نوشت، بعضی ازاین جنبه ها را توضیح داد. سپس درادامه توسط ویلر [۲]و زورک [۳]درسال ۱۹۸۱ تصحیح گردید بعد از آن کتابهایی نیز دراین زمینه نوشته شد، که از جمله آنها می‌توان به کتاب اندازه‌گیری کوانتومی که درسال ۱۹۹۲ توسط برینسکی [۴]و خلیلی[۵]، اطلاعات و محاسبات کوانتومی که درسال ۲۰۰۰ توسط نیلسن [۶]و چانگ [۷]و یا کتاب اندازه گیری و کنترل کوانتومی که درسال ۲۰۰۰ توسط وایزمن[۸] و میلبرن [۹] نوشته شد اشاره کرد.

۲-۲ توصیف حالت در مکانیک کوانتومی

حالت یک سیستم فیزیکی با یک بردار در یک فضای هیلبرت توصیف می‌شود. به طور خاص وقتی در مورد ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ حرف می‌زنیم می‌گوییم که ذره مثلاً در حالت $|z+\rangle$ است یا در حالت $|x+\rangle$ قرار دارد. در این بحثها این حالت‌ها خالص و تقریبا ایده‌آل هستند. ما وقتی حالت یک ذره را می‌شناسیم که روی آن اندازه‌گیری کرده باشیم. در غیر این صورت اطلاع خیلی کمی از حالت ذره داریم و نمی‌توانیم آن را مشخص کنیم. به عنوان مثال باریکه فوتون‌هایی که از یک صفحه پولاروید خارج می‌شوند در یک

[1] Von Newman
[2] wheeler
[3] zurek
[4] Bragnisky
[5] Khalili
[6] Nilsen
[7] Chung
[8] Wiseman
[9] Milburn

حالت قطبیده مشخص مثل $|H\rangle$ قرار دارند چرا که صفحه پولاروید تنها فوتونهایی را از خود عبور داده که قطبش آنها در راستای افقی باشند. به این ترتیب صفحه پولاروید روی باریکه فوتون‌ها یک اندازه‌گیری انجام داده و فوتون‌های در حالت $|H\rangle$ را فیلتر کرده است.[1]

اما باریکه فوتون‌هایی که به دستگاه پولاروید می‌تابد هیچ نوع حالت مشخصی ندارد. به عبارت بهتر دراین باریکه ذراتی با هر نوع قطبشی یافت می‌شود. در غیاب هر نوع اندازه‌گیری تنها می‌توان به اطلاعات آماری در مورد توزیع این حالت‌ها بسنده کرد و گفت که در این باریکه p_i درصد ذرات در حالت $|\psi_i\rangle$ هستند. در چنین حالتی هرگاه بخواهیم متوسط یک مشاهده‌پذیر مثل O را روی این باریکه از ذرات اندازه‌گیری کنیم از این اطلاعات آماری استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\langle o \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | o | \psi_i \rangle \qquad (۱-۲)$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\langle o \rangle = tr(o\rho) \qquad (۲-۲)$$

۲-۲-۱ ماتریس چگالی

که در آن ρ به صورت زیر تعریف شده است :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \qquad (۳-۲)$$

ماتریس ρ ماتریس چگالی خوانده می‌شود و همانطور که از رابطه(۲-۳) پیداست این ماتریس توصیف کننده ذرات باریکه است. می‌گوییم که ذرات باریکه در یک حالت خالص قرار ندارند بلکه در یک حالت مخلوط یا آمیخته قرار دارند. تمام اطلاعاتی که می‌توان در چارچوب مکانیک کوانتومی از این باریکه

[1] - به طور کلی هر نوع عمل اندازه‌گیری یک عمل فیلترینگ است.

ذرات استخراج کرد در ماتریس چگالی آن نهفته است و به همین دلیل ماتریس چگالی را ماتریس حالت این ذرات می‌گوییم.

اینجا توجه به یک مسئله مهم ضروری است، برای آنکه از ماتریس چگالی صحبت کنیم نیازی نیست که حتما یک باریکه از ذرات داشته باشیم. حتی برای یک ذره نیز می‌توان از ماتریس چگالی سخن گفت. فرض کنید که تنها یک ذره در آزمایشگاه به شما داده شده است و نه یک باریکه از ذرات و به شما گفته شده است که حالت ذره مشخص نیست. تنها این معلوم است که این ذره با احتمال p_1 در حالت ψ_1 است و با احتمال p_2 در حالت ψ_2 و الی آخر.

ماتریس ρ به شکلی که در بالا معرفی شده است خاصیت‌های معینی دارد که براحتی می‌توانیم درستی آنها را بیازماییم. این خاصیت‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho^{\dagger} &= \rho, \\ tr\rho &= 1, \\ \rho &\geq 0. \end{aligned} \qquad (۴-۲)$$

خاصیت آخر که به آن مثبت بودن ماتریس گفته می‌شود به این معنی است که تمام ویژه مقدارهای ρ بزرگتر یا مساوی با صفر هستند و یا اینکه متوسط ماتریس ρ روی هر برداری بزرگتر یا مساوی با صفر است، یعنی:

$$\langle \upsilon|\rho|\upsilon\rangle \geq 0 \quad \forall \upsilon \qquad (۵-۲)$$

هرگاه که در رابطه (۲-۱-۳) تنها یکی از احتمالات غیر صفر باشد خواهیم داشت:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad (۶-۲)$$

و در این حالت می‌گوییم که ذره در یک حالت خالص[1] است.

[1] - Pure

ابهامی که ما در مورد حالت یک سیستم داریم ممکن است شامل همه درجات آزادی نباشد. به عنوان مثال ممکن است که در مورد یک ذره تکانه آن را به طور دقیق بدانیم ولی در مورد اسپین آن اطلاعات چندانی نداشته باشیم. در این صورت حالت این ذره به صورت $\rho = |p\rangle\langle p| \otimes \rho_{spin}$ خواهد بود.

وقتی اطلاعات مشخصی درباره یک ذره نداریم و نمی‌توانیم آن را با یک مجموعه از مشاهده‌پذیرهای کامل توصیف کنیم می‌بایست آن بخش از درجات آزادی را که در مورد آنها اطلاعات کافی نداریم با یک ماتریس چگالی توصیف کنیم. در بسیاری اوقات ما نه به یک سیستم کوانتومی بلکه به اجزای آن علاقمندیم. به عنوان مثال در یک تله یونیه که چندین یون را در یک حالت کوانتومی نگاه داشته است علاقمندیم که حالت یکی از یون‌ها را تعیین کنیم، و روی آن اندازه‌گیری کنیم. به عنوان یک مثال دیگر توجه می‌کنیم که امروزه در آزمایشگاه می‌توانیم حالت هایی از یک زوج فوتون تهیه کنیم مثل حالتِ زیر:

$$|\psi\rangle_{A,B} = \alpha|H,V\rangle + \beta|V,H\rangle \qquad (۷-۲)$$

که در آن H و V نشان دهنده قطبش فوتون‌ها در راستای افقی و عمودی است. می‌توانیم چنین فوتون‌هایی را ده‌ها کیلومتر از یکدیگر جدا کنیم بدون اینکه قطبش آنها دچار تغییر شود. فرض کنید که آلیس و باب چنین زوج فوتونی را تهیه کرده‌اند و فوتون اول در آزمایشگاه آلیس و فوتون دوم در آزمایشگاه باب قرار دارد که بسیار از آزمایشگاه آلیس دور است. شاخص‌های A و B برای شناسایی فوتون‌های آلیس و باب بکار رفته است. در چنین حالتی وقتی که آلیس روی فوتونی که در آزمایشگاهش قرار دارد آزمایش می‌کند می‌خواهد که نتایج آزمایش‌هایش را در چارچوب مکانیک کوانتومی با حالتی که به آن فوتون نسبت می‌دهد توصیف کند. سوالی که با آن روبرو است این است که فوتون‌اش در چه حالتی است؟ و چگونه می‌بایست آن را توصیف کند. مطمئناً این فوتون در حالت $|H\rangle$ یا $|V\rangle$ نیست.

حالت فوتون آلیس با یک ماتریس چگالی توصیف می‌شود. سیستمی را در نظر بگیرید که از دو بخش A و B تشکیل شده است. بنابر اصول مکانیک کوانتومی به این سیستم فضای هیلبرت $H = H_A \otimes H_B$

نسبت داده می‌شود. فرض کنید که $\{|i\rangle\}_{i=1}^{M}$ یک پایه برای H_A و $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^{N}$ یک پایه برای H_B باشد. در این صورت یک حالت کلی از سیستم AB توسط بردار حالت زیر داده می‌شود.

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i,\mu\rangle \qquad (۸-۲)$$

یک سیستم بسته با یک بردار حالت مشخص می‌شود و اجزای آن با ماتریس چگالی. حالت یک دستگاه فیزیکی با یک ماتریس چگالی ρ، که یک ماتریس هرمیتی، مثبت و با رد یک است داده می‌شود. ارزش انتظاری هر مشاهده‌پذیر که با عملگر هرمیتی A داده می‌شود بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\langle A\rangle \rho = \mathrm{tr}(A\rho) \qquad (۹-۲)$$

۲-۳ بیت‌های اندازه‌گیری

در فیزیک کلاسیک، برای مشخص کردن حالت یک سی‌بیت[1] ساده، فقط یک بیت اطلاعاتی که حالت آن یا ۰ و یا ۱ است نیاز داریم. اما برای مشخص کردن حالت یک کیوبیت[2] ساده با درجه آزادی دلخواه، نمی‌توان با یک متغیر دو حالتی بیان کرد به عبارتی برای مشخص کردن یک کیوبیت به دو عدد مختلط β و α نیاز است که متغیرهایی پیوسته هستند وتنها شرط آنها $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ است. حالت‌های کیوبیت مجموعه‌ای با ارزشتر از حالت‌های سی‌بیت هستند که با مجموعه‌ای از انتقال‌ها می‌توان روی آنها عمل کرد. اگر n سی‌بیت که هر کدام با صفر یا یک نمایش داده می‌شوند، داشته باشیم حالت هر کدام را با دیدن می‌توانیم تعیین کنیم و هیچ مسأله‌ی گیج کننده‌ای درباره‌ی خواندن حالت سی‌بیت‌ها وجود ندارد و دریافت اطلاعات از سی‌بیت‌ها پیچیده نیست. می‌توانیم محاسبات سی‌بیت‌ها را در هر مرحله بدون آن‌که مشکلی برای مراحل بعدی ایجاد شود، بخوانیم. در مقابل اگر n کیوبیت که حالت‌های پایه‌ی آنها برهم‌نهی دارند، در اختیار داشته باشیم، نمی‌توانیم اطلاعات زیاد نهفته

[1]-Cbit
[2]-Qbit

در دامنه‌ی α_m را استخراج کنیم و مقادیر آنها را نمی‌توانیم بخوانیم؛ بنابراین، حالت آنها را نمی‌توانیم پیدا کنیم.

فقط یک راه برای به‌دست آوردن اطلاعات از n کیوبیت داده شده وجود دارد و آن اندازه‌گیری کردن است. اندازه‌گیری کردن، یک آزمایش خاص روی هر کیوبیت و نتیجه‌ی آن یا صفر و یا یک است. این مجموعه‌ی صفرها و یک‌ها که از آزمایش به‌دست می‌آید، حالت $|\psi\rangle$ را مشخص نمی‌کند.

۲-۴ قانون بورن

ما فقط می‌توانیم احتمال نتایج ممکن را تعیین کنیم که از قانونی پیروی می‌کند که اولین بار مکس بورن[1] بیان کرد و به قانون بورن معروف است. اگر حالتی از n کیوبیتها به‌صورت

$$|\psi\rangle_n = \sum_{0\le x\le 2^n} \alpha_x |x\rangle_n \qquad (۱۰-۲)$$

باشد، احتمال آن‌که نتیجه‌ی اندازه‌گیری عدد صحیح x باشد به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$p(x) = |a_x|^2 \qquad (۱۱-۲)$$

این قانون دامنه و اعدادی را که از خواندن آزمایش واقعی و اندازه‌گیری کیوبیت‌ها می‌خوانیم، به هم ربط می‌دهد. احتمالات نتایج اندازه‌گیری با مربع بزرگی دامنه‌ها برابر است. شرط نرمالیزه کردن نیازمند آن است که مجموع تمام 2^n نتایج احتمالی برابر با یک باشد. این فرآیند اندازه‌گیری توسط گیت اندازه‌گیری[2] انجام می‌شود. در مقابل گیت‌های یکانی[3] که تنها یک حالت خروجی برای هر حالت ورودی دارد، گیت اندازه‌گیری n کیوبیتی یکانی نیستند و فقط به‌طور آماری با حالتی از کیوبیت ورودی مشخص می‌شود؛ بنابراین، عمل گیت اندازه‌گیری قابل بازگشت نیست و با کمک حالت نهایی $|x\rangle$ هیچ راهی برای بازسازی حالت اولیه $|\psi\rangle$ وجود ندارد. در محاسبات کوانتومی اندازه‌گیری، به معنای هیچ چیز

[1]-Max Born
[2]-Gate measurement
[3]-Unitary gate

کمتر یا بیشتر از آن‌چه که گیت اندازه‌گیری نشان می دهد، نیست که از قانونی مشخص پیروی می‌کند (قانون بورن). برای سادگی، قانون بورن را برای تک کیوبیت‌ها در نظر می‌گیریم:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \qquad (۱۲-۲)$$

با حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ و دامنه‌ی α_0و α_1، نتیجه‌ی اندازه‌گیری با احتمال $|\alpha_0|^2$ صفر است و با احتمال $|\alpha_1|^2$، یک می‌باشد. این اندازه‌گیری توسط یک گیت اندازه‌گیری تک کیوبیت انجام شده است.

در ادامه، باید ببینیم که گیت‌های اندازه‌گیری n کیوبیتی می‌توانند با عملکرد گیتهای اندازه‌گیری تک کیوبیت‌ها روی هر کدام از n کیوبیت‌ها تحقق پیدا کنند. نمایش n بیت صحیح با احتمالات مشخص شده به‌وسیله‌ی دامنه‌ها، جنبه‌ی مهم دیگری از گیت‌های اندازه‌گیری است. اگر n کیوبیت که در ابتدا توسط حالت $|\psi\rangle$توصیف شده، از طریق یک گیت اندازه‌گیری n کیوبیتی ارسال شود، گیت اندازه‌گیری عدد صحیح x را نشان می‌دهد.

این بدان معناست که تمام آثار دامنه‌ی α_xکه در حالت ورودی وجود داشت، در حالت خروجی از بین رفته و تنها نقشی که آنها در اندازه‌گیری دارند تعیین احتمال یک خروجی خاص است .

اگر حالت کیوبیت ورودی یکی از حالت‌های پایه‌ی کلاسیکی $|x\rangle_n$ باشد، با توجه به قانون بورن، احتمال آن‌که گیت اندازه‌گیری x بخواند، یک خواهد بود و حالت خروجی $|x\rangle_n$ باقی خواهد ماند. اما برای حالت برهم‌نهیده با بیش از یک دامنه‌ی غیر صفر α_x، حالت خروجی تعیین نمی‌شود و هیچ گونه اطلاعاتی از دامنه در مورد حالت اولیه به‌دست نمی‌آید؛ مگر آن‌که تأیید کند احتمال در این حالت صفر نیست. بنابراین زمانی که n کیوبیت، از طریق گیت اندازه‌گیری n کیوبیتی ارسال می‌کنیم، امکان به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد حالت اصلی $|\psi\rangle$را از بین می‌بریم. مثلاً اگر بعد از اندازه‌گیری ۵ کیوبیتی نتیجه ۰۱۱۰۰ شد، نمی‌توان گفت که قبل از اندازه‌گیری حالت $|01100\rangle$بوده و حالت اصلی و همه‌ی اطلاعات که در دامنه است، پس از اندازه‌گیری از بین می‌رود و کیوبیتهای خروجی فقط نتیجه‌ی آزمایش هستند، صرف‌نظر از این‌که حالت قبل از اندازه‌گیری چه حالتی بوده است.

این تغییر حالت را که بر اثراندازه‌گیری به‌وجود می‌آید، رمبش[1] (فروپاشی) گویند. حالت n کیوبیت‌ها از طریق قانون بورن که برای محاسبه‌ی احتمالات نتایج اندازه‌گیری استفاده می‌شود، به‌دست می‌آید. همان‌طور که گفته شد، هیچ ویژگی از کیوبیت‌ها بعد از اندازه‌گیری متناظر با خودش وجود ندارد. محاسبات کوانتومی با ایجاد یک انتقال یکانی که از برهم‌نهی ساخته شده و در آن بسیاری از دامنه‌های α_x صفر یا بسیار نزدیک به صفر هستند،احتمال آنکه نتیجه‌ی اندازه‌گیری x باشد را تعیین می‌کند.

۲-۴-۱ قانون تعمیم‌یافته‌ی بورن

با این‌که قانون تعمیم یافته‌ی بورن در محاسبات کوانتومی نقش مهمی دارد، ولی به‌ندرت در متون استاندارد مکانیک کوانتومی به آن اشاره شده است. در اینجا کلیاتی از این قانون را بیان می‌کنیم. این قانون برای یکی از کیوبیت‌ها که یک گیت اندازه‌گیری استاندارد تک کیوبیتی روی آن اثر کرده، بر این پایه استوار است که هر حالت $|\psi\rangle$ از همه‌ی n کیوبیت‌ها می‌تواند شکل زیر را داشته باشد.

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle|\varphi_0\rangle + a_1|1\rangle|\varphi_1\rangle \qquad (۱۳-۲)$$

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$$

که $|\varphi_0\rangle$ و $|\varphi_1\rangle$ نرمالیزه هستند، ولی الزاماً عمود برهم نیستند.

یک کیوبیت اندازه‌گیری می‌شود و (n-۱) کیوبیت اندازه‌گیری نشده باقی می‌ماند.

$$|\varphi_0\rangle \propto \sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_x |x\rangle_{n-1}$$

$$|\varphi_1\rangle \propto \sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{x+2^{n-1}} |x\rangle_{n-1} \qquad (۱۴-۲)$$

این قانون بیان می‌کند که اگر یک کیوبیت مثل حالت کیوبیت رابطه‌ی (۲-۱۳) کیوبیتی اندازه‌گیری شود، با احتمال $|\alpha_x|^2$ حالت x را خواهیم داشت (که یا صفراست یا یک). پس حالت n کیوبیت به‌صورت حاصل‌ضرب حالت $|x\rangle|\phi_x\rangle$ خواهد شد. پس اگر گیت اندازه‌گیری تک کیوبیتی روی یک کیوبیت عمل

[1]-Collapse

کند، با استفاده از قانون بورن نتییجه مشخص می‌شود. در طی این فرآیند n-۱ کیوبیت اندازه‌گیری نشده، نقشی ندارند و در فرآیند اندازه‌گیری در حالت اصلی خود می‌مانند. با توجه به آن‌چه که گفتیم، $|\phi_0\rangle$ و $|\phi_1\rangle$ یکانی هستند و لزوماً متعامد نیستند.

اگر قانون تعمیم‌یافته بورن را n بار متوالی برای اندازه‌گیری بر روی یک کیوبیت اعمال کنیم، می‌توان نشان داد حالت نهایی هر کدام از n کوبیت‌ها که در ابتدا در حالت کلی رابطه‌ی (۲-۱) بودند، با احتمال $|\alpha_x|^2$, x می‌شود؛ به‌طوری‌که x, n بیت صحیح است که این بیت‌ها بعد از خواندن n گیت اندازه‌گیری تک کیوبیتی به‌دست می‌آیند.

قانون بورن معمولی با n گیت اندازه‌گیری تک کیوبیتی، نقش بیت اندازه‌گیری n کیوبیتی ساده را بازی می‌کند. نسخه‌ی عمومی قانون بورن از قانون تعمیم‌یافته بورن به‌دست می‌آید. حالت کلی از m+n کیوبیت می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$|\psi\rangle_{m+n} = \sum \alpha_x |x\rangle_m |\varphi_x\rangle_n \qquad (۱۵-۲)$$

که $\sum_x |\alpha_x|^2 = 1$ و حالت‌های $|\phi_x\rangle_n$ نرمالیزه شده‌اند، اما لزوماً عمود نیستند [۱].

با m بار عمل کردن قانون تعمیم‌یافته‌ی بورن روی m کیوبیت، در یک حالت با m+n کیوبیت فقط m کیوبیت از سمت چپ رابطه‌ی (۲-۶) اندازه‌گیری می‌شود و با احتمال $|\alpha_x|^2$ نتیجه x خواهد بود و بعد از اندازه‌گیری، حالت تمام m+n کیوبیت به‌صورت زیر خواهد شد:

$$|x\rangle_m |\varphi_x\rangle_n$$

که در آن m کیوبیت اندازه‌گیری شده در حالت $|x\rangle_m$ و n کیوبیت اندازه‌گیری نشده در حالت $|\phi_x\rangle_n$ [۳].

۲-۵ گیت‌های یک کیوبیتی

یک عملگر یکانی روی یک کیوبیت را یک گیت تک–کیوبیتی می‌خوانیم. بنابراین یک گیت تک-کیوبیتی به این صورت نوشته می‌شود:

$$U = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \qquad (۱۶-۲)$$

که در آن $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. چنین گیتی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$U = e^{i\varphi I + i\theta n.\sigma} \qquad (۱۷-۲)$$

به این ترتیب یک گیت تک-کیوبیتی با سه پارامتر ϕ, θ و n پارامتریزه می‌شود. البته این فقط یکی از راه‌های پارامتریزه کردن است. مشهورترین عملگرهای تک کیوبیتی همان عملگرهای پاوولی X، Y و Z هستند. عملگر X را عملگر بیت-برگردان[۱] و عملگر Z را علمگر فاز-برگردان[۲] می‌نامند. دلیلش هم واضح است زیرا:

$$X(a|0\rangle + b|1\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle), \qquad Z(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle - b|1\rangle \qquad (۱۸-۲)$$

عملگر XZ نیز که منهای یک فاز i همان عملگر Y است هم فاز و هم بیت را بر می‌گرداند. عملگر دیگری که خیلی مهم است عملگر هادامارد است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۱۹-۲)$$

این عملگر ویژه بردارهای عملگرهای X و Z را به هم تبدیل می‌کند.

۲-۶ اندازه‌گیری‌های POVM [۳]

در بسیاری از اوقات ما تنها به آمار اندازه‌گیری علاقه‌مند هستیم و به حالت‌های پس از اندازه‌گیری علاقه نداریم، یا این‌که به آنها دسترسی نداریم. در واقع بیشتر اندازه‌گیری‌های ما از این نوع هستند. مثلاً یک دستگاه شمارشگر فوتون را در نظر بگیرید. فوتونی که به این دستگاه وارد می‌شود در همان

[1] Bit-flip
[2] Phase-flip
[3] Positive operator – valued measure

ابتدا جذب یک الکترود فلزی شده و یک یا چند الکترون را آزاد می‌کند که به نوبه‌ی خود در چند مرحله پیاپی یک جریان الکتریکی را تولید می‌کند. به این ترتیب با ثبت یک جریان، متوجه می‌شویم که یک فوتون به شمارشگر وارد شده است. در اینجا به حالت فوتون بعد از خروج از شمارشگر علاقه‌ای نداریم؛ زیرا حالت ذرات ثبت شده تغییر می‌کند و از دسترس ما خارج می‌شود. در چنین مواردی فقط به احتمال رویدادها علاقه‌مند هستیم، مثلاً علاقه‌مندیم بدانیم در هر ثانیه چند فوتون به شمارشگر می‌رسند.

در اندازه‌گیریهای متداول تصویری[1] M به عنوان یک عملگر اندازه‌گیری تعریف می‌شود و m یک نتیجه‌ی ممکن از اندازه‌گیری است. با عمل کردن عملگر روی حالت $|\psi\rangle$، احتمال آنکه نتیجه‌ی اندازه‌گیری m باشد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$P(m)=\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle \qquad (۲۰-۲)$$

در این رابطه عملگرها هرمیتی هستند. حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری و نرمالیزه کردن بصورت:

$$|\psi'\rangle=\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}} \qquad (۲۱-۲)$$

از آنجا که مجموع احتمالات برابر با یک است:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \qquad (۲۲-۲)$$

اگر یک سیستم کوانتومی با عملگر چگالی ρ توصیف شده باشد، احتمال آنکه نتیجه اندازه‌گیری m شود برابر است:

$$P(m)=Tr(M_m^\dagger M_m \rho) \qquad (۲۳-۲)$$

حالت سیستمی که با عملگر چگالی توصیف شده بعد از اندازه‌گیری و بدست آوردن نتیجه m:

$$\rho'=\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{Tr(M_m^\dagger M_m \rho)} \qquad (۲۴-۲)$$

[1] Projective

اندازه‌گیری‌های "POVM" شامل مجموعه‌ای از اپراتورهای مثبت است که به‌طور متداول با E_m نمایش داده می‌شود. احتمال این‌که نتیجه‌ی اندازه‌گیری m باشد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$P(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle \qquad (۲۵-۲)$$

وقتی سیستم حالت آمیخته با اپراتور چگالی ρ دارد، احتمال به‌دست آوردن نتیجه‌ی اندازه‌گیری m برابر است با $\mathrm{Tr}(E_m \rho)$. به‌علاوه، در مجموعه‌ی عملگرهای مثبت $\{E_m, m = 1, \cdots, k\}$ شرط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_m E_m = I \qquad (۲۶-۲)$$

ساختار اپراتورهای اندازه‌گیری در یک POVM به شکل زیر است:

$$E_m = M_m^\dagger M_m$$

$$P(m) = \mathrm{tr}(M_m \rho M_m^\dagger) = \mathrm{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) = \mathrm{tr}(E_m \rho) \qquad (۲۷-۲)$$

POVM ممکن است اندازه‌گیری تصویری را توصیف کند اما این عملگرها الزاما عملگرهای تصویری نیستند یعنی:

$$M_i M_j \neq \delta_{ij} M_i \qquad (۲۸-۲)$$

POVM نوع کلی‌تری از عملگر اندازه‌گیری را بنا می‌کند؛ تا اندازه‌گیریهای تصویری را در مواردی که در جهان واقعی نمی‌توانند عمل کنند را توصیف کنند. برای مثال اگر یک سیستم در حالت $|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$ با یک اندازه‌گیری تصویری $|u_k\rangle\langle u_k|$ تابع موج به حالت $\langle u_k|$ رمبش می‌کند. ما آزادیم تا بارها اندازه‌گیری را روی سیستم تکرار کنیم، نتیجه اندازه‌گیری $\langle u_k|$ خواهد شد. در آزمایشگاه، همه‌ی اندازه‌گیری‌ها قابل تکرار نیستند، در مثال آشکار کردن فوتون‌ها، فوتون بعد از آشکار شدن تخریب می شود و تکرار اندازه‌گیری روی سیستم امکان‌پذیر نیست. در این مورد می‌توان از POVM استفاده کرد، زیرا اندازه‌گیری را بدون در نظر گرفتن حالت بعد از اندازه‌گیری تشریح می‌کند.

POVM ها توانایی متمایز کردن حالتهای غیر عمود برهم را دارند. در این اندازه‌گیری تعداد اندازه‌گیری‌ها می‌تواند از تعداد حالات پایه بیشتر باشد. همچنین از این نوع اندازه‌گیری می‌توان برای بدست آوردن

اطلاعاتی درباره‌ی حالت سیستم با یک اندازه‌گیری ضعیف[1] استفاده کرد. در اندازه‌گیری ضعیف، اندازه‌گیری یک اختلال کوچک در سیستم ایجاد می‌کند، بدون رمبش تابع موج مقداری اطلاعات از سیستم بدست می‌آید.**[۴]**

برای مثال: سیستم را یک کیوبیت ساده در نظر می‌گیریم

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

بطوریکه $a^2 + b^2 = 1$.فرض کنیم که $\varepsilon \square 1$ یک پارامتر مثبت کوچک داریم و دو عملگر اندازه‌گیری:

$$A_0 = A|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\varepsilon}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$A_1 = \sqrt{\varepsilon}\,|1\rangle\langle 1|$$

عملگرهای **POVM** را به شکل زیر می‌سازیم:

$$E_0 = A_0^2 = |0\rangle\langle 0| + (1-\varepsilon)|1\rangle\langle 1|$$

$$E_1 = A_1^2 = \varepsilon|1\rangle\langle 1|$$

با توجه به اینکه

$$E_0 + E_1 = |0\rangle\langle 0| + (1-\varepsilon)|1\rangle\langle 1| + \varepsilon|1\rangle\langle 1| = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

این عملگرها نیمه معین مثبت هستند؛ برای مثال، مقادیر ویژه E_0 ، $\{1,1-\varepsilon\}$ و مقادیر ویژه E_1، $\{0,\varepsilon\}$ هستند. احتمال اینکه نتیجه اندازه‌گیری $\mathbf{E_0}$ بدست آید:

$$\langle\psi|E_0|\psi\rangle = (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)(a|0\rangle + b(1-\varepsilon)|1\rangle) = |a|^2 + |b|^2(1-\varepsilon)$$

حالت بعد از اندازه‌گیری :

$$\frac{E_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|E_0|\psi\rangle}} = \frac{a|0\rangle + b(1-\varepsilon)|1\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2(1-\varepsilon)}} = \frac{a}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2(1-\varepsilon)}}|0\rangle + \frac{b(1-\varepsilon)}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2(1-\varepsilon)}}|1\rangle$$

[1] -Weak masurment

مشاهده می‌کنید که حالت بعد از اندازه‌گیری، برهم نهیده است. بنابراین حالت بعد از اندازه‌گیری به حالت $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ رمبش نمی‌کند. احتمال آنکه نتیجه اندازه‌گیری $\mathbf{E_1}$ بدست بیاید:

$$\langle\psi|E_1|\psi\rangle = (a^*\langle 0|+b^*\langle 1|)(b(\varepsilon)|1\rangle) = |b|^2(\varepsilon)$$

چون $\varepsilon \square 1$، احتمال بدست آمدن این نتیجه خیلی کوچک هست. می‌بینید که اندازه‌گیری **POVM** نوع کلی‌تر اندازه‌گیری هست و در مواردی کاربرد دارد که ما به حالت بعد از اندازه‌گیری نیاز نداریم.

۲-۶-۱ اندازه‌گیری ضعیف

یکی از مهمترین ویژگی‌هایی که در قرن اخیر توسعه یافته است، تأکید بر اندازه‌گیری غیرمستقیم است. دراین فرایند اندازه‌گیری به وسیله بررسی اینکه چگونه سیستم تحت مطالعه با وسایل کوانتومی برهم‌کنش می‌کند، سیستم اندازه گیری می‌شود. زمانی که در سال ۱۹۸۸ مقاله ای توسط آهارانوف[۱]، آلبرت[۲] و ویدمن[۳] منتشر شد، یک جنبه دیگر نیز بسیار حائز اهمیت قرار گرفت و توسعه یافت. این جنبه، اندازه گیری ضعیف و به دست آوردن مقدارضعیف بود. البته این ایده توسط آهارانوف وآلبرت ارائه شد اما دیگران نیز به شدت آن‌را مورد توجه قراردادند.آهارانوف و همکارانش درحالی کار خود را شروع کردندکه به خوبی با مکانیک کوانتومی آشنا بودند و می‌دانستند که اندازه‌گیری کوانتومی تخریب در حالت سیستم را درپی خواهد داشت اما آنچه آنها دنبالش بودند این بود که آیا ممکن است که برهم‌کنشی که علت تخریب است خیلی ضعیف باشد. علیرغم اینکه تخریب حالت کم میشود اما به همین صورت نیز اطلاعات به دست آمده از سامانه نیزکم می‌شد. اما آنها این ایده خود را رها نکردند و در سالهای بعد آهارانوف و پاپسکو[۴] و تالکسون [۵] موفق شدند نمونه دیگری از اندازه گیری، که اندازه‌گیری ضعیف نام داشت را فرمول بندی کنند.

[1]-Aharonov
[2]-Albert
[3]-Waidman
[4] Popesco
[5]-Talekson

در این نوع اندازه‌گیری، قدرت برهم‌کنش بین سیستم و وسیله‌ی اندازه‌گیری و تخریبی که در اثر اندازه‌گیری در سیستم ایجاد می‌شود، کاهش می‌یابد. مقداری که در یک بار اندازه‌گیری به‌دست می‌آید، ارزش چندانی ندارد. اندازه‌گیری بارها و بارها تکرار می‌شود و سپس میانگین محاسبه می‌شود که به آن مقدار ضعیف[1] گویند. اندازه‌گیری کوانتومی همواره در طول زمان دارای اهمیت بوده است. بیشتر اهمیت اندازه‌گیری به این خاطر است که اندازه‌گیری در مرز بین دنیای کلاسیک و دنیای کوانتوم قرار دارد.

اندازه‌گیری ضعیف می‌تواند بعضی از اطلاعاتی را که در دامنه‌های حالت کوانتومی وجود دارد، معلوم کند، بدون آن‌که حالت به ویژه‌بردارش رمبش یابد. در اندازه‌گیری ضعیف، سیستم و وسیله‌ی اندازه‌گیری با هم یک سیستم کوانتومی هستند. این اندازه‌گیری شامل دو مرحله است: در مرحله‌ی اول ما به‌طور ضعیف سیستم کوانتومی و وسیله‌ی اندازه‌گیری کوانتومی را جفت می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم با وسیله‌ی اندازه‌گیری، اندازه‌گیری قوی انجام می‌دهیم. در واقع، ابتدا یک درهم‌تنیدگی خیلی ضعیف بین سیستم و وسیله‌ی اندازه‌گیری ایجاد می‌کنیم. سپس اندازه‌گیری قوی به‌صورت سوزنی[2] و خیلی کوچک با وسیله‌ی اندازه‌گیری روی سیستم اعمال می‌کنیم[۵و۶]. رمبش بسیار کوچک (سوزنی) در اثر فرآیند اندازه‌گیری ضعیف ایجاد می‌شود. انحراف استاندارد نتیجه‌ی این اندازه‌گیری، بزرگتر از تفاوت بین مقادیر ویژه‌ی سیستم است. می‌توان گفت، اندازه‌گیری ضعیف تعمیم یافته‌ی اندازه‌گیری قوی است [۷و۸].

عملگر اندازه‌گیری ضعیف برای سیستم‌های کیوبیت کوانتومی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{m} \end{pmatrix},$$

$$m \in [0, \infty). \qquad (۱۴-۳)$$

[1]-Weak Value
[2] Needle

اگر $0 \le m \le 1$ باشد، آن‌گاه M یک اندازه‌گیری است که سیستم را به‌طور نسبی به حالت $|0\rangle$ نزدیک می‌کند و در غیر این صورت، سیستم را به حالت $|1\rangle$ نزدیک می‌کند. هم چنین، عملگر اندازه‌گیری ضعیف برای سیستم‌های کیوتریت کوانتومی به شکل زیر است:

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & m^{(2)} \end{pmatrix}, \; m^{(1)}, m^{(2)} \in [0, \infty).$$

در طول چند دهه گذشته، محققان دریافته‌اند که وقتی انواع مختلفی از سیستم‌های کوانتومی را به کمک روش اندازه‌گیری ضعیف، اندازه‌گیری کنیم، می توانیم حساسیت اندازه‌گیری را از طریق تقویت سیگنال، بهبود ببخشیم. اگرچه حساسیت اندازه‌گیری در این روش بیشتر می شود، اما در عوض، همین تقویت سیگنال باعث می‌شود فوتون‌های کمتری برای اندازه‌گیری در دسترس باشند. به همین علت، دانشمندان اخیرا ادعا کرده بودند که دقت‌نهایی روش اندازه‌گیری ضعیف نمی‌تواند از یک حد روش کلاسیکی، فراتر برود؛ نکته‌ای که می‌تواند نوعی نقص برای این روش، تلقی شود.

محققان چینی ثابت کردند چنین نقصی، وجود ندارد! آنها برای نخستین بار، یک اندازه‌گیری ضعیف انجام دادند که حد کلاسیکی را رد کرده است. حد کلاسیکی به حد نویز یک شات مربوط می‌شود که مبتنی بر ماهیت ذره‌ای نور است. در این حالت، افت و خیزهای تصادفی که توسط هر فوتون، تولید می‌شود روی دقت اندازه‌گیری، تاثیر می‌گذارند. دانشمندان برای غلبه بر این حد، از تکنیکی به نام بازیافت قدرت استفاده کردند. محققان می‌گویند: کار ما، نوع جدیدی از روش‌های با دقت بالا را ممکن می‌کند که نه تنها، حساسیت اندازه‌گیری را به شدت بالا می‌برد (به لطف تکنیک تقویت سیگنال اندازه‌گیری ضعیف)، بلکه قابلیت عبور از حد اندازه‌گیری کلاسیکی را هم با استفاده از تکنیک بازیافت قدرت، فراهم می‌کند. کار ما برای نخستین بار ثابت می کند که روش اندازه‌گیری ضعیف می‌تواند فراتر از حد کلاسیکی برود.

فیزیک‌دانان معتقدند روش اندازه‌گیری ضعیف مبتنی بر بازیافت قدرت، برای اندازه‌گیری بسیاری از اثرات دیگر فیزیکی، قابل استفاده است. روش اندازه‌گیری ضعیف می‌تواند در اندازه‌گیری بسیاری از اثرات فیزیکی کوچک، مانند انحراف پرتو، جابه‌جایی فاز، جابه‌جایی فرکانس، جابه‌جایی دما، اندازه‌گیری‌های سرعت و حتی تشخیص امواج گرانشی به کار گرفته شود. وقتی روش اندازه‌گیری ضعیف با تکنیک بازیافت قدرت، ترکیب می‌شود، دقت اندازه‌گیری بسیار بالاتر رفته و کاربردهای آن هم بسیار گسترده‌تر می‌شود. از طرفی محققان امیدوارند بتوانند دقت اندازه‌گیری را از طریق ترکیب تکنیک بازیافت قدرت با سایر روش‌ها مانند بازیافت پالس، باز هم بالاتر ببرند.

فصـــل ۳

احتمالات شرطی

۳-۱ مقدمه

در دو فصل گذشته، در مورد روش‌های قبلی اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی صحبت کردیم. در این فصل، ابتدا واقعیت فیزیکی را بررسی می‌کنیم. سپس، احتمالات شرطی و تعاریفی از ارگودیک، نظریه‌ی آشوب که مباحثی از ریاضی هستند و در فیزیک کوانتوم از آنها استفاده شده را بیان می‌کنیم. تفسیر جدید مکانیک کوانتومی با کمک این نظریات و تعاریف شرح داده می‌شود.

۳-۲ واقعیت فیزیکی

عقل سلیم حکم می‌کند الکترونی که از یک فیلامان گرم ساطع می‌شود و به روی یک پرده فلورسانس می‌نشیند، حتماً در هر لحظه در نقطه‌ای از فضا بوده و در نتیجه مسیری را در فضا پیموده است. بنابراین مسیر الکترون یک واقعیت عالم خارج است، مستقل از اینکه ما آن را مشاهده کنیم یا نکنیم. در این دیدگاه شانس و تصادف زاده‌ی ناآگاهی‌ها از متغیرهای پنهانی است که مطابق با یک نظریه‌ی بنیادی‌تر بر دینامیک اشیای میکروسکوپی حاکم است. بطور مثال حرکت سکه؛ وقتی یک سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم، تنها به احتمال شیر یا خط آمدنِ آن که پنجاه درصد است اکتفا می‌کنیم. این تمام آن چیزی است که دانش ما درباره‌ی دینامیک سکه بیان می‌کند، ولی واقعاً می‌دانیم که متغیرهای متعددی بر حرکت سکه حاکم هستند (مثل شدت و مکان دقیق ضربه‌ای که به سکه می‌خورد، مختصات کامل انتقالی و دورانی سکه، و هم‌چنین مقاومت هوا و نظایر آن) و یک نظریه بنیادی مثل مکانیک وجود دارد که این متغیرها را دقیقاً توصیف کنیم و از شانس و احتمال دست بکشیم. درست است که هرگاه سعی کنیم سرعت الکترون را به لحاظ تجربی تعیین کنیم، مکان آن را مختل می‌کنیم و بالعکس هرگاه بخواهیم مکان آن را معین کنیم سرعت آن را مختل می‌کنیم، و بنا بر این استدلال نمی‌توانیم از یک واقعیت خارجی به عنوان الکترونی که یک مسیر معین را طی می‌کند سخن بگوئیم، ولی اگر بتوانیم بدون اینکه این اختلال را ایجاد کنیم ویژگی از الکترون را تعیین کنیم، آنگاه قطعاً آن ویژگی، یک

ویژگی واقعی آن الکترون یا به اصطلاح یک عنصر واقعیت و مستقل از مشاهده‌ی ماست زیرا ما بدون آنکه امکان هیچ نوع تأثیرگذاری بر آن الکترون را داشته باشیم توانسته‌ایم آن ویژگی را تعیین کنیم. به لحاظ اصولی چنین امری غیر ممکن است ولی نکته‌ی مهم آن است که چارچوب خود مکانیک کوانتومی چنین امکانی را از طریق حالتهای درهم‌تنیده فراهم می‌آورد.

وجود واقعیتی خارجی به این معناست که اشیاء خواص معینی دارند که عمل مشاهده آنها را آشکار می‌کند، نه آنکه آنها را خلق کند.

۳-۲-۱ واقعیت فیزیکی از نظر EPR

نویسندگان نظریه‌ی EPR با توجه به تعریف زیر از واقعیت، به تناقض رسیدند:

شرط کافی برای واقعیت یک کمیت فیزیکی همان احتمال پیش‌بینی آن با قطعیت و بدون برهم زدن سیستم است. در مکانیک کوانتومی درجایی که دو مقدار فیزیکی با هم جابه‌جا نمی‌شوند شناخت یکی مانع از شناخت دیگری می‌شود. دو کمیت با عملگرهای جابه‌جا شونده می‌توانند هم‌زمان واقعیت داشته باشند.

هر کدام از عناصر واقعیت فیزیکی باید یک معادل در نظریه‌ی فیزیکی داشته باشند. اگر بدون هرگونه اخلال در سیستم بتوانیم با قطعیت یعنی با احتمال برابر با یک، مقدار یک کمیت فیزیکی را پیش‌بینی کنیم، یک عنصر واقعیت فیزیکی متناظر با این کمیت فیزیکی وجود خواهد داشت.

پس یا توصیف مکانیک کوانتومی از واقعیت کامل نیست و یا هنگامی که عملگرهای متناظر با دو کمیت فیزیکی جابه‌جا نمی‌شوند، هم‌زمان واقعیت نخواهند داشت. می‌توان این طور نتیجه‌گیری کرد که توصیف مکانیک کوانتومی از واقعیت فیزیکی ارائه شده توسط توابع موج کامل نیست.

می‌توان به این نظریه این طور اعتراض کرد که منطق ما در مورد واقعیت به اندازه‌ی کافی محدود کننده نیست. دو یا بیش از دو واقعیت فیزیکی را می‌توان هم‌زمان عناصر واقعی در نظر گرفت که به‌طور هم‌زمان بتوان اندازه‌گیری کرد.

از این دیدگاه اگر یکی از این دو گونه یا هر دوی آنها هم‌زمان نباشند، از مقادیر P و Q قابل پیش‌بینی هیچ‌کدام هم‌زمان واقعیت ندارند. این باعث می‌شود که واقعیت P و Q به فرآیند اندازه‌گیری که در سیستم انجام شده و سیستم را دچار اختلال می‌کند، بستگی داشته باشند[۹].

۳-۳ احتمالات شرطی

مکانیک کوانتومی یک نظریه‌ی احتمالاتی است. مقادیر احتمالات به وسیله‌ی مربع ضرایبی از دامنه - های احتمال با در نظر گرفتن اثرات تداخل محاسبه می‌شود. برای مثال در آزمایش مشهور دو شکاف:یک ذره پس از عبور از یکی از شکافها به نقطه‌ی p روی پرده می‌رسد، در مکانیک آماری کلاسیک احتمال رسیدن ذره به نقطه‌ی p بصورت

$$P=p_1+p_2 \qquad (۱-۳)$$

که p_1 احتمال عبور از شکاف ۱ و p_2 احتمال عبور از شکاف۲ می‌باشد.

نقش دامنه‌های احتمالی، نظریه‌ی کوانتوم را از مکانیک کلاسیک آماری متفاوت می‌کند. در نظریه کوانتوم ما به هر کدام از شکافها یک دامنه‌ی احتمالی مختلط نسبت می دهیم ψ_1 و ψ_2 و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} P &= |\psi_1+\psi_2|^2 \\ &= |\psi_1|^2+|\psi_2|^2+\psi_1\psi_2^*+\psi_1^*\psi_2 \\ &= P_1+P_2+2\sqrt{P_1P_2}\cos[\arg(\psi_1\psi_2^*)], \end{aligned} \qquad (۲-۳)$$

به وضوح مشخص است که این مقدار می‌تواند بیشتر یا کمتر از مقدار کلاسیکی باشد.که به مقدار فازمختلط $\psi_1\psi_2^*$بستگی دارد و آن هم به فاصله‌ی بین نقطه و شکاف بستگی دارد، این تفاوت بخاطر نقش تداخل در کوانتوم است. نقش دامنه های احتمال، نظریه‌ی کوانتوم را از مکانیک آماری کلاسیک بسیار متفاوت می‌کند.

نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری یا بازی شانس می‌تواند یک عدد باشد. اگر مجموعه‌ی نتایج یک رویداد A را با $\{a_i\}$ نمایش دهیم، $P(a_i)$ احتمال آن است که $(A=a_i)$ باشد، که عددی بین صفر تا یک است. اگر مجموعه‌ی $\{a_i\}$ شامل همه‌ی نتایج ممکن باشد، پس مجموع احتمالات برابر با یک است:

$$\sum P(a_i)=1 \qquad (۳-۳)$$

اگر B رویداد دوم باشد و $\{b_i\}$ نتایج آن باشد، توصیف کامل‌تر A با احتمالات $P(a_i)$ و $P(b_j)$ به‌وسیله‌ی احتمالات مشترک $\{P(a_i,b_j)\}$ به‌وجود می‌آید.

$P(a_i,b_j)$ احتمال آن است که $A=a_i$ و $B=b_j$ و اگر A و b به هم وابسته نباشند $P(a_i,b_j)=P(a_i)P(b_j)$. اما در بیشتر اوقات $P(a_i,b_j)$ می‌توان بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از $P(a_i)P(b_j)$ باشد. با جمع همه‌ی نتایج رویدادهای دیگر می‌توان احتمال رویدادهای ساده را از احتمالات مشترک ساخت.

$$P(a_i)=\sum_j P(a_i,b_j)$$

$$P(b_j)=\sum_i P(a_i,b_j) \qquad (۴-۳)$$

به بیان ساده، احتمال آن‌که $A=a_i$ باشد، مساوی با احتمال آن‌که $A=a_i$ و B یکی از مقدارها باشد. اگر ما مقدار A را بدانیم، می‌توانیم مقدارهای ممکنِ B را به‌دست آوریم. واضح است که اطلاعات به‌دست آمده از دانستن مقدار A می‌تواند احتمالات هر کدام از مقادیر B را تغییر دهد. اما ما علاقه‌مندیم امکان این تغییر را اندازه بگیریم و مقادیر جدید احتمال را به‌دست آوریم. فرض کنید که بدانیم $A=a_o$ مقداری از احتمالات شرطی $\{P(b_j|a_o)\}$ (که خوانده می‌شود، احتمال آن‌که $B=b_j$ به شرط آنکه $A=a_o$ که احتمال شرطی $P(b_j,a_o)$ را به $B=b_j$ و $A=a_0$ ربط می‌دهد، واضح است که باید با احتمال مشترک متناسب باشد.

$$P(b_j|a_o)=K(a_o)P(a_o,b_j) \qquad (۵-۳)$$

ثابت احتمال $K(a_o)$ را می‌توان با جمع بستن روی مجموعه‌ی نتایج $\{b_j\}$ به‌دست آورد. مجموع روی j در $P(b_j|a_o)$ باید یک باشد؛ چون یک مجموعه‌ی کامل احتمالات برای نتایج رویداد B است. جمع روی j را از $P(b_j,a_o)$ در معادله‌ی (۲-۳) به‌دست آوردیم؛ پس داریم: $K(a_o)=(P(a_o))^{-1}$. به این ترتیب می‌توانیم شرط و احتمالات مشترک را به هم ربط دهیم.

$$P(a_o,b_j)=P(b_j|a_o)P(a_o) \qquad (۶-۳)$$

در حالت کلی می‌توانیم بنویسیم:

$$P(a_i,b_j)=P(b_j|a_i)P(a_i) \qquad (۷-۳)$$

ما روی هیچ مفهومی از علت و اثر تکیه نداریم، بنابراین جواب داده شده به‌طور یکسان برای احتمال شرطی $P(a_j|b_i)$ ، احتمال آن است که $A=a_i$ به‌دست آید به شرط آنکه $B=b_j$ باشد.

با یک تجزیه و تحلیل روی $P(a_j|b_i)$ می توان گفت :

$$P(a_i,b_j)=P(a_j|b_i)P(b_j) \qquad (۸-۳)$$

با ترکیب رابطه‌های (۳-۵) و (۳-۶) می‌توان یک رابطه بین دو مجموعه‌ی احتمال شرطی به‌دست آورد.

$$P(a_i|b_j)=\frac{P(b_j|a_i)P(a_i)}{P(b_j)} \qquad (۹-۳)$$

با استفاده از قضیه بیزین و توجه به نرمالیزه کردن $\sum_i P(a_i|b_j)=1$ می‌توان نوشت:

$$P(a_i|b_j)=\frac{P(b_j|a_i)P(a_i)}{\sum_k P(b_j|a_k)P(a_k)} \qquad (۱۰-۳)$$

احتمالات شرطی به دو رویداد محدود نیستند. به‌طور مثال، اگر رویدادهای A,B,C را داشته باشیم و $\{C_k\}$ نتایج احتمالی رویداد C باشد. می‌توانیم یک مجموعه از احتمالات مشترک از هر سه رویداد داشته باشیم $\{P(a_i,b_j,c_k)\}$ ، که $P(a_i,b_j,c_k)$ احتمال آن است که $A=a_i$ و $b=b_j$ و $c=c_k$ باشد.

در حالت خاص $P(a_i|b_j,c_k)$ احتمال آن‌که $A=a_i$ به‌دست آید به شرط آن‌که $c=c_k$ و $B=b_j$ را می‌توانیم به روابط قبلی ربط دهیم.[۱۰]

برای مثال از رابطه‌ی (۳-۵) داریم:

$$P(a_i,b_j,c_k)=P(a_i|b_j,c_k)\ P(b_j,c_k) \qquad (۱۱-۳)$$

$$=P(a_i|b_j,c_k)\ P(b_j|c_k)\,P(c_k)$$

$P(a_ib_j,|c_k)$، احتمال آن‌که $A=a_i$ و $B=b_j$ به شرط آن‌که $c=c_k$ به‌دست آید.

$$P(a_i,b_j,c_k)=P(a_i,b_j|c_k)\ P(c_k)$$

$$=P(a_i|b_j,c_k)\ P(b_j|c_k)\,P(c_k)$$

$$P(a_i|b_j,c_k)=\frac{P(b_j,c_k|a_i)\,P(a_i)}{P(b_j,c_k)} \qquad (۱۲-۳)$$

۳-۳-۱ احتمالات بیزین

استدلال بیزین، روشی بر پایه احتمالات برای استنتاج کردن است. اساس این روش بر این اصل استوار است که برای هر کمیتی یک توزیع احتمال وجود دارد که با مشاهده یک داده جدید و استدلال در مورد توزیع احتمال آن می‌توان تصمیمات بهینه ای اتخاذ کرد.

این قضیه از آن جهت مفید است که می‌توان از طریق آن احتمال یک پیشامد را با مشروط کردن نسبت به وقوع و یا عدم وقوع یک پیشامد دیگر محاسبه کرد.

$p(b|a)$ را فرض می‌کنیم به راحتی می‌توانیم حساب کنیم آنگاه از رابطه‌ی بیزین:

$$p(a_i|b)=\frac{p(a_i)\,p(b|a_i)}{\sum_{j=1}^{k}p(a_j)\,p(b|a_j)} \qquad i=1,2,3,... \qquad (۱۳-۳)$$

می‌توان $p(a|b)$ را محاسبه کرد[۱۱].

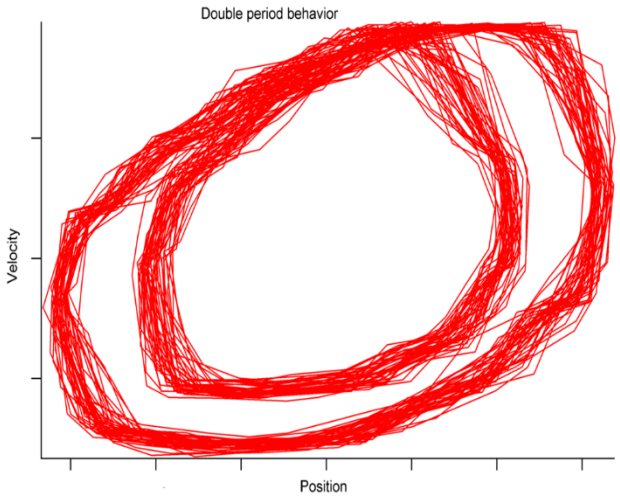
۳-۴ نظریه‌ی آشوب [۱]

تا چند دهه‌ی پیش دانشمندان جهان را مجموعه‌ای از سیستم‌هایی می دانستند که مطابق با قوانین جبری طبیعت به طریقی کاملا مشخص و قابل پیش‌بینی درحرکت است اما با پیشرفت علم بسیاری از رویدادهای طبیعی دیگر بوسیله‌ی دیدگاه‌های جبری گرایانه قبلی قابل توجیه نبودند. تلاشهای دانشمندان برای توصیف چنین رویدادهایی منتج به نظریه‌های کوانتومی و نسبیت در فیزیک و نظریه‌ی آشوب در ریاضیات شد. این نظریه به بررسی رفتار سیستم‌های خاصی می‌پردازد که حساسیت زیادی نسبت به شرایط اولیه خود دارند. نتیجه این حساسیت می‌تواند منجر به بروز رفتارهای بسیار پیچیده و ظاهراً تصادفی و غیرقابل‌پیش‌بینی شود جالب اینجاست که این رفتار حتی در سیستم‌های معین هم دیده می‌شود. یعنی سیستم‌هایی که درگیر هیچ پارامتر یا ورودی تصادفی نیستند. سیستمهای آشوب‌ناک، سیستم‌های دینامیکی غیرخطی هستند.

هیلز در ۱۹۹۰ آشوب را این‌گونه تعریف کرد: آشوب نوعی بی‌نظمی منظم یا نظم در بی‌نظمی است؛ بی‌نظمی از این رو که نتایج آن غیرقابل‌پیش‌بینی است و منظم بدان جهت که از نوعی قطعیت برخوردار است.

اگر تغییر در شرایط اولیه موجب تغییر اندکی در نتیجه شود، گوییم رخداد نسبت به شرط اولیه پایدار است. در این حالت قرار دادن مقدار تقریبی به جای مقدار واقعی مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما بعضی رخدادها آن‌قدر نسبت به شرط اولیه حساس هستند که حتی به‌کار بردن مقدار تقریبی هم ممکن است منجر به نتیجه‌ای کاملاً متفاوت شود. لذا حساسیت نسبت به شرایط اولیه، پیش‌بینی رفتار فرآیند را در زمان‌های طولانی عملاً غیرممکن می کند. به‌طور مثال، آونگ دوتایی که رفتار بی‌نظمی دارد. نتیجه‌ی شروع حرکت پاندول با شرایط اولیه‌ی اندکی متفاوت، مسیری کاملاً متفاوت است. آونگ دوتایی یکی از ساده‌ترین سیستم‌های دینامیکی است که رفتار بی‌نظم دارد. [۱۲]

۱- Chaos



شکل(۱): نمودار فضای فاز یک آونگ دو تایی با اصطکاک که لورنتس آن را کشید

۳-۵ نظریه‌ی ارگودیک

نظریه‌ی ارگودیک مربوط به شاخه‌ای از علم ریاضیات است که سیستم‌های دینامیکی و مسائل مربوط به آنها را از طریق اندازه‌گیری ناوردا مطالعه می‌کند. این نظریه در ابتدا توسط مسائل مربوط به فیزیک آماری توسعه یافت. جنبه‌ی اصلی نظریه‌ی ارگودیک مربوط به رفتار سیستم‌های دینامیکی در بلندمدت است. اولین نتایجی که در این زمینه به‌دست آمد، مربوط به قضیه‌ی بازگشتی پوانکاره[1] است.

تئوری‌ای که ادعا دارد اغلب نقاط در هر زیر مجموعه‌ای از فضای حالت سرانجام دوباره به مجموعه باز می‌گردد. اطلاعات دقیق‌تر از طریق قضایای متنوع ارگودیک فراهم شده است. این قضایا بیان می‌کنند که تحت شرایط خاص، میانگین زمانی یک تابع در طول مسیرهایی که بطور تقریبی در همه جا وجود دارند، با میانگین مکانی متناسب است. در مورد کلاس خاص سیستم ارگودیک، میانگین زمانی برای تمام نقاط اولیه برابر است. از لحاظ آماری می‌توان گفت سیستمی که شامل یک روند بلندمدت است، حالات ابتدایی‌اش را فراموش می‌کند.

[1] Poincare recurrence theorem

مسئله مربوط به طبقه‌بندی متریک سیستم‌ها، بخش مهمی از نظریه ارگودیک می‌باشد. نقش برجسته نظریه ارگودیک وکاربرد آن در فرایندهای تصادفی از طریق مفاهیم متنوعی از آنتروپی سیستم‌های دینامیکی ارائه می‌شود. مفاهیم ارگودیک و فرضیات ارگودیک از مفاهیم اصلی کاربردی نظریه ارگودیک هستند. ایده تحت بررسی این است که در سیستم‌های خاص میانگین زمانی به طور متوسط در طول تمام فضا یکسان می‌باشد. نظریه ارگودیک اغلب با تبدیلات ارگودیک همراه است، در تبدیل ارگودیک با اندازه‌گیری ناوردا (نامتغیر) میانگین زمانی و میانگین مکانی تابع انتگرال پذیر تقریبا با هم برابر است. کاربرد نظریه ارگودیک در دیگر شاخه‌های علوم ریاضی معمولا سیستم‌هایی با ویژگی‌های خاص ایجاد کرده است[۱۳].

تبدیل ارگودیک: در ریاضیات به یک تبدیل اندازه‌نگه‌دار T در فضای احتمال، ارگودیک گفته می‌شود، اگر نتایج تمام اندازه‌گیری‌ها تحت T ثابت دارای اندازه‌های ۰ یا ۱ باشند.

$T;x\to x,\mu(x)=1$ تابع T روی فضای اندازه‌گیری (x,Σ,μ) ارگودیک است هرگاه برای هر E در Σ داشته باشیم: $T^{-1}(E)=E$ و $\mu(E)=1$ یا $\mu(E)=0$.

۳-۶ ارگودیک کوانتومی[1]

یک شاخه از آشوب کوانتومی در ریاضی فیزیک است که یک ویژگی کوانتیده از سیستم‌های مکانیک کلاسیک بی‌نظم هستند که به شرایط اولیه حساس می‌باشند. به‌طور کلی، ارگودیک کوانتوم بیان می‌کند که در محدوده‌ی انرژی‌های بالا، توزیع احتمال ویژه حالتهای انرژی یک هامیلتونی ارگودیک کوانتیده، تمایل به توزیع یکنواخت در فضای فاز کلاسیکی دارند.

این با مفهوم توزیع یکنواخت سیستم‌های ارگودیک در فضای فاز سازگاری دارد. در مقابل، سیستم‌های قابل انتگرال‌گیری کاملاً کلاسیکی عموما مدارهای دوره‌ای در فضای فاز دارند و این به روش‌های گوناگون

[1] -Quantum ergodicity

در محدوده‌ی انرژی‌های بالای ویژه حالت‌ها نشان داده می‌شود که نوعاً بعضی از تراکم یا شکاف‌ها در این محدوده رخ می‌دهد.[۱۴]

۳-۷ جبرگرایی[1] در مکانیک کوانتوم

لاپلاس معتقد بود اگر وضعیت جهان در لحظه‌ی معینی از زمان کاملاً معلوم باشد، می‌توان وضعیت آن را در زمان‌های بعدی به راحتی با قوانین علمی پیش‌بینی کرد. به‌طور مثال، اگر وضعیت خورشید و سایر منظومه‌ی شمسی را در زمان معین داشته باشیم، می‌توان وضعیت منظومه‌ی شمسی را در هر زمان دلخواه توسط قوانین گرانش نیوتن پیش‌بینی کرد. همه‌ی پدیده‌های جهان از جمله رفتار بشر را نیز با قوانین مشابهی می توان پیش‌بینی کرد. چیزی به‌عنوان پدیده‌ی فیزیکی خودبه‌خودی وجود ندارد. در همه‌ی حالت‌ها یک عمل متقابل کاملاً اجتناب‌ناپذیر بین ناظر و پدیده وجود دارد. در مکانیک کوانتومی در معادله‌ی شرودینگر، با دانستن حالت اولیه‌ی سیستم و شرایط فعلی آن می‌توان آینده را پیش‌بینی کرد.

۳-۸ متغیر مستقل

متغیر مستقل پارامتری است که تمام کمیات سیستم فیزیکی را به‌عنوان تابعی از آن می‌توان نوشت و خود وابستگی به کمیت دیگری ندارد. از این نظر، می‌توان پذیرفت که پویایی دینامیک یک سیستم با متغیر مستقل آن رابطه دارد.

ساده‌ترین مثال برای متغیر مستقل زمان است. در واقع نحوه‌ی برخورد مکانیک کوانتومی با زمان نسبت به فیزیک کلاسیک مغایرت اساسی دارد. در فیزیک کلاسیک زمان تنها یک بعد دیگر سیستم همانند مکان، ولی جهت دار است. از این رو می‌توان سیستم‌های کلاسیک را به یکی از ابعاد فضایی به‌جای زمان وابسته نمود. اما در مکانیک کوانتومی، نقش زمان به عنوان یک متغیر مستقل بسیار حائز

[1] -determinism

اهمیت است و در هیچ‌یک از فرمول‌بندی‌های رایج مکانیک کوانتومی، عملگری برای بیان کمیت زمانی وجود ندارد. زمان تنها یک پارامتر نرده‌ای است. این در حالی است که سایر کمیت‌های قابل مشاهده، از جمله ابعاد مکانی، به‌کمک عملگرهای مناسب تعریف و محاسبه می‌گردند. [۱۵]

فصـــل ۴

شرح تئوری کوانتوم با احتمالات شرطی

مختلط

۴-۱ مقدمه

تلاش‌های فراوانی شده تا بتوان پدیده‌های کوانتومی را به‌طور کامل توصیف کرد، که بیشتر آنها شکست خورده است (به‌طور مثال، اندازه‌گیری هم‌زمان دو کمیت جابه‌جاناپذیر). یکی از مشکلات این است که مکانیک کوانتومی نمی‌تواند دینامیک اجسام فیزیکی را بر حسب تغییرات ویژگی‌های مشاهده‌پذیر آن توضیح دهد و معتقد است حرکت یک جسم منفرد اساساً غیرقابل‌مشاهده است.

مکانیک کوانتومی می‌تواند در مورد رابطه‌ی بین ویژگی‌های فیزیکی متفاوت پیش‌بینی‌هایی کند؛ حتی اگر نتواند آنها را هم‌زمان اندازه‌گیری کند. ولی این پیش‌بینی‌ها بر اساس فرمول‌های ریاضی با تعیین حالت‌های مانای عمود بر هم در فضای هیلبرت است.

نکته‌ی مهم این است که این حالت‌های تعریف شده عمومیت ندارد و نمی‌تواند توزیع آماری ویژگی -های فیزیکی را تفسیر کند. اگر چه می‌تواند توزیع آماری همه‌ی نتایج ممکن اندازه‌گیری را به درستی پیش بینی کند. مثلاً x , p را نمی‌تواند هم‌زمان اندازه بگیرد و با قطعیت هر دو را مشخص کند؛ اما می‌تواند تمام حالت‌های ممکن پس از اندازه‌گیری را پیش‌بینی کند.

این سؤال پیش می‌آید که چگونه ممکن است با کمک فرمول‌ها و با وجود ویژگی‌های فیزیکی که واقعیت توأم دارند، بتوان همه‌ی واقعیتهای ممکن را پیش‌بینی کرد؟ نتایج آماری حاصل از اندازه‌گیری‌های ضعیف و عدم قطعیت اندازه‌گیری می‌تواند به ما کمک کند. البته برای پاسخ باید روابط بنیادی بین ویژگی‌های فیزیکی تغییر کند.

۴-۲ واقعیت تجربی و نقش عدم قطعیت اندازه‌گیری

ما واقعیت‌هایی را می‌پذیریم که بتوانیم آنها را ببینیم یا لمس کنیم و یا از طریق آزمایش و اندازه -گیری اثرات آنها را مشاهده کنیم. ولی در مکانیک کوانتومی در اثر برهم‌کنش جسم با محیط خارج،

ویژگی‌های فیزیکی آن تغییر می‌کند؛ بنابراین، برای بعضی مفاهیم فیزیکی به‌کمک روش‌های دیگر اندازه‌گیری از برون‌یابی[1] استفاده می‌کنیم.

در اثر اندازه‌گیری، برهم‌کنش بین محیط و جسم روی می‌دهد. پس اثرات برهم‌کنش اندازه‌گیری بسیار مهم است. همین امر سبب می‌شود اندازه‌گیری هم‌زمان چند واقعیت فیزیکی، غیرممکن شود.

مکانیک کوانتومی روابط زیادی بین ویژگی‌های فیزیکی پیشنهاد می‌دهد. این روابط را با اندازه - گیری‌های ضعیف به‌طور تجربی می‌توان بررسی کرد. در اندازه‌گیری ضعیف، تأثیر برهم‌کنش اندازه‌گیری ضعیف بوده و می‌توان از اغتشاش در سیستم صرف نظر کرد. نتایج اندازه‌گیری ضعیف به‌صورت ترکیبی از شرایط اولیه و شرایط نهایی مشخص می‌شود و تجزیه و تحلیل دقیق ساختار آماری خطاهای اندازه‌گیری امکان‌پذیراست. اگر اطلاعات اولیه‌ی حالت ورودی شامل تحول اندازه‌گیری شود، نتایج به‌دست آمده کم‌ترین محدودیت عدم قطعیت دارند. نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌های ضعیف با طیف زیادی از اندازه‌گیری‌های توأم سازگاری دارد و به‌عنوان یک روش جایگزین پیشنهاد می‌شود.

در این روش روابط کلی بین دو ویژگی و ویژگی‌های دیگر سیستم بیان می‌شود و طبق پیش‌بینی اوزاوا[2]، با این روش می‌توان بر محدودیت عدم قطعیت غلبه کرده و با ترکیب اطلاعات اولیه و نهایی، فیزیک سیستم را به‌طور کامل مشخص کرد. با این روش فیزیک کوانتومی روابط قطعی و کلی بین ویژگی‌های فیزیکی را تعریف می‌کند، به‌طوری‌که همه‌ی ویژگی‌های فیزیکی می‌توانند با ویژه‌مقادیر تعیین شده در اندازه‌گیری دقیق، نشان داده شوند و روابط بین ویژگی‌ها با مقدار احتمالات شرطی مختلط که در اندازه‌گیری ضعیف مشاهده شده به‌دست می‌آید[۱۶]. در این رهیافت جدید فرض براین است که:

(۱) سیستم‌های فیزیکی به وسیله‌ی ویژگی‌های قابل مشاهده‌ی آنها توصیف می‌شوند.
(۲)روش‌های متداول تحلیل آماری برمبنای احتمالات شرطی بنا شده و می‌تواند روابط بین همه‌ی

[1] -Extrapolate
[2] -Ozawa

ویژگی‌های فیزیکی را تعیین کند؛ حتی اگر این ویژگی‌ها نتوانند در هر آزمایش هم‌زمان مشاهده شوند (ویژگی‌های فیزیکی جابه‌جاناپذیر).

۳-۴ ضرورت استفاده از احتمالات شرطی مختلط

به‌کمک داده‌های به‌دست آمده از اندازه‌گیری‌های خاص(مثل اندازه‌گیری ضعیف)، فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی امکان‌پذیر است. متوسط آماری حاصل از اندازه‌گیری‌های متعدد، جواب کاملاً قطعی و واضحی را نمی‌دهد. از طرفی در روش‌های عملی نمی‌توان سیستم را از مجموعه‌ی اندازه‌گیری متمایز کرد. شواهد آماری اندازه‌گیری یک ویژگی سیستم، باید با ویژگی‌های عینی که از آزمایش‌های متعدد انجام شده به دست می‌آید، مرتبط باشد.

یک مشکل اساسی وجود دارد: چگونه نتایج آزمایش را به احتمالات شرطی و توأم ویژگی‌هایی که به‌صورت مشترک در یک آزمایش مشاهده نمی‌شوند، ربط دهیم؟

اخیراً در بررسی نتایج آزمایش‌های واقعی نشان داده شده است که چگونه می‌توان احتمالات توأم غیرمثبت را از پیش‌بینی‌های آماری اندازه‌گیری با فرمول‌بندی کوانتومی استاندارد به‌دست آورد [۱۷و۱۸]. روش اخیر بیزین در مکانیک کوانتومی، دیدگاه رابطه‌ی بین آزمایش و فرمول‌بندی را ایجاد کرده است. البته ساختار مجدد نیاز به فرضیات بیشتر دارد. در روش های قبلی این فرضیات اضافی در تفسیر داده‌های آزمایشگاهی ابهام ایجاد کرده‌اند. (مثلاً در روش قبلی تعریف عملکردی بردارهای فضای هیلبرت استفاده شده است.)

قبل از این‌که احتمالات شرطی مختلط به‌عنوان اساس روش تجربی پذیرفته شود، باید دو نکته را بررسی کنیم:

الف) نتایج اندازه‌گیری ضعیف به وسیله‌ی فرمول‌بندی استاندارد به درستی پیش‌بینی می‌شود

ب) نتایج اندازه‌گیری ضعیف با سایر مدل‌های آماری در مباحث بوهمی[1] مطابقت دارند

با توجه به بند «الف»، نتایج اندازه‌گیری ضعیف، تعریف عملیاتی از حالتهای کوانتومی و همدوسی کوانتومی را ارائه می‌دهد که در فرمولاسیون قراردادی وجود ندارد؛ یعنی، هرچند خطای فنی وجود ندارد و فرمول‌بندی استاندارد، فرمول ریاضی را نشان می‌دهد، ولی از طریق آزمایشگاهی اثبات نشده‌اند؛ بنابراین، توضیح اندازه‌گیری ضعیف با احتمالات شرطی مختلط نسبت به توضیح استاندارد در تداخل حالت کوانتومی باارزش‌تر است. مثل توضیح حرکت سیاره‌ای مدارهای کپلر از توضیح فنی چرخ زاد ساز[2] باارزش‌تر است.

بنابراین، با بررسی نتایج اندازه‌گیری ضعیف به این نتیجه رسیدند که احتمالات شرطی از لحاظ تجربی باارزش‌تر هستند. ما با جست‌وجوی شواهد و مدارک ابزارهای کلاسیک، به مجموعه‌ای از داده‌ها دست پیدا می‌کنیم.

۴-۴ احتمالات شرطی مختلط[3]

با تجزیه و تحلیل آماری نتایج تجربی، روابط بنیادی بین سه ویژگی فیزیکی جابه‌جاناپذیر به‌وسیله‌ی احتمالات شرطی مختلط توصیف می‌شود و بصورت زیر بیان می‌شود.

$$P(m|a,b) = \frac{\langle b|m\rangle\langle m|a\rangle}{\langle b|a\rangle} \qquad (۱-۴)$$

که در این رابطه a شرط اولیه و b شرط نهایی است که هر دو واقعیت‌هایی از سیستم هستند و m یک واقعیت بالقوه مربوط به اندازه‌گیری جایگزین است. در فیزیک کلاسیک m یک تابع ساده از a,b تعریف می‌شود و واقعیت‌های b,a ، مقدار m را مشخص می‌کنند[۱۹و۲۰]. در معادله‌ی (۴-۱) احتمالات شرطی مختلط با اختصاص یک فاز مختلط که عمل انتقال a تا b را در مسیری که m تعیین می‌کند، رابطه‌ی بین سه ویژگی بیان می‌شود.

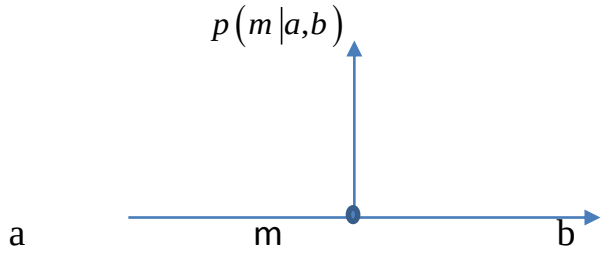
[1] - Bohmian
[2] -Epicycle
[3]-Complex conditional probabilities

و m با یک مفهوم اساساً متفاوت از جبرگرایی می شود و آن را اصلاح می‌کند و معتقدیم مکانیک کوانتومی را می‌توان با تغیر فرضیات جبرگرایی کلاسیکی به احتمالات مختلط برابر که به وسیله‌ی قانون جدید ارگودیک کوانتومی ارائه شده استنباط کرد.

۴-۴-۱ فرمول بندی آماری قوانین جهانی فیزیک

به طور ایده‌آل، فیزیک باید بر مبنای مشاهدات آزمایشگاهی باشد و تنها با حداقل فرضیات نظری مورد ارزیابی قرار گیرد. لذا، ما باید در ابتدا به شواهدی نگاه کنیم که در بازخوانی دستگاه‌های کلاسیک ظاهر می شوند. ما انتظار داریم که هر ویژگی فیزیکی یک سیستم قابل‌اندازه‌گیری دقت دلخواه داشته باشد و هیچ گونه محدودیت اساسی در اندازه‌گیری مربوط به یک ویژگی تعریف شده نباشد. در ضمن، ما می توانیم بیان کنیم که نتیجه اندازه‌گیری در گذشته با اندازه‌گیری بعدی به صورت مساوی ارزشمند است، زیرا نتایج اندازه‌گیری می‌توانند در اندازه‌گیری‌های متوالی ویژگی یکسان، تعمیم داده شوند. مسائل و مشکلات تنها زمانی بروز می‌کنند که ما تلاش می‌کنیم تا ویژگی‌های مختلف را به صورت توام اندازه‌گیری کنیم. در اصل، ما می‌توانیم هر یک از دو ویژگی را تعیین نموده و در ابتدا یک ویژگی و سپس دیگر ویژگی را اندازه‌گیری کنیم. هر دو نتیجه باید به صورت یکسان در فاصله زمانی بین اندازه‌گیری‌ها معتبر باشند، و ما انتظار داریم که اندازه‌گیری‌هایی که بین اندازه‌گیری اولیه و نهایی انجام می شوند، نشان دهند که چطور هر ویژگی فیزیکی دیگر سیستم به دو ویژگی مشاهده شده در اندازه‌گیری اولیه و نهایی بستگی دارد. مسئله موجود در برنامه کلاسیک فوق الذکر این است که هر اندازه‌گیری واسطه(میانی) شامل یک تعامل است، دینامیک این تعامل موجب تغییر مقدار ویژگی اولیه و نهایی می شود. بنابراین، نمی توان اثرات دینامیک را بر روی نتایج اندازه‌گیری نادیده گرفت. هرچند ما وسوسه می شویم که فرض کنیم روابط بین ویژگی‌های مختلف، مستقل از دینامیک تبدیلات و تغییرات هستند، این فرض صحیحی نیست؛ زیرا واقعیت یک ویژگی فیزیکی تنها زمانی ظاهر می‌شود که ویژگی در یک تعامل موثر و کارآمد باشد. پس احتمالا باید یک رابطه اساسی و بنیادین بین دینامیک

تبدیل یک سیستم و اثرات ویژگی‌های فیزیکی مشاهده شده در آن اندازه‌گیری وجود داشته باشد. مخصوصاً، اینکه هیچ دلیلی وجود ندارد که هرگاه به یک واقعیت نیاز داریم، اندازه‌گیری مستقل داشته باشیم. خوشبختانه، می‌توان داده‌های بدست آمده از اندازه‌گیری‌های واسطه را بدون فرض یک واقعیت با اندازه‌گیری مستقل، تحلیل نمود. با این وجود، این نوع آنالیز باید بر اساس آمار باشد، زیرا ما باید جنبه‌های تعامل اندازه‌گیری را در نظر بگیریم که فراتر از کنترل مستقیم ما هستند. یک روش صریح خاص، ضعیف کردن تعامل اندازه گیری واسطه می باشد، طوری که ما بتوانیم متکی بر اعتبار دقیق اندازه گیری اولیه و نهایی (ویژگی اول و دوم) باشیم، در حالی که از طریق میانگین‌گیری از بسیاری از آزمایشات، اطلاعاتی درباره ویژگی سوم بدست آوریم[۲۱و۲۲]. با انتخاب نوع صحیح اندازه‌گیری و با استفاده از نتایج اندازه‌گیری اولیه و نهایی ، ما می‌توانیم احتمالات شرطی برای نتایج مختلف اندازه‌گیری ویژگی سوم را بازسازی کنیم، ، که این مطلب در شکل (۱) نشان داده شده‌است.



شکل (۱)

از آن مهمتر، نتایجی که ما از برنامه کلاسیک بدست می‌آوریم باید روابط بنیادین بین سه ویژگی مختلف را نشان دهند. تنها دلیلی که این روابط بر حسب احتمالات شرطی فرمول‌بندی شده‌اند، این است که یک آزمایش مستقیم و دقیق، غیرممکن بود. باوجود شکل آماری شان، این احتمالات باید روابط جهانی به خوبی تعریف شده‌ای را نشان دهند که در یک وضعیت آزمایشگاهی صادق است، و مستقل از شرایط خاص می‌باشد. بنابراین بهتر است تا برخی از معیارهای رسمی را شناسایی نماییم که می‌توانند فرمول‌های آماری روابط بنیادین بین ویژگی‌های فیزیکی را از فرمول‌های مربوط به تصادفی بودن که معمولاً مربوط به نظریه احتمال می شوند را متمایز کنند. با فرض آنکه رابطه بین این ویژگی‌ها،

اساسی و بنیادین باشد، احتمال شرطی $p\left(m|a,b\right)$ وابستگی ویژگی واسطه‌ی m به ویژگی اولیه‌ی a و ویژگی نهایی b، را نشان می‌دهد. اگر تمایل داشته باشیم که ویژگی چهارم f را در نظر بگیریم، تنها نیاز به یک رابطه بین f و دو ویژگی از سه ویژگی a ، b و m، داریم. از آنجا که روابط بین این سه ویژگی، اساسی و بنیادین هستند، احتمال شرطی $p\left(f\ |a,b\right)$ می‌تواند ناشی از احتمال شرطی $p\left(f\ |m,b\right)$ با استفاده از قانون زنجیره‌ای زیر باشد :

$$P(f\ |a,b)=\sum_{m}P\left(f\ |m,b\right)P\left(m|a,b\right). \qquad (۲-۴)$$

در این رابطه، f توسط $P\left(f\ |m,b\right)$ و بدون هرگونه مراجعه به a تعیین می‌شود. لزوما دانستن a موجب اصلاح رابطه ارائه شده توسط $P\left(f\ |m,b\right)$ نمی‌شود، و این‌که مفاهیم a به ازای f ، به خوبی توسط m و b در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، اعتبار قانون زنجیره‌ای در معادله (۴-۲)، یک نشانه قوی فراهم می آورد که $p\left(m|a,b\right)$، در حقیقت رابطه بنیادین بین m ، a و b، می باشد. یک آزمایش مستقیم از رابطه بنیادین $p\left(m|a,b\right)$ در صورتی بدست می‌آید که f=a' مشابه با a باشد، یا یک مقدار مختلف با خصوصیت یکسان را نشان دهد، طوری که $a\neq a'$. در این مورد ، قانون زنجیره‌ای ملزم می‌کند که احتمال رسیدن به هر مقداری غیر از مقدار اولیه a ، برابر با صفر است:

$$\sum_{m}p\left(a'|m,b\right)p\left(m|a,b\right)=\delta_{a,a'}. \qquad (۳-۴)$$

این رابطه تضمین می‌کند که عبارت‌های (a,b) می‌توانند تبدیل به عبارت‌های معادل (m,b) بدون هر گونه از دست رفتن اطلاعات شوند. مخصوصاً، مقدار a می‌تواند توسط احتمالات مشترک m و b، تعیین شود. در این صورت، احتمالات شرطی که در معادله (۴-۳) صدق می کنند[۲۳]، روابط قطعی بین a و m تحت شرایط b را تعریف می نمایند . همانطور که در بخش قبل بیان شد، رابطه قطعی بین نتایج اندازه‌گیری اولیه، نهایی و میانی که توسط معادله (۴-۳) ارائه شده است، می‌تواند نتایج کنونی عدم قطعیت در اندازه‌گیری را نشان دهد[۲۴ و۲۵]. بنابراین، بهتر است تا رابطه بین احتمالات شرطی

وعدم قطعیت را مشخص کنیم. برای توزیع احتمال p(a) ، عدم قطعیت در مقدار A_a می‌تواند ناشی از ارزیابی تفاوت های بین دو نمونه باشد که به صورت مستقل بدست آمده است،

$$\in^2 (A) = \sum_{a,a'} \frac{1}{2}(A_a - A_{a'})p(a)p(a'). \qquad (۴-۴)$$

اکنون، ما می توانیم از این رابطه در وضعیتی استفاده کنیم که شرط اولیه b ثابت باشد، و نتیجه m در یک اندازه گیری نهایی با احتمال $p(m|b)$ بدست آید. برای مقایسه بهتر با معادله (۴-۳)، بهتر است تا یکی از احتمالات شرطی a را با احتمال شرطی m، جایگزین کنیم. با فرض آنکه احتمالات شرطی ناشی از احتمال مشترک a و m یکسان بوده و تنها مشروط به b باشد، قوانین احتمال استاندارد بیزی، این امکان را به شما می دهند تا احتمالات را مطابق با فرمول زیر تبدیل کنید:

$$p(m|a,b)p(a|b) = p\left(a|b,m\right)p(m|b). \qquad (۵-۴)$$

با این رابطه، عدم قطعیت شرطی A توسط شرط اولیه b تعریف می شود، و نتیجه نهایی m با احتمال $p\left(m|b\right)$ بدست می‌آید و توسط رابطه زیر ارائه می‌گردد :

$$\in^2 (A) = \sum_{a,a'} \frac{1}{2}(A_a - A_{a'})p(a'|m,b)p\left(m|a,b\right)p(a|b). \qquad (۶-۴)$$

اگر احتمالات شرطی در معادله (۴-۳) صدق کنند، میانگین عدم قطعیت شرطی $\in(A)$ دقیقاً برابر با صفر خواهد بود، و این انتظار را تأیید می‌کند که هیچ خطای تصادفی در رابطه بین (m,b) و a توصیف شده توسط $p\left(a|m,b\right)$، وجود ندارد. اگر مجموعه‌ای از احتمالات شرطی وجود داشته باشد که رابطه معادله (۴-۳) را ارضاء کنند و بنابراین کاملاً قطعی باشند، می‌توان برآورد بدون خطای مقدار A را بر مبنای شرط اولیه b و نتیجه اندازه گیری نهایی m را با میانگین گیری از A_a برای احتمال شرطی $p\left(a|m,b\right)$، بدست آورد. از آنجا که برآورد های همزمان ویژگیهای مختلف، امکان‌پذیر هستند، و هیچ محدودیت عدم قطعیتی برای برآوردهای توام وجود ندارد. به همین دلیل است که محدودیت عدم

قطعیت برای اندازه‌گیری‌ها که توسط اوزاوا یافته شده است، بسیار کمتر از محدودیت آشناتر برای حالت های کوانتومی می‌باشد. در حقیقت، این مطلب توسط هال[1] اشاره شده است که بهترین برآورد توسط مقادیر ضعیف مشاهده‌پذیر بدست می‌آید[۲۶]، و لوند[2] و وایزمن[3] نشان داده اند که تعریف اوزاوا از خطای اندازه‌گیری می تواند، با تخصیص وزن های آماری[4] مختلط به تفاوت‌های بین برآورد و مقادیر ویژه از احتمالات شرطی مختلط مشاهده شده در اندازه‌گیری‌های ضعیف بدست آید. رابطه مستقیم بین عدم قطعیت A در معادله (۴-۶) و خطای اندازه‌گیری A که توسط اوزاوا [۲۷]تعریف شده است، می‌تواند با فرض یک برآورد بدون خطا بدست آید. در این مورد، معادله (۴-۶)، خطای برآورد بدست آمده از مقادیر میانگین A_a برای احتمالات شرطی مختلط $p(a|m,b)$ بدست آمده در اندازه‌گیری‌های ضعیف را توصیف می نماید، که برابر با صفر می باشد، زیرا احتمالات شرطی مختلط، مطابق با معادله (۴-۳)، تعیین کننده و قطعی هستند. تأییدات آزمایشگاهی پیش‌بینی‌های اوزاوا [۲۸و۲۹]، شواهد تجربی در اندازه‌گیری‌های ضعیف نشان می‌دهد که؛ احتمالات شرطی مختلط $p(m|a,b)$ مشاهده شده ، رابطه بدون عدم قطعیت بین سه ویژگی a، b و m را تعریف می‌کنند. برای درک صحیح مکانیک کوانتومی با توصیف فیزیکی که توسط این احتمالات شرطی مختلط توصیف شده، یافته شده‌است. در بخش بعدی نشان خواهیم داد، این توصیف می‌تواند به شکل یک قانون فیزیکی ارائه گردد که رابطه بین دینامیک و آمار را تعریف می‌کند و توسط فازهای مختلط احتمالات نشان داده شده‌است.

۴-۵ قوانین ارگودیک کوانتوم

در عمل، شرایط اولیه فقط اطلاعات جزئی از ویژگی‌های سیستم به ما می‌دهد. اطلاعاتی از ویژگی a، $P(b|a)$ توزیع احتمالی برای ویژگی b را مشخص می‌کند، از آنجا که اندازه‌گیری نهایی b فقط یک نتیجه‌ی درست را به ما نشان می‌دهد، این احتمالی بودن b نشان‌دهنده‌ی تصادفی بودن آن و اطلاعات

[1]- Hall
[2]- Lund
[3] -Wiseman
[4] -Complex statical weight

ناقص ما از سیستم است؛ بنابراین، توضیح فراوانی نسبی احتمالات مختلط b مهم است. با مشخص شدن ریشه‌ی تصادف می‌توان توزیع احتمالی $P(b|a)$ را تعیین کرد.

در مقایسه با آمار کلاسیکی، می‌توانیم یک توضیح در مفهوم ارگودیک پیدا کنیم. ارگودیک، دینامیک سیستم را به آمار پیش‌بینی‌شده‌ی یک آنسامبل تصادفی به‌وسیله‌ی مشخص کردن توزیع ویژگی‌های مختلف با مقدار نسبی ربط می‌دهد.

در مدت تحول دینامیکی، وقتی سیستم دارای مقادیر نسبی از ویژگی‌هاست، برای تعمیم رابطه‌ی ارگودیک به احتمالات $P(b|a)$، باید a را پایسته درنظر بگیریم. دراین صورت، احتمال ارگودیک $P(b|a)$ را با شناخت کامل واقعیت (a,m) با تصادفی کردن در طول a می‌توان به‌دست آورد. این نوع تصادفی کردن به‌طور صریح، مشابه با اثرات برهم‌کنش اندازه‌گیری لازم برای یک اندازه‌گیری دقیق از a با شرط اولیه‌ی m است. بین آماده‌سازی m و اندازه‌گیری a، احتمال به‌دست آوردن b از $P(b|m,a)$ به‌دست می‌آید. نتیجه‌ی احتمال $P(b|a)$ کاملاً مستقل از m است؛ بنابراین، $P(b|a)$ اساساً درجهتی است که احتمالات ارگودیک به‌دست آمده از متوسط دینامیکی هستند.

چطور مکانیک کوانتومی‌احتمالات معین $P(m|a,b)$ را به احتمالات ارگودیک $P(b|a)$ ربط می‌دهد؟ در فیزیک کلاسیک، فرض بر این است که احتمال ارگودیک با حرکت در طول مسیر a ثابت و b متغیر به‌دست خواهد آمد. مدل کلاسیکی احتمال معین $P(m|a,b)$ مشتقات زمانی دینامیک تولید شده از انرژی A_a را تفسیر نمی‌کند. نتایج مکانیک کوانتومی‌پیش‌بینی می‌کند، دینامیک سیستم نقش اساسی‌تری در تعیین رابطه‌ی بین a,b و m دارد. در ادامه، رابطه‌ی مکانیک کوانتومی بین احتمالات ارگودیک و احتمالات شرطی $P(m|a,b)$ را که از قوانین جهانی فیزیک به‌دست آمده، بیان می‌کنیم که اساساً رابطه‌ی بین ویژگی‌های فیزیکی سیستم را تغییر می‌دهد. تأکید می‌شود که اصلاحات اساسی روابط بین دینامیک و آمار که در قلب مکانیک کوانتومی قرار دارد، مختص برگشت قانون فیزیک به قانون ارگودیک کوانتومی‌است. برای شروع، فرمولی از قانون ارگودیک کوانتومی(۴-۳)که اگر $a = a'$

$$\sum P(a|m,b)P(m|a,b)=1 \qquad (۴-۷)$$

اگر فقط احتمالات مثبت و حقیقی را مجاز بدانیم، نرمالیزه به یک کردن ایجاب می‌کند که مجموع هر مشارکتی در مجموع یا یک است یا صفر. مشارکت برابر یک، نشان می‌دهد که مقدار m از ترکیب b,a تعیین می‌شود.

پارادوکس کوانتومی نامساوی بل نشان می‌دهد که اختصاص هم‌زمان b,a و m همراه با شواهد تجربی اثبات نمی شود؛ بنابراین، تغییر در رابطه‌ی b,a و m ضروری است.

قبلاً گفتیم رابطه‌ی درست با احتمالات شرطی که در اندازه‌گیری‌های ضعیف مشاهده شده‌اند، به‌دست می‌آید. این احتمالات شرطی از اعداد مختلط به‌دست آمده‌اند و قسمت موهومی‌آن تغییر دینامیک سیستم را نشان می‌دهد. شاید در نظر گرفتن احتمالات شرطی مختلط، به‌دست آوردن رابطه‌ی بنیادی درست بین ویژگی‌های فیزیکی را امکان‌پذیر کند. که فازهای مختلف اثرات تغییر ویژگی‌های فیزیکی متناوب را نمایش می‌دهد[۳۱و۳۰].

مجموع سهم‌ها در رابطه‌ی (۴-۳) می‌تواند مقادیری بیشتر از صفر یا یک داشته باشند. در حقیقت در رابطه‌ی به‌دست آمده برای احتمالات شرطی مختلطی که در اندازه‌گیری‌های ضعیف مشاهده شده، سهم‌ها مستقل از b و مساوی با احتمال ارگودیک m در a است،

$$P(m|a,b)P(a|m,b)=P(m|a) \qquad (۸-۴)$$

این رابطه، فرمول فشرده شده‌ی قانون ارگودیک کوانتومی‌است و همه‌ی مکانیک کوانتومی‌از این قانون ساده می‌تواند به‌دست آید. در رابطه‌ی (۴-۴) قانون ارگودیک کوانتوم بیان می‌کند که قدر مطلق سهم (m,b) تا (a,b) در رابطه‌ی (۴-۳) به b وابسته نیست. با این حال، b هنوز برای تعریف یک رابطه‌ی معین بین a و m ضروری است. این مشکل به‌وسیله‌ی فاز مختلط حل شده است. از آنجا که $P(m|a)$ حقیقی است پس:

$$Arg\left[P(a|m,b)\right]=-Arg\left[P(m|a,b)\right] \qquad (۹-۴)$$

در اینجا نظم قرار گرفتن a ,b و m مهم است؛ اگر این ترتیب معکوس شود، علامت فاز مختلط باید معکوس شود که ا ارتباط بین فاز مختلط و دینامیک یک انتقال نتیجه شده است. فاز مختلط مربوط به

یک نیروست که ویژگی اولیه‌ی a را به ویژگی نهایی b مرتبط می‌کند. اگر نقش ویژگی اولیه و نهایی معکوس شود جهت نیرو معکوس می‌شود، به‌طوری‌که

$$\mathrm{Arg}\left[\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{a},\mathrm{b})\right]=-\mathrm{Arg}\left[\mathrm{P}(m|\mathrm{b},\mathrm{a})\right] \qquad (۱۰-۴)$$

مقایسه‌ی بین معادلات (۴-۵) و (۴-۶) نشان می‌دهد که فاز تنها به ترکیبی از ویژگی‌ها بستگی دارد، نه به تفاوت بین ویژگی هدف و شرایط آن.

رابطه (۴-۶) با رابطه‌ی بیزین بین احتمالات برای شرایط مختلف با معادله‌ی

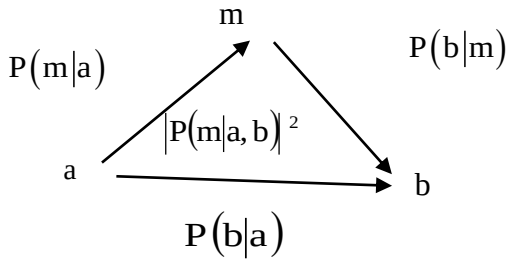
$$\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{a},\mathrm{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{a}|\mathrm{b})=\mathrm{P}(\mathrm{a}|\mathrm{b},\mathrm{m})\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{b}) \qquad (۱۱-۴)$$

سازگاراست که در آن نسبت‌ها بین احتمالات شرطی مختلف، با مطابقت دادن احتمالات ارگودیک به‌دست می‌آیند. به‌طور خاص، احتمال شرطی معین $\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{a},\mathrm{b})$، یک احتمال مختلط به m اختصاص می‌دهد. برای یک ویژگی اولیه‌ی a و اندازه‌گیری نهایی b ، اندازه‌گیری m باعث اختلال درسیستم می‌شود و احتمال اندازه‌گیری b برای اندازه‌گیری بعدی را به احتمالات بعدی ارگودیکی $\mathrm{P}(\mathrm{b}|\mathrm{m})$ تغییر می‌دهد.

طبق رابطه‌ی (۴-۷) و (۴-۱۱)، احتمال آن‌که اول m را به‌دست آورده و سپس b در یک زیردنباله اندازه‌گیری محاسبه شود، با رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{P}(\mathrm{b}|\mathrm{m})\ \mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{a})=\mathrm{P}(\mathrm{b}|\mathrm{a})\left|P(m|a,b)\right|^2 \qquad (۱۲-۴)$$

این قانون از ارگودیک کوانتومی، بیانگر اثر اغتشاش دینامیکی ویژگی b در اندازه‌گیری m است. همان گونه که در شکل (۲)، نشان داده شده است، قدر مطلق احتمال شرطی مختلط $\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{a},\mathrm{b})$ از نسبت بین احتمال اندازه‌گیری متوالی $\mathrm{P}(\mathrm{b}|\mathrm{m})\ \mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{a})$ و احتمال مستقیم $\mathrm{P}(\mathrm{b}|\mathrm{a})$ به‌دست آمده است[۱۶].



شکل (۲) : بازخورد[1] ارگودیک کوانتوم را شرح می‌دهد. مربع قدر مطلق احتمال شرطی مختلط با نسبتی از احتمالات متوالی $P(b|m)(m|a)$ و احتمال ارگودیک مستقیم $P(b|a)$ مشخص می‌شود.

که بر روی رابطه بین احتمال مختلط و اندازه گیری تأکید می‌کند.

۶-۴ ظاهر فضای هیلبرت

در مکانیک کوانتومی استاندارد یکی از پیش‌فرض‌ها، فضای هیلبرت، فضای کت‌ها و فضای براها است که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

فضای هیلبرت: فضای کت‌های κ ، فضای برداری مختلطی که بعد آن بر طبق طبیعت سیستم فیزیکی مورد نظر تعیین می‌شود را به همراه اعمال جمع کت، ضرب نرده‌ای عدد و کت و ضرب داخلی کت و دوگان کت‌ها، یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

کت: کت یک تابع موج، یا بردار حالت یا به سادگی یک حالت فیزیکی سیستم را کت می‌نامیم که با نماد $|\alpha\rangle$ در یک فضای برداری مختلط نمایش داده می‌شود و دارای تمام اطلاعات یک حالت فیزیکی است.

فضای کت: مجموعه‌ی تمامی حالات ممکن یک سیستم را فضای کت می‌نامیم، $\kappa = \{|\alpha\rangle : \forall \alpha\}$، همواره می‌توان بین فضای کت‌ها، فضای توابع و فضای ماتریس‌های مربع تعریف نمود.

---

[1]- Backaction

درسیستمهای کوتنتومی آشکار سازها و وسایل اندازه‌گیری به تاثیر اندازه گیری خودش روی سیستم بر می‌گردد که به آن backaction می‌گویند

فضای براها: نماد گذاری فضای برا که یک فضای برداری "دوگان" فضای کت است را معرفی می‌کند. متناظر با هر کت $\langle\alpha|$، یک برا که با $|\alpha\rangle$ نشان داده می‌شود، در فضای دوگان یا فضای برا وجود دارد. برای دوگان $c|\alpha\rangle$ ، $c^*\langle\alpha|$ می‌باشد.

ضرب داخلی یک برا و یک کت را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\big(\langle\beta|\big).\big(|\alpha\rangle\big). \qquad (۱۳-۴)$$

این ضرب در حالت کلی یک عدد مختلط است. در تشکیل یک ضرب داخلی، همواره یک بردار از فضای برا با یک بردار از فضای کت گرفته می‌شود. به عنوان اصل موضوع داریم:

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle^*. \qquad (۱۴-۴)$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت $\langle\alpha|\alpha\rangle$ باید عدد حقیقی باشد. . به عنوان اصل موضوع داریم[۱]:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\geq 0. \qquad (۱۵-۴)$$

نظریه‌ی احتمالات شرطی مختلط، فرمولهای مکانیک کوانتومی را بدون اصول قبلی مکانیک کوانتومی تعیین می‌کند، به عبارت دیگر مفاهیم مکانیک استاندارد در ارگودیک کوانتومی ضرورتی ندارد و هیچ تناقضی بین فرمولهای استاندارد و آنچه گفتیم وجود ندارد. اکنون می‌توان فرمولهای فضای هیلبرت را از قانون بنیادی‌تر ارگودیک کوانتوم بدست‌آورد، این روابط قبلا از طریق اصول موضوعه نظریه‌ی کوانتومی بررسی و ایجاد شده بودند. فرمول‌بندی مجدد فضای هیلبرت این‌بار بصورت رابطه میان احتمال ارگودیک $P(m|a)$ ومربع قدر مطلق احتمال شرطی مختلط با مقیاس بندی مجدد به شکل:

$$P(m|a)=\left|\sqrt{\frac{P(a|b)}{P(m|b)}}P(m|a,b)\right|^2. \qquad (۱۶-۴)$$

از نظر ریاضی، مقیاس‌بندی مجدد احتمالات، a را بعنوان بردار با طول واحد در یک فضای d بعدی تعریف می کند، که d مقادیر ممکن برای m می‌باشد و ویژگی b، فاز مولفه‌ی برداری را مشخص می‌کند. بنابراین رابطه‌ی بین a,m به شرط b به شکل ضرب داخلی دو بردار $|m\rangle,|a\rangle$ بیان می‌شود.

$$\langle m|a\rangle=\left|\sqrt{\frac{P(a|b)}{P(m|b)}}P(m|a,b)\right|. \qquad (۱۷-۴)$$

بردارهای حالت فضای هیلبرت با احتمالات شرطی مختلط باز مقیاس بندی می‌شوند تا روابط بین ویژگیهای قابل‌مشاهده سیستم را توصیف کنند. برهم نهی مقادیر متفاوت m ناشی از استفاده‌ی ویژگی b است که نمی‌تواند تواما با m اندازه‌گیری شود.که این مربوط به روند ریاضی می‌باشد و ربطی به واقعیت فیزیکی ندارد. اکنون دید فیزیکی فضای هیلبرت با یک روش متفاوت امکان پذیر است، رابطه‌ی (۴-۱۴) نشان می‌دهد که جبر برداری فضای هیلبرت صرفا روابط بین احتمالات شرطی مختلط را توصیف می‌کند. با استفاده از قاعده -ی زنجیره‌ای احتمالات بیزین که در رابطه‌ی (۴-۲) بیان شده برای ضرب داخلی $\langle f \mid a \rangle$ داریم:

$$\sum_m \langle f \mid m \rangle \langle m \mid a \rangle = \sqrt{\frac{P(a|b)}{P(f \mid b)}} \sum_m P(f \mid m,b) P(m \mid a,b)$$

$$= \sqrt{\frac{P(a|b)}{P(f \mid b)}} P(f \mid a,b). \qquad (۱۸-۴)$$

در این رابطه مشاهده می‌کنید که این جمع مسئول دیده نشدن m های جایگزین و اثر تداخل توصیف می‌شود.

۴- ۷ تابع موج

با توجه به نتایج کنونی به نظر می‌آید که مفاهیم اپراتور و حالت‌های مطرح شده در مکانیک کوانتومی غیر ضروری است، از نظر تاریخی، حالتها از مدل اتمی بوهر ظاهر شد، چون داخل اتم برای انجام آزمایش غیر قابل‌دسترسی بود، اتصال به فیزیک به وسیله‌ی انرژی مربوط به ویژه حالت بود. در فرمولاسیون فضای هیلبرت؛ توصیف ویژگی‌های فیزیکی جدا از توصیف حالت است با مطرح شدن مفهوم "اپراتورها"جبر اپراتورها می‌تواند همه‌ی روابط بین ویژگیهای فیزیکی را بیان کند، اما شواهد آزمایشگاهی فقط به شکل آماری حالتهای خاص توضیح داده می‌شود، در جبر اپراتورهای فضای هیلبرت دو گانگی دیده می‌شود، این مشکل توسط ارگودیک کوانتوم با یکی کردن حالت و اپراتورها حل شده است، روابط جهانی بین ویژگی‌های فیزیکی تصادفی نیست و می‌توانند جایگزین قوانین فیزیکی گذشته شوند. توابع مستقیما مقادیر مشاهده‌پذیرها را به یکدیگر مربوط می‌کند، بطور مثال، حد کلاسیکی معادله‌ی شرودینگر از هامیلتونی که انرژی را به مکان و اندازه حرکت ربط می‌دهد بدست می‌آید،

$$E=H(x,p). \qquad (۱۹-۴)$$

در حد کلاسیکی بطور تقریبی رابطه‌ی بین انرژی، مکان و تکانه بصورت زیر است:

$$P(E|x,p) \approx \delta(E - H(x,p)). \qquad (۲۰-۴)$$

ارگودیک کوانتوم به وسیله‌ی احتمالات شرطی مختلط رابطه‌ی بهتری را نشان می‌دهد که عبارت است از:

$$P(E|x,p)P(x|E,p) = P(x|E) \qquad (۲۱-۴)$$

احتمالات شرطی، مختلط هستند و گرادیان فاز مختلط آنها انتقال بین ویژگی‌های x,p وE را نمایش می‌دهد. تقریب کلاسیکی در رابطه‌ی (۴-۱۷) زمانی استفاده می‌شود که احتمالات خیلی بزرگ باشند، مفهوم نتایج بدست آمده این است که روابط کلاسیک تقریبی هستند و باید از روابط بنیادی‌ترکوانتوم ارگودیک ؛ $P(E|x,p)$ و $P(x|E,p)$ استفاده کرد.

تابع موج $\left(\psi(x) = \langle x|\mathrm{E}\rangle\right)$ باید از احتمالات شرطی مختلط سرچشمه بگیرد. این‌که مقدار بردارهای حالت از به‌دست آوردن مربع قدر مطلق یک احتمال شرطی مختلط که در (۴-۱۰) نشان داده شده نامفهوم است. اگر نتیجه‌ی پیشگویی احتمالات اندازه‌گیری $\mathrm{P(x|E)}$ برای متوسط زمانی حالت مانا E باشد:

$$\mathrm{P(x|E)} = \left|\sqrt{\frac{\mathrm{P(p|E)}}{\mathrm{P(p|x)}}}P(x|E,p)\right|^2. \qquad (۲۲-۴)$$

در این رابطه، احتمال ارگودیکی $\mathrm{P(x|E)}$ می‌تواند بدون هیچ انتگرال‌گیری متوسط زمانی، از شرایط و احتمالات ارگودیکی از یک منبع تکانه ساده به‌دست آورده شود. اگر اندازه حرکت منبع صفر باشد تعریفی از تابع موج ظاهر می‌شود.

$$\psi_{\mathrm{E}}(\mathrm{x}) = \sqrt{\frac{\mathrm{P(p=0|E)}}{\mathrm{P(p=0|x)}}}\ \ \mathrm{P(x|E,p=0)}. \qquad (۲۳-۴)$$

اینجا دامنه‌ی احتمال $\psi_{\mathrm{E}}(\mathrm{x})$ هیچ مفهومی ندارد، در عوض اشاره می‌کند که جبر فضای هیلبرت به قوانین بنیادی مبهمی از فیزیک که با احتمالات شرطی مختلط بیان می‌شود، تمایل دارند. در p=o

یک تعریف مناسب فیزیکی از فازهایی در فرمول فضایی هیلبرت است. در حقیقت انتخاب متفاوت تکانه منبع، فازها را تغییر می‌دهد.

در بیشتر احتمالات شرطی مختلط مفاهیم اصلی فضای هیلبرت درک نمی‌شود. تعریف ریاضی $\psi_E(x)$ مثل برهم‌نهی x متفاوت که یک بیان واقعی از رابطه‌ی معین بین ویژگی E، ویژگی x و P_o منبع است. اگر چه این بیان می‌تواند برای تعیین یک ویژگی نامعلوم E در فضای فاز با ویژگی x مشخص و P=o استفاده شود، ولی به این معنا نیست که E یک بر هم نهی از xهای متفاوت است. در عوض توضیح درست این است که E یک ویژگی هست که x و P_o را با $P(x|E,P_o)$ بر هم مربوط می‌کند. به‌طور مشابه تداخل کوانتومی با تداخل واقعیت‌های جایگزین یا جهان‌های موازی یکی نیست. در عوض احتمال تعیین ویژگی‌های متفاوت m با احتمالات شرطی مختلط $P(m|x,P_o)$ می‌تواند برای پیدا کردن یک رابطه بین x و E استفاده شود.

با استفاده از قانون زنجیره‌ای آماری:

$$P(m|E,p_o)=\int P(m|x,p_0)\ P(x|E,p_o)\,dx. \qquad (۲۴-۴)$$

در این انتگرال از ویژگی فیزیکی x برای به‌دست آوردن ویژگی فیزیکی E و m استفاده شده است؛ به‌طوری‌که روابط x و p_o ، کاملاً m و E را تعیین می‌کنند.

احتمالات شرطی مختلط را نباید با واقعیات پنهان تفسیر کرد، روابط معین بین خواص فیزیکی با زمان‌های متفاوت باید در احتمالات شرطی مختلط دسته‌بندی شوند تا مکانیک کوانتومی بتواند حرکت را توصیف کند.

۸-۴ رابطه‌ی بین قوانین جهانی و شواهد آماری

شواهد آزمایشگاهی که از سیستم‌های کوانتومی بدست می‌آید ضرورتا آماری هستند. بنابراین درک الگوهای آماری مشاهده شده در اندازه‌گیریهای کوانتومی مهم است، ارگودیک کوانتومی بر پایه‌ی همین شواهد بنا شده است. به همین منظور حالت کوانتومی حقیقی، آماری که از احتمالات توام $\rho(a,b)$ ویژگی‌های مکمل a,b که از یک موقعیت خاص بدست آمده را توصیف می‌کند. آزمایش‌های اخیر نشان

داده اند که این احتمالات توأم مختلط از اندازه‌گیری ضعیف a و به دنبال آن اندازه‌گیری دقیق b بدست می‌آید[۳۲]. سپس احتمال هر نتیجه از اندازه گیری m با عملی کردن قانون بیزین برای احتمال مشترک ρ(a,b) و رابطه‌ی جهانی بین a,b و m که به‌وسیله‌ی احتمال شرطی $P(m|a,b)$ امکان پذیر می‌شود

$$P(m)=\sum_{a,b}P(m|a,b)\rho(a,b) \qquad (۲۵-۴)$$

در اینجا رابطه‌ی بین اطلاعات قبلی و پیش‌بینی آینده فیزیک بنیادی توصیف می‌شود.

در ارگودیک کوانتومی برای یک حالت اولیه با m مشخص، رابطه‌ی احتمال توام بصورت:

$$\begin{aligned}\rho(a,b|m)&=P(a|m,b)P(b|m)\\&=P(b|a,m)P(a|m)\\&=P^{*}(m|a,b)P(b|a)\end{aligned} \qquad (۲۶-۴)$$

بنابراین ارگودیک کوانتوم از رابطه‌ی اساسی بین قوانین جهانی فیزیک بیان شده با احتمالات شرطی مختلط و آمار مشاهده‌پذیرهای حالتهای خالص نتیجه می‌شود. ارگودیک کوانتوم گستره ای از مکانیک کوانتومی بر پایه‌ی قوانین جهانی فیزیک ایجاد می‌کند که به موقعیت خاصی وابسته نیست. با این دیدگاه می‌توان مکانیک کوانتومی را باز نگری کرد[۱۶].

۴-۹ ارگودیک کوانتومی و ویژگی‌های حالت‌های مانا

حالت‌های مانا برای مدارهای مانای الکترون‌های اتم هیدروژن مطرح شده بودند. در محدوده‌ی کلاسیک این حالت‌های مانا با متوسط زمانی مسیرها مطابقت دارند که در آن بازه‌ی زمانی dt منطبق بر پاره‌خط (dx,dp) در فضای فاز است. برای یک مدار بسته با دوره‌ی T، می‌توان احتمالات ارگودیک حالت انرژی E را از نظر توزیع فضای فاز، مکان x و اندازه حرکت p بیان کرد،

$$P(x,p|E)=\frac{1}{T}\delta(E-H(x,p)). \qquad (۲۷-۴)$$

در اینجا هامیلتونی کلاسیک H(x, p) بیان می‌کند که انرژی، تابعی از مکان و تکانه است. متوسط ارگودیک کلاسیک بر پایه‌ی این فرض بنا شد که واقعیت توام x,p ، منحصراً یک مقدار انرژی E را

تعیین می‌کند که انرژی با تغییر x یا p تغییر می‌کند. در مکانیک کوانتومی این تفسیر از نقاط فضای فاز به‌عنوان واقعیت‌های توأم، همه‌ی ویژگی‌های فیزیکی را ساقط می‌کند؛ بنابراین، پیدا کردن یک اصطلاح آماری متفاوت برای میانگین ارگودیکی توسط حالت‌های کوانتومی مانا ضروری است.

ممکن است با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف مکان برای اندازه‌گیری قوی تکانه (و برعکس) به مشکل بربخوریم. از آنجا که مقادیر ضعیف عملگرهای تصویرگر معمولاً مختلط هستند، چنین نتیجه‌ی اندازه‌گیری از احتمالات توأم مختلط برای احتمالات ارگودیکی برای یک حالت به‌دست می‌آید[۳۳و۳۴و۳۵].

در فرمالیسم فضای هیلبرت، احتمال ارگودیک کوانتوم برای حالتی از انرژی E از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید،

$$P(x,p|E)=\langle p|x\rangle\langle x|E\rangle\langle E|p\rangle. \qquad (۲۸-۴)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که چه‌طور رابطه‌ی معین بین انرژی E و مختصات فضای فاز (x,p) در مکانیک کوانتومی تغییر می‌کند؛ بنابراین، ضروری است که تفاوت بین جبر کلاسیک و جبر کوانتومی را که با احتمالات مختلط توصیف می‌شوند، بشناسیم.

اساساً واقعیت توأم x ,E وp در مکانیک کوانتومی را می توان با احتمالات شرطی مختلط $P(x|E,p)$ بیان کرد که در آن pو E واقعیت‌های حقیقی یک سیستم و x واقعیت بالقوه است.

از آنجا که احتمال شرطی مکان x از آمار نمونه‌ی اندازه‌گیری ضعیف به‌دست آمده، نتایج جداگانه، اطلاعات کمی دارد و واقعیت تجربی یک سیستمی که انرژی E دارد و p آن اندازه‌گیری شده را تعریف نمی‌کند.

برای اندازه‌گیری با تصادفی کردن x، با داشتن انرژی E و تکانه‌ی p، و متوسط ارگودیک[1] در مسیری که توسط x مشخص شده، روابط مشخص می‌شود. رابطه‌ی بین احتمالات شرطی مختلط $P(x|E,P)$ و

[1]- Ergodic average

احتمالات ارگودیک که در یک اندازه‌گیری متوالی از x و P که از قانون ارگودیک به‌دست آمده رابطه‌ی (۴-۱۲) به‌صورت:

$$\left|\mathrm{P}(\mathrm{x}|\mathrm{E},\mathrm{p})\right|^2 \mathrm{P}\left(p|\mathrm{E}\right)=\mathrm{P}\left(p|x\right)\mathrm{P}\left(x|\mathrm{E}\right). \qquad (۴-۲۹)$$

که این رابطه از ارگودیک کلاسیک[1] به‌دست نمی‌آید.

در کوانتوم ارگودیک یک فاز مختلط اختصاص داده شده که رابطه‌ی بین x,E و p را بیان می‌کند. این فاز مختلط که عمل انتقال P و E در امتداد x ثابت را نشان می‌دهد S(x,P,E)، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}|\mathrm{E},\mathrm{p}) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{s}(\mathrm{x},\mathrm{p},\mathrm{E})}{\hbar}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{P}(p|x)P(x|E)}{\mathrm{P}(\mathrm{p}|\mathrm{E})}}. \qquad (۴-۳۰)$$

که ثابت $\hbar$، نسبت بین عمل و فاز را توصیف می‌کند [۱۶].

با xهای بزرگ، می‌توان به حد کلاسیک رسید. گرادیان عمل S(x,p,E)، مطابق با تفاوت کلاسیکی بین تکانه‌ی p و تکانه (x,E) را نشان می‌دهد،

$$\frac{\partial \mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{p},\mathrm{E})}{\partial x} \approx \mathrm{f_p}(\mathrm{x},\mathrm{E}) - p, \qquad (۴-۳۱)$$

در اینجا $\mathrm{f_p}$، راه حل کلاسیکی تکانه برای $\mathrm{H}(\mathrm{x},\mathrm{f_p})=\mathrm{E}$. در بازه‌های بزرگ Δx ، $\mathrm{P}(\mathrm{x}|\mathrm{E},\mathrm{p})$ ، احتمال متوسط است اگر، $(\mathrm{f_p}-\mathrm{P})\Delta x \gg \hbar$. جبرگرایی کلاسیکی بصورت تقریبی از جبرگرایی کوانتومی ظاهر می‌شود اگر حاصل‌ضرب عدم‌قطعیت مکان و تکانه بسیار بزرگتر از نسبت عمل به فاز، ħ باشد.

۴-۱۰ زمان و حرکت

در فیزیک کلاسیک، تحول زمانی سیستم با تابعی معین از وضعیت اولیه بیان می‌شود. برای مثال، مکان x_t از یک ذره در زمان t می‌تواند با تابعی از مکان x_o و اندازه حرکت P_o در t=o بیان شود. در قانون ارگودیک کوانتومی‌حالت‌ها تقریبی هستند و از احتمالات شرطی مختلف بنیادی‌تر که رابطه‌ی درست بین x=t و (x_o,p_o) را بیان می‌کند، به‌دست می‌آیند. در مورد حرکت یک‌بعدی یک ذره به جرم m که در فضای آزاد به‌صورت غیرنسبیتی منتشر می‌شود، رابطه به شکل زیر تعریف می‌شود،

[1]- Classical ergodic

$$P(x_t|x_o,P_o) = \sqrt{-i\frac{m}{2\pi\hbar t}}\ \exp\left(i\frac{m}{2\hbar t}(x_t - x_o - \frac{1}{m}P_0 t)^2\right).$$

(۳۲-۴)

این روابط جایگزین توصیف ریاضی‌وار مسیرهای مستقیم فضا–زمان می‌شود. اختصاص یک سرعت ثابت به انتشار، امکان‌پذیر نیست. همان‌طورکه $\frac{P_o}{m}$ با $\frac{x - x_o}{t}$ (نسبت فاصله به زمان) برابر نیست. در فیزیک کلاسیک، سرعت یک تقریب است که وقتی عمل می‌کند که عدم قطعیت مکان و تکانه بسیار بزرگتر از $\hbar$ باشد.

می‌توان با ربط دادن مکان متوسط x_m به مکان اولیه x_i و مکان نهایی x_f، قوانین حرکت را فرمول- بندی کرد. اگر بازه‌ی زمانی t_{im} و t_{mf} برابر باشند(بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری اولیه تا اندازه‌گیری میانی و بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری میانی تا اندازه‌گیری نهایی)، حرکت روی خط راست نیازمند آن است که ارگودیک کوانتوم رابطه‌ی معین امکان انتقال بین x_i و x_f را در طول x_m ثابت توصیف کند؛ بنابراین، قانون حرکت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(x_m|x_i,x_f) = \sqrt{-i\frac{m}{\pi\hbar T}}\ \exp\left(i\frac{m}{\hbar T}(x_m - \frac{x_i + x_f}{2})^2\right). \qquad (۳۳-۴)$$

که در آن $T = t_{im} = t_{mf}$ ، در صورت عدم برهم‌کنش، قوانین حرکت توسط همان قوانینی که بر روابط بین ویژگی‌های فیزیکی در زمان ثابت t اعمال می‌شوند، بیان می‌شوند [۱۹].

قانون ارگودیک کوانتومی‌تحول زمانی درون یک سیستم را از اغتشاش ایجاد شده از نیروهای خارجی سیستم متمایز می‌سازد. اولی را می‌توان برای توصیف سیستم و دومی را نشان دهنده‌ی تحولات ناشی از تعامل با محیط دانست.

فصـــل ۵

خلاصه و نتیجه گیری

از مطالب ارائه شده در فصل‌های قبل می‌توان گفت با جایگزین کردن احتمالات شرطی مختلط با قوانین کلاسیک، می‌توان اصول مکانیک کوانتوم را کاملاً معین توضیح داد. همچنین، احتمالات شرطی نشان می‌دهد که واقعیت توأم سه ویژگی که با هم در ارتباط باشند، وجود ندارد. رابطه‌ی بین فاز مختلط و عمل انتقال تضمین می‌کند که برای پیدایش یک اثر واقعی برهم‌کنش اندازه‌گیری لازم است. بنابراین انتقال‌ها، واقعیت مرتبط با اثرات گذشته را به واقعیت‌های بالقوه‌ی آثار آینده مرتبط می‌کند. سوء تعبیر کلاسیک از واقعیت از کمی $\hbar$ سرچشمه می‌گیرد.

این عقیده که واقعیت به وسیله‌ی هندسه‌ی نامتعارف با بُعد اضافی زمان می‌تواند توصیف شود، تفکری بر پایه‌ی این فرضیه است که دینامیک یک مقدار ناوردا است. نتایج آزمایش نشان می‌دهد که $\hbar$ به‌عنوان یک مقیاس عملی بنیادی، رابطه‌ی بین واقعیت تجربی سیستم فیزیکی را به دینامیک آن ربط می‌دهد.

به‌عنوان یک نتیجه می‌توان گفت توصیف حرکت یک ذره با دنبال کردن نقاط فضا درست نیست. در حالی‌که مسیرهایی که از کلاسیک ظاهر می‌شوند، تقریبی و با دقت پائین هستند. احتمالات شرطی مختلفی که از رابطه‌ی (۱-۴) دست آمده حرکت را اساسی‌تر توصیف می‌کنند. به‌وسیله‌ی ثابت $\hbar$ (نسبیت عمل فاز) $\hbar$ آستانه‌ی جداسازی تقریبی واقعیت عناصر از دینامیک آنها ممکن می‌شود.

در این آستانه‌ی پایین، شواهد آزمایش نشان می‌دهد که اثرات قابل مشاهده عناصر واقعیت یک جسم نمی‌تواند از برهم‌کنش‌های حاصل از مشاهده شدن جدا شود.

نکته‌ی مهم: توجیه علمی برای این ادعا که واقعیت باید از برهم‌کنش دینامیکی مستقل باشد، وجود ندارد. در جهانی که ما در آن زندگی می‌کنیم واقعیت یک جسم می‌تواند فقط از روی اثرات برهم‌کنش‌های آن درک شود. این یک حقیقت است که جداسازی تقریبی واقعیت و دینامیک کارهای روزانه صرفاً نتیجه‌ی کوچک بودن $\hbar$ است.

قانون ارگودیک کوانتوم نشان می‌دهد که این جداسازی می‌تواند با کمک ساده‌سازی و تفکیک مشاهده‌ها به‌دست آید. احتمالات شرطی مختلط کاملاً دربرگیرنده‌ی تجربه‌ی روزانه‌ی واقعیت جسم

هستند. همان‌طور که در نسبیت عام درگذر زمان به تفاوت‌های کوچک مثل اختلاف ارتفاع در پتانسیل گرانشی زمین توجه نمی‌کنیم، در ابعاد بسیار بزرگ تفکیک بین عناصر واقعیت از دینامیک آنها انجام نمی‌شود. این که حرکت باید به‌وسیله‌ی خطوط ریاضی در فضا و زمان توصیف شود، عقیده‌ی درستی نیست. همین‌طور این نظر که زمان برای همه‌ی مشاهدات باید در نظر گرفته شود.

به‌کمک مشاهدات آزمایشگاهی و احتمالات شرطی مختلط، روابط مناسبی بین عناصری از واقعیت پیشنهاد می‌شود که شامل دینامیک سیستم به شکل فازهای عمل با مقیاس $\hbar$ است.

نتیجه‌ی کلی

توضیح فیزیک کوانتومی وقتی امکان‌پذیر است که تئوری بتواند به‌طور تجربی مفاهیم با ارزش را دنبال کند. بر اساس نتایج آزمایش‌های جدید می‌توان نشان داد که همه‌ی فیزیک کوانتومی با جایگزین کردن روابط معین فیزیک کوانتومی با احتمالات شرطی مختلط مشاهده شده در اندازه‌گیری ضعیف، قابل فهم است. فیزیک کوانتومی بر اساس این واقعیت که واقعیت یک جسم را نمی‌توان از برهم کنش دینامیکی حاصل از مشاهده جدا کرد، دقیق‌تر توصیف می‌شود.

احتمالات شرطی مختلط بیان شده، به وسیله‌ی قانون ارگودیک کوانتوم، احتمالات شرطی مختلط را به‌طور دینامیکی به احتمالات متوسط ارگودیک مشاهده شده در آزمایش‌های دقیق کوانتومی ربط می‌دهد.

فرمول‌بندی مجدد فیزیک کوانتومی با روابط بین ویژگی‌های فیزیکی با ساختار بنیادی جدید زمان و مکان، امکان‌پذیر است.

باید این عقیده را که زمان نمایش لحظه‌ای یک سری از واقعیت‌هاست، کنار گذاشت. دینامیک سیستم در فاز عمل نسبت به $\hbar$ ظاهر می‌شود. احتمالات شرطی مختلط توضیح می‌دهد که چه‌طور معادلات حرکت احتیاج به تغییر دارند. این کار با تطبیق دادن رابطه‌ی بنیادی بین واقعیت‌های تجربی و دینامیک‌های برهم‌کنش امکان‌پذیر است.

منابع:

[1] J.J.Sakurai, ***Modem Quantum Mechanics****.Rev.Ed, Addis on-wesley, Reading* ***1994.***

[2] Hermann Wimmel (1992). Quantum physics & observed reality: a critical interpretation of quantum mechanics. World Scientific. p. 2. ISBN 978-981-02-1010-6. Retrieved 9 ***May 2011****.*

[3] David Mermin. ***(2006), Quantum Computation Cornell*** *University, Physics 481-681, CS 483; spring.*

[4] David Mc Mahon, ***(2008****),* ***Quantum Computing Explained****, ISBN: 978-0-470-09699-4 January****,*** *wiley-IEEE Computer Society Press.*

*[5] Von Neumann J****. (1955)****, Mathematical Foundations OF Quatum Mechanics.In Vestigation In Physic, Beyer RT (translator), Princeton: Princetonuniver sity Press.*

*[6] Boaz Tamir and Eliah Cohan****, (2013)****, Introduction to weak measurements and weak values, Quanta 2013****; 2: 7–17****.*

[7] Aharonov Y, Rohrlich D. ***(2005****), Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed. Weinheim: Wiley-VCH.*

[8] Namiki M, Pascazio S, Nakazato H. 1997 Decoherence and Quantum Measurements. Singapore: WorldScientific.

[9] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, ***(1935)****, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? Phys. Rev.* ***47*** *777****.***

[10] Stephen Barnett ***(2009), Quantum Information*** *(Oxford Master Series in Physics).*

[11] Jeffreys, Harold. ***(1973),*** *Scientific Inference (3r e d). Cambridge University Press. p. 31. ISBN* ***978-0-521-18078-8****.*

[12] Boeing, G. ***(2016).*** *"Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction". Retrieved 2016-**12-02**.*

[13] D.V. Anosov ***(2001),*** *"Ergodic theory", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopaedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1556080104 .*

[14] Michael Reed, Barry Simon, ***(1980)****, Functional Analysis: Volume* ***1,*** *Academic Press; REV edition (1980).*

[15] J.BarbourT.Koslowski, and F.Mercati, ***(2014),****"I dentification of a G ravitational Arrow of Time "Physical Review Letters, vol.**113**, 181101.*

[16] H.F.HoFman ***(2014)****, Derivation of quantum mechanics from a single fundamental modification of the relations between physical properties, phys.ReV.A.89, 042115.*

[17] W. P. Schleich, M. Freyberger, ***(2013)****, and M. S. Zubairy****,*** *Reconstruction of Bohm trajectories and wave functions from interferometric measurements, Phys. Rev.* ***A 87, 014102.***

*[18] T. Paterek, B. Dakic, and C. Brukner****,*** ***(2009)****, Publications - Quantum foundations and quantum information theory,* ***Phys. Rev. A79, 012109.***

[19] Holger F. Hofmann, ***(2014).*** *The quantum laws of physics: a new description of dynamics and causality1405.0053 V1 [quant-ph] 30 Apr*

[20] H. F. Hofmann, ***(2011).*** *On the role of complex phases in the quantum statistics of weak measurements, New J. Phys.* ***13, 103009.***

[21] Y.Aharonov, D.Z.Albert, andL.Vaidman, ***(1988****), How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100Phys.Rev.Lett.60, 1351.*

[22] J. S. Lundeen and C. Bamber, ***(2012)****, Procedure for Direct Measurement of General Quantum States Using Weak Measurement, Phys. Rev. Lett.**108, 070402**.*

[23] L.A.Rozema, A .Darabi, D.H.Mahler, A.Hayat, Y.Soudagar, and A. M. Steinberg, Phys. Rev. Lett.109, 100404 (2012).

*[24] A.P.LundandH.M.Wiseman, (2010), Measuring measurement--disturbance relationships with weak values****,*** *NewJ.Phys.**12, 093011**.*

*[25] Holger F. Hofmann**, (2012),** Measurement uncertainties in the quantum formalism: quasi-realities of individual systems, arXiv: 1205.0073v1.*

*[26] M. J. W. Hall, **(2004),** Prior information: How to circumvent the standard joint-measurement uncertainty relation, Phys. Rev. **A69, 052113**.*

[27]** M. Ozawa**, (2003).** Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement, **Phys. Rev. A 67, 042105.

*[28] J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, Nat. **(2012).** Experimental demonstration of a universally valid error–disturbance uncertainty relation in spin measurements, Phys. 8, 185.*

*[29] L.A.Rozema, A.Darabi, D.H.Mahler, A.Hayat, Y.Soudagar, and A. M. Steinberg, **(2012),** Wavefunction collapse through backaction of counting weakly interacting photons, Phys. Rev. Lett.109, 100404.*

[**30] J. Dressel and A. N. Jordan**, (2012),** Derivation of quantum mechanics from a single fundamental modification of the relations between physical properties **Phys. Rev. A85, 012107.

*[31] H. F. Hofmann, **(2011).** On the role of complex phases in the quantum statistics of weak measurements**,** New J. Phys. **13, 103009**.*

[32**] J. G**. Kirkwood, (1933),** Quantum Statistics of Almost Classical Assemblies, **Phys. Rev. 44, 31.

***[33]** J. S. Lundeen and C. Bamber**, (2012),** Procedure for Direct Measurement of General Quantum States Using Weak Measurement, Phys. Rev. Lett. 108, 070402.*
[34] H.F.HoFman, New J.phys.14, 043031.

[35]** C. Bamber and J. S. Lundeen**, (2014)**, Observing Dirac's Classical Phase Space Analog to the Quantum State, Phys. Rev. Lett. 112, 070405**.

Abstract
Recent results obtained in quantum measurements (weak measurement) indicate that the fundamental relations between three physical properties of a system can be represented by complex conditional probabilities. Here, it is shown that these relations provide a fully deterministic and universally valid framework on which all of quantum mechanics can be based. Specifically, quantum mechanics can be derived by combining the rules of Bayesian probability theory with only a single additional law that explains the phases of complex probabilities. This law, which of quantum ergodicity, is based on the observation that the reality of physical properties cannot be separated from the dynamics by which they emerge in measurement interactions. The complex phases are an expression of this inseparbility and represent the dynamical structure of transformations between the different properties. its quantitative form, the law of quantum ergodicity describes a fundamental between the ergodic probabilities obtained by dynamical averaging and the deterministic relations between three properties expressed by the complex conditional probabilities. The complete formalism of quantum mechanics can be derived from this one relation, without any axiomatic mathematical assumptions about state vectors or superpositions. It is therefore possible to explain all quantum phenomena as the consequence of a single fundamental law of physics.

Key Words: weak measurement- weak value – Hilbert space – complex conditional probability – Ergodicity quantum

Shahrood University of technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

M.Sc. Thesis in Particle Physics

Reformulation of Quantum Theory Using complex Conditional probabilities

By: Leila Moosavi

Supervisor:

Dr. H. Movahedian

February 2017