

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



دانشکده فیزیک

رشته فیزیک گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

## مطالعه حرکت کوارک-پادکوارک شتابدار با استفاده از هولوگرافی

نگارنده: سیده مریم رضانی

استاد راهنما:

دکتر کاظم بی تقصیر فدافن

استاد مشاور:


دکتر مصطفی عنابستانی

شهریور ۱۳۹۵

دانشکده: فیزیک  
گروه: ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سیده مریم رضانی به شماره دانشجویی: ۹۳۰۸۵۵۴  
تحت عنوان: مطالعه حرکت کوآرک-پادکوآرک شتابدار با استفاده از هولوگرافی

در تاریخ ۱۳۰۵/۰۷/۰۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه بسیار خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی: دکتر مصطفی عنابستانی		نام و نام خانوادگی: دکتر کاظم بی تقصیر فدافن
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نمایندة تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر احسان ابراهیمی		نام و نام خانوادگی: دکتر مرتضی رفیعی
			نام و نام خانوادگی: دکتر سید رضا حجازی
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

تقدیم به

علاقه‌مندان به دانستن

با تشکر از

همه‌ی عزیزانی که همراه بوده‌اند

## توجه نامه

اینجانب سیده مریم رمضانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ذرات بنیادی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه حرکت کوآرک-پادکوآرک شتابدار با استفاده از هولوگرافی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج یا نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

۹۵/۶/۱۳

تاریخ

امضای دانشجو: *رمضانی*

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد .

## چکیده

مسیر یک ذره در فضا-زمان جهان خط نامیده می‌شود. مسیر حرکت یک ریسمان در فضا-زمان رویه‌ای دو بعدی است، که ریسمان در فضا-زمان جارو می‌کند و به آن جهان سطح می‌گویند. در این پایان‌نامه به بررسی جهان سطح کوارک-پادکوارک شتابدار با استفاده از  $AdS/CFT$  پرداخته می‌شود و در مورد تأثیر انتخاب مختصات سرتاسری یا پوانکاره فضای  $AdS$  در بررسی مسأله بحث می‌شود. کلمات کلیدی: جهان خط، جهان سطح، ریسمان، کوارک-پادکوارک شتابدار،  $AdS/CFT$ ، سرتاسری، پوانکاره.

لیست مقالات به دست آمده از پایان نامه

۱. کاظم بی تقصیر فدافن، سیده مریم رضانی "بررسی جهان سطح کوارک-پادکوارک شتابدار"  
بیست و سومین کنفرانس فیزیک بهاره (پژوهشگاه دانش‌های بنیادی) ۲۹-۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۵

## فهرست مطالب

### فصل ۱ مقدمه

- ۱-۱ معرفی نیروهای بنیادی طبیعت ..... ۲
- ۲-۱ نظریه‌ی ریسمان و انواع آن ..... ۴
- ۳-۱ جهان سطح ریسمان ..... ۶
- ۴-۱ معرفی کنش نامبو-گوتو ..... ۷
- ۵-۱ هولوگرافی ..... ۱۱
- ۶-۱ تشکیل فضا-زمان  $AdS_5 \times S^5$  با استفاده از شامه‌ها ..... ۱۳
- ۷-۱ توصیفی از کار در حال انجام ..... ۱۶

### فصل ۲ بررسی فضا-زمان $AdS$

- ۱-۲ بررسی ویژگی‌های فضا-زمان  $AdS$  ..... ۲۲
- ۱-۱-۲ بررسی فضا-زمان  $AdS_p$  و  $dS_p$  به‌عنوان دو مثال ..... ۲۶
- ۲-۲ معرفی سیستم مختصات مختلف فضا-زمان  $AdS$  ..... ۳۱
- ۱-۲-۲ مختصات ثابت  $(\tilde{t}, \tilde{r})$  ..... ۳۲
- ۲-۲-۲ مختصات همدیس  $(\tilde{t}, \theta)$  ..... ۳۲
- ۳-۲-۲ مختصات پوانکاره  $(t, r)$  ..... ۳۳
- ۳-۲ مطالعه‌ی حرکت ذره در فضا-زمان  $AdS$  ..... ۳۴
- ۱-۳-۲ انتقال به سرخ گرانشی ..... ۳۴



۳۵.....	۲-۳-۲ حرکت فوتون و ذره
۳۷.....	۳-۳-۲ بررسی حرکت ذره در مختصات پوانکاره
۳۹.....	۴-۲ نکاتی از فضا-زمان $AdS$ در ارتباط با تناظر $AdS/CFT$
۴۰.....	۵-۲ تفاوت مختصات پوانکاره و سرتاسری در فضا-زمان $AdS$
فصل ۳ بررسی کلی جهان سطح کوارک-پادکوارک شتابدار	
۴۴.....	۱-۳ جهان سطح ریسمان برای کوارکی با جهان خط اختیاری
۴۷.....	۲-۳ هندسه‌ی جهان سطح
۵۲.....	۳-۳ ریسمان در $AdS$ سرتاسری
۵۳.....	۴-۳ تکنیکی‌های جهان سطح
۵۶.....	۵-۳ افق روی جهان سطح
۵۷.....	۶-۳ مثال کوارک ایستا
۵۹.....	۱-۶-۳ تمامیت سرتاسری جهان سطح ریسمان
فصل ۴ بررسی جواب‌های دقیق معادله‌ی حرکت	
۶۲.....	۱-۴ فضا-زمان نسبیتی
۶۲.....	۲-۴ فضا-زمان غیرنسبیتی
۶۳.....	۳-۴ مطالعه‌ی کوارک-پادکوارک شتابدار در نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز $SYM$
۷۰.....	۴-۴ مطالعه‌ی کوارک-پادکوارک شتابدار در نظریه‌ی غیرنسبیتی لیفشیتز
۷۵.....	جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

پیوست آ ..... ۷۶

مرجع‌ها ..... ۸۰

# فصل ۱

## مقدمه

## ۱-۱ معرفی نیروهای بنیادی طبیعت

در طبیعت چهار نیروی بنیادی به نام‌های نیروهای گرانش، الکترومغناطیس، نیروی ضعیف و نیروی قوی هسته‌ای وجود دارند. هر کدام از این نیروها مسئول یکی از برهم‌کنش‌هایی می‌باشند که در اطراف ما وجود دارد. نیروی گرانش توسط نیوتون کشف شد. از ترکیب نیروی الکتریکی و مغناطیسی و نوشتن معادله‌های مربوط به آن توسط ماکسول، نیروی الکترومغناطیسی شناخته شد. نیروی ضعیف هم مسئول واپاشی بتازای هسته‌ای است. نیروی بعدی به نام نیروی قوی، مسئول نگه‌داشتن اعضای هسته‌ی اتم‌ها می‌باشد و امروزه با نام نیروی رنگ شناخته می‌شود.

دانشمندان معتقدند در آغاز مهبانگ همه‌ی این چهار نیرو در واقع یکی بودند و پس از گذشت زمان و پایین آمدن دما، اول گرانش و پس از آن نیروی قوی از بقیه جدا شدند، در مرحله‌ی بعد نیروهای الکترومغناطیس و ضعیف هم به نیروهای مجزایی تبدیل شدند. اما برای درک اتفاقاتی که در لحظه‌ی آغاز وجود داشت نیاز بود دانشمندان بتوانند دوباره این چهار نیرو را با هم متحد کنند تا یک نیروی واحدی داشته باشند.

در مسیر اتحاد نیروها اولین گام توسط ماکسول با اتحاد نیروهای الکتریکی و مغناطیسی و مرتب کردن معادله‌های مربوطه به نام نیروی الکترومغناطیس برداشته شد. در این نیرو فوتون‌ها نقش اساسی را بازی می‌کنند. این نیرو به خوبی با نسبیت خاص سازگاری دارد. در مرحله‌ی بعد و در سال ۱۹۶۰ واینبرگ، عبدالسلام و گلاشو با اتحاد نیروی الکترومغناطیس و ضعیف نظریه الکتروضعیف را مطرح کردند.

در این نظریه برهم‌کنش‌های الکترومغناطیس و ضعیف به صورت جنبه‌های مختلف یک نیروی بنیادی (نیروی الکتروضعیف) در نظر گرفته شده است.

این نظریه وجود ذرات  $Z^0$  و  $W^\pm$  با جرم‌های تقریبی  $M_W = 82 \pm 2 \frac{Mev}{c^2}$  و  $M_Z = 92 \pm 2 \frac{Mev}{c^2}$  را

به‌عنوان ذرات واسطه در نیروی ضعیف پیش‌بینی کرد. چهارمین ذره‌ی واسطه فوتون می‌باشد که جرمی ندارد و حامل‌کننده‌ی نیروی الکترومغناطیس است.

در راستای وحدت نیروی الکتروضعیف و نیروی قوی هسته‌ای که به‌صورت کوانتومی وجود دارد و به  $QCD$ <sup>۱</sup> (کرومودینامیک کوانتومی) معروف است، نظریه‌ای به‌نام مدل استاندارد<sup>۲</sup> فیزیک ذرات به‌وجود می‌آید.

در این نظریه تعداد ذرات حامل نیرو ۱۲ تا است: ۸ گلئون که مربوط به نیروی قوی هستند.  $Z^0$  و  $W^\pm$  که مربوط به نیروی ضعیف‌اند و فوتون که مربوط به نیروی الکترومغناطیسی است. این حامل‌کننده‌ها بوزون هستند. در این نظریه هم‌چنین ذرات مادی زیادی که ما آن‌ها را فرمیون می‌شناسیم وجود دارند. ذرات مادی دو نوع اند: شامل لپتون‌ها و کوارک‌ها که در ادامه آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

لپتون‌ها شامل  $e^-$  و  $\mu^-$  و  $\tau^-$  و نوترینوهای وابسته به آن‌ها یعنی  $\nu_e$  و  $\nu_\mu$  و  $\nu_\tau$  هستند. پاد همه‌ی این ذرات هم وجود دارد که جمع نهایی برابر با ۱۲ لپتون می‌باشد. کوارک‌ها که جزء نیروی قوی هستند می‌توانند در سه رنگ آبی قرمز و سبز باشند. ۶ کوارک بالا ( $u$ ) پایین ( $d$ ) سر ( $t$ ) ته ( $b$ ) شگفت ( $s$ ) و افسون ( $c$ ) داریم. از آن‌جایی که می‌توان به هر کدام از این ۶ طعم سه رنگ نسبت داد، بنابراین تعداد کوارک‌ها ۱۸ می‌باشد. البته با در نظر گرفتن پاد آن‌ها ۳۶ کوارک داریم.

تا این‌جا با جمع این ذرات به ۶۰ ذره رسیدیم اگر بوزون هیگز (که در سال ۲۰۱۲ در سرن کشف شد و جرمی معادل  $125 \frac{Mev}{c^2}$  دارد) را هم که مسئول جرم‌دار کردن ذرات است به این نظریه بیافزاییم به ۶۱ ذره می‌رسیم [۱].

<sup>۱</sup>Quantum Chromo Dynamics  
<sup>۲</sup>Standard model

## ۱-۲ نظریه‌ی ریسمان و انواع آن

مدل استاندارد به دلیل تعداد زیاد ذرات نظریه‌ی بسیار کاملی است، اما کمبودهایی در این نظریه هست که مهمترین آن‌ها این است که شامل گرانش نمی‌شود. اثر گرانش در سطح میکروسکوپی ناچیز است اما در مطالعه‌ی کیهان‌شناسی بسیار مهم می‌باشد. یک مشکل در ارتباط دادن گرانش به مدل استاندارد این نکته است که مدل استاندارد نظریه‌ای کوانتومی است در حالی که نسبیت عام، که نظریه‌ای مربوط به گرانش است، نظریه‌ای کلاسیکی است. از آنجایی که کوانتوم به موفقیت‌هایی دست یافته است، پس برای داشتن نظریه‌ای متحد باید گرانش کوانتومی داشته باشیم، در زمان مهبانگ نیز که ابعاد بسیار ریز و گرانش قوی است، این مسأله بسیار مهم است.

مشکل دیگر مدل استاندارد وجود  $20$  پارامتر است که باید به صورت دستی وارد نظریه شود شاید ساده‌ترین مثال پارامتر بی‌بعد نسبت جرم مئون به جرم الکترون است. این نسبت  $207$  است و باید به صورت دستی وارد نظریه شود. پس دیگر نمی‌توان یک مدل یکتا داشت چون به‌ازای پارامترهای مختلف فیزیک متفاوتی به دست می‌آید. نظریه ریسمان<sup>۳</sup> نامزد خوبی برای متحد کردن همه‌ی نیروهای طبیعت است. پایه اصلی نظریه مربوط به نیروی قوی هسته‌ای است. در آزمایش مربوط به هادرون‌ها رابطه میان جرم و اسپین به صورت  $E^2 = \frac{j}{\hbar\alpha}$  است.

برای یک ذره بی‌بعد نمی‌توان چنین رابطه‌ای را به دست آورد اما این رابطه برای ریسمان چرخان با کشش ثابت برقرار است و این ایده را پدید می‌آورد که می‌توان نیروی قوی هسته‌ای را با استفاده از نظریه‌ی ریسمان توضیح داد. در این نظریه همه‌ی نیروها متحد شده‌اند. این نظریه یک نظریه‌ی کوانتومی است. دلیل مناسب بودن نظریه‌ی ریسمان برای اتحاد نیروها این است که در این نظریه هر ذره به‌عنوان مد نوسانی خاص از یک ریسمان بنیادی است.

---

<sup>۳</sup>String Theory

ریسمان‌ها به صورت باز و بسته وجود دارند. ریسمان‌های باز دو سر آزاد دارند و این سرها بر روی موجودات خاصی به نام شامه<sup>۴</sup> زندگی می‌کنند. ریسمان‌های بسته سر آزاد ندارند و مقید نیستند و آزادانه حرکت می‌کنند. هر ذره در این نظریه توسط یک تراز ارتعاشی ریسمان باز و بسته در نظر گرفته می‌شود.

مدهای نوسانی از یک ریسمان اصلی می‌توانند به صورت ذرات مختلفی در مدل استاندارد که می‌شناسیم شناسایی شوند. یکی از این حالت‌های نوسانی ریسمان گراویتون است، از آن جایی که فقط یک نوع ریسمان وجود دارد، همه‌ی ذرات از ارتعاشات ریسمان به وجود می‌آیند.

نظریه‌ی ریسمان یک پارامتر با بعد دارد که همان طول ریسمان  $l_s$  است.

از آن جایی که نظریه‌ی ریسمان نظریه‌ی گرانش کوانتومی می‌باشد، پس متوسط اندازه‌ی ریسمان باید

چیزی نزدیک به مقیاس طول گرانش کوانتوم باشد که از رابطه‌ی  $L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$  به دست می‌آید و در

حدود  $10^{-33} \text{ cm}$  است. این فاصله از محدوده‌ی  $10^{-16} \text{ cm}$ ، که تقریباً کوچک‌ترین فاصله‌ای است که

برای ذرات شتابدار کشف شده است، خیلی کوچک‌تر است.

به طور کلی دو نوع نظریه‌ی ریسمان وجود دارد که توضیح می‌دهیم:

الف-ریسمان بوزونی

ب-نظریه‌ی ابرریسمان

ریسمان بوزونی: این نظریه در ۲۶ بعد کار می‌کند که عدد ۲۶ از روی ضوابط و نظریه‌ی گروه‌ها برای

حفظ تقارن لورنتس به دست می‌آید. همه‌ی مدهای نوسانی آن بوزون‌ها را معرفی می‌کند. در طیف

ذرات آن تاکیون وجود دارد که ذره‌ای است که با سرعتی بیش‌تر از سرعت نور حرکت می‌کند و جرم

---

<sup>۴</sup>brane

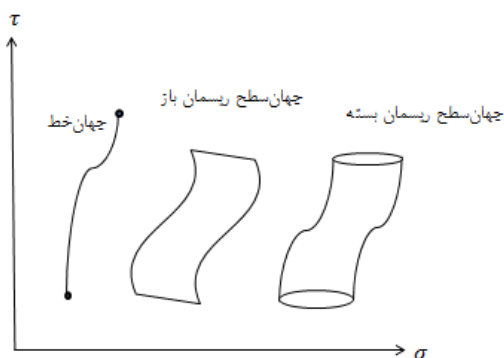
موهومی دارد. بنابراین نمی‌تواند نظریه‌ایی از طبیعت باشد چون در طبیعت فرمیون‌ها هم وجود دارند، بنابراین نظریه‌ی ریسمان بوزونی نمی‌تواند توصیف‌گر ذراتی مانند الکترون باشد.

نظریه‌ی ابرریسمان: نوع دوم نظریه‌ی ابر ریسمان است که در آن ابرتقارن<sup>۵</sup> نقش اساسی را دارد. این نظریه در ۱۰ بعد معتبر است.

در همه‌ی نظریه‌های ریسمان، گرانش به‌عنوان مد یک ریسمان بسته ظاهر می‌شود. اسپین گراویتون به‌عنوان ذره‌ی حمل‌کننده‌ی نیروی گرانش ۲ است. درک ۱۰ بعد برای ما که بیش‌تر از ۴ بعد را در اطراف خودمان احساس نمی‌کنیم کمی سخت است. این ابعاد اضافی کجا قرار دارند؟ ممکن است این ابعاد اضافی کوچک و فشرده شده باشند و به همین دلیل در طبیعت اثر ناچیزی دارند. [۲۱]

### ۱-۳ جهان سطح ریسمان

مسیر یک ذره در فضا-زمان یک خط است که به آن جهان خط<sup>۶</sup> گفته می‌شود. مسیر حرکت یک ریسمان در فضا-زمان یک رویه است. به این رویه دو بعدی که ریسمان در فضا-زمان جارو می‌کند جهان سطح<sup>۷</sup> می‌گویند. در شکل (۱.۱) این رفتارها نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۱ جهان خط و جهان سطح ریسمان‌های باز و بسته

<sup>۵</sup> Super Symmetry  
<sup>۶</sup> world line  
<sup>۷</sup> world sheet



چون ریسمان‌ها به دو شکل باز و بسته می‌باشند، بنابراین جهان‌سطح ریسمان باز در فضا-زمان به شکل یک نوار است و جهان‌سطح ریسمان بسته در فضا-زمان به شکل لوله است. اگر این اشکال با محور زمان حرکت کنند، می‌توان مطابق شکل (۱.۱) وضعیت رویه‌ها را نمایان کرد. صفحات جهان‌سطح در فضا-زمانی قرار دارند که به آن فضای هدف<sup>۸</sup> گفته می‌شود. ریسمان یک بعدی است اما به علت دو بعدی بودن جهان‌سطح برای پارامتربندی کردن آن به دو پارامتر به نام‌های  $\xi^1$  و  $\xi^2$  احتیاج داریم.

لازم است که جهان‌سطح را با یک پارامتر زمانی و یک پارامتر فضایی توصیف کنیم. پارامتر زمانی آن ویژه زمان  $\tau$  و دیگری باید با طول ریسمان مرتبط باشد که با  $\sigma$  معرفی می‌شود [۲، ۱] بنابراین:

$$\xi^1 = \tau \text{ و } \xi^2 = \sigma$$

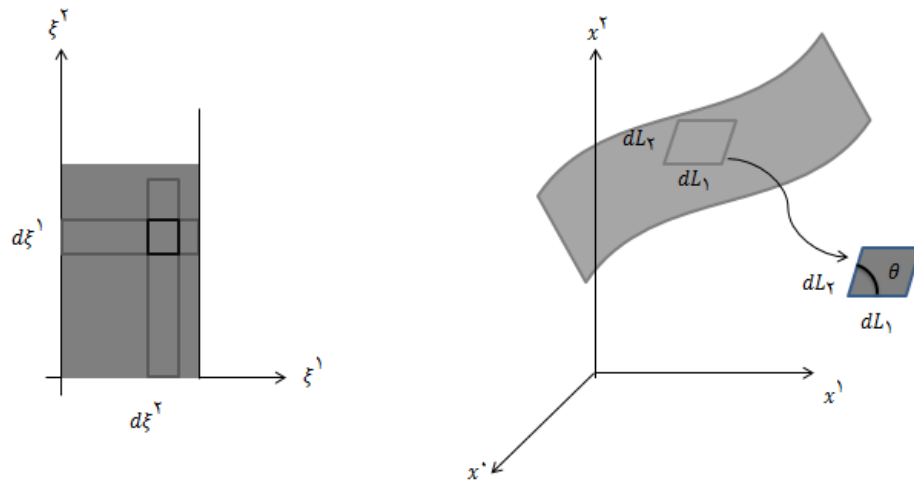
#### ۴-۱ معرفی کنش نامبو-گوتو<sup>۹</sup>

فرض می‌کنیم رویه‌ای که ریسمان در فضا-زمان طی کرده است به شکل (۲.۱) باشد. نشان می‌دهیم که کنش ریسمان نسبیتی با مساحت این رویه داده می‌شود. برای معرفی سطح کوچکی از فضا نیاز به محاسبه مساحت مستطیلی با پارامترهای  $d\xi^1$  و  $d\xi^2$  داریم. یک سمت متوازی‌الاضلاعی با مساحت  $dA$  را  $dL_1$  و یک سمت دیگر را  $dL_2$  می‌نامیم.

---

<sup>۸</sup>Target space

<sup>۹</sup>Nambo Goto action



شکل ۲.۱ پارامترهای جهان سطح بر حسب  $(\xi^1, \xi^2)$

داریم:

$$dL_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi^1} d\xi^1 \quad (1.1)$$

$$dL_2 = \frac{\partial x}{\partial \xi^2} d\xi^2 \quad (2.1)$$

برای محاسبه مساحت داریم:

$$\begin{aligned} dA &= |dL_1| |dL_2| \sin \theta = |dL_1| |dL_2| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|dL_1|^2 |dL_2|^2 - |dL_1|^2 |dL_2|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(dL_1 \cdot dL_1)(dL_2 \cdot dL_2) - (dL_1 \cdot dL_2)^2} \\ &= d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right)^2} \\ A &= \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (3.1) \end{aligned}$$

سطح فضای هدف وقتی که تابع  $x(\xi^1, \xi^2)$  بر روی آن نگاشت می‌شود را بررسی می‌کنیم، یک بردار مماس  $dx$  را روی سطح می‌گیریم.  $ds^2$  که معنی طول می‌دهد را برطبق رابطه‌ی زیر می‌نویسیم:

$$ds^2 = dx \cdot dx \quad (4.1)$$

که داریم:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (5.1)$$

پس می‌توان نوشت:

$$ds^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial x}{\partial \xi^i} \frac{\partial x}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \rightarrow (i, j = 1, 2)$$

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \rightarrow g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi^i} \frac{\partial x}{\partial \xi^j} \quad (6.1)$$

که  $g_{ij}$  متریک القایی<sup>۱</sup> از  $ds$  است. چون دو پارامتر داریم، بنابراین:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \frac{\partial x}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \rightarrow g = \det g_{ij} \quad (7.1)$$

به معادله‌ی (۳.۱) برمی‌گردیم:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} \quad (8.1)$$

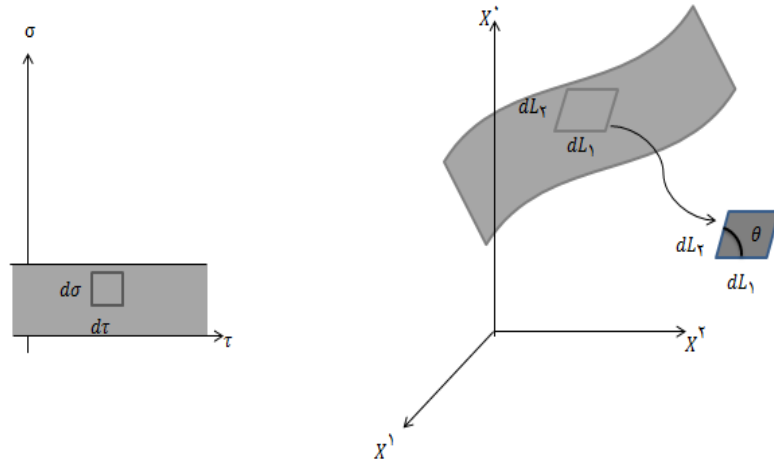
حالا مطابق شکل (۳.۱) به جای پارامترهای  $\xi^1$  و  $\xi^2$  عبارت‌های  $\tau$  و  $\sigma$  را قرار می‌دهیم که  $\sigma$  و  $\tau$  پارامترهایی هستند که برای معرفی سطح دو بعدی نیاز داریم. بنابراین متغیرهای جهان‌سطحی که ریسمان را جارو می‌کنند  $(\tau, \sigma)$  هستند. معمولاً مختصات فضا-زمان با  $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d)$  داده می‌شود. با نگاشت تابع  $x^\mu(\tau, \sigma)$  که نواحی  $(\tau, \sigma)$  را در فضا-زمان می‌دهد، شروع می‌کنیم و با  $X^M(\tau, \sigma)$  ادامه می‌دهیم. که  $X^M(\tau, \sigma)$  فقط تغییر نماد می‌باشد نقطه‌ی  $(\tau, \sigma)$  در مختصات فضا-زمان نگاشت می‌شود یعنی مختصه‌های ریسمان به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

<sup>۱</sup> Induce metric

$$X^M(\tau, \sigma)$$

زمان و موقعیت مکانی مختصه‌های ریسمان در یک فضا-زمان  $d + 1$  بعدی عبارتند از:

$$X^M(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)) \quad (9.1)$$



شکل ۳.۱ پارامترهای جهان‌سطح بر حسب  $(\tau, \sigma)$

حالا مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$dL_\nu^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dL_\nu^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} A &= \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^\nu - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)} \\ &= \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^\nu - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^\nu \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^\nu} \end{aligned} \quad (11.1)$$

و عبارتهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad \dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad (12.1)$$

به لحاظ ابعادی اگر سطح را در  $\frac{T_0}{c}$  ضرب کنیم که  $T_0$  کشش ریسمان است، به رابطه‌ی مورد نظر می

رسیم:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot \dot{X})^\nu - (\dot{X})^\nu (\dot{X})^\nu} \quad (13.1)$$

که  $S$  کنش نامبو-گوتو نامیده می‌شود.

داریم:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \end{aligned} \quad (14.1)$$

که  $\eta_{\mu\nu}$  متریک مینکوفسکی فضای هدف است.

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  را برابر ۱ و ۲ قرار دهیم و داشته باشیم  $\xi^1 = \tau$  و  $\xi^2 = \sigma$ ، باید متریک  $\gamma_{\alpha\beta}$  را برای جهان‌سطح تعریف کنیم:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \quad (15.1)$$

که  $\gamma_{\alpha\beta}$  همان  $g_{ij}$  در قبل می‌باشد داریم:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X}\dot{X} \\ \dot{X}\dot{X} & (\dot{X})^2 \end{pmatrix} \quad (16.1)$$

به کمک این متریک کنش نامبو-گوتو را به صورت زیر بنویسیم [۱] که  $\gamma$  همان  $g$  در قبل می‌باشد:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \rightarrow \gamma = \det \gamma_{\alpha\beta} \quad (17.1)$$

## ۱-۵ هولوگرافی<sup>۱۱</sup>

این اصل اولین بار توسط ساسکیند مطرح و سپس توسط ویتن دنبال شد. طبق اصل هولوگرافی تعداد درجات آزادی برای توصیف گرانش کوانتومی درون یک حجم متناسب با سطح آن است به عبارتی با دانستن رفتار مجانبی یک نظریه در مرز یک فضا باید بتوان کل نظریه را در داخل آن فضا بازسازی

<sup>۱۱</sup>Holography

کرد. یعنی حجم یک فضا را می‌توان در مرزهای آن فضا همانند یک هولوگرام توصیف کرد. در شکل (۴.۱) مثالی از اصل هولوگرافی به تصویر در آمده است.



شکل ۴.۱ مثالی از اصل هولوگرافی

یکی از ایده‌های جالبی که از مطالعه گرانش کوانتومی و نظریه‌ی ریسمان برمی‌آید اصل هولوگرافی است. این اصل به معادل بودن دو نظریه در دو بعد متفاوت دلالت دارد. این اصل بیان می‌کند که تمام اطلاعات موجود در یک حجم را می‌توان توسط نظریه‌ای که بر روی سطح جسم مورد نظر تعریف می‌شود، به دست آورد. مثالی از اصل هولوگرافی حدس مالداسنا یا همان تناظر  $AdS/CFT$  می‌باشد. در کاری که در این پایان‌نامه انجام می‌شود از هولوگرافی کمک گرفته می‌شود و به جای مطالعه‌ی کوارک و پادکوارک می‌توان جهان سطحی که ریسمان متصل به کوارک و پادکوارک در فضای حجم طی کرده است، را مطالعه کرد. در اصل به جای مطالعه‌ی کوارک و پادکوارک شتابداری که در نظریه پیمانه‌ای روی مرز زندگی می‌کند، می‌توان جهان سطح وابسته به آن‌ها که توسط ریسمان مربوطه در حجم گرانشی ایجاد می‌شود را مطالعه کرد.

دوگانی یا تناظر  $AdS/CFT$  مربوط به نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی و گرانش است. از این تناظر به عنوان تناظر پیمانه‌ای گرانشی نام برده می‌شود و مربوط به نظریه‌ی میدان‌های همدیس و فضای پاددوسیته است .

حدس اولیه‌ی این تناظر توسط مالداسنا ارائه شد. این حدس بین نظریه‌ی ریسمان نوع  $II B$  روی  $AdS_5 \times S^5$  و نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز چهار بعدی  $N = 4$  هم‌ارزی ایجاد می‌کند. به عبارت دیگر تناظر  $AdS/CFT$  تناظری بین نظریه پیمان‌های و یک نظریه‌ی ریسمان است.

به کمک هم‌ارزی  $AdS/CFT$  می‌توان گفت که نظریه‌ی میدان همدیس در  $d + 1$  بعد باید یک دوگان گرانشی داشته باشد.

<sup>۱۲</sup> فضای به نام پاددوسیتیه است که مربوط به ریسمان‌های بسته و گرانش می‌باشد و  $CFT$  نظریه‌ی میدان همدیس است که در مرز فضا-زمان  $AdS$  زندگی می‌کند و مربوط به ریسمان‌های باز می‌باشد. همدیس هم یک نوع تبدیل است که شامل تبدیلات انتقال، دوران، لورنتس، تبدیل مقیاس و تبدیلات ویژه همدیس می‌باشد و به آن گروه تقارنی همدیس گفته می‌شود.

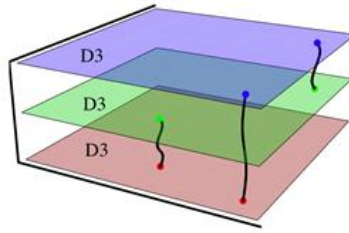
از نظر فیزیکی همدیس یعنی این که مقیاس انرژی نداریم، یعنی فیزیک مسأله در انرژی‌های کم و زیاد بدون تغییر است. گاهی این تناظر دوگان نیز نامیده می‌شود یعنی فیزیک یکسان توسط دو مجموعه‌ی متفاوت توصیف می‌شود، یعنی همان ریسمان‌های بسته و نظریه‌ی پیمان‌های. [۲ و ۳]

## ۱-۶ تشکیل فضا-زمان $AdS_5 \times S^5$ با استفاده از شامه‌ها

برای این که درک بهتری از فضا-زمان  $AdS_5 \times S^5$  داشته باشیم لازم است درباره‌ی این نوع فضا-زمان بیش تر بدانیم. ابتدا یک مجموعه از  $N$  عدد شامه‌های سه بعدی موازی را در فضا-زمان ده بعدی در نظر می‌گیریم. ریسمان‌های باز می‌توانند بین دو شامه متصل باشند. در این حالت برهم‌کنش شامه‌ها ضعیف می‌باشد.

---

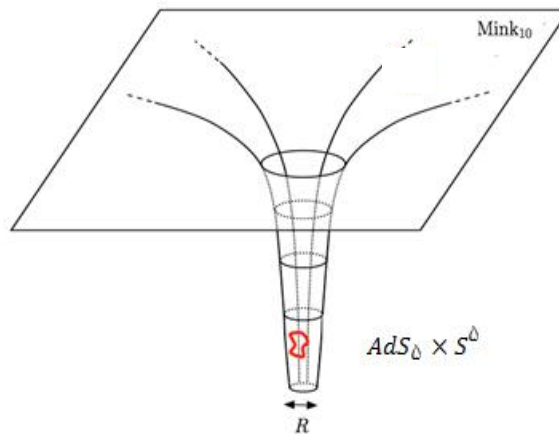
<sup>۱۲</sup> Anti-de Sitter



شکل ۵.۱. برهم‌کنش بین شامه‌ها

چنان‌که طول ریسمان به سمت صفر میل کند، آن‌گاه شامه‌ها روی هم واقع می‌شوند و جرم آن‌ها بسیار سنگین می‌شود هم‌چنین برهم‌کنش بین آن‌ها زیاد می‌شود و باعث خمیدگی فضا می‌شود و در اطراف خود فضای  $AdS$  را به وجود می‌آورد.

همان‌طور که در شکل (۶.۱) دیده می‌شود، فضا-زمان ده بعدی به شکل  $AdS_5 \times S^5$  می‌باشد که  $S^5$  کره‌های پنج بعدی فشرده هستند و پنج بعد دیگر آن در فضای غیر فشرده‌ی پاددوسیتیه‌ی  $AdS_5$  قرار دارد.



شکل ۶.۱. تصویر فضا-زمان ده بعدی

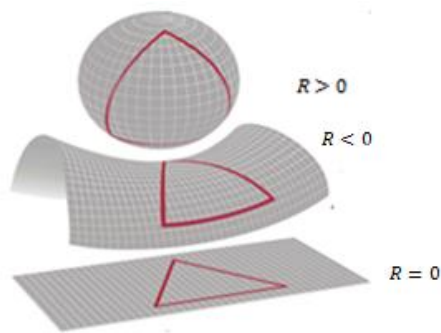


این فضای پنج بعدی دارای سه بعد مکانی، یک بعد زمانی و یک بعد هولوگرام یا شعاعی می‌باشد. جواب‌های متقارن معادله‌ی اینشتین با ثابت کیهان شناسی  $R$  که به صورت زیر می‌باشد. در شکل (۷.۱) انحنای فضا-زمان بر حسب  $R$  را نشان داده‌ایم:

اگر  $R$  منفی باشد، آنگاه فضا-زمان پاددوسیه‌ی  $(AdS_5)$  می‌باشد.

اگر  $R$  مثبت باشد، فضا-زمان دوسیه‌ی  $dS$  را خواهیم داشت.

اگر  $R$  صفر باشد، فضا-زمان مینکوفسکی است.



شکل ۷.۱ توصیف انحنای فضا-زمان بر حسب  $R$

بر اساس تناظر  $AdS/CFT$  نظریه‌ی مرز همان نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز است. نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز از یک نظریه‌ی کلی به نام نظریه‌ی پیمانهای  $SU(N_c)$  ناشی می‌شود که در آن  $N_c$  تعداد رنگ‌هاست. این نظریه یک پیمانهای همدیس در  $3 + 1$  بعد است.

با توجه به این که نظریه‌ی یانگ-میلز در مرز فضای  $AdS_5$  زندگی می‌کند، گاهی این نظریه را به عنوان نظریه‌ی مرز معرفی می‌کنند.

علاوه بر گفته‌های قبل نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز  $SYM$  شامل دو پارامتر بدون بعد است، یکی  $N$  که تعداد رنگ‌هاست و دیگری ثابت جفت‌شدگی یانگ-میلز  $(g_{YM})$  که قدرت برهم‌کنش بین ذرات را نشان می‌دهد. ثابت جفت‌شدگی توفت که مربوط به نظریه‌ی یانگ-میلز می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\lambda = g_{YM}^2 N \quad (18.1)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که تناظر  $AdS/CFT$  مثالی از یک دوگان جفت‌شدگی ضعیف-قوی می‌باشد. بنابراین می‌توان ارتباطی بین پارامترهای نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز و نظریه‌ی ریسمان به‌عنوان نظریه‌هایی با دو نوع جفت‌شدگی قوی و ضعیف را در نظر گرفت. بنابراین با استفاده از تناظر  $AdS/CFT$  پارامترهای نظریه باید به هم مربوط باشند. نظریه‌ی ریسمان شامل دو پارامتر بدون بعد است: شعاع کره‌ی پنج بعدی در واحد طول ریسمان  $\frac{R}{\sqrt{\alpha}}$  که  $R$  انحنا‌ی فضا-زمان  $AdS_5 \times S^5$  می‌باشد و ثابت جفت‌شدگی ریسمان  $g_s$  که شدت برهم‌کنش بین ریسمان‌ها را نشان می‌دهد. این دو نظریه هنگامی هم‌ارز می‌شوند که ارتباط بین پارامترهای دو طرف به‌صورت زیر باشد [۴, ۳]:

$$g_s = g_{YM}^2 \quad (19.1)$$

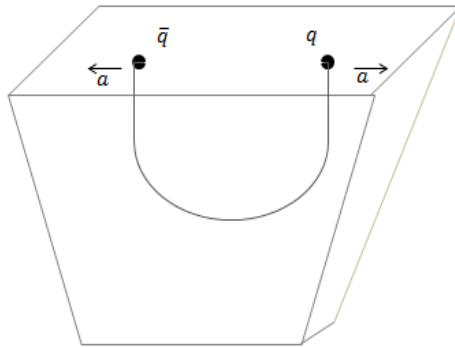
بنابراین داریم:

$$\lambda = g_{YM}^2 N = \frac{R^4}{\alpha'^2}, \quad \alpha' = l_s^2 \quad (20.1)$$

## ۷-۱ توصیفی از کار در حال انجام [۵]

یکی از کاربردهای تناظر  $AdS/CFT$  در ارایه توصیفی هندسی از نظریه میدان با ثابت جفت‌شدگی قوی است. به‌عنوان مثال می‌توان چنین نظریه‌ای را با مطالعه‌ی گرانش کلاسیکی توصیف کرد. به تازگی مطالعه حرکت کووارک سنگین در نظریه‌ی ابرتقارن  $N = 4$  مورد توجه قرار گرفته است. مسأله‌ی ما در سیستم غیرتعادلی بررسی می‌شود که سیستم‌های غیرتعادلی سیستم‌هایی هستند که با گذشت زمان می‌توانند در نقاط مختلف دماهای متفاوتی داشته باشند یعنی شاید دما در یک نقطه با دما در نقطه‌ی دیگر فرق کند.

در این پایان‌نامه سیستم کووارک-پادکووارک شتابدار را در مرز فضا-زمان مطالعه می‌کنیم مطابق شکل (۸.۱) مطالعه می‌کنیم و این نکته را در نظر می‌گیریم که دما صفر است.



شکل ۸.۱ کوارک-پادکوارک در مرز فضای **AdS** با شتابهایی در جهت‌های مخالف

در نظریه‌ی پیمان‌های می‌توانیم تصور کنیم مسیر کوارک-پادکوارک مشخص است و آن را بررسی کنیم. سؤال‌های مختلفی در این مورد مطرح می‌شود برای مثال چه مقدار توان لازم است تا کوارک را مجبور کند از جهان خط تبعیت کند و...

در دوگان گرانشی انتهای ریسمان باز کوارک است. برای سادگی کوارکی که در خلاء ابرتقارن یانگ-میلز قرار دارد و در حجم کلی با هندسه‌ی  $AdS$  ارتباط دارد را بررسی می‌کنیم.

منظور از محیط خلأ محیطی‌ست که مطابق با نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز  $N = 4$  است. در این محیط دما صفر می‌باشد. این محیط همدیس است زیرا مقیاس انرژی ندارد و فیزیک آن در انرژی‌های بالا و پایین بی‌تغییر است پس رفتارش شبیه به  $CFT$  است و می‌توان از روش  $AdS/CFT$  برای حل این‌گونه موارد استفاده نمود. از آنجایی که در محیط خلأ دما صفر است، طبق  $AdS/CFT$  در فضای حجم سیاه چاله‌ایی وجود ندارد. از دیدگاه کوانتومی خلأ استعداد تولید ذرات بدون رنگ یا مزون‌ها را دارد که از کوارک و پادکوارک تشکیل شده است.

کوارک در مرز  $AdS$  زندگی می‌کند، درحالی که ریسمان از حجم کلی آویزان است و ابر گلئونی کوارک و تابش آن هر دو در ریسمان کدگذاری شده‌اند.

تعیین هندسه‌ی کلاسیکی جهان‌سطح کوارک با استفاده از بهینه کردن یا همان محاسبه کنش ریسمان، که قبلاً توضیح داده شد، است. جهان‌سطح سطحی است که ریسمان در فضا-زمان جارو می‌کند و انتهای ریسمان در مرز همان کوارک و پادکووارک است یعنی در  $AdS$  سرتاسری جفت کوارک-پادکووارک در روی مرز  $AdS$  زندگی می‌کنند. از این جفت ریسمانی آویزان است که با حرکت کوارک و پادکووارک روی مرز  $AdS$  و ایجاد جهان‌خط ریسمان وابسته به آن جهان‌سطحی را در فضای میانی ایجاد می‌کند. نکته‌ی مهم این است که یک ریسمان باز دو انتها دارد که در  $AdS$  سرتاسری هر دو انتها در روی مرز قرار دارد. در انتهای دوم ریسمان پادکووارک قرار دارد.

بنابراین تصویر کامل جهان‌سطح با در نظر گرفتن کوارک و پادکووارک کامل خواهد بود و باید شرایط دریکله را بر دو انتها اعمال کرد به این ترتیب می‌توان مسأله را دقیق حل کرد. زیرا در  $AdS$  سرتاسری هم کوارک و هم پادکووارک را با هم داریم و نمی‌توان آن‌ها را به‌طور مجزا در نظر بگیریم اما ممکن است ما فقط به یک کوارک و میدان گلئونی آن بدون وجود پادکووارک توجه کنیم. درست مثل حرکت بار الکتریکی در حضور میدان الکترودینامیکی.

می‌پذیریم که رفتار کوارک در جهان‌سطح در اثر گذر زمان تنها در مخروط نوری است یعنی در داخل مخروط نوری قرار دارد. می‌دانیم حرکت‌هایی که در داخل مخروط نوری‌اند را زمان‌گونه می‌گویند.

هر برانگیختگی توسط کوارک دقیقاً معادل پاسخی است که در سوی دیگر توسط پادکووارک ایجاد شده است. برانگیختگی مورد نظر می‌تواند شامل حرکت ساده، حرکت شتابدار یا هر واکنش دیگری باشد که چون در سوی دیگر ریسمان پادکووارک قرار دارد این واکنش به پادکووارک منتقل می‌شود.

در نظریه میدان چنین شرایط مرزی با ساختارهای گلئونی [۶] شرایط مرزی برون‌سو<sup>۱۳</sup> شناخته می‌شوند. در نظریه میدان هرچشمه تابش با یک بار شتابدار معادل است شرایط کوارک با میدان خالص برون‌سو ارتباط دارد پس ما می‌توانیم این شرایط را به‌عنوان شرایط مرزی برون‌سو بدانیم. این

---

<sup>۱۳</sup> out going to condition

شرایط مرزی جهان سطح ریسمان را برایمان تعیین می‌کند. به‌طور فیزیکی یعنی این‌که اگر حرکت انتهای ریسمان شتابدار باشد سایر قسمت‌های ریسمان هم به‌طور علی در فضای حجم متأثر از این شتاب خواهند بود.

این مسأله به‌طور دقیق توسط میخائیلوف بررسی شده است [۷]. شرایط مرزی میخائیلوف برای حل دقیق جهان سطح ریسمان در مختصات پوانکاره<sup>۱۴</sup>  $AdS$  در نظر گرفته شده است و در آن مسیر کوآرک از شرایط فضا-زمان مینکوفسکی که همان  $x, y, z, t$  است تبعیت می‌کند.

از آن‌جایی که در  $AdS$  سرتاسری سیستم کوآرک-پادکوآرک با هم وجود دارند، قانون گاؤس در تحلیل مسأله‌ها خیلی مفید خواهد بود. یعنی نمی‌توان کوآرک تنها را در نظر گرفت و باید پادکوآرک هم باشد. اما اگر مختصات پوانکاره را در نظر بگیریم چون فقط بخشی از مرز  $AdS$  سرتاسری را می‌بینیم و بررسی می‌کنیم می‌توان فقط به کوآرک بدون حضور پادکوآرک توجه کرد. البته در این مختصات دیگر قانون گاؤس برقرار نخواهد بود. می‌دانیم مختصات پوانکاره یعنی بخشی از  $AdS$  سرتاسری وقتی که شعاع فضا به بی‌نهایت رفته باشد. در این مختصات دیگر قانون گاؤس برقرار نخواهد بود. مثال مهم این مسأله در بررسی کوآرک شتابدار نمایان می‌شود. در این نوع حرکت‌ها به نظر می‌رسد که نتوان یک کوآرک تنها را بررسی کرد زیرا ریسمان در حجم یک انعکاس پادکوآرک را خلق می‌کند. ظاهراً این برطبق نظریه‌ی ریسمان مورد نیاز است. راه حل‌هایی که در این مورد ارایه شده است را در [۸] می‌بینیم.

---

<sup>۱۴</sup>Poincare



## فصل ۲

### بررسی فضا-زمان *AdS*

## ۱-۲ بررسی ویژگی‌های فضا-زمان $AdS$

یکی از اهداف این پایان‌نامه مطالعه‌ی فضا-زمان  $AdS$  است. با توصیفی از خواص این فضا و مقایسه با فضاهای دیگر سعی شده است که تصویری کامل‌تر از این فضا ارائه شود. در این فصل (به‌جز بخش‌هایی که مرجع معین دارند) از مرجع [۹] استفاده شده است.

انحنای فضا-زمان  $AdS$  یا پاددوسیه، ثابت است.

برای شروع ابتدا با یک مثال ساده از کره‌ی  $S^2$  شروع می‌کنیم. فضای سه بعدی اقلیدسی را که معمولاً آن را به راحتی به کار می‌گیریم، با متریک زیر نشان داده می‌شود:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (1.2)$$

کره‌ی مورد نظر توسط سطحی که قید زیر بر آن اعمال شده است تعریف می‌شود:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 \quad (2.2)$$

مختصات کروی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$X = L \sin \theta \cos \varphi$$

$$Y = L \sin \theta \sin \varphi$$

$$Z = L \cos \theta \quad (3.2)$$

با این مختصات، متریک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dS^2 = L^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.2)$$

برای اثبات این که می‌توان از دیفرانسیل معادلات (۳.۲) به متریک (۴.۲) رسید، به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$dX = L \cos \theta d\theta \cos \varphi - L \sin \theta \sin \varphi d\varphi$$

$$dY = L \cos \theta d\theta \sin \varphi + L \sin \theta \cos \varphi d\varphi$$



$$dZ = -L \sin \theta d\theta$$

سپس دیفرانسیل‌ها را به توان دو می‌رسانیم:

$$dX^2 = L^2 \cos^2 \theta d\theta^2 \cos^2 \varphi + L^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2$$

$$-2L^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi$$

$$dY^2 = L^2 \cos^2 \theta d\theta^2 \sin^2 \varphi + L^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

$$+2L^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta$$

$$dZ^2 = L^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

حاصل را در عبارت (۱.۲) قرار می‌دهیم:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = L^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2$$

$$+L^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2 + L^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2$$

$$+L^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2 + L^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

$$= L^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$+L^2 \cos^2 \theta d\theta^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + L^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

$$= L^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + L^2 d\theta^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= L^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + L^2 d\theta^2$$

$$= L^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

و متریک (۴.۲) به دست می‌آید.

گروه تقارن کره‌ی  $S^2$ ،  $SO(3)$  است.  $SO(3)$  گروه دوران است و  $S$  یعنی دترمینان ماتریس دوران یک

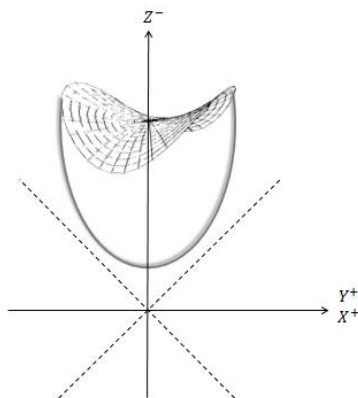
است.  $O$  یعنی تعامد و ۳ یعنی سه جهت مختصاتی  $X, Y, Z$  داریم. با تبدیلات  $SO(3)$  هر نقطه از  $S^2$

می‌تواند به بقیه نقاط نگاشت شود.

کره ثابت انحنای مثبت دارد و با استفاده از انحنای فضای مورد نظر مطالعه می‌شود. برای کره  $S^2$  تانسور انحنای ریچی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$R = \frac{2}{L^2} \quad (5.2)$$

که در این پایان‌نامه به روش محاسبه این کمیت پرداختیم. فضاهایی با انحنای منفی نیز وجود دارند که آن‌ها را به‌عنوان فضای هذلولوی  $H^2$  می‌شناسیم. در شکل (۱.۲) تصویری از این فضا را می‌بینیم.



شکل ۱.۲ فضای  $H^2$

تصور فضایی با ثابت انحنای منفی بسیار سخت‌تر است. فضای هذلولوی از کره متفاوت‌تر است و نمی‌تواند در فضای سه بعدی اقلیدسی باشد اما می‌تواند در فضای سه بعدی مینکوفسکی قرار گیرد.

برای مقایسه فضای هذلولوی را بیش‌تر توضیح می‌دهیم. متریک این فضا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$dS^2 = -dz^2 + dX^2 + dY^2 \quad (6.2)$$

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2 \quad (7.2)$$

همان‌طور که پیداست دیگر گروه دورانی گروه تقارن  $SO(3)$  نیست بلکه گروه فضای هذلولوی با گروه  $SO(1,2)$  داده می‌شود. که یک نوع گروه دوران است در این فضا هر نقطه از سطح می‌تواند با تبدیلات لورنتس  $SO(1,2)$  به بقیه نقاط نگاشت شود.

برای حل معادله (۷.۲) می‌توانیم دستگاه مختصاتی که اندکی از کره متفاوت تر باشد را انتخاب کنیم. با در نظر گرفتن شرط زیر:

$$\begin{aligned} X &= L \sinh \rho \cos \varphi \\ Y &= L \sinh \rho \sin \varphi \\ Z &= L \cosh \rho \end{aligned} \quad (10.2)$$

متریک فضای هذلولوی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$dS^2 = L^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2) \quad (11.2)$$

مجدداً برای اثبات متریک (۱۱.۲) از مشتق معادلات (۱۰.۲) شروع می‌کنیم و هر کدام را به توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} dX &= L \cosh \rho d\rho \cos \varphi - L \sinh \rho \sin \varphi d\varphi \\ dX^2 &= L^2 \cosh^2 \rho d\rho^2 \cos^2 \varphi + L^2 \sinh^2 \rho \sin^2 \varphi d\varphi^2 \\ &\quad - 2L^2 \sinh \rho \cosh \rho \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi \\ dY &= L \cosh \rho d\rho \sin \varphi + L \sinh \rho \cos \varphi d\varphi \\ dY^2 &= L^2 \cosh^2 \rho d\rho^2 \sin^2 \varphi + L^2 \sinh^2 \rho \cos^2 \varphi d\varphi^2 \\ &\quad + 2L^2 \cosh \rho \sinh \rho \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi \\ dZ &= L \sinh \rho d\rho \\ dZ^2 &= L^2 \sinh^2 \rho d\rho^2 \end{aligned}$$

حاصل عبارت‌ها را در معادله (۶.۲) قرار می‌دهیم. داریم:

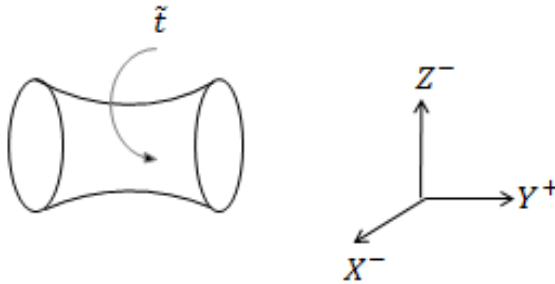
$$\begin{aligned} dS^2 &= - \left( L^2 \sinh^2 \rho d\rho^2 \right) + L^2 \cosh^2 \rho \cos^2 \varphi d\rho^2 \\ &\quad + L^2 \sinh^2 \rho \sin^2 \varphi d\varphi^2 + L^2 \cosh^2 \rho \sin^2 \varphi d\rho^2 \\ &\quad + L^2 \sinh^2 \rho \cos^2 \varphi d\varphi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma\right) + L^\gamma \cosh^\gamma \rho \cos^\gamma \varphi d\rho^\gamma \\
&+ L^\gamma \cosh^\gamma \rho \sin^\gamma \varphi d\rho^\gamma + L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\varphi^\gamma \left(\sin^\gamma \varphi + \cos^\gamma \varphi\right) \\
&= -\left(L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma\right) + L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\rho^\gamma \left(\cos^\gamma \varphi + \sin^\gamma \varphi\right) \\
&\quad + L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\varphi^\gamma \\
&= L^\gamma d\rho^\gamma \left(\cosh^\gamma \rho - \sinh^\gamma \rho\right) + L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\varphi^\gamma \\
&= L^\gamma \left(d\rho^\gamma + \sinh^\gamma \rho d\varphi^\gamma\right)
\end{aligned}$$

به این ترتیب متریک (۱۱.۲) اثبات می‌شود. این متریک توضیح دهنده‌ی فضای هذلولی می‌باشد.

## ۲-۱-۱ بررسی فضا-زمان $AdS_\gamma$ و $dS_\gamma$ به‌عنوان دو مثال

در این بخش فضا-زمان  $AdS_\gamma$  را بررسی می‌کنیم.



شکل ۲.۲ فضا-زمان  $AdS_\gamma$

همان‌طور که از شکل (۲.۲) مشخص است، فضا-زمان  $AdS_\gamma$  را می‌توان در یک فضا-زمان با دو جهت

زمان‌گونه قرار داد:

$$dS^\gamma = -dZ^\gamma - dX^\gamma + dY^\gamma \quad (۱۲.۲)$$

$$-Z^\gamma - X^\gamma + Y^\gamma = -L^\gamma \quad (۱۳.۲)$$

در این رابطه پارامتر  $L$  شعاع فضا نامیده می‌شود. فضا-زمان  $AdS_p$ ، گروه  $SO(2, 1)$  دارد. همانند

فضاهای  $S^2$  و  $H^2$  یک سیستم مختصاتی انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Z &= L \cosh \rho \cos \tilde{t} \\ X &= L \cosh \rho \sin \tilde{t} \\ Y &= L \sinh \rho \end{aligned} \quad (14.2)$$

سپس متریک فضا-زمان  $AdS_p$  داده می‌شود:

$$dS^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2) \quad (15.2)$$

سیستم مختصاتی  $(\tilde{t}, \rho)$  که مختصات کلی نامیده می‌شود را انتخاب می‌کنیم.

در معادله‌های (14.2) مختصات  $\tilde{t}$  دوره تناوب  $2\pi$  دارد. بنابراین جهت زمان تناوبی است. و در تغییرات زمانی  $-\infty < \tilde{t} < \infty$  قرار دارد.

می‌خواهیم ثابت کنیم که می‌توان از معادله‌های (14.2) به متریک (15.2) رسید. بنابراین از معادله‌های (14.2) مشتق می‌گیریم و مشتق‌ها را به توان دو می‌رسانیم:

$$dZ = L \sinh \rho d\rho \cos \tilde{t} - L \cosh \rho \sin \tilde{t} d\tilde{t}$$

$$dZ^2 = L^2 \sinh^2 \rho d\rho^2 \cos^2 \tilde{t} + L^2 \cosh^2 \rho \sin^2 \tilde{t} d\tilde{t}^2$$

$$-2L^2 \sinh \rho \cosh \rho \sin \tilde{t} \cos \tilde{t} d\rho d\tilde{t}$$

$$dX = L \sinh \rho d\rho \sin \tilde{t} + L \cosh \rho \cos \tilde{t} d\tilde{t}$$

$$dX^2 = L^2 \sinh^2 \rho d\rho^2 \sin^2 \tilde{t} + L^2 \cosh^2 \rho \cos^2 \tilde{t} d\tilde{t}^2$$

$$+2L^2 \sinh \rho \cosh \rho \sin \tilde{t} \cos \tilde{t} d\rho d\tilde{t}$$

$$dY = L \cosh \rho d\rho$$

$$dY^2 = L^2 \cosh^2 \rho d\rho^2$$

سپس عبارت‌ها را در متریک (12.2) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
& -dZ^\gamma - dX^\gamma + dY^\gamma = -L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma \cos^\gamma \tilde{t} \\
& -L^\gamma \cosh^\gamma \rho \sin^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma + \gamma L^\gamma \sinh \rho \cosh \rho \sin \tilde{t} \cos \tilde{t} d\rho d\tilde{t} \\
& -L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma \sin^\gamma \tilde{t} - L^\gamma \cosh^\gamma \rho \cos^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma \\
& -\gamma L^\gamma \sinh \rho \cosh \rho \sin \tilde{t} \cos \tilde{t} d\rho d\tilde{t} + L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\rho^\gamma \\
& = -L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma \cos^\gamma \tilde{t} - L^\gamma \cosh^\gamma \rho \sin^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma \\
& -L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma \sin^\gamma \tilde{t} - L^\gamma \cosh^\gamma \rho \cos^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma \\
& \quad + L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\rho^\gamma \\
& = -L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\tilde{t}^\gamma (\sin^\gamma \tilde{t} + \cos^\gamma \tilde{t}) - L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma \cos^\gamma \tilde{t} \\
& \quad -L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma \sin^\gamma \tilde{t} + L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\rho^\gamma \\
& = -L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\tilde{t}^\gamma - L^\gamma \sinh^\gamma \rho d\rho^\gamma (\cos^\gamma \tilde{t} + \sin^\gamma \tilde{t}) \\
& \quad + L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\rho^\gamma \\
& = -L^\gamma \cosh^\gamma \rho d\tilde{t}^\gamma + L^\gamma d\rho^\gamma (\cosh^\gamma \rho - \sinh^\gamma \rho) \\
& = L^\gamma (d\rho^\gamma - \cosh^\gamma \rho d\tilde{t}^\gamma)
\end{aligned}$$

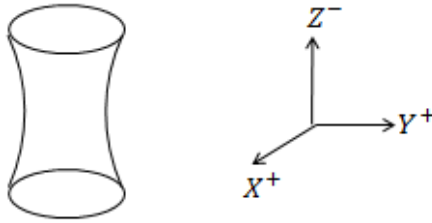
و به این ترتیب متریک (۱۵.۲) اثبات می‌شود که این متریک برای توضیح فضا-زمان  $AdS_\gamma$  مناسب می‌باشد.

در ادامه به معرفی فضا-زمان  $dS_\gamma$  می‌پردازیم. فضا-زمان دو بعدی دوسپتیه که با  $dS_\gamma$  نمایش داده می‌شود همان‌طور که در شکل (۳.۲) دیده می‌شود با روابط زیر بهتر قابل درک است:

$$dS^\gamma = -dZ^\gamma + dX^\gamma + dY^\gamma \quad (۱۶.۲)$$

$$-Z^\gamma + X^\gamma + Y^\gamma = L^\gamma \quad (۱۷.۲)$$

فضا-زمان  $dS_\gamma$  با گروه تبدیل  $SO(۱,۲)$  نشان داده می‌شود.



شکل ۳.۲ فضا-زمان  $dS_3$

برای این فضا-زمان مختصات زیر را معرفی می‌کنیم:

$$X = L \cosh \tilde{t} \cos \theta$$

$$Y = L \cosh \tilde{t} \sin \theta$$

$$Z = L \sinh \tilde{t} \quad (۱۸.۲)$$

این فضا با متریکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$dS^\vee = L^\vee \left( -d\tilde{t}^\vee + \cosh^\vee \tilde{t} d\theta^\vee \right) \quad (۱۹.۲)$$

برای یافتن این متریک از معادله‌ی (۱۸.۲) و مشتق‌های معادله‌ها استفاده می‌کنیم:

$$dX = L \sinh \tilde{t} \cos \theta d\tilde{t} - L \cosh \tilde{t} \sin \theta d\theta$$

$$dX^\vee = L^\vee \sinh^\vee \tilde{t} \cos^\vee \theta d\tilde{t}^\vee + L^\vee \cosh^\vee \tilde{t} \sin^\vee \theta d\theta^\vee$$

$$-2L^\vee \sinh \tilde{t} \cosh \tilde{t} \cos \theta \sin \theta d\tilde{t}d\theta$$

$$dY = L \sinh \tilde{t} d\tilde{t} \sin \theta + L \cosh \tilde{t} \cos \theta d\theta$$

$$dY^\vee = L^\vee \sinh^\vee \tilde{t} d\tilde{t}^\vee \sin^\vee \theta + L^\vee \cosh^\vee \tilde{t} \cos^\vee \theta d\theta^\vee$$

$$+2L^\vee \sinh \tilde{t} \cosh \tilde{t} \sin \theta \cos \theta d\tilde{t}d\theta$$

$$dZ = L \cosh \tilde{t} d\tilde{t}$$

$$dZ^\vee = L^\vee \cosh^\vee \tilde{t} d\tilde{t}^\vee$$

این عبارتها را در متریک (۱۶.۲) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{aligned}
dS^\gamma &= -\left(L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma\right) + L^\gamma \sinh^\gamma \tilde{t} \cos^\gamma \theta d\tilde{t}^\gamma \\
&+ L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} \sin^\gamma \theta d\theta^\gamma - \gamma L^\gamma \sinh \tilde{t} \cosh \tilde{t} \sin \theta \cos \theta d\theta d\tilde{t} \\
&+ L^\gamma \sinh^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma \sin^\gamma \theta + L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} \cos^\gamma \theta d\theta^\gamma \\
&+ \gamma L^\gamma \sinh \tilde{t} \cosh \tilde{t} \sin \theta \cos \theta d\tilde{t} d\theta \\
&= -L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma + L^\gamma \sinh^\gamma \tilde{t} \cos^\gamma \theta d\tilde{t}^\gamma \\
&+ L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} \sin^\gamma \theta d\theta^\gamma + L^\gamma \sinh^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma \sin^\gamma \theta \\
&\quad + L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} \cos^\gamma \theta d\theta^\gamma \\
&= -L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma + L^\gamma \sinh^\gamma \tilde{t} d\tilde{t}^\gamma (\cos^\gamma \theta + \sin^\gamma \theta) \\
&+ L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} \sin^\gamma \theta d\theta^\gamma + L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} \cos^\gamma \theta d\theta^\gamma \\
&= L^\gamma d\tilde{t}^\gamma (\sinh^\gamma \tilde{t} - \cosh^\gamma \tilde{t}) + L^\gamma \cosh^\gamma \tilde{t} d\theta^\gamma (\cos^\gamma \theta + \sin^\gamma \theta) \\
&= L^\gamma (\cosh^\gamma \tilde{t} d\theta^\gamma - d\tilde{t}^\gamma)
\end{aligned}$$

و به این ترتیب متریک (۱۹.۲) که برای توصیف فضا-زمان  $dS_\gamma$  مناسب است، اثبات می‌شود.

فضا-زمان  $dS_\gamma$  و  $S^\gamma$  که توسط روابط زیر تعریف می‌شوند را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد،  $dS_\gamma$  با متریک زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned}
dS^\gamma &= -dZ^\gamma + dX^\gamma + dY^\gamma \\
-Z^\gamma + X^\gamma + Y^\gamma &= L^\gamma \quad (20.2)
\end{aligned}$$

$S^\gamma$  با متریک زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned}
dS^\gamma &= dZ^\gamma + dX^\gamma + dY^\gamma \\
Z^\gamma + X^\gamma + Y^\gamma &= L^\gamma \quad (21.2)
\end{aligned}$$

فضا-زمان  $dS_\gamma$  توسط تبدیل اقلیدسی  $Z_E = iZ$  به  $S^\gamma$  تبدیل می‌شود.



$$dS_p \xrightarrow{\text{اقليديسي}} S^2 \quad (22.2)$$

به طور مشابه فضا-زمان  $AdS_p$  و  $H^2$  که به صورت زیر تعریف کردیم را نیز می توان به همدیگر تبدیل کرد،  $AdS_p$  با متریک زیر معرفی می شود:

$$\begin{aligned} AdS_p \rightarrow dS^2 &= -dZ^2 - dX^2 + dY^2 \\ -L^2 &= -Z^2 - X^2 + Y^2 \end{aligned} \quad (23.2)$$

$H^2$  با متریک زیر معرفی می شود:

$$\begin{aligned} dS^2 &= -dZ^2 + dX^2 + dY^2 \\ -L^2 &= -Z^2 + X^2 + Y^2 \end{aligned} \quad (24.2)$$

فضا-زمان  $AdS_p$  با  $X_E = iX$  به  $H^2$  تبدیل می شود.

$$AdS_p \xrightarrow{\text{اقليديسي}} H^2$$

این تبدیل فضا-زمان ها به عبارت دیگر همان اقلیدسی کردن است.

## ۲-۲ معرفی سیستم مختصات مختلف فضا-زمان $AdS$

در بخش قبل فضا-زمان  $AdS$  را که در آن مختصات کلی  $(\tilde{t}, \rho)$  به کار برده شده بود را بررسی می کردیم:

$$\frac{dS^2}{L^2} = -\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2 \quad (25.2)$$

که رابطه بالا از متریک (۱۵.۲) به دست می آید اما برای درک بهتر این فضا لازم است که سیستم های مختصاتی دیگری هم که ظاهر می شوند را بررسی کنیم:

## ۱-۲-۲ مختصات ثابت $(\tilde{t}, \tilde{r})$ :

در این مختصات  $\tilde{r} = \sinh \rho$  به صورت  $\tilde{r}$  تعریف می شود متریک فضای  $AdS$  در این مختصات به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{ds^2}{L^2} = -(\tilde{r}^2 + 1) d\tilde{t}^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + 1} \quad (26.2)$$

که با روش زیر می توان از متریک (25.2) به عبارت (26.2) رسید:

$$\tilde{r}^2 = \sinh^2 \rho \quad \text{و} \quad \cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho = 1 \rightarrow (1 + \sinh^2 \rho) = \cosh^2 \rho$$

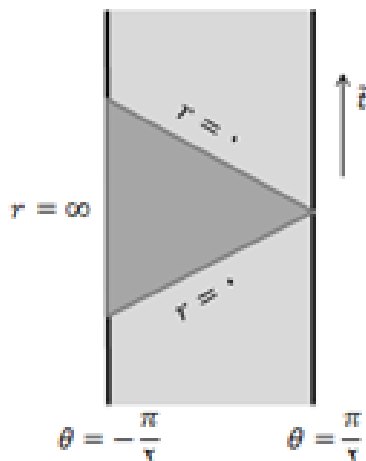
$$\tilde{r} = \sinh \rho \xrightarrow{d} d\tilde{r} = \cosh \rho d\rho \rightarrow d\tilde{r}^2 = \cosh^2 \rho d\rho^2$$

$$d\rho^2 = \frac{d\tilde{r}^2}{\cosh^2 \rho} = \frac{d\tilde{r}^2}{1 + \tilde{r}^2}$$

این سیستم مختصات برای مطالعه سیاه چاله  $AdS$  مفید است.

## ۲-۲-۲ مختصات همدیس $(\tilde{t}, \theta)$ :

در این سیستم مختصات  $\theta$  به صورت  $\tan \theta = \sinh \rho$  ( $\theta: -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ) تعریف می شود



شکل ۴.۲ فضا-زمان  $AdS_p$  در مختصات همدیس

متریک  $AdS$  در مختصات کلی به متریک زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dS^\nu}{L^\nu} = \frac{1}{\cos^\nu \theta} (-d\tilde{t}^\nu + d\theta^\nu) \quad (۲۷.۲)$$

که با روش زیر می‌توان از متریک (۲۵.۲) به این عبارت رسید:

$$\begin{aligned} \cosh^\nu \rho - \sinh^\nu \rho = 1 &\rightarrow \frac{dS^\nu}{L^\nu} = -\cosh^\nu \rho d\tilde{t}^\nu + d\rho^\nu \\ &= -(\cosh^\nu \rho + \sinh^\nu \rho) d\tilde{t}^\nu + d\rho^\nu = -(\cosh^\nu \rho + \sinh^\nu \rho) d\tilde{t}^\nu + d\rho^\nu \\ &= -\frac{1}{\cos^\nu \theta} d\tilde{t}^\nu + d\rho^\nu \quad (\text{الف}) \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \sinh \rho \xrightarrow{d}$$

$$\begin{aligned} (1 + \tan \theta^\nu) d\theta &= \cosh \rho d\rho \rightarrow \frac{1}{\cos^\nu \theta} d\theta = \cosh \rho d\rho \\ \rightarrow d\rho^\nu &= \frac{d\theta^\nu}{\cos^\nu \theta \cosh^\nu \rho} \rightarrow \frac{d\theta^\nu}{\cos^\nu \theta (1 + \sinh^\nu \rho)} \\ &= \frac{d\theta^\nu}{\cos^\nu \theta (1 + \tan \theta^\nu)} = \frac{d\theta^\nu}{\cos^\nu \theta \left( \frac{1}{\cos^\nu \theta} \right)} = \frac{d\theta}{\cos^\nu \theta} \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

(الف) و (ب) را در متریک (۲۵.۲) جای‌گذاری می‌کنیم و متریک (۲۷.۲) به‌دست می‌آید.

وجود مرز در  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  مهم است زیرا که این مرزها، مرز  $AdS$  نامیده می‌شود.

### ۳-۲-۲ مختصات پوانکاره $(t, r)$ :

این سیستم مختصاتی نیز نوع دیگری از مختصات‌هایی است که گاهی برای توصیف فضای  $AdS$  از آن

استفاده می‌کنند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{Lr}{r} \left( -t^\nu + \frac{1}{r^\nu} + 1 \right) \quad (۳۰.۲)$$

$$X = Lrt \quad (31.2)$$

$$Y = \frac{Lr}{r^2} \left( -t^2 + \frac{1}{r^2} - 1 \right) \quad (32.2)$$

با  $(r > 0, t: -\infty \rightarrow \infty)$  متریک به صورت زیر است:

$$\frac{ds^2}{L^2} = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} \quad (33.2)$$

از آن جایی که دو مختصه  $r$  و  $t$  داریم پس می توان  $AdS_4$  را به کار برد. این متریک اغلب در سیستم های مختصاتی  $AdS/CFT$  استفاده می شود. این سیستم مختصاتی برای مطالعه سیاه چاله  $AdS$  مفید است.

## ۲-۳ مطالعه حرکت ذره در فضا-زمان $AdS$

### ۲-۳-۱ انتقال به سرخ گرانشی

در این بخش انتقال به سرخ گرانشی را در مختصات ایستای  $(\tilde{t}, \tilde{r})$  بررسی می کنیم. دو مشاهده کننده ای ساکن را بررسی می کنیم، مشاهده کننده ای  $A$  در مبدأ  $\tilde{r} = 0$  و مشاهده کننده ای  $B$  در  $\tilde{r} = \tilde{r}_B \gg 1$  قرار دارند. مشاهده کننده ای  $A$  یک فوتون می فرستد، با توجه به فرمول (37.2) مرجع [9] (در این قسمت از این فرمول بدون اثبات استفاده می کنیم) انرژی فوتونی که مشاهده کننده ای  $B$  دریافت می کند به صورت زیر است:

$$\frac{E_B}{E_A} = \sqrt{\frac{g_{..}(A)}{g_{..}(B)}} \rightarrow E_B = \left( \frac{1}{\tilde{r}_B} \right) E_A$$

بنابراین انرژی فوتون در  $B$  کاهش می یابد. به طور ویژه زمانی که  $\tilde{r}_B \rightarrow \infty$  و  $E_B \rightarrow 0$  را داریم، فوتون یک انتقال به سرخ گرانشی نامحدودی را به دست می آورد. انتقال به سرخ گرانشی از پتانسیل گرانشی به دست می آید. عبارت قبل اشاره به این نکته دارد که  $\tilde{r} = 0$  انتهای چاه پتانسیل گرانشی است. در

حقیقت این که فوتون‌ها یک انتقال به سرخ نامحدود می‌گیرند شبیه رفتار فوتون در نزدیکی یک سیاه‌چاله است.

## ۲-۳-۲ حرکت فوتون و ذره:

حالا حرکت فوتون و حرکت ذره را در فضا-زمان  $AdS$  بررسی می‌کنیم. فوتون و ذره رفتار عجیبی در فضا-زمان  $AdS$  دارند. رفتار ذره را در مختصات همدیس بررسی می‌کنیم. ذره‌ی مورد نظر که از ته پتانسیل گرانشی در  $\tilde{r} = 0$  شروع به حرکت می‌کند و تا  $\tilde{r} = \infty$  می‌آید.

برای سادگی  $L = 1$  را در متریک فضای  $AdS$ ،  $\frac{ds^2}{L^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} (-d\tilde{t}^2 + d\theta^2)$  قرار می‌دهیم. اول حرکت فوتون را از نقطه نظر مختصات زمانی  $\tilde{t}$  بررسی می‌کنیم، به این منظور مختصات همدیس را به کار می‌بریم:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} (-d\tilde{t}^2 + d\theta^2) \rightarrow ds^2 = 0 \rightarrow \frac{d\theta}{d\tilde{t}} = 1 \quad (34.2)$$

$$d\theta = d\tilde{t} \rightarrow \int d\tilde{t} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \rightarrow \tilde{t} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (35.2)$$

بنابراین با تغییر  $\tilde{r}$  از صفر تا بی‌نهایت، مختصه‌ی  $\theta$  از صفر تا  $\frac{\pi}{2}$  تغییر می‌کند بنابراین داریم:

$$\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ با } \tilde{r} = \tan \theta, \tilde{r}: 0 \rightarrow \infty,$$

از آن جایی که درباره‌ی مرز توضیح می‌دهیم پس به یک شرایط مرزی در مرز  $AdS$  نیاز داریم. رفتار فوتون در مرز  $AdS$  به شرایط مرزی‌ای که در مرز  $AdS$  هست وابسته می‌شود (بازتاب می‌کند و به اول برمی‌گردد). حرکت را از دید زمان ویژه  $\tau$  بررسی می‌کنیم (کسی نمی‌تواند زمان ویژه را برای فوتون تعریف کند اما می‌توان پارامتر وابسته را تعریف کرد بنابراین  $\tau$  یک پارامتر وابسته است) از آن جایی که جرم فوتون صفر است، می‌توان عبارتهای زیر را از مرجع [۹] به کار برد که البته این فرمول را بدون اثبات به کار می‌بریم:

$P^{\tau} = 0$  داریم:

$$g^{\circ\circ} E^{\tau} + g_{\tilde{r}\tilde{r}} \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} = 0 \quad (36.2)$$

طبق معادلات مرجع [۹] می‌دانیم که:

$$g^{\circ\circ} = -\frac{1}{\tilde{r}^{\tau+1}} \quad g_{\tilde{r}\tilde{r}} = \frac{1}{r^{\tau+1}}$$

انرژی  $E$  را برای فوتون‌ها در مرجع [۹] به صورت  $P_0 = -E$  تعریف می‌کنیم پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} -\frac{E^{\tau}}{\tilde{r}^{\tau+1}} + \frac{1}{\tilde{r}^{\tau+1}} \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} &= 0 \\ -\frac{E^{\tau}}{\tilde{r}^{\tau+1}} &= -\frac{1}{\tilde{r}^{\tau+1}} \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} \rightarrow E^{\tau} = \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} \rightarrow \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = E \end{aligned} \quad (37.2)$$

$$d\tilde{r} = E d\tau \rightarrow \int d\tilde{r} = E \int d\tau \rightarrow \tilde{r} = E\tau$$

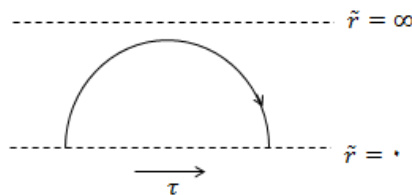
بنابراین  $\tilde{r} = E\tau$  از آنجایی که مرز در  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  قرار دارد. بنابراین بی‌نهایت زمان طول می‌کشد تا فوتون به مرز فضا-زمان  $AdS$  برسد.

حالا حرکت ذره را از دید ویژه زمان  $\tau$  بررسی می‌کنیم، مرجع [۹] برای ذره  $P^{\tau} = -m^{\tau}$  را به کار برده است:

$$g^{\circ\circ} E^{\tau} + g_{\tilde{r}\tilde{r}} \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} = -1 \rightarrow -\frac{E^{\tau}}{\tilde{r}^{\tau+1}} + \frac{1}{\tilde{r}^{\tau+1}} \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} = -1 \quad (38.2)$$

$$\begin{aligned} -E^{\tau} + \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} &= -(\tilde{r}^{\tau+1}) \rightarrow \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} = -\tilde{r}^{\tau+1} + E^{\tau} \\ \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \right)^{\tau} &= (E^{\tau} - 1) - \tilde{r}^{\tau} \end{aligned} \quad (39.2)$$

با گرفتن  $E > 1$  سمت راست معادله‌ی (۳۹.۲)، در  $\tilde{r} = 0$  مثبت است اما  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  در سمت چپ منفی می‌شود بنابراین همان‌طور که از شکل (۵.۲) پیداست یک ذره نمی‌تواند به مرز  $AdS$  در  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  برسد.



شکل ۵.۲ در فضا-زمان  $AdS$  یک ذره نمی‌تواند

به مرز در  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  برسد

### ۳-۳-۲ بررسی حرکت ذره در مختصات پوانکاره

تا این‌جا حرکت با مختصات زمانی ایستای  $\tilde{t}$  را امتحان کردیم اما حالا بهتر است برای بررسی با مختصات زمان پوانکاره‌ی  $t$  ادامه دهیم. برای سادگی فقط حرکت فوتون را بررسی می‌کنیم. حرکت فوتون از  $r = 0$  تا  $r = R$  را بررسی می‌کنیم.

از متریک (۳۳.۲) که مختصات پوانکاره را معرفی می‌کند شروع می‌کنیم و  $L^\nu$  را برابر با یک که مقدار ثابتی است، قرار می‌دهیم

$$\frac{dS^\nu}{L^\nu} = -r^\nu dt^\nu + \frac{dr^\nu}{r^\nu} \rightarrow L = 1$$

$$\rightarrow dS^\nu = -r^\nu dt^\nu + \frac{dr^\nu}{r^\nu} \quad \xrightarrow{dS^\nu = 0}$$

$$\rightarrow -r^\nu dt^\nu = -\frac{dr^\nu}{r^\nu}$$

$$-\frac{dr^\nu}{dt^\nu} = -r^\nu \rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm r^\nu$$

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 \rightarrow - \int \frac{dr}{r^2} = \int dt$$

با انتخاب عبارت زیر داریم:

$$t = - \int_R^\varepsilon \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r} \Big|_R^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R} \rightarrow \infty \quad (43.2)$$

پس در این دستگاه مختصات زمان نامحدودی لازم است تا فوتون به  $r = 0$  برسد. مختصات پوانکاره فقط بخشی از فضا-زمان  $AdS$  سرتاسری را پوشش می‌دهد.

از دیدگاه هندسه  $AdS$  در مختصات سرتاسری  $t \rightarrow \infty$  مانند  $r \rightarrow 0$  رفتار می‌کند. این ناحیه‌ای که توسط مختصات پوانکاره پوشش داده شده است بخشی از پوانکاره نامیده می‌شود. به این معنا که مکان  $r = 0$  شبیه افق سیاه‌چاله است هرچند سیاه‌چاله نداریم. تکه‌ی پوانکاره بیش‌تر شبیه فضا-زمان ریندلر است. این نوع فضا-زمان با متریک زیر معرفی می‌شود:

$$ds_{p+2}^2 = -r dt^2 + \frac{dr^2}{r} + dx_p^2 \quad (44.2)$$

فضا-زمان ریندلر فقط فضا-زمان مینکوفسکی است اما تفاوتش در این است که فضا-زمان ریندلر فقط بخشی از فضا-زمان مینکوفسکی را پوشش می‌دهد. به‌طور فیزیکی مختصات ریندلر مشاهده‌کننده‌ای که یک شتاب ثابت را تجربه می‌کند را نشان می‌دهد و یک افقی که به مشاهده‌کننده وابسته است را در  $r = 0$  برای مشاهده‌کننده دارد. اما برای مقایسه با فضا-زمان مینکوفسکی باید گفت فضا-زمان مینکوفسکی در سرتاسرش افقی ندارد.

به‌طور مشابه، این‌جا یک افق در  $r = 0$  برای مشاهده‌کننده‌ای که درون تکه‌ی پوانکاره قرار دارد است. بیان این نکته مهم است که:

فضا-زمان ریندلر یک دمای هاوکینگ دارد اما فضا-زمان  $AdS$  در مختصات پوانکاره یک دمای صفر دارد. در ضمن فضا-زمان ریندلر با کمیت‌های ترمودینامیکی زیر نشان داده می‌شود:



$$T = \frac{1}{4\pi}, \quad S = \frac{1}{4G}, \quad \varepsilon = 0, \quad P = \frac{1}{16\pi G} \quad (45.2)$$

## ۴-۲ نکاتی از فضا-زمان $AdS$ در ارتباط با تناظر $AdS/CFT$

### الف: تقارن‌ها

بگذارید دوباره فضا-زمان  $AdS_\delta$  را در مختصات پوانکاره می‌نویسیم:

$$ds_\delta^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} \quad (46.2)$$

این فضا-زمان تقارن  $SO(2, 4)$  دارد.

فضا-زمان  $AdS_{p+2}$ ،  $P$  تعداد ابعاد فضایی را در نظریه پیمانهای نشان می‌دهد و در شکل کلی یعنی جایی که با مختصات  $x^\mu = (t, \vec{x})$  توصیف می‌شود.

### ب: اهمیت مختصه‌ی $r$

متریک (۴۶.۲) تحت تبدیلات زیر تغییر نمی‌کند:

$$x^\mu \rightarrow ax^\mu, \quad r \rightarrow \frac{1}{a}r \quad (47.2)$$

که  $a$  مقدار ثابت است. مختصات  $r$  معنی‌ای به‌عنوان مقیاس انرژی در نظریه پیمانهای دارد.  $N = 4$  در  $SYM$  مقیاس ناوردایی دارد. براساس تناظر  $AdS/CFT$  زمان در نظریه پیمانهای با مختصات  $t$  ارتباط دارد. ویژه زمان  $\tau$  برای مشاهده‌کننده‌ی ساکن در  $r$  با مختصات  $t$  متناسب است:

$$d\tau_r^2 = |g_{00}(r)| dt^2 \quad (48.2)$$

بنابراین انرژی ویژه برای مشاهده‌کننده در  $r$ ،  $E(r)$  با انرژی نظریه پیمانهای  $E_t$  متناسب است یعنی:

$$E_t = \sqrt{|g_{00}(r)|} E(r) \cong \left(\frac{r}{L}\right) E(r) \quad (49.2)$$

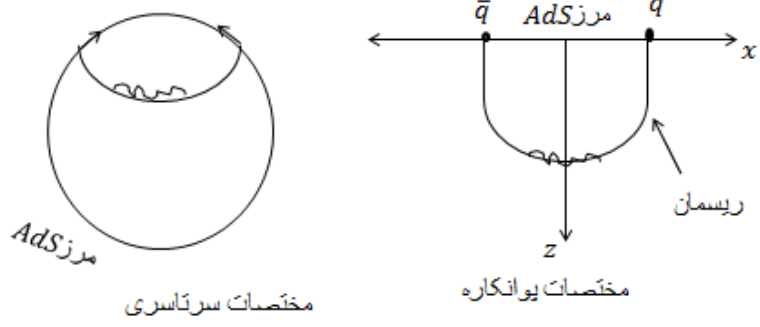
یک برانگیختگی در فضا-زمان  $AdS$  با انرژی ویژه داده شده را بررسی می‌کنیم (برای مثال یک ریسمان) انرژی نظریه پیمانه‌ای به جایی که برانگیختگی در آن مکان معلوم می‌شود بستگی دارد. انرژی نظریه پیمانه‌ای اگر برانگیختگی نزدیک مرز  $AdS$  اتفاق بیافتد بزرگ‌تر است. نسبت معادله‌ی (۴۹.۲) نسبت  $UV/IR$  نامیده می‌شود. در نسبیت عام کسی نمی‌تواند روی مختصات زمانی تأکید کند زیرا مختصات زمانی به مختصات سیستم وابسته است. اما در  $AdS/CFT$  مختصات زمانی نقش خاصی را بازی می‌کند مانند زمان نظریه پیمانه‌ای. بنابراین ما  $t$  را برای یک ترجمه یا یک معنی از نظریه پیمانه‌ای به کار می‌بریم.

## ۲-۵ تفاوت مختصات پوانکاره و سرتاسری<sup>۱۵</sup> در فضا-زمان $AdS$

معیار اولیه‌ای که در [۱۰] استفاده شده است پیشنهاد می‌کند که ریسمان بتواند به سمت افق پوانکاره سرازیر شود. این که محاسباتمان در مختصات پوانکاره است کار مشکلی است زیرا در مختصات افق پوانکاره تکینگی موضعی داریم. تصورمان این است که بتوانیم از مختصات سرتاسری فضا-زمان  $AdS$  استفاده کنیم جایی که افق منظم است و ریسمان دینامیکی می‌تواند بدون آشفتگی در میان افق عبور کند. هم‌چنین ما به مرز نظریه میدان در سطح هموار علاقه‌مندیم. یک طرح کلی از روشمان را برای حل ریسمان دینامیکی در شکل (۶.۲) نشان می‌دهیم. توجه می‌شود که ریسمان در مختصات پوانکاره به یک ریسمان در مختصات سرتاسری نگاشت می‌شود [۱۱].

---

<sup>۱۵</sup> global



شکل ۶.۲ ریمان دینامیکی در مختصات  $AdS$

سرتاسری و یوانکاره



## فصل ۳

بررسی کلی جهان سطح کوارک-پادکوارک شتابدار

در کل این فصل از مرجع [۵] استفاده شده است. در این پایان‌نامه می‌خواهیم تحلیل متفاوتی از آن چه در مرجع [۸] گفته شد را ارائه دهیم. از مختصات  $AdS$  سرتاسری استفاده می‌کنیم و دیگر نیازی به تحلیل مرجع [۸] نداریم.

مسئله را در مختصات سرتاسری حل می‌کنیم و به دقت مطالعه می‌کنیم و در انتها معیاری ساده را برای به‌دست آوردن یک کوارک تنها در برابر جفت پادکوارک فرمول‌بندی کنیم. علاوه بر این که بهتر مسئله را می‌فهمیم تقارن‌های موجود در مختصات سرتاسری هم بیش‌تر به ما کمک می‌کنند. مثل تقارن دورانی که ساختار یک کوارک تک را به جفت کوارک-پادکوارک شتابدار مربوط می‌کند. در این مختصات، انعکاس کوارک در حرکات دورانی مثل پادکوارک است. این تقارن‌ها را در مختصات پوانکاره نداریم. فضا-زمان‌هایی که مطالعه می‌کنیم در دمای صفر هستند همان‌طور که در فصل اول ذکر شد یعنی دوگان خلأ یانگ-میلز می‌باشد.

در تناظر  $AdS/CFT$  در مرز چهاربعدی، نظریه میدان همدیس قرار دارد و  $AdS$  در فضای حجم گسترده شده است. به‌طور کلی دو نوع  $AdS$  پوانکاره و سرتاسری را بررسی می‌کنیم. در این مورد از  $AdS$  سرتاسری نظریه میدانی مانند گرانش اینشتین را تصور می‌کنیم. از آن جایی که  $AdS$  پوانکاره همان  $AdS$  سرتاسری است وقتی که شعاع فضای مورد نظر به سمت بی‌نهایت رفته باشد، بنابراین برای  $AdS$  پوانکاره نظریه میدانی که روی زمینه مینکوفسکی قرار دارد را تصور می‌کنیم. به‌طور خاص جهان‌سطح  $AdS$  دو بعدی برای ریسمان بازی که هر دو انتهای آن در مرز  $AdS$  به کوارک و پادکوارک متصل است را بررسی می‌کنیم.

### ۳-۱ جهان‌سطح ریسمان برای کوارکی با جهان خط اختیاری

کوارکی را در فضا-زمان مینکوفسکی بررسی می‌کنیم. برای این کوارک متریکی به‌صورت زیر داریم:

$$ds_{body}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (۱.۳)$$

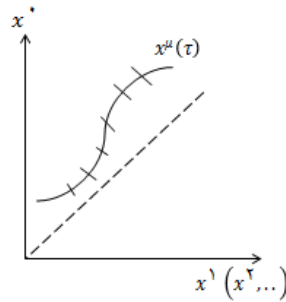
که  $ds_{body}^2$  متریک مرز است.

در رابطه بالا داریم:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

که  $\eta_{\mu\nu}$  متریک مینکوفسکی است .

همانند توضیحات فصل اول و همان‌طور که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است، جهان خط کوآرک را با پارامتربندی می‌کنیم که  $\tau$  ویژه‌زمان است و  $\mu$  می‌تواند از صفر تا  $d$  باشد. در این قسمت  $d$  که همان تعداد ابعاد فضا است برابر با ۳ است.



شکل ۱.۳ پارامتربندی کردن جهان خط

این جهان خط اختیاری زمان‌گونه است، یعنی داخل مخروط نوری می‌باشد و سرعتش از سرعت نور کم‌تر است.

پارامتربندی کردن به صورت  $\tau$  ضمانت این است که بتوانیم چهارسرعت را به شکل زیر بنویسیم:

$$\dot{x}^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (3.3)$$

این رابطه به یک بهنجار می‌شود و رابطه‌ی زیر

$$\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau) = -1 \quad (4.3)$$

را نتیجه می‌دهد.

ابتدا از معادله‌ی (۴.۳) نسبت به ویژه‌زمان  $\tau$  مشتق می‌گیریم و دقت می‌شود که سمت راست معادله برابر صفر خواهد بود.

$$\frac{d(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)}{d\tau} = 0 \quad (۵.۳)$$

حال مشتق‌گیری از چهارسرعت  $\dot{x}^\mu$  چهارشتاب را نتیجه می‌دهد که آن را  $a$  در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\ddot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \dot{x}^\mu \ddot{x}_\mu = 0 \rightarrow 2\dot{x}^\mu \ddot{x}_\mu = 0 \quad (۶.۳)$$

بنابراین:  $a^\mu \cdot \dot{x}_\mu = 0$  یا به عبارت دیگر شتاب و سرعت بر هم عمودند:

$$a \perp \dot{x}$$

چهارشتاب فضاگونه است پس :

$$a^\nu(\tau) = \ddot{x}^\mu(\tau) \dot{x}_\mu(\tau) > 0 \quad (۷.۳)$$

و برای هر مسیری صادق است. در همه‌ی روابط بالا  $x^\mu(\tau)$  همان جهان خط کوآرک است که برحسب  $\tau$  پارامتربندی شده است و برطبق شکل (۱.۳) می‌توان جهان خط را نشان داد.

در ادامه دوگان گرانشی مسأله را بررسی می‌کنیم. خلا  $SYM$  در فضا-زمان مینکوفسکی توسط فضا-زمان  $AdS$  پوانکاره توصیف می‌شود:

$$ds^2 = \frac{1}{u^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + du^2) \quad (۸.۳)$$

در اینجا  $\eta_{\mu\nu}$  همان متریک مینکوفسکی است که در رابطه‌ی (۲.۳) به آن اشاره شد. در رابطه‌ی (۸.۳) مختصه‌ی  $u$  بعد شعاعی فضاست که به فضا-زمان مینکوفسکی اضافه شده است و آن را به فضا-زمان  $AdS$  تبدیل کرده است. می‌دانیم در فضا-زمان  $AdS$  سرتاسری هرگاه  $u$  به سمت بی‌نهایت برود، می‌توانیم مختصات  $AdS$  پوانکاره را بررسی کنیم.



میخائیلوف [۷] با در نظر گرفتن مرز در  $u = 0$  معادله‌ی جهان‌سطح برای ریسمانی با شرایط مرزی خروجی که با مختصات شعاعی  $u$  و مختصات زمانی  $\tau$  پارامتربندی شده است، را حل کرد و یک مختصات عالی برای مختصات  $X^M$  جاسازی شده پیدا کرد :

$$X^M(\tau, u) = (X^\mu(\tau, u), u) \quad (۹.۳)$$

$$X^\mu(\tau, u) = u\dot{x}^\mu(\tau) + x^\mu(\tau) \quad (۱۰.۳)$$

در این روابط  $X^M(\tau, u)$  مختصات فضای هدفی است که کوآرک و ریسمان در آن قرار دارند و  $X^\mu(\tau, u)$  مختصاتی است که جهان‌سطح ریسمان در فضای هدف دارد یعنی  $X^\mu(\tau, u)$  نگاشتی از جهان‌سطح ریسمان روی فضا-زمان است و  $x^\mu$  که در آن قرار دارد، مسیر کوآرک را روی مرز مشخص می‌کند.

در این جا  $\tau \in (-\infty, +\infty)$  و  $u \in (0, \infty)$  را بررسی می‌کنیم. یکی از ویژگی‌های جواب‌های میخائیلوف این است که روی مرز ژئودزی ناقص دارند [۷].

### ۲-۳ هندسه‌ی جهان‌سطح

در این بخش می‌خواهیم بفهمیم هندسه‌ی جهان‌سطحی که بررسی می‌کنیم با چه متریک‌ی داده می‌شود بنابراین از معادله‌ی زیر کمک می‌گیریم:

$$X^\mu(\tau, u) = u\dot{x}^\mu(\tau) + x^\mu(\tau) \quad (۱۰.۳)$$

جهان‌سطح دو بعدی را بررسی می‌کنیم. به کمک مختصاتی که در بالا آمده است و با استفاده از متریک کلی جهان‌سطح حالا می‌خواهیم متریک جهان‌سطح را به دست آوریم بنابراین طبق معادله‌ی زیر متریک کلی جهان‌سطح را می‌نویسیم و محاسبه‌ها را ادامه می‌دهیم:

$$ds_{ws}^2 = \gamma_{\tau\tau}d\tau^2 + \gamma_{\sigma\sigma}d\sigma^2 + 2\gamma_{\tau\sigma}d\tau d\sigma \quad (۱۱.۳)$$

حالا تک تک عناصر این متریک را به کمک متریک (۸.۳) و با استفاده از متریک القایی می‌سازیم و کار را پیش می‌بریم. در متریک (۱۱.۳) عبارتهای  $\gamma_{\tau\tau}$  و  $\gamma_{\sigma\sigma}$  و  $\gamma_{\tau\sigma}$  طبق معادله‌ی زیر عناصر متریک القایی هستند:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_{\tau\tau} & \gamma_{\tau\sigma} \\ \gamma_{\sigma\tau} & \gamma_{\sigma\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X}^\tau & \dot{X}^\sigma \\ \dot{X}^\sigma & \dot{X}^\tau \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

که  $\gamma_{\alpha\beta}$  را به‌عنوان متریک القایی دو بعدی بر جهان سطح ریمان می‌شناسیم. از متریک (۸.۳) داریم:

$$ds^\tau = \frac{1}{u^\tau} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + du^\tau)$$

از این رابطه می‌توان عبارتهای زیر را به‌دست آورد:

$$G_{uu} = \frac{1}{u^\tau} \quad \text{و} \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{u^\tau} \eta_{\mu\nu}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۱۰.۳) در رابطه‌ی (۹.۳) حالا می‌توانیم از رابطه (۹.۳) نسبت به  $u$  مشتق بگیریم. داریم:

$$X^M(\tau, u) = (u\dot{x}^\mu(\tau) + x^\mu(\tau), u)$$

$$\dot{X}^M(\tau, u) = (\dot{x}^\mu(\tau), 1) \quad (13.3)$$

با به توان دو رساندن رابطه برای ساختن عناصر متریک القایی داریم:

$$\dot{X}^\tau = \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} \frac{1}{u^\tau} + \frac{1}{u^\tau} = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \frac{1}{u^\tau} + \frac{1}{u^\tau} = \frac{\dot{x}^\tau}{u^\tau} + \frac{1}{u^\tau} = -\frac{1}{u^\tau} + \frac{1}{u^\tau} = 0 \quad (14.3)$$

سپس با مشتق‌گیری از همان رابطه (۹.۳) نسبت به  $\tau$  به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\dot{X}^M(\tau, u) = (u\ddot{x}^\mu(\tau) + \dot{x}^\mu(\tau), 0) =$$

$$(ua^\mu(\tau) + \dot{x}^\mu(\tau), 0) \quad (15.3)$$

با به توان دو رساندن معادله‌ی (۱۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{X}^\tau &= (ua^\mu + \dot{x}^\mu)(ua^\nu + \dot{x}^\nu)\eta_{\mu\nu} \frac{1}{u^\tau} = \\ &= (ua^\mu + \dot{x}^\mu)(ua_\mu + \dot{x}_\mu) \frac{1}{u^\tau} = \\ &= \left( u^\tau a^\tau + \underbrace{\tau u a^\mu \dot{x}_\mu}_{\dot{x}^\tau} + \underbrace{\dot{x}^\tau}_{-1} \right) \frac{1}{u^\tau} = a^\tau - \frac{1}{u^\tau} \end{aligned} \quad (16.3)$$

به کمک محاسبه

$$\begin{aligned} \dot{X}\dot{X} &= (\dot{x}^\mu(\tau), 1)(ua^\mu(\tau) + \dot{x}^\mu(\tau), \cdot) = \\ &= (ua^\mu + \dot{x}^\mu)\dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} \frac{1}{u^\tau} = (ua^\mu \dot{x}_\mu + \dot{x}^\tau) \frac{1}{u^\tau} \end{aligned} \quad (17.3)$$

همه‌ی روابط بالا را در رابطه (۱۱.۳) جای‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم متریک‌ی که جهان‌سطح دو بعدی را توصیف می‌کند، به دست آوریم بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} ds_{ws}^\tau &= \gamma_{\tau\tau} d\tau^\tau + \gamma_{\sigma\sigma} d\sigma^\tau + \tau \gamma_{\tau\sigma} d\tau d\sigma = \\ &= \left( u^\tau a^\tau + \underbrace{\tau u a^\mu \dot{x}_\mu}_{\dot{x}^\tau} + \underbrace{\dot{x}^\tau}_{-1} \right) \frac{d\tau^\tau}{u^\tau} + \left( \underbrace{\frac{\dot{x}^\tau}{u^\tau} + \frac{1}{u^\tau}}_{\dot{x}^\tau} \right) d\sigma^\tau \\ &+ \frac{\tau}{u^\tau} \left( u a^\mu \dot{x}_\mu + \underbrace{\dot{x}^\tau}_{-1} \right) d\tau d\sigma = \frac{1}{u^\tau} (u^\tau a^\tau - 1) d\tau^\tau + \\ &= \underbrace{\left( \frac{-1}{u^\tau} + \frac{1}{u^\tau} \right)}_{\dot{x}^\tau} d\sigma^\tau - \frac{\tau}{u^\tau} d\tau d\sigma \end{aligned} \quad (18.3)$$

برای جهان‌سطح دو بعدی متریک

$$ds_\gamma^\tau = - \left( \frac{1}{u^\tau} - a^\tau(\tau) \right) d\tau^\tau - \frac{\tau}{u^\tau} d\tau du \quad (19.3)$$

را به دست آوردیم. به کمک این رابطه می توان جهان سطح دو بعدی ریسمانی که به کوآرک متصل است را بهتر فهمید.

در این رابطه  $a^\tau(\tau)$  به مسیر کوآرک وابسته است و همان طور که در رابطه ی (۷.۳) توضیح داده شد،  $a^\tau(\tau) \geq 0$  را داریم.

خط  $\tau$  ثابت، نورگونه است زیرا به ازای  $\tau$  ثابت داریم  $d\tau = 0 \rightarrow d\tau^2 = 0$  و در نتیجه  $ds_\gamma^2 = 0$  و نورگونه بودن متریک اثبات می شود. در حالی که  $u$  ثابت نزدیک مرز زمان گونه است زیرا به ازای  $u$  ثابت داریم  $du = 0$  و عبارت سوم متریک بالا صفر می شود پس  $ds_\gamma^2 < 0$  را داریم و زمان گونه بودن اثبات می شود. اما می تواند به ازای  $u$  های خیلی بزرگ فضاگونه نیز باشد. زیرا به ازای  $u$  بزرگ عبارت های  $\frac{1}{u^2}$  و  $\frac{2}{u^2}$  به سمت صفر میل می کنند و فقط عبارت  $a^\tau(\tau)$  باقی می ماند پس داریم:  $ds_\gamma^2 > 0$  و فضاگونه بودن نیز اثبات می شود. مسیر کوآرک تنها  $(x^\mu(\tau))$  به متریک القایی روی جهان سطح ربط دارد.

مادامی که شتاب ها یکی باشند، متریک القایی یکی است هرگاه شتاب ها متفاوت باشند جهان سطح ها مختلف اند یعنی  $a^\tau(\tau)$  متفاوت معادل جهان سطح های متفاوتی است.

برای مسأله ی مورد نظر ما دترمینان  $\gamma_{\alpha\beta}$  به صورت زیر محاسبه می شود که  $\gamma_{\alpha\beta}$  بر اساس رابطه ی (۱۶.۱) نوشته می شود:

$$\dot{X}^\tau = a^\tau - \frac{1}{u^\tau}$$

$$\dot{X}^\tau = 0$$

$$\dot{X}\dot{X} = \left( u \underbrace{a^\mu \dot{x}_\mu}_{-1} + \underbrace{\dot{x}^\tau}_{-1} \right) \frac{1}{u^\tau} = -\frac{1}{u^\tau}$$

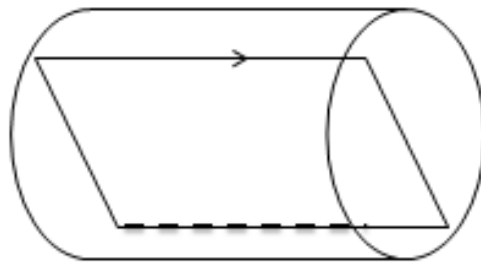
$$\det \gamma_{\alpha\beta} = \det \begin{pmatrix} \dot{X}^\tau & \dot{X}\dot{X} \\ \dot{X}\dot{X} & \dot{X}^\tau \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a^\tau - \frac{1}{u^\tau} & -\frac{1}{u^\tau} \\ -\frac{1}{u^\tau} & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$(\cdot) \left( a^\tau - \frac{1}{u^\tau} \right) - \left( -\frac{1}{u^\tau} \right) \left( -\frac{1}{u^\tau} \right) = -\frac{1}{u^\tau} \quad (20.3)$$

همان طور که می بینیم این دترمینان منفی است. مسیر کووارک  $(x^\mu(\tau))$  هیچ تکینگی ای ندارد یعنی متریک جهان سطح (۱۹.۳) به جز مواردی که اعلام خواهد شد، به ازای همه  $(\tau, u)$  ها منظم و بدون تکینگی است.

از آن جا که  $\gamma_{\alpha\beta}$  ثابت است و تانسور انحنا با  $-\gamma_{\alpha\beta}$  ارتباط دارد، می توان تانسور انحنا را با استفاده از متریک القایی یافت.  $R^{(\gamma)} = -2$  یک تکه از  $AdS_4$  است که همانند شکل (۲.۳) در  $AdS_5$  به صورت غوطه ور جاسازی شده است. زمانی که مختصات پوانکاره که خودش ژئودزی ناقص دارد و از یک زیر مجموعه مناسب از  $AdS$  کلی به وجود می آید را بررسی می کنیم، جهان سطح ریسمان مختصات تکینگی جالبی در  $u = \infty$  و  $u = 0$  و  $\tau = \pm\infty$  دارد.

از آن جایی که جهان سطح مورد بررسی در مختصات پوانکاره دارای تکینگی است، پس مطالعه مختصات سرتاسری مفیدتر خواهد بود.



شکل (۲.۳) جاسازی یک تکه از  $AdS_4$  در  $AdS_5$

### ۳-۳ ریسمان در $AdS$ سرتاسری

با توجه به هندسه‌ی جهان سطح در مختصات پوانکاره اکنون به بحث در مورد جهان سطح ریسمان در مختصات سرتاسری می‌پردازیم. البته با این فرض که جهان خط کامل کوارک در این مختصات وجود دارد. نیاز است جهان خط را تا مرز امتداد دهیم. در فضا-زمان مینکوفسکی جهان خط با  $x^\mu(\tau)$  مشخص می‌شود. به همین منظور باید تمام جهان خط را مطالعه کنیم. مثال‌هایی از این مورد در حرکت شتابدار کوارک یکنواخت پدید می‌آید.

می‌دانیم مختصات  $AdS$  سرتاسری  $\{t, r, \varphi, \Omega^i\}$  است. متریک  $AdS$  سرتاسری را با معادله‌ی زیر نشان می‌دهیم:

$$ds^2 = -\left(r^2 + 1\right) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 \left[ d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\Omega_{d-2}^2 \right] \quad (21.3)$$

مختصات پوانکاره را با  $\{x^\mu, u\}$  نشان می‌دهیم که می‌توان با تبدیلات زیر از متریک سرتاسری به متریک پوانکاره برسیم:

$$u = \frac{1}{Q(t, r, \varphi)} \quad x^t = \frac{\sqrt{r^2 + 1} \sin t}{Q(t, r, \varphi)} \quad x^i = \frac{r \sin \varphi}{Q(t, r, \varphi)} \Omega^i \quad (22.3)$$

که  $\Omega^i$  به بردار واحد در  $S^{d-2}$  (پوانکاره) دلالت دارد و  $Q$  عبارت است از

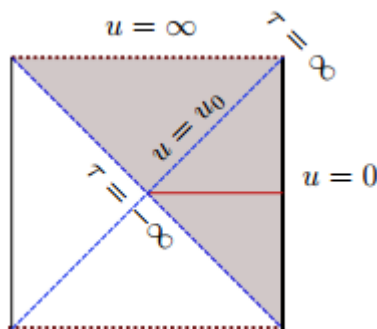
$$Q(t, r, \varphi) = \sqrt{r^2 + 1} \cos t + r \cos \varphi \quad (23.3)$$

باید توجه کرد که مکان هندسی نقاطی که  $Q(t, r, \varphi) = 0$  هستند گوشه‌های تکه‌ی پوانکاره را می‌سازد در حالی که مختصات سرتاسری تمام فضا-زمان  $AdS$  را پوشش می‌دهد.

تکه‌ی  $AdS$  پوانکاره با  $u \in (0, \infty)$  تعیین می‌شود. همچنین افق پوانکاره در  $u = \infty$  است. از آن جایی که این بخش مهم به نظر می‌آید بدون اثبات آن را از مقاله پذیرفتیم.

### ۳-۴ تکینگی های جهان سطح

این تکینگی ها را از روی شکل (۳.۳) توضیح می دهیم:



شکل (۳.۳) تکینگی های جهان سطح

الف - مرز فضا-زمان در  $u = 0$  واقع شده است و ژئودزی ها برای رسیدن به مرز به بی نهایت زمان نیاز دارند.

ب -  $u = \infty$  این هندسه با افق پوانکاره ارتباط دارد که این جا نقطه انتهایی ژئودزی ها می باشد که از دیدگاه دو بعدی تکینگی است.

ج -  $\tau = -\infty$  کمک می کند تا ویژگی مخروط نوری را در طول نقاط مسیر کوارک درک کنیم به طوری که خط  $\tau = -\infty$  نشان دهنده افق رویداد گذشته ی جهان سطح است.

د -  $\tau = +\infty$  آینده ی مخروط نوری را توضیح می دهد که نهایتاً به افق رویداد در  $u = \infty$  ختم می شود.

به دو دلیل می توان نشان داد که ژئودزی جهان سطح ناقص است:

۱- افق پوانکاره در  $u = \infty$  واقع شده است.

۲- گذشته ی افق جهان سطح در  $\tau = -\infty$  قرار دارد.

برای یک مثال ساده موردی با شتاب ثابت یعنی  $a^\tau(\tau) = a^\tau$  را بررسی می‌کنیم که در مرز  $u = 0$  زمان‌گونه است و متریک (۱۹.۳) کوچک‌تر از صفر و داخل مخروط نوری می‌باشد.

اما در  $u = u_0 = \frac{1}{a}$  نورگونه است. در مختصات سرتاسری و مورد  $a = 0$  متریک جهان‌سطح دقیقاً مختصات پوانکاره از  $AdS_2$  است زیرا به‌ازای شتاب صفر و یا سرعت ثابت، کوآرک موردنظر مسأله‌ی ما تنها و بدون حضور پادکوآرک است و مانند این است که کوآرک را در مختصات پوانکاره (که در این مختصات الزاماً نباید پادکوآرک را هم به همراه کوآرک مطالعه کرد) بررسی می‌کنیم.

می‌توان متریک (۱۹.۳) را در مختصات  $u = \frac{1}{w}$  دوباره بازبینی کرد و البته با  $\tau = T - \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{w}{a}$  ترکیب کرد تا متریک زیر را به‌دست آورد:

$$ds_\gamma^\tau = -\left(w^\tau - a^\tau\right) dT^\tau + \frac{dw^\tau}{w^\tau - a^\tau} \quad (24.3)$$

این متریک به‌روشنی زیر به‌دست می‌آید:

از متریک (۱۹.۳) استفاده می‌کنیم و عبارت‌های  $u = \frac{1}{w}$  و  $\tau = T - \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{w}{a}$  و مشتق‌های آن‌ها را به‌کار می‌گیریم و در متریک جای‌گذاری می‌کنیم:

$$ds_\gamma^\tau = -\left(\frac{1}{u^\tau} - a^\tau(\tau)\right) d\tau^\tau - \frac{1}{u^\tau} d\tau du$$

$$u = \frac{1}{w} \rightarrow du = -\frac{1}{w^\tau} dw$$

$$\tau = T - \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{w}{a} \rightarrow d\tau = dT - \frac{1}{a^\tau} \frac{dw}{1 - \frac{w^\tau}{a^\tau}}$$

$$= dT - \frac{1}{a^\tau} \times \frac{dw}{\frac{a^\tau - w^\tau}{a^\tau}} = dT - \frac{1}{a^\tau} \times \frac{a^\tau dw}{a^\tau - w^\tau}$$



$$= dT - \frac{dw}{a^\gamma - w^\gamma}$$

بنابراین داریم:

$$d\tau^\gamma = dT^\gamma + \frac{dw^\gamma}{(a^\gamma - w^\gamma)^\gamma} - \gamma dT \frac{dw}{a^\gamma - w^\gamma}$$

با جای گذاری عبارت‌ها در متریک (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned} ds_\gamma^\gamma &= - \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{w}\right)^\gamma} - a^\gamma \right) d\tau^\gamma - \frac{\gamma}{\left(\frac{1}{w}\right)^\gamma} d\tau \left( -\frac{1}{w^\gamma} \right) dw \\ &= - (w^\gamma - a^\gamma) d\tau^\gamma + \gamma d\tau dw = (a^\gamma - w^\gamma) d\tau^\gamma + \gamma d\tau dw \\ &= (a^\gamma - w^\gamma) \left( dT^\gamma + \frac{dw^\gamma}{(a^\gamma - w^\gamma)^\gamma} - \frac{\gamma dT dw}{a^\gamma - w^\gamma} \right) \\ &\quad + \gamma dw \left( dT - \frac{dw}{a^\gamma - w^\gamma} \right) \\ &= (a^\gamma - w^\gamma) dT^\gamma + \frac{dw^\gamma}{a^\gamma - w^\gamma} - \gamma dT dw + \gamma dT dw - \frac{\gamma dw^\gamma}{a^\gamma - w^\gamma} \\ &= (a^\gamma - w^\gamma) dT^\gamma + \frac{dw^\gamma}{a^\gamma - w^\gamma} - \frac{\gamma dw^\gamma}{a^\gamma - w^\gamma} \\ &= (a^\gamma - w^\gamma) dT^\gamma - \frac{dw^\gamma}{a^\gamma - w^\gamma} \\ &= (a^\gamma - w^\gamma) dT^\gamma + \frac{dw^\gamma}{w^\gamma - a^\gamma} = ds_\gamma^\gamma \end{aligned}$$

و به این ترتیب متریک (۲۴.۳) از متریک (۱۹.۳) و قرار دادن عبارت  $u = \frac{1}{w}$  و

$$\tau = T - \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{w}{a}$$

### ۳-۵ افق روی جهان سطح

جدا از گذشته‌ی افق مکان معین دیگری به نام آینده‌ی افق رویداد وجود دارد. اگر  $a^r(\tau) = a^r$  ثابت باشد در مکان  $u = \frac{1}{a}$  افق جهان سطح را تعریف می‌کنیم.

دیده می‌شود که وقتی کوارک شتاب می‌گیرد روی جهان سطح ریسمان یک افق شکل می‌گیرد.

با جاگذاری مختصات  $\tau$  و  $w$  در متریک (۱۹.۳) خواهیم داشت :

$$ds_{\gamma}^2 = -\left(\frac{1}{u^2} - a^r(\tau)\right) d\tau^2 - \frac{2}{u^2} d\tau du$$

$$u = \frac{1}{w} \rightarrow du = -\frac{1}{w^2} dw$$

$$ds_{\gamma}^2 = -\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{w}\right)^2} - a^r\right) d\tau^2 - \frac{2}{\left(\frac{1}{w}\right)^2} d\tau \left(-\frac{1}{w}\right) dw$$

$$= -\left(w^2 - a^r(\tau)\right) d\tau^2 + 2d\tau dw$$

$$\rightarrow ds_{\gamma}^2 = -\left(w^2 - a^r(\tau)\right) d\tau^2 + 2d\tau dw \quad (25.3)$$

سرانجام برای رسیدن به ژئودزی نورگونه باید داشته باشیم:  $ds_{\gamma}^2 = 0$

$$ds_{\gamma}^2 = 0 \rightarrow -\left(w^2 - a^r(\tau)\right) d\tau^2 + 2d\tau dw = 0$$

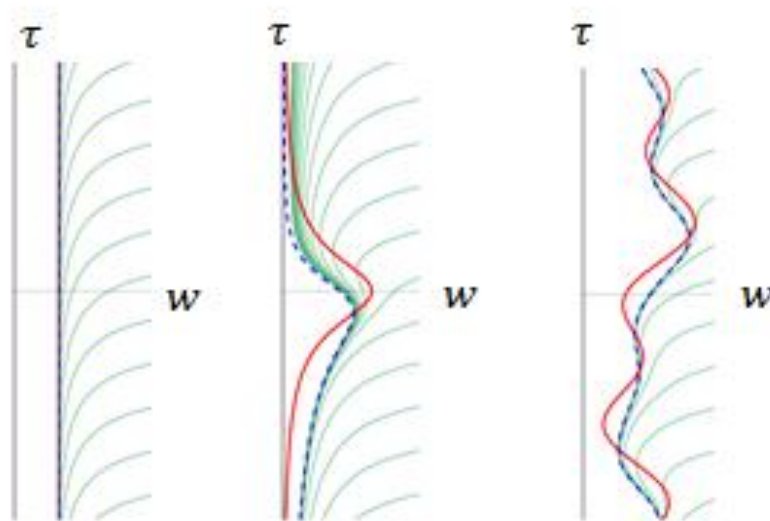
$$\rightarrow \left(w^2 - a^r(\tau)\right) d\tau = 2dw$$

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(w^2(\tau) - a^r(\tau)\right) \quad (26.3)$$

اکنون به‌ازای شتاب‌های متغیر با زمان‌های مختلف فضا-زمان ایجاد شده با متریک (۲۵.۳) را بررسی

می‌کنیم و به افق رویدادی که شکل می‌گیرد توجه می‌کنیم.

در شکل (۴.۳) افق رویداد برای چندین فضا-زمان دینامیکی دو بعدی که با یک  $a(\tau)$  داده شده تعیین می‌شود را رسم کردیم. منحنی‌های شتابدار را با قرمز رسم کردیم. افق رویداد با آبی خط‌چین رسم شده است می‌توانیم ببینیم که حتی در زمان کم برای جهان‌سطح یک کوارک شتابدار افق رویداد دارد. اگر  $a(\tau)$  فقط تابعی از  $\tau$  باشد نیاز داریم آن را برای  $\tau$  گذشته بشناسیم.

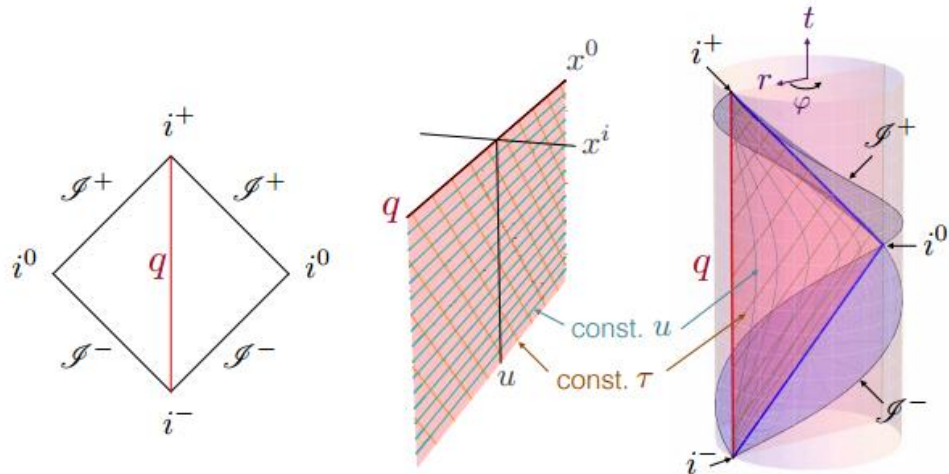


شکل (۴.۳) افق رویداد برای مسیر کوارک شتابدار از چپ به راست تابع‌های شتاب مختلف را داریم

### ۳-۶ مثال کوارک ایستا

چون به مجموعه مختصات و علامت‌های مختلف گرایش داریم، با ساده‌ترین مثال شروع می‌کنیم یعنی همان کوارکی که در آغاز ساکن است و با مختصات  $x^\mu = (\tau, 0, 0, 0)$  نشان داده می‌شود. در شکل (۵.۳) مسیر کوارک در فضا-زمان مینکوفسکی روی نمودار Penrose کشیده شده است. همین‌طور روی این نمودار قسمت‌های مختلف مرز فضا-زمان مینکوفسکی که همان آینده و گذشته نامحدود

زمان گونه  $i^\pm$ ، آینده و گذشته‌ی نامحدود نورگونه  $J^\pm$  و نامحدود فضاگونه  $i^\circ$  است و به ترتیب شامل انتهای ژئودزیک‌های زمان گونه، نورگونه و فضاگونه هستند، را مشخص کردیم.



شکل (۵.۳) از چپ مسیر ذره در فضا-زمان مینکوفسکی در نمودار Penrose

$AdS$  پوانکاره در وسط و  $AdS$  سرتاسری در سمت راست

کوارک ما از  $i^-$  شروع می‌کند و به  $i^+$  می‌رسد.

جهان سطح مرتبط با مورد کوارک را با مختصات زیر نشان می‌دهیم:

$$X^M = (\tau + u, \cdot, \cdot, \cdot, u) \quad (۲۷.۳)$$

در نقشه وسط و سمت راست از شکل (۵.۳) به ترتیب  $AdS$  پوانکاره و سرتاسری را رسم کردیم. جهان سطح را قبلاً توضیح دادیم حالا به طور خلاصه رابطه بین دو ارائه را توضیح می‌دهیم. برطبق قرارداد در  $AdS$  پوانکاره مختصات محوری  $u$  را که به طور عمودی تا پایین افزایش می‌یابد و در  $AdS$  سرتاسری شعاعی  $r$  که به سمت بیرون است (در استوانه مرز  $AdS$  با  $r = \infty$  نشان داده شده است) را رسم کرده‌ایم.

وقتی نمودار Penrose سمت چپ شکل (۵.۳) در استوانه خم می‌شود، به طور کامل در مرز  $AdS$  سرتاسری شکل سمت راست قرار می‌گیرد. گذشته و آینده‌ی افق نورگونه (که با خط مورب ارغوانی در  $AdS$  سرتاسری نشان داده شده است) به ترتیب با  $(i^-, J^-, i^\circ)$  و  $(i^\circ, J^+, i^+)$  محدود شده‌اند و با

حجم‌های ژئودزیک نورگونه از  $i^-$  و  $i^0$  که در  $i^+$  و  $i^0$  تغییر جهت می‌دهند، تولید می‌شوند. به عبارت دیگر تکه‌ی  $AdS$  پوانکاره می‌تواند با مجموعه‌ایی از نقاط حجمی که جداکننده‌های زمان‌گونه‌ی  $i^0$  هستند تعریف شود.

جهان‌سطح کووارک ساکن در مختصات پوانکاره مستقیم به سمت پایین امتداد می‌یابد و در مختصات سرتاسری مستقیم در سرتاسرش امتداد می‌یابد اما همه‌ی جهان‌سطح نامحدود ریسمان که در روی تکه‌ی پوانکاره قرار دارد (با راس‌های مثلث نشان داده شده است) تکه‌ای در  $AdS$  کلی نشان داده شده است.

جهان‌سطح سرتاسری توسط افق پوانکاره در طول  $u = \infty$  از وسط قطع شده است (خط آبی قطری).

### ۳-۶-۱ تمامیت سرتاسری جهان‌سطح ریسمان

همان‌طور که بحث شد متریک (۱۹.۳) می‌تواند بیش‌تر بسط داده شود. انتهای یک ریسمان فیزیکی نمی‌تواند در میان هوا باشد. ریسمان در آن طرف تکه‌ی مختصاتی ادامه می‌یابد. از آنجایی که ریسمان یک جسم ژئومتریک است (به‌عنوان سطوح بی‌نهایتی که به شرایط مرز نیاز دارند تعریف می‌شود) توجه به این‌که کدام یک از مختصات سرتاسری و یا پوانکاره را برای توصیف کردن آن انتخاب می‌کنیم اهمیتی ندارد.

برای مورد کووارک ایستا که در بالا بحث شد، خط سبز در  $i^0$  با مسیر پادکووارک مرتبط است.

به‌ویژه شرایط مرزی خروجی برای مسیر کووارک که با  $x^\mu(\tau)$  تعیین می‌شود، به‌کار می‌روند نه برای جهان‌سطح تعیین شده در گذشته‌ی نقاط انتهایی از  $\tau = -\infty$  (در این مورد  $i^-$ ) یا آینده‌ی نقاط انتهایی  $\tau = +\infty$  ( $i^+$ ).

برای این‌که کووارک ایستا را روی  $AdS$  سرتاسری ببینیم راه‌های واقعی زیادی وجود دارد.

از آن جایی که مسیر کوارک با خط عمودی در  $\varphi = 0$  و  $r = \infty$  داده می‌شود، نیاز داریم آن را در خط راست ( $\varphi = 0$  و  $r = \infty$ ) برای همه‌ی زمان‌ها بسط دهیم.

## فصل ۴

بررسی جواب‌های دقیق معادله‌ی حرکت

## ۴-۱ فضا-زمان نسبیتی

تناظر  $AdS/CFT$  به نام تناظر پیمانانه/گرانش شناخته می‌شود. نظریه‌ی میدانی که تمام پدیده‌های موجود در آن توسط نظریه‌ی میدان‌های همدیس توصیف می‌شود، همان  $CFT$ <sup>۱۶</sup> است. این نظریه دارای تقارن همدیس می‌باشد. از سوی دیگر فضای  $AdS$  یا فضای گرانش را داریم که در این فضا دوگان‌های گرانشی تعریف می‌شود که در واقع جواب‌های معادلات اینشتین می‌باشد. از طرف دیگر مرز فضا دارای تقارن لورنتس است. بنابراین می‌توان گفت که این تناظر نسبیتی است. طبق تناظر به دلیل همدیس بودن فضای  $CFT$  فضای گرانش نیز دارای تقارن همدیس است. بنابراین فضا-زمان نسبیتی فضا-زمانی است که دارای تقارن همدیس می‌باشد و تحت تبدیلات لورنتس و تبدیلات زیر ناوردا باقی می‌ماند:

$$(t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda t, \lambda \vec{x}) \quad (1.4)$$

نکته‌ی دیگری که به آن می‌توان اشاره نمود این است که در فضا-زمان نسبیتی، زمان و مکان به شکل یکسان تغییر می‌کنند [۳].

## ۴-۲ فضا-زمان غیرنسبیتی

از زمان مطرح شدن ایده‌ی  $AdS/CFT$  تلاش‌های زیادی برای استفاده از این موضوع در بررسی سیستم‌های واقعی‌تر که در آزمایشگاه‌ها در دسترسند، صورت گرفته است.

از آنجایی که در فیزیک ماده‌ی چگال بیش‌تر با سیستم‌های غیرنسبیتی سروکار داریم، تعمیم دوگانی  $AdS/CFT$  به سیستم‌های غیرنسبیتی می‌تواند ابزار مناسبی برای درک این پدیده‌ها در ماده‌ی چگال باشد.

---

<sup>۱۶</sup>Conformal Field Theory



همان‌طور که در بخش قبل به آن اشاره شد، در تناظر  $AdS/CFT$  نسبیتی، نظریه‌ها دارای تقارن همدیس هستند و پدیده‌ها توسط میدان‌های همدیس نسبیتی توصیف می‌شوند. با استفاده از این نکته می‌توان این‌طور بیان نمود که سیستم‌هایی که در حالت غیرنسبیتی هستند، توسط نظریه‌های میدان‌های غیرنسبیتی توصیف می‌شوند و شامل تقارن همدیس خاصی می‌شوند. از سوی دیگر این سیستم‌ها دارای تقارن خاصی به نام تقارن مقیاس هستند که به صورت زیر است:

$$(t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda \vec{x}) \quad (۲.۴)$$

یعنی سیستم‌های غیرنسبیتی تحت تقارن مقیاس ناوردا می‌باشند که البته به دلیل غیرنسبیتی بودن این نظریه‌ها، زمان و مکان به یک شکل مقیاس نمی‌شوند. دانستن این نکته جالب است که در ماده‌ی چگال علاوه بر نظریه‌های همدیس نسبیتی مشابه غیرنسبیتی آن نیز وجود دارد. [۳]

### ۳-۴ مطالعه‌ی کوآرک-پاد کوآرک شتابدار در نظریه‌ی ابر تقارن یانگ-میلز $SYM$

[۸]

در منبع [۱۲] حل کامل ریسمان شتابدار که از یک جفت کوآرک-پاد کوآرک سنگین تشکیل شده و در فضای  $AdS_5$  قرار دارد ارائه شده است. برای یک ریسمان شتابدار افقی وجود دارد که بر تابش کوآرک سنگین اثر می‌گذارد. این افق در توصیف حرکت براونی کوآرک مهم است. یک توصیف خلاصه‌ای از حل برای ریسمان شتابدار در فضای  $AdS_5$  و ارتباط با یک جفت کوآرک-پاد کوآرک سنگین شتابدار و در یک مسیر از روبه‌رو داده شده است. دریافتیم از ریسمانی که از کوآرک سنگین توسط افقی که روی جهان سطح وجود دارد، جدا شده است و در طول شتابدار بودن تابش می‌کند یک افق سیاه‌چاله وجود دارد و بخش بالایی ریسمان با کوآرک سنگین حرکت می‌کند اما جزء پایین‌تر ریسمان با انرژی تابش ارتباط دارد. یک جفت کوآرک-پاد کوآرک در مکان  $u = u_m$  از شامه جاسازی شده است. چارچوب مناسبی بین خود کوآرک-پاد کوآرک وجود دارد که شتاب ثابتی نسبت به آن

دارند. یک میدان الکتریکی خالص  $E_f$  به شامه‌ی این کوارک-پادکووارک اعمال می‌شود. (به‌علاوه میدان الکتریکی  $E_{f\tau}$  که نیروی جذب بین کوارک-پادکووارک را به تعادل می‌رساند هنوز ناشناخته است).

متریکی که خلاء فضای  $AdS_5$  را توصیف می‌کند، را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$ds^2 = R^2 \left[ \frac{du^2}{u^2} - u^2 dt^2 + u^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right] \quad (3.4)$$

$$ds^2 = \frac{R^2}{w^2} (dw^2 - dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.4)$$

که در این متریک شعاع انحنای فضای  $AdS_5$  است و  $w = \frac{1}{u}$  را معرفی می‌کنیم. همچنین سه بعد مکانی  $x, y, z$  و یک بعد زمانی  $t$  و یک بعد هولوگرام  $u$  را در این متریک می‌شناسیم. از این متریک می‌توان عبارتهای زیر را به دست آورد:

$$G_{uu} = \frac{R^2}{u^2}$$

$$G_{tt} = -u^2 R^2$$

$$G_{xx} = G_{yy} = G_{zz} = u^2 R^2 \quad (5.4)$$

از فصل اول می‌دانیم که دینامیک ریسمان کلاسیکی با کنش نامبو-گوتو ارائه می‌شود:

$$S = -T_0 \int dt d\sigma \sqrt{-\det \gamma_{\alpha\beta}} \quad (6.4)$$

که در این جا  $\gamma_{\alpha\beta}$  متریک القایی می‌باشد.

برطبق توضیحاتی که در فصل اول داده شد،  $-\det \gamma_{\alpha\beta} = \gamma$  را داریم.

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X}\dot{X} \\ \dot{X}\dot{X} & (\dot{X})^2 \end{pmatrix}$$

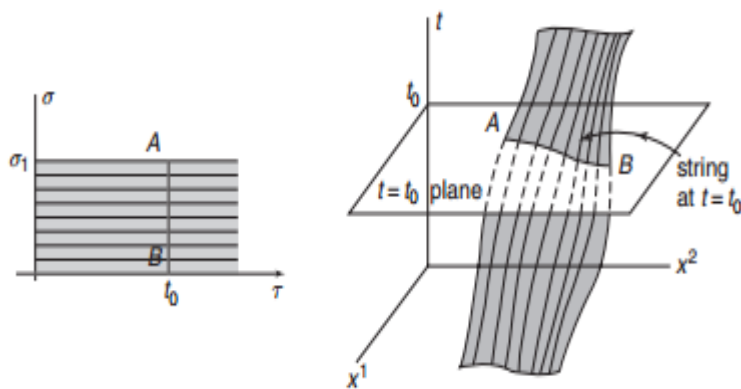
که در این جا مشتق  $X^\mu$  نسبت به  $\tau$  و  $\sigma$  به ترتیب با معادله‌های زیر داده می‌شود:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X}{\partial \tau} = \partial_\tau X^\mu$$

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \partial_\sigma X^\mu \quad (7.4)$$

$T_0$  کشش ریسمان است و مختصات جهان سطح ریسمان با  $(\tau, \sigma)$  داده می‌شود.  $X^\mu(\tau, \sigma)$  به‌عنوان نگاشتی از جهان سطح ریسمان روی فضا-زمان ۵ بعدی است. مطابق با [۱] یک پیمانه‌ی ایستا به‌وسیله‌ی  $(\tau, \sigma) = (t, u)$  را انتخاب می‌کنیم. بیان این نکته مهم است که می‌توان جهان سطح ریسمان را به‌شيوه‌های مختلف تقسیم‌بندی کرد و کنش ریسمان از انتخاب روشی که پارامتربندی می‌کنیم مستقل است. این حالت درست مانند استقلال الکترومغناطیس از پیمانه‌های مختلفی است که برای بررسی معادلات الکترودینامیکی انتخاب می‌کنیم.

مطابق شکل (۱.۴) ابرصفحه‌ی  $t = t_0$  را در نظر می‌گیریم، تلاقی این ابرصفحه و جهان سطح ریسمان یک منحنی‌ای را به‌وجود می‌آورد که همان شکل ریسمان در  $t = t_0$  از دید ناظر لورنتسی است. به پیمانه‌ای که ریسمان در آن طوری پارامتربندی شود که در هر لحظه از زمان ریسمان را در راستایی مشاهده کنیم که جهان سطح آن با صفحه‌ی زمانی قطع‌کننده تلاقی داشته باشد، پیمانه‌ی ایستا گفته می‌شود. یعنی انتخاب پارامتر  $\sigma$  به گونه‌ای است که از دیدگاه ناظر لورنتسی در زمان موضعی  $t = \tau$  ریسمان حالت ایستا داشته باشد.



شکل ۱.۴ انتخاب پیمانه‌ی ایستا [۱]

$X^\mu = (t, u, x(t, u), \cdot, \cdot)$  را برای پیدا کردن یک چارچوب مستقیم  $\gamma$  تعریف می‌کنیم. این  $X^\mu$

مختصه‌هایی بر حسب مکان، بعد هولوگرام و بعد زمانی دارد.

از  $X^\mu$  تعریف شده نسبت به  $t$  و  $u$  مشتق می‌گیریم تا بتوانیم به کمک رابطه  $\gamma$  معادله‌ی حرکت ریسمان کلاسیکی را بنویسیم.

در این قسمت کار را با توضیحاتی در باره‌ی روش به دست آوردن معادله‌ی حرکت شروع می‌کنیم. معادله‌ی حرکت ریسمان نسبیتی را می‌توان از کنش نامبو-گوتو یافت. هدف وردش کنش است. پس  $\delta S$  را برابر با صفر قرار می‌دهیم. در ابتدا کنش را با چگالی لاگرانژی بازنویسی می‌کنیم:

داریم:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu \dot{X}^\mu) \quad (۸.۴)$$

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu \dot{X}^\mu) = \frac{-T_0}{c} \sqrt{-\det \gamma_{\alpha\beta}} = \frac{-T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot \dot{X})^\tau - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)} \quad (۹.۴)$$

روش وردش کنش را اعمال می‌کنیم:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \quad (۱۰.۴)$$

البته در این معادله از عبارت زیر استفاده کردیم:

$$\delta \dot{X}^\mu = \frac{\delta(\partial X^\mu)}{\partial \tau} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} \quad (۱۱.۴)$$

و همین‌طور برای  $\delta \dot{X}^\mu$  هم همین عبارت را داریم. حالا تکانه‌های تعمیم‌یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$$

$$P_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \quad (۱۲.۴)$$

و روش جزء به جزء را به کار می‌بریم:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma \left[ \frac{\partial(\delta X^\mu P_\mu^\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\delta X^\mu P_\mu^\sigma)}{\partial \sigma} - \delta X^\mu \left( \frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] =$$

$$\int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma (\delta X^{\mu} P_{\mu}^{\tau}) \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (\delta X^{\mu} P_{\mu}^{\sigma}) \Big|_{\sigma}^{\sigma} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma \delta X^{\mu} \left( \frac{\partial P_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} \right) \quad (13.4)$$

از آنجایی که وردش گرفتن یعنی  $\delta S = 0$  بنابراین باید راهی بیابیم که تک تک این عناصر برابر با صفر شوند:

وردش باید در زمان ابتدایی و انتهایی صفر باشد بنابراین جمله‌ی اول صفر می‌شود. پس معادله‌ی بالا به عبارت زیر تقلیل می‌یابد:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (\delta X^{\mu} P_{\mu}^{\sigma}) \Big|_{\sigma}^{\sigma} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma \delta X^{\mu} \left( \frac{\partial P_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} \right) \quad (14.4)$$

و همچنین برای مکان ابتدا و انتها نیز وردش نداریم پس جمله‌ی اول از معادله‌ی بالا برابر با صفر است و اگر بخواهیم که کل معادله برابر با صفر باشد از آنجایی که  $\delta X^{\mu}$  نمی‌تواند صفر باشد پس باید:

$$\left( \frac{\partial P_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} \right) = 0 \quad (15.4)$$

و این همان معادله‌ی حرکت است.

حالا با استفاده از اطلاعات مسأله کار را ادامه می‌دهیم تا بتوانیم به معادله‌ی حرکت برسیم:

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t} = (1, 0, \dot{x}, 0, 0) \rightarrow \dot{X}^{\mu} \dot{X}^{\nu} G_{\mu\nu} = G_{tt} \times 1 + \dot{x}^{\nu} G_{xx} \quad (17.4)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial u} = (0, 1, \dot{x}, 0, 0) \rightarrow \dot{X}^{\mu} \dot{X}^{\nu} G_{\mu\nu} = 0 + G_{uu} + \dot{x}^{\nu} G_{xx} \quad (18.4)$$

$$\dot{X} \dot{X} G_{\mu\nu} = 0 + 0 + \dot{x} \dot{x} G_{xx} \quad (19.2)$$

حالا  $-\det \gamma_{\alpha\beta} = \gamma$  را می‌سازیم و در ادامه از معادله‌های (5.4) کمک می‌گیریم:

$$-\det \gamma_{\alpha\beta} = (\dot{X} \dot{X})^{\nu} - (\dot{X}^{\mu} \dot{X}_{\mu}) (\dot{X}^{\mu} \dot{X}_{\mu}) =$$

$$(\dot{x} \dot{x} G_{xx})^{\nu} - (G_{tt} + \dot{x}^{\nu} G_{xx}) (G_{uu} + \dot{x}^{\nu} G_{xx}) =$$

$$\left[ (R^{\nu} u^{\nu} \dot{x} \dot{x})^{\nu} - (R^{\nu} (-u^{\nu}) + R^{\nu} \dot{x}^{\nu} u^{\nu}) \times \left( \frac{R^{\nu}}{u^{\nu}} + R^{\nu} \dot{x}^{\nu} u^{\nu} \right) \right] =$$

$$\left[ R^{\nu} u^{\nu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\nu} - [-R^{\nu} - R^{\nu} u^{\nu} \dot{x}^{\nu} + R^{\nu} \dot{x}^{\nu} + R^{\nu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\nu} u^{\nu}] \right] =$$

$$R^{\tau} \left[ u^{\tau} \dot{x}^{\tau} \dot{x}^{\tau} + 1 + u^{\tau} \dot{x}^{\tau} - \dot{x}^{\tau} - \dot{x}^{\tau} \dot{x}^{\tau} u^{\tau} \right] =$$

$$R^{\tau} \left[ 1 - \dot{x}^{\tau} + \dot{x}^{\tau} u^{\tau} \right] \quad (20.4)$$

بنابراین با داشتن  $-det\gamma_{\alpha\beta}$  و دانستن تکانه‌های تعمیم‌یافته همان‌طور که در بالا گفته شد، می‌توانیم محاسبه‌ها را ادامه دهیم:

$$P_{\mu}^{\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}}$$

$$P_{\mu}^{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}}$$

لاگرانژی  $\mathcal{L}$  را با توجه به فرمول زیر می‌سازیم:

$$\mathcal{L} = \frac{-T_0}{c} \sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}} \quad (9.4)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{R^{\tau} (1 - \dot{x}^{\tau} + \dot{x}^{\tau} u^{\tau})} \quad (21.4)$$

و از این لاگرانژی در محاسبات زیر استفاده می‌کنیم.

$$P_{\mu}^{\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \times \frac{-\dot{x}^{\tau}}{\sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}} \quad (22.4)$$

و همچنین:

$$P_{\mu}^{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \times \frac{\dot{x}^{\tau} u^{\tau}}{\sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}} \quad (23.4)$$

با استفاده از توضیحاتی که در بالا درباره‌ی معادله‌ی حرکت آمده است:

$$\frac{\partial P_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \rightarrow \frac{\partial P_{\mu}^{\tau}}{\partial t} + \frac{\partial P_{\mu}^{\sigma}}{\partial u} = 0 \quad (15.4)$$

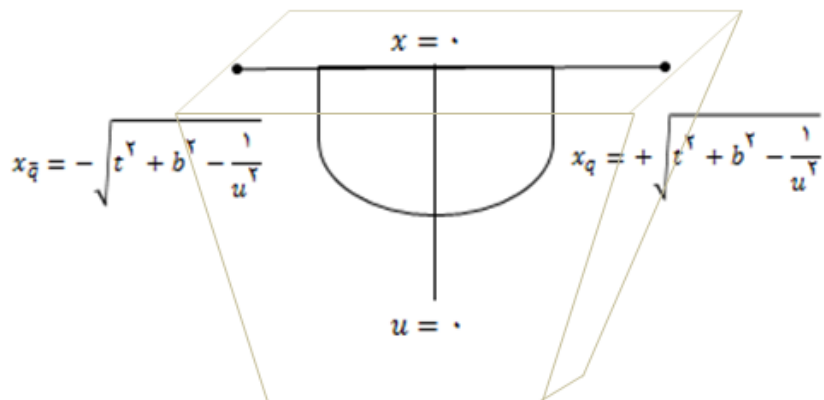
پس داریم:

$$-\frac{T_0}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\dot{x} u^{\tau}}{\sqrt{\gamma}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\gamma}} \right) \right] = 0 \quad (24.4)$$

این معادله‌ی حرکت ریسمانی است که مختصه‌ی  $X^\mu = (t, u, x(t, u), \cdot, \cdot)$  را در جهان‌سطح دارد. با حل این معادله و به‌دست آوردن  $x(t, u)$ ، می‌توان متوجه شد که ریسمان بر چه اساسی حرکت می‌کند. در کل این معادله یک معادله‌ی غیرخطی متفاوت است که دو متغیر و دو مشتق را درگیر می‌کند از حل دقیق معادله‌ی (۲۴.۴) جواب  $x$  به‌دست می‌آید:

$$x = \pm \sqrt{t^2 + b^2 - \frac{1}{u^2}} \quad (25.4)$$

که قسمت مثبت  $x$  مربوط به حرکت بخش راست ریسمان و قسمت منفی آن مربوط به حرکت بخش چپ ریسمان است و با همدیگر به‌صورت هموار در قسمت میانی ارتباط دارند. می‌دانیم که انتهای ریسمان مربوطه کوارک و پادکواری قرار دارند که شتابدارند و در کنار همدیگر و با جهت‌های مخالف نسبت به همدیگر حرکت می‌کنند. در این رابطه  $b$  با شتاب کوارک و پادکواری نسبت معکوس دارد یعنی  $b = \frac{1}{a}$  را داریم. این توضیحات را می‌توان در شکل (۲.۴) مشاهده کرد:



شکل ۲.۴ جواب دقیق کوارک-پادکواری شتابدار

در نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز  $SYM$

#### ۴-۴ مطالعه‌ی کوارک-پادکووارک شتابدار در نظریه‌ی غیرنسبیتی لیفشیتز

در مرحله‌ی بعد مسأله‌ی مطالعه‌ی کوارک-پادکووارک شتابدار در نظریه غیرنسبیتی لیفشیتز را بررسی می‌کنیم و محاسبات را ادامه می‌دهیم.

روند کار دقیقاً مانند بخش قبل می‌باشد یعنی در این‌جا نیز از کنش نامبو-گوتو  $S = -T_0 \int dt d\sigma \sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}$  و متریک القایی  $\gamma_{\alpha\beta}$  و مشتق‌های  $X^\mu$  نسبت به  $t$  و  $u$  استفاده می‌کنیم، به کمک  $\sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}$  لاگرانژی را می‌سازیم و لاگرانژی‌ای که ساختیم را در تولید تکانه‌های تعمیم‌یافته به کار می‌بریم و به این ترتیب معادله‌ی حرکت ریسمان را در این حالت به دست می‌آوریم. اما تفاوتی که این بخش با بخش قبل دارد این است که در متریک اصلی تغییراتی ایجاد می‌شود که ناشی از بررسی حالت غیرنسبیتی است. متریک مربوط به حالت غیرنسبیتی به صورت زیر است:

$$ds^2 = R^2 \left[ \frac{du^2}{u^2} - u^2 dt^2 + u^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right] \quad (26.4)$$

در این متریک هم  $R$  شعاع فضای  $AdS_5$  و  $w = \frac{1}{u}$  و چهار بعد فضا-زمان و یک هولوگرام همان تعاریف را دارند اما  $G_{tt}$  دیگر مانند سابق نیست. از روی متریک می‌توان عبارتهای زیر را به دست آورد:

$$G_{tt} = -R^2 u^2$$

$$G_{uu} = \frac{R^2}{u^2}$$

$$G_{xx} = G_{yy} = G_{zz} = u^2 R^2 \quad (27.4)$$

این‌جا نیز از همان  $X^\mu$  و همان پیمانهای ایستا استفاده می‌کنیم و محاسبه‌ها را پیش می‌بریم.

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t} = (1, 0, \dot{x}, 0, 0) \rightarrow \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu G_{\mu\nu} = G_{tt} \times 1 + \dot{x}^2 G_{xx} \quad (28.4)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial u} = (0, 1, \dot{x}, 0, 0) \rightarrow \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu G_{\mu\nu} = 0 + G_{uu} + \dot{x}^2 G_{xx} \quad (29.4)$$



$$\dot{X}\dot{X}G_{\mu\nu} = \cdot + \cdot + \dot{x}\dot{x}G_{xx} \quad (30.4)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} -\det\gamma_{\alpha\beta} &= (\dot{X}\dot{X})^\tau - (\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu)(\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu) = \\ &= (\dot{x}\dot{x}G_{xx})^\tau - (G_{tt} + \dot{x}^\tau G_{xx}) (G_{uu} + \dot{x}^\tau G_{xx}) = \\ &= \left[ (R^\tau u^\tau \dot{x}\dot{x})^\tau - (R^\tau (-u^\tau) + R^\tau \dot{x}^\tau u^\tau) \times \left( \frac{R^\tau}{u^\tau} + R^\tau \dot{x}^\tau u^\tau \right) \right] = \\ &= \left[ R^\tau u^\tau \dot{x}^\tau \dot{x}^\tau - \left[ -R^\tau u^\tau - R^\tau u^\tau \dot{x}^\tau + R^\tau \dot{x}^\tau + R^\tau \dot{x}^\tau \dot{x}^\tau u^\tau \right] \right] = \\ &= R^\tau \left[ u^\tau \dot{x}^\tau \dot{x}^\tau + u^\tau + u^\tau \dot{x}^\tau - \dot{x}^\tau - \dot{x}^\tau \dot{x}^\tau u^\tau \right] = \\ &= R^\tau \left[ u^\tau - \dot{x}^\tau + \dot{x}^\tau u^\tau \right] \quad (31.4) \end{aligned}$$

به این ترتیب  $-\det\gamma_{\alpha\beta}$  ساخته می‌شود و به کمک آن نیز به دست می‌آید:

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{R^\tau (u^\tau - \dot{x}^\tau + \dot{x}^\tau u^\tau)} \quad (32.4)$$

از  $\mathcal{L}$  استفاده می‌کنیم و معادلات زیر که مربوط به تکانه‌های تعمیم‌یافته هستند را به دست می‌آوریم:

$$\rho_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{T_0}{c} \times \frac{-\tau \times \dot{x}}{\sqrt{-\det\gamma_{\alpha\beta}}}$$

$$\rho_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{T_0}{c} \times \frac{\tau \times \dot{x} u^\tau}{\sqrt{-\det\gamma_{\alpha\beta}}}$$

و از این تکانه‌های تعمیم‌یافته برای یافتن معادله حرکت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial \rho_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = \cdot \rightarrow \frac{\partial \rho_\mu^\tau}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\mu^\sigma}{\partial u} = \cdot \quad (15.4)$$

$$\left[ -\frac{T_0}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\dot{x} u^\tau}{\sqrt{\gamma}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\gamma}} \right) \right] = \cdot \right] \quad (23.4)$$

به این ترتیب معادله‌ی حرکت به دست آمد حالا باید بتوانیم  $x$  ای بیابیم که جواب معادله حرکت بالا باشد. در ادامه به بعضی از دسته جواب‌هایی اشاره می‌کنیم که بعد از امتحان کردن در معادله‌ی حرکت بالا متوجه شدیم درست نمی‌باشند:

الف:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\lambda}{u^\gamma}}$$

ب:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\lambda}{\gamma u^\gamma}}$$

پ:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\lambda}{u^\gamma}}$$

ت:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\lambda}{u^\gamma} - \frac{\lambda}{u^\gamma}}$$

ث:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\lambda}{u^\gamma} + \sqrt{\frac{\lambda}{u^\gamma}}}$$

ج:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + \frac{b^\gamma}{u^\gamma} - \frac{\lambda}{u^\gamma}}$$

چ:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^\gamma}$$

ح:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\gamma}{\gamma u^\gamma} + u^\gamma}$$

خ:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\gamma}{\gamma u^\gamma} + u}$$

د:

$$x = \pm \frac{\gamma}{u} \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\gamma}{\gamma u^\gamma}}$$

ذ:

$$x = \pm \sqrt{\frac{t^\gamma}{u^\gamma} + \frac{b^\gamma}{u^\gamma} - b^\gamma - \frac{\gamma}{\gamma u^\gamma}}$$

برای نمونه یک مورد از موارد بالا را امتحان می‌کنیم و با اثبات نشان می‌دهیم که هیچ‌کدام از این جواب‌ها در معادله‌ی حرکت بالا صدق نمی‌کنند. بنابراین پیشنهاد می‌شود از این دسته جواب‌ها استفاده نشود. برای اثبات از  $x$ ، عبارت  $b$  را می‌سازیم سپس از روی  $x$  نسبت به زمان و مکان مشتق می‌گیریم و مشتق نسبت به زمان و مکان را در  $\gamma$  قرار می‌دهیم، اگر بعد از جای‌گذاری عبارت داخل  $\gamma$  حاصله با  $b^\gamma$  برابر شد آن جواب مورد نظر ماست.

بررسی مورد الف:

$$x = \pm \sqrt{t^\gamma + b^\gamma - \frac{\gamma}{u^\gamma}} = \pm \left( t^\gamma + b^\gamma - \frac{\gamma}{u^\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow x^\gamma = t^\gamma + b^\gamma - \frac{\gamma}{u^\gamma} \rightarrow b^\gamma = x^\gamma - t^\gamma + \frac{\gamma}{u^\gamma}$$

$$\dot{x} = \frac{t}{x} \quad , \quad \dot{x} = \frac{\gamma}{\gamma} \left( \frac{\gamma u^\gamma}{u^\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\gamma}{u^\gamma x}$$

$$\begin{aligned}
g &= R^f \left( u^r + \dot{x}^r u^f - \dot{x}^r \right) = R^f \left( u^r + \left( \frac{\dot{r}}{u^\Delta x} \right)^r u^f - \left( \frac{t}{x} \right)^r \right) \\
&= R^f \left( u^r + \frac{f}{u^f x^r} - \left( \frac{t}{x} \right)^r \right) \\
&= \frac{R^f}{x^r} \left( u^r x^r + \frac{f}{u^f} - t^r \right) \neq b^r
\end{aligned}$$

بقیهی جوابها هم به همین صورت قابلیت جای گذاری دارند.

## جمع‌بندی و نتیجه‌گیری:

در این پایان‌نامه ابتدا مفاهیمی مقدماتی از فیزیکی ارائه شد که برای درک بهتر نظریه‌ی ریسمان و محاسبات مربوط به پایان‌نامه مورد نیاز بود. سپس هولوگرافی شرح داده شد و می‌دانیم هولوگرافی را زمانی استفاده می‌کنیم که به کمک تناظر  $AdS/CFT$  به جای محاسبه‌ی کوآرک و پادکوآرک شتابدار، جهان‌سطح ریسمان مربوطه را بررسی کنیم. در فصل دوم فضای  $AdS$  و ویژگی‌های این فضا با معرفی مثال‌هایی از این فضا گفته شد و سیستم‌های مختصاتی مختلفی که به کمک آن‌ها می‌توان این فضا را توصیف کرد نشان داده شد سپس مختصات پوانکاره و سرتاسری و تفاوت آن‌ها تعریف شد. در ادامه در فصل سوم محاسبه جهان‌سطح کوآرک-پادکوآرک شتابدار با استفاده از نظریه‌ی ریسمان و دوگانی  $AdS/CFT$  بررسی شد. استدلال شد که مختصات فضا-زمان  $AdS$  در بررسی مسأله نقش مهمی دارد و از آن‌جایی که در مختصات پوانکاره تکینگی‌هایی داریم، در نظر گرفتن مختصات سرتاسری مناسب‌تر از مختصات پوانکاره است. در فصل چهارم به‌عنوان مثال جواب تحلیلی دقیق برای مورد خاص شتاب ثابت ذکر گردید. سپس در همین فصل مورد حالت غیرنسبیتی لیفشیتز را برای کوآرک-پادکوآرک شتابدار بررسی کردیم و دسته جواب‌هایی را برای حل معادله‌ی حرکت مربوطه پیشنهاد کردیم اما هیچ‌کدام از این جواب‌ها جواب درست نبودند. برای نمونه یکی از این جواب‌ها را در معادله‌ی حرکت مربوطه امتحان کردیم و اثبات شد که جواب معادله نیست. برای نتیجه‌گیری باید گفت که هرگاه به جای محاسبه‌ی کوآرک-پادکوآرک شتابدار در نظریه‌ی مرز، خواستیم از جهان‌سطح ریسمان مربوطه در فضای  $AdS$  استفاده کنیم، انتخاب فضای  $AdS$  سرتاسری مناسب‌تر از نوع پوانکاره‌ی آن است.

پیوست آ

نمودار Penrose

این نمودار یعنی متریک را به دست بیاوریم تا بتوانیم نقاطی که در بی‌نهایت هستند را در ناحیه‌ای محدود از فضا به هم نزدیک کنیم. به این معنا که شاید بشود همه‌ی فضا-زمان‌های بی‌نهایت را روی یک شکل محدود نشان داد به طوری که هر نقطه روی این شکل باید بتواند معرف نقطه‌ای در بی‌نهایت باشد.

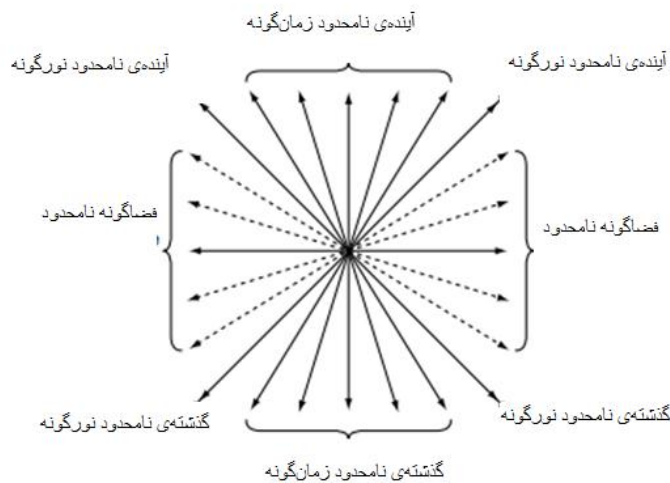
متریک فضا-زمان مینکوفسکی در مختصات قطبی کروی را به صورت زیر داریم:

$$d\tilde{s}^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.A)$$

با تبدیل مختصات نورگونه‌ی  $u = ct + r$  و  $v = ct - r$  به متریک زیر می‌رسیم:

$$d\tilde{s}^2 = dudv + \frac{1}{4}(u - v)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.A)$$

مختصات  $r$  و  $t$  می‌تواند انواع متفاوتی از بی‌نهایتی فضا-زمان مینکوفسکی را در شکل (1.A) نشان دهد.



شکل (1.A)

عامل هم‌مدیس زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\Omega^2 = \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)} \quad (3.A)$$

و به متریک زیر می‌رسیم:

$$ds^2 = \Omega^2 d\bar{s}^2 = -\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)} + \frac{1}{4} \frac{(u-v)^2}{(1+u^2)(1+v^2)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

حالا مختصات زیر را معرفی می‌کنیم:

$$u = \tan p \quad v = \tan q \quad \frac{(u-v)^2}{(1+u^2)(1+v^2)} = \sin^2(p-q) \quad (5.1)$$

با این مختصات به متریک زیر می‌رسیم:

$$ds^2 = -dpdq + \frac{1}{4} \sin^2(p-q) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1)$$

است، در فضای مینکوفسکی در مختصات نورگونه است. این متریک که دوباره به شکل همدیس مقیاس‌بندی شده

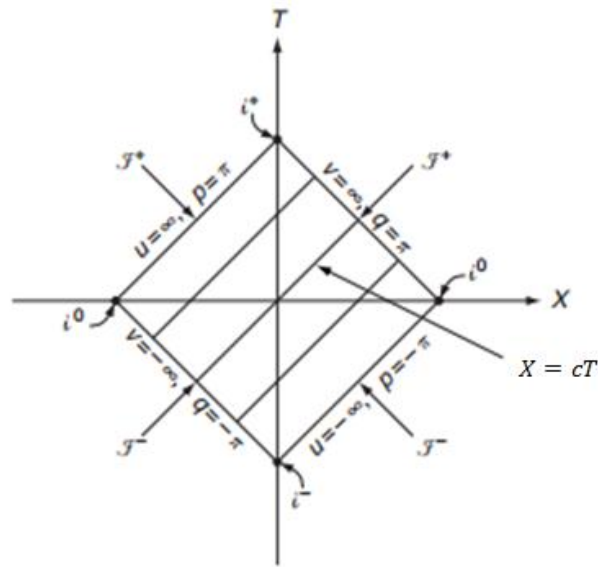
جمله‌ی  $dpdq$  شکلی مانند  $dudv$  در متریک مینکوفسکی معادله (۲) دارد اما فقط یک ناحیه فشرده را پوشش می‌دهد.

مختصات زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p &= cT - R, & q &= cT + R \\ i^+: cT &= \pi, & i^-: cT &= -\pi \\ i^0: q &= -\pi, R = \pi, & p &= -q = \pi, R = -\pi \\ J^+: cT \pm R &= \pi & J^-: cT \pm R &= -\pi \end{aligned}$$

در مختصات  $T, R$  بی‌کرانی‌های زمان‌گونه، نورگونه و فضاگونه در قلمرو محدودی در شکل (۲.آ) نشان داده شده است.





شکل (۲.آ)

آینده و گذشته‌ی نامحدود نورگونه با  $\mathcal{J}^+$  و  $\mathcal{J}^-$  نشان داده شده است. آینده و گذشته‌ی نامحدود زمان گونه با  $i^+$  و  $i^-$  جدا شده‌اند. دو نقطه‌ی  $i^0$  نامحدودهای فضاگونه را نشان می‌دهد.

[1] B.Zwiebach, A First Cours in String Theory, Cambridge U. press, New York (2009).

[۲] برزه کار، ح، (۱۳۹۱)، پایان نامه‌ی ارشد، مطالعه‌ی ریسمان باز در میدان زمینه‌ی غیرنسبیتی، فیزیک، دانشگاه شاهرود.

[۳] سعیدی، ف، (۱۳۹۳)، پایان نامه‌ی ارشد، مطالعه‌ی اثر شوینگر با استفاده از دوگانی  $AdS/CFT$ ، فیزیک، دانشگاه شاهرود.

[۴] عابدینی، ح، (۱۳۹۱)، پایان نامه‌ی ارشد، مطالعه‌ی حرکت شتابدار کوارک سنگین در پلاسمای کوارک گلئون، فیزیک، دانشگاه شاهرود.

[5] Veronica E. Hubeny and Gordonw. Semenoff, string across horizon, JHEP 29 Dec (2015) [arXiv: 1512.08574v1[hep-th]].

[6] J. M. Maldacena, The Large N limit of superconformal field theories and supergranity, Int. J. Theory. Phys. 38 (1999) 1113-1133 [arXiv: hep-th/9711200 [hep-th]].

[7] A. Mikhailov, Nonlinear waves in  $AdS/CFT$  correspondence, [arXiv:hep-th/0305196 [hep-th]].

[8] B. W. Xiao, On the exact solution of the acceleration string in  $AdS(5)$  apace, Phys. Lett. B 665 (2008) 173-177, [arXiv:0804.1343v3 [hep-th]].

[9] M. Natsuume,  $AdS/CFT$  Duality User Guide, [arXiv:1409.3575v3[hep-th] 24 Apr 2015].

[10] S. A Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz , Holographic Superconductors, JHEP 0812 (2008) 015 [arXiv:0810.1563[hep-th]].

[11] Takaaki Ishii and Keiju Murata, Dynamical  $AdS/CFT$  string across horizon, JHEP 29 dec (2015) [arXiv:1512.08574v1[hep-th]].

[12] J. A. Garcia, A. Guijosa and E. j. Pulido, No Line on the Horizon: On Uniform Acceleration and Gluonic Field at String Coupling, JHEP 1301 (2013) 096, [arXiv:1210.4175 [hep-th]].

## **Abstract**

The line traced out by the particle in spacetime is called the world-line. The two-dimensional surface traced out by a string in spacetime will be called the world-sheet.

In this thesis, we study the world-sheet of an accelerating quark anti-quark using the *AdS/CFT* correspondence and discuss the effect of choosing global coordinate or Poincare coordinate of *AdS/CFT* in studying of the problem.

Key word: world-line, world-sheet, string, acceleration quark anti-quark, *AdS/CFT*



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics**

**MSc Thesis in Particle Physics**

**Study of motion of accelerating quark anti-quark using  
holography**

**By: Seyede Maryam Ramzani**

**Supervisor:**

**Dr. K. Bitaghsir Fadafan**

**Advisor:**

**Dr. M. Anabestani**

September 2016