



دانشکده فیزیک

رشته فیزیک گرایش هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه و بررسی نقش نوترینوها در واپاشی دو بتایی هسته  $^{134}\text{Xe}$

نگارنده: محمد محسنی دفرازی

استاد راهنما

دکتر محمدرضا شجاعی

شهریور ۱۳۹۵

شماره: ۶,۹۴۰۵  
تاریخ: ۹۵/۷/۲۴  
ویرایش:

بسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

پیوست شماره ۲

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد محسنی دفرازی به شماره دانشجویی: ۹۲۱۲۵۳۴

تحت عنوان: مطالعه و بررسی نقش نوترینوها در واپاشی دوتایی هسته  $^{134}\text{Xe}$

در تاریخ ۹۵/۷/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه قابل تمجید مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد رضا شجاعی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر مسلم سوهانی
	دکتر احسان ابراهیمی		نام و نام خانوادگی: حسین توکلی عنبریان
	پسابی		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

حاصل این تلاش را با کرم ترین و صمیمی ترین سپاس ها تقدیم می کنم به

مادر فداکارم:

که شاهکار طبیعت است و تار و پودش را با مهربانی بافته اند، هر چه دارم از وجود  
نازنین او دارم و همیشه مدیون زحمات بی دریغش هستم.

پدر بزرگوارم:

که کوه و وجودش را کریمانه برای بهتر بودن و ماندنم عطا نمود و چون کوهی  
استوار حامی من در تمام زندگیست.

همسر مهربانم:

که در تمام مراحل زندگی در کنارم بوده و هست، و حضورش مایع امید و دلگرمی

من می باشد.

## مشکر و قدردانی

سپاس فراوان خدای را که مرا یاری داد که تا بیاموزم آنچه را که نمی دانم و می دانم که یاریم خواهد داد تا بیاموزم آنچه را که آموخته ام. اکنون که این پژوهش به یاری این دوستان به سرانجام رسیده است بر خود می دانم از اساتید ارجمند؛ آقایان دکتر توکلی و دکتر سوهانی، که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را پذیرفته اند، مشکر کنم.

هم چنین از کلیه اساتید گروه فزیک هسته ای دانشگاه شاهرود که افتخار ساگردی در محضرشان را داشته ام و دارم، از آقایان دکتر سوهانی، دکتر موحیدیان، دکتر توکلی، دکتر شجاعی تقدیر و مشکر فراوان را دارم.

لازم می دانم از دوستان عزیزم، آقایان محمد رضا فلاح، نوز سلطان، ادیس الابه کردی و حسن حاجی حسینی به خاطر کمک ها و تمام سخنان خوبی که باهم داشتیم، مشکر می کنم. و در پایان، از همه عزیزانی که به نحوی در انجام و پیشرفت این تحقیق نقش بسزایی داشته و ذکر نام آن ها در اینجا مقدور نبوده، کمال مشکر و قدردانی را دارم.

به آیندگان حال مارا بگو، که سختی عشق تو آسان شود

که ایرانی سر بلند جوان، سزاوار تاریخ ایران شود

به نام همه عاشقان وطن، قسم میخورم مرگ هم زندگیت

اگر زندگی تشنه می مرگ ماست، کسی که نبردست هم زنده نیست

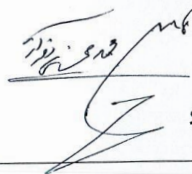
به نام همه عاشقان وطن.....

## تعهد نامه

اینجانب محمد محسنی دفرازی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه و بررسی نقش نوترینوها در واپاشی دوتایی هسته  $^{134}\text{Xe}$  تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ  
امضای دانشجو



### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

یکی از واپاشی‌های دوتایی  $2\nu\beta\beta$  می‌باشد که در این واپاشی نوترینوها نقش اساسی و مهم دارند و واپاشی دیگر دوتایی  $0\nu\beta\beta$  است. در این پژوهش هدف مطالعه و بررسی نقش نوترینوها در واپاشی دوتایی است. به طوری که در ابتدا مقدمه‌ای از قوانین واپاشی‌ها گفته شده و در ادامه به واپاشی دوتایی هم به لحاظ تاریخی و هم به لحاظ ساختار هسته‌ای و ذراتی پرداخته‌ایم. در بخش بعد با معرفی روش‌های بررسی واپاشی دوتایی از جمله: مدل پوسته‌ای، QRPA، IBM، کد محاسباتی OXBASH را که در محاسبه‌ی عنصر ماتریسی گذار کاربرد دارد، مورد استفاده قرار داده‌ایم. و در انتها نتایج مربوط به محاسبات با استفاده از روش‌های گفته شده و کد محاسباتی OXBASH بدست آمده است. مقایسه‌ی نتایج بدست آمده از کد محاسباتی OXBASH و آزمایش‌های تجربی نشان دهنده‌ی کارآمد بودن این کد محاسباتی است.

کلمات کلیدی؛ کد OXBASH، واپاشی دوتایی، نوترینوها، QRPA، IBM

# فهرست

صفحه	عنوان
۱.....	فصل اول.....
۱.....	واپاشی های رادیواکتیو.....
۲.....	۱-۱ مقدمه.....
۲.....	۲-۱ قانون واپاشی رادیواکتیو.....
۵.....	۳-۱ نظریه کوانتومی واپاشی رادیواکتیو.....
۱۰.....	۴-۱ عنصر ماتریسی گذار.....
۱۲.....	۵-۱ احتمال گذار در نظریه اختلال وابسته به زمان.....
۱۷.....	فصل دوم.....
۱۷.....	واپاشی دوبتایی.....
۱۸.....	۱-۲ مقدمه.....
۱۸.....	۲-۲ پدیده شناسی واپاشی دوبتایی.....
۲۶.....	۱-۲-۲ فرمول نرخ واپاشی 2۷.....
۳۶.....	۲-۲-۲ فرمول نرخ واپاشی 0۷.....
۴۸.....	۳-۲ واپاشی دوبتایی و ساختار هسته ای.....
۵۳.....	فصل سوم.....



۵۳	کد محاسباتی OXBASH.....
۵۴	۱-۳ مقدمه.....
۵۴	۲-۳ مدل پوسته‌ای هسته‌ای.....
۵۷	۳-۳ کد محاسباتی OXBASH.....
۵۷	۱-۳-۳ برنامه BASIS و ارائه m-scheme.....
۶۰	۲-۳-۳ برنامه PROJ.....
۶۲	۳-۳-۳ برنامه‌های MATRIX و OPER.....
۶۳	۴-۳-۳ روش LANCZOS و برنامه LANCZOS.....
۶۶	۵-۳-۳ برنامه TRAMP و عناصر ماتریسی هسته‌ای.....
۶۷	۴-۳ طریقه استفاده از کد OXBASH.....
۶۸	۵-۳ هم‌بستگی‌های حالت پایه.....
۷۳	۶-۳ مدل شبه ذره‌ای.....
۷۵	۷-۳ تقریب فاز تصادفی برای شبه ذرات (QRPA).....
۸۳	۸-۳ برهم‌کنش مدل بوزونی.....
۸۴	۱-۸-۳ مشخصات IBM.....
۸۷	فصل چهارم.....
۸۷	محاسبه‌ی عناصر ماتریسی و نیمه‌ی عمر.....
۸۸	۱-۴ مقدمه.....
۹۱	۲-۴ ساز و کار.....
۹۳	۳-۴ نتایج برای $0\nu\beta\beta$ .....
۹۴	۱-۳-۴ واپاشی $0\nu\beta\beta$ با تبادل نوترینو سبک.....

- ۲-۳-۴ واپاشی  $0\nu\beta\beta$  با تبادل نوترینو سنگین..... ۹۶
- ۳-۳-۴ حساسیت به تغییر پارامتر، فرضیات مدل و فرضیات عملگر..... ۹۶
- ۴-۴ نتایج برای  $0\nu\beta^+\beta^+$ ..... ۹۹
- ۱-۴-۴  $0\nu\beta^+\beta^+$  و روندهای مربوط به تبادل نوترینو سبک..... ۱۰۰
- ۲-۴-۴  $0\nu\beta^+\beta^+$  و روندهای مربوط به تبادل نوترینو سنگین..... ۱۰۲
- ۵-۴ مقدمه..... ۱۰۳
- ۶-۴ محاسبه عنصر ماتریسی با استفاده از OXBASH..... ۱۰۳
- ۷-۴ نتایج بدست آمده از OXBASH..... ۱۰۵
- ۸-۴ نتیجه گیری..... ۱۰۸
- مراجع..... ۱۰۹

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ احتمال اندازه‌گیری انرژی یک حالت ناپایدار به پهنای  $\Gamma_a$  ..... ۸
- شکل ۲-۱ هنگامی که پهنای حالت ناپایدار در مقایسه با فاصله‌ی بین آن‌ها کوچک است ..... ۸
- شکل ۱-۲ جرم‌های اتمی هسته‌ای با  $A=76$  ..... ۲۱
- شکل ۲-۲ حالت‌های شرکت کننده در واپاشی  $Ge^{76}$  ..... ۲۸
- شکل ۳-۲ نمودار مد  $2\nu$  واپاشی در مکانیزم دو نوکلئونی ..... ۲۹
- شکل ۴-۲ طیف الکترونی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$ ،  $^{136}Xe$  است ..... ۳۱
- شکل ۵-۲ طیف الکترونی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  ..... ۳۲
- شکل ۶-۲ طیف الکترون منفرد برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  ..... ۳۳
- شکل ۷-۲ طرح کلی مد  $0\nu\beta\beta$  در مکانیزم دو - نوکلئونی ..... ۳۶
- شکل ۸-۲ طیف الکترون منفرد برای واپاشی‌های  $0\nu0^+ \rightarrow 0^+\beta\beta$  ..... ۴۴
- شکل ۹-۲ طیف الکترون منفرد واپاشی‌های  $0\nu0^+ \rightarrow 0^+\beta\beta$  ..... ۴۶
- شکل ۱-۳ مراحل انجام کد OXBASH ..... ۵۸
- شکل ۲-۳ نمایش فایل سیستم اسمی OXBASH ..... ۶۸
- شکل ۳-۳ پیکربندی حالت‌های پایه  $^{76}Ge$  و  $^{76}Se$  ..... ۶۹
- شکل ۴-۳ توزیع نوکلئون‌ها بین مدارهای تک - ذره‌ای در یک هسته ..... ۷۰
- شکل ۵-۳ تابع موج حالت پایه در مدل شبه ذره‌ی پروتون - نوترون RPA ..... ۷۱
- شکل ۶-۳ هم‌بستگی‌های چار قطبی - چار قطبی (QQ) در تابع موج حالت پایه ..... ۷۳
- شکل ۷-۳ برهم‌کنش ذره - حفره بین حالت‌های ذره پروتون - حفره نوترون ..... ۷۹
- شکل ۸-۳ عنصر ماتریس هسته‌ای محاسبه شده برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  ..... ۸۰

- شکل ۳-۹ برانگیختگی فونونی از حالت پایه (حالت تهی QRPA) ..... ۸۰
- شکل ۴-۱ ساز و کار واپاشی دو بتایی بدون نوترینو..... ۸۸
- شکل ۴-۲ ساز و کار واپاشی دوبتایی با گسیل دو نوترینو..... ۸۹
- شکل ۴-۳ نتایج IBM-2 با ترمیم ایزواسپین برای واپاشی  $0\nu\beta^-\beta^-$  ..... ۹۶
- شکل ۴-۴ عناصر ماتریسی واپاشی دوبتایی بدون نوترینو به روش IBM-2..... ۱۰۰

## فهرست جداول

- جدول ۱-۲ مشخصه‌های کاندیداهای واپاشی دوتایی..... ۲۴
- جدول ۲-۲ عامل‌های فاز برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$ ..... ۳۴
- جدول ۳-۲ عناصر ماتریسی هسته‌ای و نیمه عمر ..... ۵۱
- جدول ۱-۴ عناصر ماتریسی هسته‌ای  $M^{(2\nu)}$  بدست آمده به روش IBM-2..... ۹۴
- جدول ۲-۴ مقایسه عناصر ماتریسی هسته‌ای برای واپاشی به حالت پایه  $0_1^+$ ..... ۹۵
- جدول ۳-۴ مقایسه بین عناصر ماتریسی فرمی برای  $0\nu\beta^-\beta^-$ ..... ۹۷
- جدول ۴-۴ عناصر ماتریسی برای تبادل نوترینو سنگین..... ۹۸
- جدول ۵-۴ عناصر ماتریسی واپاشی دو بتایی بدون نوترینو با تبادل نوترینو سنگین..... ۹۸
- جدول ۶-۴ عناصر ماتریسی نهایی برای واپاشی دوتایی بدون نوترینو در IBM-2..... ۹۹
- جدول ۷-۴ عناصر ماتریسی هسته‌ای برای واپاشی‌های  $\beta^+\beta^+$ ،  $\beta^+\beta^-$  و ECEC..... ۱۰۱
- جدول ۸-۴ نرخ عناصر ماتریسی فرمی به گاموف-تلا برای واپاشی‌های بدون نوترینو  $\beta^+\beta^+$ ..... ۱۰۱
- جدول ۹-۴ عناصر ماتریسی برای تبادل نوترینو سنگین..... ۱۰۲
- جدول ۱۰-۴ پنج  $B(GT)$  اول، و مقدار بدست آمده  $M_{GT}^m$  در برهم‌کنش FPMH برای  $^{48}\text{Ca}$ ..... ۱۰۵
- جدول ۱۱-۴ پنج  $B(GT)$  اول، و مقدار بدست آمده  $M_{GT}^m$  در برهم‌کنش GLEPN برای  $^{76}\text{Ge}$ ..... ۱۰۶
- جدول ۱۲-۴ مقایسه نتایج محاسبه شده با کد OXBASH و نتایج تجربی..... ۱۰۷



# فصل اول

واپاشی‌های رادیواکتیو

## ۱-۱ مقدمه

واپاشی رادیواکتیو کانی‌های طبیعی حاوی اورانیوم و تورنیوم تا حدود زیادی منشأ مطالعات اولیه فیزیک هسته‌ای بوده است. این واپاشی‌ها دارای نیمه عمرهایی در حدود عمر زمین‌اند، که این عمر نمایانگر باقی‌ماندن این مواد از دوران اولیه پیدایش ماده در اثر گردهمایی نوکلئون‌هاست. هسته‌هایی با عمر کوتاه‌تر مدت‌ها قبل واپاشیده و ناپدید شده‌اند، و امروز ما فقط هسته‌هایی را که دارای عمر طولانی بوده‌اند را مشاهده می‌کنیم. علاوه بر رادیواکتیویته طبیعی، این هسته‌های رادیواکتیو را از طریق واکنش‌های هسته‌ای در آزمایشگاه نیز می‌توانیم تولید کنیم. این عمل اولین بار در سال ۱۹۳۴ توسط ایرن کوری و فردریک ژولیو، با بمباران کردن آلومینیوم به وسیله ذرات آلفای حاصل از واپاشی پولونیوم رادیواکتیو، انجام شد. در این واکنش  $^{30}P$  تولید می‌شود که از طریق گسیل پوزیترون با نیمه عمر ۲/۵ دقیقه واپاشیده خواهد شد [۱].

## ۱-۲ قانون واپاشی رادیواکتیو

سه سال پس از کشف رادیواکتیویته در سال ۱۸۹۶ ملاحظه شد که آهنگ واپاشی یک ماده پرتوزای خالص با گذشت زمان طبق یک قانون نمایی کاهش می‌یابد. تشخیص اینکه رادیواکتیویته نماینده تغییر در تک‌اتم‌ها و نه در کل نمونه است، مستلزم سپری شدن مدت زمان بیشتری بود. پس از گذشت دو سال دیگر مشخص شد که واپاشی دارای طبیعت آماری است، یعنی پیش‌بینی زمان فروپاشی یک اتم معین غیر ممکن است، و معلوم شد که این فرضیه مستقیماً به قانون نمایی منجر می‌شود. این موضوع عدم قابلیت پیش‌بینی رفتار یک ذره، امروزه دانشمندان را نگران نمی‌کند، ولی پذیرش آن در مراحل آغازین و قبل از گسترش نظریه کوانتومی مشکل بود. تلاش فراوان همین محققان از خود گذشته بود که آنچه را که امروز حقایق مسلم به نظر می‌رسند، پا بر جا ساخت [۱].



اگر  $N$  هسته‌ی پرتوزا در زمان  $t$  در نمونه‌ای موجود باشند و هسته‌های جدیدی وارد نمونه نشوند، تعداد  $dN$  هسته که در زمان  $dt$  واپاشیده می‌شوند با  $N$  متناسب خواهد بود، و در نتیجه داریم :

$$\lambda = -\frac{\left(\frac{dN}{dt}\right)}{N} \quad (1-1)$$

که در آن  $\lambda$  یک مقدار ثابت است و ثابت واپاشی یا فروپاشی نامیده می‌شود. طرف راست معادله (۱-۱) احتمال واپاشی یک اتم در واحد زمان است. اینکه این احتمال بدون توجه به عمر اتم‌ها (یا هسته‌ها) ثابت می‌ماند، فرض اساسی نظریه آماری واپاشی رادیو اکتیو است.

با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۱) به قانون نمایی واپاشی رادیو اکتیو می‌رسیم :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2-1)$$

که در آن  $N_0$ ، ثابت انتگرال‌گیری، تعداد اولیه هسته‌های موجود در  $t = 0$  است. نیمه عمر  $t_{1/2}$  زمان لازم برای واپاشی نیمی از هسته‌هاست. با قرار دادن  $N = N_0/2$  در معادله (۲-۱) داریم :

$$t_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (3-1)$$

تعیین طول عمر متوسط،  $\tau$ ، (که گاهی فقط طول عمر خوانده می‌شود) نیز مفید است. این زمان طبق تعریف میانگین مدت زمانی است که هسته قبل از واپاشی باقی می‌ماند. تعداد هسته‌هایی که تا زمان  $t$  باقی می‌مانند برابر  $N(t)$ ، و تعدادی که بین  $t$  و  $t + dt$  واپاشیده می‌شوند برابر  $|dN/dt|dt$  است. بنابراین عمر متوسط عبارت است از :

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t |dN/dt| dt}{\int_0^{\infty} |dN/dt| dt} \quad (4-1)$$

که مخرج آن نشان‌دهنده تعداد کل واپاشی‌هاست. پس از انتگرال‌گیری نتیجه زیر بدست می‌آید :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (5-1)$$

بنابراین عمر متوسط برابر عکس ثابت واپاشی است [۱].

با استفاده از معادله (۲-۱) می‌توان تعداد هسته‌های از نوع معین را که پس از زمان  $t$  ناواپاشیده مانده‌اند، پیش‌بینی کرد. متأسفانه، قانون به این صورت ارزش محدودی دارد، زیرا اندازه‌گیری کمیت  $N$  مشکل است. به جای شمارش تعداد هسته‌های ناواپاشیده در یک نمونه، بهتر است تعداد واپاشی‌هایی که در فاصله زمانی بین  $t_1$  و  $t_2$  رخ می‌دهند شمرده شوند (از طریق مشاهده تابش‌های گسیل شده). اگر تغییر در تعداد هسته‌های موجود در فاصله زمانی بین  $t$  و  $t + \Delta t$  برابر  $\Delta N$  باشد، خواهیم داشت :

$$|\Delta N| = N(t) - N(t + \Delta t) = N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \Delta t}) \quad (6-1)$$

اگر در فاصله زمانی  $\Delta t$  که طی آن شمارش انجام می‌شود، بسیار کوچکتر از  $\lambda^{-1}$  (و در نتیجه، در واقع  $\Delta t \ll t_{1/2}$ ) باشد، می‌توان از جمله‌ی مرتبه‌ی بالا در بسط دومین جمله پوانتز صرف‌نظر کرد و نوشت:

$$|\Delta N| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Delta t \quad (7-1)$$

که شکل دیفرانسیلی رابطه بالا بصورت زیر است [۱]:

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (8-1)$$

### ۳-۱ نظریه کوانتومی واپاشی‌های رادیو اکتیو

ترازهای انرژی که از حل معادله شرودینگر برای پتانسیل‌های گوناگون مستقل از زمان بدست می‌آیند، یک خصوصیت مشترک دارند که همان حالت‌های مانا در آن‌هاست. یک سیستم کوانتومی که ابتدا در یک حالت مانای خاص است همواره در آن حالت باقی می‌ماند و گذاری (یعنی واپاشی) به حالت‌های دیگر نخواهد داشت. وجود یک سیستم کوانتومی گاه در یک حالت و گاهی در حالت دیگر با ساختن مخلوطی از دو یا چند حالت مانند  $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$  امکان پذیر است. در این رابطه  $|c_1|^2$  احتمال وجود سیستم در حالت ۱ و  $|c_2|^2$  احتمال وجود سیستم در حالت ۲ است. برای پتانسیل‌های مستقل از زمان،  $c_1$  و  $c_2$  مستقل از زمان‌اند که با مشاهدات مربوط به حالت‌های واپاشنده که در آن‌ها احتمال وجود در یک حالت بر حسب زمان تغییر می‌کند، توافق ندارد. به‌علاوه، از نظر فلسفی ناچاریم که فرض حالت‌های ناب با توابع خوش تعریف را از سر بیرون کنیم که در این صورت تعبیر ساختار هسته‌ای واقعاً مشکل می‌شود [۱].

بنابراین رهیافت زیر را انتخاب می‌کنیم: پتانسیل به صورت  $V + V'$  در نظر گرفته می‌شود که  $V$  پتانسیل هسته‌ای است که حالت‌های مانا را می‌دهد و  $V'$  پتانسیل اضافی بسیار ضعیفی است که می‌تواند سبب گذار بین حالت‌ها شود. در حال حاضر با چشم‌پوشی از  $V'$ ، معادله شرودینگر را برای پتانسیل  $V$  حل می‌کنیم و تابع موج‌های ایستای هسته را به دست می‌آوریم، سپس از این توابع برای محاسبه احتمال گذار بین «حالت‌های مانا» در اثر  $V'$  استفاده می‌کنیم. این احتمال گذار همان ثابت واپاشی  $\lambda$  است. که از قاعده طلایی فرمی بدست می‌آید:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (9-1)$$

که در آن داریم:

$$V'_{fi} = \int \psi_f^* V' \psi_i dv \quad (10-1)$$

با معلوم بودن تابع موج‌های اولیه و نهایی  $\psi_i$  و  $\psi_f$ ، می‌توان «جزء ماتریس»  $V'_{fi}$  و در نتیجه احتمال گذار را (که می‌تواند با مقدار تجربی مقایسه شود) به دست آورد [۱].

احتمال گذار به چگالی حالت‌های نهایی  $\rho(E_f)$ ، در فاصله انرژی  $dE_f$ ، نیز بستگی دارد. بنابراین تعداد حالت‌های نهایی قابل حصول دستگاه برابر  $dn_f = \rho(E_f) dE_f$  است.

اگر تعداد حالت‌های نهایی قابل حصول برای واپاشی زیاد باشد، احتمال گذار بزرگ خواهد بود. چگالی‌های حالت نهایی دارای دو جزء است، زیرا حالت نهایی پس از واپاشی شامل دو مؤلفه‌ی حالت هسته‌ی نهایی و حالت ذره‌ی نهایی گسیل شده است. با شروع از حالت هسته، هر یک از این مؤلفه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم [۱].

با حل معادله شرودینگر برای پتانسیل مستقل از زمان  $V$  حالت‌های مانای  $\psi_a(r)$  هسته بدست می‌آید. تابع موج وابسته به زمان برای حالت  $a$  به صورت زیر است:

$$\psi_a(r, t) = \psi_a(r) e^{-iE_a t / \hbar} \quad (11-1)$$

که در آن  $E_a$  انرژی حالت است. احتمال وجود سیستم در حالت  $a$  برابر  $|\psi_a(r, t)|^2$  است که برای حالت مانا مستقل از زمان است. برای سازگاری با قانون واپاشی رادیواکتیو، علاقه مندیم که احتمال وجود سیستم در حالت  $a$  بر حسب زمان به صورت  $e^{-t/\tau_a}$  کاهش یابد:

$$|\psi_a(r, t)|^2 = |\psi_a(r, t=0)|^2 e^{-t/\tau_a} \quad (12-1)$$

که در آن  $\tau_a = 1/\lambda_a$  طول عمر میانگین حالت با ثابت واپاشی  $\lambda_a$  است. بنابراین باید معادله (۱۱-۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi_a(r,t) = \psi_a(r) e^{-iE_a t/\hbar} e^{-t/2\tau_a} \quad (13-1)$$

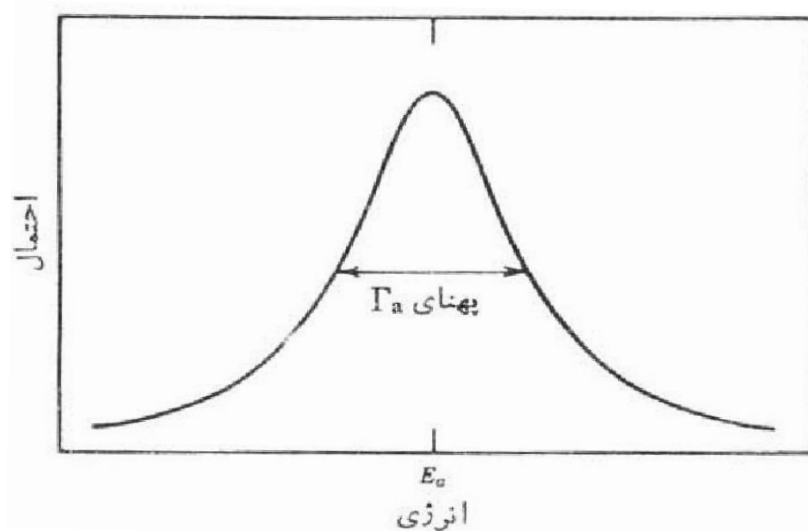
بهبابی که برای حضور جمله‌ی حقیقی در نمای  $\psi_a$  می‌پردازیم، از دست دادن توانایی تعیین دقیق انرژی حالت است، زیرا دیگر حالت مانایی نداریم [مطابق با رابطه‌ی عدم قطعیت انرژی-زمان، اگر یک حالت همواره وجود داشته باشد، داریم  $\Delta t \rightarrow \infty$  که می‌توانیم انرژی آن را دقیقاً تعیین کنیم زیرا  $\Delta E = 0$  است. اگر عمر متوسط یک حالت  $\tau$  باشد، نمی‌توانیم انرژی آن را با دقتی بیش  $E \sim \hbar/\tau$  از تعیین کنیم]. این بحث را می‌توانیم با محاسبه‌ی توزیع حالات انرژی (در حقیقت تبدیل فوریه‌ی  $e^{-t/2\tau_a}$ ) جدی‌تر دنبال کنیم. احتمال مشاهده دستگاه در فاصله انرژی  $E$  و  $E + dE$  در مجاورت  $E_a$  از مربع توزیع زیر بدست می‌آید [۱]:

$$P(E) = \frac{dE}{(E - E_a)^2 + \Gamma_a^2/4} \quad (14-1)$$

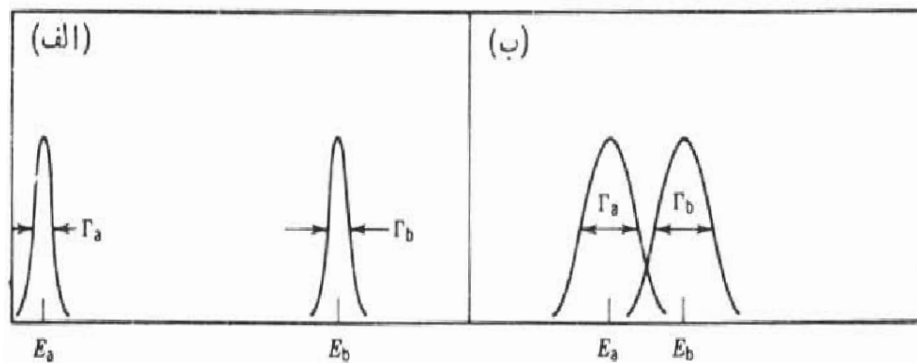
که در آن  $\Gamma_a = \hbar/\tau_a$  پهنای حالت  $a$  است. شکل (۱-۱) تابع  $P(E)$  را نشان می‌دهد. اگر انرژی این سیستم را اندازه بگیریم، ممکن است مقدار  $E_a$  را به دست نیاوریم (اگرچه متوسط اندازه‌گیری‌های متعدد مقدار  $E_a$  را می‌دهد). پهنای  $\Gamma_a$  معیاری از عدم توانایی ما در تعیین دقیق انرژی حالت است (در این جا کوتاهی از ما یا وسیله اندازه‌گیری نیست - طبیعت محدودیت عدم قطعیت را اعمال می‌کند، و هم‌چنانکه در شکل (۱-۱) نشان داده شده است، یک حالت با انرژی «دقیق»  $E_a$  قابل مشاهده نیست) [۱].

اگر حالات هسته دارای انرژی دقیق نباشد، آیا می‌توانیم از گذار بین ترازهای مشخص صحبت کنیم؟ بلی، زیرا پهنای ترازهای هسته‌ای کم انرژی در مقایسه با فاصله‌ی بین آن‌ها کوچک است. حالات هسته‌ای نوعاً دارای طول عمرهای بیش از  $10^{-12}$  ثانیه هستند. که با  $10^{-10} \text{ Mev} < \Gamma$  متناظرند. ترازهای هسته‌ای گسسته و کم انرژی که در واپاشی‌های عادی (و در بسیاری از

واکنش‌های هسته‌ای ( دیده می‌شوند دارای فواصلی از مرتبه  $10^{-3} \text{Mev}$  و بیشتر هستند. بنابراین اگر بخواهیم حالت نهایی هسته‌ای را پس از فرایند واپاشی اندازه بگیریم، ( بعنوان مثال با اندازه‌گیری انرژی ذره گسیل شده ) هم‌پوشی توزیع‌های انرژی دو حالت نهایی مختلف  $a$  و  $b$  و ایجاد ابهام در حالت «مانای» ناشی از واپاشی بسیار نامحتمل است (شکل ۲-۱) [۱].



شکل (۱-۱) احتمال اندازه‌گیری انرژی یک حالت ناپایدار به پهنای  $\Gamma_a$  [۱].



شکل (۲-۱) هنگامی که پهنای حالت ناپایدار در مقایسه با فاصله‌ی بین آن‌ها کوچک است [۱].

بنابراین نتیجه می‌گیریم که صحبت از حالات شبه مانای گسسته منطقی است زیرا فاصله‌ی بین آن‌ها بسیار بیشتر از پهنایشان است، و نیز می‌توانیم نتیجه بگیریم که این حالات هسته‌ای در چگالی حالات نهایی سهمی ندارند زیرا تنها یک حالت هسته‌ای قابل حصول در فرایند واپاشی وجود دارد [۱].

بنابراین تنها میدان تابش در چگالی حالات سهیم است و باید خصوصیات تابش گسیلی را در محاسبه‌ی  $\rho(E_f)$  در نظر بگیریم. در حال حاضر به اظهار نظرهای کلی در مورد  $\rho(E_f)$  قناعت می‌کنیم. اگر فقط احتمال تشکیل حالت هسته‌ای  $E_f$  را مشاهده کنیم، باید کلیه تابش‌های با انرژی  $E_i - E_f$  را در نظر بگیریم. بویژه آن که تابش‌ها می‌توانند در هر جهت و یا هر نوع قطبش (اگر تابش‌ها از ذرات اسپین‌دار تشکیل شده باشند، اسپین می‌تواند جهت گیری‌های مختلف داشته باشد) گسیل شوند. در اینجا فرض بر این است که جهت تابش و قطبش آن‌ها را مشاهده نمی‌کنیم. همین فرایند شمارش تعداد حالت نهایی قابل حصول است که چگالی حالت‌ها را بدست می‌دهد [۱].

در حل معادله دیفرانسیلی (۶-۱) برای بدست آوردن قانون واپاشی رادیواکتیو، فرض کردیم که احتمال واپاشی  $\lambda$  اولاً کوچک و ثانیاً مستقل از زمان است. اگر  $V'$  مستقل از زمان باشد،  $\lambda$  که از رابطه (۹-۱) محاسبه می‌شود نیز مستقل از زمان خواهد بود. در این شرایط، تأثیر  $V'$  بر حالت‌های مانای  $a$  و  $b$  ناشی از  $V$  بصورت زیر است:

$$\psi_a \rightarrow \psi_a + \frac{V'_{ba}}{E_b - E_a} \psi_b$$

و احتمال اینکه دستگاهی که قبلاً در حالت  $a$  بوده در حالت  $b$  دیده شود، متناسب با  $|V'_{ba}|^2$  است. ما این موضوع را به صورت «واپاشی» از حالت به حالت مشاهده می‌کنیم.

برای استفاده از قاعده‌ی طلایی فرمی نیز احتمال واپاشی باید کوچک باشد، به طوری که دامنه در رابطه فوق کوچک شود. همین ضرورت است که منجر به فرایند واپاشی می‌شود. اگر احتمال واپاشی بزرگ بود، تابش کافی برای ایجاد گذار معکوس  $a \rightarrow b$  از طریق فرایند جذب تشدید وجود می‌داشت. در این صورت سیستم مشابه یک سیستم کلاسیک متشکل از دو نوسانگر جفت شده بین حالات  $a$  و  $b$  نوسان می‌کرد.

ارتباط نهایی بین احتمال واپاشی مؤثر برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی هسته‌ها و احتمال واپاشی میکروسکوپی که با استفاده از مکانیک کوانتومی برای یک هسته منفرد محاسبه می‌شود، مستلزم آن است که هر هسته از این مجموعه تابش خود را مستقل از همه‌ی هسته‌های دیگر گسیل کند. فرض می‌کنیم که واپاشی یک هسته‌ی معین، مستقل از واپاشی همسایگان آن است. با این فرض اطمینان خواهیم یافت که ثابت واپاشی اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه با محاسبات مکانیک کوانتومی قابل مقایسه باشد [۱].

## ۱-۴ عنصر ماتریسی گذار

احتمال گذار با مربع عنصر ماتریس هسته‌ای متناسب است:

$$M_{fi}(M_f, M_i) = \langle J_f M_f \xi | O_{\lambda\mu} | J_i M_i \zeta \rangle \quad (1-15)$$

که در آن  $\langle J_i M_i \zeta |$  و  $|J_f M_f \xi\rangle$  به ترتیب تابع موج‌های حالت‌های اولیه و نهایی هستند و  $O_{\lambda\mu}$  قسمت هسته‌ای عملگر گذار است که یک تانسور کروی از مرتبه  $(\lambda, \mu)$  است. در این رابطه نمادهای  $\xi$  و  $\zeta$  نشان‌دهنده‌ی اعداد کوانتومی دیگری غیر از  $J$  و  $M$ ، که به اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط می‌شوند، هستند که برای مشخص کردن حالات هسته‌ای مورد نیاز هستند. چون ممکن است گذار شامل گسیل یک ذره مانند یک الکترون یا یک نوکلئون باشد، لزوماً حالت‌های اولیه و نهایی در همان هسته نیستند: عنصر ماتریسی  $M_{fi}$ ، عوامل مربوط به حالت‌های هسته‌ای در گذار را بیان می‌کند. وابستگی عنصر ماتریسی  $M_{fi}$  به  $M_f$  و  $M_i$ ، تصاویر اندازه حرکت زاویه‌ای کل روی محور کوانتش، را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی ویگنر-اکارت بیان کرد:

$$M_{fi}(M_f, M_i) = (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi || O_{\lambda} || J_i \zeta \rangle \quad (1-16)$$



که در آن  $\begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_f \end{pmatrix}$  نماد-  $3j$  و عنصر ماتریسی کاهش یافته است. هدف اصلی ما بررسی

$\langle J_f \xi || O_\lambda || J_i \zeta \rangle$  خواهد بود، چون یک کمیت ناورد تحت چرخش سیستم مختصات است [۲].

اگر اندازه‌گیری به جهت اسپین در حالت نهایی حساس نباشد، این گذار همه‌ی حالت‌های نهایی ممکن را که تنها در مقدار  $M_f$  با هم تفاوت دارند در بر می‌گیرد. بنابراین در هنگام بررسی گذار، اگر عملگر فقط به جهت خاصی در فضا محدود نشده باشد، باید همه‌ی مقادیر مجاز  $\mu$  را شامل شود. تحت این شرایط مربع عنصر ماتریس گذار کاهش یافته به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \sum_{\mu M_f} \left| (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_f \end{pmatrix} \langle J_f \xi || O_\lambda || J_i \zeta \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle J_f \xi || O_\lambda || J_i \zeta \rangle \right|^2 \sum_{\mu M_f} \left| \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_f \end{pmatrix} \right|^2 \quad (17-1) \\ &= \frac{\Delta(J_f, \lambda, J_i)}{2J_i + 1} \left| \langle J_f \xi || O_\lambda || J_i \zeta \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

در رسیدن به شکل نهایی از رابطه‌ی تعامد بین نمادهای  $3j$  استفاده شده است:

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{\Delta(J_1, J_2, J_3)}{2J_3 + 1} \delta_{J_3, J_3'} \delta_{m_3, m_3'} \quad (18-1)$$

که در آن

$$\Delta(J_f, \lambda, J_i) = \begin{cases} 1 & \rightarrow J_f = \lambda + J_i \\ 0 & \text{دیگر موارد} \end{cases} \quad (19-1)$$

$\Delta(J_f, \lambda, J_i)$ ، قاعده‌ی گزینش اندازه حرکت زاویه‌ای را برای گذارهای ممنوع یعنی گذارهایی که در آن‌ها رابطه‌ی مثلثی بین بردارهای اندازه حرکت زاویه‌ای  $J_f$ ،  $\lambda$  و  $J_i$  رعایت نشده باشد، بیان می‌کند. توجه شود که  $|M_{fi}|^2$  تعریف شده در رابطه (۱-۱۷) مستقل از  $M_i$  می‌باشد [۲].

## ۱-۵ احتمال گذار در نظریه‌ی اختلال وابسته به زمان

رابطه بین احتمال گذار و عنصر ماتریس هسته‌ای با استفاده از نظریه‌ی اختلال وابسته به زمان ایجاد می‌شود. یک هامیلتونی وابسته به زمان را در نظر بگیرید :

$$H(t) = H_0 + H'(t) \quad (۱-۲۰)$$

که  $H_0$  مستقل از زمان است و همه‌ی وابستگی زمان در  $H'(t)$  است. به طور خاص در اینجا موردی را بررسی می‌کنیم که در آن شدت  $H'(t)$  به اندازه‌ی کافی ضعیف باشد به گونه‌ای که بتوان آن را به صورت اختلالی نسبت به  $H_0$  در نظر گرفت. ویژه تابع  $H_0$  را با  $\phi_n(r)$  نشان می‌دهیم :

$$H_0 \phi_n(r) = E_n \phi_n(r) \quad (۱-۲۱)$$

فرض می‌کنیم که همه‌ی  $\phi_n(r)$  ها با هم یک مجموعه‌ی کامل از توابع متعامد را تشکیل می‌دهند. به دلیل سادگی در نمادگذاری از هر گونه نمادی که نشان دهنده‌ی وابستگی احتمالی  $\phi_n(r)$  به اسپین، ایزواسپین و سایر متغیرها باشد، صرف نظر شده است. ویژه تابع  $\psi(r, t)$  فقط برای  $H_0$  جواب معادله شرودینگر وابسته به زمان است :

$$i \hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = H_0 \psi(r, t) \quad (۱-۲۲)$$

که می‌تواند بر حسب  $\phi_n(r)$  نیز بیان شود :

$$\psi(r, t) = \sum_n c_n \phi_n(r) e^{-i E_n t / \hbar} \quad (۱-۲۳)$$

در اینجا ضرایب بسط عبارتند از :

$$c_n = \int \phi_n^*(r) e^{-iE_n t/\hbar} \psi(r,t) dV \quad (24-1)$$

که مستقل از زمان هستند چون هنوز  $H'(t)$  را در نظر نگرفته‌ایم [۲].

برای هامیلتونی کل، ویژه توابع  $\psi(r,t)$  ممکن است هنوز برحسب  $\phi_n(r)$  بیان شوند با این تفاوت که

حالا ضرایب بسط وابسته به زمان هستند :

$$\psi(r,t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(r) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (25-1)$$

ضریب  $c_n(t)$  می‌تواند به صورت دامنه احتمال پیدا کردن سیستم در حالت مختل نشده‌ی  $n$  در زمان

$t$  توصیف شود. با جایگذاری معادله‌ی (۲۵-۱) در معادله‌ی شرودینگر وابسته به زمان برای  $H(t)$

داریم :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = \{H_0 + H'(t)\} \psi(r,t) \quad (26-1)$$

با این ترتیب معادله‌ی حاکم بر ضرایب  $c_n(t)$  به دست می‌آیند :

$$i\hbar \sum_n \left\{ \frac{dc_n(t)}{dt} - c_n(t) i \frac{E_n}{\hbar} \right\} \phi_n(r) e^{-iE_n t/\hbar} = \{H_0 + H'(t)\} \sum_n c_n(t) \phi_n(r) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (27-1)$$

با ضرب کردن  $\phi_k^*(r) = \exp\{iE_k t/\hbar\}$  در دو طرف معادله و انتگرال گیری روی همه‌ی متغیرهای

مستقل به غیر از  $t$ ، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود :

$$\begin{aligned} & i\hbar \sum_n \left\{ \frac{dc_n(t)}{dt} - c_n(t) i \frac{E_n}{\hbar} \right\} e^{i(E_k - E_n)t/\hbar} \langle \phi_k(r) | \phi_n(r) \rangle \\ & = \sum_n c_n(t) \left\{ \langle \phi_k(r) | H_0 | \phi_n(r) \rangle + \langle \phi_k(r) | H'(t) | \phi_n(r) \rangle \right\} e^{i(E_k - E_n)t/\hbar} \quad (28-1) \end{aligned}$$

چون  $\phi_n(r)$  عضو یک مجموعه‌ی متعامد از ویژه توابع  $H_0$  است برای بدست آوردن معادله‌ی بالا از شرایط زیر استفاده شده است :

$$\langle \phi_k(r) | \phi_n(r) \rangle = \delta_{kn} \quad \text{و} \quad \langle \phi_k(r) | H_0 | \phi_n(r) \rangle = E_n \delta_{kn} \quad (29-1)$$

با جایگذاری این نتایج در (1-28) یک معادله‌ی دیفرانسیلی برای  $c_k(t)$  به دست می‌آید :

$$i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = \sum_n \langle \phi_k | H'(t) | \phi_n(t) \rangle e^{i\omega_{kn}t} \quad (30-1)$$

که در آن  $\omega_{kn} \equiv (E_k - E_n)/\hbar$  است. به عنوان شرایط اولیه، فرض می‌کنیم که در  $t=0$  سیستم در حالت  $\phi_0(r)$  است :

$$c_n(0) = \begin{cases} 1 & \rightarrow n=0 \\ 0 & \rightarrow n \neq 0 \end{cases} \quad (31-1)$$

و اگر اختلال به اندازه‌ی کافی ضعیف باشد در همه‌ی زمان‌های مورد بررسی، انتظار داریم که :

$$c_k(t) \approx \begin{cases} 1 & \rightarrow k=0 \\ 0 & \rightarrow k \neq 0 \end{cases} \quad (32-1)$$

در نتیجه می‌توان معادله (1-27) را با نگه داشتن تنها یک جمله در جمع طرف راست این معادله، یعنی جمله  $n=0$ ، تقریب زد. با این کار نتیجه زیر بدست می‌آید :

$$i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = \langle \phi_k | H'(t) | \phi_0(t) \rangle e^{i\omega_{k0}t} \quad (33-1)$$

به علاوه، اگر متغیر زمانی  $H'(t)$  در مقایسه با  $\exp\{i\omega_0 t\}$  کند باشد می‌توان  $H'$  را ثابت در نظر گرفت. با این تقریب معادله (1-33) به سادگی حل می‌شود و نتیجه بصورت زیر بیان می‌شود :

$$c_k(t) = \frac{\langle \phi_k | H' | \phi_0(t) \rangle}{E_k - E_0} (1 - e^{i\omega_{k0}t}) \quad (34-1)$$

$$|c_k(t)|^2 = 2 \left| \langle \phi_k(r) | H' | \phi_0(r) \rangle \right|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{k0}t)}{(E_k - E_0)^2} \quad (35-1)$$

اگر سیستم از حالت  $n=0$  در زمان  $t=0$  شروع شده باشد، عبارت بالا بیان کننده احتمال یافتن سیستم در حالت  $k$  و در زمان  $t$  است. احتمال کل برای گروهی از حالتها در بازه‌هایی که با  $f$  نشان داده می‌شوند، از طریق جمع روی احتمال همه‌ی حالت‌های نهایی  $k$  در این بازه‌ها داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in f} |c_k(t)|^2 &= \sum_{k \in f} 2 \left| \langle \phi_k(r) | H' | \phi_0(r) \rangle \right|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{k0}t)}{(E_k - E_0)^2} \\ &= \frac{2}{\hbar} \int \left| \langle \phi_k(r) | H' | \phi_0(r) \rangle \right|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{k0}t)}{\omega_{k0}^2} \rho(E_k) dE_k \quad (36-1) \end{aligned}$$

در آخرین مرحله، جمع روی همه‌ی حالت‌های نهایی ممکن به انتگرال روی حاصلضرب انرژی در چگالی حالت‌های نهایی  $\rho(E_k)$  تبدیل می‌شود که دلایل آن در ادامه خواهد بود [۲].

ثابت واپاشی یا احتمال گذار بر واحد زمان  $\lambda$ ، به آهنگ پیدا کردن سیستم در گروهی از حالات نهایی با نماد  $f$  مربوط است و به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\lambda = \frac{d}{dt} \sum_{k \in f} |c_k(t)|^2 = \frac{2}{\hbar} \int \left| \langle \phi_k(r) | H' | \phi_0(r) \rangle \right|^2 \frac{\sin(\omega_{k0}t)}{\omega_{k0}^2} \rho(E_k) dE_k \quad (37-1)$$

چون تابع  $(\omega_{k0}t)/\omega_{k0}^2$  به جز در  $\omega \approx 0$  خیلی سریع نوسان می‌کند، فقط یک ناحیه کوچک در اطراف  $E_k = E_0$  می‌تواند در انتگرال سهم داشته باشد. در این بازه‌ی کوچک انرژی می‌توانیم از عنصر ماتریسی  $\langle \phi_k(r) | H' | \phi_0(r) \rangle$  صرف‌نظر کنیم و چگالی حالت  $\rho(E_k) = \rho(E_f)$  را به صورت یک ثابت در نظر بگیریم، پس می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد. علاوه بر این حدود انتگرال گیری روی  $E_k$  می‌تواند تحت شرایطی و بدون از دست دادن دقت خیلی زیاد با  $\pm\infty$  جایگزین شود. شکل نهایی احتمال گذار بر واحد زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \phi_f(r) | H' | \phi_0(r) \rangle \right|^2 \rho(E_f) \quad (۳۸-۱)$$

که در آن از رابطه  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_{k_0} t)}{\omega_{k_0}} d\omega_{k_0} = \pi$  استفاده شده است. این فرمول نقطه‌ی آغاز محاسبات مربوط به احتمال گذار است. چون فرمی آن را «قاعده طلایی نظریه اختلال وابسته به زمان» نامید، این فرمول اغلب به نام قاعده طلایی فرمی شناخته می‌شود [۲].

# فصل دوم

## واپاشی دوباتایی

## ۲-۱ مقدمه

واپاشی دوتایی گذار نادر مورد توجهی بین دو هسته با عدد جرمی یکسان است، که اندازه‌ی بار هسته‌ای را دو واحد تغییر می‌دهد. مدت مدیدی است که یک حالت خاص از واپاشی دوتایی که در آن دو الکترون بدون هیچ نوترینویی گسیل می‌شود، ابزاری قدرتمند برای مطالعه بقای عدد لپتونی به طور عام و ویژگی‌های نوترینو به طور خاص است. شرح واپاشی دوتایی ترکیب پیچیده‌ای از فیزیک ذرات و فیزیک هسته‌ای است.

درمیان موضوعات فیزیک ذرات که ما امیدواریم از آن‌ها به کمک واپاشی دوتایی نشانی بیابیم، سوالاتی از قبیل این که: آیا نوترینو ذره‌ای ماژورانی<sup>۱</sup> است و اگر هست جرم آن چیست؟ و آیا گواهی بر وجود برهم‌کنش ضعیف شامل جریان لپتونی با مولفه‌ی راست - دست جزئی، وجود دارد؟ داریم، که هنوز بی پاسخ مانده‌اند.

موضوعات اصلی فیزیک هسته‌ای با ارزیابی و شناسایی عناصر ماتریس هسته‌ای که عهده‌دار نرخ واپاشی است، باید انجام شود. زیرا هدف ما رسیدن به جواب کمی برای ویژگی‌های ذرات ذکر شده است، و در ابتدا چاره‌ای جز فهم سازوکار هسته‌ای نداریم. از اینرو با پدیده‌شناسی واپاشی دوتایی و چگونگی ارتباط آن با جرم نوترینو از بخش ۲-۲ شروع شده و بعد در بخش ۲-۳ با بحث روی مفاهیم هسته‌ای ادامه پیدا می‌کند [۳].

## ۲-۲ پدیده‌شناسی واپاشی دوتایی

چون واپاشی دوتایی به واپاشی بتایی هسته‌ای معمولی نزدیک است، این بخش با معرفی مختصری از واپاشی بتای هسته‌ای شروع می‌شود. در واپاشی بتای نوترون، در ابتدایی‌ترین فرایند ضعیف نیمه

---

<sup>1</sup> Majorana.



لپتونی<sup>۱</sup>، یک نوترون آزاد به خودی خود با گسیل یک الکترون و یک پاد نوترینو، به یک پروتون واپاشیده می‌شود.

واپاشی بتایی هسته به واپاشی نوترون آزاد شباهت دارد، اگرچه نوترون اولیه و پروتون نهایی در هسته مقید است. درحالی که پروتون آزاد در برابر واپاشی ضعیف پایدار است، و در هسته تحت واپاشی پوزیترون (یا گیراندازی الکترون) که بار هسته توسط آن یک واحد کاهش می‌یابد، شناخته می‌شود (مانند این است که پروتون به نوترون واپاشیده شود) [۳].

از اینرو، هسته تنوع غنی‌ای از واپاشی‌های ضعیف شبه لپتونی را نسبت به ذرات آزاد دارا است. شرح تئوری واپاشی‌های الکترون و پوزیترون (Commins و Bucksbaum [۴]، Konopinski [۵])، با لاگراتژین شبه لپتونی ضعیف کلی شروع می‌شود و تا حد زیادی با این واقعیت که نوکلئون‌ها اساساً غیرنسبیتی هستند ( $\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{1}{25}$ ) و اینکه طول موج دوبروی لپتون‌های خروجی خیلی بزرگ‌تر از شعاع هسته‌ای است ( $PR \sim \frac{1}{40}$ ) ساده سازی شده است.

با توجه به اینکه لپتون‌های خروجی از هسته خیلی سبک‌تر هستند، معمولاً پس‌زنی هسته‌ای می‌تواند نادیده گرفته شود و از اینرو انرژی موجود، تنها توسط لپتون‌ها به اشتراک گذاشته می‌شود. برای گذارهایی که در آن‌ها حالت‌های هسته‌ای اولیه و نهایی پاریته یکسان دارند و تکانه‌ی زاویه‌ای آن‌ها حداکثر یک واحد با هم تفاوت دارد، می‌توان درجات آزادی لپتونی و هسته‌ای آن‌ها را از هم جدا کرد. (که این، تقریب مجاز نیز نامیده می‌شود، و بعداً زمانی که تاثیرات جریان‌های لپتونی راست - دست روی واپاشی‌های دوتایی در این فصل مطالعه می‌شود، جملات فراتر از این تقریب را نیز در نظر می‌گیریم). طیف لپتونی در واپاشی‌های مجاز تنها توسط فضای فاز لپتون‌ها تعیین می‌شود و باید برهم‌کنش کولنی با هسته‌ی نهایی را به درستی دربرگیرد. ساختار هسته‌ای بر روی شکل طیف مجاز

---

<sup>1</sup>. semileptonic

تاثیری ندارد. هرچند که احتمال کل واپاشی را از طریق عناصر ماتریس هسته‌ای متناظر تعیین می‌کند [۳].

طیف الکترون (پوزیترون) با این معادله داده می‌شود:

$$\frac{dN}{dE} = G_F^2 \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \cos^2 \theta_c |M|^2 F(Z, E) p E (E_0 - E) \left[ (E_0 - E)^2 - m_e^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-2)$$

در این رابطه،  $G_F$  ثابت کوپل شدگی فرمی،  $\theta_c$  زاویه کبیبو،  $F$  تابع کولنی و کمیت  $|M|^2$  شامل عناصر هسته‌ای فرمی  $\langle 1 \rangle$  و گاموف - تلر  $\langle \sigma \rangle$  در ترکیب زیر است:

$$|M|^2 = \delta_{I_i, I_f} |g_V|^2 \langle 1 \rangle^2 + |g_A|^2 \langle \sigma \rangle^2 \quad (2-2)$$

که  $g_A$  و  $g_V$  به ترتیب ثابت‌های کوپل شدگی برهم‌کنش ضعیف برداری و بردار محوری هستند. (اثر جرم نوترینو روی شکل طیف (۱-۲) برای ما جای نگرانی نیست.)

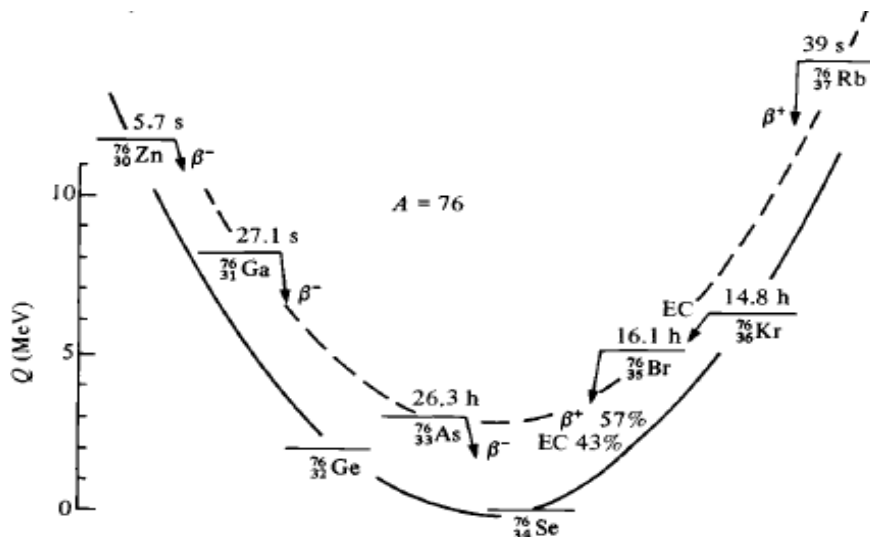
چه این که یک هسته پایدار است و یا این که تحت واپاشی ضعیف است، وابسته به جرم اتمی  $M_A$  ایزوتوپ  $(Z, A)$  به بارهسته‌ای  $Z$  می‌باشد. این بستگی تابعی، نزدیک مینیمم آن می‌تواند با یک سهمی تقریب زده شود [۳]:

$$M_A(Z, A) = const + 2b_{sym} \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A^2} + b_{coul} \frac{Z^2}{A^{1/3}} + m_e Z + \delta \quad (3-2)$$

که در آن ضریب انرژی تقارن  $b_{sym} \sim 50 \text{ MeV}$  و ضریب انرژی کولنی  $b_{coul} \sim 0.7 \text{ MeV}$ . جمله‌ی  $m_e Z$  جرم الکترون‌های ظرفیت را نشان می‌دهد. انرژی بستگی آن‌ها برای اهداف ما به اندازه‌ای کوچک است که چشم‌پوشی شود. جمله‌ی آخر  $\delta$  انرژی جفت‌شدگی هسته‌ای را شرح می‌دهد. این یک جمله تصحیحی است و معمولاً به ترتیب برای  $N$  فرد و  $Z$  فرد یا  $N$  زوج و  $Z$  زوج به صورت  $\delta \sim \pm \frac{34}{A^{3/4}}$  تقریب می‌زنند، حال آنکه برای  $A$  های فرد  $\delta = 0$  است. بدین ترتیب، برای هسته‌هایی

با  $A$  فرد، معمولاً تنها یک ایزوتوپ پایدار است. هسته با  $Z$  کوچک‌تر از هسته‌های پایدار با گسیل الکترون واپاشی می‌کند، درحالی که با  $Z$  بزرگ‌تر با گیراندازی الکترون یا گسیل پوزیترون یا هر دو این مدها به طور همزمان واپاشی می‌کند. برای هسته‌هایی با  $A$  زوج این وضعیت متفاوت است. به دلیل جمله جفت‌شدگی  $\delta$ ، شکل هسته زوج - زوج یک سهمی است درحالی که برای هسته فرد - فرد سهمی دیگری در جرم بزرگتر است که در شکل (۱-۲) با استفاده از  $A=76$  به عنوان یک نمونه، نشان داده شده است.

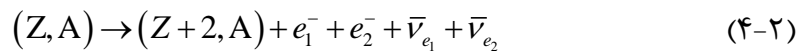
به تبع آن، در یک مورد به عنوان نمونه، دو هسته زوج - زوج برای یک  $A$  داده شده، که هر دو در برابر واپاشی‌های الکترون و پوزیترون ( $EC$ ) پایدار هستند، وجود دارد. به طوری که دو هسته که معمولاً دارای جرم یکسان هم نیستند، هسته‌ی سنگین‌تر ممکن است از طریق یک فرایند ضعیف دو مرحله‌ای به هسته‌ی سبک‌تر واپاشیده شده و بار هسته‌ای آن دو واحد تغییر کند. که این روند واپاشی دوتایی نامیده می‌شود [۳].



شکل (۱-۲): جرم‌های اتمی هسته‌ای با  $A=76$ . [۳].

بنابراین واپاشی دوتایی باید بین دو هسته زوج - زوج روی دهد. حالت‌های پایه همه‌ی هسته‌های زوج - زوج اسپین و پاریته  $0^+$  دارند بنابراین گذار  $0^+ \rightarrow 0^+$  در همه‌ی موارد قابل انتظار است. گاهی تعدادی از حالت‌های برانگیخته کم ارتفاع<sup>۱</sup> هسته‌های دختر از نظر انرژی برای گذار امکان‌پذیر هستند، گذارهای  $0^+ \rightarrow 2^+$  یا گذار به حالت‌های برانگیخته‌ی  $0^+$  هسته‌ی دختر.

مد واپاشی دوتایی، در مقایسه با واپاشی بتایی، گذاری با دو الکترون و دو پادنوترینوی الکترونی در حالت نهایی است، یعنی



البته تحت شرایط

$$M_A(Z, A) > M_A(Z+2, A) \quad (۵-۲)$$

و با شرط تکمیل‌کننده‌ای که تحت آن واپاشی تک بتایی یا وجود نداشته باشد مانند  $M_A(Z, A) < M_A(Z+1, A)$  یا بسیار از آن ممانعت شود (توسط قانون‌های انتخابی تکانه‌ی زاویه‌ای) تا نتواند با واپاشی دوتایی رقابت کند.

در قیاس با واپاشی پوزیترون و گیراندازی الکترون، سه مد ممکن واپاشی وجود دارد که در آن بار هسته‌ای دو واحد کاهش یافته و در حالت نهایی دو نوترینو داریم:



$$M_A(Z, A) > M_A(Z-2, A) + 4m_e \text{ اگر}$$



$$M_A(Z, A) > M_A(Z-2, A) + 2m_e + B_e \text{ اگر}$$

---

<sup>۱</sup> . low - lying

$$(Z, A) + e_b^- + e_b^- \rightarrow (Z-2, A) + \nu_{e_1} + \nu_{e_2} \quad (ج-۶-۲)$$

$$M_A(Z, A) > M_A(Z-2, A) + 2B_e$$
 اگر

$e_b^-$  یک الکترون اتمی ظرفیت با انرژی بستگی  $B_e$  است.

۱۱ کاندیدای شناخته شده در جدول (۱-۲) برای واپاشی (۴-۲) که در آن مقدار  $Q$ ، یعنی، انرژی جنبشی قابل دسترس برای لپتون‌ها، بزرگ‌تر از  $2MeV$  است، وجود دارد. تنها یک کاندیدا،  $^{124}Xe \rightarrow ^{124}Te$ ، برای واپاشی (۶-۲) وجود دارد، که در آن  $Q$  بیشتر از  $1MeV$  است. همانطور که به اختصار دیدیم، نرخ واپاشی دو بتایی به سرعت با  $Q$  افزایش می‌یابد و فرصت دیدن واپاشی‌های (۶-۲) یا بدون نوترینوهای نظیرشان را، بعید می‌کند [۳].

واپاشی دوتایی برای اولین بار بیش از نیم قرن پیش توسط Geoppert-Mayer [۶] مطرح شد، در اولین روزهای فیزیک هسته‌ای، در اواخر دهه سی، Furry [۷] به دنبال مقالات Majoran [۸] و Racah [۹] پی برد که، واپاشی‌های (۴-۲) و (۶-۲) تنها مدهای ممکن نیستند. با در نظر گرفتن رشته راشا<sup>۱</sup>

$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow p_1 + e^- + \nu \\ \nu + n_2 &\rightarrow p_2 + e^- \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

اگر نوترینوی الکترونی ذره‌ای ماژورانی باشد، اتفاقی که ممکن است رخ دهد عدم تفاوت بین  $\nu_e$  و  $\bar{\nu}_e$  (که با  $\nu$  در بالا نشان داده شده) است.

<sup>۱</sup>. Racah sequence

جدول (۲-۱): مشخصه‌های کاندیداهای واپاشی دوتایی [۳].

$\beta^-\beta^-$ candidates	$T_0$ (keV)	Abundance (%)	$(G^{2\nu})^{-1}$ (y)	$(G^{0\nu})^{-1}$ (y)
$^{46}\text{Ca} \rightarrow ^{46}\text{Ti}$	987 ± 4	0.0035	8.71E21	7.16E26
$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}^a$	4271 ± 4	0.187	2.52E16	4.10E24
$^{70}\text{Zn} \rightarrow ^{70}\text{Ge}$	1001 ± 3	0.62	3.17E21	4.27E26
$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$	2039.6 ± 0.9	7.8	7.66E18	4.09E25
$^{80}\text{Se} \rightarrow ^{80}\text{Kr}$	130 ± 9	49.8	8.20E27	2.34E28
$^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$	2995 ± 6	9.2	2.30E17	9.27E24
$^{86}\text{Kr} \rightarrow ^{86}\text{Sr}$	1256 ± 5	17.3	3.00E20	1.57E26
$^{94}\text{Zr} \rightarrow ^{94}\text{Mo}$	1145.3 ± 2.5	17.4	4.34E20	1.57E26
$^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}^a$	3350 ± 3	2.8	5.19E16	4.46E24
$^{98}\text{Mo} \rightarrow ^{98}\text{Ru}$	112 ± 7	24.1	1.03E28	1.49E28
$^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$	3034 ± 6	9.6	1.06E17	5.70E24
$^{104}\text{Ru} \rightarrow ^{104}\text{Pd}$	1299 ± 2	18.7	1.09E20	8.32E25
$^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$	2013 ± 19	11.8	2.51E18	1.86E25
$^{114}\text{Cd} \rightarrow ^{114}\text{Sn}$	534 ± 4	28.7	6.93E22	6.10E26
$^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$	2802 ± 4	7.5	1.25E17	5.28E24
$^{122}\text{Sn} \rightarrow ^{122}\text{Te}$	364 ± 4	4.56	9.55E23	1.16E27
$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Te}$	2288.1 ± 1.6	5.64	5.93E17	9.48E24
$^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$	868 ± 4	31.7	1.18E21	1.43E26
$^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	2533 ± 4	34.5	2.08E17	5.89E24
$^{134}\text{Xe} \rightarrow ^{134}\text{Ba}$	847 ± 10	10.4	1.16E21	1.30E26
$^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$	2479 ± 8	8.9	2.07E17	5.52E24
$^{142}\text{Ce} \rightarrow ^{142}\text{Nd}$	1417.6 ± 2.5	11.1	1.38E19	2.31E25
$^{146}\text{Nd} \rightarrow ^{146}\text{Sm}^b$	56 ± 5	17.2	2.06E29	7.05E27
$^{148}\text{Nd} \rightarrow ^{148}\text{Sm}^b$	1928.3 ± 1.9	5.7	9.35E17	7.84E24
$^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$	3367.1 ± 2.2	5.6	8.41E15	1.25E24
$^{154}\text{Sm} \rightarrow ^{154}\text{Gd}$	1251.9 ± 1.5	22.6	2.44E19	2.38E25
$^{160}\text{Gd} \rightarrow ^{160}\text{Dy}$	1729.5 ± 1.4	21.8	1.51E18	7.99E24
$^{170}\text{Er} \rightarrow ^{170}\text{Yb}$	653.9 ± 1.6	14.9	1.82E21	6.92E25

$\beta^-\beta^-$ candidates	$T_0$ (keV)	Abundance (%)	$(G^{2\nu})^{-1}$ (y)	$(G^{0\nu})^{-1}$ (y)
$^{176}\text{Yb} \rightarrow ^{176}\text{Hf}$	$1078.8 \pm 2.7$	12.6	$3.26E19$	$1.75E25$
$^{186}\text{W} \rightarrow ^{186}\text{Os}^b$	$490.3 \pm 2.2$	28.6	$7.68E21$	$6.95E25$
$^{192}\text{Os} \rightarrow ^{192}\text{Pt}$	$417 \pm 4$	41.0	$1.98E22$	$7.70E25$
$^{198}\text{Pt} \rightarrow ^{198}\text{Hg}$	$1048 \pm 4$	7.2	$1.63E19$	$8.74E24$
$^{204}\text{Hg} \rightarrow ^{204}\text{Pb}$	$416.5 \pm 1.1$	6.9	$1.23E22$	$5.06E25$
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{232}\text{U}^b$	$858.2 \pm 6$	100	$1.68E19$	$3.97E24$
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{238}\text{Pu}^b$	$1145.8 \pm 1.7$	99.27	$1.47E18$	$1.68E24$
$\beta^+\beta^+$ candidates	$T_0$ (keV)	Abundance (%)	$(G^{2\nu})^{-1}$ (y)	$(G^{0\nu})^{-1}$ (y)
$^{78}\text{Kr} \rightarrow ^{78}\text{Se}$	838	0.35	$2.56E24$	$1.8E29$
$^{96}\text{Ru} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$	676	5.5	$3.34E25$	$8.8E29$
$^{106}\text{Cd} \rightarrow ^{106}\text{Pd}$	738	1.25	$1.69E25$	$7.4E29$
$^{124}\text{Xe} \rightarrow ^{124}\text{Te}$	822	0.10	$7.57E24$	$5.9E29$
$^{130}\text{Ba} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	534	0.11	$6.92E26$	$6.4E30$
$^{136}\text{Ce} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$	362	0.19	$5.15E28$	$6.1E31$

EX دلالت بر  $10^x$

a واپاشی تک‌بتایی از نظر سینماتیکی امکان‌پذیر است.

b هسته‌های دختر در برابر واپاشی آلفا ناپایدار است.

بر طبق این رشته، مد بدون نوترینو یا  $0\nu$  واپاشی دوبتایی امکان‌پذیر است، که با (۲-۴) و (۲-۶)

توسط عدم حضور نوترینو (یا پادنوترینو) در حالت نهایی، متفاوت است. بنابراین برای گذاری که بار

هسته‌ای در آن دو واحد افزایش می‌یابد، داریم:

$$(Z, A) \rightarrow (Z+2, A) + e_1^- + e_2^- \quad (۸-۲)$$

واپاشی توسط رشته راشا پیش می‌رود، که به موجب آن درگام اول نوترینو گسیل می‌شود و در گام دوم یک نوترینوی مجازی جذب می‌شود. مشاهده واپاشی  $0\nu\beta\beta^1$  به عنوان دلیل قانع کننده‌ای برای اینکه نوترینو ذره‌ای ماژورانایی است، شناخته می‌شود. علاوه بر این در ادامه نشان داده می‌شود که، تحت بسیاری از پیش آمده‌های کلی مشاهده واپاشی  $0\nu\beta\beta$  اشاره بر وجود نوترینوهای ماژورانایی جرم‌دار، دارد [۳].

## ۲-۲-۱ فرمول نرخ واپاشی $2\nu$

حال فرمول نرخ واپاشی برای مد  $2\nu$  (۲-۴) که یک واپاشی ضعیف مرتبه دو استاندارد مستقل از ویژگی‌های نوترینو است، استخراج می‌شود. یک نمودار سطح انرژی هسته‌ای معمولی، با انتخاب  $^{76}\text{Ge}$  به عنوان نمونه، در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. واپاشی  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se} + 2e^- + 2\bar{\nu}$  می‌تواند بر طبق نمودار شکل (۲-۳) پیش رود، که در آن حالت‌ها در هسته‌ی فرد-فرد میانی  $Z+1$ ، مجازی هستند. این نمودار اصطلاحاً مکانیزم دو - نوکلئونی واپاشی دوبتایی را نشان می‌دهد. بدست آوردن فرمول ریاضی نرخ واپاشی دوبتایی به رفتار واپاشی بتای معمولی که در بالا مشخص شده است، شباهت دارد. که با قاعده طلایی فرمی برای واپاشی ضعیف مرتبه دوم شروع می‌شود:

$$d\lambda = 2\pi\delta\left(E_0 - \sum_f E_f\right) \left| \sum_{m,\beta} \frac{\langle f | H_\beta | m \rangle \langle m | H^\beta | i \rangle}{E_i - E_m - p_\nu - E_e} \right|^2 \quad (۹-۲)$$

که  $p_\nu$  تکانه نوترینو،  $E_e$  انرژی الکترون خروجی،  $E_i$  انرژی حالت اولیه،  $E_m$  انرژی حالت میانه،  $E_f$  انرژی حالت نهایی و  $E_0$  انرژی کل واپاشی است. با در نظر گرفتن اینکه هامیلتونی واپاشی ضعیف محصول جریان‌های هسته‌ای و لپتونی است:

<sup>1</sup> . neutrinoless double beta decay



$$d\lambda = 8\pi G_F^4 \cos^4 \theta_c \delta \left( E_0 - \sum_f E_f \right) \left| \sum_{m,\alpha,\beta} M_{f,m}^\alpha M_{m,i}^\beta \sum_{n_e n_v} (-)^{n_e+n_v} \frac{J_\alpha^{n_e n_v} J_\beta^{n_e n_v}}{E_i - E_m - p_{n_v} - E_{n_e}} \right| \quad (10-2)$$

بدست می‌آید [۳].

که  $M^\alpha$  و  $J_\alpha$  چهار - بردار<sup>۱</sup> جریان‌های هسته‌ای و لپتون‌ی و  $n_e = 1, 2$  اولین و دومین الکترون را نشان می‌دهد. ضریب  $n'$  مکمل  $n$  است (اگر  $n = 1$ ,  $n' = 2$ ), و  $m$  حالت‌های میانی برچسب می‌خورد. بعد از آن، جمع روی قطبش‌های لپتون‌ی با در نظر گرفتن تمیزناپذیری جفت لپتون‌های نهایی، انجام می‌شود. و از جملات خطی در  $\vec{p}_e$  و  $\vec{p}_\nu$  که بعد از انتگرال‌گیری روی زاویه‌ها ظاهر می‌شود، چشم‌پوشی می‌کنیم، زیرا فرمول نرخ مورد توجه است. (توزیع زاویه‌ای به شکل  $1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2$  برای گذارهای  $0^+ \rightarrow 0^+$  و  $(1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 / 3)$  برای گذارهای  $0^+ \rightarrow 2^+$  که آنجا  $\vec{\beta} = \vec{p} / E$  است.) برای اختصار نویسی نمادگذاری زیر معرفی می‌شود

$$K_m = \frac{1}{E_m + E_{e_1} + p_{\nu_1} - E_i} + \frac{1}{E_m + E_{e_2} + p_{\nu_2} - E_i} \quad (11-4)$$

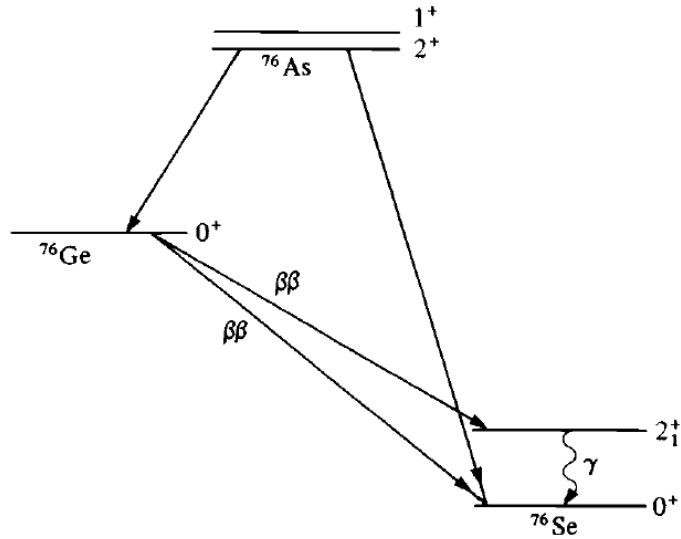
$$M_m = \frac{1}{E_m + E_{e_1} + p_{\nu_1} - E_i} - \frac{1}{E_m + E_{e_2} + p_{\nu_2} - E_i} \quad (12-4)$$

$$L_m = \frac{1}{E_m + E_{e_1} + p_{\nu_2} - E_i} + \frac{1}{E_m + E_{e_2} + p_{\nu_1} - E_i} \quad (13-4)$$

$$N_m = \frac{1}{E_m + E_{e_1} + p_{\nu_2} - E_i} - \frac{1}{E_m + E_{e_2} + p_{\nu_1} - E_i} \quad (14-4)$$

پس از جمع (۹-۲) روی  $\alpha$  و  $\beta$  عبارتی بدست می‌آید که با  $X$  نشان داده می‌شود و شامل همه‌ی کمیت‌های وابسته به حالت‌های هسته‌ای است. برای انتقال بین  $|i\rangle = 0^+$  و  $|f\rangle = 0^+$  خواهیم داشت:

<sup>۱</sup>. four-vectors



شکل (۲-۲): حالت‌های شرکت کننده در واپاشی دوتایی  $^{76}\text{Ge}$  [۳].

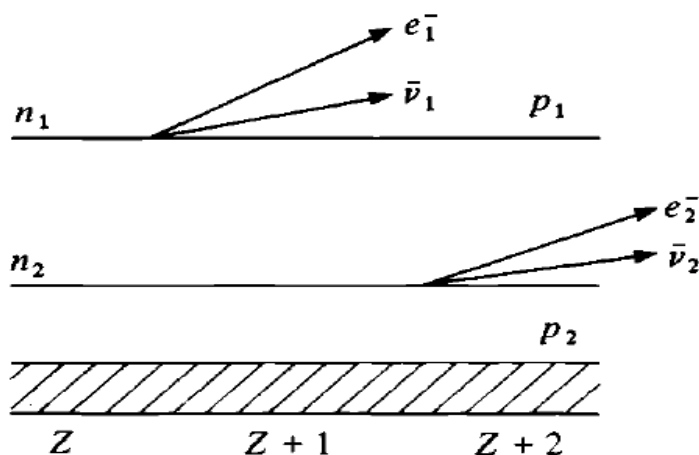
$$\begin{aligned}
 X = & \frac{1}{4} \sum_{m,m'} \left[ g_V^4 \langle f | t^+ | m \rangle \langle m | t^+ | i \rangle \langle f | t^+ | m' \rangle^* \langle m' | t^+ | i \rangle^* \right. \\
 & \times \left[ K_m K_{m'} + L_m L_{m'} - \frac{1}{2} (K_m L_{m'} + L_m K_{m'}) \right] \\
 & - g_V^2 g_A^2 \text{Re} \left( \langle f | t^+ | m \rangle \langle m | t^+ | i \rangle \langle f | \sigma^+ | m' \rangle^* \langle m' | \sigma^+ | i \rangle^* \right) \\
 & \times (K_m L_{m'} + L_m K_{m'}) \\
 & + g_A^4 \langle f | \sigma^+ | m \rangle \langle m | \sigma^+ | i \rangle \langle f | \sigma^+ | m' \rangle^* \langle m' | \sigma^+ | i \rangle^* \\
 & \left. \times \left[ K_m K_{m'} + L_m L_{m'} + \frac{1}{2} (K_m L_{m'} + L_m K_{m'}) \right] \right] \quad (15-2)
 \end{aligned}$$

که  $g_V$  ثابت جفت شدگی برداری،  $g_A$  ثابت جفت شدگی بردار محوری،  $t^+$  عملگر بالا برنده ایزواسپین،  $\sigma$  عملگر تغییر اسپین (ماتریس پائولی) است. برای بقیه حالت‌های مورد علاقه، موقعی که  $|i\rangle = 0^+$  و

$|f\rangle = 2^+$  بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
 X = & \frac{1}{4} g_V^4 \sum_{m,m'} \langle f | \sigma^+ | m \rangle \langle m | \sigma^+ | i \rangle \langle f | \sigma^+ | m' \rangle^* \langle m' | \sigma^+ | i \rangle^* \\
 & \times (K_m - L_m) (K_{m'} - L_{m'}) \quad (16-2)
 \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی نرخ کل باید  $X$  را در حجم فضای فاز لپتونی ضرب کرده و انتگرال‌گیری متناظر را روی متغیرهای مشاهده نشده، انجام داد [۳].



شکل (۳-۲): نمودار مد  $2\nu$  واپاشی دوتایی در مکانیزم دونوکلئونی [۳].

نرخ واپاشی بدین صورت بدست می‌آید

$$\omega_{2\nu} = \frac{G_F^4 \cos^4 \theta_c}{8\pi^7} \int_{m_e}^{E_0 - m_e} F(Z, E_{e_1}) p_{e_1} E_{e_1} dE_{e_1} \int_{m_e}^{E_0 - E_{e_1}} F(Z, E_{e_2}) p_{e_2} E_{e_2} dE_{e_2} \times \int_0^{E_0 - E_{e_1} - E_{e_2}} X p_{\nu_1}^2 (E_0 - E_{e_1} - E_{e_2} - p_{\nu_1})^2 dp_{\nu_1} \quad (17-2)$$

انرژی در مخرج‌های عامل‌های  $K, M, L$  و  $N$  شامل انرژی‌های هسته‌ای  $E_m - E_i$  و هم‌چنین انرژی‌های لپتونی  $E_e + p_\nu$  است. وقتی گذارهای  $0^+ \rightarrow 0^+$  محاسبه می‌شود، به طور کلی جایگزینی انرژی‌های لپتونی با مقدار میانگین متناظرش تقریب بسیار خوبی است، یعنی  $E_e + p_\nu \sim E_0/2$  در نتیجه:

$$K_m \sim L_m \sim \frac{1}{E_m - E_i + E_0/2} = \frac{1}{E_m - (M_i - M_f)/2} \quad (18-2 \text{ الف})$$

$$M_m \sim N_m \sim 0 \quad (18-2 \text{ ب})$$

با تقریب (۱۸-۲) درجه آزادی هسته‌ای و لپتون‌ی از یکدیگر جدا خواهند شد. حال آخرین انتگرال (۲-۲) (۱۷) متناسب است با:

$$\frac{1}{30}(E_0 - E_{e_1} - E_{e_2})^5$$

طیف الکترون منفرد توسط انتگرال‌گیری روی  $dp_{v_1}$  و انتگرال‌گیری روی  $dE_{e_2}$  در (۲-۱۲) بدست آمده است. در حالی که طیف مجموع انرژی‌های الکترونی با تغییر متغیرها به  $E_{e_1} + E_{e_2}$  و  $E_{e_1} - E_{e_2}$  و انتگرال‌گیری روی دومین متغیر، بدست آمده است. اگر به یک جواب نسبی نیاز باشد، شکل نسبیتی تابع  $F(Z, E)$  باید استفاده شود و ارزیابی عددی ضروری است. مثال‌هایی از طیف حاصل در شکل‌های (۲-۴) و (۲-۵) نشان داده شده است. برای تصویری شهودی و کیفی، می‌توان از عبارت ساده شده غیرنسبیتی کولنی استفاده کرد (Primakoff & Rosen [۱۰])

$$F(Z, E) = \frac{E}{p} \frac{2\pi Z\alpha}{1 - e^{-2\pi Z\alpha}} \quad (۲-۱۹)$$

این تقریب اجازه می‌دهد که انتگرال‌های مورد نیاز به صورت تحلیلی حل شود. طیف الکترون منفرد حال به این شکل است

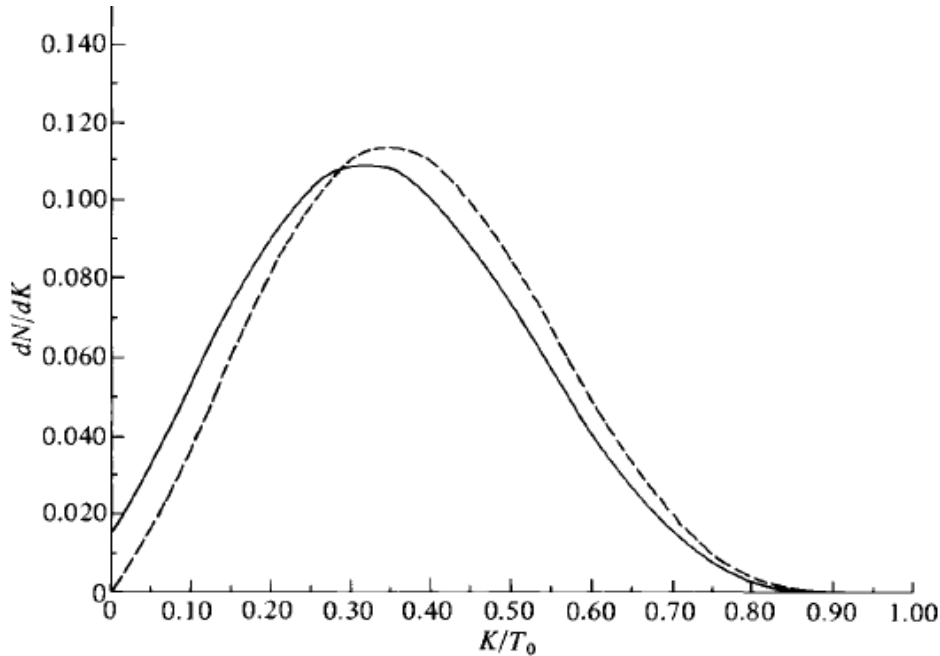
$$\frac{dN}{dT_e} \sim (T_e + 1)^2 (T_0 - T_e)^6 \left[ (T_0 - T_e)^2 + 8(T_0 - T_e) + 28 \right] \quad (۲-۲۰)$$

که  $T_e$  انرژی جنبشی در واحد جرم الکترون و  $T_0 = E_0 - 2$  ماکزیمم انرژی جنبشی است. طیف الکترونی مجموع، که از منظر تجربی، جزء علاقه‌مندی‌های اولیه است، به این شکل است

$$\frac{dN}{dK} \sim K(T_0 - K)^5 \left[ 1 + 2K + \frac{4K^2}{3} + \frac{K^3}{3} + \frac{K^4}{30} \right] \quad (۲-۲۱)$$

$K$  مجموع انرژی‌های جنبشی هر دو الکترون در واحد جرم است. نهایتاً، با انتگرال‌گیری روی  $T_e$  در (۲-۲۰) بستگی نرخ کل به  $T_0$  پیدا می‌شود که این تقریب مستقل از بار هسته‌ای  $Z$  است

$$\omega_{2\nu} \sim T_0^7 \left[ 1 + \frac{T_0}{2} + \frac{T_0^2}{9} + \frac{T_0^3}{90} + \frac{T_0^4}{1980} \right] \quad (22-2)$$



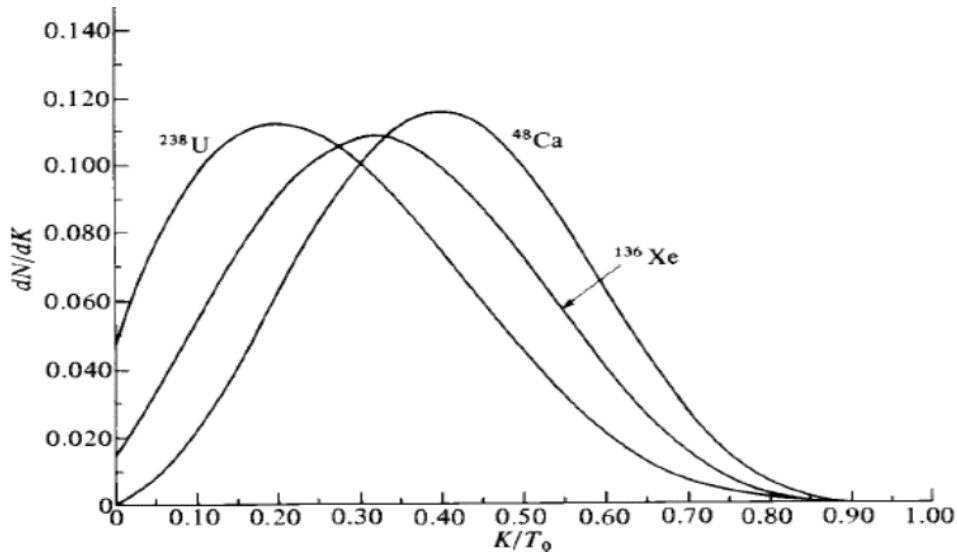
شکل (۴-۲): طیف الکترونی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$   $^{136}\text{Xe}$  است. [۳]

مثال‌هایی از طیف مجموع در شکل‌های (۴-۲) و (۵-۲) که در آنجا طیف دقیق و تجربی مقایسه شده، نشان داده شده است. برای مقایسه در شکل (۶-۲) طیف الکترون منفرد نشان داده می‌شود. تقریب پریماکف-روزن<sup>۱</sup> (۱۴-۲) شکل طیف‌های الکترون منفرد و طیف مجموع را به خوبی شرح می‌دهد. گرچه در محاسبه نرخ مطلق شکست می‌خورد. حال از (۱۲-۲) الف استفاده کرده و معکوس نیمه عمر واپاشی این گونه بدست می‌آید

$$\left[ T_{\frac{1}{2}}^{2\nu} (0^+ \rightarrow 0^+) \right]^{-1} = G^{2\nu} (E_0, Z) \left| M_{GT}^{2\nu} - \frac{g_V^2}{g_A^2} M_F^{2\nu} \right| \quad (23-2)$$

<sup>۱</sup>. Primakoff-rosen

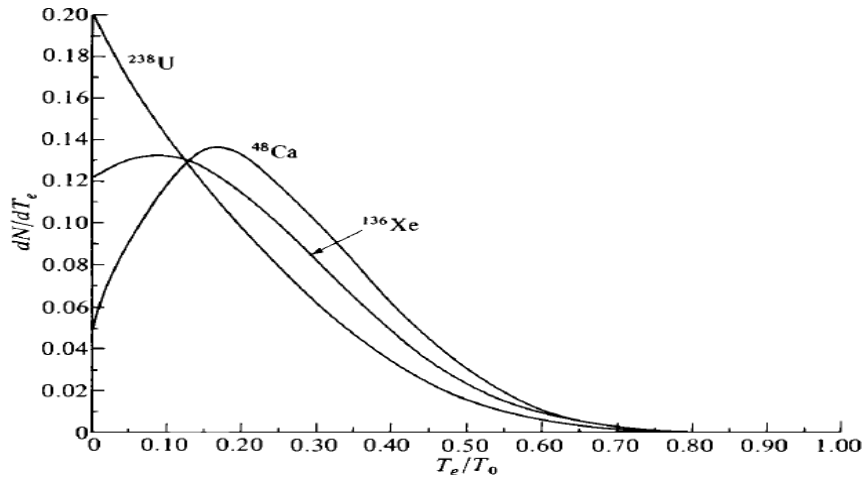
که تابع  $G^{2\nu}(E_0, Z)$  منتج از انتگرال گیری فضای فاز لپتونی و شامل همه‌ی ثابت‌های مربوطه است.  $(G^{2\nu})^{-1}$  کمیت‌های جدول بندی شده در جدول (۱-۲) است (واحد‌ها به گونه‌ای است که نیمه عمر در واحد سال بدست آید و انرژی‌ها در مخرج‌های (۲-۱۹-الف) و (۲-۱۹-ب) در واحد جرم الکترون است).



شکل (۲-۵): طیف الکترونی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$ . [۳]

کمیت‌های متناظر که برای واپاشی دو پوزیتونی به عنوان کاندیدا انتخاب شده‌اند در پایین جدول (۱-۲) نشان داده شده است. در کنار واپاشی دو پوزیترونی معادله (۲-۶-الف)، واپاشی‌های (۲-۶-ب) و (۲-۶-ج) نیز منجر به گذار  $Z \rightarrow Z-2$  می‌شود. عامل‌های فضای فاز برای این دو فرآیند که با گیراندازی الکترونی لایه  $K$  همراه شده، در جدول (۲-۶) داده شده‌اند. ورودی‌ها برای  $g_A = 1.25$  با استفاده از رفتار نسبیتی الکترون لایه  $K$  ظرفیتی و پوزیترون خروجی، تا مرتبه  $1 - (1 - (Z\alpha)^2)^{1/2}$  محاسبه شده است. با مقایسه ورودی‌های جدول (۱-۲) با ورودی‌های متناظرشان در جدول (۲-۲)، می‌توان دید که واپاشی‌های  $2\nu$  که در بردارنده گیراندازی الکترونی لایه  $K$  است، باید خیلی سریع‌تر از آن‌هایی که گسیل دو پوزیترونی دارند، باشند. هرچند مشکلات مشاهده تجربی فرآیندهای (۲-۶-ب) و (۲-۶-ج) واضح است. اطلاعات ساختار هسته‌ای در عناصر ماتریس  $M_{GT}^{2\nu}$  و  $M_F^{2\nu}$  موجود است.

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_m \frac{\langle 0_f^+ | \sum_l \vec{\sigma}_l \tau_l^+ | m \rangle \cdot \langle m | \sum_k \vec{\sigma}_k \tau_k^+ | 0_i^+ \rangle}{E_m - (M_i + M_f)/2} \quad (24-2 \text{ الف})$$



شکل (۲-۶): طیف الکترون منفرد برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  [۳]

$$M_F^{2\nu} = \sum_m \frac{\langle 0_f^+ | \sum_l \tau_l^+ | m \rangle \cdot \langle m | \sum_k \tau_k^+ | 0_i^+ \rangle}{E_m - (M_i + M_f)/2} \quad (24-2 \text{ ب})$$

مشکلات مرتبط با محاسبه عناصر ماتریس هسته‌ای در بخش ۲-۲ بحث خواهد شد [۳].

جدول (۲-۲): عامل‌های فاز برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  [۳]

$Z \rightarrow Z-2$ candidates	$\Delta M^{atomic}$ (keV)	Abund. (%)	$(G_{\beta\beta}^{2\nu})^{-1}$ (y)	$(G_{\bar{k}\bar{k}}^{2\nu})^{-1}$ (y)
$^{50}\text{Cr} \rightarrow ^{50}\text{Ti}$	1174	4.4	$3.89E29$	$4.62E24$
$^{58}\text{Ni} \rightarrow ^{58}\text{Fe}$	1928	68.1	$4.08E23$	$1.36E23$
$^{64}\text{Zn} \rightarrow ^{64}\text{Ni}$	1097	48.6	$1.07E32$	$1.46E24$
$^{74}\text{Se} \rightarrow ^{74}\text{Ge}$	1209	0.9	$4.88E28$	$3.81E23$
$^{78}\text{Kr} \rightarrow ^{78}\text{Se}$	2882	0.354	$1.05E21$	$3.00E21$
$^{84}\text{Sr} \rightarrow ^{84}\text{Kr}$	1790	0.56	$6.65E23$	$2.29E22$
$^{92}\text{Mo} \rightarrow ^{92}\text{Zr}$	1649	14.8	$2.50E24$	$1.71E22$
$^{96}\text{Ru} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$	2720	5.5	$1.17E21$	$9.54E20$
$^{102}\text{Pd} \rightarrow ^{102}\text{Ru}$	1175	1.0	$5.72E29$	$4.48E22$
$^{106}\text{Cd} \rightarrow ^{106}\text{Pd}$	2782	1.25	$6.28E20$	$3.65E20$
$^{112}\text{Sn} \rightarrow ^{112}\text{Cd}$	1920	1.0	$9.45E22$	$1.74E21$
$^{120}\text{Te} \rightarrow ^{120}\text{Sn}$	1698	0.1	$7.81E23$	$2.37E21$
$^{124}\text{Xe} \rightarrow ^{124}\text{Te}$	2866	0.10	$2.91E20$	$1.17E20$
$^{130}\text{Ba} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	2578	0.11	$9.76E20$	$1.58E20$
$^{136}\text{Ce} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$	2406	0.19	$2.13E21$	$1.69E20$
$^{144}\text{Sm} \rightarrow ^{144}\text{Nd}^b$	1782	3.1	$2.07E23$	$4.17E20$
$^{148}\text{Gd}^a \rightarrow ^{148}\text{Sm}$	3068	—	$7.06E19$	$1.82E19$
$^{156}\text{Dy} \rightarrow ^{156}\text{Gd}$	2009	0.1	$2.03E22$	$1.32E20$
$^{162}\text{Er} \rightarrow ^{162}\text{Dy}$	1846	0.1	$7.75E22$	$1.48E20$
$^{168}\text{Yb} \rightarrow ^{168}\text{Er}$	1420	0.1	$5.37E25$	$4.60E20$
$^{174}\text{Hf}^a \rightarrow ^{174}\text{Yb}$	1110	0.2	$1.48E37$	$1.32E21$
$^{184}\text{Os}^a \rightarrow ^{184}\text{W}^b$	1454	0.02	$2.62E25$	$1.83E20$
$^{190}\text{Pt}^a \rightarrow ^{190}\text{Os}$	1380	0.01	$1.74E26$	$1.79E20$

$EX$  دلالت بر  $10^x$

$a$  واپاشی تک‌بتایی از نظر سینماتیکی امکان‌پذیر است.

$b$  هسته‌های دختر در برابر واپاشی آلفا ناپایدار است.



## ۲-۲-۲ فرمول نرخ واپاشی $0\nu$

در قیاس با نمودار شکل (۳-۲) برای مد  $2\nu$ ، در شکل (۷-۲) نشان داده شده که فرآیندهای واپاشی دوتایی بدون نوترینو در مکانیزم دو - نوکلئونی چطور پیش می‌رود. در مدل استاندارد کمینه<sup>۱</sup> واپاشی بدون نوترینو منطبق بر "رشته راشا" که قبلاً گفته شد، حتی برای نوترینوهای ماژورانا، اکیداً ممنوع است. همانطور که از شکل (۷-۲-الف) معلوم است، نوترینوی گسیل شده غالباً راست - دست<sup>۲</sup> هستند، در حالی که نوترینوی جذب شده چپ - دست<sup>۳</sup> است. از این رو با عدم تطابق هلیسیتی<sup>۴</sup> مواجه شده و واپاشی  $0\nu$  نمی‌تواند صورت گیرد. به طور مشابه در شکل (۷-۲-ب) رأس دوم، کوپل‌شدگی به جریان راست - دست را نشان می‌دهد، که در مدل استاندارد کمینه وجود ندارد. بنابراین، واپاشی  $0\nu\beta\beta$  تنها اگر عدد لپتونی پایسته نباشد، به این معنی که  $\nu_e = \bar{\nu}_e$  و به طور همزمان اگر هر دو نوترینو مولفه هلیسیتی یکسان داشته باشند، وجود دارد. پس از آن، بخش لپتونی مدل استاندارد کمینه باید اصلاح شود. شرایط تطابق هلیسیتی به دو طریق ارضا می‌شود:

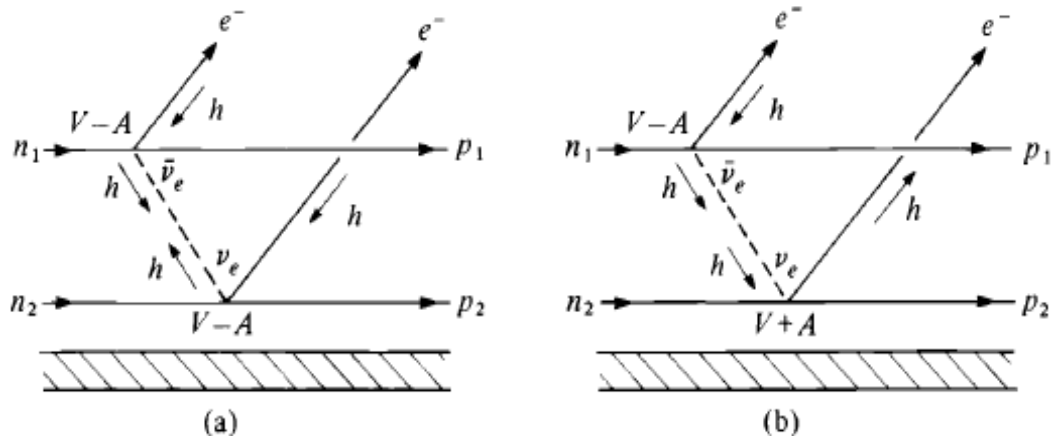
اول اینکه اگر نوترینوها جرم دار باشند، یک مولفه نادرست هلیسیتی با دامنه‌ای متناسب با  $m_\nu/E_\nu$  وجود دارد، با  $E_\nu \sim m_e$  نرخ واپاشی متناسب است با  $m_\nu^2/m_e^2$ . (معنای دقیق پارامتر جرمی  $m_\nu$  به نوترینوی آمیخته بستگی دارد و بعداً تعریف خواهد شد) [۳].

و دوم، اگر برهم کنش ضعیف جریان راست - دست همانطور که در شکل (۷-۲-ب) نشان داده شده، وجود داشته باشد، شرایط تطابق هلیسیتی نیز می‌تواند ارضا شود. و سپس نرخ واپاشی  $0\nu\beta\beta$  با مربع برخی از مشخصه‌های شدت کوپل‌شدگی جریان راست - دست متناسب است. با این حال وجود

---

1 . minimum standard model  
2 . right-handed  
3 . left-handed  
4 . helicity

جریان راست - دست کافی نیست، زیرا به طور کلی، نوترینوهای جذب شده و گسیل شده متفاوت هستند.



شکل (۷-۲): طرح کلی مد  $0\nu$  واپاشی دوتایی در مکانیزم دو - نوکلئونی. [۳]

از این رو نرخ واپاشی، علاوه بر بستگی به پارامترهای مشخصه جریان راست - دست (از قبیل آنهایی که به ویژگیهای بوزون برداری میانی فرضی  $W_R$  که به جریان راست - دست کوپل می شود، بستگی دارند.) به پارامترهای نوترینوی آمیخته متناظر نیز بستگی دارد، و در نوترینوهای غیر آمیخته از بین می رود.

مورد  $m_\nu \neq 0$ . حال استنتاج طیف الکترونی و نرخهای واپاشی مرتبط با مقدار غیر صفر  $m_\nu$  مدنظر است. شکل کلی نرخ واپاشی اینگونه است

$$\omega_{0\nu} = 2\pi \sum_{spin} |R_{0\nu}|^2 \delta(E_{e_1} + E_{e_2} + E_f - M_i) d^3 p_{e_1} d^3 p_{e_2} \quad (۲۵-۲)$$

که  $E_f$  انرژی هسته‌ی نهایی و  $R_{0\nu}$  دامنه گذار، که شامل هر دو بخش هسته‌ای و لپتونی است.

بخش لپتونی دامنه به عنوان محصولی از دو جریان راست - دست یا چپ - دست است.

$$\bar{e}(x) \gamma_\rho \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \nu_j(x) \bar{e}(y) \gamma_\sigma \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \nu_k(y) \quad (۲۶-۲)$$

$\nu_k$  و  $\nu_j$  نوترینوها با طعم  $j$  و  $k$  را نشان می‌دهد، ترنجشی<sup>۱</sup> روی دو عملگر نوترینویی وجود دارد. علامت  $\pm$  متناظر با جریان‌های لپتونی راست - دست و چپ - دست است. ترنجش بالا تنها اگر نوترینوها ذراتی ماژورانیایی باشند، مجاز است [۳].

پس از جایگزینی برای انتشارگر نوترینو و انتگرال‌گیری روی تکانه نوترینوی مجازی، دامنه لپتونی به این شکل بدست می‌آید

$$-i\delta_{jk} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - m_j^2} \bar{e}(x)\gamma_\rho \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)(q^\mu \gamma_\mu + m_j) \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\gamma_\sigma e^C(y) \quad (27-2)$$

با استفاده از این رابطه‌ها

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)(q^\mu \gamma_\mu + m_j) \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = m_j \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (28-2)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)(q^\mu \gamma_\mu + m_j) \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = q^\mu \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (29-2)$$

دید می‌شود که برای جریان‌های صرفاً چپ - دست (عبارت بالایی) تنها بخش  $m_\nu$  انتشارگر نوترینو شرکت می‌کند، در حالی که برای تداخل جریان چپ - راست (عبارت پایینی) دامنه‌ی لپتونی بخش انتشارگر نوترینو که متناسب با چهار - تکانه مجازی  $q$  است، را شامل می‌شود.

انتگرال‌گیری روی انرژی نوترینوی مجازی منجر به جابجایی انتشارگر  $(q^2 - m_j^2)^{-1}$  با قسمت باقی مانده  $\pi/\omega_j = (\bar{q}^2 + m_j^2)^{1/2}$  می‌شود. برای باقی ماندن انتگرال‌گیری روی قسمت فضایی  $d\bar{q}$  باید در کنار این مخرج  $\omega_j$ ، انرژی مخرج‌های عبارت اختلالی مرتبه دوم، در نظر گرفته شود، مشابه (۱۰-۲). با علامت گذاری:

$$A_{n_e} = E_m - E_i + E_{n_e}$$

<sup>1</sup> Contraction.

دریافت می‌شود که انتگرال‌گیری روی  $d\vec{q}$  منجر به عبارتی می‌شود که اثر انتشار نوترینو بین دو هسته را نشان می‌دهد. این عبارت به شکل پتانسیل نوترینو<sup>1</sup> و در عناصر هسته ای متناظر ظاهر می‌شود، و بستگی عملگر گذار روی مختصات دو هسته و همچنین بستگی به انرژی برانگیختگی حالت مجازی را معرفی می‌کند. پتانسیل نوترینو به این شکل است

$$H_n(r, E_m) = \frac{R}{2\pi^2} \int \frac{d\vec{q}}{\omega} \frac{1}{\omega + A_n} e^{i\vec{q}\cdot r} = \frac{2R}{\pi r} \int_0^\infty dq \frac{q \sin(qr)}{\omega(\omega + A_n)} \quad (30-2)$$

(شعاع هسته‌ای  $R=1.2A^{1/3}$  به عنوان عامل کمکی که  $H$  را بدون بعد می‌کند اضافه شد.)

$\omega$  اولین عامل در مخرج (30-2) قسمت باقی مانده است، در حالی که عامل  $\omega + A_n$  انرژی مخرج تئوری اختلال است. برای بدست آوردن نتیجه نهایی، باید عدم تقارن بین الکترون‌های خروجی یکسان به درستی پذیرفته شود.

انتظار می‌رود تکانه نوترینوی مجازی با رابطه‌ی تقریبی  $q \sim 1/r \sim 100$ ، که  $r$  فاصله‌ی معمول بین دو هسته است، تعیین شود. بنابراین، برای تقریبی معقول می‌توان در (30-2) از  $A_n$  نسبت به  $\omega$  چشم پوشی کرد و بدست آورد:

$$H_n(r, E_m) \equiv H(r) = \frac{R}{r} e^{-m_j} \quad (31-2)$$

که مستقل از انرژی هسته میانی  $E_m$  و انرژی الکترون  $E_n$  است. باید توجه کرد که در مورد حاضر که  $m_j \neq 0$ ، سهم هر دو الکترون  $n=1$  و  $2$ ، به طور منسجم اضافه شده است. پتانسیل  $H$  به طور ضعیفی برای مقادیر پایین‌تر از  $10\text{MeV}$  به جرم نوترینو  $m_j$  بستگی دارد، و به طور قابل توجهی در جرم‌های بزرگ میرا است. (برای نوترینوهای خیلی سنگین،  $\geq 1\text{GeV}$ ، روشی متفاوت ضروری است.)

---

<sup>1</sup> neutrino potential.

از بحث بالا اینطور به نظر می رسد که برای تداخل جریان چپ - راست، پتانسیل نوترینو شامل عامل های اضافی  $\omega$  یا  $\bar{q}$  در انتگرال هایی مشابه انتگرال (۲-۳۰) است. در اصل بخش متناسب با  $\omega$  مشکلی را نشان نمی دهد. بخش  $\bar{q}$  پیچیده تر آن است که به عنوان یک عملگر که تحت انتقال پارته فرد است، نشان داده شود. به تبع آن، برای بدست آوردن مقداری غیرصفر برای عناصر ماتریس متناظر یا باید موج-P لپتون های خروجی را بحساب آورد و یا پس زنی هسته ای را در نظر گرفت.

حال همه اجزاء مورد نیاز برای محاسبه نرخ واپاشی  $0\nu\beta\beta$  مربوط به جرم غیرصفر نوترینوی ماژورانا موجود است. عناصر ماتریس هسته ای ساختاری مشابه به آن هایی که در معادله (۲-۲۸) برای مد  $2\nu$  است، دارند. حال، هرچند این تقریب بهتری است که از تغییرات انرژی های برانگیختگی در هسته های میانی در مقایسه با انرژی نسبتاً بالای نوترینوی مجازی چشم پوشی شود. به تبع آن، جمع روی حالت های میانی می تواند با تقریب بستاری<sup>۲</sup> انجام شود و بدست آید

$$M_{GT}^{0\nu} = \langle f | \sum_{lk} \bar{\sigma}_l \cdot \bar{\sigma}_k \tau_l^+ \tau_k^+ H(\mathbf{r}_{lk}, \bar{E}_m) | i \rangle \quad (2-32 \text{ الف})$$

$$\sim \langle f | R \sum_{lk} \bar{\sigma}_l \cdot \bar{\sigma}_k \tau_l^+ \tau_k^+ / r_{lk} | i \rangle \quad (2-32 \text{ ب})$$

و همچنین

$$M_F^{0\nu} = \langle f | \sum_{lk} \tau_l^+ \tau_k^+ H(\mathbf{r}_{lk}, \bar{E}_m) | i \rangle \quad (2-33 \text{ الف})$$

$$\sim \langle f | R \sum_{lk} \tau_l^+ \tau_k^+ / r_{lk} | i \rangle \quad (2-33 \text{ ب})$$

در معادلات (۲-۳۲) و (۲-۳۳)،  $l, k$  جمع روی همه نوکلئون های هسته ها،  $r_{lk}$  فاصله بین نوکلئون های  $l$  و  $k$  است و  $\bar{E}_m$  انرژی برانگیختگی میانگین است. عبارات (۲-۳۲ ب) و (۲-۳۳ ب)

<sup>1</sup> p-wave.

<sup>2</sup> Closure approximation

در تقریبی که در بالا بحث شد معتبر هستند. ( $\omega \gg A_{n_e}$  و برای جرم‌های نوترینوی  $m_\nu < 10\text{MeV}$ ).  
با این تعاریف، معکوس نیمه عمر به شکل:

$$\left[ T_{1/2}^{0\nu}(0^+ \rightarrow 0^+) \right]^{-1} = G^{0\nu}(E_0, Z) \left| M_{GT}^{0\nu} - \frac{g_V^2}{g_A^2} M_F^{0\nu} \right|^2 \langle m_\nu \rangle^2 \quad (2-34)$$

که تابع  $G^{0\nu}(E_0, Z)$  حاصل انتگرال‌گیری فضای فاز دو الکترون و متناسب است با

$$G^{0\nu} \sim \int F(Z, E_{e_1}) F(Z, E_{e_2}) p_{e_1} p_{e_2} E_{e_1} E_{e_2} \delta(E_0 - E_{e_1} - E_{e_2}) dE_{e_1} dE_{e_2} \quad (2-35 \text{ الف})$$

دوباره در تقریب پریماکف - روزن (2-15)،  $G^{0\nu}$  مستقل از  $Z$  است و

$$G_{PR}^{0\nu} \sim \left[ \frac{E_0^5}{30} - \frac{2E_0^2}{3} + E_0 - \frac{2}{5} \right] \quad (2-35 \text{ ب})$$

مقادیر دقیق تابع فضای فاز  $G^{0\nu}$  که شامل تمامی ثابت‌های کوپل‌شدگی مربوطه است، در جدول (2-1) داده شده است. (کمیت  $(G^{0\nu})^{-1}$  جدول بندی شده است و واحدها به گونه ای است که اگر پارامتر جرم  $\langle m_\nu \rangle$ ،  $eV$  باشد، نیمه عمر در واحد سال است.) ورودی‌های جدول (2-1) می‌تواند به عنوان معیار مناسبی برای تشخیص حساسیت کاندیداهای مختلف واپاشی دوتایی به جرم نوترینو  $\langle m_\nu \rangle$  برای هر دو مد واپاشی دوتایی، و همچنین نیمه عمر انتظاری برای مد  $2\nu$ ، استفاده شوند. نشانه گذاری  $\langle m_\nu \rangle$  برای این است که تایید شود، این کمیت جرم موثر نوترینوی ماژورانایی است [3]. طیف الکترونی مجموع حالت  $0\nu$  بسیار ساده است. یک قله تابع دیراک با نقطه نهایی  $E_0$  است. این ویژگی موجب تمایز امکان پذیری تجربی میان  $0\nu$  و  $2\nu$  می‌شود. با مشاهده هر دو الکترون به صورت مجزا، هر کدام دارای طیف انرژی خواهند بود که با فضای فاز تعیین می‌شود

$$\frac{dN}{dT_{e_1}} \sim F(Z, E_{e_1}) F(Z, E_{e_2}) p_{e_1} p_{e_2} E_{e_1} E_{e_2} \quad (2-36 \text{ الف})$$

که  $E_{e_2} = E_0 - E_{e_1}$  در تقریب پریماکف - روزن (2-19) بدست می‌آید:

$$\frac{dN}{dT_e} \sim (T_e + 1)^2 (T_0 + 1 - T_e)^2 \quad (2-36 \text{ ب})$$

در شکل (2-8) مثال‌هایی از طیف دقیق الکترون منفرد نشان داده شده است. تقریب پریماکف - روزن شکل طیف را به طور منطقی شرح می‌دهد، اما برای محاسبه نرخ واپاشی قطعی از اعتبار کمتری برخوردار است.

حال جالب است مدهای واپاشی  $0\nu$  و  $2\nu$  را از منظر انتگرال‌های فضای فاز مقایسه شود. برتری حالت نهایی دو - لپتونی مد  $0\nu$  با مشخصه بستگی  $E_0^5$  در (2-35 الف) در مقایسه با حالت نهایی چهار - لپتونی با بستگی  $E_0^{11}$  در (2-23) برای مد  $2\nu$  است.

به علاوه، تکانه نسبتاً بزرگ نوترینوی مجازی، در مقایسه با انرژی برانگیختگی هسته‌ای معمولی نیز موجب می‌شود واپاشی مد  $0\nu$  سریع‌تر باشد. بنابراین اگر  $\langle m_\nu \rangle$  از مرتبه  $m_e$  باشد، واپاشی  $0\nu$   $10^5$  بار سریع‌تر از واپاشی  $2\nu$  خواهد بود. وجود این مزیت فضای فاز است که باعث می‌شود واپاشی  $0\nu\beta\beta$  کاوشی حساس برای جرم نوترینوی ماژورانا باشد.

در پایان این بحث، ملاحظه می‌شود که مکانیزم دو - نوکلئونی واپاشی دوبتایی که در اینجا استفاده شد لزوماً تنها راه ممکن نیست. سایر مکانیزم‌ها که به طور مثال، گذارهایی شامل اسکالرهای هیگز مجازی است، نیز در نظر گرفته می‌شود (چنین واپاشی‌های دوبتایی بدون نوترینو شامل مبادله‌ی نوترینوی مجازی نخواهند بود). هم‌چنین ممکن است که، علاوه بر دو الکترون، یک بوزون سبک، که ماژورون<sup>1</sup> نامیده می‌شود، گسیل شود. این گذار فضای فاز سه ذره‌ای دارد، که به ظهور قله طیف پیوسته تقریباً در سه چهارمی انرژی واپاشی  $T_0$  می‌شود.

مورد جریان‌های راست - دست. حال واپاشی  $0\nu$  را که ناشی از برهم‌کنش‌های ضعیف در بردارنده کوپل‌شدگی به جریان‌های لپتونی راست - دست، در نظر گرفته می‌شود. شروع با پارامتر مناسب

<sup>1</sup> Majoron.

هامیلتونی برهم‌کنش ضعیف است. هامیلتونی عمومی برهم‌کنش‌های ضعیف شبه لپتونی را در انرژی‌های پایین شرح می‌دهد ( $W$  جرم بوزونی) که می‌توان به این صورت نوشت

$$H_W = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[ J_L^\alpha (M_{L\alpha}^+ + M_{R\alpha}^+) + J_R^\alpha (\eta M_{L\alpha}^+ + M_{R\alpha}^+) \right] + h.c. \quad (37-2)$$

که  $J_{L(R)}^\alpha$  و  $M_{L(R)}^\alpha$  به ترتیب چهار - بردار جریان چپ (راست) - دست لپتونی و کوارکی است. انحراف از مدل استاندارد کمینه توسط پارامترهای بدون بعد  $\eta$ ،  $\lambda$  و  $\kappa$  مشخص شده است. پارامتر  $\eta$  کوپل‌شدگی بین جریان لپتونی راست - دست و جریان کوارکی چپ - دست را شرح می‌دهد،  $\lambda$  کوپل‌شدگی بین جریان لپتونی راست - دست و جریان کوارکی راست - دست را شرح می‌دهد و  $\kappa$  کوپل‌شدگی بین جریان کوارکی راست - دست و جریان لپتونی چپ - دست را شرح می‌دهد. (باید توجه داشت که کوپل‌شدگی استاندارد جریان‌های کوارکی و لپتونی چپ - دست با تعریف یک ثابت کوپل‌شدگی مساوی واحد شده است) در مدل‌های کلی‌تر پارامترهای  $\lambda$ ،  $\eta$  و  $\kappa$  مقادیر خاص و غیر صفری دارند [۳].

زمانی که جریان کوارکی به جریان نوکلئونی تبدیل شده (با استفاده از تقریب برانگیزش<sup>۱</sup>)، معلوم می‌شود که پارامتر  $\kappa$  سهم ناچیزی را به واپاشی دوتایی نسبت می‌دهد و تنها پارامترهای  $\lambda$  و  $\eta$  مرتبط هستند، یعنی، همانطور که انتظار می‌رفت، تنها از پارامترهای شامل جریان‌های لپتونی راست - دست می‌توان اطلاعاتی بدست آورد. برای پیشروی بیشتر باید گذارهای  $0^+ \rightarrow 0^+$  و  $0^+ \rightarrow 2^+$  را جداگانه در نظر گرفت. همانطور که قبلاً بیان شد، در هر دو مورد، عاملی اضافی در انتگرال‌گیری روی  $d\bar{q}$  در انتگرال‌هایی مشابه با (۳۱-۲) وجود دارد، که یا عامل  $\omega$  (که بخش -  $\omega$  نام دارد) است یا عامل  $\bar{q}$  (که بخش -  $q$  نام دارد).

<sup>1</sup> impulse approximation.



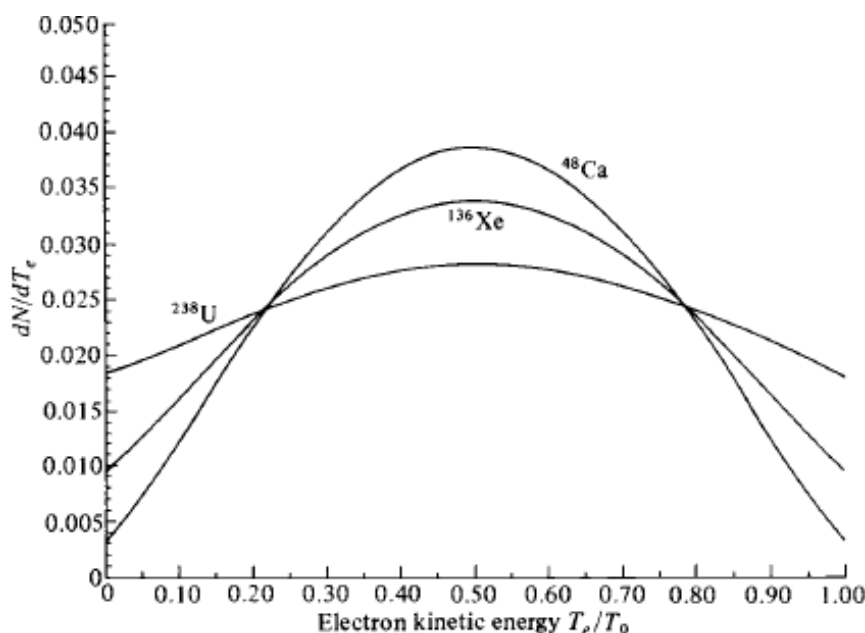
بخش -  $\omega$  دارای همان قواعد انتخابی مورد  $m_\nu$  است، یعنی، هر دو الکترون در حالت  $s$  هستند و تنها گذارهای  $0^+ \rightarrow 0^+$  ممکن است. هر چند برخلاف مورد  $m_\nu$ ، عبارت حاصل تحت تبادل دو الکترون فرد است. به تبع آن، انتگرال فضای فاز متناظر شامل عامل  $(E_{e1} - E_{e2})^2$  است. در شکل (۲-۹) یک مثال از طیف الکترون منفرد مرتبط با بخش -  $\omega$  نشان داده شده است. (زمانی که دو الکترون از انرژی در دسترس به طور مساوی سهم برند، برآمدگی در وسط است.)

تحلیل نشان گر آن است که بخش -  $\omega$  سهم عمده را می‌دهد، تنها اگر پارامتر  $\lambda$  در هامیلتونی (۲-۳۷) مسئول واپاشی دویتایی باشد. در کنار عناصر ماتریس هسته‌ای مشابه به (۲-۳۲-الف) و (۲-۳۳-الف)، با اندکی وابستگی شعاعی اصلاح شده، بخش -  $\omega$  هم‌چنین به عنصر ماتریسی تانسوری بستگی دارد

$$M_T^{0\nu} = \langle f | \sum_{lk} \frac{R}{r_{lk}^3} (\vec{\sigma}_l \cdot \vec{r}_{lk}) (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{r}_{lk}) \tau_l^+ \tau_k^+ | i \rangle \quad (۲-۳۸)$$

بخش -  $q$  شامل پتانسیل نوترینویی بردار ماندی است، که پاریته را تغییر می‌دهد. از این رو امکان بیشتر ماندن در تقریب مجاز، وجود ندارد. دو شرط اصلی باید برای گذارهای  $0^+ \rightarrow 0^+$  در نظر گرفت شود. در اولین شرط یکی از این الکترون‌ها در حالت  $p$  است. به طور ظاهری، حالت  $p$  توسط یک پارامتر کوچک  $p_e R \sim 1/40$  مشخص می‌شود. هرچند برای حالت‌های الکترونی  $p_{1/2}$ ، این جمله شدیداً توسط برهم‌کنش کولنی افزایش می‌یابد، که منجر به جایگزینی پارامتر  $p_e R$  با عامل بزرگ‌تر  $Z\alpha$  می‌شود. پتانسیل نوترینوی متناظر تقریباً شکلی مشابه معادله (۲-۳۱) دارد، یعنی:

$$H' \sim -r \frac{d}{dr} H \sim \frac{R}{r} \quad (۲-۳۹)$$



شکل (۲-۸): طیف الکترون منفرد برای واپاشی‌های  $0\nu 0^+ \rightarrow 0^+ \beta\beta$  برای مورد  $\langle m_\nu \rangle \neq 0$  نشان داده شده [۳].

و عناصر ماتریس هسته‌ای به این شکل است

$$M_P^{0\nu} = g_V \langle f | \sum_{lk} iH'(\mathbf{r}_{lk}) \frac{|\vec{r}_l + \vec{r}_k|}{2r_{lk}} \left[ (\vec{\sigma}_l + \vec{\sigma}_k) \cdot \frac{\vec{r}_{lk}}{r_{lk}} \times \frac{\vec{r}_l + \vec{r}_k}{|\vec{r}_l + \vec{r}_k|} \right] \tau_l^+ \tau_k^+ | i \rangle \quad (۴۰-۲)$$

در مقایسه با بخش  $\omega$  - افزایش را با عامل  $(Z\alpha/m_e R)^2 \sim 18^2 (Z=32)$  در انتگرال‌های فضای فاز متناظر مشخص می‌شود. سهم عمده دیگر جمله‌ی  $q$ ، با پس‌زنی نوکلئونی مرتبط است، که با مقدار نسبتاً بزرگ تکانه نوترینوی مجازی افزایش می‌یابد. حال پتانسیل نوترینو متناظر:

$$H_R \sim -\frac{R}{M} \frac{d^2}{dr^2} H(r) \quad (۴۱-۲)$$

است و عناصر ماتریس هسته‌ای:

$$M_R^{0\nu} = g_V \langle f | \sum_{lk} H'(\mathbf{r}_{lk}) \frac{R}{2r_{lk}} \left[ \frac{\vec{r}_{lk}}{r_{lk}} \cdot (\vec{\sigma}_l \times \vec{D}_k + \vec{D}_l \times \vec{\sigma}_k) \right] \tau_l^+ \tau_k^+ | i \rangle \quad (۴۲-۲)$$

است. بردار  $\vec{D}_k$  به تکانه‌های اولیه و نهایی  $\vec{P}_k$ ،  $\vec{P}'_k$  نوکلئون  $k$  از طریق زیر بستگی دارد:

$$\vec{D}_k = (\vec{P}_k + \vec{P}_k) - \left[ 1 - i (\mu_p - \mu_n) \vec{\sigma}_k \times (\vec{P}_k - \vec{P}_k) \right] / (2M) \quad (43-2)$$

افزایش با عامل  $(75)^2 \sim (1/m_e R)^2$  مشخص می‌شود، که اکنون حتی بزرگ‌تر است در حالی که عناصر ماتریس هسته‌ای متناظر به شدت ممانعت نشده است ( $|D| \sim 4.7q/M \sim 1/5$ ). این دو بخش، یعنی بخش موج طولی و بخش پس‌زنی نوکلئون، در فرمول نرخ حاصل تا جملاتی که شامل پارامتر  $\langle \eta \rangle$  هستند، شرکت می‌کنند. در هر دو مورد انتگرال‌های فضای فاز به طور قابل توجهی بزرگ‌تر از  $G^{0\nu}$  نشان داده شده در جدول (۱-۲) هستند. شکل طیف الکترون منفرد به علامت مربوط و همچنین دامنه‌ی عناصر ماتریسی  $M_P^{0\nu}$  و  $M_R^{0\nu}$  بستگی دارد.

از مطالب بالا نتیجه می‌شود که برای یک محدوده تجربی  $T_{0\nu}$  داده شده، حدود مربوطه برای  $\langle m_\nu \rangle / m_e$  و برای  $\langle \lambda \rangle$  از یک مرتبه بزرگی است، در حالی که حد  $\langle \eta \rangle$  به طور قابل توجهی دقیق‌تر است. حال به طور مختصر گذار  $0^+ \rightarrow 2^+$  را مطرح می‌کنیم، که تنها در کوپل‌شدگی جریان راست - دست ظاهر می‌شود (جمله‌های  $\langle \eta \rangle$  و  $\langle \lambda \rangle$ ). مقدار غیرصفر جرم نوترینو به خودی خود نمی‌تواند موجب این گذار شود. فرمول نرخ واپاشی  $0^+ \rightarrow 2^+$  تابعی درجه دوم از پارامترهای  $\langle \eta \rangle$  و  $\langle \lambda \rangle$  با ضرایب وابسته به عناصر ماتریس هسته‌ای و انتگرال‌های فضای فاز جدید است. سهم عمده از مواردی که در آن‌ها یکی از الکترون‌های گسیل شده در حالت  $p_{3/2}$  و دیگری در حالت  $s$  است، می‌آیند. انتگرال‌های فضای فاز در تقریب پریماکف - روزن یک بستگی  $E_0^7$  دارد. چهار عنصر ماتریس هسته‌ای وجود دارد. عملگرهای متناظر تانسورهای درجه دوم هستند. برای مثال، یکی از عناصر این ماتریس:

$$M_2^{0\nu} = \left\langle 2_f^+ \left| \sum_{lk} H'(\mathbf{r}_{lk}) \vec{\sigma}_l \cdot \vec{\sigma}_k [\vec{r}_{kl} \times \vec{r}_{kl}]^{(2)} / r_{kl}^2 \tau_k^+ \tau_k^+ \right| 0_i^+ \right\rangle \quad (44-2)$$

است. مشاهده گذار  $0^+ \rightarrow 2^+$  برهانی آشکار از حضور جریان‌های لپتونی راست - دست است. به‌علاوه، نوترینوی آمیخته به این مورد که پارامترهای  $\langle \eta \rangle$  و  $\langle \lambda \rangle$  مقادیر غیر صفر داشته باشند، نیاز دارد. خلاصه نتایج: با ترکیب سهم‌های جرم و جمله راست - دست، فرمول کلی به این شکل بدست می‌آید

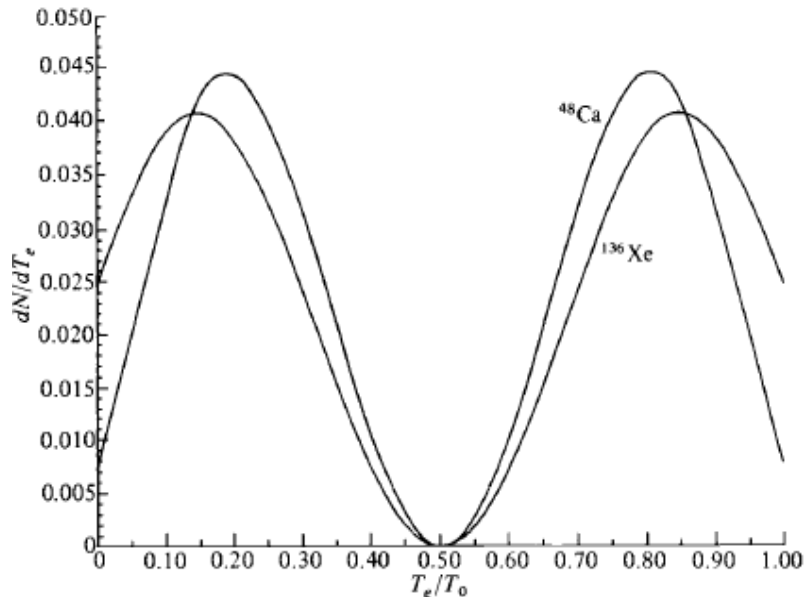
$$\left[ T_{\frac{1}{2}}^{0\nu}(0^+ \rightarrow 0^+) \right]^{-1} = C_1 \frac{\langle m_\nu \rangle^2}{m_e^2} + C_2 \langle \lambda \rangle \frac{\langle m_\nu \rangle}{m_e} \cos \psi_1 + C_3 \langle \eta \rangle \frac{\langle m_\nu \rangle}{m_e} \cos \psi_2$$

$$+ C_4 \langle \lambda \rangle^2 + C_5 \langle \eta \rangle^2 + C_6 \langle \lambda \rangle \langle \eta \rangle \cos(\psi_1 - \psi_2) \quad (45-2)$$

به ترتیب زاویه‌های فاز بین اعداد  $m_\nu$  و  $\lambda$ ،  $m_\nu$  و  $\eta$ ، که به طور کلی مختلط هستند، است (اگر  $CP$  بدون تغییر فرض شود،  $\psi_1$  و  $\psi_2$  یا صفر هستند یا  $\pi$ )، در حالی که  $\langle \lambda \rangle$  مقدار مطلق این پارامترها را نشان می‌دهد. تاکید می‌شود  $\langle m_\nu \rangle$ ،  $\langle \eta \rangle$  و  $\langle \lambda \rangle$  کمیت‌هایی هستند که از تحلیل آزمایشات واپاشی دوتایی استخراج شده‌اند. این‌ها نه تنها به مقدار جرم نوترینو (در مورد  $\langle m_\nu \rangle$ ) یا ثابت‌های کوپل‌شدگی هامیلتونی (۲-۳۷)، بلکه به پارامترهایی که آمیختگی نوترینو را شرح می‌دهند، نیز بستگی دارند. توابع  $C_n$  که در بردارنده عناصر ماتریس هسته‌ای و انتگرال‌های فضای فاز است

$$C_1 = \left| M_{GT}^{0\nu} - \frac{g_V^2}{g_A^2} M_F^{0\nu} \right|^2 G^{0\nu}(E_0, Z) m_e^2 \quad (46-2)$$

تعاریف بقیه  $C_n$  را می‌توان از کارهای Doi و همکارانش یافت [۵].



شکل (۲-۹): طیف الکترون منفرد واپاشی‌های  $0^+ \beta\beta \rightarrow 0^+$ . [۳]

انتگرال‌های فضای فاز هیچ مشکلی ندارند و می‌توانند به طور دقیق تعیین شوند. اما، عناصر ماتریس

هسته‌ای که در بخش (۲-۳) مطرح می‌شوند، محاسبه سختی دارند [۳].

## ۳-۲ واپاشی دوتایی و ساختار هسته‌ای

در بخش قبلی رابطه‌ی متقابل بین نرخ واپاشی دوتایی و ویژگی‌های نوترینو و برهم‌کنش‌هایش، فضای فاز لپتونی و عناصر ماتریس هسته‌ای نشان داده شد. در اینجا، چگونگی تعیین عناصر ماتریس هسته‌ای، مطرح می‌شود.

همه‌ی عناصر ماتریس هسته‌ای که در معادلات (۳۲-۲)، (۳۳-۲)، (۳۸-۲)، (۴۰-۲) و (۴۲-۲) مشخص شدند، یک ساختار مشابه دارند، آن‌ها در بردارنده تابع موج هسته‌های زوج - زوج اولیه در حالت پایه‌ی خودش  $0^+$ ، تابع موج هسته‌های زوج - زوج نهایی، معمولاً در حالت پایه  $0^+$  (اما گاهی نیز در در اولین حالت برانگیخته  $2^+$ ) و یک عملگر از درجات مختلف پیچیدگی اتصال این حالت‌ها هستند. در مورد مد  $2\nu$ ، جمع روی پایه‌های کامل حالت‌های  $|m\rangle$  هسته‌های فرد - فرد میانی نیز مورد نیاز است. اجتناب از این جمع در "تقریب بستاری" می‌تواند منجر به عبارات:

$$M_{GT}^{2\nu} = \frac{M_{GT}^{(clos)}}{\Delta \bar{E}_{GT}}; M_{GT}^{(clos)} = \langle 0_f^+ | \sum_{kl} \vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_l \tau_k^+ \tau_l^+ | 0_i^+ \rangle \quad (۲-۴۷-الف)$$

و

$$M_F^{2\nu} = \frac{M_F^{(clos)}}{\Delta \bar{E}_F}; M_F^{(clos)} = \langle 0_f^+ | \sum_{kl} \tau_k^+ \tau_l^+ | 0_i^+ \rangle \quad (۲-۴۷-ب)$$

شود. که  $\Delta \bar{E}$  مخرج متوسط انرژی است. در تقریب بستاری ساختار همه‌ی عناصر ماتریس هسته‌ای برای هر دو مد  $2\nu$  و  $0\nu$  یکسان است و تنها توابع موج حالت‌های اولیه و نهایی مورد نیاز است. همانطور که قبلاً گفته شد، می‌توان بستاری را به خوبی برای واپاشی‌های  $0\nu$  که نوترینوی مجازی انرژی نسبتاً بالایی دارد، توجیه شود. (کفایت تقریب بستاری برای مد  $0\nu$  با توجیه Suhonen و همکارانش آزموده شد [۱۱]). از سویی دیگر، برای واپاشی  $2\nu$ ، بستاری تقریب ضعیف‌تری به نظر می‌آید. بنابراین، لازم است جمع روی همه‌ی حالت‌های میانی به طور صریح ارزیابی شود.

در حالت ایده‌آل، باید مسئله‌ی بس ذره‌ای هسته‌ای با برهم‌کنش واقعی نوکلئون - نوکلئون و با تعداد کمی تقریب را حل و تابع موج مورد نیاز را پیدا کرد. متأسفانه، این روش در واقعیت امکان‌پذیر نیست، جز در مورد سبک‌ترین کاندیداهای واپاشی دوتایی، که در درجه اول  $^{48}\text{Ca}$  است. در همه‌ی موارد دیگر، تقریب‌های زیادی به تعداد پیکربندی‌ها قابل قبول است، و هامیلتونی هسته‌ای مرکب از همه اجزاء نیاز است. پس بنابراین مهم است که با روشی یکسان، محاسبات را نه تنها برای تعیین عناصر ماتریس واپاشی دوتایی، بلکه هم‌چنین برای کمیت‌های دیگری که به عملگرهای ساختاری مشابه وابسته‌اند و ممکن است برای تایید تجربی در دسترس باشند، آزمود. متناوباً، ممکن است واپاشی  $2\nu\beta\beta$  به عنوان مورد آزمایشی برای بعضی از عناصر ماتریس واپاشی در مد  $0\nu$  در نظر گرفت [۳].

ارزیابی مدل پوسته‌ای نرخ واپاشی  $^{48}\text{Ca}$ . واپاشی دوتایی  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$  از منظر ساختار هسته‌ای ساده‌ترین مورد است. (واپاشی تک بتایی،  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ ، از نظر انرژی با  $Q = 278\text{keV}$  امکان‌پذیر است. تغییر تک‌ان‌های بزرگ،  $\Delta J = 5$  یا 6، در واپاشی  $^{48}\text{Ca}$  به پایین‌ترین حالت  $^{48}\text{Sc}$  موجب کند شدن این واپاشی می‌شود. واپاشی تک بتایی تاکنون مشاهده نشده و محدوده طول عمر آزمایشگاهی  $6 \times 10^{18}$  سال است (Alburger & Cumming [12]). جنبه‌های ساختار هسته‌ای برای این واپاشی به طور گسترده مطالعه شده، و این بحث مشکلاتی که در اول کار با آن روبرو شدند را نشان می‌دهد. در تمام محاسباتی که تاکنون انجام شده، هسته‌های<sup>۱</sup> جادویی مضاعف  $^{40}\text{Ca} (Z = 20, N = 20)$  بی‌اثر تلقی شده و نوکلئون‌ها مجاز به اشغال حالت‌ها در زیر پوسته‌های  $f_{7/2}, f_{5/2}, p_{3/2}$  و  $p_{1/2}$  هستند. این زیر پوسته‌ها با نوترون‌ها و پروتون‌های اضافه شده به هسته  $^{40}\text{Ca}$  پر می‌شوند.

شروع کار با تحلیل عناصر ماتریس  $2\nu$  است. عنصر ماتریس فرمی  $M_F^{(clos)}$  بسیار کوچک است زیرا حالات با ایزواسپین مختلف را به هم متصل نمی‌کند. با این که ایزواسپین در هسته کاملاً پایسته نیست، ترکیب حالات با ایزواسپین اشتباه به حالت پایه بسیار کم شناخته شده است. بنابراین در

<sup>۱</sup> . core

ادامه، علاوه بر  $M_F^{2\nu}$  از  $M_F^{(clos)}$  نیز زمانی که واپاشی  $2\nu\beta\beta$  در نظر گرفته شود، چشم پوشی می‌شود.

به عنوان مثال، در ابتدا ساده‌ترین مورد که نوترون‌ها و پروتون‌ها تنها مجاز به اشغال زیر پوسته  $f_{7/2}$  است، در نظر گرفته می‌شود. سپس توابع موج

$$\Psi(^{48}\text{Ca})_{0^+} = (nf_{7/2})_{0^+}^8, \quad (48-2)$$

$$\Psi(^{48}\text{Ti})_{0^+} = \sum_{L=\text{even}} C(L) \left[ (nf_{7/2})_L^6 (pf_{7/2})_L^2 \right]_{0^+}. \quad (49-2)$$

هستند. در اینجا، ضرایب  $C(L)$  باید محاسبه شود و به برهم‌کنش داخلی نوکلئون‌ها بستگی دارد.

$M_{GT}^{(clos)}$  حاصل از جمع روی تکانه زاویه‌ای  $L$  دوپروتون (یا شش نوترون) در هسته‌ی نهایی  $^{48}\text{Ti}$  بدست آمده. Brown [۱۳]،  $M_{GT}^{(clos)} = 0.38$  با سهم‌هایی از  $L=0$  (2.33)،  $L=2$  (-1.98)،  $L=4$  (0.44) و سهم ناچیزی از  $L=6$  بدست آورد. بنابراین دیده می‌شود که لغو تقریباً کامل  $L=0$  و  $L=2$  منجر به سرکوب<sup>۱</sup> قابل توجه نرخ واپاشی دوتایی می‌شود. محاسبات کامل تر  $M_{GT}^{(clos)}$  و  $M_{GT}^{2\nu}$  (دربردارنده پوسته‌های پر  $f$  و  $p$ ، اما اغلب نه در همه‌ی پیکربندی‌های ممکن) توسط تعدادی از مؤلفان انجام شده و نتایج در جدول (۳-۲) خلاصه شده. در محاسبات کامل تر حذف همچنان ادامه دارد. باید توجه داشت که بسیاری از ارزیابی‌های  $M_{GT}^{2\nu}$  در جدول (۳-۲) منجر به طول عمری می‌شود که کوتاهتر از حد آزمایشگاهی  $3.6 \times 10^{19}$  سال است (Bardin و همکارانش [۱۴]). بنابراین به نظر می‌رسد بعضی از اجزای مهم ممکن است هنوز در محاسبات جدول (۳-۲) مفقود باشد.

برای تخمین طول عمر مد  $0\nu$ ، به عناصر ماتریسی  $M_{GT}^{0\nu}$  و  $M_F^{0\nu}$  نیاز است (اگر فرض شود، برای آسان سازی،  $\langle m_\nu \rangle \neq 0$  و جریان راست - دست وجود ندارد). سخن قبلی درباره کوچکی عنصر ماتریسی فرمی به علت عامل  $H(r, E)$  در معادله (۲-۳۳-الف) یا  $1/r_{ik}$  در معادله (۲-۳۳-ب) دیگر

<sup>۱</sup>. suppression

معتبر نیست. حال اجازه تغییر ایزواسپین را می‌دهد. در حقیقت، عنصر ماتریسی فرمی تنها حدود چهار برابر کوچکتر و با علامتی مخالف با عنصر ماتریسی گاموف - تلر، نرخ واپاشی را افزایش می‌دهد. محاسبه‌ی  $M_{GT}^{2\nu}$  در هسته‌ی سنگین‌تر. رویکرد نزدیک به مدل پوسته‌ای استاندارد توسط Haxton و همکارانش اتخاذ شد و توسط Haxton & Stephenson [۱۵, ۱۶] خلاصه شد، کسانی که  $M_{GT}^{(clos)}$  را به خوبی برای مجموع کامل عناصر ماتریسی واپاشی  $0\nu$  محاسبه کردند. محاسبات آن‌ها بر پایه نسخه تقریب کوپل‌شدگی ضعیف بود. روشی که اجازه محاسبه همه‌ی عناصر ماتریس هسته‌ای مورد علاقه، که شامل آن‌هایی که در جدول (۲-۴) است و به علاوه آن‌هایی که در جدول (۲-۶) به کار گرفته شدند، را می‌دهد. هرچند، تخمین عدم قطعیت تقریب بستاری و از قلم افتادگی شرکای اسپین - مداری و پیکربندی‌های ارتفاع بالاتر، دشوار است.

اکثر دیگر محاسبات، تنها حاوی آسان‌ترین پیکربندی ممکن است، یعنی، در درجه اول پیکربندی‌هایی که به طور مستقیم با حالت‌های پایه مختل نشده توسط عملگر گاموف - تلر مرتبط می‌شود. هر چند که، این محاسبات به طور همزمان قادر به توصیف صریح هسته‌ی میانه فرد - فرد هستند و بدین گونه اجازه آزمون‌های اضافی را می‌دهد. با توجه به طبیعت برداری - شبه برداری عملگر گاموف - تلر  $\sigma\tau$  و جمع روی حالت‌های میانه  $|m\rangle$  در (۲-۴۷-الف)، تنها شامل حالت‌های با اسپین و پارته  $J^\pi = 1^+$  برای گذارهای  $0^+ \rightarrow 0^+$  و  $0^+ \rightarrow 2^+$  است [۳].



جدول (۲-۳): عناصر ماتریس هسته‌ای و نیمه عمر [۳]

Reference	$M_{GT}^{(cls)}$	$M_{GT}^{2\nu}$ ( $m_e^{-1}$ )	$T_{1/2}^{2\nu}(\nu)$	$ M_{GT}^{0\nu} $ $\frac{g_V^2}{g_A^2} M_F^{0\nu}$	$T_{1/2}^{0\nu}(\nu)^a$
Haxton et al. (82)	0.44		$2.9 \times 10^{19}$	1.15	$3.2 \times 10^{24}$
Zamick & Auerbach (82)	0.36		$4.3 \times 10^{19}$		
Skouras & Vergados (83)	0.25	0.028	$3.2 \times 10^{19}$	1.05	$3.7 \times 10^{24}$
Tsuboi et al. (84)	0.46	0.065	$6.1 \times 10^{18}$		
Brown (85)	$0.47^b$	0.059	$7.2 \times 10^{18}$	$1.42^c$	$2.0 \times 10^{24}$
Ogawa & Horie (89)		$0.045^d$	$1.3 \times 10^{19}$		
Zhao et al. (90)	$0.20^e$	$0.036^e$	$1.9 \times 10^{19}$		
Caurier et al. (90)	$0.11^{d,e}$	$0.021^{d,e}$	$5.5 \times 10^{19}$		

$\langle m_\nu \rangle = 1eV$  فرض شده و بدون جریان‌های راست - دست  $a$

$b$  پیکربندی‌ها تا  $2p2h$  را شامل می‌شود.

$c$   $M_F^{(0\nu)}$  را شامل نشده

$d$  بدون محدودیت، شامل پوسته‌ی پر  $f$  ،  $p$

$e$  با بار موثر محوری<sup>۱</sup> کاهش یافته  $(1/1.30)^2$

<sup>۱</sup>. effective axial charge



# فصل سوم

کد محاسباتی OXBASH

## ۳-۱ مقدمه

تا اینجا به تعریف واپاشی دو بتایی و روند انجام این واپاشی هم به لحاظ هسته‌ای و هم به لحاظ فیزیک ذرات پرداخته شد. آن چه که برای ما در این کار ارزشمند است بخش هسته‌ای است که شامل عناصر ماتریسی و نیمه عمر مربوط به این واپاشی نادر است. در ادامه با تعریف مدل پوسته‌ای، شرح انجام نرم افزاری مورد بررسی قرار می‌گیرد که براساس مدل پوسته‌ای کار می‌کند و به کمک آن می‌توان عناصر ماتریسی گذار مربوطه را بدست آورد.

## ۳-۲ مدل پوسته‌ای هسته‌ای

همه مدل‌های میکروسکوپی براساس مدل پوسته‌ای هستند، نظریه مدل پوسته‌ای ۶۰ سال پیش توسط Mayer و Jenson معرفی شد. در این مدل فرض می‌شود که نوکلئون‌های درون یک هسته در یک پتانسیل تک - ذره‌ای حرکت می‌کنند، که این پتانسیل از عمل کردن نیروهای هسته‌ای و کولنی در بین نوکلئون‌ها بوجود می‌آید و برهم‌کنش آن‌ها با یکدیگر از طریق برهم‌کنش‌های باقی‌مانده انجام می‌شود. تابع موج هسته‌ای یک سیستم چند - ذره‌ای به صورت یک ترکیب خطی پادمقارن از حالت‌های پایه متعامد بهنجار که حاصلضرب توابع موج تک - ذره‌ای هستند، بیان می‌شود. دامنه‌های تابع موج هسته‌ای با قطری کردن هامیلتونی مؤثر که شامل جمله تک - ذره‌ای و برهم‌کنش باقی‌مانده است، محاسبه می‌شوند. یک مجموعه از حالت‌های پایه با مشخص کردن یک بخش مرکزی و مدارهای تک - ذره‌ای ظرفیت تعیین می‌شوند. مدارهای تک - ذره‌ای در بخش مرکزی به طور کامل توسط نوکلئون‌ها اشغال شده‌اند و این نوکلئون‌ها در

گذارهای هسته‌ای شرکت نمی‌کنند. نوکلئون‌های باقی‌مانده با رعایت اصل طرد پائولی در

بین مدارهای ظرفیت توزیع می‌شوند [۱۷]

محاسبه تابع موج هسته‌های با A نوکلئون (در غیر نسبیتی) باید توسط معادله شرودینگر

چند - جسمی صورت پذیرد؛

$$H\Phi(r(1), r(2), \dots, r(A)) = E\Phi(r(1), r(2), \dots, r(A)) \quad (1-3)$$

در دومین ساز و کار کوانتومی، که عملگرهای خلق و نابودی فرمیون از جبر Lie پیروی می

کنند؛

$$\begin{aligned} \{a_i, a_j\} &= \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \\ \{a_i^\dagger, a_j\} &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2-3)$$

هامیلتونی کلی بصورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\begin{aligned} H &= \sum_{ik} T_{ik} a_i^\dagger a_k \delta_{ik} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \\ &+ \frac{1}{36} \sum_{ijklmn} W_{ijklmn} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k^\dagger a_m a_n a_l + \dots \\ &+ \frac{1}{(A!)^2} \sum_{i \dots z} Z_{i \dots z} a_i^\dagger \dots a_{\frac{z}{2}}^\dagger a_z \dots a_{\frac{z}{2}+1} \end{aligned} \quad (3-3)$$

که این ترم‌ها نشان دهنده برهم‌کنش‌های ۱، ۲، ..... تا A - جسمی است.  $T_{ik}$  انرژی

جنبشی تک نوکلئون است (که در حقیقت یک ماتریس قطری است) واز  $V_{jkl}$  تا  $Z_{i \dots z}$

انرژی پتانسیل دو نوکلئونی تا A نوکلئونی است. ضریب  $\frac{1}{(N!)^2}$  از بحساب آوردن دوباره

جلوگیری می‌کند.

بصورت تمرینی تا مرحله دو - جسمی را بررسی می‌کنیم؛

$$H = \sum_{ik} T_{ik} a_i^\dagger a_k \delta_{ik} + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \quad (4-3)$$

هامیلتونی‌های چند - جسمی را نمی‌توان بصورت دقیق حل کرد، (مانند رابطه بالا). در واقع حساسیت اثرات متقابل بین انرژی‌های پتانسیل و جنبشی منجر به این می‌شود. مدارهای دو نوکلئون مقید بعد از یک برهم‌کنش ممکن است تغییر کند و روی انرژی جنبشی آن‌ها اثر خواهد گذاشت. بعنوان مثال یک رویکرد برای حل اینطور معادلات روش پتانسیل نوکلئون،  $U_{ik}$  است، بصورت زیر؛

$$H = \sum_{ik} T_{ik} a_i^\dagger a_k \delta_{ik} + U_{ik} a_i^\dagger a_k + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k - U_{ik} a_i^\dagger a_k \delta_{jl} \quad (5-3)$$

که در آن  $U_{ik}$  اضافه و کم شده است، که این را در هر فرمی می‌توان استفاده کرد. با وجود این، اکثر اوقات در نوسانگر هارمونیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال اگر دوباره، جملات را بنویسیم خواهیم داشت؛

$$\varepsilon_{ik} = T_{ik} + U_{ik} \quad , \quad \hat{V}_{ijkl} = \frac{1}{4} V_{ijkl} - U_{ik} \delta_{jl} \quad (6-3)$$

که  $\varepsilon_{ik}$  انرژی جنبشی کل تک نوکلئون است. با اندکی محاسبه خواهیم داشت [۱۸]؛

$$H = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} a_i^\dagger a_k \delta_{ik} + \sum_{ijkl} \hat{V}_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \quad (7-3)$$

این هامیلتونی به دو بخش تک - جسمی و دو - جسمی تقسیم شده است، که بطور مجزا قابل حل است. برهم‌کنش دو - جسمی باقی‌مانده،  $\hat{V}_{ijkl}$ ، بصورت تئوری با محاسبات تبادل مزون قابل حل است (مرجع [۱۹] را ببینید). هر چند برای بکارگیری محاسبات مدل پوسته‌ای، صحت عددی جانشین رضایت عقلانی شده و برهم‌کنش‌های پدیداری مورد استفاده قرار می‌گیرند. این محاسبات عددی با انتخاب فضای مدل محدودی از مدارها تولید می‌شوند، برای مثال: یک پوسته‌ی بزرگ تنها، بدست آوردن انرژی تک ذره، تعیین عناصر ماتریسی دو - جسمی از حداقل مربعات متناسب با برخی زیر مجموعه‌های داده‌های انرژی و ..... اینطور پتانسیل‌های برهم‌کنشی در جرم‌های محدودی قابل اجرا هستند، برای

مثال : پتانسیل هایی بنام MK3W [۲۰] برای هسته‌هایی با پوسته‌ی p و هسته‌های سبک‌تر پوسته‌های sd، با نوکلئون‌های محدود به پوسته‌های spsdpf قابل به بکارگیری هستند [۲۰].

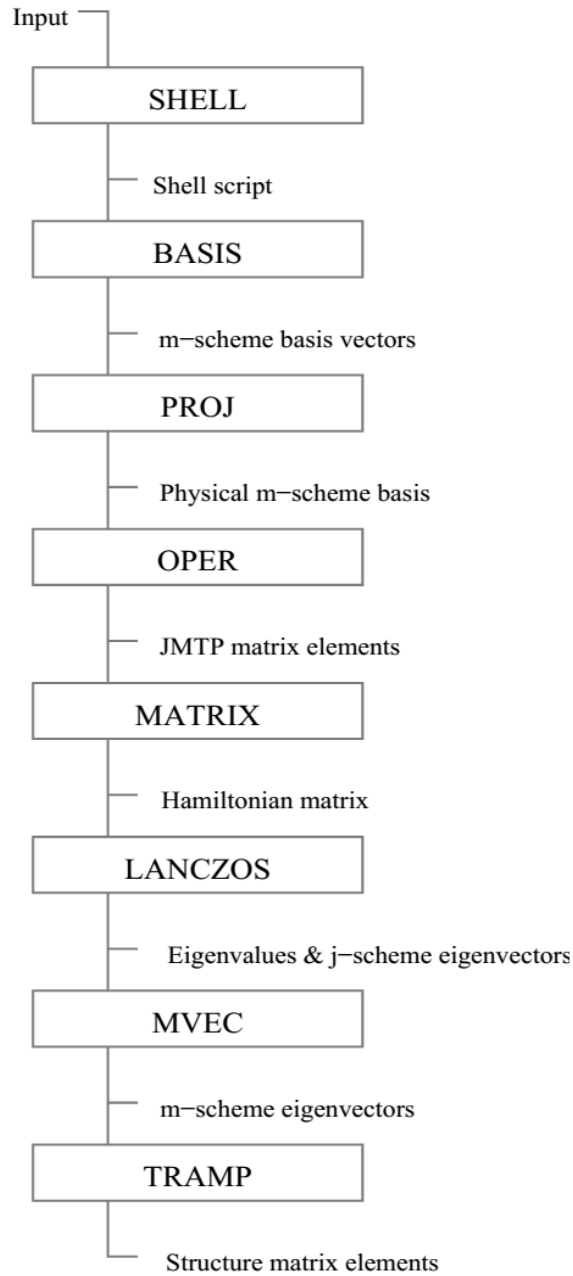
### ۳-۳ مدل هسته‌ای OXBASH

مدل هسته‌ای OXBASH، بر اساس ساز و کار نظری گفته شده، طیف‌ها و دیگر اطلاعات کوانتومی درباره هسته‌ها را ارائه می‌دهد. برنامه‌های کلیدی، درون دنباله SHELL قرار دارند، که به کاربران اجازه ورود اطلاعات خود بصورت متن را می‌دهد: BASIS مجموعه ممکن بردارها را بر پایه m-scheme برای ورودی‌های داده شده تولید می‌کند: PROJ از میان این بردارها، بردارهایی که دارای اسپین و ایزواسپین فیزیکی هستند را انتخاب می‌کند ( یعنی  $J \geq J_z$  ,  $T \geq T_z$  ) : OPER وابستگی روی ایزواسپین و تکانه‌ی زاویه‌ای تک ذره را حذف می‌کند : MATRIX ماتریس هامیلتونی برای یک  $J^{\pi}; T$  داده شده تولید می‌کند و LANCZOS این ماتریس را برای تعیین ویژه مقادیر و ویژه بردارهای j-scheme قطری می‌کند. برنامه وابسته به این برنامه‌ها، MVEC است که ویژه بردارها را به m-scheme برمی‌گرداند و آخرین برنامه مربوط به این بخش، TRAMP است که عناصر ماتریسی را بدست می‌آورد. این برنامه‌ها در ادامه بصورت جزئی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرند. اصول کارکرد این برنامه مطابق شکل (۳-۱) است [۲۰].

### ۳-۳-۱ برنامه BASIS و ارائه m-scheme

برنامه BASIS بردارها را بر اساس m-scheme برای ورودی‌های داده شده توسط کاربر تولید می‌کند. یک بردار m-scheme با استفاده از عملگرهای خلق حالت تک نوکلئون تولید می‌شود، با تعریف اعداد کوانتومی بصورت  $j, m, \rho (= m_e)$  ، که روی حالت خلأ ( تهی یا صفر ) اثر می‌کنند؛

$$|\Phi\rangle = \prod_{i=1}^N a_{j_i \rho_i m_i}^\dagger |0\rangle \quad (A-3)$$



شکل (A-3): مراحل انجام کد OXBASH [۲۰].

حالت خلأ بعنوان حالتی در نظر گرفته می‌شود که اگر مثلاً یک اپراتو نابودی روی آن اثر کند نتیجه تهی خواهد بود. حالت‌های تعریف شده در رابطه (A-3) اعداد کوانتومی صریح (یعنی خوب) دارند؛



$$M = \sum_{i=1}^N m_i, P(=M_T) = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad (9-3)$$

هرچند در این جا مقدار صریح برای  $J, T$  وجود ندارد. ازینرو BASIS بطور ضمنی شامل همه‌ی حالت‌های با  $m \leq J, \rho \leq T$  برای  $J, T$  داده شده (تا حد اکثر  $\{J\}, \{T\}$ ) توسط فضای مدل تعیین شده خواهد بود، که این به پایه‌های بزرگی منجر خواهد شد، که PROJ به آن‌ها رسیدگی خواهد کرد. طبق رابطه‌ی (3-8) BASIS یک رویکرد ذره - ذره است تا ذره - حفره و بنابراین همه حالات مربوط به برهم‌کنش ذرات بررسی می‌شوند. یک پارتیشن در برنامه به عنوان (فضای) اشغال هر نوع پیکربندی m-scheme تعریف می‌شود. در ابتدا، BASIS همه‌ی پارتیشن‌های ممکن را تعیین می‌کند. اصطلاح "الگو" نشان دهنده بردار نمایش محاسباتی از یک پارتیشن است. هر الگو بصورت یک عبارت باینری تعریف می‌شود، که هر بیت تعریف کننده تنها یک حالت بخصوص است،  $|jm\rho\rangle$  و "۱" نشان دهنده یک حالت اشغال شده و "۰" نشان دهنده یک حالت اشغال نشده است. اعمال عملگرهای خلق و نابودی روی یک عبارت بصورت زیر است؛

$$a_3^\dagger |0\rangle = |\Phi_3\rangle = 001000000000 \quad (10-3)$$

و

$$a_3 |\Phi_3\rangle = |0\rangle = 000000000000 \quad (11-3)$$

از اینرو عملگرهای خلق و نابودی روی حالت‌های فرمیون نرمال بصورت زیر بکار گرفته می‌شود؛

$$a_3^\dagger |\Phi_3\rangle = |0\rangle, a_3 |0\rangle = |0\rangle \quad (12-3)$$

این اعمال را می‌توان بصورت کد در ماشین اعمال کرد، در اینصورت زمان پردازش بصورت قابل توجه کاهش می‌یابد. در ادامه، پارتیشن به پارتیشن، BASIS مکرراً الگوی پایه اولیه یا قبلی را تغییر می‌دهد تا یک ۱ جدید خلق کند. برای مثال این کار با تبدیل بخش اول "۰۱" پارتیشن موجود به "۱۰" انجام می‌پذیرد. سپس بعنوان یک بیت ذخیره می‌شود و همه چیز قبل از این بعنوان یک عبارت ذخیره شده بود. با بازنشانی همه‌ی این‌ها بصورت ۰ بیت‌هایشان، به الگوی مینیموم برای تعداد

ذرات باقی مانده می‌رسیم. مینیموم آنجایی است که همه‌ی اربیتال‌ها پر هستند جز یکی (یعنی شبه " حالت پایه " بالا یک شبه " هسته " است)، توجه شود که این پروسه الگویی خلق می‌کند که در آن  $J \prec J_z, T \prec T_z$  است که باید نادیده گرفته شود (دور انداخته شود). BASIS سپس الگوها را مطابق با پارتیشن طبقه بندی می‌کند (بعنوان پیش نیاز برای کار PROJ) و نتایج را برای کارهای بعدی ذخیره می‌کند [۲۰].

### ۳-۳-۲ برنامه PROJ

از آنجایی که BASIS پایه‌های m-scheme بیش از حد مورد نیاز تولید می‌کند، PROJ حالت‌های متناظر با بردارهایی که از لحاظ J, T قابل قبول نیست را حذف می‌کند.

این کار در پایه های جدید انجام می‌پذیرد. برای ایجاد پایه‌های جدید از عملگر تصویر استفاده می‌شود؛

$$P^{JT} = P^J P^T \quad (۱۳-۳)$$

که در این جا؛

$$P^J = \prod_{j'=j_z, j' \neq j}^{j_{\max}} \frac{[j^{op}]^2 - j'(j'+1)}{j(j+1) - j'(j'+1)} \quad (۱۴-۳)$$

و

$$[j^{op}]^2 = j^- j^+ + j_z^2 + j_z \quad (۱۵-۳)$$

با

$$j^+ = \sum_{part} j_i^+, j^- = \sum_{part} j_i^- \quad (۱۶-۳)$$

$j^+, j^-$  عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده تک ذره مختص تکانه‌ی زاویه‌ای هستند. ایزو اسپین نیز که تحت  $su(2)$  تبدیل می‌شود، مشابه روابط بالا نیز برای  $P^T$  داریم. در عمل فقط بردارهایی با  $J = J_z$  و  $T = T_z$  بدست می‌آیند، بطوریکه این عمل باعث ایجاد پایه‌های بسیار کمتری نسبت به زمانی خواهد بود که همه مقادیر  $J, T$  مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در اینطور بررسی، عناصر ماتریسی کاهش یافته در هر دو  $J_z, T_z$  قابل قبولی از تابع موج تولید شده بدست می‌دهد. بخش  $j^+ j^-$  از عملگر رابطه (۳-۱۶) به هریک از پارتیشن‌ها با بکارگیری ابتداءً  $j^+$  و سپس  $j^-$  اعمال می‌شود. ازینرو بالاترین عدد بکارگرفته شده در هر بردار  $2N$  است، در مقابل  $N^2$ ، که  $N$  تعداد ذرات است. برای انجام این عمل، باید عناصر  $\langle j_z + 1 | j^+ | j_z \rangle$  وجود داشته باشند، که این هم نیاز مند این است که محاسبه بر پایه عناصر  $j_z + 1$  انجام پذیرد. از آنجایی که  $T_z$  تنها مقادیر  $\pm \frac{1}{2}$  را داراست، عملگر  $T^- T^+$  بصورت مستقیم بدون هیچ واسطه‌ای اعمال می‌شود. مکرراً هر بردار در پایه‌های جدید تصویر می‌شود و قبلاً در پایه‌هایی قرار داشتند که متعام بودند، همانطور که در زیر بیان شده است.  $n$  امین بردار قابل قبول بدست می‌آید، یعنی؛

$$|G_n\rangle = P^{JT} |I_n\rangle \quad (۱۷-۳)$$

سپس؛

$$|N_n\rangle = |G_n\rangle - \sum_i \langle O_i | I_n \rangle |O_i\rangle \quad (۱۸-۳)$$

که  $O_i$  از قبل متعام است و  $0 < i < n-1$ . باید توجه داشت که این رابطه زمانی که تصویر هنوز کامل نشده است، از هم‌پوشانی با  $I_n$  بجای  $G_n$  استفاده می‌کند، و امکان دارد بعضی از عناصر غیر قابل قبول به لحاظ فیزیکی ( $T, J$ ) باقی بمانند. بردارهای متعام سپس نرمالیزه می‌شوند؛

$$|O_n\rangle = \frac{|N_n\rangle}{\sqrt{\langle N_n | N_n \rangle}} \quad (۱۹-۳)$$

PROJ دو روش برای نپذیرفتن بردار پایه  $T, J$  که در خطای گرد کردن قابل قبول نیست ارائه می‌کند. در روش اول، یک بردار بصورت تصادفی از مجموعه‌های تعریف شده m-scheme در پایه‌ها تولید می‌کند،  $J^{op}$  و ( بصورت مشابه در ساز و کار ایزواسپین  $T^{op}$  مورد استفاده قرار می‌گیرد )، روی بردار های تصادفی عمل می‌کنند و اختلاف از ویژه مقادیر  $T(T+1), J(J+1)$  اگر از حد معینی بیشتر باشد ( $1 \times 10^{-7}$ ) آخرین بردار اضافه شده در این پایه‌ها پذیرفته نمی‌شود.

روش دوم برای هر بردار چک می‌کند که  $(P^{JT})^2 = P^{JT}$  باشد. دقت شود که طبق زیر انجام می‌پذیرد؛

$$|\hat{N}_n\rangle = P^{JT} |N_n\rangle \quad (20-3)$$

که این بردار اگر؛

$$\frac{\langle \hat{N}_n | \hat{N}_n \rangle - \langle N_n | P^{JT} P^{JT} | N_n \rangle}{\langle N_n | P^{JT} P^{JT} | N_n \rangle} > 0.001 \quad (21-3)$$

باشد پذیرفته نمی‌شود [20].

### ۳-۳-۳ برنامه‌های MATRIX و OPER

بعد از اینکه برنامه PROJ پیاده سازی شد، برنامه‌های ساخته شده به عناصر ماتریسی هامیلتونی مدل پوسته‌ای؛  $H = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} a_i^\dagger a_k \delta_{ik} + \sum_{ijkl} \hat{V}_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$  در پایه‌های j-scheme تغییر داده می‌شود، این عناصر با استفاده از تعداد ذرات ظرفیت، نوع برهم‌کنش مدل پوسته‌ای و اطلاعات ورودی  $J, T$  که در دستور SHELL به برنامه داده شده است، ساخته می‌شوند. اینکار با استفاده از جمع بندی روی عناصر m-scheme و نتایج‌شان در تعداد کمتری از عناصر ماتریسی انجام می‌شود. اینکار زمانی سودمند خواهد بود که ماتریس هامیلتونی m-scheme از بزرگ شدن جلوگیری کند. OPER عناصر ماتریسی دو - جسمی،  $\hat{V}$  تولید می‌کند.

در صورتیکه عناصر ماتریسی و برنامه ورودی، با تکانه زاویه‌ای تک ذره و ایزواسپین کوپل شده مشخص شده باشند، OPER این کوپل شدگی را باز می‌کند بنابراین همه عناصر ماتریسی دارای  $J, T$  اولیه و نهایی یکسان را در مد منظم بیشتری می‌توان تولید کرد، یعنی :

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \langle j_1 m_1 \rho_1, j_2 m_2 \rho_2 | \hat{V} | j_3 m_3 \rho_3, j_4 m_4 \rho_4 \rangle \\ &= \sum_{JMTP} (-1)^{J_1+J_2+J_3+J_4} (2J+1)(2T+1) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \rho_1 & \rho_2 & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \rho_3 & \rho_4 & -P \end{pmatrix} \\ &\quad \times \langle (j_1 j_2) JMTP | \hat{V} | (j_3 j_4) JMTP \rangle \end{aligned} \quad (22-3)$$

و برنامه MATRIX بعد از اتمام این برنامه، عناصر را به ماتریس هامیلتونی تبدیل می‌کند [۲۰].

### ۳-۳-۴ روش LANCZOS و برنامه LANCZOS

شیوه کار روش LANCZOS بدین گونه است که ماتریس هامیلتونی را به یک ماتریس  $3 \times 3$  قطری تبدیل می‌کند تا بتواند ویژه مقادیر را به آسانی بدست آورد.  $H$  را یک عملگر هرمیتی که عملگرهای آن روی یک فضای  $N$  - بعدی است در نظر بگیرید. هم‌چنین در نظر بگیرید که  $H$  روی یک بردار یونیتاری  $v_1$  اثر می‌کند. بردارهای مانند  $v_1$  ممکن است با تکرار عملگر  $H$  تولید بشوند؛

$$\begin{aligned} H v_1 &= \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 \\ H v_2 &= \beta_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_2 v_3 \\ H v_3 &= \beta_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \beta_3 v_4 \\ H v_4 &= \beta_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \beta_4 v_5 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (23-3)$$

ساختار  $3 \times 3$  - قطری نتیجه‌ی هرمیتی بودن  $H$  است. دنباله روابط بالا را می‌توان با روابط بازگشتی ( در

نمادگذاری دیراک ) نوشت؛

$$|v_n\rangle = \frac{1}{\beta_{n-1}} [(H - \alpha_{n-1})|v_{n-1}\rangle - \beta_{n-2}|v_{n-2}\rangle] \quad (24-3)$$

که در آن ضرایب  $\alpha_n, \beta_n$  به شکل زیر هستند؛

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \langle v_n | H | v_n \rangle, \\ \beta_n &= \langle v_{n+1} | H | v_n \rangle = \langle v_n | H | v_{n+1} \rangle \end{aligned} \quad (25-3)$$

که این رابطه مقارن با رابطه (۲۳-۳) است. پردازش تعیین مجموعه‌ها هنگامی که  $N$  بردار پیدا شدند، بطور خودکار پایان می‌پذیرد. در  $N$  امین گام خواهیم داشت؛

$$Hv_N = \beta_{N-1}v_{N-1} + \alpha_N v_N + \beta_N v_{N+1} \quad (26-3)$$

در صورتیکه  $v_{N+1}$  نسبت به بردارهای  $v_1$  تا  $v_N$  متعامد باشد و در صورتیکه در یک فضای هیلبرت  $N$  - بعدی این‌ها دارای فاصله معین باشند، در اینصورت،  $v_{N+1} \equiv 0$ . این بردارهای متعامد، بعنوان بردارهای LANCZOS شناخته می‌شوند، و با توجه به این پایه‌ها، عملگر  $H$  را می‌توان بصورت ماتریس  $\hat{H}$  زیر نشان داد؛

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (27-3)$$

ویژه بردارهای،  $U$ ، متعلق به عملگر اصلی  $H$ ، و ویژه بردارهای  $u$ ، متعلق به عملگر  $\hat{H}$  خواهند بود که توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند؛

$$U = Vu \quad (28-3)$$

که در رابطه بالا،  $V$ ، ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای LANCZOS تشکیل داده‌اند. حال باید عملگر  $H$  دارای  $n < N$  ویژه مقادیر قابل تشخیص باشند (بعضی از بردارها تبهگن هستند)، و مطابق بردار LANCZOS داده شده باید تنها شامل یک ویژه بردار باشند روش LANCZOS بعد از  $n$  تکرار خاتمه می‌یابد و یک ماتریس  $n \times n$ ،  $3 -$  قطری پدید می‌آورد که تنها شامل یک ویژه بردار برای هر یک از ویژه مقادیر تبهگن است. برای پیدا کردن ویژه بردارهای  $N - n$  باقی‌مانده، بردار

LANCZOS جدیدی ساخته می‌شود که در مجموعه موجود متعامد است و پروسه از سر گرفته می‌شود. در این روش یک سری از ۳ - قطری‌های مسدود شده تولید می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم روش LANCZOS برای محاسبات مدل پوسته‌ای این است که خیلی سریع ویژه مقادیر کم - ارتفاع ( low - lying ) را بعد از تکرار کمی نسبت به مقادیر بدست آمده، می‌دهد. هم چنانکه اکثر تحقیقات روی پدیده low - energy تمرکز می‌کنند ویژه مقادیر low - lying غالباً در همه جا مورد نیاز است. مانند همی روش‌های مشابه با این طور محاسبات، دقت محدود، منجر به گرد کردن اعداد و ایجاد خطا خواهد شد. در اینجا نیز خطای گرد کردن زمانی که بردارهای LANCZOS محاسبه می‌شوند وجود دارد. این خطاها زمانی خود را نمایان می‌کنند که از گام‌های بعد از  $N - 1$  جلوگیری شود، بطوری که امکان دارد  $v_{N+1}$  صفر نباشد. اگر در بعضی از این ساز و کارها این سر حد ( گرد کردن ) ارزیابی نشود، برنامه مکرراً ویژه مقادیر یکسان تولید خواهد کرد. خطای گرد کردن روی تعامد بردارهای LANCZOS نیز اثر خواهد گذاشت و یک روش مشابه برای خلق بردارهای متعامد جدید توسط PROJ بکار گرفته می‌شود؛

$$\chi_n = \beta_{n-1} \left[ v_n - \sum_{i=1}^{n-1} v_i^\dagger v_n v_i \right] \quad (29-3)$$

$$v_n = \frac{\chi_n}{\sqrt{\chi_n^\dagger \chi_n}}$$

همانطور که برنامه‌های OPER و MATRIX هامیلتونی  $j$  - scheme را خلق می‌کنند، یک گام اضافی در برنامه LANCZOS برای بردارهای برآیند پاد متقارن مورد نیاز است.  $m$  - scheme چنین مشکلی ندارد، اما همانطور که گفته شد ماتریس هامیلتونی این رویکرد بسیار بزرگ است. زمانی که OXBASH نوشته شد، تصمیم گرفته شد که زمان اجرای اضافی بعلت پاد - متقارنی در استفاده‌های وسیع در نظر گرفته شود. هم چنین تعیین مجموعه‌هایی از اشغال‌های تک ذره که همه ویژه

حالت‌هایی که هسته از آن تشکیل شده است را شامل شود، برنامه LANCZOS درصدی از اشغال هریک از این ویژه حالتها را تعیین می‌کند، لیست آن‌هایی که به لحاظ درصد از یک درصد بیشترند. برنامه MVEC. برنامه MVEC ویژه بردارهای  $z$ -scheme خروجی توسط LANCZOS را به ساز و کار  $m$ -scheme برمی‌گرداند، اینکار با قرار دادن یک مجموعه کامل از حالت‌ها صورت می‌گیرد [۲۰].

### ۵-۳-۳ برنامه TRAMP و عناصر ماتریس هسته‌ای

برنامه TRAMP از ویژه حالت‌های  $m$ -scheme در محاسبه انواع مختلفی از عناصر ماتریسی مطابق زیر استفاده می‌کند:

هم‌پوشانی مستقیم  $\langle \psi' | \psi \rangle$

$\langle \psi' | a_{\alpha}^{\dagger} | \psi \rangle$

هسته کوپل شده و هم‌پوشانی‌های خوشه‌ای ( $\alpha$  مشخص کننده خوشه بعنوان مثال ذره  $\alpha$ )

نسبت دامنه‌های تک - ذره  $\frac{1}{\sqrt{2\psi'+1}} \langle \psi' | \| a^{\dagger} \| | \psi \rangle$

نسبت دامنه‌های دو - ذره  $\frac{1}{\sqrt{2\psi'+1}} \langle \psi' | \| a^{\dagger} \otimes a^{\dagger} \| | \psi \rangle$

چگالی‌های انتقال تک - جسمی  $\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle \psi' | \| [a^{\dagger} \otimes \tilde{a}]^2 \| | \psi \rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle \psi' | \left\| \frac{-1}{\sqrt{(2\delta_{12}+1)(\sqrt{2\delta_{34}+1)}}} [[a^{\dagger} \otimes a^{\dagger}] \otimes [\tilde{a} \otimes \tilde{a}]^2]^{\Delta,0} \right\| | \psi \rangle$

چگالی‌های انتقال دو - جسمی شبه اسکالر

$\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle \psi' | \left\| \frac{-1}{\sqrt{(2\delta_{12}+1)(\sqrt{2\delta_{34}+1)}}} [[a^{\dagger} \otimes a^{\dagger}] \otimes [\tilde{a} \otimes \tilde{a}]^2]^{\Delta,1} \right\| | \psi \rangle$

چگالی‌های انتقال دو - جسمی شبه بردار



$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle \psi' | \left\| \frac{-1}{\sqrt{(2\delta_{12}+1)(\sqrt{2\delta_{34}+1})}} \left[ [a^\dagger \otimes a^\dagger] \otimes [\tilde{a} \otimes \tilde{a}]^\lambda \right]^{\Delta, 2} \right\| | \psi \rangle$$

چگالی‌های انتقال دو - جسمی شبه تانسور

که در این روابط  $\psi = J, T$  و  $\lambda = \sum (2n_i + l_i)$  است. از بحث‌های فوق عناصر ماتریسی چگالی تک - جسمی مورد علاقه بسیاری از محققین است؛

$$S_{j_1 j_2 J} = \langle J_f T_f | \left\| [a_{j_2}^\dagger \otimes \tilde{a}_{j_1}]^j \right\| | J_i T_i \rangle ; (OBDME) \quad (3-30)$$

که از تعریف چگالی‌های انتقال تک - جسمی در بالا بدست آمد [۲۸].

### ۳-۴ -۴ -۳ OXBASH استفاده از کد

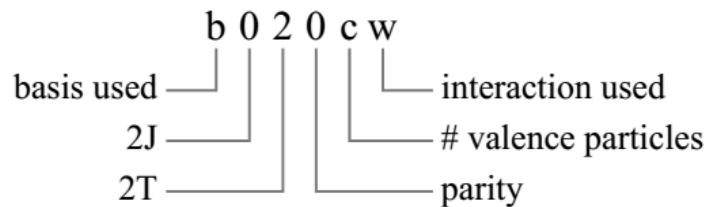
اسامی فایل‌های خروجی برنامه‌های مختلف بصورت خودکار توسط SHELL با فرمت‌های مختلف ساخته می‌شود، lpb برای BASIS، lpd برای PREDICT، lpp برای PROJ، lpm برای MATRIX، lpe برای LANCZOS، این‌ها نمونه فرمت‌هایی هستند که در خروجی برنامه ساخته می‌شوند در میان این‌ها فرمت برنامه TRAMP کمی پیچیده تر است : 11n برای ضرایب طیف سنجی تک - نوکلئونی، 12n برای مورد دو نوکلئونی، 1JN هم‌پوشانی هسته - خوشه که J - تکانه زاویه‌ای خوشه است و N تعداد ذرات است.

10l برای هم‌پوشانی مستقیم، 1rd برای چگالی‌های انتقال تک - جسمی، rbd برای چگالی‌های انتقال دو - جسمی شبه اسکالر، 1b1 برای شبه بردار، 2Lb برای شبه تانسور.

۶ کاراکتر در اسم همه برنامه‌ها یکسان است. کاراکتر اول مربوط به کد فضای مدل تعریف شده در فایل label.dat است، دومین 2J است، سومین 2T است (مانند 2J)، چهارمین ۰ برای پارامتر مثبت و ۱ برای پارامتر منفی، پنجمین مشخص کننده تعداد ذرات ظرفیت است و ششمین، کد برهم‌کنشی

همیلتونی است که در فایل label.dat وجود دارد. در بین این برنامه‌ها TRAMP، ۹ کاراکتر دارد که

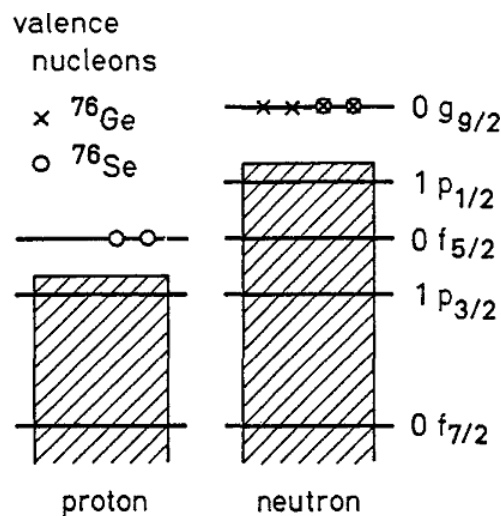
۳ کاراکتر اضافی مربوط به 2J، 2T،  $\pi$  حالت نهایی است [۲۰].



شکل (۳-۲)؛ نمایش فایل سیستم اسمی [۲۰] OXBASH.

### ۳-۵ همبستگی‌های حالت پایه

حالت‌های هسته‌ای را نمی‌توان به وسیله دترمینان اسلاتر در یک مدل میکروسکوپی، حتی برای حالت پایه‌ی هسته‌های زوج - زوج، به خوبی توصیف کرد. در شکل (۳-۳) پیکربندی حالت پایه‌ی هسته‌های مادر و دختر در واپاشی دوتایی  $^{76}\text{Ge}$  در ساده‌ترین مدل پوسته‌ای نشان داده شده است. واپاشی  $2\nu\beta\beta$  برای این گونه توابع موج حالت پایه ممنوع است، چون گذارهای گاموف - تله فقط بین مدارهایی با اندازه حرکت زاویه‌ای مداری یکسان که متعلق به یک پوسته‌ی اصلی نوسانگر هستند مجاز است. این وضعیت برای اغلب هسته‌هایی که واپاشی  $\beta\beta$  را انجام می‌دهند، به استثناء برخی هسته‌های سبک مانند  $^{48}\text{Ca}$ ، وجود دارد. از طرف دیگر در مورد  $^{48}\text{Ca}$  نیز، با استفاده از توابع موج در ساده‌ترین مدل پوسته‌ای مقادیر بسیار بزرگی برای عناصر ماتریس هسته‌ای به دست می‌آید. به منظور دست یابی به یک توصیف بهتر از گذارهای  $\beta\beta$ ، پیکربندی‌هایی شامل برانگیختگی‌های ذره - حفره را باید در توابع موج هسته‌ای لحاظ کرد. به طور کلی، این گونه ترکیبات در حالت پایه را "همبستگی‌های حالت پایه" می‌نامند که انواع مختلفی از این همبستگی‌ها وجود دارد [۲۱].



شکل (۳-۳) پیکربندی حالت‌های پایه  $^{76}\text{Ge}$  و  $^{76}\text{Se}$  در ساده‌ترین مدل پوسته‌ای [۲۱].

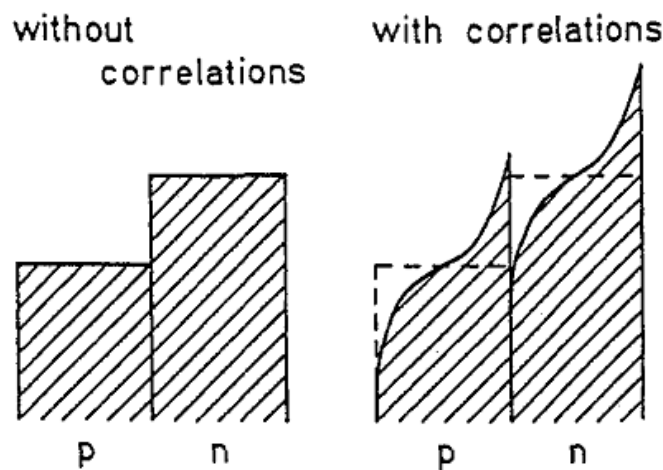
اگر فضای مدل<sup>۱</sup> به اندازه کافی بزرگ باشد و از برهم‌کنش‌های باقی مانده‌ی واقعی استفاده شود، مدل پوسته‌ای به صورت خودکار هر نوع هم‌بستگی را شامل می‌شود. اما در اغلب موارد، محاسبه براساس این نوع مدل پوسته‌ای از نظر عملی غیر ممکن است و فضای مدل باید به شدت کاهش یابد. بنابراین در نظر گرفتن صریح هم‌بستگی‌هایی که از ویژگی‌های برجسته برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون نتیجه می‌شود معقول و منطقی است و آن‌ها برای گذارهای مورد نظر ما با اهمیت هستند. نیروی جفت شدگی مهم‌ترین بخش برهم‌کنش هسته‌ای باقی مانده است که بین دو نوکلئون مشابه (دو پروتون یا دو نوترون) عمل می‌کند. این نیرو باعث می‌شود که دو نوکلئونی که در یک مدار هستند یک جفت با  $J^\pi = 0^+$  را تشکیل دهند. این هم‌بستگی‌ها، هم‌بستگی‌های جفت شدگی نامیده می‌شوند. چون نیروی جفت شدگی یک نیروی جاذبه است (عنصر ماتریسی منفی است) حالت پایه همه‌ی هسته‌های زوج - زوج دارای اسپین - پاریته  $J^\pi = 0^+$  هستند و سطح انرژی این هسته‌ها از هسته‌های همسایه با نوترون فرد و پروتون فرد، پایین‌تر است [۲۱]. هم‌بستگی‌های جفت شدگی در نظریه BCS<sup>۲</sup> در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۳-۴) توزیع نوکلئون‌ها در بین مدارها در دو حالت، با هم‌بستگی جفت شدگی و بدون آن، با هم مقایسه شده است. در حالتی که هیچ هم‌بستگی وجود ندارد (شکل ۳-۴ - چپ)

<sup>۱</sup> Model space

<sup>۲</sup> Bardeen Cooper Schrieffer theory

مدارهای پایینی کاملاً پر و مدارهای بالایی خالی هستند. (ممکن است بخشی از نزدیک‌ترین مدار به انرژی فرمی پر باشد) از طرف دیگر، برهم‌کنش جفت شدگی روی توزیع نوکلئون‌ها تأثیر می‌گذارد (شکل ۳-۴- راست). در مدارهای نزدیک به انرژی فرمی احتمال اشغال از صفر تا یک تغییر می‌کند. همه نوکلئون‌ها با  $J^\pi = 0^+$  جفت شده‌اند. این حالت نسبت به شبه ذرات، که از طریق تبدیلات Bogoliubov تعریف می‌شوند، تهی است. هم‌بستگی‌های جفت شدگی، آهنگ واپاشی  $2\nu\beta\beta$  را تا یک مقدار محدود افزایش می‌دهند، در صورتی که این واپاشی در پیکربندی ساده‌ترین مدل پوسته‌ای (شکل ۳-۴- چپ) ممنوع است. بنابراین، این هم‌بستگی‌ها منشأ مهم‌ترین اثر جمعی در افزایش آهنگ واپاشی  $\beta\beta$  هستند. اما اگر در محاسبه‌ی نیمه عمر فقط هم‌بستگی‌های جفت شدگی را در نظر بگیریم مقادیر حاصله تا چندین مرتبه بزرگی، از نیمه عمرهای تجربی کوتاه‌تر هستند [۲۱].

### pairing correlations



شکل (۳-۴) توزیع نوکلئون‌ها بین مدارهای تک - ذره‌ای در یک هسته [۲۱].

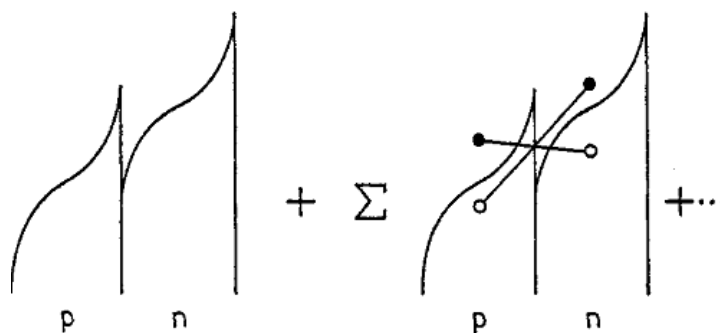
چندین نسخه متفاوت از مدل RPA وجود دارد که به مد برانگیختگی مورد نظر و یا به هسته بستگی دارد [۱۵]. در ادامه به مدل شبه ذره‌ی پروتون - نوترون RPA یا (pnQRPA) اشاره می‌کنیم. این نوع مدل RPA گذارهای تبادل باری که در آن‌ها بار هسته به اندازه یک واحد تغییر می‌کند، مانند

گذار گاموف - تله، را توصیف می کند و برحسب تعداد درجات آزادی شبه ذرات بیان می شود. حالت پایه برای فونون QRPA تهی است که در معادله (۳-۳۹) تعریف خواهد شد. تابع موج حالت پایه در شکل (۳-۵) نشان داده شده است؛ مؤلفه اصلی، حالت پایه ی BCS است که هیچ شبه ذره ای ندارد (شکل ۳-۴-راست) و ترکیبات عمده ی آن حالت های چهار - شبه ذره ای هستند. از حل معادله RPA (معادله (۳-۴۱)) برای مد  $J^\pi$  داریم؛

$$|RPA\rangle \sim |-\rangle + \sum_{pn, p'n'} \alpha_{pn, p'n'} |pn(J^\pi), p'n'(J^\pi); 0^+\rangle + \dots \quad (3-31)$$

که در آن  $|-\rangle$  به حالت پایه ی اشاره BCS دارد و جمله ی بعد عبارت است از حالت چهار - شبه ذره ای دارای دو جفت شبه ذره های پروتون و نوترون که هر دوی آنها اسپین - پارته ی  $J^\pi$  دارند، این رابطه در شکل (۳-۵) نشان داده شده است [۲۱].

### ground state correlations in proton-neutron QRPA



شکل (۳-۵) تابع موج حالت پایه در مدل شبه ذره ی پروتون - نوترون RPA. [۴]

در گذار تبادل بار، یک جفت pn از مؤلفه ی اصلی و نابودی یکی از جفت ها در مؤلفه های چهار - شبه ذره ای می تواند به همان حالت جفت pn در هسته فرد - فرد منجر شود. بنابراین، وارد کردن همبستگی های حالت پایه از طریق تداخل بین دو دامنه گذار به طور جدی بر شدت گذار تأثیر می گذارد ( شکل (۳-۹)). برای محاسبه ی آهنگ واپاشی  $2\nu\beta\beta$  که از گذارهای گاموف - تله متوالی از

طریق حالت‌های میانی  $1^+$  ناشی می‌شود باید معادله RPA برای  $J^\pi = 1^+$  حل شود. در این مورد که ترکیبات تابع موج آن در معادله (۳-۳۱) داده شده است، هم‌بستگی‌های اسپین - ایزواسپین نقش مهمی را در جلوگیری از آهنگ واپاشی ایفا می‌کنند. برهم‌کنش ذره - ذره (معادله ۳-۴۳) که در ادامه می‌آید) هم‌بستگی‌های اسپین - ایزواسپین یعنی دامنه‌های  $\alpha_{pn,p'n'}$  در معادله (۳-۳۲) را افزایش می‌دهد. از نیروی چار قطبی - چار قطبی<sup>۱</sup> (QQ) که مهم‌ترین مؤلفه برهم‌کنش پروتون - نوترون است، هم‌بستگی‌های QQ در توابع موج هسته‌ای بدست می‌آید. به دلیل برهم‌کنش QQ، هسته‌های زوج - زوج یک حالت  $2^+$  در انرژی پایین دارند که معمولاً به عنوان اولین حالت برانگیخته در این هسته‌ها شناخته می‌شود. حالت پایه برای مد برانگیخته  $2^+$  در همان هسته (بدون تغییر در عدد اتمی، برخلاف آنچه که در گذار تبادل بار اتفاق می‌افتد) ساختار زیر را دارد؛

$$|RPA\rangle \sim |-\rangle + \sum_{pp'n'} \alpha_{pn,p'n'} |pp'(2^+), nn'(2^+); 0^+\rangle + \dots \quad (3-32)$$

(توجه شود که معادله (۳-۳۱) مربوط به مد تبادل بار است). Klapdor و Grotz نشان دادند که هم‌بستگی‌های QQ در حالت پایه، از آهنگ مد  $2\nu$  واپاشی  $\beta\beta$  جلوگیری می‌کند [۱۰، ۱۱]. این را می‌توان از جفت شدگی دوباره اندازه حرکت زاویه‌ای در رابطه‌ی زیر و نیز در شکل (۳-۶) درک کرد؛

$$\begin{aligned} & |pp'(2^+), nn'(2^+); 0^+\rangle \\ &= \sum_J (-1)^{p+n'-2-J} \sqrt{5(2J+1)} W(pp' nn'; 2J) |pn(J^\pi), p'n'(J^\pi); 0^+\rangle \quad (3-33) \end{aligned}$$

بنابراین هم‌بستگی‌های دارای مؤلفه‌های مؤثری بر گذارهای گاموف - تلر ( $J^\pi = 1^+$ ) است [۲۱].

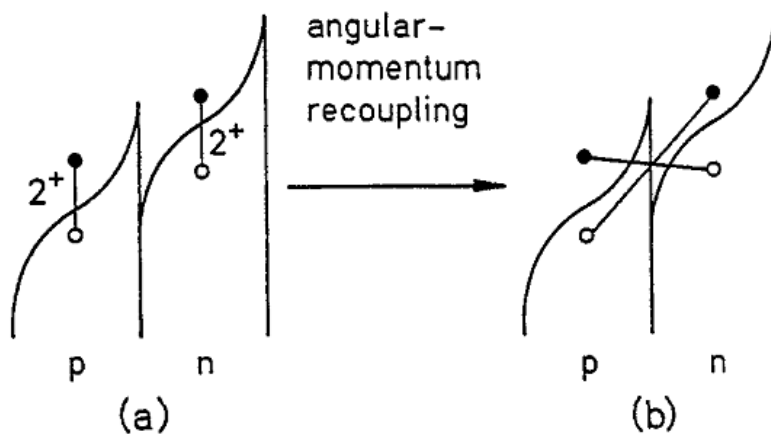
<sup>1</sup> Quadruple- Quadruple force

### ۳-۶ مدل‌های شبه ذره‌ای

تصویر شبه ذره‌ای بسیار جالب است، چون فضای تهی جدیدی برای شبه ذرات و توابع موج هسته‌ای تعریف می‌کند که بتوان آن‌ها را برحسب تعداد کمی از درجات آزادی شبه ذرات توصیف کرد. شبه ذرات با تبدیلات Bogoliubov معرفی می‌شوند؛

$$\begin{aligned} a_k^\dagger &= u_k c_k^\dagger - v_k c_{\bar{k}} \\ a_{\bar{k}}^\dagger &= u_k c_{\bar{k}}^\dagger - v_k c_k \end{aligned} \quad (3-34)$$

#### QQ correlations



شکل (۳-۶) هم‌بستگی‌های چار قطبی - چار قطبی (QQ) در تابع موج حالت پایه [۲۱].

که در آن  $a_k$  و  $c_k$  بترتیب عملگرهای تولید شبه ذره و ذره هستند و  $k$  همیوغ حالت  $\bar{k}$  است. عملگرهای شبه ذره‌ای همانند عملگرهای ذره‌ای از روابط پاد جابجایی فرمیون‌ها تبعیت می‌کنند. دامنه‌های اشغال  $u_k$  و  $v_k$  در رابطه‌ی  $u_k^2 + v_k^2 = 1$  صدق می‌کنند، احتمال اشغال مدارهای  $k$  و  $\bar{k}$  توسط یک نوکلئون است. در تقریب BCS می‌توان این ضریب را، که به تبدیلات Bogoliubov مربوط می‌شوند، از طریق اصل وردشی که با (۳-۳۵-ب) محدود شده است، محاسبه کرد؛

$$\delta \langle BCS | H - \lambda \hat{N} | BCS \rangle \quad (3-35-الف)$$

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = 2 \sum_{k>0} v_k^2 = N \quad (3-35\text{ب})$$

انرژی فرمی  $\lambda$  به عنوان یک ضریب لاگرانژ معرفی شده است،  $N$  تعداد نوکلئون‌ها و  $\hat{N}$  عملگر تعداد است. از اصل وردشی یک مجموعه معادله بدست می‌آید؛

$$\tilde{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_k + \sum_{k'>0} \frac{1}{2} v_{k'}^2 \left( \langle kk' | V | kk' \rangle + \langle \bar{k}\bar{k}' | V | \bar{k}\bar{k}' \rangle \right) - \lambda \quad (3-36)$$

$$\Delta_k = - \sum_{k'>0} u_k v_{k'} \langle k\bar{k} | V | k\bar{k}' \rangle \quad (3-37)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{\varepsilon}_k}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad (3-38)$$

که در آن  $\bar{\varepsilon}_k$  و  $\varepsilon_k = \sqrt{\bar{\varepsilon}_k^2 + \Delta_k^2}$  به ترتیب انرژی تک - ذره و شبه ذره‌اند،  $\Delta_k$  به گاف جفت شدگی و  $\langle k\bar{k} | V | k\bar{k}' \rangle$  به برهم کنش دو - ذره‌ای اشاره دارد [۲۱].

حالت پایه‌ی BCS با رابطه‌ی  $|BCS\rangle = \prod_k a_k a_{\bar{k}} | \rangle$  تعریف می‌شود، واضح است که این حالت برای شبه ذرات، تهی است یعنی  $a_k |BCS\rangle = 0$ . (در این جا  $| \rangle$  نشان دهنده‌ی حالت تهی برای نوکلئون‌هاست.) بر حسب نوکلئون‌ها، حالت پایه‌ی BCS را می‌توان به صورت برهم نهی حالت‌هایی با تعداد نوکلئون متفاوت نوشت؛

$$|BCS\rangle \sim | \rangle + \sum_{k \geq 0} \frac{v_k}{u_k} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger | \rangle + \frac{1}{2} \sum_{kk' \geq 0} \frac{v_k v_{k'}}{u_k u_{k'}} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger | \rangle + \dots \quad (3-39)$$

در رابطه‌ی بالا، هر حالت شامل یک جفت نوکلئون جفت شده با  $J^\pi = 0^+$  است (شکل (۳-۴) را ببینید). بنابراین مدل شبه ذره‌ای، همبستگی‌های جفت شدگی ناشی از نیروی جفت شدگی قوی و برجسته‌ای که بین نوکلئون‌های مشابه عمل می‌کند، را در نظر می‌گیرد. حالت پایه‌ی یک هسته‌ی زوج - زوج نسبت به شبه ذره، تهی است و حالت‌های برانگیخته در پایین ترین مرتبه به وسیله‌ی حالت‌های دو - شبه ذره‌ای توصیف می‌شوند.



برنامه‌ی VAMPIR (یا MONSTER) مربوط به گروه Tubingen، یک نسخه‌ی کلی از مدل شبه ذره‌ای است. این نویسندگان کدهای رایانه‌ای خود را براساس فرمالیسم هارتزی فوک بوگولیو<sup>۱</sup> (HFB) ایجاد کرده اند، یعنی در این کدها حالت‌های تک - ذره‌ای به صورت خود - سازگار محاسبه می‌شوند و شبه ذرات با تبدیلات Bogoliubov ای کاملتر از معادله (۳-۳۴)، تعریف می‌شوند. تعداد نوکلئون‌ها با تصویر تعداد ذره<sup>۲</sup>، ترمیم می‌شود و ناوردایی دورانی که به دلیل استفاده از پایه‌های تغییر شکل یافته نقض شده است، با تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای<sup>۳</sup> ترمیم می‌شود. از تابع موج‌های تولید شده به این روش در محاسبه‌ی آهنگ واپاشی  $\beta\beta$  استفاده می‌شود [۲۱].

### ۷-۳ تقریب فاز تصادفی برای شبه ذرات (QRPA)

پروتون - نوترون QRPA (یا به اختصار QRPA) برای توصیف برانگیختگی های تبادل بار، مانند گذارهای گاموف - تلر از حالت پایه  $0^+$  یک هسته زوج - زوج  $(A, Z)$  به حالت‌هایی در یک هسته‌ی فرد - فرد  $(A, Z \pm 1)$  ایجاد شده‌اند [۴]. برای بدست آوردن فرمولبندی QRPA باید دو فرض اساسی در مدل RPA عادی را نیز در نظر بگیریم؛ (الف) فرض می‌کنیم روابط جابجایی بوزونی برای عملگرهای خلق و نابودی یک جفت پروتون - نوترون صادق است. (ب) از جمله‌ی  $a^\dagger a$  در عناصر ماتریسی حالت پایه‌ی QRPA صرف نظر می‌کنیم،  $\langle RPA | a_k^\dagger a_k | RPA \rangle = 0$ .

فونون‌های QRPA با اندازه حرکت زاویه‌ای،  $J$  و مؤلفه  $z$  آن،  $M$  به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$A_\omega^\dagger(JM) = \sum_{pn} \left( X_\omega^{pn,J} [a_p^\dagger a_n^\dagger]_M^{(J)} - Y_\omega^{pn,J} (-1)^{1+J+M} \left( [a_p^\dagger a_n^\dagger]_{-M}^{(J)} \right)^\dagger \right) \quad (۴۰-۳)$$

<sup>1</sup> Hartree-Fock-Bogoliubov formalism

<sup>2</sup> Particle-number projection

<sup>3</sup> Angular-momentum projection

در این رابطه،  $p$  و  $n$  تمایز بین حالت‌های پروتونی و نوترونی را نشان می‌دهند و براکت به جفت شدگی اندازه حرکت اشاره دارد. ویژه مقادیر انرژی  $\omega$  و دامنه‌های به سمت عقب و به سمت جلو  $Y$  و  $X$  از حل معادله QRPA به دست می‌آیند؛

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (۴۱-۳)$$

رابطه‌ی بهنجارش به صورت زیر است؛

$$\sum_{pn} \left( (X_{\omega}^{pn,J})^2 - (Y_{\omega}^{pn,J})^2 \right) = 1 \quad (۴۲-۳)$$

عناصر ماتریسی  $A$  و  $B$  از روابط زیر بدست می‌آیند؛

$$A_{pn,p'n'} = \delta(pn, p'n') (\varepsilon_p + \varepsilon_n) + (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle_J \quad (۴۳-۳ \text{ الف})$$

$$+ (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) \langle pn | V | p'n' \rangle_J$$

$$B_{pn,p'n'} = -(u_p v_n v_{p'} u_{n'} + v_p u_n u_{p'} v_{p'}) \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle_J \quad (۴۳-۳ \text{ ب})$$

$$+ (u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) \langle pn | V | p'n' \rangle_J$$

انرژی‌های شبه ذره‌ای  $\varepsilon_J$  و دامنه‌های اشغال  $u_J$  و  $v_J$  از محاسبات BCS بدست می‌آیند. عناصر ماتریسی برهم‌کنش ذره - ذره  $\langle pn | V | p'n' \rangle$  و ذره - حفره  $\langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle$  از طریق تبدیلات Pandya به هم مربوط می‌شوند؛

$$\langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle_J = -(-1)^{p+n+p'+n'} \sum_{J'} (2J'+1) W(pnp'n'; JJ') \langle pn | V | p'n' \rangle_J \quad (۴۴-۳)$$

در حالی که معادلات RPA عادی، تنها شامل برهم‌کنش‌های ذره - حفره هستند، در رویکرد شبه ذره‌ای (۳-۳۴)، هر دو نوع برهم‌کنش‌ها حضور دارند چون شبه ذره برخی از خواص ذره و برخی از خواص شبه ذره را دارد [۱۵].

<sup>1</sup> Forward and Backward – Going Amplitudes

برهم‌کنش‌های ذره - ذره<sup>۱</sup> ( $pp$ ) و ذره - حفره<sup>۲</sup> ( $ph$ ) در حد تصویر نوکلئونی،  $u_j v_j \rightarrow 0$ ، به برهم‌کنش‌هایی که به ترتیب بین حالت‌های دو ذره‌ای (دو حفره‌ای) و بین حالت‌های ذره - حفره اتفاق می‌افتند کاهش پیدا می‌کنند، که این موضوع در معادلات (۳-۴۳) و شکل (۳-۷) قابل بررسی است. در تصویر نوکلئونی یک هسته با دو پوسته بسته، برای مدارهای اشغال شده توسط نوکلئون‌ها  $v_j = 1$  (یا  $u_j = 0$ ) است، و برای مدارهایی که هیچ نوکلئونی ندارند  $u_j = 1$  (یا  $v_j = 0$ ) است. مدارهای اولی را مدار حفره‌ای و دومی را مدار ذره‌ای می‌نامند، زیرا زمانی که یک جفت ذره - حفره برانگیخته می‌شود، ذره یک مدار ذره‌ای را اشغال می‌کند و یک حفره در مدار حفره‌ای ایجاد می‌شود. برهم‌کنش ذره - ذره همواره به حاصل ضرب  $u_p u_n$  (یا  $v_p v_n$ ) مربوط می‌شوند، یعنی هم پروتون و هم نوترون مدارهای ذره‌ای (یا حفره‌ای) را اشغال می‌کنند. از طرف دیگر برهم‌کنش ذره - حفره به حاصل ضرب  $u_p v_n$  یا  $v_p u_n$  مربوط می‌شوند، به این معنی که از میان پروتون و نوترون یکی در مدار ذره‌ای و دیگری در مدار حفره‌ای قرار دارد [۲۱].

برای آن که بتوان نتایج را بر حسب تابعی از شدت هر کدام از برهم‌کنش‌ها توصیف کرد، ضرایب  $g_{pp}$  و  $g_{ph}$  را که به طور قرار دادی معرف شدت برهم‌کنش ذره - ذره و شدت برهم‌کنش ذره - حفره هستند را در معادلات (۳-۴۳) وارد می‌کنند. هر دو این ضرایب در در نظریه pnQRPA استاندارد برابر یک هستند. برای مثال در شکل (۳-۸) عنصر ماتریس هسته‌ای بر حسب تابعی از  $g_{pp}$  برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته‌ی  $^{76}\text{Ge}$  و چند هسته‌ی دیگر رسم شده است.

حالت پایه‌ی QRPA نسبت به فونون تهی است، یعنی  $A_\omega(JM)|RPA\rangle = 0$ ، و بصورت برهم‌نهی حالت‌هایی با  $0, 4, 8, \dots$  شبه ذره بیان می‌شود؛

$$|RPA\rangle = n_0 \exp \left[ \sum_{pn,p'n'} Z_{pn,p'n'} [a_p^\dagger a_n^\dagger]^{(J)} \cdot [a_p^\dagger a_{n'}^\dagger]^{(J)} \right] |BCS\rangle \quad (۳-۴۵)$$

<sup>1</sup> Particle - Particle interaction

<sup>2</sup> Particle - hole interaction

که در آن  $n_0$  ضریب بهنجارش و  $Z$  ماتریس همبستگی‌های حالت پایه است که عبارتند از:

$$n_0 = |\det X|^{-1/2} \quad (46-3)$$

$$Z = YX^{-1} \quad (47-3)$$

مؤلفه‌ی اصلی حالت پایه هیچ شبه ذره‌ای ندارد (یعنی همان حالت پایه BCS است)، عبارت عمده‌ی بعدی حالت‌های چهار شبه ذره‌ای هستند که در تصویر نوکلئونی همان حالت‌های دو ذره - دو حفره هستند. عناصر ماتریسی کاهش یافته عملگرهای گذار تبادل بار گاموف تله  $t_{\pm} f_M^{(J)}$ ، از حالت پایه‌ی  $0^+$  هسته‌ی زوج - زوج (حالت تهی RPA) به حالت‌هایی با  $J^\pi$  (حالت‌های تک - فونونی) در هسته‌ی فرد - فرد به صورت زیر داده می‌شود:

$$\langle \omega J \| \tau_- f_M^{(J)} \| 0^+ \rangle = \sum_{pn} \langle p \| f^{(J)} \| n \rangle (X_{\omega}^{pn,J} u_p v_n - Y_{\omega}^{pn,J} v_p u_n) \quad (\text{الف} - 48-3)$$

$$\langle \omega J \| \tau_+ f_M^{(J)} \| 0^+ \rangle = \sum_{pn} \langle p \| f^{(J)} \| n \rangle (X_{\omega}^{pn,J} v_p u_n - Y_{\omega}^{pn,J} u_p v_n) \quad (\text{ب} - 48-3)$$

برای مثال در مورد واپاشی  $2\nu\beta\beta$  به صورت  $0_i^+ \rightarrow 0_f^+$  (شکل (3-9) را ببینید)، معادله‌ی (3-48) - (الف) به گذار گاموف - تله از حالت  $0_i^+$  هسته‌ی مادر به یک حالت  $1^+$  هسته‌ی میانی مربوط می‌شود و معادله‌ی (3-48) - (ب) بیان کننده‌ی معکوس گذار گاموف - تله از حالت هسته‌ی میانی به حالت  $0_f^+$  هسته‌ی دختر است. جمله‌ی  $X$  در معادله‌ی (3-48)، که به  $(v_p u_n) u_p v_n$  وابسته است، به برانگیختگی جفت ذره پروتون - حفره نوترون (ذره نوترون - حفره پروتون) اشاره دارد. از طرف دیگر دامنه‌ی  $Y$  به همراه دو عملگر نابودی شبه ذره در معادله (3-40) تعریف شده است، بنابراین جملات  $Y$  در معادله‌ی (3-48) از نابودی یکی از جفت‌های ذره - حفره از حالت پایه‌ی QRPA ناشی می‌شوند، و به درجه‌ی همبستگی‌های پایه بستگی دارند [21].

در فرمول بندی QRPA، عنصر ماتریسی هسته‌ای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  برای گذار  $0_i^+ \rightarrow 0_f^+$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_{a,b} \frac{\langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_b^+ \rangle \langle 1_b^+ | 1_a^+ \rangle \langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle}{E_a + T_0 / 2 + m_e c^2 - E_i} \quad (49-3)$$

با جایگذاری  $f^{(i)} = \sigma$  در معادله (3-48) دامنه‌های گذار گاموف - تدر برای  $J^\pi = 1^+$  به دست می‌آیند

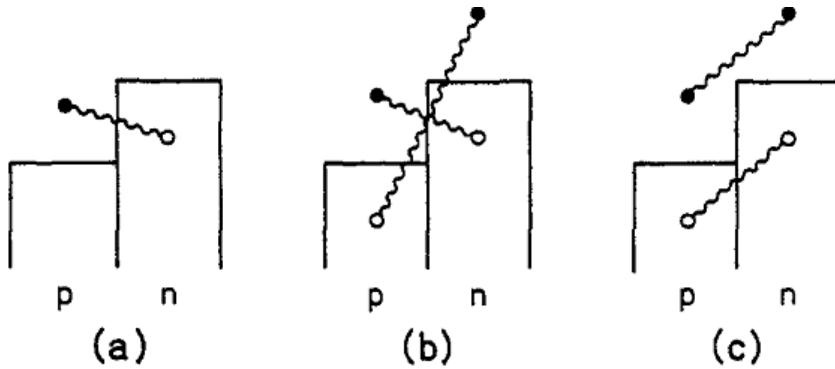
$$\langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle = \sum_{pn} \langle p \| \sigma \| n \rangle (X_\omega^{pn} u_p v_n - Y_\omega^{pn} v_p u_n) \quad (3-50-الف)$$

$$\langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_b^+ \rangle = \sum_{pn} \langle p \| \sigma \| n \rangle (\bar{X}_\omega^{pn} \bar{v}_p \bar{u}_n - \bar{Y}_\omega^{pn} \bar{u}_p \bar{v}_n) \quad (3-50-ب)$$

هم‌پوشانی حالت‌های  $1^+$  میانی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

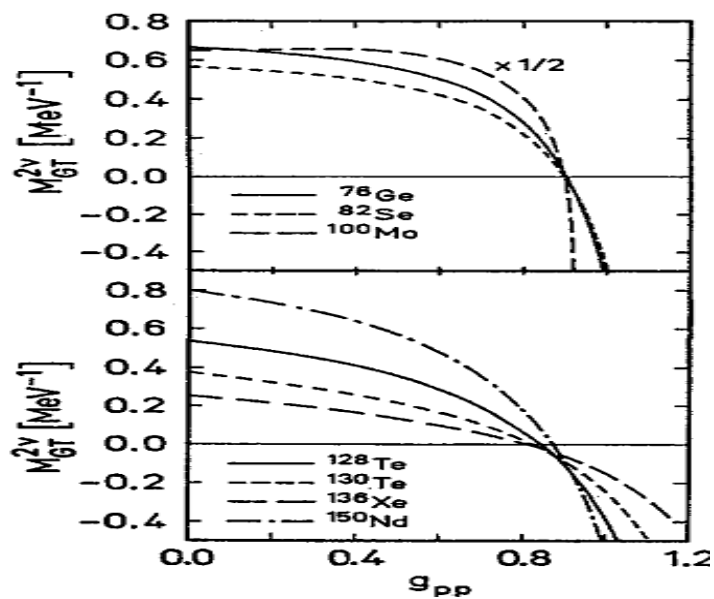
$$\langle 1_b^+ | 1_a^+ \rangle = \sum_{pn} (\bar{X}_b^{pn} X_a^{pn} - \bar{Y}_b^{pn} Y_a^{pn}) \quad (3-51)$$

کمیت‌های بدون علامت بار (با علامت بار) نسبت به حالت  $0_i^+$  اولیه (حالت  $0_f^+$  نهایی) تعریف شده‌اند [4].

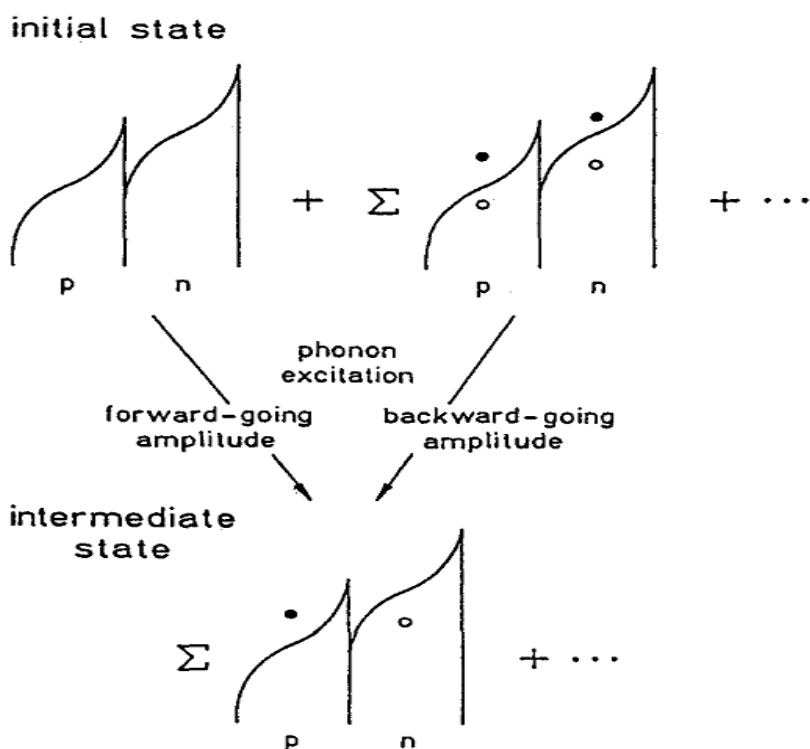


شکل (3-7) برهم‌کنش ذره - حفره (ph) بین حالت‌های ذره پروتون - حفره نوترون [21].

حال می‌خواهیم از مرتبه‌ی تأثیرات برهم‌کنش ذره - ذره روی هم‌بستگی‌های حالت پایه و گذارهای تبادل بار، برآوردی داشته باشیم. این برآورد اهمیت دارد چرا که همان طور که گفته شد موفقیت محاسبات QRPA برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  اساساً با در نظر گرفتن برهم‌کنش ذره - ذره به دست می‌آید.



شکل (۸-۳) عنصر ماتریس هسته‌ای محاسبه شده برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  [۲۱].



شکل (۹-۳) برانگیختگی فونونی از حالت پایه [۲۱].

(لازم به ذکر است برهم‌کنش ذره - ذره یک خاصیت خارجی نیست که به مدل QRPA اضافه شده باشد. این برهم‌کنش، علاوه بر برهم‌کنش ذره - حفره، به صورت طبیعی از طریق تبدیلات

Bogoliubov در این مدل ظاهر می‌شود.) ابتدا هسته‌هایی را در نظر می‌گیریم که تعداد زیادی نوترون

اضافی دارند، در این صورت  $u_p$  و  $v_n$  باید به طور قابل توجهی بزرگتر از  $v_p$  و  $u_n$  باشند؛

$$u_p \sim v_n \sim l, \quad v_p \sim u_n \sim s, \quad s^2 \leq l^2 \quad (3-52)$$

بنابراین، عناصر معادله‌ی QRPA (3-42) به صورت زیر بیان می‌شوند؛

$$A_{pn,p'n'} \sim \delta(pn, p'n')(\varepsilon_p + \varepsilon_n) + (l^4 + s^4) \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle + 2l^2 s^2 \langle pn | V | p'n' \rangle \quad (3-53 \text{ الف})$$

$$B_{pn,p'n'} \sim -2l^2 s^2 \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle + 2l^2 s^2 \langle pn | V | p'n' \rangle \quad (3-53 \text{ ب})$$

زیر ماتریس  $A$ ، ماتریسی بین دامنه‌های به سمت جلو  $X$  (یا بین دامنه‌های به سمت عقب  $Y$ ) است، بنابراین  $A$  مسئول ترکیب حالت‌های مختلف ذره - حفره در هسته‌ی فرد - فردی است که از گذار تبادل بار حاصل می‌شود. برای مثال برای مد  $J^\pi = 1^+$ ، ترکیب این حالت‌ها منجر به تراکم شدت گاموف - تله  $\beta^-$  و در نتیجه ایجاد یک تشدید خیلی بزرگ می‌شود. برهم‌کنش ذره - حفره و انرژی‌های شبه ذره‌ای در عناصر سهم عمده‌ای دارند. در این عناصر سهم برهم‌کنش ذره - ذره بسیار کم است، این امر نشان می‌دهد که این نوع برهم‌کنش تأثیر کوچکی در ترکیب حالت‌های ذره - حفره در هسته‌ی میانی دارد. از طرف دیگر، زیر ماتریس  $B$  برای هم‌بستگی‌های حالت پایه مهم است چون  $X$  و  $Y$  را به هم مربوط می‌کند. افزایش در دامنه‌های به سمت عقب  $Y$  به معنای افزایش هم‌بستگی‌های حالت پایه است (معادلات (3-45) و (3-47)). عناصر  $B$  شامل هر دو جمله‌ی برهم‌کنش با مرتبه‌ی یکسان ( $\sim l^2 s^2$ ) هستند، که این نشان می‌دهد برهم‌کنش ذره - ذره با یک رابطه‌ی منطقی به برهم‌کنش ذره - حفره اضافه شده است و می‌تواند هم‌بستگی‌های حالت پایه را به طور قابل توجهی افزایش دهد، میزان این افزایش به ماهیت برهم‌کنش ذره - حفره و ذره - ذره در کانال  $J^\pi$  بستگی دارد [21].

برآوردی از اثرات ایجاد شده بر دامنه‌های گذار در معادله (۳-۴۸)، یک تفاوت اساسی بین گذارهای ناشی از عملگر  $\tau_- f^{(J)}$  و  $\tau_+ f^{(J)}$  را آشکار می‌کند. به عنوان یک مثال، گذارهای گاموف - تله  $\beta^\pm$  به حالت‌های  $1^+$  را در نظر می‌گیریم. با فرض  $l$  به عنوان ضریب بزرگ و  $s$  به عنوان ضریب کوچک، دامنه‌های گذار به شکل خلاصه‌ی زیر نوشته می‌شوند؛

$$\beta^- : \langle \omega, 1^+ \| \tau_- f^{(J)} \| 0^+ \rangle \sim Xl^2 - Ys^2 \quad (3-54 \text{ الف})$$

$$\beta^+ : \langle \omega, 1^+ \| \tau_+ f^{(J)} \| 0^+ \rangle \sim Xs^2 - Yl^2 \quad (3-54 \text{ ب})$$

برای گذارهای  $\beta^-(n \rightarrow p)$ ، سهم عمده‌ی دامنه به جمله‌ی  $X$  مربوط می‌شود که این جمله ناشی از برانگیختگی یک جفت ذره - حفره نوترون است. اما با توجه به ضریب  $s^2$  و همچنین نسبت  $Y$  به  $X$ ، جمله‌ی  $Y$  سهم خیلی کوچکی دارد. با در نظر گرفتن معادله (۳-۴۲) می‌توان گفت، معمولاً دامنه‌های  $X$  خیلی بزرگتر از دامنه‌های  $Y$  هستند. بنابراین گذارهای  $\beta^-$  به هم‌بستگی‌های حالت پایه حساس نیستند، یعنی به برهم‌کنش ذره - ذره حساس نیستند [۲۱].

در گذارهای  $\beta^+(p \rightarrow n)$  ضرایبی که در  $X$  و  $Y$  ضرب شده‌اند، جابه‌جا می‌شوند. در صورتی که برهم‌کنش ذره - ذره را در نظر نگیریم، حتی اگر فرض کنیم ضریب  $l^2$  که در  $Y$  ضرب شده افزایش یابد، باز هم جمله‌ی  $X$  گذار را کنترل می‌کند، چون هم‌بستگی‌های حالت پایه بسیار ناچیز هستند. اما با در نظر گرفتن برهم‌کنش ذره - ذره، هم‌بستگی‌های حالت پایه به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد و این باعث می‌شود که جمله‌ی  $Y$  مهم‌تر شود. بنابراین دو جمله‌ی رابطه‌ی (۳-۵۴ ب) برای  $J^\pi = 1^+$ ، از یک مرتبه هستند و به شدت از گذارهای  $\beta^+$  جلوگیری می‌شود. به طور کلی، در کانال  $J^\pi = 1^+$ ، برهم‌کنش ذره - حفره که بین جفت ذره - حفره عمل می‌کند دافعه است، در حالی که برهم‌کنش ذره - ذره جاذبه است. این ویژگی مشخصه ناشی از یک تداخل ویرانگر بین جملات  $X$  و  $Y$  است. در نتیجه، برهم‌کنش ذره - ذره نقش اساسی در جلوگیری از شدت گذار  $\beta^+$  دارد. همچنین می‌توان با استدلال ساده‌ی زیر این نتیجه را درک کرد. در هسته‌ای که تعداد زیادی نوترون اضافی



دارد، اغلب گذارهای تک - ذره‌ای  $(p \rightarrow n)\beta^+$  توسط اصل طرد پائولی در غیاب هم‌بستگی‌های حالت پایه مسدود شده‌اند (مدارهای نوترونی که می‌توان از طریق گذارهای گاموف - تله به آن‌ها دست یافت کاملاً اشغال شده‌اند). در صورتی که هم‌بستگی‌های حالت پایه وجود داشته باشد، همان طور که جاهای اشغال شده در مدارهای ذره‌ای پروتون می‌توان پیدا کرد، جاهای خالی در مدارهای حفره‌ای نوترونی نیز می‌توان پیدا کرد، در نتیجه با انجام گذار و تداخل ویرانگر دامنه‌های  $\beta^+$ ، شدت کل  $\beta^+$  کاهش می‌یابد [۲۱].

### ۳-۸ برهم‌کنش مدل بوزونی

یک مدل از هسته‌ی اتم باید بتواند خواص هسته‌ای مانند: اسپین‌ها و انرژی‌های پایین‌ترین ترازها، احتمال واپاشی برای گسیل گاما، احتمال‌های (عامل‌های اسپکتروسکوپی) واکنش‌های انتقال، تکانه‌های چند قطبی و بسیاری دیگر از خواص هسته‌ای را توصیف کند. در این‌جا ابزاری قدرتمند برای توصیف این خواص را بررسی می‌کنیم.

ریشه برهم‌کنش مدل بوزونی (IBM) به مدل پوسته‌ای باز می‌گردد، که بدون شک ابزار مناسبی برای هسته‌های سبک است (تا ۵۰ نوکلئونی). تعداد بیشتر نوکلئون‌ها باعث می‌شود تا پوسته‌های بیشتری در نظر گرفته شوند و ازینرو تعداد حالت‌های هسته‌ای خیلی زیاد خواهد شد. مدل پوسته‌ای آشکار می‌کند که حالت‌های کم - ارتفاع هسته‌های زوج - زوج عمدتاً توسط زوج نوکلئون‌های با اسپین کل صفر و ۲ ساخته شده‌اند. هم‌چنین اسپین‌های بالاتر این قبیل زوج‌ها، به لحاظ انرژی بسیار نادر هستند (Hess, 1990, p.55). مخصوصاً، اسپین زوج نوکلئون‌های یکسان، عددی زوج است چرا که ترکیب آنها یک حالت پاد متقارن است (اصل طرد پائولی). بعلاوه، در مورد دو نوکلئون یکسان جفت شده، اسپین کل دقیقاً زوج است، که از این حقیقت پیروی می‌کند که زوج‌ها مانند بوزون‌ها

رفتار می‌کنند (پیوست الف). این نتایج تئوری دور از واقعیت هسته‌های زوج - زوج نیست، از این واقعیت شناخته شده که این هسته‌ها عمدتاً اسپین کل زوج دارند [۲۲].

این و دیگر استدلال‌ها منجر به فرضیات اساسی IBM به این صورت شد که، بررسی زوج نوکلئون‌ها به عنوان نماینده بوزون‌های با تکانه زاویه‌ای  $l=0,2$  منطقی خواهد بود. انبوه پوسته‌های موجود در مدل پوسته‌ای به مدل‌های ساده با پوسته -  $s$  ( $l=0$ ) و پوسته -  $d$  ( $l=2$ ) کاهش می‌یابند. IBM روی پوسته‌ی بسته ساخته می‌شود یعنی، تعداد بوزون‌ها، وابسته به تعداد زوج نوکلئون‌های (یا حفره‌های) فعال در بیرون یک پوسته‌ی بسته است. هر نوع از بوزون‌ها، بوزون -  $s$  و  $d$ ، انرژی بستگی خود را با توجه به پوسته بسته مربوطه دارند. مشابه مدل پوسته‌ای استاندارد، پتانسیل برهم‌کنشی بوزون‌ها تنها در جفت‌ها اثر می‌کند [۲۲].

### ۳-۸-۱ مشخصات IBM

ساده‌ترین نسخه IBM هسته‌های زوج - زوج را توصیف می‌کند بطوریکه یک مغز بی اثر (core) با بوزون‌هایی که نمایش دهنده زوج نوکلئون‌های یکسان هستند ادغام شده است. بوزون‌ها بصورت متقارن رفتار می‌کنند: فرض می‌شود که هر بوزون تابع موجی دارد، که می‌توان به آن نسبت داد، اگر دو بوزون (یعنی، متغیرهایشان) مبادله شوند تابع موج پیکربندی کل تغییر نمی‌کند. شباهت بین زوج نوکلئون‌ها و بوزون‌ها تاجایی پیش نمی‌رود که تابع موج نوکلئون‌های متناظر در IBM ظاهر شود. هر چند که، در برهم‌کنش مدل فرمیون - بوزون، که به تعداد فردی از نوکلئون‌های یکسان می‌پردازد، بوزون‌ها با نوکلئون‌ها کوپل می‌شوند. بوزون‌ها بدون ساختار مفصل در نظر گرفته شده اند و خواص تقارنی‌شان در روابط جابجایی عملگرهای متناظر خلق و نابودی نتیجه شده است [۲۲].

اسپین کل بوزون برابر تکانه‌ی زاویه‌ای آن است، به این معنی که، نمی‌توان به بوزون‌ها اسپین ذاتی نسبت داد. از آنجایی که تکانه‌ی زاویه‌ای بوزون‌ها زوج هستند ( $l=0,2$ )، پارامترشان نیز زوج است.

مدل‌های IBM1 و IBM2 منحصر به هسته‌هایی با تعداد زوجی از پروتون‌ها و نوترون‌هاست. به منظور تعیین تعداد بوزون‌ها باید هر دو نوع نوکلئون‌ها، که در تشکیل پوسته‌های بسته با تعداد ذرات ۲۸۰، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ (اعداد جادویی) نقش دارند، را بحساب آورد. در صورتی که پروتون‌ها یک پوسته کامل را پر کنند، تعداد پروتون‌های بعد از پوسته کامل برایمان اهمیت دارد به این صورت که اگر کمتر از نیمی از پوسته پر شده باشد  $N_\pi$  (تعداد بوزون‌های پروتونی) برابر است با تعداد این پروتون‌ها تقسیم بر دو و اگر تعداد پروتون‌ها بیشتر از نیمی از این فضا را اشغال کرده باشند، در اینصورت عدد جادویی بالاتر را از تعداد کل پروتون‌ها کم کرده و تقسیم بر دو می‌کنیم که عدد بدست آمده تعداد حفره‌های بوزونی یا همان  $N_\pi$  خواهد بود. برای حساب کردن تعداد بوزون‌های نوترونی  $N_\nu$  نیز به طریق مشابه عمل می‌کنیم. در IBM1 تعداد بوزون‌های  $N$ ، با جمع تعدادهای جزئی بدست می‌آید، به این معنی که،  $N = N_\pi + N_\nu$ . بعنوان مثال برای هسته  ${}^{134}_{54}\text{Xe}_{80}$  خواهیم داشت؛

$N_\pi = (54 - 50) / 2 = 2$  تعداد بوزون‌های پروتونی و  $N_\nu = (82 - 80) / 2 = 1$  تعداد بوزون‌های حفره نوترونی. انتقال الکترومغناطیسی تعداد بوزون‌ها را تغییر نمی‌دهد، اما انتقال دو نوکلئون یکسان، تعداد بوزون‌ها را یک واحد بالا یا پایین می‌برد.

طبیعتاً IBM باید این واقعیت را که هر حالت هسته‌ای یک تکانه‌ی زاویه‌ای هسته‌ای کل،  $J$ ، محدود دارد را به حساب آورد یا اینکه ویژه مقدار عملگر تکانه‌ی زاویه‌ای  $J^2$ ،  $j(j+1)\hbar$  است [۲۲].



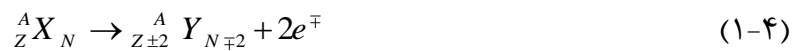
# فصل چہارم

محاسبہ عناصر ماتریسی و نیمہ

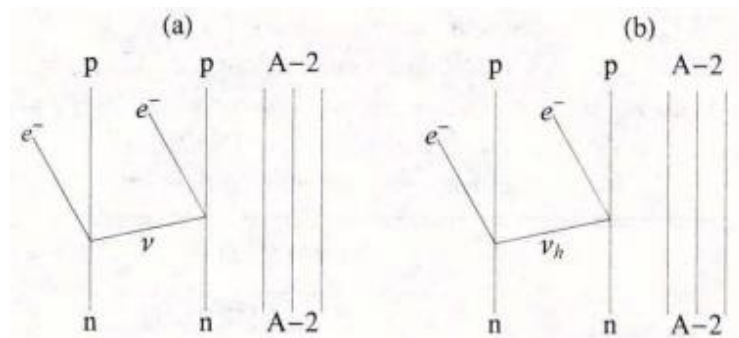
عمر

## ۴-۱ مقدمه

سوال‌هایی از قبیل اینکه نوترینو ذره‌ای ماژورانا و یا دیراکی است و یا این که جرم نوترینو در ماتریس آمیخته چیست، یکی از پر اهمیت‌ترین سوال‌ها در فیزیک امروز است که هنوز بی پاسخ مانده است. اندازه گیری مستقیم جرم میانگین را از مشاهده مستقیم واپاشی دوتایی بدون نوترینو می‌توان بدست آورد ( $0\nu\beta\beta$ )



دو رویه هستند که در شکل (۱-۴) نشان داده شده‌اند.

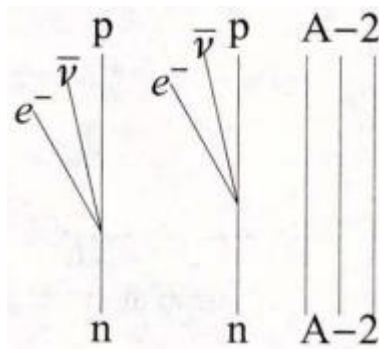


شکل (۱-۴) ساز و کار واپاشی دوتایی بدون نوترینو [23]

چندین آزمایش در دنیا برای مشاهده این مد (مد بدون نوترینو)، یا در حال انجام و یا در حال طرح ریزی هستند (مرجع [۲۴] را ببینید). نیمه عمر برای این مد از واپاشی دوتایی را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$[\tau_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G_{0\nu} |M_{0\nu}|^2 |f(m_i, U_{ei})|^2 \quad (2-4)$$

که در آن،  $G_{0\nu}$  عامل فضای فاز،  $M_{0\nu}$  عنصر ماتریس هسته‌ای و  $f(m_i, U_{ei})$  شامل فیزیک فراتر از مدل استاندارد<sup>۱</sup> از طریق جرم‌های  $m_i$  و عناصر ماتریسی آمیخته  $U_{ei}$  انواع نوترینو است. همراه با مد بدون نوترینو، فرایند دیگری که توسط مدل استاندارد اجازه داده می‌شود،  $2\nu\beta\beta$ ، در شکل (۲-۴) نشان داده شده است.

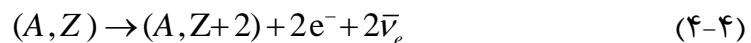


شکل (۲-۴) ساز و کار واپاشی دوبتایی با گسیل دو نوترینو [۲۳]

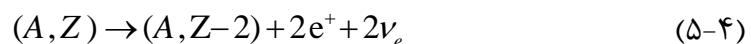
برای این مد از واپاشی، نیمه عمر را با یک تقریب خوب می‌توان در قالب زیر نشان داد؛

$$\left[\tau_{1/2}^{2\nu}\right]^{-1} = G_{2\nu} |m_e c^2 M_{2\nu}|^2 \quad (۳-۴)$$

فرایند به تصویر کشیده شده در شکل (۲-۴) بصورت؛



هستند. در سال‌های اخیر علاقه به فرایندهای؛



در حال افزایش است. در این مورد نیز مدهای قابل رقابت از نوع مدهایی که یک یا دو الکترون از ابر الکترونی گیراندازی می‌شوند، وجود دارد ( $0\nu EC \beta, 2\nu EC \beta, 0\nu ECEC, 2\nu ECEC$ ). هم چنین

<sup>1</sup> Physics beyond the standard model

برای این مدها، نیمه عمر را می‌توان (هم بصورت دقیق و هم تقریبی) با عامل فضای فاز و عناصر ماتریسی تولید کرد که موارد بسیار مهمی در محاسبات واپاشی دوتایی هستند. در استخراج فیزیک فراتر از مدل استاندارد، مشتمل بر تابع  $f(m_i, U_{ei})$  در رابطه‌ی (۴-۲)، نیازمند به محاسبه‌ی دقیق  $M_{0\nu}$  و  $G_{0\nu}$  هستیم. اخیراً ارزیابی سیستماتیک از عامل‌های فضای فاز ( $PSFs^1$ ) و عناصر ماتریس هسته‌ای ( $NMEs^2$ ) برای همه‌ی فرایندهای مورد علاقه آغاز شده است که نتایج برای NMEs در مرجع [۲۷-۴،۵،۲۵] و برای PSFs در مراجع [۷-۵] گزارش شده است. محاسبات برای NMEs در چارچوب برهم‌کنش مدل بوزونی (IBM-2) انجام شده است. پس از اتمام این محاسبات در همه‌ی هسته‌های مورد توجه، بار دیگر این هسته‌ها با هدف دقیق‌سازی نتایج، مورد مخاطب قرار گرفته شده‌اند. همانطور که در جدول (۱۵) مرجع [۲۷] نشان داده شده است، عناصر ماتریسی فرمی  $M_F^{2\nu}$  برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  در IBM-2 در مواردی که پروتون‌ها و نوترون‌ها پوسته اصلی یکسانی را اشغال می‌کنند، از بین نمی‌رود. بطور مشابه، عناصر ماتریسی فرمی  $M_F^{0\nu}$  برای واپاشی  $0\nu\beta\beta$ ، زمانی که پروتون‌ها و نوترون‌ها در پوسته اصلی یکسانی هستند، بزرگ است. همانطور که در جدول (۷) مرجع [۲۷] گزارش شده است، مشکلی مشابه در تقریب فاز تصادفی شبه ذرات QRPA هم برای QRPA- $\lambda$ Tu و هم QRPA-Jy [۹] وجود دارد که اخیراً [۱۰] با تغییر مقادیر ثابت  $g_{pp}^{T=1}$  با بهنجارش دوباره تصحیح شده است، که این چنین راهی را برای از بین بردن  $M_F^{2\nu}$  فراهم کرده است. در این جا نیز با تصحیح برهم‌کنش مدل بوزونی با ترمیم ایزواسپین این مشکل حل می‌شود و در این مدل،  $M_F^{0\nu} = 0$  می‌شود. یکی دیگر از پیامدهای پیاده‌سازی این روش این است که عناصر ماتریسی  $M_F^{0\nu}$  کاهش می‌یابد و با برهم‌کنش مدل پوسته‌ای (ISM) قابل مقایسه خواهد بود [۲۳].

<sup>1</sup> Phase space factors

<sup>2</sup> Nuclear matrix elements



## ۴-۲ ساز و کار

نقش ایزواسپین در IBM بصورت گسترده در سال‌های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ [۱۹, ۲۰, ۲۲, ۲۸] گسترش پیدا کرد و بصورت خلاصه در مقاله « ایزواسپین و اسپین  $f$  در برهم‌کنش مدل بوزونی » توسط Elliott [۲۹] آمده است. هم چنین در مرجع [۲۹] بحث شده است که تابع موج‌های IBM-2 در هسته‌های سنگین با نوترون فراوان ایزواسپین خوب دارند. مشکلی که تنها در هسته‌های سبک وجود دارد ناشی از داشتن اوربیتال‌های برابر برای پروتون و نوترون است (پوسته‌های pf و sd). برای این هسته‌ها نیاز به معرفی یک ایزواسپین ثابت در شکل IBM به نام IBM-3 داریم [۱۹]. از IBM-2 نیز تنها در صورتی در این هسته‌ها می‌توانیم استفاده کنیم که پارامترهای برهم‌کنش توسط تصویر ایزواسپین ثابت IBM-3 بدست آید (برای هسته‌های بحث شده در این جا تنها  $^{48}Ca$  و  $^{48}Ti$  شامل IBM-3 یا شکل تصویری آن هستند). مشکل با ایزواسپین در IBM-2 ناشی از نگاهت عملگر فرمیون برای واپاشی  $0\nu\beta\beta$  و  $2\nu\beta\beta$  است. بیان عملگر گذار فرمیونیک از نوع فرمی (F)، گاموف - تلمر (GT) و تانسور (T) در [۲۵] بصورت؛

$$V_{s_1, s_2}^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \sum_{n, n'} \tau_n^+ \tau_{n'}^+ \left[ \Sigma_n^{s_1} \times \Sigma_{n'}^{s_2} \right]^{(\lambda)} V(r_{nn'}) C^{(\lambda)}(\Omega_{nn'}) \quad (۶-۴)$$

که برای  $\Sigma^{(0)} = 1, s = 0$  و برای  $\Sigma^{(1)} = \bar{\sigma}, s = 1$ . به طور خاص، عملگر گذار فرمی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$ ، از معادله بالا با جایگذاری  $\lambda = 0, s_1 = s_2 = 0, V(r) = 1$  بدست می‌آید که داریم؛

$$V_F^{(2\nu)} = \frac{1}{2} \sum_{n, n'} \tau_n^+ \tau_{n'}^+ \quad (۷-۴)$$

و برای واپاشی  $0\nu\beta\beta$  با جایگذاری  $\lambda = 0, s_1 = s_2 = 0, V(r) = H(r)$  بدست می‌آید که داریم؛

$$V_F^{(0\nu)} = \frac{1}{2} \sum_{n,n'} \tau_n^+ \tau_{n'}^+ H(r_{nn'}) \quad (8-4)$$

که  $H(r)$  در پیوست A مرجع [۲۵] داده شده است. عملگر (۷-۴) که روی همه‌ی ذرات جمع بسته شده است، نمی‌تواند ایزواسپین را تغییر دهد و این عناصر ماتریسی است که بین حالت‌های اولیه و نهایی باید از بین برود. در محاسبات IBM-2 قبل [۴]، عنصر ماتریسی  $M_F^{2\nu}$  بسادگی کنار گذاشته می‌شد و عناصر ماتریسی  $M_F^{0\nu}$  دست نخورده باقی می‌ماند. در این جا پیشنهاد می‌شود که یک تقریب بهتر، اصلاح عملگر نگاشت با شرایط  $M_F^{2\nu} = 0$  خواهد بود. این شرایط را بسادگی با جابجایی انتگرال‌های شعاعی پیوست A در مرجع [۲۵]  $R^{(k_1, k_2, \lambda)}(n_1, l_1, n_2, l_2, n'_1, l'_1, n'_2, l'_2)$  با؛

$$2\nu\beta\beta: [ R^{(k_1, k_2, \lambda)}(n_1, l_1, n_2, l_2, n'_1, l'_1, n'_2, l'_2) - \delta_{k_1,0} \delta_{k_2,0} \delta_{k,0} \delta_{\lambda,0} \delta_{j_1, j'_1} \delta_{j_2, j'_2} \delta_{n_1, n'_1} \delta_{l_1, l'_1} \delta_{n_2, n'_2} \delta_{l_2, l'_2} ] \quad (9-4)$$

$$0\nu\beta\beta: [ R^{(k_1, k_2, \lambda)}(n_1, l_1, n_2, l_2, n'_1, l'_1, n'_2, l'_2) - \delta_{k_1,0} \delta_{k_2,0} \delta_{k,0} \delta_{\lambda,0} \delta_{j_1, j'_1} \delta_{j_2, j'_2} \delta_{n_1, n'_1} \delta_{l_1, l'_1} \delta_{n_2, n'_2} \delta_{l_2, l'_2} \times R_{0\nu}^{(0,0,0)}(n_1, l_1, n_2, l_2, n'_1, l'_1, n'_2, l'_2) ] \quad (10-4)$$

اعمال کرد که

$$R_{0\nu}^{(0,0,0)}(n_1, l_1, n_2, l_2, n'_1, l'_1, n'_2, l'_2) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \frac{1}{p(p+\tilde{A})} p^2 dp \times \int_0^\infty R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n'_1 l'_1}(r_1) \frac{\sin(pr_1)}{p^2} r_1^2 dr_1 \times \int_0^\infty R_{n_2 l_2}(r_2) R_{n'_2 l'_2}(r_2) \frac{\sin(pr_2)}{p^2} r_2^2 dr_2 \quad (11-4)$$

است. این روابط ضمانت می‌کنند که عناصر ماتریسی فرمی برای  $2\nu\beta\beta$  از بین برود و عناصر ماتریسی فرمی  $0\nu\beta\beta$  با کم کردن  $R_{0\nu}^{(0,0,0)}$  کاهش خواهد یافت، مشابه با نسخه استفاده شده در مرجع [۱۰] (شکل (۴) از مرجع [۱۰] را ببینید). اگر چه روش گفته شده در بالا یک ترمیم ایزواسپین تابع موج‌های IBM-2 نیست، اما نسبتاً ترمیمی از خواص ایزواسپین از نگاهت عملگر گذار است. با این وجود، باید، به عنوان یک ساده‌سازی، ترمیم ایزواسپین را به این بخش اطلاق کرد [۲۳].

### ۳-۴ نتایج برای $0\nu\beta\beta$

در این جا، محاسبه عنصر ماتریسی به روش IBM، مشابه با مرجع [۲۷-۲۵] می‌باشد و تنها گزارشی از نتایج محاسبات داده می‌شود. در این محاسبات به پارامترهای مشخص هم‌بستگی کوتاه - برد نیازمندیم. در محاسبات اخیر [۲۵] پارامتر Miller-Spenser استفاده شد. در حال حاضر روشن شده است که پارامترهای CD-Bonn و Argonne مناسب‌تر هستند. در این‌جا از میان پارامترهای Argonne تابع هم‌بستگی زیر را استفاده می‌کنیم؛

$$f(r) = 1 - ce^{ar^2}(1 - br^2) \quad (۱۲-۴)$$

که  $a = 1.59 fm^{-2}$ ،  $b = 1.45 fm^{-2}$  و  $c = 0.92$  و می‌نویسیم که؛

$$M_{0\nu} = g_A^2 M^{(0\nu)}$$

$$M^{(0\nu)} = M_{GT}^{(0\nu)} - \left( \frac{g_V}{g_A} \right)^2 M_F^{(0\nu)} + M_T^{(0\nu)} \quad (۱۳-۴)$$

با نسبت  $\frac{g_V}{g_A}$  که به طور صریح در جلوی  $M_F^{0\nu}$  آمده است [۲۳].

### ۴-۳-۱ واپاشی $0\nu\beta\beta$ با تبادل نوترینو سبک

در جدول (۴-۱) نتایج محاسبات NMEs برای حالت پایه  $0_1^+$ ، و اولین حالت برانگیخته  $0_2^+$ ، نشان داده شده است که به سهم‌های GT، F، T و جمع‌های آن‌ها مطابق معادله (۴-۱۳) تقسیم شده‌اند.

جدول (۴-۱) عناصر ماتریسی هسته‌ای  $M^{(2\nu)}$  بدست آمده به روش IBM-2 [۲۳].

A	$0_1^+$				$0_2^+$			
	$M_{GT}^{(0\nu)}$	$M_F^{(0\nu)}$	$M_T^{(0\nu)}$	$M^{(0\nu)}$	$M_{GT}^{(0\nu)}$	$M_F^{(0\nu)}$	$M_T^{(0\nu)}$	$M^{(0\nu)}$
<sup>48</sup> Ca	1.73	-0.30	-0.17	1.75	3.78	-0.27	-0.12	3.82
<sup>76</sup> Ge	4.49	-0.68	-0.23	4.68	1.95	-0.27	-0.09	2.02
<sup>82</sup> Se	3.59	-0.60	-0.23	3.73	0.92	-0.13	-0.05	0.95
<sup>96</sup> Zr	2.51	-0.33	0.11	2.83	0.04	-0.01	0.00	0.05
<sup>100</sup> Mo	3.73	-0.48	0.19	4.22	0.99	-0.13	0.05	1.12
<sup>110</sup> Pd	3.59	-0.40	0.21	4.05	0.46	-0.05	0.03	0.52
<sup>116</sup> Cd	2.76	-0.33	0.14	3.10	0.84	-0.09	0.03	0.93
<sup>124</sup> Sn	2.96	-0.57	-0.12	3.19	2.21	-0.41	-0.09	2.38
<sup>128</sup> Te	3.80	-0.72	-0.15	4.10	2.65	-0.47	-0.09	2.85
<sup>130</sup> Te	3.43	-0.65	-0.13	3.70	2.52	-0.45	-0.08	2.71
<sup>134</sup> Xe	3.77	-0.68	-0.15	4.05	2.19	-0.36	-0.06	2.35
<sup>136</sup> Xe	2.83	-0.52	-0.10	3.05	1.49	-0.24	-0.03	1.60
<sup>148</sup> Nd	2.00	-0.38	0.07	2.31	0.25	-0.05	0.01	0.29
<sup>150</sup> Nd	2.33	-0.39	0.10	2.67	0.40	-0.06	0.02	0.45
<sup>154</sup> Sm	2.49	-0.36	0.11	2.82	0.37	-0.04	0.01	0.41
<sup>160</sup> Gd	3.64	-0.45	0.17	4.08	0.76	-0.11	0.04	0.87
<sup>198</sup> Pt	1.90	-0.33	0.09	2.19	0.08	-0.02	0.01	0.10
<sup>232</sup> Th	3.58	-0.44	0.18	4.04	0.12	-0.02	0.01	0.15
<sup>238</sup> U	4.27	-0.53	0.21	4.81	0.34	-0.05	0.02	0.40

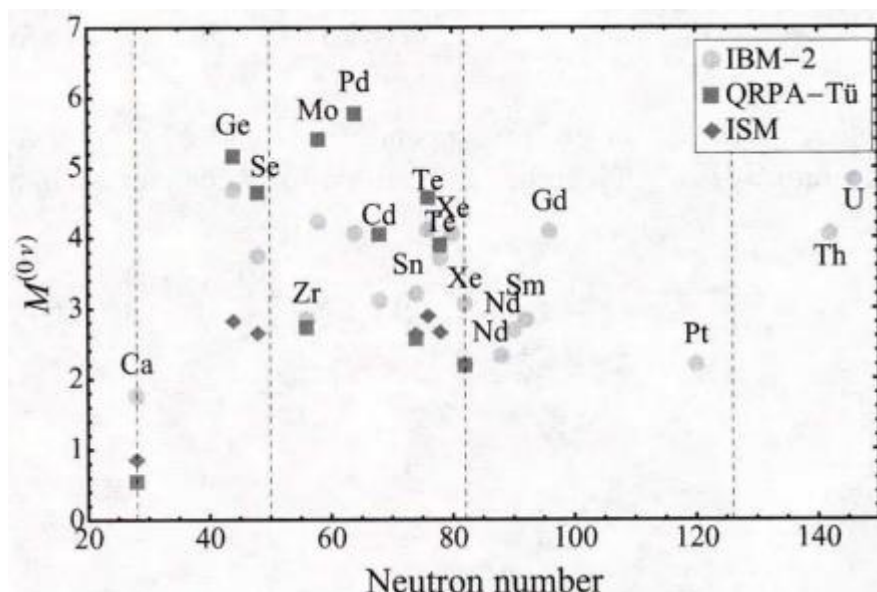
پارامترهای هامیلتونی IBM-2 که در محاسبات استفاده شده‌اند از جدول (۲۳) مرجع [۲۷] گرفته شده است (به استثناء <sup>160</sup>Gd که پارامترهایش از مرجع [۱۹] آمده است). وقتی که این محاسبات را با عناصر ماتریسی بدون ترمیم ایزواسپین مرجع [۲۵] مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که کاهش قابل توجهی در مقادیر عناصر ماتریسی  $F$  نسبت به محاسبات مدل پوسته‌ای صورت پذیرفته است. به

طور کلی حدود ۱۵٪ در مقادیر  $M^{(0\nu)}$  کاهش داشتیم. هم‌چنین این نتایج با محاسبات QRPA-Tu و ISM مربوط به مراجع [۱۰] و [۲۸]، بترتیب، در جدول (۲-۴) و شکل (۳-۴) مقایسه شده است.

جدول (۲-۴). مقایسه عناصر ماتریسی هسته ای برای واپاشی به حالت پایه  $0_1^+$ . [۲۳]

Decay	$M^{(0\nu)}$		
	IBM-2	QRPA-Tü	ISM
$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$	1.75	0.54	0.85
$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$	4.68	5.16	2.81
$^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$	3.73	4.64	2.64
$^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$	2.83	2.72	
$^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$	4.22	5.40	
$^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$	4.05	5.76	
$^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$	3.10	4.04	
$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Te}$	3.19	2.56	2.62
$^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$	4.10	4.56	2.88
$^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	3.70	3.89	2.65
$^{134}\text{Xe} \rightarrow ^{134}\text{Ba}$	4.05		
$^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$	3.05	2.18	2.19
$^{148}\text{Nd} \rightarrow ^{148}\text{Sm}$	2.31		
$^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$	2.67		
$^{154}\text{Sm} \rightarrow ^{154}\text{Gd}$	2.82		
$^{160}\text{Gd} \rightarrow ^{160}\text{Dy}$	4.08		
$^{198}\text{Pt} \rightarrow ^{198}\text{Hg}$	2.19		
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{232}\text{U}$	4.04		
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{238}\text{Pu}$	4.81		

کاهش در عنصر ماتریسی فرمی  $M_F^{(0\nu)}$  با ترمیم ایزواسپین در جدول (۳-۴) آورده شده است. عناصر ماتریسی فرمی با ترمیم ایزواسپین با مقادیر ISM قابل مقایسه هستند، اما با یک ضریب ۲ تا ۳ نسبت به نتایج QRPA-Tu با ترمیم ایزواسپین کوچکتر هستند. این ممکن است با توجه به این حقیقت باشد که هر دوی IBM-2 و ISM فضای مدل محدود دارند، که در QRPA چندین پوسته‌ی بسته را شامل می‌شود.



شکل (۴-۳). نتایج IBM-2 با ترمیم ایزواسپین برای واپاشی  $0\nu\beta\beta^-$  [۲۸].

### ۴-۳-۲ واپاشی $0\nu\beta\beta$ با تبادل نوترینو سنگین

این عناصر ماتریسی را بسادگی می‌توان با جایگذاری پتانسیل  $\nu_h(p) = 2\pi^{-1}(m_e m_p)^{-1} R^{(k_1, k_2, \lambda)}$  در  $\nu_h(p) = 2\pi^{-1}[p(p + \tilde{A})]^{-1}$  محاسبه کرد. در جدول (۴-۴) عناصر ماتریسی متناظر گزارش شده است. زیر نویس « h » این عناصر ماتریسی را با عناصر ماتریسی تبادل نوترینو سبک تمیز می‌دهد. مقایسه این نتایج با نتایج مربوط به QRPA-Tu [۲۰] و ISM [۳۰] در جدول (۴-۵) آمده است.

### ۴-۳-۳ حساسیت به تغییر پارامتر، فرضیات مدل و فرضیات عملگر

حساسیت IBM-2 نسبت به تغییر پارامتر، فرضیات مدل و فرضیات عملگر در مرجع [۲۷]، با جزئیات بحث شده است. در این جا باید توجه داشت که به دلیل ترمیم ایزواسپین، حساسیت عناصر ماتریسی F نسبت به ایزواسپین خالص از ۱۰٪ به ۱٪ کاهش یافته است، از جمله در مورد واپاشی  $^{48}\text{Ca}$ . خطای کل در محاسبات  $0\nu\beta\beta$  برای همه‌ی هسته‌ها ۱۶٪ برآورد شد. در مورد  $0\nu_h\beta\beta$

حساسیت عناصر ماتریسی از ۱۰٪ به ۱٪ کاهش یافت و حساسیت کاهش یافته عناصر ماتریسی F+GT نسبت به SRC از ۵۰٪ به ۲۵٪ بود. این حساسیت با مقایسه‌ی عناصر ماتریسی Argonne-CD Bonn و UCOM SRC برآورد شد. خطای کل  $0\nu_h\beta\beta$  ، ۲۸٪ برای همه‌ی هسته‌ها برآورد شد [۲۳].

جدول (۴-۳). مقایسه بین عناصر ماتریسی فرمی برای  $0\nu\beta\beta$ . [۲۳]

Decay	$\chi_F$				ISM
	IBM-2		QRPA-Tü		
	Old	New	Old	New	
$^{48}\text{Ca}$	-0.39	-0.11	-0.93	-0.32	-0.14
$^{76}\text{Ge}$	-0.37	-0.09	-0.34	-0.21	-0.10
$^{82}\text{Se}$	-0.40	-0.10	-0.35	-0.23	-0.10
$^{96}\text{Zr}$	-0.08	-0.08	-0.38	-0.23	
$^{100}\text{Mo}$	-0.08	-0.08	-0.30	-0.30	
$^{110}\text{Pd}$	-0.07	-0.07	-0.33	-0.27	-0.16
$^{116}\text{Cd}$	-0.07	-0.07	-0.30	-0.30	-0.19
$^{124}\text{Sn}$	-0.34	-0.12	-0.40	-0.27	-0.13
$^{128}\text{Te}$	-0.33	-0.12	-0.38	-0.27	-0.13
$^{130}\text{Te}$	-0.33	-0.12	-0.39	-0.27	-0.13
$^{134}\text{Xe}$		-0.11			
$^{136}\text{Xe}$	-0.11	-0.11	-0.38	-0.25	-0.13
$^{148}\text{Nd}$	-0.12	-0.12			
$^{150}\text{Nd}$	-0.10	-0.10			
$^{154}\text{Sm}$	-0.09	-0.09			
$^{160}\text{Gd}$	-0.08	-0.08			
$^{198}\text{Pt}$	-0.11	-0.11			
$^{232}\text{Th}$	-0.08	-0.08			
$^{238}\text{U}$	-0.08	-0.08			

شکل (۴-۴). عناصر ماتریسی برای تبادل نوترینو سنگین واپاشی دوتایی بدون نوترینو به حالت پایه [۲۳].

A	$0_1^+$				$0_2^+$			
	$M_{GT}^{(0\nu h)}$	$M_F^{(0\nu h)}$	$M_T^{(0\nu h)}$	$M^{(0\nu h)}$	$M_{GT}^{(0\nu h)}$	$M_F^{(0\nu h)}$	$M_T^{(0\nu h)}$	$M^{(0\nu h)}$
$^{48}\text{Ca}$	53.5	-23.2	-21.3	46.6	44.8	-8.8	-6.5	43.7
$^{76}\text{Ge}$	104	-42.8	-26.9	104	38.6	-14.9	-9.8	38.1
$^{82}\text{Se}$	87.2	-37.1	-27.3	82.9	16.8	-6.5	-4.6	16.2
$^{96}\text{Zr}$	67.9	-29.2	12.7	98.7	1.4	-0.6	0.3	2.1
$^{100}\text{Mo}$	111	-46.8	24.2	164	29.3	-12.4	6.4	43.3
$^{110}\text{Pd}$	100	-41.4	27.7	154	13.5	-5.6	3.8	20.9
$^{116}\text{Cd}$	73.9	-31.2	16.9	110	18.0	-7.5	3.5	26.1
$^{124}\text{Sn}$	73.7	-33.1	-14.9	79.3	50.1	-22.2	-9.9	54.0
$^{128}\text{Te}$	93.4	-41.7	-18.3	101	55.7	-24.4	-10.3	60.5
$^{130}\text{Te}$	84.8	-37.9	-16.6	91.8	51.5	-22.6	-9.3	56.2
$^{134}\text{Xe}$	86.6	-39.3	-19.8	91.2	38.7	-17.3	-7.9	41.5
$^{136}\text{Xe}$	66.8	-29.7	-12.7	72.6	25.6	-11.0	-4.1	28.3
$^{148}\text{Nd}$	72.8	-32.7	9.6	103	8.1	-3.7	1.0	11.4
$^{150}\text{Nd}$	81.1	-35.6	13.2	116	12.2	-5.3	1.8	17.3
$^{154}\text{Sm}$	78.1	-33.7	13.8	113	8.9	-3.8	1.2	12.4
$^{160}\text{Gd}$	106	-44.6	21.5	155	26.7	-11.4	6.2	40.0
$^{198}\text{Pt}$	71.4	-31.9	12.8	104	4.0	-1.8	0.9	6.1
$^{232}\text{Th}$	107	-44.0	24.4	159	6.2	-2.7	1.9	9.9
$^{238}\text{U}$	127	-52.5	28.7	189	12.7	-5.4	3.4	19.4

شکل (۴-۵). عناصر ماتریسی واپاشی دو بتایی بدون نوترینو با تبادل نوترینو سنگین به حالت پایه [۲۳].

Decay	$M_h^{(0\nu)}$		ISM
	IBM-2	QRPA-Tü	
$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$	46.6	40	47.5
$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$	104	287	138
$^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$	82.9	262	127
$^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$	98.7	184	
$^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$	164	342	
$^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$	154	333	
$^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$	110	209	
$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Te}$	79.3	184	
$^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$	101	302	
$^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	91.8	264	
$^{134}\text{Xe} \rightarrow ^{134}\text{Ba}$	91.2		
$^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$	72.6	152	
$^{148}\text{Nd} \rightarrow ^{148}\text{Sm}$	103		
$^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$	116		
$^{154}\text{Sm} \rightarrow ^{154}\text{Gd}$	113		
$^{160}\text{Gd} \rightarrow ^{160}\text{Dy}$	155		
$^{198}\text{Pt} \rightarrow ^{198}\text{Hg}$	104		
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{232}\text{U}$	159		
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{238}\text{Pu}$	189		



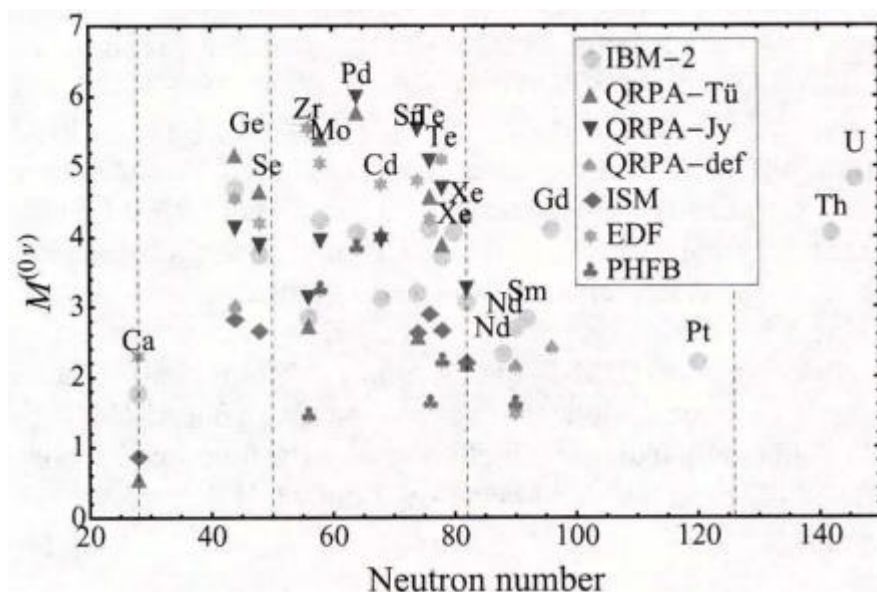
عناصر ماتریسی نهایی، با به حساب آوردن خطا، در جدول (۴-۶) داده شده است. علاوه بر IBM-2 ، QRPA و ISM ، محاسبات دیگری اخیراً انجام شده است که در شکل (۴-۴) نتایج محاسبه شده در این جا، با همه‌ی محاسبات موجود از جمله تئوری تابع چگالی (DFT) [۳۱] و (HFB) Hartree-Fock (HFB) Bogoliubov [۳۲] مقایسه شده است.

شکل (۴-۶). عناصر ماتریسی نهایی برای واپاشی دوبتایی بدون نوترینو در IBM-2 [۲۳]

Decay	Light neutrino exchange	Heavy neutrino exchange
$^{48}\text{Ca}$	1.75(28)	47(13)
$^{76}\text{Ge}$	4.68(75)	104(29)
$^{82}\text{Se}$	3.73(60)	83(23)
$^{96}\text{Zr}$	2.83(45)	99(28)
$^{100}\text{Mo}$	4.22(68)	164(46)
$^{110}\text{Pd}$	4.05(65)	154(43)
$^{116}\text{Cd}$	3.10(50)	110(31)
$^{124}\text{Sn}$	3.19(51)	79(22)
$^{128}\text{Te}$	4.10(66)	101(28)
$^{130}\text{Te}$	3.70(59)	92(26)
$^{134}\text{Xe}$	4.05(65)	91(26)
$^{136}\text{Xe}$	3.05(59)	73(20)
$^{148}\text{Nd}$	2.31(37)	103(29)
$^{150}\text{Nd}$	2.67(43)	116(32)
$^{154}\text{Sm}$	2.82(45)	113(32)
$^{160}\text{Gd}$	4.08(65)	155(43)
$^{198}\text{Pt}$	2.19(35)	104(29)
$^{232}\text{Th}$	4.04(65)	159(45)
$^{238}\text{U}$	4.81(77)	189(53)

#### ۴-۴ نتایج برای $0\nu\beta^+\beta^+$

عناصر ماتریسی برای واپاشی دو پوزیترونی ( $\beta^+\beta^+$ ) و روندهای مربوط را ( $EC\beta^+$ ) و (ECEC) به روش مشابه می‌توان محاسبه کرد.



شکل (۴-۴). نتایج برای عناصر ماتریسی واپاشی دوتایی بدون نوترینو [۲۳].

#### ۴-۴-۱ $0\nu\beta^+\beta^+$ و روندهای مربوط با تبادل نوترینو سبک

در جدول (۷-۴) نتایج محاسبات عناصر ماتریسی به حالت پایه  $0_1^+$  و اولین حالت برانگیخته  $0_2^+$  که به سهم‌های GT، F و T تقسیم شده، مطابق با معادله (۴-۱۳) نشان داده شده است. پارامترهای هامیلتونی IBM-2 از جدول (۲) و (۶) مرجع [۲۸ و ۲۹] در محاسبات استفاده شد. هم‌چنین در این جا نیز مانند بخش قبل، می‌بینیم که عناصر ماتریسی F به طور قابل توجهی در مقایسه با محاسبات قبل که در جدول (۸) مرجع [۲۸] گزارش شده، کاهش یافته است. نتایج محاسبات در جدول (۴-۸) با دیگر محاسبات موجود مقایسه شده است. برای واپاشی‌های  $\beta^+\beta^+$ ،  $EC\beta^+$  و ECEC محاسبات ترمیم ایزواسپین وجود ندارد به این ترتیب مقایسه در این جا به این معنی است که کاهش عناصر ماتریسی F در IBM-2، با ترمیم ایزواسپین مورد توجه است.

جدول (۴-۷). عناصر ماتریسی هسته‌ای برای واپاشی‌های  $\beta^+\beta^+$ ،  $EC\beta^+$  و ECEC [۲۳].

Nucleus	$0_1^+$				$0_2^+$			
	$M_{GT}^{(0\nu)}$	$M_F^{(0\nu)}$	$M_T^{(0\nu)}$	$M^{(0\nu)}$	$M_{GT}^{(0\nu)}$	$M_F^{(0\nu)}$	$M_T^{(0\nu)}$	$M^{(0\nu)}$
$^{58}\text{Ni}$	2.33	-0.23	0.15	2.61	2.21	-0.20	0.10	2.44
$^{64}\text{Zn}$	5.22	-0.61	-0.16	5.44	0.68	-0.06	-0.02	0.70
$^{78}\text{Kr}$	3.79	-0.61	-0.24	3.92	0.87	-0.14	-0.06	0.90
$^{96}\text{Ru}$	2.51	-0.37	0.11	2.85	0.03	-0.01	0.00	0.04
$^{106}\text{Cd}$	3.16	-0.38	0.19	3.59	1.55	-0.16	0.08	1.72
$^{124}\text{Xe}$	4.42	-0.82	-0.19	4.74	0.74	-0.14	-0.03	0.80
$^{130}\text{Ba}$	4.36	-0.80	-0.18	4.67	0.32	-0.06	-0.01	0.34
$^{136}\text{Ce}$	4.23	-0.76	-0.16	4.54	0.35	-0.06	-0.01	0.38
$^{156}\text{Dy}$	2.80	-0.40	0.13	3.17	1.53	-0.23	0.08	1.75
$^{164}\text{Er}$	3.46	-0.44	0.22	3.95	1.02	-0.10	0.05	1.13
$^{180}\text{W}$	4.12	-0.57	0.20	4.67	0.26	-0.05	0.02	0.31

جدول (۴-۸). نرخ عناصر ماتریسی فرمی به گاموف-تلا برای واپاشی‌های بدون نوترینو  $\beta^+\beta^+$  [۲۳].

Decay	$\chi_F$		QRPA <sup>a</sup>
	IBM-2		
	Old	New	
$^{58}\text{Ni}$	-0.06	-0.06	-0.14
$^{64}\text{Zn}$	-0.31	-0.07	
$^{78}\text{Kr}$	-0.38	-0.10	-0.27
$^{96}\text{Ru}$	-0.09	-0.09	-0.23
$^{106}\text{Cd}$	-0.07	-0.07	-0.23
$^{124}\text{Xe}$	-0.34	-0.12	-0.23
$^{130}\text{Ba}$	-0.32	-0.11	-0.23
$^{136}\text{Ce}$	-0.32	-0.11	-0.26
$^{156}\text{Dy}$		-0.09	
$^{164}\text{Er}$		-0.08	
$^{180}\text{W}$		-0.09	

## ۲-۴-۴ $0\nu\beta^+\beta^+$ و روندهای مربوط با تبادل نوترینو سنگین

این عناصر ماتریسی به روش مشابه با بخش (۲-۳-۴) محاسبه و در جدول (۹-۴) داده شده است. حساسیت در این جا همانند حالت توصیف شده در بخش (۳-۳-۴) برای  $0\nu\beta^-\beta^-$  است. نتایج نهایی برای عناصر ماتریسی با خطای برآورد شده در جدول (۱۰-۴) داده شده است [۲۳].

جدول (۹-۴). عناصر ماتریسی برای تبادل نوترینو سنگین [۲۳]

Nucleus	$0_1^+$				$0_2^+$			
	$M_{GT}^{(0\nu)}$	$M_F^{(0\nu)}$	$M_T^{(0\nu)}$	$M^{(0\nu)}$	$M_{GT}^{(0\nu)}$	$M_F^{(0\nu)}$	$M_T^{(0\nu)}$	$M^{(0\nu)}$
<sup>58</sup> Ni	55.1	-23.1	18.6	88.0	36.3	-15.8	8.33	54.5
<sup>64</sup> Zn	103	-38.9	-18.5	109	10.1	-3.20	-2.00	10.1
<sup>78</sup> Kr	89.8	-38.5	-30.6	83.1	21.1	-9.12	-7.22	19.5
<sup>96</sup> Ru	67.5	-30.6	12.5	99.0	0.32	-0.08	0.32	0.59
<sup>106</sup> Cd	87.8	-38.1	26.5	138	34.0	-14.7	8.75	51.9
<sup>124</sup> Xe	105	-47.9	-25.0	110	18.1	-8.24	-4.31	18.9
<sup>130</sup> Ba	103	-46.4	-23.7	108	8.07	-3.68	-1.90	8.45
<sup>136</sup> Ce	95.8	-43.2	-21.8	101	8.24	-3.73	-1.89	8.66
<sup>156</sup> Dy	82.6	-37.0	17.5	123	47.6	-21.4	10.4	71.3
<sup>164</sup> Er	108	-46.8	32.9	170	23.6	-9.95	5.96	35.8
<sup>180</sup> W	119	-53.3	28.1	180	10.7	-4.85	2.91	16.6

## ۴-۵ مقدمه

کد محاسباتی OXBASH که براساس مدل پوسته‌ای کار می‌کند، کد کامپیوتری قوی‌ای محسوب می‌شود که قادر است ابعادی در حدود  $10^6$  برای رویکرد J-T و  $2 \times 10^6$  برای M-scheme را محاسبه کند. OXBASH از کتابخانه‌هایی که شامل فضای مدل و کد برهم‌کنش مربوطه هستند استفاده می‌کند [۳۳].

## ۴-۶ محاسبه عنصر ماتریسی با استفاده از OXBASH

در این جا با استفاده از کد محاسباتی OXBASH که در فصل سوم گفته شد، به محاسبه عنصر ماتریسی هسته  $^{134}\text{Xe}$  می‌پردازیم، همان طور که گفته شد برای انجام محاسبات نیاز به انتخاب فضای مدل و برهم‌کنش مربوطه داریم. در مورد هسته مورد نظر که دارای ۵۴ پروتون و ۸۰ نوترون است، هسته  $^{100}_{50}\text{Sn}$  را بعنوان هسته بی اثر و ۳۴ نوکلئون باقی مانده رو بعنوان ذرات ظرفیت در نظر می‌گیریم. برای محاسبه عنصر ماتریسی واپاشی دوتای با گسیل دو نوترینو نیاز به گذار دو مرحله‌ای داریم یعنی ابتدا گذار به هسته‌ی میانه‌ی  $^{134}\text{Cs}$  و بعد از آن گذار نهایی به هسته  $^{134}\text{Ba}$ . فضای مدل را در این جا  $SN100PN$  انتخاب کردیم که دارای پوسته‌های ظرفیت  $p-1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}, 3s_{1/2}, 1h_{11/2}$  برای پروتون‌های ظرفیت  $N-1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}, 3s_{1/2}, 1h_{11/2}$  و برای نوترون‌های ظرفیت است. برهم‌کنش مورد نظر نیز  $SN100PN$  می‌باشد. این محاسبات در کامپیوتر با مشخصات؛ 2GB Dedicated VRAM و 6GB حافظه و 1000 GB هارد دیسک، انجام پذیرفت. اما متأسفانه حجم بالای محاسبات به دلیل تعداد زیاد ذرات ظرفیت انجام این عمل را با شرایط موجود ناممکن ساخت و برنامه با خطای نبود فضای کافی مواجه شد. از این دست محاسبات برای

هسته‌های دیگر نیز صورت پذیرفت که تنها در هسته‌های  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{76}\text{Ge}$  توانستیم نتایج را استخراج کنیم.

در مورد هسته‌های  $^{48}\text{Ca}$ ،  $^{40}\text{Ca}$  را به عنوان هسته‌ی بی اثر در نظر می‌گیریم. و ۸ نوترون باقی‌مانده ذرات ظرفیت محسوب می‌شوند. هسته‌ی میانه  $^{48}\text{Sc}$  و هسته‌ی نهایی  $^{48}\text{Ti}$  است. فضای مدل  $fp$  که شامل پوسته‌های  $1f_{7/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}$  است و برهم‌کنش مربوطه  $fpMH$  انتخاب شد. با بدست آوردن تابع موج هسته‌های اولیه، میانه و نهایی به گذار گاموف - تلر از هسته‌ی اولیه به میانه و میانه به نهایی می‌پردازیم.

عنصر ماتریسی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  بصورت زیر است؛

$$M_{GT}(E_m) = \sum_{m=1}^{E_m} M_{GT}^m$$

$$= \sum_{m=1}^{E_m} \frac{\langle 0_f^+ \| \tilde{\sigma}^- \| 1_m^+ \rangle \langle 1_m^+ \| \tilde{\sigma}^- \| 0_i^+ \rangle}{E_m + E_0} \quad (14-4)$$

که تابعی از انرژی برانگیختگی  $E_m$  حالت میانه  $1^+$  هسته‌ی  $^{48}\text{Sc}$  است.  $E_0 = T_0/2 + \Delta M$  که  $T_0$  مقدار  $Q$  برای واپاشی  $\beta\beta$ ،  $^{48}\text{Ca}$  است و  $\Delta M$  اختلاف جرم بین  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{48}\text{Sc}$  می‌باشد.  $\Delta M = -0.277\text{MeV}$ ,  $T_0 = 4.27\text{MeV}$  [13]. تقریب بستاری در این محاسبات بصورت زیر

تعریف می‌شود [۳۴]؛

$$B(cis) = \sum_m \langle 0_f^+ \| \tilde{\sigma}^- \| 1_m^+ \rangle \langle 1_m^+ \| \tilde{\sigma}^- \| 0_i^+ \rangle$$

$$= \sum_{m,n} \langle 0_f^+ \| \tilde{\sigma}_m \cdot \tilde{\sigma}_n^- t_m^- t_n^- \| 0_i^+ \rangle \quad (15-4)$$

$$M_{GT}^{2\nu}(cis) = \frac{B(cis)}{\langle E_m \rangle + E_0} \quad (16-4)$$

## ۷-۴ نتایج بدست آمده از کد OXBASH

با شرایط گفته شده در بالا برای بدست آوردن عنصر ماتریسی با استفاده از بخش گذار  $B(GT)$  مربوط به کد OXBASH محاسبات انجام پذیرفت.

جدول (۴-۱۰). پنج  $B(GT)$  اول، و مقدار بدست آمده  $M_{GT}^m$  در برهم کنش FPMH برای  $^{48}\text{Ca}$

$E_m$ (Mev)	$\left  \langle 1_m^+ \  \tilde{\sigma}_t^- \  0_i^+ \rangle \right ^2$	$\left  \langle 0_f^+ \  \tilde{\sigma}_t^- \  1_m^+ \rangle \right ^2$	$\frac{\langle 0_f^+ \  \tilde{\sigma}_t^- \  1_m^+ \rangle \langle 1_m^+ \  \tilde{\sigma}_t^- \  0_i^+ \rangle}{E_m + E_0}$
2/614	0/029	0/0823	0/01092
2/712	1/6587	0/0025	0/01409
3/154	0/2286	0/471	0/02070
3/371	0/0026	0/0219	0/00144
4/381	0/1906	0/0058	0/00533

با توجه با نتایج ارائه شده در جدول (۴-۱۰) عنصر ماتریس هسته‌ای را برای هسته  $^{48}\text{Ca}$  برابر  $M_{GT}(E_m) = 0/13733$  بدست می‌آوریم که با قرار دادن این عدد در معادله‌ی نیمه عمر خواهیم داشت [۳۵]

$$\frac{1}{T_{1/2}} = G^{2\nu} |M_{GT}^{2\nu}|^2 = 7/483 \times 10^{-19} y^{-1}$$

که در این جا برای  $G^{2\nu}$  از جدول (۲-۱) استفاده کردیم. هم چنین طبق رابطه‌ی زیر آهنگ واپاشی را نیز می‌توانیم محاسبه کنیم؛

$$\lambda_{\beta\beta} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 5/186 \times 10^{-19} y^{-1}$$

در مورد هسته‌ی  $^{76}\text{Ge}$ ، عدد جادویی ۲۸ را هم برای پروتون‌ها و هم برای نوترون‌ها بعنوان پوسته‌ی بی اثر در نظر می‌گیریم که در این صورت ۲۰ نوکلئون باقی مانده که شامل ۴ پروتون و ۱۶ نوترون است، ذرات ظرفیت محسوب می‌شوند. فضای مدل را GLEPN در نظر می‌گیریم که شامل پوسته‌های  $2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}, 3s_{1/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}$  برای پروتون‌ها و نوترون‌ها است، و فضای مدل نیز GLEPN انتخاب شد. با توجه به رابطه‌ی (۴-۱) نیاز به محاسبه  $E_0$  داریم که با توجه به اختلاف جرم بین هسته‌ی اولیه و میانه و انرژی کل آزاد شده در این واپاشی مقدار  $E_0 = 1/941 \text{ MeV}$  بدست می‌آید. با توجه به این شرایط نتایج محاسبه شده بصورت زیر است:

جدول (۴-۱۱). پنج  $B(GT)$  اول، و مقدار بدست آمده  $M_{GT}^m$  در برهم‌کنش GLEPN برای  $^{76}\text{Ge}$

$E_m$ (Mev)	$\left  \langle 1_m^+ \  \tilde{\sigma} t^- \  0_i^+ \rangle \right ^2$	$\left  \langle 0_f^+ \  \tilde{\sigma} t^- \  1_m^+ \rangle \right ^2$	$\frac{\langle 0_f^+ \  \tilde{\sigma} t^- \  1_m^+ \rangle \langle 1_m^+ \  \tilde{\sigma} t^- \  0_i^+ \rangle}{E_m + E_0}$
4/883	0/1919	0/0046	0/00435
5/079	0/0536	0/0092	0/00316
5/159	0/0287	0/0087	0/00222
5/293	0/0008	0/0002	0/00009
5/438	0/0006	0/0002	0/00004

باتوجه به نتایج بدست آمده در جدول (۴-۱۱) عنصر ماتریسی هسته‌ای را برای هسته‌ی  $^{76}\text{Ge}$

$M_{GT}(E_m) = 0/0096$  بدست می‌آوریم که با قرار دادن آن در رابطه‌ی نیمه عمر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{T_{1/2}} = G^{2\nu} |M_{GT}^{2\nu}|^2 = 1/203 \times 10^{-23} \text{ y}^{-1}$$

که در این جا نیز برای  $G^{2\nu}$  از جدول (۲-۱) استفاده کردیم. هم چنین طبق رابطه‌ی زیر آهنگ واپاشی را نیز می‌توانیم محاسبه کنیم؛



$$\lambda_{\beta\beta} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 8/33 \times 10^{-24} \text{ y}^{-1}$$

و همچنین با توجه به مقایسه این نتایج با مقادیر تجربی در جدول (۴-۳):

جدول (۴-۱۲). مقایسه نتایج محاسبه شده با کد OXBASH و نتایج تجربی

نتایج تجربی [48]	نتایج محاسبات ما $t_{1/2}(y)$	واپاشی دوتایی و نوع گذار
$(4/3 \pm 1/4) \times 10^{19}$	$1/336 \times 10^{18}$	$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ ( $0^+ \rightarrow 0^+$ )
$(1/43 \pm 0/53) \times 10^{21}$	$8/312 \times 10^{22}$	$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ ( $0^+ \rightarrow 0^+$ )

مشاهده می‌کنیم که نتایج بدست آمده از کد OXBASH اختلاف نسبتاً زیادی با نتایج تجربی دارد که این هم به علت اعمال محدودیت به زیر پوسته‌های تحت اشغال نوکلئون‌ها برای کم کردن تعداد محاسبات است. برای رسیدن به نتایج دقیق‌تر باید تمامی زیر پوسته‌های ممکن که توسط نوکلئون‌ها اشغال می‌شوند را به حساب آورد.

## ۴-۸ نتیجه گیری

در این پروژه کار را از قوانین واپاشی شروع کردیم و بعد از بررسی مکانیزم واپاشی دوتایی هم به لحاظ هسته‌ای و هم به لحاظ ذراتی، به روابط عناصر ماتریسی رسیدیم. برای حل این روابط چندین روش مختلف را معرفی نمودیم که هر کدام ساختار هسته‌ای را به گونه‌ای مختلف بررسی می‌کنند، QRPA، مدل پوسته‌ای و برهم‌کنش مدل بوزونی (IBM-2). در این پروژه مد صفر نوترینو را با استفاده از سه روش بالا بررسی کردیم، از آنجایی که این مد از واپاشی دوتایی هنوز در آزمایش‌های تجربی مشاهده نشده است، مقایسه‌ی نتایج این روش‌ها با تجربه امکان پذیر نمی‌باشد. از نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که نتایج مدل پوسته‌ای و IBM-2 به هم نزدیک است و QRPA اختلاف چشم‌گیری با دو روش دیگر دارد.

اما مد دو نوترینو را با استفاده از کد محاسباتی OXBASH که بر اساس مدل پوسته‌ای نوشته شده است بررسی کردیم و نتایج را برای دو هسته‌ی  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{76}\text{Ge}$  استخراج نمودیم. با مقایسه‌ی نتایج بدست آمده از کد محاسباتی OXBASH و نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی، مشاهده می‌شود که نتایج اختلاف نسبتاً زیادی دارند. برای نزدیک تر شدن هر چه بیشتر محاسبات حاصل از کد محاسباتی OXBASH با نتایج تجربی، باید پوسته‌های بیشتری را در محاسبات وارد کنیم تا بتوانیم همه‌ی احتمالات ممکن را که در واقعیت نوکلئون‌ها قادرند اشغال کنند، در نظر بگیریم. در آخر نتیجه‌ای که ما از این پژوهش دریافتیم این است که مدل پوسته‌ای در مقایسه با دو مدل QRPA و IBM-2، کارآمدتر است و نزدیکی بیشتری با واقعیت تجربی دارد.

## مراجع

- [۱] کنت کرین، (۱۳۸۶) "آشنایی با فیزیک هسته‌ای" جلد اول، ترجمه؛ ا. ابوکاظمی، م. رهبر، چاپ پنجم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- [2] S. S. Wong, *Introductory nuclear physics*: John Wiley & Sons, 2008.
- [3] F. Boehm and P. Vogel, *Physics of massive neutrinos*: Cambridge University Press, 1992.
- [4] E. D. Commins and P. H. Bucksbaum, *Weak interactions of leptons and quarks*: cambridge university press, 1983.
- [5] E. J. Konopinski, "The theory of beta radioactivity," 1966.
- [6] M. Goeppert-Mayer, "Double beta-disintegration," *Physical Review*, vol. 48, p. 0512, 1935.
- [7] W. Furry, "On transition probabilities in double beta-disintegration," *Physical Review*, vol. 56, p. 1184, 1939.
- [8] E. Majorana, "Teoria simmetrica dell'ellettrone e del positrone II Il Nuovo Cimento. 1937," *V*, vol. 14, p. 171.
- [9] G. Racah, "Sulla simmetria tra particelle e antiparticelle," *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, vol. 14, pp. 322-328, 1937.
- [10] H. Primakoff and S. Rosen, "Double beta decay," *Reports on Progress in Physics*, vol. 22, p. 121, 1959.
- [11] J. Suhonen, S. Khadkikar, and A. Faessler, "Confined quarks and the neutrinoless  $\beta\beta$  decay," *Physics Letters B*, vol. 237, pp. 8-13, 1990.
- [12] D. Alburger and J. Cumming, "Search for the  $\beta^-$  decay of Ca 48," *Physical Review C*, vol. 32, p. 1358, 1985.
- [13] L. Zhao, B. A. Brown, and W. Richter, "Shell-model calculation for two-neutrino double beta decay of Ca 48," *Physical Review C*, vol. 42, p. 1120, 1990.
- [14] R. Bardin, P. Gollon, J. Ullman, and C. Wu, "A search for the double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$  and lepton conservation," *Nuclear Physics A*, vol. 158, pp. 337-363, 1970.
- [15] W. Haxton, G. Stephenson Jr, and D. Strottman, "Double beta decay and the Majorana mass of the electron neutrino," *Physical Review Letters*, vol. 47, p. 153, 1981.
- [16] W. Haxton, S. Rosen, and G. Stephenson Jr, "Higgs-boson-exchange contributions to neutrinoless double- $\beta$  decay," *Physical Review D*, vol. 26, p. 1805, 1982.
- [17] K. Muto and H. Klapdor, "Double beta decay, neutrino mass and nuclear

- structure," in *Neutrinos*, ed: Springer, 1988, pp. 183-237.
- [18] P. J. Brussaard and P. W. M. Glaudemans, *Shell-model applications in nuclear spectroscopy*: North-Holland Pub. Co., 1977.
- [19] R. Machleidt, "The meson theory of nuclear forces and nuclear structure," in *Advances in nuclear physics*, ed: Springer, 1989, pp. 189-376.
- [20] P. R. Fraser, "Development and application of a multi-channel algebraic theory for nucleon-nucleus scattering," 2009.
- [21] W. Haxton and G. Stephenson, "Double beta decay," *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 12, pp. 409-479, 1984.
- [22] W. Pfeifer, *An introduction to the interacting boson model of the atomic nucleus*: Vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 1998.
- [23] J. Barea, J. Kotila, and F. Iachello, " $0^+ \nu \beta \beta$  and  $2^+ \nu \beta \beta$  nuclear matrix elements in the interacting boson model with isospin restoration," *Physical Review C*, vol. 91, p. 034304, 2015.
- [24] F. Avignone III, C. Baktash, W. Barker, F. Calaprice, R. Dunford, W. Haxton, *et al.*, "Search for axions from the 1115-keV transition of Cu 65," *Physical Review D*, vol. 37, p. 618, 1988.
- [25] D. O. Caldwell, "Review of double beta decay experiments," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 4, pp. 1851-1869, 1989.
- [26] A. Morales, "Double beta decays: theory and experiments," *Proceedings TAUP*, vol. 89, p. 97, 1989.
- [27] T. Tomoda, "Double beta decay," *Reports on Progress in Physics*, vol. 54, p. 53, 1991.
- [28] E. Warburton and D. Millener, "Structure of C 17 and N 17," *Physical Review C*, vol. 39, p. 1120, 1989.
- [29] J. Elliot and A. White, "An isospin invariant form of the interacting boson model," *Physics Letters B*, vol. 97, pp. 169-172, 1980.
- [30] P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem*: Springer Science & Business Media, 2004.
- [31] H. Klapdor and K. Grotz, "Calculation of double beta decay of  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{128,130}\text{Te}$ ," *Physics Letters B*, vol. 142, pp. 323-328, 1984.
- [32] J. A. Halbleib and R. A. Sorensen, "Gamow-Teller beta decay in heavy spherical nuclei and the unlike particle-hole rpa," *Nuclear Physics A*, vol. 98, pp. 542-568, 1967.
- [33] J. Suhonen, "Calculation of the beta and beta beta decay observables of  $^{48}\text{Ca}$  using QRPA with and without particle-number projection," *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 19, p. 139, 1993.
- [34] J. Kotila, J. Barea, and F. Iachello, "Neutrinoless double-electron capture," *Physical Review C*, vol. 89, p. 064319, 2014.
- [35] J. Kotila and F. Iachello, "Phase-space factors for double- $\beta$  decay," *Physical*

*Review C*, vol. 85, p. 034316, 2012.



## **Abstract**

One of the available double beta decay is  $2\nu\beta\beta$  that neutrino has an important role and the other double beta decay is  $0\nu\beta\beta$ . In this thesis, to study the role of neutrino in double beta decay. so that the introduction of decay rules is discussed then double beta decay is studied in both historically and in terms of nuclear and particles structure. In the next section, the methods of double beta decay including shell model, IBM, QRPA, OXBASH computational code used in calculating the transition matrix element are reviewed. Finally, the results of calculations using the described methods and OXBASH computational code are obtained; Thus, the results of experimental tests comparison indicate the efficient OXBASH computational code.

Keywords: OXBASH code, double beta decay, neutrinos, IBM, QRPA



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics**

**MSc Thesis in Nuclear Physics**

**Study of the role of neutrinos in double beta decay nuclei  $^{134}\text{Xe}$**

By: Mohammad Mohseni Dafrazi

Supervisor:

Dr Mohammad Reza Shojaei

September 2016