دانشکده فیزیک

گروه فیزیک هسته‌ای

عنوان:

محاسبهء واپاشی‌های ایزوتوپ‌های کربن به‌وسیله واکنش‌های هسته‌ای با پتانسیل برهم‌کنشی مناسب (وودز-ساکسون، یوکاوا و ...)

دانشجو:

میثم مددی

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ۹۵

پیوست شماره 2

دانشکده : فیزیک

گروه : هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای میثم مددی به شماره دانشجویی:9106804

تحت عنوان: محاسبه واپاشی‌های ایزوتوپ‌های کربن به‌وسیله واکنش‌های هسته‌ای با پتانسیل برهمکنشی مناسب(وودز-ساکسون، یوکاوا و ...)

در تاریخ 1395/02/29 توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر علی اکبر رجبی		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی		نام و نام خانوادگی : دکتر مصطفی عنابستانی	
نام و نام خانوادگی : دکتر نسرین صالحی			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به همسرم که در این مدت در کنارم بود...

تقدیم به خانواده‌ام که سالیان سال دوری را تحمل کردند...

تشکر از زحمات همه...

اول جناب آقای دکتر رجبی که ما جوان‌ها را باور دارد و همیشه محکم و پر امید صدایمان می‌کند...

دوم دوستان خوبم که دلگرمی من هستند...

سوم از همه اساتیدم که لحظه‌ای فراموششان نمی‌کنم...

و تشکر ویژه از خدای متعال که توان دانش اندوزی را به من داد...

چکیده

از بین ایزوتوپ‌های کربن، برای محاسبات، کربن-۱۴ را انتخاب کردیم و دلیل آن هم، وجود مقادیر زیاد آن در پیرامون‌مان بود. سپس، ابتدا از روش ابر تقارن، تابع موج‌های مورد نیاز مسئله را به دست آوردیم و دیدیم که این ایزوتوپ از کانال واپاشی بتازا، به حالت‌های دیگر گذار می‌کند به همین علت، به سراغ واپاشی بتازا رفتیم و با بررسی قواعد حاکم بر آن، روابط مورد نیاز را استخراج کردیم و با وارد کردن توابع موج به دست آمده از روش ابر تقارن، در نظریه فرمی در مورد واپاشی بتازا، نتایجی را که می‌خواستیم به دست آوردیم.

واژه‌های کلیدی: ابر تقارن، واپاشی بتازا، نظریه فرمی

لیست مقالات استخراج شده

۱- میثم مددی، علی اکبر رجبی، محدثه گلشنیان " **تعیین نوع واپاشی بتایی کربن-۱۴ به روش ابر تقارن با پتانسیل وودز-ساکسون**" دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در ریاضی و فیزیک، بهمن ماه ۹۳، تهران، ایران

فهرست مطالب:

فصل اول مفاهیم

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ فرمیون‌ها و بوزون‌ها ۲

۱-۳ تصویر فیزیکدانان ذرات از طبیعت ۳

۱-۴ لپتون‌ها ۵

۱-۵ ویژگی‌های پروتون و نوترون ۷

۱-۶ خواص هسته‌ها ۹

۱-۷ ویژگی‌های استاتیکی هسته ۱۰

۱-۷-۱ انرژی بستگی ۱۰

۱-۷-۲ شعاع ۱۱

۱-۷-۳ اسپین ۱۲

۱-۷-۴ پاریته ۱۲

۱-۷-۵ ایزو اسپین ۱۳

۱-۸ مدل‌های هسته‌ای ۱۳

۱-۸-۱ مدل پوسته‌ای ۱۴

۱-۸-۲ پتانسیل مدل پوسته‌ای ۱۸

۱-۹ پتانسیل‌های هسته‌ای ۲۲

۱-۹-۱ پتانسیل وودز-ساکسون ۲۲

۱-۹-۲ پتانسیل یوکاوا ۲۳

۱-۹-۴ پتانسیل هلمن ۲۴

فصل دوم ابر تقارن

۲-۱ مقدمه ۲۸

۲-۲ جبر تقارن ۳۰

۲-۲-۱ جبر گراسمن ۳۰

۲-۳ مکانیک کوانتومی ابر تقارن ۳۳

۲-۳-۱ لاگرانژین کلاسیکی ۳۳

۲-۴ روش‌های رایانه‌ای و عددی ۴۲

۲-۴-۱ حل معادلات به روش Runge-Kutta ۴۲

فصل سوم واپاشی بتازا

۳-۱ مقدمه ۴۸

۳-۲ قانون واپاشی رادیو اکتیو ۴۸

۳-۳ انواع واپاشی‌ها و نسبت انشعاب ۵۱

۳-۳-۱ عنصر ماتریس‌گذار ۵۲

۳-۳-۲ احتمال گذار در نظریه اختلال وابسته به زمان ۵۴

۳-۴ برهم کنش‌های ضعیف و انواع آن ۵۷

۳-۳-۲ عملگرهای فرمی و گاموف – تلر ۶۹

۳-۵-۱ محاسبهٔ مقدار Q برای واپاشی β ۷۱

۳-۵-۲ آهنگ گذار واپاشی β ۷۲

۳-۵-۳ عناصر ماتریس گذار هسته‌ای ۷۴

۳-۵-۴ چگالی حالت‌های نهایی ۷۶

۳-۵-۵ احتمال گذار کل ۷۹
۳-۵-۶ واپاشی مجاز β ۸۱
۳-۵-۷ واپاشی ابر مجاز β ۸۳
۳-۵-۸ واپاشی ممنوع β ۸۴
۳-۶ معرفی کربن ۸۶
۳-۶-۲ شکل‌ها ۸۸
۳-۶-۳ تولید کربن ۸۸
۳-۶-۴ کاربردها ۸۸
فصل چهارم تعیین گذار ایزوتوپ‌های کربن
۴-۱ مقدمه ۹۲
۴-۲ حل معادله شرودینگر برای کربن-۱۴ با پتانسیل وودز-ساکسون ۹۳
۴-۳ حل معادله شرودینگر برای کربن-۱۴ با پتانسیل IQY ۹۸
۴-۴ حل معادله شرودینگر برای کربن-۱۴ با پتانسیل یوکاوا ۱۰۱
۴-۵ تعیین نوع یا محاسبهء واپاشی ۱۰۳
۴-۶ نتیجه‌گیری ۱۰۵

جداول:

جدول ۱-۱ گونه‌های میدان برهم‌کنشی ۴
جدول ۱-۲ لپتون‌های شناخته شده ۵
جدول (۳-۱) مقادیر نوعی $\log ft$ برای واپاشی β هسته‌ای ۸۶
جدول ۴-۱ مقایسه نتایج محاسبات ما و داده‌های تجربی ۱۰۶

اشکال:

شکل ۱-۱ سطح مقطع کل فوتون برای تولید هادرون در پروتون‌ها ۸
شکل ۱-۲ انرژی بستگی هر نوکلئون در هسته ۱۱
شکل ۱-۳ تغییرات شعاع اتمی (در شکل بالا) و انرژی یونش عناصر (در شکل پایین) ۱۵
شکل ۱-۴ انرژی جدایی دو پروتونی (نمودار بالا) و انرژی جدایی دو نوترونی نمودار پایین ۱۷
شکل ۱-۵ ساختار پوسته‌ای حاصل از پتانسیل‌های نوسانگر هماهنگ و چاه نامتناهی ۱۹
شکل ۱-۶ شکل واقع بینانه پتانسیل در مدل پوسته‌ای ۲۰
شکل ۱-۷ ترازهای انرژی حاصل از پتانسیل وودز-ساکسون ۲۱
شکل ۱-۸ پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از r ۲۳
شکل(۳-۱) انواع مختلف فرایندهای واپاشی در هسته $As^{۸۹۲۲۶}$ ۳۸ ..... ۵۲
شکل(۳-۲) نمودار واپاشی بتا۳۸ ..... ۵۹
شکل(۳-۳) برهمکنش‌های ضعیف جریان خنثی به واسطه مبادله $Z^{۰}$ صورت می‌گیرد۳۹ ..... ۶۰
شکل(۳-۴) واپاشی ضعیف کوارک‌ها۳۸ ..... ۶۲
شکل(۳-۵) نمودار واپاشی کبالت-۶۰ به نیکل-۶۰ ۳۸ ..... ۶۴
شکل(۳-۶) آزمایش‌های هسته‌های کبالت-۶۰ در آینه‌های C و P و CP ۳۶ ..... ۶۸
شکل(۳-۷) طرحی از یک نمودار کوری ۷۸
شکل(۳-۸) نمودار انتگرال فرمی۳۸ ..... ۷۹
شکل(۳-۹) توزیع تجربی $logft$ برای انواع مختلف واپاشی‌های بتا۳۸ ..... ۸۰

فصل اول

مفاهیم

۱-۱ مقدمه

تاکنون بیش از ۱۰۰ عنصر شناخته شده اند، که با توجه به بار الکتریکی Ze هسته اتم، از هم تمیز داده می‌شوند. این بار برابر با بار تعداد Z الکترون است که در مجموع به همراه بار هسته، اتم را خنثی می‌سازند. عناصر به وسیله جرمشان، که بیش از ۹۹٪ آن در هسته است، نیز شناخته می‌شوند. آیا هسته‌ها ویژگی‌های مشخصه دیگری هم دارند؟ آیا هسته‌ها از زمان آغاز وجود داشته‌اند؟ آیا در جهان عناصری هستند که در زمین وجود نداشته باشند؟ چه اصول فیزیکی بر ویژگی‌های هسته حکم‌فرما می‌باشند؟ چرا جرم هسته بستگی نزدیکی با بار الکتریکی آن دارد؟ چرا برخی هسته‌ها پرتوزا هستند؟ در حرفه پزشکی از خاصیت پرتوزایی به سود بشریت استفاده می‌شود. در تولید برق از شکافت هسته‌ای استفاده می‌شود. اما استفاده بشر از فیزیک هسته‌ای در سلاح هسته‌ای نیز نمود دارد.

اگر بخواهیم داوری آگاهانه‌ای درباره سود و زیان هسته‌ای بکنیم، باید این مفاهیم را درک کنیم. پس از کشف نوترون توسط چادویک در سال ۱۹۳۲، پذیرفته شد که هسته‌ای با عدد اتمی Z متشکل از Z پروتون و N نوترون است. تصور می‌شد که پروتون و نوترون ذرات بنیادی هستند، اما امروزه مشخص شده که این‌گونه نیست بلکه آن‌ها خود از اجزاء کوچکتری ساخته شده‌اند.

۱-۲ فرمیون‌ها و بوزون‌ها

ذرات بنیادی به دو دسته فرمیون‌ها و بوزون‌ها تقسیم می‌شوند. فرمیون‌ها ذراتی هستند که از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند: اگر مجموعه‌ای از فرمیون‌های یکسان بر حسب توابع موج تک ذره‌ای بیان شوند هیچ دو فرمیونی نمی‌تواند تابع موج یکسانی داشته باشد. به‌طور مثال الکترون‌ها فرمیون‌اند. این قانون ساختار اتم‌ها را توضیح می‌دهد و در نتیجه، پیش زمینهء کل شیمی را تشکیل می‌دهد. فرمیون‌ها بدین دلیل که از آمار فرمی-دیراک در مکانیک آماری پیروی می‌کنند، به این نام خوانده می‌شوند.[۱]

بوزون‌ها ذراتی هستند که از آمار بوز-انیشتین پیروی می‌کنند، و با این ویژگی مشخص می‌شوند که هر تعداد از این ذرات می‌توانند تابع موج تک ذره‌ای یکسانی داشته باشند. بنابراین در مورد بوزون‌ها، امکان تشکیل امواج همدوس با دامنهء ماکروسکوپی وجود دارد، و چنین امواجی را می‌توان با تقریب خوبی به‌طور کلاسیکی، بیان کرد. به‌طور مثال، فوتون‌ها، بوزون هستند و میدان کلاسیک متناظر میدان الکترومغناطیس آشنای آن، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی است که در معادلات ماکسول صدق می‌کنند.

اگر بخواهیم بنیادی‌تر بحث کنیم، باید گفت: این ویژگی‌ها پیامد تقارن‌های ممکن تابع موج سیستمی از ذرات یکسان است که مختصات هر دوی آن در تبادل با یکدیگرند. در مورد فرمیون‌ها تابع موج تغییر علامت می‌دهد و به‌طور کامل نامتقارن است.

رابطهء مشهودی هم، بین اندازه حرکت مداری ذاتی، یا اسپین ذره و آمار آن وجود دارد. اسپین ذاتی S کوانتایی است و با عدد کوانتومی s مشخص می‌شود. برای فرمیون‌ها، مقدار s برابر یکی از مقادیر $\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}, \dots$ است و برای بوزون‌ها، مقدار s برابر یکی از مقادیر ۰,۱,۲, ... است. توضیح نظری این رابطه را می‌توان در چارچوب نظریه میدان کوانتومی نسبیتی داد.

۱-۳ تصویر فیزیکدانان ذرات از طبیعت

فیزیک ذرات بنیادی، جهان را براساس فرمیون‌های بنیادی توصیف می‌کند. فرمیون‌ها از طریق میدان‌هایی که خود سرچشمه آنند، با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند. ذرات مرتبط با این برهم‌کنش، همان بوزون‌ها هستند. مثال بسیار آشنا این موضوع، الکترون است که فرمیونی بنیادی است. الکترون حامل بار الکتریکی e بوده و این بار، میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌وجود می‌آورد، که نیرویی بر دیگر بارهای الکتریکی وارد می‌کنند.

میدان الکترومغناطیسی بر طبق قوانین مکانیک کوانتومی، کوانتیده است. در واقع، نخستین بار از آمار بوز-انیشتین باری فوتون‌ها استفاده شد.

در طبیعت چهارگونه از میدان‌های برهم‌کنشی را می‌توان تشخیص داد، مطابق جدول زیر:

جدول ۱-۱ گونه‌های میدان برهم‌کنشی

ردیف	میدان‌های برهم‌کنشی	بوزون	اسپین
۱	میدان گرانشی	گراویتون‌های فرضی	۲
۲	میدان ضعیف	ذرات Z و W^- و W^+	۱
۳	میدان الکترومغناطیسی	فوتون‌ها	۱
۴	میدان قوی	گلوئون‌های فرضی	۱

همه این برهم‌کنش‌ها وابسته به فیزیک هسته‌ای هستند، هر چند میدان گرانشی تنها در تودهء چگالی از ماده، مانند ستارگان اهمیت پیدا می‌کند. نیروهای گرانشی بر همه ذرات اثر می‌کنند. نیروهای گرانشی برای مقیاس‌های بزرگ فیزیک و اجسام ماکروسکوپی مهم‌اند. در مقیاس کوچک فیزیک هسته‌ای و فیزیک اتمی، اثر نیروهای گرانشی ناچیز است.

طبیعت، گوناگونی بیشتری از فرمیون‌های بنیادی، نسبت به بوزون‌ها، تدارک دیده است. مناسب است که فرمیون‌های بنیادی را به دو دسته تقسیم کنیم: یکی لپتون‌ها، که سرچشمه میدان‌های قوی نیستند و در برهم‌کنش‌های قوی سهمی ندارند، و دیگری کوارک‌ها، که در همه برهم‌کنش‌ها شرکت می‌کنند. الکترون نمونه‌ای از لپتون است. کوارک‌ها همواره در سیستم‌های مرکبی با محدودهء تقریبی یک فرمی محبوسند. به طور معمول برای سیستم‌های کوارکی از واژه هادرون استفاده می‌شود. پروتون‌ها و نوترون‌ها همانند مزون‌ها، هادرون هستند.

۱-۴ لپتون‌ها

لپتون‌ها، فرمیون‌هایی با اسپین $\frac{۱}{۲}$ هستند که از طریق برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی و ضعیف، و نه برهم‌کنش‌های قوی، برهم‌کنش می‌کنند. لپتون‌های شناخته شده در جدول زیر آورده شده‌اند:

جدول ۱-۲ لپتون‌های شناخته شده

	جرم $\left(\frac{MeV}{c^۲}\right)$	عمر میانگین(s)	بار
الکترون e^-	۰/۵۱۱۰	∞	-e
نوترینوی الکترون ν_e	$< ۱۵ \times ۱۰^{-۶}$	∞	۰
میون μ^-	۱۰۵/۶۵۸	$۲/۱۹۷ \times ۱۰^{-۶}$	-e
نوترینوی میون ν_μ	$< ۰/۱۷$	∞	۰
تاو τ^-	۱۷۷۷	۲۹۰×۱۰^{-۱۵}	-e
نوترینوی تاو ν_τ	$< ۱۸/۲$	∞	۰

همه الکترون‌های باردار الکتریکی، دارای گشتاور مغناطیسی به اندازه تقریباً $\left[\left(\text{جرم}\right)\left(\frac{e\hbar}{۲}\right)\right]$ هستند که در خلاف جهت اسپین می‌باشد.

از بین این لپتون‌های باردار تنها ذرهء نام آشنای الکترون پایدار است. الکترون ذرات بدون ساختاری هستند که با معادله موج نسبیتی دیراک توصیف می‌شوند. این معادله اسپین و گشتاور مغناطیسی الکترون را توضیح می‌دهد و این ویژگی جالب را دارد که وجود پادذرات را پیشگویی می‌کند. پادذرات: ذراتی با جرم و اسپین همانند ذرات هستند، ولی بار و گشتاور مغناطیسی آن‌ها در خلاف جهت ذرات است. پادذره الکترون را پوزیترون گویند. در سال ۱۹۳۲ آندرسون پوزیترون‌ها را به‌طور تجربی بلافاصله پس از پیشگویی نظری آن کشف کرد.

از آن‌جا که لپتون‌ها با میدان برهم‌کنشی قوی برهم‌کنش ندارند، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها از طریق میدان مغناطیسی برهم‌کنش می‌کنند. در نهایت پوزیترون با الکترون نابود خواهد شد و معمولاً دو یا سه فوتون به وجود می‌آورند، تا اینکه همه انرژی لپتون به شکل تابش الکترومغناطیسی در می‌آید. این فرآیند را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma \qquad (1\text{-}1)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow 3\gamma \qquad (1\text{-}2)$$

به علت پایستگی انرژی و اندازه حرکت، فرآیند نابودی نمی‌تواند همراه با تولید فقط یک فوتون باشد. امکان اینکه فوتون‌ها فرآیند معکوس یعنی تولید زوج را هم انجام دهند، وجود دارد. یک فوتون تنها هم می‌تواند تولید زوج بکند، مشروط بر اینکه ذره (باردار) دیگری حضور داشته باشد تا اندازه حرکت را با خود ببرد. الکترودینامیک کوانتومی، بر پایه معادلات دیراک و ماکسول، همه فرآیندهای مربوط به الکترون‌ها، پوزیترون‌ها و فوتون‌ها را با دقت بالایی توصیف می‌کند.

واقعیت شگفتی است که در طبیعت هم میون باردار الکتریکی و تاو باردار الکتریکی و هم پادذرات آن‌ها فراهم آمده است. صرف‌نظر از جرم و طول عمر محدودشان، میون‌ها و تاوها دقیقاً رونوشت‌هایی از الکترون به نظر می‌آیند و همانند الکترون با معادله دیراک توصیف می‌شوند. لپتون‌های باقی مانده عبارتند از: نوترینوها و پاد نوترینوهای متناظر آن‌ها. شواهد آزمایشگاهی (جدول ۱-۲) حاکی از آن است که جرم نوترینو در مقایسه با جرم لپتون باردار همزادش، بسیار اندک است. اگر جرم نوترینویی صفر باشد، که نیست، آنگاه مانند فوتون با سرعت نور حرکت می‌کرد. آزمایش کردن با نوترینوها بسیار مشکل و پرهزینه است، اما شواهد آزمایشگاهی بسیار جالب و قانع کننده‌ای وجود دارد که حاکی از آن است که الکترون، میون و تاو، دارای نوترینوهای متفاوت مربوط به خود هستند.

۱-۵ ویژگی‌های پروتون و نوترون

اکنون به سراغ هادرون‌ها می‌رویم، سیستم‌های مقید متشکل از کوارک‌ها، که همان‌گونه که از طریق برهم‌کنش‌های ضعیف و الکترومغناطیس با هم برهم‌کنش دارند، از طریق برهم‌کنش قوی نیز با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند.

نوکلئون‌ها، همانند لپتون‌ها، فرمیون‌اند و اسپین $\frac{۱}{۲}$ دارند. جرم نوترون ۰/۱۴ درصد بیش از پروتون است:

$$m_n = ۹۳۹/۵۶۶ \left(\frac{MeV}{c^۲}\right) \quad (۳-۱)$$

$$m_p = ۹۳۸/۲۷۲ \left(\frac{MeV}{c^۲}\right) \quad (۴-۱)$$

بنابراین تفاوت جرم آن‌ها $\left(\frac{MeV}{c^۲}\right)$ ۱/۲۹ می‌باشد. (تقریباً ۲ برابر جرم الکترون است)

نوترون بار الکتریکی خالص ندارد. بار پروتون مخالف بار الکترون است زیرا بار الکتریکی خالص اتم‌ها صفر است و پروتون‌ها سبب می‌شوند که بار الکترون‌ها را کاملاً خنثی سازند.

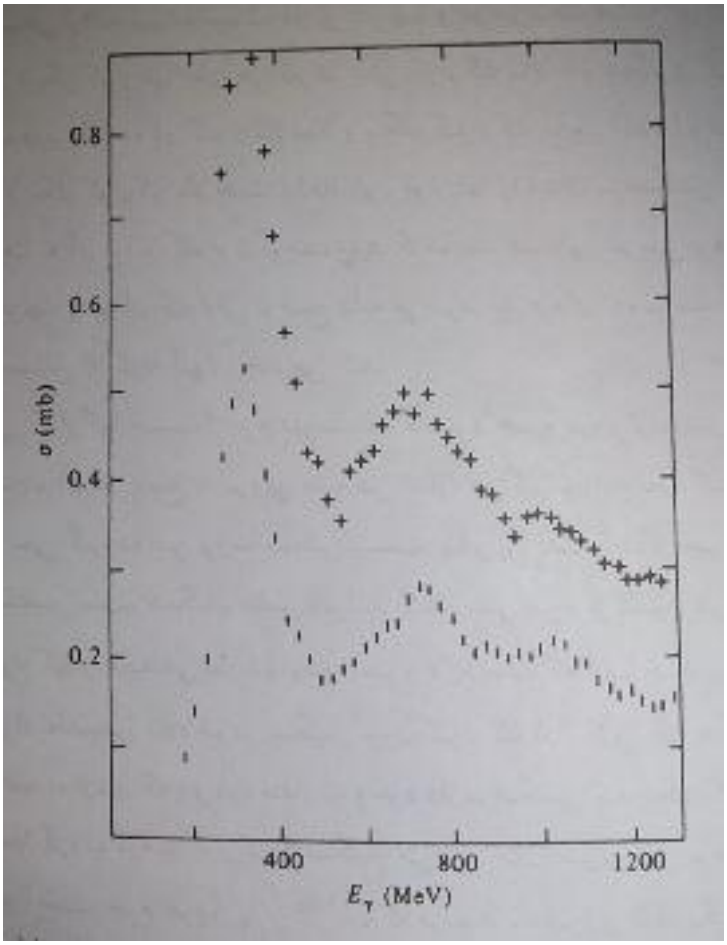
بار الکتریکی پروتون در یک نقطه تمرکز نیافته است بلکه به‌طور متقارن حول مرکز پروتون توزیع شده است. با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی شعاع میانگین این توزیع بار $R_p = ۰/۸(fm)$ به‌دست آمده است. هم‌چنین، توزیع بار گسترده‌ای برای نوترون یافت شده است، به‌طوری که بار مثبت در ناحیه مرکزی با بار منفی در فواصل دورتر خنثی می‌گردد. توزیع ماده نیز در نوکلئون‌ها به فاصله‌ای در حدود R_p گسترش می‌یابد.

هم پروتون و هم نوترون دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی هستند که با اسپین‌شان هم‌راستا می‌باشد:

$$\mu_p = ۲/۷۹۲۸۵ \left(\frac{e\hbar}{۲m_p}\right) \quad (۵-۱)$$

$$\mu_n = -۱/۹۱۳۰۴ \left(\frac{e\hbar}{۲m_p}\right) \qquad (۶-۱)$$

روشن است که هیچ یک از گشتاورهای مغناطیسی به مقدار $\left(\frac{e\hbar}{۲m_p}\right)$، که از معادله سادهء دیراک به‌دست می‌آید، مربوط نمی‌شوند. این موضوع اشاره‌ای صریح به این امر دارد که خود نوکلئون‌ها ذرات بنیادی نیستند. داده‌های شکل (۱-۱) گواهی بر این مدعا هستند که نوکلئون‌ها در حالت پایه سیستمی مرکب می‌باشند.



شکل ۱-۱ سطح مقطع کل فوتون برای تولید هادرون در پروتون‌ها

این شکل سطح مقطع درآشامش فوتون‌ها در پروتون‌ها و دوترون‌ها را به‌صورت تابعی از انرژی فوتون، حداکثر ۱۳۰۰ مگاالکترون ولت نشان می‌دهد. سطح مقطع‌ها ابتدا فزایش سریعی با انرژی دارند. وجود قله‌ها به سبب جذب فزایندهای در یک انرژی مشخص، برای ایجاد حالت برانگیخته صورت گرفته است. این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که انرژی فوتون‌ها با انرژی برانگیزش برابر باشد. شاید مثال آشناتر در مورد جذب فوتون‌ها در یک سیستم مرکب، درآشامش اتمی باشد. در سطح مقطع‌های درآشامش اتمی قله‌های مشابهی وجود دارد، که به‌جز در انرژی‌های چند الکترو ولتی، متناظر با انرژی برانگیزش اتم به حالت‌های بالاتر می‌باشند. قله‌های نوکلئون‌ها هم تفسیر مشابهی دارند، هر چند مقیاس انرژی بسیار متفاوت است. در سطح مقطع پروتون، نخستین قله در انرژی فوتون حدود ۲۹۴ مگاالکترون ولت رخ می‌دهد و متناظر با تشکیل حالتی موسوم به Δ^{+} است. این حالت فرمیونی با جرم در حدود ۱۲۳۲ مگاالکترون ولت و اسپین $\frac{۱}{۲}$ به دست آمده است.

داده‌ها حاکی از آنند که نوترون هم دارای رشته‌ای از حالت‌های برانگیخته با همان اسپین‌های پروتون و اغلب همان انرژی‌های پروتون است. انرژی‌های الکتریکی مربوط به توزیع بارهای پروتون و نوترون از مرتبه بزرگی تقریباً ۲ مگاالکترون ولت می‌باشد، که در مقایسه با انرژی جرم سکون نوکلئون و انرژی‌های برانگیزش ناچیز است.

۱-۶ خواص هسته‌ها

هسته هم مانند بسیاری از سیستم‌های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرارآمیز است که توصیف رفتار و خواص آن خیلی دشوارتر از اجسام ماکروسکوپی است. مثلاً توصیف کامل یک هسته میان-وزن ۵۰ نوکلئونی، بر حسب کلیه برهم‌کنش‌های بین نوکلئون‌های موجود در هسته، مستلزم تعداد ۵۰ عبارت یا در حدود $۱۰^{۶۴}$ جمله است![۲] بنابراین ما باید رهیافت متفاوتی در پیش بگیریم و سعی کنیم که مشخصات کلی هر سیستم هسته‌ای را به عنوان یک واحد جداگانه شناسایی

کنیم. اکنون باید پرسید که آیا خواصی فیزیکی سراغ داریم که با استفاده از آنها بتوانیم توصیف کاملی از هر هسته ارائه دهیم؟

هسته‌ها را به کمک تعدادی از پارامترهای هسته‌ای تا حد قابل توجهی می‌توان توصیف کرد[۳]. این پارامترها عبارتند از[۴]: بار الکتریکی، شعاع، جرم، انرژی بستگی، پاریته، گشتاور دو قطبی مغناطیسی، ایزو اسپین، گشتاور چار قطبی الکتریکی. این‌ها خواص استاتیکی هسته‌ها[۵] هستند. احتمال واپاشی[۶] و احتمال واکنش هسته‌ها خواص دینامیکی هسته‌ها می‌باشند. درک خواص استاتیکی و دینامیکی و تفسیر آنها بر پایه برهم‌کنش بین تک تک نوکلئون‌های موجود در هسته، وظیفه‌ای بس خطیر است که هر متخصص فیزیک هسته‌ای باید با آن دست و پنجه نرم کند.

۱-۷ ویژگی‌های استاتیکی هسته

ویژگی‌های هسته را که مقدار آن با گذشت زمان تغییر نمی‌کند و ثابت است، ویژگی‌های استاتیکی هسته می‌گویند. این ویژگی‌ها عبارتند از: ۱-انرژی بستگی ۲-شعاع ۳-اسپین ۴-پاریته ۵-ایزو اسپین ۶-جرم ۷-گشتاور دو قطبی مغناطیسی ۸-گشتاور چارقطبی الکتریکی.

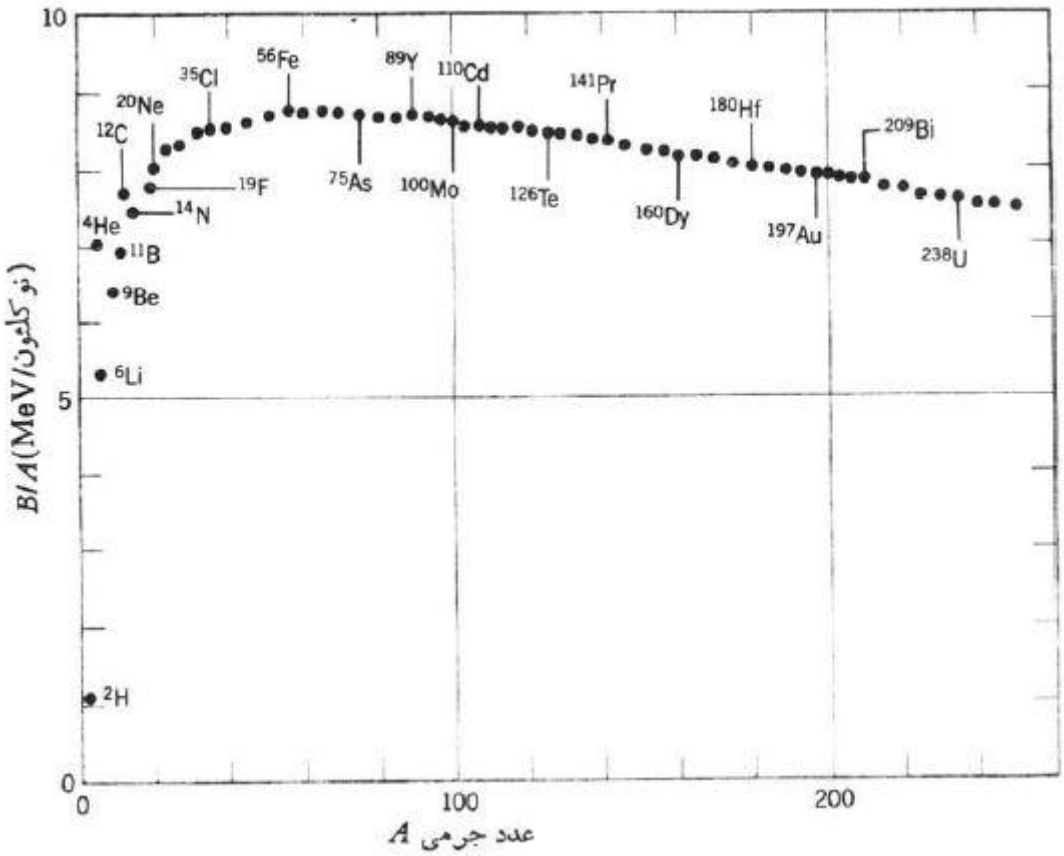
۱-۷-۱ انرژی بستگی

انرژی بستگی[۷] یک هسته اختلاف بین جرم هسته‌ها و مجموع جرم اجزای تشکیل دهنده آن می‌باشد:

$$B(A,Z)=Nm_n c^2+Zm_p c^2-m(A,Z)c^2 \qquad (۷-۱)$$

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون با عبارت $\frac{B}{A}$ بیان می‌شود که خود تابعی از A می‌باشد. همانگونه که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است مقدار $\frac{B}{A}$ با افزایش A در هسته‌های سبک افزایش می‌یابد و به یک پهن شدگی می‌رسد و پس از آن به آرامی به عنوان تابعی از A کاهش می‌یابد.[۸]

با توجه به شکل متوجه می‌شویم که با همجوشی هسته‌های سبک یا با شکافت هسته‌های سنگین انرژی آزاد می‌شود.



شکل ۱-۲ انرژی بستگی هر نوکلئون در هسته

۱-۷-۲ شعاع

با وجود این‌که اثرات کوانتومی درون هسته بسیار زیاد است ولی می‌توان نشان داد که حجم v هسته با تقریب خوبی با عدد جرمی A متناسب است و هر نوکلئون حجمی در حدود $v_0=0.72fm^3$ را اشغال می‌کند. در تقریب اول هستهء پایدار، کروی است و حجمی در حدود Av_0 را اشغال می‌کند که در آن شعاع هسته از رابطه زیر به دست می‌آید:[۹]

$$R=r_0A^{\frac{1}{3}} \qquad (۸-۱)$$

که در آن $r_0=1/2(fm)$ می‌باشد.

۱-۷-۳ اسپین

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر به فرد I مشخص می‌کنند که نمایان‌گر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون‌های هسته می‌باشد. بردار I را می‌توان به صورت حاصل جمع مولفه‌های مداری و ذاتی تکانه زاویه‌ای در نظر گرفت:

$$\vec{I}=\sum_{i=1}^{A}(\vec{L}_i+\vec{S}_i)=\vec{L}+\vec{S}=\sum_{i=1}^{A}\vec{J}_i \qquad (9\text{-}1)$$

و هم‌چنین عدد کوانتومی I رابطهء ساده‌ای با بردار $\vec{I}$ دارد:

$$|\vec{I}|=\sqrt{I(I+1)}\hbar \qquad (10\text{-}1)$$

تنها علت اینکه در رابطه (۱-۹) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف‌نظر شده است می‌تواند این باشد که برهم‌کنشی که هسته تحت تاثیر آن است مانند میدان‌های الکترومغناطیسی ایستا به اندازه کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت شدگی نوکلئون‌ها را بشکند.

۱-۷-۴ پاریته

برای مشخص کردن حالت‌های هسته، علاوه بر اسپین هسته از پاریته نیز استفاده می‌شود. پاریته می‌تواند دارای مقادیر مثبت (زوج) یا منفی (فرد) باشد.[۱۰] اگر تابع موج تک تک نوکلئون‌های موجود در هسته را می‌شناختیم، از حاصل‌ضرب پاریته‌های تمامی A نوکلئون می‌توانستیم پاریته هسته را به صورت π مثبت یا منفی به دست آوریم. اما در عمل استفاده از چنین

روشی امکان‌پذیر نیست زیرا عموماً نمی‌توانیم به هر نوکلئون هسته تابع موجی با پاریته‌ی معلوم نسبت دهیم. پس پاریته π را هم، مانند اسپین، به صورت یک خاصیت جمعی کل هسته در نظر می‌گیریم. پاریته کل هسته را با استفاده از روش‌های گوناگون واپاشی و واکنش‌های هسته‌ای می‌توانیم مستقیماً اندازه گیری کنیم. پاریته هسته را به صورت شاخص بالای اسپین هسته و با علامت +یا – نشان می‌دهیم و می‌نویسیم I^{π}. برای نمونه می‌نویسیم $0^+, 2^-, \left(\frac{1}{2}\right)^-, \left(\frac{5}{2}\right)^+, \ldots$ که این‌ها اسپین پاریته‌های هسته‌های مختلف هستند. هیچ‌گونه رابطه نظری مستقیمی بین I و π وجود ندارد و در نتیجه برای هر مقداری از اسپین، علامت پاریته می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

۱-۷-۵ ایزو اسپین

استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزو اسپین[۱۱] می‌شود. در سال ۱۹۳۲ هایزنبرگ، پروتون و نوترون را به عنوان دو حالت از یک ذره، نوکلئون، در نظر گرفت. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزو اسپینی تعریف می‌شود به طوری که دو حالت یک ذره معمولی با اسپین $\frac{1}{2}$ نه به عنوان دو ذره، بلکه به صورت دو حالت از یک ذره تلقی می‌شود. بدین ترتیب پروتون به صورت حالت بالا و نوترون به صورت حالت پایین نوکلئون در نظر گرفته می‌شود. این وضعیت را به صورت یک کمیت جدید، به نام ایزو اسپین (T) معرفی می‌کنند. نوکلئونی که دارای ایزو اسپین $\frac{1}{2}$ است، تعداد $2I+1=2$ سمت‌گیری ممکن در فضای ایزو اسپینی دارد. بنابراین به هر دو نوکلئون، ایزو اسپین $\frac{1}{2}$ نسبت می‌دهیم که پروتون تصویر $T_z=\frac{1}{2}$ و نوترون تصویر $T_z=-\frac{1}{2}$ آن است.

۱-۸ مدل‌های هسته‌ای

برای بررسی هسته‌ها، عمدتاً یک نظریه فوق‌العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد، انتخاب می‌کنیم. اگر این نظریه در توصیف حداقل چند خاصیت هسته‌ای

نسبتاً موفق باشد، آنگاه با افزودن جمله‌های اضافی آن را تکمیل می‌کنیم. بدین ترتیب، معیار موفقیت هر مدلی را باید در دو نکته دانست:

۱. مدل باید بتواند خواص هسته‌ای تا کنون اندازه‌گیری شده را به‌طور قابل قبولی توضیح دهد.

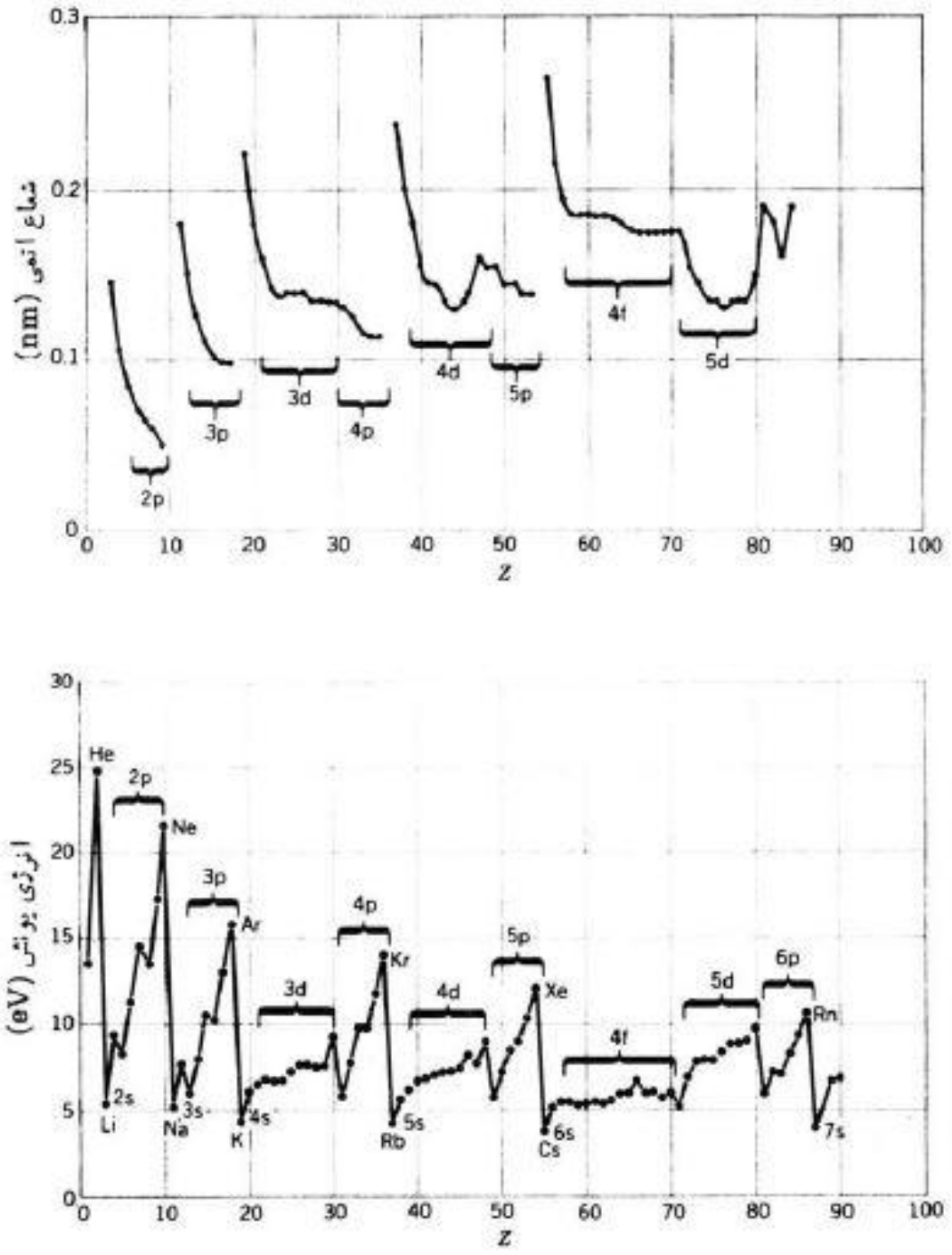
۲. مدل باید خواص دیگری را پیش‌بینی کند که در آزمایش‌های جدیدی قابل اندازه گیری باشد.

مدل‌های متعددی جهت توضیح خواص و واکنش‌های هسته‌ای پیشنهاد شده‌اند. از آن‌جا که هیچکدام از این مدل‌ها برای توضیح کل مشاهدات تجربی به‌طور کامل رضایت بخش نیستند، مدل‌های مختلفی برای تفسیر پدیده‌های گوناگون هسته‌ای بکار می‌روند. از جمله مفیدترین مدل‌ها در مورد ساختمان هسته‌ای عبارتند از مدل پوسته‌ای، مدل قطره مایع، مدل جمعی، مدل اپتیکی. ما در ادامه به توضیح مفصل مدل پوسته‌ای می‌پردازیم.

۱-۸-۱ مدل پوسته‌ای

نظریهء اتمی با استفاده از مدل پوسته‌ای[۱۲] توانسته است به‌طور کاملاً روشن جزئیات پیچیده ساختار اتم‌ها را توضیح دهد. به همین دلیل متخصصان فیزیک هسته‌ای، به امید آن‌که بتوانند به توصیف روشنی از خواص هسته‌ها دست یابند، سعی کردند در بررسی ساختار هسته‌ای از نظریهء مشابهی استفاده کنند. در مدل پوسته‌ای اتم‌ها، پوسته‌ها را با الکترون‌هایی که انرژی‌شان به ترتیب افزایش می‌یابد پر کنیم و این آرایش الکترونی به گونه‌ای است که اصل طرد پائولی در آن رعایت می‌شود. بدین ترتیب، هر اتمی متشکل از یک ناحیه مرکزی خنثی که پوسته‌های پر دارد و چند الکترون ظرفیت که در پوسته‌ای خارج از این ناحیه مرکزی قرار می‌گیرند. در این مدل، فرض بر این است که عمدتاً همین الکترون‌های ظرفیت هستند که خواص اتم‌ها را تعیین می‌کنند. هنگامی که پیش‌بینی‌های این مدل را با بعضی از خواص اندازه‌گیری شده سیستم‌های اتمی مقایسه می‌کنیم، آن‌ها را به‌خوبی با هم سازگار می‌یابیم. به‌ویژه مشاهده می‌کنیم که تغییرات خواص اتمی در محدوده هر زیر پوسته تدریجی و کم است، در حالی که وقتی از یک زیرپوسته به زیرپوسته دیگر می‌رویم

تغییرات خواص، ناگهانی و زیاد است. اثرات تغییر زیرپوسته را بر شعاع یون‌ها و انرژی یونش عناصر در شکل (۱-۳) نشان داده شده است.

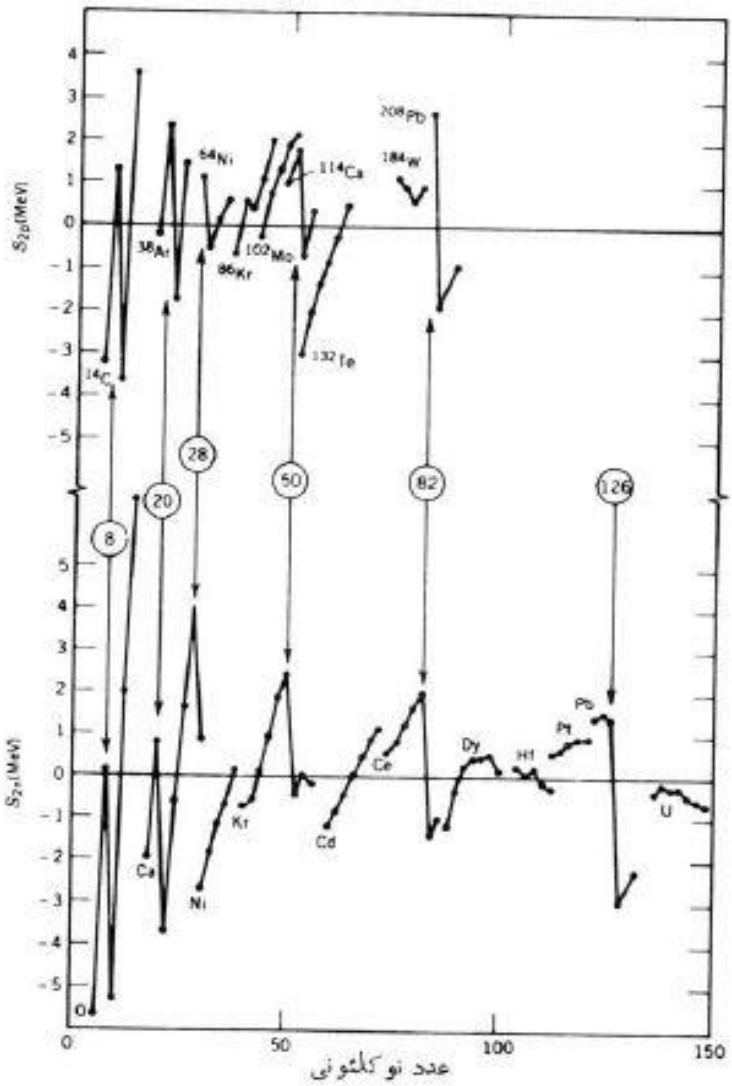


شکل ۱-۳ تغییرات شعاع اتمی (در شکل بالا) و انرژی یونش عناصر (در شکل پایین)

هنگامی که سعی می‌کنیم تا این مدل را به قلمرو هسته‌ای هم گسترش دهیم، از همان آغاز کار با چند مانع روبرو می‌شویم. در مورد اتم‌ها، پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تامین می‌کند، یعنی یک عامل خارجی زیرپوسته‌ها یا مدارها را سازمان می‌دهد. در این حالت، معادلهء شرودینگر را با همین پتانسیل می‌توان حل کرد و انرژی زیرپوسته‌هایی را که الکترون باید در آن‌ها قرار گیرد، محاسبه کرد. اما در مورد هسته هیچ عامل خارجیی وجود ندارد، و نوکلئون‌ها در پتانسیلی که خودشان به وجود می‌آورند در حرکت‌اند.

یکی دیگر از جنبه‌های جالب توجه نظریه پوسته‌ای اتم‌ها وجود مدارهای فضایی است. خواص اتم‌ها را اغلب بر حسب مدارهای فضایی الکترون‌ها توصیف می‌کنیم. الکترون‌ها می‌توانند نسبتاً آزادانه در این مدارها حرکت کنند، بدون اینکه برخوردی با الکترون‌های دیگر داشته باشند. قطر نوکلئون‌ها در مقایسه با هسته نسبتاً بزرگ است. در حالی که هر نوکلئون منفرد در خلال حرکتش در هر مدار می‌تواند برخورهای متعددی با نوکلئون‌های دیگر داشته باشد، چگونه می‌توان نوکلئون‌ها را در مدارهای کاملاً مشخص در حرکت تصور کرد؟

در آغاز شواهد تجربی وجود پوسته‌های هسته‌ای را از نظر می‌گذرانیم. در شکل (۱-۴)، مقادیر اندازه‌گیری شده انرژی جدایی پروتون و نوترون را به صورت انحراف از مقادیر پیش‌بینی شده توسط فرمول نیمه تجربی جرم نشان داده‌ایم. شباهت این شکل و شکل (۱-۳) چشمگیر است: انرژی جدایی، مانند انرژی یونش در اتم‌ها، به استثنای افت سریع در مقابل بعضی از اعداد پروتونی و نوترونی یکسان، به‌تدریج با افزایش N یا Z افزایش می‌یابد. توجه به این نکته ما را به این حدس می‌رساند که شاید ناپیوستگی‌های تیز انرژی جدایی با پر شدن پوسته‌های اصلی ارتباط داشته است. طرز رفتار ناگهانی و ناپیوسته هسته‌ها در مقابل اعداد پروتونی و نوترونیی که دیدیم اتفاق می‌افتد. این اعداد پروتونی یا نوترونی که Z یا N آن‌ها برابر ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ است و معرف اثرات پوسته‌های اصلی پر شده هستند را "اعداد جادویی" می‌گویند.[۱۳]



شکل ۱-۴ انرژی جدایی دو پروتونی (نمودار بالا) و انرژی جدایی دو نوترونی نمودار پایین

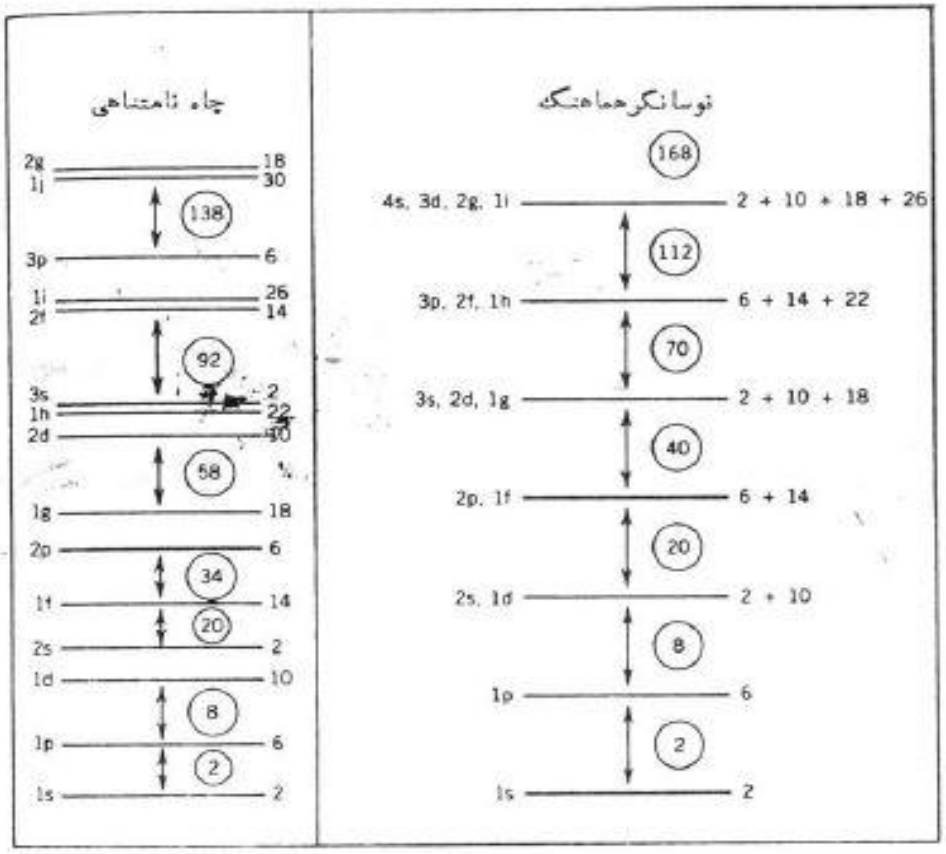
در مدل پوسته‌ای، مسئله پتانسیل هسته‌ای را با این فرض بنیادی حل می‌کنیم: حرکت هر نوکلئون منفرد را تحت تاثیر پتانسیل واحدی که نوکلئون‌های دیگری همه در تولید آن شرکت دارند، در نظر می‌گیریم. اگر هر یک از نوکلئون‌ها را به این نحو مورد بررسی قرار دهیم، آنگاه برای تمامی نوکلئون‌های موجود در هسته می‌توانیم ترازهای انرژی متناظر به زیر پوسته‌ها را به‌دست آوریم.

وجود مدارهای فضایی مشخص را اصل پاولی تعیین می‌کند. فرض می‌کنیم که در یک هسته سنگین، تقریباً در ته چاه پتانسیل، برخوردی بین دو نوکلئون صورت می‌گیرد و نوکلئون‌ها هنگام برخورد با هم

انرژی مبادله می‌کنند، اما اگر تمامی ترازهای انرژی تا تراز نوکلئون‌های ظرفیت پر شده باشد، هیچ راهی برای کسب انرژی نوکلئون نمی‌ماند مگر آن‌که مقدار انرژی به اندازه‌ای کافی باشد که نوکلئون را تراز ظرفیت برساند. سایر ترازهای نزدیک‌تر به تراز اولیه نوکلئون همگی پر هستند و نمی‌توانند یک نوکلئون اضافی را بپذیرند. انرژی لازم برای این انتقال که از ترازی نزدیک به تراز پایه به نوار ظرفیت انجام می‌شود، بیشتر از مقداری است که معمولاً در برخورد بین دو نوکلئون از یکی ار آن‌ها به دیگری منقل می‌شود. از این رو، چنین برخوردی بین نوکلئون‌ها نمی‌تواند صورت گیرد و گویی نوکلئون‌ها در حرکت مداری‌اشان با هیچ ممانعتی از طرف نوکلئون‌های درون هسته روبه‌رو نمی‌شوند!

۱-۸-۲ پتانسیل مدل پوسته‌ای

نخستین گام در ارائه مدل پوسته‌ای، انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب است. در آغاز دو نوع پتانسیل چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ را در نظر می‌گیریم. ترازهای انرژی حاصل را در شکل (۱-۵) نشان داده‌ایم.[۱۳] واگنی هر تراز را تعداد نوکلئون‌هایی که می‌توانند در آن قرار بگیرند تعیین می‌کند. به عبارت دیگر، واگنی هر تراز برابر ۲(۲l+۱) می‌شود که در آن عامل ۲l+۱ از طریق واگنی m_l و عامل ۲ از طریق واگنی m_s حاصل شده است. برای نام‌گذاری این ترازها، مثل مورد فیزیک اتمی، از نمادهای طیف نمودی استفاده می‌کنیم. اما این نمادگذاری از یک نظر با فیزیک اتمی تفاوت دارد. در اینجا n عدد کوانتومی اصلی نیست، بلکه صرفاً شماره تراز مربوط به l مشخص می‌کند. ظهور اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰ در هر دو نوع پتانسیل دل‌گرم کننده است، ولی در ترازهای انرژی بالاتر هیچ‌گونه ارتباطی با اعداد جادویی تجربی به چشم نمی‌خورد.

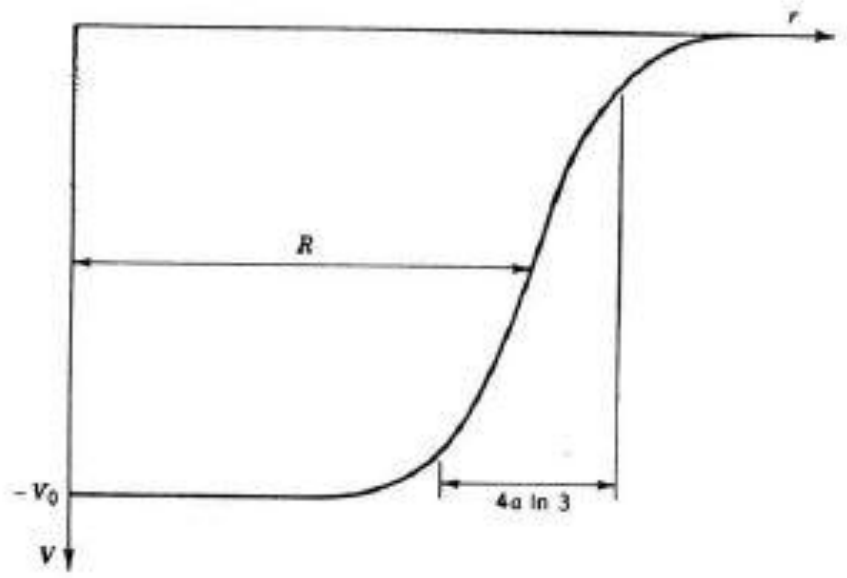


شکل ۱-۵ ساختار پوسته‌ای حاصل از پتانسیل‌های نوسانگر هماهنگ و چاه نامتناهی

به عنوان اولین گام در اصلاح مدل، سعی می‌کنیم پتانسیل واقع بینانه‌تری را انتخاب کنیم. چاه نامتناهی تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیست: برای جدا کردن یک نوترون یا یک پروتون از هسته، با صرف انرژی کافی باید بتوانیم آن را از چاه خارج کنیم. در این‌صورت، عمق چاه نمی‌تواند بی‌نهایت باشد! به‌علاوه، لبهء پتانسیل هسته‌ای نباید تیز باشد بلکه باید مثل توزیع بار و جرم هسته‌ای، مقدار پتانسیل بعد از شعاع میانگین R باید به آهستگی به سوی صفر میل کند. از طرف دیگرف پتانسیل نوسانگر هماهنگ هم لبه‌اش به قدر کافی تیز نیست و انرژی جدایی آن نیز بی‌نهایت می‌شود. از این رو شکل واقع بینانه پتانسیل[۱۴] را به‌صورت بینابینی به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$V(r)=\frac{-V_{\cdot}}{1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \qquad (۱۱-۱)$$

که منحنی نمایش آن در شکل (۱-۶) رسم شده است.



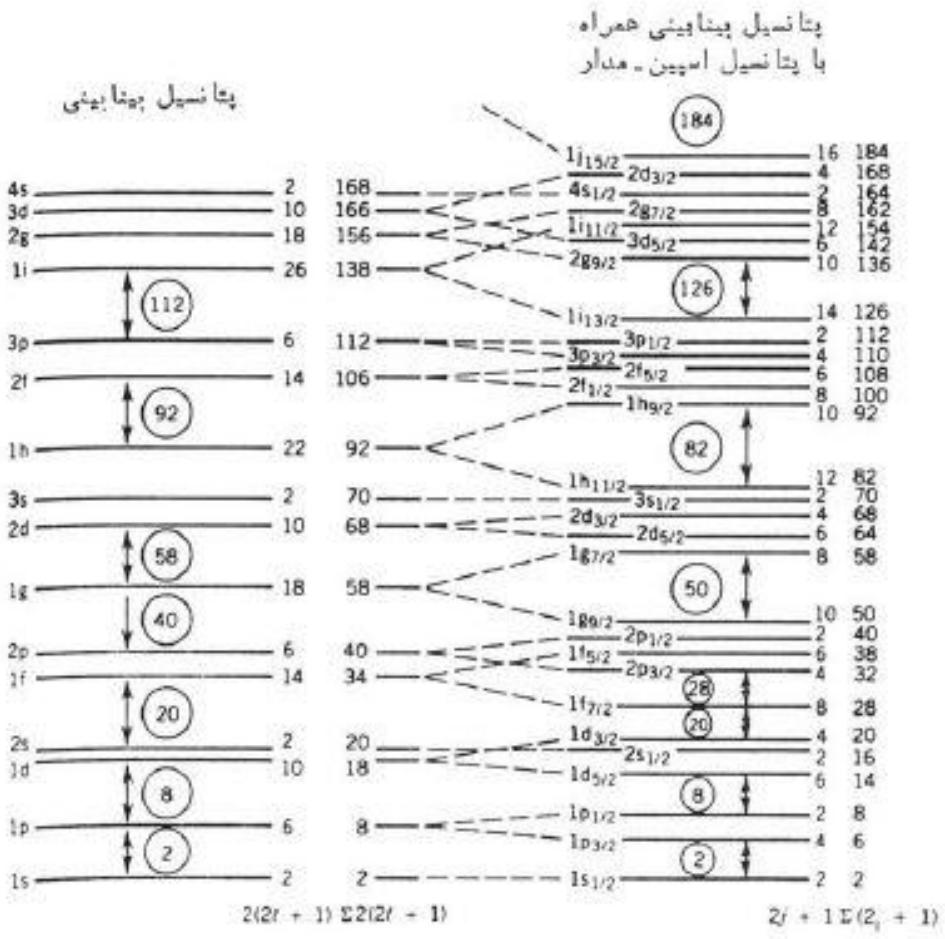
شکل ۱-۶ شکل واقع بینانه پتانسیل در مدل پوسته‌ای

پارامترهای R و a به ترتیب شعاع میانگین و ضخامت پوست هستند که مقادیرشان به صورت زیر است:

$$R = ۱/۲۵A^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۱۲-۱)$$

$$a = ۰/۵۲۴fm \qquad (۱۳-۱)$$

عمق چاه .V چنان تنظیم می‌شود که برای انرژی‌های جدایی که از مرتبه ۵۰ مگاالکترون ولت است، مقادیر مناسبی به‌دست آید.ترازهای انرژی حاصل را در شکل (۱-۷) زیر می‌بینید.



شکل ۱-۷ ترازهای انرژی حاصل از پتانسیل وودز-ساکسون

نتیجه پتانسیل جدید، در مقایسه با نوسانگر هماهنگ این است که واگنی l را در پوسته‌های اصلی برطرف می‌کند. هر چه به طرف انرژی‌های بالاتر پیش می‌رویم، فاصله ایجاد شده در این مورد بیشتر و بیشتر می‌شود، به طوری که سرانجام این فاصله با فاصله بین ترازهای نوسانگر هماهنگ قابل مقایسه خواهد بود. باز هم اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰ را به دست می‌آوریم، ولی اعداد جادویی بالاتر را نمی‌توان با این محاسبات پیدا کرد.

این پتانسیل را چگونه می‌توانیم اصلاح کنیم تا همه اعداد جادویی را از آن به‌دست آوریم؟ چون نمی‌خواهیم محتوای فیزیکی مدل را از بین ببریم مسلماً نمی‌توانیم تغییر زیادی در پتانسیل وارد کنیم. دلایل توجیهی معادله (۱-۱۱) را به‌عنوان یک حدس خوب پتانسیل هسته‌ای قبلاً ارائه کردیم. بنابراین، برای بهبود محاسبات لازم است که جمله‌های مختلفی به پتانسیل اضافه کنیم. در دهه

۱۹۴۰ تلاش‌های نافرجام زیادی برای یافتن این جمله تصحیحی صورت گرفت و سرانجام مایر، هاکسل، سوئس و جنسن در سال ۱۹۴۹ موفق شدند که با افزودن یک پتانسیل "اسپین-مدار" فاصله‌های مناسبی بین زیرپوسته‌ها به‌دست آوردند.

برهم‌کنش اسپین-مدار را به صورت $V_{so}(r)l.s$ در نظر می‌گیریم، ولی شکل $V_{so}(r)$ خیلی مهم نیست. این عامل $l.s$ است که باعث تجدید سازمان ترازها می‌شود. هم‌چنان‌که در فیزیک اتمی دیدیم، حالت‌ها را در حضور برهم‌کنش اسپین-مدار باید با تکانه زاویه‌ای کل $j=l+s$ نشانه‌گذاری کنیم. عدد کوانتومی اسپین هر نوکلئون برابر $s=\frac{۱}{۲}$ است، پس مقادیر ممکن برای عدد کوانتومی کل عبارتند از $j=l+\frac{۱}{۲}$ و $j=l-\frac{۱}{۲}$. شکافتگی انرژی بین حالت‌ها با افزایش l افزایش می‌یابد. بدین ترتیب با استفاده از این جمله، باقیمانده اعداد جادویی هم طبق انتظار به‌دست می‌آید یعنی: ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶، ۱۸۴.

۱-۹ پتانسیل‌های هسته‌ای

پس از بررسی مدل پوسته‌ای دریافتیم که پتانسیل‌ها سهم قابل توجهی در فیزیک هسته‌ای دارند. از این رو می‌خواهیم تعدادی از این پتانسیل‌ها را معرفی کنیم:

۱-۹-۱ پتانسیل وودز-ساکسون

یکی از پتانسیل‌های مهم در فیزیک هسته‌ای پتانسیل وودز- ساکسون[۱۵] است. این پتانسیل کوتاه برد که اولین بار توسط وودز و ساکسون در سال ۱۹۵۴ معرفی شد. بخش اصلی مدل پوسته‌ای و مدل اپتیکی را که در پراکندگی هسته‌ای کاربرد دارد تشکیل می‌دهد. هم‌چنین این پتانسیل به صورت گسترده‌ای برای توصیف برهم‌کنش نوترون با هسته‌های سنگین استفاده می‌شود. در حوزه پتانسیل میانگین جز ئیات پتانسیل با پارامترهای آزادی مانند عمق، پهنا و شیب پتانسیل تعریف

می‌شود که باید با مشاهدات تجربی سازگار باشند. شکل این پتانسیل که برحسب فاصله از مرکز هسته است به صورت زیر می‌باشد:

$$V(r)=\frac{-V_{\cdot}}{1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \qquad (1-14)$$

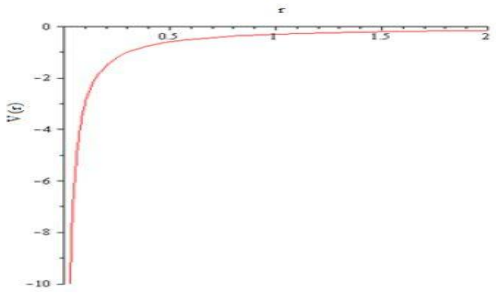
برای مطالعه این پتانسیل به بخش ۱-۸-۲ مراجعه شود.

۱-۹-۲ پتانسیل یوکاوا

حدود هفتاد سال پیش یوکاوا[۱۶] نظریه مزون را برای توضیح برهم‌کنش‌های میان نوکلئون‌ها پیشنهاد کرد و پتانسیل را به شکل زیر معرفی نمود:

$$V(r)=-V_{\cdot}\frac{e^{-\alpha r}}{r} \qquad (1-15)$$

که در آن α برد نیروهای هسته‌ای و $V_{\cdot}$ عمق پتانسیل می‌باشد. بر خلاف نیروی کولنی که بستگی ساده‌ای به فاصله دارد، نیروی هسته‌ای به طور خیلی پیچیده‌ای به فاصله وابسته است. پتانسیل یوکاوا برای بیان این منظور یکی از بهترین پتانسیل‌ها می‌باشد. این پتانسیل تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیرو سریعاً با افزایش فاصله به صفر میل می‌کند. یکی از نکات مهم در مورد پتانسیل یوکاوا آن است که معادلهء شرودینگر با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی‌باشد.



شکل ۱-۸ پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از **r**

۱-۹-۳ پتانسیل هولسن عمومی

پتانسیل هولسن عمومی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V(r)=-\frac{e^{-\alpha r}}{۱-qe^{-\alpha r}} \qquad (۱۶-۱)$$

که در آن q شکل پتانسیل را تعیین می‌کند. قابل توجه است که به ازای مقادیر بخصوص q پتانسیل معینی را نتیجه می‌دهد:

۱- اگر q=۰ باشد، پتانسیل نمایی حاصل می‌شود.

۲- اگر q=۱ باشد، پتانسیل هولسن استاندارد حاصل می‌شود.

۳- اگر q=-۱ باشد، پتانسیل وودز-ساکسون به دست می‌آید.

۱-۹-۴ پتانسیل هلمن

فرم این پتانسیل به صورت زیر می‌باشد:

$$V(r)=\frac{V_{.}e^{-\alpha r}}{r}-\frac{k}{r} \qquad (۱۷-۱)$$

این پتانسیل به صورت جمع پتانسیل‌های یوکاوا و کولنی است. این پتانسیل در فیزیک اتمی کاربرد زیادی دارد.

فصل دوم

ابر تقارن

۲-۱ مقدمه

ابر تقارن در سال ۱۹۷۱ توسط Ramond,Neveu,Schwartz, [۱۷] Gelfond Lijtman, [۱۸] کشف شد و سپس توسط گروه‌های دیگری دنبال گردید و گسترش یافت.[۱۹] ابر تقارن درجات آزادی فرمیونی و بوزونی را به هم مربوط می‌سازد.جبری که در ابر تقارن به کار می‌رود، یک جبر، لی است که تحت ترکیبی از روابط جابه‌جایی و پاد جابه‌جایی بسته است. در ابتدا از ابر تقارن برای وحدت حالات فرمیونی و بوزونی در نظریهء ابر ریسمان استفاده شد.

SUSY امکان وحدت مکان-زمان و تقارن‌های داخلی ماتریس S (ماتریس پراکندگی)را فراهم ساخت؛ سپس توسط Zumino, Wess چگونگی ساخت یک نظریه ۱+۳ بعدی که توسط این تقارن ناوردا بود، بررسی شد. گرانش توسط وحدت ابرتقارن به ابر گرانش تعمیم یافت. یکی از پیش‌گویی‌های مهم نظریه‌های ابر تقارنی وجود تقارن کوارک‌ها-لپتون‌ها با همتاهای بوزونی آن‌ها و بوزون‌های پیمانه‌ای و همتاهای فرمیونی آن‌ها می‌باشد. این نظریه‌ها برای همتایان ابر تقارنی جرم‌های یکسانی پیشنهاد می‌دهد. با وجود همه زیبایی این نظریه‌ها تاکنون هیچ تجربه‌ای گواه بر وجود ابرتقارن در طبیعت مشاهده نشده است. همه این مسائل سبب شد ابرتقارن در ساده‌ترین حالتش، ابرتقارن در مکانیک کوانتومی توسط Freedman,Cooper,Witten [۲۰] مورد بررسی قرار گیرد. با استفاده از ابرتقارن در مکانیک کوانتومی، بسیاری از مسائل و پتانسیل‌هایی که به‌طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا تحت شرایطی خاص قابل حل می‌باشند، به آسانی حل می‌شوند. با تعریف پتانسیل‌های همانند، به راحتی می‌توان پتانسیل‌هایی مانند پاش- تلر، اکارت یا روزن- موریس را به دست آورد. هم‌چنین می‌توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابر تقارن در روش‌های تقریبی مانند روش وردشی به‌دست آورد. علاوه بر آن می‌توان معادلات پائولی و دیراک را با استفاده از آن حل کرد.

ابرتقارن در نظریه میدان کوانتومی به عنوان تقارنی میان میدان‌های بوزونی و میدان‌های فرمیونی مطرح شد[۲۱] و از آن‌جا که می‌توانست گامی به سوی وحدتی بین درجات آزادی درونی و بیرونی باشد، مورد توجه قرار گرفت.

ابرتقارن در مکانیک کوانتومی نخست به عنوان مدل ساده شده‌ای از ابر تقارن در نظریه ی میدان مورد توجه قرار گرفت[۲۲] اما به زودی جایگاه ویژه‌ای در مکانیک کوانتومی به‌دست آورد. اهمیت این نظریه هم به دلیل ارتباطی است که این نظریه با برخی مباحث ریاضی دارد؛ مانند قضیه اندیس[۲۳] و قضیه مورس[۲۴] و هم به دلیل توانایی آن در حل مسائل؛ مانند حل دقیق معادلهء شردوینگر از طریق یافتن هامیلتون‌های هم‌شکل برای پتانسیل‌های شکل ناوردا[۲۵]. این نظریه هم‌چنین کاربرد وسیعی در بسیاری از شاخه‌های فیزیک همچون فیزیک اتمی[۲۶]، فیزیک آماری[۲۷]، ابر رسانایی[۲۸]، و نیم‌رساناها[۲۹] پیدا کرده است. به دلیل این کاربردهای گسترده و به دلیل اهمیت آن در درک بهتر پدیده‌های فیزیکی و مفاهیم ریاضی، تلاش‌های بسیاری در جهت تعمیم آن صورت گرفته است که به عنوان مثال به یافتن پارا ابرتقارن[۳۰]، اورتو ابرتقارن[۳۱] و ابرتقارن کسری[۳۲] منجر شده است.

اگر چه ایدهء ابرتقارن جذاب است؛ ولی همان‌طور که می‌دانیم تاکنون در طبیعت مشاهده نشده است. در محیط اطراف ما فرمیون‌ها کاملاً مجزا از بوزون‌ها هستند و تاکنون ابر تقارن همراه ذرات بوزون و فرمیون مشاهده نشده‌اند. بنابراین اگر می‌خواهیم نقشی برای ابرتقارن در طبیعت قائل شویم باید فرض کنیم که این تقارن دستخوش شکست خود به خودی شده است. در سال ۱۹۸۱ ویتن برای اینکه یک مدل سادهء غیر نسبیتی برای ساز و کار شکست خود به خودی ابرتقارن فراهم کند، مکانیک کوانتومی ابرتقارن را بر پایه ساده‌ترین شکل ممکن ابر جبر معرفی کرد. فرمول بندی Witten از مکانیک کوانتومی ابر متقارن توجه زیادی را در دههء گذشته به خود جلب کرده است و هنوز هم به‌عنوان یک ابزار مفید در فیزیک کوانتومی به کار می‌رود.

علی رغم این واقعیت که فیزیک کوانتومی ابرمتقارن در واقع حد (۱+۰) بعدی نظریه میدان ابرمتقارن است، تا حد زیادی مستقل از آن است. ابر تقارن در فیزیک کوانتومی آن ابرتقارن اولیه ای نیست که بوزون ها و فرمیون ها را به هم تبدیل می کرد. در فیزیک کوانتومی ابرتقارن، ابر بارها مولد تبدیل‌هایی بین فرمیون‌ها و بوزون‌ها نیستند، بلکه مولد تبدیل‌هایی بین ویژه حالت متعامد یک هامیلتونی داده شده با ویژه مقادیر واگن یکسان هستند. این دو ویژه حالت متعامد، ویژه حالت‌های عملگری به نام عملگر پاریتهء ویتن با مقادیر ویژه ۱+ و ۱- هستند. همان‌طور که گفتیم ابرتقارن در مکانیک کوانتومی در واقع مدل ساده شده‌ای از ابرتقارن در نظریه میدان است اما این نظریه مستقل از نظریهء میدان کاربردهای وسیعی یافته است و از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای معرفی مفاهیم مورد نیاز در این پایان نامه به‌طور مختصر به مرور مکانیک کوانتومی ابرتقارن می‌پردازیم؛ اما قبل از آن جبری که در ابرتقارن از آن استفاده می‌کنیم مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۲-۲ جبر تقارن

چون ابرتقارن بین فرمیون‌ها و بوزون‌ها است، می‌دانیم که فرمیون‌ها از اصل طرد پائولی تبعیت می‌کنند، بنابراین لازم است ابتدا جبر گریسمن را معرفی کنیم.[۳۳]

۲-۲-۱ جبر گراسمن

متغیرهای گراسمن:

این متغیرها در واقع اعداد پاد جابه‌جاپذیر می‌باشند.یعنی اگر n متغیر گراسمن $\theta_1,\theta_2,....\theta_n$ داشته باشیم رابطه زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\theta_i\theta_j= -\theta_j\theta_i \qquad (۱-۲)$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\theta_i^2=0 \qquad (۲-۲)$$

بنابراین اگر یک تابع تنها به یک متغیر گراسمن ، θ، بستگی داشته باشد می‌توان آن را به صورت زیر بسط داد:

$$F(\theta)=a+b\theta \qquad (۳-۲)$$

که در آن a و b اعداد ثابت حقیقی هستند.

اگر تابع گراسمن شامل n متغیر باشد، $\theta=(\theta_{۱},\theta_{۲},\ldots,\theta_{n})$، بسط تابع $F(\theta)$ را به صورت زیر داریم:

$$F(\theta)=F^{(۰)}+\sum F_i^{(۱)}\theta i+\sum F_{ij}^{(۲)}+\cdots+\sum F_{ij\ldots n}^{(n)}\theta_{۱},\theta_{۲},\ldots,\theta n$$

مشتق پذیری:

مشتق‌گیری در جبر گراسمن از دو سمت راست و چپ انجام می‌گیرد. اگر از تابع $F(\theta)=\theta_{۱}\theta_{۲}$ از سمت راست نسبت به θ_i مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_{۱}\theta_{۲})=\delta_{i۱}\theta_{۲}-\delta_{i۲}\theta_{۱} \qquad (۵-۲)$$

و هنگامی که تابع $F(\theta)$ حاصل ضرب m متغیر گراسمن باشد، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_{۱}\theta_{۲}\ldots\theta_m)=\delta_{i۱}\theta_{۲}\theta_{۳}\ldots\theta_m-\delta_{i۲}\theta_{۱}\theta_{۳}\ldots\theta_m+\ldots+(-۱)^{m-۱}\delta_{im}\theta_{۱}\theta_{۲}\ldots\theta_{m-۱} \qquad (۶-۲)$$

مشتق از سمت چپ نسبت به θ_i، نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$(\theta_{۱}\theta_{۲})\frac{\partial}{\partial\theta_i}=\delta_{i۲}\theta_{۱}-\theta_{۲}\delta_{i۱} \qquad (۷-۲)$$

و اگر m متغیر گراسمن داشته باشیم، آنگاه داریم:

$$(\theta_{۱}\theta_{۲}\ldots\theta_m)\frac{\partial}{\partial\theta_i}=$$

$$\delta_{m۱}\theta_{۱}\theta_{۲}\ldots\theta_{(m-۱)}-\delta_{(m-۱)i}\theta_{۱}\ldots\theta_{(m-۲)}\ldots\theta_m+\ldots+(-۱)^{m-۱}\delta_{۱i}\theta_{۲}\theta_{۳}\ldots\theta_m \qquad (۸-۲)$$

چون متغیرهای گراسمن پاد جابه‌جاپذیر هستند، مشتق‌های پاره‌ای آنها نیز پاد جابه‌جاپذیر می‌باشند:

$$\{d\theta_i,d\theta_j\}=۰=\{\theta_i,d\theta_j\} \qquad (۹-۲)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_i}=۰ \qquad (۱۰-۲)$$

برای اثبات این رابطه از اثر تابع $F(\theta_{۱},\theta_{۲})$ بر پاد جابه‌جایی(۲-۹) استفاده می‌کنیم:

$F(\theta_1,\theta_2)=a+b\,\theta_1+c\theta_2+d\theta_2\theta_1$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_1},\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right\}F(\theta_1,\theta_2)=\frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}F(\theta_1,\theta_2)+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}F(\theta_1,\theta_2)=$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(c-d\theta_1)+\frac{\partial}{\partial\theta_2}(b-d\theta_2)=-d+d=0 \qquad (11\text{-}2)$$

انتگرال:

می‌دانیم در انتگرال معمولی هنگامی که بر روی تمام فضای حالت انتگرال می‌گیریم، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\int h(x)\,dx=\int h(x+a)dx \qquad (12\text{-}2)$$

در مورد انتگرال تابع گراسمن نیز می‌توان همین عمل را انجام داد:

$$\int h(\theta)d\theta=\int h(\theta+c)d\theta \qquad (13\text{-}2)$$

با جایگذاری $F(\theta)=a+b\theta$ در انتگرال فوق داریم:

$$\int (a+b\theta)d\theta=\int (a+b\theta+bc)d\theta \qquad (14\text{-}2)$$

اگر $I_1=\int \theta d\theta, I_0=\int d\theta$ را در رابطه فوق جایگذاری کنیم، به‌دست می‌آید:

$$aI_0+bI_1=(a+bc)I_1+bI_1 \qquad (15\text{-}2)$$

ملاحظه می‌شود که جواب در رابطه $I_0=0$ و $I_1=1$ در رابطه فوق صدق می‌کند، بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\int d\theta=0 \qquad (16\text{-}2)$$

$$\int \theta d\theta=1 \qquad (17\text{-}2)$$

$$\int \theta_j d\theta_j=\delta_{ij} \qquad (18\text{-}2)$$

متغیرهای زوج و فرد گراسمن:

اگر تعداد فردی از متغیرهای گراسمن در هم ضرب شوند، یک متغیر فرد گراسمن(O) و اگر تعداد زوجی از متغیرهای گراسمن در هم ضرب شوند،ی ک متغیر زوج گراسمن (E) به‌وجود می‌آید. می‌توان اثبات کرد که این متغیرها در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[O_1,O_2]_+ =0 \qquad (19\text{-}2)$$

$$[E_1,E_2]_- =0 \qquad (20\text{-}2)$$

$$[E,O]_- =0 \qquad (21\text{-}2)$$

که در آن:

$$[A,B]_- =AB-BA \qquad (22\text{-}2)$$

$$[A,B]_+ =AB+BA \qquad (23\text{-}2)$$

۲-۳ مکانیک کوانتومی ابر تقارن

برای ساخت مکانیک کوانتومی ابر تقارن[۳۴]، از روش کوانتیده کردن دیراک استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا از یک لاگرانژین کلاسیکی که شامل متغیرهای گراسمن نیز هست، شروع می‌کنیم. اندازه حرکت‌های تعمیم یافته (کانونی) متناظر با متغیرهای بوزونی (جابه‌جا پذیر) و فرمیونی (گراسمن) را تعریف می‌کنیم و سپس کروشهء پواسون را برای هر دسته متغیر بدست می‌آوریم.

۲-۳-۱ لاگرانژین کلاسیکی

لاگرانژین زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L=L(q_i,\dot{q}_i,\theta_\alpha,\dot{\theta}_\alpha) \qquad (24\text{-}2)$$

که در آن q_i ها متغیرهای معمولی می‌باشند و θ_α متغیرهای گراسمن هستند. فرض می‌کنیم L نسبت به متغیرهای گراسمن زوج باشد، در این صورت یک تغییر کوچک در لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta L=\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i}+\delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha}+\delta\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\delta\dot{\theta}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \qquad (۲۵-۲)$$

اگر اندازه حرکت‌های کانونی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$P^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (۲۶-۲)$$

$$\pi^\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \qquad (۲۷-۲)$$

آنگاه تغییرات لاگرانژین را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\delta L=\delta q_i \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha}+\delta\theta \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha}+\delta\dot{q}_i P^i+\delta\dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha \qquad (۲۸-۲)$$

چون θ ها متغیرهای گراسمن هستند، داریم:

$$\left[\pi^\alpha,\theta_\beta\right]=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha},\theta_\beta\right]+=۰ \qquad (۲۹-۲)$$

از اکسترمم کردن کنش $S=\int L\,dt$ معادلات حرکت زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{P}^\alpha=\frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (۳۰-۲)$$

$$\dot{\pi}^\alpha=\frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} \qquad (۳۱-۲)$$

مشابه با مورد کلاسیکی، با متغیرهای معمولی می‌توانیم هامیلتونی به صورت زیر تعریف کنیم:

$$H=\dot{q}_i P^i+\dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha-L \qquad (۳۲-۲)$$

هدف، ساختن کروشه پواسون برای متغیرهاست. برای این کار ابتدا یک تغییر کوچک در H می‌دهیم:

$$\delta H=\dot{q}\delta P^i-\dot{\theta}_\alpha\delta\pi^\alpha-\delta q_i\dot{P}^i-\delta\theta_\alpha\dot{\pi}^\alpha \qquad (۳۳-۲)$$

که از روابط فوق می‌توانیم معادلات زیر را به‌دست آوریم:

$$\pi^\alpha=-\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \qquad (۳۴-۲)$$

$$p^i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (۳۵-۲)$$

$$\theta_\alpha=\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \qquad (۳۶-۲)$$

$$q_i=\frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad (۳۷-۲)$$

و نیز:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}=$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha}-\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right)=\frac{\partial A}{\partial t}+\{A,H\} \qquad (۳۸-۲)$$

که در آن $\{A,H\}$ عبارتست از:

$$\{A,H\}=\left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha}+\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right) \qquad (۳۹-۲)$$

بنابراین می‌توان برای دوکمیت A و B کروشه پواسون تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\{A,B\}=\left(\frac{\partial B}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right)-\left(\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha}-\frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right) \qquad (۴۰-۲)$$

با استفاده از این دانسته‌ها، می‌توانیم کروشه پواسون را برای حالت‌های مختلف زوج و فرد بررسی کنیم:

۱- کروشه پواسون با متغیرهای زوج -زوج:

$$\{E_1,E_2\}=\left(\frac{\partial E_1}{\partial p^i}\frac{\partial E_2}{\partial q_i}-\frac{\partial E_2}{\partial \theta_i}\frac{\partial E_1}{\partial p^i}\right)+\left(\frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \theta_i}-\frac{\partial E_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha}\right) \qquad (۴۱-۲)$$

که در آن، $\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}$ و $\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}$ متغیرهای فرد هستند. می‌توانیم روابط زیر را برای این کروشه اثبات کنیم:

$$\{E_1,E_2\}=-\{E_2,E_1\} \qquad (۴۲-۲)$$

$$\{E_1,E_2E_3\}=E_2\{E_1,E_3\}+\{E_1,E_2\}E_3 \qquad (۴۳-۲)$$

$$\{E_1,\{E_2,E_3\}\}+\{E_2,\{E_1,E_3\}\}+\{E_3,\{E_1,E_2\}\}=0 \qquad (۴۴-۲)$$

۲- کروشه پواسون با متغیرهای فرد-زوج:

$$\{O,E\}=\left(\frac{\partial E}{\partial p^i}\frac{\partial O}{\partial q_i}-\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i}\right)-\left(\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}+\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha}\right) \qquad (۴۵-۲)$$

که از آن می‌توان روابط زیر را اثبات کرد:

$$\{O,E_۱E_۲\}=E_۱\{O,E_۲\}+\{O,E_۱\}E_۲ \qquad (۴۶-۲)$$

$$\{O_۱O_۲,E\}=O_۱\{O_۲,E\}+\{O_۱,E\}O_۲ \qquad (۴۷-۲)$$

$$\{OE_۱,E_۲\}=O\{E_۱,E_۲\}+\{O,E_۲\}E_۱ \qquad (۴۸-۲)$$

۳- کروشه پواسون با متغیرهای زوج-فرد:

$$\varepsilon\{E,O\}=\{E,\varepsilon O\}=\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial(\varepsilon O)}{\partial p^i}-\frac{\partial(\varepsilon O)}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i}\right)+\left(\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial(\varepsilon O)}{\partial \pi^\alpha}-\frac{\partial(\varepsilon O)}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\right) \qquad (۴۹-۲)$$

روابط این کروشه عبارتند از:

$$\{E,O\}=-\{O,E\} \qquad (۵۰-۲)$$

$$\{E_۱E_۲,O\}=E_۱\{E_۲,O\}+\{E_۱,O\}E_۲ \qquad (۵۱-۲)$$

$$\{E_۱,OE_۲\}=O\{E_۱,E_۲\}+\{E_۱,O\}E_۲ \qquad (۵۲-۲)$$

$$\{E_۱,\{E_۲,O\}\}+\{E_۲,\{O,E_۱\}\}=۰ \qquad (۵۳-۲)$$

۴- کروشه پواسون با متغیرهای فرد-فرد :

$$\{\varepsilon E,O\}=\varepsilon\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial(O)}{\partial p^i}-\frac{\partial(O)}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial(O)}{\partial \pi^\alpha}+\frac{\partial(O)}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\right)=\left(\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial q_i}\frac{\partial(O)}{\partial p^i}-\frac{\partial(O)}{\partial q_i}\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial p^i}\right)- \qquad (۳-$$

بنابراین برای حالت فرد-فرد کروشه پواسون داریم:

$$\{O_۱,O_۲\}=\left(\frac{\partial O_۱}{\partial q_i}\frac{\partial O_۲}{\partial p^i}+\frac{\partial O_۲}{\partial q_i}\frac{\partial O_۱}{\partial p^i}\right)-\left(\frac{\partial O_۱}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_۲}{\partial p^\alpha}+\frac{\partial O_۲}{\partial q_\alpha}\frac{\partial O_۱}{\partial p^\alpha}\right) \qquad (۵۵-۲) \qquad (۳-$$

از حالت تقارنی رابطه بالا می‌بینیم که رابطه $\{O_۱,O_۲\}=\{O_۲,O_۱\}$ برقرار است و روابط دیگر عبارتند از:

$$\{O_۱O_۲O_۳\}=O_۱\{O_۲,O_۳\}-\{O_۱,O_۳\}O_۲ \qquad (۵۶-۲)$$

$$\{EO_1,O_2\}=E\{O_1,O_2\}-\{E,O_2\}O_1 \quad (۵۷-۲)$$

$$\{E,\{O_1,O_2\}\}+\{O_1,\{O_2,E\}\}+\{O_2,\{E,O_1\}\}=0 \quad (۵۸-۲)$$

و برای هر سه متغیر رابطه زیر را داریم:

$$\{A,B+C\}=\{A,B\}+\{A,C\} \quad (۵۹-۲)$$

حال در موقعیتی هستیم که بتوانیم سیستم را کوانتایی کنیم. ابتدا کروشه دیراک تعمیم یافته را تعریف می‌کنیم. سپس می‌بینیم که در حد کلاسیکی، کروشه دیراک تعمیم یافته به کروشه پواسون تعمیم یافته تبدیل می‌شود.

اگر A یک عملگر مکانیک کوانتومی باشد، تحت عملگر تبدیل پاریته،P، بدین صورت در می‌آید:

$$p^{-1}\hat{A}p=(-1)^{\pi(A)}\hat{A} \quad (۶۰-۲)$$

$$\pi(\hat{A})=0 \text{ or } \pi(\hat{A})=1 \quad (۶۱-۲)$$

یک عملگر زوج، عملگری است که یک حالت زوج (فرد) را به یک حالت زوج (فرد) تبدیل کند. در حالی که یک عملگر فرد، یک حالت زوج (فرد) را به یک حالت فرد (زوج) تبدیل می‌کند. در اینجا یک سیستم دینامیکی را در نظر گرفته‌ایم که ویژه مقادیر P به دو دسته زوج و فرد تقسیم شده‌اند و P با هامیلتونی جابه‌جاپذیر است:

$$[P,H]=0 \quad (۶۲-۲)$$

کروشه دیراک تعمیم یافته $[\hat{A},\hat{B}]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\hat{A},\hat{B}]=-(-1)^{ab}[\hat{B},\hat{A}] \quad (۶۳-۲)$$

$$[\widehat{A,BC}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+(-1)^{ab}\hat{B}[\hat{A},\hat{C}] \quad (۶۴-۲)$$

$$[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}] \quad (۶۵-۲)$$

$$\left[\hat{A}[\hat{B}\hat{C}]\right]+(-1)^{a(b+c)}\left[\hat{B}[\hat{C}\hat{A}]\right]+(-1)^{c(a+b)}\left[\hat{C}[\hat{A}\hat{B}]\right]=0 \quad (۶۶-۲)$$

که در آن $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}$ عملگرهای دلخواه هستند و a,b,c,d به‌ترتیب جانشین $\pi(\hat{A}),\pi(\hat{B}),\pi(\hat{C}),\pi(\hat{D})$ شده‌اند.

اگر عملگرهای A,B را زوج در نظر بگیریم، به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\lim \frac{\left[\hat{A},\hat{B}\right]}{\hbar}=\{A,B\} \qquad (۶۷-۲)$$

و داریم:

$$\hat{A}\hat{B}-(-۱)^{ab}\hat{B}\hat{A}=i\hbar\{A,B\} \qquad (۶۸-۲)$$

و روابط جا به‌جایی عملگرها را به صورت زیر مینویسیم:

$$\left[\hat{E}_۱,\hat{E}_۲\right]=i\hbar\{E_۱,E_۲\} \qquad (۶۹-۲)$$

$$\left[\hat{O},\hat{E}\right]=i\hbar\{O,E\} \qquad (۷۰-۲)$$

$$\left[\hat{O}_۱,\hat{O}_۲\right]=i\hbar\{O_۱,O_۲\} \qquad (۷۱-۲)$$

بنابراین عملگر های فرد به صورت پاد جابه جاگر ها کوانتیده شده اند.

با استفاده از نتیجه (۳-۵۲) می توانیم کروشه پواسون تعمیم یافته را با روابط کروشه دیراک تعمیم یافته ی (۳-۴۳)،(۳-۴۴)،(۳-۴۵) و (۳-۴۶) به صورت زیر پیوند دهیم:

$$\{A,B\}= -(-۱)^{ab}\{B,A\} \qquad (۷۲-۲)$$

$$\{A,B+C\}=\{A,B\}C+(-۱)^{ab}B\{A,C\} \qquad (۷۳-۲)$$

$$\{A,B+C\}=\{A,B\}+\{A,C\} \qquad (۷۴-۲)$$

$$\{A,\{B,C\}\}+(-۱)^{a+(b+c)}\{B,\{C,A\}\}+(-۱)^{c(a+b)}\{C,\{A,B\}\}=۰ \qquad (۷۵-۲)$$

که در آن $a=\pi(A)=\pi(\hat{A})$ و $c=\pi(C)=\pi(\hat{C})$.

روابط کروشه پواسون تعمیم یافته به صورت زیر هستند:

$$\{\alpha_i,\alpha_j\}=\{\beta_i,\beta_j\}=۰ \qquad (۷۶-۲)$$

$$\{\alpha_i,\beta_j\}=\delta_{ij} \qquad (۷۷-۲)$$

ریاضیات ابرتقارن را با تعریف عملگر های A^+ و A به این صورت ادامه می‌دهیم:[۳۵]

$$A=\frac{\hbar}{\sqrt{۲m}}\frac{d}{dx}+W(x) \qquad (۷۸-۲)$$

$$A^+=-\frac{\hbar}{\sqrt{۲m}}\frac{d}{dx}+W(x) \qquad (۷۹-۲)$$

در این صورت عملگرهای هامیلتونی $H_۲$ و$H_۱$ به این صورت نوشته می‌شوند:

$$H_۱=A^+A \qquad (۸۰-۲)$$

$$H_۲=A\,A^+ \qquad (۸۱-۲)$$

$$H_۱=-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲}+V_۱(x) \quad , \quad V_۱(x)=W^۲(x)-\frac{\hbar}{\sqrt{۲m}}W'(x) \qquad (۸۲-۲)$$

$$H_۲=-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲}+V_۲(x) \quad , \quad V_۲(x)=W^۲(x)+\frac{\hbar}{\sqrt{۲m}}W'(x) \qquad (۸۳-۲)$$

در همین راستا روابط جابه‌جا پذیری به این صورت برقرار است:

$$[H_۱,A]=[A^+A,A]=۰ \qquad (۸۴-۲)$$

$$[H_۱,A^+]=[A^+A,A^+]=۰ \qquad (۸۵-۲)$$

$$[H_۲,A]=[AA^+,A]=۰ \qquad (۸۶-۲)$$

$$[H_۲,A^+]=[AA^+,A^+]=۰ \qquad (۸۷-۲)$$

$$[A,Q_۱]=[A^+,Q_۱]=۰ \qquad (۸۸-۲)$$

$$[A,Q_۲]=[A^+,Q_۲]=۰ \qquad (۸۹-۲)$$

کمیت $W(x)$ به ابر پتانسیل در مکانیک کوانتومی ابرتقارن[۳۶] اشاره دارد و $V_{۱,۲}(x)$ به عنوان پتانسیل‌های همراه ابر متقارن شناخته می‌شوند. ویژه مقادیر انرژی، توابع موج و ماتریس های S هامیلتونی $H_۲$, $H_۱$ به هم وابسته هستند. اگر E یک ویژه مقدار $H_۱$ باشد،

ویــژه مقــدار H_2 نیــز خواهــد بــود و در نتیجــه ویــژه مقــادیر H_1,H_2 مقــادیر مثبــت و متنــاهی هستند ($E_n^{(1,2)}\geq 0$) و معادلهء شرودوینگر برای H_1 به این صورت است:

$$H_1\psi_n^{(1)}=A^+A\psi_n^{(1)}=E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \qquad (۹۰\text{-}۲)$$

اگر عملگر A را بر طرفین رابطه اثر دهیم:

$$H_2\left(A\psi_n^{(1)}\right)=AA^+\psi_n^{(1)}=E_n^{(1)}\left(A\psi_n^{(1)}\right) \qquad (۹۱\text{-}۲)$$

و به طور مشابه برای H_2 به صورت زیر در می‌آید:

$$H_2\psi_n^{(2)}=A^+A\psi_n^{(2)}=E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \qquad (۹۲\text{-}۲)$$

$$H_1\left(A\psi_n^{(2)}\right)=A^+AA^+\psi_n^{(2)}=E_n^{(2)}\left(A\psi_n^{(2)}\right) \qquad (۹۳\text{-}۲)$$

با توجه به روابط بالا مشخص می‌شود که اگر E یک ویژه مقدار هامیلتونین $H_1(H_2)$ با ویژه تابع ψ باشد، در این صورت E نیز ویژه مقدار هامیلتونین $H_1(H_2)$ و ویژه مقدار تابع به صورت $A\psi(A^+\psi)$ می‌باشد. زمانی که $n=0$ باشد؛ $A\psi_0^1=0$ یعنی حالت پایه به وسیله عملگر A به حداقل می‌رسد. با توجه به این مسئله رابطه بین ویژه حالت‌های هر دو هامیلتونی به این وابسته خواهد بود که $A\psi_0^1=0$ یا این‌که مخالف صفر باشد و به عبارت دیگر E_0^1 صفر باشد یا این‌که مقداری مخالف صفر داشته باشد.

توجیه بالا در حالت $A\psi_0^{(1)}=0$ شکسته می‌شود، یعنی هنگامی که حالت پایه با عملگر A از بین می‌رود. بنابراین ارتباط دقیقی بین ویژه حالت‌های دو هامیلتونی زمانی که $A\psi_0^{(1)}$ باشد یا نباشد وجود دارد، یعنی اگر حالت پایه $E_0^{(1)}$ صفر باشد یا نباشد.

حالت اول $\left(A\psi_0^{(1)}\neq 0\right)$: این حالت همه موارد شامل حالت پایه و همه ویژه حالت‌های هر دو هامیلتونی که جفت شده‌اند را نتیجه می‌دهد.

$$\psi_n^{(2)}=\{E_{n-1}^{(1)}\}^{-\frac{1}{2}}A\psi_{n+1}^{(1)} \quad , \quad E_n^{(2)}=E_{n+1}^{(1)} \qquad (۹۴\text{-}۲)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)}=\{E_n^{(2)}\}^{-\frac{1}{2}}A^+\psi_n^{(2)} \quad , \quad E_0^{(1)}=0 \qquad (۹۵\text{-}۲)$$

حالت دوم $A\psi_{.}^{1}=0$: در این حالت $E_{.}^{1}=0$ و این یک حالت غیر جفت شده است. زمانی که بقیه حالت‌های هر دو هامیلتونی جفت شده باشند،کاملاً مشخص است که ویژه مقادیر و ویژه توابع برای هر دو هامیلتونی H_1,H_2 به این وسیله به هم مرتبط می‌شوند.

معادله $A\psi_{.}^{(1)}=0$ را به دو روش مختلف می‌توان توضیح داد: یا با ابر پتانسیل $W(x)$ یا تابع موج حالت پایه $\psi_{.}^{(1)}$ که شناخته شده است. در حالت $W(x)$ می‌توانیم معادله $A\psi_{.}^{(1)}=0$ را حل کرده و تابع موج حالت پایه H_1 را با عبارت‌هایی شامل ابر پتانسیل W به‌دست آورد:

$$\psi_{.}^{(1)}=N\exp[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int W(y)\,dy \qquad (96\text{-}2)$$

چنانچه $\psi_{.}^{(1)}$ شناخته شده باشد، آنگاه این معادله به ما ابر پتانسیل W را به این صورت می‌دهد:

$$W(x)=-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{\psi_{.}^{'(1)}}{\psi_{.}^{(1)}}(x) \qquad (97\text{-}2)$$

چندین نکته از این حالت برداشت می‌شود:

۱- توجه کنید که اگر $\psi_{n+1}^{(1)}(\psi_n^2)$ برای $H_1(H_2)$ بهنجار شده باشد؛ در این صورت تابع موج $\psi_{n+1}^{(1)}(\psi_n^2)$ بهنجار شده است.

۲- عملگر $A(A^+)$ نه تنها یک ویژه تابع $H_2(H_1)$ را به یک ویژه تابع دیگر $H_1(H_2)$ با انرژی مشابه تبدیل می‌کند، هم‌چنین یک گره اضافی را در ویژه تابع ایجاد می‌کند. (از بین می‌برد).

۳- توابه موج حالت پایه در $X=\pm\infty$ به حداقل مقدار خود می‌رسد، در این صورت کاملاً واضح است که $A\psi_{.}^{1}=0$ و $A^+\psi_{.}^{(2)}=0$ نمی‌تواند به صورت همزمان برقرار باشند. در این هنگام یکی از انرژی‌های حالت پایه می‌تواند صفر باشد. در تمام این رابطه‌ها W به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\psi_{.}^{1}$ بهنجار شده باشد، به طوری که $E_{.}^{2}>0$.

۴- در حالتی که $A\psi_{\cdot}^{1}=0$ است، زمانی که تابع موج حالت پایه H_1 به وسیله عملگر A به حداقل مقدار خود می‌رسد، در این حالت هیچ همراه ابر تقارنی نخواهد داشت. بنابراین با دانستن همه ویژه توابع H_1 با استفاده از عملگر A ویژه توابع H_2 را می‌توان مشخص کرد و بر عکس با استفاده از عملگر A^+ با دانستن ویژه توابع H_2 می‌توان ویژه توابع H_1 را بدست آورد. (تمام این حالات بدون در نظر گرفتن حالت پایه اتفاق می‌افتد)

۲-۴ روش‌های رایانه‌ای و عددی

یکی از بهترین روش‌های موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد، روش رایانه‌ای و عددی می‌باشد. روش‌های رایانه‌ای از لحاظ کم هزینه بودن، کنترل پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روش‌های آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانه‌ها، روش‌های رایانه‌ای در پیش برد و اثبات نظریه و فرضیه‌های علمی دارند. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستم‌های چند ذره‌ای نیز می‌توان از روش‌های رایانه‌ای و عددی بهره جست. بدین منظور در ابتدای امر باید پتانسیلی در میان ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات که اصول و قواعد خاص خود را می‌طلبد.

۲-۴-۱ حل معادلات به روش Runge-Kutta

در بسیاری از علوم پایه و مهندسی هرگاه که مسائل به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شوند، در بسیاری از موارد می‌توان آن‌ها را به سادگی در قالب یک معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان کرد. شاید نتوان فرم کلی جواب‌ها را برای هر مسئله مدل‌سازی شده بدست آورد ولی با استفاده از کامپیوتر و روش‌هایی عددی می‌توان آن‌ها را حل کرد. از نظر محاسباتی اغلب روش‌های کارآمد از لحاظ دقت، توسط دو ریاضیدان مشهور به نام‌های رونگ و کوتا توسع یافته‌اند. این روش‌ها به روش‌های R-K مشهورند. این روش‌ها با توجه به مرتبه‌اشان تمیز داده می‌شوند، یعنی مطابقت آن‌ها با

جـواب‌هـای سـری تیلـور تـا جملـه h^r کـه r مرتبـه روش اسـت. روش R-K۴ بـرای حـل عـددی معادلات خطـی و غیرخطـی بـه‌طـور گسـترده مـورد اسـتفاده قـرار مـی‌گیـرد کـه بسـط آن از نظـر جبـری پیچیـده اسـت. ایـده اصـلی ایـن روش‌هـا را بـا روش R-k۲ بررسـی مـی‌کنـیم. ایـده اصـلی این روش میانگین شیب‌ها است. یعنی:

$$y_{n+1}=y_n+hx \qquad (۹۸-۲)$$

مسائل مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y) \quad , \quad y(t_n)=y_n \qquad (۹۹-۲)$$

$$k_۲=hf(t_n+\alpha h,y_n+\beta k_۱) \quad , \quad k_i=hf(t_n,y_n) \qquad (۱۰۰-۲)$$

میانگین وزنی $k_۱$ و $k_۲$ را انتخاب و برای تعیین y_{n+1} به y_n اضافه می کنیم:

$$y_{n+1}=y_n+w_۱k_۱+w_۲k_۲ \qquad (۱۰۱-۲)$$

که البته $\beta,\alpha,w_۲,w_۱$ مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند.

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+h\dot{y}(t_n)+\frac{h^۲}{۲}\ddot{y}(t_n)+\frac{h^۳}{۶}\dddot{y}(t_n)+\dots \qquad (۱۰۲-۲)$$

که با تکیه به روابط بالا به معادله اصلی زیر می‌رسیم:

$$y(t_{n+1})=$$

$$y(t_n)+h\dot{y}(t_n)+\frac{h^۲}{۲}(f_t+ff_y)+\frac{h^۳}{۶}[(f_{tt}+۲ff_{ty}+f^۲f_{yy}+f_y(f_t+ff_y)]+o(h^۴)(۲) \qquad (۱۰۳-۲)$$

در این جا همه مشتقات در نقطه (t_n,y_n) محاسبه شده‌اند.

با انجام محاسبات داریم:

$$y_{n+1}=y_n+w_۱hf(t_n,y_n)+w_۲hf(t_n+\alpha h,y_n+\beta k) \qquad (۱۰۴-۲)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره داریم:

$$y_{n+1}=y_n+w_1 hf(t_n,y_n)+w_2 h[\, f(t_n,y_n)+(\alpha h f_t+\beta k_1 f_y)+\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt}+\alpha h\beta k_1 f_{ty}$$

$$+\frac{\beta^2 {k_1}^2}{2} f_{yy})]+oh^3 \qquad (۱۰۵-۲)$$

از قرار دادن k_1 در معادله بالا و سپس مرتب کردن بر اساس توان‌های صعودی h داریم:

$$y_{n+1}=y_n+(w_1+w_2)hf+w_2 h^2(\alpha f_1+\beta f f_y)$$

$$+w_2 h^3\left(\frac{\alpha^2}{2} f_{tt}+\alpha\beta f f_{ty}+\frac{\beta^2 f^2}{2} f_{yy}\right)+o(h^4) \qquad (۱۰۶-۲)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب در این دو معادله داریم:

$$w_1+w_2=1 \quad , \quad w_2(\alpha f_t+f_{yy})=\frac{f_t f f_y}{2} \qquad (۱۰۷-۲)$$

که نتیجه می‌شود:

$$k_2=hf\left(t+\frac{3}{2}h,y+\frac{3}{2}k_1\right) \qquad (۱۰۸-۲)$$

حالت اول:

$$w_1=w_2=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha=\beta=1 \qquad (۱۰۹-۲)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{k_1+k_2}{2} \qquad (۱۱۰-۲)$$

$$k_1=hf(t,y) \qquad (۱۱۱-۲)$$

$$k_2=hf\left(t+\frac{3}{2}h,y+\frac{3}{2}k_1\right) \qquad (۱۱۲-۲)$$

حالت دوم:

$$w_1=w_2=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha=\beta=1 \qquad (۱۱۳-۲)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{k_1+k_2}{2} \qquad (۱۱۴-۲)$$

$$k_1 = hf(t,y) \qquad (۱۱۵-۲)$$

$$k_2 = hf(t+h,y+k_1) \qquad (۱۱۶-۲)$$

به روشی مشابه فرمول R-K از هر مرتبه را می‌توان به‌دست آورد. هرچند که مشتقات آن‌ها بسیار طولانی و پیچیده می‌شود. لازم به‌ذکر است که از بین تمام آن‌ها R-K۴ متداول‌تر و مرسوم‌تر است.

فصل سوم

واپاشی بتازا

۳-۱ مقدمه

واپاشی رادیواکتیو کانی‌های طبیعی و حاوی اورانیوم و توریوم تا حدود زیادی منشأ مطالعات اولیه فیزیک هسته‌ای بوده است. این واپاشی‌ها دارای نیمه عمرهایی در حدود عمر زمین‌اند، که این امر نمایانگر باقی ماندن این مواد از دوران اولیه پیدایش ماده در اثر گردهمایی نوکلئونهاست. هسته‌هایی با عمر کوتاه‌تر مدت‌ها قبل واپاشیده و ناپدید شده‌اند، و امروز ما فقط واپاشی‌هایی با عمر طولانی را مشاهده می‌کنیم. علاوه بر رادیواکتیویتهٔ طبیعی، هسته‌های رادیواکتیو را از طریق واکنش‌های هسته‌ای در آزمایشگاه نیز می‌توانیم تولید کنیم. این عمل اولین بار در سال ۱۹۳۴ توسط ایرن کوری و فردریک ژولیو، با بمباران کردن آلومینیوم به وسیله ذرات آلفای حاصل از واپاشی پولونیوم رادیواکتیو، انجام شد. در این واکنش ایزوتوپ ^{۳۰}P تولید می‌شود که از طریق گسیل پوزیترون با نیمه عمر ۲/۵ دقیق واپاشیده خواهد شد.

۳-۲ قانون واپاشی رادیو اکتیو

اگر ما یک نمونه از N هستهٔ رادیواکتیو داشته باشیم، احتمال آن‌که هر یک از آن‌ها در یک زمان معین واپاشی کنند مستقل از وضعیت سایر هسته‌های موجود در نمونه است. بنابراین تعداد واپاشی که در حال وقوع است متناسب با N(t)، یعنی تعداد هسته رادیواکتیو موجود در زمان t، است:

$$\frac{dN}{dt} = -WN(t) \qquad (۱-۳)$$

ثابت تناسب W احتمال گذار یا ثابت واپاشی نامیده می‌شود و مقدار آن به ماهیت اختلالی که باعث این واپاشی شده است و به خصوصیات حالت‌های اولیه و نهایی درگیر در واپاشی بستگی دارد. به همین دلیل ثابت واپاشی کمیت مورد علاقه اصلی در بررسی گذارهای هسته‌ای است. از رابطه (۳-۱) قانون آشنای واپاشی نمایی به دست می‌آید:

$$N(t) = N.e^{-Wt} \qquad (۲-۳)$$

که در آن N_0 تعداد هسته‌های رادیو اکتیو در زمان $t = 0$ است. نیمه عمر $T_{1/2}$، مدت زمانی است که طول می‌کشد تا فعالیت یک نمونه به نصف کاهش یابد، همچنین این کمت متناسب به عکس آهنگ گذار است:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{W} = \frac{0.693}{W} \qquad (3\text{-}3)$$

طول عمر یا عمر متوسط یک حالت برانگیخته، میانگین مدت زمانی است که لازم است تا یک هسته رادیو اکتیو واپاشی کند که از طریق معادله زیر با احتمال گذار و نامه عمر مرتبط می‌شود:

$$\overline{T} = \frac{\int_0^\infty te^{-Wt}dt}{\int_0^\infty e^{-Wt}dt} \qquad (3\text{-}4)$$

این سه کمیت یعنی احتمال گذار، نیمه عمر، و عمر متوسط راه‌های متفاوتی برای توصیف یک مشاهده پذیر فیزیکی هستند.

اگر هسته‌ای در یک حالت برانگیخته باشد باید انرژی اضافی خود را از طریق یک واپاشی از دست بدهد. اما پیش‌بینی اینکه واپاشی دقیقا چه زمانی اتفاق می‌افتد غیرممکن است در نتیجه ما یک عدم قطعیتی در زمان $\Delta t = \bar{T}$ داریم که به وجود حالت برانگیخته مربوط می‌شود. بنابراین نیمه عمر محدود یک حالت به ما اجازه نمی‌دهد که انرژی‌اش را با دقت نامحدودی اندازه بگیریم. این نتیجه مستقل از دقت وسایل اندازه گیری است: برای هدف کنونی می‌توانیم با توجه به عدم قطعیت‌های شناخته شده دستگاه اندازه گیری که به اندازه کافی کوچک هستند از آن‌ها صرف نظر می‌کنیم.

در مکانیک کوانتومی مقدار انتظاری یک مشاهده پذیر به صورت میانگین تمام مقادیر اندازه‌گیری شده تعداد زیادی از نمونه‌های یکسان موجود بیان می‌شود به عبارت دیگر اگر ما اندازه‌گیری انرژی را برای یک تعداد زیادی از هسته‌ها، مثلاً N هسته، در همان حالت برانگیخته انجام دهیم، مقادیر به دست آمده با همدیگر یکسان نیستند. اگر مقدار اندازه گیری شده برای هسته برانگیخته iام برابر E_i باشد میانگین $\langle E \rangle$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_i \qquad (5-3)$$

ایده پهن شدن مقادیر اندازه‌گیری شده از طریق ریشه دوم واریانس فراهم می‌شود:

$$\Gamma=\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(E_i^2-\langle E\rangle^2\right)\right\}^{1/2} \qquad (۶-۳)$$

طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، حاصلضرب Γ و $\overline{T}$ تحت بهترین شرایط برابر $\hbar$ است و یا داریم:

$$\Gamma=\frac{\hbar}{\overline{T}}=W\hbar \qquad (۷-۳)$$

کمیت Γ پهنای خط طبیعی یا به اختصار، پهنای یک حالت نامیده می‌شود. هم چنین رابطه بالا نشان می‌دهد که احتمال گذار یک حالت با طول عمر و نیمه عمر به طور معکوس متناسب است. چون $\hbar = ۶.۶ \times ۱۰^{-۲۲} MeV - s$ است، یک حالت با پهنای $۱MeV$ دارای عمر متوسط ۶.۶×۱۰^{-۲۲} است همچنین می‌توان رابطه Γ با احتمال پیدا کردن یک حالت برانگیخته با انرژی مشخص E را به دست آورد. ثابت واپاشی W برحسب توابع موج به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\Psi(r,t)|^2=|\Psi(r,t=0)|^2e^{-Wt} \qquad (۸-۳)$$

برای یک حالت مانا، می‌توان تابع موج مستقل از زمان را به صورت حاصلضرب قسمت مکانی و زمانی نوشت:

$$\Psi(r,t)=\Psi(r)e^{-iEt/\hbar} \qquad (۹-۳)$$

با انجام چنین جداسازی‌هایی روی یک حالت(برانگیخته) که واپاشی می‌کند، انرژی E باید به یک کمیت مختلط تبدیل شود یعنی $E \longrightarrow \langle E\rangle - \frac{1}{2}i\hbar\mathcal{W}$. حال تابع موج مستقل از زمان به شکل زیر نوشته می‌شود، که در این صورت در معادله (۱-۸) نیز صدق می‌کند.

$$\Psi(r,t)=\Psi(r)e^{-i\langle E\rangle t/\hbar - Wt/2} \qquad (۱۰-۳)$$

حال می‌توان با توجه به اینکه حالت برانگیخته انرژی معینی ندارد، تابع موج را بصورت یک برهم نهی از حالت‌هایی که انرژی‌های مختلفی دارند نوشت:

$$\Psi(r,t)=\Psi(r)\int a(E)e^{-iEt/\hbar}dE \qquad (۱۱-۳)$$

که در آن $a(E)$ دامنه احتمال پیدا کردن حالتی با انرژی E است. با مقایسه این معادله و معادله (۳-۱۰) ما به رابطه‌ای بین ثابت واپاشی W و دامنه احتمال $a(E)$ می‌رسیم:

$$e^{-\mathcal{W}i/۲} = \int a(E)e^{-i(E-\langle E\rangle)t/\hbar}dE \qquad (۱۲-۳)$$

که در آن $e^{-\mathcal{W}i/۲}$ تبدیل فوریهٔ $a(E)$ است. با معکوس کردن معادلهٔ بالا نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$a(E) = \frac{۱}{۲\pi\hbar}\int_{۰}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\{E-\langle E\rangle/\hbar-\frac{۱}{۲}\mathcal{W}\right\}\mathrm{t}}\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{i}}{۲\pi}\frac{۱}{(E-\langle E\rangle)+\mathrm{i}\frac{۱}{۲}\hbar\mathcal{W}} \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

احتمال پیدا کردن حالت برانگیخته با انرژی E از مربع قدرمطلق دامنه به دست می‌آید:

$$|a(E)|^{۲} = \frac{۱}{۴\pi^{۲}}\frac{۱}{(E-\langle E\rangle)^{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\Gamma\right)^{۲}} \qquad (۱۴-۳)$$

که در آن از معادله (۳-۷) استفاده شده است. شکل چنین توزیعی، لورنتسی است و پهنای Γ می‌تواند به صورت پهنای کل نصف بیشینه (FWHM) این گونه توزیع‌ها باشد. از آنجا که مسئله عدم قطعیت وسایل اندازه‌گیری در اینجا مطرح نشده، پهنا همان " پهنای خط طبیعی" توزیع در انرژی حالت برانگیخته است.[۳۷].

۳-۳ انواع واپاشی‌ها و نسبت انشعاب

سه نوع عمده واپاشی عبارت است از: واپاشی آلفا، بتا و گاما. در فرآیندهای واپاشی آلفا و بتا، به ترتیب یک هستهٔ نایدار برای رسیدن به هستهٔ پایدارتر یک ذرهٔ آلفا(هستهٔ $^{۴}_{۲}He$ و یک ذرهٔ بتا(e^{-} یا e^{+}) گسیل می‌کند. در واپاشی گاما، یک حالت برانگیخته بدون هیچ‌گونه تغییر هسته‌ای به حالت پایه واپاشیده می‌شود.

بعضی از هسته‌ها فقط طی یک فرآیند واپاشیده می‌شوند، ولی غالباً نمودار واپاشی بسیار پیچیده و شامل گسیل آلفا، بتا و گاما در مدهایی است که باهم رقابت می‌کنند. بنابراین یک حالت برانگیخته ممکن است به بیشتر از یک حالت نهایی واپاشی کند. اگر احتمال گذار برای هر حالت نهایی $\mathcal{W}(i)$ باشد، احتمال گذار کل برای حالت اولیه با جمع همه گذارهای ممکن به حالت نهایی برابر است:

$$W = \sum_{i} W(i) \qquad (۱۵-۳)$$

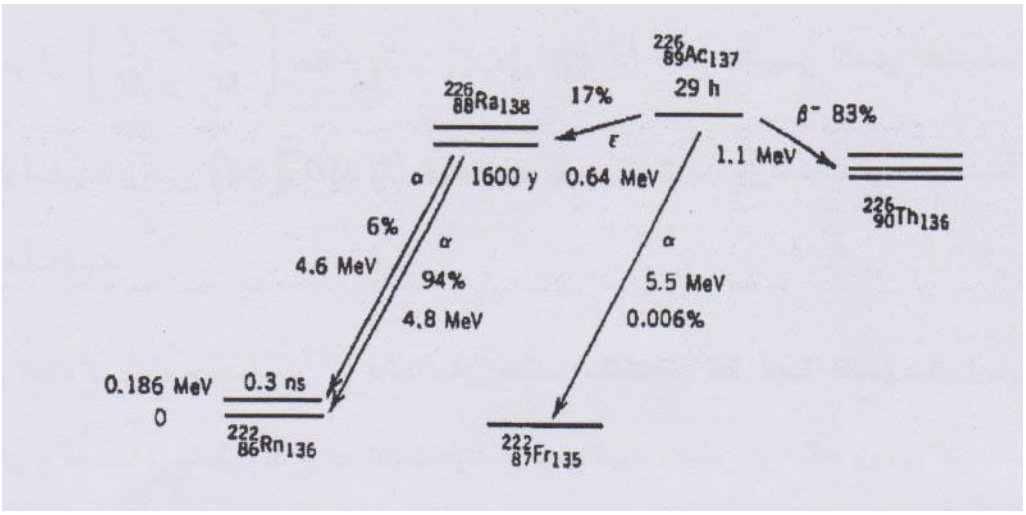
به طور مشابه، پهنای کل Γ برابر با جمع همه پهناهای جزئی است:

$$\Gamma = \sum_{i}\Gamma(i) \qquad (۱۶-۳)$$

با توجه به معادله (۳-۱۵)، رابطه بین عمر $T_{1/2}$ و نیمه عمر جزئی $T_{1/2}(i)$ عبارت است از:

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \sum_i \frac{1}{T_{1/2}(i)} \qquad (۱۷-۳)$$

نسبت انشعاب، احتمال گذار جزئی مربوط به یک حالت نهایی خاص بصورت کسری از احتمال گذار کل از یک حالت اولیه معین به ما می‌دهد. برای مثال طول عمر میانگین مزون π^0 برابر است با 8.4×10^{-17} ثانیه است، این مزون ۹۸.۸ درصد زمان به ۲ پرتو γ، ۱.۱۷ درصد زمان به یک γ و یک جفت الکترون – پوزیترون و 2×10^{-7} زمان به تنها یک جفت الکترون – پوزیترون واپاشی می‌کند. پس نسبت‌های انشعاب برای این سه کانال واپاشی به ترتیب عبارتند از: ۹۸.۸٪، ۱.۱۷٪ و 2×10^{-7}٪. در میان هسته‌های رادیواکتیو، حالت هستهٔ فرد – فرد $^{226}_{89}Ac$ در ابتدای سری آکتینید، دارای نیمه عمر ۲۹ ساعت است و می‌تواند با یک گسیل یک الکترون به $^{226}_{90}Th$ واپاشی کند و با گیراندازی یک الکترون اتمی به $^{229}_{88}Ra$ تبدیل شود یا با گسیل یک ذره α به $^{222}_{87}Fr$ واپاشی کند که نسبت انشعاب هر کدام از این مدهای واپاشی به ترتیب ۸۳٪، ۱۷٪ و ۰.۰۰۶٪ است[۳۷].



شکل(۳-۱) انواع مختلف فرایندهای واپاشی در هسته $^{226}_{89}As$ [38]

۳-۳-۱ عنصر ماتریس‌گذار

احتمال گذار با مربع عنصر ماتریس هسته‌ای متناسب است:

$$\mathcal{M}_{fi}(M_f, M_i) = \langle J_f M_f \xi | O_{\lambda\mu} | J_i M_i \zeta \rangle \qquad (۱۸-۳)$$

که در آن $|J_i M_i \zeta\rangle$ و $|J_f M_f \xi\rangle$ به ترتیب تابع موج حالت‌های اولیه و نهایی هستند و $O_{\lambda\mu}$ قسمت هسته‌ای عملگر گذار است که یک تانسور کروی از مرتبه (λ, μ) است. در این رابطه نمادهای ξ و ζ نشان دهنده اعداد کوانتومی دیگری غیر از J و M ، که به اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط می‌شوند، هستند که برای مشخص کردن حالات هسته‌ای مورد نیاز هستند. چون ممکن است گذار شامل گسیل یک ذره مانند الکترون با یک نوکلئون باشد، لزوماً حالت‌های اولیه و نهایی در همان هسته نیستند: عنصر ماتریسی $\mathcal{M}_{fi}$ به M_i و M_f ، تصاویر اندازه حرکت زاویه‌ای کل روی محور کوانتش، را می‌توان با استفاده از قضیه ویگنر – اکارت بیان کرد:

$$\mathcal{M}_{fi}(M_f, M_i) = (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi \| \mathrm{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \qquad (19-3)$$

که در آن $\begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix}$ نماد $3j-$ و $\langle J_f \xi \| \mathrm{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle$ عنصر ماتریسی کاهش یافته است.

هدف اصلی ما بررسی $\langle J_f \xi \| \mathrm{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle$ خواهد بود، چون یک کمیت ناوردا تحت چرخش سیستم مختصات است.

اگر اندازه‌گیری به جهت اسپین در حالت نهایی حساس نباشد، این گذار همه حالت‌های نهایی ممکن را که تنها در مقدار M_f با هم تفاوت دارند در برمی‌گیرد. بنابراین در هنگام بررسی گذار، اگر عملگر گذار فقط به جهت خاصی در فضا محدود نشده باشد، باید همه مقادیر مجاز μ را شامل شود. تحت این شرایط مربع عنصر ماتریس گذار کاهش یافته به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \sum_{\mu \mathcal{M}_f} \left| (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi \| \mathrm{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \right|^2 \\ &= \frac{\Delta(J_f, \lambda, J_i)}{2J_i + 1} \left| \langle J_f \xi \| \mathrm{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \right|^2 \qquad (20-3) \end{aligned}$$

در رسیدن به شکل نهایی از رابطهٔ تعامد بین نمادهای $3j-$ استفاده شده است:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{\Delta(j_1, j_2, j_3)}{2j_3 + 1} \delta_{j_3, j'_3} \delta_{m_3, m'_3} \qquad (21-3)$$

که در آن:

$$\Delta(J_f,\lambda,J_i)=\begin{cases}1 & for \quad J_f=\lambda+J_i\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (۲۲-۳)$$

$\Delta(J_f,\lambda,J_i)$ ، قاعده گزینش اندازه حرکت زاویه‌ای ا برای گذارهای ممنوع یعنی گذارهایی که در آنها رابطه مثلثی بین بردارهای اندازه حرکت زاویه‌ای J_f ، λ و J_i رعایت نشده باشد، بیان می‌کند. توجه کنید که $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ تعریف شده در معادله (۱-۲۰) مستقل از M_{i} می‌باشد[۳۷].

۳-۳-۲ احتمال گذار در نظریه اختلال وابسته به زمان

رابطه بین احتمال گذار و عنصر ماتریس هسته‌ای با استفاده از نظریه اختلال وابسته به زمان ایجاد می‌شود، یک هامیلتونی وابسته به زمان را در نظر بگیرید.

$$H(t)=H_0+H'(t) \qquad (۲۳-۳)$$

که H_0 مستقل از زمان است و همه وابستگی زمان در $H'(t)$ است. به طور خاص در اینجا موردی را بررسی کنیم که در آن شدت $H'(t)$ به اندازه کافی ضعیف باشد به گونه‌ای که بتوان آن را به صورت اختلالی نسبت به H_0 در نظر گرفت. ویژه توابع H_0 را با $\phi_n(r)$ نشان می‌دهیم:

$$H_0\phi_n(r)=E_n\phi_n(r) \qquad (۲۴-۳)$$

فرض می‌کنیم که همه $\phi_n(r)$ ها با هم یک مجموعه کامل از توابع متعامد را تشکیل می‌دهند. به دلیل سادگی در نمادگذاری از هر گونه نمادی که نشان دهنده وابستگی احتمالی $\phi_n(r)$ به اسپن، ایزواسپن و سایر متغیرها باشد، صرف نظر شده است. ویژه تابع $\psi(r,t)$ فقط برای H_0 جواب معادله شرودینگر وابسته به زمان است:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial \mathrm{t}}=H_0\psi(r,t) \qquad (۲۵-۳)$$

که می‌تواند برحسب $\phi_n(r)$ نیز بیان شود:

$$\psi(r,t)=\sum_n \mathrm{c_n}\,\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \qquad (۲۶-۳)$$

در اینجا ضرایب بسط عبارتند از:

$$\mathrm{c_n}=\int \phi_n^*(r)e^{-iE_nt/\hbar}\psi(r,t)dV \qquad (۲۷-۳)$$

که مستقل از زمان هستند چون هنوز $H'(t)$ را در نظر نگرفته‌ایم.

برای هامیلتونی کل، ویژه توابع $\psi(r,t)$ ممکن است هنوز برحسب $\phi_n(r)$ بیان شوند با این تفاوت که حالا ضریب بسط وابسته به زمان هستند:

$$\Psi(r,t) = \sum_n c_n(t)\,\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \qquad (۲۸-۳)$$

ضریب $c_n(t)$ می‌تواند به صورت دامنه احتمال پیدا کردن سیستم در حالت مختل نشدهٔ n در زمان t توصیف شود. با جایگذاری معادله (۳-۲۸) در معادله شرودینگر وابسته به زمان برای $H(t)$ داریم:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial \mathrm{t}} = \{H_{\cdot} + H'(t)\}\Psi(r,t) \qquad (۲۹-۳)$$

به این ترتیب، معادله حاکم بر ضرایب $c_n(t)$ به دست می‌آید:

$$i\hbar\sum_n\left\{\frac{dc_n(t)}{dt} - ic_n(t)\frac{E_n}{E}\right\}\phi_n(r)e^{iE_nt/\hbar} = \{H_{\cdot} + H'(t)\}\sum_n c_n(t)\,\phi_n(r)e^{iE_nt/\hbar} \qquad (۳۰-۳)$$

با ضرب کردن $\phi_n^*(r)exp\{iE_kt/\hbar\}$ در دو طرف معادله و انتگرال‌گیری روی همه متغیرهای مستقل به غیر از $\boldsymbol{t}$، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$i\hbar\sum_n\left\{\frac{dc_n(t)}{dt} - ic_n(t)\frac{E_n}{E}\right\}e^{i(E_k-E_n)t/\hbar}\langle\phi_k(r)|\phi_n(r)\rangle = \sum_n c_n(t)\{\langle\phi_k(r)|H_{\cdot}|\phi_n(r)\rangle + \langle\phi_k(r)|H'(t)|\phi_n(r)\rangle\}\,e^{i(E_k-E_n)t/\hbar} \qquad (۳۱-۳)$$

چون $\phi_n(r)$ عضو یک مجموعه متعامد از ویژه توابع $H_{\cdot}$ است برای به دست آوردن معادله بالا از شرایط زیر استفاده شده است:

$$\langle\phi_k(r)|\phi_n(r)\rangle = \delta_{\mathrm{k\,n}} \quad , \quad \langle\phi_k(r)|H_{\cdot}|\phi_n(r)\rangle \qquad (۳۲-۳)$$

با جایگذاری این نتایج در (۳-۳۱) یک معادله دیفرانسیل برای $c_k(t)$ به دست می‌آید:

$$i\hbar\frac{dc_k(t)}{dt} = \sum_n\langle\phi_k|H'(t)|\phi_n(t)\rangle\,e^{i\omega_{k\,n}t} \qquad (۳۳-۳)$$

که در آن $\omega_{k\,n} \equiv (E_k - E_n)/\hbar$ است. به عنوان شرایط اولیه، فرض می‌کنیم که در $t = ۰$ سیستم در حالت $\phi_.(r) = ۰$ است:

$$c_n(۰) = \begin{cases} ۱ & for \quad n = ۰ \\ ۰ & for \quad n \neq ۰ \end{cases} \qquad (۳۴ - ۳)$$

و اگر اختلال به اندازه کافی ضعیف باشد در همه زمان‌های مورد بررسی، انتظار داریم که:

$$c_k(۰) \approx \begin{cases} ۱ & for \quad k = ۰ \\ ۰ & for \quad k \neq ۰ \end{cases} \qquad (۳۵ - ۳)$$

در نتیجه می‌توان معادله (۳-۳۰) را با نگه داشتن تنها یک جمله در جمع طرف راست این معادله، یعنی جمله $n = ۰$، تقریب زد. با این کار نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = \langle \phi_k | H'(t) | \phi_.(t) \rangle e^{i\omega_k . t} \qquad (۳۶ - ۳)$$

به علاوه، اگر متغیر زمانی $H'(t)$ در مقایسه با $\exp\{i\omega_k . t\}$ کُند باشد می‌توان H' را ثابت در نظر گرفت. با این تقریب معادله (۱-۳۶) به سادگی حل می‌شود و نتیجه به صورت زیر بیان می‌شود.

$$c_k(t) = \frac{\langle \phi_k | H' | \phi_.(t) \rangle}{E_k - E_.} \left(۱ - e^{i\omega_k . t} \right) \qquad (۳۷ - ۳)$$

$$|c_k(t)|^۲ = ۲ |\langle \phi_k(r) | H' | \phi_.(r) \rangle|^۲ \frac{۱ - \cos(\omega_k . t)}{(E_k - E_.)^۲} \qquad (۳۸ - ۳)$$

اگر سیستم از حالت $n = ۰$ در زمان $t = ۰$ شروع شده باشد، عبارت بالا بیان کننده احتمال یافتن سیستم در حالت k و در زمان t است. احتمال کل برای گروهی از حالتها در بازه‌هایی که با f نشان داده می‌شوند، از طریق جمع روی احتمال همه حالت‌های نهایی k در این بازه‌ها داده می‌شود:

$$\sum_{k \in f} |c_k(t)|^۲ = ۲ \sum_{k \in f} |\langle \phi_k(r) | H' | \phi_.(r) \rangle|^۲ \frac{۱ - \cos(\omega_k . t)}{(E_k - E_.)^۲}$$
$$= \frac{۲}{h^۲} \int |\langle \phi_k(r) | H' | \phi_.(r) \rangle|^۲ \frac{۱ - \cos(\omega_k . t)}{(E_k - E_.)^۲} \rho(E_k) dE_k \qquad (۳۹ - ۳)$$

در آخرین مرحله، جمع روی همه حالات نهایی ممکن به انتگرال روی حاصلضرب انرژی در چگالی حالت‌های نهایی $\rho(E_k)$ تبدیل می‌شود که دلایل آن درادامه خواهد آمد.

ثابت واپاشی یا احتمال گذار بر واحد زمان $\mathcal{W}$، به آهنگ پیدا کردن سیستم در گروهی از حالات نهایی با نماد f مربوط است و به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\mathcal{W} = \frac{d}{dt}\sum_{k\in f}|c_k(t)|^2 =$$
$$\frac{2}{\hbar^2}\int|\langle\phi_k(r)|H'|\phi_.(r)\rangle|^2\frac{sin(\omega_k.t)}{\omega_{k.}^2}\rho(E_k)dE_k \qquad (40-3)$$

چون تابع $\frac{(\omega_k.t)}{\omega_{k.}^2}$ به جز در $\omega_k. \approx 0$ خیلی سریع نوسان می‌کند، فقط یک ناحیه کوچک در اطراف $E_k = E_.$ می‌تواند در انتگرال سهم داشته باشد. در این بازه کوچک انرژی می‌توانیم از عنصر ماتریسی $\langle\phi_k(r)|H'|\phi_.(r)\rangle$ صرف نظر کنیم و چگالی حالت $\rho(E_k) = \rho(E_f)$ را به صورت یک ثابت در نظر بگیریم، پس می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد. علاوه بر این حدود انتگرال گیری روی E_k می‌تواند تحت شرایطی و بدون از دست دادن دقت زیاد با $\pm\infty$ جایگزین شود. شکل نهایی احتمال گذار بر واحد زمان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{W} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle\phi_k(r)|H'|\phi_.(r)\rangle|^2\rho(E_f) \qquad (41-3)$$

که در آن از رابطه $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin(\omega_k.t)}{\omega_{k.}^2}d\omega_k. = \pi$ استفاده شده است. این فرمول نقطه آغاز محاسبات مربوط به احتمال گذار است که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد. چون فرمی آن را «قاعده طلایی نظریه اختلال وابسته به زمان» نامید، این فرمول اغلب با نام قاعده طلایی فرمی شناخته می‌شود.

۳-۴ برهم کنش‌های ضعیف و انواع آن

واپاشی بتای هسته‌ای شکلی از برهم کنش ضعیف است که علاوه بر گذار بین حالت‌های هسته‌ای، پدیده‌های متنوع دیگری شامل هادرون‌ها و لپتون‌ها نیز در این نوع برهم کنش شرکت می‌کنند. در اغلب موارد این فرآیندهای ضعیف نمی‌توانند مشاهده شوند چون آن‌ها در مقایسه با واکنش‌های رقیبی که از طریق برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی و قوی انجام می‌شوند چندین مرتبه بزرگی کندتر

اتفاق می‌افتند. در نتیجه مطالعه برهم‌کنش‌های ضعیف باید در مواردی انجام شود که در آنها فرآیندهای سریع‌تر یا ممنوع باشند و یا قواعد انتخاب مانع از وقوع آن‌ها شوند.

واکنش ضعیف اساسی در هسته‌ها با واپاشی یک نوترون آزاد و یک پروتون مقید توصیف می‌شود:

$$n \longrightarrow p + e^- + \overline{v_e} \qquad (۴۲-۳)$$

$$P_{bound} \longrightarrow p + e^+ + v_e \qquad (۴۳-۳)$$

این گذارها مثال‌هایی از یک طبقه بندی کلی از واپاشی‌هاست که در سایر هادرون‌ها نیز اتفاق می‌افتند. برای نمونه:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + v_\mu$$
$$\longrightarrow e^+ + v_e \qquad (۴۴-۳)$$

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \overline{v_\mu}$$
$$\longrightarrow e^- + \overline{v_e} \qquad (۴۵-۳)$$

$$\Sigma^- \longrightarrow n + \pi^- \qquad (۴۶-۳)$$

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^\cdot$$
$$\longrightarrow \pi^+ + \pi^\cdot + \pi^+ \qquad (۴۷-۳)$$

واکنش‌هایی نظیر آن‌هایی که با روابط (۳-۴۳ و ۳-۴۳) و(۳-۴۴ و ۳-۴۵) داده شده‌اند " فرآیندهایی نیمه لپتونی" نامیده می‌شوند، چون هم هادرون‌ها و هم لپتون‌ها را شامل می‌شوند. نمونه‌های داده شده در (۳-۴۶ و ۳-۴۷)" فرآیندهای غیر لپتونی " یا " فرآیندهای هادرونی" هستند چون لپتون‌ها در حالت‌های اولیه یا نهایی وارد نشده‌اند. همچنین "فرآیندهای کاملاً لپتونی" نیز وجود دارد:

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + v_e + v_\mu \qquad (۴۸-۳)$$

هدف اصلی ما بررسی مدهای نیمه لپتونی است که واپاشی بتای قسمت از آنها است. غالباً به فرآیندهای برهم کنش‌های ضعیف «جهانی» گفته می‌شود چون شدت برهم‌کنش‌ها در هر کدام از سه نوع واکنش توصیف شده در پاراگراف قبل، یکسان است. این نکته به وسیله ثابت جفت شدگی G_F ،

که به صورت کلی ثابت جفت شدگی فرمی نامیده می‌شود، بیان می‌شود؛ G_F دارای مقداری یکسان در هر کدام از سه نوع واکنش است:

$$G_F = ۱.۴۳۵۷۲(۳) \times ۱۰^{-۶۲} J - m^۳ = ۱.۱۶۶۳۹(۲) \times ۱۰^{-۱۱} (\hbar c)^۳ MeV^{-۲} \qquad (۴۹-۳)$$

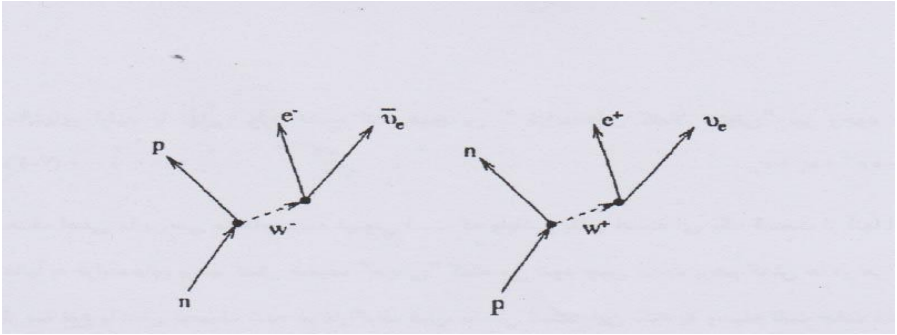
علیرغم اینکه این ثابت از طریق واپاشی ابر مجاز β در هسته‌ها اندازه‌گیری شده است با استفاده است واپاشی میون در (۳-۴۸) یا سایر فرآیندهای برهم کنش ضعیف نیز این اندازه گیری امکان‌پذیر است.

همان‌طور که برهم کنش الکتروکغناطیسی از طریق تبادل فوتون‌های مجازی صورت می‌گیرد برهم کنش ضعیف نیز به واسطه بوزون‌های برداری $W^{\pm}$ و $Z^{۰}$ انجام می‌شود که جرم آنها عبارتند از:

$$m_w c^۲ = ۸۰.۳۶ \pm ۰.۱۲ GeV \quad , \quad m_z c^۲ = ۹۱.۱۸۷ \pm ۰.۰۰۷ GeV \qquad (۵۰-۳)$$

به دلیل جرم زیاد این ذرات واسطه، برد برهمکنش‌های ضعیف خیلی کوتاه است $(r_{۰} = \hbar/mc \sim ۱۰^{-۳} fm)$ یعنی حدود سه مرتبه بزرگی گوچکتر از بخش بلند برد نیروی هسته‌ای است. به همین دلیل برهم کنش ضعیف در بسیاری از اوقات ممکن است به صورت یک برهم کنش با برد – صفر یا برهم کنش "تماسی" در نظر گرفته شود. (درواقع نظریه فرمی برای واپاشی بتا که در بخش‌های بعد مطرح می‌شود برهمین اساس به دست آمده است.)

چون بوزون‌های $W^{\pm}$ باردار هستند، می‌توانند وضعیت بار یک ذره را تغییر دهند که نمونه‌هایی از این واکنش‌ها در معادلات (۳-۴۲) و (۳-۴۳) داده شده است و با نمودارهایی در شکل (۳-۲) نمایش داده شده‌اند. اغلب فرآیندهای واپاشی ضعیف به واسطه بوزون‌های باردار $W^{\pm}$ انجام می‌شوند.



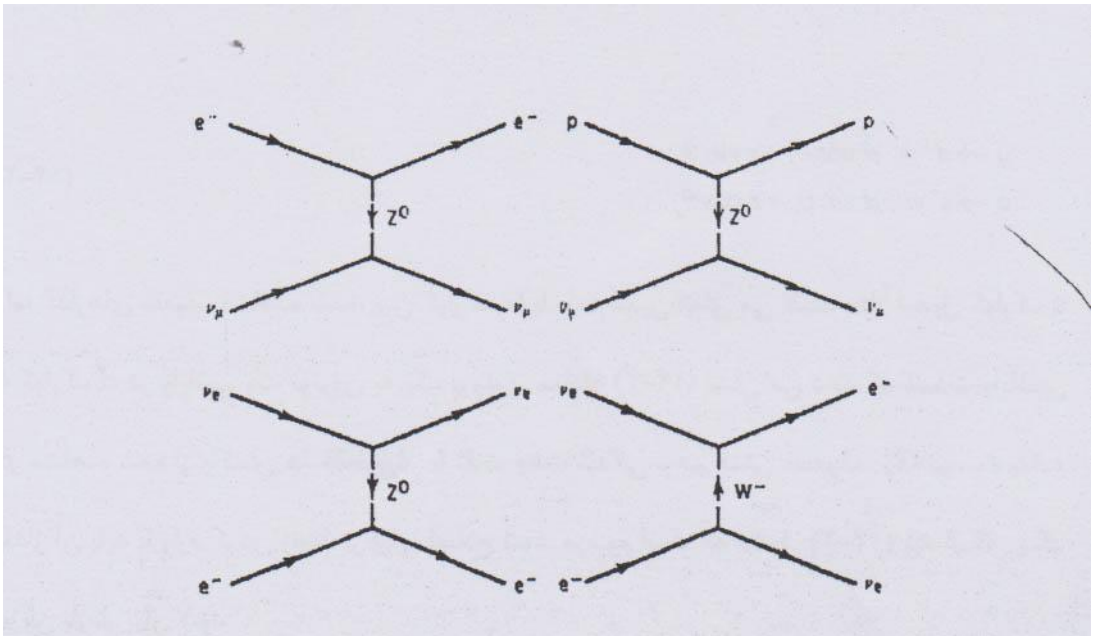
شکل(۳-۲) نمودار واپاشی بتا[**38**]

مانند مثال‌هایی که در معادلات (۳-۴۴) تا (۳-۴۸) داده شده است. این موارد، برهم‌کنش‌های ضعیف جریان باردار نامیده می شوند. نوع دیگر از برهم کنش ضعیف که در ارتباط با تبادل بوزون خنثی $Z^{\cdot}$ است برهم کنش ضعیف جریان نام دارد، نمونه‌ای از آن پراکندگی نوترینو است:

$$\begin{aligned} v_\mu + e^- &\longrightarrow v_\mu + e^- \\ v_\mu + P &\longrightarrow v_\mu + P \end{aligned} \qquad (۵۱-۳)$$

که آن در شکل (۳-۳) نشان داده شده‌اند، با قابل دسترس شدن پرتوهای پرشدت نوترینوها با انرژی بالا ($\sim ۱۰۰ GeV$) در اوایل دهه ۱۹۷۰ در سرن، مشاهده این رویدادهای پراکندگی نوترینو و تصدیق وجود جریان‌های خنثای ضعیف ممکن شد.[۳۹].

در یک سطح بنیادی‌تر، می‌توان واپاشی β هادرون‌ها را به صورت تبدیل یک نوع کوارک به نوع دیگر، از طریق تبادل جریان باردار ضعیف در نظر بگیریم. همان‌طور که می‌دانیم طعم کوارک‌ها در برهم کنش قوی پایسته است. اما در برهم کنش‌های ضعیف ممکن است طعم کوارک تغییر کند.



شکل(۳-۳) برهمکنش‌های ضعیف جریان خنثی به واسطه مبادله Z^0 صورت می‌گیرد[39]

برای مثال در تبدیل یک کوارک d به یک کوارک u داریم:

$$d \rightarrow u + e^- + \overline{v_e} \qquad (۵۲-۳)$$

این همان چیزی است که در واپاشی β^- یک نوترون اتفاق می‌افتد؛ یعنی واپاشی نوترون برحسب کوارک‌ها می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(uud) \rightarrow (uud) + e^+ + \overline{v_e} \qquad (۵۳-۳)$$

و واپاشی β^+ یک پروتون مقید به یک نوترون، شامل تبدیل یک کوارک u به یک کوارک d است:

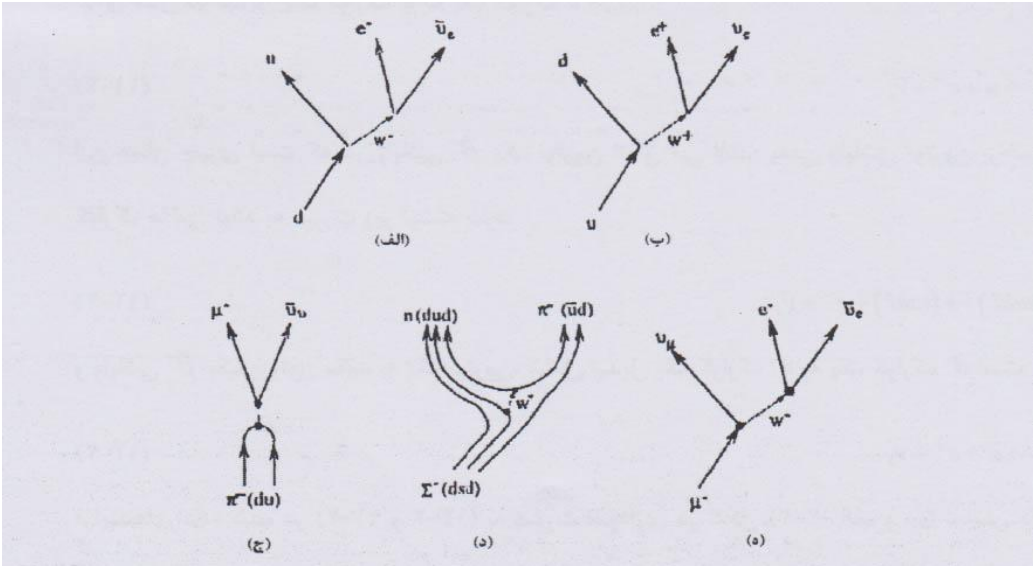
$$u \rightarrow d + e^+ + v_e \qquad (۵۴-۳)$$

فرآیندهای داده شده در (۳-۵۲ و ۳-۵۴) به صورت نموداری در شکل (۳-۴ الف و ب) نمایش داده شده‌اند. گذارهای ضعیف دیگر در معادلات (۳-۴۴ تا ۳-۴۸) نیز در شکل (۳-۴ ج تا ه) نشان داده شده‌اند. وقتی که یک کوارک واپاشی می‌کند لازم نیست که نتیجه این واپاشی یک کوارک با طعم معین باشد. در مواد ساده واپاشی ضعیف میان چهار کوارکu ، d، s و c ، ترکیب طعم‌های تولید شده در واپاشی می‌تواند تنها برحسب یک پارامتر یعنی زاویه کبیبو θ_c بیان شود:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow d' = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \\ c &\rightarrow s' = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \end{aligned} \qquad (۵۵-۳)$$

اما گذارهای ضعیف مشاهده شده، بین کوارک‌ها با طعم معین اتفاق می‌افتند مثلاً تبدیل کوارک u به کوارک d در واپاشی یک نوترون به یک پروتون. معادلهٔ (۳-۵۵) نشان می‌دهد که شدت واپاشی β مشاهده شده از واکنش‌ها، فقط برابر با ثابت جفت شدگی برهم کنش ضعیف G_f نیست بلکه مقدار آن باید با وارد کردن زاویه ترکیبی اصلاح شود. مرسوم است که تبدیل (۳-۵۶) به شکل یک جریان باردار بیان شود.

$$J^+_{weak} = (\bar{u} \quad \bar{c}) \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \qquad (۵۶-۳)$$



شکل(۳-۴) واپاشی ضعیف کوارک‌ها[38]

در حالت خیلی کلی‌تر که شش کوارک را در برگیرد، داریم:

$$J^{+}_{weak} = (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \qquad (۵۷-۳)$$

در این رابطه، ماتریس ۳ × ۳ را ماتریس CKM می‌نامند. ۹ عنصر ماتریسی توابعی از سه زاویه ترکیبی و یک عامل فاز هستند. برای تعیین دقیق تمامی عناصر ماتریسی مستقل باید واپاشی ضعیف کوارک‌های سنگین را نیز در نظر بگیریم.

برای واپاشی β هسته‌ای، تنها گذار بین کوارک‌های u و d برای ما اهمیت دارد، در نتیجه فقط حاصلضرب ثابت جفت شدگی فرمی G_f و θ_c در این مرحله وارد می‌شود. زاویهٔ ترکیبی به اندازهٔ کافی کوچک است و ما می‌توانیم در اغلب موارد از آن صرف نظر کنیم. به منظور ساده سازی در نمادها و اجتناب از هرگونه اشتباه از نماد G_v، ثابت جفت شدگی برداری، برای نمایش حاصلضرب و حذف حضور صریح زاویه ترکیبی استفاده می‌کنیم. اما باید به اختلاف بین شدت اندازه گیری شدهٔ واپاشی ضعیف در هسته‌ها و مقدار G_F توجه کنیم.

۳-۴-۱ ناپایستگی پاریته در برهم‌کنش‌های ضعیف

یکی از ویژگی‌های قابل توجه واپاشی‌های ضعیف، ناپایستگی پاریته در این نوع واپاشی‌ها است. اهمیت بررسی این موضوع در ارتباط نزدیک آن با شکل عملگر واپاشی β هسته‌ای است. عملکرد پاریته را می‌توان به صورت انعکاس مختصات فضایی بیان کرد. یعنی:

$$(x, y, z) \xrightarrow[parity]{} (-x, -y, -z) \qquad (۵۸ - ۳)$$

غالباً عملکرد پاریته به صورت یک تصویر آینه‌ای از دستگاه مختصات درنظر گرفته می‌شود. تحت عملگر پاریته یک اسکالر معمولی (S) تغییر نمی‌کند. اما یک بردار معمولی (V) تغییر علامت می‌دهد. به منظور تمایز با بردار محوری که بعداً تعریف می‌شود، بردار معمولی را بردار قطبی می‌نامیم. بردارهای مکان r و اندازه حرکت p نمونه‌هایی از بردارهای قطبی هستند.

همچنین می‌توانیم بردارهایی بسازیم که علامت آنها تحت تبدیل پاریته نکند. برای مثال بردار اندازه حرکت زاویه‌ای $L = r \times p$ تحت عملگر پاریته علامتش تغییر نمی‌کند چون هر دو بردار r و p تغییر علامت می‌دهند. بردارهایی که تحت انعکاس دستگاه مختصات تغییر علامت نمی‌دهند را بردارهای محوری (A) می‌نامند. همه عملگرهای اندازه حرکت زاویه‌ای که عملگر اسپین ذاتی را در برمی‌گیرند، بردارهای محوری هستند. حاصلضرب اسکالر یک بردار محوری و یک بردار قطبی یک اسکالر است که تحت عملکرد پاریته تغییر علامت می‌دهد. این گونه اسکالرها را شبه اسکالر (P) می‌نامند. علاوه بر این دسته پنجم کمیت‌ها، تانسورها نامیده می‌شوند (البته نباید آنها را با تانسورهای کروی که در جبر اندازه حرکت زاویه‌ای استفاده می‌شود اشتباه گرفت.) که این کمیت‌ها نسبت به کمیت‌های S ، V، A ، P تحت تبدیل پاریته رفتار متفاوتی دارند، اما در اینجا به انها نمی‌پردازیم.

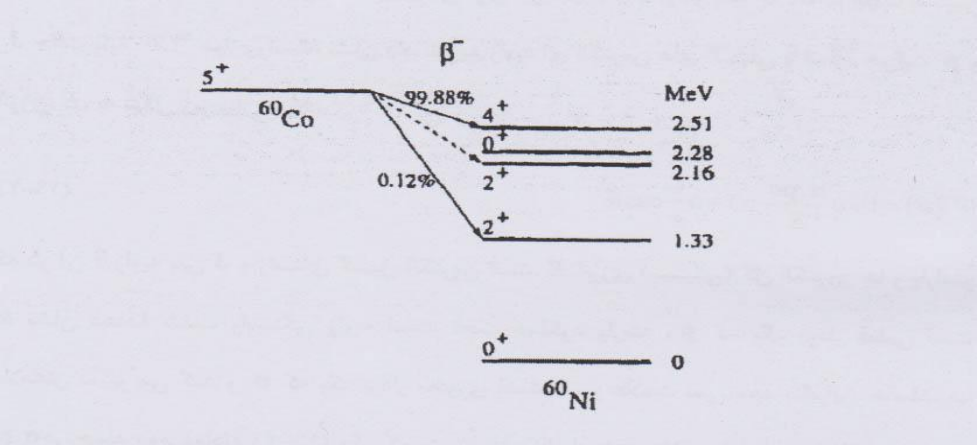
عملگری که از ترکیب اسکالرها و شبه اسکالرها ساخته می‌شود یا عملگری که از ترکیب بردارها و بردارهای محوری تولید می‌شد یک پاریته معین ندارد، در نتیجه پاریته در رفتار این گونه عملگرها پایسته نیست. در برهم‌کنش‌های قوی و الکترومغناطیس پاریته اکیداً پایسته است چون تمام این

فرآیندها تحت انعکاس فضایی ناوردا هستند. در حالی که این مطلب در مورد فرآیندهای برهم کنش ضعیف صادق نیست.[۳۸].

تردید در نقض پاریته در برهم کنش ضعیف از مشاهده واپاشی مزون K^+ به وجود آمد. برای این واپاشی دو مد متفاوت مشاهده شده بود که یک مد دو پیون و دیگری سه پیون در حالت نهایی داشت، که در معادله (۳-۴۷) نشان داده شده است. چون این دو مد پاریته‌های متفاوتی دارند، ناپایستگی پاریته در واپاشی‌های ضعیف به عنوان یک راه‌حل پیشنهاد شد و این پیشنهاد به مشاهده واپاشی β^- در ${}^{۶۰}Co$ تایید شد، که این واپاشی عبارت است از :

$$۶۰_{Co} \rightarrow ۶۰_{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e \qquad (۵۹-۳)$$

حالت پایهٔ هسته فرد – فرد ${}^{۶۰}_{۲۷}Co$ دارای اسپین – پاریته $J^\pi = ۵^+$ است که در شکل (۳-۵) نشان داده شده است، حالت پایه غالباً (با نسبت انشعاب ۹۹.۸۸٪) به حالت $J^\pi = ۴^+$ هستهٔ ${}^{۶۰}Ni$ با انرژی برانگیختهٔ $۲.۵۱MeV$ ئاپاشی می‌کند، این واپاشی یک گذار گاموف – تلر خالص است.



شکل(۳-۵) نمودار واپاشی کبالت-۶۰ به نیکل-۶۰ **[38]**

درسال ۱۹۵۷ وو و همکارانش با استفاده از واپاشی بتای ${}^{۶۰}Co$ یک آزمایش موفقیت‌آمیز را در زمینه نشان دادن ناپایستگی پاریته به نتیجه رساندند. آنها نمونه‌ای از ${}^{۶۰}Co$ را در داخل یک سیم پیچ مغناطیسی قرار دارند و آن را تا دمای $۰.۰۱K$ سرد کردند در چنین درجه حرارتی، حرکت گرمایی نمی‌تواند همسویی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی هسته‌ها رابرهم زند و در نتیجه اسپین‌ها هسته‌ها

در جهت موازی با جهت میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند. هسته‌های ^{۶۰}Co قطبیده شده به حالت برانگیختهٔ هستهٔ ^{۶۰}Ni واپاشیده می‌شود که این واکنش در معادله (۳-۵۹) آمده است.[۴۰] معکوس سازی جهت میدان مغناطیسی، اسپین‌ها را معکوس می‌کرد و بدین کونه عمل انعکاس تحقق می‌یافت. اگر تعداد ذرات بتای گسیل شده در جهت میدان مغناطیسی و خلاف آن با هم مساوی می‌شد، ناوردایی واپاشی بتا نسبت به عملکرد پاریته به اثبات می‌رسید. در واقع آنچه مشاهده شد، این بود که دست کم ۷۰٪ ذرات β درخلاف جهت اسپین هسته گسیل می‌شدند. می‌توان نشان داد آنچه که مشاهده شده به معنای نقض پاریته است: اگر اسپین همه هسته‌های ^{۶۰}Co در یک جهت قرار گیرند ما یک جهت ثابت در فضا داریم. می‌توان این جهت را با بردار یکه σ ، که با جهت اسپین J حالت پایهٔ ^{۶۰}Co موازی است، نشان داد. توزیع زاویه‌ای الکترون‌های گسیلی با اندازه حرکت p و انرژی E ، به شکل زیر بیان می‌شود.

$$W(\theta) = ۱ + a\frac{\sigma.pc}{E} = ۱ + a\frac{v}{c}\cos\theta \qquad (۶۰ - ۳)$$

که در آن θ زاویه بین J و راستای گسیل الکترون است. E انرژی (نسبیتی) کل الکترونها و پارامتر a نشان دهندهٔ شدت وابستگی زاویه است. تحت عملکرد پاریته، p که یک بردار قطبی است علامتش تغییر می‌کند و σ که یک بردار محوری است تغییر علامت نمی‌دهد بنابراین حاصلضرب $\sigma.p$ که در جمله دوم معادله (۳-۶۰) یک کمیت شبه اسکالر است و علامت آن تحت انعکاس دستگاه مختصات فضایی تغییر می‌کند. از طرف دیگر اولین جمله (واحد)، یک اسکالر است که ناوردا باقی می‌ماند. اگر پاریته پایسته باشد با در نظر گرفتن این حقیقت که $\sigma.p \to -\sigma.p$ ، جمله دوم معادلهٔ (۳-۶۰) باید حذف شود. در نتیجه انتظار داریم که $a = ۰$ باشد و توزیع زاویه‌ای الکترونهای گسیلی همسانگرد باشد. اما طبق نتایج آزمایش باید $a = -۱$ شود و این امر حداکثر نقض پاریته را نشان می‌دهد. بعداً همین نتایج از طریق اندازه‌گیری‌هایی که با استفاده از واپاشی پیون‌ها و میون‌ها انجام شد، مورد تأیید قرار گرفت.

نتیجه $a = -1$ می‌تواند از دیدگاه هلیسیته لپتون‌های درگیر در واپاشی نیز بررسی شود. هلیسیته یک ذره به صورت تصویر σ ، دو برابر اسپین ذاتی S ، در راستای جهت حرکت آن تعریف می‌شود:

$$h = \frac{\sigma.p}{|P|} \qquad (۶۱-۳)$$

برای ذرات بدون جرم، ویژه مقدار h فقط می‌تواند ± 1 باشد بعنوان مثال فوتون ذره‌ای است که تنها دو جهت ممکن را اختیار می‌کند و می‌تواند تنها دو جهت قطبش متقاطع مستقل خطی داشته باشد. برای الکترون‌ها و سایر ذرات با جرم سکون غیر صفر مقدار هلیستی برابر $\pm v/c$ است. غالباً ذرات با هلیسیتهٔ مثبت را ذرات "راست دست" و ذرات با هلیستهٔ منفی را ذرات "چپ دست" می‌نامند. اگر نوترینوها بدون جرم باشند، رفتاری شبیه فوتون‌ها دارند و h می‌تواند مقادیر ± 1 را داشته باشد. از نظر تجربی، هلیسیتهٔ نوترینو اولین بار توسط Goldhebar، Grodzins و Sunyan از طریق گیراندازی الکترون در حالت پایه $^{+}0$ هسته ^{152}Eu که به حالت برانگیختهٔ $^{-}1$ هسته ^{152}Sm در انرژی $963keV$ منجر می‌شود، تعیین شد.

با اندازه‌گیری قطبش پرتو γ خارج شده از واپاشی ^{152}Sm به حالت پایه $^{+}0$ این هسته، هلیستهٔ نوترینوی گسیلی در فرایند گیراندازی الکترون، برابر -1 تعیین شد. در سایر واپاشی‌های β هسته‌ای هلیسته آنتی نوترینوی $+1$ به دست آمد، همچنین برای الکترونهای گسیل شده $h = -v/c$ و برای پوزیترون‌های گسیل شده $h = +v/c$ می‌باشد.

از این نتایج تجربی دو نتیجه مهم به دست می‌آید. اواین نتیجه از این مشاهده تجربی که همه لپتون‌های گسیلی در واپاشی β چپ دست ($h < 0$) و همه آنتی لپتون‌ها راست دست ($h > 0$) هستند، ناشی می‌شود. به دلایلی که ما در اینجا به آنها نمی‌پردازیم عملگرهایی که اسکالر، شبه اسکالر و تانسور هستند تحت یک تبدیل پاریته لپتون‌هایی (و همین‌طور آنتی لپتون‌هایی) تولید می‌کنند که هر دو مقدار هلیسته را می‌توانند داشته باشند. فقط عملگرهای برداری V و شبه برداری A می‌توانند تطبیق خوبی با نتایج مشاهده شده، درباره اینکه هلیسته همه لپتون‌ها یک مقدار و هلیسته آنتی

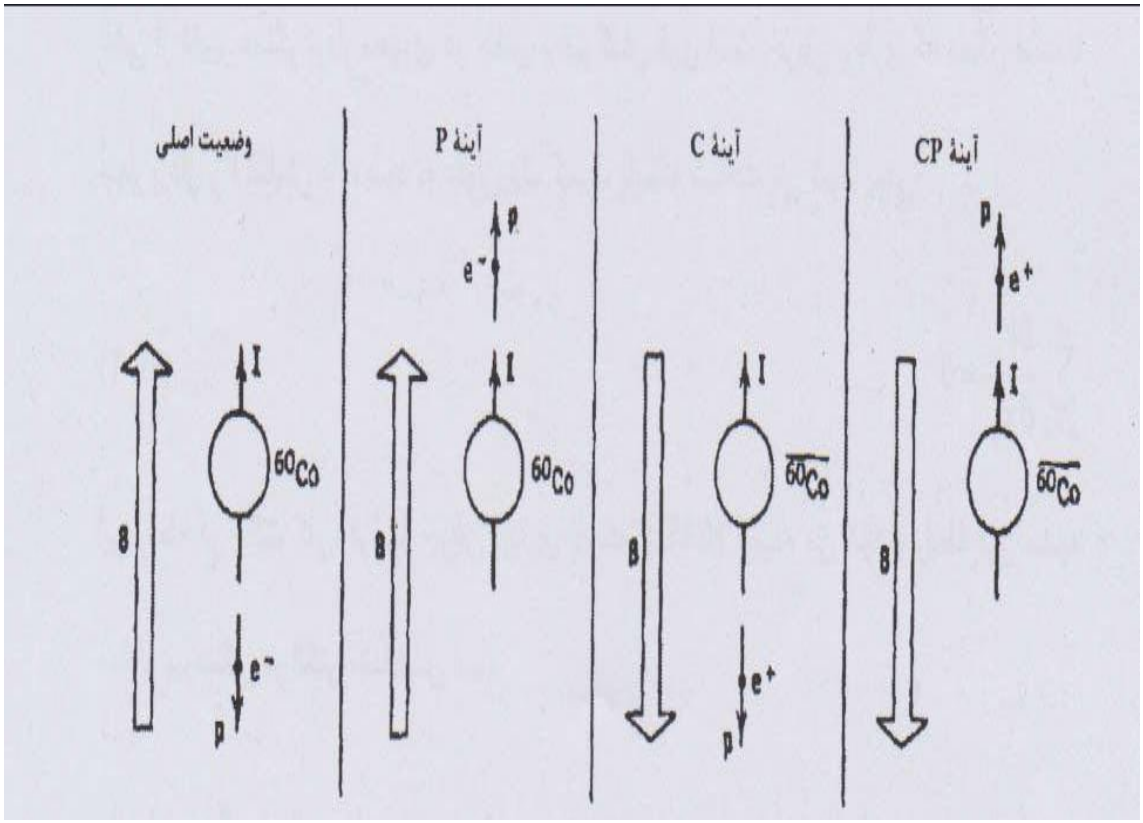
لپتون‌ها مقدار دیگر است، داشته باشند. به علاوه چون V و A پاریته‌های متفاوتی دارند به یک ترکیب خطی از V و A به عنوان عملگر واپاشی β منجر می‌شود.(علامت منفی ناشی از آن است که $a=-1$ در معادلهٔ (۳-۶۰) به $a=+1$ ترجیح دارد.)

دومین نتیجه این امر که نوترینوها فقط با هلیسیته $h=-1$ و آنتی نوترینوها فقط با هلیسیتهٔ $h=+1$ مشاهده شده‌اند، این است که نوترینوها می‌توانند با یک تابع موج دو مولفه‌ای توصیف شوند. در نظریه دیراک تابع موج‌های ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ ، چهار مولفه دارند که هرکدام از این مولفه‌ها بین کنندهٔ دو تصویر اسپینی در راستای محور کوانتش یعنی $\pm\frac{1}{2}$ برای هر کدام از ذرات و پاد ذرات هستند. اگر نوترینوها همیشه یک هلیسیته و آنتی نوترینوها همیشه هلیسیتهٔ مخالف آن را داشته باشند، آنگاه نظریه دو مولفه‌ای برای آنها پذیرفته خواهد شد چون ذرات $h=-1$ و پاد ذرات $h=+1$ دارند. اما چنین ساده سازی‌هایی نیز حاکی از آن است که نوترینوها بدون جرم هستند و تعیین تجربی اینکه نوترینو جرم سکون غیر صفر دارد یا نه موضوع مورد علاقه فیزیکدانان تجربی است.[۳۸]

در حقیقت سه نوع تقارت گسسته در طبیعت وجود دارد اولین آنها انعکاس فضایی $r\rightarrow -r$ است که آن را حوزه عمل پاریته (P) می‌دانیم که در بندهای قبل دربارهٔ آن توضیح دادیم. دومین تقارن به صورت جایگزینی تمام ذرات با پاد ذره‌های متناظرشان مطرح می‌شود که ان را همیوغی بار (C) می‌نامند. در برهم کنش‌های قوی و الکترومغناطیس C پایسته است اما در برهم زدن کنش ضعیف پایستگی آن نقض می‌شود. سومین تقارن برگشت زمان (T) است، که در آن $t-$ جایگزین t می‌شود و در عمل، جهت زمان در تمام فرایندهای سیستم وارونه می‌شوند. شکل (۳-۶) آزمایش Co^{60} و انعکاس آن را در آینه P و آینه C و ترکیب CP نشان می‌دهد و در آزمایش انعکاسی P الکترون‌ها به جای خلاف میدان مغناطیسی ترجیحاً در جهت آن گسیل می‌شوند. چون این حالت در طبیعت مشاهده نمی‌شود باید نتیجه گرفت که حداقل تا آنجا که به واپاشی بتا مربوط می‌شود.

عملکرد P تقارن معتبری نیست. نتیجه شگفت دیگری از این آزمایش حاصل می‌شود، انعکاس آزمایش اصلی در آینهٔ C را در شکل (۳-۶) در نظر بگیرید. الکترون‌های جاری در سیم‌ها که میدان مغناطیسی را به وجود می‌آورند به پوزیترون تبدیل می‌شوند و در نتیجه جهت میدان مغناطیسی معکوس می‌شود. در آزمایش انعکاسی C، ذرات β اکنون ترجیحاً در جهت میدان مغناطیسی گسیل می‌شوند. بنابراین ماده و پادماده در واپاشی β رفتاری متفاوت دارند، که نقض تقارن C است.

اما اگر انعکاس آزمایش را مطابق شکل (۳-۶) در آینه‌ای به دست آوریم که عملکردهای P و C را همزمان انجام دهد، به حالت آزمایش اصلی برمی‌گردیم حتی اگر عملکردهای P و C به طور جداگانه تقارن‌های معتبری نباشند ترکیب CP تقارن معتبری است. برخی واپاشی‌های مزون K که مشابه واپاشی‌های β هستند، حتی ناوردایی CP را تا حدی نقض می‌کنند تاکنون مدرکی دال بر نقض تقارن CP در واپاشی‌های بتازای معمولی به دست نیامده است.[۳۶]



شکل(۳-۶) آزمایش‌های هسته‌های کبالت-۶۰ در آینه‌های **C** و **P** و **CP** **[36]**

۳-۳-۲ عملگرهای فرمی و گاموف – تلر

از آنجا که واپاشی β شامل دو بخش برداری و بردار محوری است، انتظار داریم که دو عملگر مستقل که هر کدام دارای شدت و وابستگی شعاعی مخصوص به خود هستند، وجود داشته باشند. تا آنجا که به واپاشی β هسته‌ای مربوط می‌شود، این وضعیت به دو دلیل ساده شده است. اولین دلیل از این حقیقت ناشی می‌شود که برهم کنش ضعیف، برد خیلی کوتاهی دارد و همانطور که قبلاً دیدیم این برد خیلی کوچکتر از ابعاد هسته است. بنابراین وابستگی شعاعی عملگرها ممکن است با یک تابع دلتا تقریب زده شود و این تقریب به ما اجازه می‌دهد که تنها شدت‌ها یا ثابت‌های جفت شدگی هر کدام از عملگرها را تعیین کنیم. دو ثابت جفت شدگی برای واپاشی β هسته‌ای می‌تواند به شکل یک ثابت جفت شدگی برداری G_v برای قسمت برداری عملگر و یک ثابت جفت شدگی گاموف – تلر G_A برای قسمت بردار محوری آن در نظر گرفته شود. قبلاً دیدیم که G_v با G_F، که یک ثابت جفت شدگی عمومی برای همه فرآیندهای برهم کنش ضعیف است، رابطه دارد. اختلاف بین G_A و G_v، ناشی از تغییر عملگر بردار محوری در حضور برهم کنش قوی است. جریان برداری که ممکن است با چهار بردار V_μ نمایش داده شود به عنوان یک کمیت پایسته شناخته می‌شود، یعنی:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (۶۲-۳)$$

این رابطه در حالت کلی، فرضیه جریان برداری پایسته (CVC) نامیده می‌شود و رابطه فوق مشابه معادله پیوستگی در الکترومغناطیس است.

از طرف دیگر جریان بردار محوری A_μ در چنین رابطه‌ای صدق نمی‌کند یعنی دیورژانس A_μ صفر نمی‌شود. (این موضوع به واپاشی پیون‌ها که ذرات شبه اسکالرند مربوط می‌شود.) چون A_μ یک شبه بردار است، دیورژانس آن یک شبه اسکالر است. پیون یک ذره شبه اسکالر است و بنابراین با یک میدان شبه اسکالر توصیف می‌شود. این امر به فرضیه جریان برداری محوری تقریباً پایسته ($PCVC$) منجر می‌شود:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = a\phi_\pi \qquad (۶۳-۳)$$

که در این رابطه، ϕ_π نمایش دهنده میدان پیون و a یک ثابت است. به عبارت دیگر جریان محوری پایسته نیست اما دیورژانس آن با میدان پیون متناسب است. حالا جریان شبه برداری ضعیف از طریق $PCVC$ به میدان برهم کنش قوی مرتبط می‌شود.

می‌توان با یک روش ساده رابطه‌ای بین دو ثابت جفت شدگی ضعیف G_A و G_v ایجاد کرد. این رابطه به عنوان رابطهٔ $Goldberger-Trieman$ شناخته می‌شود که در اینجا به صورت زیر بیان شود:

$$g_A \equiv \frac{G_A}{G_v} = \frac{f_\pi g_{\pi N}}{M_N c^2} \qquad (۶۴-۳)$$

در این رابطه M_N جرم نوکلئون است، مقدار $f_\pi = {F_\pi}/{\sqrt{2}}$ تقریباً $93MeV$ اندازه گیری شده است که در آن F_π ثابت واپاشی پیون است. کمیت $g_{\pi N}$ ثابت جفت شدگی پیون – نوکلئون است که مقدار آن به طور تجربی برابر $|g_{\pi N}|^2/4\pi \approx 14$ به دست آمده است. با استفاده از این مقادیر، از رابطه (۲-۲۴) نتیجه $|g_A| \approx 1.31$ حاصل می‌شود. مقدار اندازه گیری شده از واپاشی β هسته‌ای عبارت است از $g_A = -1.259 \pm 0.004$ که با تیجه‌ای که از رابطهٔ $Goldberger-Trieman$ به دست می‌آید تطابق دارد. این مطلب فرضیهٔ $PCVC$ را تاکید می‌کند[۳۸].

۳-۵ واپاشی بتا هسته‌ای

واپاشی β هسته‌ای فرآیندی است که در آن یک هسته که از Z پروتون و N نوترون تشکیل شده است به هستهٔ دیگری با همان تعداد نوکلئون A اما با $Z \pm 1, N \pm 1$ تبدیل می‌شود. یک واپاشی β^- می‌تواند به صورت تبدیل یکی از نوترون‌های داخل هسته به یک پروتون در نظر گرفته شود:

$$A(Z,N) \rightarrow A(Z+۱,N+۱) + e^- + \overline{\nu_e} \qquad (۶۵-۳)$$

در واپاشی β^+ یک پروتون به یک نوترون تبدیل می‌شود:

$$A(Z,N) \rightarrow A(Z-۱,N-۱) + e^+ + \nu_e \qquad (۶۶-۳)$$

همچنین ممکن است یک الکترون اتمی توسط هسته گیراندازی شود:

$$e^- + A(Z,N) \rightarrow A(Z-۱,N+۱) + \nu_e \qquad (۶۷-۳)$$

به جز یک اختلاف کوچک در انرژی‌های موجود، که بعداً به آن می‌پردازیم، فرآیند گیراندازی الکترون همان فواعد گزینش واپاشی β^+ را دارد و معمولاً با این نوع واپاشی رقابت می‌کند. احتمال گیراندازی الکترون به صورت $Z^۳$ افزایش می‌یابد، چون با افزایش تعداد پروتون‌ها شدت میدان کولنی هسته‌ای افزایش و شعاع مدارهای الکترونی در اتم کاهش می‌یابد [۳۸].

۳-۵-۱ محاسبهٔ مقدار Q برای واپاشی β

در محاسبه مقدار Q برای واپاشی β هسته‌ای و گیر اندازی الکترون باید نکاتی را در نظر بگیریم. مقدار Q یک واکنش برابر با اختلاف انرژی جنبشی کل سیستم قبل و بعد از واکنش است:

$$Q = T_f - T_i \qquad (۶۸-۳)$$

برای یک واپاشی β هسته‌ای، اگر هسته مادر در چارچوب مرجع آزمایشگاه به صورت ساکن در نظر گرفته شود، انرژی جنبشی اولیهٔ کل T_i در این سیستم صفر خواهد بود. برای آنکه فرآیند واپاشی β اتفاق بیفتد باید مقدار Q مثبت باشد. چون در این فرآیندها با یک الکترون و یا یک پوزیترون گسیل می‌شود، مقدار Q به سادگی برابر اختلاف بین انرژی‌های حالت‌های هسته‌ای اولیه و نهایی نیست.(اگر جرم نوترینو را غیر صفر در نظر بگیریم، نقش مهمی در این بررسی‌ها دارد.) پیچیدگی بیشتر محاسبهٔ مقدار Q از این حقیقت ناشی می‌شود که جرم یک هسته $M_{n\,ucl}(A,Z)$ ، برحسب جرم یک اتم خنثی $M(A,Z)$، جرم و انرژی بستگی الکترون‌های اتمی تعریف می‌شود:

$$M_{n\,ucl}(N,Z)c^۲ = M(N,Z)c^۲ - Zm_ec^۲ + \sum_{i=۱}^{Z} B_i \qquad (۶۹-۳)$$

بنابراین، مقدار Q واپاشی β^- و β^+ با روابط زیر بیان می‌شود:

$$Q_{\beta^-} = \big(M(Z,N) - M(Z+1,N-1)\big)c^2 \qquad (3-70)$$

$$Q_{\beta^+} = \big(M(Z,N) - M(Z-1,N+1)\big)c^2 - 2m_e c^2 \qquad (3-71)$$

برای فرآیند گیراندازی الکترون رابطه زیر را داریم:

$$Q_{EC} = \big(M(Z,N) - M(Z-1,N+1)\big)c^2 - B_e \qquad (3-72)$$

که در آن B_e انرژی یونش الکترون اتمی گیراندازی شده است. چون B_e از مرتبه $10eV$ است می‌توان از آن صرف نظر کرد مگر آن‌که دقتی از همان مرتبه برای ما امیت داشته باشد، مثلاً در اندازه‌گیری جرم نوترینو باید B_e را در نظر بگیریم. اما اختلاف $2m_e c^2$ بین مقادیر Q واپاشی β^+ و گیراندازی الکترون، مهم است. برای مثال اختلاف جرمی بین ^7Be و ^7Li برابر $0.86\,MeV/c^2$ است که این مقدار کمتر از $2m_e c^2$ است. در نتیجه واپاشی β^+ از ^7Be به ^7Li غیر ممکن است و گذار انجام شده کاملاً از طریق گیراندازی الکترون و با نیمه عمر ۵۳/۴ روز می‌باشد. در هر فرآیند گیر اندازی الکترون تنها یک نوترینو گسیل می‌شود. چون آشکار سازی نوترینوها مشکل است، برجسته‌ترین علامتی که نشان دهنده انجام فرآیندگیراندازی الکترون است، گسیل پرتو x است؛ گیراندازی الکترون از یک پوسته به وجود می‌آید. جای خالی با گذارهای نزولی الکترون پوسته‌های بالاتر به سرعت پر می‌شود و در نتیجه پرتوهای x مشخصه گسیل می‌شوند.

آنچه گذشت مربوط به واپاشی بین حالات پایه هسته‌ای است. اگر حالت هسته‌ای نهایی یک حالت برانگیخته باشد مقدار Q باید با در نشر گرفتن انرژی برانگیختگی آن حالت کاهش یابد[۳۶ و ۳۸].

$$Q_{ex} = Q_{gr} - E_{ex} \qquad (3-73)$$

۳-۵-۲ آهنگ گذار واپاشی β

فرمی در سال ۱۹۳۴ بر مبنای فرضیه پاؤلی دایر بر وجود نوترینو نظریه‌ای موفق را برای واپاشی β پیشنهاد کرد. اما قبل از پرداختن به جزئیات این نظریه لازم است نکات زیر را هم یادآور شویم: (۱) الکترون و نوترینو قبل از فرآیند واپاشی وجود ندارند و بنابراین باید تولید آنها را در هسته در نظر

بگیریم.(۲) الکترون و نوترینو باید به طور نسبیتی بررسی شوند. (۳) از این محاسبات باید پیوسته‌ای برای انرژی الکترون‌ها حاصل شود. [۳۶]

به منظور ساده سازی بحث، فرآیند گیراندازی الکترون را در نظر نمی‌گیریم. با توجه به قاعده طلایی فرمی که در فصل اول آن را با استفاده از نظریه اختلال وابسته به زمان به دست آوردیم، داریم:

$$\mathcal{W} = \frac{۲\pi}{\hbar}|\langle\phi_k(r)|H'|\phi_.(r)\rangle|^۲\rho(E_f) \qquad (۷۴-۳)$$

حالت اولیه ساده است، چون تنها شامل حالت هسته‌ای مادر است که فرض کردیم در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است:

$$|\phi_.(r)\rangle = |J_i M_i \zeta\rangle \qquad (۷۵-۳)$$

حالت نهایی شامل سه ذره است یک لپتون خنثی، یک لپتون باردار و هستهٔ دختر. به منظور ساده سازی، از هرگونه تأثیر کولنی بین لپتون باردار و هسته دختر صرف نظر می‌کنیم. دراین حد، لپتون‌ها ذرات آزادی هستند که با امواج تختی که با اعداد موج k_e و k_ν در حال حرکت هستند توصیف می‌شوند. بنابراین تابع موج حالت نهایی برابر با حاصل ضرب این سه بخش است:

$$|\phi_k(r)\rangle = \frac{۱}{\sqrt{\mathrm{v}}}e^{\mathrm{ik_e.r}}\frac{۱}{\sqrt{\mathrm{v}}}e^{\mathrm{ik_\nu.r}}|J_f M_f \xi\rangle \qquad (۷۶-۳)$$

که در آن $|J_f M_f \xi\rangle$ تابع موج حالت هسته‌ای دختر است. دو عامل $V^{-۱/۲}$ برای بهنجار کردن دو تابع موج لپتونی موردنیاز است. می‌توان امواج تخت را برحسب هماهنگ‌های کروی بسط داد:

$$e^{ik.r} = \sum_{\lambda=.}^{\infty}\sqrt{۴\pi(۲\lambda+۱)}\, i^\lambda j_\lambda(kr)Y_{\lambda.}(\theta,.) \qquad (۷۷-۳)$$

که در آن $k = |k| = |k_e + k_\nu|$ و θ بین k و r است. هماهنگ‌های کروی $Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi)$ به ازای $\mu = ۰$ مستقل از زاویه سمتی ϕ است. $j_\lambda(kr)$ تابع بسل کروی از مرتبه λ است که می‌توان آن را بصورت یک سری توانی بسط داد:

$$j_\lambda(kr) = \frac{(kr)^\lambda}{(۲\lambda+۱)!!}\left(۱ - \frac{۱}{۲}\frac{(kr)^۲}{(۲\lambda+۳)} + \cdots\right) \qquad (۷۸-۳)$$

در این جا می‌توانیم از تقریب طول موج بلند استفاده کنیم، چون مقدار Q گذار نوعاً از مرتبه از مرتبه چند MeV است و در نتیجه طول موج مربوط به این مقدار انرژی از مرتبه $۱۰^۲ fm$ است که خیلی

بزرگتر از ابعاد هسته‌ای است. بنابراین آرگومان بدون بعد (kr) تابع بسل کروی برای مقادیر Q آزاد شده در واپاشی β هسته‌ای بسیار کوچکتر از واحد است. پس سری (۳-۸۱) سریع به یک همگرا می‌شود و $j_\lambda(kr)$ ممکن است تنها با جملهٔ اولش تقریب زده شود:

$$j_\lambda(kr) \approx \frac{(kr)^\lambda}{(2\lambda+1)!!} \qquad (۷۹-۳)$$

با در نظر گرفتن این تقریب، تابع موج حالت نهایی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$|\phi_k(r)\rangle = \frac{1}{V}\left\{1 + i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(kr)Y_{1.}(\theta,\phi) + O((kr)^2)\right\}|J_f M_f \xi\rangle \qquad (۸۰-۳)$$

۳-۵-۳ عناصر ماتریس گذار هسته‌ای

قبل از آنکه به یافتن عناصر ماتریس گذار بپردازیم ابتدا شکل‌های ممکن قسمت هسته‌ای عملگر واپاشی β را بررسی می‌کنیم. ار آنجا که در واپاشی β^- یک نوترون به یک پروتون تبدیل می‌شود و در واپاشی β^+ یک پروتون به یک نوترون تبدیل می‌شود، در اصل عملگر هسته‌ای باید یک جسمی باشد؛ یعنی در هر زمان تنها یک نوکلئون را شامل شود، هم‌چنین باید شامل عملگر تک- ذره‌ای بالابرنده یا پایین آورنده ایزاسپین $\tau_\pm$ نیز باشد. علاوه بر این، براساس نظریه $(V-A)$ در برهم کنش ضعیف دو جمله وجود دارد، یک بخش بردار قطبی با ثابت جفت شدگی G_v و بخش دیگر، بردار محوری با ثابت جفت شدگی G_A. در حد غیر نسبیتی، بخش برداری با عملگر $\tau_\pm$ و بخش بدار محوری با حاصلضرب عملگر اسپین ذاتی σ و $\tau_\pm$ نمایش داده می‌شود. به دست آوردن روابط ریاضی صحیح و مناسب این نتایج، نیازمند انجام محاسبات ماهرانه با استفاده از توابع موج دیراک و ماتریس‌های γ می‌باشد که در اینجا به این مباحث نمی‌پردازیم.

بنابراین با کنارهم قرار دادن نتایج مربوط به عملگر هسته‌ای واپاشی بتا و آنچه که قبلاً برای توابع موج در روابط (۳-۷۵) و (۳-۸۰) به دست آمده، عنصر ماتریس گذار واپاشی $\beta^{\pm}$ که در رابطه (۳-۷۴) آمده است به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\langle \phi_k(r)|H'|\phi_.(r)\rangle = \frac{1}{V}\langle J_f M_f \xi| \sum_{j=1}^{A}\{G_v \tau_{\pm}(j) + G_A \sigma(j)\tau_{\pm}(j)\} \times \left\{1 + i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(kr)Y_{1.}(\theta,\phi) + O((kr)^2)\right\}||J_f M_f \xi\rangle \quad (3-81)$$

در این فصل غالباً، دو جملهٔ مرتبهٔ پائین‌تر در عبارت بالا بررسی می‌شود که آنها را بصورت کلی به عنوان عملگرهای "گذار مجاز" می‌شناسیم. جملات مرتبه بالاتر که شامل هماهنگ‌های کروی با مرتبه‌های بزرگتر از صفر هستند به "واپاشی‌های ممنوع" مربوط می‌شوند.

برای واپاشی‌های مجاز، عملگر گذار واپاشی $\beta^{\pm}$ به شکل زیر است:

$$O_{\lambda\mu}(\beta) = G_v \sum_{j=1}^{A} \tau_{\pm}(j) + G_A \sum_{j=1}^{A} \sigma(j)\tau_{\pm}(j) \quad (3-82)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای حمل شده توسط جمله اول $\lambda = 0$ است و توسط جمله دوم برابر با $\lambda = 1$ است. عنصر ماتریس گذار برای این شکل از عملگر واپاشی β عبارت است از:

$$\langle \phi_k(r)|H'|\phi_.(r)\rangle = \frac{G_v}{v}\sum_{\mu M_f}\left\{\langle J_f M_f \xi| \sum_{j=1}^{A} \tau_{\pm}(j)\,|J_i M_i \zeta\rangle + g_A \langle J_f M_f \xi| \sum_{j=1}^{A} \sigma(j)\tau_{\pm}(j)\,|J_i M_i \zeta\rangle\right\} \quad (3-83)$$

که در آن $g_A = G_A/G_V$. اولین جمله در عبارت بالا را معمولاً به نام واپاشی فرمی و دمین جمله را با نام واپاشی گاموف – تلر می‌شناسند. عناصر ماتریس گذار برای عملگرهایی با $\lambda > 1$ معمولاً مقادیر

کوچکتری دارند چون آنها از جملات مرتبه بالاتر رابطه (۳-۸۱) ناشی می‌شوند: سهم آنها تنها در گذارهایی مهم است که دو جمله با پایین‌ترین مرتبه، از نظر قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه‌ای و پاریته، ممنوع باشند.[۳۸]

۳-۵-۴ چگالی حالت‌های نهایی

چگالی حالت‌های نهایی در واپاشی β هسته‌ای به دلیل حالت نهایی سه جسمی تا حدی پیچیده است. در یک مورد دو جسمی، انرژی و اندازه حرکت یک ذره از طریق قوانین پایستگی، به مقادیر به دست امده از ذرهٔ دیگر محدود می‌شود. در واپاشی β هسته‌ای، انرژی جنبشی قابل دسترس، با نادیده گرفتن انرژی پس زنی هسته‌ای، بین نوترینو و الکترون (یا پوزیترون) تقسیم می‌شودو در نتیجه طیف پیوسته‌ای از انرژی لپتون باردار و نوترینو را حاصل می‌شود؛ تنها به این شرط که لپتون باردار، نوترینو و هستهٔ پس زن پایستگی انرژی – تکانه را برای واپاشی رعایت کنند. علاوه بر این لپتون باردار در میدان کولنی هسته دختر گسیل می‌شود و تابع موج آن در اثر بر هم کنش الکترومغناطیسی تغییر شکل می‌دهد، که این امر بر چگالی حالت‌های نهایی قابل دسترس لپتون باردار تاثیر می‌گذارد.

چون یک نوترین با محیط اطرافش به سختی برهم کنش می‌کند، می‌توان آن را در لحظه خلق شدن به صورت یک ذره آزاد در نظر گرفت. تعداد حالت‌ها با تکانه P_ν $(p_\nu = \hbar k_\nu)$ برای چنین ذراتی، بدون هیچ گونه توجهی به جهت حرکت ذره، در مکانیک آماری به صورت زیر داده می‌شود:

$$dn_\nu = \frac{V}{۲\pi^۳\hbar^۳} p_\nu^۲ dp_\nu \qquad (۸۴-۳)$$

که در آن V همان حجم است که برای بهنجار کردن موج تخت سه بعدی در رابطه (۳-۷۶) به کار رفته است. اگر جرم سکون نوترینو برای m_ν باشد انرژی کل از رابطه نسبیتی زیر بدست می‌آید:

$$E_\nu^۲ = (m_\nu c^۲)^۲ + p_\nu^۲ dp_\nu \qquad (۸۵-۳)$$

E_ν برابر قسمتی از انرژی آزاد شده توسط هسته در حین گذار از حالت اولیه به حالت نهایی است، بقیه این انرژی مربوط به انرژی لپتون باردار و هسته دختر است.

برای بیان انرژی موجود در واپاشی β مرسوم است که به جای استفاده از مقدار Q، از بیشینه انرژی جنبشی لپتون باردار گسیل شده، استفاده شود. علت انتخاب این ذره ان است که انرژی الکترون یا پوزیترون، کمیتی است که می‌توان آن را بطور مستقیم مشاهده کرد. به طور کلی بیشینه انرژی جنبشی $(E_.)$ ، انرژی نقطه پایان نامیده می‌شود و ان نقطه‌ای است که در نمودار تعداد لپتون‌های باردار مشاهده شده بر حسب تابعی از انرژی جنبشی، فراتر از آن نقطه هیچ ذره‌ای آشکار سازی نشده باشد. بر حسب انرژی نقطه پایان، رابطه زیر را داریم:

$$E_\nu = E_. - E_e \qquad (۸۶-۳)$$

که در آن E_e انرژی جنبشی لپتون باردار است. در این رابطه به منظور ساده سازی، از تغییرات انرژی نقطه پایان ناشی از اختلافات کوچک در انرژی پس زنی هسته دختر در حالت نهایی سه جسمی صرف نظر کردیم. چون جرم هسته‌ای خیلی بزرگ‌تر از جرم لپتون‌هاست، حضور انرژی پس زنی هسته فقط در جایی که دقت بالایی مورد نظر باشد ضرورت دارد. چگالی حالت‌های تونرینو در (۳-۸۴) بر حسب $E_.$ و E_e به شکل زیر بیان می‌شود:

$$dn_\nu = \frac{V}{۲\pi^۳\hbar^۷}\frac{(E_.-E_e)}{c^۳}\{(E_. - E_e)^۲ - (m_\nu c^۲)^۲\}^{۱/۲}dE_e \qquad (۸۷-۳)$$

که در آن از رابطه $p_\nu c = \sqrt{E_\nu^۲ - (m_\nu c^۲)^۲}$ که از (۳-۸۵) به دست می‌آید، استفاده شده است.

لپتون‌های باردار گسیل شده در واپاشی نمی‌توانند به صورت ذرات آزاد رفتار کنند، چون واپاشی در میدان کولنی هستهٔ دختر اتفاق می‌افتد. یک تقریب خوب با شرروع از شکل ذرهٔ آزاد و امیختن آن با یک عامل تغییر شکل $F(Z,E_e)$ به منظور اصلاح تأثیرات کولنی به دست می‌آید:

$$dn_e = \frac{V}{۲\pi^۳\hbar^۷}F(Z,E_e)p_e^۲dp_e \qquad (۸۸-۳)$$

که در آن $x = \mp ۲\pi\alpha Z\, c/v$ برای واپاشی $\beta^\pm$ است و α ثابت ساختار ریز است. شکل کلی تابع خلی پیچیده تر است و یک نمایش تحلیلی ساده ندارد. تابع فرمی $F(Z,E_e)$ به ازای مقادیر مختلف

Z و E_e در جداول یافت می‌شود که این مقادیر معمولاً در کاربردهای عملی استفاده می‌شوند. حال می‌توانیم روابط (۳-۸۳)،(۳-۸۷) و (۳-۷۴) جایگزین کنیم و احتمال گذار برای یک الکترون یا پوزیترون گسیل شده با تکانهٔ p_e $(p_e = |p_e|)$ را به دست آوریم:

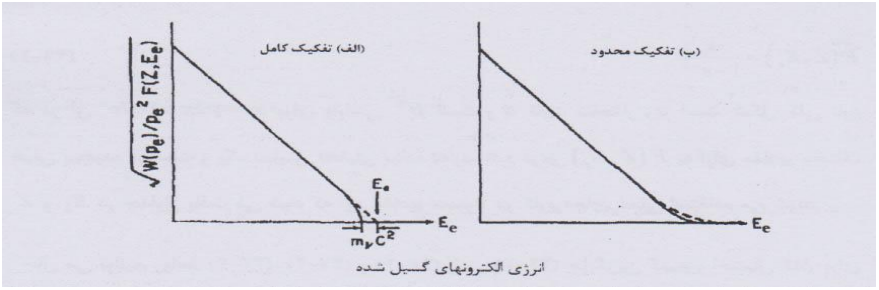
$$\mathcal{W}(p_e) = \frac{1}{2\pi^3\hbar^7 c^3}\sum_{\mu M_f}\left|\langle J_f M_f \xi | O_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 \times F(Z,E_e)p_e^2(E_. - E_e)\{(E_. - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2\}^{1/2} \qquad (۳-۸۹)$$

که در آن همه عوامل مربوط به V که حجم (اختیاری) بهنجار شده است، همدیگر را حذف کردند و جمع روی M_f نشان دهنده در نظر گرفتن همه حالت‌های نهایی ممکن است. با صرف نظر از جرم کوچک نوترینو، عبارت مربوط به $\mathcal{W}(p_e)$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathcal{W}(p_e) = \frac{1}{2\pi^3\hbar^7 c^3}\sum_{\mu M_f}\left|\langle J_f M_f \xi | O_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 \times F(Z,E_e)p_e^2(E_. - E_e) \qquad (۳-۹۰)$$

تاثیرات این تقریب عمدتاً مربوط به ناحیه‌ای است که در آن E_e به انرژی نقطه پایان $E_.$ خیلی نزدیک باشد و تاثیر m_ν در این ناحیه کاملاً آشکار است[۳۸].

با توجه به رابطه (۳-۸۱)، $\{\mathcal{W}(p_e)/p_e^2F(Z,E_e)\}^{1/2}$ متناسب با $(E_. - E_e)$ است. بنابراین نمودار $\{\mathcal{W}(p_e)/p_e^2F(Z,E_e)\}^{1/2}$ به صورت تابعی از $(E_. - E_e)$ یک خط راست می‌شود (البته به جز ناحیهٔ انرژی نقطه پایان) که شیب آن با عنصر ماتریس هسته‌ای متناسب است. چنین نموداری در شکل (۳-۷) نشان داده شده است که نمودار کوری نامیده می‌شود.



شکل(۳-۷) طرحی از یک نمودار کوری که تغییرات ریشه دوم الکترون‌ها یا پوزیترون‌ها با تکانه $\boldsymbol{p_e}$ تقسیم بر $\boldsymbol{p_e^2F(Z,E_e)}$ را به صورت تابعی از $\boldsymbol{E_e}$ نشان می‌دهد.[38]

۳-۵-۵ احتمال گذار کل

اگر توزیع لپتون‌های باردار گسیلی را به صورت تابعی از E_e مورد توجه قرار ندهیم، می‌توانیم احتمال گذار کل $\mathcal{W}$ را با انتگرال‌گیری از $\mathcal{W}(p_e)$، در رابطه (۳-۸۱)، روی همه مقادیر ممکن تکانه p_e به دست می‌آوریم:

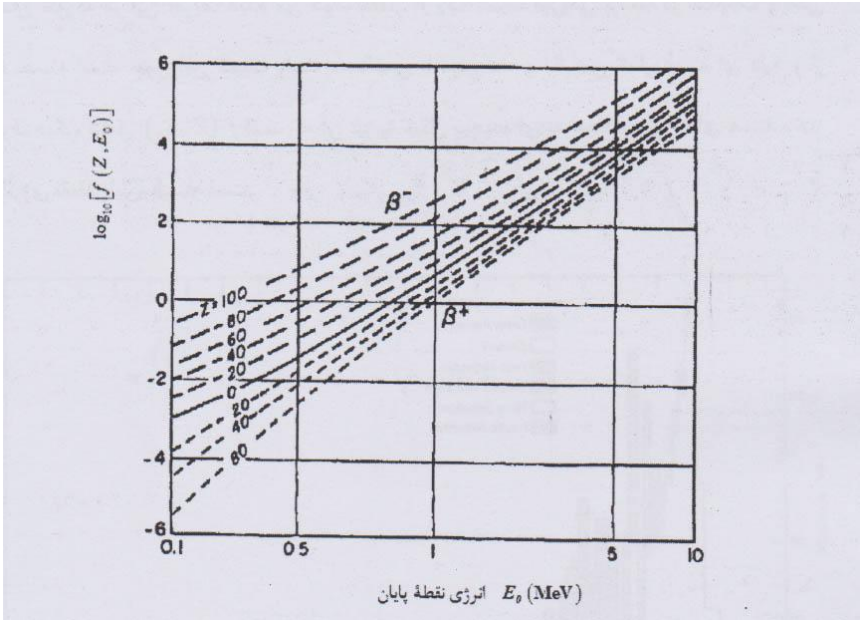
$$\mathcal{W} = \int \mathcal{W}(p_e)dp_e = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3\hbar^7} f(Z,E.) \sum_{\mu M_f} \left|\langle J_f M_f \xi \left| O_{\lambda\mu}(\beta) \right| J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 \qquad (۹۱-۳)$$

که در آن تابع بدون بعد $f(Z,E.)$ را انتگرال فرمی می‌نامند که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(Z,E.) = \int f(Z,E_e)\left(\frac{p_e}{m_e c}\right)^2 \left(\frac{E.-E_e}{m_e c^2}\right)^2 \frac{dp_e}{m_e c}$$

$$= \frac{1}{m_e^5 c^7}\int f(Z,E_e) p_e{}^2 (E. - E_e)^2 dp_e \qquad (۹۲-۳)$$

به استثناء مورد جزئی $Z = 1$ برای هستهٔ دختر، این انتگرال باید به صورت عددی محاسبه شود که نتایج این محاسبات در جداول گسترده‌ای قابل دسترسی است و برخی مقادیر خاص آن در شکل (۳-۸) رسم شده است.

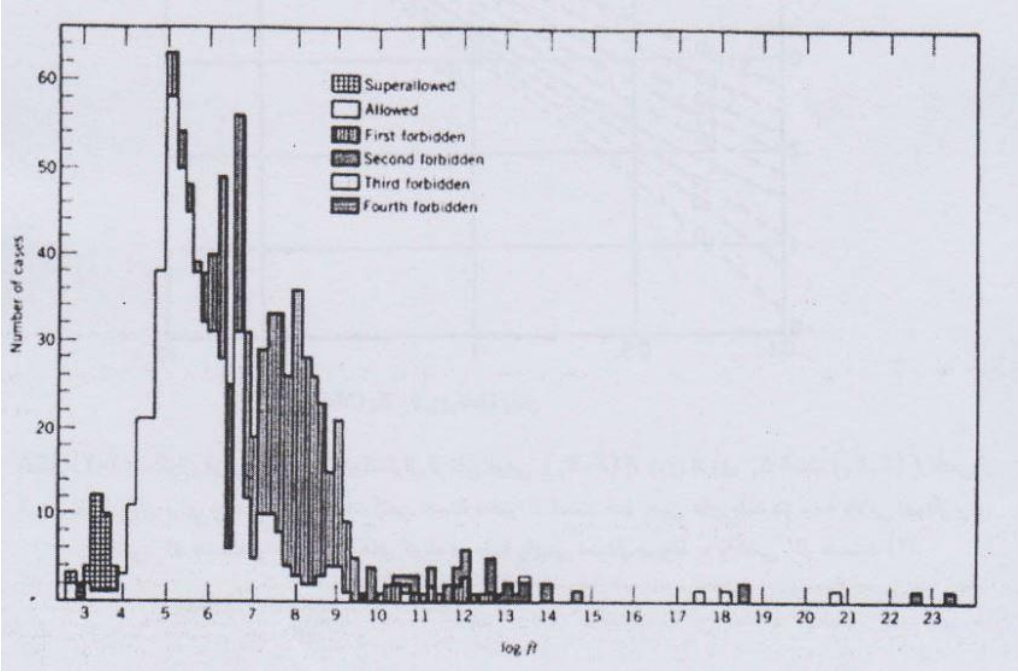


شکل(۳-۸) نمودار انتگرال فرمی[38]

با استفاده از احتمال گذار می‌توان عبارتی برای نیمه عمر واپاشی β هسته‌ای، از مقدار ft استفاده می‌شود که برابر با حاصل ضرب انتگرال فرمی $f(Z,E.)$ در $T_{1/2}$ است:

$$ft = f(Z,E.)T_{1/2} = \frac{2\pi^3\hbar^7}{m_e^5c^4}\frac{\ln 2}{\sum_{\mu M_f}|\langle J_f M_f \xi|O_{\lambda\mu}(\beta)|J_i M_i \zeta\rangle|^2} \qquad (93-3)$$

همانطور که در این تعریف دیده می‌شود، مقدار ft یک کمیت فیزیکی پرمعنا در مطالعات واپاشی β هسته است، چون این کمیت رابطهٔ مستقیمی با مربع عنصر ماتریس گذار هسته‌ای دارد و از طرف دیگر، شامل $f(Z,E.)$ است که آن نیز یه شکل پیچیده‌ای به تعداد پروتون‌های هستهٔ دختر و انرژی نقطه پایان وابسته است.



شکل(۳-۹) توزیع تجربی $(\boldsymbol{logft})$ برای انواع مختلف واپاشی‌های بتا[38]

اگر هم واپاشی‌های مجاز و هم واپاشی‌های ممنوع را در نظر بگیریم، در می‌یابیم که گستره نیمه عمرهای واپاشی‌های β بسیار وسیع است به طوری که مقادیر ft از حدود 10^3 تا 10^{20} ثانیه تغییر می‌کنند. به این دلیل غالباً از مقادیر $\log_{10} ft$ (t بر حسب ثانیه) استفاده می‌شود. یک توزیع پیچیده از مقادیر تجربی $\log ft$ در شکل (۲-۹) نشان داده شده است.

۳-۵-۶ واپاشی مجاز β

حال به عملگر مربوط به واپاشی مجاز که در معادلهٔ (۳-۸۲) داده شده است بر می‌گردیم. بخش فرمی این عملگر تنها شامل عملگر بالابرنده یا پائین آورندهٔ ایزوایپسن است. در نتیجه این بخش ممکن است به صورت صریح روی همه نوکلئون‌ها جمع زده شود:

$$\sum_{j=1}^{A} \tau_{\mp}(j) = T_{\mp} \qquad (۹۴-۳)$$

که در آن $T_{\mp}$ مولفه سوم بالا برنده یا پائین آورنده ایزواسپین هسته است. اکنون می‌توان مقدار عنصر ماتریسی عملگر فرمی را بدون دانستن شکل صریح توابع موجی هسته‌ای ارزیابی کرد:

$$\langle J_f M_f T_f T_{.f} \left| \sum_{j=1}^{A} \tau_{\mp}(j) \right| J_i M_i T_i T_{.i} \rangle$$
$$= \sqrt{T_i(T_i+1) - T_{.i}(T_{.i} \mp 1)}\, \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{T_f T_i} \delta_{.f(T_{.i} \mp 1)} \qquad (۹۵-۳)$$

این نتیجه با در نظر گرفتن این فرض که ایزواسپین یک عدد ک.انتومی دقیق است، به دست آمده است. همان‌طور که می‌دانیم هم نیروی کولنی و هم اختلاف جرم بین پیون‌های باردار و خنثی تقارن ایزواسپین را نقض می‌کند که نتیجه آن روی مقادیر واقعی عنصر ماتریس فرمی تاثیر می‌گذارد. در موارد تجربی دیده شده که عوامل تصحیحی لازم برای هسته‌های سبک واقعاً وکوچک هستند و توانسته‌اند دقت کافی را برآورد کنند بنابراین نتایج نهایی با عدم قطعیت ۰.۱٪ یا کمتر ممکن است معتبر باشد و از نتایج داده شده در معادلهٔ (۳-۹۵) به این مطلب پی می‌بریم که قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه‌ای و ایزواسپین برای نوع فرمی واپاشی $\beta^{\mp}$ به صورت زیر است:

$$J_f = J_1 \qquad (\Delta J = 0)$$
$$T_f = T_i \qquad \left(\Delta T = 0, but\ T_i = 0 \rightarrow T_f = 0\ forbidden\right) \qquad (۹۶-۳)$$
$$T_{.f} = T_{.i} \mp 1 \qquad (\Delta T_{.} = 1)$$
$$\Delta\pi = 0 \quad no\ parity\ cahnge$$

به عبارت دیگر اثر اصلی واپاشی فرمی، ایجاد گذار بین حالت‌های ایزوباری است که تنها تفاوت بین حالت‌های اولیه و نهایی در این گذار، جایگزینی یک پروتون با یک نوترون (یا برعکس) است[۳۸].

برای عملگر گاموف – تلر، $\sum_j \sigma(j)\tau_{\mp}(j)$ ، نمی‌توان به صراحت روی تمام نوکلئون‌ها جمع بست چون این عملگر به طور همزمان هم روی اسپین یک نوکلئون عمل می‌کند. برخلاف واپاشی فرمی، عناصر ماتریسی عملگر گاموف - تلر را نمی‌توانیم ارزیابی کنیم مگر اینکه توابع موج اولیه و نهایی را داشته باشم. قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه‌ای و ایزواسپین را نمی‌توانیم تنها از خواص خود عملگر استنباط کرد. چون مرتبه‌های تانسور کروی این عملگر هم در فضای اسپین و هم در فضای ایزواسپین برابر واحد است، لازم است که حالت‌های اولیه و نهایی به شکل زیر باهم رابطه داشته باشند:

$$\begin{aligned}
&\Delta J = ۰,۱ \qquad but\ J_i = ۰ \to J_f = ۰\ forbidden \\
&\Delta T = ۰ \qquad but\ T_i = ۰ \to T_f = ۰\ forbidden \\
&T_{.f} = T_{.i} \mp ۱ \qquad (\Delta T_{.} = ۱) \qquad (۹۷-۳) \\
&\Delta\pi = ۰ \quad no\ parity\ cahnge
\end{aligned}$$

شرط آخر قاعده گزینش پاریته از این حقیقت ناشی می‌شود که σ یک عملگر شبه برداری است و به همین پارتیه حالت‌های اولیه و نهایی را نمی‌تواند تغییر دهد. مقادیر مطلق عناصر ماتریسی عملگر گاموف – تلر در حالت کلی از عناصر ماتریسی مربوط به گذارهای فرمی کوچکتر هستند، چون این عملگر هم اسپین و هم ایزواسپین را همزمان شامل می‌شود.

برای واپاشی‌های مجاز، مربع عنصر ماتریسی گذار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu M_f} \left|\langle J_f M_f \xi \left| O_{\lambda\mu}(\beta) \right| J_i M_i \zeta\rangle\right|^{۲} \\
&= G_v^{۲}\left\{\sum_{M_f}\left|\langle J_f M_f \xi | T_{\mp} | J_i M_i \zeta\rangle\right|^{۲} + g_A^{۲}\sum_{\mu M_f}\left|\langle J_f M_f \xi |\sum_{j=۱}^{A}\sigma(j)\tau_{\mp}(j)\,| J_i M_i \zeta\rangle\right|^{۲}\right\} \\
&= G_v^{۲}\{\langle F\rangle^{۲} + g_A^{۲}\langle GT\rangle^{۲}\} \qquad (۹۸-۳)
\end{aligned}$$

به منظور ساده سازی در نوشتن فرمول، می‌توان برای نشان دادن عناصر ماتریسی مربوط به هر بخش از شکل اختصاری که در آخرین رابطه (۳-۹۸) اتخاذ شده است استفاده کرد. بنابراین، برای واپاشی‌های مجاز، مقدار ft می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$ft = \frac{K}{\langle F\rangle^2 + g_A^2\langle GT\rangle^2} \qquad (۳-۹۹)$$

ثابت جفت شدگی برداری G_v ، مانند سایر ثابت‌هی جهانی، در تعریف ثابت K جذب شده است:

$$K = \frac{2\pi^3\hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 G_v^2} = 6141.2 \pm 3.2s \qquad (۳-۱۰۰)$$

در میان عوامل موجود در معادله بالا، مقدار G_v به خوبی شناخته شده است. تعیین مقدار K یکی از روش‌های بدست آوردن مقدار مطلق ثابت جفت شدگی برداری G_v است. در حال حاضر، بهترین مقدار اندازه گیری شده K برابر $6141.2 \pm 3.2s$ است که از واپاشی ابر مجاز بعد از بکار بردن چند تصحیح درباره اندازه محدود و توزیع بار هسته به دست آمده است. در این روش مقدار ثابت جفت شدگی برداری عبارت است از $G_v = 1.41546 \times 10^{-49} erg - cm^3$. البته می‌توان G_v را به شکل $G_v/(\hbar c^3) = 1.1493 \times 10^{-11} MeV^{-2}$ که رایج تر است، نیز بیان کرد. برای بدست آوردن ثابت جفت شدگی فرمی $G_F/(\hbar c^3) = 1.16637 \times 10^{-11} MeV^{-2}$ ، به عوامل تصحیحی بیشتری نیاز است.

۳-۵-۷ واپاشی ابر مجاز β

واپاشی‌های ابر مجاز β، گذار از یک حالت هسته‌ای اولیه با $J_1^\pi = 0^+$ به یک حالت نهایی با $J_f^\pi = 0^+$ است که یک گروه خاص از واپاشی‌های β را تشکیل می‌دهند؛ چون بخش گاموف – تلر در این گذارها هیچ سهمی ندارد. این گذارها فرمی خالص هستند و در نتیجه نسبت به جزئیات توابع موج هسته ای کمترین حساسیت را دارند. چنین واپاشی‌های مفید هستند، برای مثال همانطور که در پاراگراف قبلی گفتیم در تعیین مقدار K، و بنابراین G_v، از واپاشی‌های ابر مجاز استفاده می‌کنند. در این گذارها هسته‌های سبک ترجیح داده می‌شوند، چون تأثیرات شکست ایزواسپین در آنها حداقل

است؛ اما تعداد مواردی که قابل دسترسی هستند محدود است. غالباً واپاشی ابر مجاز β^- از نظر شرایط مقدار Q ممنوع است، چون برای هسته‌هایی با یک پروتون بیشتر، انرژی کولنی بیشتر است. بنابراین اغلب نمونه‌های یافت شده، گسیل کننده پوزیترون هستند مانند واکنش زیر:

$$^{14}\mathrm{O} \rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + e^+ + \nu_e \qquad (۱۰۱-۳)$$

که به اولین حالت بر انگیخته $^{14}\mathrm{N}$ با $J^\pi = 0^+$ و انرژی $2.311 MeV$ منجر می‌شود. نیمه عمر $^{14}\mathrm{O}$ برابر ۷۴ ثانیه و مقدار Q واکنش $1.12 MeV$ است. مقدار ft این واپاشی ۳۱۰۹ ثانیه است که از جمله کوچکترین مقادیر شناخته شده است. اگر حالات هسته‌ای ابتدایی و نهایی به درستی حالت‌های مانسته ایزوباری یکدیگر باشند، مقدار عنصر ماتریسی فرمی با استفاده از معادلهٔ (۲-۵۸) بدون استفاده صریح از توابع موج هسته‌ای به دست می‌آید.

مقدار g_A که همان نسبت بین ثابت جفت شدگی شبه برداری و برداری است، باید با استفاده از واپاشی گاموف – تلر به دست آید. شناخته شده ترین مقدار آن عبارت است از:

$$g_A = \frac{G_A}{G_v} = -1.259 \pm 0.004 \qquad (۱۰۲-۳)$$

در اصل واکنش ایده آل برای استفاده در این مورد، واپاشی β^- نوترون‌هاست چون فقط تابع موج اسپین ذاتی یک نوترون آزتد در محاسبات وارد می‌شود[۳۸].

۳-۵-۸ واپاشی ممنوع β

برای واپاشی‌های مجاز β ، اسپین حالت‌ای اولیه و نهایی می‌توانند حداکثر به اندازهٔ واحد با هم اختلاف داشته باشد و پاریتهٔ آنها باید یکسان باشد. اما گذار بین حالت‌ها با پاریته متفاوت و $\Delta J > 1$ نیز اتفاق می‌افتد که مقادیر ft برای آنها خیلی بزرگتر از واپاشی های مجاز است و این بدان معنی است که احتمال وقوع کوچکتری دارند، از این رو این گذارها را واپاشی های ممنوع می نامند. همان

طور که از معادله (۳-۸۳) می توان دید عملگرهای واپاشی های ممنوع شامل هماهنگ های کرودی از مرتبه ی بزرگتر از صفر هستند.

واپاشی های ممنوع به وسیله ی مقدار t هماهنگ های کروی به گرو های مختلفی تقسیم می‌شوند. به ازای یک مرتبه مشخص ℓ ، عملگرهای ممکن برای واپاشی ممنوع عبارتند از $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ و $(Y_{\ell m}(\theta,\phi)\times\sigma)_{\lambda\mu}$ بنابراین قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه ای و پاریته برای گذارهای ممنوع مرتبهℓ ام به صورت زیر است :

$$\Delta J = \ell \; or \; \ell \pm ۱ \qquad (۱۰۳-۳)$$

قاعده گزینش ایزواسپین برای واپاشهای ممنوع همان قاعده گزینش واپاشی های مجاز است. چون هیچ تفاوتی بین ساختار ایزواسپینی عملگر واپاشی ممنوع و عملگر واپاشی مجاز وجود ندارد. بنابراین:

$$\Delta T_{.} = ۱ \qquad \Delta T = ۰ \; or \; ۱ \;\; but \; T_i = ۰ \rightarrow T_f = ۰ \; forbidden \qquad (۱۰۴-۳)$$

برای گزارهای ممنوع مرتبه اول عملگرها عبارتند از$rY_{۱\mu}(\theta,\phi)$ (متناسب با r) و $\left(\sigma\times rY_{۱}(\theta,\phi)\right)_{\lambda\mu}$ با $\lambda = ۰,۱,۲$ چون پاریته‌ی$Y_{۱\mu}(\theta,\phi)$ برابر ۱- است . تغییر پاریته بین حالت های اولیه و نهانی در این نوع واپاشی ضروری است.

علت بزرگ بودن مقادیر ft در واپاشی‌های ممنوع β این است که در این نوع واپاشی ها$\ell > ۰$ است. بنابراین یک سد اندازه حرکت زاویه ای وجود دارد که مانع گسیل لپتون ها می شود و این امر باعث کاهش اندازه عنصر ماتریس هسته ای و در تنیجه افزایش مقادیر ft می شود. مقادیر نوعی برای واپاشی هایβ مراتب مختلف در جدول زیر نمایش داده شده است. اما همان طور که در شکل (۳-۹) دیده می شود تفکیک مقادیر تجربی ft رای گذارهای مراتب مختلف همانند تفکیک این مقادیر در جدول (۳-۱)واضح نیست. به طور کلی محاسبه عناصر ماتریس هسته‌ای برای واپاشی‌های ممنوع β واقعا مشکل است، در نتیجه تعداد تحقیقات تئوری در این زمینه بسیار اندک است.[۳۸]

جدول (۳-۱) مقادیر نوعی $\log ft$ برای واپاشی β هسته‌ای

نوع واپاشی	$\log_{۱۰} ft_{۱/۲}$
ابر مجاز	۲/۹-۳/۷
مجاز	۴/۴-۶/۰
ممنوع اول	۶-۱۰
ممنوع دوم	۱۰-۱۳
ممنوع سوم	>۱۵

۳-۶ معرفی کربن

کربن عنصری شیمیائی در جدول تناوبی با نشان C و عدد اتمی ۶ است.[۴۱] کربن عنصری غیر فلزی و فراوان، چهار ظرفیتی و دارای چندین دگرشکل می‌باشد، از جمله:

۱- الماس، سخت‌ترین کانی شناخته شده و دارای بالاترین سرعت صوت و رسانایی گرمایی در میان مواد

۲- گرافیت، یکی از نرم‌ترین مواد

۳- فولرن، مولکول‌هایی در حد بیلیونیوم متر هستند و اشکال مختلفی دارند.

دوده چراغ از سطوح کوچک گرافیت تشکیل شده است، این سطوح به‌صورت تصادفی توزیع شده، به همین دلیل کل ساختمان آن همسانگرد (ایزوتروپیک) است.

چنین کربنی همسانگرد و مانند شیشه محکم است. لایه‌های گرافیت آن مانند کتاب مرتب نشده‌اند، بلکه مانند کاغذ خرد شده می‌باشند.

الیاف کربن شبیه کربن شیشه‌ای می‌باشند. تحت مراقبت‌های ویژه (کشیدن الیاف آلی و کربنی کردن) می‌توان لایه‌های صاف کربن را در جهت الیاف مرتب کرد. هیچ لایه کربنی در جهت عمود بر محور الیاف قرار نمی‌گیرد. نتیجه الیافی با استحکام بیشتر از فولاد می‌باشد. کربن در تمامی جانداران وجود داشته و پایه [شیمی آلی] را تشکیل می‌دهد. هم‌چنین این غیرفلز ویژگی جالبی دارد که می‌تواند با خودش و انواع زیادی از عناصر دیگر پیوند برقرار کند (تشکیل دهنده بیش از ده میلیون ترکیب). در صورت ترکیب با اکسیژن تولید دی اکسید کربن می‌کند که برای رویش گیاهان، حیاتی می‌باشد. در صورت ترکیب با هیدروژن ترکیبات مختلفی بنام هیدرو-کربنها را به‌وجود می‌آورد که به شکل سوخت‌های فسیلی، در صنعت بسیار بنیادی هستند. وقتی هم با اکسیژن و هم با هیدروژن ترکیب گردد، گروه زیادی از ترکیبات را از جمله اسیدهای چرب را می‌سازند که برای حیات و استر، که طعم دهنده بسیاری از میوه‌ها است، ضروری است.ایزوتوپ کربن-۱۴ به طور متداول در سن یابی پرتوزایشی کاربرد دارد.

۳-۶-۱ پیشینه

کربن (واژه لاتین carbo به معنی زغال چوب) در زمان‌های گذشته کشف شد و برای مردم باستان که آن را از سوختن مواد آلی در اکسیژن ضعیف تولید می‌کردند، آشنا بود. (تولید زغال چوب). مدت طولانی است که الماس به‌عنوان ماده‌ای زیبا و کمیاب به حساب می‌آید. فولرن، آخرین آلوتروپ شناخته شده کربن در دهه ۸۰ به‌عنوان محصولات جانبی آزمایشات پرتو مولکولی کشف شدند.

۳-۶-۲ شکل‌ها

کربن به دلایل زیادی قابل توجه است. اشکال مختلف آن شامل یکی از نرم‌ترین (گرافیت) و یکی از سخت‌ترین (الماس) مواد شناخته شده توسط انسان می‌باشد. افزون بر این، کربن میل زیادی به پیوند با اتم‌های کوچک دیگر از جمله اتم‌های دیگر کربن، داشته و اندازه بسیار کوچک آن امکان پیوندهای متعدد را به‌وجود می‌آورد. این خصوصیات باعث شکل‌گیری ده میلیون ترکیبات کربنی شده است. ترکیبات کربن زیر بنای حیات را در زمین می‌سازند و چرخه کربن – نیتروژن قسمتی از انرژی تولید شده توسط خورشید و ستارگان دیگر را تأمین می‌کند.

۳-۶-۳ تولید کربن

کربن در اثر مهبانگ (انفجار بزرگ آغازین) حاصل نشده، چون این عنصر برای تولید نیاز به یک برخورد سه مرحله‌ای ذرات آلفا (هسته اتم هلیم) دارد. جهان در ابتدا گسترش یافت و به چنان به سرعت سرد شد که امکان تولید آن غیر ممکن بود. به هر حال، کربن درون ستارگانی که در رده افقی نمودار H-R قرار دارند، یعنی جایی که ستارگان، هسته هلیم را با فرایند سه گانه آلفا به کربن تبدیل می‌کنند، تولید شد.

۳-۶-۴ کاربردها

کربن بخش بسیار مهمی در تمامی موجودات زنده است و تا آن‌جا که می‌دانیم بدون این عنصر زندگی وجود نخواهد داشت. عمده‌ترین کاربرد اقتصادی کربن، فرم هیدروکربن‌ها

می‌باشد که قابل توجه‌ترین آن‌ها سوخت‌های فسیلی، گاز متان و نفت خام است. نفت خام در صنعت پتروشیمی برای تولید محصولات زیادی از جمله مهم‌ترین آن‌ها بنزین، گازوئیل و نفت سفید به‌کار می‌رود که از طریق فرآیند تقطیر در پالایشگاه‌ها به‌دست می‌آیند. از نفت خام مواد اولیه بسیاری از مواد مصنوعی، که بسیاری از آن‌ها در مجموع پلاستیک نامیده می‌شوند، شکل می‌گیرد.

از دیگر کاربردهای کربن می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- ایزوتوپ کربن-۱۴ که در ۲۷ فوریه ۱۹۳۰ کشف شد در سن یابی کربن پرتوزا مورد استفاده است.

۲- گرافیت در ترکیب با خاک رس به‌عنوان مغز مداد به‌کار می‌رود.

۳- الماس جهت تزئین و نیز در مته‌ها و سایر کاربردهایی که سختی آن مورد استفاده‌است کاربرد دارد.

۴- برای تولید فولاد، به آهن کربن اضافه می‌کنند.

۵- کربن در میله کنترل در واکنش‌گاه‌های اتمی بکار می‌رود.

۶- گرافیت به شکل پودر و سفت شده به‌عنوان ذغال چوب برای پخت غذا، در آثار هنری و موارد دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۷- قرص‌های ذغال چوب در پزشکی که به‌صورت قرص یا پودر وجود دارند برای جذب سم از دستگاه گوارشی مورد استفاده‌اند.

۸- خصوصیات ساختمانی و شیمیایی فولرن به شکل ریزتیوب کربن، کاربردهای بالقوه امیدوار کننده‌ای در رشته در حال شکل‌گیری نانوتکنولوژی دارد.

فصل چهارم

تعیین گذار ایزوتوپ‌های کربن

۴-۱ مقدمه

اکنون به مرحله‌ای رسیده‌ایم که با استفاده از گفته‌های بالا می‌خواهیم مسئله‌امان را حل کنیم. برای این کار از بین ایزوتوپ‌های کربن، کربن-۱۴ را انتخاب می‌کنیم و آن را با چند پتانسیل مورد بررسی قرار می‌دهیم. کربن-۱۴ یکی از ایزوتوپ‌های کربن است که دارای نیمه عمر نسبتاً طولانی می‌باشد و به همین علت از آن در موارد گوناگونی از جمله سن‌سنجی در باستان‌شناسی استفاده می‌کنند. اما با توجه به اصل پایداری، که همه سیستم‌های فیزیکی تمایل دارند به حالت پایداری برسند، کربن-۱۴ نیز همین تمایل را دارد. با اینکه کربن-۱۴ نیمه عمر طولانی دارد اما باز هم دستخوش تغییرات می‌شود و خود را به حالت پایدار کامل می‌رساند. این حالت پایدار چیزی و جایی نیست جز، نیتروژن-۱۴. این ایزوتوپ از نیتروژن، بسیار پایدار است. کربن-۱۴ خود را از طریق واپاشی بتازا منفی به این حالت می‌رساند که به صورت زیر انجام می‌شود:

$$^{۱۴}_{۶}C_{۸} \rightarrow {}^{۱۴}_{۷}N_{۷} + e^{-} + \bar{\nu} \qquad (۱-۴)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، کربن با تبدیل یک پروتون به نوترون و به‌وجود آمدن الکترون و پاد نوترینو این واپاشی را انجام می‌دهد. در واقع وجود پاد نوترینو برای بقای پایستگی تکانه می‌باشد.

برای این کار با توجه به فصل‌های قبل، در می‌یابیم که اولین مرحله‌ای که ما باید آن را انجام دهیم، به دست آوردن تابع موج حالت اولیه و نهایی می‌باشد. این کار را به روش ابر تقارن انجام می‌دهیم. در واقع این ابر تقارن است که تابع موج‌ها را به ما می‌دهد و با توجه به اینکه در واپاشی بتایی تعداد کل نوکلئون‌ها تغییری نمی‌کند، حالت اولیه و نهایی ما، به یک اندازه، دارای ۱۴ نوکلئون است. پس تابع موجی که برای این حالت‌ها می‌نویسیم به یک شکل است البته این دو حالت از نظر ساختار با هم متفاوت هستند که در محاسبات ما خللی وارد نمی‌کنند. در واقع همین هم‌پوشانی تابع موج‌هاست که احتمال این گذار را بالا برده است. پس از به دست آوردن تابع موج‌ها وارد نظریه فرمی می‌شویم. ابتدا این موضوع را در خاطر داشته باشیم که تابع موج‌های الکترون و نوترون را، که جزو

حالت‌های نهایی ما هستند، طبق بسط موج تخت، یک در نظر می‌گیریم که این کار اثرات آنها را در جزء ماتریس هسته‌ای از بین می‌برد و فقط تابع موج نیتروژن-۱۴ باقی می‌ماند. با استفاده از روش محاسبات عددی، ماتریس هسته‌ای را به دست می‌آوریم و با جایگذاری در فرمول‌هایی که در فصل ۳ به دست آورده شد، مقادیر مورد نیاز را استخراج می‌کنیم.

۴-۲ حل معادله شرودینگر برای کربن-۱۴ با پتانسیل وودز-ساکسون

اکنون معادله ابر تقارن را با پتانسیل وودز-ساکسون حل می‌کنیم. برای این کار معادله کلی ابر تقارن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}-\frac{\gamma(\gamma+D-2)}{r^2}\right]R(r)+V(r)R(r)=ER(r) \qquad (۱-۴)$$

که در آن D (درجات آزادی) بعد مسئله ما می‌باشد و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D=3N-3 \qquad (۲-۴)$$

N تعداد نوکلئون‌های موجود در مسئله می‌باشد که در اینجا مقدار ۱۴ را دارد چون کربن و نیتروژن، ۱۴ ذره‌ای هستند. کم شدن ۳ از رابطه بالا بخاطر مختصات مرکز جرم است. پس داریم:

$$D=3\times14-3=39 \qquad (۳-۴)$$

با جایگذاری مقدار به دست آمده از رابطه بالا در رابطه (۴-۱)، به معادله زیر می‌رسیم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{39-1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+39-2)}{r^2}\right]R(r)+V(r)R(r)=ER(r) \qquad (۴-۴)$$

و داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{38}{r}-\frac{l(l+37)}{r^2}\right]R(r)+V(r)R(r)=ER(r) \qquad (۵-۴)$$

برای اینکه بتوانیم رابطه بالا را حل کنیم باید یک تابع موج پیشنهاد بدهیم. تابع موج پیشنهادی ما به صورت زیر است:

$$U(r)=R(r)r^{\frac{D-1}{2}} \qquad (۶-۴)$$

با داشتن مقدار درجات آزادی و تابع موج بالا، مشتق اول و دوم تابع موج را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dR}{dr}=\frac{dU}{dr}r^{-19}-19r^{-20}U \qquad (۷-۴)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d^2U}{dr^2}-38r^{-20}\cdot\frac{dU}{dr}+380r^{-21}U \qquad (۸-۴)$$

با جایگذاری روابط (۴-۷) و (۴-۸) در رابطه (۴-۵) و اندکی محاسبات ریاضی خواهیم داشت:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu r^2}\right]U(r)=0 \qquad (۹-۴)$$

در رابطه بالا، چون با مجموعه‌ای از نوکلئون‌ها کار می‌کنیم، از جرم کاهش یافته استفاده کرده‌ایم.

اکنون پتانسیل وودز-ساکسون را جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E+\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}-\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu r^2}\right]U(r)=0 \qquad (۱۰-۴)$$

باز هم برای حل معادله بالا نیاز به تغییر متغیر داریم:

$$r=R_0(1+x) \qquad (۱۱-۴)$$

$$\alpha=\frac{R_0}{a} \qquad (۱۲-۴)$$

$$\delta=\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu R_0^2} \qquad (۱۳-۴)$$

در ادامه به بسط زیر نیز نیاز داریم:

$$(۱+x)^{-۲}=۱-۲x+۳x^{۲}-۴x^{۳}+\dots \qquad (۱۴-۴)$$

نکته‌ای در در این‌جا به آن برخورد می‌کنیم این است که فرم پتانسیل‌های ما به یک شکل نیستند و ما باید آن‌ها را همسان کنیم. برای این کار عبارت پایین را در نظر می‌گیریم:

$$d_{۰}+\frac{d_{۱}}{۱+\exp(\alpha x)}+\frac{d_{۲}}{[۱+\exp(\alpha x)]^{۲}} \qquad (۱۵-۴)$$

مخرج‌های عبارت بالا را حول $x=۰$ بسط می‌دهیم و داریم:

$$[۱+\exp(\alpha x)]^{-۱}=\frac{۱}{۲}-\frac{\alpha}{۴}x+\frac{\alpha^{۳}}{۴۸}x^{۳}-\frac{\alpha^{۵}}{۴۸۰}x^{۵}+\dots \qquad (۱۶-۴)$$

$$[۱+\exp(\alpha x)]^{-۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{\alpha}{۴}x+\frac{\alpha^{۲}}{۱۶}x^{۲}+\frac{\alpha^{۳}}{۴۸}x^{۳}-\dots \qquad (۱۷-۴)$$

از ترکیب سه رابطه بالا به دست می‌آوریم که:

$$d_{۰}+\frac{d_{۱}}{۲}-\frac{d_{۱}\alpha}{۴}x+\frac{d_{۲}}{۴}-\frac{d_{۲}\alpha}{۴}x+\frac{d_{۲}\alpha^{۲}}{۱۶}x^{۲} \qquad (۱۸-۴)$$

از جملات $x^{۳}$ و مرتبه بالاتر صرفنظر می‌کنیم و عبارت بالا را برابر با رابطه (۴-۱۴) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$d_{۰}=۱-\frac{۴}{\alpha}+\frac{۱۲}{\alpha^{۲}} \qquad (۱۹-۴)$$

$$d_{۱}=\frac{۸}{\alpha}-\frac{۴۸}{\alpha^{۲}} \qquad (۲۰-۴)$$

$$d_{۲}=\frac{۴۸}{\alpha^{۲}} \qquad (۲۱-۴)$$

اکنون پتانسیل‌های ما همسان شدند و معادله (۴-۱۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^{۲}U}{dr^{۲}}+\frac{۲\mu}{\hbar^{۲}}\left[E+\frac{V_{۰}}{۱+\exp(\alpha x)}-\delta d_{۰}-\frac{\delta d_{۱}}{۱+\exp(\alpha x)}-\frac{\delta d_{۲}}{[۱+\exp(\alpha x)]^{۲}}\right]U(r)=۰ \qquad (۲۲-۴)$$

برای ساده سازی تغییر متغیرهایی به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\square=\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-\delta d_0) \qquad (۲۳-۴)$$

$$\beta=\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0-\delta d_1) \qquad (۲۴-۴)$$

$$\gamma=\frac{2\mu}{\hbar^2}(\delta d_2) \qquad (۲۵-۴)$$

به معادله کلی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\left[\square+\frac{\beta}{1+\exp(\alpha x)}-\frac{\gamma}{[1+\exp(\alpha x)]^2}\right]U(r)=0 \qquad (۲۶-۴)$$

برای حل معادله شرودینگر به دست آمده از روش ابر تقارن استفاده می‌کنیم، برای این کار باید یک ابر پتانسیل به صورت زیر تعریف کنیم:

$$W=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\left(A+\frac{B}{1+\exp(\alpha x)}\right) \qquad (۲۷-۴)$$

A و B ثابت هستند و باید آن‌ها را از رابطه زیر به دست آورد:

$$W^2-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}W'=V_{eff}-E \qquad (۲۸-۴)$$

که پتانسیل موثر در رابطه بالا همان پتانسیل‌های همسان شده در رابطه (۴-۲۶) می‌باشد.

رابطه بالا را حل کرده و به رابطه زیر می‌رسیم که این رابطه به دست آمده را با عبارت معادله (۴-۳۰) مقایسه کرده و نتیجه را گزارش می‌کنیم.

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[A^2+\frac{2AB-B\alpha}{1+\exp(\alpha x)}+\frac{B^2+B\alpha}{[1+\exp(\alpha x)]^2}\right]=V_{eff}-E \qquad (۲۹-۴)$$

$$-\square-\frac{\beta}{1+\exp(\alpha x)}+\frac{\gamma}{[1+\exp(\alpha x)]^2} \qquad (۳۰-۴)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}A^2=-\square \qquad (۳۱-۴)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}(2AB-B\alpha)=-\beta \qquad (۳۲-۴)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}(B^2+B\alpha)=+\gamma \qquad (۳۳-۴)$$

از رابطه (۴-۳۳) مقدار B را محاسبه می‌کنیم:

$$B=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}}{2} \qquad (۳۴-۴)$$

با داشتن مقدار B و معادله (۴-۳۲) مقدار A نیز به دست می‌آید:

$$A=\frac{\alpha}{2}-\frac{\frac{2\mu}{\hbar^2}\beta}{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}} \qquad (۳۵-۴)$$

ثابت‌های به دست آمده، یک عدد هستند و در تابع موج نهایی که ظاهر می‌شوند مقدار آنها را وارد می‌کنیم. اکنون به مرحله آخر یعنی به دست آوردن تابع موج رسیدیم که در روش ابرتقارن این کار را با رابطه زیر انجام می‌دهیم:

$$U(x)=N_0\exp\left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar^2}\int_0^x W(x')dx'\right)=N_0\exp(Ax)\left(1+\exp(-\alpha x)\right)^{-\frac{B}{a}} \qquad (۳۶-۴)$$

و در آخر طبق رابطه (۴-۶) تابع موج نهایی را می‌نویسیم:

$$R(x)=N_0\left(\frac{\exp\left[A\left(\frac{x-R_0}{R_0}\right)\right]}{x^{10}}\right)\left(1+\exp\left[-\left(\frac{x-R_0}{a}\right)\right]^{-\frac{B}{a}}\right) \qquad (۳۷-۴)$$

تابع موج نهایی به دست آمد، و باید در نظر داشته باشیم که همه این اتفاقات درون هسته رخ می‌دهد یعنی بیشترین مقدار ما در حد بالای انتگرال همان شعاع هسته است که از رابطه $R_0A^{\frac{1}{3}}$ به

دست می‌آید و با داشتن مقدار تجربی شعاع میانگین و عدد جرمی این حد به دست می‌آید. و در واقع اکثر پارامترها در تابع موج بالا عدد هستند و ما می‌توانیم آنها را مقداردهی کنیم. که این کار در محاسبه عددی پیچیدگی‌های مسئله ما را کمتر می‌کند. پس اولین تابع موج با پتانسیل وودز-ساکسون به دست آمد. در ادامه تابع موج‌ها را با پتانسیل‌های دیگر به دست می‌آوریم و در انتها جواب‌ها را گزارش می‌کنیم.

۴-۳ حل معادله شرودینگر برای کربن-۱۴ با پتانسیل IQY

با استفاده از بخش قبل، یعنی شروع از رابطه ابر تقارن، مستقیماً رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu r^2}\right]U(r)=0 \qquad (۴-۹) \text{ و } (۴-۳۸)$$

در این قسمت باید پتانسیل را جایگذاری کنیم، پتانسیل IQY به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{IQY}(r)=\frac{V_0 e^{-2\alpha r}}{r^2} \qquad (۴-۳۹)$$

قسمت نمایی پتانسیل را بسط تیلور می‌دهیم:

$$V(r)=V_0\frac{(1-2\alpha r+4\alpha^2 r^2)}{r^2} \qquad (۴-۴۰)$$

با ساده سازی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$V(r)=\frac{V_0}{r^2}-\frac{2aV_0}{r}+4a^2V_0 \qquad (۴-۴۱)$$

حال پتانسیل را در معادله (۴-۳۸) قرار می‌دهیم و رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-4a^2V_0+\frac{2aV_0}{r}-\frac{V_0}{r^2}-\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu r^2}\right)U(r)=0 \qquad (۴-۴۲)$$

رابطه بالا را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-4a^2V_0+\frac{2aV_0}{r}-\frac{V_0+\Omega}{r^2}\right)U(r)=0 \qquad (۴۳-۴)$$

که در آن داریم:

$$\Omega=\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu} \qquad (۴۴-۴)$$

این مرحله با قسمت قبل یک تفاوت دارد و آن هم این است که در اینجا پتانسیل‌ها همسان هستند و نیاز به تبدیلات گذشته نیست، اکنون باز هم، مانند قبل، برای ساده سازی، تغییر متغیر می‌دهیم و معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\square+\frac{\beta}{r}-\frac{\gamma}{r^2}\right)U(r)=0 \qquad (۴۵-۴)$$

که در آن ضرایب به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\square=\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-4a^2V_0) \qquad (۴۶-۴)$$

$$\beta=\frac{4\mu}{\hbar^2}V_0a \qquad (۴۷-۴)$$

$$\gamma=\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0+\Omega) \qquad (۴۸-۴)$$

اکنون باز هم به مرحله‌ای رسیدیم که برای حل معادله شرودینگر رابطه (۳-۴۵)، باید یک ابر پتانسیل تعریف کنیم و با استفاده از رابطه (۴-۲۸) تابع موج نهایی را به دست آوریم، ابر پتانسیل به صورت زیر است:

$$W(r)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\left(A+\frac{B}{r}\right) \qquad (۴۹-۴)$$

با داشتن ابر پتانسیل بالا و هم‌چنین رابطه ریکاتی (۴-۲۸) ضرایب ثابت در ابر پتانسیل را به دست می‌آوریم، با اندکی محاسبات ریاضی داریم:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[A^2+\frac{2AB}{r}+\frac{B^2}{r^2}-\frac{B}{r^2}\right]=V_{eff}-E \qquad (۵۰-۴)$$

که در آن:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}A^2=-\square \qquad (۵۱-۴)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}(2AB)=-\beta \qquad (۵۲-۴)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}(B^2-B)=\gamma \qquad (۵۳-۴)$$

با استفاده از روابط بالا مقدار ضرایب ثابت را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$A=-\frac{2\mu\beta}{\hbar^2\left[1\square\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}\right]} \qquad (۵۴-۴)$$

$$B=\frac{1\square\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}}{2} \qquad (۵۵-۴)$$

با دانستن رابطه (۴-۳۶) و (۴-۵۴) و (۴-۵۵) پس از محاسبات ریاضی تابع موج را به دست می‌آوربم:

$$R(r)=N.\left(R.A^{1/3}\right)^{-19}\exp\left[-\frac{2\mu\beta}{\hbar^2\left[1\square\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}\right]}\left(R.A^{1/3}\right)+\frac{1\square\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}}{2}\left[\ln\left(R.A^{1/3}\right)-1\right]\right] \qquad (۵۶-۴)$$

آنچه که به دنبالش بودیم را به دست آوردیم. برای پتانسیل IQY نیز تابع موج را به دست آوردیم. در اینجا نیز حدود انتگرال از ۰ تا شعاع هسته تغییر کرد. این اطلاعات در ادامه بحث کمک شایانی به ما می‌کند.

۴-۴ حل معادله شرودینگر برای کربن-۱۴ با پتانسیل یوکاوا

در این بخش، با کمک گرفتن از دو بخش قبل، به سادگی به جواب که همان تابع موج است، می‌رسیم. برای این کار باز هم مستقیماً به سراغ معادله (۴-۹) می‌رویم و معادله شرودینگر ۱۴ ذره‌ای را می‌نویسیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu r^2}\right]U(r)=0 \qquad (۴-۵۷) \text{ و } (۴-۹)$$

پتانسیل یوکاوا، که در فصل اول آن را معرفی کردیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V=-\frac{V_0 e^{-ar}}{r} \qquad (۴-۵۸)$$

این پتانسیل را در رابطه (۴-۵۷) قرار می‌دهیم و محاسبات را شروع می‌کنیم، در ضمن قسمت نمایی این پتانسیل را بسط نمایی نیز می‌دهیم:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-aV_0+\frac{V_0}{r}-\frac{\Omega}{r^2}\right]U=0 \qquad (۴-۵۹)$$

که در آن:

$$\Omega=\frac{\hbar^2(l+18)(l+19)}{2\mu} \qquad (۴-۶۰)$$

با تغییر متغیرهای زیر معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\square=\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-aV_0) \qquad (۴-۶۱)$$

$$\beta=\frac{2\mu}{\hbar^2}V_0 \qquad (۴-۶۲)$$

$$\gamma=\frac{2\mu}{\hbar^2}\Omega \qquad (۴-۶۳)$$

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\left(\square+\frac{\beta}{r}-\frac{\Omega}{r^2}\right)U=0 \qquad (۴-۶۴)$$

اکنون باز هم به معادله‌ای رسیدیم که برای حل آن به روش ابر تقارن، باید یک ابر پتانسیل به صورت زیر تعریف کنیم:

$$W(r)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\left(A+\frac{B}{r}\right) \qquad (۴-۶۵)$$

باز هم برای به دست آوردن ضرایب ثابت، باید از رابطه (۴-۲۸) استفاده کنیم که پس از تمامی محاسبات، جواب‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A=-\frac{2\mu\beta}{\hbar^2\left[1\pm\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}\right]} \qquad (۴-۶۶)$$

$$B=\frac{1\pm\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}}{2} \qquad (۴-۶۷)$$

با استفاده از رابطه (۴-۳۶) تابع موج برای پتانسیل یوکاوا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R(r)=N.\left(R.A^{1/3}\right)^{-19}\exp\left[-\frac{2\mu\beta}{\hbar^2\left[1\pm\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}\right]}\left(R.A^{1/3}\right)+\frac{1\pm\sqrt{1+4\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\gamma}}{2}\left[\ln\left(R.A^{1/3}\right)-1\right]\right] \qquad (۴-۶۸)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم این تابع همان تابع موج پتانسیل IQY است. شاید این اشتباه پیش بیاید که فکر کنیم تابع موج‌های به دست آمده برای هر در پتانسیل یکی است و هیچ تفاوتی با هم ندارد. اما باید گفت که این دو تابع موج با هم متفاوت هستند هر چند که شکل آن‌ها یکی است، دلیل این تفاوت هم در ضرایب γ و β و $\pm$ که برای ساده سازی روش حل، آن‌ها را انتخاب کردیم. با دانستن این موضوع تفاوت تابع موج‌ها مشخص می‌شود.

۴-۵ تعیین نوع یا محاسبهء واپاشی

اکنون پس از عبور از مرحله اول که همان به دست آوردن تابع موج‌ها بود به مرحله بعد که محاسبه احتمالات است، می‌رسیم. طبق فصل ۳، این کار را باید از نظریه فرمی انجام دهیم. برای شروع چه کاری باید انجام دهیم؟ ابتدا باید این کار را با به دست آوردن جزء ماتریس هسته‌ای انجام دهیم. به علت پیچیده بودن توابع موج و هم‌چنین گستردگی اعداد، برای این که بتوانیم به جواب برسیم باید به سراغ محاسبات عددی برویم و با توجه به نرم افزارهای موجود این جواب‌ها را محاسبه کنیم. نکته امیدوارکننده ما در این محاسبات این است که تعداد بسیاری از این ضرایب که ما در محاسباتمان داریم به صورت عدد هستند و کار ما را تا حدودی آسان می‌کنند، یعنی ما با دانستن ارقام آنها که در فصول قبل آورده شده‌اند، در روش عددی آن‌ها را مقدار دهی می‌کنیم که این کار، آنها را از حالت مجهول بودن خارج می‌کند. یاد آوری می‌کنیم که جزء ماتریس هسته‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M_{fi}=\int \psi_f^* O_X \psi_i dv \qquad (۶۹-۴)$$

توضیح بیشتر اینکه، مثلاً در پتانسیل وودز-ساکسون، ابتدا $l=۰$ در نظر گرفته می‌شود. پس از آن رابطه (۴-۱۳) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\delta=\frac{\hbar^۲ ۱۸\times ۱۹}{۲\mu R_.^۲} \qquad (۷۰-۴)$$

با دانستن مقادیر ثابت پلانک، جرم کاهش یافتهء ۱۴ نوکلئون و هم‌چنین شعاع میانگین هسته (۱/۲۵ فرمی) δ به دست می‌آید. پس از محاسبه δ، یک قدم به محاسبه ضرایب (۴-۲۳) و (۴-۲۴) و (۴-۲۵) نزدیک می‌شویم. با تعیین مقدارهای دیگر موجود در مسئله، در آخر به مقادیر A و B می‌رسیم که مستقیماً در تابع موج دخالت دارند.

از ابتدا تا انتهای این کار را می‌توان به روش عددی انجام داد و جواب‌های آخر را به دست آورد. این مراحل را برای سه پتانسیل انجام می‌دهیم. در ضمن لازم به گفتن است که انرژی واپاشی بتایی در کربن-۱۴ به مقدار زیر است که در محاسبات استفاده شده است:

$$E_{\beta}=۱۵۶/۵۱(KeV) \qquad (۷۱-۴)$$

اکنون پس از این مراحل و با استفاده از فرمول آهنگ واپاشی کل، رابطه (۳-۲۹)، مقادیر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\left(ft_{\frac{۱}{۲}}\right)_{woods\text{-}saxon}=۱۳۶۵/۵۳ \qquad (۷۲-۴)$$

$$\left(ft_{\frac{۱}{۲}}\right)_{IQY}=۳۸۸۱/۳۹ \qquad (۷۳-۴)$$

$$\left(ft_{\frac{۱}{۲}}\right)_{yukawa}=۵۲۶۰/۶۵ \qquad (۷۴-۴)$$

اکنون مقادیر آهنگ واپاشی کل را به دست آوردیم، برای این‌که بتوانیم آنها را تحلیل و تفسیر کنیم، طبق مبحث نیمه عمرهای طبیعی در فصل ۳، باید مقدار لگاریتمی آنها را به دست آوریم. این کار را در پایین انجام داده‌ایم:

$$\log\left[\left(ft_{\frac{۱}{۲}}\right)_{woods\text{-}saxon}\right]=\log(۱۳۶۵/۵۳)=۳/۱۳۵۳۰ \qquad (۷۵-۴)$$

$$\log\left[\left(ft_{\frac{۱}{۲}}\right)_{IQY}\right]=\log(۳۸۸۱/۳۹)=۳/۵۸۸۹۸ \qquad (۷۶-۴)$$

$$\log\left[\left(ft_{\frac{۱}{۲}}\right)_{yukawa}\right]=\log(۵۲۶۰/۶۵)=۳/۷۲۱۰۳ \qquad (۷۷-۴)$$

مقادیر به دست آمده را تحلیل می‌کنیم. در فصل ۳ گفته شد که واپاشی بتایی دارای انواع مختلفی از جمله مجاز، ممنوع اول و ... می‌باشد. حدود این صورت‌های واپاشی در شکل (۳-۹) بیان شده بود. دیدیم که واپاشی‌های مجاز بتایی دارای محدوده ۳/۵ تا ۷/۵ هستند. در جواب‌هایی که ما به دست

آوردیم، مقدار این نیمه عمرها در حدود ۳ تا ۴ بودند با توجه به این موضوع می‌بینیم که واپاشی ما با استفاده از هر سه پتانسیل جزو واپاشی‌های مجاز بتایی هستند و این جواب‌ها مورد انتظار ما بود. در بخش نتیجه‌گیری بیشتر در مورد این نتایج توضیح می‌دهیم.

۴-۶ نتیجه‌گیری

با شروع از روش ابر تقارن به تابع موج‌ها رسیدیم سپس وارد مباحث واپاشی‌های هسته‌ای شدیم و با توجه به عنصر انتخابی متوجه شدیم که این عنصر از طریق واپاشی بتازا به حالت‌های دیگری گذار می‌کند. تابع موج‌های به دست آمده را با رابطه‌هایی که در واپاشی بتازا وجود دارد، از جمله جزء ماتریس هسته‌ای و آهنگ واپاشی کل، ادغام کردیم تا بتوانیم جواب مطلوبی به دست آوریم. پس از انجام محاسبات ریاضی به صورت دستی و عددی جواب‌ها را به دست آوردیم. در نگاه اول، این جواب‌ها، قابل قبول به نظر رسید. با رجوع به فصل ۳ و توضیحاتی که در آن‌جا در مورد احتمالات و انواع واپاشی‌های بتایی داده شده بود، دیدیم که جواب‌های به دست آمده درست می‌باشند. در واپاشی بتایی واپاشی‌های مجاز حدودی از ۳/۵ تا ۷/۵ دارند. جواب‌های ما برای سه پتانسیل وودز-ساکسون، IQY و یوکاوا به ترتیب ۳/۱۳۵۳۰، ۳/۵۸۸۹۸ و ۳/۷۲۱۰۳ می‌باشند. با مقایسه با مقادیر تجربی درمی‌یابیم که جواب‌های ما دقیق هستند. اما برای تکمیل اثبات این محاسبات مطلب دیگری را نیز بیان می‌کنیم. کربن-۱۴ که خودش تا حدودی یک ایزوتوپ نسبتاً پایدار است، در حالت پایه خود در 0^+ قرار دارد که این یعنی اسپین صفر و پاریته مثبت. از طرفی نیتروژن-۱۴ یک ایزوتوپ بسیار پایدار است که در حالت پایه خود در 1^+ قرار دارد. با استفاده از قواعد واپاشی بتایی، طبق رابطه (۳-۳۲)، این گذار را بررسی می‌کنیم. تغییر پاریته که نداریم چون حالت اولیه و نهایی، هر دو پاریته مثبت دارند پس تغییر پاریته نداریم. اسپین حالت اولیه ۰ و اسپین حالت نهایی ۱ است، اختلاف اسپین‌ها برابر با ۱ است یعنی $\Delta I=1$. با این بررسی می‌بینم که واپاشی، یک واپاشی مجاز است و از نوع گاموف-تلر. پس چه با استفاده از جدول‌های فصل ۳ و چه با بررسی از طریق قواعد واپاشی می‌بینیم که

واپاشی ما یک واپاشی بتایی مجاز است. در جدول زیر این مطالب را به طور خلاصه دسته بندی کردیم.

جدول ۴-۱ مقایسه نتایج محاسبات ما و داده‌های تجربی

نتایج تجربی برای واپاشی‌های مجاز با استفاده از نمودارها	نتایج تجربی با استفاده از قواعد گذار $\Delta I=0,1$ و $\Delta\pi=0$	محاسبات ما $\log\left[\left(ft_{\frac{1}{2}}\right)\right]$	پتانسیل انتخابی	نوع گذار
۳/۵ تا ۷/۵	واپاشی مجاز	۳/۱۳۵۳۰	وودز-ساکسون	$0^+\rightarrow 1^+$
۳/۵ تا ۷/۵	واپاشی مجاز	۳/۵۸۸۹۸	IQY	$0^+\rightarrow 1^+$
۳/۵ تا ۷/۵	واپاشی مجاز	۳/۷۲۱۰۳	یوکاوا	$0^+\rightarrow 1^+$

ادغام ابر تقارن و نظریه فرمی در واپاشی بتازا، نتایج مطلوبی را برای ما به دست آورد و مجاز بودن گذار کربن را به دست آورد.

[۱] W.N.Cottingham,D.A.Greenwood, (۲۰۰۰), "**An introduction to nuclear physics**",

Cambridge University Press.

[۲] P.T. Mathews, F.R.S, "**Introduction to Quantum Mechanics** ", McGRAWHILL ۱۹۷۴.

[۳] جراد چشر **"***کتاب بررسی جدو تناوبی عناصر* **"** میثم هدایت .تهران : شباهنگ، ۳۱۸۴.

[۴] H. S. Hans,(۲۰۰۱)," **Nuclear Physics-Experimental and Theorical**", New Age International(P) Limited Publishers, New Dehli.

[۵]ب الکس برون،**"** مباحثی در فیزیک ساختار هسته ای"، علی اکبر خواجه دوست مهمان داد، انتشارات مرنیز، مشهد

[۶] H. Frauenfelder, E. M. Henley, (۱۹۷۷), "**subatomic physics**", prentice – Hall. Vol ۱.۲.

[۷] کاتینگهام و گرینوود، ۱۳۸۶،" *مبانی فیزیک هسته ای*"، دکتر فرهاد رحیمی و حمیدرضا رضازاده، چاپ اول، دانشگاه فردوسی، مشهد

[۸] P.T. Mathews, F.R.S, "**Introduction to Quantum Mechanics** ", McGRAWHILL ۱۹۷۴

[۹] Agboola D ۲۰۱۱Commun. Theor. Phys.**۵۵** ۹۷۲.

[۱۰] J.L.Basdevant,J. Rich,M. Spiro, (۲۰۰۵), "**Fundamentals In Nuclear Physics From Nuclear Structure to cosmology**", Springer, USA.

[۱۱] J.L.Basdevant,J. Rich,M. Spiro, (۲۰۰۵), "**Fundamentals In Nuclear Physics From Nuclear Structure to cosmology**", Springer, USA.

[۱۲] Kenneth S. Krane, (۱۹۹۸), "**Introductory Nuclear Physics**", J. Willey & Sons, Vol ۱,۲.

[۱۳] Griffiths D. J, (۱۹۸۴), "**Introduction to Elementary Particles**", John Wiley & Sons, Inc, pp.۲۷.

[۱۴] H. Frauenfelder, E. M. Henley, (۱۹۷۷), "**subatomic physics**", prentice – Hall. Vol ۱.۲.

[۱۵] R. D. Woods and D. S. Saxon, (۱۹۵۴), **Phys. Rev**. ۹۵, ۵۷۷.

[۱۶] H.Bahlouli, (۲۰۱۲), "**Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potential**", Chemical Phys ۳۹۳,۱۵۳-۱۵۶.

[۱۷] P.Ramond, Phys.Rev.D۳(۱۹۷۱)۲۴۱۵

[۱۸]D.Vokovand and B.Zumino, Nucl.Phys.B۷۰(۱۹۷۴)۳۹

[۱۹]M.F.Schnivs, Phys.Rep۱۲۸(۱۹۸۵)۳۹

[۲۰]E.Written,Nucl.Phys.B۱۸۸(۱۹۸۵)۳۹

[۲۱]J.Wess and B.Zumino, Nucl.Phys.B۷۰(۱۹۷۴),۳۹-۵۰

[۲۲] E.Written,Nucl.Phys.B۱۸۵(۱۹۸۱)۵۱۳-۵۵۴

[۲۳]L.Alvarez, Supersymmetry and Atiyah-Singer Index Theorem, Berlin, ۱۹۹۶
[۲۴]E.Written, Diffrential Supersymmetry and Morse Theory, Geometry ۱۷(۱۹۸۲)۶۶۱-۶۹۲
[۲۵]V.A.Andreev, Parasupersymetry in Quantum Optics, Phys.Lett.A ۱۹۴(۱۹۹۴)۲۷۲-۲۷۸
[۲۶]H.Nicolia, Supersymettry and Spin systems, J.Phys.A۹ (۱۹۷۶), ۱۴۹۷-۱۵۰۶
[۲۷]P.Roy Magnetic Point vortex and Parasupersymmetry, Phys.Lett.B۳۰۵(۱۹۹۳)۳۵۳-۳۵۶
[۲۸]O.A.Pankratov, S.V.Pakhomov, Mod.Phys.Lett.A۱۲۱(۱۹۸۷)
[۲۹]V.Rubakov and V.P.Spridonov and V.A.Volkov, Solid state Comm. ۶۱(۱۹۸۷)
[۳۰]S.Durand, Phys.Lett.B۳۱۲(۱۹۹۳)۱۱۵-۱۲۰
[۳۱] توکلی.م، (۱۳۸۶)، پایان نامه ارشد،"ابر تقارن در مکانیک کوانتومی"
[۳۲]S.Durand, Phys.Lett.B۳۱۲(۱۹۹۳)۱۱۵-۱۲۰
[۳۳]N.Mohammadi,hep-th, ۹۴۱۲۱۳۳
[۳۴] A.A.Rajabi, Exact Analytical Solution of the Schrodinger Equation for an N-Identical Body-Force system, Springer-Verlag ۲۰۰۵
[۳۵] A.A.Rajabi, Exact Analytical Solution of the Schrodinger Equation for an N-Identical Body-Force system, Springer-Verlag ۲۰۰۵
[۳۶] A.A.Rajabi, Exact Analytical Solution of the Schrodinger Equation for an N-Identical Body-Force system, Springer-Verlag ۲۰۰۵
[۳۷] M. G. Mayer, J. H. D. Jansen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure* (New York: Wiley, ۱۹۵۵)
[۳۸]S. S. M. Wong (۱۹۹۰) "Introduction Nuclear Physics" Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey ۰۷۹۳۲, pp.۱۷۸-۱۹۱
[۳۹] Kenneth S. Krane, (۱۹۹۸), "**Introductory Nuclear Physics**", J. Willey & Sons, Vol ۱,۲.
[۴۰] . C.S.Wu and S.A.Moszkowski, *Beta Decay* (New York: Wiley-Interscince, ۱۹۶۶)
[۴۱] Lide, D. R., ed. (۲۰۰۵). *CRC Handbook of Chemistry and Physics* (۸۶th ed.). Boca Raton (FL): CRC Press. ISBN ۰-۸۴۹۳-۰۴۸۶-۵.

Department of Nuclear Physics

Thesis:

Calculation of carbon isotope decays by nuclear reactions with appropriate interaction potentials (Woods-Saxon, Yukawa, etc.)

Student:

Meysam Madadi

Supervisor:

Dr Ali Akbar Rajabi

February ۲۰۱۵

Abstract

The carbon isotopes, we selected carbon-١٤ for calculation because there is plenty around us. Then, First by supersymmetry method, Wave function is required to be obtained and saw that these isotopes through beta decay, The transition to other states. For this reason, we used beta decay and a review of the rules governing the relations extracted required and enter the wave functions obtained from supersymmetry, In Fermi theory of beta decay, We got the results we wanted.

Keywords: supersymmetry, beta decay, Fermi theory