





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

## بررسی سیستم‌های دو و سه ذره‌ای با در نظر گرفتن

### طول کمینه

کاظم جهان کهن

اساتید راهنما:

دکتر حسن حسن‌آبادی

دکتر صابر زرین‌کمر

بهمن ۱۳۹۴

## دانشکده : فیزیک

### گروه : هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای کاظم جهان کهن به شماره دانشجویی: ۹۲۰۴۶۱۴

تحت عنوان: بررسی سیستم‌های دو و سه ذره‌ای با در نظر گرفتن طول کمینه

در تاریخ ۱۳۹۴/۱۱/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد فیزیک هسته‌ای مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن‌آبادی
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر صابر زرین‌کمر

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر مرتضی رفیعی		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی‌عنبران
			نام و نام خانوادگی : دکتر مسلم سوهانی

باشد که روزی به حقیقت هستی دست پیدا کنیم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان

است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهمشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این پایان نامه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم

## قدردانی و تشکر

سپاس و ستایش خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز و شب تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. بر خود لازم می‌دانم به رسم ادب و احترام مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به همه عزیزان و بزرگوارانی که در تکمیل این پایان نامه مرا یاری داده‌اند ابراز نمایم. بدین‌وسیله از زحمات اساتید بزرگوار و دلسوزم جناب آقایان دکتر حسن حسن‌آبادی و دکتر صابر زرین‌کمر که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی بر من دریغ نکردند و بخاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان و صبر و حوصله فراوان، که نقش مهمی در به ثمر رسیدن این کار داشته‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از برادر عزیزم آقای سجاد جهان‌کهن که مرا در این راه بسیار تشویق و حمایت کردند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

## چکیده

بسیاری از فیزیکدانان برجسته از جمله بوهر<sup>۱</sup>، دیراک<sup>۲</sup>، هایزنبرگ<sup>۳</sup>، پائولی<sup>۴</sup> و لاندائو<sup>۵</sup> به یک رویکرد انقلابی اعتقاد داشتند. از دیدگاه آنان معضلات بوجود آمده در چارچوب نظریه کوانتومی موجود قابل حل نبوده و باید نظریه‌ای نوین بنا گردد که تفاوت این نظریه جدید با نظریه کوانتومی موجود شاید به اندازه تفاوت میان نظریه کوانتومی موجود با فیزیک کلاسیک باشد. دسته‌ای دیگر از فیزیکدانان که شاید بتوان آن‌ها را فیزیکدانان عملگرا نامید؛ ضمن پذیرفتن نظریه کوانتومی به شکل موجود آن کوشیدند با معرفی روش‌های جدید تکنیکی و یا ارائه یک فرمول‌بندی مجدد و مناسب از نظریه کوانتومی موجود به پاسخ‌های قابل درک برای مسائل یافت شده دست یابند. برای نخستین بار فرضیه امکان وجود کوچکترین بازه زمانی ممکن در قرن بیستم مطرح گردید که با پذیرفتن این زمان به یک مقیاس طول بنیادین در اندازه‌گیری فاصله مکانی دست پیدا کردند که اگر بخواهیم مفهوم این طول کمینه را وارد مکانیک کوانتومی کنیم، می‌توانیم آن را به صورت یک عدم قطعیت کمینه در اندازه‌گیری مکان بیان کنیم.

ابتدا به مقدمه‌ای از وجود طول کمینه و روابط مربوطه می‌پردازیم. سپس اثر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته<sup>۶</sup> را روی ترمودینامیک آنسامبل کانونی یک گاز ایده‌آل بررسی می‌کنیم و تابع پارش را با روش‌های کوانتومی و کلاسیکی به دست می‌آوریم. همچنین خواص دینامیکی با عدم قطعیت کمینه طول را برای ذره با پتانسیل ثابت و نوسانگر هماهنگ و غیره مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نوسانگر دیراک را تحت یک میدان مغناطیسی در حضور یک برهم کنش اسپین مداری با چارچوب مکانیک کوانتومی طول کمینه مورد بررسی قرار می‌دهیم، مسأله را با استفاده از مختصات قطبی در فضای تکانه حل می‌کنیم و نهایتاً ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی این سیستم

---

<sup>1</sup> Niels Bohr

<sup>2</sup> Paul Dirac

<sup>3</sup> Werner Heisenberg

<sup>4</sup> Wolfgang Pauli

<sup>5</sup> Lev Landau

<sup>6</sup> Generalized uncertainty principle

را به دست می‌آوریم. همچنین اثر رامسائر-تاونزند<sup>1</sup> را در حضور یک اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و در چارچوب معادله‌ی دیراک برای چاه پتانسیل، پله پتانسیل و دیواره‌ی نامتناهی مورد بررسی قرار می‌دهیم. نهایتاً سیستم‌های چند ذره‌ای را در حضور طول کمینه بررسی می‌کنیم.

**کلمات کلیدی:** طول کمینه، اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، مکانیک کوانتومی تعمیم یافته، گرانش کوانتومی،

نوسانگر دیراک، اسپین مدار، رامسائر تاونزند، سیستم‌های دو ذره‌ای، سیستم‌های سه ذره‌ای

---

<sup>1</sup>Ramsauer-Townsend

## لیست مقالات استخراج شده:

- ❑ **Relativistic Ramsauer Townsend effect in minimal length framework**

*Mod. Phys. Lett. A 30, 1550173 (2015).*

- ❑ **The Spin-Orbit Interaction in Minimal Length Quantum Mechanics; The Case of (2 + 1)-Dimensional Dirac Oscillator**

*Canadian Journal of Physics, 2015, 93(12): 1638-1641, 10.1139.*

- ❑ **Cornell potential in generalized uncertainty principle formalism: the case of Schrödinger equation**

*Quantum Stud.: Math. Found. DOI 10.1007/s40509-015-0065-3.*



## فهرست مطالب

شرح .....	صفحه
<b>فصل اول: طول کمینه</b> .....	<b>۱</b>
۱-۱ مقدمه .....	۲
۲-۱ گرانش و اصل عدم قطعیت .....	۹
۱-۲-۱ دوره پلانک .....	۱۰
۲-۲-۱ نظریه نیوتنی و آزمایش هایزنبرگ .....	۱۲
۳-۲-۱ تعمیمی در مکانیک کوانتومی: آیا $\hbar$ ثابت است؟ .....	۱۳
۳-۱ رابطه عدم قطعیت استاندارد .....	۱۴
۴-۱ رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته .....	۱۵
۵-۱ بهنجارش حالت‌ها .....	۱۹
<b>فصل دوم: بررسی خواص ترمودینامیکی یک گاز ایده آل در حضور طول کمینه</b> .....	<b>۲۳</b>
۱-۲ ذره در چاه پتانسیل .....	۲۶
۲-۲ تابع پارش کانونی در مکانیک کوانتوم تعمیم یافته .....	۲۸
۳-۲ تابع پارش کانونی در مکانیک کلاسیک تعمیم یافته .....	۲۹
۴-۲ خواص ترمودینامیکی در حضور طول کمینه .....	۳۱
<b>فصل سوم: بررسی خواص دینامیکی با عدم قطعیت تعمیم یافته</b> .....	<b>۳۷</b>
۱-۳ دینامیک کلاسیک با طول کمینه .....	۳۸

- ۲-۳ مدل های دینامیکی ..... ۴۰
- ۱-۲-۳ ذره ی آزاد ..... ۴۰
- ۲-۲-۳ ذره در یک پتانسیل خطی ..... ۴۱
- ۳-۲-۳ نوسانگر نیروی ثابت پاد متقارن ..... ۴۲
- ۴-۲-۳ نوسانگر هماهنگ ..... ۴۳
- ۵-۲-۳ نوسانگر هماهنگ عمودی ..... ۴۵
- ۳-۳ بررسی مسئله ی دو جسمی ..... ۴۶
- ۴-۳ بررسی مسئله ی سه جسمی ..... ۴۹
- فصل چهارم: بررسی اثر اسپین مداری و اثر رامسائر - تاونسند و اتم هیدروژن در حضور طول کمینه**
- ..... ۵۳
- ۱-۴ برهم کنش اسپین مداری در مکانیک کوانتومی تعمیم یافته؛ نوسانگر دیراک ۳ بعدی ..... ۵۴
- ۱-۱-۴ نوسانگر دیراک ۳ بعدی تحت یک میدان مغناطیسی با برهم کنش اسپین مداری ..... ۵۴
- ۲-۱-۴ بررسی مسئله در فضای تکانه ..... ۵۶
- ۲-۴ اثر رامسائر-تاونسند نسبیتی در حضور طول کمینه ..... ۶۰
- ۱-۲-۴ اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ..... ۶۰
- ۲-۲-۴ معادله ی دیراک تعمیم یافته ..... ۶۰
- ۳-۲-۴ چاه پتانسیل ..... ۶۲
- ۴-۲-۴ پله پتانسیل ..... ۶۵
- ۵-۲-۴ جعبه نامتناهی ..... ۶۷

۶۹	..... ۳-۴ اتم هیدروژن نسیتی در حضور طول کمینه
۶۹	..... ۱-۳-۴ معادله‌ی دیراک تعمیم یافته برای اتم هیدروژن در حضور طول کمینه
۷۱	..... ۲-۳-۴ انرژی حالت پایه اتم هیدروژن
۷۷	..... فصل پنجم: سیستم‌های چند ذره‌ای در فضای تعمیم یافته با طول کمینه
۸۰	..... ۱-۵ مطالعه سیستم‌های دو ذره‌ای در فضای تعمیم یافته
۸۴	..... ۱-۱-۵ اثر طول کمینه روی طیف انرژی اتم هیدروژن
۸۷	..... ۲-۵ مسئله $N$ جسمی در فضای تعمیم یافته
۹۰	..... ۳-۵ سیستم‌های سه ذره‌ای در حضور طول کمینه؛ نوسانگر هماهنگ
۹۰	..... ۱-۳-۵ نوسانگر هماهنگ سه جسمی در فضای تعمیم یافته
۹۱	..... ۲-۳-۵ مختصات ژاکوبی
۹۲	..... ۳-۳-۵ انرژی سیستم
۹۷	..... نتیجه‌گیری
۹۹	..... مراجع



## فصل اول

### طول کمینه

بعد از توسعه سریع و موفقیت آمیز مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی فیزیکدانان تلاش کردند تا یک نظریه کوانتومی نسبیتی برای توصیف اندرکنش‌های الکترومغناطیسی پایه گذاری کنند و در این جا بود که آنان با دور تازه‌ای از مسائل و معضلات روبرو گردیدند که قبلا با آن‌ها مواجه نشده بودند. بسیاری از فیزیکدانان باور داشتند که وقوع یک انقلاب کوانتومی جدید بر پایه برخی مفاهیم بنیادی و نوین در راه است. مشکلات تا حدی به ویژگی منطقی و مفهومی آن و تا حدی به عدم توانایی نظریه برای توضیح وقایع جدید باز می‌گشت. دسته‌ی اول از مشکلات همان بحث نمادین بی نهایت شدن خود-انرژی بار نقطه‌ای بود. اگرچه بی نهایت شدن خود-انرژی بار نقطه‌ای همتایی نیز در فیزیک کلاسیک داشت؛ اما بعضی از این واگرایها دارای ماهیت غیرکلاسیک بودند و برای اولین بار بود که فیزیکدانان با آن‌ها مواجه می‌شدند. برای مثال، رابرت اپنهایمر<sup>۱</sup> در سال ۱۹۲۹ یک خود-انرژی کوانتومی جدیدی را کشف کرد که به صورت درجه دو واگرا می‌شد و سبب تغییر مکان نامتناهی خطوط طیفی می‌گردید. بعلاوه نوع دیگری از واگرایی (فاجعه فرورسرخ) در اواخر دهه ۱۹۳۰ در ارتباط با تلاشهای انجام شده برای توضیح گسیل فوتون نرم در پراکندگی ذرات باردار از یکدیگر کشف گردید. دسته دوم از مشکلات مربوط به ناسازگاری‌های آزمایشگاهی بود. کشف نوترون در سال ۱۹۳۲ و مزون در سال ۱۹۳۷ این امید را بوجود آورد که شاید پدیده‌های انرژی بالا بر پایه نظریه رایج قابل درک باشند. در اواخر دهه‌ی ۱۹۳۰ بسیاری از فیزیکدانان باور داشتند که الکترودینامیک کوانتومی در مقیاس های انرژی بالاتر از  $1.37 mc^2$ ، که  $m$  جرم الکترون می‌باشد، نظریه‌ای ناکارآمد خواهد بود [۲]

نکته جالب آن که قبل از پیدایش نظریه کوانتومی گروهی از فیزیکدانان و فلاسفه اعتقاد داشتند که فضا و زمان دارای ماهیتی گسسته می‌باشند. برای نخستین بار فرضیه امکان وجود کوچکترین بازه زمانی ممکن (که به آن کرونون<sup>۲</sup> گفته می‌شود) در ابتدای قرن بیستم توسط فیزیکدانانی نظیر ارنست ماخ<sup>۳</sup>، لودویگ بولتزمن<sup>۱</sup> و هانری

<sup>1</sup> Robert Oppenheimer

<sup>2</sup> krunun

<sup>3</sup> Ernst Mach

پوانکاره<sup>۲</sup> مطرح گردید. بعد از سال ۱۹۲۵ میلادی گروهی از فیزیکدانان کوشیدند تا مفهوم کرونون یا زمان گسسته را در مبحث نوین مکانیک کوانتومی وارد سازند. مقدار پیشنهادی برای کرونون برابر  $\frac{\hbar}{mc^2}$  بود که  $\hbar$  ثابت پلانک؛  $m$  جرم پروتون و  $c$  سرعت نور در خلاء می‌باشند. پذیرش مفهوم کرونون توسط بعضی از فیزیکدانان سبب گردید که ایده وجود یک مقیاس طول بنیادین در اندازه‌گیری فواصل مکانی مطرح گردد که حدس زده می‌شد باید برابر با  $\frac{\hbar}{mc}$  باشد. امروزه اغلب نظریه وجود یک مقیاس طول بنیادین در طبیعت به ورنر هایزنبرگ<sup>۳</sup> کاشف سرشناس مکانیک کوانتومی نسبت داده می‌شود و در این بین کمتر سخنی از نقش فیزیکدان گمنام اتریشی آرتور مارچ<sup>۴</sup> در پیدایش این نظریه به میان می‌آید. به نظر می‌رسد که مارچ نخستین شخصی است که اهمیت وجود یک مقیاس طول بنیادین در فیزیک را خاطر نشان کرده است. در یک سلسله از مقالات او کوشید ضمن حفظ ناوردایی نسبی، هندسه بازه‌های فضا زمانی بسیار کوچک را اصلاح نماید. با این رهیافت او امیدوار بود که بتواند معضل واگرایی‌های موجود در الکترودینامیک کوانتومی را برطرف سازد. ایراد اساسی کارهای مارچ آن بود که او نتوانست میان فرضیات خود و نتایج آزمایشگاهی فیزیک هسته‌ای یک ارتباط منطقی بسازد و همین امر موجب گردید که نظریات او در میان فیزیکدانان کمتر مورد توجه واقع گردد [۳].

کوانتیدن گرانس یکی از چالش برانگیزترین مسائلی است که فیزیک نظری نوین با آن مواجه می‌باشد. اگر چه فیزیکدانان نظری نزدیک به ۵۰ سال است که بر روی مسئله کوانتیدن گرانس مشغول مطالعه می‌باشند هنوز به نظریه کاملی از گرانس کوانتومی دست نیافته‌اند. مانع بزرگ در کشف یک نظریه صحیح گرانس کوانتومی این است که هنوز هیچ گواه تجربی برای آن یافت نشده است. در دهه اخیر یک زمینه پژوهشی نوین بوجود آمده است که می‌کوشد با استفاده از نظریه‌های میدان موثر به توصیف اثرات گرانس کوانتومی پرداخته و به ارائه شواهد تجربی قابل جستجو در این زمینه اقدام نماید. امروزه از این زمینه پژوهشی تحت عنوان پدیده‌شناسی

<sup>1</sup> Ludwig Boltzmann

<sup>2</sup> Henri Poincaré

<sup>3</sup> Werner Heisenberg

<sup>4</sup> Arthur March

گرانش کوانتومی یاد می‌گردد. در حال حاضر نظریه پردازان گرانش کوانتومی بر این باورند که هر نظریه کوانتومی که بخواهد توصیف سازگاری از اندرکنش های گرانشی به دست دهد باید در برگیرنده یک مقیاس طول بنیادین در اندازه گیری بازه های مکانی باشد که این مقیاس طول بنیادین را کمینه طول<sup>1</sup> می‌نامند.

گرانش یک نیروی بنیادی و عمومی است. یعنی هر آنچه که دارای انرژی باشد، ایجاد جاذبه یا گرانش خواهد کرد و متقابلا از گرانش نیز تاثیر خواهد پذیرفت و ارتباط تنگاتنگی با فضا زمان دارد. یکی از راه های رسیدن به کمینه طول در نظر گرفتن تاثیر گرانشی فوتون بر ذرات است. هر چند که کوچک بودن ثابت نیوتن سبب این خواهد شد که در مقیاس های کلاسیکی اثرات گرانشی بسیار ضعیف به نظر آیند، اما در مقیاس های کوانتومی و ساختار ریز عالم، بخصوص در شرایط حاد کوانتومی همانند شرایطی که در لحظات اولیه خلقت حاکم بود، و نیز در مقیاس های بزرگ و بسیار بزرگ، گرانش نقش مهم و اساسی خویش را در ساختار عالم نشان می‌دهد. از قیاس بین گرانش و سایر نیروهای بنیادی در می‌یابیم که برآستی تاثیر گرانش در حالات کلاسیکی بسیار نا چیز است (تقریبا  $10^{32}$  بار کوچکتر از نیروی هسته ای ضعیف که از دیگر نیروها ضعیف تر می‌باشد). اما در انرژی های بالا، یعنی انرژی های نزدیک به مقیاس پلانک<sup>2</sup>، گرانش نقش بسیار مؤثر خویش را با ایجاد یک برش<sup>3</sup> در ساختار فضایی، که همان کمینه طول اندازه پذیر<sup>4</sup> در حدود طول پلانک می‌باشد، نشان می‌دهد. زیرا هنگامی که برای بررسی فاصله های بسیار کوتاه از انرژی های سطح بالا استفاده می‌کنیم، این انرژی های قوی به علت اثرات گرانشی فوق العاده بالای خود به طرز قابل توجهی ساختار فضا زمانی را مختل می‌کنند. [۴]

در میان نیروهای طبیعت گرانش ظاهر خاصی دارد. نیروهای دیگر به طور مثال الکترومغناطیس در فضا زمان که صرفا صفحه رویدادهای فیزیکی است، عمل می‌کنند اما گرانش وضع کاملا متفاوتی دارد، گرانش نیرویی نیست که بر زمینه منفعل فضا زمان تحمیل شده باشد بلکه خود موجب واپیچش فضا زمان می‌شود. تمایز کیفی گرانش و دیگر نیروها هنگامی بخوبی آشکار می‌شود که بخواهیم نظریه گرانشی را به گونه ای فرمول بندی

<sup>1</sup> Minimal length

<sup>2</sup> Planck scale

<sup>3</sup> cutoff

<sup>4</sup> minimal measurable length



کنیم که با مفاهیم مکانیک کوانتومی سازگار باشد و نیز تحول دینامیکی دنیای کوانتومی نیز لحاظ شده باشد. در عالمی که گرانش کوانتومی بر آن حاکم باشد، انحنای فضا زمان و حتی خود ساختار فضا زمان در معرض افت و خیز است.

اثر گرانشی که صراحتاً کوانتومی باشد، محدود به مقیاس فوق العاده کوچکی است. نخستین بار ماکس پلانک<sup>۱</sup> در سال ۱۸۹۹ توجهات را به این مقیاس جلب کرد. در این سال پلانک ثابت مشهور خود را که کوانتوم کنش نامیده می شود، ارائه کرد. او به وجود سیستمی از واحدها تاکید کرد که بر اساس سه ثابت بنیادین و بسیار مهم طبیعت بنا می شدند که  $G$  ثابت نیوتن،  $c$  سرعت نور و  $h$  ثابت پلانک می باشد. این ثابت‌ها به گونه‌ای ترکیب خواهند شد که گویا از حاصل ضرب و تقسیم آن‌ها یک مقیاس طول، یک مقیاس زمان و یک مقیاس جرم نتیجه خواهد شد که ما آن‌ها را مقیاس پلانک می نامیم.

امروزه با این که سالها از تلاش‌های فراوان در جهت بنیاد نهادن نظریه‌ای جامع و نهایی از تلفیق گرانش و مکانیک کوانتومی که از آن به عنوان "گرانش کوانتومی"<sup>۲</sup> یاد می کنیم می گذرد، ولی هنوز هم موفق به ایجاد چارچوبی منظم و یکنواخت از آن نشده ایم. از نخستین و مهمترین مشکلاتی که در گرانش کوانتومی با آن روبرو خواهیم شد این است که با وارد کردن گرانش در مبحث تئوری میدان کوانتومی، باز بهنجارش پذیری میدان را از دست خواهیم داد. در الکترو دینامیک کوانتومی<sup>۳</sup>، دافعه الکتروستاتیک بین دو الکترون یا جاذبه بین یک الکترون و یک پروتون را به صورت گسیل و جذب فوتون‌ها توجیه می کنیم به این ترتیب که یک ذره گسیل کننده فوتون و دیگری جاذب آن خواهد بود؛ این در حالی است که این فوتون‌ها هیچ گونه اندرکنشی با یکدیگر ندارند بلکه تنها با بارها و جریان‌های الکتریکی اندرکنش دارند.

---

<sup>1</sup> Max Planck

<sup>2</sup> Quantum Gravity

<sup>3</sup> Quantum ElectroDinamics

حال اگر ذرات میدان گرانشی را گراویتون<sup>۱</sup> در نظر بگیریم، همان نقشی را که در الکترودینامیک کوانتومی، فوتون ایفا کننده آن بود اکنون در گرانش کوانتومی، گراویتون بر عهده خواهد داشت؛ اما با این تفاوت اساسی که گراویتون‌ها برخلاف فوتون‌ها که هیچ اندرکنشی با هم نداشتند، بر روی یکدیگر تاثیرات گرانشی می‌گذارند و همین مسئله سبب بغرنج شدن قضیه گرانش کوانتومی خواهد شد. چون با وجود اندرکنش بین گراویتون‌ها می‌توان گفت که ذرات مادی با شبکه پیچیده‌ای از گراویتون‌ها احاطه شده‌اند که حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند و همین حلقه‌های بسته سبب بوجود آمدن جواب‌های واگرا در برخی محاسبات تئوری میدان خواهند شد. در الکترودینامیک کوانتومی از طریق باز بهنجارش، این واگرایی را برطرف می‌کنیم ولی در تئوری میدان هنگامی که گرانش حضور پیدا می‌کند دیگر قادر به باز بهنجارش برای رفع واگرایی‌ها نخواهیم بود.

حال نکته‌ی اساسی این است که در این میان، حضور یک کمینه طول اندازه‌پذیر از مرتبه طول پلانک، که ناشی از تاثیرات یا اختلالات گرانشی بر روی فضا زمان در مقیاس پلانک می‌باشد، بسیاری از مشکلات را از سر راه بر می‌دارد و باز بهنجارش پذیری را به مسئله برمی‌گرداند و بدین ترتیب راه را برای رسیدن به یک چارچوب نهایی منظم در قالب گرانش کوانتومی هموارتر می‌سازد.

چشم اندازه‌های گوناگونی از دیدگاه گرانش کوانتومی در حال بررسی قوانین عالم هستی می‌باشد. خوشبختانه امروزه تمامی رهیافت‌هایی که خود را به عنوان کاندیدی برای گرانش کوانتومی مطرح می‌کنند، از قبیل نظریه ریسمان<sup>۲</sup>، هندسه ناجابجایی<sup>۳</sup> و گرانش کوانتومی حلقوی<sup>۴</sup> و نیز برخی آزمایش‌های ذهنی در فیزیک سیاه چاله<sup>۵</sup>، علی‌رغم برخی تفاوت‌ها، همگی به یک نقطه مشترک تاکید دارند و آن حضور یک کمینه طول مشاهده‌پذیر از مرتبه طول پلانک می‌باشد. در محتوای نظریه ریسمان، کوچکترین فاصله‌ای که قابل اندازه‌گیری باشد طول ریسمان است و ما آن را مرتبط با طول پلانک می‌دانیم. هنگامی که شعاع شوارتزشیلد<sup>۶</sup> (شعاع

---

<sup>1</sup> Graviton

<sup>2</sup> String theory

<sup>3</sup> Non-commutative Geometry

<sup>4</sup> Quantum Gravity Loop

<sup>5</sup> Black Hole Physics

<sup>6</sup> Schwarzschild Radius

شوارتزشیلد شعاعی است که بر طبق معادلات متریک برای سیاهچاله‌ها تعیین می‌شود) در فیزیک سیاهچاله را با شعاع کامپتون از مکانیک کوانتومی تلفیق کنیم، در می‌یابیم که کمترین مقدار ممکن برای آن‌ها طولی از مرتبه طول پلانک می‌باشد. خواستگاه حضور چنین طول کمینه مشترکی در این رهیافت‌ها، افت و خیزهای<sup>1</sup> کوانتومی متریک زمینه فضا زمان است؛ یعنی فضا زمان اطراف ما دارای حالتی کف گونه<sup>2</sup> است که این حالت کف مانند، دائم در حال افت و خیز می‌باشد. به عنوان یک فرض غیر بدیهی کوانتومی، به صورت تئوری می‌توان وجود یک چنین طول کمینه را به عنوان عدم دقت یا عدم قطعیتی در اندازه‌گیری‌های مکانی در نظر گرفت؛ البته هر چند که این فرض غیر بدیهی است (یعنی به‌طور مسلم و بدیهی قابل شهود و آزمایش نیست) اما کاملاً طبیعی و عاقلانه به نظر می‌رسد، چرا که با وجود یک کمینه طول، دیگر دقت اندازه‌گیری‌های ما هر اندازه هم که بهینه باشد در نهایت خطایی به اندازه کوچکترین واحد وسیله‌ی اندازه‌گیری که قبلاً صفر بود ولی اکنون یک واحد طول کمینه می‌باشد را خواهد داشت و این نهایت دقت ما در اندازه‌گیری‌های مکانی می‌باشد. چرا که دیگر با حضور یک کمینه طول، طول صفر معنایی ندارد که ما آن را به عنوان نهایت دقت یا حداقل خطا به حساب می‌آوریم.

همان‌طور که در نسبیت به عنوان یک اصل موضوعه این نکته را می‌پذیریم که سرعت نور نه تنها یکی از ثابت‌های بنیادی طبیعت می‌باشد بلکه اندازه آن هم در تمام دستگاه‌های مرجع لخت و نالخت ثابت است، به همین ترتیب در گرانش کوانتومی ما این اصل موضوعه را که در طبیعت هیچ طولی کوتاه‌تر از طول پلانک وجود ندارد خواهیم پذیرفت؛ یعنی جستجو و کاوش در فاصله‌های کوتاه‌تر از طول پلانک ممکن نمی‌باشد. اما در این میان نکته‌ای وجود دارد و آن این‌که قبل از بنا شدن اصل نسبیت، آزمایش‌هایی صورت پذیرفت که نتیجه آن‌ها استنباط این موضوع شد که سرعت نور یک ثابت بنیادی طبیعت می‌باشد در حالی که با امکانات امروز، اثبات

---

<sup>1</sup> Fluctuations

<sup>2</sup> foam-like

تجربی طبیعت پلانکی جهان ممکن نیست چرا که کوچک بودن طول پلانک، کوتاه بودن زمان آن و یا به‌طور معادل فوق‌العاده عظیم بودن انرژی آن بسیار بسیار فراتر از پیشرفته‌ترین تکنولوژی‌های کنونی است.

برای مثال به این نکته اشاره می‌کنیم که بالاترین انرژی تولید شده در آزمایشات فیزیک ذرات از مرتبه  $\text{GeV}$   $10^3$  می‌باشد و حتی بزرگترین انرژی ای که تا به امروز از پرتوهای عظیم کیهانی ثبت کرده ایم در حدود  $\text{GeV}$   $10^{12}$  است، در حالی که سطح انرژی پلانک از مرتبه  $\text{GeV}$   $10^{19}$  می‌باشد یعنی یک میلیون میلیارد بار! عظیم تر از پر انرژی ترین پرتوهای ساخته دست بشر می‌باشد و حتی یک میلیون بار بزرگتر از قوی ترین پرتو های کیهانی ثبت شده تا به امروز که از عظیم ترین آزمایشگاه جهان هستی؛ یعنی داخل ستاره های غول پیکر در حال انفجار یا کوتوله های سفید و یا ابر نواختر ها می آیند. توجه داشته باشید که ابر نواختر ها گاه به چنان نورانیتهای دست می یابند که با مجموع نورانیت تمام ستارگان یک کهکشان برابری می‌کند و گاه چندین بار! نورانی‌تر از کل کهکشان.

اندازه طول پلانک  $10^{21}$  بار! کوچکتر از قطر هسته‌ی اتم می‌باشد؛ یعنی تقریباً همان رابطه ای را با ابعاد هسته دارد که اندازه یک انسان با ابعاد کهکشان دارا می‌باشد. و این نکته را در نظر داشته باشید که برای تولید انرژی-ای از مرتبه مقیاس پلانک به شتاب‌دهنده‌ای از مرتبه یک کهکشان نیازمندیم.

کاری که گرانش کوانتومی صرفاً انجام می‌دهد این است که نظریه‌های پر و پا قرص موجود را تا آخرین حد نتایج منطقی آن‌ها می‌کشاند. به بیان دیگر، گرانش کوانتومی می‌خواهد سه نظریه نسبیت خاص، گرانش اینشتین و مکانیک کوانتومی را با هم ترکیب کند.

سه دیدگاه برای گرانش کوانتومی وجود دارد که هر یک به نوعی با مشکلی روبرو است:

(۱) گرانش کوانتومی حلقه ای

(۲) نظریه ریسمان

(۳) هندسه ناجابجایی

(۱) گرانش کوانتومی حلقه ای روشی برای کوانتیزه کردن فضا زمان است در حالی که آنچه نسبت عام می‌گوید نیز محفوظ می‌دارد. این مستقل از زمینه یا متریک میدان گرانشی است. همچنین این دیدگاه در 4 بعد فرمول بندی شده است. مشکل اصلی این است که نیروهای دیگر طبیعت، الکترومغناطیس، قوی یا ضعیف نمی‌توانند در این فرمول بندی قرار بگیرند، و بعد اینکه هنوز معلوم نیست که چطور گرانش کوانتومی حلقه‌ای به نسبت عام مربوط می‌شود.

(۲) نظریه‌ی ریسمان یک نظریه کوانتومی است که در آن جرم پایه، فنر یک بعدی است و نه به صورت یک ذره، نظریه‌ی فنر به اندازه کافی گسترده است که مدل استاندارد و گرانش را الزاماً شامل شود. از مشکلات این نظریه وابسته به زمینه بودن آن است. یعنی نظریه با یک متریک زمینه فرمول بندی شده است.

(۳) دیدگاه سوم هندسه جابجا ناپذیر است. در اینجا تصور می‌شود مختصات فضا زمان ناجابجاست. این اطلاعات شدیداً به عملگرهای جبری وابسته‌اند.

بخش مشترکی که از این دیدگاه‌ها نتیجه می‌شود، وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر است، که در اینجا به بررسی آن می‌پردازیم.

## ۲-۱ گرانش و اصل عدم قطعیت

در این قسمت نظریه خاصی از گرانش کوانتومی در نظر گرفته نشده است بلکه نقطه‌ی مشترک آن‌ها مورد بحث است؛ ترکیب نظریه کوانتومی با مفاهیم پایه‌ای گرانش منجر به اصلاح اصل عدم قطعیت می‌شود. اصل عدم قطعیت به ما می‌گوید که مکان و اندازه حرکت ذرات را در حالی بررسی می‌کنیم که به صورت ذاتی و بنیادی دارای ابهام می‌باشند، بطوری که ذره مورد بررسی حداقل منطقه‌ای به ابعاد  $\hbar$  را در فضای فاز  $(x, p)$  اشغال می‌کند. یک نتیجه مهم رابطه عدم قطعیت  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  این است که در بررسی مقیاس‌های طولی به اندازه‌ی دلخواه کوچک باید از انرژی و در نتیجه تکانه‌ی به اندازه‌ی کافی بزرگ استفاده کرد، این اصلی است که تمام

شتاب دهنده‌ها بر اساس آن کار می‌کنند. اگر گرانش را نادیده بگیریم می‌توانیم با استفاده از باریکه‌ی ذرات با انرژی به دلخواه بزرگ، ابعاد طولی به دلخواه کوچک را بررسی کنیم. اما دلایلی وجود دارد که معتقدیم زمانی که سهم گرانش مهم می‌شود این قاعده دیگر درست نیست. در واقع زمانی که انرژی را بیش از مقدار مشخصی افزایش می‌دهیم، انرژی بسیار زیاد در فضایی کوچک متمرکز می‌شود و همان‌طور که از نسبیت می‌دانیم این انرژی زیاد در فضا زمان اختلال ایجاد کرده و یک سیاه چاله، با افق رویدادی می‌سازد که ما نمی‌توانیم آن را ببینیم. بنابراین به جای این‌که در نظر بگیریم مهارت آزمایشگاهی کافی نداریم، غیر منطقی نیست در نظر بگیریم طبیعت یک طول کمینه مطلق دارد و این طول خیلی به مقیاس طولی پلانک نزدیک است.

طول پلانک مقیاسی است که در آن مقیاس، شدت نیروی گرانشی با شدت سایر نیروها سازگاری قابل مقایسه ای دارد. از آن‌جا که گرانش خیلی ضعیف است طول پلانک بسیار کوچک و حدود  $10^{-35}$  متر است. این طول بسیار کوچکتر از طول‌هایی است که می‌توان به کمک میکروسکوپ‌های معمولی دید و یا در شتاب دهنده‌های انرژی بالا کاوید.

اگر بخواهیم مفهوم این طول کمینه را وارد مکانیک کوانتومی کنیم، باید آن را به صورت یک عدم قطعیت کمینه در اندازه گیری مکان بیان کنیم. برای این‌که اصلاح اصل عدم قطعیت از ملاحظات عام گرانش پیروی می‌کند، به خصوص وقتی که جمله‌ی گرانشی اضافه شده رابطه‌ی خطی با انرژی یا تکانه‌ی فوتون دارد، از فرم نیوتنی استفاده می‌کنیم.

### ۱-۲-۱ دوره‌ی پلانک

درغیاب نظریه ای کامل از گرانش کوانتومی پاسخ دادن به این سوال که چه وقت تصحیحات کوانتومی مهم می‌شوند تقریباً غیر ممکن است، اما بحث‌های متقاعد کننده ای صورت گرفته است که نتایج آن مقیاس‌هایی از زمان و انرژی است که ما انتظار داریم اثرات گرانش کوانتومی بزرگ باشد. زمان پلانک زمانی است که افت و خیزهای کوانتومی بر مقیاسی از طول پلانک صورت می‌گیرد. از این دو مقیاس می‌توان به جرم پلانک رسید

اما این مقیاس بر مبنای تحلیل های بنیادی با استفاده از ثابت های پلانک، سرعت نور، ثابت گرانش و ثابت بولتزمن که به ترتیب ثابت ها  $k, G, c, \hbar$  می باشند، به دست آمده است. نقطه آغاز کار رابطه ی عدم قطعیت هایزنبرگ<sup>1</sup> است. از تحلیل ابعادی گرانش نیوتنی، دیمانسیون چگالی به صورت  $\rho_p = (Gt^2)^{-1}$  می باشد. بنابر این داریم:

$$\Delta E \Delta t \approx mc^2 t \approx \rho_p (ct)^3 c^2 t \approx \frac{c^5 t^4}{Gt^2} \approx \hbar \quad (1-1)$$

و زمان، که آن را زمان پلانک می نامیم این طور به دست می آید

$$t = t_p \approx \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 10^{-43} s \quad (2-1)$$

حال با به دست آمدن زمان پلانک می توان طول پلانک و به دنبال آن مقیاس های جرم و انرژی پلانک را نیز به دست آورد.

$$l_p \approx ct_p \approx \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.7 \times 10^{-35} m \quad (3-1)$$

$$m_p \approx \rho_p l_p^2 \approx \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 2.5 \times 10^{-35} g \quad (4-1)$$

$$E_p \approx m_p c^2 \approx \left( \frac{\hbar c^5}{G^3} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.2 \times 10^{19} GeV \quad (5-1)$$

این مقیاس ها نشان می دهد که به جای یک نقطه تکین اولیه، پیوستاری از گوی های پلانک داریم، و فضا زمان ساختاری گسسته و کف گونه دارد. در واقع عالم ما از یک کمینه طول به نام طول پلانک درست شده است که قابل نفوذ نیست و از همین جا پیش بینی اصلاح اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بوجود می آید، یعنی هر قدر  $\Delta p$

<sup>1</sup> Hiesenberg uncertainty relation

را بزرگ کنیم نمی توان  $\Delta x$  را صفر کرد. در قسمت بعد وجود کمینه طول را از دو رهیافت دیگر مورد بررسی قرار می دهیم، یکی با در نظر گرفتن آزمایش میکروسکوپ هایزنبرگ و دیگری با توجه کردن به این سوال که : آیا  $\hbar$  ثابت است.

### ۱-۲-۲ نظریه ی نیوتنی و آزمایش هایزنبرگ

در بررسی مکان الکترون در میکروسکوپ هایزنبرگ هیچ گونه جنبه ی گرانشی بین فوتون تابیده و الکترون در نظر گرفته نشده بود و رابطه عدم قطعیت به شکل  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$  به دست آمد.

حال در نظر می گیریم فوتون تابیده به شکل ذره کلاسیکی رفتار کند بنابراین معادل جرمی به اندازه  $\frac{E}{c^2}$  پیدا خواهد کرد. اگر فرض شود الکترون در ناحیه ی مشخصه ای به طول  $L$  قرار دارد که در آن با فوتون برهم کنش انجام می دهد، به سبب گرانش شتابی را به این فرم تجربه خواهد کرد.

$$\ddot{r} = -\frac{G \frac{E}{c^2}}{r^2} \quad (6-1)$$

که  $r$  فاصله بین الکترون و فوتون است. اگر این برهم کنش در زمان  $\frac{L}{c}$  اتفاق بیافتد، به سبب گرانش، الکترون سرعت و جابجایی به قرار زیر به دست می آورد

$$\Delta v \approx \frac{GE}{c^2 r^2} \left( \frac{L}{c} \right) \quad (7a-1)$$

$$\Delta x_G \approx \frac{GE}{c^2 r^2} \left( \frac{L}{c} \right)^2 \quad (7b-1)$$

در ناحیه ی برهم کنش، الکترون در هر جایی می تواند باشد، بنابراین فاصله بین الکترون و فوتون باید از مرتبه  $r \approx L$  باشد. از آن جا که انرژی فوتون با رابطه ی  $E=pc$  به تکانه مربوط می شود رابطه ی  $\Delta x_G$  این طور بیان

می شود



$$\Delta x_G \approx \frac{G \Delta p}{c^3} \quad (8-1)$$

توجه داریم که عدم قطعیت تکانه الکترون باید از مرتبه تکانه فوتون باشد، سپس با استفاده از طول پلانک

$$\text{داریم ، } L_p \equiv \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}}$$

$$\Delta x_G \approx \frac{G \Delta p}{c^3} = \frac{G \hbar \Delta p}{c^3 \hbar} = L_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (9-1)$$

این همان نتیجه‌ی مهم است. با اضافه کردن این عدم قطعیت به رابطه هایزنبرگ، رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته به دست می‌آید

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} + L_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (10-1)$$

و یا به این صورت هم می‌تواند بیان شود

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar (1 + \beta \Delta p^2) \quad (11-1)$$

که  $\beta = \frac{L_p^2}{\hbar^2}$  می‌باشد و به عنوان اصل عدم قطعیت تعمیم یافته گرانشی<sup>1</sup> نیز تعبیر می‌شود.

### ۱-۲-۳ تعمیمی در مکانیک کوانتومی: آیا $\hbar$ ثابت است؟

در اوایل تاریخ مکانیک کوانتومی، دوبروی اظهار کرد که ممکن است با ذره‌ای مانند الکترون، موجی همراه باشد،

که بردار موج آن،  $\vec{k}$ ، توسط رابطه زیر به تکانه وابسته باشد

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (12-1)$$

و یا براساس عبارت طول موج این گونه بیان شود

<sup>1</sup> Gravity deformed uncertainty principle

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|\vec{p}|} \quad (13-1)$$

این پیشنهاد خاص در بسیاری موارد به عنوان یک قدم هدایت کننده مهم به معادله‌ی شرودینگر و مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی مطرح شده است.

در این بخش تعمیمی از این رابطه مورد بررسی قرار گرفته شده است. این تعمیم به این صورت انجام گرفته است که  $\hbar$  اجازه پیدا کرده است به صورت تابعی از تکانه یا بردار موج، یا به شکل دقیق‌تر تابعی از چار بردار تکانه یا عدد موج به این صورت باشد؛  $\hbar \rightarrow \hbar g(p^2)$  و یا هم ارز آن  $\hbar \rightarrow \hbar f(k^2)$ .

این کار در زمینه‌ی ای از تعمیم معادله‌ی کلاین گوردن یا معادله‌ی موج اسکالر صورت گرفته است. تعمیم رابطه دوبروی منجر به اصلاح رابطه تبدیل کانونیک بین مکان و تکانه شده، و به این ترتیب منجر به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته یا *GUP* می‌شود، که مشابه آنچه که در نظریه ریسمان به دست آمده است، می‌باشد. از آنجا که در این‌جا بدون ارجاع دادن به گرانش، *GUP* به دست آمده است، می‌توانیم این طور بیان‌دیشیم، که ارتباطی بین رابطه دوبروی و گرانش وجود دارد یا گرانش به نوعی توسط اثرات ذاتی کوانتومی تولید شده است.

### ۳-۱ رابطه عدم قطعیت استاندارد

در مکانیک کوانتومی استاندارد انتقال در فضا و زمان با تکانه  $P_i$  و انرژی  $E$  ایجاد می‌شود و می‌توان مولد انتقال در فضا و زمان را، بردار موج  $K_i$  و فرکانس  $\omega$  در نظر گرفت که به دلایل ابعادی رابطه‌ی آن با تکانه و انرژی، به کمک ثابت  $\hbar$  داده می‌شود. [۱]

$$\hat{E} = \hbar\hat{\omega}, \hat{P}_i = \hbar\hat{K}_i \quad (14-1)$$

با استفاده از رابطه‌ی معروف جابجایی داریم

$$[X_i, K_i] = i\delta_{ij} \quad (15-1)$$

فرمولبندی در نمایش مکان  $\hat{X}_i = x$  به رابطه زیر می‌انجامد

$$K_i = i \partial_i, \hat{P}_i = \hbar K_i = -i \hbar \partial_i$$

$$\omega = i \partial_i, \hat{E} = \hbar \omega = i \hbar \partial_i \quad (16-1)$$

و در نمایش تکانه  $\hat{P}_i = P$  برای عملگر  $\hat{X}_i$  به دست می‌آوریم

$$\hat{X}_i = i \hbar \frac{\partial}{\partial p_i} = i \frac{\partial p_i}{\partial k_i} \frac{\partial}{\partial p_i} = i \frac{\partial}{\partial k_i} \quad (17-1)$$

با استفاده از رابطه‌ی کلی زیر

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle | \quad (18-1)$$

رابطه‌ی عدم قطعیت  $X$  و  $P$  را به دست می‌آوریم

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (19-1)$$

معادله‌ی تحول زمان به کمک عملگر تحول  $\hat{U}$  داده می‌شود

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t-t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (20-1)$$

که در آن

$$\hat{U}(t-t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{E}(t-t_0)\right) \quad (21-1)$$

و در نتیجه

$$i \hbar \partial_i |\psi\rangle = \hat{E} |\psi\rangle \quad (22-1)$$

#### ۴-۱ رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته

برای این که ایده‌ی کلی طول کمینه‌ی  $L_f$  را توصیف کنیم، فرض کنید که می‌توان تکانه‌ی  $p$  یک ذره را تا هر مقدار دلخواه افزایش داد، اما طول موجش نمی‌تواند به کمتر از مقیاس طول کمینه  $L_f$  کاهش یابد. یا بطور

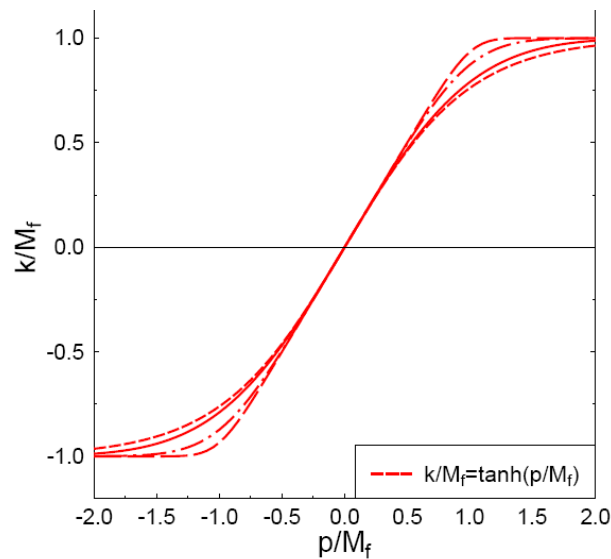
معادل بردار موج  $k$  هرگز بیشتر از  $M_f$  نمی‌شود ( $L_f = \frac{\hbar}{M_f}$  در یکاهای طبیعی). بنابراین رابطه‌ی بین  $p$  و  $k$

دیگر نمی‌تواند خطی باشد، بلکه یک رابطه تابعی خواهد شد. این رابطه تابعی،  $k(p)$ ، باید در شرایط زیر صدق کند [۱]:

۱. برای انرژی‌های خیلی کمتر از مقیاس جدید، دوباره به همان رابطه‌ی خطی برسیم؛ یعنی برای  $p \ll M_f$  داشته باشیم  $p \approx k$ .

۲. تابع  $k(p)$  به خاطر پایستگی پاریمتده باید فرد باشد.

۳. تابع به طور یکنواخت به حد بالایی خودش  $M_f$  برسد.



نمودار 1: انتخاب‌های ممکن برای  $k(p)$  [۱]

یک نمونه از توابعی که از این شرطها پیروی می‌کند به گونه‌ی زیر است

$$L_f K(p) = \tanh^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \left( \frac{p}{M_f} \right)^{\gamma} \right] \quad (23-1)$$

که یک انتخاب رایج در ادبیات طول کمینه است. فرض می‌کنیم که  $\gamma = 1$  باشد، آنگاه

$$L_f K(p) = \tanh \left( \frac{p}{M_f} \right) \quad (24-1)$$

از بسط مرتبه اول  $\tanh$  تا چند جمله‌ی اول خواهیم داشت

$$L_f K(p) \approx \frac{p}{M_f} - \frac{1}{3} \left( \frac{p}{M_f} \right)^3 \quad (25-1)$$

که رابطه‌ی هم ارز آن با توجه به رابطه (۱۵-۱) به صورت زیر است:

$$\frac{1}{M_f} P(k) \approx kL_f + \frac{1}{3} (kL_f)^3 \quad (26-1)$$

برای این که بتوانیم رابطه‌ی عدم قطعیت طول کمینه، که آن را رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته می‌نامیم، به دست آوریم لازم است جابجاگر بین  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  را بدانیم

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial p}{\partial k} \quad (27-1)$$

از رابطه‌ی (۲۶-۱) مشتق می‌گیریم و در رابطه‌ی (۲۷-۱) جای‌گذاری می‌کنیم. بنابراین

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\partial p}{\partial k} \approx 1 + (kL_f)^2 \approx 1 + \left( \frac{p}{M_f} \right)^2 \quad (28-1)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] \approx i\hbar \left( 1 + \frac{p^2}{M_f^2} \right) \quad (29-1)$$

که در آن  $\frac{1}{M_f^2} \equiv \beta$  می‌باشد. نهایتاً داریم

$$[\hat{x}, \hat{p}] \approx i\hbar (1 + \beta p^2) \quad (30-1)$$

با استفاده از رابطه‌ی کلی زیر

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |[\hat{A}, \hat{B}]| \quad (31-1)$$

رابطه‌ی عدم قطعیت  $X$  و  $P$  را به دست می‌آوریم

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (32-1)$$

اگر در فضای تکانه کار کنیم با توجه به نمایش عملگری X بطور استاندارد، یعنی  $\hat{X} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$  و با کمک رابطه‌ی

(۲۰-۱) خواهیم داشت

$$\hat{X} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} = i \frac{\partial}{\partial k} = i \frac{\partial p}{\partial k} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{1}{\hbar} \frac{\partial p}{\partial k} \approx 1 + (kL_f)^2 \approx 1 + \left(\frac{p}{M_f}\right)^2 \approx 1 + \beta p^2, \quad \frac{1}{M_f^2} \equiv \beta \quad (33-1)$$

آنگاه عملگرهای X و p در فضای تکانه به صورت زیر خواهند بود

$$\hat{X} \approx i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\hat{P} = p \quad (34-1)$$

و اگر در فضای مکان کار کنیم، با استفاده از

$$\hat{P} = \hat{P}(\hat{k}), \quad L_f = \frac{\hbar}{M_f}, \quad \hat{k} = -i\partial_x, \quad p = -i\hbar\partial_x \quad (35-1)$$

و با کمک رابطه (۲۶-۱) داریم

$$P(k) \approx M_f k L_f + \frac{1}{3} M_f (k L_f)^3,$$

$$P(k) \approx -i\hbar\partial_x + \hbar \frac{L_f^2}{3} (-i\partial_x)^3 \approx -i\hbar\partial_x + i\hbar \frac{L_f^2}{3} \partial_x^3 \approx -i\hbar \left(1 - \frac{L_f^2}{3} \partial_x^2\right) \partial_x \quad (36-1)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$P(k) \approx \left(1 + \frac{1}{3M_f^2} p^2\right) p \approx \left(1 + \frac{1}{3}\beta p^2\right) p \quad (37-1)$$

بنابراین

$$P(k) \approx \left(1 + \frac{1}{3}\beta p^2\right) p$$

$$\hat{X} = x \quad (38-1)$$

## ۵-۱ بهنجارش حالتها

از آن جا که  $k$  تابعی از  $p$  است، داریم  $\hat{P}(\hat{k})|k\rangle = p(k)|k\rangle$  و بنابراین  $|k\rangle \propto |p(k)\rangle$  می باشد. هر دو ویژه بردارها باید مجموعه متعامد تشکیل دهند یعنی [۱]

$$\langle P'|P\rangle = \delta(P - P')$$

$$\langle k'|k\rangle = \delta(k - k') \quad (39-1)$$

در این جا بهنجارش حالت ها متفاوت است، زیرا  $k$  بر خلاف تکانه محدود به ناحیه  $y$  تا  $\frac{1}{L_f}$  می باشد.

فرض می کنیم که  $|k\rangle = |p(k)\rangle$ ، آنگاه داریم

$$\langle P'|P\rangle = \langle k'|k\rangle = \delta(k(p) - k(p')) \quad (40-1)$$

با استفاده از ویژگی زیر

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|^{-1} \delta(x - x_0) \quad (41-1)$$

خواهیم داشت

$$\langle P'|P\rangle = \frac{\partial p}{\partial k} \delta(p - p') \quad (42-1)$$

و با یک بار تعریف در فضای تکانه به شکل

$$\frac{dp}{h} \rightarrow \frac{dp}{h} \frac{dk}{dp} = \frac{dp}{h} \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{M_f}\right)^2} \quad (43-1)$$

از باز بهنجارش دوباره ویژه توابع خودداری می کنیم. این باز تعریف یک تفسیر فیزیکی دارد و آن این که در تکانه هایی که در حد تقریب زده شده، به اندازه ی کافی بزرگ هستند، انتظار می رود فضای تکانه فشرده شود.

$$\frac{dp}{h} \rightarrow \frac{dp}{h} \frac{1}{1 + \beta p^2} \quad (44-1)$$

نحوه بهنجارش حالت را می توان به صورت دیگری در این جا توضیح داد. اگر در فضای تکانه کار کنیم و تابع موج

فضای تکانه را به صورت  $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$  تعریف کنیم آنگاه عملگر  $X$  و  $p$  بر اساس روابط  $\hat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}$  و

$\hat{P} = p$  روی این تابع موج عمل می کنند، بنابراین

$$\hat{P}\psi(p) = p\psi(p)$$

$$\hat{X}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p) \quad (45-1)$$

از آن جا که شکل عملگری تکانه مانند قبل است، پس هرمیتی بودن  $\hat{X}$  را می توان با توجه به تعریف ضرب

داخلی در فضای هیلبرت بررسی کرد

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int dp \psi^*(p) \phi(p) \omega(p) \quad (46-1)$$

که در آن  $\omega(p)$  تابع وزن است.

عملگر  $X$  به شرطی هرمیتی است که در رابطه ی  $\langle \psi | X \phi \rangle = \langle X \psi | \phi \rangle$  صدق کند. بنابراین خواهیم داشت

$$-i\hbar \int dp (1 + \beta p^2) \partial_p \psi^*(p) \phi(p) \omega(p) = i\hbar \int dp \psi^*(p) (1 + \beta p^2) \partial_p \phi(p) \omega(p) \quad (47-1)$$

$\omega(p)$  را  $\frac{1}{1 + \beta p^2}$  در نظر می گیریم تا عامل  $(1 + \beta p^2)$  حذف شود و عبارت ساده تر شود. پس داریم

$$-i\hbar \int dp (\partial_p \psi(p))^* \phi(p) = i\hbar \int dp \psi^*(p) (\partial_p \phi(p)) \quad (48-1)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از طرف چپ معادله ی بالا داریم

$$-i\hbar \int dp (\partial_p \psi(p))^* \phi(p) = -i\hbar \psi^*(p) \phi(p) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar \int dp \psi^*(p) \partial_p \phi(p) \quad (49-1)$$



برای برقراری دو رابطه‌ی بالا بایستی عبارت اول صفر شود و این البته با این فرض که توابع موج  $\psi$  و  $\phi$  در بینهایت سریعتر از هر چند جمله‌ای به صفر میل می‌کند، سازگار است و بنابراین عملگر  $X$  هرمیتی است. بررسی هرمیتی بودن  $X$  سبب می‌شود تا بتوانیم مقدار تابع وزن را حساب کنیم و بنابراین برای ضرب داخلی توابع موج  $\psi$  و  $\phi$  رابطه  $\langle \psi | \phi \rangle = \int dp \psi^*(p) \phi(p) \omega(p)$  خواهیم داشت

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p) \quad (50-1)$$



## فصل دوم

بررسی خواص ترمودینامیکی یک گاز ایده‌آل در حضور طول کمینه

در این جا اثر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP را روی ترمودینامیک آنسامبل کانونی یک گاز ایده آل بررسی می کنیم. تابع پارش با روش های کوانتومی و کلاسیکی به دست می آید. در روش کوانتومی از طیف انرژی تعمیم یافته ی یک ذره محدود در یک چاه ۳ بعدی استفاده می کنیم. و در روش کلاسیکی از مکانیزم فضای فاز در به دست آوردن تابع پارش مطلوب استفاده می کنیم. به خصوص تصحیح مرتبه اول در ویژگی های ترمودینامیکی، همانند متوسط انرژی، آنتروپی و چگالی حالات به دست می آیند. اگرچه تصحیح، خود را در دماهای بالا نشان می دهد. اما اگر قید قابل مشاهده ای روی پارامتر تعمیم یافته GUP باشد، تغییرات بیشتر قابل مشاهده هستند (حتی در دماهای متوسط).

به منظور گنجاندن مفهوم طول کمینه و تکانه ی بیشینه در فیزیک کوانتومی معمول، رابطه ی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ HUP به رابطه ی عدم قطعیت تعمیم یافته GUP تبدیل و در یک بعد به صورت زیر می نویسیم [۱۹]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \gamma (\Delta p)^2 + O(\gamma)^2] \quad (1-2)$$

که  $\gamma = \frac{\gamma_0}{P_{pl}^2}$  یک پارامتر تعمیم یافته است به طوری که برای  $\gamma = 0$  به عدم قطعیت هایزنبرگ HUP می رسیم.

این مورد مربوط به ناحیه ی تکانه پایین ( $\Delta p \ll P_{pl} \approx 6.525 \text{ kgm/s}$ ) می باشد. همچنین رابطه GUP، عدم

قطعیت مورد نیاز  $\Delta x \geq \gamma_0 L_{pl}$  و  $\Delta p \leq \frac{P_{pl}}{\gamma_0}$  را نشان می دهد. رابطه ی GUP رابطه ی جابجایی تعمیم یافته زیر

را می رساند

$$[x, p] = i \hbar [1 + \gamma p^2 + O(\gamma)^2] \quad (2-2)$$

و عدم قطعیت به شکل زیر ظاهر می شود

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2} \left\{ 1 + \gamma [(\Delta p)^2 + \langle p \rangle^2] + 2\gamma [(\Delta p_i)^2 + \langle p_i \rangle^2] \right\} \quad (3-2)$$

که برای مرتبه اول پارامتر تعمیم یافته  $\gamma$  است و مربوط به جابجاگر زیر می‌شود

$$[x_i, p_i] = i\hbar [\delta_{ij} + \gamma\delta_{ij} p^2 + 2\gamma p_i p_j] \quad (4-2)$$

در این جا  $p^2 = \sum_{i=1}^3 p_i p_i$  می‌باشد. می‌توان مکان  $X$  و تکانه  $P$  تعمیم یافته را در نمایش مکان بر حسب مکان

$x_0$  و تکانه  $p_0$  معمولی به صورت زیر بازنویسی کرد

$$x_i = x_{0i} \quad p_i = p_{0i} (1 + \gamma p_0^2) \quad (5-2)$$

که در آن  $x_0$  و  $p_0$  رابطه جابجایی  $[x_{0i}, p_{0i}] = i\hbar\delta_{ij}$  را برآورده می‌کنند، همچنین  $p_{0i} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{0i}}$  می‌باشد.

با استفاده از رابطه‌ی (۵-۲)، نشان داده می‌شود که هر هامیلتونی غیر نسبیتی به شکل  $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$  را

می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H = H_0 + \gamma H_1 \quad (6-2)$$

که در آن جمله‌ی دوم ناشی از وجود طول کمینه می‌باشد که وقتی پارامتر تعمیم یافته صفر باشد آنگاه به همان هامیلتونی حالت معمول می‌رسیم.

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2m} + V(r) \quad H_1 = \frac{p_0^4}{m} \quad (7-2)$$

که ترم  $\gamma H_1$  را به عنوان اختلال در نظر می‌گیریم. باید توجه کرد که ماکرو حالت در یک آنسامبل میکروکانونی با تعداد ثابت ذرات  $N$ ، حجم ثابت  $V$  و انرژی ثابت  $E$  معرفی می‌شود. بهر حال کار با روش آنسامبل میکروکانونی دو مشکل اساسی دارد. اول این‌که، محاسبات ریاضی تعداد میکرو حالت‌ها برای این‌گونه آنسامبل‌ها مشکل است. دوم این‌که از یک نقطه فیزیکی معلوم انرژی کل یک سیستم به سختی اندازه‌گیری و کنترل می‌شود. یک راه بهتر، بررسی آنسامبل کانونی برای زمانی که دمای  $T$  بجای انرژی  $E$ ، ثابت باشد. در این جا ترمودینامیک یک

آنسامبل کانونی یک گاز ایده‌آل و اثر مدل  $GUP$  در حد کلاسیکی را بررسی می‌کنیم. روش کار، مفید و خارج از مشکلات معمول می‌باشد. آنسامبل، ترکیبی از سیستم‌های شامل  $N$  مولکول یکسان و بدون برهم‌کنش محدود به فضایی به حجم  $V$  می‌باشد. تعداد  $N$  بسیار بزرگ و از مرتبه  $10^{23}$  است. این آنسامبل کانونی را می‌توان با این فرض بررسی کرد که سیستم در یک مخزن خیلی داغ فرو رفته است. که به یک تعادل دوطرفه سیستم گازی ایده‌آل و مخزن که دارای یک دمای رایج  $T$  می‌باشد، می‌رسیم. تابع پارش سیستم با استفاده از روش‌های متفاوت یعنی روش‌های کوانتومی و کلاسیکی به دست می‌آید. با استفاده از تکنیک‌های کوانتومی ویژه مقادیر متفاوت یک ذره را در چاه ۳ بعدی در چارچوب  $GUP$  با استفاده از نظریه اختلال به دست می‌آوریم. سپس با محاسبه طیف انرژی، تابع پارش سیستم به دست می‌آید. در روش دوم تابع پارش با استفاده از مکانیزم فضای فاز حدس زده می‌شود. پس از محاسبه تابع پارش کمیت‌های استاتیکی تعمیم یافته‌ی سیستم در یک روش سر راست به دست می‌آیند.

لازم به ذکر است که سناریوی  $GUP$  برای مرتبه اول پارامتر تعمیم یافته  $\gamma$  بررسی می‌شود. همه‌ی کمیت‌های ترمودینامیکی تا مرتبه اول  $\gamma$  به دست می‌آیند. این کار منطقی به نظر می‌رسد، چون مدل  $GUP$  خودش در مرتبه اول با  $\gamma$  نسبت دارد.

## ۲-۱ ذره در چاه پتانسیل

فرض می‌کنیم سیستم شامل ذره‌ای به جرم  $M$  در یک جعبه مستطیلی غیر قابل نفوذ با ابعاد  $l_x$ ،  $l_y$  و  $l_z$  و با انرژی پتانسیل به صورت زیر داده می‌شود:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8-2)$$

اثر مقیاس پلانک را روی طیف انرژی سیستم حدس می‌زنیم. برای این کار، سراغ نظریه‌ی اختلال استاندارد می‌رویم. طیف انرژی برای هامیلتونی مختل نشده به صورت زیر است:

$$E_n^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \quad (9-2)$$

که اعداد کوانتومی  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  اعداد صحیح مثبت هستند. برای روابط جابجایی تعمیم یافته *GUP*، هامیلتونی کل برای این سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$H = H_0 + \gamma H_1 = H_0 + \gamma \frac{p_0^4}{m} \quad (10-2)$$

که  $H_1$  هامیلتونی مختل شده هست. تصحیح مرتبه اول طیف انرژی می‌تواند به صورت زیر به دست آید

$$E_n^{(1)} = \gamma \langle n^{(0)} | H_1 | n^{(0)} \rangle \quad (11-2)$$

که  $|n^{(0)}\rangle$  ویژه کت مختل نشده می‌باشد. با جای‌گذاری  $H_1 = 4mH_0^2$  در رابطه (۱۱-۲)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$E_n^{(1)} = \gamma \langle n^{(0)} | \frac{p_0^4}{m} | n^{(0)} \rangle = 4m\gamma \langle n^{(0)} | H_0^2 | n^{(0)} \rangle \quad (12-2)$$

نهایتاً ویژه مقادیر انرژی کل سیستم تا تصحیح مرتبه اول به صورت زیر به دست می‌آیند

$$E_n \approx E_n^{(0)} + 4m\gamma (E_n^{(0)})^2 \quad (13-2)$$

نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که سطوح انرژی یک ذره در جعبه نامتناهی به اندازه مقدار مثبت کوچکی جابجا می‌شوند:

$$\Delta E_n = \gamma \frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(0)}} = 4m\gamma E_n^{(0)} = \frac{4m\gamma_0}{(m_{pl}c)^2} E_n^{(0)} \quad (14-2)$$

برای یک اتم هیدروژن می‌توان حدس زد  $\Delta E_n = 1.57 \times 10^{-28} E_n^{(0)}$  با  $\gamma_0 \approx 1$ . برای ذرات جرمی بیشتر و برای سطوح انرژی بالاتر این تصحیح قابل چشم پوشی است. بهرحال برای آنسامبل کانونی یک گاز ایده‌آل این تصحیح ممکن است اثرات مهمی را نشان دهد. در بخش‌های بعد این موضوع را بررسی می‌کنیم.

## ۲-۲ تابع پارش کانونی در مکانیک کوانتوم تعمیم یافته

یک آنسامبل کانونی یک گاز ایده‌آل از سیستم‌هایی تشکیل شده که هر کدام شامل  $N$  ذره بدون برهم‌کنش و یکسان احاطه شده توسط دیواره‌ی بی‌دررو در یک حجم  $V$  می‌باشد. فرض کنید که سیستم‌ها در حالت تعادل با قرار گرفتن در یک حمام حرارتی در دمای  $T$  در حالت تعادل به سر می‌برند. ماکرواحالت‌های آنسامبل با پارامترهای  $N, V, T$  معرفی می‌شوند.

تابع پارش سیستمی با یک مولکول به صورت زیر است

$$Q_1 = \sum_n \exp(-\beta E_n) \quad (15-2)$$

که  $\beta = 1/kT$  و  $k$  ثابت بولتزمن می‌باشد. رابطه‌ی (۱۳-۲) را در رابطه‌ی (۱۵-۲) قرار می‌دهیم، آنگاه

$$Q_1 = \sum_n \exp\left\{-\beta \left[ E_n^0 + 4m\gamma(E_n^0)^2 \right]\right\} \quad (16-2)$$

با ساده‌سازی به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$Q_1 = \sum_n \left[ 1 - 4m\gamma\beta(E_n^0)^2 \right] \exp(-\beta E_n^0) \quad (17-2)$$

با در نظر گرفتن تعداد زیادی از حالات ذرات و حجم زیادی که ذرات محدود هستند می‌توان تعداد حالات در هر راستای مختصات را به عنوان یک متغیر پیوسته در نظر گرفت. در این مورد رابطه (۱۷-۲) به فرم زیر تغییر می‌کند



$$Q_1 = \iiint dn_x dn_y dn_z \left[ 1 - 4m\gamma\beta (E_n^0)^2 \right] \exp(-\beta E_n^0) \quad (18-2)$$

که بستگی به  $E_n^0$  به  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  متناظر با رابطه (۹-۲) می‌باشند. بنابراین از رابطه‌ی (۲-۱۸) خواهیم داشت

$$Q_1 = Q_1^{(0)} + \gamma Q_1^{(1)} \quad (19-2)$$

که  $Q_1^{(0)}$  و  $Q_1^{(1)}$  به ترتیب، تابع پارش یک ذره مختل نشده و مختل شده می‌باشند که در آن

$$Q_1^{(0)} = \frac{V}{8h^3} \left( \frac{2m}{\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (20-2)$$

$$Q_1^{(1)} = -\frac{15m}{\beta} Q_1^{(0)}, \quad (21-2)$$

می‌باشند. تابع پارش  $N$  ذره‌ی مجزای سیستم به صورت زیر معرفی شود

$$Q_N = \frac{(Q_1)^N}{N!}, \quad (22-2)$$

با وارد کردن رابطه‌ی (۲-۱۹) در رابطه‌ی (۲-۲۲)، تابع پارش به صورت زیر خواهد بود

$$Q_N = \frac{Q_1^{(0)N}}{N!} \left( 1 - \gamma \frac{15m}{\beta} \right)^N, \quad (23-2)$$

در غیاب اثرات GUP بررسی شده (یعنی وقتی  $\gamma = 0$ )، به تابع پارش معمول می‌رسیم.

## ۲-۳ تابع پارش کانونی در مکانیک کلاسیک تعمیم یافته

برای سیستم‌های کلاسیکی بیشتر چارچوب‌های مناسب برای بسط فرمالیسم مشخص ترمودینامیکی فضای فاز می‌باشد. در مکانیزم کلاسیکی یک حالت از حرکت  $N$  ذره توسط  $2N$  مختصه و  $2N$  تکانه مشخص می‌شود. هر جفت  $(q_i, p_i)$ ، مربوط به یک نقطه در یک فضای  $6N$  بعدی فضای فاز است. یک آنسامبل کانونی از یک گاز

ایده آل سیستمی که شامل  $N$  ذره یکسان و بدون برهم کنش محدود در چاهی به حجم  $V$  باشد را بررسی می‌کنیم. سیستم در تعادل و تابع پارش برای یک ذره منفرد در یک سیستم آنسامبلی به صورت زیر است

$$Q_1(V, \beta) = \frac{1}{h^3} \int d^3 p d^3 q e^{-\beta H} \quad (24-2)$$

که  $d^3 p d^3 q$  عنصر حجمی فضای فاز و  $\beta = 1/kT$  و  $k$  که ثابت بولتزمن می‌باشد.

تاکید می‌کنیم که ذره هیچ برهم‌کنشی با اطراف خود ندارد، همچنین انرژی ذره بطور کامل جنبشی می‌باشد و از رابطه‌ی (۶-۲) هامیلتونی مربوطه به صورت زیر خواهد بود

$$H = H_0 + \gamma H_1, \quad (25-2)$$

$$H = \frac{p_0^2}{2m} + \gamma \frac{p_0^4}{m}, \quad (26-2)$$

که  $p_0^2 = \sum_{i=1}^3 p_{0i}^2$  می‌باشد. تابع پارش رابطه‌ی (۲۴-۲) به شکل زیر خواهد بود

$$Q_1 = \frac{1}{h^3} \int d^3 p_0 d^3 q e^{-\beta \frac{p_0^2}{2m} (1+2\gamma p_0^2)} \quad (27-2)$$

با ساده‌سازی و بسط تابع نمایی خواهیم داشت

$$e^{-\beta \frac{p_0^2}{2m} (1+2\gamma p_0^2)} \approx e^{-\beta \frac{p_0^2}{2m}} \left( 1 - \gamma \frac{\beta p_0^4}{m} \right), \quad (28-2)$$

حال رابطه‌ی بالا را در رابطه‌ی (۲۷-۲) جای‌گذاری می‌کنیم

$$Q_1 = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp_0 p_0^2 \left( 1 - 2\gamma \frac{\beta p_0^4}{m} \right) e^{-\frac{\beta p_0^2}{2m}}, \quad (29-2)$$

که  $\int d^3 p_0 = 4\pi \int dp_0 p_0^2$  و  $\int d^3 q = V$  می‌باشند. سپس

$$Q_1 = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp_0 p_0^2 e^{-\frac{\beta p_0^2}{2m}} - \gamma \frac{4\pi V}{mh^3} \int_0^\infty dp_0 p_0^6 e^{-\frac{\beta p_0^2}{2m}}, \quad (30-2)$$

با حل انتگرال‌های رابطه‌ی (۳۰-۲) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$Q_1 = \frac{V}{h^3} \left( \frac{m}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} - \gamma \frac{15V}{h^3} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m}{\beta} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad (31-2)$$

جمله اول معادله‌ی بالا تابع پارش برای یک سیستم گاز ایده آل در یک آنسامبل کانونی در غیاب سهم ناشی از طول کمینه است. عبارت دوم سهم طول کمینه در تابع پارش می‌باشد. در حد  $\gamma = 0$ ، رابطه‌ی (۳۱-۲) منجر

به تابع پارش معمول می‌شود. تابع پارش سیستم  $N$  ذره‌ای به صورت  $Q_N = \frac{(Q_1)^N}{N!}$  تعریف می‌شود، که با

جای‌گذاری (۳۱-۲) در آن خواهیم داشت

$$Q_N = \frac{1}{N!} \left( \frac{V}{h^3} \right)^N \left( \frac{m}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \left( 1 - \gamma \frac{15m}{\beta} \right)^N, \quad (32-2)$$

این نتیجه با تابع پارش رابطه (۲۲-۲) به دست آمده توسط روش کوانتومی یکسان می‌باشد. معادله‌ی (۲-۳۲) تابع پارش یک سیستم شامل  $N$  ذره‌ی بدون برهم کنش در حضور مقیاس پلانک را مشخص می‌کند. این تابع در حد  $\gamma = 0$  به تابع پارش معمول میل می‌کند.

## ۴-۲ خواص ترمودینامیکی در حضور طول کمینه

با شناخت تابع پارش تعمیم یافته بعضی ویژگی‌های استاتیکی مانند انرژی کل  $E$ ، فشار  $P$  و برخی کمیت‌های دیگر را به دست می‌آوریم. انرژی متوسط سیستم در آنسامبل  $U = E/N$  با استفاده از رابطه زیر به دست می‌-

آید

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Q_N) \quad (33-2)$$

با جای گذاری رابطه (۳۲-۲) در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت

$$U = \frac{3N}{\beta} \frac{1}{\left(1 - \gamma \frac{15m}{\beta}\right)} \left(\frac{1}{2} - \gamma \frac{25m}{2\beta}\right), \quad (34-2)$$

با استفاده از تخمین زیر

$$\frac{1}{\left(1 - \gamma \frac{15m}{\beta}\right)} \approx 1 + \gamma \frac{15m}{\beta}, \quad (35-2)$$

انرژی متوسط تا مرتبه اول  $\gamma$  به صورت زیر خواهد بود

$$U = \frac{3}{2} NkT - \gamma 15Nm (kT)^2 \quad (36-2)$$

که جمله‌ی اول انرژی متوسط معمول و جمله دوم ناشی از طول کمینه می‌باشد. توجه کنید که  $m$  جرم ذره و از مرتبه  $10^{-27} \text{ kg}$  می‌باشد و تغییر نسبی ایجاد شده در انرژی متوسط از مرتبه زیر خواهد بود

$$\frac{\Delta U}{U_0} \approx 10^{-28} \gamma_0 kT, \quad (37-2)$$

اگر  $\gamma_0 \approx 1$  باشد آنگاه جمله تصحیحی اصل عدم قطعیت تعمیم یافته خیلی کوچک و قابل اندازه‌گیری (به جزء در دماهای بالا) می‌باشد.

گرمای ویژه در حجم ثابت به شکل زیر خواهد شد

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}, \quad (38-2)$$

که با جای گذاری رابطه‌ی (۲۷-۲) در آن، می‌رسیم به

$$C_v \approx \frac{3}{2}Nk - \gamma 30Nmk^2T, \quad (39-2)$$

جمله‌ی اول گرمای ویژه معمول در حجم ثابت و ترم دوم تصحیح در حجم ثابت می‌باشد. در این جا مدل *GUP* یک تصحیح منفی را در دمای خاص اضافه می‌کند.

کمیت مهم دیگر انرژی آزاد هلمهولتز است

$$A(V, T) = -kT \ln(Q_N), \quad (40-2)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲-۳۲) در رابطه‌ی بالا انرژی آزاد هلمهولتز تا مرتبه اول در پارامتر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته  $\gamma$  به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A \approx NkT \left\{ \ln \left[ \frac{N}{V} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \right] - 1 \right\} + \gamma [15mN (kT)^2], \quad (41-2)$$

که از بسط  $\ln[1 - 15mN (kT)^2] \approx -15\gamma m (kT)^2$  استفاده می‌کنیم. حالا ترمودینامیک کامل سیستم گاز ایده‌آل می‌تواند از رابطه (۲-۴۱) به یک روش ساده استنتاج شود. به عنوان مثال، آنتروپی سیستم که به صورت زیر است

$$s = - \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_{N, V}, \quad (42-2)$$

تا مرتبه اول  $\gamma$  مطابق زیر به دست آید.

$$s = Nk \left\{ \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right\} - \gamma (30Nmk^2T), \quad (43-2)$$

که ترم اول آنتروپی معمول در غیاب *GUP* و ترم دوم که مقداری منفی دارد  $\Delta s = -\gamma(30Nmk^2T) < 0$  تصحیح *GUP* می‌باشد. بنابراین در چاقوب مدل *GUP* آنتروپی کل سیستم کاهش می‌یابد.

پتانسیل شیمیایی به صورت زیر داده می‌شود

$$\mu = \left( \frac{\partial A}{\partial N} \right)_{V, T}, \quad (44-2)$$

که با استفاده از رابطه‌ی (۲-۴۱) می‌توان نوشت

$$\mu = \mu_0 = kT \ln \left[ \frac{N}{V} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \right] + \gamma [15mN (kT)^2], \quad (45-2)$$

بنابراین، اثرات *GUP* یک تصحیح مثبتی در پتانسیل شیمیایی سیستم یعنی  $\gamma [15mN (kT)^2] > 0 \approx$  نشان خواهد داد.

فشار سیستم به صورت زیر است

$$P = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_{N, T}, \quad (46-2)$$

که با جای‌گذاری (۲-۴۱) در آن، به فشار گاز ایده‌آل زیر می‌رسیم

$$P = \frac{NkT}{V}, \quad (47-2)$$

بنابراین مدل *GUP* تا مرتبه اول  $\gamma$  هیچ تاثیری روی فشار سیستم ندارد.

ویژگی ترمودینامیکی مهم دیگر چگالی حالات می‌باشد. بنابراین، تابع پارش را برای این سیستم به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$Q_N = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} g(E) dE, \quad (48-2)$$

که  $g(E)$  تعداد حالات بر واحد انرژی  $E$  می‌باشد. این رابطه نشان می‌دهد که برای  $\beta > 0$ ، تابع پارش  $Q_N$  تبدیل لاپلاس  $g(E)$  می‌باشد. در این جا با استفاده از یک بسط ساده از تبدیل لاپلاس معکوس می‌توان  $g(E)$  را به صورت زیر نوشت:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'+i\infty}^{\beta'-i\infty} e^{\beta E} Q_N(\beta) d\beta \quad \beta' > 0, \quad (49-2)$$

تابع پارش داده شده توسط (۳۲-۲) را می‌توان به صورت زیر تخمین زد

$$Q_N \approx \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\hbar^3}\right)^N \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{\frac{3N}{2}} \left(1 - \gamma \frac{15Nm}{\beta}\right), \quad (50-2)$$

با جای‌گذاری در (۴۹-۲) خواهیم داشت:

$$g(E) \approx \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\hbar^3}\right)^N \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{\frac{3N}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'+i\infty}^{\beta'-i\infty} e^{\beta E} \left(1 - \gamma \frac{15Nm}{\beta}\right) d\beta, \quad (51-2)$$

این انتگرال را می‌توان با استفاده از فرمول زیر به دست آورد

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'+i\infty}^{\beta'-i\infty} \frac{e^{\beta x}}{\beta^{n+1}} d\beta = \frac{x^n}{n!}, \quad (52-2)$$

برای  $x \geq 0$ ، و  $I = 0$  برای  $x \leq 0$  می‌باشد. که نهایتاً خواهیم داشت

$$g(E) \approx \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\hbar^3}\right)^N \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{\frac{3N}{2}} \left[ \frac{E^{\left(\frac{3N}{2}-1\right)}}{\left(\frac{3N}{2}-1\right)!} - \gamma \frac{15NmE^{\frac{3N}{2}}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} \right], \quad (53-2)$$

برای  $E \geq 0$ ، و  $g(E) = 0$  برای  $E \leq 0$  می‌باشد. ترم اول در رابطه‌ی (۵۳-۲) تعداد حالات معمول، اما جمله-ی دوم مرتبه اول GUP می‌باشد.





## فصل سوم

بررسی خواص دینامیکی با عدم قطعیت تعمیم یافته

حل‌های تحلیلی دقیقی در معادلات کلاسیکی حرکت و تحلیل نتایج دینامیکی را از وجود یک طول کمینه برای ذره‌ی آزاد، ذره در یک پتانسیل خطی، نوسانگر نیروی ثابت پادمتقارن، نوسانگر هماهنگ، نوسانگر هماهنگ عمودی، حلقه دو اتمی خطی و حلقه سه اتمی خطی بررسی می‌کنیم. روشن است که سرعت یک ذره آزاد و اندازه شتاب یک ذره در یک پتانسیل خطی مقدار بزرگتری نسبت به نقطه متناظر طول غیرکمینه دارد. این افزایش اندازه به صورت یک عامل ضرب متناسب با چیزی که به عنوان پارامتر اصل عدم قطعیت می‌دانیم، می‌باشد. تحلیل‌های ما از سیستم‌های نوسانی نشان می‌دهند مشخصه فرکانس سیستم‌ها، مقدار بزرگتری نسبت به نقطه مقابل طول غیرکمینه دارد. [۶]

### ۳-۱ دینامیک کلاسیک با طول کمینه<sup>۱</sup>

اصل عدم قطعیت تعمیم یافته به صورت زیر داده می‌شود

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2). \quad (1-3)$$

این اصل عدم قطعیت تعمیم یافته وجود یک طول کمینه به اندازه  $\Delta X_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}$  را پیش بینی می‌کند. یک راه رسیدن به رابطه‌ی اخیر جابجایی تعمیم یافته زیر است

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta^2). \quad (2-3)$$

نقطه مقابل کلاسیکی معادله‌ی (۲-۳) براکت پواسون تغییر یافته‌ای به صورت زیر است

$$\{\hat{X}, \hat{P}\} = 1 + \beta^2. \quad (3-3)$$

معنی  $\beta$  در یک چارچوب کلاسیکی بطور کامل روشن نیست. به‌رحال نکاتی برای تفسیر  $\beta$  در چارچوب مکانیک کلاسیک از بررسی‌های انجام شده زیر شایان توجه است. می‌توان نشان داد معادله‌ی (۳-۳) توسط دینامیک کلاسیک مکان  $X$  و تکانه  $P$  به صورت زیر است

<sup>1</sup> Classical Dynamics with Minimal Length

$$X = x \quad (4-3)$$

$$P = p + \frac{1}{3} \beta p^3 \quad (5-3)$$

که  $X$  و  $p$  به ترتیب شبه مکان و شبه تکانه می‌باشند، که در رابطه‌ی  $\{\hat{X}, \hat{P}\} = 1$  صدق می‌کنند. بنابراین هامیلتونی را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{3} \frac{\beta}{m} p^4 + V(x). \quad (6-3)$$

این مسئله را با  $X = x$  و حفظ بقاء انرژی که انرژی جنبشی سیستم می‌تواند به شکل اساسی پتانسیل موثر روی سیستم شناخته شده اندازه‌گیری شود، دنبال کنیم. چون شکل اساسی انرژی جنبشی به صورت تک جمله‌ی  $\frac{p^2}{2m}$  نوشته می‌شود، می‌توان استنباط کرد که  $p$  چیزی است که ما می‌دانیم و به عنوان تکانه اندازه‌گیری می‌کنیم. اما اگر چه  $X$  و  $P$  کمیت‌های فیزیکی هستند اما  $X$  و  $p$  ابزار ریاضی مفیدی هستند که با کمک آن‌ها می‌توان دینامیک سیستم را تحلیل کرد.

با استفاده از معادله‌ی هامیلتونی حرکت نشان می‌دهیم که شبه مکان  $X$  و شبه تکانه  $p$  به زمان بر اساس

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} + \frac{4}{3} \frac{\beta}{m} p^3 \quad (7-3)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dx}. \quad (8-3)$$

استنتاج می‌شود. با حل معادلات (۷-۳) و (۸-۳) برای  $X$  و  $p$  تحت شرایط اولیه اطلاعات دینامیکی به دست می‌آید

$$x \Big|_{t=0} = x_0 \quad (9-3)$$

$$p \Big|_{t=0} = p_0. \quad (10-3)$$

در تحلیل‌های نهایی لازم می‌دانیم که کمیت‌های فیزیکی  $X$  و  $P$  را به طور کامل برحسب کمیت‌های اولیه  $X_0$  و  $P_0$  بیان کنیم. به معادلات (۴-۳) و (۵-۳) برمی‌گردیم و از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$x_0 = X_0 \quad (11-3)$$

$$P_0 = - \left( \frac{2}{3\beta^2 P_0 + \sqrt{4\beta^3 + 9\beta^4 P_0^2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( \frac{3\beta^2 P_0 + \sqrt{4\beta^3 + 9\beta^4 P_0^2}}{2\beta^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (12-3)$$

که معادلات (۱۱-۳) و (۱۲-۳) معکوس معادلات (۴-۳) و (۵-۳) در  $t=0$  می‌باشند.

### ۲-۳ مدل های دینامیکی

#### ۱-۲-۳ ذره با پتانسل ثابت

برای ذره با پتانسیل ثابت  $V(x) = V_0$  می‌باشد، از معادله (۸-۳) نتیجه می‌شود که  $\frac{dp}{dt} = 0$  می‌باشد و چون

شبه تکانه یک ثابت حرکت است

$$p(t) = p(t = t_0) = p_0. \quad (13-3)$$

با جای گذاری رابطه (۱۳-۳) در رابطه (۷-۳) و انتگرال گیری نسبت به زمان، شبه مکان را به دست

می‌آوریم

$$x(t) = x_0 + \left( \frac{p_0}{m} + \frac{4}{3} \frac{\beta}{m} p^3 \right) t. \quad (14-3)$$

با قرار دادن (۱۱-۳) و (۱۲-۳) در معادله (۱۴-۳) و بسط نتیجه در  $\beta$  به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$X(t) = X_0 + \frac{P_0}{m} (1 + \beta P_0^2) t. \quad (15-3)$$

معادله (۱۵-۳) نشان می‌دهد که سرعت  $\left(\frac{dX}{dt}\right)$  ذره آزاد  $\frac{P_0}{m} (1 + \beta P_0^2)$  است. می‌بینیم که برای تکانه‌ی

اولیه‌ی ثابت  $P_0$  وجود یک طول کمینه منجر به افزوده شدن عامل ضربی  $(1 + \beta P^2)$  در مقایسه با وضعیت

غیر کمینه شده است.

### ۳-۲-۲ ذره در یک پتانسیل خطی

در این مورد پتانسیل به شکل  $V(x) = bx$  است. ثابت وزنی  $b$  برای یک توده ذره در یک میدان گرانشی یکنواخت و نیروی الکتریکی برای یک ذره باردار در یک میدان الکتریکی می‌باشد. با استفاده از معادله‌ی (۳-۸) خواهیم داشت

$$\frac{dp}{dt} = -b. \quad (16-3)$$

با انتگرال‌گیری ساده از معادله‌ی (۳-۱۶) برای شبه تکانه به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$p(t) = -bt + p_0. \quad (17-3)$$

با قرار دادن معادله‌ی (۳-۱۷) در معادله‌ی (۳-۷) داریم

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-bt + p_0}{m} + \frac{4}{3} \frac{\beta}{m} (-bt + p_0)^3. \quad (18-3)$$

با انتگرال‌گیری معادله‌ی (۳-۱۸) و با توجه به زمان  $t$  شبه مکان به صورت زیر به دست می‌آید

$$x(t) = x_0 + \frac{P_0}{m}t - \frac{b}{2m}t^2 - \frac{1}{3} \frac{\beta}{mb} [(-bt + p_0)^4 - p_0^4]. \quad (19-3)$$

با قرار دادن روابط (۳-۱۱) و (۳-۱۲) در معادله‌ی (۳-۱۹) با  $p_0 = 0$  می‌توان شتاب را به دست آورد

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{b}{m} (1 + 4\beta b^2 t^2). \quad (20-3)$$

معادله‌ی (۳-۲۰) نشان می‌دهد که برای یک مقدار ثابت  $b$  وجود یک طول کمینه اندازه شتاب را  $\left( \frac{d^2X}{dt^2} \right)$

توسط یک عامل ضربی وابسته به زمان  $(1 + 4\beta b^2 t^2)$  در مقایسه با مورد طول غیرکمینه افزایش می‌دهد. شایان ذکر است که برای یک ذره در یک میدان گرانشی یعنی  $b = mg$  معادله‌ی (۳-۲۰) نشان می‌دهد که اجسام در شتاب‌های متفاوتی در یک میدان گرانشی سقوط می‌کنند از این رو اصل هم ارزی ضعیف نقض شده است. به

منظور برقراری اصل هم ارزی ضعیف، آقای تکاچک<sup>۱</sup> پیشنهاد کرد که فرض کنیم  $\sqrt{\beta m} = \gamma$  باشد که  $\gamma$  یک ثابت جهانی است. این فرضیه را برای مسائل دو و سه ذره‌ای بررسی می‌کنیم.

### ۳-۲-۳ نوسانگر نیروی ثابت پاد متقارن<sup>۲</sup>

یک ذره با پتانسیل مطلق  $V(x) = b|x|$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از معادله‌ی (۳-۸) خواهیم داشت

$$\frac{dp}{dt} = -b \operatorname{sgn}(x) \quad (21-3)$$

که  $\operatorname{sgn}(x)$  همان تابع  $\operatorname{signum}$  است که به شکل

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (22-3)$$

می‌باشد. قبل از یک چهارم دوره تناوب  $T$  می‌توانیم تابع اولیه شبه مکان  $x$  و شبه تکانه  $p$  را از معادلات (۳-۲۱) و (۳-۷) با شرایط اولیه‌ی متعامد  $x_0 > 0$  و  $p_0 = 0$  به دست آوریم. که نتایج به شکل زیر هستند

$$p(t) = -bt \quad (23a-3)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{bt}{2m} - \frac{\beta b^3}{3m} t^4. \quad (23b-3)$$

با قرار دادن  $x=0$  و  $t = \frac{T}{4}$  دوره‌ی حرکت مشخص می‌شود. آنگاه

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{3}{4\beta b^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{16\beta b x_0 m}{3}} - 1} = \sqrt{\frac{2mx_0}{b}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{(bmx_0)^{\frac{3}{2}}}{b} \beta + O(\beta^2). \quad (24-3)$$

<sup>1</sup> Volodymyr Tkachuk

<sup>2</sup> Anti-symmetric Constant Force Oscillator

رابطه‌ی (۳-۲۴) نشان می‌دهد که دوره‌ی تناوب  $T$  سیستم در مقایسه با مورد طول غیرکمیینه کوچکتر است. فرکانس ( $f = T^{-1}$ ) سیستم به علت ترم‌های متناسب با  $\beta$  بزرگتر می‌باشد. با توجه به اصل بقاء انرژی می‌توان

چک کرد که شبه مکان و شبه تکانه دوره‌ی یکسانی دارند. با استفاده از معادله‌ی (۳-۶) خواهیم داشت

$$bx_0 = \frac{p_f^2}{2m} + \frac{1}{3} \frac{\beta}{m} p_f^4 \quad (25-3)$$

که وقتی  $x = x_0$  باشد، آنگاه  $p = p_f$  می‌شود. به سادگی  $p_f$  را از معادله‌ی (۳-۲۵) به دست می‌آوریم

$$p_f = \sqrt{\frac{3}{4\beta}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{16\beta bx_0 m}{3}} - 1}. \quad (26-3)$$

با استفاده از معادلات (۳-۲۴) و (۳-۲۶) می‌توان نشان داد که  $p(t = \frac{T}{4}) = p_f$  می‌باشد. بنابراین تایید می‌شود که شبه مکان و شبه تکانه دارای دوره یکسانی می‌باشند و مکان و تکانه نیز در معادلات (۳-۴) و (۳-۵) دوره یکسانی دارند.

### ۳-۲-۴ نوسانگر هماهنگ<sup>۱</sup>

برای نوسانگر هماهنگ پتانسیل به شکل  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$  می‌باشد. با استفاده از معادله‌ی (۳-۸) داریم [۹]

$$\frac{dp}{dt} = -m \omega_0^2 x. \quad (27-3)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله‌ی (۳-۲۷) و استفاده از رابطه‌ی (۳-۷)،  $x$  را به دست می‌آوریم. که منجر به معادله‌ی دافینگ می‌شود

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega_0^2 p + \frac{4}{3} \omega_0^2 \beta p^3 = 0. \quad (28-3)$$

<sup>1</sup> Harmonic Oscillator

در این جا یک حل دقیق در معادله‌ی دافینگ در ترم های توابع بیضوی داریم که حل معادله‌ی (۳-۲۸) در شرایط اولیه زیر انجام می‌شود

$$p|_{t=0} = p_0 \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega_0^2 x_0 \quad (29-3)$$

که برای حل این معادله از توابع بیضوی ژاکوبی کمک گرفتیم. نهایتاً

$$p(t) = A \operatorname{cn}(\Omega(t - t_1), \mu) \quad (30-3)$$

که در آن

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{4}{3} \beta A^2} \quad (31-3)$$

$$A = \sqrt{\frac{3}{4\beta} \sqrt{1 + \frac{8\beta}{3} \left( m\omega_0^2 x_0^2 + P_0^2 + \frac{2\beta}{3} P_0^4 \right)} - 1} \quad (32-3)$$

$$\mu = \frac{2\beta}{3} \left( \frac{\omega_0 A}{\Omega} \right)^2 \quad (33-3)$$

$$t_1 = \frac{1}{\Omega} \left( K \left( \frac{P_0}{A}, \mu \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (34-3)$$

و  $\operatorname{cn}(x, \mu)$  و  $K(x, \mu)$  توابع بیضوی ژاکوبی و بیضوی ناقص از نوع اول با مدول  $\mu$  می‌باشند. شبه تکانه  $p$  یک فرکانس خوش-تعریف به صورت زیر دارد

$$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{K(\mu)} \quad (35-3)$$

که  $K(m)$  انتگرال بیضوی کامل نوع اول می‌باشد. می‌توانیم شبه مکان  $x$  را با قرار دادن معادله‌ی (۳-۳۰) در (۳-۷) و انتگرال روی زمان  $t$  مشخص کنیم. به آسانی نشان می‌دهیم که

$$\int_0^t dt' p(t') = \frac{A}{\Omega} \frac{z(t, \mu)}{\mu} \quad (36-3)$$



$$\int_0^t dt p(t') = \frac{A^3 (2\mu^2 - 1)z(t, \mu) + \mu y(t, \mu)}{\Omega 2\mu^3} \quad (37-3)$$

که

$$z(t, \mu) = \arcsin \left( \frac{2\mu sn\left(\frac{\Omega t}{2}, \mu\right) dn\left(\frac{\Omega t}{2}, \mu\right) cn\left(\Omega\left(\frac{t}{2} - t_1\right), \mu\right)}{1 - \mu^2 sn^2\left(\frac{\Omega t}{2}, \mu\right) sn^2\left(\Omega\left(\frac{t}{2} - t_1\right), \mu\right)} \right) \quad (38-3)$$

$$y(t, \mu) = sn(\Omega(t - t_1), \mu) dn(\Omega(t - t_1), \mu) + sn(\Omega t_1, \mu) dn(\Omega t_1, \mu) \quad (39-3)$$

و  $sn(x, \mu)$  و  $dn(x, \mu)$  توابع بیضوی ژاکوبی می‌باشند. بنابراین شبه مکان به صورت زیر می‌باشد

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{m} \frac{A}{\Omega} \frac{z(t, \mu)}{\mu} + \frac{4}{3} \frac{\beta}{m} \frac{A^3}{\Omega} \frac{(2\mu^2 - 1)z(t, \mu) + \mu y(t, \mu)}{2\mu^3}. \quad (40-3)$$

بنابراین فرکانس نوسانگر هماهنگ وقتی که طول کمینه وجود داشته باشد، افزایش می‌یابد.

### ۵-۲-۳ نوسانگر هماهنگ عمودی<sup>۱</sup>

پتانسیل در این حالت برابر است با  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x - \xi)^2 + mgx$  . آنگاه از رابطه‌ی (۳-۸) داریم

$$\frac{dp}{dt} = -m \omega_0^2 (x - \xi)^2 - mg. \quad (41-3)$$

با استفاده از معادلات (۳-۴۱) و (۳-۷) به معادله‌ای مانند (۳-۲۸) می‌رسیم با این تفاوت که این بار شرایط اولیه

عبارت است از

<sup>1</sup> Vertical Harmonic Oscillator

$$p|_{t=0} = p_0 \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega_0^2(x - \xi) - mg. \quad (42-3)$$

اکنون می‌توانیم مورد نوسانگر هماهنگ عمودی را به عنوان یک نوسانگر هماهنگ جابجایی در نظر بگیریم و از نتایج بخش های قبلی استفاده می‌کنیم. یک نوع آزمون تجربی برای تایید پیش‌بینی‌های این فرضیه نشان - می‌دهیم. یک سیستم جرمی جهش یافته که در حالت سکون  $p_0 = 0$  و در یک مکان  $X = X_0$  باشد، در نظر بگیرید. اثرات طول کمینه می‌تواند با قرار دادن صفحاتی از مکان تجربی (به دست آمده از یک سنسور حرکت به عنوان مثال) و مکان پیش بینی شده برای  $\beta = 0$  آشکار شود.

برای مثال  $\beta \approx 10^{-2}$  را بررسی می‌کنیم. در این مورد بعد از دو چرخه  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  مکان نوسانگر در نزدیکی های مکان سکون یا تعادل  $X = 0$  (به‌جای نقطه شروع  $X = X_0$ ) یافت می‌شود. در واقع، انتظار می‌رفت اندازه  $\beta$  بسیار کوچک‌تر باشد و آزمایش‌گر ممکن است تعداد بیشتری از چرخه‌های  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  برای آشکار شدن اثرات طول کمینه مشاهده کرده باشد. البته باید خاطر نشان کرد که آزمایش‌گر با چالش‌های دیگری مانند ساختار یک سیستم نوسانگر با پراکندگی ناچیز (حتی برای مقدار بزرگی از چرخه‌ها) مواجه است.

### ۳-۳ بررسی مسئله‌ی دو جسمی

در این بخش و بخش بعد مسائل دو جسمی و سه جسمی را با این فرض که انرژی جنبشی افزایشی است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این فرض در بخش قبل مورد استفاده قرار گرفت و همچنین به بهبود اصل هم ارزی منجر می‌شود. علاوه بر این تعمیم به معادله‌ی (۲-۳) برای یک سیستم N جسمی طبیعی است که مختصات و اندازه حرکت جابجا شوند. بنابراین برای این مورد یعنی مسئله دو جسمی هامیلتونی به صورت زیر است [۶]

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{1}{3} \frac{\beta_1}{m_1} P_1^4 + \frac{P_2^2}{2m_2} + \frac{1}{3} \frac{\beta_2}{m_2} P_2^4 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \quad (43-3)$$

که  $x_1, p_1, m_1$  و  $\beta_1$  و  $x_2, p_2, m_2$  و  $\beta_2$  شبه مکان، شبه تکانه و جرم ها و پارامترهای GUP ذرات ۱ و ۲، به ترتیب می‌باشند. توجه کنید که ما نیاز به پارامتر GUP یکسان نداریم، مگر این‌که به ذرات بنیادی یکسانی برخورد کنیم، اما لازم است که

$$\sqrt{\beta_1} m_1 = \sqrt{\beta_2} m_2 = \gamma \quad (44-3)$$

که  $\gamma$  یک ثابت جهانی است. این تضمین می‌کند که اصل هم ارزی ضعیف برقرار است. معادلات هامیلتونی حرکت برای متغیرهای  $x_1, p_1, x_2$  و  $p_2$  به صورت زیر می‌باشند

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{p_1}{m_1} + \frac{4}{3} \frac{\beta_1}{m_1} p_1^3 \quad (45-3)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -k (x_1 - x_2) \quad (46-3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{p_2}{m_2} + \frac{4}{3} \frac{\beta_2}{m_2} p_2^3 \quad (47-3)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -k (x_2 - x_1). \quad (48-3)$$

رفتار دینامیکی روابط (۳-۴۵)، (۳-۴۶)، (۳-۴۷) و (۳-۴۸) برای  $x_1, p_1, x_2$  و  $p_2$  در شرایط اولیه حل شده زیر کامل خواهد شد

$$\begin{cases} x_1|_{t=0} = x_{10} & p_1|_{t=0} = p_{10} \\ x_2|_{t=0} = x_{20} & p_2|_{t=0} = p_{20} \end{cases} \quad (49-3)$$

با اضافه کردن معادله‌ی (۳-۴۶) با (۳-۴۸) داریم  $\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$ ، یعنی شبه تکانه  $p_1 + p_2$  یک ثابت حرکت می‌باشد

$$p_T = p_1 + p_2 \quad (50-3)$$

می‌توان از معادله‌ی (۳-۵۰) برای مشخص کردن  $p_1$  یا  $p_2$  در بررسی‌ها استفاده کرد. بنابراین معادله‌ی (۳-۴۷) برابر است با

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{p_T - p_1}{m_2} + \frac{4}{3} \frac{\beta_2}{m_2} (p_T - p_1)^3 \quad (51-3)$$

با دیفرانسیل گیری از معادله‌ی (۴۶-۳) و با استفاده از معادلات (۴۵-۳) و (۵۱-۳) داریم

$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} = -k \left( \frac{p_1}{m_1} + \frac{4}{3} \frac{\beta_1}{m_1} p_1^3 \right) + k \left[ \frac{p_T - p_1}{m_2} + \frac{4}{3} \frac{\beta_2}{m_2} (p_T - p_1)^3 \right]. \quad (52-3)$$

حالا حالت خاص مربوط به چارچوبی که  $p_T = 0$  است را بررسی می‌کنیم. در این مورد معادله‌ی (۵۲-۳) به

معادله‌ی دافینگ تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} + \frac{k}{m^*} p_1 + \frac{4}{3} k \frac{\beta^*}{m^*} p_1^3 = 0 \quad (53-3)$$

که

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (54-3)$$

و

$$\beta^* = \frac{m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2}{m_1 + m_2} \quad (55-3)$$

می‌باشند. می‌توان معادله‌ی (۵۳-۳) را برای شبه تکانه‌ی  $p_1$  با شرایط اولیه زیر برحسب یک معادله‌ی بیضوی

ژاکوبی معادله‌ی (۳۰-۳) حل کرد.

$$p_1|_{t=0} = p_{10} \quad \frac{dp_1}{dt} = -k (x_{10} - x_{20}) \quad (56-3)$$

این حالت شبیه به معادله‌ی نوسانگر هماهنگ است با این تفاوت که در آن جرم کاهش یافته  $m^*$  و

پارامتر GUP کاهش یافته  $\beta^*$  ظاهر شده است. می‌توانیم شبه تکانه  $p_1$  را در معادله‌ی (۴۵-۳) و (۵۱-۳) قرار

داده و با انتگرال گیری دقیق شبه مکان های  $x_1$  و  $x_2$  را به دست آوریم. برای تعیین سرعت مرکز جرم با ضرب

معادلات (۴۵-۳) و (۳-۴۷) در  $m_1$  و  $m_2$  به ترتیب، مسئله را حل می‌کنیم. بنابراین

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{4}{3}(\beta_1 - \beta_2)p_1^3 \quad (57-3)$$

به عنوان یک نتیجه از وجود طول کمینه، می بینیم که مرکز جرم در حالت سکون نیست اما با یک فرکانس

خوش-تعریف در چارچوب  $p_T = 0$  نوسان می کند.

یک حالت خاص مسئله وضعیتی است که سیستم از ذرات بنیادی یکسان ساخته شده باشد ( $\beta_1 = \beta_2$ ) و

$(m_1 = m_2)$ . در این حالت مرکز جرم ساکن است. با استفاده از معادله‌ی (۳-۳۷) در انتگرال معادله‌ی (۳-۵۷)،

می توانیم یک شکل بسته دقیق برای مرکز جرم مختصات بیان کنیم ( $R = m_1 X_1 + m_2 X_2$ ).

### ۴-۳ بررسی مسئله‌ی سه جسمی

در آخر اثر طول کمینه روی مدهای طولی حلقه سه اتمی خطی متقارن را مطالعه می کنیم. به طور کلی

همیلتونی برای این سیستم به صورت [۶]

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{1}{3} \frac{\beta_1}{m_1} P_1^4 + \frac{P_2^2}{2m_2} + \frac{1}{3} \frac{\beta_2}{m_2} P_2^4 + \frac{P_3^2}{2m_3} + \frac{1}{3} \frac{\beta_3}{m_3} P_3^4 + \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 \quad (58-3)$$

است که  $m_i, p_i, x_i$  و  $\beta_i$  شبه مکان ها، شبه تکانه ها، جرم ها و پارامترهای GUP ذره  $i$  ام می باشند. با استفاده

از معادلات همیلتونی حرکت  $x_i, p_i$  از معادلات دیفرانسیل زیر پیروی می کنند

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{p_1}{m_1} + \frac{4}{3} \frac{\beta_1}{m_1} p_1^3 \quad (59-3)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -k_1 (x_1 - x_2) \quad (60-3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{p_2}{m_2} + \frac{4}{3} \frac{\beta_2}{m_2} p_2^3 \quad (61-3)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -k_1 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) \quad (62-3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{p_3}{m_3} + \frac{4}{3} \frac{\beta_3}{m_3} p_3^3 \quad (63-3)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -k_3(x_3 - x_2). \quad (64-3)$$

می‌توانیم معادلات (۶۰-۳)، (۶۲-۳) و (۶۴-۳) را با هم جمع و نشان می‌دهیم که  $\frac{d}{dt}(p_1 + p_2 + p_3) = 0$  است. بنابراین شبه تکانه‌ی کل  $p_1 + p_2 + p_3$  یک ثابت حرکت خواهد بود.

$$p_T = p_1 + p_2 + p_3 \quad (65-3)$$

همچنین می‌توان از معادله‌ی (۶۵-۳) برای مشخص کردن یکی از  $p_i$  ها استفاده کرد. حالا مسئله را به حالت حلقه سه اتمی خطی مقارنی اختصاص می‌دهیم که

$$\begin{cases} m_1 = m_3 = m & m_2 = M & k_1 = k_3 = k \\ \beta_1 = \beta_3 = \beta_m & \beta_2 = \beta_m \end{cases} \quad (66-3)$$

در غیاب طول کمینه، می‌دانیم که این سیستم دینامیکی دو مشخصه مدهای طولی با رفتار مقارن ( و  $x_1 = -x_3$ ,  $x_2 = 0$ ) و پاد مقارن  $\left( x_1 = x_3 - L, x_2 = -\frac{2m}{M}x_1 \right)$  ارائه می‌دهد. اثر طول کمینه را روی این دو مد امتحان می‌کنیم:

برای مد پاد مقارن  $x_2 = 0$  است. بنابراین  $\frac{dx_2}{dt} = 0$  و از معادله‌ی (۴۷-۳) داریم

$$p_2 = 0 \quad (67-3)$$

یعنی تکانه‌ی اتم مرکزی صفر خواهد شد. برای  $x_1 = -x_3$ ، می‌توان با استفاده از معادلات (۵۹-۳) و (۶۳-۳) نشان داد که

$$p_1 = -p_3 \quad (68-3)$$

با توجه به این که در این مد  $\frac{dx_2}{dt} = 0$  می‌باشد، آنگاه با استفاده از معادلات (۵۹-۳) و (۶۰-۳) داریم

$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} + \frac{k_1}{m} p_1 + \frac{4k}{3m} \beta_m p_1^3 = 0 \quad (69-3)$$

این معادله را با شرایط اولیه زیر حل می‌کنیم

$$p_1|_{t=0} = p_{10} \quad \frac{dp_1}{dt}|_{t=0} = -kx_{10} \quad (70-3)$$

که  $x_{i0} = x_i|_{t=0}$  ترم‌هایی از معادله بیضوی ژاکوبی معادله‌ی (۳-۳۰) است. سپس می‌توان شبه تکانه  $p_1$  را در معادله‌ی (۳-۵۹) گذاشت و رفتار دینامیکی مد تحت تاثیر طول کمینه را تعیین کرد. بر اساس معادله‌ی (۳-۶۹)

(۶۹) متوجه می‌شویم که اثر طول کمینه روی مد پاد متقارن باعث تغییر فرکانس‌ها به مقدار  $\omega_A$  است که

$$\omega_A^2 = \frac{\pi^2 \frac{k}{m} \left( 1 + \frac{4}{3} \beta_m A_A^2 \right)}{4K^2(\mu)} \quad (71-3)$$

که

$$A_A = \sqrt{\frac{3}{4\beta_m}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{8\beta_m}{3} \left( mkx_{10}^2 + p_{10}^2 + \frac{2}{3} \beta_m p_{10}^4 \right)} - 1} \quad (72-3)$$

$$\mu = \frac{2\beta_m A_A^2}{3 + 4\beta_m A_A^2}. \quad (73-3)$$

انرژی مد با وجود طول کمینه افزایش می‌یابد چون  $\omega_A > \sqrt{\frac{k}{m}}$  است. برای مد پاد متقارن داریم  $x_1 = x_3 - L$ .

با استفاده از معادلات (۳-۵۹) و (۳-۶۳) در میابیم که

$$p_1 = p_3 \quad (74-3)$$

همچنین در این مد داریم  $x_2 = -\frac{2m}{M} x_1$ . از معادلات (۳-۵۹) و (۳-۶۱) روابط زیر را به دست می‌آوریم

$$p_1 = -\frac{1}{2} p_2 \quad (75-3)$$

$$\beta_m = 4\beta_M \quad (76-3)$$

توجه کنید که رابطه‌ی (۷۶-۳) شرط لازم برای وجود یک جواب قابل قبول است. با مشتق معادله‌ی (۶۰-۳) و با استفاده از رابطه‌ی (۵۹-۳) می‌توان معادله‌ی دافینگ را به دست آورد

$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} + \frac{k}{M} \left( \frac{2m+M}{m} \right) p_1 + \frac{4}{3} \frac{k}{M} \left( \frac{2m+M}{m} \right) \beta_m p_1^3 = 0 \quad (77-3)$$

مشابه آنچه که پیشتر انجام شد، می‌توان نشان داد افزایشی در ویژه فرکانس مد بوجود آمده است.



## فصل چهارم

بررسی اثر اسپین مداری و اثر رامسائر - تاونسند و اتم هیدروژن

در حضور طول کمینه

#### ۴-۱ برهم کنش اسپین مداری در مکانیک کوانتومی تعمیم یافته؛ نوسانگر دیراک ۳ بعدی

در این جا نوسانگر دیراک ۳ بعدی را در حضور یک برهم کنش اسپین-مدار<sup>۱</sup> در چارچوب مکانیک کوانتومی طول کمینه مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این کار مسأله را در فضای تکانه و مختصات قطبی حل می‌کنیم و نهایتاً ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی این سیستم را به دست می‌آوریم.

#### ۴-۱-۱ نوسانگر دیراک ۳ بعدی تحت یک میدان مغناطیسی با برهم کنش اسپین مداری

در نگاشت طول کمینه، رابطه‌ی جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه به صورت زیر است [۱۰]

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}(1 + \beta p^2) \quad (1-4)$$

در رابطه‌ی بالا  $\beta > 0$ ، پارامتر طول کمینه است؛ که از مرتبه  $\beta \approx 10^{-38} \frac{c^4}{(GeV)^2}$  می‌باشد. این رابطه جابجایی

رابطه‌ی عدم قطعیت طول کمینه‌ی زیر را می‌رساند

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right) \quad (2-4)$$

رابطه‌ی (۲-۴) عدم قطعیت مکان کمینه  $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$  را می‌رساند. با استفاده از معادله‌ی (۱-۴) عملگرهای

$\hat{p}_j$  و  $\hat{x}_i$  به صورت زیر خواهند بود

$$\hat{x}_i = i\hbar \left( 1 + \beta p^2 \right) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \hat{p}_i = p_i \quad (3-4)$$

هامیلتونی نوسانگر دیراک تحت برهم کنش اسپین-مدار به شکل زیر است

$$H = H_0 + V_{so}. \quad (4-4)$$

که در آن  $H_0$  به فرم رابطه‌ی (۴-۵) می‌باشد [۸.۲۱.۲۳]

$$H_0 = c\sigma \cdot \left( \hat{p} - im\omega\sigma_z \hat{r} + \frac{e}{c} \hat{A} \right) + \sigma_z mc^2 = c\sigma \cdot \hat{p} - im\omega c\sigma \cdot \sigma_z \hat{r} + e\sigma \cdot \hat{A} + \sigma_z mc^2, \quad (5-4)$$

<sup>1</sup> Rashba spin orbit interaction

برای نوسانگر هماهنگ دیراک ۳ بعدی در حضور یک میدان مغناطیسی مشابه  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  و ماتریس های پائولی  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  به شکل زیر می باشند

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6-4)$$

پتانسیل برداری  $\hat{A}$  را به فرم  $(-\frac{B_0}{2}y, \frac{B_0}{2}x, 0)$  و پتانسیل برهم کنش اسپین مداری را مطابق رابطه (۷-۴) در نظر می گیریم [۲۰.۲۲]

$$V_{SO} = \alpha_R (\sigma_x p_y - \sigma_y p_x), \quad (7-4)$$

که  $\alpha_R$  ثابت جفت شدگی Rashba می باشد. چون اسپین ذره  $1/2$  و همچنین دارای اندازه حرکت مداری می باشد، بنابراین برهم کنش اسپین مدار ضروری و معمولا به عنوان اختلال در نظر گرفته می شود که در این صورت به طور کامل به انرژی گنجانیده می شود. در نگاشت طول کمینه عملگرهای  $x, y$  به صورت رابطه زیر نمایش داده می شوند.

$$x = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_x}, \quad y = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_y}, \quad (8-4)$$

بنابراین هامیلتونی کل به صورت زیر خواهد بود

$$H = c\sigma \cdot \hat{p} - im\alpha c \sigma \cdot \sigma_z \vec{r} + e\sigma \cdot \hat{A} + \sigma_z mc^2 + \alpha_R (\sigma_x p_y - \sigma_y p_x), \quad (9-4)$$

که در آن  $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j})$  همچنین می توان هامیلتونی کل را بازنویسی کرد

$$H = c(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + m\alpha c \hbar (1 + \beta p^2) \left[ \sigma_x \sigma_z \frac{\partial}{\partial p_x} + \sigma_y \sigma_z \frac{\partial}{\partial p_y} \right] + e \frac{B_0}{2} i\hbar (1 + \beta p^2) \left[ -\sigma_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial p_x} \right] + \sigma_z mc^2 + \alpha_R (\sigma_x p_y - \sigma_y p_x), \quad (10-4)$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\sigma_x \sigma_z = -i \sigma_y, \quad \sigma_y \sigma_z = i \sigma_x, \quad (11-4)$$

بنابراین می‌توان هامیلتونی را به فرم ماتریسی زیر نوشت

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 & A_1 \\ A_2 & -mc^2 \end{pmatrix}, \quad (12-4)$$

که در آن  $A_1$  و  $A_2$  به شکل زیر می‌باشند

$$A_1 = ce^{-i\theta} p + \alpha_R i p e^{-i\theta} + m \alpha c \hbar (1 + \beta p^2) \left( -\frac{\partial}{\partial p_x} + i \frac{\partial}{\partial p_y} \right) + e \frac{B_o}{2} i \hbar (1 + \beta p^2) \left( -\frac{\partial}{\partial p_y} - i \frac{\partial}{\partial p_x} \right), \quad (13-a-4)$$

$$A_2 = ce^{i\theta} p - \alpha_R i p e^{i\theta} + m \alpha c \hbar (1 + \beta p^2) \left( \frac{\partial}{\partial p_x} + i \frac{\partial}{\partial p_y} \right) + e \frac{B_o}{2} i \hbar (1 + \beta p^2) \left( -\frac{\partial}{\partial p_y} + i \frac{\partial}{\partial p_x} \right). \quad (13-b-4)$$

که  $p, \theta$  مختصات قطبی در فضای تکانه هستند

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{p_y}{p_x}, \quad (14-4)$$

#### ۴-۱-۲ بررسی مسئله در فضای تکانه

هامیلتونی به دست آمده رابطه (۴-۱۲) را به سادگی می‌توان در فضای تکانه نوشت

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 & A_3 \\ A_4 & -mc^2 \end{pmatrix}, \quad (15-4)$$

که در آن پارامترهای  $A_3$  و  $A_4$  به شکل زیر می‌باشند

$$A_3 = e^{-i\theta} \left[ (c + i\alpha_R)p + c\eta(1 + \beta p^2) \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right], \quad (16-a-4)$$

$$A_4 = e^{i\theta} \left[ (c - i\alpha_R)p - c\eta(1 + \beta p^2) \left( \frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right], \quad (16-b-4)$$

$$\eta = \left( \frac{\hbar e B_o}{2c} - m\hbar\omega \right), \quad (16-c-4)$$

می‌دانیم که

$$H \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (17-4)$$

آنگاه معادله‌ی نوسانگردیراک RSOI با یک میدان مغناطیسی در مکانیک کوانتومی طول کمینه را می‌توان به

صورت زیر نوشت

$$(E - mc^2)\psi_1 = e^{-i\theta} \left[ (c + i\alpha_R)p + c\eta(1 + \beta p^2) \left( \partial_p - \frac{i}{p} \partial_\theta \right) \right] \psi_2, \quad (18-4)$$

$$(E + mc^2)\psi_2 = e^{i\theta} \left[ (c - i\alpha_R)p - c\eta(1 + \beta p^2) \left( \partial_p + \frac{i}{p} \partial_\theta \right) \right] \psi_1, \quad (19-4)$$

برای به دست آوردن ویژه توابع ابتدا  $\psi_2$  از معادله‌ی (۱۹-۴) را در معادله‌ی (۱۸-۴) قرار می‌دهیم تا  $\psi_1$  به دست

آید سپس  $\psi_1$  به دست آمده را درون معادله‌ی (۱۹-۴) قرار داده تا  $\psi_2$  به دست آید. بنابراین

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2c^4)\psi_1 = e^{-i\theta} & \left\{ (c + i\alpha_R)p e^{i\theta} \left[ (c - i\alpha_R)p\psi_1 - c\eta(1 + \beta p^2) \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial\psi_1}{\partial \theta} \right) \right] + \right. \\ & \left. + c\eta(1 + \beta p^2) e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial p} \left[ (c - i\alpha_R)p\psi_1 - c\eta(1 + \beta p^2) \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial\psi_1}{\partial \theta} \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$-\frac{i}{p}c\eta(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{i\theta}\left[(c-i\alpha_R)p\psi_1-c\eta(1+\beta p^2)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial p}+\frac{i}{p}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right)\right]\right). \quad (20-4)$$

با انتخاب  $\psi_1 = e^{im\theta}\varphi_m(p)$ ، به معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$(E^2 - M^2 c^4)\psi_1 = -c^2\eta^2(1+\beta p^2)^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial p^2} + \left\{-2c\eta i\alpha_R p(1+\beta p^2) - 2\beta p c^2\eta^2(1+\beta p^2) - \frac{1}{p}c^2\eta^2(1+\beta p^2)^2\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial p} + \left\{(c^2 + \alpha_R^2)p^2 + 2mc^2\eta(1+\beta p^2) + 2\beta mc^2\eta^2(1+\beta p^2) + 2c\eta(c-i\alpha_R)(1+\beta p^2) + \frac{1}{p^2}m^2c^2\eta^2(1+\beta p^2)^2\right\}\psi_1, \quad (21-4)$$

که با کمی محاسبات جبری به فرم دیفرانسیلی زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial p^2} + \left\{\frac{p}{(1+\beta p^2)}\left(\frac{2i\alpha_R}{c\eta} + 2\beta\right) + \frac{1}{p}\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial p} + \left\{\frac{E^2 - M^2 c^4}{c^2\eta^2(1+\beta p^2)^2} - \frac{(c^2 + \alpha_R^2)p^2}{c^2\eta^2(1+\beta p^2)^2}\right. \\ \left. - \frac{1}{1+\beta p^2}\left[\frac{2m}{\eta} + \frac{2(c-i\alpha_R)}{c\eta} + 2m\beta\right] - \frac{m^2}{p^2}\right\}\psi_1 = 0. \quad (22-4)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل کمیت  $s = \beta p^2$  را معرفی می‌کنیم، آنگاه معادله‌ی (۲۲-۴) به معادله

دیفرانسیل معروف زیر تبدیل می‌شود که می‌توان به راحتی آن را از روش NU حل کرد

$$\frac{d^2\psi_1}{ds^2} + \frac{1}{s(1+s)}\{1 - A_5 s\}\frac{d\psi_1}{ds} + \frac{1}{s^2(1+s)^2}\{-A_6 s^2 + A_7 s - A_8\}\psi_1 = 0. \quad (23-4)$$

که پارامترهای ثابت این معادله به شکل زیر می‌باشند

$$A_5 = -\left(2 + \frac{i\alpha_R}{\beta c\eta}\right), \quad A_6 = \frac{c^2 + \alpha_R^2}{4\beta^2 c^2 \eta^2} + \frac{m+1}{2\beta\eta} - \frac{i\alpha_R}{2\beta c\eta} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4}, \\ A_7 = \frac{E^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} - \frac{m+1}{2\beta\eta} + \frac{i\alpha_R}{2\beta c\eta} - \frac{m}{2} - \frac{m^2}{2}, \quad A_8 = \frac{m^2}{4}. \quad (24-4)$$

با استفاده از روش NU معادله‌ی (۲۳-۴) را حل کرده و ویژه تابع  $\psi_1(p)$  به دست می‌آید

$$\psi_1 = N s^{m/2} (1+s)^{-\left[\frac{i\alpha_R}{2\beta c\eta} + \left(\frac{E^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} + \frac{1}{4\beta^2 \eta^2}\right)^{1/2}\right]} P_n^{\left[m, -2\left(\frac{E^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} + \frac{1}{4\beta^2 \eta^2}\right)^{1/2}\right]} (1+2s). \quad (25-4)$$

که در آن چند جمله‌ای ژاکوبی را می‌توان بر حسب توابع فوق هندسی نوشت

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, 1+\alpha+\beta+n, \alpha+1, \frac{1}{2}(1-z)\right). \quad (26-4)$$

بنابراین می‌توانیم معادله‌ی (۴-۲۵) را به فرم زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} \psi_1(p) &= N (\beta p^2)^{\frac{m}{2}} (1+\beta p^2)^{-\left[\frac{i\alpha_R}{2\beta c\eta} + \left(\frac{E^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} + \frac{1}{4\beta^2 \eta^2}\right)^{1/2}\right]} \\ &\times \frac{(m+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, -2\left(\frac{E^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} + \frac{1}{4\beta^2 \eta^2}\right)^{1/2} + m+n+1, m+1, -\beta p^2\right). \end{aligned} \quad (27-4)$$

نهایتاً با استفاده از ویژه توابع به دست آمده به معادله‌ی ویژه مقداری انرژی نوسانگر دیراک ۳ بعدی در حضور

یک میدان مغناطیسی تحت برهم‌کنش اسپین مدار در مکانیک کوانتومی طول کمینه دست پیدا می‌کنیم

$$-\frac{E_{n,m}^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} + (2n+1+m) \left(\frac{E_{n,m}^2 - M^2 c^4}{4\beta c^2 \eta^2} + \frac{1}{4\beta^2 \eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(-n^2 - nm - n + \frac{m+1}{2\beta\eta}\right) = 0. \quad (28-4)$$

#### ۴-۲ اثر رامسائر-تاوزند نسبیتی در حضور طول کمینه

در این جا اثر رامسائر-تاوزند را در حضور یک اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و در چارچوب معادله‌ی دیراک برای چاه پتانسیل، پله پتانسیل و دیواره نامتناهی مورد بررسی قرار می‌دهیم و مشخصه‌های سیستم را در یک روش تحلیلی دقیق به دست می‌آوریم.

#### ۴-۲-۱ اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

اصل عدم قطعیت را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right) \quad (29-4)$$

که در آن  $\beta$  پارامتر تعمیم یافته می‌باشد. بنابراین جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه به شکل زیر می‌باشد.

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta P^2) \quad (30-4)$$

حال برای عملگرهای  $\hat{X}$  و  $\hat{P}$  نمایشی در فضای تکانه که رابطه بالا را تا مرتبه اول  $\beta$  برآورده می‌کند به صورت زیر ارائه می‌نماییم

$$\hat{P} = \left( 1 + \frac{1}{3} \beta p^2 \right) p, \quad \hat{X} = x \quad (31-4)$$

که  $x$  و  $p$  عملگرهای مکان و تکانه می‌باشند.

#### ۴-۲-۲ معادله‌ی دیراک تعمیم یافته

معادله‌ی دیراک معمولی به صورت زیر است [۱۴]

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\beta}(m + U_0(x))] \psi(x) = [E - V_0(x)] \psi(x) \quad (32-4)$$



که  $V_0$  و  $U_0$  به ترتیب پتانسیل‌های اسکالر و برداری‌اند و ماتریس‌های  $\bar{\alpha}$ ،  $\bar{\beta}$  ویژه اسپینورهای  $\psi(x)$  به شکل زیر می‌باشند

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (33-4)$$

با جای‌گذاری روابط (۴-۳۳) در معادله‌ی دیراک به معادله‌ی دیفرانسیلی جفت شده زیر می‌رسیم

$$(\bar{\sigma} \cdot \bar{p}) \chi(x) + [m + U_0(x) + V_0(x)] \phi(x) = E \phi(x) \quad (34a-4)$$

$$(\bar{\sigma} \cdot \bar{p}) \phi(x) - [m + U_0(x) - V_0(x)] \chi(x) = E \chi(x) \quad (34b-4)$$

ابتدا از رابطه‌ی (۴-34b)،  $\chi$  را به دست آورده و در رابطه‌ی (۴-34a) قرار داده تا  $\phi(x)$  به دست آید

$$p^2 \phi(x) = (E^2 - m^2) \phi(x) - 2mU_0 \phi(x) + (-2EV_0 + V_0^2 - U_0^2) \phi(x) \quad (35-4)$$

که طبق رابطه  $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + \sigma \cdot (A \times B)$ ،  $(\bar{\sigma} \cdot \bar{p})(\bar{\sigma} \cdot \bar{p}) = p^2$  می‌شود. برای مورد میدان‌های برهم‌کنش برداری و عددی یکسان خواهیم داشت

$$p^2 \phi(x) + 2U_0(E + m) \phi(x) = (E^2 - m^2) \phi(x) \quad (36-4)$$

پیش از این حالت، نمایش عملگر تکانه در فضای تکانه به شکل

$$P = \left( 1 + \frac{1}{3} \beta p^2 \right) p \quad (37-4)$$

می‌باشد و حالا یک تابع موج کمکی  $\varphi(x)$  تعریف می‌کنیم [۱۳]

$$\phi(x) = \left( 1 - \frac{2}{3} \beta p^2 \right) \varphi(x) \quad (38-4)$$

روابط (۳۷-۴) و (۳۸-۴) را در معادله‌ی (۳۶-۴) قرار داده و از مراتب بالای  $\beta$  صرف نظر می‌کنیم، آنگاه

$$\left[ p^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \beta \left[ 2U_0(E+m) - (E^2 - m^2) \right] \right) + \left[ 2U_0(E+m) - (E^2 - m^2) \right] \right] \varphi(x) = 0 \quad (39-4)$$

که معادل است با

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{(E^2 - m^2) - 2U_0(E+m)}{1 - \frac{2}{3} \beta \left[ 2U_0(E+m) - (E^2 - m^2) \right]} \varphi(x) = 0 \quad (40-4)$$

در بخش بعد برهم‌کنش‌های فیزیکی مهمی را در این چارچوب مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۳-۲-۴ چاه پتانسیل

چاه پتانسیل به فرم زیر است [۱۲.۲۴.۲۶]

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ -V_0 & , \quad -a < x < a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases} \quad (41-4)$$

در این‌جا حالت‌های پراکندگی را برای  $E > 0$  بررسی می‌کنیم. معادله‌ی (۴۰-۴) را بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{d^2 \varphi^w(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{(E^2 - m^2) - 2V(x)(E+m)}{1 - \frac{2}{3} \beta \left[ 2V(x)(E+m) - (E^2 - m^2) \right]} \varphi^w(x) = 0 \quad (42-4)$$

ابتدا ناحیه‌ی  $x < -a$  را بررسی می‌کنیم که به فرم معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2 \varphi_1^w(x)}{dx^2} + k^2 \varphi_1^w(x) = 0 \quad (43-4)$$

که در آن

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{E^2 - m^2}{1 + \frac{2}{3}\beta(E^2 - m^2)} \quad (44-4)$$

می‌باشد. این ساده‌ترین معادله دیفرانسیل مکانیک کوانتومی می‌باشد که جواب آن به صورت زیر است

$$\phi_1^w(x) = e^{ikx} + De^{-ikx} \quad (45-4)$$

برای ناحیه میانی  $-a < x < a$ ، معادله‌ی (۴۲-۴) به معادله‌ی زیر تبدیل خواهد شد

$$\frac{d^2 \phi_2^w(x)}{dx^2} + q^2 \phi_2^w(x) = 0 \quad (46-4)$$

که در آن

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{(E^2 - m^2) + 2V_0(E + m)}{1 + \frac{2}{3}\beta[2V_0(E + m) + (E^2 - m^2)]} \quad (47-4)$$

و جواب این معادله به سادگی به دست می‌آید

$$\phi_2^w(x) = Ee^{iqx} + Fe^{-iqx} \quad (48-4)$$

برای ناحیه‌ی  $x > a$  داریم

$$\frac{d^2 \phi_3^w(x)}{dx^2} + k^2 \phi_3^w(x) = 0 \quad (49-4)$$

که در آن  $k$  به صورت زیر می‌باشد

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{E^2 - m^2}{1 + \frac{2}{3}\beta(E^2 - m^2)} \quad (50-4)$$

و تابع موج برای این ناحیه به فرم

$$\phi_3^w(x) = Ge^{ikx} \quad (51-4)$$

می‌باشد. به‌طور خلاصه تابع موج در هر سه ناحیه به شکل زیر است

$$\begin{cases} \phi_1^w(x) = \left(1 - \frac{2}{3}\beta p_x^2\right) \left(e^{ikx} + De^{-ikx}\right) & x < -a \\ \phi_2^w(x) = \left(1 - \frac{2}{3}\beta p_x^2\right) \left(Ee^{iqx} + Fe^{-iqx}\right) & -a < x < a \\ \phi_3^w(x) = \left(1 - \frac{2}{3}\beta p_x^2\right) Ge^{ikx} & x > a \end{cases} \quad (52-4)$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \phi_1^w(x = -a) &= \phi_2^w(x = -a) & \phi_2^w(x = a) &= \phi_3^w(x = a) \\ \phi_1^{hw}(x = -a) &= \phi_2^{hw}(x = -a) & \phi_2^{hw}(x = a) &= \phi_3^{hw}(x = a) \end{aligned} \quad (53-4)$$

که با محاسبات جبری ساده  $D^w$  و  $G^w$  را به دست می‌آوریم

$$D^w = e^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2)(e^{2iqa} - e^{-2iqa})}{(q+k)^2 e^{-2iqa} - (q-k)^2 e^{2iqa}} \quad (54-4)$$

$$G^w = e^{-2ika} \frac{4kq}{(q+k)^2 e^{-2iqa} - (q-k)^2 e^{2iqa}} \quad (55-4)$$

شار فرودی  $J_{inc} = \frac{2\hbar k}{m+E} \left(1 - \frac{2}{3}\beta\hbar^2 k^2\right)^2$  و شار بازگشتی  $|D|^2$  و شار انتقالی  $J_{ref} = \frac{2\hbar k}{m+E} \left(1 - \frac{2}{3}\beta\hbar^2 k^2\right)^2$

را  $J_r = \frac{2\hbar k}{m+E} \left(1 - \frac{2}{3}\beta\hbar^2 k^2\right)^2 |G|^2$  محاسبه و به کمک آن‌ها ضرایب عبور و بازتاب را به دست می‌آوریم

$$R = \left| \frac{j_{ref}}{j_{inc}} \right| = \left| e^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2)(e^{2iqa} - e^{-2iqa})}{(q+k)^2 e^{-2iqa} - (q-k)^2 e^{2iqa}} \right|^2, \quad (56-4)$$

$$T = \left| \frac{j_{tr}}{j_{inc}} \right| = \left| e^{-2ika} \frac{4kq}{(q+k)^2 e^{-2iqa} - (q-k)^2 e^{2iqa}} \right|^2, \quad (57-4)$$

همان طور که می‌دانیم مجموع ضرایب عبور و بازتاب باید یک شود که در این جا یعنی در چارچوب طول کمینه باز هم به همین نتیجه رسیدیم.

#### ۴-۲-۴ پله پتانسیل

پله‌ی پتانسیل ساختاری به فرم زیر دارد [۱۲]

$$U_0(x) = V(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ v_0 & x > a \end{cases} \quad (58-4)$$

معادله‌ی مربوط به ناحیه‌ی  $x < a$

$$\frac{d^2 \varphi_1^s(x)}{dx^2} + k^2 \varphi_1^s(x) = 0 \quad (59-4)$$

که در آن

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(E^2 - m^2)}{1 + \frac{2}{3} \beta (E^2 - m^2)}} \quad (60-4)$$

و تابع موج برای این ناحیه به شکل زیر می‌باشد

$$\varphi_1^s(x) = e^{ikx} + C e^{-ikx} \quad (61-4)$$

و برای ناحیه‌ی  $a < x$  معادله‌ی (۴۰-۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 \phi_2^s(x)}{dx^2} + q^2 \phi_2^s(x) = 0 \quad (62-4)$$

با

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(E^2 - m^2) - 2V_0(E + m)}{1 - \frac{2}{3}\beta[2V_0(E + m) - (E^2 - m^2)]}} \quad (63-4)$$

آنگاه جواب این معادله‌ی به صورت زیر است

$$\phi_2^s(x) = A e^{iqx} + B e^{-iqx} \quad (64-4)$$

به منظور حفظ فیزیک تابع موج، B در رابطه (۶۴-۴) برابر صفر و نهایتاً تابع موج برای این ناحیه به شکل زیر خواهد بود

$$\phi_2^s(x) = A e^{iqx} \quad (65-4)$$

بنابراین،

$$\begin{cases} \phi_1^s(x) = \left(1 - \frac{2}{3}\beta p^2\right) (e^{ikx} + C e^{-ikx}) & x < a \\ \phi_2^s(x) = \left(1 - \frac{2}{3}\beta p^2\right) A e^{iqx} & x > a \end{cases} \quad (66-4)$$

و طبق شرایط مرزی زیر به سادگی می‌توان ضرایب ثابت C و A را به دست آورد و آنگاه شار فرودی و بازتابی و انتقالی را محاسبه و در نهایت به کمک آن‌ها، ضرایب عبور و بازتاب را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \phi_1^s(x=0) = \phi_2^s(x=0) \\ \phi_1^{s'}(x=0) = \phi_2^{s'}(x=0) \end{cases} \quad (67-4)$$

با استفاده از شرایط مرزی بالا خواهیم داشت

$$C = \frac{k - q}{k + q}, \quad (68a-4)$$

$$A = \frac{2k}{k+q} \left( \frac{1 - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 k^2}{1 - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 q^2} \right)^2 \quad (68b-4)$$

که شار فرودی، بازتابی و انتقالی در این مورد به ترتیب عبارتند از

$$J_{inc} = \frac{2\hbar k}{m+E} \left( 1 - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 k^2 \right)^2 \quad (69-a-4)$$

$$J_{ref} = \frac{2\hbar k}{m+E} \left( 1 - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 k^2 \right)^2 |C|^2, \quad (69-b-4)$$

$$J_{tr} = \frac{2\hbar q}{m+E} \left( 1 - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 q^2 \right)^2 |A|^2. \quad (69-c-4)$$

نهایتاً در سمت چپ ( $x < 0$ )،  $J_I = J_{inc} - J_{ref}$  و در سمت راست ( $x > 0$ )،  $J_{II} = J_{trans}$  می‌باشد. با استفاده

از شرایط پیوستگی در چگالی جریان، ضرایب عبور و بازتاب به شکل زیر خواهند بود.

$$R^s = \frac{J_{ref}}{J_{inc}} = \left| \frac{k-q}{k+q} \right|^2, \quad T^s = \frac{J_{trans}}{J_{inc}} = \frac{4kq}{(k+q)^2} \quad (70-4)$$

که وقتی ضریب بازتاب صفر باشد، آنگاه بیشینه انتقال را خواهیم داشت. که همان اثر رامسائر-تاونسند می‌باشد.

#### ۴-۲-۵ جعبه نامتناهی

اصطلاح جعبه بی نهایت مربوط به پتانسیل زیر می‌باشد [۲۵]

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases} \quad (71-4)$$

معادله دیفرانسیل حاکم برای این مورد به شکل زیر خواهد بود

$$\frac{d^2 \phi^b(x)}{dx^2} + k'^2 \phi^b(x) = 0 \quad (72-4)$$

که در آن

$$k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{(E^2 - m^2)}{1 + \frac{2}{3} \beta (E^2 - m^2)} \quad (73-4)$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\phi^b(x) = A \sin k'x + B \cos k'x \quad (74-4)$$

با استفاده از شرایط مرزی در  $x=0$  و  $x=a$ ، بسادگی  $B$  برابر صفر و  $k' = \frac{n\pi}{a}$  خواهد شد. و با توجه به شرط

بهنجارش  $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$  می‌شود. نهایتاً تابع موج تعمیم یافته به شکل زیر می‌باشد

$$\phi^b(x) = \left(1 - \frac{2}{3} \beta p_x^2\right) A \sin k'x \quad (75-4)$$

و با جای‌گذاری  $\phi^b(x)$  در رابطه (۴-۳۴b) خواهیم داشت

$$\chi^b(x) = -\sqrt{\frac{2}{a}} \frac{i \hbar k' \sigma_x}{m + E} \left(1 - \frac{2}{3} \beta p_x^2\right) \cos k'x \quad (76-4)$$

نهایتاً

$$\psi^b(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(1 - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 k'^2\right) \begin{pmatrix} \sin k'x \\ -\frac{i \hbar k' \sigma_x}{m + E} \cos k'x \end{pmatrix} \quad (77-4)$$

ویژه مقادیر انرژی در این مورد به فرم زیر است



$$E^2 - m^2 = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{2}{3}\beta\lambda\right)} ; \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad (78-4)$$

#### ۳-۴ اتم هیدروژن نسبیتی در حضور طول کمینه

در این جا نشان می‌دهیم که بخش نسبیتی در انرژی حالت پایه اتم هیدروژن از حضور یک طول کمینه معرفی شده بوسیله یک جبر هموردایی لورنتس بیشتر از بخش غیر نسبیتی است و روش غیر نسبیتی مناسب نیست. طول کمینه در مقیاس طول پلانک می‌باشد که مقدار آن

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1.6 \times 10^{-35} m \quad (79-4)$$

#### ۱-۳-۴ معادله‌ی دیراک تعمیم یافته برای اتم هیدروژن در حضور طول کمینه

در این بخش از جبر تعمیم یافته هموردایی لورنتس در تعمیم معادله‌ی دیراک با پتانسیل مرکزی به منظور بررسی اتم هیدروژن در یک طول کمینه استفاده می‌کنیم. [۷.۲۷]

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\mu] = -i\hbar \left[ (1 - \beta \hat{P}_\rho \hat{P}^\rho) g^{\mu\nu} - 2\beta \hat{P}^\mu \hat{P}^\nu \right], \quad (80-4)$$

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\mu] = 0 \quad (81-4)$$

$$[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\mu] = 0 \quad (82-4)$$

روابط جابجایی بالا منجر به یک کمینه طول  $\Delta X_i^{\min} = \hbar\sqrt{5\beta}$  می‌شود. عملگرهای  $\hat{X}^\mu$  و  $\hat{P}^\mu$  را که روابط جابجایی بالا را برآورده می‌کنند، به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\hat{X}^\mu = \hat{x}^\mu, \quad (83-4)$$

$$\hat{P}^\mu = (1 - \beta \hat{p}_\rho \hat{p}^\rho) \hat{p}^\mu, \quad (84-4)$$

که  $\hat{p}^i \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i=1,2,3$ ) و  $\hat{p}^0 \equiv i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  به ترتیب عملگرهای مکان، تکانه و انرژی (درغیاب  $c$ )

در مکانیک کوانتوم معمول هستند. که

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0 \quad (85-4)$$

$$[\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0 \quad (86-4)$$

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = -i\hbar g^{ij} \quad (87-4)$$

معادله‌ی دیراک با پتانسیل مرکزی الکترواستاتیکی پروتون در مکانیک کوانتوم معمول به صورت زیر است

$$\left[ -c\gamma^0\gamma^\mu\hat{P}_\mu + \gamma^0mc^2 - \frac{\hbar c\alpha}{r} \right] |\psi(t)\rangle = 0 \quad (88-4)$$

که  $\alpha$  ثابت ساختار ریز و  $\gamma^\mu \equiv (\hat{\beta}, \hat{\beta}\vec{\alpha})$  است، با

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (89-4)$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (90-4)$$

و  $\vec{\sigma}$  ماتریس های پائولی می باشد. با جای گذاری رابطه‌ی (۴-۸۴) در رابطه‌ی (۴-۸۸) خواهیم داشت

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + c(\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) + \hat{\beta}mc^2 - \frac{\hbar c\alpha}{r} \right] |\psi^{ML}(t)\rangle$$

$$- \beta \left[ \frac{i\hbar^3}{c^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + i\hbar (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{c} (\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c(\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^3 \right] |\psi^{ML}(t)\rangle = 0 \quad (91-4)$$

که  $\langle \psi_\xi^{ML}(t) | \psi_\xi^{ML}(t) \rangle = \psi^{ML}(\xi, t)$  حالت های شبه مکان هستند.

### ۴-۳-۲ انرژی حالت پایه اتم هیدروژن

به منظور مشخص کردن زمان در معادله‌ی (۴-۹۱)، آنزاتس زیر را امتحان می‌کنیم

$$|\psi^{ML}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t} |\varphi^{ML}\rangle, \quad (92-4)$$

که در آن  $\varepsilon$  تحول زمانی حالت همدوس  $|\psi^{ML}(t)\rangle$  را توصیف می‌کند. با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴-۹۲) در رابطه‌ی (۴-۹۱) و صرف‌نظر کردن از  $O(\beta^2)$  خواهیم داشت:

$$\left[ -\varepsilon + c(\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) + \hat{\beta} m c^2 - \frac{\hbar c \alpha}{r} \right] |\varphi^{ML}\rangle + \beta m^2 c^2 \left[ \frac{1}{m^2 c} (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^3 - \frac{\varepsilon}{m^2 c^2} (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^2 - \frac{\varepsilon^3}{m^2 c^3} (\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) + \frac{\varepsilon^3}{m^2 c^4} \right] |\varphi^{ML}\rangle = 0 \quad (93-4)$$

مشاهده می‌کنیم که در  $\beta \rightarrow 0$ ، همان انرژی معمولی  $E$  اتم هیدروژن می‌باشد. بنابراین اگر فرض کنیم که مقیاس جرمی طول کمینه  $M_{ML}$  خیلی بزرگ باشد به‌طوری که جرم الکترون خیلی کوچکتر از آن باشد (،

$$\beta = \frac{c^2}{M_{ML}^2 c^4} \ll 1 \quad \text{همچنین} \quad \beta m^2 c^2 = \frac{m^2}{M_{ML}^2} \ll 1, \quad \text{سپس می‌توانیم ترم دوم معادله‌ی (۴-۹۳) را به عنوان}$$

اختلال در نظر بگیریم. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\varepsilon = E^{ML} = E + \beta m^2 c^2 E^1 + O(\beta^2), \quad (94-4)$$

و

$$|\varphi^{ML}\rangle = |\varphi\rangle + \beta m^2 c^2 |\varphi^1\rangle + O(\beta^2), \quad (95-4)$$

که  $E$  انرژی حالت  $|\varphi\rangle$  به دست آمده اتم هیدروژن از معادله‌ی دیراک معمولی است. با جای‌گذاری روابط (۴-۹۴)

و (۴-۹۵) در رابطه‌ی (۴-۹۳) و صرف‌نظر کردن از ترم‌های شامل مرتبه  $O(\beta^2)$  خواهیم داشت

$$E^{ML} = E + \beta \langle \varphi | \left[ c (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^3 - E (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^2 - \frac{E^2}{c} (\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) + \frac{E^3}{c^2} \right] | \varphi \rangle. \quad (96-4)$$

محاسبه عبارت بالا در حالت کلی بسیار دشوار خواهد بود اما برای حالت پایه به آسانی انجام می‌شود. از معادله‌ی (۹۶-۴) داریم:

$$E_0^{ML} = E_0 + \beta \left[ c \langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^3 | \varphi_0 \rangle - E_0 \langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^2 | \varphi_0 \rangle - \frac{E_0^2}{c} \langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) | \varphi_0 \rangle + \frac{E_0^3}{c^2} \right]. \quad (97-4)$$

که  $E_0 = mc^2 \sqrt{1 - \alpha^2}$  انرژی حالت پایه اتم هیدروژن است،  $|\varphi_0\rangle$ ، از معادله‌ی دیراک معمولی به دست می‌آید. بدین‌وسیله نیاز به محاسبه عبارات زیر داریم

$$\langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) | \varphi_0 \rangle = \int (\phi_0^\dagger, \chi_0^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{P} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{P} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} d^3 \vec{x}, \quad (98-4)$$

$$\langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^2 | \varphi_0 \rangle = \int (\phi_0^\dagger, \chi_0^\dagger) \begin{pmatrix} (\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^2 & 0 \\ 0 & (\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} d^3 \vec{x}, \quad (99-4)$$

$$\langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^3 | \varphi_0 \rangle = \int (\phi_0^\dagger, \chi_0^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^3 \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} d^3 \vec{x}, \quad (100-4)$$

ویژه اسپینورهای مرکب دوتایی حالت پایه،  $\phi_0$ ،  $\chi_0$  به صورت زیر داده می‌شوند

$$\langle x | \varphi_0 \rangle = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r) Y_{0,0}^{1/2,m}(\theta, \phi) \\ -f(r) Y_{1,0}^{1/2,m}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (101-4)$$

که در آن

$$F(r) = a_0 b r^\gamma e^{-ar}, \quad (102-4)$$

$$f(r) = b_0 b r^\gamma e^{-ar}, \quad (103-4)$$

با

$$\gamma = \varepsilon - 1, \quad (104-4)$$

$$a = \left( \frac{mc}{\hbar} \right) \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad (105-4)$$

$$b = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^\gamma, \quad (106-4)$$

$$a_0 = \left( \frac{2a}{b} \right)^{\gamma+1} \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{\Gamma(2\gamma+3)}}, \quad (107-4)$$

$$b_0 = \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}} a_0, \quad (108-4)$$

$$\varepsilon = \frac{E_0}{mc^2}, \quad (109-4)$$

و  $Y_{j\pm 1/2}^{j,m}(\theta, \phi)$  ویژه اسپینورهای رایج تابع  $\hat{j}_z$  و  $\hat{j}^2$  هستند.

داریم :

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{P} = \vec{\sigma} \vec{e}_r \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{L}}{r} \right), \quad (110-4)$$

با

$$\vec{\sigma} \vec{e}_r Y_{j\pm 1/2}^{j,m} = -Y_{j\pm 1/2}^{j,m}, \quad (111-4)$$

به منظور دریافت

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{P}) \phi_0 = i\hbar \frac{dF}{dr} Y_1^{1/2,m}, \quad (112-4)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{P}) \chi_0 = \left( \hbar \frac{df}{dr} + 2\hbar \frac{f}{r} \right) Y_0^{1/2,m}, \quad (113-4)$$

9

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^2 \phi_0 = -\hbar^2 \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) Y_0^{1/2,m}, \quad (114-4)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^2 \chi_0 = i\hbar^2 \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - 2 \frac{f}{r^2} \right) Y_1^{1/2,m}, \quad (115-4)$$

9

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^3 \phi_0 = -i\hbar^2 \left( \frac{d^3 F}{dr^3} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dr} \right) Y_1^{1/2,m}, \quad (116-4)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{P})^3 \chi_0 = -\hbar^3 \left( \frac{d^3 f}{dr^3} + 4 \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \right) Y_0^{1/2,m}, \quad (117-4)$$

بعد از کمی محاسبات به روابط زیر می‌رسیم

$$\langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) | \varphi_0 \rangle = \frac{mc}{\varepsilon} (1 - \varepsilon^2), \quad (118-4)$$

$$\langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^2 | \varphi_0 \rangle = m^2 c^2 \frac{(2 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(2\varepsilon - 1)}, \quad (119-4)$$

9

$$\langle \varphi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{P})^3 | \varphi_0 \rangle = m^3 c^3 \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\varepsilon(2\varepsilon - 1)}. \quad (120-4)$$

با کمی محاسبات جبری رابطه‌ی (۹۷-۴) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$E_0^{ML} = mc^2 \varepsilon + \beta m^2 c^4 \left( \frac{1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5}{2\varepsilon^2 - \varepsilon} \right). \quad (121-4)$$

جالب است که  $E_0^{ML}$  را بر حسب ثابت ساختار ریز بسط داد. بعد از کمی محاسبات می‌رسیم به

$$E_0^{ML} \approx mc^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{8} \right) + \beta m^2 c^4 \left( 1 - \frac{7\alpha^2}{2} + \frac{3\alpha^4}{8} \right). \quad (122-4)$$

نهایتا خواهیم داشت

$$\Delta E_0^{ML} = E_0^{ML} - mc^2 - \beta m^3 c^4, \quad (123-4)$$

$$\Delta E_0^{ML} \approx -mc^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{8} \right) - \beta m^3 c^4 \left( \frac{7\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^4}{8} \right). \quad (124-4)$$





## فصل پنجم

سیستم‌های مرکب در فضای تعمیم یافته با طول کمینه

برای سیستم مرکب از  $N$  ذره متفاوت موجود در یک فضای مشخص شده توسط جبر تعمیم یافته یکسانی اما با پارامترهای تعمیم یافته متفاوت، تکانه کل و مکان مرکز جرم از مرتبه اول پارامترهای تعمیم یافته را به دست می‌آوریم. چنین عملگرهایی در جبری تعمیم یافته با پارامترهای تعمیم یافته موثر جدیدی برقرار هستند. به عنوان یک نتیجه، یک سیستم دو ذره‌ای می‌تواند به یک مسئله تک ذره‌ای برای حرکت درونی تبدیل شود. به عنوان مثال تصحیح سطوح انرژی  $\Pi$  ام اتم هیدروژن دوباره سنجیده می‌شود. مقایسه با داده تجربی با دقت بالا منجر به یک قید بالای طول کمینه برای الکترون معادل  $3.3 \times 10^{-18} m$  می‌شود. همچنین توصیف اثر هامیلتونی حرکت مرکز جرم یک جسم ماکروسکوپی در یک پتانسیل خارجی بررسی می‌شود.

یکی از پیش‌بینی‌های مهم بررسی در نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی وجود یک طول کمینه از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته است [۵].

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (1-5)$$

که معادل وجود یک کمینه طول  $\Delta X_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}$  از مرتبه طول پلانک می‌باشد. برای مثال در یک بعد اصل عدم قطعیت تعمیم یافته می‌تواند از جبر هایزنبرگ تعمیم یافته با یک تصحیح درجه دو کوچک در تکانه منتج شود.

$$[X, P] = i \hbar (1 + \beta P^2). \quad (2-5)$$

یک نمایش ممکن از این جبر به صورت زیر می‌باشد

$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} p), \quad X = x, \quad (3-5)$$

که  $X$  و  $P$  عملگرهای مکان و تکانه هستند. برای مرتبه اول از  $\beta$  این نمایش را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$P = \left( 1 + \frac{1}{3} \beta p^2 \right) p, \quad X = x. \quad (4-5)$$

در سه بعد، یک تعمیم از جبر تغییر یافته (۲-۵) به صورت زیر است [۱۱]

$$[X^\mu, P^\nu] = i\hbar[\delta^{\mu,\nu}(1 + \beta P^2) + \beta' P^\mu P^\nu], \quad [P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (5-5)$$

$$[X^\mu, X^\nu] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu) \quad (6-5)$$

که  $(\mu, \nu = 1, 2, 3 \text{ (or } x, y, z))$  و  $\beta, \beta' \geq 0$  هستند. حال کمینه طول به شکل  $\Delta X_{\min} = \hbar\sqrt{\beta + \beta'}$  است. در این جا حالت خاص  $\beta' = 2\beta$  مورد بررسی قرار می گیرد. بنابراین جبر هایزنبرگ تعمیم یافته به شکل زیر خواهد بود

$$[X^\mu, P^\nu] = i\hbar[\delta^{\mu,\nu}(1 + \beta P^2) + 2\beta P^\mu P^\nu], \quad [P^\mu, P^\nu] = [X^\mu, X^\nu] = 0 \quad (7-5)$$

کمینه طول که نتیجه ای از روابط جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه است اما بین عملگرهای مکان مختلف نیست، هنوز غیر صفر می باشد. برای مثال می توان با بررسی جابجایی  $X^1$  با  $P^1$  این موضوع را فهمید. از رابطه ی (۷-۵) خواهیم داشت

$$[X^1, P^1] = i\hbar \left\{ 1 + 3\beta(P^1)^2 + \beta[(P^2)^2 + (P^3)^2] \right\}. \quad (8-5)$$

بنابراین رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت

$$\begin{aligned} \Delta X^1 \Delta P^1 &\geq \frac{\hbar}{2} \left\{ 1 + 3\beta \langle (P^1)^2 \rangle + \beta \left[ \langle (P^2)^2 \rangle + \langle (P^3)^2 \rangle \right] \right\} \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left\{ 1 + 3\beta \langle (P^1)^2 \rangle \right\} \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left[ 1 + 3\beta (\Delta P^1)^2 \right], \end{aligned} \quad (9-5)$$

بیان می شود و

$$\Delta X^1 \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P^1} + 3\beta \Delta P^1 \right), \quad (10-5)$$

که با مقایسه با رابطه‌ی (۵-۱) بطور مستقیم منجر به کمینه طول  $\Delta X_{\min} = \hbar\sqrt{3\beta}$  می‌شود. خواص یک جبر، مستقل از نمایش بررسی شده می‌باشد. از یک روش ساده استفاده می‌کنیم که برای رابطه (۵-۷) خواهیم داشت

$$P^\mu = (1 + \beta p^2) p^\mu, \quad X^\mu = x^\mu, \quad (11-5)$$

عملگرهای مکان و تکانه در روابط جابجایی زیر صدق می‌کنند

$$[x^\mu, p^\mu] = i\hbar\delta^{\mu,\nu}, \quad [p^\mu, p^\nu] = [x^\mu, x^\nu] = 0. \quad (12-5)$$

در یک تقریب مشابه، تبدیل معکوس به صورت زیر است:

$$p^\mu = (1 - \beta P^2) P^\mu, \quad x^\mu = X^\mu. \quad (13-5)$$

لازم به ذکر است که رابطه‌ی (۵-۱۱) تعمیم به سه بعد رابطه‌ی (۵-۴) یک بعدی می‌باشد.

## ۵-۱ مطالعه سیستم‌های دو ذره‌ای در فضای تعمیم یافته

فرض می‌کنیم که هامیلتونی در فضای تعمیم یافته شکل مشابهی با هامیلتونی در فضای غیر تعمیمی دارد. به این معنی که در غیاب پتانسیل خارجی می‌توان نوشت [۵]:

$$H_2 = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + V(|X_1 - X_2|), \quad (14-5)$$

که  $V(|X_1 - X_2|)$  انرژی پتانسیل برهم‌کنش دو ذره می‌باشد. بطور کلی ذرات متفاوت به جرم‌های  $m_i$  با پارامتر متفاوتی اما با جبر یکسانی تعمیم می‌یابند. به بیان دقیق‌تر عملگرهای  $X_1^\mu$  و  $P_1^\mu$  با پارامتر تعمیم یافته  $\beta_1$  در جبر تعمیم یافته صدق می‌کنند و بر عملگرهای  $X_2^\mu$  و  $P_2^\mu$  همان جبر حاکم است اما با پارامتر متفاوتی مانند  $\beta_2$ . همچنین طبیعی است که فرض کنیم عملگرهای مربوط به ذرات متفاوت با هم جابجاپذیر هستند.

در این جا به دنبال معرفی تکانه کل و مرکز جرم سیستم دو ذره‌ای هستیم. به این منظور، تکانه‌ی کل را در فضای تعمیم یافته به عنوان یک حرکت پیوسته و سپس مرکز جرم را به عنوان متغیر همیوگ آن معرفی می‌کنیم. برای چنین کاری، هامیلتونی (۵-۱۴) در فضای غیر تعمیم یافته را با استفاده از نمایش (۵-۱۱) بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$H_2 = \frac{P_1^2}{2m_1}(1+2\beta_1 p_1^2) + \frac{P_2^2}{2m_2}(1+2\beta_2 p_2^2) + V(|X_1 - X_2|), \quad (15-5)$$

که فقط انرژی جنبشی، تعمیم یافته شده است. به آسانی می‌توان جابجایی  $P_1 + P_2$  را با  $H_2$  پیدا کرد و مشاهده کرد که یک حرکت پیوسته وجود دارد که می‌توانیم آن را به تکانه‌ی کل در فضای غیر تعمیم یافته ربط می‌دهیم. در چنین فضایی عملگر همیوگ مکان مرکز جرم  $x_0$  است. همچنین می‌توان عملگرهای  $x$  و  $P$  را با توصیف حرکت نسبی معرفی کرد:

$$x_0 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad P_0 = P_1 + P_2 \quad (16-5)$$

$$x = x_1 - x_2, \quad P = \mu_2 P_1 - \mu_1 P_2, \quad (17-5)$$

جفت‌های  $(x, P)$  و  $(x_0, P_0)$  جبر هایزنبرگ کانونی صدق می‌کنند. در (۵-۱۶) و (۵-۱۷)،

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{و} \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

تعریف می‌کنیم. تبدیل معکوس (۵-۱۶) و (۵-۱۷) را به صورت

زیر می‌نویسیم

$$x_1 = x_0 + \mu_2 x, \quad P_1 = \mu_1 P_0 + P, \quad (18-5)$$

$$x_2 = x_0 - \mu_1 x, \quad P_2 = \mu_2 P_0 - P, \quad (19-5)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۸-۵) و (۱۹-۵) در عملگر انرژی جنبشی دو ذره در جمله‌های اول و دوم (۱۵-۵) به روابط زیر می‌رسیم

$$T_2 = T_0 + T + \Delta T \quad (20-5)$$

که

$$T_0 = \frac{p_0^2}{2m} \left[ 1 + 2(\beta_1 \mu_1^3 + \beta_2 \mu_2^3) p_0^2 \right], \quad (21-5)$$

$$T = \frac{p^2}{2\mu} \left[ 1 + 2(\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2) p^2 \right], \quad (22-5)$$

$$\Delta T = \frac{1}{m} \left\{ (\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2) \left[ 4(P_0 \cdot P)^2 + 2p_0^2 p^2 \right] + 4(\beta_1 \mu_1^2 - \beta_2 \mu_2^2) p_0^2 (P_0 \cdot P) + 4(\beta_1 - \beta_2) p^2 (P_0 \cdot P) \right\}, \quad (23-5)$$

که  $m = m_1 + m_2$  جرم کل و  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m_1 \mu_2 = m_2 \mu_1$  جرم کاهشیده است.  $T_0$  و  $T$  در  $T_2$  فقط به تکانه‌ی کل و تکانه‌ی نسبی (غیر تعمیم یافته) وابسته است و می‌توان آن را به عنوان انرژی جنبشی مرکز جرم و حرکت نسبی بررسی نمود. با مقایسه با رخدادهای فضای غیر تعمیم یافته،  $T_2$  شامل یک جمله اضافه  $\Delta T$  متناسب با پارامترهای تعمیم یافته و تاثیر حرکت نسبی روی مرکز جرم یا برعکس، می‌باشد.

با مقایسه رابطه‌ی (۲۱-۵) با جمله‌های اول و دوم در رابطه‌ی (۱۵-۵)، می‌بینیم که  $T_0$  شکل یک عملگر انرژی جنبشی در فضای تعمیم یافته با یک پارامتر تعمیم یافته جدید را دارد

$$\tilde{\beta}_0 = (\beta_1 \mu_1^3 + \beta_2 \mu_2^3). \quad (24-5)$$

آنگاه تکانه‌ی کل در فضای تعمیم یافته با این پارامتر جدید به صورت زیر است

$$P_0^\mu = (1 + \tilde{\beta}_0 p_0^2) p_0^\mu, \quad (25-5)$$

در رابطه‌ی (۱۱-۵) داشتیم

$$T_0 = \frac{P_0^2}{2m}. \quad (26-5)$$

جمله‌ی دوم رابطه (۲۰-۵) را می‌توان مطابق زیر بازنویسی کرد

$$T = \frac{p^2}{2\mu}, \quad P^\mu = (1 + \tilde{\beta} p^2) p^\mu, \quad (27-5)$$

که  $\tilde{\beta}$  پارامتر تعمیم یافته برای حرکت نسبی عبارت است از

$$\tilde{\beta} = (\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2) \quad (28-5)$$

و مشخص است که با پارامتر تعمیم حرکت مرکز جرم (۲۴-۵) متفاوت است. از آنجایی که جمله‌ی سوم  $\Delta T$  در (۲۰-۵) متناسب با مرتبه پایین  $\beta_1$  و  $\beta_2$  می‌باشد. به عنوان یک نتیجه، عملگر انرژی جنبشی کل  $T_2$  در ترم‌هایی از تکانه‌های نسبی و کل  $P_0$  و  $P$  نمایش داده خواهد شد. برای  $P_0$  و  $P$  می‌توان عملگرهای مکان زیر را به ترتیب مربوط داد

$$X_0 = x_0 \quad X = x, \quad (29-5)$$

عملگرهای برای حرکت مرکز جرم (حرکت نسبی)،  $(X^\mu, P^\mu)$   $X_0^\mu, P_0^\mu$ ، معادله‌ی (۷-۵) را با جای‌گذاری  $\beta$  با  $\tilde{\beta}$  ( $\tilde{\beta}$ ) برآورده می‌کند، اگرچه  $X_0^\mu, P_0^\mu$  با  $X^\mu, P^\mu$  جابجا پذیرند. حال، هامیلتونی (۱۵-۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$H_2 = \frac{P_0^2}{2m} + \frac{P^2}{2\mu} + \Delta T + V(|X|), \quad (30-5)$$

تکانه کل  $P_0$  با این هامیلتونی جابجا می‌شود. خوب است بدانیم که، هامیلتونی ممکن است یک بخش اضافی از تعدادی میدان خارجی داشته باشد. در موردی که پتانسیل خارجی به آهستگی در فاصله‌هایی از مرتبه‌ی اندازه سیستم تغییر می‌کند، ممکن است فرض کنیم که پتانسیل خارجی فقط وابستگی به  $X_0$  دارد، بطوری‌که هامیلتونی کل به شکل زیر خواهد بود

$$H_2 = \frac{P_0^2}{2m} + \frac{P^2}{2\mu} + \Delta T + V(|X|) + V_{ext}(|X_0|), \quad (31-5)$$

### ۵-۱-۱ اثر طول کمینه روی طیف انرژی اتم هیدروژن

اتم هیدروژن ممکن است به عنوان یک سیستم دو ذره‌ای بررسی شود، که ذره ۱ پروتون و ذره ۲ الکترون می‌باشد. در این مورد  $m_1 = m_p, \beta_1 = \beta_p, m_2 = m_e, \beta_2 = \beta_e$  می‌باشد. در غیاب میدان خارجی، هامیلتونی اتم هیدروژن به شکل زیر خواهد بود [۷]:

$$H_2 = \frac{P_0^2}{2m} + \frac{P^2}{2\mu} + \Delta T - \frac{e^2}{|X|} \quad (32-5)$$

مسئله‌ی ویژه مقداری برای  $H_2$  معادل است با

$$H_a \psi = E' \psi, \quad E' = E - \frac{P_0^2}{2m}, \quad (33-5)$$

که هامیلتونی اتم هیدروژن در فضای تعمیم یافته به صورت

$$H_a = \frac{P^2}{2\mu} + \Delta T - \frac{e^2}{|X|} \quad (34-5)$$

و شامل یک ترم  $\Delta T$  وابسته به مقدار تکانه کل می‌باشد. مرتبه اول پارامترهای تعمیم یافته  $H_a$  را می‌توان در فضای کانونی (غیر تعمیمی) به صورت زیر بازنویسی کرد

$$H_a = \frac{P^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|X|} + \tilde{\beta} \frac{P^4}{\mu} + \Delta T \quad (35-5)$$

مقدار تصحیح  $\tilde{\beta}(P^4/\mu) + \Delta T$  است و می‌تواند به آسانی با اختلال مرتبه اول محاسبه شود و منجر به تصحیح اضافی شود



$$\Delta E_n = \Delta E_{n,1} + \Delta E_{n,2}, \quad (36-5)$$

که

$$\Delta E_{n,1} = \langle n, 0, 0 | \tilde{\beta} \frac{P^4}{\mu} | n, 0, 0 \rangle = 2\tilde{\beta} \frac{8n-3}{n^2} \frac{\hbar^2}{a^2} |E_n^0| = 2\tilde{\beta} (\mu c)^2 \alpha^2 \frac{8n-3}{n^2} |E_n^0|, \quad (37-5)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,2} &= \langle n, 0, 0 | \Delta T | n, 0, 0 \rangle = \frac{20}{3} (\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2) \frac{\mu}{m} p_0^2 |E_n^0| \\ &= \frac{20}{3} (\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2) \frac{\mu}{m} (\mu c)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 |E_n^0|. \end{aligned} \quad (38-5)$$

که  $\alpha = \hbar^2 / \mu c^2$  شعاع بوهر،  $\alpha = e^2 / \hbar c \approx \frac{1}{137}$  ثابت ساختار ریز،  $p_0 = mv$  که  $v$  سرعت اتم هیدروژن، و

$$E_n^0 = -e^2 / (2\alpha n^2)$$

انرژی مختل نشده می‌باشد. با در نظر گرفتن  $m_e / m_p \approx 1/1840$  می‌رسیم به

$$\mu_1 \approx 1, \quad \mu_2 \approx 1/1840, \quad \mu \approx m_e. \quad (39-5)$$

از طرف دیگر، بدیهی است که پارامتر تعمیم یافته برای ذرات بنیادی، مانند الکترون و کوارک‌ها، تقریباً یکسان-اند، یعنی  $\beta_e \approx \beta_q$ . چون پروتون از سه کوارک درست شده، پارامتر تعمیم یافته برای پروتون متناسب است با

$$\beta_p = \frac{\beta_q}{3^2} \approx \frac{\beta_e}{3^2}, \quad (40-5)$$

فرض می‌کنیم که اثر جرمی کوارک‌ها در پروتون یکسان هستند. سپس برای اتم هیدروژن، اثر پارامترهای تعمیم یافته برای مرکز جرم و حرکت نسبی به ترتیب در معادلات (۲۴-۵) و (۲۸-۵) داده شده، به صورت زیر خواهند بود

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_p + \beta_e \left(\frac{1}{1840}\right)^3 \approx \beta_p, \quad (41-5)$$

و

$$\tilde{\beta} \approx \beta_p \frac{1}{1840} + \beta_e \approx \beta_e. \quad (42-5)$$

به طور مشابه، ضریب حاوی پارامترهای تعمیم یافته در رابطه‌ی (۳۸-۵) تبدیل می‌شود به

$$\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 \approx \beta_p + \beta_e \frac{1}{1840} \approx \beta_p. \quad (43-5)$$

نتیجه می‌گیریم که برای اتم هیدروژن، پارامتر تعمیم یافته برای حرکت مرکز جرم توسط پروتون و برای حرکت نسبی توسط الکترون مشخص می‌شود. بنابراین دو تصحیح  $\Delta E_{n,1}$  و  $\Delta E_{n,2}$  برای طیف انرژی مبدا متفاوت دارند. حال، سهم این دو ترم از طیف انرژی را مقایسه می‌کنیم. برای این کار، نسبت زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\Delta E_{n,2}}{\Delta E_{n,1}} = \frac{10}{3} \frac{n^2}{8n-3} \frac{\beta_p}{\beta_e} \frac{m_p}{m_e} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^7 \frac{n^2}{8n-3} \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (44-5)$$

برای تراز پایه، سهم یکسان دارند، یعنی  $\frac{\Delta E_{1,2}}{\Delta E_{1,1}} = 1$ ، وقتی سرعت اتم هیدروژن  $2 \times 10^5 \text{ m/s}$  باشد، این

تخمین باقی مانده از مرتبه یکسانی برای اولین تراز برانگیخته است. چنین سرعتی مربوط به یک دمای بالای نسبی، یعنی  $T = 1.6 \times 10^6 \text{ K}$  می‌باشد.

حال تصحیح  $\Delta_{12} = \Delta E_2 - \Delta E_1 = \Delta E_{2,1} - \Delta E_{1,1}$  را برای انرژی  $E_{12}^0 = E_2^0 = E_1^0$  از گذار 1s-2s مشخص می‌کنیم. از رابطه‌ی (۳۷-۵) می‌رسیم به

$$\frac{\Delta_{12}}{E_{12}^0} = -\frac{67}{6} \frac{\hbar^2 \beta_e}{\alpha^2}. \quad (45-5)$$

با فرض این که اثر طول کمینه روی طیف هیدروژن نمی‌تواند بطور تجربی فهمیده شود، بنابراین

$$\left| \frac{\Delta_{12}}{E_{12}^0} \right| < 1.4 \times 10^{-14}. \quad (46-5)$$

این منجر به قید بالایی از پارامتر تعمیم یافته برای الکترون به شکل زیر می‌شود

$$\hbar\sqrt{\beta_e} \leq 1.9 \times 10^{-18} m, \quad (47-5)$$

قید بالا از طول کمینه در فضای تعمیم یافته که در آن الکترون‌ها وجود دارند به شرح زیر می‌باشد:

$$\Delta X_{\min}^e = \hbar\sqrt{3\beta_e} \leq 3.3 \times 10^{-18} m, \quad (48-5)$$

## ۵-۲ مسئله N جسمی در فضای تعمیم یافته

هدف این بخش، معرفی درجات آزادی درونی و بیرونی N ذره در فضای تعمیم یافته می‌باشد. دوباره فرض می‌کنیم که هامیلتونی N ذره در فضای تعمیم یافته شکل مشابهی با هامیلتونی در فضای تعمیم نیافته دارد. در غیاب پتانسیل خارجی داریم [۱۸]

$$H_N = \sum_i \frac{P_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V(|X_i - X_j|), \quad (49-5)$$

که i و j از 1, 2, ..., N می‌باشند، عملگرهای مکان و تکانه‌ی  $X_i^\mu, P_i^\mu$  روابط جابجایی (۷-۵) را با پارامتر تعمیم یافته یکسان  $\beta_i$  برآورده می‌کنند، و عملگرهای مربوط به ذرات متفاوت با هم دیگر جابجا می‌شوند. طبق رابطه‌ی (۵-۱۱)، این عملگرها را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$P_i^\mu = (1 + \beta p_i^2) p_i^\mu, \quad X_i^\mu = x_i^\mu, \quad (50-5)$$

در فضای تعمیم نیافته، می‌توان درجات آزادی درونی و بیرونی را به ترتیب به صورت زیر معرفی کرد

$$P_0 = \sum_i P_i, \quad x_0 = \sum_i \mu_i x_i \quad (51-5)$$

$$\Delta P_i = P_i - \mu_i P_0, \quad \Delta X_i = x_i - x_0, \quad (52-5)$$

در این جا  $\mu_i = m_i / \sum_j m_j$  می‌باشد و عملگرهای حرکت نسبی در شروط زیر صدق می‌کنند

$$\sum_i P_i = 0, \quad \sum_i \mu_i \Delta x_i = 0, \quad (53-5)$$

در واقع  $3(N-1)$  درجه آزادی درونی وجود دارد. توجه کنید که تکانه نهایی در فضای تعمیم یافته  $P_0$  با هامیلتونی  $H_N$  جابجا می‌شود. عملگر انرژی جنبشی برای دو ذره را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$T_N = \frac{P_0^2}{2m_i} + \sum_i \frac{\Delta P_i^2}{2m_i} + \Delta T, \quad (54-5)$$

که

$$\Delta T = \frac{1}{m} \sum_i \beta_i \left[ 2\mu_i P_0^2 \Delta P_i^2 + 4\mu_i (P_0 \cdot \Delta P_i)^2 + 4\mu_i^2 P_0^2 (P_0 \cdot \Delta P_i) + 4\Delta P_i^2 (P_0 \cdot \Delta P_i) \right]. \quad (55-5)$$

در رابطه بالا عملگرهای تکانه‌ی نسبی و تکانه‌ی کل در فضای تکانه به صورت زیر است

$$P_0^\mu = (1 + \tilde{\beta}_0 p_0^2) p_0^\mu, \quad \Delta P_i^\mu = (1 + \beta \Delta p_i^2) \Delta p_i^\mu. \quad (56-5)$$

قبلا همراه با عملگرهای مکان همیوگ  $X_0^\mu = x_0^\mu$ ، یک جبر تعمیم یافته از نوع (۷-۵) را با یک اثر پارامتری تعمیم یافته زیر برآورده می‌کند

$$\tilde{\beta}_0 = \sum_i \beta_i \mu_i^3. \quad (57-5)$$

جمله اول در (۵۴-۵) انرژی جنبشی حرکت مرکز جرم با جرم کل  $m = \sum_i m_i$  است، جمله دوم نشان دهنده حرکت نسبی می‌باشد و جمله سوم نقش فضای تعمیم یافته و توصیف اثر حرکت نسبی روی حرکت مرکز جرم (یا برعکس) می‌باشد. توجه کنید که برای دو ذره چون  $\Delta P_1 = -\Delta P_2 = P$  می‌باشد، معادله‌ی (۵۴-۵) نتیجه بازتولید (۲۰-۵) به دست آمده در بخش قبل می‌باشد. برای هامیلتونی کل  $H_N$ ، ترکیبات  $P_0$  حرکت پیوستاری می‌باشند. در حضور یک میدان خارجی  $H_N$  به صورت زیر خواهد بود

$$H_N = H_0 + H + \Delta T, \quad (58-5)$$

که

$$H_0 = \frac{P_0^2}{2m} + V_{ext}(X_0), \quad (59-5)$$

$$H = \sum_i \frac{\Delta P_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum V(|\Delta X_i - \Delta X_j|), \quad (60-5)$$

و  $\Delta T$  در رابطه (۵۵-۵) داده شده است. در این جا  $H_0$  و  $H$  به ترتیب حرکت های درونی و بیرونی را توصیف می کنند، اگرچه  $\Delta T$  با توجه به تعمیم منجر به یک درهم تنیدگی می شود. دو ویژگی جذاب از اثر پارامتر تعمیم یافته  $\tilde{\beta}_0$  را مطالعه می کنیم:

اول، سیستم مرکب را به دو زیر سیستم مربوط به  $i=1, 2, \dots, N$  و  $i=N_1+1, N_1+2, \dots, N$  تقسیم می کنیم. اگر اثر پارامتر تعمیم یافته را برای هر زیر سیستم بطور مجزا محاسبه کنیم، یعنی

$$\tilde{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \beta_i \left( \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{N_1} m_j} \right)^3, \quad \tilde{\beta}_2 = \sum_{i=N_1+1}^N \beta_i \left( \frac{m_i}{\sum_{j=N_1+1}^N m_j} \right)^3, \quad (61-5)$$

سپس اثر پارامتر تعمیم یافته از کل سیستم به صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{\beta}_0 = \tilde{\beta}_1 \left( \frac{\sum_{i=1}^{N_1} m_i}{\sum_{j=1}^N m_j} \right)^3 + \tilde{\beta}_2 \left( \frac{\sum_{i=N_1+1}^N m_i}{\sum_{j=1}^N m_j} \right)^3, \quad (62-5)$$

که با رابطه ی (۵۷-۵) همخوانی دارد.

دوم اینکه اگر سیستم از  $N$  ذره با جرم های یکسان  $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$  و پارامتر تعمیم یافته یکسان  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = \beta$  درست شده باشد، آن گاه اثر پارامتر تعمیم یافته به صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\beta}{N^2}. \quad (63-5)$$

در مورد سیستم‌های مرکب شامل تعداد زیادی ذره کاهش قابل توجهی از  $\tilde{\beta}_0$  با در نظر گرفتن پارامتر تعمیم یافته  $\beta$  برای ذرات منفرد مشاهده می‌شود.

### ۳-۵ سیستم‌های سه ذره‌ای در حضور طول کمینه؛ نوسانگر هماهنگ

#### ۱-۳-۵ نوسانگر هماهنگ سه جسمی در فضای تعمیم یافته

در این بخش سیستم سه جسمی غیر نسبیتی ای را در نظر می‌گیریم که در آن بر هم کنش بین ذرات از نوع نوسانگر هماهنگ است. در این جا با استفاده از یک روش اختلالی، طیف انرژی را برای مرتبه اول  $\beta$  بررسی می‌کنیم. با یادآوری رابطه تعمیم یافته و هامیلتونی سیستم سه جسمی تحت نوسانگر شروع می‌کنیم:

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (64-5)$$

هامیلتونی معمولی برای میدان خارجی به شکل زیر می‌باشد.

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} k \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 |x_i - x_j|^2, \quad (65-5)$$

و هامیلتونی تعمیم یافته به صورت زیر است

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} (1 + 2\beta_i p_i^2) + \frac{1}{2} k \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 |x_i - x_j|^2, \quad (66-5)$$

که در آن عملگر انرژی جنبشی تعمیم یافته با حالت معمولی خود، یکسان می‌باشد. در بخش بعدی با استفاده از مختصات ژاکوبی و نظریه‌ی اختلال، ویژه توابع و انرژی سیستم را به دست می‌آوریم.

### ۵-۳-۲ مختصات ژاکوبی

با تعریف مختصات ژاکوبی در فضای یک بعدی، داریم [۲۸]

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3), \quad (67-5)$$

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad m = m_1 + m_2 + m_3, \quad (68-5)$$

که می‌توان  $x_1, x_2$  و  $x_3$  را بر حسب  $x_0, \lambda$  و  $\rho$  نوشت،

$$x_1 = x_0 + \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{m_3}{m} \right) \lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{2m_2 + m_3}{m} \right) \rho, \quad (69-5)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{m_3}{m} \right) \lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{2m_1 + m_3}{m} \right) \rho \quad (70-5)$$

و

$$x_3 = x_0 - \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{(m_1 + m_2)}{m} \lambda - \frac{(m_1 - m_2)}{m} \frac{\sqrt{2}}{2} \rho. \quad (71-5)$$

با در نظر گرفتن روابط شناخته شده‌ی زیر

$$m_\rho = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}, \quad m_\lambda = \frac{3m_3(m_1+m_2)}{2m}, \quad m = m_1+m_2+m_3 \quad (72-5)$$

اندازه حرکت را برای سه جسم می‌نویسیم

$$p_1 = \frac{m_1}{m} p_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{m_1}{m_1+m_2} \right) p_\lambda + \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{(2m_2+m_3)(m_1+m_2)}{mm_2} \right) p_\rho, \quad (73-5)$$

$$p_2 = \frac{m_2}{m} p_0 + \frac{\sqrt{6}}{3} \left( \frac{m_2}{m_1+m_2} \right) p_\lambda - \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{(2m_1+m_3)(m_1+m_2)}{mm_1} \right) p_\rho, \quad (74-5)$$

$$p_3 = \frac{m_3}{m} p_0 + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{m_3(m_2^2 - m_1^2)}{m_1m_2m} p_\rho - \sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda, \quad (75-5)$$

پارامترهای  $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m_1}{m}; B = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{m_1}{m_1+m_2} \right); C = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{(2m_2+m_3)(m_1+m_2)}{mm_2} \right), \\ A' = \frac{m_2}{m}; B' = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{m_2}{m_1+m_2} \right); C' = -\frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{(2m_1+m_3)(m_1+m_2)}{m_1m} \right), \\ A'' = \frac{m_3}{m}; B'' = -\sqrt{\frac{2}{3}}; C'' = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{m_3(m_2^2 - m_1^2)}{m_1m_2m}, \end{array} \right. \quad (76-5)$$

### ۵-۳-۳ انرژی سیستم

انرژی جنبشی به صورت زیر داده می‌شود  $T = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2m_i} (1 + 2\beta_i p_i^2)$ ، که با استفاده از معادلات (۷۳-۵)، (۷۴-۵)

(۷۴) و (۷۵-۵) تبدیل می‌شود به



$$\begin{aligned}
T = & \frac{p_0^2}{2} \left\{ \frac{A^2}{m_1} + \frac{A'^2}{m_2} + \frac{A''^2}{m_3} + 2p_0^2 \left( \frac{\beta_1 A^4}{m_1} + \frac{\beta_2 A'^4}{m_2} + \frac{\beta_3 A''^4}{m_3} \right) \right\} + \frac{p_\lambda^2}{2} \left\{ \frac{B^2}{m_1} + \frac{B'^2}{m_2} + \frac{B''^2}{m_3} + 2p_\lambda^2 \left( \frac{\beta_1 B^4}{m_1} + \frac{\beta_2 B'^4}{m_2} + \frac{\beta_3 B''^4}{m_3} \right) \right\} + \\
& \frac{p_\rho^2}{2} \left\{ \frac{C^2}{m_1} + \frac{C'^2}{m_2} + \frac{C''^2}{m_3} + 2p_\rho^2 \left( \frac{\beta_1 C^4}{m_1} + \frac{\beta_2 C'^4}{m_2} + \frac{\beta_3 C''^4}{m_3} \right) \right\} + \\
& (p_\lambda \cdot p_\rho) \left\{ \frac{BC}{m_1} + \frac{B'C'}{m_2} + \frac{B''C''}{m_3} \right\} + (p_0 \cdot p_\rho) \left\{ \frac{AC}{m_1} + \frac{A'C'}{m_2} + \frac{A''C''}{m_3} \right\} + (p_0 \cdot p_\lambda) \left\{ \frac{AB}{m_1} + \frac{A'B'}{m_2} + \frac{A''B''}{m_3} \right\} + \\
& 4(p_0 \cdot p_\rho)^2 \left\{ \frac{A^2 C^2}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^2 C'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^2 C''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + 4(p_0 \cdot p_\lambda)^2 \left\{ \frac{A^2 B^2}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^2 B'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^2 B''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 2p_0^2 p_\lambda^2 \left\{ \frac{A^2 B^2}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^2 B'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^2 B''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + 4(p_\lambda \cdot p_\rho)^2 \left\{ \frac{B^2 C^2}{m_1} \beta_1 + \frac{B'^2 C'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{B''^2 C''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 2p_\lambda^2 p_\rho^2 \left\{ \frac{B^2 C^2}{m_1} \beta_1 + \frac{B'^2 C'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{B''^2 C''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + 2p_0^2 p_\rho^2 \left\{ \frac{A^2 C^2}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^2 C'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^2 C''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 4p_0^2 (p_0 \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A^3 C}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^3 C'}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^3 C''}{m_3} \beta_3 \right\} + 4p_0^2 (p_0 \cdot p_\lambda) \left\{ \frac{A^3 B}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^3 B'}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^3 B''}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 4p_\lambda^2 (p_0 \cdot p_\lambda) \left\{ \frac{A B^3}{m_1} \beta_1 + \frac{A' B'^3}{m_2} \beta_2 + \frac{A'' B''^3}{m_3} \beta_3 \right\} + 4p_0^2 (p_\lambda \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A^2 BC}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^2 B'C'}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^2 B''C''}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 4p_\lambda^2 (p_\lambda \cdot p_\rho) \left\{ \frac{B^3 C}{m_1} \beta_1 + \frac{B'^3 C'}{m_2} \beta_2 + \frac{B''^3 C''}{m_3} \beta_3 \right\} + 4p_\lambda^2 (p_0 \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A B^2 C}{m_1} \beta_1 + \frac{A' B'^2 C'}{m_2} \beta_2 + \frac{A'' B''^2 C''}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 4p_\rho^2 (p_0 \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A C^3}{m_1} \beta_1 + \frac{A' C'^3}{m_2} \beta_2 + \frac{A'' C''^3}{m_3} \beta_3 \right\} + 4p_\rho^2 (p_0 \cdot p_\lambda) \left\{ \frac{A B C^2}{m_1} \beta_1 + \frac{A' B' C'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{A'' B'' C''^2}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 8(p_0 \cdot p_\lambda) (p_0 \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A^2 BC}{m_1} \beta_1 + \frac{A'^2 B'C'}{m_2} \beta_2 + \frac{A''^2 B''C''}{m_3} \beta_3 \right\} + 4p_\rho^2 (p_\lambda \cdot p_\rho) \left\{ \frac{B C^3}{m_1} \beta_1 + \frac{B' C'^3}{m_2} \beta_2 + \frac{B'' C''^3}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 8(p_0 \cdot p_\lambda) (p_\lambda \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A B^2 C}{m_1} \beta_1 + \frac{A' B'^2 C'}{m_2} \beta_2 + \frac{A'' B''^2 C''}{m_3} \beta_3 \right\} + \\
& 8(p_0 \cdot p_\rho) (p_\lambda \cdot p_\rho) \left\{ \frac{A B C^2}{m_1} \beta_1 + \frac{A' B' C'^2}{m_2} \beta_2 + \frac{A'' B'' C''^2}{m_3} \beta_3 \right\}. \tag{77-5}
\end{aligned}$$

چون ذرات بدون اسپین هستند، برای ساده‌سازی آن‌ها را یکسان فرض می‌کنیم و اصل متقارن سازی را در نظر گرفته نمی‌گیریم. بنابراین  $M = m_1 = m_2 = m_3$  و  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$  را به عنوان نتیجه‌ای از همسان‌گردی فضا در نظر می‌گیریم و انرژی جنبشی  $T$  تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}
T = & \frac{p_0^2}{6m} \left\{ 1 + \frac{2}{9} p_0^2 \beta \right\} + \frac{p_\lambda^2}{2m} \{ 1 + p_\lambda^2 \beta \} + \frac{p_\rho^2}{2m} \{ 1 + \beta p_\rho^2 \} + \frac{1}{9} \left( \frac{4(p_0 \cdot p_\lambda)^2}{m} \beta \right) + \frac{1}{9} \left( \frac{4(p_0 \cdot p_\rho)^2}{m} \beta \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{4(p_\lambda \cdot p_\rho)^2}{m} \beta \right) \\
& + \frac{1}{9} \left( \frac{2p_0^2 p_\lambda^2}{m} \beta \right) + \frac{1}{9} \left( \frac{2p_0^2 p_\rho^2}{m} \beta \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{2p_\lambda^2 p_\rho^2}{m} \beta \right) - \frac{1}{3\sqrt{6}} \left( \frac{4p_\lambda^2 (p_0 \cdot p_\lambda)}{m} \beta \right) + \frac{1}{3\sqrt{6}} \left( \frac{4p_\rho^2 (p_0 \cdot p_\lambda)}{m} \beta \right) \\
& + \frac{1}{3\sqrt{6}} \left( \frac{8(p_0 \cdot p_\rho)(p_\lambda \cdot p_\rho)}{m} \beta \right). \tag{78-5}
\end{aligned}$$

با استفاده از معادلات (۵-۶۹)، (۵-۷۰) و (۵-۸۰) پتانسیل نوسانگر هماهنگ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$V = \frac{3}{2} k (\rho^2 + \lambda^2) \tag{79-5}$$

و هامیلتونی (۵-۶۵) به شکل زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}
H = & \frac{p_0^2}{6m} + \left( \frac{p_\lambda^2}{2m} + \frac{3}{2} k \lambda^2 \right) + \left( \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{3}{2} k \rho^2 \right) \\
& + \frac{\beta}{m} \left\{ \frac{4}{9} \left[ (p_0 \cdot p_\lambda)^2 + (p_0 \cdot p_\rho)^2 \right] + \frac{2}{9} \left[ p_0^2 p_\lambda^2 + p_0^2 p_\rho^2 \right] + \frac{3}{9} p_\lambda^2 p_\rho^2 + \frac{2}{3} (p_\lambda \cdot p_\rho)^2 \right. \\
& \left. - \frac{4}{3\sqrt{6}} p_\lambda^2 (p_0 \cdot p_\lambda) + \frac{4}{3\sqrt{6}} p_\rho^2 (p_0 \cdot p_\lambda) + \frac{8}{3\sqrt{6}} (p_0 \cdot p_\rho)(p_\lambda \cdot p_\rho) + \frac{p_0^4}{27} + \frac{p_\lambda^4}{2} + \frac{p_\rho^4}{2} \right\}. \tag{80-5}
\end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
H = & \frac{p_0^2}{6m} + \left( \frac{p_\lambda^2}{2m} + \frac{3}{2} k \lambda^2 \right) + \left( \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{3}{2} k \rho^2 \right) \\
& + \frac{\beta}{m} \left\{ \frac{2}{3} \left[ p_0^2 p_\lambda^2 + p_0^2 p_\rho^2 \right] + p_\lambda^2 p_\rho^2 - \frac{4}{3\sqrt{6}} p_\lambda^3 p_0 + \frac{4}{3\sqrt{6}} p_\rho^3 p_0 + \frac{8}{3\sqrt{6}} p_0 p_\rho^2 p_\lambda + \frac{p_0^4}{27} + \frac{p_\lambda^4}{2} + \frac{p_\rho^4}{2} \right\}. \tag{81-5}
\end{aligned}$$

حال می‌توان هامیلتونی اختلالی  $H^{(1)}$  و غیر اختلالی  $H^{(0)}$  را از هم جدا کرده و انرژی یا تغییرات انرژی را برای هر کدام نوشت

$$H = H^{(0)} + H^{(1)} \quad (82-5)$$

که

$$H^{(0)} = H_R^{(0)} + H_\lambda^{(0)} + H_\rho^{(0)} \quad (83-5)$$

$$H^{(1)} = \sum_{i=1}^9 H_i^{(1)} \quad (84-5)$$

برای به دست آوردن انرژی، ویژه تابع را برای هامیلتونی غیر اختلالی به فرم  $(\psi^{(0)} = \psi_R \psi_\lambda \psi_\rho)$  در نظر می‌گیریم. همچنین انرژی کل را به صورت زیر می‌نویسیم

$$E = E^{(0)} + \Delta^{(1)} \quad (85-5)$$

که

$$E^{(0)} = E_R^{(0)} + E_\lambda^{(0)} + E_\rho^{(0)}, \quad (86-5)$$

$$E^{(0)} = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{6m} + \hbar\omega(2n_\lambda + 1) + \hbar\omega(2n_\rho + 1). \quad (87-5)$$

$$\Delta^{(1)} = \sum_{i=1}^9 \Delta_i^{(1)}, \quad (88-5)$$

$$\Delta_1^{(1)} = \frac{2\beta}{3m} \hbar^3 \kappa^2 \omega (2n_\lambda + 1) \quad (89a-5)$$

$$\Delta_2^{(1)} = \frac{2\beta}{3m} \hbar^3 \kappa^2 \omega (2n_\rho + 1) \quad (89b-5)$$

$$\Delta_3^{(1)} = \frac{\beta}{m} \hbar^2 \omega^2 (2n_\lambda + 1)(2n_\rho + 1) \quad (89c-5)$$

$$\Delta_4^{(1)} = 0 \quad (89d-5)$$

$$\Delta_5^{(1)} = 0 \quad (89e-5)$$

$$\Delta_6^{(1)} = 0 \quad (89f - 5)$$

$$\Delta_7^{(1)} = \frac{\beta \hbar^4 \kappa^4}{27m} \quad (89g - 5)$$

$$\Delta_8^{(1)} = \frac{3\beta \hbar^2 k}{8} (2n_\lambda^2 + 2n_\lambda + 1) \quad (89h - 5)$$

$$\Delta_9^{(1)} = \frac{3\beta \hbar^2 k}{8} (2n_\rho^2 + 2n_\rho + 1) \quad (89i - 5)$$

نهایتاً انرژی کل E برابر خواهد شد با

$$E = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{6m} + \hbar \omega (2n_\lambda + 1) + \hbar \omega (2n_\rho + 1) +$$

$$\frac{2\beta}{3m} \hbar^3 \kappa^2 \omega (2n_\lambda + 1) + \frac{2\beta}{3m} \hbar^3 \kappa^2 \omega (2n_\rho + 1) + \frac{\beta}{m} \hbar^2 \omega^2 (2n_\lambda + 1) (2n_\rho + 1) +$$

$$\frac{\beta \hbar^4 \kappa^4}{27m} + \frac{3\beta \hbar^2 k}{8} (2n_\lambda^2 + 2n_\lambda + 1) + \frac{3\beta \hbar^2 k}{8} (2n_\rho^2 + 2n_\rho + 1). \quad (90-5)$$

که از تابع موج موج تخت یعنی  $\psi_R \equiv e^{i\kappa \cdot r} |n_R\rangle$  برای هامیلتونی  $(H_R^{(0)} = \frac{p_0^2}{6M})$  با  $(p_0 = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dr})$  استفاده

کردیم و برای  $(H_\lambda)$ ، از عملگرهای تکانه و مکان که شامل عملگرهای بالا برنده و پایین برنده هستند، جهت به دست آوردن انرژی استفاده کردیم.

## نتیجه گیری:

در فصل دوم اثر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته GUP را روی ترمودینامیک آنسامبل کانونی یک گاز ایده‌آل بررسی کردیم. تابع پارش را با روش‌های کوانتومی و کلاسیکی همچنین تصحیح مرتبه اول در ویژگی‌های ترمودینامیکی همانند متوسط انرژی، آنتروپی و چگالی حالات را به دست آوردیم و مشاهده کردیم که تصحیح مرتبه اول GUP تاثیری روی فشار سیستم ندارد. اگرچه تصحیح، خود را در دماهای بالا نشان می‌دهد اما اگر قید قابل مشاهده‌ای روی پارامتر تعمیم یافته GUP قرار دهیم، تغییرات بیشتری حتی در دماهای متوسط مشاهده خواهیم کرد. در فصل سوم که خواص دینامیکی با عدم قطعیت طول کمینه را مورد بررسی قرار دادیم، مشاهده کردیم که سرعت یک ذره با پتانسیل ثابت و اندازه شتاب یک ذره در یک پتانسیل خطی، همچنین در سیستم‌های نوسانی فرکانس سیستم‌ها مقدار بزرگتری نسبت به نقطه مقابل طول غیر کمینه دارد.

در فصل چهارم ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی نوسانگر دیراک ۳ بعدی را در حضور یک برهم کنش اسپین مداری با چارچوب مکانیک کوانتومی طول کمینه به دست آوردیم. سپس با حل معادله‌ی دیراک در حضور طول کمینه برای چاه پتانسیل، پله پتانسیل و دیواره نامتناهی، اثر رامسائر-تونسند را بررسی کردیم و مشاهده کردیم که مجموع ضرایب عبور و بازتاب در حضور یک طول کمینه همچنان یک می‌باشد. همچنین نشان دادیم که بخش نسبیتی در انرژی حالت پایه اتم هیدروژن از حضور یک طول کمینه معرفی شده بوسیله یک جبر هموردایی لورنتس بیشتر از بخش غیر نسبیتی است و در فصل پنجم سیستم‌های دو ذره‌ای و سه ذره‌ای را در فضای تعمیم یافته مورد بررسی قرار دادیم که با استفاده از مختصات ژاکوبی و نظریه‌ی اختلال، ویژه توابع و انرژی سیستم را برای مرتبه اول  $\beta$  محاسبه کردیم.



## مراجع:

- [۱] کریم خانی ا. ۱۳۸۹، پایان نامه کارشناسی ارشد، "بررسی برخی اثرهای طول کمینه در مکانیک کوانتوم"، دانشگاه صنعتی تفرش
- [۲] معیری ح. ۱۳۹۱، پایان نامه دکتری فیزیک، "تصحیحات گرانش کوانتومی بر روی میدان‌های مادی در حضور یک طول کمینه"، دانشگاه اراک
- [۳] خسروپور ب. ۱۳۹۲، پایان نامه دکتری فیزیک، "فرضیه کمینه طول در الکترودینامیک کلاسیک و کوانتومی"، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک
- [۴] اعتمادی ا. ۱۳۹۰، پایان نامه کارشناسی ارشد، "گرانش کوانتومی در حضور کمینه طول و بیشینه تکانه"، دانشکده فیزیک، دانشگاه مازندران
- [5] C. Quesne, V.M. Tkachuk, "Composite system in deformed space with minimal length", *Phys.Rev.A*81:012106, 2010.
- [6] R. Christian S. Bernardo · Jose Perico H. Esguerra, "Exactly Solvable Dynamical Models with a Minimal Length Uncertainty", *Few Body Syst.* 56 (2015) 4-5, 219-229.
- [7] R. O. Francisco, T. L. Antonacci Oakes, J. C. Fabris, J. A. Nogueira, "Relativistic Approach to the Hydrogen Atom in a Minimal Length Scenario", *Braz.J.Phys.* 44 (2014) 271-277  
arXiv:1402.4667 [hep-th].
- [8] L. Menculini, O. Panella, P. Roy, "Quantum phase transitions of the Dirac oscillator in a minimal length scenario", *Phys. Rev. D* 91, 045032 – Published 24 February 2015.
- [9] H. Hassanabadi · P. Hooshmand · S. Zarrinkamar, "The Generalized Uncertainty Principle and Harmonic Interaction in Three Spatial Dimensions", *Few Body Syst.* 56 (2015) 1, 19-27.
- [10] H. Hassanabadi · H. Rahimov · S. Zarrinkamar, "Analytical Treatment of a Three-Electron-Quantum Dot Under Rashba Spin–Orbit Interaction", *Few-Body Syst* (2012) 52: 87–95.
- [11] Djamil Bouaziz, "Kratzer's molecular potential in quantum mechanics with a generalized uncertainty principle", *Annals of Physics (Impact Factor: 3.07)*. 02/2015; 355:269-281.
- [12] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, and E. Maghsoodi, "Potential well and step potential within the framework of minimal length quantum mechanics", *Eur. Phys. J. Plus* (2013) 128: 138.

- [13] S. Haouat, "Schrödinger equation and resonant scattering in the presence of a minimal length", *Physics Letters B* 729 (2014) 33–38.
- [14] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, A.A. Rajabi, "A simple efficient methodology for Dirac equation in minimal length quantum Mechanics", *Physics Letters B* 718 (2013) 1111–1113.
- [15] D. Bouaziz, M. Bawin, "Regularization of the Singular Inverse Square Potential in Quantum Mechanics with a Minimal length", *Phys.Rev.A*76:032112,2007.
- [16] Ahmed Farag Ali, Saurya Das, Elias C. Vagenas, "A proposal for testing Quantum Gravity in the lab", *Phys.Rev.D*84:044013,2011.
- [17] Saurya Das, Elias C. Vagenas, "Universality of Quantum Gravity Corrections", *Phys.Rev.Lett.*101:221301,2008.
- [18] F. Buisseret, "The quantum N-body problem with a minimal length", *Phys.Rev.*82:062102,2010.
- [19] S. Miraboutalebi and L. Farhang Matin. "Thermodynamics of canonical ensemble of an ideal gas in presence of Planck-scale effects".*Can.J.Phys.* 93 (2015) 5, 574-579.
- [20] L. Menculini, O. Panella, and P. Roy." Exact solutions of the (2+1) Dimensional Dirac equation in a constant magnetic field in the presence of a minimal length" *Physical Review D* 87, 065017 (2013).
- [21] V. V. Kudryashov, "Exact wave functions of electron in a quantum dot with account of the Rashba spin-orbit interaction" *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, vol. 12, no. 2 (2009), pp. 199-203.
- [22] R P Martinez-y-Romero, H N Nunez-Yepey and A L Salas-Brito, "Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator" *Eur.J.Phys.*16:135-141,1995
- [23] H. Hassanabadi, H. Rahimov, S. Zarrinkamar, "Rashba coupling in three-electron-quantum dot under cylindrical symmetry: An exact solution" *Annals of Physics* 326 (2011) 2957–2962
- [24] J. Vahedi, K. Nozari and P. Pedram, "Generalized Uncertainty Principle and the Ramsauer-Townsend Effect" *Gravitation and Cosmology* 18, 211 (2012)
- [25] Kouros Nozari and Tahereh Azizi, "Some Aspects of Minimal Length Quantum Mechanics", *Gen. Rel. Grav.*38:735-742,2006



- [26] J. Vahedi and K. Nozari, "The Ramsauer-Townsend Effect in the Presence of the Minimal Length and Maximal Momentum", *Acta Physica Polonica Series A* 122(1):38-41 (2012)
- [27] T. L. Antonacci Oakes, R. O. Francisco, J. C. Fabris and J. A. Nogueira, "Ground State of the Hydrogen Atom via Dirac Equation in a Minimal Length Scenario", *Eur. Phys. J. C* (2013) 73:2495
- [28] H. Hassanabadi, "A Simple Physical Approach to Study Spectrum of Baryons" *Commun. Theor. Phys.* 55 (2011) 303–306

## Abstract

Many prominent physicists such as Bohr, Dirac, Heisenberg, Pauli and Landau believed to be a revolutionary approach. From their perspective, problems have arisen in the context of quantum theory could not be solved and a new theory according to which the difference between this new theory with quantum theory may be as much difference between the quantum theory of classical physics. Another batch of physicists that they may be called pragmatic physicists; While accepting quantum theory to shape it tried to introduce new methods and techniques or providing a suitable reformulation of quantum theory to understand answers to problems have been found to achieve. The first hypothesis smallest possible period in the twentieth century became possible to take this time to a fundamental length scale to measure distance've found a place that if we enter the minimal length of the quantum mechanics, it can be an expression of uncertainty in measurement we place.

First, we pay of minimal length and its related relations. Then, we consider the effect generalized uncertainty principle on the focal ensemble thermodynamic of an ideal gas and we obtain the partition function with the methods of quantum and classical. Also, we studied the dynamic properties with minimal length uncertainty for the fixed particle and harmonic oscillator potential and so. We consider Dirac oscillator under a magnetic field in the presence of spin-orbit interaction with the framework of minimal length quantum mechanics, we solve the problem in momentum space using polar coordinates and we obtain special functions and the eigenvalues of the Hamiltonian of the system. Also, we consider Ramsauer-Townsend effect in the presence of a generalized uncertainty principle and within the framework of the Dirac equation for potential wells, step potential and walls of the infinite. Finally, we consider the multi-particle systems in the presence of the minimal length.

**Keywords:** minimal length, generalized uncertainty principle, deformed quantum mechanics, Quantum Gravity, Dirac oscillator, spin-orbit, Ramsauer-Townsend, two body systems, three body systems.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty physics**

**Investigation of two and three body systems by considering  
minimal length**

**Kazem jahankohan**

Supervisors:

**Hassan hassanabadi**

**Saber zarinkamar**

**February, 2016**