بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک

گروه اتمی مولکولی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی امواج برانگیخته در پلاسمای گردوغباری

شهرزاد بهرامی

استاد راهنما :

دکتر مهدی مومنی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیر و سپاس

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بی‌کران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد عالی قدرم جناب آقای دکتر مؤمنی که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند، کمال سپاس را دارم.

سپاس آخر را به مهربان‌ترین همراهان زندگی‌ام، به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است.

چکیده

در این پژوهش ، خصوصیات پلاسمای غباری و کاربردهای آن، رفتار ذرات غبار در محیط پلاسمای غباری، نیروهای وارد بر ذرات غبار ، امواج موجود در پلاسمای غباری (خطی و غیر خطی) و روابط پاشندگی آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. نشان داده شده که حضور ذرات غبار ، سبب ایجاد جفت‌شدگی بین امواج مختلف در پلاسمای غباری می‌گردد که در این پایان نامه به بررسی دو نوع مد آکوستیکی در یک پلاسمای غباری یکنواخت، غیر مغناطیده و بی برخورد به همراه جفت‌شدگی ضعیف پرداخته شده است. از طریق توزیع ماکسول-بولتزمن برای چگالی الکترون‌ها و یون‌ها و تبدیلات فوریه معادله پاشندگی امواج به‌دست آمده است .

پس از معرفی امواج خطی و بررسی معادلات پاشندگی و نتایج به‌دست آمده، امواجی را مورد بحث قرار داده‌ایم که دامنه‌ی به قدر کافی بزرگ دارند به‌طوریکه نمی‌توان خواص غیر خطی آن‌ها را نادیده گرفت. در این بخش مجموعه معادلات سیالی را با استفاده از روش اختلال کاهشی به معادله‌ی کوته وگ-ده‌وری (kdv) تقلیل داده‌ایم. این معادلات از طریق تغییر متغیرهای مستقل و اعمال شرایط مرزی حل شده‌اند. جواب‌های پیشنهادی برای این معادلات نشان می‌دهند که مدهای آکوستیکی و آکوستیکی-یونی با دامنه‌های مختلف به صورت سالیتون kdv انتشار میابند. رفتار پهنا و دامنه‌ی این امواج بر اساس پارامترهای پلاسما یعنی σ (نسبت دمای یون به الکترون) ، چگالی ذرات غباری و عامل کوانتومی (H) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با استفاده از دینامیک دانه‌های غباری باردار در پلاسمای غباری معادله‌ی ون‌درپل-متیو (VDP) استخراج شده که این معادله دارای یک راه حل نوسانی است که در نهایت منجر به دو معادله دیفرانسیلی می‌گردد ، با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه ۴ حل عددی آن انجام شده و نمودارهای مربوطه مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: پلاسمای غباری، امواج آکوستیکی، امواج آکوستیکی – یونی، سالیتون

فهرست مطالب:

عنوان صفحه

فصل اول: معرفی پلاسما

فصل دوم : معرفی پلاسمای گردوغباری

فصل سوم : بررسی امواج خطی در پلاسمای غباری

فصل چهارم : بررسی امواج غیرخطی در پلاسمای غباری

پیوست‌ها:

فهرست جداول و نمودارها

فصل اول:

معرفی پلاسما

۱-۱ مقدمه

فیزیک پلاسما با سیستم‌های N ذره‌ای که به وسیله نیروهای الکترومغناطیسی باردار شده‌اند سروکار دارند . مطالعه پلاسما در قرن بیستم از زمانی شروع شد که دانشمندان به فیزیک تخلیه‌ی گازها علاقه‌مند شدند. این امر دلیلی بر مطالعات دانشمندان در رابطه با اهمیت و کاربرد فیزیک پلاسما در زمین شناسی و اختر فیزیک شد.

۱-۱-۱ تعریف پلاسما

پلاسما یکی از چهار فاز اصلی ماده است[۱].پلاسما گاز شبه خنثایی از ذرات باردار و خنثی است که رفتار جمعی از خود نشان می‌دهد. واژه پلاسما به گاز یونیده شده‌ای گفته می‌شود که همه یا بخش قابل توجهی از اتم‌های آن یک یا چند الکترون از دست داده و به یونهای مثبت تبدیل شده باشند یا به گاز یونیده‌ای که تعداد الکترونهای آزاد آن تقریبا برابر با تعداد یونهای مثبت است.

۱-۱-۲ تاریخچه

در سال ۱۸۷۹ (میلادی) فیزیکدان انگلیسی ویلیام کروکس[۱] به هنگام بررسی ویژگی‌های ماده در تخلیه الکتریکی پیشنهاد کرد که نوع خاص گاز به عنوان حالت چهارم ماده نام‌گذاری شود.

۱-۱-۳ وجود پلاسما در طبیعت

اغلب گفته می‌شود که ۹۹٪ ماده جهان در حالت پلاسما است یعنی به صورت گاز الکتریسیته داری است با اتم‌هایی که به یونهای مثبت والکترون‌های منفی تجزیه شده‌اند[۲]. درون ستارگان و جو آن‌ها ابرهای گازی و بیشترهیدروژن میان ستاره‌ای از پلاسما تشکیل شده‌اند . درمجاورت خودمان، همین که جو زمین را ترک کنیم با پلاسمایی مواجه می‌شویم که از کمربندهای تابشی وان‌آلن[۲] [۳] و

---

۱ . william crookes

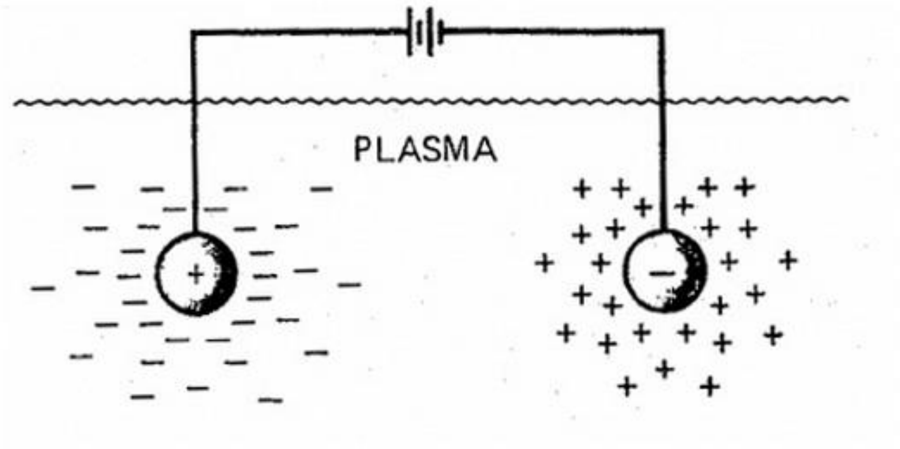
۲ . Van Allen radiation Belts

بادخورشیدی[1] [۴] تشکیل شده است . ازطرفی پلاسما درزندگی روزمره به چند نمونه از جمله : آذرخش، فروغ ملایم شفق شمالی، گاز داخل لامپ فلوئورسان و یا چراغ نئون و یونیدگی مختصری در خروجی موشک محدود می‌شود.

۱-۱-۴ حفاظ دبای

یکی از مشخصه‌های اساسی پلاسما توانایی آن برای دفع پتانسیل‌های الکتریکی است که به آن اعمال می‌شود. فرض کنید بخواهیم با باردار کردن دو گلوله فلزی متصل به یک اختلاف پتانسیل یک میدان الکتریکی در داخل پلاسما ایجاد کنیم خواهیم دید این گلوله‌ها ذراتی با بار مخالف را جذب و بلافاصله ابری از ذرات اطراف گلوله‌ها تشکیل می‌شود (ابری از یونها اطراف گلوله منفی و ابری از الکترونها اطراف گلوله مثبت) و حفاظی را تشکیل می‌دهند که باعث می‌شود میدان به طورنمایی کاهش یابد و اصطلاحاً پرده‌ای درجلوی ذرات ایجاد می‌گردد . اگر پلاسما سرد باشد و هیچگونه حرکت حرارتی وجود نداشته باشد تعداد بار ابر برابر بار گلوله می‌شود در این صورت عمل حفاظ کامل می‌گردد و هیچ میدانی در حجم پلاسما در خارج از ناحیه ابرها وجود ندارد. از سوی دیگر اگر دما متناهی باشد ذراتی که در لبه هستند (جاییکه میدان ضعیف است) به اندازه‌ی کافی انرژی گرمایی دریافت می‌کنند تا ازچاه پتانسیل الکترواستاتیکی فرار کنند بنابراین لبه ابر در شعاعی قرار می‌گیرد که انرژی پتانسیل تقریبا برابر با انرژی گرمایی ذرات شود پس حفاظ کامل نخواهد بود در واقع حرکات گرمایی سبب نشت پتانسیل به داخل پلاسما می‌شود و میدان‌الکتریکی متناهی درآن ایجاد می‌کند.

[1] .Solar wind



پتانسیل در هر نقطه به فاصله‌ی x نسبت به گلوله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\phi = \phi_0 e^{\frac{-|x|}{\lambda_D}}$$

(۱-۱-۴-۱)

در این رابطه λ_D ضخامت لایه‌ی غلاف نامیده می‌شود، که به‌آن طول دبای می‌گوییم [۵] و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{ne^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_{th}}{\omega_p}$$

(۱-۱-۴-۲)

۱-۱-۵ دما و چگالی

هر محیط پلاسمایی دارای پارامترهای مهمی است که بر اساس آن پارامترها نوع پلاسما تعیین می‌گردد. مهمترین این پارامترها دما و چگالی هستند [۶]. به طوریکه مشخصات دیگر پلاسما وابسته به این دومشخصه می‌باشند. درحالت‌های جامد ، مایع ، گاز دما را می‌توان از روی دامنه حرکت (سرعت نوسان) ذرات سازنده ماده تعریف کرد. اما در حالت پلاسما دما از روی میزان جدایی یونهای مثبت از الکترون‌ها مشخص می‌گردد.

همچنین انرژی ذرات به دمای پلاسما وابسته است که می‌تواند بین ۱تا ۱۰^۶ الکترون ولت تغییر کند.

۱-۱-۶ معیارهای پلاسما

هر گاز یونیده‌ای را نمی‌توان پلاسما نامید. تفاوت اساسی بین یک پلاسما ویک گاز معمولی که نیروهای کوتاه برد بین مولکولی مکانیسم غالب آن را تشکیل می‌دهند این است که پلاسما گاز یونیده‌ای است که تعداد الکترون‌های آزاد آن تقریبا برابر با تعداد یونهای مثبت آن است. در دماهای زیاد الکترون‌های آزاد انرژی کافی دارند تا در برخورد با اتم‌های دیگر بتوانند الکترون را از هسته جدا کنند. انرژی لازم برای جداکردن الکترون از هسته انرژی یونش[۱] نامیده میشود[۷]. این الکترون آزاد شده برخوردهای دیگری انجام میدهد و این فرایند ادامه دارد تا گاز یونیده، به حالت پلاسما درآید. طبق رابطه ساها[۲] هر گاه نسبت اتمهای یونیده به اتم‌های خنثی به صورت زیر باشد آن گاز را پلاسما می‌نامند[۸].

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4\times10^{21}\frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_i}e^{\frac{-u_i}{kT}} \qquad (۱-۶-۱-۱)$$

n_i و n_n به ترتیب تعداد اتم‌های یونیده و خنثی هستند. T دمای پلاسما و u انرژی یونش گازی می‌باشد. این رابطه نشان می‌دهد که افزایش دما سبب می‌شود که n_n کمتر از n_i شود. تا سرانجام پلاسما کاملا یونیده شود. به همین دلیل است که پلاسما در اجسام نجومی با دمای میلیون‌ها درجه یافت می‌شود. با توجه به توضیحاتی که بیان شد، هرگاز یونیده‌ای را نمی‌توان پلاسما نامید. یک تعریف مفید از پلاسما این است که پلاسما گاز شبه خنثایی است از ذرات باردار و خنثی که رفتار جمعی از خود نشان می‌دهند. منظوراز شبه خنثی بودن این است که می‌توان فرض کرد $n_i=n_e=n$ باشد (این چگالی مشترک را چگالی پلاسما می‌نامیم)، ولی آنقدر خنثی نیست که همه‌ی نیروهای الکترومغناطیسی مورد نظر صفر باشند. منظور از رفتار جمعی که از خود نشان می‌دهد این است که تمایلی به تحت تأثیر قرار گرفتن از جانب عوامل خارجی ندارد و اغلب طوری عمل می‌کند که دارای رفتار مخصوص به خودش

---

[۱]. Ionization energy
[۲] .Saha equation

است و اگر تغییری در قسمتی از آن مشاهده شود این تغییر در کل گاز محسوس خواهد بود. این رفتار جمعی ناشی از نیروهای الکترومغناطیسی می‌باشد. این نیروها به قدری از نیروهای برخوردی بزرگترند که می‌توان از نیروهای برخوردی را نادیده گرفت.

اولین معیاری که برای پلاسما بودن مد نظر است این است که گاز یونی مورد نظر به اندازه کافی چگال باشدو λ_D از ابعادسیستم کوچکتر باشد(L) پس:

$$\lambda_D \ll L \qquad (۱-۱-۶-۲)$$

توصیف حفاظ دبای زمانی معتبر است که ذرات در ابر به تعداد کافی وجود داشته باشند، مشخص است که اگر در ناحیه‌ی غلاف فقط یک یا دو ذره وجود داشته باشد حفاظ دبای بطور آماری مفهوم معتبری نخواهد داشت لذا تعداد ذرات در درون کره دبای به صورت:

$$N_D = n\frac{4}{3}\pi\lambda_D{}^3 = \frac{1.38\times10^6 T^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \qquad (۱-۱-۶-۳)$$

می‌باشد. رفتار جمعی ذرات پلاسما سبب می‌شود که $N_D>>۱$ باشد تا دومین معیار پلاسما بودن برقرار شود:

$$N_D \gg ۱ \qquad (۱-۱-۶-۴)$$

شرط سوم به برخوردها مربوط است. برای مثال، گاز یونیده ضعیف در خروجی یک جت مشخصات پلاسما را ندارد زیرا ذرات باردار آنقدر با اتم‌های خنثی برخورد می‌کنند که حرکت آنها به جای اینکه توسط نیروهای الکترومغناطیسی تعیین شود توسط نیروهای هیدرودینامیک معمولی مشخص می‌گردد. اگر ω بسامد نوعی نوسان‌های پلاسما و τ زمان متوسط بین برخوردها با اتم‌های خنثی باشد ، برای آنکه گاز مانند پلاسما ، نه یک گاز خنثی رفتار کند لازم است شرط زیر برقرار باشد:

$$\omega\tau > ۱ \qquad (۱-۱-۶-۵)$$

دریک دسته بندی کلی پلاسما را می‌توان به دو دسته کلاسیکی و کوانتومی تقسیم کرد:

۱-۲ پلاسماهای کلاسیکی

پلاسماهای کلاسیکی[1] به سیستمی از ذرات گفته می‌شود که آن سیستم شبه خنثی باشد یعنی بارهای جدا از هم فقط در فاصله‌ی کوتاه طول دبای وجود داشته باشد و فواصل بزرگتر از این طول به جز برای نوسان‌های کوچک پلاسما اساساً خنثی باشد. پلاسمای کلاسیکی در محدوده‌ی دماهای بالا و چگالی‌های پایین بررسی می‌شوند. پلاسماهای کلاسیکی شامل نوسانات پلاسما با میدان الکتریکی و عدم وجود میدان مغناطیسی می‌شوند، از جمله سالیتونها، ناپایداری‌های پلاسما و ..... که در محدوده‌ی فشارمعمولی فوق العاده داغ هستند. نامگذاری این پلاسماها به این خاطر است که تابع توزیع ماکسول بولتزمن[2] این پلاسماها را توصیف می‌کند، که برای توصیف ذرات کلاسیکی به کار می‌رود. نزدیکترین نوع پلاسمای کلاسیکی به زمین یونوسفر[3] است که از ۱۵۰ کیلومتری سطح زمین شروع می‌شود و به سمت بالا ادامه میابد. در یونوسفر دیگر ذرات منظومه شمسی مانند : زحل، مشتری و نپتون نیز پلاسما وجود دارد. پارامتر های مهمی که پلاسماهای کلاسیکی را توصیف می‌کنند عبارتند از:

فرکانس پلاسمایی:

با اعمال یک اختلال کوچک به پلاسما الکترون‌ها به دلیل سبک بودن حرکت می‌کنند و بار مثبت به جا می‌ماند. در نتیجه جدایی بارهای مثبت و منفی نیروهای کولنی به وجود می‌آیند که الکترونها را به سمت عقب باز می‌گردانند. این حرکت رفت و برگشت ادامه میابد و فرکانس پلاسمایی ایجاد میکند. الکترون‌ها به دلیل چگالی بالایی که دارند در منطقه بار مثبت مجدد جایگزین نمی‌شوند و دارای تحرک بالایی هستند.

$$\omega_P = \left(\frac{e^2 n}{M\, \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱-۲-۱)$$

که در آن n چگالی، M جرم ذرات و ε_0 ضریب گذردهی خلأ می‌باشد.

سرعت گرمایی:

[1] . plasma classic
[2] . Maxwell Boltzmann distribution function
[3] . Ionosphere

سرعت ناشی از حرکات گرمایی تصادفی (کاتوره ای) است.

$$v_T = \left(\frac{k_B T}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(۱-۲-۲)

طول دبای:

این کمیت نشان دهنده‌ی ویژگی مهم حفاظ الکترواستاتیکی است . بارهای جدا ازهم فقط در فاصله‌ی کوتاه طول دبای می‌توانند مشاهده شوند و در فواصل دورتر از این طول ، اساسا پلاسما خنثی است.

$$\lambda_D = \frac{v_T}{\omega_p} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n e^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(۱-۲-۳)

توجه کنید که با افزایش چگالی λ_D کاهش میابد زیرا هرلایه پلاسما دارای الکترون‌های بیشتری است. علاوه براین λ_D با kT_e رابطه مستقیم دارد.

پارامتر جفت‌شدگی:

کمیتی است که نشان دهنده‌ی تاثیر برخوردها در پلاسما است و به صورت نسبت انرژی برخوردی به انرژی جنبشی تعریف می‌گردد:

$$g_c = \frac{E_{\text{int}}}{E_{kin}} = \frac{e^2 n^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon_0 k_B T}$$

(۱-۲-۴)

زمانیکه $g_c<۱$ باشد یا به عبارتی وقتی که $E_{kin}>E_{int}$ باشد برخوردهای کولنی دوتایی ضعیف ، در نتیجه اثرات گرمایی بر این برخوردها غالب می‌شوند. دراین ناحیه میدان اصلی که روی ذرات باردار شده اثر می‌کند، میدان غیرموضعی ناشی از اثرات جمعی است. دراین ناحیه رژیم کلاسیکی بدون برخورد (ایده‌آل) را خواهیم داشت.

امازمانیکه $g_c \approx ۱$ یا $g_c \geq ۱$ باشد برخوردهای دوتایی را نمی‌توان نادیده گرفت که در این حالت پلاسما برخوردی یا به شدت جفت‌شده می‌باشد.

۱-۳ پلاسمای کوانتومی

پلاسماها در دمای بالا و چگالی پایین اغلب توسط مکانیک کلاسیک به خوبی توصیف می‌شوند، اما اگر سیستمی آنقدر چگال باشد که تابع موج ذرات مختلف همپوشانی داشته باشند برای توصیف سیستم از مکانیک کوانتومی استفاده می‌کنیم. پلاسمای کوانتومی شامل الکترون‌ها و پوزیترون‌های تبهگن و یون‌ها با چگالی عددی بسیار بالا و دمای نسبتاً پایین است. این پدیده زمانی رخ می‌دهد که یک پلاسمای سرد داریم. دراین صورت انرژی آن کاهش یافته و ذرات به سمت تبهگن شدن پیش می‌روند. یون‌ها نیز در پلاسما کوانتومی به دلیل جرم زیاد نسبت به الکترون‌ها معمولاً به عنوان ذرات پلاسمایی غیر تبهگن رفتار می‌کنند از این رو به دلیل تبهگنی الکترون‌ها از تابع فرمی ـ دیراک برای توصیف آن استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر کاهش انرژی ذرات و نزدیک شدن آن‌ها به سمت انرژی فرمی باعث این تاثیر می‌شود در این صورت پلاسما کوانتیده شده و اثرات کوانتومی نقش محوری‌تری دارند. این پلاسماها در اجسام الکترونیکی خیلی کوچک، در سیستم‌های اخترفیزیکی خیلی چگال مانند : ناحیه داخلی سیاره مشتری ، ستاره‌های نوترونی و .... کاربرد دارد. موارد دیگری که این پلاسماها را توصیف می‌کنند عبارتند از:

طول موج دوبروی:

زمانی که چگالی خیلی زیاد باشد میانگین فاصله‌ی بین ذره‌ای با طول موج گرمایی دوبروی[۱] توصیف می‌شود.

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2\pi M k_B T}} \qquad (۱-۳-۱)$$

طول موج دوبروی به جرم و انرژی گرمایی بستگی دارد، پس برای الکترون‌ها که سبک‌تر هستند دارای مقدار بیشتری است و همین باعث می‌شود که اثرات کوانتومی برای الکترون‌ها نقش مهمتری داشته باشد، بنابراین الکترون‌ها به عنوان ذرات کوانتومی معرفی می‌شوند و یونها همانند ذرات کلاسیکی رفتار می‌کنند. در صورتیکه $n_\alpha \lambda_B^3 > 1$ باشد یا طول موج دوبروی بزرگتر یا مساوی میانگین بین ذره‌ای

۱ . de Broglie wavelength

($n^{-1/3}$) باشد پلاسما را پلاسمای کوانتومی (تبهگن) می‌گوییم که یکی از شرط‌های اساسی برای پلاسماهای کوانتومی رابطه‌ی زیر است:

$$n\lambda_B^3 >> 1 \qquad (۱-۳-۲)$$

و زمانیکه $n\lambda_B^3 < 1$ باشد پلاسما را پلاسمای کلاسیکی (غیر تبهگن) می‌گوییم. بنابراین مرز بین پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی با رابطه‌ی زیر مشخص می گردد.

$$n_\alpha \lambda^3{}_{B\alpha} = n_\alpha \left(\frac{h}{\sqrt{2M_\alpha \pi K_B T}} \right)^3 \equiv 1 \qquad (۱-۳-۴)$$

در پلاسماهایی با دما و چگالی معمولی رفتارهای کوانتومی قابل صرف نظر کردن هستند اما با کاهش دما هنگامیکه دما به سمت دمای فرمی میرود $T \to T_f$ این رفتارها بارزتر می‌گردد دمای فرمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_f = \frac{E_f}{k_B} = \frac{h^2}{2mk_B}\left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} n_e^{\frac{3}{2}} \qquad (۱-۳-۵)$$

که E_f انرژی فرمی[1] است و مربوط به تغییرات توزیع ماکسول - بولتزمن به فرمی - دیراک از دمای T به دمای T_f می‌باشد. نسبت دمای فرمی به دمای پلاسما را با χ نمایش می‌دهیم که به آن پارامتر تبهگنی گفته میشود.

$$\chi = \frac{T_f}{T} = \frac{1}{2}\left(3\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(n\lambda^3{}_B\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (۱-۳-۶)$$

در صورتیکه $\chi \geq 1$ باشد ذرات در سطح فرمی و کاملا تبهگن هستند بنابراین پلاسما را پلاسمای تبهگن می‌گوییم (پلاسمای کوانتومی). به سادگی می‌توان ثابت کرد که χ کمیتی بدون بعد است. چون اندازه‌گیری پارامتر دما به دلیل متغیر بودنش دشوار است کمیت چگالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با افزایش پارامتر χ سیستم به سمت کوانتومی شدن سوق می‌یابد و از آنجاییکه این پارامتر به چگالی وابسته است، از این رو به پلاسماهای کوانتومی پلاسماهای چگال نیز می‌گوییم.

---

[1] . Fermi energy

سرعت:

در محدوده دماهای بسیار پایین سرعت‌های گرمایی بی‌معنا می‌شوند بنابراین سرعتی به نام سرعت فرمی - دیراک[1] را معرفی می‌کنیم:

$$v_T = \left(\frac{k_B T}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{h^2}{M}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱-۳-۷)$$

با فرکانس پلاسما و سرعت فرمی میتوان نوعی مقیاس طول را معرفی کرد:

$$\lambda_f = \frac{v_f}{\omega_p} \qquad (۱-۳-۸)$$

λ_f طول مقیاس الکترواستاتیک در پلاسمای کوانتومی است.

پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی:

این کمیت یک مشخصه مهم از برخوردها در پلاسماهای کوانتومی است که به صورت نسبت انرژی برخوردی (مشابه کلاسیکی) به انرژی جنبشی تعریف می‌گردد. در پلاسماهای کوانتومی برای انرژی جنبشی تعریفی مانند پلاسماهای کلاسیکی نداریم و به جای آن از انرژی فرمی استفاده می‌کنیم.

$$g_Q = \left(\frac{E_{\text{int}}}{E_f}\right) = \left(\frac{1}{n\lambda_f^3}\right) \qquad (۱-۳-۹)$$

با توجه به این رابطه پلاسماهای کوانتومی بر خلاف کلاسیکی، در چگالی بالا به شدت برخوردی هستند.

فرکانس پلاسمایی :

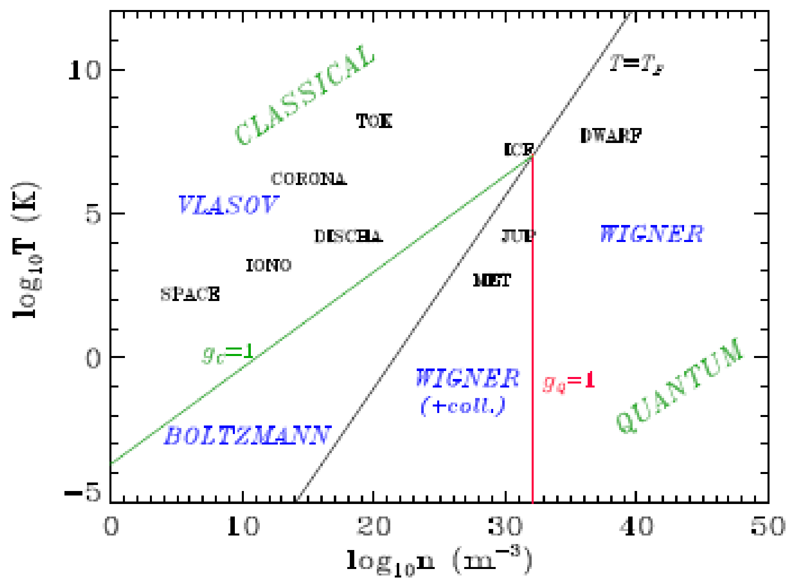
این کمیت در پلاسماهای کوانتومی مقادیر زیادی را به خود اختصاص می‌دهد. در نتیجه زمانی که اثرات جمعی مورد توجه باشد، کمیت بسیار کوچکی است.

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_{s0} e^2}{m_s}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱-۳-۱۰)$$

[1] . Dirac Fermi velocity

۱-۴ تقسیم‌بندی ناحیه‌های مختلف پلاسما

ناحیه‌های مختلف پلاسما



شکل ۱-۱ : نمودار لگاریتمی دما بر حسب چگالی و تعیین محدوده پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی

تا اینجا سه پارامتر بدون بعد برای پلاسماها را معرفی کردیم که عبارتند از : پارامتر جفت شده کلاسیکی[۱] ، پارامتر جفت شده کوانتومی[۲] و پارامتر تبهگنی[۳] که به ترتیب با g_C ، g_Q وχ نشان داده می‌شوند . این پارامترها تابع دما و چگالی سیستم هستند که در شکل (۱-۱) بر حسب نمودار لگاریتمی T-n رژیم‌های گوناگون پلاسمارا توصیف می نماییم.

نمودار به چهار ناحیه تقسیم شده که دو ناحیه کلاسیکی (در بالای خط $T=T_F$) و دو ناحیه دیگر کوانتومی اند. هر ناحیه کوانتوم / کلاسیکی به دو ناحیه برخوردی / غیر برخوردی تقسیم شده است.

همانطور که در شکل بالا دیده می‌شود خط (χ = ۱) $T=T_F$ نمودار را به دو ناحیه تقسیم‌بندی کرده است .

۱ . classic coupling parameter
۲ . Quantum coupling parameter
۳ . parameter degeneration

ناحیه $\chi \leq ۱$ ناحیه کلاسیکی و ناحیه‌ای که $\chi \geq ۱$ باشد وارد ناحیه کوانتومی خواهیم شد. در ناحیه کلاسیکی با توجه به اثرات گرمایی و پدیده برخورد بین ذرات پلاسما، دو ناحیه ولاسف و بولتزمن را داریم. در ناحیه ولاسف به دلیل غالب شدن اثرات گرمایی، از برخوردهای بین ذرات پلاسما صرف‌نظر میکنیم و اصطلاحاً این محدوده را ناحیه کلاسیکی – غیر برخوردی می‌نامیم. خط $g_c=۱$ مرض بین دو ناحیه کلاسیکی بوده و شرط $g_c \leq ۱$ مربوط به ناحیه کلاسیکی – غیربرخوردی می‌باشد. پدیده‌های طبیعی مربوط به این ناحیه : پلاسماهای فضایی، بادهای خورشیدی، تاج خورشید، همجوشی با توکامک، یونوسفر زمین و تخلیه الکتریکی می‌باشد.

ناحیه کلاسیکی دیگر که با شرط $g_c \geq ۱$ همراه است، ناحیه بولتزمن می‌باشد. اگر در یک پلاسمای کلاسیکی پارامتر جفت شده کلاسیکی بزرگتر از ۱ شود، یعنی انرژی داخلی در قیاس با انرژی جنبشی بزرگتر باشد، برخوردها را در نظر می‌گیریم. لذادراین ناحیه برخوردهای بین ذرات را نمی‌توان نادیده گرفت و این ناحیه به شدت جفت شده را محدوده کلاسیکی – برخوردی بولتزمن می نامیم.

با شرط $\chi \geq ۱$ وارد ناحیه کوانتومی می شویم. می بینیم که در این ناحیه چگالی تعداد ذرات به شدت بالاست و دمای نسبتا پایین دارند (از آنجا که در پلاسما دما نسبت به چگالی سنجیده می‌شود، به دلیل گستره بالای چگالی، ذرات درون این محدوده دمای به نسبت پایینی را احساس می‌کنند). ناحیه کوانتومی با خط $g_Q=۱$ به دو زیر ناحیه غیر برخوردی و برخوردی تقسیم می‌شود. جاییکه برخوردهای کولنی بین ذرات همنام و غیرهمنام حائز اهمیت باشند وارد ناحیه wigner(+coll) خواهیم شد که با شرط $g_Q \geq ۱$ همراه است و الکترون‌های فلزی و همچنین هسته سیاره مشتری از پدیده‌های طبیعی این محدوده حساب می‌شوند .

در انتها شرط $g_Q \leq ۱$ مارا به سمت ناحیه کوانتومی – غیربرخوردی سوق می‌دهد. از آنجاییکه برای پلاسمای کاملا تبهگن تمام ذرات در سطح فرمی هستند و دارای انرژی فرمی می‌باشند، پلاسمای کوانتومی را بدون برخورد گوییم زمانیکه انرژی جنبشی (انرژی فرمی) بر انرژی داخلی سیستم غلبه کند. ستارگان کوتوله سفید از پدیده‌های طبیعی این ناحیه محسوب می‌شوند.

۱-۵ کاربردهای پلاسما

پلاسماها را می‌توان با دو پارامتر n و kT_e مشخص کرد. کاربردهای پلاسما گستره‌ی بسیار وسیعی از n و kT_e را در بر می‌گیرند: n از $۱۰^{۶}$ تا $۱۰^{۳۴}$ m^{-3} یعنی بیش از $۱۰^{۲۸}$ برابر تغییر میکند ، و kT میتواند بیش از $۱۰^{۷}$ برابر از ۰٫۱ تا $۱۰^{۶}$ ev تغییر کند. برخی از این کاربردها را به اختصار بیان می‌کنیم :

۱-۵-۱ تخلیه‌های گازی (الکترونیک گازی)[۸]

قدیمی‌ترین کار با پلاسما را لانگمیر[۱] ، تانکس[۲] و همکاران آنها در دهه ۱۹۲۰ انجام دادند. منشأ این تحقیق توسعه لوله‌های خلأ بود به طوری که بتوانند جریان‌های زیاد را عبور دهند و از این رو می‌بایست با گازهای یونیده پر شوند. این تحقیق با تخلیه‌های تابان کم یونش و ستون مثبت نوعاً با $KT_e \approx ۲$ ev و $۱۰^{۱۲} < n < ۱۰^{۱۸}$ m^{-3} انجام شد. اینجا بود که پدیده حفاظ مطرح شد.

۱-۵-۲ فیزیک فضا

کاربرد مهم دیگر فیزیک پلاسما در مطالعه فضای اطراف زمین است. جریانی دائمی از ذرات باردار، که باد خورشید نامیده می شود، به یون سپهر فرود می آید و یون سپهر، که در این فرایند تغییر شکل می‌دهد، مارا از این تابش حفظ می‌کند. یون سپهر که گستره آن از ارتفاع ۵۰ km تا ۱۰ برابر شعاع زمین است توسط پلاسمای یونیده ضعیفی که چگالی آن با ارتفاع $n = ۱۰^{۱۲}$ m^{-3} تغییر می کند اشغال شده است .

۱-۵-۳ پلاسما های حالت جامد[۹]

الکترون های آزاد و حفره ها در نیم رساناها تشکیل پلاسمایی می دهند که دارای همان نوع نوسان‌ها و ناپایداری‌های پلاسمای گازی هستند. حفره‌ها در یک نیم‌رسانا می توانند دارای جرم مؤثر خیلی کمی باشند – به کوچکی $۰٫۰۱\ m_e$ – بنابراین حتی در میدان‌های مغناطیسی متوسط دارای بسامد

---

[۱] . Langmuir

[۲] . Tankes

سیکلوترون خیلی زیادی هستند. همچنین معلوم شده است که بعضی مایعات مانند محلول های سدیم در آمونیاک رفتاری شبیه پلاسما دارند.

۱-۵-۴ اختر فیزیک جدید

درون و جو ستارگان به اندازه کافی داغ هستند که در حالت پلاسما باشند. مثلا، دمای درون خورشید ۲ kev تخمین زده می‌شود، واکنش‌های گرما هسته ای که در این دما رخ می‌دهند باعث تابش خورشید هستند. در خورشید پلاسمای رقیقی با دماهایی تا ۲۰۰ ev وجود دارد. محیط میان ستاره ای شامل هیدروژن یونیده ای با $n \approx ۱۰^{۶}\ m^{-۳}$ است، اگر چه ستارگان در یک کهکشان باردار نیستند اما مانند ذرات پلاسما رفتار می‌کنند و از نظریه جنبشی پلاسما برای پیش بینی توسعهٔ کهکشان‌ها استفاده می‌شود.

نجوم رادیویی منابع متعددی برای تابش که به احتمال قوی از پلاسماها ناشی می‌شوند را کشف کرده‌اند. سحابی خرچنگ یک منبع غنی برای پدیده‌های پلاسما است زیرا معلوم شده است که دارای میدان مغناطیسی است .

همچنین کاربرد های دیگری در : همجوشی گرما هسته ای کنترل شده[۱۰]، تبدیل انرژی مغناطوهیدرودینامیکی و لیزرهای گازی ... دارد.

فصل دوم:

معرفی پلاسما گردو غباری

۲-۱ مقدمه ای بر پلاسمای گردو غباری

در حوالی سال ۱۹۹۰ آنجلیز[۱] با ارائه مقاله‌ای وجود نوع دیگری از پلاسما را گزارش داد که پلاسما غباری نام گرفت. پلاسما غباری به عنوان پلاسما دمای پایین[۲] تعریف می‌شود و از گازهای خنثی، ذرات غبار، یون و الکترون تشکیل شده است. ذرات گرد و غبار دارای جرمی در حدود 10^9 برابر جرم پروتون و اندازه‌ای در حدود نانومتر تا میکرومتر دارند. جنس این ذرات در نواحی مختلف متفاوت است و در اندازه‌های متفاوتی یافت می‌شوند مگر اینکه ساخته دست بشر باشند. به عنوان نمونه در مزوسفر زمین اغلب از جنس یخ و در اگزوز راکتورهای فضایی به صورت گرده‌های اکسید آلومینیوم می‌باشند.

به دلیل وجود ذرات غبار اضافی به پلاسماهای گردوغباری پلاسماهای مختلط [۳] نیز گفته می‌شود. ذرات گردوغبار در پلاسما به دلیل شار بزرگ الکترون‌ها نسبت به یون‌ها، بار منفی بزرگی به دست می‌آورند. به علت وجود همین بار بزرگ می‌توانند بر یکدیگر تأثیر بگذارند. این ذرات در پلاسما تحت تأثیر نیروهای مختلفی قرار می‌گیرند. وجود اینگونه ذرات دانشمندان را به ردیف جدیدی از اثرات کیفی تحقیق نشده رهنمون می‌سازد .

۲-۲ ویژگی های یک پلاسمای گرد و غباری

برای بیان تعریف ساده‌ای از یک پلاسمای گردوغباری می‌توان گفت یک پلاسمای یون – الکترون معمولی بعلاوه مؤلفه‌های باردار شده از ذرات در اندازه‌هایی در حدود میکرون است[۱۱].

یک پلاسما با ذرات یا دانه‌های گرد و غبار را با توجه به چندین مشخصه طولی، می‌توان پلاسما گردوغباری نامید. این مشخصه‌های طولی عبارتند از : شعاع دانه‌ی گردوغبار (r_d)، فاصله متوسط بین دانه‌ها (a)، شعاع دبای پلاسما (λ_D) و ابعاد پلاسما گردوغباری. هنگامیکه شرط $r_d << \lambda_D < a$

[۱]. Anglis
[۲]. Low-Temperature Plasmas
[۳]. Plasma Complex

برقرار باشد: در این حالت ذرات گرد و غباری باردار را به عنوان یک مجموعه از دانه های جدا از هم در نظر می‌گیریم که مربوط به حضور گرد و غبار در پلاسما می شود اگر شرط $r_d << a < \lambda_D$ برقرار باشد، در این حالت به پلاسما، پلاسما گردو غباری گفته می‌شود و ذرات گرد و غبار در رفتارهای دست جمعی شرکت می‌کنند. زمانیکه پلاسما با دانه‌های بار ایزوله $(a \gg \lambda_D)$ در نظر گرفته شود، پلاسمائی غیر همگن خواهیم داشت و از طرف دیگر وقتی پلاسما را در موقعیت مخالف در نظر میگیریم $(a << \lambda_D)$ در این حالت باید رفتار دانه‌های گرد و غباری را مشابه یونهای مثبت و منفی باردار تعریف کنیم. تفاوت اصلی بین یک پلاسمای گرد و غباری با پلاسمای الکترون – یون در جدول(۲-۱) نشان داده شده است. در این جدول نشان داده شده است که توزیعی به صورت نسبت بار به حجم دانه‌ی گردو غباری وجود دارد (q_d/m_d). نمایش بر همکنش بین دانه‌های گرد و غباری توسط الکترون‌ها و یون‌های پس‌زمینه. حضور دانه‌های گرد و غباری باردار شده نه تنها امواج با فرکانس پایین موجود را تغییر میدهند (از جمله: امواج آکوستیکی – یونی (IAW[۱])[۱۲]، امواج ترکیبی پایین تر (LHW[۲])[۱۳] و شوک های یونی (IA)) بلکه نوع جدیدی از امواج مرتبط گرد و غباری با فرکانس پایین را نیز معرفی می‌کنند. (از جمله: امواج صوتی – آکوستیکی گرد و غباری (DAW[۳])[۱۴]، امواج آکوستیکی - یونی گرد و غباری (DIAW[۴])[۱۵]، سالیتون‌ها و شوک‌های آکوستیکی گرد و غباری (DIA)، سالیتون‌ها یا شوک‌های گرد و غباری (DA)و .....).

برای درک درستی از پلاسما گردوغباری برخی از مشخصات اساسی همچون خنثی بودن ماکروسکپی، حفاظ دبای، مشخصه فرکانسی و پارامتر جفت‌شدگی کولنی و ... را به تفصیل بیان می‌کنیم.

---

[۱] .Ion-acoustic waves
[۲] .Lower hybrid waves
[۳] .Dust acoustic waves
[۴] .Dust ion-acoustic waves

Characteristics	Electron–ion plasma	Dusty plasma
Quasi-neutrality condition	$n_{e0} = Z_i n_{i0}$	$Z_d n_{d0} + n_{e0} = Z_i n_{i0}$
Massive particle charge	$q_i = Z_i e$	$\lvert q_d \rvert = Z_d e \gg q_i$
Charge dynamics	q_i = constant	$\partial q_d/\partial t$ = net current
Massive particle mass	m_i	$m_d \gg m_i$
Plasma frequency	ω_{pi}	$\omega_{pd} \ll \omega_{pi}$
Debye radius	λ_{De}	$\lambda_{Di} \ll \lambda_{De}$
Particle size	uniform	dust size distribution
$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_0$ particle drift	ion drift at low B_0	dust drift at high B_0
Linear waves	IAW, LHW, etc	DIAW, DAW, etc
Nonlinear effects	IA solitons/shocks	DA/DIA solitons/shocks
Interaction	repulsive only	attractive between grains
Crystallization	no crystallization	dust crystallization
Phase transition	no phase transition	phase transition

جدول (۲-۱):تفاوت پلاسما گردو غباری و الکترون –یون

۲-۳ خنثایی ماکروسکوپی

زمانیکه هیچ توزیع بار خارجی وجود نداشته باشد پلاسما گرد و غباری مشابه پلاسما الکترون – یون از لحاظ ماکروسکپی خنثی خواهد بود. به عبارتی دیگر، در حالت تعادل بدون حضور نیروهای خارجی بار الکتریکی خالص در پلاسما غباری صفر خواهد بود. بنابراین در حالت تعادل شرط شبه خنثایی به صورت زیر می‌باشد:

$$q_i n_{i0} = e n_{e0} - q_d n_{d0} \qquad (۲-۳-۱)$$

$q_i=Z_i e$ مربوط به بار یون می‌باشد (مقدار بار یون را در حالت سکون $z_i=1$ در نظر می گیریم)، $q_d = z_d e (-z_d e)$ بار دانه‌های غبار در حالتیکه دانه‌های غبار به صورت مثبت (منفی) باردار شده‌اند که در آن e اندازه بار الکترون و z_d تعداد بارهای موجود روی سطح دانه‌ی گردوغباری می‌باشند. دانه‌ی گردوغباری باری در حدود هزار تا چندین هزار برابر بار الکترون بدست می‌آورد. بنابراین هنگامی که $n_{d0} \ll n_{i0}$ است $z_d n_d$ قابل مقایسه با n_{i0} خواهد بود. در اکثر پلاسماهای آزمایشگاهی و فضائی اغلب الکترون‌های زمینه روی سطح دانه‌های گردوغباری می‌چسبند. در نتیجه در محیط پلاسما با کمبود الکترون مواجه خواهیم شد بنابراین برای دانه‌های گردوغباری باردار با بار منفی معادله (۲-۳-۱) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$n_{i0} = Z_d n_{d0}$$ (۲-۳-۲)

۲-۴ حفاظ دبای

یکی از مشخصات اساسی پلاسما توانایی آن برای نگه داشتن میدان الکتریکی یک ذره باردار یا به عبارتی سطحی با پتانسیل غیر صفر است. این مشخصه فاصله‌ای در اطراف ذره باردار می‌باشد که در این ناحیه میدان الکتریکی توسط هر ذره باردار دیگری احساس می‌شود.

برای تصور میدان الکتریکی در اطراف دانه‌ی غبار، گلوله بارداری در درون پلاسما غباری در نظر گرفته می‌شود. گلوله ذرات با بار مخالف را جمع می‌کند. یعنی اگر بار گلوله مثبت باشد ابری از الکترون‌ها و ذرات غبار با بار منفی در اطراف آن جمع می‌شود و بالعکس. همچنین فرض می‌شود، ترکیب مجددی از ذرات پلاسما روی سطح گلوله اتفاق نمی‌افتد. اگر پلاسما سرد باشد و هیچگونه حرکت حرارتی وجود نداشته باشد، تعداد بار ابر برابر با تعداد بار گلوله می‌گردد. در این صورت عمل حفاظ کامل می‌گردد و هیچ میدان الکتریکی در حجم پلاسما در خارج از ناحیه ابرها وجود نخواهد داشت. از طرف دیگر، اگر دما معین و محدود باشد ذراتی که در لبه‌ی ابر جایی که میدان الکتریکی ضعیف است قرار گرفته باشند، انرژی حرارتی کافی برای فرار از لبه‌ی ابر یا به عبارتی چاه پتانسیل الکتروستاتیکی پیدا می‌کنند. در این صورت لبه‌ی ابر در شعاعی واقع می‌شود که در آنجا انرژی پتانسیل تقریبا برابر با انرژی حرارتی k_BT_s، ذرات است (k_B ثابت بولتزمن و T_s دمای ذره نوع s پلاسما است) و حفاظ کامل نیست و یک پتانسیل الکتریکی محدود وجود خواهد داشت .

برای محاسبه‌ی ضخامت تقریبی ابر غبار فرض می‌شود پتانسیل $\varphi_s(r)$ در مرکز ابر ($r=0$) برابر φ_{s0} است. بعلاوه نسبت جرم غبار به جرم یون m_d/m_i به قدری بزرگ است که اینرسی ذرات غبار مانع از حرکت قابل توجه آنها می‌گردد. ذرات غباری خیلی سنگین و باردار پس زمینه یکنواختی با بار منفی را تشکیل می دهند. فرض می‌شود الکترون‌ها و یون‌ها در تعادل حرارتی موضعی قرار دارند و چگالی

آنها، n_e و n_i از توزیع بولتزمن پیروی می‌کنند. (به این دلیل که از جرم الکترون – یون نسبت به ذرات گرد و غباری صرف نظر می‌کنیم).

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\varphi_s}{k_B T_e}\right) \quad (۱-۴-۲)$$

$$n_i = n_{i0} \exp\left(\frac{-e\varphi_s}{k_B T_i}\right) \quad (۲-۴-۲)$$

n_{e0} و n_{i0} مربوط به چگالی الکترون – یون در ناحیه‌ای خیلی دورتر از ابر است . برای شرایط غباری حاضر، معادله پواسون به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla^2 \varphi_s = 4\pi\left(en_e - en_i - q_d n_d\right) \quad (۳-۴-۲)$$

n_d مربوط به چگالی ذرات غبار است که بر طبق فرضیات در داخل و خارج ابر یکسان می‌باشد یعنی: $q_d n_d = q_d n_{d0} = en_e - en_i$ با جایگزینی معادلات (۲-۴-۱) و (۲-۴-۲) در (۲-۴-۳) و در نظر گرفتن $e\varphi_s/k_B T_e << ۱$ و $e\varphi_s/k_B T_i << ۱$ داریم :

$$\nabla^2 \varphi_s = \left(\frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2}\right)\varphi_s \quad (۴-۴-۲)$$

$\lambda_{De} = (k_B T_e/4\pi n_{e0} e^2)^{1/2}$ و $\lambda_{Di} = (k_B T_i/4\pi n_{i0} e^2)^{1/2}$ به ترتیب شعاع دبای الکترون و یون می‌باشند. قابل ذکر است تقریب $e\varphi_s/k_B T_e \ll ۱$ و $e\varphi_s/k_B T_i \ll ۱$ ممکن است در نواحی نزدیک r =0 معتبر نباشند. به هر حال در این ناحیه که پوسته نامیده می‌شود، پتانسیل φ_s که به صورت $\varphi_s = \varphi_{s0} \exp(-r/\lambda_D)$ می‌باشد سریعاً نزول می‌کند و سهم زیادی در ضخامت ابر ندارد.

از معادله ی (۲-۴-۴) مقدار طول دبای پلاسما گرد و غباری به صورت زیر خواهد بود :

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{De}\lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}} \quad (۵-۴-۲)$$

کمیت λ_D اندازه‌ای از فاصله حفاظ یا ضخامت پوسته است. برای یک پلاسما غباری با دانه‌های غبار منفی $\lambda_{De} >> \lambda_{Di}$ است، در نتیجه $\lambda_D \approx \lambda_{De}$ می‌شود. می‌توان اینگونه تعبیر کرد که در یک پلاسما

غباری با دانه‌های غبار منفی فاصله حفاظتی یا ضخامت پوسته اساساً توسط دما و چگالی یون‌ها مشخص می‌شود. در مقابل اگر دانه‌های غبار به طور مثبت باردار شوند و بیشتر یون‌ها بر سطح دانه‌های غبار چسبیده باشند به طوریکه $T_e n_{i0} \ll T_i n_{e0}$ ، $\lambda_{Di} >> \lambda_{De}$ است، در نتیجه $\lambda_D \approx \lambda_{Di}$ می‌شود. بنابراین در یک پلاسما غباری با دانه‌های غبار مثبت فاصله حفاظ یا ضخامت پوسته به وسیله دما و چگالی الکترون‌ها مشخص می‌گردد.

۲-۵ فرکانس‌های مشخصه

مشابه پلاسما الکترون – یون معمولی یکی از خاصیت‌های مهم پلاسما گرد و غباری ثبات خنثایی بار در فضای ماکروسکپی است. زمانی که پلاسما از حالت تعادل منحرف می‌شود، میدان بار – فضا داخلی به وجود آمده، باعث می‌شود ذرات در جهتی حرکت کنند که به حالت خنثایی اولیه باز گردند. این مجموعه حرکات توسط فرکانس طبیعی نوسانات که فرکانس پلاسمایی ω_p نامیده می‌شود، مشخص میگردند. برای بدست آوردن فرکانس پلاسمایی ω_p در یک پلاسما غباری غیر مغناطیده، سرد و یکنواخت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نوسانات الکتروستاتیک الکترون‌ها ، یون‌ها یا ذرات غبار که مربوط به میدان بار – فضای داخلی می‌شوند، توسط معادلات زیر توصیف می‌گردند:

معادله پیوستگی (۲-۵-۱)
$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla\left(n_s v_s\right) = 0$$

معادله حرکت (۲-۵-۲)
$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \left(u_s.\nabla\right)u_s = -\frac{q_s}{m_s}\nabla\varphi$$

معادله پواسون (۲-۵-۳)
$$\nabla^2\varphi = -4\pi\sum q_s n_s$$

برای سادگی از نیروهای گرادیان فشار صرف نظر می‌کنیم. فرض می‌کنیم دامنه نوسانات خیلی کوچک است به طوریکه می‌توان از جملات دامنه با توان بالا صرف‌نظر کرد، یعنی نظریه خطی معتبر است. در حالت تعادل همه ذرات پلاسما (الکترون‌ها ، یون‌ها و دانه‌های غبار) در حالت سکون هستند. حال اگر میدان بار – فضا در حالت تعادل نباشد فرض می‌شود، چگالی به صورت $n_s = n_{s0} + n_{s1}$ به طوریکه

$n_{s1} << n_{s0}$ است تغییر یابد. خطی سازی معادلات (۲-۵-۱) تا (۲-۵-۳) و ترکیب آنها به معادله‌ی زیر می‌رسیم :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\varphi + 4\pi\sum\frac{q_s^2 n_{s0}}{m_s}\nabla^2\varphi = 0 \qquad (۲-۵-۴)$$

معادله (۲-۵-۴) را تحت شرایط مرزی مناسب (یعنی در $r = 0$ و $\varphi = 0$ باشد) محاسبه کرده و با جایگزین کردن $\partial/\partial t$ به جای d/dt معادله‌ی (۲-۵-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_p^2\varphi = 0 \qquad (۲-۵-۵)$$

که در آن :

$$\omega_p^2 = \sum\frac{4\pi n_s . q_s^2}{m_s} = \sum\omega_{ps}^2 \qquad (۲-۵-۶)$$

$\omega_{ps} = (4\pi n_{s0} q_s^2/m_s)^{1/2}$ فرکانس پلاسمایی ذره نوع s را نشان می‌دهد. معادله (۲-۵-۶) نشان می‌دهد، پتانسیل بار – فضا داخلی با فرکانس ω_p نوسان می‌کند. این فرآیند را می‌توان اینگونه تعبیر کرد که وقتی ذرات پلاسما از موضع‌های تعادلی خود جابجا می‌شوند، میدان بار – فضا در جهتی ایجاد خواهد شد که با هل دادن ذرات به عقب به موضع اولیه‌شان، پلاسما را به حالت خنثی اولیه باز خواهد گرداند. بنابراین حول نقطه تعادلی خود به طور پیوسته نوسان خواهند کرد. البته فرکانس چنین نوساناتی برای الکترون‌ها، یون‌ها و دانه‌های غبار یکسان نخواهد بود اما به جرم و بار ذرات پلاسما بستگی خواهد داشت. به عنوان مثال : الکترون‌ها حول یون‌ها با فرکانس پلاسمایی الکترونی

$\omega_{pe} = (4\pi n_{e0} e^2/m_e)^{1/2}$، یون‌ها حول دانه‌های غبار باردار با فرکانس پلاسمای یونی $\omega_{pi} = (4\pi n_{i0} e^2/m_i)^{1/2}$ و ذرات غبار حول نقطه تعادلی خود با فرکانس پلاسمایی غبار $\omega_{pd} = (4\pi n_{d0} z_d^2 e^2/m_d)^{1/2}$ نوسان می‌کنند.

مشخصه مهم دیگر فرکانس‌ها مربوط به برخورد ذرات پلاسما با ذرات خنثی ساکن است. فرکانس برخورد الکترون با ذرات خنثی υ_{en} ، فرکانس برخورد یون با ذرات خنثی υ_{in}، فرکانس برخورد دانه‌های غبار با ذرات خنثی υ_{dn} است.

فرکانس برخورد υ_{sn} برای پراکندگی ذرات نوع s پلاسما توسط ذرات خنثی به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\nu_{sn} = n_n \sigma_s^n \upsilon T_s \tag{۲-۵-۷}$$

n_n چگالی ذرات خنثی ، $\sigma_s{}^n$ سطح مقطع پراکندگی است و وابستگی ضعیفی به دمای T_s دارد $\upsilon T_s = (k_B T_s / m_s)^{1/2}$ سرعت حرارتی ذرات نوع s است. برخوردهای بین ذرات پلاسما با ذرات خنثی ساکن سبب می شود که تمایل به میرایی نوسانات جمعی پیدا کرده و آهسته آهسته دامنه آنها تقلیل میابد. نوسانات تنها زمانی که فرکانس برخورد ν_{sn} از فرکانس پلاسمایی ω_p کوچکتر باشد. یعنی : $\nu_{en}, \nu_{in}, \nu_{dn} < \omega_p$ اندکی میرا خواهند شد.

۲-۶ پارامتر جفت شدگی کولنی

مهمترین مشخصه سیستم برهمکنشی چند ذره‌ای، ثابت جفت‌شدگی کولنی است که احتمال تشکیل کریستال‌های پلاسمای غباری را تعیین می‌کند. برای توضیح این مشخصه دو دانه غبار با بار یکسان q_d که در فاصله‌ی a از یکدیگر قرار دارند، در نظر گرفته می‌شود. انرژی پتانسیل کولنی[۱] غبار عبارت است (که شامل تأثیر حفاظ نیز هست) :

$$\varepsilon_c = \frac{q_d^2}{a} \exp\left(\frac{-a}{\lambda_D}\right) \tag{۲-۶-۱}$$

و ($k_B T_s$) انرژی حرارتی گرد و غباری می‌باشد. پارامتر جفت‌شدگی کولنی Γ_c، نسبت انرژی پتانسیل به انرژی حرارتی غبار است که به صورت زیر می‌باشد :

[۱] .Dust Coulomb potential energy

$$\Gamma_c = \frac{z_d^2 e^2}{a k_B T_d} \exp\left(\frac{-a}{\lambda_D}\right)$$
(۲-۶-۲)

هنگامی که۱ << Γ_c است، پلاسما غباری یک سیستم جفت شده ضعیف و هنگامی که $\Gamma_c >> 1$ باشد جفت شدگی قوی خواهیم داشت. بنابراین تعداد بارهایی که روی سطح دانه‌های گرد و غباری افزایش پیدا می‌کنند (z_d)، نسبت فاصله بین دوبار به طول دبای (a/λ_D) و انرژی حرارتی غبار ($k_B T_d$) نقش تعیین کننده‌ای در تشخیص اینکه پلاسمای غباری جفت‌شده قوی یا ضعیف خواهد بود دارند. به آسانی در سیستم‌های پلاسمای غباری آزمایشگاهی می‌توان نشان داد که دانه‌های غبار سنگین به علت بار الکتریکی بزرگ ($Z_d \sim ۱۰^۳ e - ۱۰^۴ e$)، دمای پایین و فاصله کم بین دانه‌ها، جفت شده قوی هستند.

۲-۷ پلاسمای گردو غباری در فضا

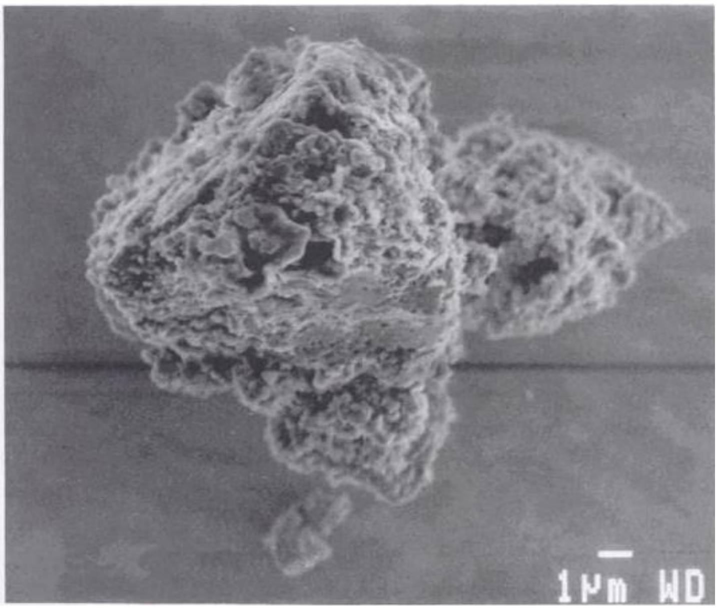
حضور پلاسما گرد و غباری را می‌توانیم در فضا و در بعضی از قسمت‌های آن مشاهده کنیم[۱۶]. وجود دانه‌های غبار در سیستم‌هایی چون ابرهای بین ستاره‌ای، سیستم خورشیدی و ... به خوبی شناخته شده است. فاصله‌ی میان ستارگان به مقدار زیادی از گاز و غبار پر شده است. انعقاد دانه‌های غبار در سحابی خورشیدی باعث تشکیل سیارک‌ها می‌شود. فضای بین سیاره‌ای پر از غبار است که با عنوان غبار بین سیاره‌ای[۱] شناخته شده است. دنباله‌دارها [۲] از ترکیب دانه‌های غیر فرار و گازهای یخزده به وجود می‌آیند و مدارهای بیضوی کاملاً کشیده‌ای دارند که در مدار خود به دور خورشید طی مسیر می‌کنند تا به خورشید نزدیک شوند. گرمای خورشید باعث گرم شدن دنباله‌دار شده، در این حالت از خود نور ساطع می‌کند و قسمتی از آن به غبار و گاز تبدیل می‌شود که دنباله‌دار را ترک کرده و دنباله را پدید می‌آورند. این امر باعث ایجاد ۰,۲۵ تا ۲۰ تن در ثانیه گاز گرد و غباری در منظومه شمسی می گردد[۱۷]. فشار پرتو خورشید و بادهای خورشیدی به ذرات شتابی می‌دهد که با سرعت‌های متفاوت بر اساس

۱ .Interplanetary dust
۲ .Comets

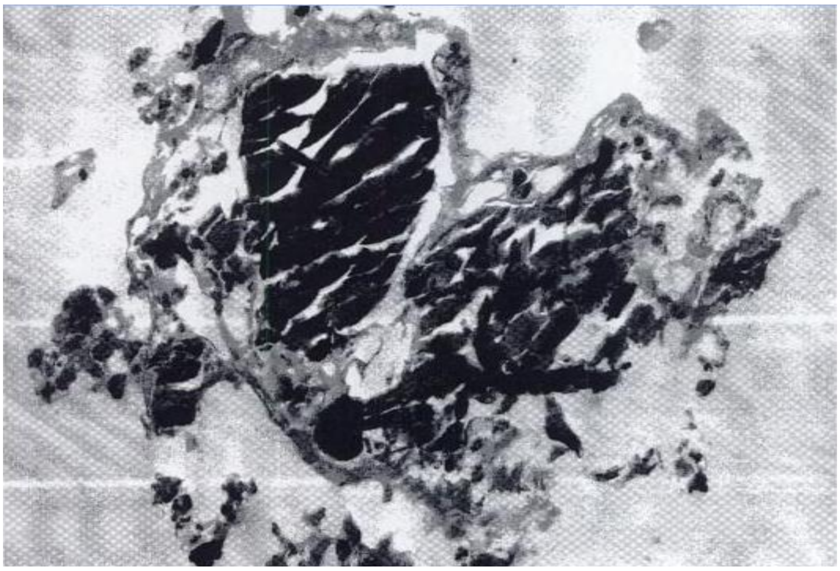
اندازه و جرم ذرات از سر دنباله‌دار دور می‌شوند . بنابراین دنباله‌های غبار نسبتاً سنگین به آرامی شتابدار شده و تمایل دارند خمیده شوند. دنباله یونی جرم خیلی کمتری دارد و شتابش آنقدر زیاد است که به صورت یک خط تقریباً راست دور از دنباله در جهت دور شدن از خورشید نمایان می‌شود.

از دیگر منابع مهم گرد وغبار بین سیاره‌ای، سیارک‌ها هستند که بیشتر گرد و غبار خود را در اثر برخوردهای متقابل در کمربند سیارک‌ها تولید می‌کنند.

ذرات گرد و غباری بین سیاره‌ای اغلب ظاهری کرکی بسیار شکننده دارند. خارج و داخل ذرات بین سیاره ای در شکل ۲-۱ و ۲-۲ نشان داده شده است. برخی از این ذرات آنقدر شکننده‌اند که زمانیکه تحت تأثیر سطح جمع کننده قرار می‌گیرند فروپاشی در آنها صورت می‌گیرد . اغلب ذرات بین سیاره‌ای سرشار از کربن هستند در غیر اینصورت آنها معمولاً از دانه‌های مواد معدنی ریز تشکیل شده‌اند .



۲-۱ پیدایش دانه های گرد و غباری بین ستاره ای



۲-۲ نمایش نمونه‌ای از ذرات گردوغباری داخلی بین سیاره‌ای که توسط میکروسکوپ‌های الکترونی گرفته‌شده است.

۲-۷-۱ حلقه های سیاره ای[۱]

تاکنون بسیاری از سیاره‌های غول‌پیکر کشف شده است که حلقه‌های این سیارات از ذرات گرد و غباری در حد میکرون ساخته شده‌اند. از جمله : مشتری[۲] ، زحل[۳] ، اورانوس[۴] ، نپتون[۵]

۲-۷-۲ اتمسفر زمین

بخش مهمی از اطراف ما، جاییست که ذرات گرد و غباری باردار حضور دارند[۱۸]. یکی از مهمترین منابع گرد و غبار در اتمسفر زمین آلودگی‌های ساخته بشر است. (ذرات معلق درهوا) این امر به طور عمده (۹۰ درصد) درشکلی از اکسید آلومینیوم (Al_2O_3) کروی در اندازه‌هایی از ۰,۱ μm تا ۱۰ μm یافت می‌شود ، که منشاء آن در موشک واگزوز شاتل فضایی است[۱۹]. اندازه‌گیری‌های اخیر برخی از

---

۱ . Planetary rings
۲ .Jupiter
۳ .Saturn
۴ .Uranus
۵ .Neptune

خواص اساسی از ذرات گرد و غبار در زمین را فراهم می‌کند این موارد در جدول ۲-۲ نشان داده شده است. وابسته به موقعیت‌هایی که برای پلاسما و گرد و غبار ایجاد می‌شود ویژگی‌های آنها تغییر می‌کند

.

Origin	Composition	Radius (μm)	Density (cm^{-3})
Shuttle exhausts	dirty ice	5×10^{-3}	3×10^4
Terrestrial aerosol	Al_2O_3 spheroid	0.1–10	10^{-10}–10^{-6}
Micrometeoroid	60% chondritic, 30% iron–sulfur–nickel, 10% silicates	5–10	10^{-10}–10^{-9}
Industrial contamination	magnetite spherules	~10	~10^{-5}

۲-۲ ترکیب ، اندازه و چگالی ذرات گرد و غباری در اتمسفر زمین

۲-۸ فرآیندهای باردار شدن دانه‌های غبار

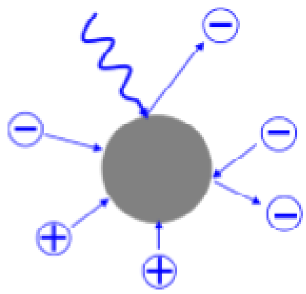
نکته اصلی در فیزیک پلاسما درک باردار شدن دانه‌های غبار است. فرآیندهای اولیه که منجر به باردار شدن دانه‌های غبار می‌شود کاملاً پیچیده است و به محیط اطراف دانه‌ها بستگی دارد.

عناصر اصلی و مهم فرآیندهای باردار شدن دانه‌های غبار عبارتند از :

۱. برهمکنش دانه‌های غبار با ذرات گازی پلاسما

۲. برهمکنش دانه‌های غبار با ذرات پر انرژی الکترون‌ها و یون‌ها

۳. برهمکنش دانه‌های غبار با فوتون‌ها



۲-۳ باردار شدن دانه غبار

دانه غبار کروی ایزوله شده $(r_d \ll \lambda_D \ll a)$ ، در نظر گرفته می‌شود. هنگامی‌که دانه‌های غبار در پلاسمای گازی قرار می‌گیرند، ذرات پلاسما (الکترون‌ها و یون‌ها) توسط دانه‌های غبار جمع‌آوری می‌شوند. از این‌رو دانه‌های غبار از طریق مجموعه‌ای از ذرات که بر روی سطح پلاسما جریان دارند باردار می‌گردند. بار دانه‌ی غبار (q_d) از طریق رابطه‌ی $dq_d/dt = \sum I_j$ تعیین می‌شود که در آن j به ذرات پلاسمایی (الکترون و یون) و I_j به جریان مرتبط با این ذرات اختصاص پیدا می‌کند. در حالت تعادل جریان خالص بر روی سطح دانه‌های غبار برابر صفر است. یعنی : $\sum I_j. = ۰$ که در آن I_j. جریان تعادلی نامیده می‌شود.

دانه‌های غبار موجود در یک پلاسمای گازی معمولاً دارای بار منفی هستند. زمانیکه ذرات پر انرژی پلاسما روی سطح دانه‌های غبار قرار می‌گیرند، توسط دانه‌های غبار منعکس می‌شوند یا از میان آن‌ها عبور می‌کنند. در حین عبور ممکن است بخشی از انرژی خود را از دست بدهند. این انرژی از دست رفته را می‌توانیم به الکترون‌هایی که برانگیخته شده‌اند اختصاص دهیم که به کمک آن از سطح دانه‌ها فرار می‌کنند. الکترون‌های منتشر شده، تحت عنوان الکترون‌های ثانویه شناخته می‌شوند. آزاد شدن این الکترون‌ها منجر به مثبت شدن سطح دانه‌های غباری می‌گردد .

در روش سوم قرار گرفتن فوتون‌ها روی سطح دانه‌های غباری باعث گسیل الکترون از سطح دانه‌های غباری می‌گردد. دانه‌هایی که فوتوالکترون گسیل می‌کنند می‌توانند دارای بار مثبت باشند، الکترون‌های گسیل شده با دیگر ذرات غباری برخورد کرده و توسط برخی از این ذرات که دارای بار منفی هستند به دام می‌افتند از این طریق سطح دانه‌ها باردار می‌شود.

روش‌های دیگری نیز برای باردار کردن دانه‌های غباری وجود دارد که عبارتند از: انتشار گرما یونی، میدان‌های انتشار، رادیواکتیویته، یونیزاسیون و ... که تنها در برخی از شرایط خاص قابل توجه است .

۲-۹ پلاسماهای غباری در آزمایشگاه‌ها

دو تفاوت اساسی بین پلاسماهای غباری آزمایشگاهی و پلاسماهای موجود در فضا و اختر فیزیک وجود دارد. اولاً، تخلیه بار آزمایشگاهی در این پلاسماها دارای مرزهای هندسی است که ساختار ، ترکیب ،

درجه حرارت ، رسانندگی و ... را تحت تأثیر شکل و نحوه جا به جایی ذرات غباری تغییر می‌دهد و ثانیاً ، مدار خارجی که این پلاسماها را حفظ می‌کند شرایط مرزی زمانی و مکانی مختلفی را روی تخلیه بار غبار تحمیل میکند . چگونگی رخ دادن این دو تفاوت را به راحتی میتوان از طریق بررسی دستگاههای آزمایشگاهی از قبیل : راکتورهای فرآیندهای پلاسمایی ، تخلیه بار فرکانس رادیویی ، جریان‌های مستقیم دستگاههای پخش پلاسما ، تولیدات احتراق برای سوخت جامد و ......مشاهده کرد .

فصل سوم:

بررسی امواج خطی در پلاسماهای غباری

۳-۱ مقدمه

ذرات باردار در یک پلاسما به صورت کاتوره‌ای حرکت می‌کنند و از طریق نیروهای الکترومغناطیسی با یکدیگر برهمکنش می‌کنند و همچنین به آشفتگی خارجی که اعمال می‌شود پاسخ می‌دهند. بنابراین، انواع زیادی از پدیده‌های جمعی به دلیل حرکت منسجم مجموعه‌ای از ذرات پلاسما ناشی می‌شود[۲۰]. پلاسمای الکترون – یون هر دو موج طولی و عرضی را پوشش می‌دهد. به عنوان مثالی از امواج طولی در یک پلاسما غیر مغناطیده امواج لانگمیر[۱] و امواج آکوستیکی یونی است که با چگالی و نوسانات پتانسیل همراه هستند. از سوی دیگر ، امواج عرضی در یک پلاسمای غیرمغناطیده با نوسانات چگالی سر و کار ندارند. حضور میدان مغناطیسی خارجی امکان وجود انواع زیادی از موج‌های عرضی و طولی را فراهم میکند. زمانیکه دانه‌های گرد و غباری خنثی به یک پلاسما الکترون – یون اضافه می‌گردد در طی فرآیندهای خاصی باردار می‌شوند. حضور دانه‌های گردوغباری باردار می‌تواند باعث تغییر یا حتی تسلط بر انتشار موج گردد.

اصلاح پدیده موج با توجه به ناهمگن بودن محیط پلاسما که با توزیع تصادفی ذرات باردار و خارج شدن از حالت شبه خنثی معمول پلاسما الکترون – یون در حضور ذرات گردوغباری باردار مرتبط است اتفاق می‌افتد، که این امر با توجه به دینامیک ذره گرد و غباری می‌باشد. شبه خنثایی در یک پلاسمای غباری با یک تک یون باردار شده در تعادل است :

---

[۱] .Langmuir

$$en_{i0} - en_{e0} + q_{d0}n_{d0} = 0 \qquad (۳-۱-۱)$$

زمانیکه دانه‌های غباری دارای بار مثبت هستند ، بیشتر الکترون‌ها از پس زمینه پلاسما جذب سطح دانه غباری می گردند($n_{e0} \ll n_{i0}$) . از معادله (۳-۱-۱) داریم:

$$n_{i0} \cong P_{di} n_{i0} \frac{e|\varphi_d|}{k_B T_i} \qquad (۳-۱-۲)$$

از سوی دیگر زمانیکه دانه‌های غباری دارای بار منفی هستند ، بیشتر یون‌ها از پس زمینه پلاسما جذب سطح دانه‌ی غباری می‌گردند($n_{i0} \ll n_{e0}$). از معادله (۳-۱-۲) داریم:

$$n_{e0} \approx P_{de} n_{e0} \frac{e|\varphi_d|}{k_B T_e} \qquad (۳-۱-۳)$$

در این معادلات $P_d = 4\pi n_{d0} r_d \lambda_D^2$ یک پارامتر غباری است که به شعاع ، چگالی و طول دبای پلاسما غباری وابسته است. معادلات (۳-۱-۲) و (۳-۱-۳) نوع جدیدی از حالت شبه خنثایی را برای یک پلاسما الکترون – ذرات غباری مثبت و یون – ذرات غباری منفی به نمایش می‌گذارد. در این فصل درباره‌ی مشخصات امواج طولی و عرضی با فرکانس پایین در پلاسماهای غباری چه در شرایط مغناطیده شده چه غیر مغناطیده بحث می‌کنیم.

فرض می‌کنیم در یک پلاسمای غباری جفت نشده ضعیف، r_d شعاع دانه، میانگین فاصله‌ی فضایی بین ذرات a که بسیار کوچکتر از شعاع دبای λ_D پلاسما غباری است و شعاع گرما یونی ρT_i (اگر در محیط میدان مغناطیسی حضور داشته باشد) را داشته باشیم. همچنین فرض می‌کنیم که درون حوزه دبای پلاسما غباری به اندازه کافی دانه‌های غباری وجود دارد که می‌توانند در یک برهمکنش جمعی شرکت داشته باشند.

۳-۲ دینامیک دانه‌ی غباری

الگوهای دینامیکی ذرات غباری باردار که توسط ماهواره‌ها فرستاده شده است نشان می‌دهد که میدان‌های الکترومغناطیسی و نیروهای مختلف از جمله نیروهای گرانشی روی ذرات غباری تأثیر

می‌گذارند . از سوی دیگر ، در پلاسماهای آزمایشگاهی، ذرات غباری اغلب نزدیک دیواره‌های پلاسما جمع می‌شوند و باعث ایجاد ناخالصی در زیر لایه‌ها می‌گردند. از این رو رفتار ماکروسکپی ذرات غباری تحت تأثیر نیروهای مختلف به منظور کنترل انتقال دانه‌های غباری حائز اهمیت است.

۳-۲-۱ نیروهای مؤثر بر دانه‌های غباری

شماری از نیروها از قبیل : نیروی الکترومغناطیسی، نیروی گرانشی، نیروی گرمایی، نیروی فشار تابشی و ... ممکن است روی دانه‌های غباری عمل کنند و بر دینامیک آن‌ها حاکم شوند. معادله‌ی زیر، معادله‌ی پایه حاکم بر دانه‌ی غباری باردار را نشان می‌دهد:

$$m_d \frac{dv_d}{dt} = F_{EL} + F_G + F_D + F_T + F_P \qquad (۳-۲-۱-۱)$$

در این معادله F_{EL} اثر نیروی الکترومغناطیسی، F_G اثر نیروی گرانشی که به جاذبه‌ی بین ذرات غباری با یکدیگر (در صورتیکه به اندازه کافی سنگین باشند) یا برهمکنش بین ذرات پلاسما با دانه‌های غباری مربوط می‌شود، F_T اثر نیروی گرمایی وگرادیان درجه حرارت گازهای خنثی و F_D نیروی کششی و در آخر F_P اثر نیروی فشار تابشی را نشان می‌دهد.

۳-۳ مدهای آکوستیکی[۱]

دو نوع مد آکوستیکی در یک پلاسمای غباری یکنواخت، غیر مغناطیده و بی برخورد به همراه جفت‌شدگی ضعیف کولنی بین دانه‌های غباری باردار وجود دارد. امواج آکوستیکی گرد و غباری (DA) و امواج آکوستیکی یونی گرد و غباری (DIA) از این دسته هستند.

۳-۴ امواج آکوستیکی غباری (DA)[۲]

امواج آکوستیکی غباری از لحاظ نظری توسط رائو[۳] (۱۹۹۰) پیش بینی شد[۲۱] که در یک پلاسمای غباری بی‌برخورد و چند مؤلفه‌ای که شامل الکترونها، یونها و دانه‌های غباری باردار شده با بار منفی

[۱] . Acoustic Modes
[۲] . Dust-acoustic waves
[۳] .Rao

است، حضور دارد. سرعت فاز امواج آکوستیکی غباری نسبت به سرعت گرمایی الکترو نها و یونها بسیار کوچک می‌باشد. از اینرو باعث ایجاد تعادل الکترون‌ها و یونها در پتانسیل φ در امواج آکوستیکی غباری می‌گردد. گرادیان فشار نیز بر اثر نیروی الکتریکی برقرار است و منجر به توزیع ماکسول – بولتزمن برای چگالی الکترون‌ها و یون‌ها می شود بنابراین:

$$n_{e1} \approx n_{e0} \frac{e\varphi}{k_B T_e} \qquad (۳-۴-۱)$$

$$n_{i1} \approx -n_{i0} \frac{e\varphi}{k_B T_i} \qquad (۳-۴-۲)$$

اینرسی گرد و غبار برای امواج آکوستیکی غباری بسیار مهم است، از این رو توزیع چگالی ذرات غباری از رابطه پیوستگی زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial n_{d1}}{\partial t} + n_{d0} \nabla . v_d = 0 \qquad (۳-۴-۳)$$

و معادله حرکت ذرات غباری :

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} = -\frac{q_{d0}}{m_d} \nabla \varphi - \frac{3k_B T_d}{m_d n_{d0}} \nabla n_{d1} \qquad (۳-۴-۴)$$

که n_{d1} و v_d مربوط به توزیع چگالی ذرات غبار و سرعت آن می‌باشد. از طرفی طبق معادله پوواسون[۱] داریم:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi(\mathrm{e}n_{e1} - q_{d0} n_{d1} - e n_{i1}) \qquad (۳-۴-۵)$$

برای سادگی فرض می‌کنیم بار گرد و غباری q_{d0} یک مقدار ثابت است. با ترکیب معادلات (۳-۴-۳) و (۳-۴-۴) رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Td}^2 \nabla^2) n_{d1} = \frac{n_{d0} q_{d0}}{m_d} \nabla^2 \varphi \qquad (۳-۴-۶)$$

[۱] .Poisson equation

وبا جایگذاری معادلات (۳-۴-۱) و (۳-۴-۲) در معادله (۳-۴-۵)داریم:

$$n_{i1}=-n_{i0}\frac{e\varphi}{k_BT_i} \qquad\qquad n_{e1}=n_{e0}\frac{e\varphi}{k_BT_e}$$

$$\nabla^2\varphi=k_D^2\varphi-4\pi q_{d0}n_{d1}$$

(۳-۴-۷)

اگر فرض کنیم : $n_{d1}=n_{d1}\exp(-i\omega t+ik.r)$ و $\varphi=\varphi exp(-i\omega t+ik.r)$ که ω و k فرکانس و بردار موج هستند. با تبدیل فوریه معادلات (۳-۴-۶) و (۳-۴-۷) یعنی ($\partial/\partial t=-i\omega$ و $\partial/\partial x=ik$) و ترکیب نتایج آنها به رابطه پاشندگی مربوط به امواج آکوستیکی غباری می‌رسیم:

$$1+\frac{k_D^2}{k^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2-3v_{Td}^2k^2}=0$$

(۳-۴-۸)

$$\omega^2=3v_{Td}^2k^2+\frac{k^2C_D^2}{1+k^2\lambda_D^2}$$

(۳-۴-۹)

در معادله (۳-۴-۹) سرعت امواج DA از رابطه $C_D=\omega_{pd}\lambda_D$ بدست می‌آید. اگر $\omega>>kv_{Td}$ باشد فرکانس موج DA به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega=\frac{kC_D}{(1+k^2\lambda_D^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(۳-۴-۱۰)

برای طول موج‌های بلند محدود ($k^2\lambda_D^2<<1$) داریم:

$$\omega=\frac{kC_D}{(1+k^2\lambda_D^2)^{\frac{1}{2}}}=kC_D(1+k^2\lambda_D^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\omega=k\,\omega_{pd}\lambda_D(1+k^2\lambda_D^2)^{-\frac{1}{2}}=k\,(\frac{4\pi n_{d0}z_{d0}^2e^2}{m_d})^{\frac{1}{2}}(\frac{k_B}{4\pi e^2}(\frac{T_e}{n_{e0}}+\frac{T_i}{n_{i0}})^{\frac{1}{2}}(1+k^2\lambda_D^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\omega=kz_{d0}(\frac{n_{d0}}{n_{i0}})^{\frac{1}{2}}(\frac{k_BT_i}{m_d})^{\frac{1}{2}}(1-\frac{T_i}{T_e}\frac{n_{e0}}{n_{i0}})^{-\frac{1}{2}}$$

(۳-۴-۱۱)

با استفاده از معادله‌ی بالا و سرعت فاز ($\omega_p = \omega/k$) در امواج DA می‌توانیم پارامترهای مختلفی از پلاسماهای غباری را تخمین بزنیم . فرکانس امواج DA از فرکانس امواج غباری کمتر است ، فرکانس این امواج در حدود ۱۰ تا ۲۰ هرتز می‌باشد.

۳-۵ امواج آکوستیکی – یونی غباری(DIA) [1]

امواج (DIA) در سال ۱۹۹۲ توسط شوکلا[2] مطرح شد[۲۲]. سرعت فاز امواج DIA از سرعت گرمایی الکترون (یون و دانه غبار) بزرگتر(کوچکتر) می‌باشد. توزیع چگالی یون ها از معادله پیوستگی زیر تعیین می‌گردد:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_{i0}\nabla v_i = 0 \tag{۳-۵-۱}$$

و معادله حرکت یون :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{e}{M_i}\nabla\varphi - \frac{3k_B T_i}{M_i n_{i0}}\nabla n_{i1} \tag{۳-۵-۲}$$

که v_i سرعت جریان یونی است. ترکیب معادلات (۳-۵-۱) و (۳-۵-۲) به معادله زیر منجر می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Ti}^2\nabla^2\right)n_{i1} = \frac{n_{i0}e}{M_i}\nabla^2\varphi \tag{۳-۵-۳}$$

معادله (۳-۵-۳) برای توزیع چگالی ذرات غباری در امواج DIA همچنان دست نخورده باقی می‌ماند. با این حال ، برای دانه‌های غباری ساکن ، $n_{d1}\approx 0$ ، امواج DIA با توجه به مقیاس زمانی که نسبت به پلاسما غباری کوتاهتر است ، ظاهر می شوند .

با در نظر گرفتن $\omega >> kv_{Ti}, kv_{Td}$ ، می‌توانیم از ترکیب معادلات (۳-۴-۱)،(۳-۴-۵)،(۳-۴-۶) و (۳-۵-۳) و با استفاده از تبدیل فوریه معادله پاشندگی زیر را برای امواج DIA بدست آوریم:

[1] .Dust ion-acoustic solitary waves
[2] .Shukla

$$1+\frac{k_{Dc}^{2}}{k^{2}}-\frac{\omega_{pi}^{2}+\omega_{pd}^{2}}{\omega^{2}}=0$$
(۴-۵-۳)

چون در حجم بزرگی از دانه‌های غباری فرکانس یونی پلاسما ω_{pi} بزرگتر از فرکانس پلاسما غباری است ω_{pd}، بنابراین معادله (۳-۵-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega^{2}=\frac{k^{2}C_{s}^{2}}{1+k^{2}\lambda_{De}^{2}}$$
(۵-۵-۳)

که $C_s=(k_BT_e/M_i)^{1/2}=(n_{i0}/n_{e0})^{1/2}=\omega_{pi}\lambda_{De}$ سرعت امواج DIA را نشان می‌دهد. در حد طول موج های بلند ($k^2\lambda_{De}^2<<1$) معادله (۳-۵-۵) به شکل معادله زیر کاهش میابد:

$$\omega=k\,(\frac{n_{i0}}{n_{e0}})^{\frac{1}{2}}C_{s}$$
(۶-۵-۳)

این معادله نشان می‌دهد که سرعت فاز ($v_p=\omega/k$) برای امواج DIA در یک پلاسما گرد و غباری بزرگتر از C_s است ، چون شرط $n_{i0}>n_{e0}$ برای دانه‌های گرد و غباری باردار با بار منفی برقرار است. افزایش در سرعت فاز نسبت داده شده به چگالی الکترون‌ها در پلاسمای پس زمینه باعث افزایش شعاع دبای الکترون می شود. یکی از نتایجی که بخواهیم برای آن بیان کنیم، اینست که میدان الکتریکی که حاصل از بار فضایی است قویتر ظاهر می‌شود که مسئول افزایش سرعت فاز امواج DIA می‌باشد. در شرایط $kv_{Ti}<<\omega<<kv_{Te}$ اولین نتیجه‌ای که می‌توان بیان کرد، میرایی لاندائو[1] ناچیز مربوط به الکترون‌ها و یون‌ها است .

[1] . Landau damping

فصل چهارم:

بررسی امواج غیرخطی در پلاسما غباری

۱-۴ معرفی

در فصول ۱ تا ۳ به بررسی خواص امواج متعدد و ناپایداری‌ها با در نظر گرفتن جواب یک موج هارمونیک به تناسب exp(-iω+ik.r) پرداختیم. این امر بدین معناست که، با یک سری مختلف از امواج با دامنه‌های کوچک سروکار داریم که از طریق مکانیسم‌های خطی و غیر خطی استخراج می‌شوند. شمار زیادی از فرایندها وجود دارند که همراه با مدهای ناپایدار می‌توان ساختار دانه‌های بزرگ را تعیین کرد. زمانیکه دامنه‌ی امواج به قدر کافی بزرگ باشند، خاصیت غیرخطی بودن را نمیتوان نادیده گرفت. این خاصیت برگرفته از حالت‌های هارمونیکی از قبیل حرکت سیال، نیروی لورنتس غیرخطی، افتادن ذره در چاه پتانسیل و غیره است.

این خاصیت غیرخطی در پلاسما به موضعی کردن امواج کمک کرده و آن‌ها را به سمت انواع مختلفی از ساختارهای منسجم پرکاربرد هدایت می کند. (سالیتون‌ها، امواج ضربه ....) که از هر دو جنبه‌ی آزمایشگاهی و تئوری حائز اهمیت هستند. سالیتون[۱] یک موج منزوی خود – تقویت کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکلش را حفظ می‌کند. سالیتون‌ها در نتیجه خنثی سازی آثار غیر خطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شوند. امواج سالیتونی با دامنه‌ی کوچک از طریق معادلات kdv [۲] توصیف می‌شوند. امواج ضربه[۳] زمانی به وجود می‌آیند که یک موج در یک محیط مایع، گاز و یا پلاسما (به صورت کلی در یک محیط سیال) با سرعتی سریع‌تر از سرعت صوت

---

۱ .Soliton
۲ .Korteweg-de Vries
۳ .Shock waves

حرکت می‌کند. امواج ضربه همانند موج عادی با خود انرژی حمل می‌کنند و می‌توانند در یک محیط انتشار یابند. این امواج با استفاده از معادله‌ی kdvb [1] توصیف می‌شوند .

وجود دانه‌های غباری باردار نوع جدیدی از ساختارهای غیر خطی را معرفی می‌کنند که به هیچ وجه در پلاسماهای معمول الکترون – یون وجود ندارند. در این فصل درباره شماری از نظریه‌ها در رابطه با ساختار های غیر خطی (امواج سالیتونی ، لایه های دوتایی ، امواج ضربه و ...) در پلاسماهای غباری بحث می‌کنیم. همچنین در رابطه با مشاهدات تجربی برخی از این ساختارهای غیر خطی مطالعه می‌کنیم .

۴-۲ امواج سالیتونی[2]

برای مطاله خواص سالیتون‌ها، حالت هارمونیکی را در داخل یک چند سیالی توصیف می‌کنیم و توابع توزیع را به صورت اصلاح شده (برای یک ذره به دام افتاده) به کار می‌بریم. مطابق با نظریه جنبشی در یک پلاسمای غباری غیر مغناطیده، ما می‌توانیم امواج ضربه سالیتونی داشته باشیم[۲۳] و همچنین لایه‌های دوتایی مرتبط با امواج DA ، DIA و حضور ذرات غبار باردار منفی بدون حرکت، می‌توانند معیار بوهم را برای غلاف پلاسمای غباری تغییر دهند. اصلاح شده معیار بوهم به صورت $M > (n_{i0}/n_{e0})^{1/2}$ تعریف می‌شود(سرعت موج آکوستیکی / سرعت موج آکوستیکی یونی =M) این امر به این معناست که اگر عدد ماخ[3] را جایگذاری کنیم، M به وسیله عدد ماخ مؤثر $M_*=M/(n_{i0}/n_{e0})^{1/2}$ خواص غیرخطی امواج DIA را تبدیل به همان خواص امواج آکوستیکی – یونی در یک پلاسمای الکترون – یون می‌کند[۲۴].

---

۱ .Korteweg-de Vries Burgers
۲ .Solitary waves
۳ .Mach number

با این حال، ویژگی‌های جدیدی برای امواج سالیتونی DIA وجود دارد که از توزیع ماکسول – بولتزمن الکترون – یون غیرخطی، همچنین معادلات پیوستگی و حرکت غبار پیروی می‌کند.

معادلات دینامیکی امواج DAS[۱] با سرعت فاز پایین ($v_{Td}<<v_p<<v_{Te}<<v_{Ti}$) از روابط زیر پیروی می‌کنند.

$$\frac{\partial n_d}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(n_d u_d)=0 \qquad (۱-۲-۴)$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial t}+u_d\frac{\partial u_d}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (۲-۲-۴)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=n_d+\mu_e n_e-\mu_i n_i \qquad (۳-۲-۴)$$

که n_s چگالی نرمالیزه شده ذره است و u_d سرعت ذرات نرمالیزه شده با رابطه‌ی $c_d=(z_{d0}k_B T_i/m_d)$ و φ پتانسیل نرمالیزه شده موج الکترواستاتیکی است که با رابطه $k_B T_i/e$ مشخص می‌شود. متغیرهای فضا و زمان در واحدی از پلاسمای غباری در دوره‌ی $\omega_{pd}^{-۱}$ و طول‌دبای $\lambda_{Dm}=(k_B T_i/۴\pi z_d n_{d0} e^2)^{۱/۲}$ تعریف می‌شوند. باید توجه کنیم که $\mu_e=n_{e0}/z_{d0}n_{d0}=۱/(\delta-۱)$ ، $\mu_i=n_{i0}/z_{d0}n_{d0}=\delta(\delta-۱)$ ، $\sigma_i=T_i/T_e$ و $\delta=n_{i0}/n_{e0}$. چگالی نرمالیزه شده الکترون‌ها و یون‌ها از رابطه زیر پیروی می‌کنند:

$$n_e=\exp(\sigma_i\varphi) \qquad (۴-۲-۴)$$

$$n_i=\exp(-\varphi) \qquad (۵-۲-۴)$$

معادلات (۴-۲-۱) تا (۴-۲-۵) برای دو حالت مورد آزمون قرار می گیرند.

در ابتدا درباره‌ی امواج با دامنه‌ی کوچک اما محدود DAS مطالعه می‌کنیم که با استفاده از روش تقلیل اختلال معادله kdv را تعیین کرده و سپس امواج DAS را با دامنه‌ی دلخواه بررسی می‌کنیم ودر نهایت به رابطه پتانسیل سقدیف[۲] دست پیدا می‌کنیم[۲۵].

---

۱ .Dust-Acoustic Solitary waves

۲ . Sagdeev potential

۴-۳ امواج سالیتونی آکوستیکی غباری با دامنه کوچک

برای مطالعه امواج DAS با دامنه کوچک اما متناهی ، معادله kdv را از معادلات (۴-۲-۱) تا (۴-۲-۵) استخراج می‌کنیم . با استفاده از تکنیک اختلال کاهنده و با استفاده از مختصات $\xi=\epsilon^{1/2}(z-\upsilon_0 t)$ و $\tau=\epsilon^{3/2}t$ که ϵ کوچکترین پارامتر اندازه‌گیری برای دامنه‌های ضعیف یا پراکندگی‌های ضعیف و υ_0 سرعت سالیتون (که توسط c_d نرمالیزه شده است) می‌باشد. همچنین متغیرهای u_d، n_d و φ را بر حسب متغیر غیر اختلالی ϵ می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$n_d = 1+\varepsilon n_d^{(1)} + \varepsilon^2 n_d^{(2)} + \ldots \qquad (۱-۳-۴a)$$

$$u_d = \varepsilon u_d^{(1)} + \varepsilon^2 u_d^{(2)} + \ldots \qquad (۱-۳-۴b)$$

$$\varphi = \varepsilon \varphi^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi^{(2)} + \ldots \qquad (۱-۳-۴c)$$

در پایین‌ترین توان ϵ معادلات (۴-۲-۱) تا (۴-۳-۱) ، معادلات $n_{d1}=-\phi^{(1)}/\upsilon_0^2$ ، $u_{d1}=-\phi^{(1)}/\upsilon_0$ و $\upsilon_0=1/(\mu_i+\sigma_i\mu_e)^{1/2}$ را می‌دهد و در مراتب بالاتر ϵ به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial n_d^{(1)}}{\partial \tau} - \upsilon_0 \frac{\partial n_d^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_d^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta}[n_d^{(1)} u_d^{(1)}] = 0 \qquad (۳-۳-۴)$$

$$\frac{\partial u_d^{(1)}}{\partial \tau} - \upsilon_0 \frac{\partial u_d^{(2)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \zeta} + u_d^{(1)} \frac{\partial u_d^{(1)}}{\partial \zeta} = 0 \qquad (۴-۳-۴)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\upsilon_0^2}\varphi^{(2)} - n_d^{(2)} + \frac{1}{2}\left(\mu_i - \sigma_i^2 \mu_e\right)\left[\varphi^{(1)}\right]^2 = 0 \qquad (۵-۳-۴)$$

حال با ترکیب معادلات (۴-۳-۲) تا (۴-۳-۴) می‌توانیم به معادله‌ی زیر برسیم:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau} + b_s \frac{\partial^3 \varphi^{(1)}}{\partial \zeta^3} + a_s \varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \zeta} = 0 \qquad (۶-۳-۴)$$

که این معادله kdv با ضرایب زیر مشخص می‌گردد[۲۶]:

$$a_s = \upsilon_0^3\left(\mu_i - \sigma_i^2\mu_e + \frac{3}{\upsilon_0^4}\right) \qquad (۶-۳-۴a)$$

$$b_s = \frac{\upsilon_0^3}{2} \qquad (۶-۳-۴\ b)$$

حل معادله kdv (۴-۳-۵) از طریق تبدیل متغیرهای مستقلξ وτ به $\eta=\xi-u_0\tau$ و$\tau=\tau$ ، که در آن u_0 سرعت ثابت نرمالیزه شده توسط c_d می‌باشد صورت می‌گیرد. همچنین می‌توانیم شرایط مرزی مناسب را برای آشفتگی‌های موضعی از زمانی‌که $\eta\longrightarrow\pm\infty$ ($\varphi\longrightarrow 0$ ، $d\varphi^{(1)}/d\eta\longrightarrow 0$ ، $d^2\varphi^{(1)}/d\eta^2\longrightarrow 0$) اعمال کنیم. مطابق با راه حل ثابت ارائه شده برای معادله kdv می‌توانیم جوابی را به صورت زیر پیشنهاد کنیم[۲۷]:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_m^{(1)}\,\text{sech}^2\left[\left(\zeta - u_0\tau\right)/\Delta_s\right] \qquad (۷-۳-۴)$$

که در آن $\phi_m^{(1)}$ دامنه و Δ_s پهنا موج را نشان می‌دهند که با معادلات $\phi_m^{(1)}=3u_0/a_s$ و $\Delta_s=(4b_s/u_0)^{1/2}$ مشخص می‌شوند. تا زمانیکه $u_0>0$ باشد دو شرط زیر را از معادله‌ی (۴-۳-۷) خواهیم داشت:

i) اگر $a_s>0$ در نتیجه $\varphi > 0$ و *ii*) اگر $a_s<0$ باشد پس $\varphi < 0$.

که a_s به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_s = -\frac{\upsilon_0^3}{\left(\delta-1\right)^2}\left[\delta^2 + \left(3\delta+\sigma_i\right)\sigma_i + \frac{1}{2}\delta\left(1+\sigma_i^2\right)\right] \qquad (۸-۳-۴)$$

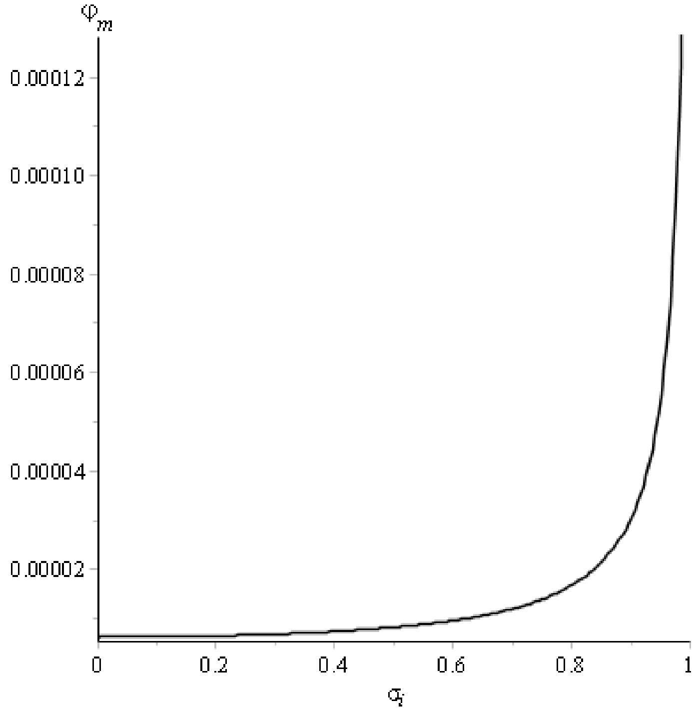
همانطور که مشاهده می‌کنیم a_s برای تمام مقادیر σ_i و δ مقدار منفی خواهد داشت. این امر به این معناست که سیستم پلاسمای غباری ، باید فقط امواج DAS با $\varphi < 0$ را شامل شود.

بنابراین با افزایش u_0 دامنه‌ی امواج DAS افزایش پیدا کرده و پهنای آن کاهش میابد.

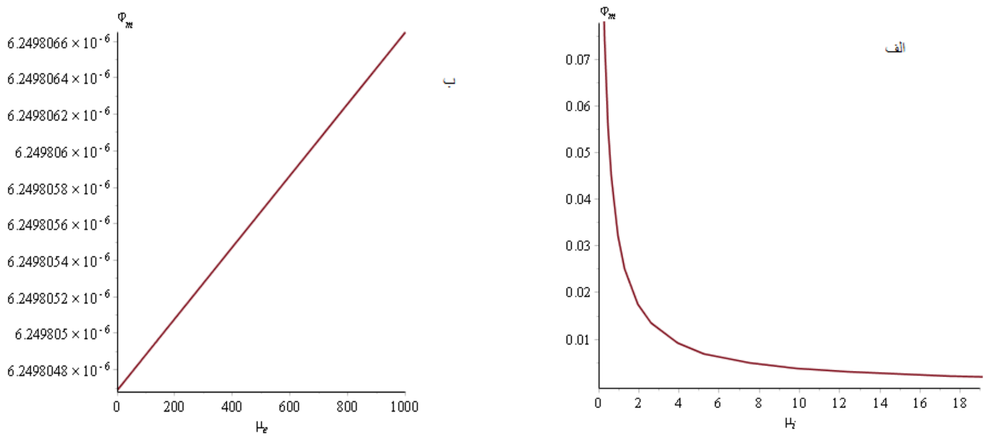
۴-۳-۱ بحث و نتیجه‌گیری

حال به بررسی معادله (۴-۳-۷) و تاثیرات چگالی دانه‌ی غباری و تاثیرات دما بر روی دامنه موج سالیتونی آکوستیکی می‌پردازیم . شکل ۴-۱ تاثیر نسبت دمای یون به الکترون را بر روی دامنه نشان می‌دهد

طبق این نمودار با افزایش نسبت دمای یون به الکترون (σ_i) دامنه رفته رفته افزایش یافته تا جاییکه دمای یون و الکترون به مقدار ثابتی می‌رسد.

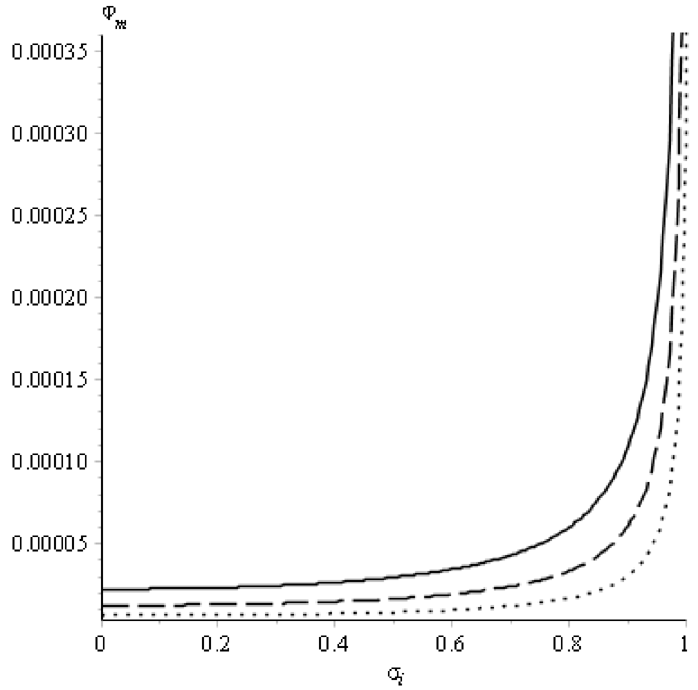


۱-۴ تغییرات دامنه نسبت به دمای یون و الکترون برای $n_{d0} = 1.0 \times 10^{16}$ cm^-۳ و $u_0 = 0.1$



۲-۴ تغییرات دامنه نسبت به چگالی یون و الکترون. شکل الف تغییرات دامنه را نسبت به چگالی یون نشان می‌دهد در این نمودار $n_{d0} = 1.0 \times 10^{16}$ cm^-۳ , $u_0 = 0.1$, $\sigma_i = 0.00137$ و $n_{e0} = 5.9 \times 10^{22}$ cm^-۳. شکل ب تغییرات دامنه نسبت به چگالی الکترون نشان می‌دهد که در این نمودار $n_{i0} = 3.85 \times 10^{22}$ cm^-۳.

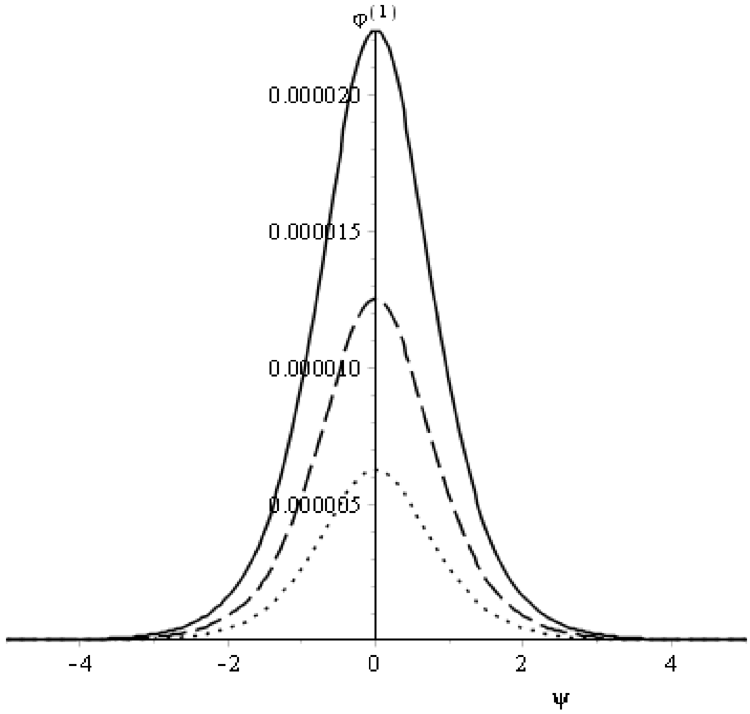
شکل ۴-۲ تغییرات دامنه نسبت به چگالی الکترون و یون را نشان می‌دهد در این نمودارها چگالی ذره‌ی غباری و دمای یون و الکترون ثابت در نظر گرفته شده است که رابطه‌ی مستقیم بین دامنه‌ی موج سالیتونی را با این چگالی‌ها ثابت می‌کند .



۴-۳ تغیرات مربوط به چگالی دانه‌ی غباری و دما و تاثیر آن‌ها بر دامنه. $n_{d0} = 1.0 \times 10^{16}$ Cm$^{-۳}$ (منحنی نقطه چین) , $n_{d0} = 2 \times 10^{16}$ cm$^{-۳}$ (منحنی خط چین) , $n_{d0} = 3.58 \times 10^{16}$ cm$^{-۳}$ (منحنی توپر).

به ازای $u_0 = 0.1$

در شکل ۴-۳ تأثیر تغییرات چگالی دانه‌ی غباری و تغییرات دما را به طور همزمان مشاهده می‌کنیم. همانطور که نمودار نشان می‌دهد دامنه با چگالی دانه‌ی غباری و دما رابطه‌ی مستقیم دارد و با افزایش آن‌ها افزایش میابد و در آخر شکل ۴-۴ تأثیر تغییرات چگالی دانه‌ی غباری بر موج سالیتون را نشان می‌دهد که در این حالت دما ثابت در نظر گرفته شده است و افزایش چگالی دانه باعث افزایش شدت موج سالیتون شده است در حالی‌که دامنه ثابت است.



۴-۴ تغییرات موج سالیتونی بر اساس تغییرات چگالی دانه‌ی غباری به ازای سرعت ثابت $u_0 = 0.1$ و $\sigma_i = 0.00137$ ، $n_{d0} = 1.0 \times 10^{16}$ cm^-۳ (منحنی نقطه چین)، $n_{d0} = 2 \times 10^{16}$ cm^-۳ (منحنی خط چین) و $n_{d0} = 3.58 \times 10^{16}$ cm^-۳ (منحنی توپر).

۴-۴ امواج سالیتونی آکوستیکی غباری با دامنه‌ی دلخواه

برای مطالعه‌ی امواج با دامنه‌ی دلخواه وابسته به زمان ، باید تمام متغیر های وابسته را به یک متغیر مستقل تبدیل کنیم: ξ=z-Mt (که ξ توسط λ_{Dm} و M عدد ماخ=سرعت موج منفرد تقسیم بر C_d نرمالیزه شده است.) با استفاده از شرایط حالت ایستا و با اعمال شرایط مرزی مناسب ($n_d \to 1$ ، $u_d \to 0$ ، $\varphi \to 0$ ، $d\varphi/d\xi \to 0$ و $\xi \to \pm\infty$) میتوانیم معادلات (۴-۳-۱) تا (۴-۳-۵) را به فرم زیر کاهش دهیم[۲۸]:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 + v(\varphi) = 0 \tag{۴-۴-۱}$$

که در آن پتانسیل سقدیف $v(\phi)$ مورد نظر ما به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$v(\varphi) = \mu_i\left[1-\exp(-\varphi)\right] + \frac{\mu_e}{\sigma_i}\left[1-\exp(\sigma_i\varphi)\right] + M^2\left[1-\left(1+\frac{2\varphi}{M^2}\right)^{1/2}\right] \tag{۴-۴-۲}$$

از معادله (۴-۴-۲) آشکار است که برای $\phi=0$ داریم: $v(\phi)=dv(\phi)/d\phi=0$. بنابراین امکان حل موج سالیتونی در معادله (۴-۴-۱) وجود دارد البته به شرطی که *i*) $(d^2v/d\phi^2)_{\phi=0}<0$ به طوریکه نقطه‌ی ثابت در مبدأ ناپایدار باشد و *ii*) $(d^3v/d\phi^3)_{\phi=0}>(<)0$ برای یک موج سالیتونی با $\phi>(<)0$ طبیعت حاکم بر امواج سالیتون (دامنه‌ی آنها به سمت صفر میل کرده و عدد ماخ آن دارای مقدار بحرانی است) میتوانیم با گسترش پتانسیل سقدیف تا بسط مرتبه سوم تیلور در ϕ بدست آورد. این عدد ماخ بحرانی مربوط به جمله مرتبه دوم می‌شود. در همان زمان ، اگر جمله مرتبه دوم منفی باشد یک پتانسیل در سمت منفی ایجاد می‌شود و اگر جمله مرتبه دوم مثبت باشد یک پتانسیل در سمت مثبت به وجود خواهد آمد. بنابراین ، با بسط دادن پتانسیل سقدیف حول مبدأ ، که در آن تغییراتی در مشتق دوم ظاهر می‌شود می‌توان نوشت:

$$M_c = \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta-\sigma_i}} \qquad (۴-۴-۳)$$

این مقدار بحرانی M برای ترم مربعی $v(\phi)$ میتواند به صورت زیر بیان شود:

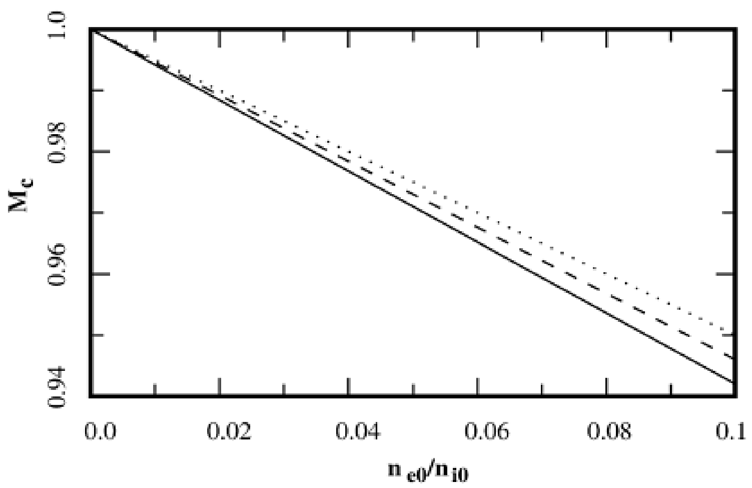
$$-\frac{1}{3(\delta-1)^2}\left[\delta^2+(3\delta+\sigma_i)\sigma_i+\frac{1}{2}\delta\left(1+\sigma_i^2\right)\right] \qquad (۴-۴-۴)$$

نشان می‌دهد که ترم مربعی همیشه (برای هر مقداری از σ_i و δ) منفی است، یعنی فقط موج سالیتونی با $\phi<0$ میتواند وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، امواج DAS با دامنه‌ی دلخواه با $\phi>0$ نمی‌توانند اجازه‌ی ورود به مدل مورد نظر ما را داشته باشند. شکل ۴-۵ نشان می‌دهد که مقادیر مختلفی برای عدد ماخ بحرانی وجود دارد که با M_c نشان داده می‌شود و برابر است با: $n_{e0}/n_{i0}(=1/\delta)$ برای مقادیر مختلفی از σ_i . این نمودار نشان می‌دهد که عدد ماخ بحرانی با مقادیر σ_i و δ افزایش میابد . قابل توجه است که چه آزمایش انجام بدهیم چه انجام ندهیم حد بالای M برای امواج DAS با $\phi<0$ وجود دارد. این حد از M میتواند برای وضعیت $v(\phi)\geq 0$ که $\phi_c=-M^2/2$ است آشکار شود که کمینه مقدار ϕ در

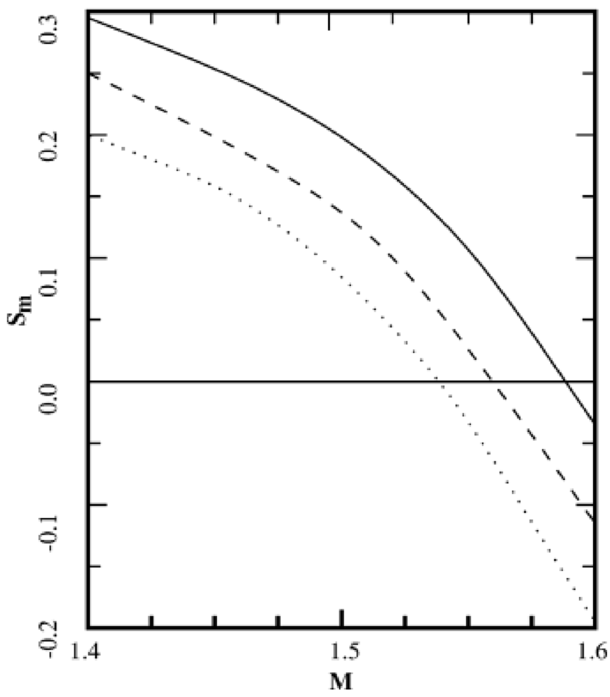
واقع برای چگالی گرد و غباری n_d وجود دارد ، بنابراین حد بالای M ، بیشینه مقدار M است برای حالتی که $s_m \geq 0$ باشد مقدار s_m به صورت :

$S_m=\mu_i+\mu_e/\sigma_i+M^۲-\mu_i \exp(M^۲/۲)-(\mu_e/\sigma_i)\exp(-\sigma_i M^۲/۲)$ تعریف می‌شود. شکل ۴-۶ نشان می‌دهد که مقادیر مختلفی برای s_m با M های مختلف $n_{e0}/n_{i0}(=۱/\delta)$ جود دارد.باید توجه داشته باشیم که با افزایش δ حد بالای M نیز افزایش میابد.

همچنین باید به طور عددی پتانسیل سقدیف را مورد بررسی قرار دهیم تا بتوانیم مقادیر بالا و پایین (بالاترین و پاییترین حد) را برای Mدر امواج DAS موجود بدست آوریم.



۴-۵ مقادیر مختلف عدد ماخ بحرانی M_c بر اساس n_{e0}/n_{i0} برای $\sigma_i=0.01$(منحنی توپر)، $\sigma_i=0.05$ (منحنی خط چین) و $\sigma_i=0.1$ (منحنی نقطه چین)



۴-۶ تغییرات s_m بر اساس M برای $\sigma_i=0.05$ ، $n_{e0}/n_{i0}=0$ (منحنی تو پر)،$n_{e0}/n_{i0}=0.05$ (منحنی خطچین) و $n_{e0}/n_{i0}=0$ (منحنی نقطه چین). بالای مرز مربوط به حد M مقادیر مربوط به $S_m=0$ را نشان میدهد.

این نمودارها نتایج تحلیلی را نشان می‌دهند که بیان می‌کند پلاسما گرد و غباری ممکن است فقط از طریق امواج DAS با $\phi<0$ ثبات پیدا کند.

۴-۵ معادله‌ی VDP [۱] برای دینامیک دانه‌های غباری باردار در پلاسما غباری[۲۹]

یک پلاسمای غیر مغناطیده بی‌برخورد را در نظر می‌گیریم که شامل الکترون‌ها(جرم m_e ، بار $e-$)، یونها (جرم m_i، بار $+Z_{ie}$) و دانه‌های گردوغباری می‌باشد . جرم هر دانه‌ی گردوغباری را (m_d) ثابت در نظر می‌گیریم و بار آن را به صورت یک متغیر وابسته به زمان با معادله‌ی $q_d(t)=-Z_d(t)e$ تعریف می‌کنیم.

چگالی دانه‌ی گردوغباری ساکن و سرد (n_d) و سرعت (v_d) است. با استفاده از معادله مربوط به چگالی داریم:

۱ .Van der pol-Mathieu

$$\frac{\partial n_d}{\partial t}+n_{d0}\frac{\partial u_d}{\partial Z}=\alpha n_d-\frac{1}{3}\beta n_d^3$$ (۱-۵-۴)

که در آن t وZ نسب به زمان و مکان متغییر هستند (در یک بعد). تا زمانیکه برای یک دانه‌ی گردوغباری یک توزیع یکنواخت در نظر بگیریم ($\frac{\partial n_d}{\partial z}=0$) ، چگالی ذره‌ی گردوغباری را با n_{d0} نشان می‌دهیم. ضریب α وβ وارد شده در سمت راست معادله (۴-۵-۱) مربوط به نرخ تولید دانه‌ی گردوغباری باردار(توسط جذب الکترون) و از بین رفتن آن‌ها (از طریق فرایند باز ترکیب ، معمولا $x^++e^-+Z\rightarrow x^*Z$) می‌شود.

معادله حرکت گردوغباری را به صورت زیر داریم:

$$\frac{\partial u_d}{\partial t}=-\frac{q_d}{m_d}\frac{\partial\varphi}{\partial Z}$$ (۲-۵-۴)

پتانسیل الکتریکی φ توسط معادله پواسون تعریف میگردد:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z^2}=-4\pi e\left(Z_i n_i-n_e-Z_d n_d\right)$$ (۳-۵-۴)

n_i و n_e مربوط به چگالی الکترون و یون هستند که در حالت تعادل داریم $Z_in_i-n_e-Z_dn_{d0}=0$ که n_{s0} برای s=i,e مورد استفاده قرار میگیرد و به چگالی (یون یا الکترون) ذره در حالت تعادل مربوط می‌شود. یک پتانسیل هارمونیکی متغیر در فضا با طول موج $\lambda\equiv 2\pi/k$ در نظر می‌گیریم و به صورت $\varphi(Z,t)=\varphi(t)\exp(ikz)$ تعریف می‌کنیم بنابراین $\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z^2}=-k^2\varphi$ خواهیم داشت. الکترون‌ها و یون‌هارا در حالت تعادل ترمودینامیکی در نظر می‌گیریم. بنابراین چگالی آن‌ها n_e و n_i از توزیع ماکسول – بولتزمن پیروی می‌کنند.

$$n_e=n_{e.}\exp\left(\frac{e\varphi}{k_BT_e}\right)$$ (۴-۵-۴)

$$n_i=n_{i.}\exp\left(-\frac{Z_ie\varphi}{k_BT_i}\right)$$ (۵-۵-۴)

در آن k_B ثابت بولتزمن و T_e (T_i) مربوط به دمای الکترون‌ها و یون‌ها است. از تفریق معادلات (۴-۵-۱) و (۴-۵-۲) از نظر زمانی و مکانی ، به منظور از بین بردن سرعت u_d ، به معادله زیر میرسیم:

$$\frac{\partial^2 n_d}{\partial t^2} - \frac{(\alpha - \beta n_d^2)\partial n_d}{\partial t} = \frac{n_d . q_d}{m_d} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \tag{۴-۵-۶}$$

برای $e\varphi/k_BT_e \ll 1$ و $Z_ie\varphi/k_BT_i \ll 1$ ، با تقریب مناسب داریم:

$$\frac{n_e}{n_{e0}} \approx 1 + \frac{e\varphi}{k_BT_e} + \frac{1}{2}\left(\frac{e\varphi}{k_BT_e}\right)^2 + \cdots \tag{۴-۵-۷}$$

$$\frac{n_i}{n_{i0}} \approx 1 - \frac{Z_ie\varphi}{k_BT_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{Z_ie\varphi}{k_BT_i}\right)^2 + \cdots \tag{۴-۵-۸}$$

با ترکیب (۴-۵-۷) و (۴-۵-۸) و جایگذاری در معادله (۴-۵-۳) به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \approx \frac{4\pi q_d k^2}{k^2 + k_D^2} n_d \tag{۴-۵-۹}$$

که در آن عدد موج دبای را به صورت $k_D \equiv \lambda_{Deff}^{-1} = (\lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2})^{1/2}$ تعریف می‌کنیم. که $\lambda_{De} = (\frac{k_BT_e}{4\pi n_{e0}. e^2})^{1/2}$ و $\lambda_{Di} = (\frac{k_BT_i}{4\pi n_{i0}. Z_i^2 e^2})^{1/2}$ ، شعاع دبای الکترون و یون می‌باشند. باید توجه داشته باشیم که مؤلفه‌ی گردو غباری را خیلی کوچک در نظر گرفته‌ایم.

می‌بینیم که الکترون‌ها و یون‌های در حال حرکت تحت تأثیر انتشار امواج آکوستیکی –گردوغباری همراه با تعادل بار دینامیکی قرار می‌گیرند. در حد طول موج بالای دبای $\lambda \gg \lambda_{Deff}$ معمولا $k \ll k_D$ خواهد بود . با جایگذاری معادله‌ی (۴-۵-۹) در معادله‌ی(۴-۵-۶) پتانسیل φ را می‌توانیم از معادلات حذف کنیم. باید فرض شود که نوسان بار گردوغباری نسبت به زمان متغیر است به صورت :

$q_d = q_{d0}(1 + h\cos\gamma t)^{1/2}$ که پارامتر کوچک h وγ پارامترهای حقیقی و ثابت هستند.

که در نهایت به یک معادله‌ی تحول برای تراکم گردوغبار دست میابیم.

$$\frac{d^2 n_d}{dt^2} - (\alpha - \beta n_d^2)\frac{dn_d}{dt} + \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t)n_d = 0 \tag{۴-۵-۱۰}$$

که در آن مشخصه فرکانس نوسانی $\omega_0 = \omega_{pd} k/(k^2 + k_D^2)^{1/2}$ ($\approx \omega_{pd}$ در حد طول موج‌های بالا) و فرکانس پلاسما گردوغباری $\omega_{pd} = (\frac{4\pi n_{d0} q_{d0}^2}{m_d})^{1/2}$ تعریف می‌کنیم. چگالی گردوغبار در فضا یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. چگالی و زمان بدون بعد را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $\tilde{t} = \omega_0 t$ و $x = n_d/n_{d0}$ مشابه آن پارامترهای دیگر را به صورت $\tilde{\alpha} = \alpha/\omega_0$ ، $\tilde{\beta} = \beta n_{d0}^2/\omega_0$ و $\tilde{\gamma} = \gamma/\omega_0$

پس داریم:

$$\frac{d^۲x}{d\tilde{t}^۲} - \left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}x^۲\right)\frac{dx}{d\tilde{t}} + \tilde{\omega}_۰^۲(۱ + h\cos\tilde{\gamma}\tilde{t})x = ۰ \qquad (۴\text{-}۵\text{-}۱۱)$$

جمله دوم در سمت چپ معادله‌ی (۴-۵-۱۱) مربوط به مشخصه‌ی نوسانی غیر خطی VDP می‌شود، در واقع ، معادله‌ی VDP یک توضیح عمومی برای توصیف نوسان غیر خطی خود پایدار است. از سوی دیگر ، برای α=β=۰ معادله‌ای دیگر تحت عنوان معادله‌ی متیو بدست می‌آید ، که یک نوسانگر پارامتری را توصیف می‌کند. معادله VDP به عنوان یک مثال بنیادی از یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی به حساب می‌آید.

در تشدید پارامتری ، زمانیکه پارامترهای نوسان وابسته به زمان هستند ، اگر شرایط اولیه از نظر موقعیت و سرعت برابر با صفر باشند، سیستم ممکن است پایدار باشد ، در مقابل آن در حالت شرایط عادی و تشدید عادی جاییکه دامنه‌ی نوسانات و دوره تناوب آن‌ها با زمان افزایش میابد حتی با شرایط اولیه برابر صفر است.

۴-۵-۱ تجزیه تحلیل کیفی: روش میانگین

در این بخش ، رفتار دینامیکی نوسانگر VDPM را با تأثیر تشدید بررسی می‌کنیم. معادله‌ی (۴-۵-۱۱) را میتوان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\alpha - \beta x^2\right)\frac{dx}{dt} + \omega^2(t)x = 0 \qquad (۴\text{-}۵\text{-}۱\text{-}۱)$$

که در آن $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t)$ تابع فرکانس زمانی است. داریم:

$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$ که در آن ۱ $\gg \varepsilon$ یک پارامتر حقیقی کوچک است. فرض می‌کنیم جواب به صورت زیر باشد:

$$x = a(t)\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b(t)\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \qquad (۴\text{-}۵\text{-}۱\text{-}۲)$$

که ضرایب حقیقی a و b نسبت به زمان به آرامی تغییر می‌کند. با جایگذاری معادله (۴-۵-۱-۲) در معادله‌ی (۴-۵-۱۱) و در نظر گرفتن اولین ترم ε وh به معادلات زیر میرسیم: (ر.ک به پیوست ج)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{2}a - \frac{b}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right) - \frac{\beta}{8}(a^3 + ab^2) \equiv f(a,b) \qquad (۴\text{-}۵\text{-}۱\text{-}۳)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\alpha}{2}b + \frac{a}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right) - \frac{\beta}{8}(b^3 + a^2b) \equiv g(a,b) \qquad (۴\text{-}۵\text{-}۱\text{-}۴)$$

معادلات (۴-۵-۱-۳) و (۴-۵-۱-۴) نشان‌دهنده‌ی یک سیستم مرتبه اول هستند . باید توجه داشته باشیم که معادلات بالا تحت تحول ثابت هستند $(a,b)\rightarrow(-a,-b)$.

۴-۵-۲ نتایج عددی

معادله‌ی VDPM دارای یک راه حل نوسانی (دوره‌ای) می‌باشد که جذب تناوبی نامیده میشود. راه‌حل‌های دوره‌ای مختلف ممکن است به سمت پارامترهای مختلف α و β سوق پیدا می‌کند. با انتگرال‌گیری از معادله VDPM (۴-۵-۱-۱) که در بالا بیان شد، به مجموعه جواب معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

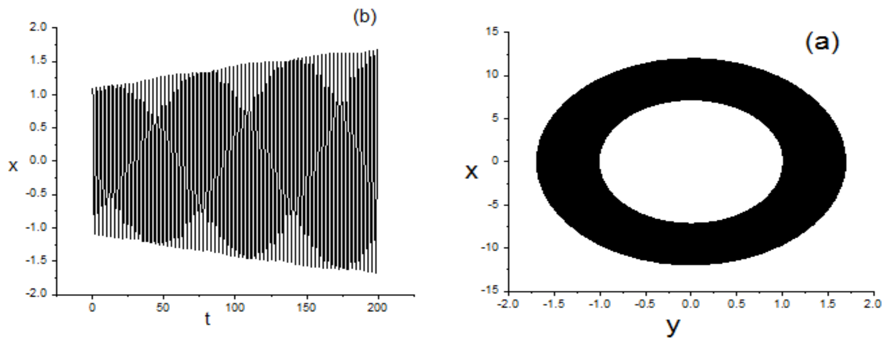
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = (\alpha - \beta x^2)y - \omega^2(t)x \end{cases} \qquad (۴\text{-}۵\text{-}۲\text{-}۱)$$

حال مشخصات دینامیکی معادله (۴-۵-۲-۱) را به صورت عددی مورد بررسی قرار می‌هیم. مجموعه‌ای از مقادیر ثابت پارامترهای سیستم را در نظر می‌گیریم: $\omega_0=۱$ ، $h=۰{,}۰۱$ علاوه بر آن ، شرایط اولیه $x_0=y_0=۱$ برای $t_0=۰$ برقرار است. با استفاده از روش رانگ کوتا[۱] مرتبه ۴ معادله (۴-۵-۱۱) را حل می‌کنیم(ر.ک به پیوست د). نمودارفضای فاز برای (x,y) و (t,x) به ازای مقادیر مختلف α و β نشان

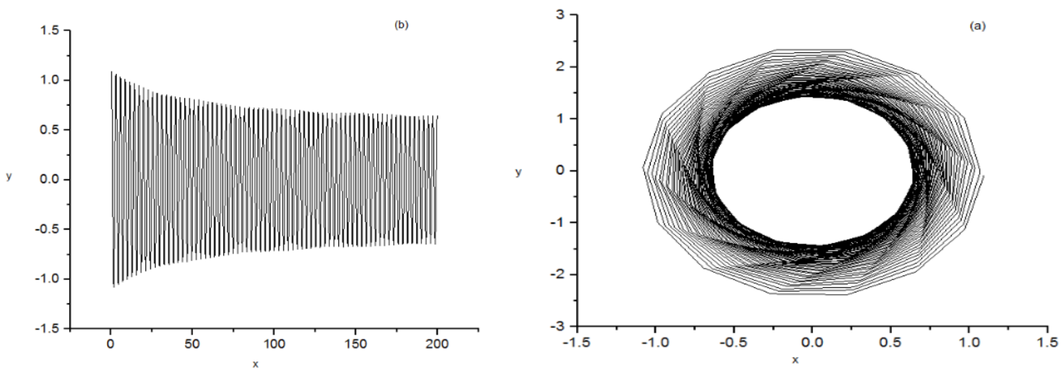
---

[۱] .Rung-kutta

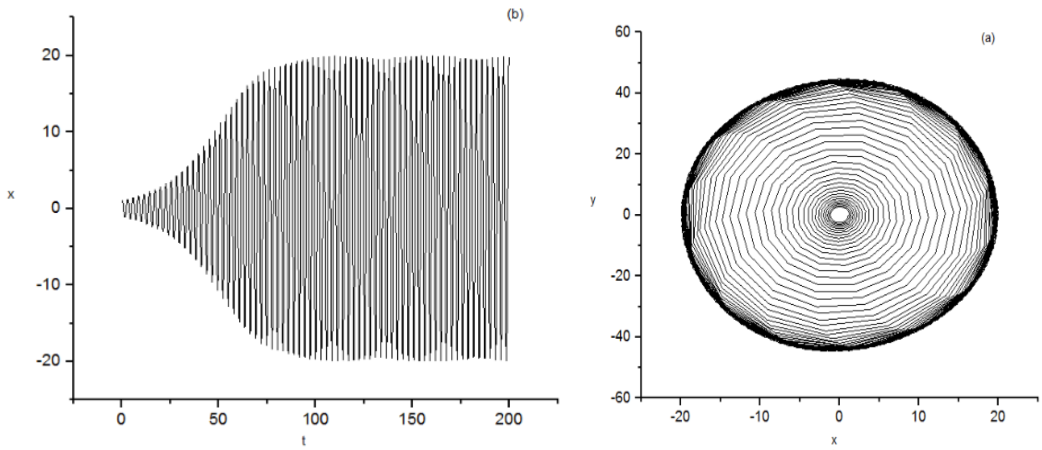
داده شده است. حالت‌های دوره‌ای زمانی اتفاق می‌افتد که $\alpha=\beta$ در شکل ۴-۷ نشان داده شده است. برای $\alpha<\beta$ سیستم یک چرخه پایدار را نمایش میدهد : شکل ۴-۸ حالت اولیه جذب شده را در یک چرخه محدود با دامنه‌ی بزرگ نشان می‌دهد.در شکل ۴-۹ (برای α=۱۰۰ و β=۰,۱) رفتار سیستم در ابتدا ناپایدار است و با گذشت زمان اختلال از داخل چرخه‌ی محدود ایجاد می‌شود و در شکل ۴-۱۰ با افزایش α سیستم به سمت یک تعادل پایدار با ایجاد تغییر شکل در چرخه پیش می‌رود. مشخصات مربوط به پایداری در ترم مربوط به دامنه‌های a وb و پارامترهای ε و h مورد بررسی قرار می‌گیرد.



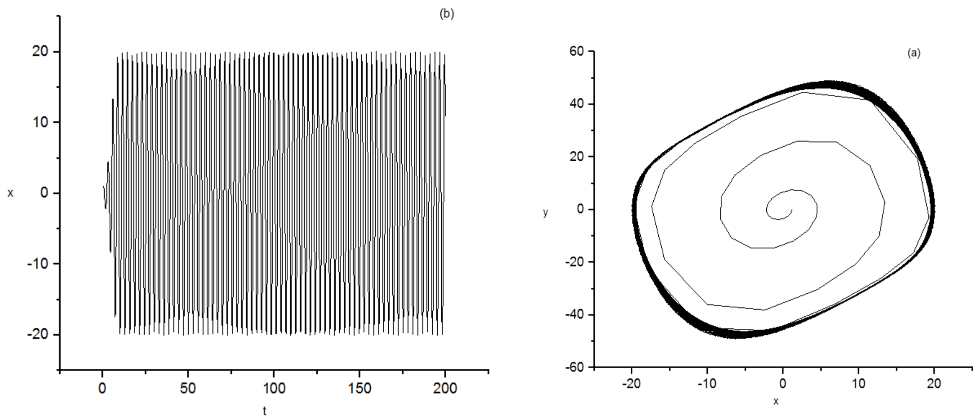
۴-۷ نمودارهای (a)x-y و (b) t-x برای $\alpha=\beta$=۰,۰۱



۴-۸ نمودارهای (a) x-y و (b) t-x برای α=۰,۰۱ و β=۰.۱



۴-۹ نمودارهای(a) x-y و (b) t-x برای α=۰,۱ و β=۰,۰۰۱



۴-۱۰ نمودارهای (a) x-y و (b) t-x برای α=۱ و β=۰,۰۱

۴-۵-۳ نتایج تحلیلی نمودارها

در نمودار اول نرخ تولید و نابودی ذرات غباری با یکدیگر برابر است، همانطور که مشاهده می‌کنیم با افزایش چگالی نسبت به زمان با حفظ حرکت نوسانی، دامنه نیز افزایش میابد این تغییرات در نمودار a نیز قابل مشاهده است، طبق این نمودار چگالی نسبت به مشتق خود در فضای فاز افزایش میابد. در نمودار دوم نرخ تولید از نرخ نابودی کمتر است، همانطور که مشاهده می‌کنیم دامنه در این حالت کاهش پیدا می‌کند و رفته رفته به یک مقدار ثابت می‌رسد این تغییرات در نمودار چگالی نیز مشهود است. در نمودار سوم بر خلاف نمودار دوم نرخ تولید دانه‌های غباری بیشتر از نرخ نابودی آن‌ها است. طبق این

نمودار چگالی نسبت به زمان یک اوج سریع داشته و سپس به یک مقدار ثابت میل پیدا می‌کند و در تمام مراحل موج حرکت نوسانی خود را حفظ می‌کند. در نمودار آخر، حالت دقیق‌تری از نمودار سوم را مشاهده می‌کنیم که باز هم افزایش دامنه را نسبت به زمان داریم و سیستم در نهایت به سمت یک تعادل پایدار با ایجاد تغییر شکل در چرخه پیش می‌رود.

۴-۶ معادله زاخاروف-کوزنتسوف[۱](QZK)

در ریاضیات، سیستم زاخاروف-کوزنتسوف یک سیستم غیر خطی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط ولادمیر زاخاروف معرفی شد.که به توصیف انتشار امواج لانگمیر و پلاسما یونیده شده می‌پردازد. استخراج این معادله بر پایه‌ی یک مدل ساده شده از مفاهیم سیال انجام می‌شود. به طور خاص می‌توان از نظریه جنبشی نیز برای استخراج این معادله استفاده کرد. استخراج معادلات زاخاروف به طور مؤثر به دو بخش تقسیم می‌گردد: بخش اول مربوط به نتایج بدست آمده از پاسخ های تقریبی مربوط به مشتق با استفاده از نظریه جنبشی می‌شود و بخش دیگر آن شامل نتایج مربوط به بررسی های انجام شده روی پارامترهای ناپایداری می‌شود. این مدل تعمیم یافته به طور کلی با اثرات میدان مغناطیسی در ارتباط است. این تعمیم همچنین اجازه‌ی نمو اثرات الکترومغناطیسی را فراهم می‌کند[۳۰].

۴-۶-۱ اثر توزیع گرد و غبار بر روی امواج صوتی گرد و غباری کوانتومی

اولین گزارشات ارائه شده بیان می‌کنند که سرعت فاز بالاتر (نسبت به سرعت گرما-یونی) در امواج آکوستیکی گرد و غباری (DAWs[۲])، باعث ایجاد یک نیروی بازگرداننده می‌شوند. با گذشت زمان ، این پیش‌گویی نظری به طور تجربی توسط بارکان [۳]تأیید شد[۳۱]. اما مشاهدات نشان داده‌اند که اندازه دانه‌های گرد و غباری در محدوده‌ی نانومتر تا میلی‌متر قرار دارند مگر اینکه به دست انسان ساخته شوند. بنابراین تمام دانه‌های گرد و غباری دارای یک شعاع یکسان نیستند و در محدوده‌ی $[r_{min},r_{max}]$

---
۱ .zakharov-Kuznetsov equation
۲ .Dust Acoustic Waves
۳ .Barkan

قرار می‌گیرند. اخیرا، نتایج بدست آمده از تحقیقات انجام شده نشان می‌دهند که اندازه توزیع دانه‌ی گرد و غباری (DSD[1]) روی مشخصه‌های اصلی سیستم پلاسمایی تأثیر می‌گذارند. آسلاکسن [2] و هونس[3] روی تأثیرات DSD بر ضخامت یک حلقه سیاره ای مطالعاتی انجام داده‌اند[۳۲]. که از نتایج آن میتوان به میزان میرایی امواج آکوستیکی یونی (DAWs) که از اثرات DSD می‌باشد اشاره کرد. موریس[4] دریافت که فرکانس پلاسما زمانیکه DSD قابل ملاحظه باشد در مقایسه با یک نمونه تک اندازه از دانه‌های گردوغباری افزایش میابد[۳۳]. بعد از آن دوآن [5] و پارک[6] تأثیر DSD بر روی امواج آکوستیکی یونی در یک پلاسما گرد و غباری مغناطیده شده را مورد بررسی قرار دادند[۳۴]. نتایج بدست آمده از بررسی آنها نشان داد که هم سرعت و هم پهنای یک سالیتون در مقایسه با یک نمونه دانه‌ی گردوغباری بزرگتر است اما دامنه‌ی آن کوچکتر می‌باشد.

از سوی دیگر، DSD ممکن است به عنوان یک قانون توزیع نیرو ،یک توزیع گاوسی [۳۵] یا یک توزیع چند جمله‌ای در نظر گرفته می‌شود.

در چند دهه اخیر، توجه زیادی به اثرات کوانتومی در پلاسماهای گرد وغباری شده است. زمانیکه طول موج دوبروی ذرات تشکیل دهنده پلاسما (که در آن گسترش فضایی تابع موج طبق اصل عدم قطعیت کوانتومی مشخص می‌گردد) $\lambda_B=\hbar/mv_T$ که می‌تواند با ابعاد سیستم قابل مقایسه باشد. اثرات کوانتومی – مکانیکی نیز نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

در این بخش برای سادگی، از نوسانات بار در سطح دانه‌های گرد و غباری صرف نظر میکنیم. و با استفاده از روش تقلیل اختلالی برای پلاسما گرد و غباری کوانتومی (QDP[7]) با در نظر گرفتن اثرات DSD معادله‌ی زاخاروف را استخراج می‌کنیم.

---

[1] .Dust Size distribution
[2] .Aslaksen
[3] .Havnes
[4] .Meuris
[5] .Duan
[6] .Parkes
[7] .Quantum dusty plasma

۴-۶-۲ معادله‌های پایه‌ی حاکم برامواج آکوستیکی غباری کوانتومی

فرض می‌کنیم QDP شامل الکترون‌های اولیه ، یون‌ها و دانه‌های گرد و غباری با بار منفی دارای شعاعی در محدوده‌ی $[r_{min},r_{max}]$ در حضور میدان مغناطیسی خارجی B۰x باشد. در این حالت N دانه‌ی گردوغباری در نظر می‌گیریم . معادله حالت برای ذرات پلاسما به صورت زیر تعریف می‌شود:[۳۶]

$$p_s = \frac{m_s v_{Fs}^2}{3n_{s0}^2} n_s^3$$

(۴-۶-۲-۱)

n_s چگالی ذره و n_{s0} مقدار تعادلی آن (s=e برای الکترون ها، i برای یونها و d_j برای jامین دانه‌ی گرد وغباری .) $v_{Fs}=(2T_{Fs}/m_s)^{1/2}$ سرعت گرمایی فرمی ، T_{Fs} درجه حرارت فرمی و m_s جرم آن می‌باشد.در حالت تعادل و در وضعیت خنثایی بار داریم:

$$n_{i0} = n_{e0} + \sum_{j=1}^{j=N} z_{dj} n_{dj0}$$

(۴-۶-۲-۲)

Z_{dj} آهنگ افزایش الکترون‌ها روی سطح jامین دانه‌ی گردوغباری است. بنابراین معادلات نرمالیزه شده سیستم برابر است با:

$$\frac{\partial n_{dj}}{\partial t} + \nabla.\left(n_{dj} u_{dj}\right) = 0$$

(۴-۶-۲-۳)

$$\frac{\partial u_{dj}}{\partial t} + \left(u_{dj}.\nabla\right)u_{dj} = \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\nabla\varphi - \frac{\sigma_d}{m_{dj}}\nabla n_{dj} - \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(u_{dj}\times\hat{x}\right) + \frac{H_d^2}{2m_{dj}^2}\nabla\left[\frac{\nabla^2\sqrt{n_{dj}}}{\sqrt{n_{dj}}}\right]$$

(۴-۶-۲-۴)

$$\nabla^2\varphi = \mu_e n_e - \mu_i n_i + \sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}$$

(۴-۶-۲-۵)

$$0 = \nabla\varphi - \sigma_e n_e \nabla n_e + \frac{H_e^2}{2}\nabla\left[\frac{\nabla^2\sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}}\right]$$

(۴-۶-۲-۶)

$$0 = -\nabla\varphi - \sigma_i n_i \nabla n_i + \frac{H_i^2}{2}\nabla\left[\frac{\nabla^2\sqrt{n_i}}{\sqrt{n_i}}\right]$$

(۴-۶-۲-۷)

با در نظر گرفتن مقدارهای نرمالیزه شده‌ی زیر:

$$n_e \to n_e / n_{e0}, n_i \to n_i / n_{i0}, n_{dj} \to n_{dj} / N_{tot}, z_{dj} \to z_{dj} / \overline{z_{d0}}, m_{dj} \to m_{dj} / \overline{m_d}, m_e \to m_e / \overline{m_d}$$
$$m_i \to m_i / \overline{m_d}, u_{dj} \to u_{dj} / c_d, \varphi \to e\varphi / T_{eff}, t \to t\,\omega_{pd}, \nabla \to \nabla / \lambda_D \qquad (۸-۲-۶-۴)$$

که در آن:

$$T_{eff} = \frac{T_i T_e}{\mu_i T_i + \mu_e T_e}, N_{tot} = \sum_{j=1}^{N} n_{dj}, \overline{z_{d0}} = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}, \overline{m_d} = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{j=1}^{N} m_{dj} n_{dj}$$
$$c_d = \sqrt{\frac{2\overline{z_{d0}} T_{eff}}{\overline{m_d}}}, \omega_{pd} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \overline{z_{d0}^2} N_{tot}}{\overline{m_d}}}, \lambda_D = \sqrt{\frac{T_{eff}}{2\pi e^2 \overline{z_{d0}} N_{tot}}},$$
$$\Omega = \frac{e\overline{z_{d0}} B_0}{\overline{m_d} c\,\omega_{pd}}, \sigma_e = \frac{T_e}{T_{eff}}, \sigma_i = \frac{T_i}{T_{eff}}, \sigma_d = \frac{T_{Fd}}{\overline{z_{d0}} T_{eff}}$$
$$\mu_i = \frac{n_{i0}}{\overline{z_{d0}} N_{tot}}, \mu_e = \frac{n_{e0}}{\overline{z_{d0}} N_{tot}}, H_e^2 = \frac{\hbar^2 \overline{z_{d0}} \omega_{pd}^2}{m_e c_d^4}, H_i^2 = \frac{\hbar^2 \overline{z_{d0}} \omega_{pd}^2}{m_i c_d^4}, H_d^2 = \frac{\hbar^2 \omega_{pd}^2}{c_d^4 \overline{m_d^2}}$$

حال با استفاده از روش تغیر متغیر و تحول فیزیکی (RPT[۱]) [۳۷] (تقلیل مرتبه اختلال) و با معرفی متغیرهای زیر داریم:

$$X = \varepsilon(x - \lambda t), Y = \varepsilon y, Z = \varepsilon z, T = \varepsilon^3 t \qquad (۱۰-۲-۶-۴)$$

که ϵ یک پارامتر کوچک است که دامنه‌ی امواج اختلالی را اندازه‌گیری می‌کند.λ سرعت نرمالیزه شده که در چهارچوب ذاتی خود حرکت می‌کند. پارامترهای پلاسما n_d ، n_i ،n_e، u_d وϕ می‌توانند به صورت یک سری از متغیر بدون بعد ϵ نوشته شوند:

$$\begin{aligned}
n_{dj} &= n_{dj0} + \varepsilon^2 n_{dj1} + \varepsilon^4 n_{dj2} + \cdots \\
n_e &= 1 + \varepsilon^2 n_{e1} + \varepsilon^4 n_{e2} + \cdots \\
n_i &= 1 + \varepsilon^2 n_{i1} + \varepsilon^4 n_{i2} + \cdots \\
u_{djx} &= \varepsilon^2 u_{djx1} + \varepsilon^4 u_{djx2} + \cdots \\
u_{djy} &= \varepsilon^3 u_{djy1} + \varepsilon^4 u_{djy2} + \cdots \\
u_{djz} &= \varepsilon^3 u_{djz1} + \varepsilon^4 u_{djz2} + \cdots \\
\varphi &= \varepsilon^2 \varphi_1 + \varepsilon^4 \varphi_2 + \cdots
\end{aligned} \qquad (۱۱-۲-۶-۴)$$

[۱] . Reactivity-equivalent Physical Transformation

با جایگذاری معادلات(۴-۶-۲-۱۰) و(۴-۶-۲-۱۱) در معادلات (۴-۶-۲-۳) تا (۴-۶-۲-۷) و با استفاده از پایین‌ترین توان ε داریم: (ر.ک به پیوست ه)

$$n_{e1}=\frac{\varphi_1}{\sigma_e},n_{i1}=\frac{-\varphi}{\sigma_i}$$
$$n_{dj1}=\frac{z_{dj}n_{dj0}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d},u_{djx1}=\frac{\lambda}{n_{dj0}}n_{dj1}$$
$$u_{djz1}=\frac{1}{\Omega}\left[1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2-\sigma_d n_{dj0}^2}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z},u_{djy1}=\frac{-1}{\Omega}\left[1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2-\sigma_d n_{dj0}^2}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y}$$

(۴-۶-۲-۱۲)

علاوه براین ، رابطه‌ی پاشندگی خطی به صورت زیر حل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{n_{dj0}z_{dj}^2}{m_{dj}\lambda^2-\sigma_d n_{dj0}^2}=1$$

(۴-۶-۲-۱۳)

اخیراً ،تیبانی[1] و وادتی[2][۳۸] اثبات کرده‌اند که در نظر نگرفتن حرارت گرد وغباری ، از طریق بررسی عددی ،کار درستی است. بنابراین می‌توانیم از اثر گرمایی گردوغباری صرف‌نظر کنیم $\sigma_d=0$ که یک رابطه‌ی پاشندگی خطی ساده شده به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\lambda^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{n_{dj0}z_{dj}^2}{m_{dj}}$$

(۴-۶-۲-۱۴)

حال با در نظر گرفتن همان مقادیر ε در راستای yوz معادلات سرعت به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{djz2}=\frac{-\lambda m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left[1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2-\sigma_d n_{dj0}^2}\right]\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial X\,\partial Z}$$
$$u_{djY2}=\frac{-\lambda m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left[1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2-\sigma_d n_{dj0}^2}\right]\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial X\,\partial Y}$$

حال اگر توان‌های بالاتر ε را در نظر بگیریم به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial n_{dj1}}{\partial T}-\lambda\frac{\partial n_{dj2}}{\partial X}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djx2}}{\partial X}+\frac{\partial\left(n_{d1}u_{djx1}\right)}{\partial X}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djy2}}{\partial Y}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djz2}}{\partial Z}=0$$

---
۱ .El-Taibany
۲ .Wadati

(۴-۶-۲-۱۵)

$$\frac{\partial u_{djx1}}{\partial T}-\lambda\frac{\partial u_{djx2}}{\partial X}+u_{djx1}\frac{\partial u_{djx1}}{\partial X}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}-\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial n_{dj2}}{\partial X}-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}n_{dj1}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial X}+\frac{H_d^2}{4n_{dj0}m_{dj}^2}\frac{\partial\left(\nabla^2 n_{dj1}\right)}{\partial X}$$

(۴-۶-۲-۱۶)

$$-\lambda\frac{\partial u_{djy2}}{\partial X}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial Y}-\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial n_{dj2}}{\partial Y}-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}n_{dj1}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Y}+\frac{H_d^2}{4n_{dj0}m_{dj}^2}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\nabla^2 n_{dj1}\right)$$

$$-\lambda\frac{\partial u_{djz2}}{\partial X}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z}-\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial n_{dj2}}{\partial Z}-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}n_{dj1}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Z}+\frac{H_d^2}{4n_{dj0}m_{dj}^2}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\nabla^2 n_{dj1}\right)$$

(۴-۶-۲-۱۷)

$$0=\nabla\varphi_2-\sigma_e\nabla n_{e2}-\sigma_e n_{e1}\nabla n_{e1}+\frac{H_e^2}{4}\nabla\left(\nabla^2 n_{e1}\right)$$

(۴-۶-۲-۱۸)

$$0=-\nabla\varphi_2-\sigma_i\nabla n_{i1}-\sigma_i n_{i1}\nabla n_{i1}+\frac{H_i^2}{4}\nabla\left(\nabla^2 n_{i1}\right)$$

(۴-۶-۲-۱۹)

با حل معادلات (۴-۶-۲-۱۵) تا (۴-۶-۲-۱۹) و به کمک معادلات (۴-۲-۶-۲) و (۴-۲-۶-۲-۱۲) و مقادیر u_{djz2}و u_{djy2}، پس از آن با از بین بردن مرتبه دوم مقادیر مختل شده ، در نهایت به یک معادله‌ی کامل شده می‌رسیم ،معادله‌ی QZK ، که برای توصیف یک موج آکوستیکی گردوغباری کوانتومی غیر خطی در یک QDAW[۱] مغناطیده شده به کار برده می‌شود.(ر.ک به پیوست ی)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}+A\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+B\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+C\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}+\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

(۴-۶-۲-۲۰)

که در آن :

$$A=\left\{\frac{z_{dj}^2}{-m_{dj}\lambda^2+\sigma_d n_{dj0}^2}\left[1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{2m_{dj}\lambda}\right]-\frac{\left(-m_{dj}\lambda^2+\sigma_d n_{dj0}^2\right)^2}{2m_{dj}\lambda z_{dj}}\left(\frac{\mu_e}{\sigma_e^2}-\frac{\mu_i}{\sigma_i^2}\right)\right\}$$

---

[۱] .Dust acoustic waves quantum

(۴-۶-۲-۲۳)

$$B = \left[\frac{m_{dj}\lambda^2 - \sigma_d n_{dj0}^2}{2m_{dj}\lambda} \left(1 - \frac{\mu_e H_e^2}{4\sigma_e^2} - \frac{\mu_i H_i^2}{4\sigma_i^2} \right) - \frac{H_d^2}{8\lambda m_{dj}^2} \right] \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲\text{-}۲۲)$$

$$C = \frac{m_{dj}^2 \lambda^3}{2\Omega^2 z_{dj}^2} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲\text{-}۲۳)$$

با توجه به تک سایز بودن توزیع دانه‌های گرد وغباری ، معادلات (۴-۶-۲-۲۱) تا (۴-۶-۲-۲۳) با نتیجه‌ی موجود در مرجع [۳۹] مطابقت می‌کند. می‌توانیم معادله‌ی زیر را به عنوان یک جواب در نظر بگیریم:

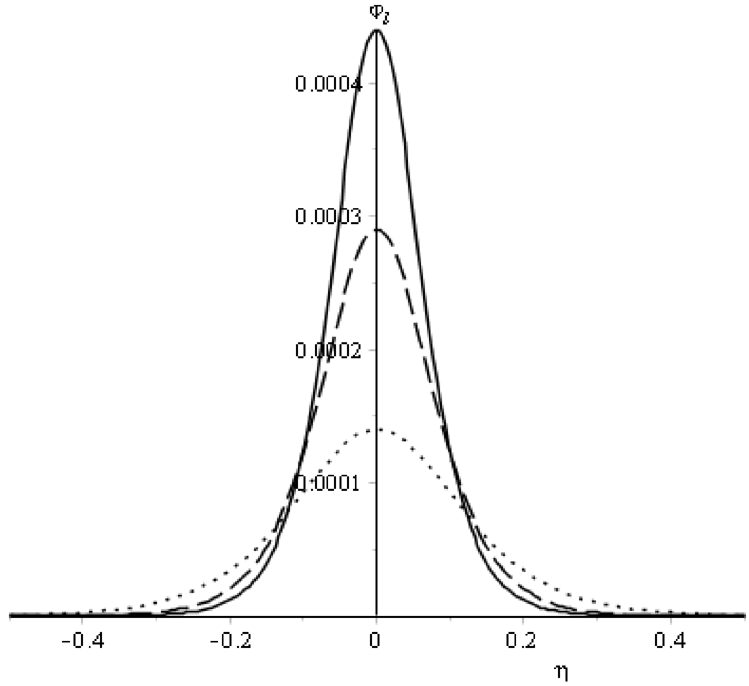
$$\varphi_\ell = \varphi_{\ell m} \sec^2\left(\frac{\eta}{w}\right) \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲\text{-}۲۴)$$

$$\eta = \ell_x X + \ell_y Y + \ell_z Z - MT \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲\text{-}۲۵)$$

$$W = 2\left(\frac{B\ell_x^2 + C\ell_x\left(\ell_y^2 + \ell_z^2\right)}{M} \right)^{1/2} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲\text{-}۲۶)$$

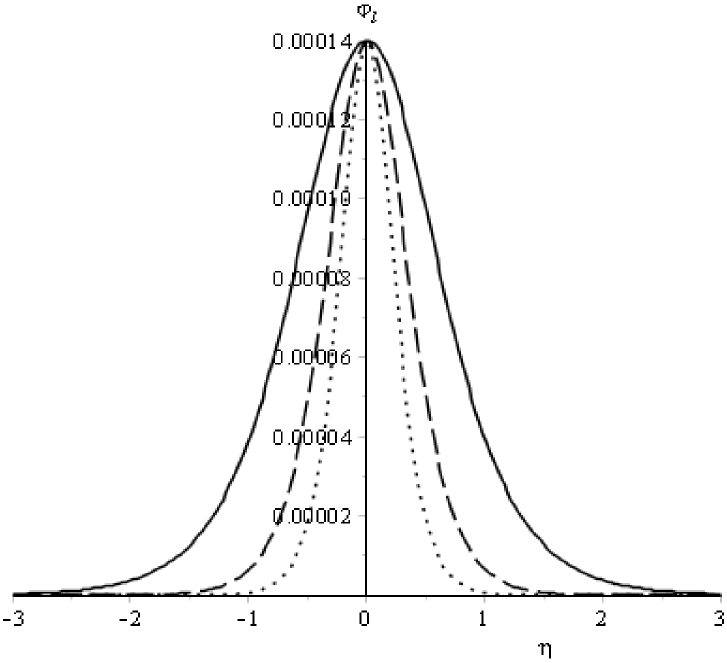
$$\varphi_{\ell m} = \frac{3M}{A\ell_x} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲\text{-}۲۷)$$

شکل ۴-۱۱ نمودار معادله (۴-۶-۲-۲۴) را به ازای مقادیر مختلف دامنه نشان می‌دهد.



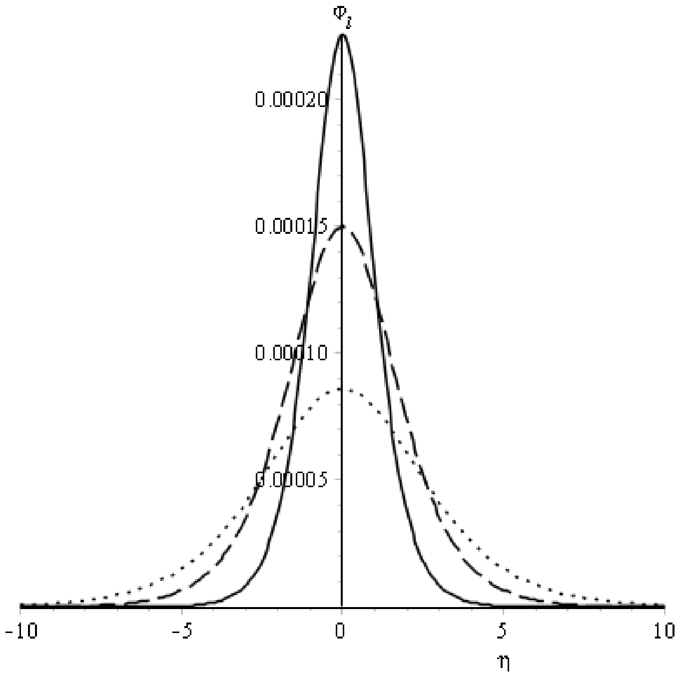
۴-۱۱ نمودار سالیتونی برای M=۰,۵، φlm=۱,۴×۱۰^-۴ (منحنی نقطه چین)، M=۱، φlm=۲,۹×۱۰^-۴ (منحنی خط چین) و M=۱,۵، φlm=۴,۴×۱۰^-۴ (منحنی توپر) و مقادیر ثابت $n_{dj} = 1.5 \times 10^{21}$ cm^-۳ و $\sigma_d = 0$ و $\mu_i = 6.6$ و $\mu_e = 2.5$.

طبق این نمودار با افزایش عدد ماخ دامنه‌ی موج سالیتونی افزایش میابد. در واقع می‌توان گفت افزایش عدد ماخ سبب افزایش سرعت و انرژی موج سالیتونی شده پس در نتیجه نمودار تغییرات دامنه‌ی موج فشرده‌تر می‌گردد.



۱۲-۴ تغییرات موج سالیتونی نسبت به عامل کوانتومی H . $H_e = ۱۰^{-۱}$, $H_i = ۱۰^{-۳}$ و $H_d = ۱۰^{-۸}$ (منحنی نقطه چین) ، $H_e = ۱.۵ \times ۱۰^{-۱}$, $H_i = ۲ \times ۱۰^{-۳}$ و $H_d = ۱.۲۵ \times ۱۰^{-۸}$ (منحنی خط چین) و $H_e = ۳ \times ۱۰^{-۱}$, $H_i = ۳.۲۳ \times ۱۰^{-۳}$ و $H_d = ۲.۵ \times ۱۰^{-۸}$ (منحنی توپر). به ازای پارامترهای ثابت $\varphi_{lm} = ۱.۴ \times ۱۰^{-۴}$، $n_{dj} = ۱.۵ \times ۱۰^{۲۱}\ cm^{-۳}$ و $\sigma_d = ۵.۲۲ \times ۱۰^{-۱۳}$.

در نمودار ۴-۱۲ تغییرات موج سالیتونی را نسبت به عامل کوانتومی H مشاهده می‌کنیم. می‌بینیم که عامل کوانتومی تأثیری بر دامنه‌ی موج سالیتون ندارد و فقط باعث تغییر پهنای موج می‌گردد. طبق این نمودار عامل کوانتومی با تغییرات انرژی و سرعت موج سالیتونی رابطه‌ی عکس دارد که با افزایش آن موج رقیق شده و پهنای آن افزایش میابد، بر خلاف این نمودار ، در شکل ۴-۱۳ تغییرات چگالی دانه‌ی غباری را مشاهده می‌کنیم که هم دامنه و هم پهنای موج سالیتونی را تغییر می‌دهد با افزایش آن دامنه و پهنا نیز افزایش میابد. همانطور که در نمودار مشهود است بیشترین سرعت و انرژی موج مربوط به بیشترین چگالی است .



۱۳-۴ تغییرات موج سالیتون نسبت به تغییر چگالی دانه‌ی غباری. $n_{dj} = ۱.۵ \times ۱۰^{۲۱}\ cm^{-۳}$ و $\varphi_{lm} = ۰.۸۴ \times ۱۰^{-۴}$ (منحنی نقطه چین)، $n_{dj} = ۲.۳۵ \times ۱۰^{۲۱}\ cm^{-۳}$ و $\varphi_{lm} = ۱.۰۴ \times ۱۰^{-۴}$ (منحنی خط چین) و $n_{dj} = ۳.۶۴ \times ۱۰^{۲۱}\ cm^{-۳}$ و $\varphi_{lm} = ۲.۲۶ \times ۱۰^{-۴}$ (منحنی تو پر). پارامترهای دیگر عبارتند از : $H_e = ۱۰^{-۱}$، $H_i = ۱۰^{-۳}$، $H_d = ۱۰^{-۸}$، $\sigma_d = ۵.۲۲ \times ۱۰^{-۱۳}$.

حال با افزودن ویسکوزیته به معادله حرکت ذرات گرد وغباری معادله (۴-۶-۲-۲۰) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم(ر.ک به پیوست ی)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}+A\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+B\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+C\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)+D\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial Z^2}\right)=0$$ (۴-۶-۲-۳۰)

که در آن ظرایب A، B و C همان معادله های (۴-۶-۲-۲۱) تا (۴-۶-۲-۲۳) می‌باشد و ضریب D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D=\frac{\upsilon}{2\Omega}\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+2n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}}\right)$$ (۴-۶-۲-۲۹)

جمله‌ی ویسکوزیته ($\upsilon\nabla^2 u$) به صورت اختلال به معادله اضافه می‌گردد و باعث ایجاد برخورد و تغییر رفتار سالیتون می‌شود.

فصل پنجم:

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه معادله تکامل vdpm غیر خطی را برای چگالی دانه‌های گردوغباری در پلاسما گردوغباری با در نظر گرفتن ترم مناسب در معادله‌ی چگالی گردوغباری استخراج کردیم.راه حل معادله‌ی vdpm وابسته به پارامترهای فیزیکی مرتبط که ترکیبی از نرخ تولید α و نرخ نابودی β که مربوط به دانه‌های گردوغباری باردار است می‌شود.باید توجه داشته باشیم سیستم توصیف شده در نواحی نزدیک به مبدأ به صورت خطی ناپایدار است. برای توزیع دامنه‌ی کوچک ، نمودار رشد پیدا کرده و سبب دفع آن می‌شود x=۰ .ترم اتلافی غیر خطی $\beta x^{2} dx/dt$ در معادله (۴-۵-۱۱) در نهایت این رشد را محدود می‌سازد و باعث اشباع دامنه می‌شود. تغییر مقادیر α و β ، رفتار معادله (۴-۵-۱۱) را نشان می‌دهد. تعبیر فیزیکی این نتایج را می‌توان به صورت زیر تشریح کرد.

می‌بینیم که بار روی سطح دانه‌ی گردوغباری که از ابتدا صفر بوده(گردوغبار خنثی) افزایش پیدا می‌کند که این امر نتیجه‌ی توزیع تصادفی بار و جدا شدن سریع آن از مجاورت مبدأ است.

زمانیکه دامنه‌ی امواج به قدر کافی بزرگ باشند ، خاصیت غیرخطی بودن را نمی‌توان نادیده گرفت . این خاصیت برگرفته از حالت‌های هارمونیکی از قبیل : حرکت سیال،نیروی لورنتز غیرخطی،افتادن ذره در چاه پتانسیل و... می‌باشد.

در آخر این فصل توضیحاتی در رابطه با معادله زاخاروف داده شده است و اثر توزیع گردوغبار بر روی امواج صوتی گردوغباری کوانتومی را بررسی کرده‌ایم که از طریق آن و معادلات حرکت و پیوستگی معادله زاخاروف را بدست آورده‌ایم. در پایان با اضافه کردن جمله‌ی ویسکوزیته عاملی اختلالی برای بررسی تغییر رفتار سالیتون با این اختلال را ایجاد کردیم.

پیشنهادات:

- در فصل چهار اثرات برخورد ذرات گردوغباری با الکترون‌ها و یون‌ها بررسی نشده است که میتوان با بررسی آن نتایج جدیدی را بدست آورد.
- در فصل چهار اثر توزیع یون به دام افتاده در پلاسماهای گردوغباری مطالعه نشده است که میتوان بررسی جامعی روی این مبحث انجام داد.

- در فصل چهارمی‌توانیم معادله‌ی kdvb به‌دست آمده را به صورت عددی حل کرده و تغییرات موج سالیتونی را در اثر برخورد و اختلال مورد بررسی قرار دهیم.

پیوست الف: اثبات روابط (۳-۳-۱-۵) و (۳-۳-۱-۶)

$$(k_r+ik_i)^2\lambda_D^2+\frac{\gamma_\ell^2\lambda_D^2}{R^2}=\frac{\omega(\omega+i\upsilon_{dn})}{\omega_{pd}^2-\omega(\omega+i\upsilon_{dn})}$$

$$(k_r^2-k_i^2+2ik_rk_i)\lambda_D^2+\frac{\gamma_\ell^2\lambda_D^2}{R^2}=\frac{\omega(\omega+i\upsilon_{dn})}{\omega_{pd}^2-\omega(\omega+i\upsilon_{dn})}$$

$$k_r^2\lambda_D^2-k_i^2\lambda_D^2+2ik_rk_i\lambda_D^2+\frac{\gamma_\ell^2\lambda_D^2}{R^2}=\frac{\omega(\omega+i\upsilon_{dn})}{\omega_{pd}^2-\omega(\omega+i\upsilon_{dn})}=\frac{\omega^2+i\omega\upsilon_{dn}}{\omega_{pd}^2-\omega^2-i\omega\upsilon_{dn}}$$

$$(*)k_r^2\lambda_D^2=k_i^2\lambda_D^2-\frac{\gamma_\ell^2\lambda_D^2}{R^2}+\frac{\omega^2+i\omega\upsilon_{dn}}{\omega_{pd}^2-\omega^2-i\omega\upsilon_{dn}}$$

$$(**)2ik_rk_i\lambda_D^2=\frac{\omega^2+i\omega\upsilon_{dn}}{\omega_{pd}^2-\omega^2-i\omega\upsilon_{dn}}=\frac{\omega^2+i\omega\upsilon_{dn}}{(\omega_{pd}^2-\omega^2)+(-i\omega\upsilon_{dn})}$$

$$\frac{\omega^2+i\omega\upsilon_{dn}}{(\omega_{pd}^2-\omega^2)+(-i\omega\upsilon_{dn})}=\frac{(\omega^2+i\omega\upsilon_{dn})((\omega_{pd}^2-\omega^2)-(-i\omega\upsilon_{dn}))}{((\omega_{pd}^2-\omega^2)+(-i\omega\upsilon_{dn}))((\omega_{pd}^2-\omega^2)-(-i\omega\upsilon_{dn}))}$$

$$=\frac{\omega^2\omega_{pd}^2-\omega^4+i\omega^3\upsilon_{dn}+i\omega\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}-i\omega^3\upsilon_{dn}-\omega^2\upsilon_{dn}^2}{\omega_{pd}^4-\omega^2\omega_{pd}^2+i\omega_{pd}^2\omega\upsilon_{dn}-\omega^2\omega_{pd}^2+\omega^4-i\omega^3\upsilon_{dn}-i\omega\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}+i\omega^3\upsilon_{dn}+\omega^2\upsilon_{dn}^2}$$

$$=\frac{\omega^2\omega_{pd}^2-\omega^4+i\omega\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}-\omega^2\upsilon_{dn}^2}{\omega_{pd}^4-2\omega^2\omega_{pd}^2+\omega^4+\omega^2\upsilon_{dn}^2}$$

$$=\frac{\omega^2\omega_{pd}^2-\omega^2(\omega^2+\upsilon_{dn}^2)+i\omega\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}}{(\omega_{pd}^2-\omega^2)^2+\omega^2\upsilon_{dn}^2}$$

$$2ik_rk_i\lambda_D^2=\frac{i\omega\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}}{(\omega_{pd}^2-\omega^2)^2+\omega^2\upsilon_{dn}^2}\rightarrow ik_i=\frac{i\omega\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}}{((\omega_{pd}^2-\omega^2)^2+\omega^2\upsilon_{dn}^2)2k_r\lambda_D^2}$$

$$\rightarrow k_i=\frac{\omega_{pd}^2\upsilon_{dn}\omega}{2k_r\lambda_D^2((\omega_{pd}^2-\omega^2)^2+\omega^2\upsilon_{dn}^2)}$$

(۳-۳-۱-۵)

$$k_r^2\lambda_D^2=k_i^2\lambda_D^2-\frac{\gamma_\ell^2\lambda_D^2}{R^2}+\frac{\omega^2\omega_{pd}^2-\omega^2(\omega^2+\upsilon_{dn}^2)}{(\omega_{pd}^2-\omega^2)^2+\upsilon_{dn}^2\omega^2}$$

(۳-۳-۱-۶)

پیوست ب:رابطه پاشندگی امواج DA و DIA بدون در نظر گرفتن میرایی لاندائو:

$$\varepsilon_{da}=1+\chi_e+\chi_i-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\varepsilon_{da}=1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}})+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Ti}}\exp(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Ti}^2}))$$

$$-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}k^2\lambda_{De}^2}+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Ti}k^2\lambda_{Di}^2}\exp(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Ti}^2})-$$

$$\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{1}{k^2\lambda_{D}^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$1+\frac{k_D^2}{k^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{k_D^2}{k^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(\frac{\omega^2+3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{k_D^2}{k^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2}(\frac{\omega^2}{\omega^2-3k^2v_{Td}^2})+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{k_D^2}{k^2}-\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2-3k^2v_{Td}^2}+\frac{k_q^2\upsilon_1}{k^2(\upsilon_1-i\,\omega)}=0$$

و برای امواج DIA:

$$1)\varepsilon_{ia}=1+\chi_e+\chi_{ia}+\frac{i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2}+\upsilon_4\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2})=0$$

$$2)\chi_{ia}=-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Ti}^2}{\omega^2})+i\,\chi_{im}$$

$$3)\upsilon_4=\frac{16}{3}\pi r_d^2 n_{d0}(\frac{k_B T_i}{2\pi M_i})^{\frac{1}{2}}(1-\frac{eq_{d0}}{2ck_B T_i})$$

$$4)\chi_{im}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{k^2\lambda_{Di}^2 kv_{Ti}}\exp(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Ti}^2})$$

$$5)\chi_e=\frac{1}{k^2\lambda_D^2}$$

$$1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}+\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}(1+\frac{3k^2v_{Td}^2}{\omega^2})+\frac{i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2}-\upsilon_4\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2})=0$$

$$1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2-3k^2v_{Td}^2}=\frac{-i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2}-\upsilon_4\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2})$$

$$\frac{k^2\lambda_{De}^2+1}{k^2\lambda_{De}^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}=\frac{-i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2}-\upsilon_4\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2})$$

$$k^2\lambda_{De}^2+1-\frac{\omega_{pi}^2k^2\lambda_{De}^2}{\omega^2}=\frac{-i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\upsilon_3-\upsilon_4\frac{k^2\omega_{pi}^2\lambda_{De}^2}{\omega^2})$$

$$\rightarrow 1-\frac{\omega_{pi}^2k^2\lambda_{De}^2}{\omega^2(k^2\lambda_{De}^2+1)}=\frac{-i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2+1}-\upsilon_4\frac{k^2\omega_{pi}^2\lambda_{De}^2}{\omega^2(k^2\lambda_{De}^2+1)}$$

$$\rightarrow 1-\frac{\omega_{ss}^2}{\omega^2}=\frac{-i}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2+1}-\upsilon_4\frac{\omega_{ss}^2}{\omega^2})$$

$$\rightarrow \omega^2-\omega_{ss}^2=\frac{-i\,\omega^2}{\omega+i\,\upsilon_{ch}}(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2+1}-\upsilon_4\frac{\omega_{ss}^2}{\omega^2})$$

$$\rightarrow (\omega^2-\omega_{ss}^2)(\omega+i\,\upsilon_{ch})=-i\,\omega^2(\frac{\upsilon_3}{k^2\lambda_{De}^2+1}-\upsilon_4\frac{\omega_{ss}^2}{\omega^2})$$

پیوست ج : اثبات روابط (۴-۵-۱-۳) و (۴-۵-۱-۴)

$$x=a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{da}{dt}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)a(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\frac{db}{dt}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)b(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2a}{dt^2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\frac{da}{dt}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-$$
$$\frac{da}{dt}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-a(t)\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\frac{d^2b}{dt^2}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$\frac{db}{dt}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-b(t)\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

حال در معادله‌ی (۴-۵-۱-۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{d^2a}{dt^2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-2\frac{da}{dt}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-$$
$$a(t)\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\frac{d^2b}{dt^2}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$2\frac{db}{dt}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-b(t)\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-$$
$$\left(\alpha-\beta\left(a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)^2\right)$$
$$\left(\frac{da}{dt}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)a(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\frac{db}{dt}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)b(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)$$
$$+\omega^2(t)\left(a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)=0$$

$$-2\frac{da}{dt}\gamma\sin\gamma t-a(t)\gamma^2\cos\gamma t+2\frac{db}{dt}\gamma\cos\gamma t-b(t)\gamma^2\sin\gamma t-$$
$$\left(\alpha-\beta\left(a^2\cos^2\gamma t+b^2\sin^2\gamma t+2ab\cos\gamma t\sin\gamma t\right)\right)\left(\frac{da}{dt}\cos\gamma t-\gamma a(t)\sin\gamma t+\frac{db}{dt}\sin\gamma t+\gamma b(t)\cos\gamma t\right)$$
$$+\omega^2(t)\left(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\right)=0$$
$$-2\frac{da}{dt}\gamma\sin\gamma t-a(t)\gamma^2\cos\gamma t+2\frac{db}{dt}\gamma\cos\gamma t-b(t)\gamma^2\sin\gamma t$$
$$-\left(\alpha-\beta a^2-\beta b^2-2\beta ab\cos\gamma t\sin\gamma t\right)\left(\frac{da}{dt}\cos\gamma t-\gamma a(t)\sin\gamma t+\frac{db}{dt}\sin\gamma t+\gamma b(t)\cos\gamma t\right)$$
$$+\omega^2(t)\left(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\right)=0$$

$$-2\frac{da}{dt}\gamma\sin\gamma t-a(t)\gamma^2\cos\gamma t+2\frac{db}{dt}\gamma\cos\gamma t-b(t)\gamma^2\sin\gamma t$$
$$-\alpha\frac{da}{dt}\cos\gamma t-\alpha a(t)\gamma\sin\gamma t+\alpha\frac{db}{dt}\sin\gamma t+\alpha\gamma b(t)\cos\gamma t-\beta a^2\frac{da}{dt}\cos\gamma t$$

$$+\beta a^3\gamma\sin\gamma t-\beta a^2\frac{db}{dt}\sin\gamma t-\beta a^2b\gamma\cos\gamma t-\beta b^2\frac{da}{dt}\cos\gamma t+\beta b^2a\gamma\sin\gamma t$$

$$-\beta b^{2}\frac{db}{dt}\sin\gamma t-\beta b^{3}\gamma\cos\gamma t-2\beta ab\frac{da}{dt}\cos^{2}\gamma t\sin\gamma t+$$
$$2\beta a^{2}b\gamma\cos\gamma t\sin^{2}\gamma t-2\beta ab\frac{db}{dt}\cos\gamma t\sin^{2}\gamma t-2\beta ab^{2}\gamma\cos^{2}\gamma t\sin\gamma t$$
$$+\omega^{2}(t)\big(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\big)=0$$

$$-2\frac{da}{dt}\gamma\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)-a(t)\gamma^{2}\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)$$
$$+2\frac{db}{dt}\gamma\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)-b(t)\gamma^{2}\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)-\alpha\frac{da}{dt}\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)$$
$$+\alpha a(t)\gamma\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)-\alpha\frac{db}{dt}\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)-\alpha\gamma b(t)\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)$$
$$+\beta a^{2}\frac{da}{dt}\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)-\beta a^{3}\gamma\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)+\beta a^{2}\frac{db}{dt}\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)$$
$$+\beta a^{2}b\gamma\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)+\beta b^{2}\frac{da}{dt}\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)-\beta b^{2}a\gamma\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)$$
$$+\beta b^{2}\frac{db}{dt}\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)+\beta b^{3}\gamma\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)+$$
$$2\beta ab\frac{da}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{(2x)^{2}}{2!}+\cdots\right)\right)\right)\left(\gamma t-\frac{(\gamma t)^{3}}{3!}+\cdots\right)-$$
$$2\beta a^{2}b\gamma\left(1-\frac{(\gamma t)^{2}}{2!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{(2x)^{2}}{2!}+\cdots\right)\right)\right)+\omega^{2}(t)\big(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\big)=0$$

$$-2\frac{da}{dt}\gamma^{2}t-a(t)\gamma^{2}t+2\frac{db}{dt}\gamma-b(t)\gamma^{3}t-\alpha\frac{da}{dt}+\alpha a(t)\gamma^{2}t-$$
$$\alpha\frac{db}{dt}\gamma t-\alpha\gamma b(t)+\beta a^{2}\frac{da}{dt}-\beta a^{3}\gamma^{2}t+\beta a^{2}\frac{db}{dt}\gamma t+\beta a^{2}b\gamma+\beta b^{2}\frac{da}{dt}-\beta b^{2}a\gamma^{2}t$$
$$+\beta b^{2}\frac{db}{dt}\gamma t+\beta b^{3}\gamma+2\beta ab\frac{da}{dt}\gamma t+\omega^{2}(t)\big(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\big)=0$$

$$-2\frac{da}{dt}\gamma^{2}t-a(t)\gamma^{2}t+2\frac{db}{dt}\gamma-b(t)\gamma^{3}t-\alpha\frac{da}{dt}+\alpha a(t)\gamma^{2}t-$$
$$\alpha\frac{db}{dt}\gamma t-\alpha\gamma b(t)+\beta a^{2}\frac{da}{dt}-\beta a^{3}\gamma^{2}t+\beta a^{2}\frac{db}{dt}\gamma t+\beta a^{2}b\gamma+\beta b^{2}\frac{da}{dt}-\beta b^{2}a\gamma^{2}t$$

$$+\beta b^2\frac{db}{dt}\gamma t+\beta b^3\gamma+2\beta ab\frac{da}{dt}\gamma t+\omega^2(t)\big(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\big)=0$$

$$\gamma^2 t\left(-2\frac{da}{dt}-b(t)\gamma+\alpha a(t)-\beta a^3-\beta b^2 a\right)+\gamma\left(2\frac{db}{dt}-\alpha b(t)+\beta a^2 b+\beta b^3\right)$$
$$+\gamma t\left(-\alpha\frac{db}{dt}+\beta a^2\frac{db}{dt}+\beta b^2\frac{db}{dt}+2\beta ab\frac{da}{dt}\right)+\frac{da}{dt}\left(\beta b^2+\beta a^2-\alpha\right)$$
$$+\omega^2(t)\big(a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t\big)=0$$

$$\frac{da}{dt}=\frac{\alpha}{2}a-\frac{b}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)-\frac{\beta}{8}\left(a^3+ab^2\right)\equiv f(a,b)$$
$$\frac{db}{dt}=\frac{\alpha}{2}b+\frac{a}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)-\frac{\beta}{8}\left(b^3+a^2 b\right)\equiv g(a,b)$$

پیوست د: کد مربوط به معادله vdp

```
program dusty_plasma
implicit none
integer::m,j
real::t0,tt,x0,y0,w0,h,k,m1,m2,m3,m4,n1,n2,n3,n4,a,b,gama,w
!*******************************************************
!*******************************************************
real,allocatable,dimension(:)::x(:)
real,allocatable,dimension(:)::y(:)
real,allocatable,dimension(:)::t(:)
!***********************************************
Open (١,file='E:\payanname\A Van der Pol–Mathieu equation for the dynamics\y.txt',status='replace)
Open (٢,file='E:\payanname\A Van der Pol–Mathieu equation for the dynamics\x.txt',status='replace)
Open ((٣,file='E:\payanname\A Van der Pol–Mathieu equation for the dynamics\t.txt',status='replace)
!************************************************
print*,'enter the intial valu x0,y0'
read*,x0,y0
print*,'enter the a,b number'
read*,a,b
```

```
print*,'enter the h number'
read*,h
print*,'enter baze zamani t0,tt'
read*,t0,tt
print*,'enter step m'
read*,m
print*,'enter w0 number'
read*,w0
print*,'enter gama'
read*,gama
!************************************************
!************************************************
k=(tt-t0)/m
allocate(y(m))
allocate(x(m))
allocate(t(m))
  x(1)=x0
  y(1)=y0
  t(1)=t0
!*******************************************
do j=1,m-1

w=w0**2*(1+h*cos(gama*j*k))
n1=k*y(j)
m1=k*(a-b*(x(j)**2))*y(j)-w*x(j)
n2=k*(y(j)+m1/2)
m2=k*(a-b*(x(j)+n1/2)**2(*y(j)+m1/2)-w*(x(j)+n1/2)
n3=k*(y(j)+m2/2)
m3=k*(a-b*(x(j)+n2/2)**2*(y(j)+m2/2)-w*(x(j)+n2/2)
n4=k*(y(j)+m3)
m4=k*(a-b*(x(j)+n3)**2*(y(j)+m3)-w*(x(j)+n3)
!*******************************************
```

```
y(j+1)=y(j)+(m1+(2*m2)+(2*m3)+m4)/6
x(j+1)=x(j)+(n1+(2*n2)+(2*n3)+n4)/6
t(j+1)=j*k
!*****************************************
write(1,*)y(j+1)
write(2,*)x(j+1)
write(3,*)t(j+1)
end do
close(1)
close(2)
close(3)
end
```

پیوست ه : اثبات روابط(۴-۶-۲-۱۲)

$$1)\frac{\partial n_{dj}}{\partial t}+\nabla.\left(n_{dj}u_{dj}\right)=0$$

$$2)\frac{\partial u_{dj}}{\partial t}+\left(u_{dj}.\nabla\right)u_{dj}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\nabla\varphi-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}n_{dj}\nabla n_{dj}-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(u_{dj}\times\hat{x}\right)+\frac{H_d^2}{2m_{dj}^2}\nabla\left[\frac{\nabla^2\sqrt{n_{dj}}}{\sqrt{n_{dj}}}\right]$$

$$3)\nabla^2\varphi=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N}z_{dj}n_{dj}$$

$$4)0=\nabla\varphi-\sigma_e n_e\nabla n_e+\frac{H_e^2}{2}\nabla\left[\frac{\nabla^2\sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}}\right]$$

$$5)0=-\nabla\varphi-\sigma_i n_i\nabla n_i+\frac{H_i^2}{2}\nabla\left[\frac{\nabla^2\sqrt{n_i}}{\sqrt{n_i}}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\rightarrow\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}=-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial T}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}$$

$$1)\frac{\partial n_{dj}}{\partial t}+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(n_{dj}u_{dj}\right)=0$$

در راستای x داریم:

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^{3}\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^{2}n_{dj\,1}+\varepsilon^{4}n_{dj\,2}+\cdots\right)+$$
$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^{2}n_{dj\,1}+\varepsilon^{4}n_{dj\,2}+\cdots\right)\left(\varepsilon^{2}u_{djx\,1}+\varepsilon^{4}u_{djx\,2}+\cdots\right)=0$$

راستای y :

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^{3}\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^{2}n_{dj\,1}+\varepsilon^{4}n_{dj\,2}+\cdots\right)+$$
$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^{2}n_{dj\,1}+\varepsilon^{4}n_{dj\,2}+\cdots\right)\left(\varepsilon^{2}u_{djy\,1}+\varepsilon^{4}u_{djy\,2}+\cdots\right)=0$$

راستای z :

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^{3}\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^{2}n_{dj\,1}+\varepsilon^{4}n_{dj\,2}+\cdots\right)+$$
$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial z}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^{2}n_{dj\,1}+\varepsilon^{4}n_{dj\,2}+\cdots\right)\left(\varepsilon^{2}u_{djz\,1}+\varepsilon^{4}u_{djz\,2}+\cdots\right)=0$$

$$2)\ \frac{\partial u_{dj}}{\partial t}+\left(u_{dj}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)u_{dj}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$
$$-\frac{\sigma_{d}}{m_{dj}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)n_{dj}-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(u_{dj}\times x\right)$$
$$+\frac{H_{d}^{2}}{2m_{dj}^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{\left(\partial^{2}/\partial x^{2}+\partial^{2}/\partial y^{2}+\partial^{2}/\partial z^{2}\right)\sqrt{n_{dj}}}{\sqrt{n_{dj}}}\right]$$

راستای x :

$$\frac{\partial u_{dj}}{\partial t}+u_{dj}\frac{\partial u_{dj}}{\partial x}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\sigma_{d}}{m_{dj}}n_{dj}\frac{\partial n_{dj}}{\partial x}-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(u_{dj}\times x\right)+\frac{H_{d}^{2}}{2m_{dj}^{2}}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial^{2}/\partial X^{2}\sqrt{n_{dj}}}{\sqrt{n_{dj}}}\right]$$

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^{3}\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\varepsilon^{2}u_{djx1}+\varepsilon^{4}u_{djx2}+\cdots\right)+\left(\varepsilon^{2}u_{djx1}+\varepsilon^{4}u_{djx2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon^{2}u_{djx1}+\varepsilon^{4}u_{djx2}+\cdots\right)=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}$$

$$\left(\varepsilon^{2}\varphi_{1}+\varepsilon^{4}\varphi_{2}+\cdots\right)-\frac{\sigma_{d}}{m_{dj}}\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(\left(\varepsilon^{2}u_{djx1}+\varepsilon^{4}u_{djx2}+\cdots\right)\times\hat{x}\right)$$

$$+\frac{H_{d}^{2}}{2m_{dj}^{2}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\varepsilon^{2}\,\partial^{2}/\partial X^{2}\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]$$

راستای y :

$$\frac{\partial u_{dj}}{\partial t}+u_{dj}\frac{\partial u_{dj}}{\partial Y}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}-\frac{\sigma_{d}}{m_{dj}}n_{dj}\frac{\partial n_{dj}}{\partial Y}-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(u_{dj}\times x\right)+\frac{H_{d}^{2}}{2m_{dj}^{2}}\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\partial^{2}/\partial Y^{2}\sqrt{n_{dj}}}{\sqrt{n_{dj}}}\right]$$

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^{3}\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\varepsilon^{3}u_{djy1}+\varepsilon^{4}u_{djy2}+\cdots\right)+\left(\varepsilon^{3}u_{djy1}+\varepsilon^{4}u_{djy2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left(\varepsilon^{2}u_{djy1}+\varepsilon^{4}u_{djy2}+\cdots\right)=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\left(\varepsilon^{2}\varphi_{1}+\varepsilon^{4}\varphi_{2}+\cdots\right)-\frac{\sigma_{d}}{m_{dj}}\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)\varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(\left(\varepsilon^{3}u_{djy1}+\varepsilon^{4}u_{djy2}+\cdots\right)\times\hat{x}\right)$$

$$+\frac{H_{d}^{2}}{2m_{dj}^{2}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\varepsilon^{2}\,\partial^{2}/\partial Y^{2}\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(n_{dj0}+\varepsilon^{2}n_{dj1}+\varepsilon^{4}n_{dj2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]$$

راستای z :

$$\frac{\partial u_{dj}}{\partial t}+u_{dj}\frac{\partial u_{dj}}{\partial Z}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\frac{\sigma_{d}}{m_{dj}}n_{dj}\frac{\partial n_{dj}}{\partial Z}-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(u_{dj}\times x\right)+\frac{H_{d}^{2}}{2m_{dj}^{2}}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\partial^{2}/\partial Z^{2}\sqrt{n_{dj}}}{\sqrt{n_{dj}}}\right]$$

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^{3}\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\varepsilon^{3}u_{djz1}+\varepsilon^{4}u_{djz2}+\cdots\right)+\left(\varepsilon^{3}u_{djz1}+\varepsilon^{4}u_{djz2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\left(\varepsilon^{2}u_{djz1}+\varepsilon^{4}u_{djz2}+\cdots\right)=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}$$

$$\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(\left(\varepsilon^3 u_{djz\,1}+\varepsilon^4 u_{djz\,2}+\cdots\right)\times\hat{x}\right)$$

$$+\frac{H_d^2}{2m_{dj}^2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\varepsilon^2\,\partial^2\big/\partial Z^2\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]$$

$$3)\nabla^2\varphi=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}\rightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj} n_{dj}\end{cases}$$

راستای x :

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)$$

راستای y :

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)$$

راستای z:

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)=\mu_e n_e-\mu_i n_i+\sum_{j=1}^{N} z_{dj}\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)$$

$$4)0=\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)-\sigma_e\left(1+\varepsilon^2 n_{e1}+\varepsilon^4 n_{e2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(1+\varepsilon^2 n_{e1}+\varepsilon^4 n_{e2}+\cdots\right)+\frac{H_e^2}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\varepsilon^2\,\partial^2\big/\partial X^2\left(1+\varepsilon^2 n_{e1}+\varepsilon^4 n_{e2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(1+\varepsilon^2 n_{e1}+\varepsilon^4 n_{e2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]$$

$$5)0=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)-\sigma_i\left(1+\varepsilon^2 n_{e1}+\varepsilon^4 n_{e2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(1+\varepsilon^2 n_{i1}+\varepsilon^4 n_{i2}+\cdots\right)+\frac{H_i^2}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\varepsilon^2\,\partial^2/\partial X^2\left(1+\varepsilon^2 n_{i1}+\varepsilon^4 n_{i2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(1+\varepsilon^2 n_{i1}+\varepsilon^4 n_{i2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]$$

حال در تمام روابطی که داریم پایین‌ترین توان‌های ε را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$4)\rightarrow 0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\sigma_e\frac{\partial n_{e1}}{\partial X}\rightarrow\sigma_e\frac{\partial n_{e1}}{\partial X}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\rightarrow\sigma_e n_{e1}=\varphi_1\rightarrow n_{e1}=\frac{\varphi_1}{\sigma_e}$$

$$5)0=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\sigma_i\frac{\partial n_{i1}}{\partial X}\rightarrow\sigma_i\frac{\partial n_{i1}}{\partial X}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\rightarrow\sigma_i n_{i1}=\varphi_1\rightarrow n_{i1}=-\frac{\varphi_1}{\sigma_i}$$

در معادله پیوستگی داریم:

$$-\lambda\frac{\partial n_{dj1}}{\partial X}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djx1}}{\partial X}=0\rightarrow-\lambda\frac{\partial n_{dj1}}{\partial X}=-n_{dj0}\frac{\partial u_{djx1}}{\partial X}\rightarrow u_{djx1}=\frac{\lambda}{n_{dj0}}n_{dj1}$$

معادله حرکت در راستای x :

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\varepsilon^2 u_{djx1}+\varepsilon^4 u_{djx2}+\cdots\right)+$$

$$\left(\varepsilon^2 u_{djx1}+\varepsilon^4 u_{djx2}+\cdots\right)\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon^2 u_{djx1}+\varepsilon^4 u_{djx2}+\cdots\right)=$$

$$\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}\left(n_{dj0}+\varepsilon^2 n_{dj1}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\left(n_{dj0}+\varepsilon^2 n_{dj1}+\cdots\right)$$

$$\rightarrow-\lambda\frac{\partial}{\partial X}u_{djx1}=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial}{\partial X}\varphi_1-\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial}{\partial X}n_{dj1}\rightarrow-\lambda u_{djx1}=\frac{z_{dj}\varphi_1}{m_{dj}}-\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}n_{dj1}$$

$$\rightarrow u_{djx1}=\frac{z_{dj}\varphi_1}{-\lambda m_{dj}}+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{\lambda m_{dj}}n_{dj1}\rightarrow u_{djx1}=\frac{-z_{dj}\varphi_1+\sigma_d n_{dj0}}{\lambda m_{dj}}$$

$$\rightarrow \lambda m_{dj} u_{djx1} = -z_{dj}\varphi_1 + \sigma_d n_{dj0} \rightarrow \lambda m_{dj} u_{djx1} + z_{dj}\varphi_1$$

$$= \sigma_d n_{dj0} \rightarrow \frac{\lambda^2 m_{dj}}{n_{dj0}} n_{dj1} + z_{dj}\varphi_1 = \sigma_d n_{dj0} n_{dj1}$$

$$z_{dj}\varphi_1 = -\frac{\lambda^2 m_{dj}}{n_{dj0}} n_{dj1} + \sigma_d n_{dj0} n_{dj1} \rightarrow z_{dj}\varphi_1 =$$

$$n_{dj1}\left(-\frac{\lambda^2 m_{dj}}{n_{dj0}} + \sigma_d n_{dj0}\right) \rightarrow z_{dj}\varphi_1 = n_{dj1}\left(\frac{-\lambda^2 m_{dj} + \sigma_d n_{dj0}}{n_{dj0}}\right)$$

$$n_{dj1} = \frac{z_{dj}\varphi_1}{-\lambda^2 m_{dj} + \sigma_d n_{dj0} / n_{dj0}} \rightarrow n_{dj1} = \frac{z_{dj}\varphi_1 n_{dj0}}{-\lambda^2 m_{dj} + \sigma_d n_{dj0}}$$

معادله حرکت را در راستای z می‌نویسیم:

$$0 = \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} - \frac{\sigma_d}{m_{dj}} n_{dj0}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Z} - \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega u_{djz1} \rightarrow \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} - \frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Z} - \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega u_{djz1} = 0$$

$$\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} - \frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Z} = \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega u_{djz1} \rightarrow u_{djz1} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} - \frac{1}{\Omega}\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Z}$$

$$\rightarrow u_{djz1} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} - \frac{1}{\Omega}\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{z_{dj} n_{dj0}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2 + n_{dj0}^2\sigma_d}\right)$$

$$\rightarrow u_{djz1} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} - \frac{1}{\Omega}\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{-m_{dj}\lambda^2 + n_{dj0}^2\sigma_d}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} \rightarrow u_{djz1} = \frac{1}{\Omega}\left(1 + \frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2 - n_{dj0}^2\sigma_d}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z}$$

معادله حرکت در راستای y :

$$0 = \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} - \frac{\sigma_d}{m_{dj}} n_{dj0}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Y} + \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega u_{djy1} \rightarrow \frac{z_{dj}}{m_{dj}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} - \frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Y} = -\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega u_{djy1}$$

$$u_{djy1} = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} + \frac{1}{\Omega}\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial Y}$$

$$\rightarrow u_{djy1} = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} + \frac{1}{\Omega}\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{z_{dj} n_{dj0}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2 + n_{dj0}^2\sigma_d}\right)$$

$$\rightarrow u_{djy1} = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} + \frac{1}{\Omega}\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{-m_{dj}\lambda^2 + n_{dj0}^2\sigma_d}\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} \rightarrow u_{djy1} = -\frac{1}{\Omega}\left(1 + \frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2 - n_{dj0}^2\sigma_d}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y}$$

پیوست و : اثبات رابطه (QZK):

$$1)\frac{\partial n_{dj1}}{\partial T}-\lambda\frac{\partial n_{dj2}}{\partial X}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djx2}}{\partial X}+\frac{\partial\left(n_{dj}u_{djx1}\right)}{\partial X}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djy2}}{\partial Y}+n_{dj0}\frac{\partial u_{djz2}}{\partial Z}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{z_{dj}}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial X^2}+\mu_e n_{e2}\frac{1}{z_{dj}}-\mu_i n_{i2}\frac{1}{z_{dj}}\right]+n_{dj0}$$

$$\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_{djx1}}{\partial T}+\frac{u_{djx1}}{\lambda}\frac{\partial u_{djx1}}{\partial X}-\frac{z_{dj}}{\lambda m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}+\frac{\sigma_d}{\lambda m_{dj}}n_{dj1}\frac{\partial n_{dj1}}{\partial X}-\frac{H_d^2}{4n_{dj0}m_{dj}^2\lambda}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}n_{dj1}\right)\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)\times\frac{\lambda}{m_{dj}}n_{dj1}\right]$$

$$+n_{dj0}\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{-\lambda m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}\sigma_d}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial X\,\partial Y}\right]+n_{dj0}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{-\lambda m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}\sigma_d}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial X\,\partial Z}\right]=0$$

$$\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}-\frac{\lambda}{z_{dj}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-$$

$$\frac{\lambda}{z_{dj}}\left(\mu_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\mu_{i0}\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}\right)+\frac{n_{dj0}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\lambda}{n_{dj0}}\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)+\frac{n_{dj0}}{\lambda}$$

$$\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)-\frac{n_{dj0}z_{dj}}{\lambda m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}+$$

$$\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{\lambda m_{dj}z_{dj}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{\lambda m_{dj}z_{dj}}\left(\mu_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\mu_{i0}\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}\right)$$

$$+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{\lambda m_{dj}}\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)-$$

$$\frac{H_d^2}{4m_{dj}^2\lambda}\frac{\partial^3}{\partial X^3}\left(\frac{z_{dj}n_{dj}\varphi_1}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)+\frac{z_{dj}^2n_{dj}^2\lambda}{n_{dj}\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d\right)}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}$$

$$+\frac{z_{dj}^2n_{dj}^2}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d\right)}\frac{\lambda}{m_{dj}}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{\lambda n_{dj0}m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}$$

$$-\frac{\lambda n_{dj0}m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}\sigma_d}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}=0$$

$$\frac{z_{dj}n_{dj0}}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}-\frac{\lambda}{z_{dj}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\left(\mu_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\mu_i\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}\right)\left(\frac{\lambda}{z_{dj}}+\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{\lambda m_{dj}z_{dj}}\right)+\frac{z_{dj}n_{dj0}}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}+\frac{n_{dj0}}{\lambda}$$

$$\frac{z_{dj}^2n_{dj0}^2}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{z_{dj}n_{dj0}}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\left(\frac{H_d^2}{4m_{dj}^2\lambda}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\frac{2z_{dj}^2n_{dj}^2}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}$$

$$\left(\frac{\lambda}{m_{dj}}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{\lambda n_{dj0}m_{dj}}{\Omega^2 z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}\right)\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

$$\frac{2\partial\varphi_1}{\partial T}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\left(\frac{\lambda}{z_{dj}}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\left(-\mu_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\mu_i\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}\right)$$

$$\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{\lambda z_{dj}m_{dj}}\right)\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)+\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)\left(\frac{z_{dj}^2n_{dj0}^2}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}\right)$$

$$\frac{n_{dj0}}{\lambda}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)\frac{n_{dj0}z_{dj}}{\lambda m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}+$$

$$\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{\lambda m_{dj}z_{dj}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)\left(\frac{z_{dj}^2n_{dj}^2}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}\right)\left(\frac{\sigma_d n_{dj0}}{\lambda m_{dj}}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}$$

$$-\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)\left(\frac{z_{dj}n_{dj0}}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\right)\left(\frac{H_d^2}{4m_{dj}^2\lambda}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^2}+$$

$$\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}n_{dj0}}\right)\left(\frac{2z_{dj}^2n_{dj0}^2}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}\right)\left(\frac{\lambda}{m_{dj}}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{\lambda n_{dj0}m_{dj}}{\Omega^2z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda z_{dj}^2n_{dj0}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\left(\mu_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\mu_i\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}\right)\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2z_{dj}n_{dj0}}\right)$$

$$\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{\lambda z_{dj}m_{dj}}\right)+\left(\frac{z_{dj}n_{dj0}}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\right)$$

$$\frac{n_{dj0}}{2\lambda}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}+\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\right)\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}$$

$$+\left(\frac{z_{dj}n_{dj}}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\right)\left(\frac{\sigma_d n_{dj0}}{2\lambda m_{dj}}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}$$

$$-\left(\frac{H_d^2}{8m_{dj}^2\lambda}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^2}+\left(\frac{z_{dj}\lambda}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}m_{dj}}\frac{\lambda n_{dj0}m_{dj}}{\Omega^2z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda z_{dj}^2 n_{dj0}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\left(\left(\frac{\mu_e}{\sigma_e}+\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}-\frac{\mu_e}{\sigma_e^2}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+\frac{\mu_i}{\sigma_i^2}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+\frac{\mu_e H_e^2}{4\sigma_e^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\frac{\mu_i H_i^2}{4\sigma_i^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}\right)$$
$$\left(\frac{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}{2m_{dj}n_{dj0}z_{dj}^2\lambda}\right)-\frac{z_{dj}n_{dj0}^2}{2\lambda\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}$$
$$+\left(\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\right)\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\left(\frac{z_{dj}}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\right)\left(\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{2\lambda m_{dj}}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}$$
$$-\left(\frac{H_d^2}{8m_{dj}^2\lambda}\right)\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\left(\frac{z_{dj}\lambda}{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}}\frac{\lambda n_{dj0}}{\Omega z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}\right)$$
$$\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

از طرفی داریم:

$$0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\sigma_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\sigma_e n_{e1}\frac{\partial n_{e1}}{\partial X}+\frac{H_e^2}{4}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}n_{e1}\right)$$
$$0=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}-\sigma_i\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}-\sigma_i n_{i1}\frac{\partial n_{i1}}{\partial X}+\frac{H_i^2}{4}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}n_{i2}\right)$$
$$\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}=\frac{1}{\sigma_e}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}-n_{e1}\frac{\partial n_{e1}}{\partial X}+\frac{H_e^2}{4}\frac{\partial^3 n_{e1}}{\partial X^3}$$
$$\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}=-\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-n_{i1}\frac{\partial n_{i1}}{\partial X}+\frac{H_i^2}{4}\frac{\partial^3 n_{i1}}{\partial X^3}$$
$$\mu_e\frac{\partial n_{e2}}{\partial X}-\mu_i\frac{\partial n_{i2}}{\partial X}=\left(\frac{\mu_e}{\sigma_e}+\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}-\mu_e\left(\frac{\varphi_1}{\sigma_e}\right)\frac{1}{\sigma_e}\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+\frac{\mu_e H_e^2}{4\sigma_e^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\frac{\mu_i\varphi_1}{4\sigma_i^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}$$

با جایگذاری داریم:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda z_{dj}^2 n_{dj}}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\left(\left(\frac{\mu_e}{\sigma_e}+\frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}-\frac{\mu_e}{\sigma_e^2}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+\frac{\mu_i}{\sigma_i^2}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+\frac{\mu_e H_e^2}{4\sigma_e^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}-\frac{\mu_i H_i^2}{4\sigma_i^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}\right)$$
$$\left(\frac{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}{2m_{dj}n_{dj}z_{dj}^2\lambda}\right)+\frac{z_{dj}n_{dj0}^2}{2\lambda\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}$$
$$+\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\frac{\sigma_d n_{dj0}}{z_{dj}^2}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+\frac{z_{dj}}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\left(\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{2\lambda m_{dj}}\right)\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{H_d^2}{8m_{dj}^2\lambda}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}+$$
$$\frac{z_{dj}\lambda}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}-\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{z_{dj}}\frac{\lambda n_{dj0}}{\Omega z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}\right)\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}+\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\left(\frac{z_{dj}\lambda}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}+\frac{z_{dj}n_{dj0}^2}{2\lambda\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)}+\frac{z_{dj}}{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}\left(\frac{\sigma_d n_{dj0}^2}{2\lambda m_{dj}}\right)-\frac{\mu_e}{\sigma_e^2}\left(\frac{\left(m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}{2m_{dj}n_{dj}z_{dj}^2\lambda}\right)-\frac{\mu_i}{\sigma_i^2}\left(\frac{\left(-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}{2m_{dj}n_{dj}z_{dj}^2\lambda}\right)\right)+$$

$$\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X^3}\left(\frac{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda n_{dj0}z_{dj}^2}-\frac{\mu_e H_e^2}{4\sigma_e^2}\left(\frac{\left(m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}{2m_{dj}n_{dj}z_{dj}^2\lambda}\right)-\frac{\mu_i H_i^2}{4\sigma_i^2}\left(\frac{\left(m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d\right)^2}{2m_{dj}n_{dj}z_{dj}^2\lambda}\right)-\frac{H_d^2}{8m_{dj}^2\lambda}+\frac{-m_{dj}\lambda^2+n_{dj0}^2\sigma_d}{2\lambda m_{dj}}\frac{\sigma_d}{z_{dj}^2}\right)$$

$$+\left(\frac{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}{2z_{dj}}\frac{\lambda n_{dj0}}{\Omega z_{dj}}\left(1+\frac{\sigma_d n_{dj0}}{m_{dj}\lambda^2-n_{dj0}^2\sigma_d}\right)\right)\left(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Y^2}-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial X\,\partial Z^2}\right)=0$$

حال با انجام محاسبات و فاکتورگیری ضرایب مربوط به معادله‌ی زاخاروف را تعیین می‌کنیم.

تمام مراحل اثبات این رابطه کاملا مطابق با پیوست ج است با این تفاوت که در توان‌های بالاتر ε در راستای yوz جمله ویسکوزیته ظاهر می‌شود.

راستای y:

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\varepsilon^3u_{djy1}+\varepsilon^4u_{djy2}+\cdots\right)+\left(\varepsilon^3u_{djy1}+\varepsilon^4u_{djy2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left(\varepsilon^3u_{djy1}+\varepsilon^4u_{djy2}+\cdots\right)=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}\left(n_{dj0}+\varepsilon^2n_{dj1}+\varepsilon^4n_{dj2}+\cdots\right)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left(n_{dj0}+\varepsilon^2n_{dj1}+\varepsilon^4n_{dj2}+\cdots\right)-\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(\left(\varepsilon^3u_{djy1}+\varepsilon^4u_{djy2}+\cdots\right)\times\hat{x}\right)$$

$$+\frac{H_d^2}{2m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\varepsilon^2\,\partial^2\big/\partial Y^2\left(n_{dj0}+\varepsilon^2n_{dj1}+\varepsilon^4n_{dj2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(n_{dj0}+\varepsilon^2n_{dj1}+\varepsilon^4n_{dj2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]+\upsilon\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(\varepsilon^3u_{djy1}+\varepsilon^4u_{djy2}+\cdots\right)$$

راستای Z:

$$\left(-\varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\varepsilon^3u_{djz1}+\varepsilon^4u_{djz2}+\cdots\right)+$$

$$\left(\varepsilon^3u_{djz1}+\varepsilon^4u_{djz2}+\cdots\right)\varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left(\varepsilon^3u_{djz1}+\varepsilon^4u_{djz2}+\cdots\right)=\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}$$

$$\left(\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\cdots\right)-\frac{\sigma_d}{m_{dj}}\left(n_{dj0}+\varepsilon^2n_{dj1}+\varepsilon^4n_{dj2}+\cdots\right)\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\left(n_{dj0}+\varepsilon^2n_{dj1}+\varepsilon^4n_{dj2}+\cdots\right)-$$

$$\frac{z_{dj}}{m_{dj}}\Omega\left(\left(\varepsilon^3 u_{djz\,1}+\varepsilon^4 u_{djz\,2}+\cdots\right)\times\hat{x}\right)+\frac{H_d^2}{2m_{dj}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\varepsilon^2\,\partial^2\big/\partial Z^2\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)^{1/2}}{\left(n_{dj\,0}+\varepsilon^2 n_{dj\,1}+\varepsilon^4 n_{dj\,2}+\cdots\right)^{1/2}}\right]$$

$$+\upsilon\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial Z}\right)\left(\varepsilon^3 u_{djz\,1}+\varepsilon^4 u_{djz\,2}+\cdots\right)$$

مراجع:

[١] Berlin: Springer. *Introduction to Plasma Physics: With Space and Laboratory Applications* . Cambridge, UK: Cambridge University Press. p**.** ١٣٨ . (٢٠٠٥)

[٢] Luo, Q-Z; D'Angelo, N; Merlino, R. L. "Shock formation in a negative ion plasma . Department of Physics and Astronomy. ٥ (٨) . (١٩٩٨)

[٣] Walt, Martin . *Introduction to Geomagnetically Trapped Radiation*. Cambridge; New York: Cambridge University Press. (٢٠٠٥)

[٤] ***Meyer-Vernet, Nicole*****.** *Basics of the Solar Winds*. Cambridge University Press. (٢٠٠٧)

[٥] Russel, W.B., Saville, D.A. and Schowalter, W. R . *Colloidal Dispersions.* Cambridge University Press.(١٩٨٩)

[٦] Chen,F.F.*introduction to plasma physics and controlled fusion.*,springer.(٢٠٠٦)

[٧] Muller, P. *Pure and Applied Chemistry.*, ٦٦ (٥).,(١٩٩٤)

[٨] Omidvarborna et al. *"Characterization of particulate matter emitted from transit buses fueled with B ٢٠ in idle modes.," Journal of Environmental Chemical Engineering.* ٢ (٤): ٢٣٣٥–٢٣٤٢

[٩] A K Jonscher. ***Br. J. Appl..*** *Solid state plasma phenomena.*, ١٥ **٣٦٥. (**April **١٩٦٤)**

[١٠] D.Sagie and I.I. Glass. "Explosive-driven hemispherical implosions for generating fusion plasmas., (١٩٨٢)

[١١] Mendis, D. A. Dust in cosmic plasma environments., *Astrophysics and Space Science.,* ٦٥ (١). (١٩٧٩)

[١٢] Adrian Down., Ion Acoustic Waves., (March ٠٥, ٢٠٠٧)

[۱۳] Carlson, Arthur W. "A search for lower-hybrid-drift fluctuations in a field-reversed configuration using $CO_۲$ heterodyne scattering".,*Physics of Fluids.,* ۳۰ (٥)., (۱۹۸۷)

[۱۴] N. N. RAO,. P. K. SHUKLA and M. Y. YU., dust -acoustic waves in dusty plasma., (۱۹۸۹)

[۱٥] P K Shukla and V P Silin., Dust ion-acoustic wave., *Phys. Scr*. ٤٥ ٥۰۸., (۱۹۹۲)

[۱۶] Verheest F.,*Waves in dusty plasmas.,(*Dordrecht:Kluweracademi) (۲۰۰۰)

[۱۷] de Angelis U ., *phys.*Scripta ۴۵ ۴۶۵ .(۱۹۹۲)

[۱۸] Cho J Y N and Kelly M C ., Rev.Geophys. ۳۱ ۲۴۳ ., (۱۹۹۳)

[۱۹] Bernhardt P A,Ganguli G,Kelly M C,S wartz W E .*Geophys.,*Res. ۱۰۰ ۲۳۸۱۱. (۱۹۹۵)

[۲۰] Ichimaru S,*Basic principles of plasma physics : A statistical Approach (London:Benjamin),*(۱۹۷۳)

[۲۱] Rao N N, Shukla P K and Yu M Y, *Planet space Sci,*۳۸ ۵۴۳, (۱۹۹۰)

[۲۲] Shukla P K and Silin V P , *phys.scripta* ۴۵ ۵۰۸ ,(۱۹۹۲)

[۲۳] Popel S I , Yu M Y and Tsytovich V N ,*Phys.plasmas*, ۳ ۴۳۱۳,(۱۹۹۶)

[۲۴] Bharuthram R and Shukla P K , *planet.Space Sci,*۴۰ ۹۷۳.(۱۹۹۲)

[۲۵] Sagdeev R Z , *Reviews of plasma physics,*ed M A Leontovich(consultants Bureau , New York) ,(۱۹۶۶)

[۲۶] ,[۲۸] Mamun A A ,*Astrophys.Space Sci.* ۲۶۸ ۴۴۳.(۱۹۹۹)

[۲۷] Washimi H and Taniuti T ,*Phys.Rev.Lett.*۱۷ ۹۹۶,(۱۹۶۶) [٢٩] **M Momeni ,I Kourakis, M Moslehi-Fard and P K Shukla**, A van der pol-Mathieu roe the dynamics of dust grain in dusty plasmas,*Faculty of physics,Tabriz University,Tabriz ۵۱۶۶۴,Iran*,(٢٠٠٧)

[٣٠] **D. B. Melrose**. *The Zakharov equations : a derivation using kinetic theory*, School of Physics, University of Sydney, Sydney NSW,(٢٠٠٦)

[٣١] **Barkan,R.L Merlino, and N D Angelo**,*Phys.plasmas* .٢ ٣٥٦٣ .(١٩٩٥)

[٣٢] **T K Aslaksen and O Havnes, J** .*Geophys.Res.* ٩٧ ١٩١٧٥,(١٩٩٢)

[٣٣] **P Meuris**,*Planet.space Sci,* ٤٥ ١١٧١. (١٩٩٧)

[٣٤] **Duan and J.Parkes**,*Phys.Rev*.E .٦٨ ٠٦٧٤٠٢.(٢٠٠٣)

[٣٥] **Duan. Yung, Shi and Lu**,*Phys,Lett,A.*٣٦١ ٣٦٨ . (٢٠٠٨)

[٣٦] **G Manfredi**,*Fields Inst.Commun.* ٤٦ ٢٦٣. (٢٠٠٥)

[٣٧] **T Taniuti and C C Wei, J**, *Phys.Soc.Jpn.*٢٤ ٩٤١(١٩٦٨)

[٣٨] **El-Taibany and M.Wadati**,*Phys.plasmas.*١٤ ٠٤٢٣٠٢ .(٢٠٠٧)

[٣٩] **S.Ali and P.K Shukla**,*Phys.plasmas* ١٣ ٠٢٢٣١٣ .(٢٠٠٦)

Abstract

In this study, the properties of dusty plasma and its applications, the behavior of dust particles in a dusty plasma, the forces acting on dust particles in dusty plasma waves (linear and nonlinear) and their dispersion relations is studied. It is shown that the presence of dust particles, causing coupling between the different waves in dusty plasma, which in this thesis are two types of acoustic fashion in a dusty plasma uniform, non-magnetized and has been dealing with weak coupling. Through the Maxwell-Boltzmann distribution equation for the density of electrons and ions and Fourier transform wave dispersion is obtained.

After the introduction of linear waves and dispersion equations and results, waves have discussed that domain are sufficiently large so that the non-linear properties can not be ignored. In this section of the fluid equations using the equation Korteweg–de Vries deficit disorder (kdv) have diminished. These equations were solved by changing the independent variables and applying boundary conditions. Suggested solutions to these equations indicate that acoustic and acoustic-ion modes with different domain names for soliton propagation kdv be enhanced. The breadth of the scope of the waves on the plasma parameters σ (ratio of ion temperature to electron), the density of dust particles and quantum agent (H) is studied. Also charged dust particles using dynamic equation in dusty plasma Van der Pol - Mathieu (VDP) solutions derived the equation has a swing that will eventually lead to differential equations, numerical solution using Runge-Kutta method of order ٤ was studied and the corresponding graphs.

Keywords: Dusty Plasma, Acoustic Waves, Acoustic-Ion Waves, Soliton

Shahrood University of Technology

Faculty Physics

Study of excited waves in dusty plasma

Shahrzad Bahrami

Supervisor : Dr. Mehdi Momeni

February 2016

۹۳