



دانشکده فیزیک
گروه ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه نقش سکه در ولگشت‌های کوانتومی ابعاد بالاتر از یک

تیمور اندیک

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

۱۳۹۴

تقدیم بہ

پدر بزرگوارم

مادر مہربانم

و برادران عزیزم

سپاس گزارمی...

هر گام که انسان برمی دارد و هر کلمه که سخن می‌گوید بی عنایت و لطف الهی و مدد وی مقدور انسان نیست لذا پیش از همه می‌بایست شکر گزار حضرت حق بود.
از:

پدر و مادر عزیزم و همچنین حمایت‌های فراوان برادرانم
استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر مصطفی عنابستانی به خاطر راهنمایی‌های بسیار ارزشمندشان
اساتید داور جناب آقای دکتر حسین موحدیان و آقای دکتر مرتضی رفیعی
اساتید محترم دانشکده فیزیک به خاطر آنچه در طول دوره‌ی تحصیل از ایشان آموخته‌ام
و از دوستانی که مرا در انجام این تحقیق یاری رسانده اند
سپاسگذارم.

تیمور اندیک
۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب تیمور اندیک دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مطالعه نقش سکه در ولگشت‌های کوانتومی ابعاد بالاتر از یک، تحت راهنمایی دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تیمور اندیک
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا با معرفی ولگشت تصادفی کلاسیکی روی خط، توزیع احتمال و انحراف معیار را برای آن محاسبه کردیم. با استفاده از شبیه سازی خواص مربوط به آن را مورد بررسی قرار دادیم. سپس به معرفی ولگشت کوانتومی روی خط پرداختیم. نمودار توزیع احتمال را برای این ولگشت محاسبه و تفاوت آن را با ولگشت کلاسیکی نشان دادیم.

در فصل بعد به بررسی ولگشت کوانتومی دو بعدی پرداختیم. سپس چند نمونه از مشهورترین سکه های کوانتومی دو بعدی را معرفی کردیم. با استفاده از شبیه سازی، توزیع احتمال، انحراف معیار و واریانس را برای آنها محاسبه و با هم مقایسه کردیم.

همچنین دو نوع ولگشت کوانتومی دو بعدی که اخیراً معرفی شده اند را بررسی کرده ایم که ولگشت کوانتومی تکرانشدنی و برگشت ناپذیر نامیده می شوند، ابتدا خواص هر دو ولگشت را توصیف کرده و علاوه بر تابع توزیع احتمال و واریانس که برای این ولگشت ها بررسی شده اند، پارامتر مهم دیگری نیز معرفی شده که تکانه مشترک نامیده می شود و به صورت تحلیلی نشان داده ایم که این پارامتر برای ولگشت کوانتومی تکرانشدنی مستقل از شرایط اولیه است.

در پایان مدل خود را از ولگشت کوانتومی دو بعدی با نام ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پادساعتگرد ارائه داده ایم که در این دو ولگشت با قراردادن محدودیت بر روی چپ و راست مسیر حرکت ولگشت، دو ولگشت کوانتومی جدید را معرفی کرده ایم که فقط به به سه همسایه مجاور می روند و در هر گام تعداد انتخاب ها از ۴ به ۳ کاهش می یابد. ابتدا عملگرهای سکه این دو ولگشت را تعیین کرده ایم و سپس برخی از خواص این دو ولگشت را بررسی و آن ها را با بقیه ولگشت ها مقایسه کردیم.

کلمات کلیدی:

ولگشت تصادفی کلاسیکی، ولگشت کوانتومی، ولگشت کوانتومی ساعتگرد، ولگشت کوانتومی پادساعتگرد، تکانه مشترک

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. اندیک، ت. عنابستانی. م. "ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پاد ساعتگرد". کنفرانس فیزیک ایران ۱۳۹۴. دانشگاه فردوسی مشهد. ایران. ۲-۵ شهریور.

۲. اندیک، ت. عنابستانی. م. "درهم تنیدگی کوانتومی بین سکه و مکان در ولگشت کوانتومی پاد ساعتگرد". سومین کنفرانس بین المللی پژوهش های کاربردی در مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات. دانشگاه تربیت مدرس. ۱۵ بهمن ماه ۹۴.

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

خ	فهرست تصاویر
ذ	فهرست جداول
۳	۱ ولگشت ها
۴	۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی
۶	۱.۱.۱ انحراف معیار
۷	۲.۱ ولگشت کوانتومی
۸	۱.۲.۱ ولگشت کوانتومی گسسته در یک بعد
۱۳	۲.۲.۱ محاسبات تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط
۱۴	۳.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی با سری فوریه
۱۷	۴.۲.۱ حل تحلیلی
۲۱	۲ ولگشت کوانتومی دو بعدی
۲۴	۱.۲ معرفی سکه های مشهور
۲۴	۱.۱.۲ سکه هادامارد
۲۶	۲.۱.۲ سکه تبدیل فوریه
۲۸	۳.۱.۲ سکه گراور
۲۹	۴.۱.۲ انحراف معیار
۳۲	۵.۱.۲ محاسبات تحلیلی ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از تبدیل فوریه
۳۹	۶.۱.۲ تکانه مشترک
۴۳	۳ ولگشت کوانتومی تکرار نشدنی و برگشت ناپذیر
۴۴	۱.۳ مقدمه
۴۴	۲.۳ ولگشت کوانتومی تکرار نشدنی
۴۷	۳.۳ ولگشت کوانتومی برگشت ناپذیر
۵۱	۱.۳.۳ تکانه مشترک

۵۵	ولگشت کوانتومی برگشت ناپذیر	۲.۳.۳
۵۷		ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پاد ساعتگرد	۴
۵۹	ولگشت کوانتومی ساعتگرد	۳.۰.۴
۶۰	ولگشت کوانتومی پادساعتگرد	۴.۰.۴
۶۷	تبدیل فوریه برای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد	۵.۰.۴
۷۴	نتیجه‌گیری	۱.۴
۷۶			مراجع
۷۹			نمایه

فهرست تصاویر

۵	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی ، برای سه زمان ثابت t . . .	۱۰.۱
۷	پهنای توزیع متقارن	۲۰.۱
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $ \psi\rangle$	۳۰.۱
۱۱ $ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	۴۰.۱
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $ \psi\rangle$	۴۰.۱
۱۲ $ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$	۵۰.۱
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $ \psi(0)\rangle$	۵۰.۱
۱۳ $ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - i 1\rangle)$	۶۰.۱
۱۳	نمودار انحراف معیار برای ولگشت کوانتومی و کلاسیکی	۷۰.۱
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام برای حل تحلیلی با	۷۰.۱
۲۰ حالت اولیه $ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	۱۰.۲
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه تفکیک	۱۰.۲
۲۵ پذیر $H \otimes H$ پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه ۱۰.۲	۲۰.۲
۲۶	نمودار انحراف معیار بر حسب زمان برای خانواده هادامارد	۳۰.۲
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه تفکیک	۳۰.۲
۲۸ ناپذیر فوری پس از ۳۰ گام با حالت اولیه ۱۰.۲	۴۰.۲
۲۹	نمودار انحراف معیار بر حسب زمان برای خانواده فوریه	۵۰.۲
	توزیع بدست آمده بعد از چهل گام برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از	۵۰.۲
۳۰ سکه گراور و حالت اولیه ۱۰.۲	۶۰.۲
	نمودار انحراف معیار بر حسب زمان ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای	۶۰.۲
۳۱ سکه گراور، هادامارد و فوریه	۷۰.۲
	نمودار واریانس بر حسب زمان ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای سکه	۷۰.۲
۳۱ گراور، هادامارد و فوریه با حالت اولیه ۱۰.۲	۸۰.۲
	نمودار واریانس بر حسب زمان ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای سکه	۸۰.۲
۳۲ گراور، هادامارد و فوریه با حالت اولیه $\psi(0,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, -1, 1)$	

۱۰۳	توزیع بدست آمده بعد از ۴۰ گام برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه
۴۹	برگشت ناپذیر و حالت اولیه ۱۶.۳
۲۰۳	توزیع بدست آمده بعد از ۴۰ گام برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه
۵۰	تکرار نشدنی و حالت اولیه ۱۷.۳
۳۰۳	واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، تکرار نشدنی (مثلث)،
۵۰	برگشت ناپذیر (ستاره)، با حالت اولیه ۱۶.۳
۴۰۳	واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، تکرار نشدنی (مثلث)،
۵۱	برگشت ناپذیر (ستاره)، با حالت اولیه ۱۷.۳
۱۰۴	نمودار عملگر تغییر مکان
۲۰۴	توزیع احتمال بدست آمده بعد از ۳۰ گام a ولگشت کوانتومی پاد ساعتگرد و b)
۶۳	ولگشت کوانتومی ساعتگرد، با حالت اولیه ۱۰.۴
۳۰۴	نمودار واریانس بر حسب زمان برای a ولگشت کوانتومی ساعتگرد و b ولگشت
۶۴	کوانتومی پاد ساعتگرد با حالت اولیه ۱۱.۴
۴۰۴	نمودار واریانس بر حسب زمان برای a ولگشت کوانتومی ساعتگرد و b ولگشت
۶۵	کوانتومی پاد ساعتگرد با حالت اولیه ۱۰.۴
۵۰۴	واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، ساعتگرد (نقطه)، تکرار
۶۶	نشدنی (مثلث)، برگشت ناپذیر (ستاره)، پاد ساعتگرد (مربع) با حالت اولیه ۱۱.۴
۶۰۴	واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، ساعتگرد (نقطه)، تکرار
۶۶	نشدنی (مثلث)، برگشت ناپذیر (ستاره)، پاد ساعتگرد (مربع) با حالت اولیه ۱۰.۴
۷۰	نمودار واریانس برای ولگشت کوانتومی پاد ساعتگرد با حالات اولیه ۲۲.۴ و ۲۳.۴

فهرست جداول

۴	۱.۱	احتمال پیدا شدن ذره در مکان n و در زمان t ، برای ولگشتی که حرکت خود را از مبدا شروع کرده باشد
	۲.۱	احتمال پیدا شدن ولگشت در مکان n و در زمان t ، با فرض اینکه ولگشت حرکت خود را از مبدا شروع کرده باشد
۱۱	۱.۲	شیب انحراف معیار بعنوان تابعی از زمان برای خانواده هادامارد، σ_1 برای ولگشت کوانتومی یک بعدی است.
۲۵	۲.۲	شیب انحراف معیار به عنوان تابعی از زمان
۲۷		

پیش‌گفتار

از اوایل قرن بیستم، مطالعات نظری و شواهد آزمایشگاهی دیدگاه دانشمندان را به سمتی سوق می‌داد که بپذیرند، دنیای فیزیکی از قوانین مکانیک کوانتومی پیروی می‌کند. در نتیجه یوری مانین^۱ [۱] و فاینمن^۲ [۲] به‌طور مستقل این پیشنهاد را مطرح کردند که جهان فیزیکی می‌تواند بوسیله کامپیوترهای کوانتومی بصورت ایده‌آل شبیه‌سازی شود و یک دهه پس از آن تحقیقات نظری و تلاش برای ساخت کامپیوترهای کوانتومی بر اساس قوانین مکانیک کوانتومی مثل برهم‌نهی و تداخل بین دامنه‌هایی کوانتومی به یکی از زمینه‌های فعال تحقیقاتی تبدیل شد.

الگوریتم دویچ^۳ [۳] و الگوریتم دویچ- جوزا^۴ [۴] از اولین الگوریتم‌هایی بودند که نشان دادند کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند مسائل محاسباتی خاصی را بسیار سریعتر از کامپیوترهای کلاسیکی حل کنند. در سال ۱۹۹۴ شور^۵ الگوریتم کوانتومی را پیشنهاد داد که مسئله پیدا کردن عامل‌های اول یک عدد دلخواه را بصورت نمایی از همتای کلاسیکی خود سریعتر انجام می‌دهد [۵]، [۶] در ۱۹۹۶، گروور^۶ الگوریتمی را ابداع کرد که در اصول می‌توانست یک بانک داده طبقه‌بندی نشده را با سرعتی که به صورت توان دوم از سرعت هر نوع الگوریتم کلاسیکی بزرگتر است جستجو کند [۷]. تعداد زیادی از الگوریتم‌های کلاسیکی بر پایه ولگشت کلاسیکی هستند، شبیه زنجیره مارکوف^۷ که اکنون یکی از ابزارهای قدرتمند در طراحی الگوریتم‌هاست [۸]. انتظار می‌رود که ولگشت کوانتومی همین نقش را در طراحی الگوریتم‌های مختلف کوانتومی بازی کند.

امروزه ولگشت کوانتومی به دو صورت استاندارد پیوسته [۹] و گسسته [۱۰] مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نوع خاصی از ولگشت کوانتومی گسسته که به ولگشت هادامارد مشهور است توسط امباینیس^۸ و همکارانش [۱۱] در سال ۲۰۰۱ مورد مطالعه قرار گرفت. چندین الگوریتم کوانتومی بر پایه ولگشت کوانتومی طراحی شده است [۱۲]، [۱۳] که ثابت می‌کند ولگشت کوانتومی می‌تواند ابزاری قدرتمند در

^۱Yuri Manin

^۲fyenman

^۳Deutsch

^۴Deutsch-Jozsa

^۵Shor

^۶Grover

^۷Markov

^۸Ambainis

طراحی الگوریتم های محاسباتی آینده باشد، از این رو تحقیقات بسیاری در زمینه بررسی ولگشت های کوانتومی انجام گرفته است و تحقیقات در این زمینه ادامه دارد.

فصل ۱

ولگشت ها

۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی

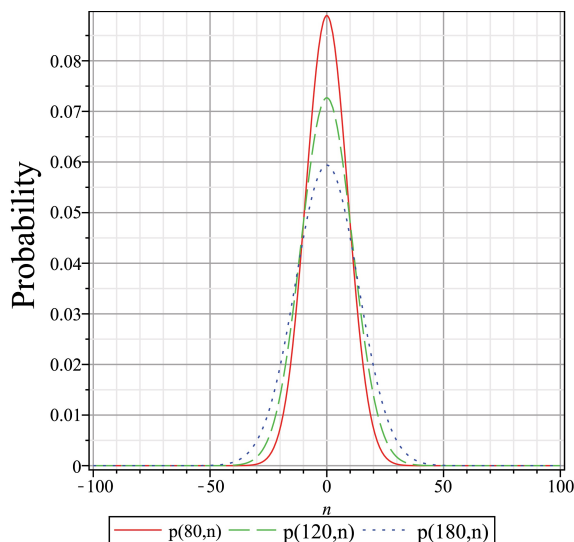
اصطلاح ولگشت تصادفی اولین بار در سال ۱۹۰۵ توسط پیرسون به عنوان یک فرمالیسم ریاضی برای بررسی مسیر حرکت ذره که شامل گام‌های تصادفی می‌باشد معرفی شد. ساده‌ترین مثال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی^۱ حرکت یک ذره روی خط راست است که جهت حرکت این ولگشت به وسیله یک سکه سالم تعیین می‌شود. در هر گام، ولگشت در یکی از دو جهت راست و چپ خود حرکت می‌کند و می‌تواند از موقعیت کنونی خود (n)، فقط به نقاط مجاورش ($n \pm 1$) برود. در این مورد، ولگشت با پرتاب سکه مشخص می‌کند که در گام بعدی چگونه حرکت کند، سکه را پرتاب می‌کنیم اگر شیر آمد، ولگشت یک گام به سمت راست خود می‌رود و اگر خط آمد، یک گام به سمت چپ می‌رود و این فرایند را تکرار می‌کنیم، این فرایند چون یک فرایند احتمالی است نمی‌دانیم که ولگشت در گام بعدی کجا قرار می‌گیرد ولی می‌توان احتمال پیدا شدن ذره در مکان n را بعد از t گام محاسبه کرد. از آنجایی که سکه سالم است در نتیجه احتمال آمدن شیر و خط با هم برابر است، بنابراین ولگشت متقارن خواهد بود و نشان داده شده است که نمودار تابع توزیع احتمال به صورت نمودار گاوسی است [۱۷].

جدول ۱.۱: احتمال پیدا شدن ذره در مکان n و در زمان t ، برای ولگشتی که حرکت خود را از مبدا شروع کرده باشد

n/t	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰						۱					
۱				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						
۲			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						
۳			$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
۴		$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$					
۵	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$					

اگر ذره در زمان $t = 0$ با احتمال $p = 1$ در مبدا باشد، یا به عبارتی $p(0, 0) = 1$ باشد. در گام بعدی یعنی $t = 1$ ذره با احتمال $\frac{1}{4}$ در مکان -1 و با احتمال $\frac{1}{4}$ در مکان 1 خواهد بود، بنابراین احتمال اینکه ذره بعد از گام اول در مکان $n = 0$ باشد صفر است. پس $p(n = 1) = \frac{1}{4}$ و $p(n = -1) = \frac{1}{4}$ است. از روی نمودار ۱.۱ می‌بینیم که با افزایش گام، هر چه که از مبدا دور می‌شویم احتمال حضور

^۱Classical Random Walks



شکل ۱.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی، برای سه زمان ثابت t

ولگشت در نقاط دور از مبدأ کمتر میشود و بیشترین احتمال حضور ولگشت مربوط به مبدأ است. رابطه کلی که برای مشخص کردن احتمال حضور ذره در مکان‌های مختلف n بکار می‌رود به صورت زیر است [۱۷]، [۱۴]:

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \binom{t}{\frac{t+n}{2}} \quad (۱.۱)$$

که در آن:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!} \quad (۲.۱)$$

برای این معادله عبارت $\frac{t+n}{2}$ باید صحیح باشد، پس $t+n$ باید زوج باشد و از آنجایی که احتمال کمیته مثبت است بنابراین داخل پرانتز هم باید مثبت باشد، یعنی $n \leq t$ باشد. به عبارت دیگر برای این رابطه بعد از تعداد گام های زوج، احتمال یافتن ولگرد در مکان های فرد صفر است و بعد از تعداد گام های فرد احتمال حضور ولگرد در مکان های زوج صفر است [۱۵]. برای مقدار ثابت t ، یک توزیع دو جمله ای به صورت منحنی گاوسی است و برای مقادیر بزرگ t ثابت، احتمال به عنوان تابعی از n یک منحنی مشخصه دارد. شکل ۱.۱ نمونه‌ای از این منحنی‌ها را برای $t = 80, 120, 180$ نشان

می‌دهد. می‌توان دید که با افزایش تعداد گام‌ها (t) ، نمودار پهن تر شده اند، زیرا احتمال پیدا کردن ولگرد در مکان‌های فرد n زمانی که t زوج است صفر می‌باشد و از آنجایی که سطح زیر نمودار باید برابر یک باشد نمودار پهن تر شده است [۱۷].

۱.۱.۱ انحراف معیار

برای اینکه تعیین کنیم در چه فاصله از مبدا، می‌توان ذره را در زمان طی شده پیدا کرد، می‌توان آن را با کمیتی به نام انحراف معیار ^۲ به دست آورد. در حد های بزرگ و n های کوچک، توزیع احتمال رابطه ۱.۱ به یک توزیع نرمال منجر می‌شود و برای اثبات آن از تقریب استرلینگ استفاده می‌کنیم

$$t! \approx \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t} \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow \ln t! = t \ln t - t + \frac{1}{2} \ln(2\pi t)$$

بعد از بسط رابطه ۱.۱ و انجام محاسبات در آخر به رابطه ۴.۱ می‌رسیم

$$p(t, n) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{(-\frac{n^2}{t})} \quad (4.1)$$

که فرمول بدست آمده شبیه به توزیع گاوسی است. پهنای توزیع گاوسی، به صورت نصف فاصله میان دو نقطه عطف توزیع گاوسی تعریف می‌شود و از طرفی انحراف معیار هم با پهنای توزیع گاوسی برابر است. بنابراین برای بدست آوردن نقاط عطف باید از تابع $p(t, n)$ نسبت به n دو بار مشتق بگیریم و آن را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{\partial^2 p(t, n)}{\partial n^2} = -e^{-\frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + n^2 e^{-\frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = 0$$

$$e^{-\frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = n^2 e^{-\frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (5.1)$$

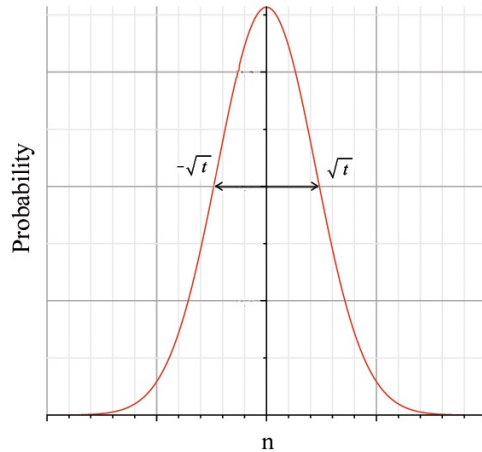
$$\frac{n^2}{t} = 1 \Rightarrow n^2 = t \Rightarrow n = \pm \sqrt{t}$$

پس فاصله میان دو نقطه عطف $2\sqrt{t}$ بدست می‌آید، در نتیجه انحراف معیار برابر با \sqrt{t} است. در ولگشت کلاسیکی، انحراف معیار متناسب با \sqrt{t} است که t تعداد گام‌هاست [۱۷]. اگر ولگشت در هر گام به اندازه L جابجا شود و با احتمال P به سمت راست حرکت کند و با احتمال $1 - P$ به سمت چپ حرکت کند، مقدار چشمداشتی $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\langle x \rangle = P(+L) + (1 - P)(-L) \quad (6.1)$$

$$\langle x^2 \rangle = P(+L)^2 + (1 - P)(-L)^2$$

^۲Standard deviation



شکل ۲.۱: پهنای توزیع متقارن

و بعد از t گام چشمداشتی‌ها به صورت زیر می‌شوند

$$\langle x \rangle = tP(+L) + t(1 - P)(-L) = tPL - tL + tPL = (2P - 1)tL \quad (۷.۱)$$

$$\langle x^2 \rangle = tP(+L)^2 + t(1 - P)(-L)^2 = tPL^2 + tL^2 - tPL^2 = tL^2$$

از آنجایی که این ولگشت با احتمال یکسان به سمت راست یا چپ حرکت می‌کند چشمداشتی $\langle x \rangle = 0$ می‌شود، بنابراین واریانس و انحراف معیار به صورت زیر می‌شوند

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = tL^2 \quad (۸.۱)$$

$$\sigma = \sqrt{tL}$$

۲.۱ ولگشت کوانتومی

ساختار مدل‌های کوانتومی و معادلاتشان به وسیله‌ی فرایندهایی که کوانتش نامیده می‌شوند، از روی فرایندهای کلاسیکی ساخته می‌شوند [۱۷]. حالت سیستم کوانتومی با یک بردار در فضای هیلبرت توصیف می‌شود و برای سیستم‌هایی که از بیش از یک قسمت تشکیل شده‌اند، فضای هیلبرت کلی معادل با ضرب تانسوری فضای هیلبرت هر یک از آن قسمت‌ها می‌باشد. اگر سیستم با محیط اطرافش برهم‌کنش نداشته باشد (یعنی منزوی باشد) تحول سیستم با یک عملگر یکانی رخ می‌دهد. ایزوله بودن سیستم از جهان خارج و یکانی بودن عملگر تحول آن منجر می‌شود تا این فرآیند یک فرآیند غیر تصادفی

باشد. به همین دلیل است که اغلب ولگشت تصادفی کوانتومی را تنها ولگشت کوانتومی می نامند. به طور کلی دو نمونه ولگشت کوانتومی^۳ داریم :

۱. ولگشت کوانتومی پیوسته : این ولگشت را می توان مستقیماً روی فضای مکان تعریف کرد [۲۱]، [۱۶].

۲. ولگشت کوانتومی گسسته : علاوه بر فضای مکان فضای دیگری نیز دارد که آن را فضای سکه می نامیم [۲۰]، [۱۹].

در اینجا ولگشت کوانتومی زمانی گسسته را بررسی می کنیم و با ولگشت تصادفی کلاسیکی مقایسه می کنیم.

۱.۲.۱ ولگشت کوانتومی گسسته در یک بعد

قسمت مکانی ولگشت کوانتومی شامل نقاط صحیح روی یک خط می باشد و فضای هیلبرت آن به صورت زیر می باشد

$$H_m = \{|n\rangle; n \in Z\} \quad (۹.۱)$$

ولگشت کوانتومی تعمیم ولگشت کلاسیکی به دنیای کوانتومی است که یک درجه آزادی اضافی دارد و آن را فضای سکه^۴ می نامیم و تعیین کننده جهت حرکت در فضای مکان می باشد و این فضا به صورت

$$H_c = \{|c\rangle; c \in \{|0\rangle, |1\rangle\}\} \quad (۱۰.۱)$$

می باشد. وقتی چند زیر فضا داشته باشیم فضای هیلبرت کلی از ضرب تانسوری آنها بدست می آید، پس فضای هیلبرت کلی سیستم برای ولگشت کوانتومی به صورت $H = H_c \otimes H_m$ می باشد در نتیجه حالت کلی سیستم را به صورت زیر می باشد

$$\{|s, n\rangle; s \in \{0, 1\}, -\infty \leq n \leq \infty\} \quad (۱۱.۱)$$

تحول در ولگشت کوانتومی شامل دو قسمت است که بسیار شبیه به ولگشت کلاسیکی است. در ولگشت کوانتومی عملگر سکه بر فضای دو بعدی سکه اعمال می شود و یک ترکیب خطی از حالت های سکه را ایجاد می کند و براساس نتایج آن ولگشت در یکی از دو جهت حرکت می کند و این عملگر را با C نشان می دهند و تغییر مکان از n به $n + 1$ و $n - 1$ به وسیله یک عملگر یکانی صورت می گیرد که عملگر تغییر مکان S نامیده می شود و قرارداد می کنیم اگر $s = 0$ باشد در جهت مثبت x و اگر $s = 1$ باشد در

^۳Quantum Walk

^۴Coin

جهت منفی x حرکت کند. بنابراین طبق این قرارداد، عملگر تغییر مکان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} |0\rangle \langle 0| \otimes |n+1\rangle \langle n+1| + |1\rangle \langle 1| \otimes |n-1\rangle \langle n| \quad (12.1)$$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^1 |s, n+(-1)^s\rangle \langle s, n|$$

آنچه در ولگشت کوانتومی رخ می‌دهد از نظر ساختار بسیار شبیه به ولگشت کلاسیکی است. ابتدا عملگر سکه، C را روی حالت اولیه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اثر می‌دهیم ولی اگر چه سکه در ابتدا در یکی از پایه‌های محاسباتی $|1\rangle$ و $|0\rangle$ می‌باشد ولی پس از اعمال سکه به یک برهم‌نهی از دو حالت می‌رود. تفاوت با حالت کلاسیکی در این است که هر جز از این برهم‌نهی دوباره موجب جابجایی در یک جهت می‌شوند و می‌توان گفت که ذره همزمان در هر دو جهت پیش می‌رود و وجود برهم‌نهی کوانتومی باعث ایجاد برهم‌نهی بین دو سوی حرکت می‌شود و اثرات تداخلی ناشی از آن باعث می‌شود که شکل توزیع احتمال آن با ولگشت کلاسیکی متفاوت باشد [۱۷].

بنابراین عملگر تحول برای ولگشت کوانتومی به شکل

$$U = S(C \otimes I) \quad (13.1)$$

می‌باشد [۲۲]، که در آن C می‌تواند هر عملگر یکانی باشد، ولی در این پایان نامه عملگر سکه‌ای که برای ولگشت کوانتومی یک بعدی انتخاب می‌کنیم عملگر هادامارد است که یک عملگر یکانی است [۲۲].

$$C = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.1)$$

$$. HH^\dagger = I$$

برای بدست آوردن گام بعدی ولگشت کوانتومی، باید عملگر U را روی حالت اولیه اعمال کنیم:

$$|\psi(1)\rangle = U |\psi(0)\rangle \quad (15.1)$$

برای مثال، حالت اولیه ذره را در مبدأ و حالت اولیه سکه را هم اسپین بالا در نظر می‌گیریم بنابراین حالت کلی به شکل $|0\rangle \otimes |0\rangle$ می‌باشد، برای پنج گام اول کت حالت را به دست می‌آوریم و پس از آن احتمال حضور ولگشت در هر مکان را محاسبه می‌کنیم. برای اولین گام ابتدا عملگر هادامارد را روی حالت اولیه سکه اعمال می‌کنیم و در ادامه عملگر تغییر مکان S را اعمال می‌کنیم:

$$|\psi(1)\rangle = U |\psi(0)\rangle = S(C \otimes I)(|0\rangle |0\rangle) = S(H|0\rangle \otimes I|0\rangle) \quad (16.1)$$

$$|\psi(1)\rangle = S\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|-1\rangle).$$

در ولگشت کوانتومی برای اینکه بدانیم ذره در چه مکانی است نیاز است که بر روی سیستم کوانتومی اندازه‌گیری انجام دهیم، اگر اندازه‌گیری کنیم با احتمال 50% درصد شانس پیدا شدن ذره در مکان $n = 1$

و احتمال 50° درصد شانس پیدا شدن ذره در مکان $n = -1$ داریم. اگر با گام اول ولگشت کلاسیکی مقایسه کنیم نتیجه ها یکسان است.

گام دوم:
(۱۷.۱)

$$\begin{aligned} |\psi(2)\rangle &= U |\psi(1)\rangle = U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|-1\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{4}}(S(H(|0\rangle|1\rangle) + H|1\rangle|-1\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}}(S\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |-1\rangle\right)) \\ &= \frac{1}{4}(|0\rangle|2\rangle + |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|0\rangle - |1\rangle|-2\rangle) \end{aligned}$$

و گام سوم هم به شکل زیر می شود:

$$|\psi(3)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle|3\rangle + (2|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle - |0\rangle|-1\rangle + |1\rangle|-3\rangle) \quad (18.1)$$

ولی از گام سوم به بعد ولگشت کوانتومی رفتار متفاوتی را از خود نشان می دهد. گام چهارم و پنجم هم به صورت زیر بدست می آید:

(۱۹.۱)

$$|\psi(4)\rangle = \frac{1}{4}(|0\rangle|4\rangle + (3|0\rangle + |1\rangle)|2\rangle + (-|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle - (|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle - |1\rangle|-4\rangle)$$

$$\begin{aligned} |\psi(5)\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(|0\rangle|5\rangle + (4|0\rangle + |1\rangle)|3\rangle + |1\rangle|1\rangle - |1\rangle|-1\rangle \\ &\quad - (|0\rangle - 2|1\rangle)|-3\rangle + |1\rangle|-5\rangle) \end{aligned} \quad (20.1)$$

احتمال حضور ذره در مکان های مختلف n به ازای تعداد گام های t در جدول ۲۰.۱ خلاصه شده است.

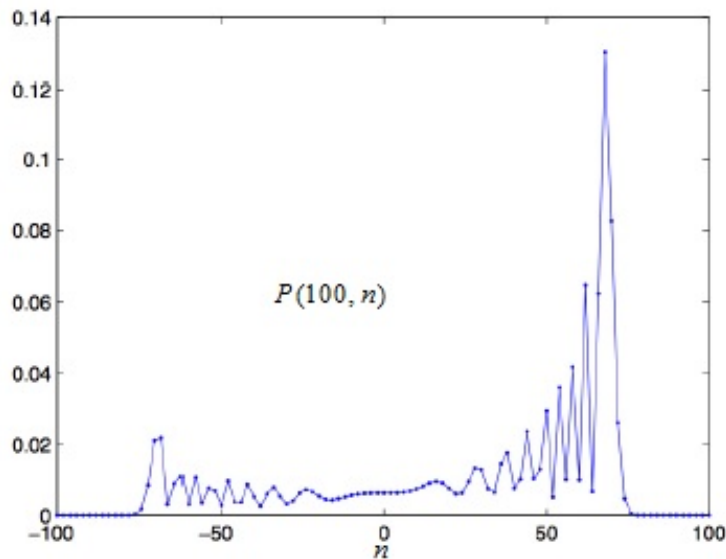
از گام سوم به بعد مشخص است که نتایج با نتایج ولگشت کلاسیکی متفاوت است و ولگشت تمایل دارد تا به یکی از دو سوی راستای حرکت خود پیشروی کند. برای بررسی بهتر، نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی را برای تعداد گام های بیشتر رسم می کنیم. شکل ۳۰.۱ برای ولگشت کوانتومی با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle$ به ازای 100 گام رسم شده است. از مقایسه نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی با ولگشت تصادفی کلاسیکی می بینیم که نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی یک نمودار نامتقارن است و بیشینه احتمال در مرکز متمرکز نشده است و ولگشت تمایل دارد از مبدأ دور شود و به سمت چپ و راست پیشروی کند. این تمایل به سمت راست و چپ به دلیل استفاده از عملگر هادامارد به عنوان سکه است زیرا اثر این عملگر روی حالت های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ متفاوت است

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ H|1\rangle &= \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (21.1)$$

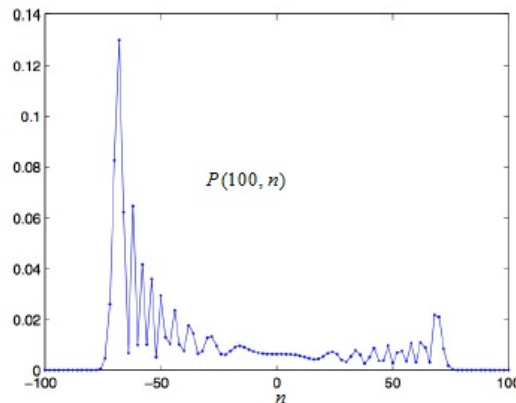
جدول ۲.۱: احتمال پیدا شدن ولگشت در مکان n و در زمان t ، با فرض اینکه ولگشت حرکت خود را از مبدا شروع کرده باشد

n/t	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰						۱					
۱					$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$				
۲				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$			
۳			$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		
۴		$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$	
۵	$\frac{1}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

و وجود فاز منفی در حالت $|1\rangle$ باعث آثار تداخلی شده و احتمال حضور را تغییر می‌دهد. از آنجایی که وجود این فاز منفی به حالت اولیه بستگی دارد، پس تابع توزیع احتمال به حالت اولیه وابسته خواهد بود به طوری که اگر حالت اولیه سکه $|0\rangle$ باشد ولگرد به سمت راست پیشروی می‌کند و همچنین می‌توان نشان داد اگر حالت اولیه سکه $|1\rangle$ باشد ولگرد به سمت چپ پیشروی می‌کند [۲۳] (شکل ۴.۱).



شکل ۳.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |0\rangle$.



شکل ۴.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |1\rangle|0\rangle$.

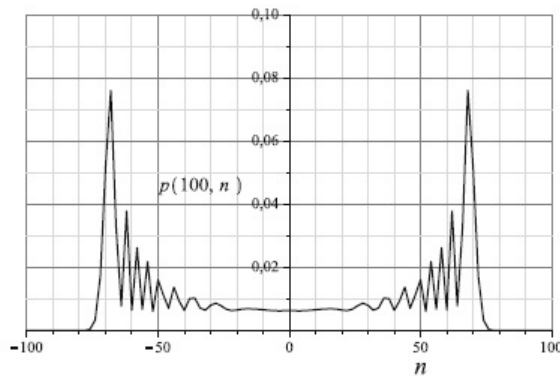
اما می‌توان شکلی از ولگشت کوانتومی را نیز به وجود آورد که در آن توزیع احتمال به صورت متقارن باشد. برای این کار باید از تاثیر نامتقارن عملگر هادامارد بر $|0\rangle$ و یا $|1\rangle$ جلوگیری کرد. یک راه‌حل، استفاده از یک عملگر سکه متفاوت می‌باشد [۲۲]، که اثری متقارن روی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ دارد

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (22.1)$$

راه‌حل دیگر، استفاده از یک حالت اولیه متفاوت است. برای نمونه اگر حالت اولیه به صورت

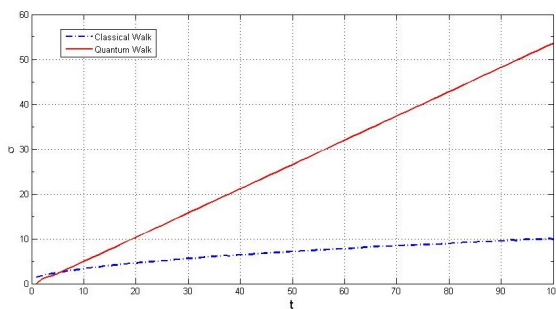
$$|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} |n=0\rangle$$

نظر گرفته شود، مشاهده می‌شود که توزیع احتمال به صورت متقارن درمی‌آید شکل ۵.۱. به دلیل حقیقی بودن عناصر عملگر هادامارد هنگامی که این عملگر بر قسمت اسپینی اثر می‌کند تغییر در حقیقی یا موهومی بودن عناصر کت اسپینی نمی‌دهد، در نتیجه در مورد حالت $|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} |n=0\rangle$ هیچ خنثی‌سازی بین جملاتی که منجر به حرکت ولگشت به سمت راست و چپ می‌شوند وجود ندارد. در این حالت که توزیع احتمال متقارن است، مقدار چشمداشتی مکان ولگشت صفر خواهد بود، $\langle n \rangle = 0$. در ولگشت کوانتومی، $\sigma = t$ است که در مقایسه با ولگشت کلاسیکی $(\sigma = \sqrt{t})$ به صورت توانی بیشتر است، این سرعت انتشار توانی یکی از خواص برجسته ولگشت کوانتومی است که بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است، زیرا نویدبخش این است که الگوریتم‌هایی که بر پایه ولگشت‌های کوانتومی بنا شده‌اند، از هم‌تاهای کلاسیکی خود بسیار به صورت توانی سریعتر باشند. شکل ۶.۱ انحراف معیار را برای این دو ولگشت با هم مقایسه می‌کند [۱۷]، [۲۲].



شکل ۵.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad |n=0\rangle$$



شکل ۶.۱: نمودار انحراف معیار برای ولگشت کوانتومی و کلاسیکی.

۲.۲.۱ محاسبات تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط

اگر بخواهیم توزیع احتمال را برای گام‌های بالاتر محاسبه کنیم روش دستی کار سختی است و نمی‌تواند مفید باشد به همین دلیل از روابط بازگشتی برای انجام کارهای محاسباتی استفاده می‌کنیم.

حالت عمومی ولگشت کوانتومی در هر گام به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{s=0}^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{s,n} |s, n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\psi_{0,n} |0, n\rangle + \psi_{1,n} |1, n\rangle), \quad (23.1)$$

که در آن $\psi_{s,n}(t)$ دامنه‌های احتمال نامیده می‌شوند و باید در شرط بهنجارش صدق کنند:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|\psi_{0,n}(t)|^2 + |\psi_{1,n}(t)|^2) = 1 \quad (24.1)$$

و احتمال حضور ذره در مکان n ام به این شکل زیر می باشد

$$p_n(t) = |\psi_{\circ,n}(t)|^2 + |\psi_{\backslash,n}(t)|^2 \quad (25.1)$$

$|\psi(t)\rangle$ را در نظر بگیرید، برای بدست آوردن گام بعدی باید اپراتور تحول را روی آن اثر دهیم :

$$\begin{aligned} |\psi(t+1)\rangle &= U |\psi(t)\rangle \Rightarrow \\ &= S(H \otimes I) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{\circ,n}(t) |\circ, n\rangle + \psi_{\backslash,n}(t) |\backslash, n\rangle \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\psi_{\circ,n}(t) H |\circ\rangle |n\rangle + \psi_{\backslash,n}(t) H |\backslash\rangle |n\rangle) \quad (26.1) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\psi_{\circ,n}(t) + \psi_{\backslash,n}(t)}{\sqrt{2}} S |\circ\rangle |n\rangle + \frac{\psi_{\circ,n}(t) |\circ, n\rangle - \psi_{\backslash,n}(t)}{\sqrt{2}} S |\backslash\rangle |n\rangle \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\psi_{\circ,n}(t) + \psi_{\backslash,n}(t)}{\sqrt{2}} |\circ\rangle |n+1\rangle + \frac{\psi_{\circ,n}(t) - \psi_{\backslash,n}(t)}{\sqrt{2}} |\backslash\rangle |n-1\rangle \right) \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از رابطه ۲۳.۱ و ۲۶.۱ روابط تحول بدست می آید :

$$\begin{aligned} \psi_{\circ,n}(t+1) &= \frac{\psi_{\circ,n-1}(t) + \psi_{\backslash,n-1}(t)}{\sqrt{2}} \\ \psi_{\backslash,n}(t+1) &= \frac{\psi_{\circ,n+1}(t) - \psi_{\backslash,n+1}(t)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (27.1)$$

با استفاده از این روابط می توان احتمال حضور ذره در مکان n ام و گام $t+1$ ام را با استفاده از دامنه های احتمال حضور ذره در مکان $n+1$ و $n-1$ در گام t ام بدست آورد [۱۷]. این روابط بازگشتی اگرچه مفید و دقیق هستند، ولی استفاده از آن ها زمان بر است ولی خوشبختانه راه حل بهتری بر پایه تبدیل فوریه وجود دارد که با استفاده از آن می توان تابع توزیع احتمال را به صورت تحلیلی بدست آورد.

۳.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی با سری فوریه

در تبدیل فوریه، تابع گسسته ای مانند $f(n)$ به تابع پیوسته ای مانند $f(k)$ که حدود آن $k : [-\pi, \pi]$ می باشد، به صورت زیر تبدیل می شود [۲۵]:

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-ink} \quad (28.1)$$

و تابع معکوس آن هم به صورت زیر است :

$$f(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ink} \tilde{f}(k) \quad (29.1)$$

اگر در رابطه ۲۸.۱ و ۲۹.۱ بجای $f(n)$ و $f(k)$ ، $\psi_s(n, t)$ و $\tilde{\psi}_s(k, t)$ قرار دهیم تبدیل فوریه بصورت زیر می‌شود

$$\tilde{\psi}_s(k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_s(n, t) e^{-ink} \quad (۳۰.۱)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \langle k | \psi(t) \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n | \psi(t) \rangle e^{-ink} \\ \Rightarrow \langle k | &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n | e^{-ink} \\ \Rightarrow |k \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n \rangle e^{ink} \end{aligned} \quad (۳۱.۱)$$

و

$$\psi_s(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} e^{ink} \tilde{\psi}_s(k, t) \quad (۳۲.۱)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \langle n | \psi(t) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} e^{ink} \langle k | \psi(t) \rangle \\ \Rightarrow \langle n | &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} e^{ink} \langle k | \\ \Rightarrow |n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} e^{-ink} |k \rangle \end{aligned} \quad (۳۳.۱)$$

رابطه عملگر تحول U را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Rightarrow U = \sum_n |n+1 \rangle \langle n | \otimes | \circ \rangle \langle \circ | H + \sum_n |n-1 \rangle \langle n | \otimes | \uparrow \rangle \langle \uparrow | H \quad (۳۴.۱)$$

حال روابط به دست آمده برای تبدیل فوریه را در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int dk e^{-ik(n+1)} |k \rangle \int dk' e^{ik'n} \langle k' | \right) \otimes | \circ \rangle \langle \circ | H \\ &+ \sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int dk e^{-ik(n-1)} |k \rangle \int dk' e^{ik'n} \langle k' | \right) \otimes | \uparrow \rangle \langle \uparrow | H \end{aligned} \quad (۳۵.۱)$$

بعد از مرتب سازی معادله بالا از تعریف تابع دلتای دیراک استفاده می‌کنیم، $\delta(k - k') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n e^{i(k-k')n}$

و آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \int dk dk' e^{-ik} |k\rangle \langle k'| \delta(k - k') \otimes |\circ\rangle \langle \circ| H \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \int dk dk' e^{ik} |k\rangle \langle k'| \delta(k - k') \otimes |1\rangle \langle 1| H \quad (36.1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes (e^{-ik} |\circ\rangle \langle \circ| H + e^{ik} |1\rangle \langle 1| H)
 \end{aligned}$$

عملگر سکه هادامارد را جایگذاری می‌کنیم و بعد از محاسبات، عملگر تحول در پایه‌های فوریه به شکل زیر بدست می‌آید [۲۵]، [۱۷]:

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{M_k} \quad (37.1)$$

بنابراین بدست آوردن ماتریس U منجر به بدست آوردن ماتریس M_k می‌شود که دو بعدیست و کار با آن بسیار ساده‌تر است. از آنجایی که ما نیازمند محاسبه U^t هستیم بنابراین محاسبه M_k^t نیز مورد نیاز خواهد بود که بهترین راه برای محاسبه توانهای M_k قطری کردن آن است. برای تعیین ویژه مقادیر عبات زیر را حساب می‌کنیم

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} + \lambda\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (38.1)$$

و بعد از محاسبات و ساده سازی ویژه مقادیر به صورت زیر خواهند بود [۲۵]:

$$\lambda_1 = e^{-i\omega_k} \quad , \quad \lambda_2 = -e^{i\omega_k} = e^{i(\pi+\omega_k)} \quad (39.1)$$

که $\sin(\omega_k) = \frac{\sin k}{\sqrt{2}}$ است و ویژه کت‌های متناظر با این ویژه مقادیر به شکل زیر هستند. ویژه کت متناظر با $\lambda_1 = e^{-i\omega_k}$ به شکل زیر

$$|\alpha_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \left[(1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 \omega_k} \right]}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (40.1)$$

و ویژه کت متناظر با $\lambda_2 = -e^{i\omega_k} = e^{i(\pi+\omega_k)}$ نیز به شکل زیر می‌باشد.

$$|\beta_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \left[(1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 \omega_k} \right]}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{i(\pi+\omega_k)} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (41.1)$$

حال عملگر تحول M_k را بر حسب ویژه مقادیر و ویژه کت‌های بدست آمده به صورت زیر می‌نویسیم:

$$M_k = \lambda_{1k} |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k| + \lambda_{2k} |\beta_k\rangle \langle \beta_k| \quad (42.1)$$

و رابطه بدست آمده را در U جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes \lambda_{1k} |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k| + \lambda_{2k} |\beta_k\rangle \langle \beta_k| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes e^{-i\omega_k} |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k| + e^{i(\pi+\omega_k)} |\beta_k\rangle \langle \beta_k| \end{aligned} \quad (43.1)$$

برای t گام رابطه به صورت زیر می‌باشد:

$$U^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes e^{-i\omega_k t} |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k| + e^{i(\pi+\omega_k)t} |\beta_k\rangle \langle \beta_k| \quad (44.1)$$

۴.۲.۱ حل تحلیلی

برای حل تحلیلی، حالت اولیه ذره را، اسپین $|\circ\rangle$ و در مبدأ در نظر می‌گیریم:

$$|\psi\rangle_{\text{int}} = |\circ\rangle \otimes |\circ\rangle = |\circ\rangle |\circ\rangle \quad (45.1)$$

بنابراین حالت ذره در گام t ام:

$$|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(\circ)\rangle \quad (46.1)$$

و با استفاده از رابطه ۴۴.۱ داریم:

$$\psi^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk (e^{-i\omega_k t} |\alpha_k, k\rangle \langle \alpha_k, k| \circ \circ) + e^{i(\pi+\omega_k)t} |\beta_k, k\rangle \langle \beta_k, k| \circ \circ) \quad (47.1)$$

برای محاسبه رابطه ۴۷.۱ از تبدیل فوریه استفاده میکنیم

$$\begin{aligned}
 |k\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ink} |n\rangle \\
 \langle k| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ink} \langle n| \\
 \langle k | \circ \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ink} \langle n | \circ \rangle = 1
 \end{aligned}
 \tag{۴۸.۱}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_k | \circ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2[(1 + \cos^2 k)] - 2\sqrt{1 + \cos^2 k} \cos k}} \begin{pmatrix} e^{ik} & \sqrt{2}e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \\
 &= \frac{e^{ik}}{\sqrt{2[(1 + \cos^2 k)] - 2\sqrt{1 + \cos^2 k} \cos k}}
 \end{aligned}
 \tag{۴۹.۱}$$

با توجه به دو معادله بالا $\langle \alpha_k, k | \circ \circ \rangle$ به صورت زیر می باشد:

$$\langle \alpha_k, k | \circ \circ \rangle = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2[(1 + \cos^2 k)] - 2\sqrt{1 + \cos^2 k} \cos k}} = \frac{e^{ik}}{\sqrt{c^-}}
 \tag{۵۰.۱}$$

به همین ترتیب $\langle \beta_k, k | \circ \circ \rangle$ را نیز بدست می آوریم:

$$\langle \beta_k, k | \circ \circ \rangle = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2[(1 + \cos^2 k)] + 2\sqrt{1 + \cos^2 k} \cos k}} = \frac{e^{ik}}{\sqrt{c^+}}
 \tag{۵۱.۱}$$

در نتیجه

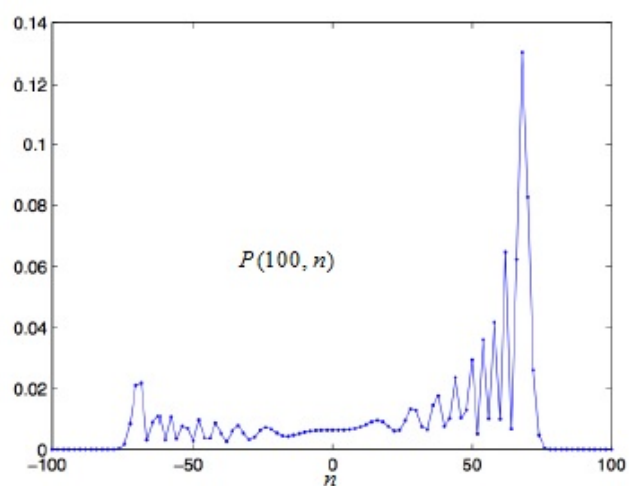
$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left(\frac{e^{-i\omega_k t + ik}}{\sqrt{\gamma(1+\cos\gamma k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}}} |\alpha_k\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{i(\omega_k + \pi)t + ik}}{\sqrt{\gamma(1+\cos\gamma k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}}} |\beta_k\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left(\frac{e^{-i\omega_k t + ik}}{\gamma(1+\cos\gamma k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{\gamma} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-i(\pi + \omega_k)t + ik}}{\gamma(1+\cos\gamma k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{\gamma} e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned} \tag{۵۲.۱}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{\gamma(1+\cos\gamma k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}} + \frac{e^{i(\pi + \omega_k)t}}{\gamma(1+\cos\gamma k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}} \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^{-i\omega_k t + ik} (\sqrt{\gamma} e^{-i\omega_k} - e^{-ik})}{\gamma(1+\cos\gamma k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}} - \frac{e^{i(\pi + \omega_k)t + ik} (\sqrt{\gamma} e^{i\omega_k} - e^{-ik})}{\gamma(1+\cos\gamma k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos\gamma k}} \right]
 \end{aligned} \tag{۵۳.۱}$$

و پس از ساده سازی رابطه ۵۳.۱ داریم، [۲۵]، [۱۷]:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k_k\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 + \frac{\cos \kappa}{\sqrt{1+\cos\gamma k}} \right) e^{-i\omega_k t} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{\cos \kappa}{\sqrt{1+\cos\gamma k}} \right) e^{i(\pi + \omega_k)t} \right) \\
 &\quad \frac{e^{-i\omega_k t + ik}}{\sqrt{\gamma} \sqrt{1+\cos\gamma k}} - \frac{e^{i(\pi + \omega_k)t + ik}}{\sqrt{\gamma} \sqrt{1+\cos\gamma k}}
 \end{aligned} \tag{۵۴.۱}$$

حالاکه $|\psi(t)\rangle$ بدست آمده، $\psi_n(t) = \langle n | \psi(t) \rangle$ خواهد بود و احتمال یافتن ذره در مکان n بعد از t گام بصورت $P_n(t) = |\psi_n(t)|^2$ خواهد بود.



شکل ۷.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام برای حل تحلیلی با حالت

$$\text{اولیه } |\psi\rangle = |0\rangle |0\rangle.$$

فصل ۲

ولگشت کوانتومی دو بعدی

ولگشت کوانتومی، محدود به خط و یک سکه نیست و برای ابعاد بالاتر نیز مطالعه شده است. تعمیم ولگشت کوانتومی به ابعاد بالاتر از طریق تعمیم فضای سکه مورد مطالعه قرار گرفته شده است [۲۴]. در اینجا حالت دو بعدی بررسی شده و با ولگشت کوانتومی یک بعدی مقایسه می‌شود.

ولگشت کوانتومی روی یک شبکه دو بعدی نامتناهی، فضای هیلبرتی بصورت $H_4 \otimes H_\infty$ دارد که در آن H_4 شامل دو کیوبیت با پایه های $\{|j, k\rangle; j, k \in \{0, 1\}\}$ به عنوان فضای سکه و H_∞ با پایه های $Z = \{|x, y\rangle; x, y \in Z\}$ به عنوان قسمت مکانی تعریف می‌شوند، در اینجا عبارت Z نشان دهنده مجموعه اعداد صحیح است، به طوری که اگر ولگشت در یک نقطه شبکه باشد چهار گزینه برای حرکت وجود خواهد داشت و عملگر سکه مشخص می‌کند که ولگشت چگونه حرکت کند. در ولگشت‌های کوانتومی عملگر یکانی که هر گام از ولگشت را مشخص می‌کند به صورت

$$U = S(C \otimes I) \quad (1.2)$$

تعریف می‌شود که در این رابطه C عملگر سکه است (عملگر سکه برای ولگشت کوانتومی دو بعدی یک ماتریس یکانی 4×4 است) و S عملگر تغییر مکان نامیده می‌شود که وظیفه آن جابجایی مکان ولگرد بر حسب حالت سکه است. در این نوشتار به صورت قراردادی عملگر S را در پایه‌های مکان به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$S|j, k\rangle|x, y\rangle = |j, k\rangle|x + (-1)^j, y + (-1)^k\rangle \quad (2.2)$$

حالت عمومی ولگشت کوانتومی در هر گام به صورت ترکیب خطی از پایه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi_t\rangle = \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \psi_{j,k;x,y} |j, k\rangle|x, y\rangle \quad (3.2)$$

که در آن دامنه های احتمال نامیده می‌شوند و باید در شرط بهنجارش صدق کنند.

$$\sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} |\psi_{j,k;x,y}|^2 = 1 \quad (4.2)$$

و احتمال حضور ذره در مکان x و y به شکل زیر می‌باشد:

$$P(x, y, t) = |\langle x, y | \psi(t) \rangle|^2 = \sum_{j,k=0}^1 |\psi_{j,k;x,y}|^2 \quad (5.2)$$

$|\psi(t)\rangle$ را در نظر بگیرید، برای بدست آوردن گام بعدی باید اپراتور تحول را روی آن اعمال کنیم

$$\begin{aligned}
 |\psi(t+1)\rangle &= U |\psi(t)\rangle = U \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \psi_{j,k;x,y}(t) |j,k\rangle |x,y\rangle \\
 &= \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \psi_{j,k;x,y}(t) S(C \otimes I) |j,k\rangle |x,y\rangle \\
 &= \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \psi_{j,k;x,y}(t) S\left(\sum_{j',k'} C_{j',k';j,k} |j',k'\rangle |x,y\rangle\right) \\
 &= \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y} \sum_{j',k'=0}^1 \psi_{j,k;x,y}(t) C_{j',k';j,k} |j',k'\rangle \left|x + (-1)^{j'}, y + (-1)^{k'}\right\rangle
 \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x' = x + (-1)^{j'} \\ y' = y + (-1)^{k'} \end{cases}$$

با جایگذاری تغییر متغیر در رابطه ۶.۲ رابطه ۷.۲ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y} \sum_{j',k'=0}^1 C_{j',k';j,k} \psi_{j,k;x-(-1)^{j'}, y-(-1)^{k'}}(t) |j',k'\rangle |x',y'\rangle \\
 \psi_{j,k;x,y}(t+1) &= \sum_{j',k'=0}^1 C_{j',k';j,k} \psi_{j,k;x-(-1)^{j'}, y-(-1)^{k'}}(t)
 \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

این روابط بازگشتی برای بدست آوردن گام‌های بعدی بسیار پیچیده و زمان‌بر هستند در اینجا نیز مانند ولگشت کوانتومی یک بعدی در فصل قبل از راه‌حل تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم که با استفاده از آن تابع توزیع احتمال بصورت تحلیلی بدست می‌آید [۱۷]. در این فصل ابتدا چند نمونه از مشهورترین سکه‌های کوانتومی دوبعدی را معرفی و نمودارهای شبیه‌سازی شده تابع توزیع احتمال و انحراف معیار و واریانس را رسم و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

۱.۲ معرفی سکه های مشهور

۱.۱.۲ سکه هادامارد

یکی از مشهورترین سکه های کوانتومی، سکه هادامارد است که برای ولگشت دو بعدی به صورت $C = H \otimes H$ تعریف می شود که در آن

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (۸.۲)$$

در نتیجه عملگر سکه هادامارد برای شبکه های دو بعدی به صورت زیر می باشد:

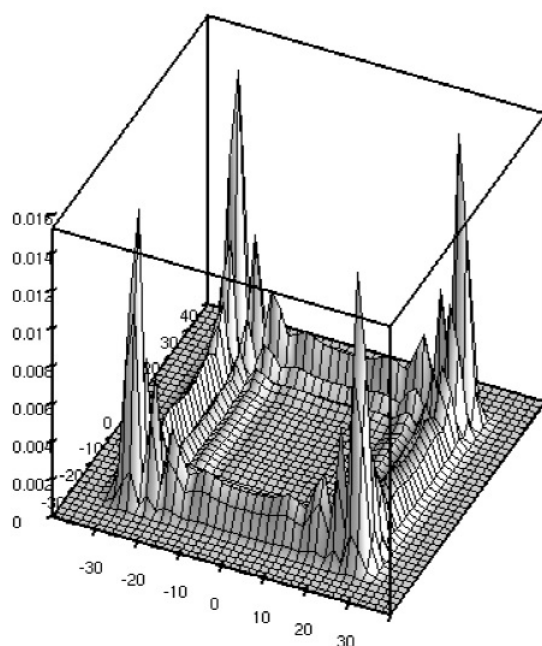
$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (۹.۲)$$

یکی از مهم ترین ویژگی های این سکه تفکیک پذیر بودن آن است، به این معنی که قسمت های x و y مسأله را می توان به طور کامل با این سکه به صورت دو ولگشت یک بعدی مستقل در نظر گرفت. شکل ۱.۲ توزیع احتمال ولگشت کوانتومی دو بعدی را با استفاده از $H \otimes H$ بعد از ۳ گام نشان می دهد و حالت اولیه ای که برای ولگشت انتخاب شده است حالت تفکیک پذیر می باشد

$$\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad (۱۰.۲)$$

که یک ولگشت متقارن را تولید می کند [۱۸] (۱.۲).

نتیجه شبیه سازی انحراف معیار بر حسب زمان برای ولگشت های کوانتومی یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی برای این سکه در شکل ۲.۲ رسم شده است و شیب متناظر $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$ در جدول ۱.۲ نمایش داده شده است [۲۴]. شیب انحراف معیار بر حسب زمان برای ابعاد بالاتر را می توان بر حسب ولگشت یک بعدی به صورت زیر نوشت:



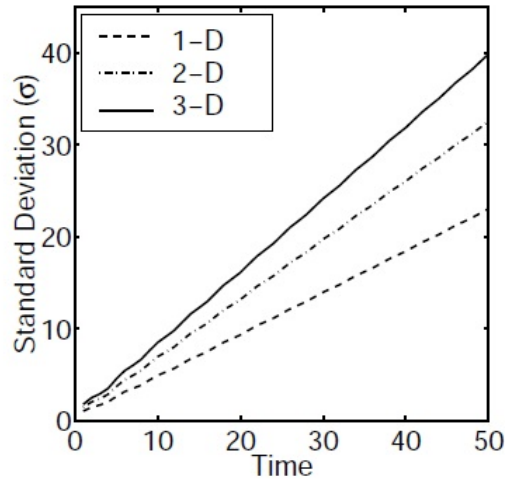
شکل ۱۰۲: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه تفکیک پذیر $H \otimes H$ پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه ۱۰.۲.

$$\left(\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta t}, \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta t}, \dots\right) = \left(\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \frac{\sqrt{2}\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \frac{\sqrt{3}\Delta\sigma_1}{\Delta t}, \dots\right) \quad (11.2)$$

جدول ۱۰۲: شیب انحراف معیار بعنوان تابعی از زمان برای خانواده هادامارد، σ_1 برای ولگشت کوانتومی یک بعدی است.

Transformation	$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$	$\frac{(\sqrt{d})\Delta\sigma_1}{\Delta t}$
H	0.4544 ± 0.0012	0.4544 ± 0.0012
$H \otimes H$	0.6427 ± 0.0017	0.6427 ± 0.0017
$H \otimes H \otimes H$	0.7871 ± 0.0021	0.7871 ± 0.0021

از روی نمودار ۲.۲ مشاهده می شود که با افزایش بعد، انحراف معیار نیز افزایش پیدا می کند. بنابراین با افزایش بعد، مثل حالت یک بعدی انحراف معیار به طور خطی با زمان افزایش پیدا می کند و علاوه



شکل ۲.۲: نمودار انحراف معیار بر حسب زمان برای خانواده هادامارد

بر آن شیب هم افزایش پیدا می‌کند [۲۴].

۲.۱.۲ سکه تبدیل فوریه

سکه بعدی که انتخاب می‌کنیم، سکه تبدیل فوریه می‌باشد که ماتریس آن اندازه $N \times N$ دارد که N درجه آزادی نامیده می‌شود، که برای ولگشت کوانتومی یک بعدی برابر با ۲ و برای ولگشت دو بعدی برابر با ۴ می‌باشد و به شکل $DFT = \left(\frac{w^{jk}}{\sqrt{N}}\right)$ یا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DFT = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

که در آن $w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ می‌باشد و برای ولگشت کوانتومی یک بعدی به شکل

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

و برای ولگشت کوانتومی دو بعدی به صورت زیر می باشد:

$$F_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

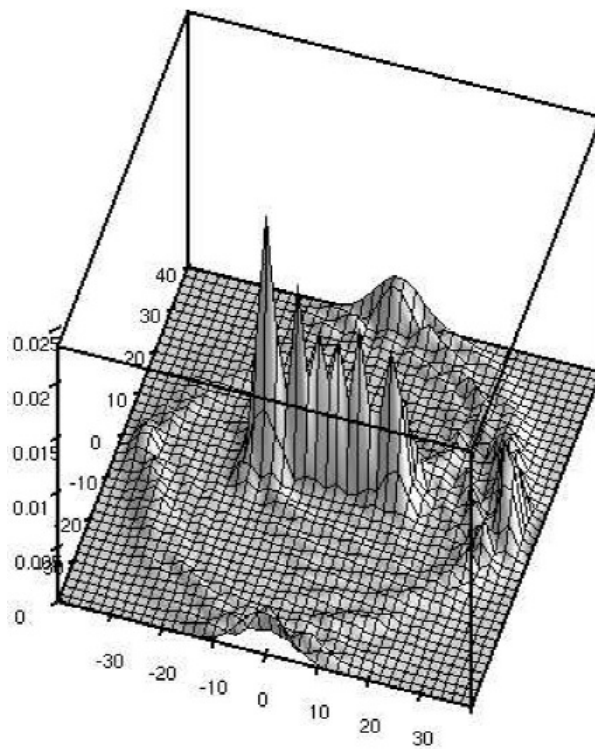
یک عمومیت آشکار برای این سکه این است که برعکس سکه هادامارد تفکیک ناپذیر است و نمی توان آن را به صورت دو ولگشت یک بعدی مستقل در نظر گرفت و کیوبیت های سکه با هم درهم تنیده می شوند و در نتیجه درجات آزادی مکانی بعد از انجام فرایند گشت کوانتومی نیز با یکدیگر درهم تنیده می شوند که ویژگی خاص مکانیک کوانتومی است [۱۸].

شکل ۳.۲ توزیع احتمال ولگشت کوانتومی دو بعدی را برای F_4 بعد از ۳۰ گام نشان می دهد. و حالت اولیه ای که برای این ولگشت انتخاب شده است حالت ۱۰.۲ می باشد و مشاهده می کنیم که این توزیع، از ولگشت کوانتومی $H \otimes H$ متمایز است، و یک توزیع ناهمسان است در حالی که برای ولگشت کوانتومی $H \otimes H$ تفکیک پذیر چگالی توزیع احتمال در مبدأ است. نتیجه شبیه سازی انحراف معیار بر حسب زمان برای ولگشت های کوانتومی یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی برای این سکه در شکل ۴.۲ رسم شده است و شیب متناظر آن در جدول ۲.۲ نمایش داده شده است. ثابت می شود که انحراف معیار

جدول ۲.۲: شیب انحراف معیار به عنوان تابعی از زمان

انتقال	$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$	$\frac{\sqrt{\frac{d+1}{2}} \Delta\sigma_1}{\Delta t}$
D	0.4544 ± 0.0012	0.4544 ± 0.0012
$D \otimes D$	0.5569 ± 0.0006	0.5565 ± 0.0015
$D \otimes D \otimes D$	0.6449 ± 0.0007	0.6426 ± 0.0017

بر حسب زمان در این خانواده به صورت $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta t} = \sqrt{\frac{d+1}{2}} \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}$ است [۲۴]. با توجه به شکل ۴.۲ برای این



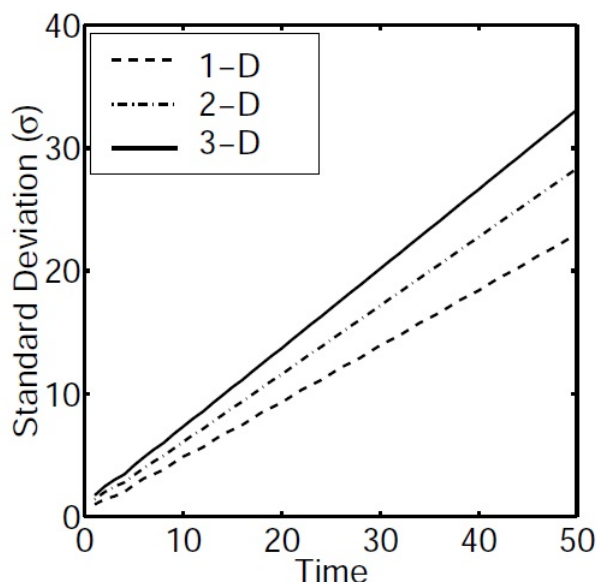
شکل ۳.۲: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه تفکیک ناپذیر فوریه پس از ۳۰ گام با حالت اولیه ۱۰.۲.

خانواده مثل خانواده هادامارد، انحراف معیار به صورت خطی با زمان رشد می‌کند اما شیب آن از حالت تفکیک پذیر (تانسور تولید شده از تبدیل هادامارد) کمتر است و اشاره به این دارد که درهم‌تنیدگی بین درجه فضایی شدت پراکنندگی را کاهش می‌دهد.

۳.۱.۲ سکه گراور

سکه گراور با $G = 2|D\rangle\langle D| - I$ داده می‌شود که در آن $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{j,k=0}^1 |j,k\rangle$ می‌باشد، بنابراین نمایش ماتریسی این عملگر به صورت زیر می‌باشد:

$$G_{\Psi} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.2)$$



شکل ۴.۲: نمودار انحراف معیار بر حسب زمان برای خانواده فوریه

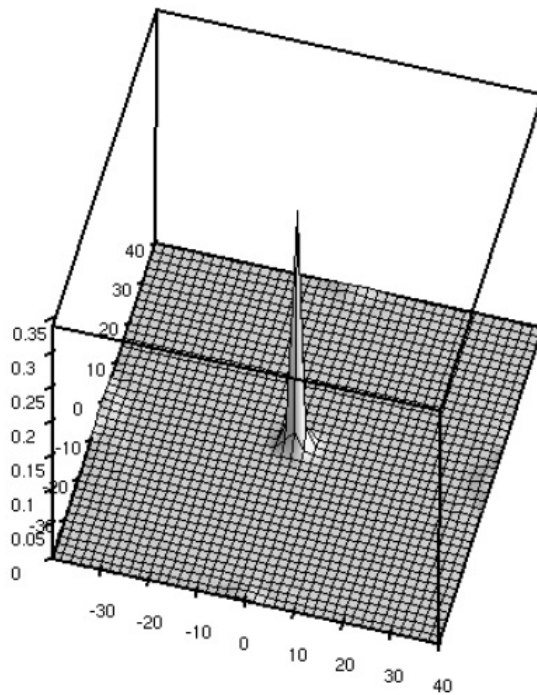
نمودار تابع توزیع احتمال شبیه سازی برای این سکه با حالت اولیه ۱۰.۲ در شکل ۵.۲ نمایش داده شده است. شرایط اولیه می‌تواند موقعیت انحراف معیار را تغییر دهد یعنی از آنچه در نمونه‌ها نمایش داده شده، متفاوت باشند، همچنین می‌توان با انتخاب مناسب شرایط اولیه یک توزیع احتمال مترکم حول مبدا داشته باشیم، یعنی انحراف معیار به شرایط اولیه وابسته است.

۴.۱.۲ انحراف معیار

یکی از پارامترهای مهم که سکه‌های متفاوت را با آن مقایسه می‌کنند انحراف معیار است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

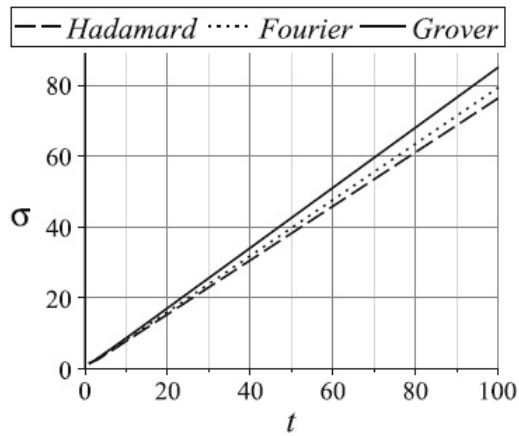
$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_{x,y=-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) p_{x,y}(t)} \quad (16.2)$$

انحراف معیار ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای سکه‌های هادامارد، فوریه و گراور در شکل ۶.۲ رسم شده است که در آن سکه گراور بیشترین انحراف معیار را دارد.

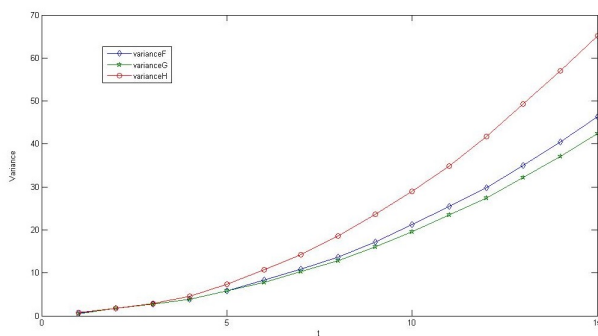


شکل ۵.۲: توزیع بدست آمده بعد از چهل گام برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه گراور و حالت اولیه ۱۰.۲

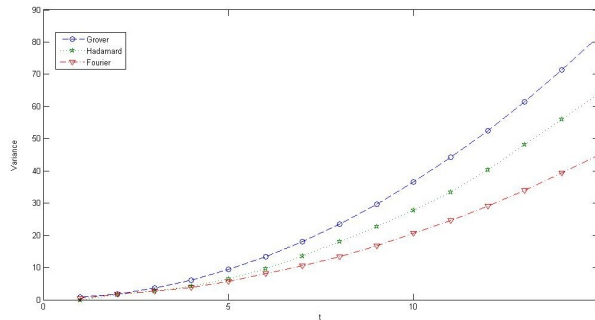
سکه گراور مزایای متعددی نسبت به فوریه و هادامارد دارد و علاوه بر افزایش انحراف معیار نسبت به بقیه، می‌تواند در الگوریتم‌های کوانتومی مفید باشد. سکه گراور می‌تواند در هر بعدی بکار برود ولی سکه هادامارد تنها می‌تواند در ابعادی استفاده شود که از توان دو هستند و سکه فوریه در حالت خاصی که بعد آن، از توان دو باشد استفاده می‌شود [۱۷]. در بعضی از مراجع بجای انحراف معیار σ ، واریانس، یعنی σ^2 بررسی می‌شود، در شکل ۷.۲ و ۸.۲ واریانس ولگشت‌های گراور، فوریه و هادامارد برای دو حالت اولیه مختلف با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۶.۲: نمودار انحراف معیار بر حسب زمان ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای سکه گراور، هادامارد و فوریه



شکل ۷.۲: نمودار واریانس بر حسب زمان ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای سکه گراور، هادامارد و فوریه با حالت اولیه ۱.۰.۲.



شکل ۸.۲: نمودار واریانس بر حسب زمان ولگشت کوانتومی روی شبکه دوبعدی برای سکه گراور،

هادامارد و فوریه با حالت اولیه $\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, -1, 1)$

۵.۱.۲ محاسبات تحلیلی ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از تبدیل فوریه

در تبدیل فوریه برای ولگشت کوانتومی دوبعدی توابع بصورت زیر تبدیل می‌شوند :

$$\tilde{\psi}_s(k_x, k_y, t) = \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \psi_s(x, y, t) e^{-i(k_x x + k_y y)} \quad (17.2)$$

و تابع معکوس آن هم به صورت زیر است [۲۶]

$$\psi(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y)} \hat{\psi}(k_x, k_y, t) \quad (18.2)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \langle k_x, k_y | \psi(t) \rangle &= \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \langle x, y | \psi(t) \rangle e^{-i(k_x x + k_y y)} \\ \Rightarrow \langle k_x, k_y | &= \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \langle x, y | e^{-i(k_x x + k_y y)} \\ \Rightarrow |k_x, k_y \rangle &= \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} |x, y \rangle e^{i(k_x x + k_y y)} \end{aligned} \quad (19.2)$$

و

$$\psi_s(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{4\pi^2} e^{i(k_x x + k_y y)} \tilde{\psi}_s(k_x, k_y, t) \quad (20.2)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \langle x, y | \psi(t) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{4\pi^2} e^{i(k_x x + k_y y)} \langle k_x, k_y | \psi(t) \rangle \\ \Rightarrow \langle x, y | &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{4\pi^2} e^{i(k_x x + k_y y)} \langle k_x, k_y | \\ \Rightarrow |x, y \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{4\pi^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} |k_x k_y \rangle \end{aligned} \quad (21.2)$$

در ادامه عملگر تحول U بر حسب پایه های فوریه تعریف می شود، ابتدا عملگر تغییر مکان را به طور قراردادی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} S = \sum_{x,y} (|x-1\rangle \langle x| \otimes |00\rangle \langle 00| + |y-1\rangle \langle y| \otimes |01\rangle \langle 01| \\ + |y+1\rangle \langle y| \otimes |10\rangle \langle 10| + |x+1\rangle \langle x| \otimes |11\rangle \langle 11|) \end{aligned} \quad (22.2)$$

که در این قرارداد اگر حالت سکه ما $|00\rangle$ باشد، ولگشت یک گام در جهت $-x$ حرکت می کند، اگر حالت سکه ما $|01\rangle$ باشد، ولگشت یک گام در جهت $-y$ حرکت می کند و رابطه عملگر تحول U را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} U = \sum_x |x-1\rangle \langle x| \otimes |00\rangle \langle 00| G + \sum_y |y-1\rangle \langle y| \otimes |01\rangle \langle 01| G \\ + \sum_y |y+1\rangle \langle y| \otimes |10\rangle \langle 10| G + \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |11\rangle \langle 11| G \end{aligned} \quad (23.2)$$

حال روابط بدست آمده برای تبدیل فوریه را در رابط بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_x \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x e^{-ik_x(x-1)} |k_x\rangle \int_{-\pi}^{\pi} dk'_x e^{ik'_x x'} \langle k'_x | \otimes |00\rangle \langle 00 | G \\
 &+ \sum_y \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y e^{-ik_y(y-1)} |k_y\rangle \int_{-\pi}^{\pi} dk'_y e^{ik'_y y'} \langle k'_y | \otimes |01\rangle \langle 01 | G \\
 &+ \sum_y \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y e^{-ik_y(y+1)} |k_y\rangle \int_{-\pi}^{\pi} dk'_y e^{ik'_y y'} \langle k'_y | \otimes |10\rangle \langle 10 | G \\
 &+ \sum_x \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x e^{-ik_x(x+1)} |k_x\rangle \int_{-\pi}^{\pi} dk'_x e^{ik'_x x'} \langle k'_x | \otimes |11\rangle \langle 11 | G \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk'_x \sum_x e^{-i(k_x - k'_x)x} e^{ik_x} |k_x\rangle \langle k'_x | \otimes |00\rangle \langle 00 | G \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y dk'_y \sum_y e^{-i(k_y - k'_y)y} e^{ik_y} |k_y\rangle \langle k'_y | \otimes |01\rangle \langle 01 | G \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y dk'_y \sum_y e^{-i(k_y - k'_y)y} e^{-ik_y} |k_y\rangle \langle k'_y | \otimes |10\rangle \langle 10 | G \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk'_x \sum_x e^{-i(k_x - k'_x)x} e^{-ik_x} |k_x\rangle \langle k'_x | \otimes |11\rangle \langle 11 | G
 \end{aligned} \tag{24.2}$$

از تعریف تابع دلتای دیراک استفاده می‌کنیم:

$$\delta(k - k') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n e^{-i(k-k')n} \tag{25.2}$$

با استفاده از رابطه ۲۵.۲ رابطه ۲۴.۲ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk'_x e^{ik_x} |k_x\rangle \langle k'_x | \delta(k_x - k'_x) \otimes |00\rangle \langle 00 | G \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y dk'_y e^{ik_y} |k_y\rangle \langle k'_y | \delta(k_y - k'_y) \otimes |01\rangle \langle 01 | G \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y dk'_y e^{-ik_y} |k_y\rangle \langle k'_y | \delta(k_y - k'_y) \otimes |10\rangle \langle 10 | G \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk'_x e^{-ik_x} |k_x\rangle \langle k'_x | \delta(k_x - k'_x) \otimes |11\rangle \langle 11 | G
 \end{aligned} \tag{26.2}$$

دوباره از تعریف تابع دلتای کرونیگر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk \delta(k - k') = 1 \tag{27.2}$$

و بعد از جایگذاری و ساده سازی عملگر تحول به شکل زیر بدست می آید

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x |k_x\rangle \langle k_x| e^{ik_x} | \circ \circ \rangle \langle \circ \circ | G \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y |k_y\rangle \langle k_y| e^{ik_y} | \circ 1 \rangle \langle \circ 1 | G \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y |k_y\rangle \langle k_y| e^{-ik_y} | 1 \circ \rangle \langle 1 \circ | G \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x |k_x\rangle \langle k_x| e^{-ik_x} | 1 1 \rangle \langle 1 1 | G
 \end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 | \circ \circ \rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, & | \circ 1 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \\
 | 1 \circ \rangle &= \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}, & | 1 1 \rangle &= \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

و بعد از جایگذاری سکه گراور عبارت اول به صورت زیر بدست می آید

$$e^{ik_x} | \circ \circ \rangle \langle \circ \circ | G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \tag{۳۰.۲}$$

و اگر بقیه جملات را نیز به همین طریق بدست آوریم در آخر عملگر تحول در پایه های فوریه به شکل زیر

بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k_x, k_y\rangle \langle k_x, k_y| \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} \\ e^{ik_y} & -e^{ik_y} & e^{ik_y} & e^{ik_y} \\ e^{-ik_y} & e^{-ik_y} & -e^{-ik_y} & e^{-ik_y} \\ e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & -e^{-ik_x} \end{pmatrix} \quad (31.2)$$

بنابراین بدست آوردن ماتریس U منجر به بدست آوردن ماتریس \tilde{G}_k می‌شود که چهاربعدیست و کار با آن بسیار ساده‌تر است. از آنجایی که ما نیازمند محاسبه U^t هستیم بنابراین محاسبه \tilde{G}_k^t نیز مورد نیاز خواهد بود که بهترین راه برای محاسبه توانهای \tilde{G}_k قطری کردن آن است. برای تعیین ویژه مقادیر عبات زیر را حساب می‌کنیم

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -e^{ik_x} - \lambda & e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} \\ e^{ik_y} & -e^{ik_y} - \lambda & e^{ik_y} & e^{ik_y} \\ e^{-ik_y} & e^{-ik_y} & -e^{-ik_y} - \lambda & e^{-ik_y} \\ e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & -e^{-ik_x} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (32.2)$$

و بعد از ساده‌سازی معادله مشخصه آن به صورت زیر می‌شود

$$\lambda^4 + (\cos k_x + \cos k_y) \lambda^3 - (\cos k_x + \cos k_y) \lambda - 1 = 0 \quad (33.2)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$-\frac{1}{2} (\cos k_x + \cos k_y) = \cos \omega(k_x, k_y) \Rightarrow (\cos k_x + \cos k_y) = -2 \cos \omega(k_x, k_y) \quad (34.2)$$

و با جایگذاری و ساده‌سازی، ویژه مقادیر بصورت زیر خواهند بود:

$$\lambda^4 - 2 \cos \omega(k_x, k_y) \lambda^3 + 2 \cos \omega(k_x, k_y) \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1) (\lambda^2 - 2 \cos \omega(k_x, k_y) + 1) = 0$$

$$(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$(35.2)$$

$$(\lambda^2 - 2 \cos \omega(k_x, k_y) + 1) = 0$$

$$\lambda_3 = e^{i\omega(k_x, k_y)}$$

$$\lambda_4 = e^{-i\omega(k_x, k_y)}$$

ویژه کت های متناظر با این ویژه مقادیر به شکل زیر هستند:

ویژه کت متناظر با $\lambda_1 = 1$ به شکل زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} \\ e^{ik_y} & -e^{ik_y} & e^{ik_y} & e^{ik_y} \\ e^{-ik_y} & e^{-ik_y} & -e^{-ik_y} & e^{-ik_y} \\ e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & -e^{-ik_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (36.2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{ik_x}(-a + b + c + d) = 2a \\ e^{ik_y}(a - b + c + d) = 2b \\ e^{-ik_y}(a + b - c + d) = 2c \\ e^{-ik_x}(a + b + c - d) = 2d \end{cases}$$

(37.2)

$$\Rightarrow \begin{cases} -a(1 + 2e^{-ik_x}) + b + c + d = 0 \rightarrow (1) \\ a - b(1 + 2e^{-ik_y}) + c + d = 0 \rightarrow (2) \\ a + b - c(1 + 2e^{ik_y}) + d = 0 \rightarrow (3) \\ a + b + c - d(1 + 2e^{ik_x}) = 0 \rightarrow (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow -a(2 + 2e^{-ik_x}) + b(2 + 2e^{-ik_y}) = 0 \\ (3) - (4) \Rightarrow -c(2 + 2e^{ik_y}) + d(2 + 2e^{ik_x}) = 0 \end{cases} \quad (38.2)$$

با جمع دو معادله رابطه بالا داریم:

$$\Rightarrow -a(2 + 2e^{-ik_x}) + b(2 + 2e^{-ik_y}) - c(2 + 2e^{ik_y}) + d(2 + 2e^{ik_x}) = 0 \quad (39.2)$$

و در آخر ویژه کت متناظر با این ویژه مقدار به صورت زیر می شود

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} (\gamma + \gamma e^{-ik_y})(\gamma + \gamma e^{ik_y})(\gamma + \gamma e^{ik_x}) \\ (\gamma + \gamma e^{-ik_x})(\gamma + \gamma e^{ik_y})(\gamma + \gamma e^{ik_x}) \\ (\gamma + \gamma e^{-ik_x})(\gamma + \gamma e^{-ik_y})(\gamma + \gamma e^{ik_x}) \\ (\gamma + \gamma e^{-ik_x})(\gamma + \gamma e^{-ik_y})(\gamma + \gamma e^{ik_y}) \end{pmatrix} \quad (40.2)$$

در نتیجه ویژه کت کلی که به ازای λ های متفاوت بدست می آید به شکل زیر می باشد:

$$|v_j\rangle = \begin{pmatrix} (\gamma + \gamma \lambda_j e^{-ik_y})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{ik_y})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{ik_x}) \\ (\gamma + \gamma \lambda_j e^{-ik_x})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{ik_y})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{ik_x}) \\ (\gamma + \gamma \lambda_j e^{-ik_x})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{-ik_y})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{ik_x}) \\ (\gamma + \gamma \lambda_j e^{-ik_x})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{-ik_y})(\gamma + \gamma \lambda_j e^{ik_y}) \end{pmatrix} \quad (41.2)$$

حال عملگر تحول \hat{G}_k را بر حسب ویژه مقادیر و ویژه کت ها به صورت زیر می نویسیم:

$$\hat{G}_k = \lambda_1 |v_1\rangle \langle v_1| + \lambda_2 |v_2\rangle \langle v_2| + \lambda_3 |v_3\rangle \langle v_3| + \lambda_4 |v_4\rangle \langle v_4| \quad (42.2)$$

رابطه بالا را در ۳۱.۲ جای گذاری می کنیم.

ماتریس $R(k_x, k_y)$ را از چهار بردار ستونی ۴۲.۲ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R(k_x, k_y) = (v_1, v_2, v_3, v_4) \quad (43.2)$$

که U تحت تبدیلات مشابهی R قطری است بنابراین حالت ذره در گام t ام به شکل زیر می باشد:

$$(44.2)$$

$$\hat{\psi}(k_x, k_y, t) = (U(k_x, k_y))^t \phi_0 = R(k_x, k_y) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^t \end{pmatrix} R(k_x, k_y)^\dagger \phi_0$$

$$= \sum_{j=1}^4 (\lambda_j)^t v_j(k_x, k_y) v_j^\dagger(k_x, k_y) \phi_0$$

که در اینجا $C_j(k_x, k_x) = v_j^\dagger \phi_0$. حال برای بدست آوردن موقعیت مکانی آن باید عکس تبدیلات فوریه را انجام داد:

$$\psi(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y)} \hat{\psi}(k_x, k_y, t) \quad (45.2)$$

و احتمال یافتن ذره در مکان (x, y) پس از t گام صورت زیر خواهد بود:

$$P(x, y, t) = \psi^\dagger(x, y, t) \psi(x, y, t) \quad (46.2)$$

۶.۱.۲ تکانه مشترک

پارامتر دیگری که محاسبه می‌کنیم تکانه مشترک است که با $\langle X_t^\alpha Y_t^\beta \rangle$ نشان داده می‌شود و X_t و Y_t موقعیت و لگشت در زمان t را نشان می‌دهند [۲۷]، [۲۶]:

$$\langle X_t^\alpha Y_t^\beta \rangle \equiv \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^2} x^\alpha y^\beta P(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \hat{\psi}^\dagger(k_x, k_y, t) \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta \hat{\psi}(k_x, k_y, t) \quad (47.2)$$

ابتدا باید $\hat{\psi}_t$ را بدست آوریم، برای این کار ابتدا عملگر تحول U را به شکل زیر می‌نویسیم

$$|U\rangle = S(C \otimes I) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| \quad (48.2)$$

بنابراین بعد از t گام

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(t)\rangle &= U^t |\hat{\psi}_0\rangle = \sum_{j=1}^4 \lambda_j^t \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \\ &= (1)^t \langle v_1 | \psi_0 \rangle |v_1\rangle + (-1)^t \langle v_2 | \psi_0 \rangle |v_2\rangle \\ &\quad + e^{i\omega t} \langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle + e^{-i\omega t} \langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle \end{aligned} \quad (49.2)$$

با جایگذاری رابطه ۴۹.۲ در رابطه ۴۷.۲ می‌توان تکانه مشترک را بدست آورد که برای این کار به محاسبه عبارت زیر نیاز داریم:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta \hat{\psi}(k_x, k_y) &= \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta ((1)^t \langle v_1 | \psi_0 \rangle |v_1\rangle + (-1)^t \langle v_2 | \psi_0 \rangle |v_2\rangle \\ &\quad + e^{i\omega t} \langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle + e^{-i\omega t} \langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle) \end{aligned} \quad (50.2)$$

از آنجایی که ω بر حسب k_x و k_y است مشتق مرتبه اول رابطه ۵۰.۲ به صورت زیر می شود

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\hat{\psi}(k_x, k_y) &= (1)^t \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\langle v_1 | \psi_0 \rangle |v_1\rangle \\ &+ (-1)^t \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\langle v_2 | \psi_0 \rangle |v_2\rangle \\ &+ (-1)^2 t^2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\right) e^{i\omega t} \langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle \\ &+ e^{i\omega t} \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle \\ &+ t^2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\right) e^{-i\omega t} \langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle \\ &+ e^{-i\omega t} \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle \end{aligned}$$

و برای مشتقات بالاتر، جملاتی پیدا می شوند که توان t آن ها نسبت به بزرگترین توان t کمتر است. در نتیجه، حالت کلی برای $\alpha, \beta = 1, 2, \dots$ بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}(k_x, k_y, t) &= \left(-\frac{\partial\omega(k_x, k_y)}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(-\frac{\partial\omega(k_x, k_y)}{\partial k_y}\right)^\beta (\lambda_3)^t v_3(k_x, k_y) C_3(k_x, k_y) t^{\alpha+\beta} \\ &+ \left(\frac{\partial\omega(k_x, k_y)}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial\omega(k_x, k_y)}{\partial k_y}\right)^\beta (\lambda_4)^t v_4(k_x, k_y) C_4(k_x, k_y) t^{\alpha+\beta} \\ &+ O(t^{\alpha+\beta-1}) \end{aligned} \quad (51.2)$$

چون $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$ مستقل از k_x, k_y هستند [۲۶].

از روی رابطه ۴۹.۲ می توان $\hat{\psi}^\dagger(k_x, k_y, t)$ را حساب کرد، از آنجایی که $R(k_x, k_y)$ یونیتاری است، بردار ستونی آن مجموعهای از بردارهای متعامد می سازد به طوری که $v_m^\dagger(k_x, k_y)v_{m'}(k_x, k_y) = \delta_{mm'}$ ، بنابراین داریم:

$$(52.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger(k_x, k_y, t) \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}(k_x, k_y, t) &= \{(-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2\} \\ &\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\right)^\beta t^{\alpha+\beta} + O(t^{\alpha+\beta-1}) \end{aligned}$$

برای بدست آوردن تکانه مشترک در t های بزرگ ($t \rightarrow \infty$)، آنگاه با توجه ضرایب و همچنین توان کمتر جمله دوم در رابطه ۵۲.۲ می توان از جمله دوم در مقابل جمله اول صرف نظر کرد بنابراین

$$(53.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger(k_x, k_y, t) \left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}(k_x, k_y, t) &= \{(-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2\} \\ &\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\right)^\beta t^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

و در آخر رابطه ۵۳.۲ را در ۴۷.۲ جایگذاری می کنیم و رابطه کلی به شکل زیر بدست می آید [۲۶].

$$\langle X_t^\alpha Y_t^\beta \rangle_t = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \{ (-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2 \} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right)^\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right)^\beta t^{\alpha+\beta} \quad (54.2)$$

فصل ۳

ولگشت کوانتومی تکرار نشدنی و برگشت

ناپذیر

۱.۳ مقدمه

در ولگشت‌های کوانتومی دو بعدی به صورت معمول، ولگشت در هر گام امکان رفتن به تمام همسایه‌های مجاور خود را دارد، برای مثال سه نوع ولگشتی که در فصل ۲ بررسی شده‌اند در هر گام احتمالی برابر برای رفتن به تمام همسایه‌ها ایجاد می‌کنند اما می‌توان انواع متفاوتی از ولگشت‌های کوانتومی معرفی کرد که بر روی آن‌ها محدودیت قرار داده‌اند و نمی‌توانند به همه همسایه‌های مجاور خود بروند. اخیراً دو نمونه ولگشت کوانتومی معرفی شده است که در آن‌ها ولگشت هیچ‌گاه به همسایه‌ای که از آن آمده بر نمی‌گردد و یا اینکه جهتی که از آن به یک مکان خاص رسیده در گام بعد تکرار نمی‌کند که این دو نوع ولگشت را به ترتیب ولگشت‌های کوانتومی برگشت ناپذیر و تکرار نشدنی نامیده‌اند و ثابت شده است که خواص متفاوتی را از خود بروز می‌دهند [۲۷].

در اینجا خواص هر دو ولگشت را توصیف می‌کنیم و علاوه بر پارامترهای قبلی که برای ولگشت‌ها بررسی کرده‌ایم، به صورت تحلیلی نشان داده می‌شود که پارامتر تکانه مشترک برای ولگشت تکرار نشدنی مستقل از شرایط اولیه است و شواهد عددی هم همین مورد را برای ولگشت برگشت ناپذیر نشان می‌دهد، که این خواص به شدت با سکه‌هایی که قبلاً مطالعه شده‌اند متفاوت است.

۲.۳ ولگشت کوانتومی تکرار نشدنی

در ولگشت کوانتومی تکرار نشدنی^۱، ولگرد هیچ‌گاه جهتی که از آن به یک مکان خاص رسیده در گام بعد تکرار نمی‌کند، به عبارت دیگر وقتی که یک حالت اولیه‌ای را برای ولگشت انتخاب می‌کنیم، در گام بعدی (وقتی اپراتور سکه را اعمال می‌کنیم)، ولگرد دیگر در جهت قبلی حرکت نمی‌کند و بر روی آن محدودیت قرار داده‌ایم.

برای ولگشت کوانتومی یک بعدی نامتناهی، فضای هیلبرت ما به صورت $H_2 \otimes H_\infty$ تعریف می‌شود و حالت ولگشت به صورت $\{|s, n\rangle; s \in \{0, 1\}, -\infty \leq n \leq \infty\}$ است، اگر فرض کنیم حالت اولیه‌ای که برای سکه انتخاب می‌کنیم حالت $|0\rangle$ باشد، (یعنی طبق قرارداد ولگشت به سمت راست (جهت مثبت) برود)، حال برای بدست آوردن گام بعدی عملگر سکه را اعمال می‌کنیم. اگر برای ولگشت کوانتومی یک بعدی عملگر سکه را به شکل زیر تعریف کنیم

$$C_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

آنگاه اثر این سکه بر روی حالت اولیه به شکل زیر است:

^۱Nonrepeating

$$C|0\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a|0\rangle + c|1\rangle \quad (2.3)$$

و مشاهده می‌کنیم که بعد از اعمال اپراتور سکه، ولگرد با احتمال $|a|^2$ در همان جهت قبلی و با احتمال $|c|^2$ در جهت مخالف حرکت می‌کند. حال اگر عملگر سکه خود را به شکل زیر تعریف کنیم

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

و آن را روی حالت اولیه $|0\rangle$ اعمال کنیم، آنگاه اثر این سکه به شکل زیر می‌باشد :

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0|0\rangle + c|1\rangle \quad (4.3)$$

مشاهده می‌شود که بعد از اعمال این عملگر، ولگشت دیگر در جهت قبلی حرکت نمی‌کند و به طور کامل در جهت مخالف آن حرکت می‌کند. حال همین روند را برای فضای دو بعدی تکرار می‌کنیم، چون فضای مکان ما یک فضای دو بعدی شامل نقاط صحیح می‌باشد، اگر ولگشت در یک نقطه شبکه باشد چهار گزینه برای حرکت وجود دارد و عملگر سکه مشخص می‌کند که ولگشت در هر گام چگونه حرکت کند. بنابراین در یک شبکه دو بعدی در هر گام، ولگرد ۴ انتخاب دارد. ابتدا برای ولگشت کوانتومی دو بعدی عملگر تغییر مکان را به صورت قراردادی به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$S = \sum_{x,y} (|x-1\rangle \langle x| \otimes |00\rangle \langle 00| + |y-1\rangle \langle y| \otimes |01\rangle \langle 01| + |y+1\rangle \langle y| \otimes |10\rangle \langle 10| + |x+1\rangle \langle x| \otimes |11\rangle \langle 11|) \quad (5.3)$$

و بعد از تبدیل عملگر تغییر مکان در پایه‌های فوریه بصورت زیر بدست می‌آید [۲۷]، [۱۹]:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_x} \end{pmatrix} \quad (۶.۳)$$

اگر عملگر سکه شبکه دو بعدی را به شکل زیر تعریف کنیم

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \quad (۷.۳)$$

وقتی این عملگر را روی حالت اولیه $|00\rangle$ اعمال کنیم نتیجه آن به شکل زیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a|00\rangle + e|01\rangle + i|10\rangle + m|11\rangle \quad (۸.۳)$$

مشاهده می‌کنیم که بعد از اعمال عملگر سکه، ولگرد در هر چهار جهت حرکت می‌کند. حال اگر بر روی عملگر سکه محدودیت ایجاد کنیم و آن را به شکلی تعریف کنیم که عناصر قطر اصلی آن صفر باشند، آن وقت برای نمونه بالا که ولگرد در هر چهار جهت حرکت می‌کرد در اینجا مولفه اول آن صفر می‌شود و احتمال اینکه ولگرد، دیگر در جهت حالت اولیه ای که انتخاب کردیم حرکت کند صفر می‌شود و به همین دلیل، دیگر در جهت قبلی حرکت نمی‌کند. برای سه جهت دیگر نیز به همین طریق تعریف می‌شود و در هر گام تعداد انتخاب‌ها از ۴ به ۳ کاهش پیدا می‌کند و این عملگر را عملگر سکه تکرارنشدنی می‌نامیم.

عمومی‌ترین عملگر سکه $SU(4)$ با قطر اصلی صفر، برای ولگشت تکرار نشدنی به شکل زیر است که با توجه به عملگر تغییر مکان تعریف شده در معادله ۶.۳، این عملگر سکه هرگز اجازه نمی‌دهد ولگشت در دو گام متوالی در دو جهت مشابه حرکت کند پس طبیعی است که اشاره کنیم یک ولگشت تکرار نشدنی

است [۲۷]:

$$C^{!rep} = \begin{pmatrix} \circ & \lambda e^{i\alpha} & \gamma e^{i\beta} & f e^{i\theta} \\ \lambda e^{-i(\phi+\delta+\alpha)} & \circ & -f e^{i(\psi-\theta+\beta)} & \gamma e^{i\psi} \\ -\gamma e^{-i(\delta+\alpha+\psi)} & -f e^{i(\phi-\theta+\alpha)} & \circ & \lambda e^{i\phi} \\ f e^{i(\theta-\alpha-\psi-\phi-\beta)} & -\gamma e^{-i(\delta+\alpha-\beta)} & \lambda e^{i\delta} & \circ \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

در اینجا همه‌ی متغیرها حقیقی هستند و $\circ \leq \gamma^2 + \lambda^2 \leq 1$ و $f = \sqrt{1 - (\gamma^2 + \lambda^2)}$ می‌باشند [۲۷]. بنابراین عملگر تحول برای ولگشت کوانتومی تکرارنشده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = \begin{pmatrix} \circ & \lambda e^{i\alpha} e^{ik_x} & \gamma e^{i\beta} e^{ik_x} & f e^{i\theta} e^{ik_x} \\ \lambda e^{-i(\phi+\delta+\alpha)} e^{ik_y} & \circ & -f e^{i(\psi-\theta+\beta)} e^{ik_y} & \gamma e^{i\psi} e^{ik_y} \\ -\gamma e^{-i(\delta+\alpha+\psi)} e^{-ik_y} & -f e^{i(\phi-\theta+\alpha)} e^{-ik_y} & \circ & \lambda e^{i\phi} e^{-ik_y} \\ f e^{i(\theta-\alpha-\psi-\phi-\beta)} e^{-ik_x} & -\gamma e^{-i(\delta+\alpha-\beta)} e^{-ik_x} & \lambda e^{i\delta} e^{-ik_x} & \circ \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

۳.۳ ولگشت کوانتومی برگشت ناپذیر

در ولگشت کوانتومی برگشت ناپذیر^۲، ولگرد هیچ گاه به همسایه‌ای که از آن آمده برنمی‌گردد و به عقب گام بر نمی‌دارد و عملگر سکه این ولگشت از روی عملگر سکه تکرار نشدنی به شکل زیر ساخته می‌شود

$$C^{!rev} = C^{!rep} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

و برای این ولگشت عناصر قطر فرعی صفر هستند [۲۷]. بنابراین عمومی‌ترین اپراتور سکه برای این ولگشت که از روی اپراتور سکه تکرار نشدنی ساخته می‌شود به شکل زیر است:

^۲Nonreversal

$$C^{rev} = \begin{pmatrix} fe^{i\theta} & \gamma e^{i\beta} & \lambda e^{i\alpha} & \circ \\ \gamma e^{i\psi} & -fe^{i(\psi-\theta+\beta)} & \circ & \lambda e^{-i(\phi+\delta+\alpha)} \\ \lambda e^{i\phi} & \circ & -fe^{i(\phi-\theta+\alpha)} & -\gamma e^{-i(\delta+\alpha+\psi)} \\ \circ & \lambda e^{i\delta} & -\gamma e^{-i(\delta+\alpha-\beta)} & fe^{i(\theta-\alpha-\psi-\phi-\beta)} \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

عملگر تغییر مکانی که برای برای این ولگشت انتخاب می کنیم همان عملگر رابطه ۶.۳ است. بنابراین عملگر تحول ولگشت برگشت ناپذیر به صورت زیر تعریف می شود:

$$U = \begin{pmatrix} fe^{i\theta} e^{ik_x} & \gamma e^{i\beta} e^{ik_x} & \lambda e^{i\alpha} e^{ik_x} & \circ \\ \gamma e^{i\psi} e^{ik_y} & -fe^{i(\psi-\theta+\beta)} e^{ik_y} & \circ & \lambda e^{-i(\phi+\delta+\alpha)} e^{ik_y} \\ \lambda e^{i\phi} e^{-ik_y} & \circ & -fe^{i(\phi-\theta+\alpha)} e^{-ik_y} & -\gamma e^{-i(\delta+\alpha+\psi)} e^{-ik_y} \\ \circ & \lambda e^{i\delta} e^{-ik_x} & -\gamma e^{-i(\delta+\alpha-\beta)} e^{-ik_x} & fe^{i(\theta-\alpha-\psi-\phi-\beta)} e^{-ik_x} \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

به عنوان مثال، یک نمونه از عملگرهای سکه ولگشت های تکرار نشدنی و برگشت ناپذیر با فرض اینکه ولگرد بتواند با احتمال برابر به تمام همسایه های مجاز مجاور برود با گرفتن $\theta = \phi = \frac{3\pi}{4}$ و $\alpha = \beta = \delta = \psi = \frac{-\pi}{4}$ و $\lambda = \gamma = f(\lambda, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ به ترتیب به شکل زیر هستند

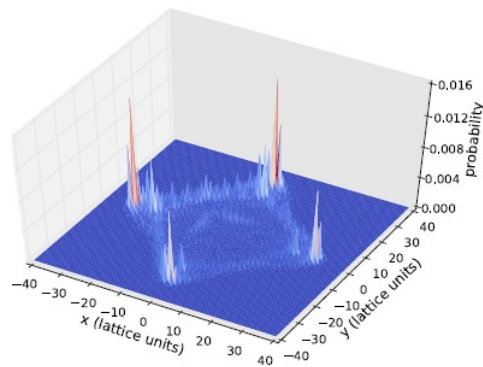
$$C^{rep} = \frac{e^{-i(\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \circ & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \circ & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \circ \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

و

$$C^{rev} = \frac{e^{-i(\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \circ \\ 1 & 1 & \circ & 1 \\ -1 & \circ & -1 & 1 \\ \circ & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.3)$$

شکل ۱.۳ توزیع احتمال ولگشت کوانتومی دو بعدی را با استفاده از سکه برگشت ناپذیر بعد از 40 گام نشان می‌دهد و حالت اولیه ای که برای این ولگشت انتخاب شده حالت زیر می‌باشد

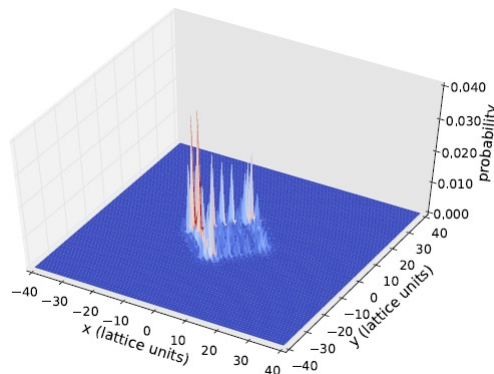
$$\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (16.3)$$



شکل ۱.۳: توزیع بدست آمده بعد از 40 گام برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه برگشت ناپذیر و حالت اولیه ۱۶.۳.

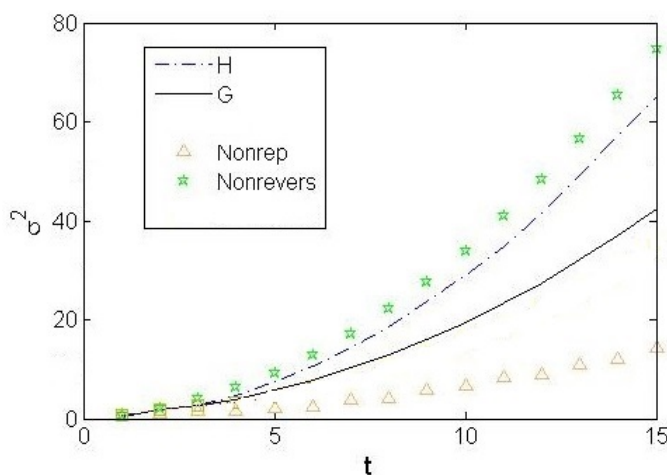
و شکل ۲.۳ توزیع احتمال ولگشت کوانتومی دو بعدی را با استفاده از سکه تکرارنشده بعد از 40 گام نشان می‌دهد و حالت اولیه ای که برای این ولگشت انتخاب شده حالت زیر می‌باشد

$$\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17.3)$$

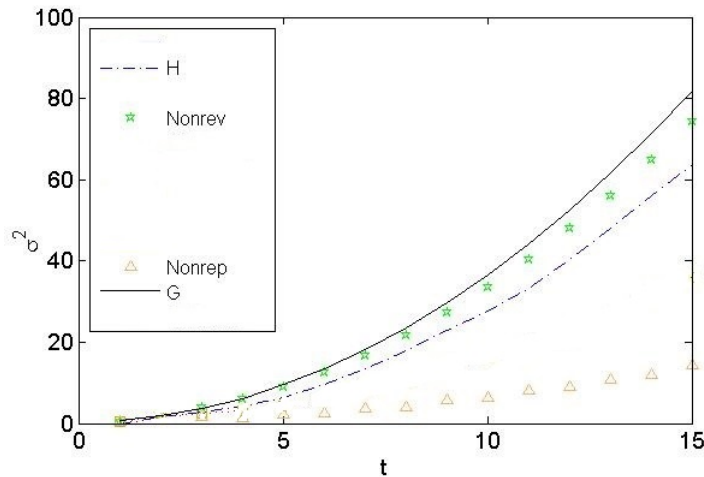


شکل ۲.۳: توزیع بدست آمده بعد از ۴۰ گام برای ولگشت کوانتومی دو بعدی با استفاده از سکه تکرارنشدنی و حالت اولیه ۱۷.۳.

برای مقایسه واریانس این دو نوع ولگشت جدید با ولگشت‌های مشهور پیشین، واریانس برای حالت اولیه ۱۶.۳ و ۱۷.۳ به ترتیب در شکل‌های ۳.۳ و ۴.۳ بر حسب زمان رسم شده اند.



شکل ۳.۳: واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، تکرار نشدنی (مثلث)، برگشت ناپذیر (ستاره)، با حالت اولیه ۱۶.۳.



شکل ۳.۴: واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، تکرار نشدنی (مثلث)، برگشت ناپذیر (ستاره)، با حالت اولیه ۱۷.۳

۱.۳.۳ تکانه مشترک

برای این ولگشت‌ها علاوه بر پارامترهای قبلی، یک پارامتر مهم دیگر را بررسی می‌کنیم که تکانه مشترک نامیده می‌شود که برای ولگشت کوانتومی دو بعدی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\langle X_t^\alpha Y_t^\beta \rangle = \sum_{x,y \in Z} \hat{\psi}_t^\dagger x^\alpha y^\beta \hat{\psi}_t = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \hat{\psi}_t^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta \hat{\psi}_t \quad (18.3)$$

که در این عبارت $\left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)$ و $\left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)$ نشان‌دهنده فضای تکانه، اپراتور مکان x و y می‌باشند [۲۶]. برای محاسبه‌ی حالت کلی ولگشت در زمان t ($\hat{\psi}_t$) به ازای یک C خاص، باید $\hat{\psi}_t = U_C(k_x, k_y) \psi_0$ را محاسبه کرد که برای این کار محاسبه ویژه مقادیر U ضروری است. معادله مشخصه ولگشت تکرار نشدنی از معادله ۱۰.۳ به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} & p^4 + \{ (2\gamma^2 \cos(k_x - k_y + \alpha + \beta - \delta - \psi) - 2\lambda^2 \cos(\phi + \delta - k_x - k_y) \\ & - 2f^2 \cos(\alpha + \beta + \phi + \psi - 2\theta)) \} p^2 + \lambda^2 e^{i(\phi - \psi)} f^2 + \gamma^2 e^{i(\phi - \psi)} f^2 \\ & + \lambda^4 e^{i(\phi - \psi)} + f^4 + 2f^2 \gamma^2 + f^2 \lambda^2 + \gamma^2 + \gamma^2 \lambda^2 = 0 \end{aligned} \quad (19.3)$$

با ساده کردن رابطه ۱۹.۳ رابطه زیر به دست می‌آید :

$$p^4 + 2p^2 \{ \gamma^2 \cos(\alpha - \beta + \delta + \psi - k_x + k_y) - \lambda^2 \cos(\phi + \delta - k_x - k_y) - f^2 \cos(\alpha + \beta + \phi + \psi - 2\theta) \} + 1 = 0 \quad (20.3)$$

بنابراین معادله مشخصه کلی به فرم زیر خواهد بود.

$$p^4 + 2Ap^2 + 1 = 0 \quad (21.3)$$

جواب‌های این معادله که ویژه مقادیر ماتریس یکانی هستند به شکل فاز خالص ($e^{i\theta}$) هستند:

$$\begin{cases} p_1 = \sqrt{-A + \sqrt{A^2 - 1}} \\ p_2 = -\sqrt{-A + \sqrt{A^2 - 1}} \\ p_3 = \sqrt{-A - \sqrt{A^2 - 1}} \\ p_4 = -\sqrt{-A - \sqrt{A^2 - 1}} \end{cases} \quad (22.3)$$

که:

$$(23.3)$$

$$A = 2p^2 \{ \gamma^2 \cos(\alpha - \beta + \delta + \psi - k_x + k_y) - \lambda^2 \cos(\phi + \delta - k_x - k_y) - f^2 \cos(\alpha + \beta + \phi + \psi - 2\theta) \}$$

معادله ۲۱.۳ یک معادله درجه ۲ برای P^2 است بنابراین اگر p یک جواب مساله باشد آنگاه $-p$ هم جواب است و از طرفی متغیرها را حقیقی فرض کردیم بنابراین اگر p یک جواب باشد، p^* هم جواب خواهد بود، بنابراین در حالت کلی جواب‌ها به شکل زیر هستند :

$$p_1 = -p_2 = P_3^* = -P_4^* = e^{i\omega(k_x, k_y)} \quad (24.3)$$

که در اینجا ω تابعی از λ و γ و ψ پارامتر سکه است.

در گام بعد ویژه کت‌های متناظر با این ویژه مقادیر را بدست می‌آوریم و آن‌ها را به صورت $|v_j(k_x, k_y)\rangle$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین عملگر تحول را بر حسب ویژه مقادیر و ویژه کت‌ها به شکل زیر می‌نویسیم

$$|U\rangle = S(C \otimes I) = p_1 |v_1\rangle \langle v_1| + p_2 |v_2\rangle \langle v_2| + p_3 |v_3\rangle \langle v_3| + p_4 |v_4\rangle \langle v_4| \quad (25.3)$$

حالت کلی ولگشت بعد از t گام را می‌توان بشکل زیر نوشت

$$|\hat{\psi}^t\rangle = U^t |\psi_0\rangle = \sum_{j=1}^4 p_j^t \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \quad (26.3)$$

بنابراین ویژه مقادیر و ویژه کت‌ها به شکل زیر خواهند بود :

$$\begin{aligned}
 |\hat{\psi}^t\rangle &= e^{i\omega t} \langle v_1 | \psi_0 \rangle |v_1\rangle - e^{i\omega t} \langle v_2 | \psi_0 \rangle |v_2\rangle \\
 &+ e^{-i\omega t} \langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle - e^{-i\omega t} \langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{(j-1)t} (e^{i\omega t} \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle + e^{-i\omega t} \langle v_{j+2} | \psi_0 \rangle |v_{j+2}\rangle)
 \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

با قرار دادن رابطه ۲۷.۳ در رابطه ۱۸.۳ می توان تکانه مشترک را بدست آورد که برای این کار به محاسبه زیر نیاز خواهیم داشت [۲۷]، [۲۶]

$$\begin{aligned}
 \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}_t &= \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \left(\sum_{j=1}^2 (-1)^{(j-1)t} (e^{i\omega t} \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \right. \\
 &\left. + e^{-i\omega t} \langle v_{j+2} | \psi_0 \rangle |v_{j+2}\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

از آنجایی که ω بر حسب k_x و k_y است مشتق‌های رابطه ۲۸.۳ را می‌توان برای $\alpha = \beta = ۱$ به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \hat{\psi}_t &= (-1)^{\uparrow} t^{\uparrow} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right) e^{i\omega t} \langle v_1 | \psi_0 \rangle |v_1\rangle & (29.3) \\
 &+ e^{i\omega t} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \langle v_1 | \psi_0 \rangle |v_1\rangle \\
 &- (-1)^{\uparrow} t^{\uparrow} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right) e^{i\omega t} \langle v_2 | \psi_0 \rangle |v_2\rangle \\
 &- e^{i\omega t} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \langle v_2 | \psi_0 \rangle |v_2\rangle \\
 &+ (1)^{\uparrow} t^{\uparrow} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right) e^{-i\omega t} \langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle \\
 &+ e^{-i\omega t} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \langle v_3 | \psi_0 \rangle |v_3\rangle \\
 &- (1)^{\uparrow} t^{\uparrow} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right) e^{-i\omega t} \langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle \\
 &- e^{-i\omega t} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \langle v_4 | \psi_0 \rangle |v_4\rangle \\
 &= (-1)^{\uparrow} t^{\uparrow} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right) \sum_{j=1}^{\uparrow} (-1)^{(j-1)t} e^{i\omega t} \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \\
 &+ (1)^{\uparrow} t^{\uparrow} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right) \sum_{j=3}^{\downarrow} (-1)^{(j-3)t} e^{-i\omega t} \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \\
 &+ \sum_{j=1}^{\uparrow} (-1)^{(j-1)t} e^{i\omega t} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \\
 &+ \sum_{j=3}^{\downarrow} (-1)^{(j-1)t} e^{-i\omega t} \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right) \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle
 \end{aligned}$$

و برای مشتقات بالاتر، حالت کلی به شکل زیر نوشته می‌شود

(۳۰.۳)

$$\begin{aligned}
 \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^{\alpha} \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^{\beta} \hat{\psi}_t &= (-1)^{\alpha+\beta} t^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right)^{\beta} \sum_{j=1}^{\uparrow} (-1)^{(j-1)t} e^{i\omega t} \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \\
 &+ t^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right)^{\beta} \sum_{j=3}^{\downarrow} (-1)^{(j-3)t} e^{-i\omega t} \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle + O(t^{\alpha+\beta-1})
 \end{aligned}$$

از روی رابطه ۲۷.۳ می‌توان $\hat{\psi}_t^{\dagger}$ را حساب کرد، بنابراین

$$\hat{\psi}_t^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}_t = \left\{ (-1)^{\alpha+\beta} \sum_{j=1}^2 |\langle v_j | \psi_0 \rangle|^2 + \sum_{j=3}^4 |\langle v_j | \psi_0 \rangle|^2 \right\} t^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right)^\beta + O(t^{\alpha+\beta-1}) \quad (31.3)$$

با توجه به رابطه بالا اگر $\alpha + \beta$ زوج باشد، عبارت داخل کروشه ۱ خواهد شد، زیرا $(= \sum_{j=1}^4 |\langle v_j | \psi_0 \rangle|^2)$ بنابراین:

$$\hat{\psi}_t^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}_t = t^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right)^\beta + O(t^{\alpha+\beta-1}) \quad (32.3)$$

برای بدست آوردن تکانه مشترک در t های بزرگ ($t \rightarrow \infty$)، با توجه به ضرایب و همچنین توان کمتر جمله دوم در رابطه ۳۲.۳ می‌توان از این جمله دوم در مقابل جمله اول صرف نظر کرد بنابراین

$$\hat{\psi}_t^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\psi}_t = t^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right)^\beta \quad (33.3)$$

و در آخر رابطه ۳۳.۳ را در ۱۸.۳ جایگذاری می‌کنیم و رابطه کلی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\langle X_t^\alpha Y_t^\beta \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \left\{ t^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\right)^\beta \right\} \quad (34.3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که پارامتر تکانه مشترک برای ولگشت کوانتومی تکرارنشده مستقل از شرایط اولیه است که این موضوع در مورد سکه‌های پیشین که در مورد آن‌ها بحث شد صادق نیست [۲۷]، [۲۸].

۲.۳.۳ ولگشت کوانتومی برگشت ناپذیر

برای ولگشت کوانتومی برگشت ناپذیر معادله مشخصه‌ای که از معادله ۱۳.۳ بدست می‌آید به شکل زیر است:

$$P^4 + \Delta P^3 + \Xi P^2 + \Delta^* P + 1 = 0 \quad (35.3)$$

است که در این رابطه

$$\Delta = f(\lambda, \gamma) (e^{i(b_1 - k_y)} + e^{i(b_1 + k_y)} - e^{-i(b_1 + b_2 + \theta + k_x)} - e^{i(\theta + k_x)}) \quad (36.3)$$

و

$$(۳۷.۳)$$

$$\Xi = 2(f(\lambda, \gamma))^2 \cos(b_1 + b_2) + (\lambda^2 - 1) \cos(b_2 + \theta + k_x + k_y) + (\gamma^2 - 1) \cos(b_1 + \theta + k_x - k_y)$$

هستند و در این روابط b_1 و b_2 به صورت $b_1 = \alpha + \phi - \theta$ و $b_2 = \beta + \psi - \theta$ می‌باشند [۲۷]. از آنجایی که معادله مشخصه این ولگشت با ولگشت تکرارنشدنی فرق دارد بنابراین نمی‌تواند خواص ولگشت تکرارنشدنی را داشته باشد.

در روابط بالا اگر $b_1 = -b_2$ باشد آن‌گاه $\Delta = \Delta^*$ می‌شود و معادله مشخصه یک معادله شبه متقارن می‌شود [۲۷]. از طرفی چون پارامترها حقیقی فرض شده اند اگر P یک جواب معادله باشد آنگاه P^* نیز جواب معادله است و می‌توانیم جواب‌ها را به دو صورت زیر بنویسیم

$$P_1 = P_2 = e^{i\omega_1} \quad (۳۸.۳)$$

$$P_3 = P_4 = e^{i\omega_2}$$

بنابراین روش اثباتی که برای ولگشت تکرار نشدنی بکار برده شده نمی‌تواند برای این ولگشت دنبال شود.

بصورت عددی مشخص شده است که میانگین فاصله شعاعی از مبدأ

$$\langle r \rangle_t = \sum_{x,y} P(x, y, t) \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۳۹.۳)$$

و انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{\langle r^2 \rangle + \langle r \rangle^2} \quad (۴۰.۳)$$

در یک زمان مشخص برای تمام حالات اولیه مقداری ثابت است و همچنین نتیجه شبیه سازی‌های متعدد حاکی از این واقعیت است که تکانه مشترک پارامترهایی که جمع نمایی آن‌ها $t^{\alpha+\beta}$ عددی زوج است، مستقل از شرایط اولیه است [۲۷].

فصل ۴

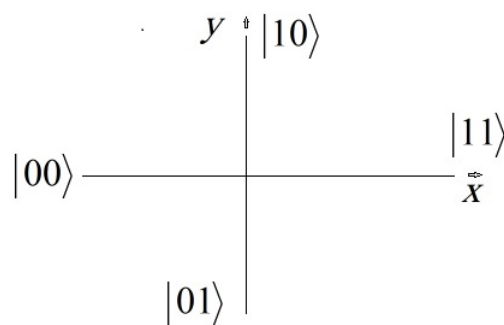
ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پاد ساعتگرد

در فصل‌های قبل دیدیم که برای ولگشت‌های کوانتومی دو بعدی، ولگرد در هر گام امکان رفتن به تمام نقاط مجاور خود را دارد ولی می‌توان انواع متفاوتی از ولگشت‌های کوانتومی را فرض کرد که در آن‌ها محدودیتی برای رفتن به همسایه‌ها قائل شد [۲۷]. که نمونه ای از آن را در فصل قبل دیدیم. در این فصل دو نمونه دیگر از ولگشت‌ها را معرفی می‌کنیم که اگرچه مشابه ولگشت‌های برگشت ناپذیر و تکرار نشدنی فقط قادر است به سه همسایه مجاور خود برود اما خواصی متفاوت با آن‌ها دارد. این دو نوع ولگشت را به‌گونه ای معرفی می‌کنیم که در آن‌ها ولگشت در هر گام به سمت راست یا چپ خود نمی‌رود که این دو نوع ولگشت را به ترتیب ولگشت کوانتومی پادساعتگرد^۱ و ساعتگرد^۲ نامیده‌ایم. عملگرهای سکه که برای این ولگشت‌ها انتخاب می‌کنیم باید شرایط زیر را داشته باشند:

در این ولگشت‌ها فرض می‌کنیم ولگرد با احتمال برابر به همسایه‌های مجاز مجاور خود می‌رود، از آنجایی که در هر گام سه انتخاب وجود دارد و ولگشت نمی‌تواند به یکی از جهت‌ها حرکت کند، اندازه تمام عناصر غیر صفر ماتریس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ می‌باشد، بنابراین در هر سطر ماتریس 4×4 یکی از آرایه‌ها صفر خواهد بود. با در نظر گرفتن عملگر انتقال به صورت رابطه ۱.۴ که در شکل ۱.۴ نشان داده شده است، می‌توان مکان درایه‌های صفر را در هر سطر مشخص کرد.

$$S = \sum_{x,y} |x-1\rangle \langle x| \otimes |00\rangle \langle 00| + |y-1\rangle \langle y| \otimes |01\rangle \langle 01| \tag{1.4}$$

$$+ |y+1\rangle \langle y| \otimes |10\rangle \langle 10| + |x+1\rangle \langle x| \otimes |11\rangle \langle 11|$$



شکل ۱.۴: نمودار عملگر تغییر مکان

^۱Counterclockwise

^۲Clockwise

۳.۰.۴ ولگشت کوانتومی ساعتگرد

در مورد ولگشت کوانتومی ساعتگرد با اعمال عملگر سکه روی حالت $|00\rangle$ که بر اساس رابطه ۱.۴ معرف حرکت در جهت $\hat{j} -$ است، ولگشت مجاز به حرکت در جهت چپ این جهت یعنی $\hat{j} -$ نمی‌باشد، بنابراین اعمال عملگر سکه روی $|00\rangle$ نباید شامل $|01\rangle$ باشد، به همین دلیل سطر دوم و ستون اول آن صفر می‌شود، همچنین اعمال عملگر سکه روی حالت اولیه $|01\rangle$ که بر اساس رابطه ۱.۴ معرف حرکت در جهت $\hat{j} -$ است، ولگشت مجاز به حرکت در جهت چپ خود یعنی \hat{i} نمی‌باشد بنابراین اعمال عملگر سکه روی حالت اولیه $|01\rangle$ ، نباید شامل $|11\rangle$ باشد، بنابراین سطر چهارم و ستون دوم آن صفر می‌باشد. به همین ترتیب مکان بقیه صفرها برای ولگشت کوانتومی ساعتگرد مشخص می‌شود و در هر سطر یکی از آرایه‌های ماتریس صفر می‌شود، به همین دلیل در هر گام از ولگشت، تعداد انتخاب‌ها از ۴ به ۳ کاهش پیدا می‌کند.

در حالت کلی شکل عملگر سکه برای ولگشت کوانتومی ساعتگرد به صورت ۲.۴ می‌باشد:

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & e^{i\theta_2} & 0 & e^{i\theta_3} \\ 0 & e^{i\theta_4} & e^{i\theta_5} & e^{i\theta_6} \\ e^{i\theta_7} & e^{i\theta_8} & e^{i\theta_9} & 0 \\ e^{i\theta_{10}} & 0 & e^{i\theta_{11}} & e^{i\theta_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

از آنجایی که عملگرهای سکه که برای ولگشت‌های کوانتومی انتخاب می‌شوند باید یکانی باشند [۱۷].

$$CC^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_4}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_6}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_7}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_8}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_{10}}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_{12}}} \\ \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_2}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_6}}{e^{i\theta_3}} & 1 & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_8}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_5}}{e^{i\theta_9}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_5}}{e^{i\theta_{11}}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_6}}{e^{i\theta_{12}}} \\ \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_7}}{e^{i\theta_1}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_8}}{e^{i\theta_2}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_8}}{e^{i\theta_4}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_9}}{e^{i\theta_5}} & 1 & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_7}}{e^{i\theta_{10}}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_9}}{e^{i\theta_{11}}} \\ \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{10}}}{e^{i\theta_1}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{12}}}{e^{i\theta_3}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{11}}}{e^{i\theta_5}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{12}}}{e^{i\theta_6}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{10}}}{e^{i\theta_7}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{11}}}{e^{i\theta_9}} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

بنابراین برای یکانی بودن ماتریس ۳.۴ باید روابط زیر برقرار باشند

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 - \theta_4 = \pi + \theta_3 - \theta_6 \rightarrow \theta_2 + \theta_6 - \theta_3 - \theta_4 = \pi \\ \theta_1 - \theta_7 = \pi + \theta_4 - \theta_8 \rightarrow \theta_1 + \theta_8 - \theta_4 - \theta_7 = \pi \\ \theta_1 - \theta_{10} = \pi + \theta_3 - \theta_{12} \rightarrow \theta_1 + \theta_{12} - \theta_3 - \theta_{10} = \pi \\ \theta_4 - \theta_8 = \pi + \theta_5 - \theta_9 \rightarrow \theta_4 + \theta_9 - \theta_5 - \theta_8 = \pi \\ \theta_5 - \theta_{11} = \pi + \theta_6 - \theta_{12} \rightarrow \theta_5 + \theta_{12} - \theta_6 - \theta_{11} = \pi \\ \theta_7 - \theta_{10} = \pi + \theta_9 - \theta_{11} \rightarrow \theta_7 + \theta_{11} - \theta_9 - \theta_{10} = \pi \end{array} \right. \quad (4.4)$$

به عنوان مثال یک نمونه از عملگرای سکه برای ولگشت کوانتومی ساعتگرد با فرض اینکه ولگرد بتواند با احتمال برابر به تمام همسایه‌های مجاور برود با گرفتن $\theta_1 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = \theta_{10} = \theta_{11} = \theta_{12} = 0$ و $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_9 = \pi$ به شکل زیر می‌باشد

$$C^{cw} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

۴.۰.۴ ولگشت کوانتومی پادساعتگرد

در مورد ولگشت پادساعتگرد به طریق مشابه، می‌توان فرم کلی عملگر سکه برای را بدست آورد. برای مثال با اعمال عملگر سکه روی حالت $|00\rangle$ که بر اساس رابطه ۱.۴ معرف حرکت در جهت $\hat{i} -$ است، ولگشت مجاز به حرکت در جهت راست این جهت یعنی \hat{j} نمی‌باشد، بنابراین اعمال عملگر سکه روی $|00\rangle$ نباید شامل $|10\rangle$ باشد، به همین دلیل سطر سوم و ستون اول آن صفر می‌شود، همچنین اعمال عملگر سکه روی حالت اولیه $|01\rangle$ که بر اساس رابطه ۱.۴ معرف حرکت در جهت $\hat{j} -$ است، ولگشت مجاز به حرکت در جهت چپ خود یعنی $\hat{i} -$ نمی‌باشد بنابراین اعمال عملگر سکه روی حالت اولیه $|01\rangle$ ، نباید شامل $|00\rangle$ باشد، به همین دلیل سطر اول و ستون دوم آن صفر می‌باشد. به همین ترتیب مکان بقیه صفرها را برای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد مشخص میشود.

در حالت کلی شکل عملگر سکه را برای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد به صورت ۶.۴ می‌باشد:

$$C^{ccw} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & e^{i\theta_2} & e^{i\theta_3} \\ e^{i\theta_4} & e^{i\theta_5} & e^{i\theta_6} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_7} & e^{i\theta_8} & e^{i\theta_9} \\ e^{i\theta_{10}} & e^{i\theta_{11}} & 0 & e^{i\theta_{12}} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

از آنجایی که عملگرهای سکه که برای ولگشت‌های کوانتومی انتخاب می‌شوند باید یکانی باشند

$$CC^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_4}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_6}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_8}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_9}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_{10}}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_{12}}} \\ \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_1}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_6}}{e^{i\theta_2}} & 1 & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_5}}{e^{i\theta_7}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_6}}{e^{i\theta_8}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_{10}}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_5}}{e^{i\theta_{11}}} \\ \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_8}}{e^{i\theta_2}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_9}}{e^{i\theta_3}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_7}}{e^{i\theta_5}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_8}}{e^{i\theta_6}} & 1 & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_7}}{e^{i\theta_{11}}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_9}}{e^{i\theta_{12}}} \\ \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{10}}}{e^{i\theta_1}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{12}}}{e^{i\theta_3}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{10}}}{e^{i\theta_4}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{12}}}{e^{i\theta_6}} & \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{11}}}{e^{i\theta_7}} + \frac{1}{3} \frac{e^{i\theta_{12}}}{e^{i\theta_9}} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

بنابراین برای یکانی بودن ماتریس ۷.۴ باید روابط زیر برقرار باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 - \theta_4 = \pi + \theta_2 - \theta_6 \rightarrow \theta_1 + \theta_6 - \theta_2 - \theta_4 = \pi \\ \theta_2 - \theta_8 = \pi + \theta_3 - \theta_9 \rightarrow \theta_2 + \theta_9 - \theta_3 - \theta_8 = \pi \\ \theta_1 - \theta_{10} = \pi + \theta_3 - \theta_{12} \rightarrow \theta_1 + \theta_{12} - \theta_3 - \theta_{10} = \pi \\ \theta_5 - \theta_7 = \pi + \theta_6 - \theta_8 \rightarrow \theta_5 + \theta_8 - \theta_7 - \theta_6 = \pi \\ \theta_4 - \theta_{10} = \pi + \theta_5 - \theta_{11} \rightarrow \theta_4 + \theta_{11} - \theta_5 - \theta_{10} = \pi \\ \theta_7 - \theta_{11} = \pi + \theta_9 - \theta_{12} \rightarrow \theta_7 + \theta_{12} - \theta_{11} - \theta_9 = \pi \end{array} \right. \quad (8.4)$$

به‌عنوان مثال یک نمونه از عملگرهای سکه برای ولگشت کوانتومی ساعتگرد با احتمال اینکه ولگرد بتواند با فرض برابر به همسایه‌های مجاور خود برود با گرفتن $\theta_1 = \theta_4 = \theta_6 = \theta_8 = \theta_9 = \theta_{10} = \theta_{11} = \theta_{12} = 0$ و $\theta_2 = \theta_3 = \theta_5 = \theta_7 = \theta_{11} = \theta_{12} = \pi$ به شکل زیر می‌باشد

$$C^{ccw} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

خواص مرتبط با این ولگشت‌ها با تغییر عملگر جابجایی یا حالت اولیه، معادل ولگشت‌های تکرارشدنی و برگشت ناپذیر نمی‌شود، زیرا این عملگر را نمی‌توان با تبدیلات یکانی از آن‌ها ساخت، به همین دلیل خواص متفاوتی را از خود نشان می‌دهند که در اینجا به بررسی برخی از خواص این دو ولگشت می‌پردازیم و آن‌ها را با بقیه ولگشت‌ها مقایسه می‌کنیم.

تابع توزیع احتمال برای این دو نوع ولگشت برای حالت اولیه

$$\psi_1(0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

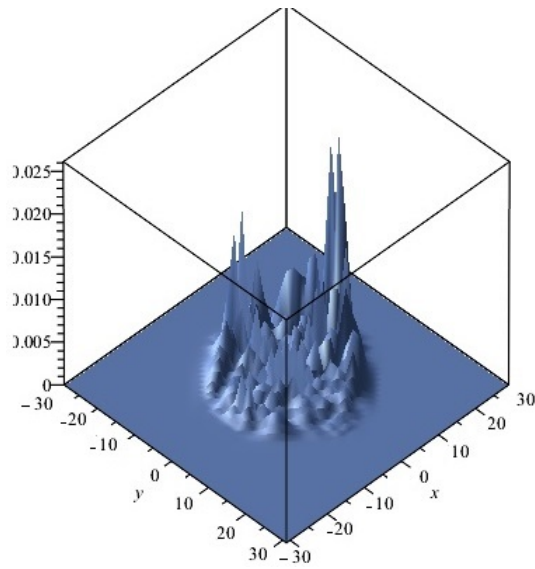
در شکل ۲.۴ رسم شده است.

یک حالت اولیه دیگر را نیز انتخاب می‌کنیم که به صورت زیر می‌باشد:

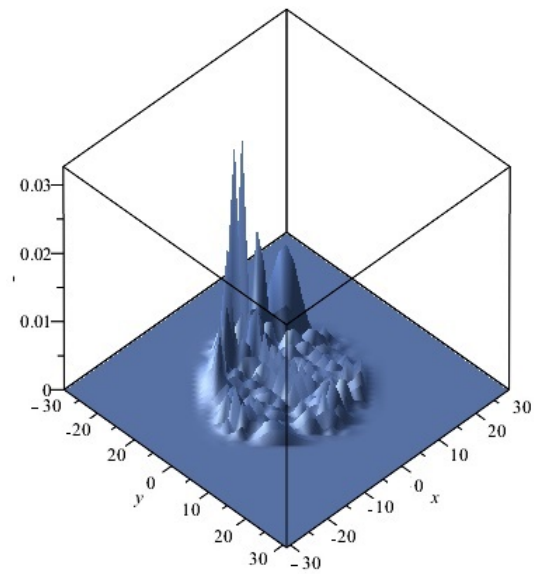
$$\psi_1(0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

نمودار واریانس بر حسب زمان این دو نوع ولگشت به‌ازای حالت اولیه ۱۱.۴ در شکل ۳.۴ و به ازای حالت اولیه ۱۰.۴ در شکل ۴.۴ با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

لازم به ذکر است که حالت اولیه ۱۰.۴ بیشترین واریانس را برای عملگر گراور تولید می‌کند که در بخش پیش به آن پرداخته شد. برای مقایسه واریانس این دو نوع ولگشت جدید با ولگشت‌های مشهور پیشین، واریانس برای حالت اولیه ۱۱.۴ و ۱۰.۴ به‌ترتیب در شکل‌های ۵.۴ و ۶.۴ بر حسب زمان رسم شده‌اند.



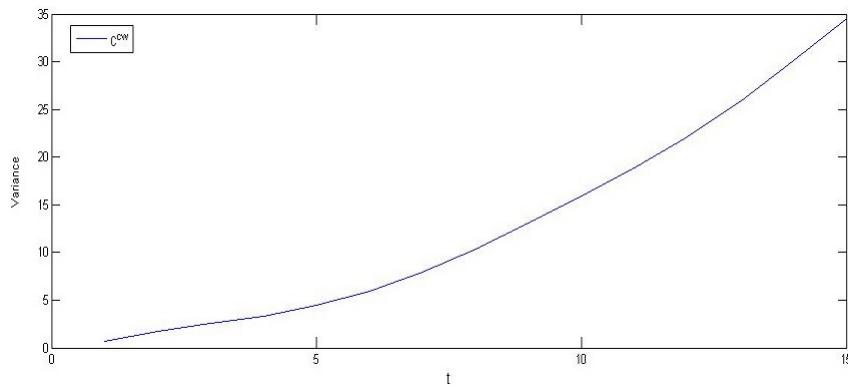
[a]



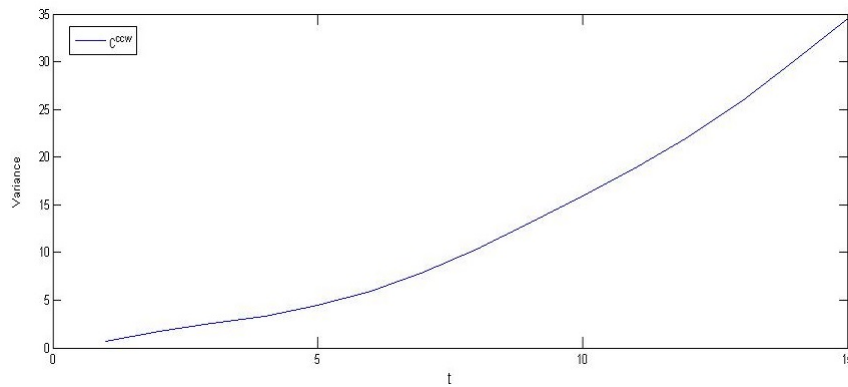
[b]

شکل ۲.۴: توزیع احتمال بدست آمده بعد از ۳۰ گام (a) ولگشت کوانتومی پادساعتگرد و (b) ولگشت

کوانتومی ساعتگرد، با حالت اولیه ۱۰.۴.



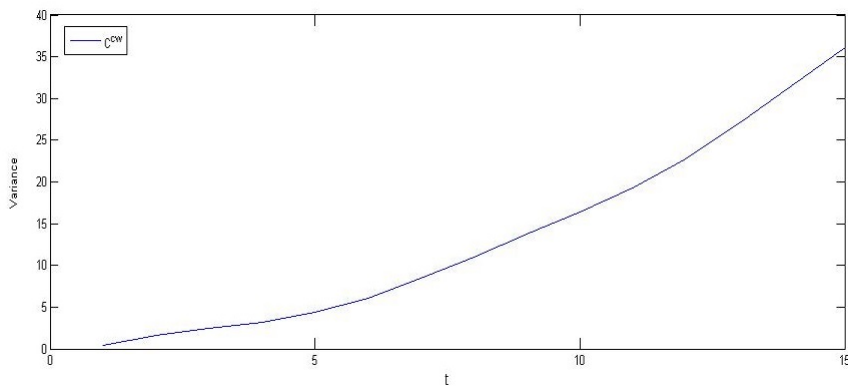
[a]



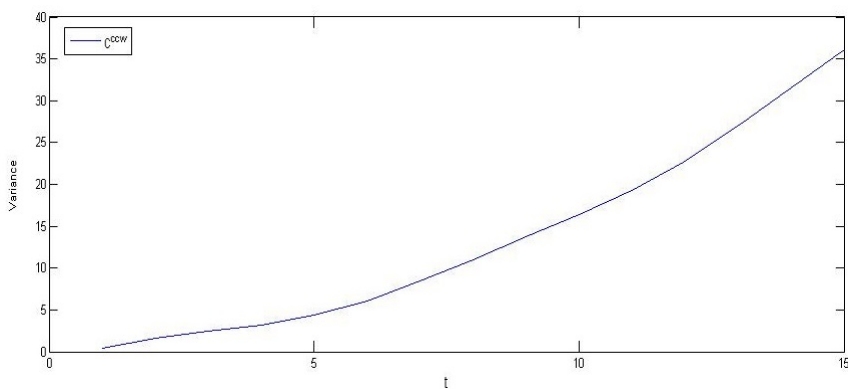
[b]

شکل ۳.۴: نمودار واریانس بر حسب زمان برای (a) ولگشت کوانتومی ساعتگرد و (b) ولگشت کوانتومی

پادساعتگرد با حالت اولیه ۱۱.۴.

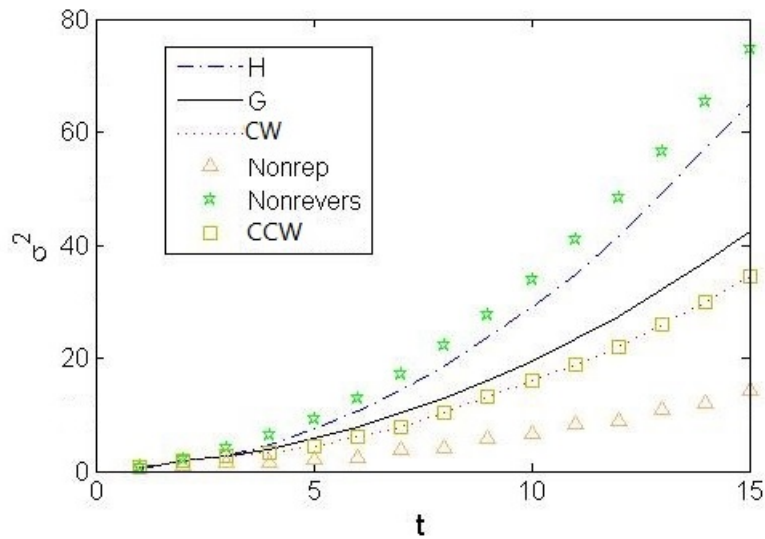


[a]

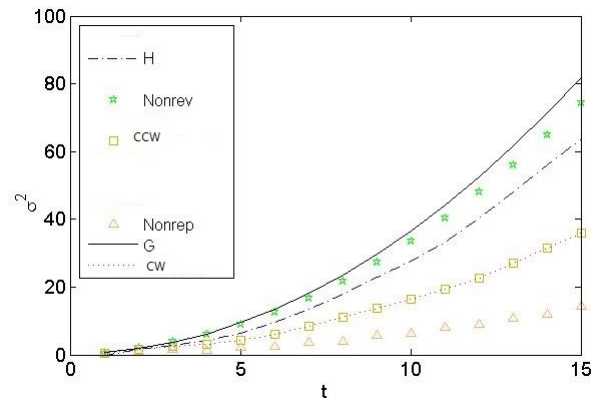


[b]

شکل ۴.۴: نمودار واریانس بر حسب زمان برای a (ولگشت کوانتومی ساعتگرد و b) ولگشت کوانتومی پادساعتگرد با حالت اولیه ۱۰.۴.



شکل ۵.۴: واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، ساعتگرد (نقطه)، تکرار نشدنی (مثلث)، برگشت ناپذیر (ستاره)، پادساعتگرد (مربع) با حالت اولیه ۱۱.۴.



شکل ۶.۴: واریانس بر حسب زمان برای H (نقطه-خط)، G (پیوسته)، ساعتگرد (نقطه)، تکرار نشدنی (مثلث)، برگشت ناپذیر (ستاره)، پادساعتگرد (مربع) با حالت اولیه ۱۰.۴.

با توجه به نتایج شبیه‌سازی، و نمودارهای ۵.۴ و ۶.۴ چند نتیجه مهم قابل ذکر است :

۱. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که واریانس برای دو ولگشت ساعتگرد و پادساعتگرد یکسان

است.

۲. واریانس در ولگشت‌های دو بعدی ساعتگرد و پاد ساعتگرد از ولگشت تکرار نشدنی بزرگتر و از ولگشت برگشت ناپذیر کوچکتر می‌باشد.

۳. تفاوت واریانس برای حالت‌های اولیه متفاوت در ولگشت‌های ساعتگرد و پاد ساعتگرد کمتر از بقیه انواع ولگشت‌هاست، به عبارتی دیگر حساسیت واریانس به حالت اولیه در مورد ولگشت‌های ساعتگرد و پاد ساعتگرد کمتر از بقیه ولگشت‌ها است.

۵.۰.۴ تبدیل فوریه برای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد

عملگر تغییر مکان ۱.۴ در پایه‌های فوریه برای ولگشت کوانتومی دو بعدی به صورت زیر بدست می‌آید [۱۹]

$$S = \begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_x} \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

بنابراین طبق رابطه عملگر تحول برای ولگشت کوانتومی که به شکل $U = S(C \otimes I)$ می‌باشد، عملگر تحول ولگشت کوانتومی پاد ساعتگرد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U(k_x, k_y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & -e^{ik_x} & -e^{ik_x} \\ e^{ik_y} & -e^{ik_y} & e^{ik_y} & 0 \\ 0 & -e^{-ik_y} & -e^{-ik_y} & e^{-ik_y} \\ e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & 0 & e^{-ik_x} \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

برای محاسبه‌ی حالت کلی ولگشت باید $\hat{\psi}_t = U^t(k_x, k_y) \psi$ را محاسبه کرد که برای این کار محاسبه ویژه مقادیر U ضروری است. معادله مشخصه ولگشت پادساعتگرد از معادله ۱۳.۴ به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ikx} \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iky} \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{iky} \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{ikx} \sqrt{3} \right) \lambda^3 \\ & + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-ikx} e^{ikx} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ikx} e^{-iky} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ikx} e^{iky} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-iky} e^{iky} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iky} e^{ikx} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{iky} e^{ikx} \right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ikx} \sqrt{3} e^{-iky} e^{ikx} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ikx} \sqrt{3} e^{iky} e^{ikx} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ikx} \sqrt{3} e^{-iky} e^{iky} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iky} \sqrt{3} e^{iky} e^{ikx} \right) \lambda \\ & + e^{-ikx} e^{-iky} e^{iky} e^{ikx} = 0 \end{aligned} \quad (14.4)$$

با ساده کردن رابطه ۱۴.۴ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \cos(k_x) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(k_y) \right) \lambda^3 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(k_x + k_y) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(k_x - k_y) + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \lambda^2 \\ & + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \cos(k_x) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(k_y) \right) \lambda + 1 = 0 \end{aligned} \quad (15.4)$$

معادله مشخصه کلی این ولگشت، شبیه ولگشت برگشت ناپذیر به فرم زیر خواهد بود.

$$\lambda^4 + \Delta \lambda^3 + \Omega \lambda^2 + \Delta^* \lambda + 1 = 0 \quad (16.4)$$

که در این رابطه

$$\Delta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(kx) \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(ky) \sqrt{3} \quad (17.4)$$

و

$$\Omega = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(kx + ky) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(kx - ky) + \frac{4}{\sqrt{3}} \quad (18.4)$$

می‌باشد، همچنین $\Delta = \Delta^*$ می‌باشد. بنابراین معادله مشخصه، یک معادله شبه متقارن می‌شود [۲۷]. از طرفی چون پارامترها حقیقی فرض شده اند اگر λ یک جواب معادله باشد آنگاه λ^* نیز جواب معادله است و می‌توان جواب‌ها را به دو صورت زیر بنویسیم [۲۷].

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = e^{i\omega_1}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4^* = e^{i\omega_2} \quad (19.4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & -\frac{1}{\epsilon} \cos(k_y) \sqrt{3} + \frac{1}{\epsilon} \cos(k_x) \sqrt{3} + \frac{1}{\epsilon} \sqrt{3 \cos(k_y)^2 + 6 \cos(k_x) \cos(k_y) + 3 \cos(k_x)^2 + 6} \\ & \pm \frac{1}{\epsilon} (6 \cos(k_y)^2 - 2 \cos(k_y) \sqrt{3} \sqrt{3 \cos(k_y)^2 + 6 \cos(k_x) \cos(k_y) + 3 \cos(k_x)^2 + 6} \\ & + 6 \cos(k_x)^2 + 2 \cos(k_x) \sqrt{3} \sqrt{3 \cos(k_y)^2 + 6 \cos(k_x) \cos(k_y) + 3 \cos(k_x)^2 + 6} - 30)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (20.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{3,4} = & -\frac{1}{\epsilon} \cos(k_y) \sqrt{3} + \frac{1}{\epsilon} \cos(k_x) \sqrt{3} - \frac{1}{\epsilon} \sqrt{3 \cos(k_y)^2 + 6 \cos(k_x) \cos(k_y) + 3 \cos(k_x)^2 + 6} \\ & \pm \frac{1}{\epsilon} (6 \cos(k_y)^2 + 2 \cos(k_y) \sqrt{3} \sqrt{3 \cos(k_y)^2 + 6 \cos(k_x) \cos(k_y) + 3 \cos(k_x)^2 + 6} \\ & + 6 \cos(k_x)^2 - 2 \cos(k_x) \sqrt{3} \sqrt{3 \cos(k_y)^2 + 6 \cos(k_x) \cos(k_y) + 3 \cos(k_x)^2 + 6} - 30)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (21.4)$$

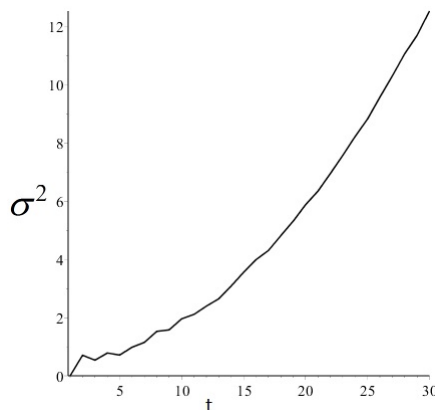
بنابراین روش تحلیلی که برای ولگشت کوانتومی تکرارنشده بکار برده شده نمی‌تواند برای این ولگشت دنبال شود و باید بصورت عددی بررسی شود. پارامتر واریانس بر حسب زمان را به صورت عددی برای این ولگشت بررسی کرده ایم و به ازای حالات اولیه

$$|\psi(\circ)\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \quad (22.4)$$

و حالت پایه های بل

$$|\psi(\circ)\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ -1 \\ \circ \end{pmatrix} \right. \quad (23.4)$$

که هر حالت اولیه ای دیگر از روی این پایه‌ها ساخته می‌شود، واریانس را شبیه سازی کرده‌ایم و مشاهده شده است که به ازای همه حالات اولیه مقدار یکسانی دارد و نتایج شبیه‌سازی در شکل ۷.۴ برای ولگشت پادساعتگرد رسم شده است و برای این ولگشت پارامتر واریانس بر حسب زمان مستقل از شرایط اولیه می‌باشد.



شکل ۷.۴: نمودار واریانس برای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد با حالات اولیه ۲۲.۴ و ۲۳.۴

با توجه به عملگرهای سکه برای ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پادساعتگرد مشاهده می‌کنیم که دترمینان و تریس این دو عملگر با هم برابر است و می‌توان این دو عملگر را با استفاده از تبدیلات یکانی از روی یکدیگر بسازیم. بنابراین معادله مشخصه کلی این ولگشت شبیه ولگشت پادساعتگرد به فرم زیر می‌باشد

$$\lambda^4 + \Delta\lambda^3 + \Omega\lambda^2 + \Delta^*\lambda + 1 = 0 \quad (24.4)$$

و باز هم معادله مشخصه، یک معادله شبه متقارن می‌شود [۲۷] و جواب‌های آن شبیه ولگشت پادساعتگرد هستند ولی ویژه‌کت‌های آن با ولگشت پادساعتگرد متفاوت است و به همین دلیل تابع توزیع احتمال آن‌ها با هم فرق می‌کند. بنابراین برای این ولگشت نیز با توجه به نتایج شبیه‌سازی پارامتر واریانس بر حسب زمان مستقل از شرایط اولیه است. که این موضوع در تضاد با سکه‌هایی است که در فصل ۲ در مورد آن‌ها بحث شده است.

در این قسمت ویژه‌کتهای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد را بدست خواهیم آورد که می‌تواند برای بررسی‌های تحلیلی، محاسبه درهم‌تنیدگی بین سکه و مکان، محاسبات عددی در حدود بالا و ... مورد استفاده قرار گیرد.

برای نمونه، ویژه‌کت متناظر با $\lambda_1 = e^{i\omega_1}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & -e^{ik_x} & -e^{ik_x} \\ e^{ik_y} & -e^{ik_y} & e^{ik_y} & 0 \\ 0 & -e^{-ik_y} & -e^{-ik_y} & e^{-ik_y} \\ e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & 0 & e^{-ik_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = e^{i\omega_1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (25.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{ik_x} (a - c - d) = e^{i\omega_1} a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{ik_y} (a - b + c) = e^{i\omega_1} b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ik_y} (-b - c + d) = e^{i\omega_1} c \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ik_x} (a + b + d) = e^{i\omega_1} d \end{cases} \quad (26.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c - d = \sqrt{3} e^{-ik_x} e^{i\omega_1} a \\ a - b + c = \sqrt{3} e^{-ik_y} e^{i\omega_1} b \\ -b - c + d = \sqrt{3} e^{ik_y} e^{i\omega_1} c \\ a + b + d = \sqrt{3} e^{ik_x} e^{i\omega_1} d \end{cases} \quad (27.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(1 - \sqrt{3} e^{i(\omega_1 - k_x)}) - c - d = 0, (1) \\ a - b(1 + \sqrt{3} e^{i(\omega_1 - k_y)}) + c = 0, (2) \\ -b - c(1 + \sqrt{3} e^{i(\omega_1 + k_y)}) + d = 0, (3) \\ a + b + d(1 - \sqrt{3} e^{i(\omega_1 + k_x)}) = 0, (4) \end{cases} \quad (28.4)$$

از جمع دو معادله (۱) و (۳)، در رابطه ۲۸.۴ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Rightarrow a(1 - \sqrt{3} e^{i(\omega_1 - k_x)}) - b - c(2 + \sqrt{3} e^{i(\omega_1 + k_y)}) = 0 \quad (29.4)$$

با ضرب $(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)})$ در معادله (۲) رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\Rightarrow a(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) - b(۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_y)})(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) + c(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) = ۰ \quad (۳۰.۴)$$

با جمع دو رابطه ۲۹.۴ و ۳۰.۴ داریم:

$$\Rightarrow a[(۱ - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)}) + (۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)})] - b[۱ + (۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_y)})(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)})] = ۰ \quad (۳۱.۴)$$

در این صورت ضرایب a و b به شکل زیر می‌باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ + (۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_y)})(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) \\ b = (۱ - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)}) + (۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) \end{cases} \quad (۳۲.۴)$$

رابطه (۴) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a + b = -d(۱ - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_x)}) = d(-۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_x)}) \quad (۳۳.۴)$$

و با استفاده از a ، b و رابطه ۳۳.۴، d به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Rightarrow d = \frac{a + b}{(-۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_x)})} \quad (۳۴.۴)$$

$$= \frac{۴ + (۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_y)})(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)} + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}}{(-۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_x)})}$$

و در آخر با استفاده از رابطه (۱)، c بدست می‌آید:

$$a(۱ - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)}) - c - d = ۰ \Rightarrow c = a(۱ - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)}) - d \quad (۳۵.۴)$$

$$\Rightarrow c = (۱ + (۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_y)})(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}))(۱ - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)}) - \frac{۴ + (۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_y)})(۲ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}) - \sqrt{۳}e^{i(\omega_1-k_x)} + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_y)}}{(-۱ + \sqrt{۳}e^{i(\omega_1+k_x)})}$$

و در پایان ویژهکت متناظر با ویژه مقدار $\lambda_1 = e^{i\omega_1}$ به صورت زیر می‌شود:

$$|\omega_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (۳۶.۴)$$

که در اینجا $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\alpha = (-1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_x)})(1 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)}))$$

$$\beta = (-1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_x)})(1 - \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_x)}) + (2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)})$$

$$\begin{aligned} \gamma = & (-1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_x)})((1 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)}))(1 - \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_x)})) \\ & - 4 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)}) - \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_x)} + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)} \end{aligned}$$

$$\lambda = 4 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)}) - \sqrt{3}e^{i(\omega_1-k_x)} + \sqrt{3}e^{i(\omega_1+k_y)}$$

در نتیجه شکل کلی ویژهکتها برای این عملگر به صورت زیر می‌باشد:

(۳۸.۴)

$$\alpha = (-1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_x)})(1 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)}))$$

$$\beta = (-1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_x)})(1 - \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_x)}) + (2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)})$$

$$\gamma = (-1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_x)})((1 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)}))(1 - \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_x)})) \\ - 4 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)}) - \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_x)} + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)}$$

$$\lambda = 4 + (1 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_y)})(2 + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)}) - \sqrt{3}e^{i(\omega_i-k_x)} + \sqrt{3}e^{i(\omega_i+k_y)}$$

بنابراین حالت کلی ولگشت بعد از t گام را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$|\hat{\psi}^t(k_x, k_y)\rangle = U^t(k_x, k_y)|\psi_0\rangle = \sum_{j=1}^4 \lambda_j^t \langle v_j | \psi_0 \rangle |v_j\rangle \quad (39.4)$$

ویژه مقادیر، ویژه‌کت‌ها و حالت کلی برای ولگشت کوانتومی پادساعتگرد را بدست آوردیم که در صورت لزوم می‌تواند در کارهای آینده مورد استفاده قرار گیرند.

۱.۴ نتیجه‌گیری

با توجه با نتایج شبیه‌سازی انحراف معیار بر حسب زمان برای ابعاد ۱، ۲، ۳ با استفاده از سکه گراور و فوریه مشاهده می‌کنیم که با افزایش بعد، انحراف معیار نیز به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند و علاوه بر آن شیب نمودار انحراف معیار بر حسب زمان نیز افزایش پیدا می‌کند. و عملگرای سکه که معرفی شده‌اند مستقل از هم هستند و برای هر کدام از آن‌ها نتایج متفاوتی رخ می‌دهد.

در ولگشت کوانتومی دو بعدی به طور معمول ولگشت در هر گام امکان رفتن به تمام همسایه‌های مجاور خود را دارد ولی انواع متفاوتی از ولگشت‌های کوانتومی نیز وجود دارند که می‌توان بر روی آن‌ها قائل شویم که علاوه بر دو ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پادساعتگرد که اخیراً معرفی شده‌اند و نشان داده شده که خواص متفاوتی را از خود نشان می‌دهند دو نوع دیگر از ولگشت‌های کوانتومی را نیز معرفی کردیم که ولگشت در هر گام به سمت چپ و یا راست خود نمی‌رفت که آن‌ها را به ترتیب ولگشت کوانتومی ساعتگرد و پادساعتگرد نامیدیم. عملگرهای سکه ولگشت ساعتگرد و پادساعتگرد را می‌توان با تبدیلات یکانی از هم بسازیم به همین دلیل خواص آن‌ها مثل هم می‌باشد.

برای این دو ولگشت دترمینان، رد و ویژه‌مقادیر آن‌ها با هم برابر هستند ولی نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تابع توزیع متفاوتی دارند و واریانس برای این دو نوع ولگشت به ازای حالات اولیه مختلف، یکسان است و اگرچه تغییر در حالت اولیه، واریانس را در همه انواع ولگشت‌ها تغییر می‌دهد ولی حساسیت واریانس به تغییر حالت اولیه در این دو نوع ولگشت کمتر است. واریانس این دو ولگشت از ولگشت کوانتومی برگشت‌ناپذیر کمتر ولی از ولگشت تکرارنشده بزرگتر است.

معادله مشخصه کلی که برای این دو ولگشت بدست می‌آید بصورت یک معادله درجه چهار است که یک معادله شبه متقارن می‌باشد. با توجه به ویژه‌مقادیر بدست آمده برای این دو ولگشت نمی‌توان آن‌ها را بصورت تحلیلی حل کرد به همین دلیل بصورت عددی آن‌ها را مورد بررسی قرار دادیم و به صورت عددی مشخص شده است که واریانس بر حسب زمان برای این دو ولگشت مستقل از شرایط اولیه است که این خواص با سکه‌هایی که قبلاً مطالعه شدند در تضاد است.

مراجع

- [1] Manin, Yuri. Computable and Uncomputable. Sovetskoye Radio (Moscow), 1980.
- [2] Feynman, Richard. Simulating physics with computers. Int. J. Theor. Phys 21:467, 1982.
- [3] D.Deutsch. Quantum theory, The Church-Turing principle, and the universal quantum computer. Proceeding the Royal Society of London, Series A, 1985.
- [4] D.Deutsch and R.Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. Proceeding the Royal Society of London, Mathematical and Physical Sciences, 439(1907): 553-558, 1992.
- [5] P.shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. Proceeding of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, Edited by S.Goldwasser, (Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press), 1994.
- [6] P.shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on quantum computer. SIAM J. Computing, 26:1484-1509, 1997.
- [7] L.K.Grover . Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. Phys. Rev. Lett., 79:325 . 1997
- [8] S.P.Meyn and R.L.Tweedie. Markov chains and stochastic stability.
- [9] Farhi, Edward and Gutmann, Sam. Quantum Computation and Decision Trees. 1998.

-
- [10] J. Watrous. Quantum simulation of classical random walks and undirected graph connectivity. *Journal of Computer and System Sciences*, 62:376-391, 2001.
- [11] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous. One-dimensional quantum walks. In *Proceedings of the 33th ACM Symposium on The Theory of Computation (STOC'01)* ACM, 2001.
- [12] Seth S. Cottrell. "Finding Structural Anomalies in Star Graphs Using Quantum Walks". *Phys. Rev. Lett.* 112, 030501 – Published 23 January 2014.
- [13] Neil Shenvi, Julia Kempe, and K. Birgitta Whaley. "A Quantum Random Walk Search Algorithm". *Phys. Rev. A* 67, 052307 – Published 23 May 2003.
- [14] Salvador Elias Venegas-Andraca. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*. Quantum Information Processing. October 2012.
- [15] Ashwin. Nayak. and Ashvin, Vishwanath. Quantum Walk on the Line. arXiv:quant-ph/0010117. Submitted on 31 Oct 2000.
- [16] Andrew M. Childs. Edward. Farhi. and Sam. Gutmann. An example of the difference between quantum and classical random walks. *Quantum Information Processing*, April 2002.
- [17] Portugal, Renato. *Quantum Walks and Search Algorithms*. Quantum Science and Technology, 2013.
- [18] A.C. Oliveira, R. Portugal and R. Donangelo. Decoherence in Two-Dimensional Quantum Walks. *Phys. Rev. A* 74, 12312. Published 18 July 2006.
- [19] A. Andris, E. Bach A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous. One-dimensional quantum walk. arxiv:quantph/101170.

-
- [20] D.Meyer. From quantum cellular automata to quantum lattice gases. Statistical Physics. 1996.
- [21] D. ben-Avraham, E.m. Bolltand and C. tomon. One-Dimensional Continuous time Quantum Walks. Quantum information Processing. October 2004.
- [22] J.Kempe. Quantum random walk- an introductory overview. Contemporary Physics, 2003.
- [23] Ambainis, Andris, Eric, Bach, Ashwin, Nayak, Ashvin, Vishwanath, and John, Watrous. One-Dimensional Quantum Walks.
- [24] T. D. Mackay, S. D. Bartlett, L. T. Stephenson, and B. C. Sanders. Quantum walks in higher dimensions. Journal of Physics A: Mathematical and General. Published 15 March 2002.
- [25] Ashwin. Nayak, Ashvin. Vishwanath. Quantum Walk on the Line. arXiv:quant-ph/0010117v1 31 Oct 2000
- [26] Kyohei. Watabe, Naoki. Kobayashi, and Makoto. Katori. Limit distributions of two-dimensional quantum walks. Phys. Rev. A 77, 062331 – Published 19 June 2008.
- [27] T. J. Proctor, K. E. Barr, B. Hanson, S. Martiel, V. Pavlović, A. Bullivant and V. M. Kendon. Nonreversal and nonrepeating quantum walks. PHYSICAL REVIEW A 89, 042332, (2014).
- [28] G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo, Phys.Rev. E 69, 026119 (2004).

Aabstract

In this thesis, first we have introduced classical random walk on a line and we have calculated probability distribution and standard deviation of it's distribution as well. Then the quantum walk on a line introduced and it's variance and probability distribution compared with classical random walk.

In the next chapter, we have studied two-dimensional quantum walk and we have introduced three famous two-dimensional quantum coins. The probability distribution, standard deviation and variance of these famous coins have been compared by numerical simulation.

Furthermore, we investigate properties of two kinds of two-dimensional quantum walk (nonreversal and nonrepeating quantum walk) where have been introduced recently. Beside the study of variance and the probability distribution for these two new kinds of two-dimensional quantum walk, we analytically show that the joint moments is independent from the initial states for nonrepeating quantum walk.

At the end, we have presented our model of two-dimensional quantum walk (clockwise and counterclockwise quantum walk) in such away that the walker does not turn to the left or right in clockwise and counterclockwise quantum walk respectively. The probability distribution and variance as well as joint moment's for these new quantum walks have been studied and compared with other two-dimensional quantum walks.

Keywords:

Classic random walk, Quantum walk, Clockwise quantum walk, Counterclockwise quantum walk, Joint moment



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics

**Study of coin operator role in higher
dimensional quantum walk**

Teymoor Ándik

Supervisor

Dr. Mostafa Annabestani

Feb 2016