بسم ا... الرحمن الرحيم

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

گزارش پـایـــانی

طـــرح پژوهشـــی

میدان هسته‌ای به کمک مزونهای سبک

مجری طرح

علی اکبر رجبی

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجـام شـده اسـت و تـاریخ هـای تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۸۷/۱۱/۲۸ و ۸۸/٤/۲۱ می‌باشد.

کد طرح ۲٤۰۲۱

تیر ماه ۱۳۸۸

شناسنامه طرح پژوهشی

این طرح با مشخصات ذیل با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است.

الف) عنوان طرح:

۱- فارسی: میدان هسته ای به کمک مزونهای سبک

۲- لاتین: The Nuclear Field with Light Mesons

۳- کد طرح: ۲٤۰۲۱

ب) نام مجری: علی اکبر رجبی

عضو هیات علمی دانشکده: فیزیک

ج) همکاران:

- مصوب شورای پژوهشی در جلسه شماره ۱۷۸ مورخ ۱۳۸۷/۱۱/۲۸
- تایید اختتام در شورای پژوهشی در جلسه شماره ۱۸٤ مورخ ۱۳۸۸/٤/۲۱
- **مدت زمان اجرا** ٤ ماه
- **کل مبلغ اعتبار طرح** ۳۵۵۰۰۰۰۰ ریال

مقاله/ مقالات مستخرج از طرح با عناوین:(که پیوست گزارش می باشد)

1- **The Nuclear Field Produced by Relativistic Harmonic Oscillator Light Mesons**

نام ونام خانوادگی مجری طرح	**امضاء**	**مدیر امور پژوهشی**	**امضاء**

چکیده

برهمکنش هسته‌ای قوی به بار الکتریکی بستگی ندارد. طبیعی است که فرض کنیم برهمکنش هسته‌ای مربوط به حضور بار نوکلئون بخصوصی g در بین نوکلئونها و نوسانگر هماهنگ نمی‌باشد. برای آنکه رفتار برهمکنش هسته‌ای را به‌درستی بررسی کنیم، تبادل ذرات با اسپین صفر را درنظر می‌گیریم. برهمکنش ذرات با اسپین صفر، مثل میدان مزون π با نوکلئون ازطریق پتانسیل نوسانگر هماهنگ و معادلهٔ فوک کلین گوردون[1] صورت می‌گیرد. در این مدل برهمکنش هسته‌ای قوی را بررسی می‌کنیم. درنتیجه پتانسیل نوسانگر هماهنگ پتانسیل مقید است که سبب می‌شود هر نوکلئون در احاطهٔ ابری از مزونها قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی- نوسانگر هماهنگ، مزون π ، معادله کلاین-گوردن، نیروی هسته‌ای قوی، نوکلئون.

[1] Kelein-Gordon Fok equation

فهرست مطالب

مقدمه:

در متون فیزیک هسته‌ای مقدماتی تصویری نیمه کمی از برهمکنشهای نوکلئون نوکلئون می‌آموزیم که از جمع بستن روی تبادل مزونهای سبک $\pi, \rho, \omega, \eta, \sigma$ بین نوکئونها به‌دست می‌آید. هر مزون دارای پتانسیل جفت‌شدگی و پتانسیل یوکاوای مخصوص به‌خود است، اما در این مقاله ما پتانسیل برهمکنش‌کنندهٔ را معرفی می‌کنیم. گسترهٔ استفاده از پتانسیل (H.O.) بسیار وسیع می‌باشد، مثلاً از ارتعاشات مولکولی گرفته تا رفتار میدانهای کوانتیزه و طیف دورانی ارتعاشی مولکولهای دو اتمی، همه با استفاده از پتانسیل نوسانگر هماهنگ توصیف می‌شوند [۱]. مدلی متشکل از دستگاه n ذره‌ای مقید با پتانسیل نوسانگر هماهنگ نیز مورد توجه می‌باشد [۲]. از پتانسیل نوسانگر هماهنگ می‌توان برای توصیف قید فضایی کوانتاها، همانند آثار جاسازی ذره در نانوساختارها، و یا همانند آثار هلیوم مایع استفاده کرد. در مراجع [۳ و ٤] می‌توان بحث مفصلی دربارهٔ این موضوعات یافت. فوک در سال ۱۹۲۸، معادلهٔ شرودینگر برای الکترون در میدان مغناطیسی یکنواخت را که با پتانسیل نوسانگر هماهنگ مقید شده باشد، حل کرد [٥] و دو سال پس از آن داروین هم دوباره این کار را انجام داد [٦]. به‌تازگی مطالعات بسیاری بر روی این موضوع با استفاده از نوسانگر هماهنگ نانسبیتی، که درک آن ساده می‌باشد، انجام شده است. تعمیم نسبیتی نوسانگر هماهنگ یکتا نمی‌باشد. مسلماً این تعمیم منحصربفرد نیست. به‌ویژه آنکه مدل تعمیم‌یافته وابسته به تعریف نوسانگر هماهنگ است. در اوایل دههٔ سی میلادی نیکولسکی[۲] [۷] و پوستپسکا[۳] [۸] معادلهٔ دیراک برای الکترون در میدان پتانسیل درجه دوم را مورد بررسی قرار دادند. مسألهٔ ویژه‌مقداری، تبدیل به معادله‌ای درجه دوم بدون جوابهای قیدی می‌شود. ترازهای گسستهٔ انرژی N.R.H.O. متناظر با ترازهای تشدیدی این نوسانگر هستند. به‌تازگی دستگاه نسبیتی با تعداد محدودی حالت مقید هم بررسی شده است که فاصلهٔ ترازهای انرژی آن از هم مساوی می‌باشد [۹]. چنین دستگاهی با استفاه از روش پراکندگی ایجاد می‌شود [۹ و ۱۰]. رویه دیگری که منجر به نوسانگر دیراکی می‌شود براین پایه استوار است که معادلهٔ دیراک به‌گونه‌ای نوشته شود تا در حد نانسبیتی منجر به معادلهٔ شرودینگر شود [۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ١٤ و ۱۵]. در این کار پژوهشی مسأله را به نوسانگر هماهنگ نسبیتی با دخالت میدان مزونهای هسته‌ای تعمیم می‌دهم. سپس سعی می‌کنیم برهمکنش هسته‌ای را مشابه برهمکنش میدان الکتریکی توصیف کنیم. سعی می‌شود که از تفسیر معادلهٔ کلین گوردون فوک منصرف شویم. اسپین مزونها مانند ذرهٔ π صفر می‌باشد و در نتیجه می‌توان از معادلهٔ کلین گوردون فوک برای معادلهٔ تابع موج ذره استفاده کرد اما به‌جای آن پتانسیل نوسانگر هماهنگ را در حکم پتانسیل هسته‌ای درنظر می‌گیریم. به‌گونه‌ای که فرض می‌کنیم این پتانسیل از نوکلئون و تبادل مزونهای مجازی با اسپین صفر ایجاد شده باشد. همانگونه که فوتونها را ذرات کوانتمی متناظر با میدان الکترومغناطیسی

[۲] Nikolsky

[۳] Postepska

(E.M.F.) درنظرمی‌گیریم. این ذرات متناظر با مزونهای میدان هسته‌ای هستند. درنتیجه تبادل مزونها و تبادل فوتونها را به‌ترتیب منبع برهمکنش نوکلئون و برهمکنش الکترومغناطیسی درنظر می‌گیریم. می‌توانیم معادله را برای پتانسیل میدان هسته‌ای بنویسیم.

فصل اول

۱- معادله موج نسبیتی برای یک ذره با اسپین صفر

در بررسی ذراتی که با سرعتی کم نسبت به سرعت نور حرکت می‌کنند، برای بدست آوردن معادلهٔ شرودینگر، هامیلتونی غیر نسبیتی یک ذره در میدان داریم:

$$H = \frac{P^2}{2m} + U(r) \quad (۱)$$

و اپراتورهای مرتبط را جایگزین کمیت‌ها کردیم. به منظور بدست آوردن تئوری نسبیتی، به همان شیوه عمل می‌کنیم. به عبارت دیگر باید تابع موج را برای معرفی هامیلتونی نسبیتی بدست آوریم.

فرض می‌کنیم که ذره در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی حرکت می‌کند، بدین ترتیب هامیلتونین با جایگزین کردن کمیتها به وسیلهٔ اپراتورها($H \to i\hbar\left(\partial/\partial t\right)$ ، $P \to -i\hbar\nabla$) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2 \psi = c^2\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)^2 \psi + m^2c^4\psi \quad (۲)$$

معادلهٔ فوق به معادلهٔ کلاین- گوردن- فاک معروف است. تغییر ناپذیری نسبیتی این معادله بدیهی است. معادلهٔ کلاین- گوردن- فاک یک تابع موج درجه دوم است. برای آن که هامیلتونین نسبیتی به سمت محدودهٔ مکانیک کلاسیکی میل کند، طبیعی است که فرض کنیم برای $c \to \infty$، معادلهٔ کلاین- گوردن- فاک به معادلهٔ شرودینگر میل می‌کند. در ادامه به اثبات این موضوع خواهیم پرداخت. از آنجا که انرژی‌های نقطه صفر در تئوری غیرنسبیتی و تئوری نسبیتی با mc^2 اختلاف دارند، حاصل تبدیل تابع موج ψ توسط ابزار نسبیتی زیر مناسب‌تر است:

$$\psi(x,t) = \psi'(x,t)e^{-imc^2t/\hbar} \quad (۳)$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادله ۲ و محاسبه مشتق نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$2i\hbar mc^2\frac{\partial\psi'}{\partial t} - \hbar^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial t^2} - 2e\varphi\left[mc^2\psi' + i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right] + e^2\varphi^2\psi' = c^2\left(\hat{P} - \frac{e}{c}A\right)^2\psi' \quad (٤)$$

فقط عبارت‌های متناسب با c^2 را در نظر گرفته و از سایر جملات چشم‌پوشی می‌کنیم. با تقسیم دو طرف معادله بر $2mc^2$ ، معادله متداول شرودینگر بدست می‌آید:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{\left(\hat{P} - \frac{e}{c}A\right)^2}{2m} - \psi' + e\varphi\psi' \quad (۵)$$

بدین ترتیب نشان دادیم که معادله کلاین- گوردن- فاک در حد غیرنسبیتی به معادلهٔ شرودینگر میل می‌کند. معادله ۲ همانند معادله شرودینگر پیشرفت یک فرآیند را در غالب زمان تعریف می‌کند. حالت یک ذره مانند قبل با یک تابع موج مشخص می‌شود.این تابع به مختصات x ،z،y و t بستگی دارد و دارای متغیرهای اسپین

نمی‌باشد. بنابراین مشخص است که معادله کلاین- گوردن- فاک رفتار یک ذره با اسپین صفر را تعریف می‌کند.به منظور اینکه این معادله رفتار ذراتی با اسپینی غیر صفر را نیز توصیف کند باید به نوعی اصلاح شود. از آنجا که معادله کلاین- گوردن- فاک به طور نسبیتی ثابت است، تابع موج می‌تواند فقط در یک فاکتور فاز ثابت مشخص در تبدیلات لورنتس ضرب شود. با در نظر گرفتن نرمالیزاسیون نتیجه می‌گیریم که این فاکتور باید مساوی ۱+ باشد. تحت انعکاس فضایی مختصات، تابع موج ψ می‌تواند در ۱+ یا ۱- ضرب شود. به عبارت دیگر تحت تأثیر اپراتور پاریته، تابع موج می‌تواند به دو شکل تغییر یابد:

$$\hat{I}\psi(x,y,z,t)=+\psi(-x,-y,-z,t) \quad (٦)$$

$$\hat{I}\psi(x,y,z,t)=-\psi(-x,-y,-z,t)$$

بنابراین تابع موج ψ می‌تواند یک کمیت اسکالر یا یک کمیت شبه اسکالر باشد.به این دلیل است که به معادله کلاین- گوردن- فاک اغلب یک معادله اسکالر گفته می‌شود. به عنوان مثالی کامل از معادله ۲، مورد ذره آزاد را بررسی خواهیم کرد. بنابراین معادله کلاین- گوردن- فاک به صورت زیر خواهد بود:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-c^2\hbar^2\nabla^2\psi+m^2c^4\psi \quad (٧)$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\psi=e^{-iEt/\hbar}\psi_1(x,y,z) \quad (٨)$$

بنابراین برای تابع ψ_1 داریم:

$$E^2\psi_1=-c^2\hbar^2\nabla^2\psi_1+m^2c^4\psi_1 \quad (٩)$$

با بازنویسی این معادله به صورت ذیل

$$\nabla^2\psi_1+\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^4}\psi_1=0 \quad (١٠)$$

به راحتی درمی‌یابیم که جواب آن یک موج تخت به شکل $\psi_1=ae^{i(p.r)/\hbar}$ خواهد بود. با جایگزینی این مقدار برای ψ_1 در معادله ۱۰ به رابطه نسبی بین انرژی E و اندازه حرکت p برای یک ذره آزاد می‌رسیم:

$$E^2=c^2p^2+m^2c^4 \quad (١١)$$

این رابطه شبیه شکل معمولی انرژی در نظریه نسبیت می‌باشد.

۱-۱- چگالی بار و جریان احتمال برای ذرات با اسپین صفر

در این بخش می‌خواهیم به محاسبه چگالی بار و جریان احنمال برای ذرات توصیف شده با معادله موج اسکالر (معادله ۲) بپردازیم. مشتق عبارت برای این کمیتها همانند روش مشابه برای معادله شرودینگر بدست می‌آید. ابتدا معادله کلاین- گوردن- فاک را در ψ^* ضرب می‌کنیم.

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\varphi\right)^2\psi-c^2\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}A\right)^2\psi-m^2c^4\psi=0 \quad (١٢)$$

مزدوج رابطه ۱۲ را در تابع موج ψ ضرب می‌کنیم. با کم کردن معادله دوم از معادله اول خواهیم داشت:

$$-\hbar^2\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right]-2i\hbar e\varphi\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi+\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)$$
$$-\hbar^2c^2\left[\psi\nabla^2\psi^*-\psi^*\nabla^2\psi\right]-i\hbar ec\left[\psi^*(\nabla A+A\nabla)\psi+\psi(\nabla A+A\nabla)\psi^*\right]=0 \quad (۱۳)$$

عبارت اول در کروشه فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi+\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right] \quad (۱۴)$$

کروشه دوم حاصل مشتق $\psi^*\psi$ بر حسب زمان می‌باشد. به کمک روابط برداری زیر:

$$\psi\nabla^2\psi^*=\psi\nabla.\nabla\psi^*=\nabla.(\psi\nabla\psi^*)-\nabla\psi\nabla\psi^* \quad (۱۵)$$

درمی‌یابیم که

$$\psi\nabla^2\psi^*-\psi^*\nabla^2\psi=\nabla.\left[\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right] \quad (۱۶)$$

نهایتاً عبارت آخر در کروشه رابطه ۱۳ به کمک رابطه زیر به شکل رابطه ۱۸ درمی‌آید.

$$\psi^*(\nabla A)\psi=\psi^*\nabla.(\psi A)=\nabla.(\psi^*\psi A)-\psi A\nabla\psi^* \quad (۱۷)$$

$$\psi^*(\nabla A+A\nabla)\psi+\psi(\nabla A+A\nabla)\psi^*=2\nabla.(\psi\psi^*A) \quad (۱۸)$$

با ضرب کردن تمامی جملات معادله ۱۳ در کمیت $e/2i\hbar mc^2$ و نیز استفاده از تبدیلات نشان داده شده، می‌توان معادله ۱۳ را به شکل زیر نوشت:

$$\nabla.j+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad (۱۹)$$

هرگاه چگالی بار ρ برابر با :

$$\rho=\frac{e\hbar}{2imc^2}\left[\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\frac{e^2}{mc^2}\psi\psi^*A \quad (۲۰)$$

باشد، برای چگالی جریان خواهیم داشت:

$$j=\frac{i\hbar e}{2m}\left[\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right]-\frac{e^2}{mc^2}\psi\psi^*A \quad (۲۱)$$

حال به بررسی مفهوم نتایج حاصل شده می‌پردازیم. در نظریه غیرنسبیتی چگالی بار به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x,y,z,t)=eW(x,y,z,t) \quad (۲۲)$$

که در آن $W(x,y,z,t)$ جریان احتمال می‌باشد، که ذاتاً یک کمیت مثبت است. روشن است که رابطه ۲۰ نمی‌تواند به چنین روشی تفسیر شود. عبارت وابسته به ρ با انتخاب مناسبی برای تابع ψ در لحظه اولیه زمان منفی می‌شود.

به عبارت دیگر تا زمانی که معادله کلاین- گوردن- فاک یک معادله درجه دوم بر حسب زمان باشد می‌توان مقادیر مطلق تابع ψ و مشتق آن بر حسب زمان را بدست آورد. با انتخاب مقادیر مختلف ψ و $\frac{\partial\psi}{\partial t}$، بدست آوردن مقادیر مثبت به درستی مقادیر منفی برای کمیت ρ امکان‌پذیر است.

مشتق تابع موج ψ بر حسب زمان طبق رابطه زیر کامل می‌شود:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi \quad (۲۳)$$

در این مورد عبارت چگالی بار ρ می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\rho=\frac{eE}{mc^2}\psi^*\psi-\frac{e^2\varphi}{mc^2}\psi^*\psi \quad (۲٤)$$

اگر ما انرژی حالت پایه را از انرژی E جدا کرده و قرار دهیم:

$$E=mc^2+E' \quad (۲۵)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\rho}{e}=\psi^*\psi\left[1+\frac{E'-e\varphi}{mc^2}\right] \quad (۲٦)$$

در حالتی که $E'-e\varphi \langle\langle mc^2$ باشد، عبارت درستی برای حد غیر نسبیتی کمیت $\frac{\rho}{e}$ خواهیم داشت. بنابراین مشاهده می‌شود که در مورد معادله کلاین- گوردن- فاک نمی‌توان یک جریان احتمال مثبت بدست آورد. این حقیقت برای مدت زمان زیادی مجهول بود زیرا این معادله برای موضوعات وقعی به کاربرده نشده بود.

۱-۲- مفهوم میدان نیروی هسته‌ای

معادله کلاین- گوردن- فاک تفسیر فیزیکی متفاوت، کامل و جدیدی ارائه داد. همانطور که می‌دانیم علاوه بر واکنشهای الکتریکی، شکل های دیگری از واکنشها نیز در طبیعت روی می‌دهند.

بویژه یک چنین واکنشی که به بار الکتریکی e بستگی ندارد، واکنش هسته‌ای قوی می‌باشد. به طور طبیعی می‌توان فرض کردکه واکنش هسته‌ای می‌تواند با وجود بار هسته ای خاصی، g ، در نوکلئونها ارتباط داشته باشد. بنابراین می‌توان واکنش هسته ای را در مقایسه با واکنش بارهای الکتریکی به کمک مفهوم میدان نیروی هسته ای توصیف نماید.

این میدان بوسیله یک پتانسیل مشابه با پتانسیل φ میدان الکتریکی توصیف می‌شود. تا کنون تلاشهای زیادی انجام شده است تا تفسیری از معادله کلاین- گوردن- فاک به عنوان معادله ای برای تابع موج یک ذره بدست آید. پیشنهاد شده بود که تابع موج ψ به صورت پتانسیل میدان هسته ای ایجاد شده توسط نوکلئونها بررسی شود. فوتونها که ذرات کوانتومی متناسب با میدان الکترومغناطیسی می‌باشند با میدان هسته ای مزونهای π نیز متناسبند. حال می‌خواهیم معادله ای برای پتانسیل میدان هسته ای بدست آوریم. در چنین معادله ای، معادله کلاین- گوردن- فاک را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\kappa^2\psi=0\ ,\quad \kappa^2=m^2c^2/\hbar^2 \quad (۲۷)$$

که در آن m جرم مزون π است. نظریه کوانتومی نیروهای هسته ای را در مورد مزونهایی که تحت تأثیر نیروی معینی برانگیختگی اولیه یافته اند، مانند فوتونها در نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی بررسی

نمی‌کنیم. با در نظر گرفتن جنبه کیفی موضوع استدلالمان را توسط مقایسه با نظریه کلاسیک میدان الکترواستاتیک انجام خواهیم داد. با فرض اینکه میدان هسته ای به زمان بستگی نداشته باشد برای پتانسیل ψ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla^2\psi - \kappa^2\psi = 0 \qquad (۲۸)$$

این معادله یک مقیاس معینی از معادله نیروی الکترواستاتیک می‌باشد. همانطور که می‌دانیم در حضور بارهای نقطه ای معادله میدان الکترواستاتیکی به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi e\delta(r) \qquad (۲۹)$$

از این رو در حضور یک نوکلئون در نقطه $r = 0$ واضح است که معادله ۲۸ به شکل زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2\psi - \kappa^2\psi = -4\pi g\delta(r) \qquad (۳۰)$$

برای حل این معادله می‌توان از فرض $\psi \to 0$ برای $r \to \infty$ استفاده نماییم. بنابراین تابع موج ψ را به شکل زیر پیدا کردیم:

$$\psi(r) = \int \psi_K e^{iK.r} dK \qquad (۳۱)$$

سپس با بکارگیری بسط تابع δ در انتگرال فوریه و معادله ۳۰ برای ψ_k خواهیم داشت:

$$\psi_K = \frac{g}{2\pi^2}\frac{1}{K^2+\kappa^2} \qquad (۳۲)$$

و برای میدان ψ رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\psi = \frac{g}{2\pi^2}\int \frac{e^{ikr}\cos\theta K^2 dK}{K^2+\kappa^2}\sin\theta\, d\theta d\varphi \qquad (۳۳)$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق بر روی زوایای φ و θ خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{2g}{\pi r}\int_0^\infty \frac{K\sin Kr}{K^2+\kappa^2}\, dK \qquad (۳٤)$$

در انتگرال گیری این عبارت راحتتر است که بازه انتگرال گیری روی k را از $-\infty$ تا $+\infty$ در نظر بگیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{g}{\pi r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K e^{iKr}}{K^2+\kappa^2}\, dK \qquad (۳۵)$$

این انتگرال براحتی با استفاده از قضیه باقیمانده به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K e^{iKr}}{K^2+\kappa^2}\, dK = 2\pi i \operatorname{Re}s(K = i\kappa) = \pi i e^{-\kappa r} \qquad (۳٦)$$

بنابراین ما رابطه زیر را برای پتانسیل میدان هسته ای بدست می آوریم:

$$\psi = \frac{g}{r}e^{-\kappa r} \qquad (۳۷)$$

که پتانسیل یوکاوا نامیده می‌شود.

رابطه ۳۷ نشان می‌دهد که پتانسیل نیروهای هسته ای با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. ناحیه موثر در هـر ψ غیر صفر است و اندازه $R \approx \kappa^{-1} = \frac{\hbar}{mc}$ را دارا می‌باشد. انـدازه ایـن ناحیـه از نظـر بزرگـی هـم مرتبـه بـا محدوده نیروهای هسته ای تعیین شده در آزمایشگاه می‌باشد.برای $m=0$ پتانسـیل ψ بـه پتانسـیل میـدان الکترواستاتیک تبدیل می‌شود:

$$\psi = \frac{g}{r} \qquad (۳۸)$$

از این رو کمیت g که در پتانسیل یوکاوا نقشی مشابه بار e در پتانسیل الکترواستاتیک ایفا می‌کند، می‌توانـد بار نوکلئون نامیده شود. در واقع واکنش بین نوکلئونها یک ویژگی استاتیکی نیست. برای یک رفتار صـحیح از فرآیندهای مبادله مزون π لازم است که میدان مـزون π، ψ، تعریـف شـده بـه وسـیله معادلـه کلایـن– گوردن– فاک کوانتیده شود. این بدان معنی است که تابع ψ و تابع الحاقی $\overset{+}{\psi}$ به عنوان عملگرهای مکانیک کوانتومی در فضای occupation numbers مطرح گردد. این عملگرهـا عناصـر ماتریسـی غیـر صـفر بـرای فرآیندهای جذب و انتشار مزون π دارند. واکنش بین نوکلئونها می‌بایست بوسیله روشـهای مقایسـه ای بـا موارد انجام شده در نظریه تابش محاسبه شود. ثابت بدون بعد واکـنش $\frac{e^2}{\hbar c}$ ترکیبـی از بـار ذره و ثابتهـای جهانی $\hbar$ و c ترسیم شده به صورت پارامتر کوچک می‌باشد. واکنش هسته ای قوی می‌تواند توسـط ثابـت واکنش $\frac{g^2}{\hbar c}$ می‌شود.

کمیت $\frac{g^2}{\hbar c}$ از مرتبه ۱۰ می‌باشد. از این رو تأثیر گذاری واکنش هسته ای از واکنش الکترومغناطیسی بیشتر از هزار مرتبه تجاوز می‌کند. واژه واکنش هسته ای قوی با این واقعیت مـرتبط مـی‌شـود. مقـدار بـزرگ ثابـت واکنش $\frac{g^2}{\hbar c}$ استفاده از نظریه اختلال را برای محاسبه واکنش های هسته ای غیر ممکن می‌کند.

این واقعیت تغییر در ماهیت فیزیکی واکنش در عبور از ذرات بار دار شده با نوکلئونها را انعکاس مـی‌دهـد. کوچک بودن ثابت واکنش الکترومغناطیسی بدین معنی اسـت کـه احتمـال انتشـار ذرات بـا $1 >> (e^2/\hbar c)^N$ متناسب است. به عبارتی دیگر احتمال انتشار یک فوتون (واقعی یا مجازی) بطور قابـل تـوجهی از انتشـار همزمان دو ، سه یا تعداد بیشتر بالاتر است. این وضعیت در موردی از واکنش های هسته ای قوی متفـاوت است. احتمال انتشار همزمان تعداد زیادی از مزونها از نظر بزرگی هم مرتبه بـا احتمـال انتشـار یـک مـزون است. از این رو هر نوکلئون می‌بایست به عنوان ذره محاط شده بوسیله ابری از مزونهـای π مجـازی مـورد توجه واقع شود. صحت و درستی چنین تصویری توسط پدیده حاصلضـرب مزونهـای π در برخوردهـای نوکلئونهای انرژی بالا تأیید می‌شود. از این رو تصویر واکنش مزون π نوکلئونها به نتیجه مطلوبی مـی‌رسـد تا پیچیده تر از واکنش فوتون بارها باشد.

فصل دوم

۲- میدان هسته‌ای ایجاد شده ناشی از مزونهای سبک نوسانگر هماهنگ نسبیتی

۲-۱- ذرات نسبیتی با اسپین صفر در میدان خارجی:

می‌توان پتانسیل تک‌ذره را در معادلهٔ (K.G.F) به‌روشهای مختلف تحت تبدیلات لورنتس تبدیل داد. ذره تحت پتانسیل اسکالر $U(x)$ و میدان خارجی با پتانسیل مدل ایستا $A^{\nu}=[V(x), A]$ توصیف می‌شود. در این مقاله، مؤلفهٔ صفر این پتانسیل $A^{\circ}\equiv V_{\circ}(x)$ همان مؤلفهٔ چهارم پتانسیل برداری می‌باشد. سه مؤلفهٔ باقیمانده A^{ν} بردار سه‌بعدی A را تشکیل می‌دهند که به آن پتانسیل برداری می‌گویند. این ذرات بدون اسپین می‌باشند و با معادلهٔ (K.G.F) توصیف می‌شوند. پتانسیل اسکالر $U(x)$ را با جرم m با هم درنظر می‌گیریم. مؤلفهٔ چهارم پتانسیل برداری $V_{\circ}(x)$ را هم با انرژی E درنظر می‌گیریم. پتانسیل برداری A هم با تکانه ρ در معادلهٔ (K.G.F) به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

از معادلهٔ زیر رابطهٔ صحیح برای انرژی تکانهٔ نسبیتی به‌دست می‌آید:

$$E^2=P^2c^2+m^2c^4 \tag{۱}$$

با قرار دادن:

$$E\to E-V_q(x) \quad , \quad P\to P-A \tag{۲}$$

$$\frac{1}{c^2}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-V\right]^2\psi(x,t)=\left\{\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-A(x,t)\right]^2+m^2\right\}\psi(x,t) \tag{۳}$$

معادلهٔ نسبیتی (K.G.F) در حد کلاسیک، $c\to\infty$، به معادلهٔ شرودینگر تبدیل می‌شود. از آنجا که انرژی نقاط صفر در نظریهٔ نانسبیتی و نظریهٔ نسبیتی به‌اندازهٔ mc^2 با هم متفاوت می‌باشند. مرسوم است که تبدیل تابع موج ψ با رابطهٔ زیر نشان داده شود:

$$\psi(x,t)=\psi_k(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}(E+mc^2)t} \tag{٤}$$

با جایگذاری معادلهٔ (٤) در (۳) و محاسبهٔ مشتقها نسبت به زمان، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$2i\hbar mc^2\frac{\partial\psi'}{\partial t}-\hbar^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial t^2}-2V\left[mc^2\psi'+i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right]+V^2\psi'=c^2(P-A)^2\psi' \tag{٥}$$

پس از تقسیم کردن هر دو طرف معادلهٔ (٥) را بر $2\,mc^2$ و جایگذاری $\psi'(x,t)=\psi_k(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ در معادلهٔ (K.G.F) (٥)، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\left[\frac{(p-A)^2}{2m}-\frac{1}{2mc^2}(V-E)^2+(V-E)\right]\psi_k(x)=\circ \tag{٦}$$

که c سرعت نور، E انرژی نسبت به mc^2 ، V مؤلفهٔ چهارم پتانسیل برداری، A هم پیش از این معرفی شده است. معادلهٔ (٥) کلاین گوردون فاک هم به معادلهٔ شرودینگر تبدیل می‌شود.

۲-۲- دو مجموعهٔ متفاوت برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ

با استفاده از معادلهٔ شرودینگر ذرهٔ بدون اسپینی را در قید پتانسیل نوسانگر هماهنگ توصیف می‌کنیم:

$$\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}k x^2\right)\psi_k(x)=0 \qquad (۷)$$

معادلهٔ (۷) متناظر با دو مجموعهٔ متفاوت از پتانسیل است:

الف) مجموعهٔ اول به شرح زیر است:

$$a: V=\frac{1}{2}k x^2=\frac{1}{2}m\omega^2 x^2,\ A=0 \qquad (۸)$$

مجموعهٔ دوم ابرپتانسیل است که متناظر با [۱٦] می‌باشد:

$$b: V=\frac{1}{2}m\omega^2 x^2,\ A=i\, m\omega x \qquad (۹)$$

ممکن است انتظار آن برود که پتانسیلهای a و b با تبدیل پیمانه‌ای به هم مربوط می‌شوند. هیچ یک از آنها متناظر با میدان الکترومغناطیسی خارجی واقعی نیستند. اما پتانسیل b مهمتر از پتانسیل a است.

پتانسیل a بیشتر مبتنی بر شهود فیزیک درونیست که دستگاه هوک را توصیف می‌کند. پتانسیل b که از آن در این مسأله استفاده می‌کنیم فواید بسیاری دارد که با بهره‌گیری از آن به درک ژرفتری نه‌تنها از خود نوسانگر هماهنگ بلکه از ساختار نظریهٔ کوانتمی میدان هم می‌رسیم. نظریهٔ کوانتمی میدان برای آن بکار می‌رود که حالت مقید بدون ذره را در پتانسیل (R.H.O.) وارد کنیم. مثلاً حالت مقید ذرهٔ π در هسته ویژگی مناسبی دارد که می‌توان ویژه‌تابع و ویژه‌مقدار حالت مقید ذرهٔ π در هسته را با استفاده از برهمکنش (R.H.O.) و پتانسیل b حل کرد. در موردی که هم با (R.H.O.) و هم با پتانسیل b توصیف می‌شود، می‌توان معادلات شرودینگر و (K.G.F.) را از معادلهٔ (٦) به‌صورت زیر نوشت:

$$\left[H-\frac{1}{2mc^2}(V-E)^2\right]\psi_k=(E-V)\psi_k \qquad (۱۰)$$

که همیلتونی H همانند معادلهٔ شرودینگر برای مسألهٔ (H.O.) می‌باشد:

$$H=\frac{1}{2m}(P-A)^2=\frac{1}{2m}(P-im\omega x)^{\dagger}(P-im\omega x)=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \qquad (۱۱)$$

بنابراین معادلهٔ (۱۰) را با $V=\frac{3}{2}\omega$ و H حاصل از معادلهٔ (۱۱) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left[\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi_k(x)=\left[E\left(1-\frac{3\omega}{2mc^2}+\frac{E}{2mc^2}\right)-\frac{2\omega}{2}\left(1-\frac{3\omega}{4mc^2}\right)\right]\psi_k=\varepsilon\psi_k \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ (K.G.F.) در (۱۰) همانند معادلهٔ شرودینگر برای (H.O.) سه‌بعدی می‌باشد. انرژی (H.O.) سه‌بعدی را می‌توان به‌صورت $\varepsilon_{nl}=\left(2n+l+\frac{3}{2}\right)\omega$ نوشت. با اندکی محاسبه معادلهٔ (۱۲) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\left[P^2c^2+m^2c^4+m^2c^2\omega^2x^2\right]\psi_k(x)=\left(E+mc^2-\frac{3}{2}\omega^2\right)\psi_k \qquad (۱۳)$$

اگر اثر نوسانگر هماهنگ را حذف کنیم، یعنی اگر $\omega = ۰$ قرار دهیم، آنگاه معادلهٔ (۱۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\nabla^2 \psi_k - \frac{\left(E + mc^2\right)^2 - m^2c^4}{\hbar}\psi_k = ۰$$
$$\nabla^2 \psi_k - \eta^2 = ۰ \quad , \quad \eta^2 = \frac{\left(E + mc^2\right)^2 - m^2c^4}{\hbar} \qquad (۱٤)$$

معادلهٔ (۱٤) همانند معادلهٔ میدان الکترواستاتیک می‌باشد.

بنابراین در هنگام حضور نوکلئون در نقطهٔ $x = ۰$ معادلهٔ (۱٤) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2 \psi_k - \eta^2 = -4\pi g\, \delta(x) \qquad (۱۵)$$

که جواب آن را با صدق کردن در رابطهٔ $\psi \to ۰$ به‌ازای $x \to \infty$ و با استفاده از بسط تابع δ برحسب انتگرال فوریه و پس از اندک محاسبات جبری بر روی معادلهٔ (۱۵) و بهره‌گیری از قضیهٔ مانده‌ها برای محاسبهٔ انتگرال، به عبارت زیر برای پتانسیل میدان هسته‌ای می‌رسیم.

$$\psi = \frac{g}{x}e^{-kx} \quad \eta^2 = \frac{\left(E + mc^2\right)^2 - m^2c^4}{\hbar} \qquad (۱٦)$$

که همان پتانسیل یوکاوا می‌باشد.

این معادله درست همانند معادلهٔ میدان الکترواستاتیک است و به‌ازای $E = ۰$ یا $\eta = ۰$ به معادلهٔ پیشین تبدیل می‌شود. پتانسیل ψ هم به پتانسیل میدان الکترواستاتیک $\psi = \frac{g}{x}$ تبدیل می‌شود.

درمورد پتانسیل (H.O.) متناظر با معادلهٔ (۱۳) با $\omega \neq ۰$، داریم:

$$\nabla^2 \psi_k(x) - \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\psi_k(x) = \left[\frac{\left(E + mc^2\right)^2 - m^2c^4}{\hbar}\right]\psi_k \qquad (۱۷)$$

که ω از معادلهٔ (۹) به‌دست می‌آید.

رفتار معادلهٔ (۱۷) درنزدیکی مبدأ نوکلئون ($x \to ۰$) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2 \psi_k = \eta^2 \psi_k$$
$$\eta^2 = \frac{\left(E + mc^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega\right)^2 - m^2c^4}{\hbar^2c^4} \Rightarrow \psi_{\circ} = \frac{g}{x}e^{-kx} \qquad (۱۸)$$

و دور از مبدأ $x \to \infty$ تابع موج به‌صورت $\psi_\infty(x) \approx \exp(-m\omega x^2)$ می‌باشد. می‌توانیم از تابع موج $u(x)$ استفاده کنیم.

$$\psi(x) = \psi_{\circ}(x)\psi_\infty(x)u(x) = \frac{g}{x}e^{-kx - \frac{m\omega}{2}x^1}u(x) \qquad (۱۹)$$

پس از وارد کردن $\psi(x)$ در معادلهٔ (۱۷) با استفاده از روش آنزاستز جواب معادله دیفرانسیل را به‌ازای $u(x)$ می‌یابیم [۱۷، ۱۸ و ۱۹].

به‌ازای $\omega=0$ پتانسیل $\psi(x)$ تبدیل به پتانسیل یوکاوا $\psi(x)=\frac{g}{x}e^{-kx}$ می‌شود و اگر $m=0$ و $\omega=0$ باشد، پتانسیل $\psi(x)$ تبدیل به پتانسیل میدان الکترواستاتیک $\psi(x)=\frac{g}{x}$ تبدیل می‌شود. درواقع کمیت g درحکم همان بار e در پتانسیل الکترواستاتیک می‌باشد و می‌توان آن را بار نوکلئون درنظر گرفت.

با برابر قرار دادن انرژی نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی (۱۲) با انرژی معادلهٔ (۱۱)، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$E_{nl}=\left(2n+l+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega=\frac{1}{2mc^2}\left[\left(E+mc^2-\frac{3}{2}\omega^2\right)-m^2c^4\right] \qquad (۲۰)$$

که درنتیجه طیف مزون π با میدان پتانسیل (H.O.) به‌صورت زیر است $(\hbar=1)$:

$$E_{nl}^{+}=-mc^2+\frac{3}{2}\omega+\left[m^2c^4+2mc^2\left(2n+l+\frac{3}{2}\right)\omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۱)$$

$$E_{nl}^{-}=-mc^2+\frac{3}{2}\omega-\left[m^2c^4+2mc^2\left(2n+l+\frac{3}{2}\right)\omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۲)$$

که طیف مزون π از دو تراز گستهٔ انرژی تشکیل شده است. فاصلهٔ این دو تراز عبارتست از:

$$\left(\Delta E_{nl}\right)^2=8mc^2\left(2n+l+\frac{3}{2}\right)\omega \qquad (۲۳)$$

و

$$\left(\Delta E\right)^2=\left(\Delta E_{n+1}-\Delta E_n\right)^2=8mc^2\,\omega \qquad (۲۴)$$

مربع فاصله بین دو تراز متوالی است. به‌ازای $\omega=0$ مقدار $\Delta E_{nl}=0$ می‌باشد.

نتیجه‌گیری:

در این طرح پژوهشی تعمیم نسبیتی نوسانگر هماهنگ را بررسی کردیم که با تغییر معادلهٔ کلین گوردون به معادلهٔ شرودینگر آن را حل کردیم. به‌ویژه آنکه مدل متشکل از دو ذرهٔ بدون اسپین با پتانسیل کولونی آنی (یوکاوا) با هم برهمکنش می‌کنند و با پتانسیل نوسانگر هماهنگ به هم مقید شده‌اند. حضور بار نوکلئون g را در هسته و تقید ذرات بدون اسپین ماند مزون π را نشان داده‌ایم. بنابراین هر نوکلئون را باید به‌صورت ذره‌ای درنظر گرفت که در احاطهٔ ابر مزون π قرار دارد. اعتبار این تصویر در پتانسیل قیدی آن نهفته است. همچنین تصویر برهمکنش مزون π نوکلئون تبدیل به تصویری پیچیده‌تر از روش سادهٔ معمول شد. اما در این مدل مفهوم میدان نیروی هسته‌ای وجود دارد و از این نظر پیشرفته‌تر می‌باشد.

مراجع:

1. Rowe DJ, Bahri C (1988) J Phys A: Math Gen 31:4947-4961.
2. Grudzinski K, Wybourne BG (1996) Rep Math Phys 38: 251-266.
3. Jakolski W (1996) Phys Rep 271:1-66.
4. Bielinska- Waz D, Karwowski J, Diercksen GHF (2001) J Phys B: At MolOpt Phys 34: 1987-2000.
5. Fock V (1928) Z Phys 47: 446-448.
6. Darwin cG (1930) Proc Cambridge Philos Soc 27: 86-90.
7. Nikolsky K (1930) Z Phys 62: 677-681.
8. Postepska I (1935) Acta Phys polon 4: 269-280.
9. Toyama FM, Nogami Y (1999) Phys Rev A 59: 1056-1062.
10. Nogami Y, Toyama FM (1993) Phys Rev A 47: 1708-1714.
11. Cook PA (1971) Lettere al Nuovo Cimento 1 : 419-426.
12. Moreno M. Zentella A (1989) J Phys A : Math Gen 22: L821-L825.
13. Moshinsky M, Szczepaniak A (1989) J Phus A : Math Gen 22 : L 817-L820.
14. Mir –kasimovRM (1991) J Phys A : Math Gen 24:4283-4302.
15. Moshinsky M, delSol Mesa A (1996) J Phus A: Math Gen 29:4217-4236.
16. Cooper F, Khare A, Sukhatme U (1995), Physics Rep., 251: 267-385.
17. A. A. Rajabi, (2006) Few-Body Systems 40, PP. 21-33.
18. A. A. Rajabi, (2008) International Journal of Modern Physics E, Vol. 17, No. 4, 1-6.
19. A. A. Rajabi, (2005) Few-Body System, Vol. 37, pp. 197-213.