

دانشگاه شاهرود

دانشکده فیزیک
گروه اتمی و مولکولی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
فیزیک، گرایش پلاسما

عنوان

مطالعه‌ی سالیتون‌های مغناطوسوتی در پلاسماهای کوانتومی

استاد راهنما

دکتر مهدی مومنی

دانشجو

ریحانه رضایی

شهریور ۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادرم

کوشیدنتا بیایم، رنج کشیدنتا بیارم
دعای خیرشان، همواره بدرقه‌ی راهم بوده و هست
سایه‌شان بر سرم همه مهربانست و نشانم به پایشان همه سر

و تقدیم به همسرم

که سایه‌ی مهربانیش سایه‌سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات
مسیر را برایم تسهیل نمود.

سپاس گزارى

سپاس اور است كه در سايهى الطاف پر مهرش و در سايبان عنايتش قدمى هر چند
كوتاه براى رسيدن به ذره اى از علم بگيرانش پيمودم. آرى سپاس مخصوص اوست
كه آفريدگار عشق است و زمين.
خدايى كه افكار ژرف انديش، ذات او را درك نمي كنند و دست غواصان درياهاى
علوم به او نخواهد رسيد.

تعمدنامه

اینجانب ریحانه رضایی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مطالعه‌ی سالیتون‌های مغناطوسوتی در پلاسماهای کوانتومی، تحت راهنمایی دکتر مهدی مومنی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

ریحانه رضایی
شهریور ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده:

پلاسماهای کوانتومی حوزه‌ی در حال رشد علم پلاسما را شکل داده‌اند. امروزه با بررسی تاثیرات اسپین، پدیده‌های جالبی در پلاسماهای کوانتومی مورد توجه قرار گرفته است. امواج مغناطوسوتی یکی از جالبترین موضوعات قابل بررسی در این حوزه می‌باشد. تاثیر نیروهای کوانتومی اسپینی توسط نویسندگان متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پایان‌نامه هدف ما مطالعه‌ی امواج مغناطوسوتی ناشی از اثرات اسپینی در پلاسمای کوانتومی الکترون-یون می‌باشد.

این پایان‌نامه در ۵ فصل گردآوری شده است. در فصل اول، کلیاتی راجع به مفاهیم مقدماتی پلاسما، پارامترهای دخیل و تعاریف موجود آورده شده است. بیان پلاسمای کوانتومی و تفاوت آن با مشابه کلاسیکی، مروری بر مدل‌های توصیف پلاسما، توابع توزیع ماکسول - بولتزمن، ویگنر و ویگنر - پواسون، مدل هارتری و هارتری - فوک در فصل دوم ذکر شده است، همچنین در این فصل روابط پاشندگی و روش مادلانگ را استخراج کرده‌ایم. در فصل سوم مروری بر معرفی امواج در پلاسمای کوانتومی خواهیم داشت. همچنین به کمک معادلات پایه‌ای مگنتوهیدرودینامیک و روش اختلال کاهش یافته به استخراج معادلات KdV و $KdVB$ پرداختیم. و در فصل ۴ این معادلات را با شرایط اولیه و مرزی معلوم به کمک تقریب تفاضل محدود و الگوریتم رانگ - کوتا مرتبه‌ی ۴ حل عددی نمودیم. همچنین به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر جواب‌های این معادلات پرداختیم. در ادامه در فصل ۵ نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی‌ها را مرور کردیم، اثبات برخی روابط مهم و تاریخچه‌ی سالیتون‌ها را در پیوست آورده‌ایم.

کلمات کلیدی: پلاسمای کوانتومی، امواج مغناطوسوتی، سالیتون و موج ضربه‌گونه

فهرست مطالب

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۱	تعریف پلاسما	۱.۱.۱
۲	تاریخچه ی پلاسما	۲.۱.۱
۳	چگونگی پیدایش پلاسما	۳.۱.۱
۴	وجود پلاسما در طبیعت	۴.۱.۱
۴	حفاظ دمای	۵.۱.۱
۵	معیارهای پلاسما	۶.۱.۱
۶	دما و چگالی	۷.۱.۱
۷	پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی	۸.۱.۱
۷	پارامترها و مشخصه‌های انواع پلاسما	۲.۱
۷	پلاسمای کلاسیکی	۱.۲.۱
۹	پارامتر جفت‌شده ی کلاسیکی	۲.۲.۱
۱۰	پلاسماهای کوانتومی	۳.۲.۱
۱۳	پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی	۴.۲.۱
۱۳	پارامترهای بدون بعد و نقش آن‌ها در پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی	۵.۲.۱
۱۴	هدف پایان نامه	۳.۱
۱۵	جمع بندی	۴.۱
۱۷	مدل‌های توصیف پلاسما و معادلات حاکم بر آن	۲
۱۷	مقدمه	۱.۲
۱۷	مدل ذره‌ای	۲.۲
۱۸	مدل سیالی	۳.۲
۱۹	مدل جنبشی	۴.۲
۱۹	مدل‌های توصیف پلاسمای کلاسیکی	۵.۲
۱۹	مدل سیالی و معادلات حاکم بر پلاسمای کلاسیکی	۱.۵.۲
۲۰	مدل نظریه ی جنبشی برای پلاسمای کلاسیکی	۲.۵.۲

۲۰ تابع توزیع ماکسول - بولتزمن	۳.۵.۲
۲۱ مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی	۶.۲
۲۲ مدل هارتری	۱.۶.۲
۲۳ مدل هارتری - فوک و اسلیتر	۲.۶.۲
۲۴ مدل سیالی و معادلات حاکم برای پلاسمای کوانتومی	۳.۶.۲
۲۵ روش مادلانگ در مدل سیالی	۴.۶.۲
۲۶ مدل نظریه‌ی جنبشی برای پلاسمای کوانتومی	۵.۶.۲
۲۷ تابع توزیع ویگنر	۶.۶.۲
۲۷ به دست آوردن تابع توزیع ویگنر از معادله‌ی ولاسوف	۷.۶.۲
۲۸ رابطه‌ی پاشندگی با استفاده از معادله‌ی ویگنر - پواسون	۸.۶.۲
۳۱ رابطه‌ی پاشندگی با استفاده از تقریب هارتری	۹.۶.۲
۳۲ معادله‌ی ویگنر - پواسون	۱۰.۶.۲
۳۳ جمع بندی	۷.۲
۳۵ امواج در پلاسمای کوانتومی و معادلات مربوطه	۳
۳۵ مقدمه	۱.۳
۳۵ امواج در پلاسما	۲.۳
۳۶ امواج آلفون	۱.۲.۳
۳۶ امواج مغناطیصوتی	۲.۲.۳
۳۷ امواج ضربه	۳.۳
 استخراج معادله‌ی $KdVB$ با به کارگیری تکنیک کاهش اختلال در پلاسمای کوانتومی	۴.۳
۳۷	
۴۴ امواج سالیتون	۵.۳
۴۴ تعریف سالیتون	۱.۵.۳
۴۵ خواص اساسی سالیتون	۲.۵.۳
۴۵ انواع سالیتون	۳.۵.۳
۴۵ برهم‌کنش سالیتون‌ها	۴.۵.۳
۴۶ زمینه‌های کاربرد	۵.۵.۳
۴۶ معرفی معادله KdV	۶.۳
۴۸ استخراج معادله‌ی KdV با به کارگیری تکنیک کاهش اختلال	۷.۳
۵۰ جمع بندی	۸.۳
۵۳ حل عددی معادلات KdV و $KdVB$	۴
۵۳ حل عددی معادله‌ی KdV و بررسی پارامترهای مختلف	۱.۴
۵۳ بررسی تاثیر چند پارامتر بر موج سالیتونی	۲.۴

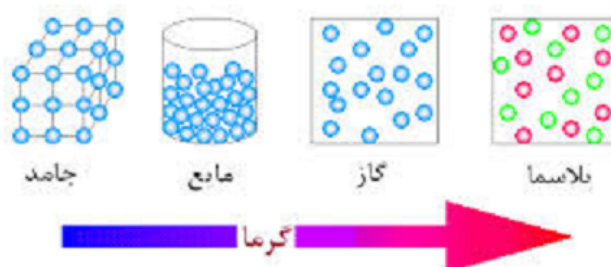
۵۸	حل عددی معادله‌ی $KdVB$ و بررسی پارامترهای مختلف	۳.۴
۵۹	معادله‌ی $KdVB$ بدون ضریب اتلاف	۱.۳.۴
۵۹	معادله‌ی $KdVB$ بدون ضریب انتشار	۲.۳.۴
۵۹	بررسی تاثیر چند پارامتر بر موج ضربه	۴.۴
۶۵		نتیجه‌گیری و پیشنهادات	۵
۶۷		اثبات روابط	آ
۶۷	بسط رابطه‌ی (۲۷.۳)	۱.آ
۷۲			ب
۷۲	تاریخچه‌ی پیدایش سالیتون	۱.ب
۷۴			مراجع

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

۱.۱.۱ تعریف پلاسما



شکل ۱.۱: حالت‌های آشنای ماده

در تعریف سطحی از پلاسما، آن را به عنوان چهارمین حالت ماده، که به سه حالت اصلی جامد، مایع و گاز اضافه گردیده است، معرفی می‌کنند [۱]. این تعریف به انرژی ذرات و یا به عبارت دیگر به دمای ماده اشاره دارد، به صورتی که چنانچه دمای ماده زیاد شود ابتدا ماده‌ی جامد به حالت مایع در می‌آید و سپس از حالت مایع به گاز و نهایتاً از گاز به پلاسما تبدیل می‌شود (شکل ۱.۱). زمانی این اتفاق رخ می‌دهد که دمای بالا، گاز را یونیزه کرده و الکترون‌ها را از هسته جدا کند. در این حالت برخلاف گاز که ذرات سازنده‌ی آن، مولکول‌های آن نوع گاز هستند، ذرات باردار به صورت جداگانه‌ای ظهور می‌یابند. در حالت عمومی ذرات منحصر به فردی که پلاسما را تشکیل می‌دهند از سه نوع مختلف: یون، الکترون و ذرات خنثی می‌باشند. از آن جا که برخلاف گازها در پلاسما به غیر از ذرات خنثی ذرات باردار هم وجود دارد، نوع برهم‌کنش‌هایی که در پلاسما بین ذرات و بین ذرات با میدان‌های خارجی ایجاد می‌شوند کاملاً متفاوت از حالت گازی است.

اگر بخواهیم به طور دقیق پلاسما را تعریف کنیم، پلاسما گاز شبه خنثایی از ذرات باردار و خنثی است

که رفتار جمعی از خود نشان می‌دهند [۲]. پلاسما شبه خنثی است یعنی چنانچه یون‌ها یک بار یونیزه باشند چگالی الکترون‌ها با یون‌ها برابر خواهد بود ($n_e \simeq n_i$). منظور از رفتار جمعی حرکتی است که نه تنها به شرایط موضعی بلکه به حالت پلاسما در نقاط دور نیز بستگی دارد. بنابراین اجزا پلاسما به دلیل بلند برد بودن نیروهای کولنی، حتی در فواصل دور هم بر یکدیگر تاثیر می‌گذارند. پلاسما به دلیل رفتار جمعی‌ای که از خود نشان می‌دهد گرایش به متاثر شدن در برابر عوامل خارجی را ندارد و اغلب طوری عمل می‌کند که گویا رفتار مخصوص به خود دارد.

به طور خلاصه یک سیستم از ذرات باردار در صورتی به عنوان پلاسما توصیف می‌شود که دو خاصیت زیر را داشته باشد [۳]:

۱. شبه خنثایی^۱؛ به این معنی است که تفکیک بارها فقط در یک فاصله به اندازه‌ی طول دمای وجود داشته باشد. در فواصل بزرگتر از طول دمای پلاسما اساساً خنثی است.

۲. اثرات جمعی^۲؛ به این معنی است که حرکت‌های هر ذره فقط به قیدهای موضعی بستگی ندارد بلکه به موقعیت‌ها و سرعت‌های همه‌ی ذرات دیگر در پلاسما بستگی دارد. این رفتار جمعی به خاطر طبیعت دوربرد نیروهای الکترومغناطیسی است.

۲.۱.۱ تاریخچه‌ی پلاسما

پلاسما از ریشه‌ی یونانی $\pi\lambda\sigma\mu\alpha$ به معنی هر چیز به قالب ریخته شده گرفته شده است [۴]. که توسط دانشمند ماهر پزشکی، اهل چکوسلاواکی، یوهانس پارکینج^۳ (۱۸۶۹-۱۷۸۷) ارائه شد. واژه‌ی پلاسما نخستین بار در سال ۱۹۲۷ توسط اورینگ لانگموئر^۴ به کار برده شد. زمینه‌ی مطالعات وی، پدیده‌های تخلیه‌ی الکتریکی بود [۵]. او برای اولین بار ستون مثبت در لامپ تخلیه‌ی الکتریکی را که شامل الکترون‌ها، یون‌ها و اتم‌های خنثی بود، نام‌گذاری کرد.

از آن زمان تا سال ۱۹۶۰ فیزیکدانان مطالعات پلاسما را صرفاً در محدوده‌ی محیط‌های با دمای بالا و یا با چگالی کم متمرکز کرده بودند و در زمینه‌ی تئوری پلاسما پیشرفت زیادی حاصل شده بود. نظریه‌ی جنبشی، مدل سیالی و به دست آوردن روابط پاشندگی امواج مختلف در آن محیط‌ها از جمله موفقیت‌های آنان بوده است.

در محیط‌های با چگالی پایین و یا با دمای بالا اثرات کوانتومی ناچیز و در مقایسه با سایر اثرات کلاسیکی قابل اغماض هستند. در واقع در آن زمان دانشمندانی که در زمینه‌ی پلاسما فعالیت داشتند، تنها به صورت کلاسیکی به حل مسائل پیش روی خود می‌پرداختند.

با پیشرفت تکنولوژی و دستیابی به ابزارهای ایجاد دمای پایین و ایجاد محیط‌های نگه دارنده‌ی پلاسما با چگالی بالا، زمینه برای مشاهده‌ی اثرات کوانتومی پلاسما میسر شد.

در سال ۱۹۶۰، هنگامی که پاینز^۵ مشغول مطالعه‌ی خواص طیفی نوعی پلاسما با چگالی بالا،

^۱Quasi neutrality

^۲Collective effects

^۳Johanes Purkinje

^۴Irving Langmuir

^۵Pines

در دمای پایین بود، متوجه یک پدیده‌ی خاص شد که تا آن زمان مورد توجه قرار نگرفته بود. او طیف تحریکی این نوع پلاسما را بررسی می‌کرد که متوجه تغییر در رابطه‌ی پاشندگی پلاسما به علت اثرات کوانتومی می‌شود [۶].

اخیرا در زمینه‌ی تاثیر اسپین الکترون در پلاسمای کوانتومی نیز تحقیقاتی صورت گرفته است به عنوان مثال می‌توان به مقالاتی که جنبه‌های مختلف اثرات اسپینی را در پلاسمای کوانتومی نشان می‌دهند اشاره کرد (به عنوان نمونه به مرجع [۷] و [۸] مراجعه شود).

در حال حاضر پیشرفت تکنولوژی و دسترسی به دماهای بسیار پایین و همچنین ریز مقیاس کردن اجسام در ابعاد نانو، توجه به خواص کوانتومی پلاسما را افزایش داده است و امروزه دانشمندان زیادی در دنیا در زمینه‌ی کوانتومی فیزیک پلاسما فعالیت می‌کنند و یکی از جدیدترین زمینه‌ی مطالعه‌ی کوانتومی پلاسما، تاثیر اسپین بر پلاسما می‌باشد.

به این ترتیب پلاسما از دیدگاه روابط کاربردی به دو دسته‌ی پلاسمای کلاسیک و پلاسمای کوانتومی دسته‌بندی شده است.

۳.۱.۱ چگونگی پیدایش پلاسما

می‌دانیم که اجسام جامد با گرفتن گرما تبدیل به مایع و مایع بر اثر گرما تبدیل به گاز می‌شوند که سه حالت معمولی اجسام است. حال اگر گازی را حرارت دهیم تا الکترون‌هایی از اتم جدا شوند در آن صورت به محیط یونیزه می‌رسیم که در حالت خاصی که در تعریف پلاسما بیان کردیم همان پلاسما می‌باشد. در یک درجه حرارت مطلق و غیرصفر هر گازی دارای تعدادی اتم یونیزه شده به صورت یون‌های مثبت، منفی و خنثی است. اگر غلظت یون‌ها به حدی رسیده باشد که حرکت یون‌ها را محدود نماید، با افزایش غلظت یون‌ها این محدودیت طبق فرمول ساها [۹]:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2/4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp\left(-\frac{u_i}{K_B T}\right) \quad (1.1)$$

افزایش می‌یابد.

n_i : چگالی ذرات یونیزه

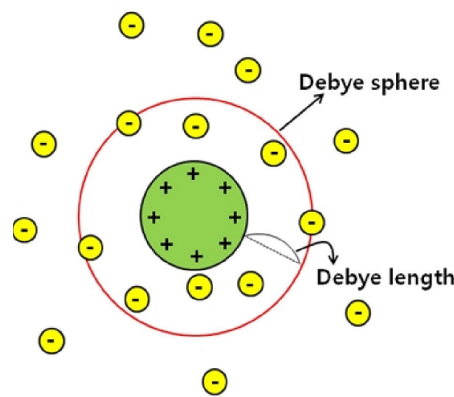
n_n : چگالی ذرات خنثی

u_i : مقدار انرژی که برای آزاد شدن یک الکترون از مدار آخر لازم است.

T : درجه حرارت بر حسب کلونین

K_B : ثابت بولتزمن

اگر مقادیر فوق را برای شرایط دمای ۲۷ درجه سانتیگراد یک اتاق قرار دهیم، $n_i/n_n = 10^{-122}$ خواهد بود و این نشانگر این است که در دماهای معمولی ظاهر شدن پلاسما تقریباً محال است. وجود پلاسما بستگی به دما و عکس چگالی ذرات یونیزه دارد. طبیعی‌ترین روش برای تولید پلاسما، حرارت دادن به گاز تا حدی که میانگین انرژی ذرات با انرژی ذرات یونیزاسیون اتم‌ها و مولکول‌های گاز قابل مقایسه باشند، در چنین شرایطی گاز به پلاسما تبدیل می‌شود. پلاسما می‌تواند در دماهای کمتر از



شکل ۲.۱: حفاظ دبای

۱۰۰۰۰۰ درجه کلین ایجاد شود به شرطی که چگالی به قدر کافی پایین باشد و ترکیب مجدد تکرار نشود.

۴.۱.۱ وجود پلاسما در طبیعت

۹۹٪ ماده‌ی جهان در حالت پلاسماست، این برآورد ممکن است خیلی دقیق نباشد ولی تخمین معقولی است از این واقعیت که، درون ستارگان و جو آن‌ها ابری گازی شکل است. همچنین درصد زیادی از هیدروژن فضایی بین ستارگان به صورت پلاسما می‌باشد. در نزدیکی ما نیز زمانی که جو زمین را ترک می‌کنیم بلافاصله با پلاسمایی مواجه می‌شویم که شامل کمربندهای تشعشعی وان آلن و بادهای خورشیدی است، و نیز در بستر کهکشان‌ها و هسته‌ی ستارگان مانند ستاره‌ی کوتوله سفید هم پلاسما وجود دارد. از سوی دیگر در زندگی روزمره نیز با پلاسما مواجه می‌شویم. به عنوان مثال، گازهای داخل یک لامپ فلورسان یا لامپ نئون، و نیز گازهای خروجی یک موشک، همگی مثال‌هایی از وجود پلاسما در اطراف ما می‌باشند [۱۰]. محیط زندگی ما آن ۱٪ جهان است که در آن پلاسما به طور طبیعی یافت نمی‌شود.

۵.۱.۱ حفاظ دبای

رفتار جمعی پلاسما منشا یکی از مهمترین ویژگی‌های پلاسما، یعنی حفاظ دبای^۶ است. یکی از مشخصه‌های اساسی رفتار پلاسما توانایی آن برای دفع پتانسیل‌های الکتریکی است که به آن اعمال می‌شود. فرض کنید بخواهیم با وارد کردن دو گلوله‌ی باردار متصل به باتری، در داخل پلاسما میدان الکتریکی به وجود آوریم، این گلوله‌ها ذرات با بارهای مخالف را جذب می‌کنند و تقریباً بلافاصله ابری از یون‌ها اطراف گلوله‌ی منفی و ابری الکترونی اطراف گلوله‌ی مثبت را فرا می‌گیرند. اگر پلاسما سرد باشد و هیچ‌گونه حرکت حرارتی نداشته باشد، تعداد بار ابر برابر بار گلوله می‌شود، در این صورت عمل حفاظ کامل می‌شود و هیچ میدان الکتریکی در حجم پلاسما و ناحیه‌ی خارج از ابرها وجود نخواهد داشت. از سوی دیگر اگر دما متناهی باشد ذراتی که در لبه‌ی ابر هستند (جایی که میدان ضعیف است)، به اندازه‌ی

^۶Debye screening

کافی انرژی گرمایی دارند تا از چاه پتانسیل الکتروستاتیک فرار کنند، بنابراین لبه‌ی ابر در شعاعی قرار می‌گیرد که انرژی پتانسیل تقریباً برابر با انرژی گرمایی ذرات است، پس حفاظ کامل نیست. ضخامت تقریبی چنین ابری قابل محاسبه است، این ضخامت را طول دبای گویند که با λ_D نشان می‌دهند [۱۱]. در حضور بار نقطه‌ای q در پلاسما، با حل معادله‌ی پواسون

$$\nabla^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0} \left(n_i - n_e + \frac{q}{e} \delta(r) \right) \quad (2.1)$$

و جایگذاری‌های

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\delta\phi}{K_B T}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\delta\phi}{K_B T}\right) \quad (3.1)$$

و

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (4.1)$$

طول دبای به شکل زیر به دست می‌آید [۱۱]:

$$\left(\nabla^2 - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 K_B T}\right) \delta\phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(r)$$

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T_e}{n e^2}\right)^{1/2} \quad (5.1)$$

که K_B ثابت بولتزمن است.

۶.۱.۱ معیارهای پلاسما

پلاسما بودن یک گاز یونیزه نیازمند شرایطی است که به شرح زیر است [۱۲]:
 ابعاد سیستم پلاسما (L) خیلی بزرگتر از λ_D باشد. در این صورت در هر جایی که تمرکز موضعی بار وجود داشته باشد (به قدر کافی چگال باشد)، یا پتانسیل خارجی به دستگاه اعمال شود در مقابل آن حفاظی در یک فاصله‌ی کوچک در مقایسه با L ایجاد می‌شود و این امر سبب می‌شود که قسمت عمده‌ی پلاسما از پتانسیل‌ها و میدان‌های الکتریکی خارجی مصون نگه داشته شود پس اولین شرط پلاسما آن است که:

$$\lambda_D \ll L \quad (6.1)$$

از سوی دیگر تعریف حفاظ دبای زمانی معتبر است که درون ابر بار به تعداد کافی ذره وجود داشته باشد. واضح است که اگر در ناحیه‌ی غلاف (ضخامت غلاف) فقط یک یا دو ذره وجود داشته باشد حفاظ دبای از نظر آماری مفهوم معتبری نخواهد داشت. بنابراین تعداد ذرات درون کره‌ی دبای که به صورت:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \quad (7.1)$$

می‌باشد، باید خیلی بزرگتر از یک باشد. به عبارت دیگر

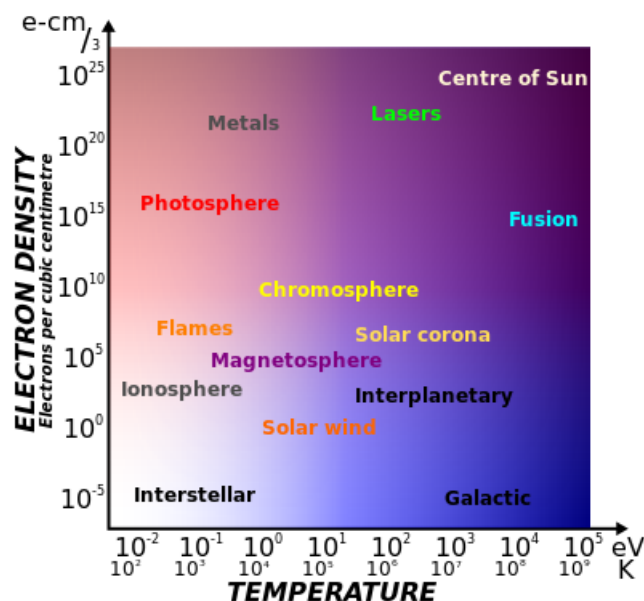
$$N_D \gg 1 \quad (8.1)$$

رابطه‌ی فوق بیانگر شرط دوم پلاسما است.

سومین شرط پلاسما بودن مربوط به برخوردهاست. برای مثال دینامیک گاز یونیزه ضعیف در خروجی یک موشک به دلیل برخوردهای زیاد بین ذرات باردار و اتم‌های خنثی توسط نیروهای هیدرودینامیک معمولی توصیف می‌شود و نه نیروهای الکترومغناطیسی، بنابراین این گاز مشخصات پلاسما را ندارد. اگر بسامد نوعی نوسان‌های پلاسما ω و زمان متوسط بین برخوردهای ذرات باردار با اتم‌های خنثی τ باشد، برای آن که گاز مانند پلاسما رفتار کند لازم است که:

$$\omega\tau > 1 \quad (9.1)$$

۷.۱.۱ دما و چگالی



شکل ۳.۱: محدوده‌ی پلاسما بر اساس دما و چگالی ذرات

دما و چگالی به عنوان دو پارامتر بسیار مهم در پلاسما قابل بررسی هستند. نکته‌ی مهم در پلاسما این است که دو پارامتر دما و چگالی همواره نسبت به هم سنجیده می‌شوند. به عنوان نمونه بیشتر پلاسماها دمایی در حدود $10^2 K$ (مانند پدیده‌ی رعد و برق) تا $10^8 K$ (مانند فرآیند همجوشی) و چگالی در حدود $10^7 m^{-3}$ (مانند پلاسما‌ی آزمایشگاهی) تا $10^{26} m^{-3}$ (مانند هسته‌ی ستارگان) دارند. در شکل ۳.۱ گستره‌ی انواع پلاسما بر اساس دما و چگالی نشان داده شده است.

۸.۱.۱ پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی

اصولا پلاسما را با توجه به خاصیت ماکروسکوپیکی و میکروسکوپیکی به دو دسته‌ی کلاسیکی و کوانتومی تقسیم‌بندی می‌نمایند. پلاسمای کلاسیکی در محدوده‌ی دماهای بالا و چگالی‌های پایین و پلاسمای کوانتومی در محدوده‌ی دماهای پایین و چگالی‌های بالا بررسی می‌شود [۱۲].

پلاسماهای کلاسیکی، شامل نوسانات پلاسما با میدان الکتریکی است. یادآور می‌شویم که در این پلاسما میدان مغناطیسی وجود ندارد. سالیتون‌ها و ناپایداری‌های پلاسما مثال‌هایی از پلاسمای کلاسیکی هستند. همچنین پلاسماهایی که در محدوده‌ی فشار معمولی هستند فوق العاده داغ بوده و در دسته‌ی پلاسماهای کلاسیکی قرار می‌گیرند. پلاسما، کوانتومی است زمانی که کوانتومی بودن ذرات اثر قابل توجهی بر روی خواص ماکروسکوپیکی بگذارد. از سوی دیگر در دمای اتاق و چگالی‌های فلزی استاندارد اثرات کوانتومی را نمی‌توان نادیده گرفت. پدیده‌هایی مانند تونل زنی دیوده‌های کوانتومی، لیزرهای جامد با استفاده از پلاسمای کوانتومی توصیف می‌شوند. معمولا پلاسمای کوانتومی به طور انبوه در موارد اختر فیزیکی (مانند کوتوله‌های سفید که دارای چگالی چند برابر جامدات هستند) و نیز در نیمه هادی‌ها که نسل بعدی پلاسمای لیزر-جامد را تشکیل می‌دهند (لیزرهای الکترون آزاد با پرتو x) کاربرد دارد [۱۳].

۲.۱ پارامترها و مشخصه‌های انواع پلاسما

در این بخش پارامترهایی را معرفی می‌کنیم که موضوعاتی مانند طول، زمان و مقیاس‌های سرعت در پلاسمای کوانتومی و کلاسیکی را در بر می‌گیرد. پارامترها را بدون بعد در نظر می‌گیریم زیرا این امکان را به ما می‌دهد که به راحتی درباره‌ی این دو رژیم (پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی) بحث کنیم و در نهایت با کمک گرفتن از این پارامترها می‌توانیم کلاسیکی و کوانتومی یا برخوردی و غیربرخوردی بودن را تعیین کنیم.

۱.۲.۱ پلاسمای کلاسیکی

پلاسماهای کلاسیکی که بیشتر به دو رژیم پلاسماهای همجوشی و فضایی گفته می‌شود، معمولا با ”دماهای بالا” و ”چگالی‌های پایین” معین می‌شوند [۱]. همانطور که پیش از این نیز گفتیم در این نوع از پلاسماها اثرات کوانتومی قابل چشم‌پوشی است و در نتیجه هیچ سروکاری با اثرات مکانیک کوانتومی وجود ندارد. در این بخش به بررسی پلاسمای کلاسیکی خواهیم پرداخت. بدین منظور چهار نوع پارامتر را معرفی می‌کنیم که مشخصه‌های اصلی پلاسمای کلاسیکی را شکل می‌دهد.

این پارامترها عبارتند از:

۱. چگالی تعداد ذرات (الکترون ها) n

۲. جرم الکتریکی m

۳. بار الکتریکی e

۴. و برهم کنش الکترون‌ها با نیروهای کولنی با ضریب گذردهی الکتریکی ϵ_0

به کمک این چهار پارامتر می‌توان کمیتی به نام فرکانس پلاسما γ معرفی کرد که با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$\omega_p = \left(\frac{ne^2}{m\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (10.1)$$

این کمیت معرف فرکانس پلاسما و نشان دهنده‌ی نوسانات نوعی الکترون‌های غوطه‌ور در مجموعه‌ای از یون‌های مثبت است (که این یون‌های مثبت به دلیل جرم زیادشان ساکن فرض می‌شوند) و دارای بعد معکوس زمان می‌باشد. نوسانات ناشی از این واقعیت است که، هنگامی که قسمتی از پلاسما از برخی از الکترون‌ها تهی می‌شود (این پدیده باعث تشکیل بار مثبت خالص در آن ناحیه می‌شود) نیروی کولنی تمایل به کشاندن الکترون‌ها در جهت بار مثبت اضافی دارند. از سوی دیگر به دلیل اینرسی الکترون‌ها آن‌ها نمی‌توانند به سادگی ناحیه‌ی مثبت را پر کنند، همچنین الکترون‌ها دارای تحرک بالاتری نیز هستند پس می‌توانند مسافت طولانی‌تری را طی کنند و باعث بازتولید بار مثبت اضافی می‌شوند. در غیاب برخورد، این پدیده منجر به موج پایدار الکترونی در فرکانس پلاسما می‌شود. توجه داشته باشید که فرکانس پلاسما مستقل از دما می‌باشد [۱۵]. با تعریف یک دمای متناهی قادر به تعریف سرعت نوعی به شکل زیر خواهیم بود:

$$v_T = \left(\frac{K_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (11.1)$$

در این رابطه K_B ثابت بولتزمن ^۸ است. این رابطه بیانگر سرعت گرمایی ^۹ در گازهای معمولی ناشی از حرکت‌های گرمایی تصادفی می‌باشد.

با ترکیب روابط (۱۰.۱) و (۱۱.۱) قادر به تعریف یک مقیاس طول خواهیم بود که طول دبای نامیده می‌شود و با رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود [۲۲]:

$$\lambda_D = \frac{v_T}{\omega_p} = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T}{ne^2} \right)^{1/2} \quad (12.1)$$

در محیطی غیر از پلاسما پتانسیل الکتروستاتیکی یک ذره‌ی منزوی با بار q به صورت $\varphi = q/r$ است. اما در پلاسما به محض وارد شدن یک حامل بار ذرات با بارهای مخالف در اطراف بار خارجی جمع شده و آن را پوشش می‌دهند تا غلافی در اطراف آن ایجاد شود و میدان‌های الکتریکی ناشی از این بار در حجم خارج از این غلاف صفر گردد. می‌توان ثابت نمود که پتانسیل ناشی از یک ذره‌ی باردار خارجی و در حال سکون به صورت $\varphi = qe^{-r/\lambda_D}/r$ است. در واقع طول دبای ^{۱۰} فاصله‌ای است که پتانسیل ناشی از بار آزمون در پلاسما را به $1/e$ مقدارش می‌رساند، که این افت پتانسیل خیلی سریعتر و از مرتبه‌ی طول دبای می‌باشد. در واقع پوشش دبای، پلاسما را در مقابل پتانسیل خارجی حفاظت می‌نماید.

^۸Plasma frequency

^۹Boltzmanns constanst

^۹thermal velocity

^{۱۰}Debye length

از رابطه ی (۱۲.۱) در می‌یابیم که با افزایش چگالی، λ_D کاهش می‌یابد، زیرا هر لایه‌ی پلاسما حاوی الکترون‌های بیشتری است. به علاوه λ_D با افزایش KT_e افزایش می‌یابد، همچنین دمای الکترون است که در تعریف λ_D به کار می‌رود، زیرا الکترون‌ها که تحرک پذیر تر از یون‌ها هستند معمولاً با حرکت خود بار منفی اضافی یا نقصانی تولید می‌کنند و کار حفاظ را انجام می‌دهند. جدایی بار در پلاسما فقط بر روی مقیاس‌های کوچکتر از λ_D می‌تواند وجود داشته باشد.

۲.۲.۱ پارامتر جفت‌شده‌ی کلاسیکی

حال به معرفی کمیت بدون بعد می‌پردازیم که کمیات m, n, T, e و ϵ_0 در آن قابل رویت می‌باشد و به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$g_C = \frac{e^2 n^{1/3}}{\epsilon_0 K_B T} \quad (13.1)$$

که به پارامتر جفت‌شده‌ی کلاسیکی معروف است ^{۱۱}، یا به عبارت دیگر این کمیت را به عنوان نسبت برهمکنش (الکتریکی) انرژی E_{int} به میانگین انرژی جنبشی E_{kin} تعریف می‌کنیم. ذرات در فاصله‌ی $d = n^{-1/3}$ قرار دارند و انرژی الکتریکی و میانگین انرژی جنبشی به صورت روابط زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} E_{int} &= K_B T \\ E_{kin} &= \frac{e^2}{\epsilon_0 d} \end{aligned} \quad (14.1)$$

تعریف $g_C = E_{int}/E_{kin}$ به این شکل این امکان را می‌دهد تا بتوانیم نسبت فیزیکی پارامتر جفت‌شدگی را تخمین بزنیم. زمانی که g_C کوچک باشد اثرات گرمایی بر پلاسما حاکم است و برهم‌کنش‌های کولنی (برخوردهای دوتایی) ضعیف می‌شوند، این رژیم به عنوان رژیم بی‌برخوردی شناخته می‌شود. ولی وقتی که $g_C \simeq 1$ یا بزرگتر از آن باشد برخوردهای دوتایی را نمی‌توان نادیده گرفت پس پلاسما برخوردی یا به شدت جفت شده می‌باشد [۱۷]. توجه به این نکته حائز اهمیت است که با توجه به رابطه‌ی (۱۳.۱) پلاسماهای کلاسیکی در دماهای بالا و چگالی‌های پایین، بدون برخورد هستند. از سوی دیگر رابطه‌ی g_C را می‌توان به شکل عکس تعداد ذرات موجود در مکعب طول دبای نیز تعریف کرد، یعنی به شکل رابطه‌ی زیر:

$$g_C = \left(\frac{1}{n \lambda_D^3} \right)^{2/3} \quad (15.1)$$

رابطه‌ی فوق بیان می‌دارد هنگامی که حفاظ دبای موثر باشد (به عنوان مثال زمانی که تعداد زیادی الکترون در حجم دبای موجود باشد) پلاسما بدون برخورد است.

^{۱۱} graininess parameter

۳.۲.۱ پلاسماهای کوانتومی

همانگونه که پیشتر اشاره کردیم پلاسما طیف وسیعی از حالت‌های ماده از نظر دما و چگالی را در بردارد. پلاسما می‌تواند بسیار چگال باشد یا در حالت رقیق یافت شود. همچنین می‌توان پلاسما را در دمای بالا مشاهده کرد، مانند خورشید؛ بالعکس در دمای بسیار پایین نیز می‌توان ماده را در حالت پلاسما مشاهده کرد. این وسعت محدوده‌ی پلاسما موجب بروز رفتارهای متفاوت پلاسما در شرایط مختلف می‌شود. از آن جمله می‌توان به در نظر گرفتن یا در نظر نگرفتن نیروهای کوانتومی مانند اثرات اسپین، در پلاسما اشاره کرد.

مشخصه ها	پلاسماهای زمینی	پلاسماهای کیهانی
اندازه بر حسب متر	(پلاسماهای آزمایشگاهی) $10^{-6} m$ تا (آذرخش) $10^2 m$	(غلاف فضاپیما) $10^{-6} m$ تا (سحابی بین کهکشانی) $10^{25} m$
طول عمر بر حسب ثانیه	(پلاسما تولید شده با لیزر) $10^{-12} s$ تا (لامپ‌های فلئورسانس) $10^7 s$	(بادهای خورشیدی) $10^1 s$ تا (پلاسماهای بین کهکشانی) $10^{17} s$
چگالی بر حسب ذره بر متر مکعب	$10^7 m^{-3}$ تا $10^{32} m^{-3}$	(فضای بین کهکشانی) $1 m^{-3}$ تا (هسته ستاره) $10^{30} m^{-3}$ ، (کوتوله‌های سفید) $10^{36} m^{-3}$
دما بر حسب کلوین	(پلاسما غیر خنثی کریستالی) $\approx 0 k$ تا (پلاسما ذوب مغناطیسی) $10^8 k$	(شفق) $10^2 k$ تا (هسته خورشید) $10^7 k$
میدان‌های مغناطیسی بر حسب تسلا	(پلاسما آزمایشگاهی) $10^{-4} T$ تا $10^3 T$	(فضای بین کهکشانی) $10^{-12} T$ تا (نزدیک ستاره‌های نوترونی) $10^{11} T$

شکل ۴.۱: پارامترهای پلاسماهای کوانتومی [۱۸]

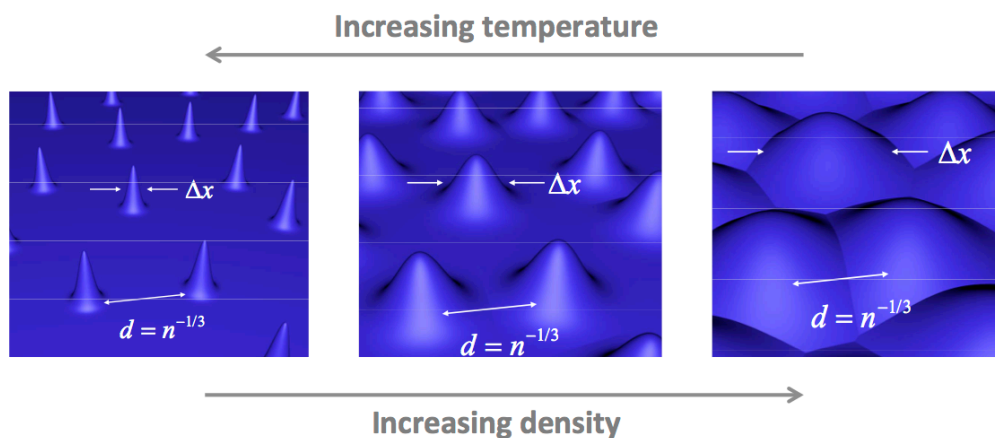
نیروهای کوانتومی از جمله نیروهای موجود در طبیعت است که همیشه و در همه جا حضور دارد، اما در برخی شرایط اثرات آن بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. ولی هنگامی که به عنوان مثال سخن از اجسام در مقیاس‌های ریز به میان می‌آید، اثرات کوانتومی به خوبی حس می‌شود و در نظر نگرفتن این اثرات تغییر زیادی در مسئله ایجاد می‌کند. در جدول ۴.۱ محدوده‌ی پارامترهای پلاسماهای جهت برآورد تقریبی محدوده‌ی وجود پلاسماهای کوانتومی (چگالی‌های بالا و دماهای پایین) آورده شده است. گفته شد دمای پایین یا چگالی بالا پلاسما را مستعد ارائه اثرات کوانتومی می‌کند. از جمله اثرات

کوانتومی در پلاسما می‌توان به "پتانسیل بوهم" و "فشار اسپینی" اشاره کرد [۱۹]. اثرات کوانتومی، به کمک طول موج گرمایی دوبروی^{۱۲} ذرات سازنده ی پلاسما قابل اندازه‌گیری می‌باشند. این طول موج به وسیله‌ی رابطه‌ی

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{mv_T} \quad (16.1)$$

بیان می‌شود، که تقریباً گستردگی گرمایی تابع موج ذرات را نشان می‌دهد. برای رژیم کلاسیکی طول موج دوبروی ذرات، بسیار کوچک است بنابراین آن‌ها را می‌توان به عنوان شبه نقطه در نظر گرفت، پس هیچ‌گونه همپوشانی بین توابع موج و نیز تداخل کوانتومی وجود ندارد [۱۰]. این ویژگی را به صورت رابطه‌ای بیان می‌کنیم که جز یکی از شروط اساسی برای پلاسماهای کوانتومی است، یعنی:

$$n\lambda_B^3 \geq 1 \quad (17.1)$$



شکل ۵.۱: بروز اثرات کوانتومی در پلاسما

هرچه جرم کوچکتر باشد طول موج دوبروی زیادتر می‌شود. زمانی که طول موج دوبروی بزرگتر یا مساوی میانگین فاصله‌ی متوسط بین ذرات باشد اثرات کوانتومی مطرح می‌شود. همانگونه که در شکل ۵.۱ مشاهده می‌کنیم، با افزایش چگالی و کاهش دما، طول موج دوبروی ذرات قابل مقایسه با فاصله‌ی متوسط بین ذرات می‌شود و در نتیجه نیروهای کوانتومی ظهور پیدا می‌کنند و شاهد همپوشانی بین توابع موج و تداخل کوانتومی هستیم. لازم به ذکر است رابطه‌ی بین چگالی پلاسما و فاصله‌ی متوسط بین ذرات به صورت $d = n^{-1/3}$ است. در مکانیک آماری، معمولی گازها، زمانی اثرات کوانتومی مهم است که دما پایین‌تر از دمای فرمی باشد که به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$K_B T_F \equiv E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} \quad (18.1)$$

^{۱۲}de-Broglie

E_F انرژی فرمی سیستم و مربوط به تغییرات توزیع ماکسول - بولتزمن به فرمی - دیراک از دمای T به T_F می‌باشد. همچنین زمانی که الکترون‌ها به سوی تبهگنی پیش می‌روند اثرات کوانتومی مطرح می‌شود که این تبهگنی را به صورت نسبت دمای فرمی به دمای پلاسما (پارامتر بدون بعد تبهگنی) به صورت [۴۰]:

$$\chi = \frac{T_F}{T} = \frac{1}{4} (3\pi^2)^{2/3} (n\lambda_B^3)^{2/3} \quad (19.1)$$

بیان می‌کنیم.

دمای فرمی نقش برجسته‌ای در پلاسمای کوانتومی ایفا می‌کند، اگر پارامتر تبهگنی بزرگتر یا مساوی با یک باشد ($\chi \geq 1$) اثرات کوانتومی مهم می‌شود.

حال می‌خواهیم مقیاس‌های سرعت، زمان و فضای نوعی را برای یک پلاسمای کوانتومی نسبت به پارامترهای بدون بعد تعیین کنیم.

در این جا یادآور می‌شویم زمانی که $T \gg T_F$ در رژیم کلاسیکی و هنگامی که $T \ll T_F$ در رژیم کوانتومی بحث می‌کنیم [۲۰].

قابل ذکر است در محدوده‌ی دماهای بسیار پایین سرعت‌های گرمایی بی معنا می‌شوند، پس باید صورت جدیدی از سرعت که توزیع فرمی - دیراک را مشخصه‌سازی می‌کند تعریف کنیم. این سرعت به نام سرعت فرمی-دیراک^{۱۳} نام‌گذاری می‌شود و به کمک رابطه‌ی زیر بیان می‌شود [۲۱]:

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m} \right)^{1/2} = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (20.1)$$

با بهره‌گیری از فرکانس پلاسما و سرعت فرمی می‌توان نوعی مقیاس طول به شکل

$$\lambda_F = \frac{v_F}{\omega_p} \quad (21.1)$$

تعریف نمود که مشابه کوانتومی طول دمای است. همانند طول دمای، λ_F توصیف کننده‌ی طول مقیاس حفاظ الکتروستاتیک در پلاسمای کوانتومی می‌باشد.

در رابطه با پلاسمای کوانتومی با چند اثر فیزیکی متفاوت روبه‌رو هستیم:

الف) اثرات پراکندگی که ناشی از عدم جایگزیدگی ذرات در فضای فاز است.

ب) به دلیل تمایزناپذیری ذرات کوانتومی، توزیع تعادلی از توزیع ماکسول - بولتزمن به توزیع فرمی - دیراک تغییر می‌کند.

ج) ذراتی مانند الکترون و پوزیترون دارای اندازه حرکت ذاتی اسپین هستند که با میدان‌های مغناطیسی مربوط به دو قطبی‌ها برهم‌کنش کرده و دینامیک پلاسما را تغییر می‌دهد.

^{۱۳}Fermi velocity

۴.۲.۱ پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی

حال به معرفی سومین شرط اساسی پلاسمای کوانتومی می‌پردازیم که به صورت نسبت انرژی برهم‌کنشی E_{int} به میانگین انرژی E_{kin} می‌باشد که پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی^{۱۴} نام دارد. انرژی برهم‌کنشی همانند حالت کلاسیکی تعریف می‌شود اما انرژی جنبشی با انرژی فرمی داده می‌شود ($E_{int} = E_F$) با توصیفات بالا پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی را می‌توان به شکل رابطه‌ی:

$$g_Q = \frac{E_{int}}{E_F} = \frac{2}{(3\pi^2)^{2/3}} \frac{e^2 m}{\hbar^2 \epsilon_0 n^{1/3}} \sim \left(\frac{1}{n \lambda_F^3} \right)^{2/3} \sim \left(\frac{\hbar \omega_p}{E_F} \right)^2 \quad (22.1)$$

نوشت [۱۰].

با جایگذاری $\lambda_F \rightarrow \lambda_D$ در عبارت سوم رابطه‌ی فوق به حد کلاسیکی خواهیم رسید. اما جمله‌ی آخر بسیار جالب است، چرا که هیچ‌گونه مشابه کلاسیکی ندارد. این عبارت بیانگر نسبت انرژی پلاسما به انرژی فرمی است. در رژیم کوانتومی بدون برخورد (که اثرات میدان متوسط غالب است) پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی کوچک است، در حالی که این پارامتر (که نسبت به چگالی سنجیده می‌شود) در حالت کلاسیکی بزرگ است. این امر در ابتدا تعجب‌آور است اما بنابر اصل طرد پائولی (دو فرمیون نمی‌تواند هم‌زمان یک حالت کوانتومی یکسان را اشغال کنند) قابل درک است. در یک گاز فرمیونی کاملاً تبهگن همه‌ی حالت‌های با انرژی پایین اشغال می‌شوند، اگر تعداد ذراتی به این گاز اضافه شود لزوماً حالت‌های با انرژی بالا اشغال می‌شود، بنابراین با افزایش چگالی گاز، متوسط انرژی جنبشی افزایش یافته و باتوجه به رابطه‌ی (۲۲.۱) مقدار g_Q کاهش می‌یابد. بنابراین زمانی که $g_Q \leq 1$ باشد اثرات کوانتومی مهم می‌شود [۱۶].

۵.۲.۱ پارامترهای بدون بعد و نقش آن‌ها در پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی

تاکنون سه پارامتر بدون بعد را تعریف کردیم. با بررسی این پارامترها نوع پلاسما از نقطه نظر کلاسیکی یا کوانتومی بودن را مطالعه می‌کنیم. همچنین می‌توانیم در مورد برخوردی بودن یا غیر برخوردی بودن آن بحث کنیم. این سه پارامتر عبارتند از:

۱. پارامتر جفت‌شده‌ی کلاسیکی (g_C)

۲. پارامتر جفت‌شده‌ی کوانتومی (g_Q)

۳. پارامتر تبهگنی (χ)

در بخش‌های قبل به طور اجمال به معرفی این پارامترها پرداختیم. در این بخش به طور مفصل در مورد پارامترهای بدون بعد و نقش آن‌ها در پلاسما صحبت خواهیم کرد. پارامترهای مذکور تابع دما و چگالی هستند. در شکل ۶.۱ وابستگی این پارامترها به دما و چگالی در رژیم‌های گوناگون پلاسما نشان داده شده است. نمودار لگاریتمی ذکر شده به چهار ناحیه تقسیم می‌شود. نواحی کلاسیکی در بالای خط

^{۱۴}quantum coupling parameter

به دو ناحیه χ ی برخوردی و غیر برخوردی محدود شده‌اند. ناحیه $\chi \leq 1$ ناحیه کلاسیکی و ناحیه $\chi \geq 1$ ناحیه کوانتومی را تشکیل می‌دهد.

در ناحیه کلاسیکی با توجه به اثرات گرمایی و پدیده برخورد بین ذرات پلاسما، دو ناحیه و لاسوف و بولتزمن را داریم. در ناحیه و لاسوف اثرات گرمایی غالب است و از برخورد ها صرف نظر می‌شود، همچنین شرط $g_C \leq 1$ برقرار است. به عبارت دیگر ناحیه و لاسوف همان ناحیه کلاسیکی غیربرخوردی می‌باشد. خط $g_C = 1$ مرز بین دو ناحیه کلاسیکی است و این ناحیه دارای چگالی تعداد ذرات پایین و گستره دمایی بالاست. پدیده های مربوط به این نواحی عبارتند از [۲۳]

۱. باد خورشیدی

۲. تاج خورشیدی

۳. هم جوشی توکوماک

۴. تخلیه الکتریکی

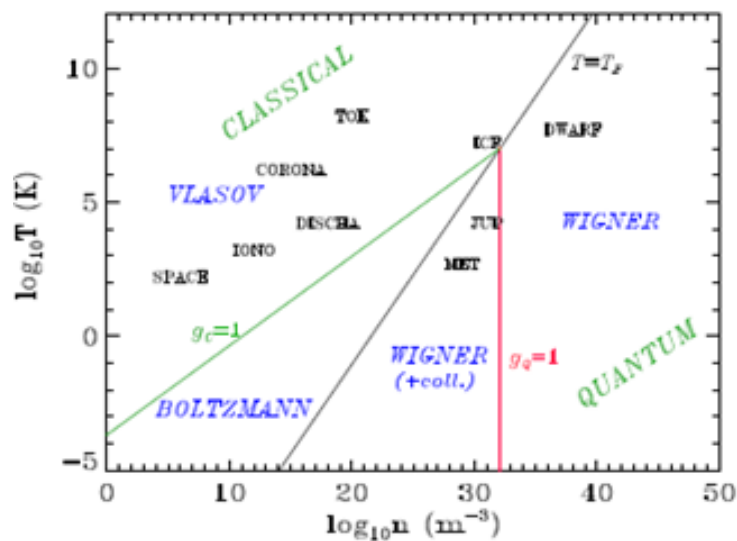
ناحیه $g_C \geq 1$ مربوط به ناحیه بولتزمن است: اگر در یک پلاسما کلاسیکی پارامتر جفت شدگی کلاسیکی بزرگتر از یک باشد انرژی داخلی در مقایسه با انرژی جنبشی بزرگتر شده و برخورد ها را نمی‌توان نادیده گرفت، پس این ناحیه کلاسیکی-برخوردی بولتزمن است که دارای دمای تقریباً بالا و چگالی تعداد ذرات کم است.

با شرط $\chi \geq 1$ وارد ناحیه کوانتومی می‌شویم که چگالی بالا و دمای پایین را داراست. ناحیه کوانتومی نیز با خط $g_Q = 1$ به دو ناحیه ی برخوردی و غیر برخوردی تقسیم می‌شود. در مکانی که برخورد های کولنی بین ذرات هم‌نام و غیرهم‌نام را در نظر می‌گیریم وارد ناحیه ویگنر-برخورد می‌شویم که دارای چگالی پایین می‌باشد و با شرط $g_Q \geq 1$ همراه است و الکترون‌های فلزی و هسته‌ی سیاره‌ی مشتری از پدیده‌های طبیعی آن است. و در پایان $g_Q \leq 1$ مربوط به ناحیه کوانتومی غیر برخوردی است که مربوط به چگالی زیاد است: اگر پلاسما کاملاً تبهگن باشد تمام ذرات در سطح فرمی و دارای انرژی فرمی هستند، و انرژی جنبشی (انرژی فرمی) بر انرژی داخلی سیستم غالب است. ستاره‌ی کوتوله ی سفید از پدیده‌های طبیعی این ناحیه است.

شایان ذکر است که در این نمودار خط $\chi = g_C = g_Q = 1$ مربوط به زمانی است که $T = T_F$ باشد.

۳.۱ هدف پایان نامه

پلاسما کوانتومی اولین بار توسط آلفون مطرح شد که امروزه مورد بررسی گسترده قرار گرفته است. همچنین پلاسماهای کوانتومی که در آن خواص کوانتومی ذرات پلاسما قابل ملاحظه است مورد توجه محققان قرار گرفته است.



شکل ۴.۱: نمودار پلازما در صفحه‌ی $\log n - \log T$

رفتار جمعی ذرات کوانتومی در یک میدان مغناطیسی می‌تواند جزئی از تئوری کلاسیکی مگنتوهیدرودینامیک باشد که مگنتو پلاسمای کوانتومی نامیده می‌شود. در این پروژه ابتدا به معرفی پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی پرداخته و معادلات ویگنر را به دست آورده، سپس به استخراج معادلات KdV و $KDVB$ پرداخته و ساختارهای ضربه‌گونه و سالی‌تونی را بررسی خواهیم کرد.

۴.۱ جمع بندی

در این فصل حالت چهارم ماده و دو ویژگی مهم آن یعنی شبه خنثائیت و رفتار جمعی را شرح دادیم و پارامترهای مهم پلازما (دما و چگالی) را مورد بررسی قرار دادیم. که در زیر آن‌ها را به طور خلاصه شرح می‌دهیم:

- پلاسمای کلاسیکی از ذرات غیر تبهگن (الکترون و یون) تشکیل شده‌اند با چگالی پایین و دمای تقریباً بالا این نوع پلازما را به این دلیل کلاسیکی می‌نامیم زیرا که ذرات تشکیل دهنده ی آن از تابع توزیع ذرات کلاسیکی یعنی تابع توزیع ماکسول-بولتزمن تبعیت می‌کند.
- پلاسمای کوانتومی از ذرات تبهگن (الکترون‌های تبهگن، پوزیترون‌های تبهگن و حفره‌های تبهگن) با چگالی بالا و دمای تقریباً پایین تشکیل شده‌اند و از تابع توزیع ذرات فرمی - دیراک که نوعی تابع توزیع ذرات کوانتومی است.
- زمانی پلازما کوانتومی است که سه شرط $n\lambda_B \geq 1$ و $\chi \geq 1$ و $g_Q \leq 1$ برقرار باشد.
- شرط $g_C = 1$ و $g_Q = 1$ دقیقاً مرز نواحی برخوردی و غیر برخوردی در پلاسمای به ترتیب کلاسیکی و کوانتومی را مشخص می‌کند.

- چنانچه $g_C \leq 1$ و $\chi \leq 1$ برقرار باشد با ناحیه‌ی کلاسیکی و غیر برخوردار و لاسوف سروکار داریم.
- با شرط $g_C \geq 1$ و $\chi \leq 1$ وارد ناحیه‌ی کلاسیکی و برخوردار بولتزن می‌شود.
- اگر $g_Q \geq 1$ و $\chi \geq 1$ با گاز الکترونی و کوانتومی سروکار داریم که غیر برخوردار است.
- و در حالت آخر $g_Q \geq 1$ و $\chi \geq 1$ با ناحیه‌ی کوانتومی و برخوردار ویگنر رو به رو هستیم.

فصل ۲

مدل‌های توصیف پلاسما و معادلات حاکم بر آن

۱.۲ مقدمه

همانطور که در فصل اول اشاره کردیم پلاسما کلاسیکی از ذرات غیر تبهگن با چگالی عددی پایین و دمای یونی و الکترونی نسبتا بالا تشکیل شده است، در حالی که پلاسما کوانتومی شامل الکترون‌ها و پوزیترون‌های تبهگن با چگالی عددی بسیار بالا و دمای نسبتا پایین است. یون‌ها نیز در پلاسما کوانتومی به دلیل جرم زیاد نسبت به الکترون‌ها، معمولا به عنوان ذرات پلاسمایی غیر تبهگن رفتار می‌کنند. همچنین گفته شد که پلاسما (کلاسیکی و کوانتومی) گستره‌ی وسیعی از دما و چگالی را در بر می‌گیرد. بنابراین برای بررسی رفتار پلاسما نیازمند ارائه‌ی مدل‌هایی هستیم که بتواند دینامیک پلاسما را به خوبی توصیف کند. منظورمان از مدل‌سازی حل معادلات حرکت توصیف کننده‌ی حالت پلاسما است که عموما با معادلات ماکسول (مربوط به میدان‌های الکترومغناطیسی) و معادلات پواسون (برای میدان‌های الکتروستاتیکی) جفت می‌باشند. بدین منظور تاکنون چندین مدل پیشنهاد شده است که هرکدام دارای نقاط قوت و ضعف هستند و بسته به شرایط مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳۵]. در این فصل مرور مختصری بر سه مدل اصلی و معادلات مربوطه خواهیم داشت. این سه مدل عبارتند از:

۱. مدل ذرات مستقل

۲. مدل سیالی

۳. نظریه‌ی جنبشی

۲.۲ مدل ذره‌ای

دانش دقیق درباره‌ی یک سیستم بس‌ذره‌ای نیازمند این است که مکان و سرعت همه‌ی ذرات سیستم را بدانیم. با توجه به اینکه چگالی یک پلاسما نوعی ممکن است در حدود 10^{12} جفت یون- الکترون

در cm^3 باشد و با در نظر گرفتن این مطلب که هر کدام از این ذرات مسیر پیچیده‌ای را طی می‌کنند، به نظر می‌رسد که نمی‌توان رفتار پلاسما را پیشگویی کرد. بنابراین برای بررسی آن مناسب است که از روش‌های آماری استفاده کنیم. لیکن گاهی پلاسما بسیار رقیق (تعداد ذرات تشکیل دهنده کم و در نتیجه چگالی پایین) است، بنابراین می‌توان مسیر حرکت هر ذره را به تنهایی مورد مطالعه قرارداد. مدل ذره‌ای ساده‌ترین مدل ارائه شده به منظور توصیف رفتار پلاسما می‌باشد، در این مدل، دینامیک تک تک ذرات در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با استفاده از نیروی لورنتس قابل بررسی می‌باشد. با بهره‌گیری از این مدل، می‌توان بسیاری از پارامترهای مربوط به هر ذره همانند بسامد سیکلوترونی، شعاع لارمور و سرعت‌های سوق را به دست آورد. علیرغم مزایای گفته شده، این مدل ارائه دهنده یک توصیف ابتدایی و خام از پلاسما که در بسیاری از موارد قابل استفاده نیست.

در این مدل دینامیک هر ذره با قانون نیروی لورنتس به شکل زیر توصیف می‌شود [۲۹]:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (1.2)$$

۳.۲ مدل سیالی

حرکت جمعی ذرات در پلاسما مانند اثر تنگش^۱ [۲۷] و نوسانات پلاسما به بهترین وجه در فرمول‌بندی خاصی بررسی می‌شود، بنابراین توصیف پلاسما به عنوان یک سیال کلاسیک می‌تواند از معادلات متعارفی پیروی کند ولی چون این سیال از نظر الکتریکی رسانا است بنابراین باید نیروهای الکترومغناطیسی را صریحا به حساب آورد.

حرکت ذرات با بارهای مثبت و منفی و حرکت دسته جمعی این ذرات می‌تواند میدان‌هایی را تولید کند و همچنین این میدان‌ها که بر روی مسیر ذرات اثر می‌گذارد ظاهر می‌گردد. این وضعیت‌ها بایستی با متغییر زمان بررسی شوند.

حدود چگالی پلاسما 10^{12} یون - الکترون در cm^3 است که هریک از این ذرات مسیر پیچیده‌ای را دنبال می‌کنند و اگر مجبور باشیم که مسیر هر ذره را دنبال کنیم عملا پیش‌بینی وضعیت بسیار دشوار و ناممکن است و چنین روشی در حل مسائل، عملی نیست. اما چون قسمت اعظمی در حدود ۸۰٪ یا ۸۵٪ از پدیده‌های پلاسما که در آزمایشگاه دیده می‌شود می‌تواند از یک مدل پیروی کند، این همان مدلی است که در مکانیک سیالات به کار برده می‌شود که در آن هویت ذره قابل صرف‌نظر کردن است و تنها حرکت المانی از سیال مورد بررسی است. البته لازم به ذکر است که در حالت پلاسما، سیالات شامل بارهای الکتریکی هستند.

در یک سیال معمولی ذرات در اثر برخوردهای مکرر بین خودشان در یک عنصر سیال ننگه داشته شده و باهم حرکت می‌کنند. با وجود اینکه در پلاسما این برخوردها کمتر اتفاق می‌افتد یک چنین مدلی برای پلاسما هم کاربرد دارد. در این مدل به جای ذره منفرد و محاسبه‌ی سرعت تک تک ذرات، حرکت سیالی و سرعت متوسط در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر پلاسما براساس کمیت‌های ماکروسکوپی نظیر سرعت‌های لحظه‌ای، توزیع چگالی، سرعت متوسط و انرژی متوسط ذرات توصیف می‌شود، در

^۱Pinch effect

مورد پلاسما سیال حاوی بارهای الکتریکی می‌باشد. در حالی که در سیال معمولی، برخوردهای فراوان بین ذرات آن‌ها را در یک جز سیال نگه می‌دارد تا با هم حرکت کنند. روابط مربوط به مدل سیالی برای پلاسما کلاسیکی از معادلات هیدرودینامیک کلاسیکی و الکترومغناطیس و برای پلاسما کوانتومی از مفاهیم کوانتومی تابع موج استخراج می‌شود.

۴.۲ مدل جنبشی

مدل دیگری برای توصیف پلاسما مدل نظریه‌ی جنبشی است. در این مدل از تابع توزیع اندازه حرکت ذرات استفاده می‌شود. یعنی به جای محاسبه‌ی سرعت متوسط، از تابع توزیع سرعت در محدوده‌ی v تا $v + dv$ استفاده می‌کنیم. این مدل در قیاس با مدل سیالی از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد.

۵.۲ مدل‌های توصیف پلاسما کلاسیکی

۱.۵.۲ مدل سیالی و معادلات حاکم بر پلاسما کلاسیکی

معادله‌ای که حرکت سیال معمولی را بیان می‌کند عبارت است از: معادله‌ی ناویر-استوکس است. این معادله به شکل رابطه‌ی [۳۹]:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (۲.۲)$$

می‌باشد، که در آن ρ چگالی، u سرعت، P فشار سیال و ν فرکانس برخورد می‌باشد. اما معادله‌ی توصیف کننده‌ی پلاسما کلاسیکی به شکل زیر است [۱۱]:

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (۳.۲)$$

دومین معادله از سری معادلات حرکت سیال، معادله‌ی پیوستگی است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (۴.۲)$$

روابط (۳.۲) و (۴.۲) به همراه معادلات ماکسول به شکل زیر [۳۴]:
در خلا:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \sigma \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (۵.۲)$$

و در محیط مادی:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \sigma \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}\quad (۶.۲)$$

دسته معادلات مدل سیالی را تشکیل می‌دهند.

۲.۵.۲ مدل نظریه‌ی جنبشی برای پلاسمای کلاسیکی

دمای بالا و چگالی پایین از مشخصه‌های بارز پلاسمای کلاسیکی است. سرعت ذرات در پلاسمای کلاسیکی از تابع توزیع ماکسول - بولتزمن پیروی می‌کند. بنابراین در این پلاسما برخورد به ندرت رخ می‌دهد، و انحراف از تعادل گرمایی در مدت زمان‌های طولانی باقی می‌ماند که این فرآیند باعث انحراف تابع توزیع ذرات از توزیع ماکسولی می‌شود، و ناپایداری پلاسما را به همراه دارد. برای جلوگیری از بروز این ناپایداری از مدل نظریه‌ی جنبشی بهره می‌گیریم.

۳.۵.۲ تابع توزیع ماکسول - بولتزمن

تابع توزیع ماکسول - بولتزمن به صورت معادله‌ی زیر نمایش داده می‌شود:

$$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) \quad (۷.۲)$$

که مولفه‌های سرعت بین v و $v + dv$ می‌باشد. همچنین چگالی به صورت رابطه‌ی:

$$n(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, v, t) d^3v \quad (۸.۲)$$

یا به شکل معادل:

$$n(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(r, v, t) \quad (۹.۲)$$

در می‌آید.

انرژی به صورت:

$$\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (۱۰.۲)$$

و تابع توزیع سرعت آن به صورت :

$$f(v_x, v_y, v_z) = A \exp\left(-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/K_B T\right) \quad (11.2)$$

بنابراین چگالی به صورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$n(r, t) = A \int \exp\left(-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/K_B T\right) d^3v \quad (12.2)$$

با حل انتگرال فوق، تابع چگالی به صورت زیر نتیجه می‌شود :

$$n(r, t) = A \left[\left(\frac{2\pi K_B T}{m} \right)^{3/2} \right] \quad (13.2)$$

اگر تابع توزیع به یک بهنجار باشد، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(r, v, t) dv = 1 \quad (14.2)$$

در این صورت ضریب بهنجارش A به شکل زیر خواهد بود:

$$A = n \left(\frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{3/2} \quad (15.2)$$

از مجموعه روابط فوق، تابع توزیع ماکسول - بولتزمن را به شکل زیر بدست می‌آوریم [۱۰]:

$$f_m = \left(\frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-v^2}{v_{th}^2}\right) \quad (16.2)$$

که در این رابطه $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ و $v_{th} = \left(\frac{2K_B T}{m}\right)^{1/2}$ هستند. همچنین یادآوری می‌کنیم که K_B ثابت بولتزمن، T دمای پلازما و v_{th} سرعت گرمایی ذرات پلازما است.

۶.۲ مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی

مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی بر مبنای معادله‌ی شرودینگر برای توابع موج ذرات تشکیل دهنده می‌باشد. در تمام این مدل‌ها سرعت فاز خیلی کوچکتر از سرعت نور است، همچنین اثرات نسبیتی را نادیده می‌گیریم. در پلاسمای کوانتومی تمام ذرات کوانتومی، و متشکل از فرمیون‌ها و بوزون‌هاست که دارای تابع توزیع کوانتومی هستند. بنابراین از مفاهیم احتمال استفاده می‌کنیم. مدل اساسی برای توصیف مساله‌ی N جسمی کوانتومی، معادله‌ی شرودینگر تابع موج $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ مربوط به سیستم N ذره‌ای می‌باشد. حل عمومی این معادله بسیار دشوار می‌باشد (حل دقیق آن برای مجموعه‌های

شامل بیش از دو ذره تا بحال ممکن نشده است). به همین جهت محققین به دنبال روش‌های تقریبی برای حل این نوع مسائل هستند. بعضی از این روش‌ها بر تابع موج بس‌ذره‌ای استوار هستند. مثل روش هارتری^۲ و روش هارتری فوک^۳ [۳۱] و بعضی دیگر به چگالی تک‌ذره‌ای یا ماتریس‌های چگالی ذرات وابسته هستند که مهمترین آن‌ها نظریه‌ی تابعی چگالی^۴ یا (DFT) است. در این فصل دو تقریب هارتری و هارتری فوک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

زمانی که پارامتر جفت شده‌ی کوانتومی g_Q کوچک باشد، شاهد پیدایش اثرات کوانتومی خواهیم بود. مجموعه‌ی N جسمی تابع موج، مخلوط کوانتومی (یا حالت آمیخته کوانتومی) نامیده می‌شود و معمولاً با ماتریس چگالی به صورت رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود:

$$\rho(x, y, z) = \sum_{\alpha=1}^N P_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x, t) \varphi_{\alpha}^*(y, t) \quad (17.2)$$

همه‌ی توابع موج بهنجار می‌باشند $\int |\varphi_{\alpha}|^2 dx = 1$ همانطور که اشاره خواهیم کرد دو مدل عمده برای توصیف پلاسما کوانتومی شامل مدل ویگنر و هارتری هم‌ارز مدل‌هایی هستند که فرمول‌بندی آن‌ها بر مبنای ماتریس چگالی می‌باشد. مدل ویگنر که بر اساس سیستم ویگنر-پواسون توصیف‌کننده‌ی رفتار آماری پلاسما است و هم‌ارز مدل جنبشی در پلاسما کلاسیکی است. همچنین مدل هارتری رفتار هیدرودینامیکی پلاسما را با استفاده از سیستم شرودینگر-پواسون توضیح می‌دهد و معادل مدل سیالی در پلاسما کلاسیکی می‌باشد [۳۲].

۱.۶.۲ مدل هارتری

یک تقریب برای حل دستگاه‌های الکترونی تقریب هارتری می‌باشد. توابع الکترونی در این تقریب بهنجار بوده ولی متعامد نیستند و اصل طرد پائولی نیز رعایت نمی‌شود. در تقریب هارتری، هر ذره بوسیله‌ی یک تابع موج تک‌ذره‌ای (که از معادله شرودینگر تبعیت می‌کند) توصیف می‌شود، و نیروی الکتروستاتیکی که بر آن وارد می‌شود از معادله‌ی پواسون منتج می‌شود [۳۰]. مدل هارتری می‌تواند در یک مدل فشرده‌تر با استفاده از توابع ویگنر نوشته شود. نمایش ویگنر یک ابزار مفید در بیان مکانیک کوانتومی در یک ساختار فضای فاز است.

تابع موج کلی برای سیستم N ذره‌ای را $\phi(\vec{r}_1 s_1, \vec{r}_2 s_2, \dots, \vec{r}_N s_N)$ در نظر می‌گیریم. که \vec{r}_i ها و s_i ها به ترتیب نشان دهنده موقعیت و اسپین ذرات می‌باشند و معادله شرودینگر این سیستم‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$H\phi = \sum_{i=1}^N \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \phi - ze^2 \sum_{\vec{R}} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{R}|} \phi \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \phi = E\phi \quad (18.2)$$

^۱Hartree

^۲Hartree-Fock

^۴Density-Functional Theory

که جمله‌ی اول مربوط به انرژی جنبشی، جمله‌ی دوم مربوط به انرژی پتانسیل در حضور یون‌ها و جمله‌ی سوم مربوط به برهم‌کنش ذرات با یکدیگر می‌باشد. تابع موج مربوط به هر ذره را با ϕ_i نشان می‌دهیم. بنابراین چگالی بار ذره‌ای کل سیستم به صورت:

$$\rho(r) = -e \sum_i |\phi_i(r)|^2 \quad (19.2)$$

می‌باشد که جمع روی تمام ترازهای الکترونی است. بنابراین برای هر تابع موج ذره، معادله شرودینگر به صورت زیر به دست می‌آید:

(20.2)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_i(\vec{r}_i) + U^{ion}(\vec{r}) \phi_i(\vec{r}) + \left[e^2 \sum_j \int d\vec{r}' \left| \phi_j(\vec{r}') \right|^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \phi_i(\vec{r}) = \epsilon_i \phi_i(\vec{r})$$

که به معادله‌ی هارتری معروف است. در واقع هارتری تابع موج ϕ کل سیستم را به صورت حاصل ضرب توابع موج تک‌ذره‌ای در نظر می‌گیرد. یعنی:

$$\phi(\vec{r}_1 s_1, \vec{r}_2 s_2, \dots, \vec{r}_N s_N) = \phi_1(\vec{r}_1 s_1) \phi_2(\vec{r}_2 s_2) \dots \phi_N(\vec{r}_N s_N) \quad (21.2)$$

معایب مدل هارتری متقارن بودن توابع آن‌ها است که برای دستگاه فرمیونی مناسب نمی‌باشد، به عبارت دیگر اصل طرد پائولی در نظریه‌ی هارتری صدق نمی‌کند. به بیان دیگر چون این تقریب اصل طرد را ارضا نمی‌کند برای محاسبات کوانتومی نمی‌تواند مفید باشد. از این رو در ادامه، تقریب هارتری فوک را معرفی می‌کنیم.

۲.۶.۲ مدل هارتری - فوک و اسلیتر

اصل طرد پائولی می‌گوید دو فرمیون نمی‌توانند چهار عدد کوانتومی یکسان داشته باشند و یا اینکه در یک حالت یکسان انرژی واقع شوند. بنابراین لازم است تابع موج بس‌ذره‌ای پادمتقارن شود. که در حالت N ذره‌ای تابع موج را به صورت یک دترمینان به نام دترمینان اسلیتر^۵ می‌نویسند و در این صورت تعویض دو ذره، تعویض دو ستون دترمینان را در بر دارد و باعث می‌شود که علامت آنرا تغییر دهد. بنابراین ϕ کل N ذره‌ای به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۰]:

$$\phi_{HF}(r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_N s_N) = \frac{1}{N!} \begin{pmatrix} \phi_1(r_1 s_1) & \dots & \phi_1(r_N s_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(r_1 s_1) & \dots & \phi_N(r_N s_N) \end{pmatrix} \quad (22.2)$$

^۵Slater

با جایگذاری این تابع موج در محاسبه‌ی انرژی که به کمک عملگر هامیلتونی انجام می‌شود و با کمینه کردن آن و استفاده از حساب وردشی به معادله‌ی زیر دست می‌یابیم:

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_i(\vec{r}) + U^{ion}(\vec{r})\phi_i(\vec{r}) + U^{el}(\vec{r})\phi_i(\vec{r}) \\ & - \sum_j \int d\vec{r}' \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \phi_j^*(\vec{r}')\phi_i(\vec{r}')\phi_j(\vec{r})\delta_{si}\delta_{sj} = \varepsilon_i\phi_i(\vec{r}) \end{aligned} \quad (23.2)$$

به این دسته معادلات، معادلات هارتری - فوک گویند که نسبت به معادله‌ی هارتری یک جمله اضافه دارند. یعنی جمله‌ی چهارم که به جمله‌ی تبدلی^۶ معروف است. در این تقریب فرض بر این است که می‌توان برهم کنش اسپینی را از مختصات فضایی جدا کرد. تقریب هارتری - فوک همان تقریب هارتری است با این تفاوت که یک جمله‌ی تبدلی ناشی از برهمکنش اسپین الکترون‌ها به آن اضافه شده است که باعث کاهش انرژی تک ذره می‌شود.

۳.۶.۲ مدل سیالی و معادلات حاکم برای پلاسمای کوانتومی

در پلاسمای کوانتومی، معادلات مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی *QMHD* از معادلات پایستگی الکترون، تکانه‌ی الکترون و معادله‌ی پواسون (مدولاسیون تابع موج الکترون در معادله‌ی شرودینگر غیر خطی) استخراج می‌شود. معادله‌ی شرودینگر غیر خطی همان معادله‌ی شرودینگر در مکانیک کوانتومی می‌باشد، با این تفاوت که پتانسیل در جمله‌ی آخر به φ وابسته و باعث غیر خطی شدن معادله می‌شود. مثال‌هایی از بهره‌گیری این معادله در زیر ذکر شده است:

۱. در مکانیک سیالات کوانتومی برای معادله‌ی یک موج غیرخطی در سیال

۲. در پلاسما برای بررسی تعادل و پایداری سالیتون‌ها.

همانطور که اشاره کردیم یک رویکرد کاملاً معادل با سیستم ویگنر - پواسون، حل معادله‌ی پواسون به همراه N معادله‌ی شرودینگر مستقل از یکدیگر بوده و N تابع موج به صورت مستقیم در آن‌ها صدق می‌کند. دو معادله‌ی شرودینگر و پواسون که از مدل هارتری به دست می‌آیند به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x^2} - e\phi\varphi_\alpha \quad (24.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha |\varphi_\alpha|^2 - n_0 \right) \quad (25.2)$$

^۶exchange

۴.۶.۲ روش مادلانگ در مدل سیالی

ذرات تشکیل دهنده‌ی یک پلاسمای کوانتومی مقید نبوده و از خود رفتاری شبیه به سیال نشان می‌دهند، به همین دلیل پلاسمای کوانتومی را شبه سیال می‌نامند. بنابراین با بهره‌گیری از تابع موجی که خاصیت سیالی پلازما را داراست استفاده کرده و تابع موج را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varphi_\alpha = A_\alpha \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \quad (26.2)$$

چگالی n_α و سرعت u_α هر جریان، باروابط زیر تعیین می‌شود:

$$n_\alpha = |\varphi_\alpha|^2 = A_\alpha^2 \quad (27.2)$$

$$u_\alpha = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (28.2)$$

با معرفی معادلات فوق طبق روابط (۲۰.۲) و (۲۲.۲) و همچنین با جایگذاری در روابط (۲۴.۲) و (۲۵.۲) و جداسازی اجزای حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x^2} - e\phi \varphi_\alpha \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) + i\hbar \times \frac{i}{\hbar} A_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) + \frac{i}{\hbar} A_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \right] - e\phi \varphi_\alpha \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) - A_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^2} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{i}{\hbar} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x} \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) - \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{i}{\hbar} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x} \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{i}{\hbar} A_\alpha \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x^2} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) + \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{1}{\hbar^2} A_\alpha \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x}\right)^2 \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) - e\phi \varphi_\alpha \end{aligned}$$

قسمت موهومی را جدا کرده، داریم:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{i}{\hbar} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x} \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{i}{\hbar} A_\alpha \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x^2} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

i را از طرفین حذف و طرفین را بر \hbar تقسیم کرده، داریم:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) = -\frac{1}{m} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x} \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) - \frac{1}{2m} A_\alpha \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x^2} \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right)$$

حال ضریب $\exp(is_\alpha/\hbar)$ را از طرفین حذف و طرفین را در $\sqrt{A_\alpha}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt{A_\alpha} \frac{\partial(A_\alpha)}{\partial t} = -\frac{\sqrt{A_\alpha}}{m} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x} \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} - \frac{1}{m} A_\alpha \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x^2} \quad (29.2)$$

از طرفی:

$$\sqrt{A_\alpha} \frac{\partial(A_\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A_\alpha)^2 \quad (30.2)$$

رابطه اثبات می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_\alpha u_\alpha) = 0 \quad (31.2)$$

حال قسمت حقیقی:

φ_α را از طرفین حذف و در منفی ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} A_\alpha \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \right)^2 + e\phi$$

عملگر $\partial/\partial x$ و $1/m$ را در طرفین ضرب کرده:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \right) + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \right) = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 A_\alpha / \partial x^2}{A_\alpha} \right)$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_\alpha} / \partial x^2}{\sqrt{n_\alpha}} \right) \quad (32.2)$$

۵.۶.۲ مدل نظریه‌ی جنبشی برای پلاسمای کوانتومی

در بخش‌های قبل تابع توزیع سرعت (ماکسول - بولتزمان) برای پلاسمای کلاسیکی ذراتی با مکان و سرعت‌های متفاوت را معرفی کردیم. تعریف ذکر شده برای ذرات کوانتومی کاملاً تبه‌گن کاربرد ندارد. بنابراین نظریه‌ی جنبشی برای پلاسمای کلاسیکی و پلاسمای کوانتومی باهم تفاوت دارد.

طبق اصل عدم قطعیت امکان داشتن دقیق تکانه و مکان به طور هم زمان برای ذرات در یک لحظه وجود ندارد، در این بخش به معرفی تابع جدیدی براساس احتمال مکان ذرات و سرعت می‌پردازیم.

همانطور که در بخش قبل اشاره کردیم در تقریب هارتری، هر الکترون با یک تابع موج تک ذره‌ای که از معادله‌ی شرودینگر و نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آن از معادله‌ی پواسون تبعیت می‌کند قابل توصیف است. تابع معرفی شده که در بخش بعدی به طور مفصل آن را شرح می‌دهیم تابع توزیع ویگنر می‌باشد.

۶.۶.۲ تابع توزیع ویگنر

تابع ویگنر در فضای فاز برحسب متغیرهای (u, x, t) معرفی می‌شود که برای تابع موج تک ذره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x, v, t) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m}{\sqrt{\pi\hbar}} p_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\alpha}^* \left(x + \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\hbar}}, t \right) \varphi_{\alpha} \left(x - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\hbar}}, t \right) \exp \left(\frac{imv\lambda}{\hbar} \right) d\lambda \quad (33.2)$$

رابطه‌ی ذکرشده در بالا فقط به حالت تک بعدی اختصاص نداشته بلکه به حالت سه بعدی نیز تعمیم می‌یابد.

مقدار انتظاری کمیت:

$$\langle A \rangle = \frac{\int \int f(x, v) A(x, v) dx dv}{\int \int f(x, v) dx dv} \quad (34.2)$$

همچنین چگالی فضایی در حالت کوانتومی با بهره‌گیری از تابع توزیع ویگنر به صورت زیر می‌باشد:

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \quad (35.2)$$

۷.۶.۲ به دست آوردن تابع توزیع ویگنر از معادله‌ی ولاسوف

از معادله‌ی ولاسوف بدون برخورد حالت کلاسیکی داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f + \frac{f}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (36.2)$$

$$\frac{f}{m} = a = \frac{dv}{dt} \quad (37.2)$$

از طرفی:

$$\frac{f}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \int \frac{\partial v'}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v'} \sigma(v - v') dv' \quad (38.2)$$

حال با جایگذاری (۳۷.۲) در (۳۸.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v} = \int \frac{\partial v'}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v'} \sigma(v - v') dv' \quad (39.2)$$

همچنین:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{a \times m}{m} = \frac{F}{m} = \frac{e \times E}{m} = \frac{-e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (40.2)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۳۹.۲) به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v} = \int \frac{-e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial v'} \sigma(v - v') dv' \quad (۴۱.۲)$$

نیز داریم:

$$\sigma(v - v') = \frac{m}{\sqrt{\pi} \hbar} \int \exp\left(\frac{im(v - v')\lambda}{\hbar}\right) d\lambda \quad (۴۲.۲)$$

و همچنین:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(x'') - \phi(x')}{x'' - x'} = \frac{\phi\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) - \phi\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda} \quad (۴۳.۲)$$

که در آن $x' = x - \lambda/2$ و $x'' = x + \lambda/2$. بنابراین معادله‌ی (۴۱.۲) به شکل زیر خواهد شد:

$$\int \frac{-e}{m} \frac{\phi\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) - \phi\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial v'} \int \frac{m}{\sqrt{\pi} \hbar} \exp\left(\frac{im(v - v')\lambda}{\hbar}\right) d\lambda dv' \quad (۴۴.۲)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۳۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v'} &= im \frac{\lambda}{\hbar} f(x, v', t) \\ f(x, v', t) &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{m}{\sqrt{\pi} \hbar} p_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\alpha}^*\left(x + \frac{\lambda}{2}, t\right) \varphi_{\alpha}\left(x - \frac{\lambda}{2}, t\right) \exp\left(imv' \frac{\lambda}{\hbar}\right) d\lambda \end{aligned} \quad (۴۵.۲)$$

بنابراین و با توجه به مجموعه روابط فوق، معادله‌ی ویگنر - پواسون به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{em}{\sqrt{\pi} i \hbar} \int \int d\lambda dv' \exp\left(\frac{im(v - v')\lambda}{\hbar}\right) \left[\phi\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) - \phi\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)\right] f(x, v', t) = 0 \quad (۴۶.۲)$$

۸.۶.۲ رابطه‌ی پاشندگی با استفاده از معادله‌ی ویگنر - پواسون

برای به دست آوردن رابطه‌ی پاشندگی ویگنر - پواسون باید داشته باشیم $\varepsilon(\omega, k) = 0$ که ε ثابت دی الکتریک نامیده می‌شود. بدین منظور ابتدا معادله‌ی پواسون را خطی‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + \phi_1) \right] = \frac{e}{\varepsilon_0} [(n_0 + n_1)_i - (n_0 + n_1)_e] \quad (۴۷.۲)$$

فرض ما این است که:

$$\phi_0 = const \Rightarrow \frac{d\phi_0}{dx} = 0 \quad (۴۸.۲)$$

در حالت تعادل و فرض ساکن بودن یون‌ها $n_{\lambda i} = 0$ ، $n_{\lambda e} = n_{\lambda i}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi_{\lambda}) \right] = \frac{e}{\epsilon_0} (-n_{\lambda e}) \quad (49.2)$$

با اعمال تبدیل فوریه به رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$ik(ik\phi_{\lambda}) = -\frac{e}{\epsilon_0} n_{\lambda e} \Rightarrow k^2 \phi_{\lambda} = \frac{e}{\epsilon_0} n_{\lambda e} \quad (50.2)$$

با قرار دادن (35.2) در (50.2) خواهیم داشت:

$$k^2 \phi_{\lambda} = \frac{e}{\epsilon_0} \int f_{\lambda} dv$$

از سوی دیگر با توجه به (43.2) داریم:

$$\phi \left(x + \frac{\lambda}{2} \right) - \phi \left(x - \frac{\lambda}{2} \right) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\lambda E(x, t) = -\lambda(ik)\phi \quad (51.2)$$

حال به کمک بسط

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (52.2)$$

می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{ik\lambda}{2} \right) &= 1 + \frac{ik\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{ik\lambda}{2} \right)^2 + \dots \\ \exp \left(\frac{-ik\lambda}{2} \right) &= 1 - \frac{ik\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{ik\lambda}{2} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (53.2)$$

در نتیجه:

$$\exp \left(\frac{ik\lambda}{2} \right) - \exp \left(\frac{-ik\lambda}{2} \right) = 1 - 1 + \frac{ik\lambda}{2} + \frac{ik\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{ik\lambda}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{ik\lambda}{2} \right)^2 + \dots \simeq ik\lambda \quad (54.2)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (46.2) خواهیم داشت:

$$(55.2)$$

$$\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} + \frac{em}{2\pi i \hbar^2} \int \int \exp \left(\frac{im(v-v')\lambda}{\hbar} \right) \exp \left[\left(\frac{ik\lambda}{2} \right) - \exp \left(\frac{-ik\lambda}{2} \right) \right] \phi(k) F(v') dv' d\lambda = 0$$

از سوی دیگر:

$$\int \exp(i(k-k')x) dx = 2\pi \sigma(k-k') \quad (56.2)$$

در نتیجه :

$$\int \exp\left(i\lambda\left(\frac{m(v-v')}{\hbar} + \frac{k}{\gamma}\right)\right) d\lambda = \int \exp\left(\frac{i\lambda(\gamma mv - \gamma mv' + \hbar k)}{\gamma \hbar}\right) d\lambda$$

$$= \gamma \pi \hbar \sigma \left(mv + \frac{\hbar k}{\gamma} - mv'\right) \quad (57.2)$$

با قرار دادن در رابطه‌ی (55.2) و بسط عبارت نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} + \frac{em}{\gamma \pi i \hbar \gamma} (\gamma \pi \hbar) \int \left[\sigma \left(mv + \frac{\hbar k}{\gamma} - mv'\right) - \left(\sigma mv - \frac{\hbar k}{\gamma} - mv'\right) \right] \phi(k) F(v') dv' = 0 \quad (58.2)$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\int \sigma(k - k') F(k') dk' = F(k) \quad (59.2)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} + \frac{em}{i \hbar} \left[F\left(p + \frac{\hbar k}{\gamma}\right) - F\left(p - \frac{\hbar k}{\gamma}\right) \right] \phi(k) = 0 \quad (60.2)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که مشتق پتانسیل برابر است با منفی انرژی $(\frac{\partial \phi}{\partial x} = -E(k, t))$ و نیز داریم که :

$$-\lambda(ik)\phi(k) = E(k, t)\lambda \Rightarrow \phi(k) = -\frac{E(k, t)}{ik} \quad (61.2)$$

با جایگذاری در رابطه‌ی قبل خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} + \frac{em}{i \hbar} \left(\frac{-E(k, t)}{ik}\right) \left[F\left(p + \frac{\hbar k}{\gamma}\right) - F\left(p - \frac{\hbar k}{\gamma}\right) \right] = 0 \quad (62.2)$$

با تبدیل فوریه:

$$-i\omega f_{\lambda} + ikv f_{\lambda} + eE(k, t) \frac{F(p + \hbar k/\gamma) - F(p - \hbar k/\gamma)}{\hbar k} = 0$$

$$-if_{\lambda} - ik \left(\frac{e^{\gamma}}{k^{\gamma} \epsilon_0}\right) \int f_{\lambda} dv \frac{F(p + \hbar k/\gamma) - F(p - \hbar k/\gamma)}{\hbar k (\omega - kv)} = 0$$

$$-if_{\lambda} \left(1 + \frac{e^{\gamma}}{k \epsilon_0} \int dv\right) \left(\frac{F(p + \hbar k/\gamma) - F(p - \hbar k/\gamma)}{\hbar k (\omega - kv)}\right) = 0 \quad (63.2)$$

در یک n ضرب و تقسیم کرده داریم:

$$\epsilon_{\omega}(\omega, k) = 1 + \frac{m\omega_p^{\gamma}}{kn_0} \int \frac{f_0(v + \hbar k/\gamma m) - f_0(v - \hbar k/\gamma m)}{\hbar k (\omega - kv)} dv \quad (64.2)$$

(64.2) بیان رابطه‌ی پاشندگی است که به کمک معادله‌ی ویگنر- پواسون به دست آورد

۹.۶.۲ رابطه‌ی پاشندگی با استفاده از تقریب هارتری

برای به دست آوردن این رابطه‌ی پاشندگی ابتدا معادله‌ی (۳۲.۲) را خطی سازی کرده داریم:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_\alpha} / \partial x^2}{\sqrt{n_\alpha}} \right) \quad (۶۵.۲)$$

حال عبارت داخل پرانتز را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_\alpha} / \partial x^2}{\sqrt{n_\alpha}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 (n_0 + n_1)^{1/2} / \partial x^2}{(n_0 + n_1)^{1/2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_0} (1 + \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_0})}{\partial x^2 \sqrt{n_0} (1 + \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_0})} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2n_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_1 \right) \end{aligned} \quad (۶۶.۲)$$

با جایگذاری (۶۶.۲) در (۶۵.۲) و اعمال تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$-i\omega v_1 + ikv_0 v_1 = \frac{e}{m} ik\phi_1 + (ik)(ik)(ik) \frac{\hbar^2}{2m^2 n_0} n_1 \quad (۶۷.۲)$$

حال معادله‌ی (۳۱.۲) را خطی سازی می‌کنیم (معادله‌ی پیوستگی):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_0 + n_1) + \frac{\partial}{\partial x} [(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)] &= 0 \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial n_0}{\partial x} + n_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (۶۸.۲)$$

از طرفی $v_1 \partial n_0 / \partial x = 0$ و $n_1 \partial v_0 / \partial x = 0$ ، حال تبدیل فوریه می‌زنیم:

$$-i\omega n_1 + ikv_1 n_0 + ikn_1 v_0 = 0 \Rightarrow n_1 = n_0 \frac{k}{\omega - kv_0} v_1 \quad (۶۹.۲)$$

در این مرحله با خطی سازی معادله‌ی پواسون (روابط (۴۷.۲) و (۴۸.۲)) و با فرض $n_{1i} = 0, n_{0i} = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + \phi_1) \right) &= \frac{e}{\epsilon_0} [(n_0 + n_1)_i - (n_0 + n_1)_e] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_1 \right) &= \frac{e}{\epsilon_0} (-n_{1e}) \end{aligned} \quad (۷۰.۲)$$

تبدیل فوریه می‌زنیم

$$k^2 \phi_1 = \frac{e}{\epsilon_0} n_{1e} \quad (۷۱.۲)$$

و در رابطه‌ی (۳۵.۲) قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$k^2 \phi_1 = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha |\varphi_\alpha|^2 \right) \quad (۷۲.۲)$$

با توجه به (۲۷.۲) و (۶۹.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$-i\omega v_1 + ikv_0 v_1 = \frac{e}{m} i \left[\frac{e}{k\varepsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \left(\frac{kn_0 v_1}{\omega - kv_0} \right) \right] - ik^3 \frac{\hbar^2}{4m^2 n_0} \left(\frac{kn_0 v_1}{\omega - kv_0} \right) \quad (۷۳.۲)$$

v_1 و i را از طرفین حذف می‌کنیم و طرفین را در $\omega - kv_0$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$-(\omega - kv_0)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} = \omega_p^2 \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha}$$

از رابطه‌ی فوق معادله‌ی پاشندگی هارتری را به دست می‌آوریم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_H(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2 - \hbar^2 k^4 / 4m^2} \quad (۷۴.۲)$$

۱۰.۶.۲ معادله‌ی ویگنر - پواسون

یکی از اعتبارهای مدل کوانتومی این است که در شرایط حدی می‌بایست به مقدار کلاسیکی خود میل کند. در حد $\hbar \rightarrow 0$ می‌خواهیم ببینیم که معادله‌ی ویگنر - پواسون به حالت کلاسیکی یعنی ولاسوف تبدیل می‌شود یا خیر.

طبق رابطه‌ی (۴۶.۲) داشتیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{em}{2\pi i \hbar^2} \int \int d\lambda dv' \exp\left(\frac{im(v-v')\lambda}{\hbar}\right) \left[\phi\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) - \phi\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) \right] f(x, v', t) = 0 \quad (۷۵.۲)$$

حال عبارت داخل کروشه را بسط تیلور می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \phi\left(x \pm \frac{\lambda}{2}\right) &= \phi(x) + \left(\frac{\pm\lambda}{2}\right) \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{(\pm\lambda/2)^2}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{(\pm\lambda/2)^3}{3} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \dots \\ \implies \phi\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) - \phi\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) &= \phi(x) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{8} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^3}{48} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} - \phi(x) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\lambda^2}{8} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^3}{48} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} \\ &= \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\lambda^3}{24} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (۷۶.۲)$$

حالا عبارت انتگرالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{em}{2\pi i \hbar^2} \int \int d\lambda dv' \exp\left(\frac{im(v-v')\lambda}{\hbar}\right) f(x, v', t) \quad (۷۷.۲)$$

با استفاده از بسط

$$\sigma(v-v') = \frac{m}{2\pi\hbar} \int \exp\left(\frac{im(v-v')\lambda}{\hbar}\right) d\lambda \quad (۷۸.۲)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{e}{i\hbar} \int \sigma(v-v') dv' f(x, v', t) = \frac{e}{i\hbar} f(x, v, t) \quad (۷۹.۲)$$

از سوی دیگر داشتیم:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = im \frac{\lambda}{\hbar} f(x, v, t)$$

اینک تابع $f(x, v, t)$ را به شکل زیر بسط تیلور می‌دهیم:

$$f(x, v, t) = f(x, v_0, t) + \left(\frac{\hbar}{im\lambda}\right) \frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{\hbar}{im\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left(\frac{\hbar}{im\lambda}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} + \dots \quad (۸۰.۲)$$

با قرار دادن (۷۶.۲) و (۸۰.۲) در معادله‌ی (۷۵.۲) و ساده‌سازی به نتیجه‌ی نهایی زیر دست خواهیم یافت:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{e\hbar^2}{24m^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \quad (۸۱.۲)$$

که عبارت فوق نمایش‌دهنده‌ی معادله‌ی ویگنر - پواسون در حالت گسسته می‌باشد.

۷.۲ جمع بندی

در این فصل مدل‌های توصیف پلاسما یعنی مدل ذره‌ای، سیالی و جنبشی را بررسی کردیم. سپس به بررسی پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی در دو حالت سیالی و جنبشی پرداخته، و معادلات ویگنر - پواسون و در نهایت نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

- در پلاسمای کوانتومی با آنسامبلی از ذرات و N تابع موج سروکار داریم بنابراین از تقریب هارتری و هارتری - فوک استفاده می‌کنیم.
- تقریب هارتری - فوک از هارتری کامل‌تر و جامع‌تر است در این تقریب یعنی هارتری - فوک به جای در نظر گرفتن تابع موج هریک از ذرات، تابع موج کلی را برای سیستم پلاسما در نظر می‌گیریم.
- تمام مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی از تقریب هارتری - فوک سرچشمه می‌گیرند.
- تابع توزیع ذرات پلاسمای کوانتومی از احتمال و عدم قطعیت پیروی می‌کنند، بنابراین تابع توزیع ویگنر را که ابزاری مفید برای فضای فاز می‌باشد تعریف می‌کنیم.
- با استفاده از تحولات تابع ویگنر نسبت به زمان و استفاده از معادلات ماکسول و پواسون به معادله‌ی ویگنر - پواسون دست پیدا می‌کنیم.
- معادله‌ی ویگنر - پواسون اساس توصیف پلاسما بر مبنای مدل نظریه‌ی جنبشی می‌باشد.

فصل ۳

امواج در پلاسمای کوانتومی و معادلات مربوطه

۱.۳ مقدمه

اگر یک پلاسمای غیر مغناطیسی شامل الکترون‌ها و یون‌های مساوی در نظر بگیریم، دو نوع موج در آن منتشر می‌شوند. نوع اول امواج الکترومغناطیسی می‌باشند. نوع دوم امواج از نوسان‌های داخلی پلازما بوجود می‌آید. در پلازما هر دو نوع موج خطی و غیرخطی منتشر می‌شوند. در بحث امواج خطی به ایجاد تقریب‌های ساده‌کننده برای دامنه کوچک می‌پردازیم در حالیکه امواج غیرخطی به مطالعه‌ی امواج بلند می‌پردازد که باروش خطی قابل بررسی نیست، برای بررسی امواج غیرخطی در دامنه‌های بزرگ باید از روش‌های دیگری استفاده کرد. یکی از روش‌های بررسی معادلات غیرخطی تکنیک اختلال کاهشی است که به معادلات KdV (کورت‌ه‌وگ - ده‌وری) منجر می‌شود. از حل معادلات KdV به امواج سالی‌تونی خواهیم رسید.

نوع دیگری از این دسته معادلات که در این فصل و فصل بعدی به طور مفصل در مورد آن به بحث خواهیم پرداخت معادله‌ی غیرخطی $KdVB$ می‌باشد که منشا آن اضافه شدن جمله‌ی مقاومت η به معادله‌ی KdV می‌باشد و منجر به تولید امواج ضربه می‌شوند.

۲.۳ امواج در پلازما

امواج بنیادی پلازما به نوسان‌های یونی با بسامد کم در حضور میدان مغناطیسی مربوط می‌شوند، مشهورترین مدهای ممکن موج هیدرومغناطیسی موج آلفون، در امتداد میدان مغناطیسی و دیگری موج مغناطیصوتی است که در عرض میدان منتشر می‌شوند. در زیر به طور مفصل در مورد امواج آلفون و مغناطیصوتی صحبت خواهیم کرد.

۱.۲.۳ امواج آلفون

موج آلفون اولین بار به طور هم‌زمان در برکلی کالیفرنیا و انگلستان در سال ۱۹۵۹ تولید و آشکارسازی شد. موج آلفون خاصیت مغناطیسی داشته و حرکت‌های گرمایی در آن از اهمیت پایینی برخوردار است، همچنین این موج هیدرو مغناطیسی با سرعت ثابت v_A در امتداد B_0 (میدان ناآشفته) حرکت می‌کند که آن را سرعت آلفون می‌نامند به صورت:

$$v_A = \frac{B_0}{\mu_0 (n_0 m_0)^{1/2}} \quad (1.3)$$

به صورت خلاصه ویژگی‌های موج آلفون را در زیر ذکر می‌کنیم:

۱. تراکم ناپذیر است.
۲. دارای نوسانات عرضی می‌باشد.
۳. انتشار آن در امتداد خطوط میدان است.
۴. نیروی ایجاد کننده این امواج منحصرآ تنش مغناطیسی است.

۲.۲.۳ امواج مغناطوسوتی

از طرف دیگر امواج الکترومغناطیسی کم بسامد که در عرض B_0 منتشر می‌شوند را امواج مغناطوسوتی می‌گویند. این موج یک موج صوتی است که در آن تراکم و انبساط توسط سوق‌های $(E \times B)$ در عرض B_0 به وجود می‌آید.

امواج مغناطوسوتی که نوسانات کم دامنه‌ای هستند، نتیجه‌ی تعادل دینامیکی بین اثرات غیر خطی و پراش کوانتومی و اثرات تونل زنی می‌باشد. شکل پالس‌های سالی‌تونی در پلاسمای کوانتومی کاملاً با نمونه‌ی کلاسیکی متفاوت است. شدت میدان مغناطیسی و چگالی پلازما و همچنین اسپین الکترون‌ها روی این سالی‌تون‌ها اثر می‌گذارد.

سرعت فاز مد مغناطوسوتی تقریباً همیشه بزرگتر از سرعت آلفون است و به همین دلیل آن را موج هیدرو مغناطیسی تند می‌گویند و در یک پلاسمای کوانتومی کاملاً تبه‌گن الکترون‌ها به دلیل وجود اثر اسپین $1/2$ تحت تاثیر یک نیروی کوانتومی قرار می‌گیرد که ترکیبی از گرادیان پتانسیل بوهم و انرژی مغناطیسی الکترون است.

در زیر به طور خلاصه ویژگی‌های موج مغناطیسی را ذکر می‌کنیم:

۱. تراکم پذیر است.
۲. میرا است.
۳. انتشار آن در عرض میدان مغناطیسی است.

۰۴. نیروی ایجادکننده‌ی این امواج هم تنش مغناطیسی و هم فشار گاز می‌باشد.

حال به بررسی دونوع از امواج مغناطوسوتی می‌پردازیم که شامل امواج سالیتون، جواب‌های معادله‌ی KdV و ضربه‌گونه، جواب‌های معادله‌ی $KdVB$ خواهند بود.

۳.۳ امواج ضربه

در این فصل انتشار یک بعدی امواج ضربه‌ی یک پلاسمای مغناطیسی کوانتومی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مدل کوانتومی معادلات MHD نشان دهنده‌ی معادله‌ی تحول غیرخطی $KdVB$ با اثرات نیروی کوانتومی مرتبط با پتانسیل بوهم و نیروی اسپین می‌باشد.

معادله‌ی تحول غیرخطی $KdVB$ توصیف کننده‌ی دینامیک امواج مغناطوسوتی است که دارای دامنه‌ی کوچک و محدود می‌باشد، و توسط مقاومت پلازما توصیف می‌شود. نیروی اسپین، موجب تغییر در ساختار ضربه‌ی تولید شده می‌باشد. اثرات اسپین $1/2$ الکترون، اثر قابل توجهی بر دینامیک بی ثباتی دامنه‌ی امواج مغناطوسوتی و نیز اثرات برخوردی در پلاسمای به شدت مغناطیسی دارد. امواج ضربه نوعی از انتشار اختلال می‌باشند، امواج ضربه مانند سایر امواج می‌توانند حامل انرژی باشند و از طریق سیستم‌هایی انتشار یابند، و در محیط به صورت پیش‌رونده حرکتی رو به جلو دارند. این موج دارای سرعتی است که در داخل مایعات، گازها و پلازماها با سرعتی بیشتر از سرعت صوت حرکت می‌کند. همچنین با تغییرات ناگهانی و تقریباً پیوسته‌ای همراه است و در فشار، دما و حجم مخصوص قابل شناسایی و ارزیابی می‌باشد.

بر خلاف موج سالیتون (موج سالیتون نیز نوع دیگری از موج غیرخطی است) که در بخش بعدی در مورد آن صحبت می‌کنیم، موج ضربه، زمانی که با موج ضربه‌ی دیگری برخورد کند، در نیمه‌ی راه متوقف می‌شود.

ساختار امواج ضربه در پلاسمای کوانتومی، با اسپین $1/2$ در حضور میدان مغناطیسی و مدل کوانتومی معادلات MHD مورد مطالعه قرار می‌گیرد، پارامترهایی را می‌توان یافت که نقش قابل توجهی در تعیین ماهیت امواج ضربه بازی می‌کنند.

۴.۳ استخراج معادله‌ی $KdVB$ با به کارگیری تکنیک کاهش اختلال در پلاسمای کوانتومی

هنگامی که اثرات کوانتومی در سیستم قابل چشم‌پوشی نباشد، برای توصیف پلازما به جای استفاده از مدل سیالی باید از مدل $QMHD$ ^۱ استفاده کنیم. در این بخش ابتدا معادلات کلی مربوط به پلاسمای مغناطیسی کوانتومی را معرفی می‌کنیم، که در آن‌ها اثرات اسپین الکترون نیز لحاظ شده باشد، سپس این معادلات را برای سیستم الکترون - یون بازنویسی می‌نماییم و به کمک آن‌ها معادلات $KdVB$ به

^۱Quantum magnetohydrodynamics

منظور توصیف انتشار امواج مغناطیصوتی در راستای عمودی میدان مغناطیسی برای مغناطوپلاسمای همگن الکترون - یون را استخراج می‌کنیم. به کمک تعاریف زیر:

$$\rho \equiv (m_e n_e + m_i n_i)$$

$$\mathbf{V} \equiv (m_e n_e \mathbf{V}_e + m_i n_i \mathbf{V}_i) / \rho$$

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{V}_e + Zen_i \mathbf{V}_i$$

معادلات پایه‌ی $QMHD$ به صورت روابط زیر بیان می‌شود [۳۷]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (۲.۳)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P + \mathbf{F}_Q \quad (۳.۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{en_e} - \eta \mathbf{j} - \frac{m_e}{e^2 \mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{e \mu_0 n_e} \right) \cdot \nabla \right] \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{n_e} - \frac{\mathbf{F}_Q}{en_e} \right\} \quad (۴.۳)$$

در این روابط $i(e)$ به یون (الکترون) اشاره دارد.

همچنین از فرض شبه‌خنثایت یعنی $n_e \simeq n_i$ استفاده کرده‌ایم. در اینجا P فشار اسکالر در چارچوب مرکز جرم،

$$\mathbf{j} = \mu_0^{-1} \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M})$$

جریان ناشی از بارهای آزاد،

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\mu_0 \rho}{m_i} \right) \tanh \left(\frac{\mu_B B}{K_B T_e} \right) \hat{B}$$

مغناطش پلاسمای به دلیل اسپین الکترون و

$$\mathbf{F}_Q = \frac{\hbar^2 \rho}{2 m_e m_i} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right) + \frac{\mu_B \rho}{m_i} \tanh \left(\frac{\mu_B B}{K_B T_e} \right) \nabla \mathbf{B}$$

نیروی کوانتومی کل ناشی از اسپین و پدیده‌ی تونل زنی می‌باشد که در این جا جمله‌ی اول گرادیان پتانسیل بوهم و جمله‌ی دوم ناشی از اسپین است که به نیروی کوانتومی اسپین مشهور است. حال فرض بر این است که میدان مغناطیسی در راستای \hat{z} و به مقدار تعادلی خود B_0 بهنجار می‌باشد.

$$\mathbf{B} = B(x, t) \hat{z}$$

و همچنین سرعت مرکز جرم شاره به صورت:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{(m_e n_e \mathbf{V}_e + m_i n_i \mathbf{V}_i)}{\rho} = v(x, t) \hat{x}$$

و به سرعت آلفون ($C_A = \sqrt{B_0^2 / \mu_0 \rho_0}$) بهنجار است.
و جمله‌ی مربوط به اینرسی در قانون فارادی حذف شده است.
بنابراین معادلات بنیادین دینامیک امواج مغناطیصوتی در پلاسمای کوانتومی به صورت روابط زیر می‌باشد [۲۸]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (۵.۳)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -B \frac{\partial B}{\partial x} - c_s^2 \rho \frac{\partial}{\partial x} (\ln \rho) + \beta \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \right) + \frac{\varepsilon}{v_B^2} \rho \frac{\partial}{\partial x} [\rho b \tanh(\varepsilon B)] \quad (۶.۳)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Bv) - \gamma \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0 \quad (۷.۳)$$

و در این روابط، کمیت‌های زیر تعریف شده هستند:

• ρ چگالی جرمی کل به صورت:

$$\rho \equiv (m_e n_e + m_i n_i) = \rho(x, t) \quad (۸.۳)$$

است و به مقدار تعادلی ρ_0 بهنجار شده است.

• فرکانس یونی $\omega_{ci} = eB_0 / m_i$ با بعد معکوس زمان.

• $n_e(n_i)$ عدد چگالی الکترون (یون)، $m_e(m_i)$ جرم الکترون (یون)، $v_e(v_i)$ سرعت شاره‌های الکترون (یون)، e بزرگی بار الکترون.

• پارامتر β به صورت:

$$\beta = \gamma c^2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \frac{\omega_{ci}^2 \lambda_c^2}{C_A^2} \quad (۹.۳)$$

• λ_C طول موج کامپتون:

$$\lambda_C = \frac{c}{\omega_C} = \frac{\hbar}{\gamma m_e c} \quad (۱۰.۳)$$

• سرعت صوت:

$$C_s = \sqrt{\frac{K_B (T_e + T_i) C_A}{m_i}} \quad (۱۱.۳)$$

• نرمالایز شده به C_A .

$$v_B^2 = \frac{k_B T_e}{m_i c_A^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\mu_B B_0}{k_B T_e} \quad (12.3)$$

با معرفی $\mu_B = e\hbar/2m_e$ که به مگنتون بوهر معروف است. رابطه‌ی انرژی $\varepsilon = \mu_B B_0 / k_B T_e$ که نرمالایز شده به انرژی زیمان است که انرژی زیمان همان نیروی کوانتومی اسپین^۲ می‌باشد.

• پارامتر γ پارامتر انتشار بدون بعد است و با رابطه‌ی زیر ذکر می‌شود:

$$\gamma \equiv \frac{\eta \omega_{ci}}{\mu_0 c_A^2} \quad (13.3)$$

η مقاومت پلاسماست و با رابطه‌ی $\eta = m_e \nu_{ei} / n_0 e^2$ قابل تعریف است.

• فرکانس برخورد الکترون (یون): $\nu_e(\nu_i)$

$$\nu_{ei} = \left(\frac{\Lambda}{3\pi} \right) \left(\frac{m_e^2 z^2 e^4}{m_i \hbar^3} \right) c(x) \quad (14.3)$$

z عدد اتمی یون می‌باشد و $c(x) \approx 0.5 [\log(1 + 1/x^2) - 1/(1 + x^2)]$ سهم برخورد هاست [۴۴].

حال به استخراج معادله می‌پردازیم:

با به کارگیری تکنیک کاهش اختلال متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{1/2} (x - v_p t) \\ \tau &= \varepsilon^{3/2} t \end{aligned} \quad (15.3)$$

که در این روابط ε پارامتر بسط است و v_p سرعت فاز موج، نرمالایز شده به C_A (سرعت آلفون) می‌باشد.

همچنین متغیرهای دینامیکی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^{3/2} \rho_2 + \varepsilon^2 \rho_3 + \dots \\ v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^{3/2} v_2 + \varepsilon^2 v_3 + \dots \\ B &= \varepsilon B_1 + \varepsilon^{3/2} B_2 + \varepsilon^2 B_3 + \dots \end{aligned} \quad (16.3)$$

از رابطه‌ی (۱۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \left(\varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} v_p \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (17.3)$$

^۲Quantum spin force

همچنین با جایگذاری (۱۷.۳) در (۵.۳) و با کمک (۱۶.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left(\epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2} v_p \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) + \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \\ & \times (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2 + \dots) = 0 \\ & \epsilon^{5/2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \epsilon^3 \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - \epsilon^{3/2} v_p \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \epsilon^2 v_p \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{5/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 v_1) \\ & + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 v_2) + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 v_1) + \epsilon^{5/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 v_2) = 0 \end{aligned} \quad (18.3)$$

حال با در نظر گرفتن توان‌های مختلف ϵ و مقایسه با سمت راست معادله به نتایج زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} -v_p \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \frac{v_1}{v_p}} & \quad (19.3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 v_1) = 0 \quad (20.3)$$

و

$$\begin{aligned} -v_p \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \frac{v_2}{v_p}} & \quad (21.3) \end{aligned}$$

و

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 v_1) = 0 \quad (22.3)$$

با قرار دادن (۱۷.۳) در (۷.۳) نیز داریم:

$$\begin{aligned} & \left(\epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2} v_p \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) + \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) \\ & \times (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2) - \gamma \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) = 0 \Rightarrow \\ & \epsilon^{5/2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \epsilon^3 \frac{\partial B_2}{\partial \tau} - \epsilon^{3/2} v_p \frac{\partial B_1}{\partial \xi} - \epsilon^2 v_p \frac{\partial B_2}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{5/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_1 v_1) + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \xi} (B_1 v_2) \\ & + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \xi} (B_2 v_1) + \epsilon^{5/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_2 v_2) - \gamma \epsilon^{5/2} \frac{\partial^2 B_2}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (23.3)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} -v_p \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{B_1 = \frac{v_1}{v_p}} & \quad (24.3) \end{aligned}$$

و

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(B_1 v_1) - \gamma \frac{\partial^2 B_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (25.3)$$

و

$$-v_p \frac{\partial B_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 B_1}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\implies \boxed{v_2 = v_p B_2 + \gamma \frac{\partial B_1}{\partial \xi}} \quad (26.3)$$

و

$$\frac{\partial B_2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(B_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial \xi}(B_2 v_1) = 0$$

و از (۶.۳):

$$\begin{aligned} & (\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \times \\ & \left[\left(\epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2} v_p \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2 + \dots) + (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2) \right] \\ & = (-\lambda + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\lambda + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) \\ & c_s^2 (\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\ln(\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots)) \\ & + \beta (\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\lambda}{(\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2)^{1/2}} \right) \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} ((\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots)^{1/2}) \\ & + \frac{\epsilon}{v_B^2} (\lambda + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \\ & \times [(\epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) (\lambda + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) \tanh(\epsilon (\lambda + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots))] \end{aligned} \quad (27.3)$$

اکنون با بسط رابطه‌ی (۲۷.۳) (ر.ک بخش ۱.۵) و مساوی قرار دادن مراتب مختلف ϵ نتایج زیر را به دست می‌آوریم.

ابتدا جملات مرتبه‌ی $\epsilon^{3/2}$:

$$-v_p \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial B_1}{\partial \xi} - c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\epsilon}{v_B^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \tanh \epsilon B_1 + \frac{\epsilon}{v_B^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_1 \tanh \epsilon) + \frac{\epsilon}{v_B^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 \tanh \epsilon)$$

$$-v_p v_1 - \rho_1 - c_s^2 \rho_1 + \frac{\epsilon}{v_B} \tanh \epsilon + \frac{\epsilon}{v_B} \rho_1 (\gamma \tanh \epsilon) \implies$$

$$v_p^2 = \lambda + c_s^2 - \frac{\epsilon}{v_B^2} (\gamma \tanh \epsilon + \epsilon \sec h^2 \epsilon)$$

$$\longrightarrow \boxed{v_p = \sqrt{\lambda + c_s^2 - \frac{\epsilon}{v_B^2} (\gamma \tanh \epsilon + \epsilon \sec h^2 \epsilon)}} \quad (28.3)$$

اینک توان‌های $\epsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
v_p^\psi + v_p v_\psi &= B_\psi + B_\psi c_s^\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \sec h^\psi \epsilon B_\psi + \gamma v_p \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \implies \\
v_p^\psi + v_p^\psi B_\psi + v_p \gamma \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} - v_p^\psi &= B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi + B_\psi c_s^\psi + c_s^\psi \frac{\gamma}{v_p} \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi \frac{\gamma}{v_p} \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \\
&= \frac{\gamma}{v_p} \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \left(c_s^\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi \right) \implies \\
\boxed{v_p^\psi + v_p v_\psi} &= \left[1 - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} (\tanh \epsilon + \epsilon \sec h^\psi \epsilon) \right] B_\psi + \left(c_s^\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon \right) \rho_\psi
\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

با قرار دادن روابط (۲۶.۳) و (۲۸.۳) در (۲۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
v_p^\psi + v_p^\psi B_\psi + v_p \gamma \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} - v_p^\psi &= B_\psi + B_\psi c_s^\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \sec h^\psi \epsilon B_\psi + \gamma v_p \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \\
&= B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \sec h^\psi \epsilon B_\psi + c_s^\psi B_\psi - \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon B_\psi + \frac{\gamma}{v_p} c_s^\psi \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{v_p} \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \\
\implies \boxed{\gamma \left(v_p^\psi - c_s^\psi + \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \tanh \epsilon \right) \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi}} &= 0
\end{aligned} \tag{۳۰.۳}$$

توان‌های $\epsilon^{5/2}$:

$$\begin{aligned}
v_p \frac{\partial B_\psi}{\partial \tau} - \frac{1}{v_p^\psi} v_p^\psi B_\psi \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} &= -\psi B_\psi \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} + B_\psi \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} - c_s^\psi B_\psi \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} + \frac{\beta}{\psi} \frac{\partial^3 B_\psi}{\partial \xi^3} + \psi \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_\psi^\psi) \tanh \epsilon + \psi \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_\psi^\psi) \frac{\partial}{\partial \xi} (\tanh \epsilon) \\
&- \frac{\epsilon}{v_B^\psi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(B_\psi + \frac{\gamma}{v_p} \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \right) \tanh \epsilon \right] - \frac{\gamma}{\psi} \frac{\partial^2 B_\psi}{\partial \xi^2} - c_s^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_\psi + \frac{\gamma}{v_p} \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} \right) \tag{۳۱.۳}
\end{aligned}$$

از رابطه‌ی فوق معادله‌ی $KdVB$ به دست می‌آید که به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial B_\psi}{\partial \tau} + P B_\psi \frac{\partial B_\psi}{\partial \xi} + Q \frac{\partial^3 B_\psi}{\partial \xi^3} + R \frac{\partial^2 B_\psi}{\partial \xi^2} = 0 \tag{۳۲.۳}$$

همانطور که قبلاً داشتیم $B_\psi = b$ در نتیجه:

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial \tau} + P b \frac{\partial b}{\partial \xi} + Q \frac{\partial^3 b}{\partial \xi^3} + R \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} = 0} \tag{۳۳.۳}$$

رابطه‌ی فوق همان معادله‌ی $KdVB$ است.

که در این رابطه ضرایب P (عامل غیرخطی)، R (ضریب اتلاف^۳) و Q (ضریب انتشار^۴) عبارتند از:

$$P = \frac{1}{v_p} \left[3 - v_p^2 + 2c_s^2 - \frac{\varepsilon}{v_B^2} (\lambda \tanh \varepsilon + \nu \varepsilon \sec h^2 \varepsilon - 2\varepsilon^2 \tanh \varepsilon \sec h^2 \varepsilon) \right]$$

$$Q = -\frac{\beta}{4v_p}$$

$$R = \frac{\gamma_0}{2v_p^2} \left(c_s^2 - v_p^2 - \frac{\varepsilon}{v_B^2} \tanh \varepsilon \right) \quad (34.3)$$

۵.۳ امواج سالیتون

۱.۵.۳ تعریف سالیتون

در ریاضیات و فیزیک، "سالیتون" یک موج منزوی خود - تقویت کننده (یک بسته‌ی موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکلش را حفظ می‌کند.

سالیتون‌ها در نتیجه‌ی خنثی‌سازی آثار غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شوند.

سالیتون‌ها به عنوان جواب‌های دسته گسترده‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی به طور ضعیف غیرخطی پاشنده ناشی می‌شوند که سیستم‌های فیزیکی را توصیف می‌کنند.

پدیده‌ی سالیتونی اولین بار توسط جان اسکات راسل ۱۸۸۲ - ۱۸۰۸ توصیف شد. او یک موج سالیتوری را در کانال مشترک در اسکاتلند مشاهده کرد، او این پدیده را در یک مخزن موج بازسازی کرد و آن را موج انتقال نامید. او مجدداً این موج را در یک مخزن ویژه تولید کرد و به طور کلی حدود ده سال از عمر خود را صرف مطالعه‌ی نظری این پدیده از رویکرد خطی نمود که به عدم وجود سالیتون منجر شد.

تا این که در سال ۱۸۵۹ کرتوگ^۵ و دریس^۶ موفق به بدست آوردن رابطه‌ای برای توضیح سالیتون شدند. این دو دانشمند محکم‌ترین وجود سالیتون تا آن زمان را به شکل معادله‌ی معروفشان یعنی معادله‌ی KdV ارائه دادند.

به دیگر سخن، سالیتون به دسته‌ی خاصی از جواب‌های موضعی یک معادله‌ی غیرخطی موج گفته می‌شود که با شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند. البته توافق عام بر سر تعریف سالیتون را به صورت‌های متفاوت تعریف می‌کنند.

یافتن تعریفی منفرد و مورد توافق از یک سالیتون مشکل است، درازین و جانسون ۱۹۸۹ سه خاصیت به سالیتون‌ها نسبت دادند.

^۳dissipation

^۴dispersion

^۵Kortewegs

^۶De vries

به موجی که سه خاصیت زیر را داشته باشد سالیتون گفته می‌شود:

۱. شکل آن تغییر نکند.
۲. جایگزیده است.
۳. بعد از برخورد با سالیتون‌های دیگر شکل خود را حفظ کند، مگر با یک انتقال فاز.

۲.۵.۳ خواص اساسی سالیتون

۱. دامنه آن با افزایش سرعت افزایش می‌یابد.
۲. پهنای آن متناسب با معکوس جذر سرعتش می‌باشد.
۳. سالیتون نوعی پالس موجی است که جهت‌های مشخصی را بر می‌گزیند. به عنوان مثال سرعتش مقدار منفی نمی‌گیرد.
۴. علامت سالیتون وابسته به علامت ضریب غیر خطی در معادله KdV می‌باشد.

۳.۵.۳ انواع سالیتون

۱. سالیتون‌های بیان شده با معادله غیرخطی شرودینگر که به سالیتون‌های پوش^۷ معروفند.
۲. سالیتون‌هایی که با معادله KdV توصیف می‌شوند مانند سالیتون‌های یون - صوت. این سالیتون‌ها به نوعی هستند که نمی‌توانند خودبه‌خود در پلازما به وجود بیایند بلکه باید توسط یک عامل خارجی آن‌ها را تحریک کرد.

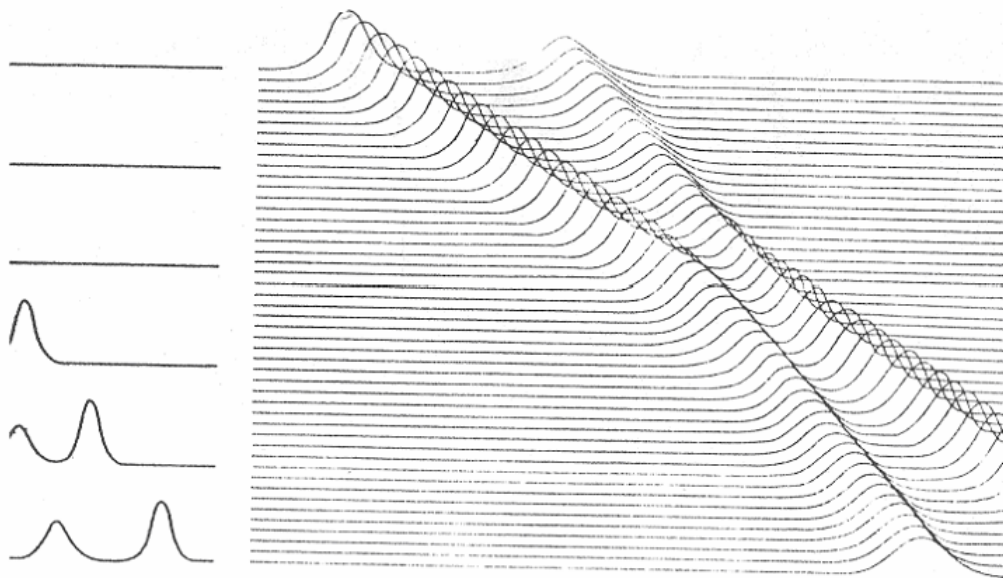
۴.۵.۳ برهم‌کنش سالیتون‌ها

برهم‌کنش دو سالیتون در دو حالت مورد بررسی قرار گرفته است:

۱. دو سالیتون با دامنه‌های متفاوت که در یک جهت حرکت می‌کنند.
۲. دو سالیتون با دامنه‌های یکسان که در جهت‌های متفاوت حرکت می‌کنند.

در مورد اول، سالیتون با دامنه بزرگتر، سریعتر حرکت کرده و در جلوی سالیتون با دامنه کوچکتر قرار می‌گیرد. در مورد دوم هنگامی که سالیتون‌ها بهم می‌رسند، با یکدیگر برهم‌کنش کرده و همپوشانی انجام می‌دهند اما پس از عبور از یکدیگر با همان شکل و سرعت اولیه در جهت‌های مختلف انتشار می‌یابند (شکل ۱.۳).

^۷Envelope Solitons



شکل ۱.۳: سالیتون‌ها امواج منفردی هستند که با همان شکل، سرعت و ابعاد اولیه خود، از یک برخورد بیرون می‌آیند.

۵.۵.۳ زمینه‌های کاربرد

هرچند اکتشاف اولیه‌ی آن‌ها از روی امواج آب صورت گرفت (به بخش ۱.۰ ب. مراجعه شود)، امواج انفرادی و سالیتون‌ها را در میدان‌ها و زمینه‌های گوناگون علمی و فنی مورد مطالعات و تحقیقات وسیع نظری و تجربی قرار داده‌اند. از آن میان زمینه‌های متنوع زیر را می‌توان بر شمرد [۲۵]: هیدرودینامیک، نور غیر خطی، فیزیک پلاسما و زیست‌شناسی. به عنوان مثال در سیستم‌های زیست‌شناسی سالیتون‌ها در فرآیند انتقال انرژی توسط پروتئین‌ها یا آلفا هلیکس مشارکت می‌نمایند. طبیعت غیرخطی نیروهای بین اتم‌ها می‌تواند به تشکیل امواج انفرادی یا سالیتون‌ها بینجامد.

۶.۳ معرفی معادله KdV

معادله کورته‌وگ - وریس یا همان KdV همانطور که قبلاً گفته شد، یک معادله غیرخطی، پاشنده^۸ و غیراتلافی^۹ است که در سال ۱۹۸۵ توسط دی ادریک کورته‌وگ^{۱۰} و گوستا ده‌وریس^{۱۱} معرفی شد.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (۳۵.۳)$$

^۸dispersive

^۹nondissipative

^{۱۰}Diederik Korteweg

^{۱۱}Gustav de Vries

این معادله جواب‌های سالیتمونی دارد. در حل آن مرسوم است جواب‌ها به صورت موج ایستاده در نظر گرفته شود و متغیر جدیدی به صورت زیر تعریف شود:

$$\xi = x - v_{ph}t \quad (۳۶.۳)$$

که در آن v_{ph} سرعت فاز بسته موج است. با این متغیر:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v_{ph} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (۳۷.۳)$$

معادله را می‌توان در شکل جدید نوشت:

$$(۶u - v_{ph})u_{\xi} + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (۳۸.۳)$$

انتگرال‌گیری نسبت به ξ نتیجه می‌دهد:

$$۳u^۲ - v_{ph}u + u_{\xi\xi} = k_۱ \quad (۳۹.۳)$$

که $k_۱$ ثابت انتگرال‌گیری است. با ضرب کردن طرفین در u_{ξ} انتگرال‌گیری دوم نتیجه می‌دهد:

$$u^۳ - v_{ph} \frac{u^۲}{۲} + \frac{۱}{۲} u_{\xi}^۲ = k_۱ u + k_۲ \quad (۴۰.۳)$$

$k_۲$ نیز یک مقدار ثابت است. u و u_{ξ} باید در بی‌نهایت صفر باشند، بنابراین ضرایب را صفر اختیار می‌کنیم.

$$u^۳ - v_{ph} \frac{u^۲}{۲} + \frac{۱}{۲} u_{\xi}^۲ = 0 \quad (۴۱.۳)$$

این رابطه را می‌توان به شکل زیر تغییر داد:

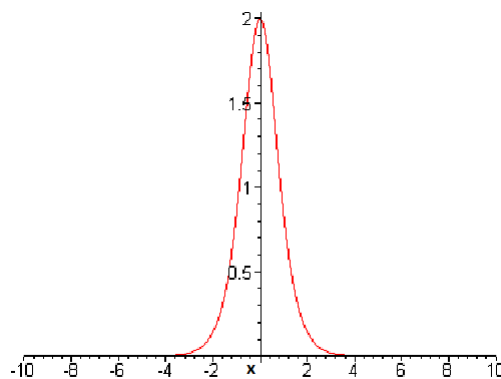
$$\sqrt{-۲u^۳ + v_{ph}u^۲} = u_{\xi} \quad (۴۲.۳)$$

و نهایتاً به شکل زیر ساده نمود:

$$\begin{aligned} \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{-۲u^۳ + v_{ph}u^۲}} &= \int_0^{\xi} d\xi \rightarrow \\ \frac{۱}{\sqrt{v_{ph}}} \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{\frac{-۲u^۳}{v_{ph}} + u^۲}} &= \int_0^{\xi} d\xi \end{aligned} \quad (۴۳.۳)$$

با تغییر متغیر $w^۲ = ۲u/v_{ph}$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\sqrt{v_{ph}}} \int_{w_0}^w \frac{۲}{w} \frac{dw}{\sqrt{۱ - w^۲}} = \int_0^{\xi} d\xi \quad (۴۴.۳)$$



شکل ۲.۳: نمودار موج سالیونی

با فرض $w_0 = 1$ داریم:

$$\frac{\gamma}{v_{ph}} \operatorname{arcsech}(w) = \xi \quad (45.3)$$

بنابراین:

$$w = \operatorname{sech} \left(\xi \frac{\sqrt{v_{ph}}}{\gamma} \right) \quad (46.3)$$

و در نهایت:

$$u = \frac{v_{ph} w^2}{\gamma} = \frac{v_{ph}}{\gamma} \operatorname{sech}^2 \left(\xi \frac{\sqrt{v_{ph}}}{\gamma} \right) \quad (47.3)$$

مشاهده می‌شود (شکل ۲.۳) که جواب‌های معادله به شکل یک موج منفرد جایگزیده هستند که سالیون نامیده می‌شوند، همچنین ارتفاع بسته موج متناسب با سرعت زیاد می‌شود، لازم به توضیح است که منظور از پاشندگی در امواج پدیده‌ای است که باعث می‌شود امواج بسته به طول موجشان با سرعت‌های فاز مختلف انتشار یابند [۴۱].

۷.۳ استخراج معادله‌ی KdV با بکارگیری تکنیک کاهش اختلال

معادله‌ی KdV همانند معادله‌ی $KdVB$ که در بخش قبل به استخراج آن پرداختیم از معادلات پایه‌ی $QMHD$ به دست می‌آید.

با توجه به روابط:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (48.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P + \mathbf{F}_Q \quad (۴۹.۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{en_e} - \eta \mathbf{j} - \frac{m_e}{e^2 \mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{e \mu_0 n_e} \right) \cdot \nabla \right] \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{n_e} - \frac{\mathbf{F}_Q}{en_e} \right\} \quad (۵۰.۳)$$

و با در نظر گرفتن:

$$\mathbf{B} = B(x, t) \hat{z}$$

و

$$\mathbf{v} = v(x, t) \hat{v}$$

معادلات به صورت زیر خواهد بود [۴۲]:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -B \frac{\partial B}{\partial x} - c_s^2 \rho \frac{\partial}{\partial x} (\ln \rho) + \beta \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \right) + \frac{\varepsilon}{v_B^2} \rho \frac{\partial}{\partial x} [\rho b \tanh(\varepsilon B)] \quad (۵۱.۳)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Bv) - \gamma \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0 \quad (۵۲.۳)$$

بقیه‌ی روابط مشابه روابط معادله‌ی $KdVB$ است.

اگر مقاومت پلاسما ضعیف باشد، با چشم‌پوشی از جمله‌ی آخر در رابطه‌ی ۵۲.۳ به روابط زیر خواهیم رسید [۴۲]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial B}{\partial x} - c_s^2 \frac{\partial}{\partial x} (\ln \rho) + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{|\omega_{ce}| \omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \frac{\partial^2 \sqrt{b}}{\partial x^2} \right) + v_B^2 \frac{\partial}{\partial x} \{ \ln [\cosh(\varepsilon b)] + \varepsilon b \tanh(\varepsilon b) \} \quad (۵۳.۳)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial (bv)}{\partial x} = 0 \quad (۵۴.۳)$$

هدف ما حل همزمان این معادلات یا به عبارتی به دست آوردن معادله‌ی KdV می‌باشد.

با به کارگیری تکنیک کاهش اختلال متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon (x - u_0 t) \\ \tau &= \varepsilon^3 t \end{aligned} \quad (۵۵.۳)$$

همچنین متغیرهای دینامیکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^4 u_2 + \dots \\ B &= 1 + \varepsilon^2 B_1 + \varepsilon^4 B_2 + \dots \end{aligned} \quad (۵۶.۳)$$

با جایگذاری ۵۵.۳ و ۵۶.۳ در روابط ۵۱.۳ و ۵۲.۳ داریم:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + PB \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + Q \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (57.3)$$

طبق فرض قبلی برای معادله‌ی $KdVB$ ، $B_1 = b$ داریم:

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial \tau} + Pb \frac{\partial b}{\partial \xi} + Q \frac{\partial^3 b}{\partial \xi^3} = 0} \quad (58.3)$$

که در این روابط P و Q به صورت زیر خواهد بود:

$$P = \frac{3 + 2c_s^2 - 2v_B^2 \varepsilon^2 (6 - 5\varepsilon^2)}{2\sqrt{1 + c_s^2 - v_B^2 \varepsilon^2 (3 - (5/3)\varepsilon^2)}} \quad (59.3)$$

$$Q = -\frac{\omega_{pe}^2}{2|\omega_{ce}|\omega_c \sqrt{1 + c_s^2 - v_B^2 \varepsilon^2 (3 - (5/3)\varepsilon^2)}} \quad (60.3)$$

این معادله جوابی به صورت سالیتمی به فرم زیر خواهد داشت [۴۲]:

$$b = r \sec^2 h \left(\frac{\xi + u_0 \tau}{\omega} \right) \quad (61.3)$$

روابط r و ω به صورت زیر خواهد بود:

$$r = -\frac{2u_0}{P} \quad (62.3)$$

$$\omega = \left(-\frac{4Q}{u_0} \right)^{1/2} \quad (63.3)$$

u_0 سرعت اولیه و نرمالایز شده به C_A ، r دامنه‌ی موج سالیتمی و ω پهنای موج سالیتمی می‌باشد.

در فصل بعد به شبیه‌سازی و حل عددی این دو معادله ($KdVB$ و KdV) خواهیم پرداخت و تاثیر پارامترهای مختلف روی این دو معادله را بررسی می‌کنیم، همچنین نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی و نتایج مربوط به آن را به تفصیل بیان می‌کنیم.

۸.۳ جمع‌بندی

در فصل سوم به معرفی انتشار یک بعدی امواج سالیتمی (معادله‌ی KdV) و ضربه (معادله‌ی $KdVB$) در یک پلاسمای مغناطیسی کوانتومی پرداخته و نشان می‌دهیم که این دو معادله نتیجه‌ی مدل کوانتومی معادلات MHD می‌باشد.

معادله‌ی $KdVB$ و KdV توصیف‌کننده‌ی دینامیک امواج مغناطوسوتی است، که معادله‌ی $KdVB$ حاصل اضافه شدن جمله‌ی مقاومت γ به معادله‌ی KdV می‌باشد و باعث به‌وجود آمدن مشتق مرتبه‌ی دوم می‌شود.

امواج سالیتون دارای سه خاصیت:

- شکل آن تغییر نکند.
- در منطقه‌ای از فضا محدود باشد.
- بعد از برخورد با سالیتون‌های دیگر شکل خود را حفظ می‌کند، مگر با یک انتقال فاز.

امواج ضربه ناشی از یک اختلال پیش‌رونده است که در داخل مایعات، گازها و پلاسما با سرعتی بیشتر از سرعت صوت حرکت می‌کند این نوع موج مانند سایر امواج حامل انرژی می‌باشد این موج با تغییرات ناگهانی و تقریباً ناپیوسته‌ای همراه است، که در فشار، دما و حجم مخصوص قابل شناسایی است.

برخلاف سالیتون‌ها، موج ضربه با موج ضربه‌ی دیگری برخورد کند در نیمه‌ی راه متوقف می‌شود. و در پایان به استخراج این دو معادله پرداخته و در فصل ۴ به رسم و تفسیر این معادلات می‌پردازیم.

فصل ۴

حل عددی معادلات KdV و $KdVB$

۱.۴ حل عددی معادله‌ی KdV و بررسی پارامترهای مختلف

در فصل پیش معادله‌ی اساسی KdV را به دست آوردیم (رابطه‌ی (۵۸.۳)). در این بخش به حل عددی این معادله با شرایط مرزی و اولیه‌ی معلوم خواهیم پرداخت و نتایج حاصل و نمودارهای مرتبط را بررسی خواهیم کرد.

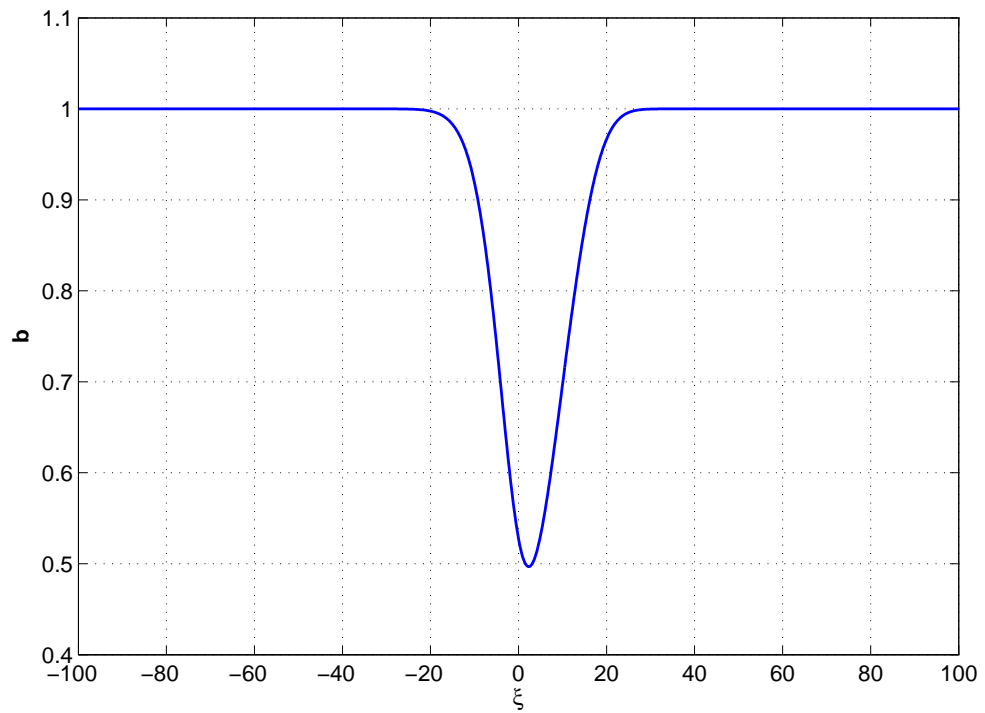
این معادله یک معادله دیفرانسیل غیرخطی با بستگی زمانی و فضایی است، برای به دست آوردن جواب‌های این معادله به صورت تابعی از زمان و مکان از گسسته‌سازی معادله استفاده می‌کنیم، بنابراین جواب‌ها فقط در نقاط گسسته تعریف پذیر می‌باشند. در شبیه‌سازی ما گام‌های زمانی و فضایی به ترتیب با Δt و Δx نمایش داده شده است. همچنین در گسسته‌سازی قسمت زمانی از الگوریتم رانگ - کوتا استاندارد با گام‌های زمانی 10^{-3} و در قسمت فضایی از روش تفاضل محدود استفاده کرده‌ایم. به عنوان شرایط اولیه یک پالس گاوسی را معرفی نمودیم و از نرم‌افزارهای متلب (*MATLAB*)، میپل (*Maple*) و فورترن ۹۰ (*Fortran*) بهره بردیم.

در شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ جواب حاصل از شبیه‌سازی رایانه‌ای معادله‌ی KdV بدست آمده به ازای پارامترهای معلوم نمایش داده شده است.

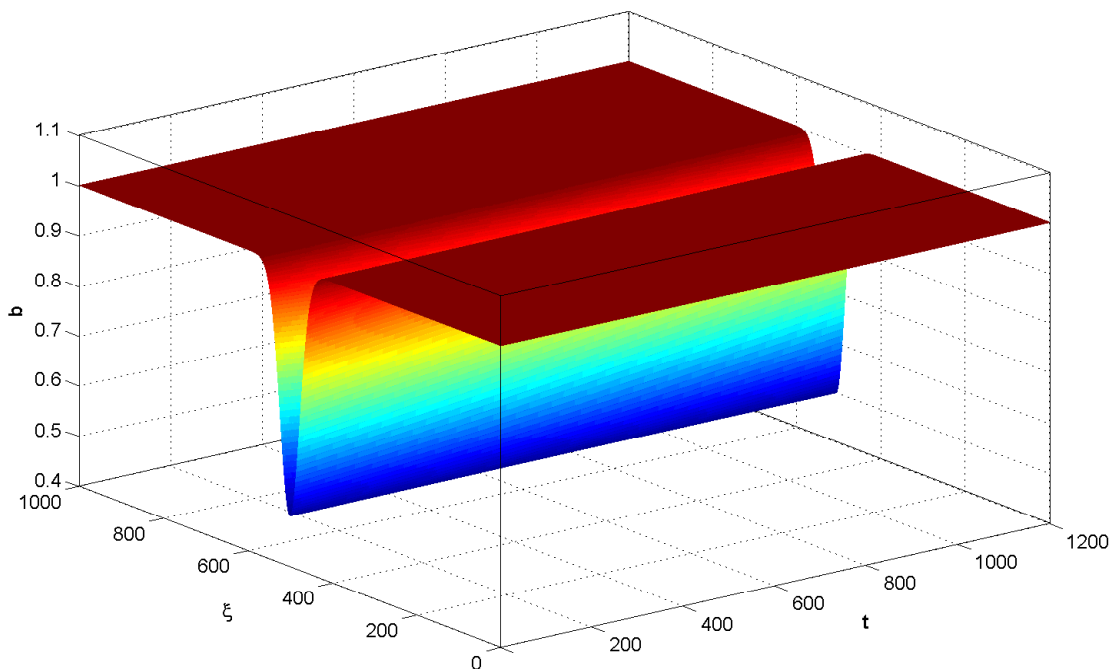
۲.۴ بررسی تاثیر چند پارامتر بر موج سالی‌تونی

در این قسمت قصد داریم تا تاثیر چند پارامتر مهم بر پهنا و دامنه‌ی موج سالی‌تونی را مورد بررسی قرار دهیم. این پارامترها عبارتند از: ε (انرژی زمین)، u_0 (سرعت اولیه)، B_0 (میدان مغناطیسی اولیه) و n_0 (چگالی عددی اولیه).

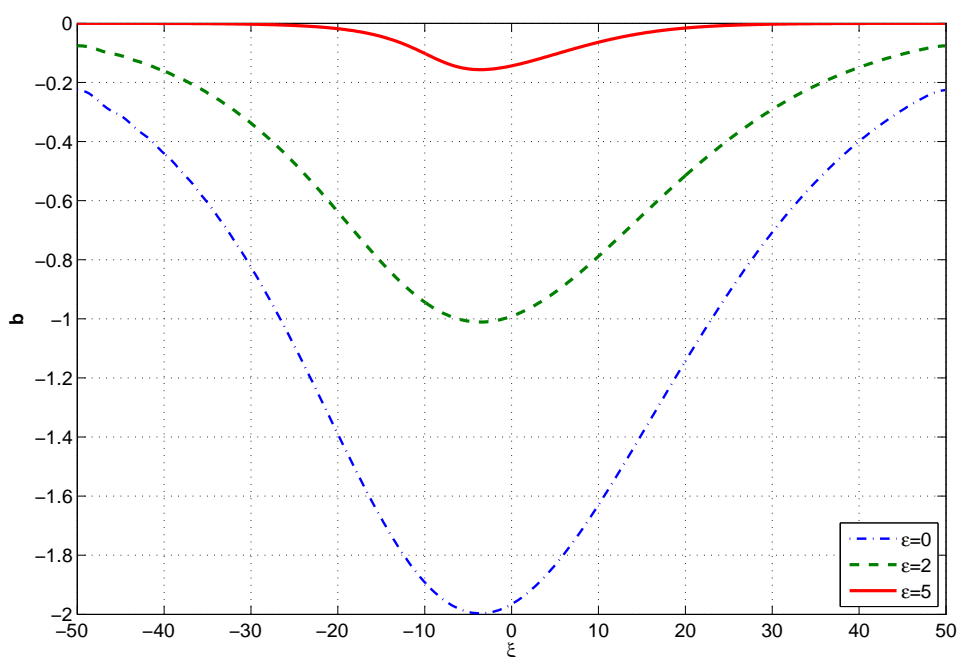
در شکل ۳.۴ به ازای $v_B = 0.2$ و $c_s = 0.1$ برای سه مقدار متفاوت از پارامتر ε نمودار سالی‌تونی حاصل را رسم کرده‌ایم. همانطور که مشاهده می‌کنیم به ازای $\varepsilon = 0$ (خط چین، رنگ آبی) با بیشترین



شکل ۱.۴: نمودار سالیونی جواب معادله‌ی KdV به ازای $v_B = 0.2$ ، $c_s = 0.1$ ، $\varepsilon = 5$ و $u_0 = 1$ و $\omega_{pe}^2 / |\omega_{ce}| \omega_c = 1$



شکل ۲.۴: حالت سه بعدی شکل ۱.۴ به ازای ۱۲۰۰ گام زمانی با همان پارامترها



شکل ۳.۴: مقایسه‌ی پهنا و دامنه‌ی سالیون برای سه مقدار مختلف از پارامتر ε ، سایر پارامترها:

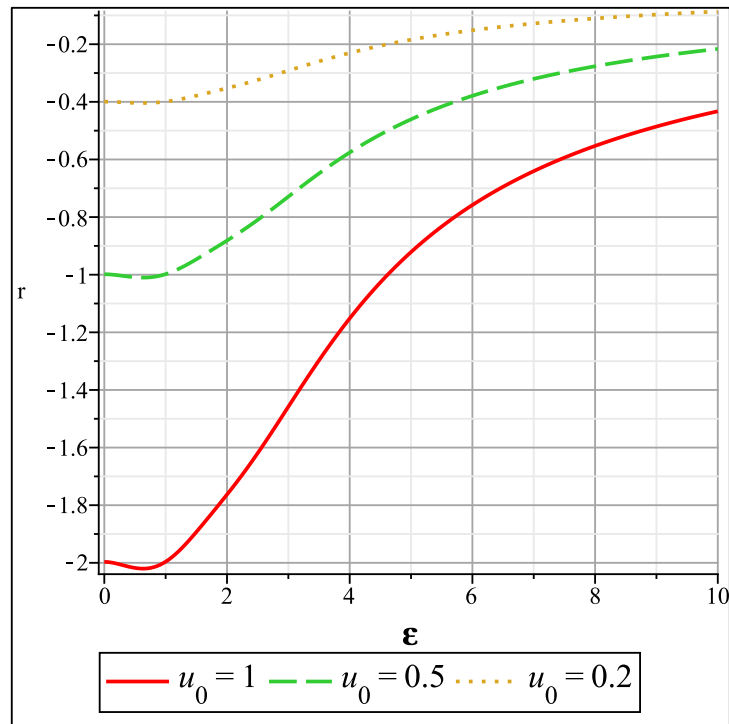
$$\omega_{pe}^2 / |\omega_{ce}| \omega_c = 1 \text{ و } u_0 = 1, c_s = 0.1, v_B = 0.2$$

دامنه و پهنا مواجه هستیم و به ازای $\varepsilon = 5$ (خط کامل، قرمز) پهنا و دامنه موج کمتر شده است. به بیان دیگر با افزایش مقدار ε پهناي موج کاهش یافته و موج کم عمق‌تر می‌شود.

همچنین در شکل ۴.۴ نمودار تغییرات دامنه موج سالیونی (r) بر حسب ε برای سه سرعت مختلف رسم شده است. مشاهده می‌شود برای یک ε مشخص با کاهش سرعت اولیه، دامنه موج نیز کاهش می‌یابد. همچنین برای یک سرعت مشخص می‌بینیم که با افزایش ε با کاهش دامنه مواجه هستیم که با نتیجه‌ی حاصل از شکل ۳.۴ مطابقت دارد.

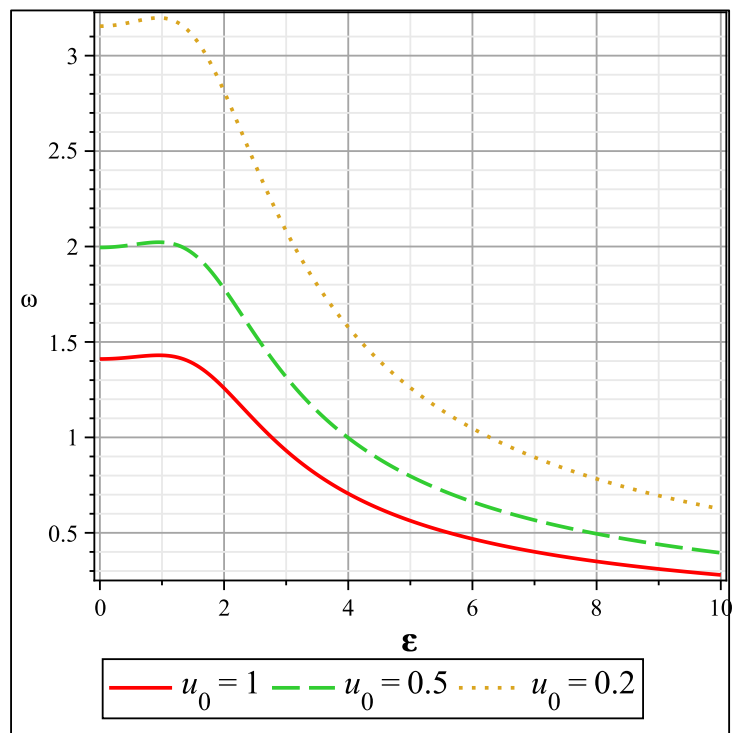
در شکل ۵.۴ نیز نمودار تغییرات پهناي سالیون را بر حسب پارامتر ε رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌کنیم برای یک ε مشخص، با افزایش سرعت اولیه، پهناي سالیون کاهش می‌یابد. همچنین برای یک سرعت مشخص با افزایش ε شاهد کاهش پهنا هستیم که با نتیجه‌ی حاصل از شکل ۳.۴ همخوانی دارد. ما همچنین تاثیر میدان مغناطیسی اولیه B_0 بر موج سالیون را مورد بررسی قرار دادیم. در شکل ۶.۴ نتایج حاصل از این بررسی نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار B_0 ، میزان پهنا و دامنه سالیون نیز رو به افزایش است.

در شکل ۷.۴ نیز به مقایسه پهنا و دامنه‌ی سالیون برای چند مقدار متفاوت n_0 پرداختیم. می‌بینیم که اگرچه با افزایش مقدار n_0 پهنا افزایش می‌یابد اما، دامنه‌ی موج سالیونی با افزایش چگالی عددی اولیه، کاهش می‌یابد.



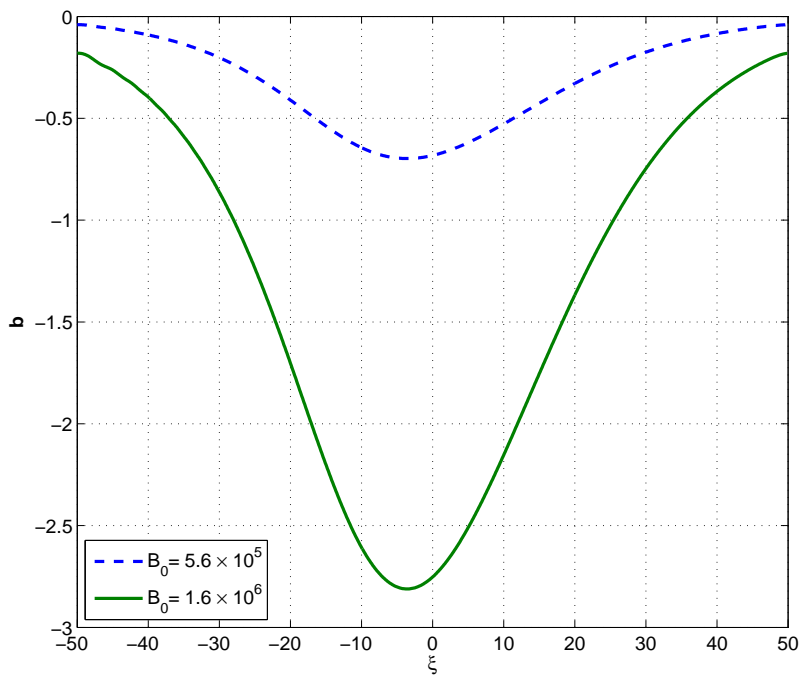
شکل ۴.۴: نمودار تغییرات دامنه سالیتون بر حسب ϵ برای سرعت‌های مختلف. سایر پارامترها:

$$\omega_{pe}^2/|\omega_{ce}|\omega_c = 1 \text{ و } c_s = 0.1, v_B = 0.2$$

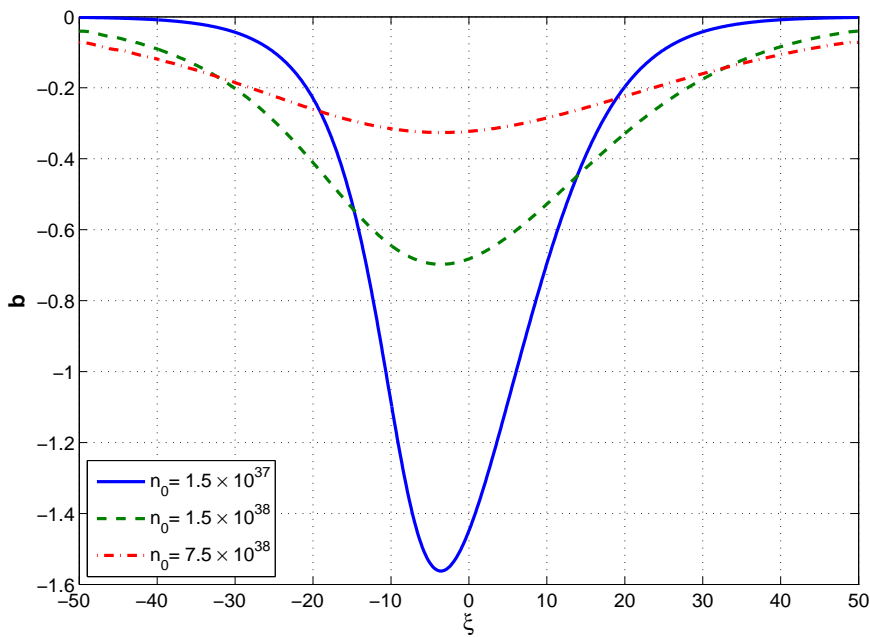


شکل ۵.۴: نمودار تغییرات پهنای سالیتون بر حسب ϵ برای سرعت‌های مختلف. سایر پارامترها:

$$\omega_{pe}^2/|\omega_{ce}|\omega_c = 1 \text{ و } c_s = 0.1, v_B = 0.2$$



شکل ۶.۴: اثر میدان اولیه B_0 بر سالیتون. $T_e = ۲/۴ \times ۱۰^۳$ و $n_0 = ۱/۵ \times ۱۰^{۳۸}$



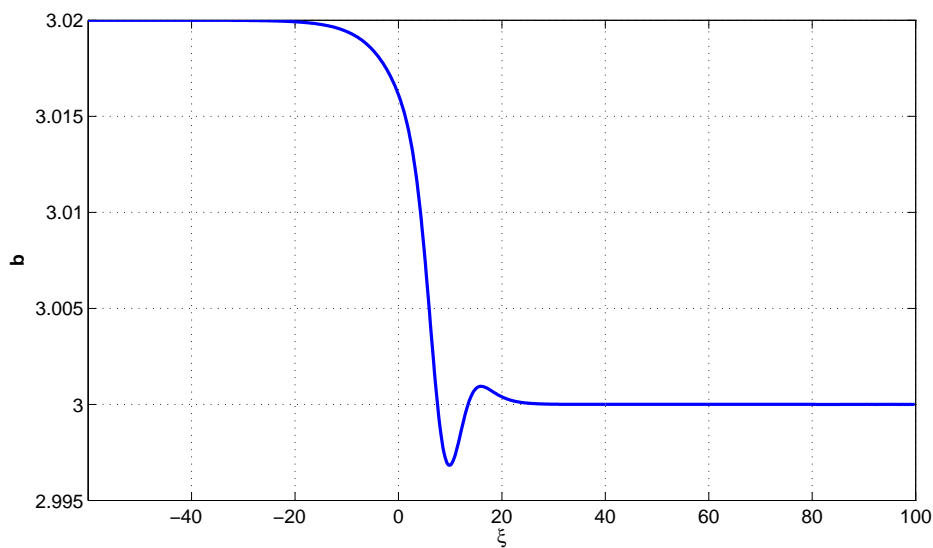
شکل ۷.۴: تاثیر پارامتر n_0 بر موج سالیتون. $T_e = ۲/۴ \times ۱۰^۳$ و $B_0 = ۵/۶ \times ۱۰^۵$

۳.۴ حل عددی معادله‌ی $KdVB$ و بررسی پارامترهای مختلف

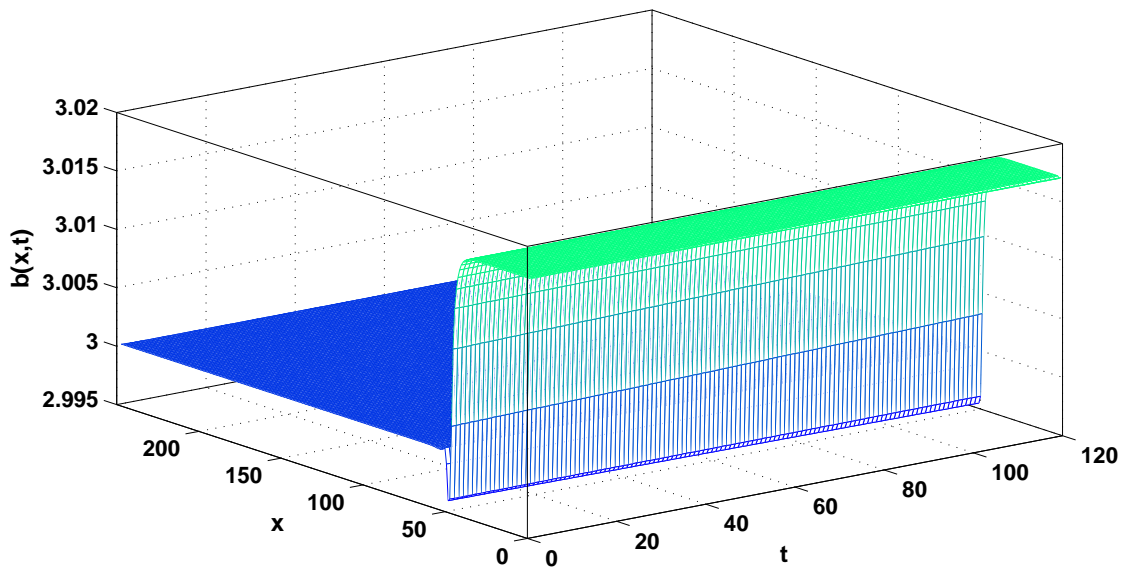
در این بخش به بررسی حل عددی معادله‌ی $KdVB$ مشابه بخش اول از این فصل با شرایط اولیه و مرزی معلوم می‌پردازیم، مشاهده می‌شود که این معادله با اضافه شدن مقاومت به معادله‌ی KdV حاصل شده و منجر به تولید امواج ضربه می‌کند. در فصل قبل به تفصیل در مورد این امواج و معادله‌ی $KdVB$ پرداختیم.

همچنین تاثیر پارامترهای مختلف از جمله تغییرات میدان مغناطیسی اولیه B_0 ، چگالی n_0 و دمای الکترون T_e را بر این موج بررسی می‌کنیم.

ابتدا نمودار دو بعدی و سه بعدی مربوط به معادله‌ی $KdVB$ (امواج ضربه) را رسم می‌کنیم:



شکل ۳.۴: نمودار ضربه‌گونه‌ی معادله‌ی $KdVB$ به ازای $\varepsilon = 0.001$ ، $v_B = 3.189$ ، $c_s = 4.510$ ، $\gamma = 0.078$ ، $\beta = 0.0001$ ، $v_p = 4.619$ ،



شکل ۹.۴: حالت سه بعدی شکل ۸.۴ به ازای ۱۲۰۰ گام زمانی با همان پارامترها

۱.۳.۴ معادله‌ی $KdVB$ بدون ضریب اتلاف

حال اگر در معادله‌ی $KdVB$ ضریب اتلاف (R) حذف شود، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} + Pb \frac{\partial b}{\partial \xi} + Q \frac{\partial^3 b}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.4)$$

به همان معادله‌ی KdV که در بخش اول این فصل به طور مفصل آن را بررسی کردیم می‌رسیم.

۲.۳.۴ معادله‌ی $KdVB$ بدون ضریب انتشار

حال فرض سوم ما این است که ضریب Q در معادله‌ی $KdVB$ حذف شود. یعنی پراکندگی نداشته باشیم.

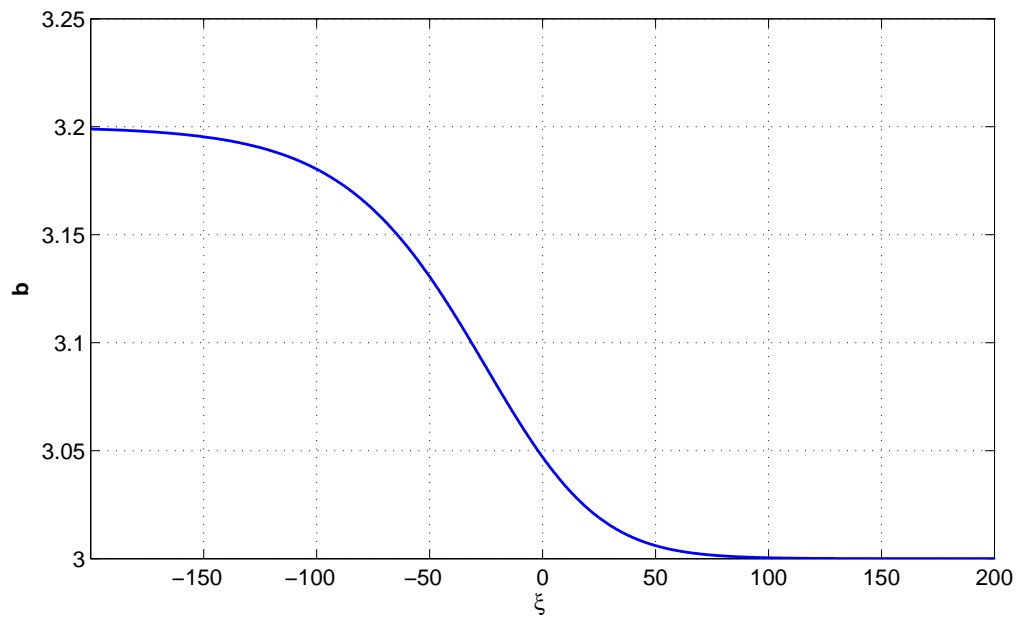
معادله به شکل:

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} + Pb \frac{\partial b}{\partial \xi} + R \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.4)$$

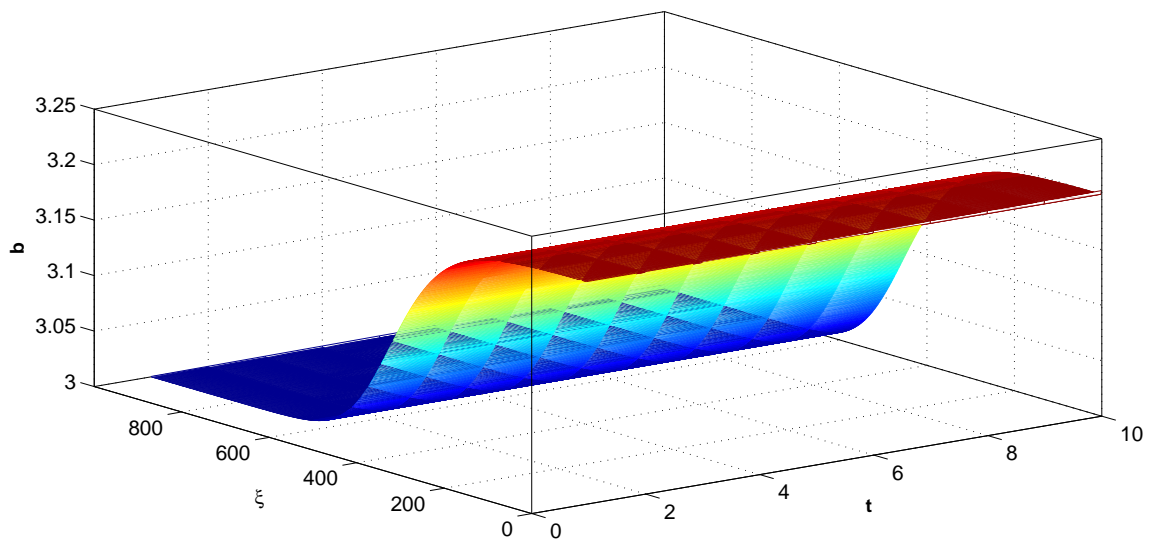
خواهد شد.

۴.۴ بررسی تاثیر چند پارامتر بر موج ضربه

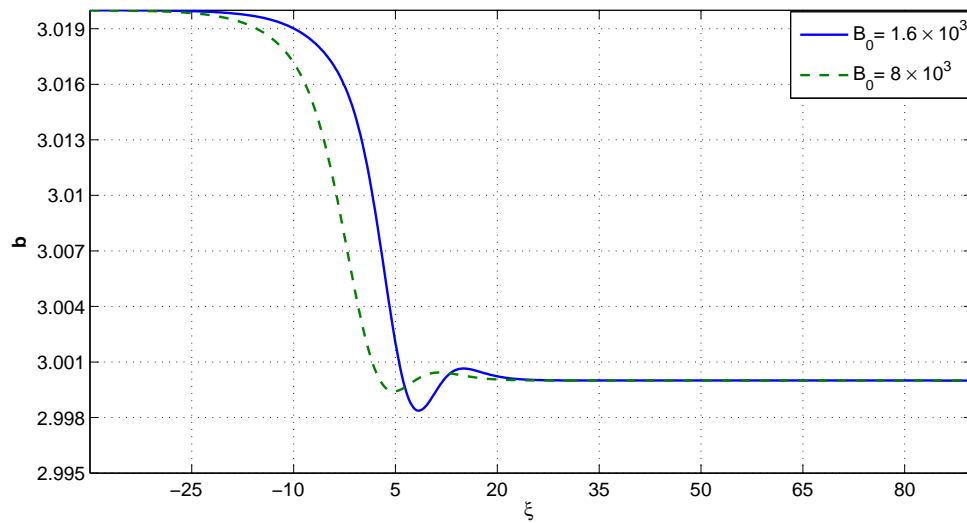
در این بخش به بررسی تاثیر چند پارامتر مهم در امواج ضربه خواهیم پرداخت، این پارامترها عبارتند از: میدان مغناطیسی B_0 ، چگالی n_0 و دمای الکترون T_e .



شکل ۱۰.۴: نمودار معادله‌ی ۲.۴ به ازای $\varepsilon = 0.0010$ ، $v_B = 3.1893$ ، $c_s = 4.5103$ ، $\gamma_0 = 79.3674$ ، $v_p = 4.6198$

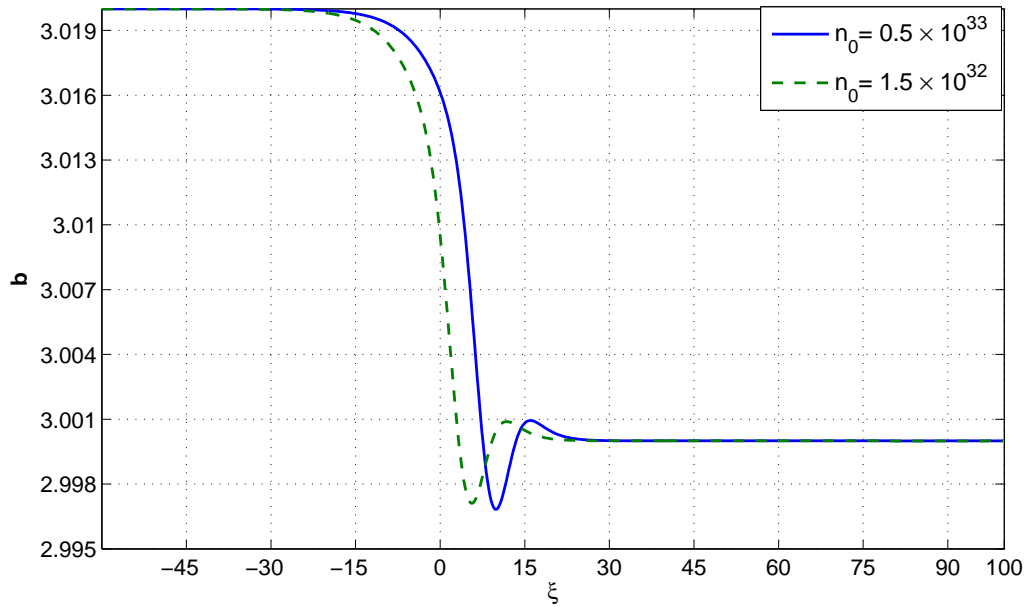


شکل ۱۱.۴: حالت سه بعدی ۱۰.۴ به ازای ۱۲۰۰ گام زمانی با همان پارامترها

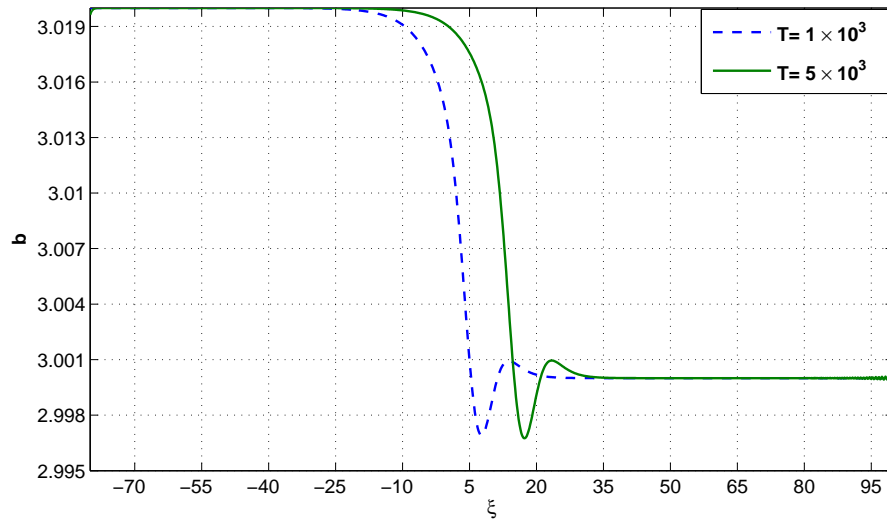


شکل ۱۲.۴: بررسی اثر میدان مغناطیسی اولیه بر موج ضربه. $n_e = 1.5 \times 10^{23}$ و $\nu_{ei} = 2.2 \times 10^{11}$ و $T_e = T_i = 10^3$

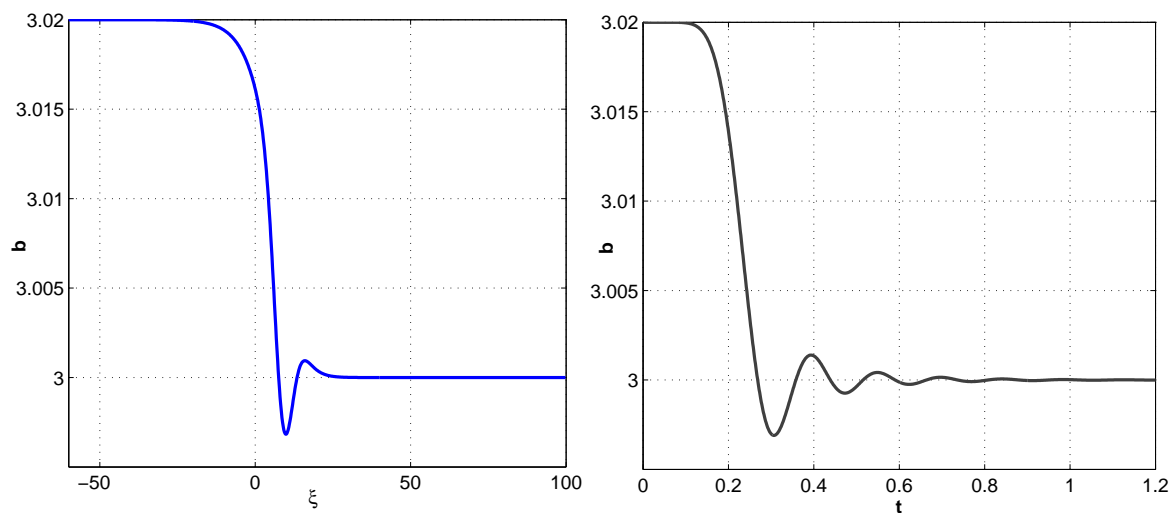
نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های ۱۲.۴ - ۱۵.۴ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود با افزایش n_e و T_e قدرت ضربه افزایش می‌یابد و نیز با افزایش B_0 قدرت ضربه کاهش می‌یابد. یادآور می‌شویم که پارامترها را طوری انتخاب می‌کنیم که v_p حقیقی بماند و γ کوچک باشد. همچنین در شکل ۱۵.۴ برای یک نقطه‌ی مکانی در زمان‌های مختلف نمودار b رسم شده است.



شکل ۱۳.۴: تاثیر پارامتر n_0 بر موج ضربه. $B_0 = 1/6 \times 10^3$ و $\nu_{ei} = 2/2 \times 10^{10}$ و $T_e = T_i = 10^3$



شکل ۱۴.۴: بررسی اثر دمای الکترون بر موج ضربه. $B_0 = 1/6 \times 10^3$ و $n_0 = 1/5 \times 10^{33}$ و $\nu_{ei} = 2/2 \times 10^{11}$



شکل ۴.۱۵: موج ضربه گونه. (سمت چپ): نمودار b بر حسب ξ به ازای $\varepsilon = 0.001$ ، $v_B = 3.189$ ، $\gamma = 0.78$ ، $\beta = 0.0001$ ، $v_p = 4.619$ ، $c_s = 4.510$ ، $x = 10$ نقطه‌ی (سمت راست): b بر حسب زمان برای

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

نتیجه‌گیری:

پلاسمای کوانتومی در دهه‌های اخیر به شدت مورد توجه محققان قرار گرفته است، هدف ما در این پایان‌نامه به دست آوردن معادلات KdV و $KdVB$ و حل عددی این معادلات است.

- مولد امواج مغناطوسوتی معادلات KdV و $KdVB$ می‌باشد.
 - اسپین در این معادلات نقش مهمی را ایفا می‌کند، و در واقع کار ما در این پایان‌نامه بررسی $Spin - magnetisonic$ می‌باشد.
 - سیستم پلاسمایی مورد استفاده در این پایان‌نامه، پلاسمای الکترون - یون است. حل عددی این دو معادله با شرایط مرزی و اولیه معلوم می‌باشد.
 - به عنوان شرایط اولیه، یک تابع اولیه معرفی کرده و با استفاده از $Finite - diffrence$ و $Runge - kutta$ مرتبه‌ی ۴ معادلات را حل عددی می‌کنیم. در این معادلات پارامترهای مختلفی دخیل است.
 - اثر اسپین در این معادلات اثر خود را بر انرژی زیرمان نشان می‌دهد.
 - با استفاده از معادلات اساسی مدل مگنتو هیدرودینامیک کوانتومی، رابطه‌ی پاشندگی غیرخطی برای امواج مغناطوسوتی در یک پلاسمای کوانتومی تبهگن با حضور نیروی کوانتومی اسپین به دست می‌آید.
 - امواج سالیتونی جواب معادله‌ی غیر خطی KdV و امواج ضربه جواب معادله‌ی غیر خطی $KdVB$ هستند.
 - یکی از مشهورترین معادله‌ی پخش غیر خطی که در آن پارامتر اتلاف به خوبی ظاهر می‌شود، معادله‌ی برگر می‌باشد.
- حال به رسم نمودارهایی از طریق شبیه‌سازی برای معادلات KdV و $KdVB$ در حالت‌های دو بعدی و سه بعدی می‌پردازیم، که البته برای حالت سه بعدی از همان کدهای پیوست پ استفاده شده ولی شرایط اولیه تغییر کرده است

و در نهایت به بررسی پارامترهای مختلف شامل (ε و u_0 و B_0) بر روی دامنه و پهنای موج سالیوتونی و بررسی پارامترهای (B_0 و n_0 و T_e) بر قدرت و دامنه‌ی موج ضربه می‌پردازیم و به نتایج زیر دست می‌یابیم:

امواج سالیوتونی:

- در بررسی پارامتر ε (انرژی زمین) مشاهده کردیم که با افزایش این پارامتر، دامنه و پهنای موج کاهش می‌یابد.

- در بررسی پارامتر u_0 (سرعت اولیه) دیدیم که با افزایش سرعت، دامنه افزایش و پهنای موج کاهش می‌یابد.

- در بررسی پارامتر میدان مغناطیسی اولیه در می‌یابیم که با افزایش میدان، دامنه و پهنای موج سالیوتونی هم افزایش می‌یابد.

- در بررسی چگالی مشاهده کردیم با افزایش n_0 ، دامنه کاهش و پهنای افزایش می‌یابد.

امواج ضربه‌گونه:

- در بررسی‌های انجام شده در مورد امواج ضربه‌گونه در مورد پارامتر میدان مغناطیسی اولیه B_0 باید گفت که با افزایش این پارامتر، قدرت ضربه کاهش ولی دامنه افزایش می‌یابد.

- در بررسی پارامتر چگالی اولیه به این نتیجه رسیدیم که با افزایش این پارامتر، قدرت ضربه افزایش ولی دامنه‌ی موج کاهش می‌یابد.

- و در نهایت در مورد تغییر دمای الکترون مشاهده کردیم که با افزایش دما قدرت ضربه افزایش و دامنه کاهش می‌یابد.

در پایان نتیجه‌ی کلی که می‌توان گرفت این است که تمام نتایج به دست آمده در این پایان‌نامه با نتایج حاصل از مطالعات نظری هم‌خوانی خوبی دارد (به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۴۲] و [۷] رجوع کرد).

پیشنهادات:

- به عنوان پیشنهاد می‌توان تاثیر پارامترهای دیگری مانند تغییر دمای یون، فرکانس برخورد را بر نمودارهای سالیوتونی و ضربه‌گونه بررسی کرد.

پیوست آ

اثبات روابط

۱.آ بسط رابطه‌ی (۲۷.۳)

طبق رابطه‌ی (۲۷.۳) داشتیم:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \times \\
 & \left[\left(\epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2} v_p \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2 + \dots) + (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2) \right] \\
 & = \underbrace{(-1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots)}_A \\
 & \underbrace{c_s^2 (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\ln (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots))}_B \\
 & + \underbrace{\beta (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \left(\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{(1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2)^{1/2}} \right) \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left((1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots)^{1/2} \right)}_C \\
 & + \frac{\epsilon}{v_B^2} (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) \\
 & \times [(\epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 + \dots) (1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots) \tanh(\epsilon (1 + \epsilon B_1 + \epsilon^{3/2} B_2 + \dots))]
 \end{aligned}
 \tag{۱.آ}$$

طرف چپ رابطه‌ی (۲۷.۳) را باز می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2) \\
 & \times \left[\epsilon^{\Delta/2} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \epsilon^3 \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \epsilon^{3/2} v_p \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \epsilon^2 v_p \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + (\epsilon v_1 + \epsilon^{3/2} v_2) \left(\epsilon^{3/2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right) \right] \\
 & = \epsilon^{\Delta/2} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \epsilon^3 \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \epsilon^{3/2} v_p \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \epsilon^2 v_p \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\Delta/2} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^3 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^3 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \\
 & + \epsilon^{7/2} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \epsilon^4 \rho_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \epsilon^{\Delta/2} v_p \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \epsilon^3 v_p \rho_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} \rho_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^4 \rho_1 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \\
 & + \epsilon^4 \rho_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^{9/2} \rho_1 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^4 \rho_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \epsilon^{9/2} \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \epsilon^3 \rho_2 v_p \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \epsilon^{7/2} \rho_2 v_p \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \\
 & + \epsilon^4 \rho_2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^{9/2} \rho_2 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{9/2} \rho_2 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\Delta} \rho_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

حال طرف دوم رابطه‌ی (۲۷.۳) را بسط می‌دهیم. ابتدا جمله‌ی A :

$$\begin{aligned}
 & (-1 - \epsilon B_1 - \epsilon^{3/2} B_2) \epsilon^{3/2} \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial B_2}{\partial \xi} \\
 & = -\epsilon^{3/2} \frac{\partial B_1}{\partial \xi} - \epsilon^2 \frac{\partial B_2}{\partial \xi} - \epsilon^{\Delta/2} B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} - \epsilon^3 B_1 \frac{\partial B_2}{\partial \xi} - \epsilon^{7/2} B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \xi} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

جمله‌ی B :

$$\begin{aligned}
 & (-c_s^2 - c_s^2 \epsilon \rho_1 - c_s^2 \epsilon^{3/2} \rho_2) \left[(\epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2) - \left(\frac{1}{\gamma} \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2 \right)^2 \right] = \\
 & -c_s^2 \epsilon^{3/2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - c_s^2 \epsilon^{\Delta/2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma} c_s^2 \epsilon^{\Delta/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1^2) + \frac{1}{\gamma} c_s^2 \epsilon^{7/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2^2) + c_s^2 \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 \rho_2) \\
 & -c_s^2 \epsilon^{\Delta/2} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - c_s^2 \epsilon^3 \rho_1 \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{7/2} c_s^2 \rho_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1^2) + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{9/2} c_s^2 \rho_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2^2) + c_s^2 \rho_1 \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 \rho_2) \\
 & -c_s^2 \epsilon^3 \rho_2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - c_s^2 \epsilon^{7/2} \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma} c_s^2 \epsilon^4 \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1^2) + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{\Delta} c_s^2 \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2^2) + c_s^2 \epsilon^{7/2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 \rho_2) \\
 & \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

جمله‌ی C :

$$\begin{aligned}
 & \beta (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2) \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2)^{1/2}} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \rho_2)^{1/2} \right] = \\
 & (\beta + \beta \epsilon \rho_1 + \epsilon^{3/2} \beta \rho_2) \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \\
 & \times \left[\epsilon^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \epsilon^{5/2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{3/2} \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{3/2} \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^2 \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \right] \\
 & = \frac{1}{2} \epsilon^{5/2} \beta \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \beta \epsilon^2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \beta \epsilon^{3/2} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \beta \epsilon^{3/2} \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \beta \epsilon^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \\
 & - \frac{1}{4} \beta \epsilon^2 \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^2 \beta \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \beta \epsilon^{3/2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \beta \epsilon^{3/2} \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \\
 & + \epsilon^{3/2} \beta \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} + \epsilon^2 \beta \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \epsilon^{3/2} \beta \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \epsilon^{3/2} \beta \rho_1^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{5/2} \beta \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \\
 & - \frac{1}{4} \epsilon^{5/2} \beta \rho_1^2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{5/2} \beta \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{5/2} \beta \rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \beta \rho_1 \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{11/2} \beta \rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \\
 & + \epsilon^2 \beta \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \epsilon^{3/2} \beta \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \epsilon^{5/2} \beta \rho_2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \epsilon^{5/2} \beta \rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \epsilon^{11/2} \beta \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \\
 & - \frac{1}{4} \epsilon^{11/2} \beta \rho_1^2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi^2} \tag{۵.۱}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \epsilon^4 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (B_1 \tanh \epsilon B_1) + \epsilon^{9/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (B_1 \tanh \epsilon B_2) + \epsilon^{7/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (B_2 \tanh \epsilon) \\
 & + \epsilon^{9/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \tanh \epsilon B_1 + \epsilon^{7/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\tanh \epsilon B_2) + \epsilon^3 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (B_1 \tanh \epsilon) \\
 & + \epsilon^4 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 \tanh \epsilon B_1) + \epsilon^{9/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 \tanh \epsilon B_2) + \epsilon^4 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 B_1 \tanh \epsilon) \\
 & + \epsilon^5 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 B_1 \tanh \epsilon B_1) + \epsilon^{11/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 B_1 \tanh \epsilon B_2) + \epsilon^{9/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 B_2 \tanh \epsilon) \\
 & + \epsilon^{11/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 B_2 \tanh \epsilon B_1) + \epsilon^6 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 B_2 \tanh \epsilon B_2) + \epsilon^{7/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 \tanh \epsilon) \\
 & + \epsilon^{9/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 \tanh \epsilon B_1) + \epsilon^5 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 \tanh \epsilon B_2) + \epsilon^6 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 B_1 \tanh \epsilon B_2) \\
 & + \epsilon^5 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 B_2 \tanh \epsilon) + \epsilon^6 \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 B_2 \tanh \epsilon B_1) + \epsilon^{13/2} \frac{\epsilon}{v_B^2} \rho_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 B_2 \tanh \epsilon B_2)
 \end{aligned}
 \tag{۶.آ}$$

اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم معادله‌ی اصلی $KdVB$ و ضرایب مربوطه را استخراج کنیم. بدین منظور فرمول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(۲.آ) = (۶.آ) + (۵.آ) + (۴.آ) + (۳.آ)$$

و با مساوی قرار دادن توان‌های مختلف ϵ در دو طرف رابطه در نهایت به معادله‌ی $KdVB$ خواهیم رسید.

پیوست ب

ب.۱ تاریخچه‌ی پیدایش سالیتون

حرکت موجی یکی از مباحث متعارف در فیزیک پایه است. امواج در محیط‌های گوناگون از جمله امواج صوتی، امواج الکترومغناطیسی و همگی از قوانین حرکت بنیادی واحدی پیروی می‌کنند. امواج نقش فراگیر در طبیعت دارند. اکثر امواج تناوبی یا تکرار شونده‌اند. یعنی برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌ها به صورت قطاری بی‌پایان یکدیگر را تعقیب می‌کنند. نوع دیگری از امواج، امواج منفرد^۱ هستند که همانطور که از نامشان پیداست فقط شامل یک برآمدگی و یا فرورفتگی است که به صورت انفرادی حرکت می‌کند. مشاهده‌ی این نوع موج نخستین بار توسط یک مهندس راه و ساختمان انگلیسی در اواسط قرن نوزدهم صورت گرفت.

اسکات راسل^۲ در سال ۱۹۳۴ با مشاهده‌ی حرکت قایقی در کانال یونیون در نزدیکی ادینبورگ^۳ در گزارشی چنین نوشت: ”قایقی را مشاهده کردم که دو اسب آن را در کانال باریکی به سرعت می‌کشیدند که ناگهان قایق متوقف شد، اما توده‌ای آبی که قایق در کانال به حرکت درآورده بود متوقف نشد، بلکه در حالتی متلاطم اطراف دماغه‌ی قایق انباشته شد، سپس قایق را پشت سر گذاشت و با سرعت زیادی جلو رفت و به شکل یک برآمدگی بزرگ منفرد درآمد و به شکل توده‌ای مشخص، گرد و هموار از آب به راه خود در کانال ادامه داد. بدون این که شکل یا سرعت خود را از دست دهد. سوار بر اسب، آن را دنبال کردم و از آن، که هنوز با سرعتی حدود ۸ یا ۹ مایل به پیش می‌رفت و شکل اولیه‌اش را به طول سی فوت و ارتفاع یک تا یک و نیم فوت حفظ کرده بود، جلو زدم. ارتفاع آن به تدریج کم می‌شد و پس از یک یا دو مایل تعقیب، آن را در پیچ و خم کانال گم کردم.”

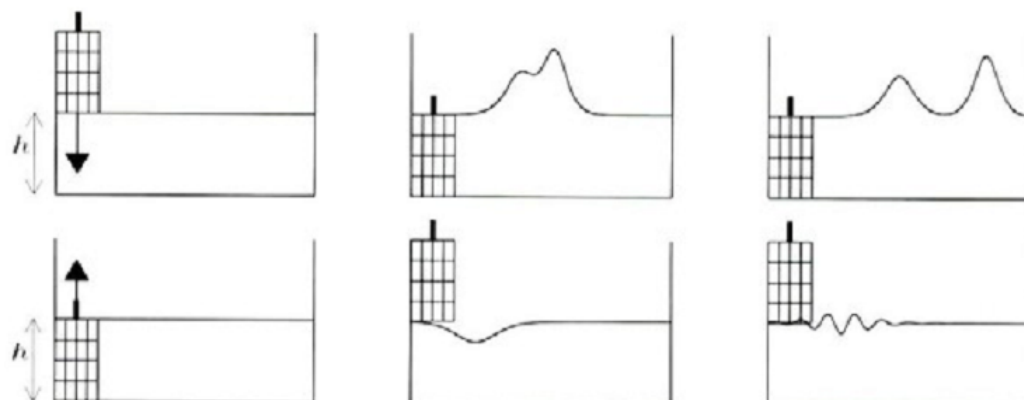
راسل پس از این جریان در آزمایشگاه با فروبردن وزنه‌ای به داخل آب یک تشکک طویل و مستطیل شکل، امواجی مشابه با امواج آب داخل کانال به وجود آورد و توانست وجود امواج منفرد را به طور قطعی تایید کند. تصویری از ابزاری که راسل برای آزمایش خود مورد استفاده قرار داد، در شکل ب.۱^۱ نمایش داده شده است.

او دریافت سرعت چنین امواجی دقیقاً به دامنه‌ی آن موج و عمق آب بستگی دارد و امواج مرتفع‌تر

^۱ singlet waves

^۲ scout russell

^۳ edinburgh



شکل ب.۱۰: آزمایش راسل که منجر به کشف سالیتون شد

سریع‌تر از امواج تخت‌تر حرکت می‌کنند. نیم قرن گذشت تا تکنیک‌های نظری مناسبی تدوین شدند و امکان پژوهش تا دهه‌ی ۱۹۶۰ به نظر می‌رسید چیز عجیب و غریب دیگری در مورد امواج منفرد وجود ندارد تا این که کشف کاملاً غیرمنتظره‌ای رخ داد. نورمن و زابوسکی^۴ از آزمایشگاه‌های بل و مارتین کروسکال^۵ از دانشگاه پرینستون مشغول مطالعه‌ی تغییرات این امواج از طریق شبیه‌سازی‌های کامپیوتری حرکت آن‌ها بودند و به این نتیجه رسیدند که در برخورد دو موج منفرد با یکدیگر عبور کرده و با همان شکل و هویت قبلی خود سالم از طرف دیگر درمی‌آیند. امواج منفرد چنان همدوسی و پایداری چشمگیری را به نمایش گذاشتند که به نظر می‌رسید بیشتر شبیه به ذرات ماده باشند تا شبیه به موج. به همین مناسبت، زابوسکی و کروسکال، به پیروی از این رسم که ذرات بنیادی در فیزیک با کلمات مختوم به ”ون” نام‌گذاری می‌شوند، این امواج را سالیتون^۶ نامیدند.

روش‌های جدید و قدرتمندی برای توصیف این امواج به زبان ریاضی ابداع شده و بیش از یکصد معادله به دست آمده است که امواج منفرد می‌توانند جواب‌های آن‌ها باشند.

سالیتون‌ها در حوزه‌های طبیعی گوناگون مثل جو، اقیانوس‌ها، فیزیک پلاسما و احتمالاً در دستگاه‌های عصبی موجودات زنده مشاهده شده‌اند. سالیتون‌ها نقش مهمی در ارتباطات راه دور بر عهده دارند و پایداری شکل و مصونیت این امواج در برابر اعوجاج، آن‌ها را حامل‌های ایده‌آلی برای سیگنال‌های راه دور ساخته است.

^۴Norman and Zabusky

^۵Kruskal

^۶soliton

مراجع

- [1] Shalom Eliezer, Y Eliezer ,*The Fourth State of Matter: An Introduction to Plasma Science* , CRC Press; 2 edition (June 22, 2001)
- [2] Luo, Q-Z. and D'Angelo, N. and Merlino, R. L. , *Shock formation in a negative ion plasma*, Physics of Plasmas, **5**, 2868-2870 (1998)
- [3] Peratt, Anthony L. *Evolution of the plasma universe. I - Double radio galaxies, quasars, and extragalactic jets.*, IEEE Transactions on Plasma Science (ISSN 0093-3813), vol. PS-14, Dec. 1986, p. 639-660.
- [4] Henry George Liddell, Robert Scott , A Greek–English Lexicon, on Perseus
- [5] Irving Langmuir and Lewi Tonks, *General Theory of the Plasma of an Arc*, Phys. Rev. **34**, 876-922 (1929), Issue 6, september 1929
- [6] D Pines. *Classical and quantum plasmas.* , Journal of Nuclear Energy. Part C, Plasma Physics, Accelerators, Thermonuclear Research , **2 5** ,(1961)
- [7] Marklund, M. and Eliasson, B. and Shukla, P. K. *Magnetosonic solitons in a fermionic quantum plasma* , Phys. Rev. E **76**,(6) .067401,(2007)
- [8] Padma Kant Shukla , Plasma physics: A new spin on quantum plasmas ,Nature Physics 5, 92 - 93 (2009)
- [9] Saha, Megh Nad , *Ionization in the solar chromosphere* , Philosophical Magazine Series 6 **40** (238): 472. (1920)
- [10] Manfredi, Giovanni. *How to model quantum plasmas.*, Fields Inst. Commun **46** (2005): 263-287.
- [11] Chen, F.F. .*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion.*, in Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Springer, 2006.
- [12] Fernando Haas , *Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach*, Springer-Verlag New York (2011)
- [13] P. K. Shukla and B. Eliasson , *Formation and Dynamics of Dark Solitons and Vortices in Quantum Electron Plasmas* , Phys. Rev. Lett. **96** ,245001 (2006)
- [14] Bittencourt, J. A , *Fundamentals of Plasma Physics*, 3th Edition , Springer-Verlag New York , (2004)

- [15] Punit Kumar and Chhaya Tiwari , *High frequency oscillations in quantum plasma* , J. Phys.: Conf. Ser. **208** 012051 ,(2010)
- [16] Haas, F. *MHD Equations for quantum plasmas* , Plasma and Fusion Science (AIP Conference Proceedings Volume 875). Vol. **875** (2006)
- [17] Gabor Kalman and Paul Carini , *Strongly Coupled Plasmas* , Nato ASI Subseries B ; **36** , Springer US (1978)
- [18] Vanea Covlea ,*Quantum Plasmas* , BRAHMS Physics and Detectors , Faculty of Physics , (2012)
- [19] F.Haas, *An introduction to quantum plasmas*, arXiv: quant-ph , 1206.1079 v1 (2012)
- [20] Andreas Dinklage ,Thomas Klinger ,Gerrit Marx ,Lutz Schweikhard , *Plasma Physics ; Confinement, Transport and Collective Effects* , **670** , Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,(2005)
- [21] Eisberg, R. and Resnick, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2nd ed. New York: Wiley, (1985), p.479
- [22] Haas, F. , Garcia, L. G. , Goedert, J. , Manfredi, G. *Quantum ion-acoustic waves* , Physics of Plasmas (1994-present) **10**.(10) (2003): 3858-3866.
- [23] Jens Zamanian , *Modelling of spin and other quantum effects in plasmas* , Department of Physics Doctoral Thesis ,University of Umeå, Sweden (2012)
- [24] Misra, A. P. and Shukla, P. K., *Modulational instability of magnetosonic waves in a spin 1/2 quantum plasma* ,Physics of Plasmas, **15**, 052105 (2008)
- [25] Scott, A C . *Encyclopedia of Nonlinear Science* , Routledge, Taylor Francis Group, New York, NY. (2005)
- [26] A.P. Misra, N.K. Ghosh,*Spin magnetosonic shock-like waves in quantum plasmas* , Physics Letters A, Volume **372**, Issue 42, , Pages 6412-6415, 13 October 2008
- [27] Buneman, O., *The Bennett Pinch*, Plasma Physics, Edited by James E. Drummond. LOC 60-12766. Publ. McGraw-Hill, Inc., New York,p.202 , (1961)
- [28] Biswajit Sahu, Anjana Sinha, Rajkumar Roychoudhury and Manoranjan Khan, *Arbitrary amplitude magnetosonic solitary and shock structures in spin quantum plasma*, physics of plasmas **20**, 112303, (2013)
- [29] Ledvina, S. A. , Y-J. Ma , and E. Kallio, *Modeling and simulating flowing plasmas and related phenomena* , Space science reviews **139**.1- 4 (2008): 143-189.
- [30] Ashcroft, N.W. , and Mermin, N.D. , *Solid State Physics.*, Saunders College Publishing, Florida (1976).
- [31] Froese Fischer, C , *The Hartree-Fock Method for Atoms: A Numerical Approach*, John Wiley and Sons, New York. ISBN 047125990X. (1977).

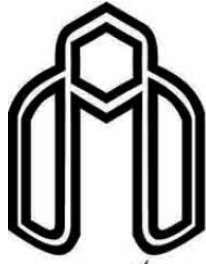
- [32] P.K. Shukla, *A new dust mode in quantum plasmas*, Physics Letters A, Volume **352**, Issue 3, 27 March 2006, Pages 242-243, ISSN 0375-9601
- [33] S. Hussain and S. Mahmood, *Korteweg-de Vries Burgers equation for magnetosonic wave in plasma*, PHYSICS OF PLASMAS **18**, 052308 (2011)
- [34] Maxwell. J. C. A, *dynamical theory of the electromagnetic field*, Phil. Trans. R. Sos. Lond. **155** 459-512, (1865)
- [35] Van Dijk, J., G. M. W. Kroesen, and A. Bogaerts. *Plasma modelling and numerical simulation* , Journal of Physics D: Applied Physics **42**(19) : 190301. (2009)
- [36] Zh. A. Moldabekov, P. Ludwig, J.P. Joost, M. Bonitz and T. S. Ramazanov, *Dynamical Screening and Wake Effects in Classical, Quantum, and Ultrarelativistic Plasmas*, Contrib. Plasma Phys. **55**,(2-3) ,pg;186-191 ,(2015)
- [37] G .Brodin and M .Marklund , *Spin magnetohydrodynamics*, New Journal of Physics **9**(277) , (2007)
- [38] Brodin, Gert, Mattias Marklund, and Giovanni Manfredi. *Quantum plasma effects in the classical regime.*, Physical review letters **100**(17) (2008): 175001.
- [39] Temam, Roger , *Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis* , AMS Chelsea,pp. 107–112 ,(2001)
- [40] V. G. Molinari, P. Peerani , *Parameters of a slightly degenerate plasma* , Kluwer Academic Publishers (1998)
- [41] Jamrud Aminuddin and Sehad, *Numerical Solution of The Korteweg de Vries Equation* , International Journal of Basic Applied Sciences IJBAS-IJENS **11** No: 02 Pages: 62-67
- [42] YANG Xiu-Feng ,JIANG Hong , QI Xue-Hong and DUAN Wen-Shan , *Effects of Spin Quantum Force in Magnetized Quantum Plasma* , Commun. Theor. Phys. **56** 769–773 (2011)
- [43] Mahdhivan Syafwan, S.Si , *The existence and stability of solitons in discrete nonlinear Schrödinger equations*, Thesis submitted to The University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy , November 2012
- [44] S. Son, N.J.Fisch, *Controlled fusion with hot-ion mode in a degenerate plasma*, Physics Letters A **356** 65–71 (2006)

Aabstract

In recent years, there has been a rapidly growing interest in the field of quantum plasmas, which have a broad range of applications. Today, by considering spin effects, interesting phenomena is taken into consideration. Magnetosonic waves are one of the most interesting topics in this field. The effect of spin quantum forces have been studied by several authors. In this thesis we aim to study magnetosonic waves arising from spin effect in quantum electron-ion plasmas. This thesis is based on five chapters. In the first chapter an overview of the basic concepts of plasmas, parameters and definitions are considered. Quantum plasmas and its difference with classical one, overview of the models describing plasmas, distribution functions, Maxwell-Boltzman, Wigner and Wigner-Poisson, Hartry and Hartry-Fock models are mentioned in second chapter. We also derived dispersion relations and madolang method in this chapter. In third chapter, we will review on introduction of waves in quantum plasmas. Also by use of the basic equations of magneto hydrodynamics and reductive perturbation methods we extracted KdV and KdVB equations, And in fourth chapter we solved this equations, using numerical finite difference and fourth order Runge Kutta methods by given initial and boundary conditions. We also examined the effect of various parameter on the results of these equations. In the following, in chapter five we review the results of simulations. Samples codes written by Fortran and Matlab as well as proving some important relations and history of Solitons are mentioned in appendix.

Keywords:

Quantum Plasma, Magnetosonic waves, Soliton, Shock-like waves



دانشگاه شاهرود

Shahrood University
Faculty Of Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Physics

Study of Magnetosonic Solitons in Quantum Plasmas

Supervisor

Dr. Mahdi Moemeni

by

Reyhaneh Rezaei

February 2015