

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های ^{19}O و ^{21}O با استفاده از مدل لایه‌ای

دانشجو: نسرین ملکی‌نژاد

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا شجاعی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا سرکرده‌ای

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۹۳

پایان نامه کارشناسی ارشد نسرين ملكي نژاد

تحت عنوان:

بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های O^{19} و O^{21} با استفاده از مدل لایه‌ای

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه

..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی: دکتر محمدرضا سرکرده‌ای		نام و نام خانوادگی: دکتر محمدرضا شجاعی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

دانشجو تایید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است. کلیه حقوق مادی مرتبت از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد.

تشکر و قدردانی

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان
است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید
و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

با سپاس از سه وجود مقدس

آنان که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم....

موهایشان سپید شد تا من روسفید شوم....

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجودم و روشنگر راهم باشند....

پدرم

مادرم

استادانم

تعهد نامه

اینجانب نسرين ملكى نژاد دانشجوى دوره كارشناسى ارشد، رشته فزيك هسته اى دانشكده

فزيك دانشگاه صنعتى شاهرود، نويسنده ي پايان نامه ي بررسى ترازهاى انرژى ايزوتوپ هاى ¹⁹O

و ²¹O با استفاده از مدل لايه اى تحت راهنمائى دكتر محمدرضا شجاعى متعهد مى شوم:

- تحقيقات در اين پايان نامه توسط اينجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتايج پژوهش هاى محققان ديگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پايان نامه تاكنون توسط خود يا فرد ديگرى براى دريافت هيچ نوع مدرک يا امتيازى در هيچ جا ارائه نشده است.
- كلييه حقوق معنوى اين اثر متعلق به دانشگاه صنعتى شاهرود مى باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتى شاهرود» و يا «*Shahrood University of Technology*» به چاپ خواهد رسيد.
- حقوق معنوى تمام افرادى كه در به دست آمدن نتايج اصلى پايان نامه تأثيرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پايان نامه رعايت مى گردد.
- در كلييه مراحل انجام اين پايان نامه، در مواردى كه از موجود زنده (يا بافته هاى آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقى رعايت شده است.
- در كلييه مراحل انجام اين پايان نامه، در مواردى كه به حوزه اطلاعات شخصى افراد دسترسى يافته يا استفاده شده است اصل رازدارى، ضوابط و اصول اخلاق انساني رعايت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- كلييه حقوق معنوى اين اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، كتاب، برنامه هاى رایانه اى، نرم افزارها و تجهيزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتى شاهرود مى باشد. اين مطلب بايد به نحو مقتضى در توليدات علمى مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتايج موجود در پايان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمى باشد.
- استفاده از اطلاعات و نتايج موجود در پايان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمى باشد.

چکیده

هسته‌ها دارای خواص استاتیکی و دینامیکی می‌باشند. از جمله ویژگی‌های استاتیکی می‌توان به اسپین، پاریتته، انرژی و... اشاره کرد. بر اساس مدل لایه‌ای تعداد پروتون‌های ایزوتوپ های ^{19}O و ^{21}O به عدد جادویی ۸ ختم می‌شود. بنابراین در این کار ما آن را به عنوان یک پوسته بسته در نظر گرفته‌ایم. همچنین تعداد نوترون‌های بعد از عدد جادویی ۸ را به عنوان نوکلئون‌های ظرفیت منظور کرده و با فرض اینکه برهمکنش بین نوکلئون‌ها به صورت گوسی است، در دو حالت نسبیتی و غیر نسبیتی ترازهای انرژی حالت پایه را محاسبه نموده‌ایم. همچنین اثر برهمکنش اسپین-مدار را در جابه‌جایی انرژی اعمال نموده‌ایم. از طرفی این دو ایزوتوپ به علت ناپایداری دارای واپاشی β^- می‌باشند، و به هسته‌ی F می‌رسند. و ما $\log ft$ را برای آن‌ها محاسبه کرده‌ایم. همچنین با بهره‌گیری از پتانسیل وود-ساکسون، انرژی حالت پایه را برای ^{19}O بدست آورده‌ایم. نتایج دست آمده با مقادیر تجربی از همخوانی خوبی برخوردار است.

کلمات کلیدی: ترازهای انرژی حالت پایه؛ مدل لایه‌ای؛ پتانسیل گوسی؛ واپاشی بتا؛ ایزوتوپ‌های

اکسیژن

مقالات مستخرج از این پایان نامه

✓ "بررسی و مطالعه ذرات نسبیتی با تقارن اسپینی و شبه اسپینی با پتانسیل

شبه گوسی" پذیرفته شده در پنجمین کنفرانس فیریک ذرات ومیدانها، ۲۹-۳۰ بهمن

دانشگاه شهید بهشتی

فهرست مطالب

فصل اول: مدل لایه ای در فیزیک هسته‌ای

۱-۱	مقدمه	۲
۲-۱	اندازه‌ی هسته و توزیع نوکلئون‌ها	۲
۳-۱	خواص نیروی هسته‌ای	۳
۴-۱	خواص هسته	۷
۵-۱	خواص عمومی نیروی هسته‌ای - نیروهای استاتیکی	۷
۶-۱	اعداد جادویی	۹
۷-۱	نیروهای چند جسمی	۱۳
۸-۱	هسته‌های چند نوکلئونی: نظریه‌ی لایه‌ای	۱۵
۹-۱	گزینش یک تقریب مناسب	۱۵
۱۰-۱	برهمکنش اسپین - مدار	۱۶
۱۱-۱	پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای	۱۸
۱۲-۱	مدارهای مجاز در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای	۲۳
۱۳-۱	پرشیدن مدارهای مجاز در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای	۲۷
۱۴-۱	هسته‌های کروی با A فرد	۲۸
۱۵-۱	جرم و انرژی بستگی هسته‌ها	۲۹
۱۶-۱	پتانسیل‌های هسته‌ای	۳۲
۱۷-۱	جزر میانگین مربع شعاع باری	۳۴

فصل دوم: مروری بر واپاشی بتا

۱-۲	مقدمه	۳۶
۲-۲	فرمیون‌ها و بوزون‌ها	۳۷
۳-۲	برهمکنش ضعیف	۳۸
۴-۲	لپتون‌ها	۳۸
۵-۲	ویژگی‌های پروتون و نوترون	۳۹

۴۱	مزون ها و برهمکنش نوکلئون-نوکلئون	۶-۲
۴۲	واپاشی بتا	۷-۲
۴۳	آزاد شدن انرژی در واپاشی بتا	۸-۲
۴۶	نظریه‌ی فرمی درباره‌ی واپاشی بتا	۹-۲
۵۱	آهنگ واپاشی کل	۱۰-۲
۵۲	قواعد گزینش تکانه‌ی زاویه‌ای و پاریته	۱۱-۲
۵۶	مقایسه آهنگ واپاشی‌های بتا	۱۲-۲
۵۶	اکسیژن	۱۳-۲
۵۶	پیشینه	۱-۱۳-۲
۵۷	ایزوتوپ‌ها	۲-۱۳-۲
۵۹	طیف واپاشی اکسیژن ۱۹	۱۴-۲
۶۱	طیف واپاشی اکسیژن ۲۱	۱۵-۲

فصل سوم: روش تحلیلی ابرتقارن

۶۴	نگاه اجمالی به ابرتقارن	۱-۳
----	-------------------------	-----

فصل چهارم: محاسبه انرژی، شعاع باری، logft

۷۰	مقدمه	۱-۴
۷۰	محاسبه انرژی حالت پایه اکسیژن ۱۹ و ۲۱ با پتانسیل گوسی	۲-۴
۷۷	شکافتگی انرژی در اثر برهمکنش اسپین-مدار	۳-۴
۷۸	محاسبه جذر میانگین شعاع باری	۴-۴
۷۹	محاسبه logft	۵-۴
۷۹	محاسبه انرژی اکسیژن ۱۹ با پتانسیل وود-ساکسون	۶-۴
۸۲	معادله دیراک	۷-۴
۸۵	ویژه مقادیر و ویژه اسپینور در تقارن اسپینی	۱-۷-۴
۸۶	شکافتگی اسپین-مدار برای انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن	۲-۷-۴
۸۷	ویژه مقادیر و ویژه اسپینور در تقارن شبه اسپینی	۳-۷-۴
۹۰	نتیجه گیری	
۹۱	منابع	

فهرست شکل‌ها

فصل اول: مدل لایه‌ای در فیزیک هسته‌ای

- شکل ۱-۱: اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های متوسط ۶
- شکل ۲-۱: پتانسیل برهمکنشی مرکزی هسته‌ای ۱۳
- شکل ۳-۱: برهمکنش سه نوکلئون ۱۳
- شکل ۴-۱: طرح تقریبی برای ترازهای پروتون ۱۸
- شکل ۵-۱: مقایسه پتانسیل‌های نظریه‌ی لایه‌ای ۲۱
- شکل ۶-۱: اثر برهمکنش اسپین مدار در پتانسیل‌های نظریه‌ی لایه‌ای ۲۳
- شکل ۷-۱: ترازهای انرژی در پتانسیل‌های نظریه‌ی لایه‌ای ۲۵
- شکل ۸-۱: حالت‌های انرژی SQP ۲۸
- شکل ۹-۱: انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون ۳۱
- شکل ۱۰-۱: نمودار پتانسیل‌های مدل لایه‌ای ۳۴

فصل دوم: مروری بر واپاشی بتا

- شکل ۱-۲: توزیع مورد انتظاری انرژی و تکانه الکترون ۵۰
- شکل ۲-۲: اکسیژن ۱۶ ۵۷
- شکل ۳-۲: نمودار سطوح F19 ۶۰
- شکل ۴-۲: نمودار سطوح F21 ۶۱

فصل چهارم: محاسبه انرژی، شعاع باری و $\log ft$

- شکل ۱-۴: طیف انرژی اکسیژن ۱۹ و ۲۱ ۷۱
- شکل ۲-۴: تابع موج حالت پایه اکسیژن ۲۱ با پتانسیل گوسی ۷۵
- شکل ۳-۴: تابع موج حالت پایه اکسیژن ۱۹ با پتانسیل گوسی ۷۶

فهرست جداول

فصل اول: مدل لایه‌ای در فیزیک هسته‌ای

جدول ۱-۱: اعداد جادویی.....	۱۰
جدول ۲-۱: تفاوت‌های هسته و اتم.....	۱۱
جدول ۳-۱: نمادهای طیف نمودی.....	۲۴
جدول ۴-۱: مدارهای هر لایه در تقریب اول.....	۲۶

فصل دوم: مروری بر واپاشی بتا

جدول ۱-۲: گونه‌های میدان برهمکنشی.....	۳۸
جدول ۲-۲: نمونه‌هایی از فرآیند واپاشی بتا.....	۴۶
جدول ۳-۲: قاعده‌های گزینش واپاشی بتا.....	۵۵
جدول ۴-۲: مقادیر تقریبی logft برای انواع مختلف گذار بتا.....	۵۶
جدول ۵-۲: خواص تجربی ایزوتوپ‌های اکسیژن.....	۵۸

فصل چهارم: محاسبه انرژی، شعاع باری و logft

جدول ۱-۴: مقایسه نتایج تجربی و تئوری انرژی حالت پایه اکسیژن ۱۹ و ۲۱.....	۷۸
جدول ۲-۴: نتایج جذرمیانگین مربع شعاع باری.....	۷۸
جدول ۳-۴: نتایج تئوری و تجربی واپاشی بتا.....	۷۹
جدول ۴-۴: انرژی حالت پایه اکسیژن ۱۹ با پتانسیل وود-ساکسون.....	۸۲
جدول ۵-۴: انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن با تقارن اسپینی.....	۸۷
جدول ۶-۴: انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن با تقارن شبه‌اسپینی.....	۸۸
جدول ۷-۴: مقایسه انرژی در حالت تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی.....	۸۹

فصل اول

مدل لایه‌ای در فیزیک

هسته‌ای

۱-۱- مقدمه

ساختار هسته‌ها تقریباً به همان خوبی ساختار اتم‌ها شناخته شده‌است ولی تفاوت زیادی در میزان ترویج این شناخت وجود دارد. هراتم شامل یک قسمت میانی کوچک و سنگین به نام هسته است، که بوسیله‌ی الکترون‌های مداری احاطه شده‌است. در این فصل می‌خواهیم خواص هسته، ساختار و رفتار آن را در شرایط مختلف توضیح دهیم. ابتدا چند موضوع بنیادی را مرور می‌کنیم که از پیش با آن‌ها آشنا هستیم. هسته از نوترون‌ها و پروتون‌ها ساخته شده‌است، دو ذره‌ای که حدود ۱۸۴۰ بار از الکترون سنگین‌ترند و بطور کلی به آن‌ها نوکلئون گفته می‌شود. هسته‌ی اتم برای اولین بار در سال ۱۲۹۰/۱۹۱۱ در آزمایشگاهی که رادرفورد و دستیارانش با استفاده از پراکندگی ذرات آلفا توسط اتم انجام دادند کشف شد.

۱-۲- اندازه‌ی هسته و توزیع نوکلئون‌ها

یکی از روش‌های مستقیم برای مطالعه‌ی شکل و اندازه‌ی هسته‌ها اندازه‌گیری پدیده‌های ایجاد شده در اثر پرتاب ذرات به طرف آن‌هاست ولی محدودیتی در این روش وجود ندارد؛ طول موج ذراتی که با هسته برخورد می‌کنند باید تقریباً از مرتبه‌ی اندازه‌ی هسته و یا کوچکتر از آن باشد. از آنجا که طول موج نور معمولی (حدود 10^7 متر) چندین برابر ابعاد هسته است برای این منظور مناسب نخواهد بود. فوتون‌های با طول موج خیلی کوچک مثل پرتوهای گاما نیز قابل استفاده نیستند، زیرا در اطراف هسته الکترون‌ها وجود دارند و برهمکنش امواج الکترومغناطیس با الکترون‌ها خیلی قوی‌تر از برهمکنش این امواج با هسته است. در این صورت بهتر است از ذراتی مثل الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها استفاده کنیم که در واقع هر سه‌ی این ذرات بکار گرفته می‌شوند. نوترون‌ها و پروتون‌ها این مزیت را دارند که طول موجشان در انرژی‌های حدود 20 MeV به اندازه‌ی کافی کوتاه است. در

صورتی که الکترون‌ها برای داشتن طول موج مناسب به انرژی‌هایی حدود 100 MeV نیاز دارند که بدست آوردن آن خیلی دشوارتر است. اما الکترون‌ها این مزیت را دارند که برهمکنش آن‌ها با هسته به خوبی شناخته شده است (برهمکنش الکترومغناطیسی). لذا دقیق‌ترین نتایج با پراکندگی الکترون بدست می‌آید. اصولاً سیستم‌ها با نیرو کنار هم نگه داشته می‌شوند و تنها نیروهایی که در فیزیک کلاسیک و اتمی با آن‌ها مواجه شده‌ایم، نیروهای گرانشی و الکترومغناطیسی بوده‌اند. نوترون‌ها بار الکتریکی ندارند لذا نیروی الکترومغناطیسی به هیچ وجه نمی‌تواند بر روی آن‌ها اثری داشته باشد، و نیروی الکترومغناطیسی که بین پروتون‌ها وجود دارد یک نیروی دافعه‌ی کولنی قوی است که باعث از هم پاشیدگی هسته می‌شود. نیروی گرانشی بین هر جفت از نوکلئون‌ها به صورت جاذبه است اما این نیرو 10^{36} مرتبه از نیروی الکتریکی موجود بین پروتون‌ها کوچکتر است. بنابراین اثر آن در تمام پدیده‌های هسته‌ای و اتمی کاملاً قابل اغماض است. پس بین دو نیرویی که در بالا شرح داده شده‌اند نمی‌توانند علت وجودی هسته و انسجام آن باشند. تنها راه توجیح این است که وجود نیروی سومی را در طبیعت بپذیریم که به آن نیروی هسته‌ای می‌گویند. متوجه می‌شویم که این نیرو در فواصل کوتاه، یعنی در حدود ابعاد هسته، باید بسیار قوی باشد زیرا لازم است که بیشتر از نیروی دافعه کولنی بین پروتون‌ها باشد تا بر آن غلبه کند. از سویی دیگر ساختار مولکولی را می‌توان تنها با نیروی الکترومغناطیسی توجیه کرد، لذا نتیجه می‌گیریم که نیروی هسته‌ای در فواصلی از مرتبه‌ی فاصله‌ی بین هسته‌ها در مولکول‌ها (تقریباً 10^{-11} متر) باید قابل اغماض باشد. بنابراین نیروی هسته‌ای نیرویی است با برد کوتاه که با زیاد شدن فاصله، سریعتر از $\frac{1}{r^2}$ افت می‌کند [۱].

۱-۳- خواص نیروی هسته‌ای

برهمکنش بین دو نوکلئون از پایین‌ترین مرتبه‌ی پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای حاصل

می‌شود:

این پتانسیل را به صورت چاه مربعی در نظر گرفته‌ایم، که این فرض باعث سادگی محاسبات می‌شود و اطلاعات تجربی را بخوبی بازتولید می‌کند.

برهمکنش نوکلئون-نوکلئون قویا وابسته به اسپین است:

این نتیجه‌گیری از عدم موفقیت در مشاهده‌ی حالت مقید تک تاییه‌ی دوترون و همچنین از اندازه‌گیری اختلاف سطح مقطع‌های حالت‌های تک‌تایه و سه‌تایه حاصل شده‌است.

پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله‌ی غیرمرکزی، به نام پتانسیل تانسوری است:

عمده‌ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده‌ی گشتاور چارکطبی در حالت پایه‌ی دوترون حاصل می‌شود. تابع موج حالت $S (l=0)$ تقارن کروی دارد، یعنی گشتاور چارکطبی الکتریکی آن صفر است. تابع موج‌های با حالت‌های مختلط l را باید از پتانسیل‌های غیرمرکزی بوجود آورد. این نیروی تانسوری باید، به جای $V(r)$ به صورت $V(\mathbf{r})$ باشد. برای نوکلئون منفرد، بدیهی است که انتخاب یک جهت مشخص در فضا اختیاری است. تنها جهت مرجع برای نوکلئون جهت اسپین آن است، و از این رو تنها جمله‌ای که می‌توان در نظر گرفت به صورت $S \cdot \mathbf{r}$ یا $S \times \mathbf{r}$ است که بردار مکان \mathbf{r} را با جهت S ارتباط می‌دهند. برای آنکه شرط ناوردایی پاریته تأمین شود، باید با تعداد زوجی از \mathbf{r} عوامل سروکار داشته باشیم، و بنابراین پتانسیل بین دو نوکلئون می‌باید به جملاتی مانند $(s_1 \cdot \mathbf{r})(s_2 \cdot \mathbf{r})$ یا $(s_1 \times \mathbf{r}) \cdot (s_2 \times \mathbf{r})$ بستگی داشته باشد. می‌توان بخش تانسوری پتانسیل بین دو نوکلئونی را به صورت $V_T(\mathbf{r})S_{12}$ در نظر گرفت که در آن $V_T(\mathbf{r})$ بستگی شعاعی نیرو و بزرگی آن را تأمین می‌کند، و داریم:

$$S_{12} = \frac{3(s_1 \cdot \mathbf{r})(s_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - s_1 \cdot s_2 \quad (1-1)$$

که این عبارت متضمن ویژگی تانسوری نیروست و متوسط آن در تمام زوایا برابر صفر می‌شود.

نیروی نوکلئون-نوکلئون نسبت به بار نوکلئون تقارن دارد:

این بدان معنی است که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم پروتون-پروتون، فرقی بین

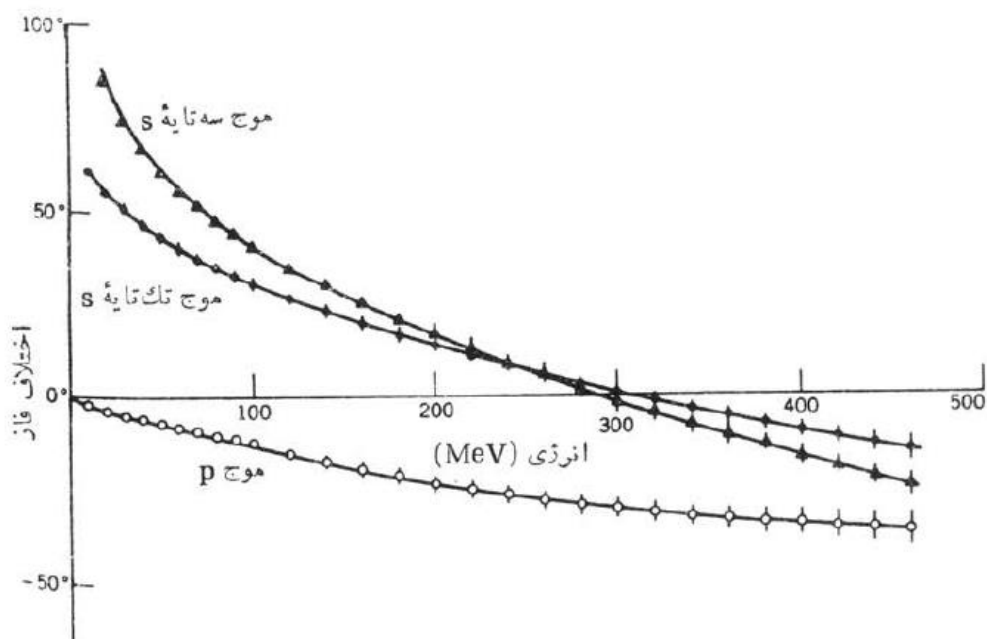
برهمکنش پروتون-پروتون و برهمکنش نوترون-نوترون نیست. در اینجا مقصود از «بار» خصوصیت یا جنس نوکلئون (پروتون یا نوترون) است و نه بار الکتریکی آن. دلیل این امر آن است که طول‌های پراکندگی و همچنین بردهای موثر در برهم‌کنش‌های pp و nn باهم مساوی است.

نیروی نوکلئون-نوکلئون تقریباً مستقل از بار الکتریکی است:

این بدان معنی است که پس از تصحیح نیروی کولنی pp ، هر سه نیروی هسته‌ای nn ، pp و pn باهم مساوی‌اند. به این ترتیب، استقلال بار شرطی قوی‌تر از تقارن بار است.

برهمکنش نوکلئون-نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود:

این نتیجه از بررسی کیفی چگالی هسته‌ای حاصل می‌شود. رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون‌ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت می‌ماند، و از این رو باید عاملی وجود داشته‌باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون‌ها جلوگیری کند. برای آنکه مسئله را کمی‌تر بررسی کنیم، پراکندگی نوکلئون-نوکلئون را در انرژی‌های بالا در نظر می‌گیریم. اختلاف فاز موج تک تایه S برای پراکندگی نوکلئون-نوکلئون را تا انرژی 500 MeV شکل (۱-۱) نشان داده‌ایم. اختلاف فاز موج S در انرژی حدود 300 MeV منفی می‌شود، که این امر حاکی از تغییر نیرو از صورت جاذبه به صورت دافعه است [۲].



شکل ۱-۱: اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های متوسط. تغییر اختلاف فاز موج S از مقادیر مثبت به منفی، در انرژی حدود ۳۰۰ MeV، نشان می‌دهد که در این انرژی‌ها نوکلئون فرودی با مغز دافعه در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون رو به رو شده‌است [۲].

برهمکنش نوکلئون-نوکلئون می‌تواند به تکانه یا سرعت نسبی نوکلئون‌ها هم بستگی داشته‌باشد:

نیروهای وابسته به سرعت یا تکانه را نمی‌توان با پتانسیل نرده‌ای نشان داد، اما با استفاده از جملات درجه‌ی اول \mathbf{p} ، درجه‌ی دوم \mathbf{p} ، و غیره، که هر کدام از آن‌ها با یک پتانسیل مشخصه‌ی $V(\mathbf{r})$ متناظرند، می‌توان آن‌ها را به طرز قابل قبولی در نظر گرفت. تحت تأثیر عملگر پاریتته داریم $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ، و در اثر عملگر برگشت زمان هم داریم $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$. پس هر جمله‌ای که فقط شامل توان‌های درجه اول \mathbf{p} باشد غیرقابل قبول است، زیرا در این صورت ناوردایی‌های پاریتته و برگشت زمان هر دو نقض خواهند شد. جملاتی که به صورت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ یا $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ باشند، نسبت به پاریتته ناوردا هستند ولی ناوردایی برگشت زمان را نقض می‌کنند یکی از صورت‌های قابل قبول این جمله که شامل توان‌های درجه‌ی اول \mathbf{p} می‌شوند و نسبت به پاریتته و برگشت زمان هر دو ناورداست، $S = V(r)(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{S}$ است که در آن اسپین کل دو نوکلئون مورد بررسی است [۲].

۱-۴- خواص هسته

می‌دانیم که اگر گشتاور نیروی خارجی به سیستمی وارد نشود تکانه‌ی زاویه‌ای آن سیستم پایسته می‌ماند. از آنجایی که یک هسته‌ی منفرد چنین سیستمی است، تکانه‌ی زاویه‌ای یکی از خصوصیات ثابت آن است. روش‌های اندازه‌گیری تکانه‌ی زاویه‌ای هسته‌ها با استفاده از باریکه‌های اتمی در آزمایش اشترن-گرلاخ و همچنین با بررسی ساختار فوق‌ریز خطوط طیف اتمی با اعمال و بدون اعمال میدان مغناطیسی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. عدد کوانتومی تکانه‌ی زاویه‌ای کل هسته با I نشان داده می‌شود که این دو با معادله‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$I = \sqrt{I(I+1)} \hbar \quad (2-1)$$

گشتاور مغناطیسی ناشی از اسپین مسئله‌ی پیچیده‌تری است که فقط با نظریه‌ی کوانتومی نسبیتی قابل درک است و نتیجه‌ی آن برای یک الکترون در فیزیک اتمی چنین است:

$$\mu = \frac{eg}{2M} \hbar \quad (3-1)$$

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2M_e} \quad (4-1)$$

که چون عدد کوانتومی اسپین $\frac{1}{2}$ است $g_s = 2$ خواهد بود، اندازه‌گیری‌ها نیز این نتیجه را تایید کرده‌اند [۱].

۱-۵- خواص عمومی نیروی هسته‌ای - نیروهای استاتیکی

انتظارات خود را از پتانسیلی که نیروی هسته‌ای را نمایش می‌دهد بیان می‌کنیم:

(۱) پتانسیل باید یک کمیت نرده‌ای باشد چون انرژی است.

(۲) از آنجا که دو پروتون یا دو نوترون غیرقابل تشخیص هستند، هرگاه جای ذره‌ی ۱ را با

ذره ۲ عوض کنیم، پتانسیل نباید تغییر کند. این امر آشکارا مطلوب‌ترین خاصیت برای نیروی دو ذره است، حتی اگر یکسان نباشند مبادله‌ی ذرات علامت I_2 ، p_{12} را معکوس می‌کند ولی علامت S ، L را تغییر نمی‌دهد.

(۳) اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند. این به اصل ناوردایی وارونی زمان معروف است، که در تمام قوانین شناخته‌شده‌ی فیزیک کلاسیک و کوانتومی معتبر است و اعتقاد عمومی بر این است که در پدیده‌هایی که نیروی هسته‌ای دخیل است این امر صحت دارد. اگر جهت زمان معکوس شود به راحتی دیده می‌شود که p_{12} و S علامت‌شان تغییر می‌کند ولی علامت I_2 تغییر نمی‌کند. پس با تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای علامت L معکوس خواهد شد. ابتدا نیروهایی که مستقل از سرعت هستند را در نظر می‌گیریم که به آن‌ها اصطلاحاً، نیروهای استاتیکی گفته می‌شود. نیروی گرانش مثالی از نیروی استاتیک است، ولی نیروهای الکترومغناطیس از این نوع نیستند، زیرا نیروی وارد بر یک ذره‌ی باردار در میدان مغناطیسی، بستگی به سرعت آن دارد. اگر پتانسیل استاتیکی باشد، نمی‌تواند به p یا به L بستگی داشته باشد زیرا که این‌ها به سرعت وابسته‌اند. بنابراین پتانسیل استاتیکی باید تنها شامل r و S باشد. خاصیت دیگری هم هست که نیروی استاتیکی نوکلئون-نوکلئون می‌تواند به آن وابسته باشد و آن، پارایته‌ی تابع موجی است که سیستم را توصیف می‌کند. از آنجا که پارایته بستگی به فرد یا زوج بودن L دارد بنابراین نیرو برای L زوج و برای L فرد متفاوت است. فهرست کاملی از نیروهای استاتیکی که شامل شش عضو می‌شوند به قرار زیر است [۱]:

مرکزی، L فرد $S=0$

مرکزی، L زوج $S=0$ (۵-۱)

مرکزی، L فرد $S=1$

مرکزی، L زوج $S=1$

تانسوری ، زوج $S=1$ L

تانسوری ، فرد $S=1$ L

عمومی ترین پتانسیل استاتیک مجموع این شش جمله است که هر کدام تابعی از r است.

$$V = V_A(r) + V_B(r) + V_C(r) + V_D(r) + V_E(r) + V_F(r) \quad (6-1)$$

با این شرایط که همه‌ی جمله‌ها صفر هستند مگر اینکه S و L مطابق رابطه‌ی (6-1) باشند.

مثلا در حالت پایه‌ی دوترون، همه‌ی جمله‌ها به جز V_D و V_F صفرند.

اساسا دو راه وجود دارد که در آن فیزیكدانان به دنبال بدست آوردن تصویر سازگار از هسته اتمی هستند. رویکرد اساسی مطالعه‌ی ذرات ابتدایی، خواص و برهمکنش متقابل آنهاست. بنابراین امیدواریم که شناختی از نیروی هسته‌ای بدست آوریم. اگر نیروها شناخته شده باشند باید در اصل قادر به محاسبه قیاسی خواص منحصر به فرد هسته‌های پیچیده شود. فقط بعد از این است که می توان گفت بطور کامل درک ساختارهای هسته‌ای انجام شده است. پیشرفت‌های قابل توجهی در این راستا در چندسال گذشته انجام شده است. این کار توسط Brueckner و Bethe و دیگران برای مسائل چندجسمی توسعه داده شده است، اما دانش ما از نیروی هسته‌ای هنوز کامل نیست. مدل‌های هسته‌ای بسیاری وجود دارد. مدل لایه‌ای، اگر چه توسط نظریه پردازان ارائه شده، در واقع مربوط به رویکرد تجربه گرا است [3].

۱-۶- اعداد جادویی

یکی از ویژگی‌های اصلی هسته‌ای که منجر به توسعه‌ی ساختار پوسته‌ای می شود وجود اعدادی است، که آنها را اعداد جادویی می نامیم. وجود چنین اعدادی برای اولین بار توسط الساس^۱ در سال ۱۹۳۳ اشاره شد. در حال حاضر، اعداد جادویی زیر را می دانیم:

¹ Elsass

۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶

جدول ۱-۱: اعداد جادویی [۳].

Number of protons	2	8	20	28	50	82	126
⁴ He		¹⁶ O	⁴⁰ Ca	⁵⁸ Ni	¹¹² Sn	²⁰⁴ Pb	
		¹⁷ O	⁴² Ca	⁶⁰ Ni	¹¹⁴ Sn	²⁰⁶ Pb	
		¹⁸ O	⁴³ Ca	⁶¹ Ni	¹¹⁵ Sn	²⁰⁷ Pb	
			⁴⁴ Ca	⁶² Ni	¹¹⁶ Sn	²⁰⁸ Pb	
			⁴⁶ Ca	⁶⁴ Ni	¹¹⁷ Sn		
			⁴⁸ Ca		¹¹⁸ Sn		
					¹¹⁹ Sn		
					¹²⁰ Sn		
					¹²² Sn		
					¹²⁴ Sn		
Number of neutrons	2	8	20	28	50	82	126
⁴ He		¹⁵ N	³⁶ S	⁴⁸ Ca	⁸⁶ Kr	¹³⁶ Xe	²⁰⁸ Pb
		¹⁶ O	³⁷ Cl	⁵⁰ Ti	⁸⁷ Rb	¹³⁸ Ba	²⁰⁹ Bi
			³⁸ A	⁵¹ V	⁸⁸ Sr	¹³⁹ La	
			³⁹ K	⁵² Cr	⁸⁹ Y	¹⁴⁰ Ce	
			⁴⁰ Ca	⁵⁴ Fe	⁹⁰ Zr	¹⁴¹ Pr	
					⁹² Mo	¹⁴² Nd	
						¹⁴⁴ Sm	

عدد جادویی ۸ در ¹⁶O دیده می شود که در آن برای حذف یک نوترون از هسته انرژی زیادی لازم است، به عبارت دیگر نهمین نوترون اضافی در ¹⁷O که خارج از پوسته ی ۸-۸ قرار دارد، دارای قید ضعیفی می باشد. بالاترین عدد جادویی که فقط در نوترون رخ می دهد عدد جادویی ۱۲۶ است، که مقدار قابل توجهی انرژی برای جدا کردن صدوبیست و ششمین نوترون یا صدوبیست و پنجمین نوترون نسبت به برداشتن صدوبیست و هفتمین یا صدوبیست و هشتمین نوترون لازم است. قید اعداد جادویی و قید ضعیف یک نوکلئون بیشتر مشابه اثری که در ساختار الکترونی اتم رخ می دهد را به ذهن می آورد. به عنوان مثال برای آرگون با عدد اتمی ۱۸ که شامل ۱۸ الکترون است، انرژی لازم برای خارج کردن یک الکترون ۱۵/۶۹ الکترون ولت است، در حالی که انرژی لازم برای خارج کردن نوزدهمین الکترون از پتاسیم فقط ۴/۳۲ الکترون ولت است. انرژی بستگی آخرین الکترون در آرگون سه ونیم برابر پتاسیم است. در قیاس با ساختار اتمی ممکن است فرض شود که در هسته نوکلئون ها به طور مستقل در مدار منحصر به فرد در یک پتانسیل متوسط حرکت می کنند که فرض می کنیم تقارن

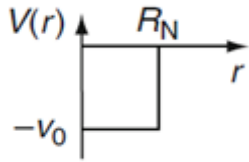
کروی دارد مقدار اندازه حرکت مداری l شامل $1 + 2l$ تراز کوانتیده است. $-1 \leq m \leq 1$. در اتم در مرحله اول جاذبه‌ی غالب هسته وجود دارد، دافعه‌ی کولنی بین الکترون‌ها بلندبرد است به طوری که عمل پتانسیل یک الکترون به مکان دقیق دیگر الکترون‌ها بستگی ندارد. از سوی دیگر در یک هسته، نیروها کوتاه‌برد می‌باشند به طوری که پتانسیل در یک نوکلئون به شدت به موقعیت دیگر نوکلئون‌ها بستگی دارد. تفاوت زیادی بین هسته و الکترون‌ها در اتم وجود دارد. در مرتبه اول پتانسیل به طور متوسط در هر دو مورد کاملاً متفاوت است. بنابراین اعداد پوسته‌های اتمی و اعداد جادویی هسته‌ای به طور کامل متفاوت از یکدیگر خواهند بود. تفاوت دوم این است که، هسته شامل دو نوع ذره، پروتون و نوترون، هر کدام با اسپین ذاتی $1/2$ می‌باشند. ما باید فرض کنیم که پتانسیل هسته‌ای ناشی از همان پروتون‌ها و نوترون‌هاست. در حال حاضر این فرض با شواهد بسیاری از آزمایش‌های انرژی بالا در توافق است. اندازه‌ی هسته‌ای ۵ مرتبه کوچکتر از اندازه‌های اتمی است و انرژی‌های بستگی هسته‌ای ۶ مرتبه بزرگتر از انرژی اتمی است که در جدول (۱-۲) خلاصه شده است.

جدول ۱-۲: تفاوت‌های هسته و اتم [۳].

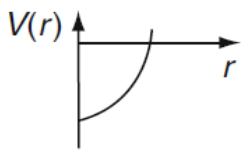
	هسته	اتم
برد	10^{-15} m	10^{-10} m
انرژی	MeV	eV

پایین‌ترین سطح پتانسیل برای $l = 0$ برابر 1 s است که دو پروتون و دو نوترون در آن قرار می‌گیرند که هلیوم ^4He را بوجود می‌آورد. سطح بعدی برای $l = 1$ ، 1 p که دارای ۶ حالت است به طوری که سطح 1 s ، 1 p باهم دارای ۸ نوکلئون است، یعنی ۸ نوترون و ۸ پروتون وجود دارد، که در مجموع ۱۶ نوکلئون می‌تواند در این سطح قرار گیرند که منجر به $^{16}_8\text{O}$ می‌شود. بنابراین اعداد منحصر به

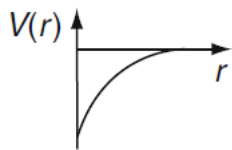
فرد پایدار را می‌توان به راحتی برای هسته‌های سبک توضیح داد. شکل (۲-۱) انواع پتانسیل‌ها را نشان می‌دهد.



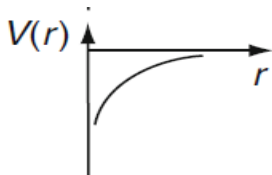
Square well $V(r) = -V_0$, if $r \leq R_N$
 $V(r) = 0$, if $R_N < r$



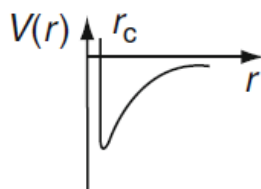
Harmonic oscillator $V(r) = V'_0 r^2 - V_0$



Exponential $V(r) = -V_0 \exp(-r/r_0)$



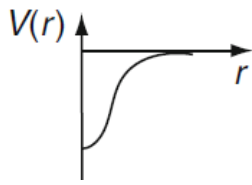
Yukawa $V(r) = -V_0 \frac{\exp(-r/r_0)}{r/r_0}$



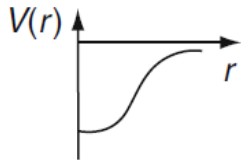
Yukawa with hard core

$V(r) = +\infty$ for $r < r_c$

$V(r) = -V_0 \frac{\exp(-r/r_0)}{r/r_0}$



$$\text{Gaussian } V(r) = -V_0 \exp(-r^2/r_0^2)$$

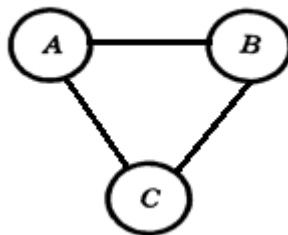


$$\text{Saxon-Woods } V(r) = -V_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}$$

شکل ۱-۲: پتانسیل برهمکنشی مرکزی هسته‌ای [۴]

۷-۱- نیروهای چندجسمی

به طور ضمنی فرض کرده‌ایم که نیروی هسته‌ای نیروی دوجسمی است. در صورتی که اگر نوکلئون‌های A و B و C مطابق شکل (۱-۳) نزدیک یکدیگر باشند نیروهای اعمال شده بر A، $F_{AB} + F_{AC}$ هستند که اگر C وجود نمی‌داشت F_{AB} نیروی میان A و B بود و هرگاه B وجود نمی‌داشت F_{AC} نیروی میان A و C می‌شد.



شکل ۱-۳: سه نوکلئون که دوه دو باهم برهمکنش دارند [۱].

این مسلماً نحوه‌ی رفتار نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی است. از دیدی که از نیروهای حاصل از تبادل مزونی داریم چنین برمی‌آید که تبادل‌های مزونی فقط میان جفت‌ها عمل می‌کنند

ولی می‌بینیم که تبادل‌های دیگری نیز حضور دارند.

برای مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند ولی هرگاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته‌باشند دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این امر منجر به نیروی سه‌جسمی می‌شود، نیرویی که در آن دیگر تعریف بالا از نیروی دوجسمی برقرار نیست. به سادگی می‌بینیم که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهارجسمی و پنج جسمی و غیره را پیش‌بینی می‌کند که به طور کلی نیروهای چندجسمی نامیده می‌شوند. از آنجا که باید مزون‌های زیادی به طور هم‌زمان در این فرآیندها ایجاد شوند، ایجاب می‌کند که برد نیروها با افزایش تعداد جسم‌ها کاهش یابد. به‌طور تقریبی ممکن است برد نیروی n جسمی را تخمین بزنیم که $\frac{1}{n-1}$ برابر برد نیروی دوجسمی می‌شود. اگر برد را $\frac{1}{\mu}$ بگیریم، این مقدار برای نیروهای ۲ و ۳ و ۴ و ۵ جسمی به ترتیب ۱/۴، ۰/۷، ۰/۴۷، ۰/۳۵ فرمی است.

برای اینکه فاصله‌ی بین نوکلئون‌ها را در هسته تخمین بزنیم باید توجه کنیم که حجم به ازای هر نوکلئون $\frac{1}{A}$ برابر حجم هسته‌ای است که برابر $\frac{4}{3}\pi(1.07)^3$ می‌شود که به طور متوسط هر نوکلئون حجمی برابر با کره‌ای به شعاع ۱/۰۷ fm را اشغال می‌کند که از آنجا متوسط فاصله‌ی نوکلئون‌ها در هسته حدود ۲/۱ fm می‌شود. به علاوه به علت نیروی دافعه‌ی قوی، نوکلئون‌ها تقریباً هیچ وقت به یکدیگر از حدود ۰/۵ fm نزدیکتر نمی‌شوند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که نیروی دوجسمی در تعیین ساختار هسته از اهمیت زیادی برخوردار است و نیروهای چهارجسمی و بیشتر بی‌اهمیت خواهند بود. لذا مهم‌ترین نیروهای چندجسمی که لازم است به آن توجه کنیم نیروی سه‌جسمی است. این نیرو به راحتی در سیستم‌هایی که شامل سه نوکلئون هستند مطالعه می‌شوند. یک روش رهیافت به مسئله، مطالعه‌ی سیستم‌های سه نوکلئونی است تا ببینیم آیا می‌توان خصوصیات نیروی

سه جسم را از نیروی دو جسم محاسبه کرد. اگر نشود آن‌ها را محاسبه کنیم این خود شاهدهی برای نیروهای سه جسمی خواهد بود. سیستم‌های سه نوکلئونی را می‌توان به صورت حالت‌های مقید نظیر هسته‌های ^3H و ^3He یا توسط پراکندگی نوترون یا پروتون از دوترون مطالعه کرد که در این زمینه اطلاعات زیادی موجود است. تجزیه و تحلیل این اطلاعات بسیار مشکل است زیرا مسئله‌ی سه جسم دقیقاً در مکانیک کلاسیک حل نشده است و همین اشکال به مکانیک کوانتومی نیز کشیده شده است. به هر حال کوشش زیادی صرف محاسبه‌ی انرژی بستگی ^3H (تریتون) شده است که به طور تجربی برابر 8.48 MeV بدست آمده است. نتایج نشان می‌دهند که انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم فقط برابر 7 MeV است، و در نتیجه حدود $1/5$ از انرژی بستگی، از نیروی سه جسم ناشی می‌شود. این نتیجه با تخمین‌هایی که از روش‌های دیگر بدست آمده است توافق دارد. از این جا استنباط می‌کنیم که اهمیت نیروهای سه جسم در هسته حدود 20% درصد اهمیت نیروهای دو جسم است. در هسته‌های پیچیده‌تر این تخمین حدود 15% درصد است [۱].

۱-۸- هسته‌های چند نوکلئونی: نظریه‌ی لایه‌ای

اگر حل دقیق سیستم سه نوکلئونی مشکل باشد واضح است که برای هسته‌ای با ده‌ها نوکلئون حل مسئله به کلی غیرممکن می‌شود. بنابراین به منظور درک ساختار هسته‌های چندنوکلئونی باید به تقریب‌هایی متوسل شویم. دست اندرکاران فیزیک هسته‌ای در پیدا کردن تقریب‌های مناسب بسیار خوش شانس بوده‌اند. بدین معنی که ساده‌ترین و آسان‌ترین روشی که توسط آن‌ها بکار گرفته شد، به‌طور شگفت‌آوری دقیق از کار درآمده است.

۱-۹- گزینش یک تقریب مناسب

در تقریبی که برای مطالعه‌ی هسته‌های چندنوکلئونی به کار می‌رود فرض بر آن است که نیروهایی را که توسط نوکلئون‌های دیگر بر یک نوکلئون وارد می‌شود، می‌توان در تقریب اول با چاه

پتانسیل نمایش داد، در این مدل، هر نوترون به طور مستقل در چاه پتانسیل مشترکی، که میانگین
 گروهی پتانسیل هسته‌ای تولید شده بوسیله‌ی دیگر نوکلئون‌هاست، حرکت می‌کند. همین طور هر
 پروتون به طور مستقل در چاه پتانسیل مشترکی حرکت می‌کند که میانگین گروهی پتانسیل هسته‌ای
 دیگر نوکلئون‌ها، بعلاوه پتانسیل کولنی سایر پروتون‌هاست. این چاه پتانسیل، پتانسیل نظریه‌ی
 لایه‌ای نامیده می‌شود. قدرت عمل این تقریب واضح است، زیرا مسئله‌ی پیچیده‌ی چندجسم را، به
 ساده‌ترین مسئله در فیزیک کوانتومی یعنی مسئله‌ی تک ذره در چاه پتانسیل تبدیل می‌کند. به این
 ترتیب مسئله‌ی ساختار هسته‌ای با مسئله‌ی ساختار اتمی مربوط می‌شود، و در نتیجه نظریه‌ی
 ساختار هسته‌ای روش‌های محاسباتی بسیار غنی ساختار اتمی را، همراه با انواع زیادی از تجربه‌ها، به
 ارث می‌برد [۱].

۱-۱۰- برهمکنش اسپین - مدار

ساده‌ترین بیان ریاضی برای نیروهای برهمکنشی اسپین-مدار، با یک پتانسیل به شکل $V(r)s.l$
 داده شده‌است، که اولین بار توسط توماس و فرنکل ارائه شد. این از همان نوعی است که در اتم
 روبه‌رو می‌شویم، با این تفاوت که عامل شعاعی $V(r)$ ممکن است متفاوت باشد. در فیزیک
 هسته‌ای برهمکنش اسپین-مدار تماما از برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون ناشی می‌شود. در مورد اتم
 این عامل منحصر به فرد که توسط نظریه‌ی الکترودینامیک از نیروهای بین ذرات باردار در حال
 حرکت تعیین می‌شود. قدرت برهمکنش اسپین-مدار به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شکافتگی‌های
 لازم در مدل تولید شوند. در مسئله‌ی هسته‌ای نظریه‌ی میدان مزونی که نیروی بین نوکلئون‌ها را
 تعیین می‌کند به‌اندازه کافی به پیش‌بینی قطعی در مورد وابستگی شعاعی از پتانسیل

جفت‌شده‌ی اسپین-مدار توسعه نیافته است و تنها در مقایسه با داده‌های تجربی می‌توان برخی از

اطلاعات را بدست آورد. s.1 بر اندازه حرکت زاویه‌ای کل z و اندازه حرکت مداری l که اعدکوانتومی

خوبی هستند دلالت دارد [۵].

$$j = l \pm \frac{1}{2}$$

$$2\vec{s} \cdot \vec{l} = \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 \quad (7-1)$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

که برای $j = l + \frac{1}{2}$ برابر $\hbar^2 l$ و برای $j = l - \frac{1}{2}$ برابر $-\hbar^2 (l+1)$ است. در نتیجه فاصله‌ی بین دو تراز

$j = l + \frac{1}{2}$ و $j = l - \frac{1}{2}$ متناسب با $2l+1$ می‌باشد که ضریب تناسب بستگی به تابع شعاعی $V(r)$ دارد.

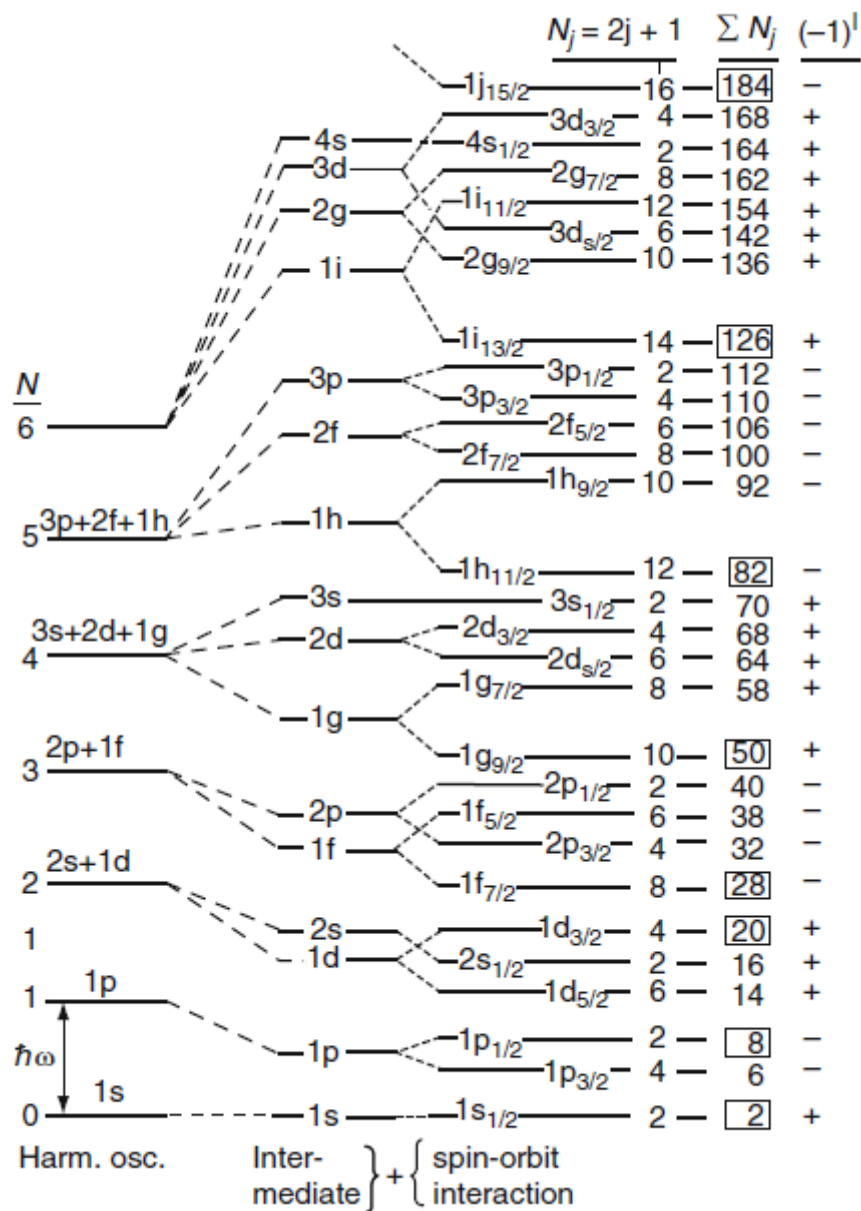
با گنجاندن برهمکنش اسپین-مدار، مشاهده اعداد جادویی به درستی بازتولید شد. برای الکترون

اتمی، برهمکنش اسپین-مدار اثر، کوانتومی نسبیتی، کوچک است. جفت شدگی اسپین-مدار هسته‌ای

بسیار قوی‌تر و نتایج، علاوه بر اثرات نسبیتی، وابسته به اسپین پتانسیل نوکلئون-نوکلئون است. با

استفاده از روش هارتری-فوک می‌توان میانگین پتانسیل را با شروع از برهمکنش موثر نوکلئون-

نوکلئون محاسبه کرد. محاسبات هارتری-فوک بر اساس مدل لایه‌ای هسته‌ای استوار است.



شکل ۱-۴: طرح تقریبی برای ترازهای پروتون، ستون اول انرژی ترازهای نوسانگر هماهنگ، ستون دوم درون یابی طرح ترازها بین نوسانگر هماهنگ و چاه مربعی، ستون سوم جداشدگی ترازها بعد از اعمال برهمکنش اسپین-مدار [۴].

۱-۱- پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای

اکنون با فرض اینکه تقریب‌هایمان صحیح است، یعنی نوکلئون‌ها چنان حرکت می‌کنند که در چاه پتانسیل هستند، موضوع را بررسی می‌کنیم. مسئله‌ی اول تعیین شکل چاه نظریه‌ی لایه‌ای

است. از آنجا که چاه پتانسیل از نیروهای اعمال شده توسط همه‌ی نوکلئون‌های موجود در هسته تشکیل می‌شود، منطقی است که فرض کنیم عمق چاه تقریباً متناسب با چگالی نوکلئون‌هاست.

بنابراین پتانسیل

$$V = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (8-1)$$

$$V_0 \cong 57 \text{ MeV}$$

$$R \cong 1.25 A^{1/3} \text{ fm} \quad (9-1)$$

$$a \cong 0.65 \text{ fm}$$

مهم‌ترین تصحیح مقدار V_0 در رابطه‌ی (9-1) داده شده مربوط به کمیتی است که انرژی تقارن معروف است و از عدم تساوی تعداد نوترون و پروتون در هسته ناشی می‌شود. می‌دانیم امکان برهمکنش میان یک نوترون و یک پروتون بیشتر است تا دونوترون و دو پروتون، زیرا در مورد دوم تعدادی از برهمکنش‌ها به واسطه‌ی اصل طرد پائولی ممنوع‌اند. پس نیروی موثر میان یک نوترون و یک پروتون قوی‌تر از نیروی موثر در حالت‌های دیگر است. بنابراین هرگاه در یک هسته تعداد نوترون بیشتر از پروتون باشد V_0 برای یک پروتون قوی‌تر از آن مقداری است که از رابطه‌ی (9-1) بدست می‌آید، زیرا برهمکنش آن در هسته بیشتر با نوترون‌هاست، و V_0 برای یک نوترون ضعیف‌تر از آن مقداری است که از رابطه‌ی (9-1) بدست می‌آید چون برهمکنش آن بیشتر با نوترون‌های دیگر است.

تغییر V_0 با ΔV_s که از اثر تقارن ناشی می‌شود:

$$\Delta V_s = \pm 1.44 \text{ MeV} \times \frac{N-Z}{A} \quad (10-1)$$

که برای پروتون + و برای نوترون - است.

پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای برای یک پروتون علاوه بر روابط (۸-۱) و (۹-۱) باید شامل پتانسیل دافعه‌ی کولنی نیز باشد به منظور برآورد آن، برای سهولت فرض می‌کنیم که هسته دارای لایه‌ی تیزی در $r = R_c$ و چگالی بار الکتریکی ثابت ρ است. مطابق قضیه‌ی معروف الکترواستاتیک، میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار متقارن کروی در شعاع r' ، همانند میدان در حالتی است که همه‌ی بارهایی که در $r < r'$ هستند در $r = 0$ متمرکز شده باشند. این میدان یعنی $E(r)$ چنین است:

$$E(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{r}{R_c} E(R_c) \quad r < R_c \quad (11-1)$$

از آنجایی که همه‌ی بار Ze داخل شعاع R_c است پس

$$E(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r^2} \quad r > R_c \quad (12-1)$$

بنابراین

$$E(R_c) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon R_c^2} \quad (13-1)$$

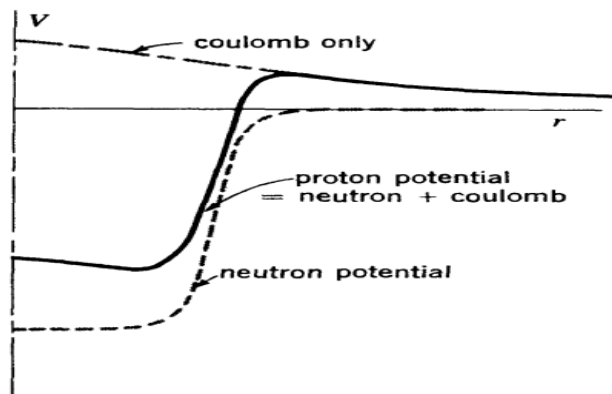
انرژی پتانسیل $V(r)$ در نظریه‌ی الکترواستاتیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(r) = \int_{\infty}^r E(r) dr \quad (14-1)$$

$$V(r) = \int_{\infty}^{R_c} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r^2} dr + \int_{R_c}^r \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon R_c^2} \frac{r}{R_c} dr$$

$$= \begin{cases} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon R_c^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right] \right\} & r < R_c \\ \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r^2} & r > R_c \end{cases}$$

بنابراین مقدار این پتانسیل در مرکز هسته ۱/۵ برابر مقدار آن در لبه است. در شکل (۵-۱) مثال‌هایی از پتانسیل کولنی رابطه‌ی (۱۳-۱) پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای رابطه‌ی (۸-۱) برای یک نوترون و حاصل جمع آن‌ها یعنی پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای برای یک پروتون نشان داده شده‌اند.

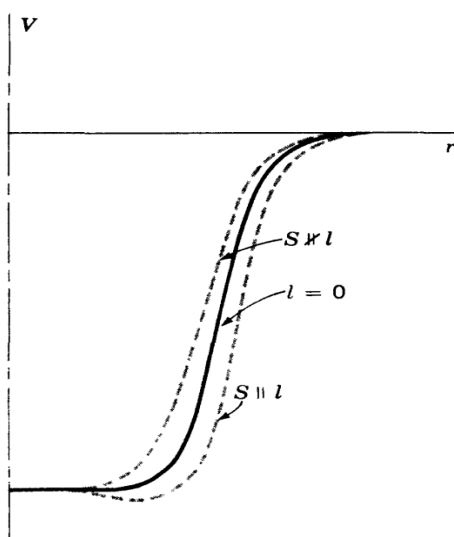


شکل ۵-۱: مقایسه پتانسیل‌های نظریه‌ی لایه‌ای برای نوترون و پروتون. منحنی خط‌چین، پتانسیل نوترون است که از روابط (۸-۱) و (۹-۱) بدست آمده‌است. پتانسیل پروتون با خط‌پر نشان داده شده‌است که حاصل جمع پتانسیل نوترون و پتانسیل کولنی است. پتانسیل کولنی که از رابطه‌ی (۱۴-۱) بدست می‌آید به صورت خط-نقطه نشان داده شده‌است [۱].

حال اثر همه‌ی پیچیدگی‌های نیروی نوکلئون-نوکلئون، یعنی بستگی آن به اسپین و پاریتته، مولفه‌ی غیرمرکزی، وابستگی به سرعت و غیره را بر پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای در نظر می‌گیریم. تنها بردارهایی که برای نوکلئون موجود در هسته معنی دارد عبارتند از: اسپین آن S ، بردار موقعیت آن نسبت به مرکز هسته r ، تکانه‌ی خطی و زاویه‌ای آن نسبت به مرکز هسته یعنی ρ و l تکانه‌ی زاویه‌ای کل هسته‌ها نزدیک به

صفر است، بنابراین تقریباً تعداد مساوی از نوکلئون‌ها با اسپین بالا و پایین وجود دارد. در نتیجه به یک نوکلئون با اسپین بالا به طور متوسط همان نیروی وابسته به اسپینی وارد خواهد شد که به نوکلئونی با اسپین پایین، لذا پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای نمی‌تواند صریحاً به S بستگی داشته‌باشد. از آنجایی که ما فقط به نیروی متوسطی که بر نوکلئون وارد می‌شود توجه داریم، نیازی نیست که نیروی $r.S$ ناشی از نیروی تانسوری نوکلئون-نوکلئون را در نظر بگیریم زیرا در این وضعیت به علت تقارن، نیروی متوسط ثابتی حول مدار بوجود می‌آید که عملاً با نیروی مرکزی جمع می‌شود. نیروی نوکلئون-نوکلئون به زوج یا فرد بودن تکانه‌ی زاویه‌ای مدار L نسبت به نوکلئون‌هایی که با آن‌ها برهمکنش صورت می‌گیرد بستگی دارد، ولی هیچ‌گونه همبستگی میان زوج یا فرد بودن l و L وجود ندارد بنابراین پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای نمی‌تواند به زوج یا فرد بودن l بستگی داشته‌باشد.

ابتدا برهمکنش اسپین-مدار را در نظر می‌گیریم. می‌بینیم قوی‌ترین برهمکنش در حالت‌های L فرد است، که وقتی L و S باهم موازی می‌باشند سبب کاهش انرژی پتانسیل و وقتی پادموازی باشند سبب افزایش انرژی پتانسیل می‌شوند. هنگامی که $S=0$ باشد یعنی وقتی اسپین‌های دو نوکلئون پادموازی هستند برهمکنش اسپین مدار صفر است. نظریه‌ی لایه‌ای در ناحیه‌ی سطحی هسته حتماً به $l.s$ بستگی دارد. به علاوه واضح است که بزرگی این برهمکنش به‌طور متوسط متناسب با l است زیرا l و L هر دو متناسب با سرعت‌اند. اثر برهمکنش اسپین-مدار در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای در شکل (۱-۶) نشان داده شده‌است.



شکل ۱-۶: اثر برهمکنش اسپین مدار در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای. این برهمکنش برای $l = 0$ بی اثر است، بنابراین منحنی از (۸-۱) و (۹-۱) بدست می‌آید. در ناحیه‌ی سطحی، اگر l و S موازی باشند برهمکنش اسپین مدار ایجاد پتانسیل جاذبه‌ی اضافی، و اگر و پادموازی باشند این برهمکنش ایجاد پتانسیل دافعه می‌کند [۱].

۱۲-۱- مدارهای مجاز در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای

در فیزیک اتمی از برهمکنش اسپین-مدار تجربه‌هایی داشته‌ایم مثلاً خط زرد سدیم در طیف اپتیکی، در واقع یک خط دوتایه است که دو مولفه‌ی آن به علت برهمکنش اسپین-مدار اتمی از هم جدا شده‌اند. در فیزیک اتمی دیده‌ایم که هنگامی که برهمکنش اسپین-مدار وجود دارد، بهتر است که از تکانه‌ی زاویه‌ای کل ذره یعنی $J = L + S$ استفاده کنیم. تکانه‌ی زاویه‌ای کل ذره نظیر سایر تکانه‌ها دارای یک عدد کوانتومی J است به طور کلی

$$|j| = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad (15-1)$$

مولفه‌ی Z تکانه‌ی J به صورت زیر کوانتیده است:

$$j_z = m \hbar \quad (16-1)$$

که m می‌تواند هر یک از مقادیر $j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j$ را اختیار کند. یعنی $2j+1$ مقدار مجاز داشته

باشد. با دانستن $S = \frac{1}{p}$ برای نوکلئون‌ها داریم:

$$j = |1+s| = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} & 1 \parallel s \\ 1 - \frac{1}{2} & 1 \parallel s \end{cases} \quad (17-1)$$

برای هر l دلخواه دو مقدار j وجود دارد. مثلا برای نوکلئون‌ها در مدارهای $l=2$ ، j می‌تواند $3/2$ یا $5/2$ باشد. با استفاده از نمادگذاری طیف نمایی که در جدول (۱-۲) آمده است، مقدار j به صورت شاخص پایین ظاهر می‌شود.

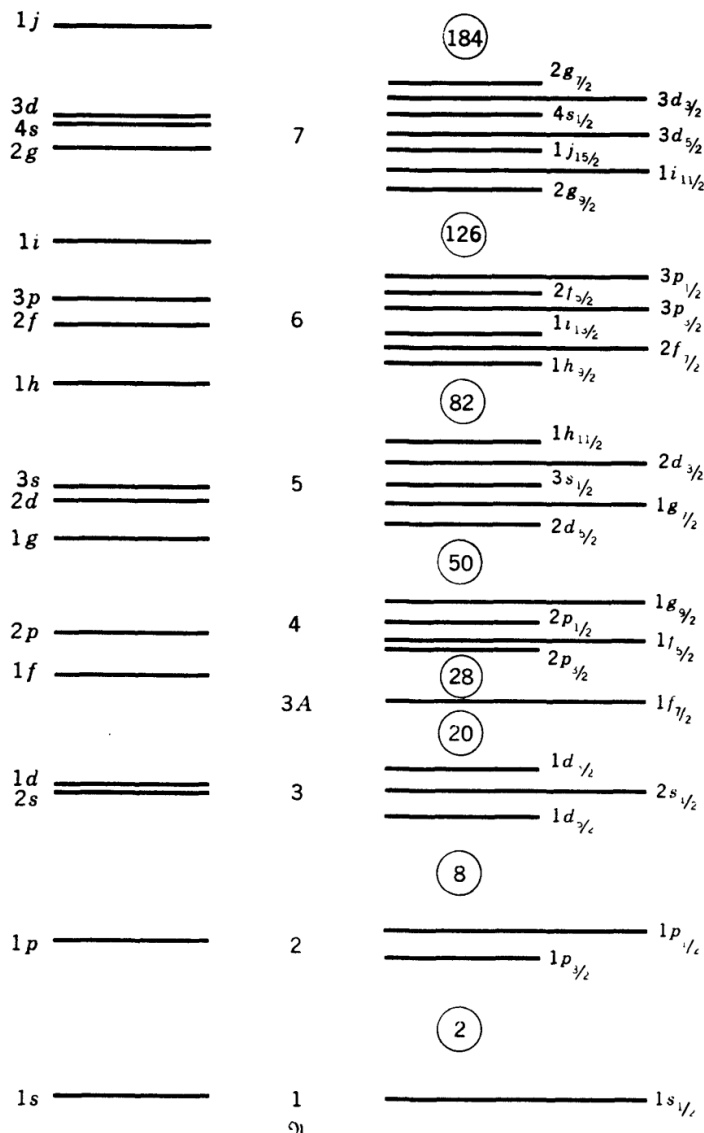
جدول ۱-۳: نمادهای طیف نمودی برای مقادیر l [۱]

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	l
k	j	i	h	g	f	d	P	s	نماد طیف نمودی

بنابراین مورد مثال بالا به صورت $d_{\Delta/2}$ یا $d_{r/2}$ مشخص می‌شود. با وجود اینکه بستگی (θ, φ) این مدارها یکی است، آن‌ها را مدارهای متفاوتی در نظر می‌گیریم. اکنون اثرهای برهمکنش اسپین-مدار را بر روی انرژی این حالت‌ها بررسی می‌کنیم. در شکل (۱-۶) می‌بینیم که وقتی l و s پادموازی‌اند $(j = 1 - \frac{1}{p})$ چاه پتانسیل باریکتر و کم عمق‌تر از وقتی است که l و s موازی $(j = 1 + \frac{1}{p})$ باشند. وقتی چاه کم عمق‌تر و باریکتر می‌شود ترازهای انرژی به طرف بالا کشیده می‌شود. بنابراین تراز $1d_{r/2}$ نسبت به تراز $1d$ در انرژی بالاتری قرار دارد و برعکس تراز $1d_{\Delta/2}$ در انرژی پایین‌تری واقع است. گفته می‌شود که تراز $1d$ به واسطه‌ی برهمکنش اسپین-مدار به دو تراز منشعب شده است و اختلاف انرژی دو تراز به شکافتگی اسپین-مدار معروف است.

از آنجا که قدرت برهمکنش اسپین-مدار متناسب با l است، این اختلاف انرژی تقریبا به طور خطی

با l زیاد می‌شود. مثلا اختلاف انرژی میان مدارهای $p_{1/2}$ و $p_{3/2}$ حدود یک سوم اختلاف انرژی میان $f_{5/2}$ و $f_{7/2}$ است. همان‌گونه که در شکل (۱-۶) می‌بینیم برهمکنش اسپین-مدار، فقط پتانسیل نزدیک لبه‌ی خارجی هسته را تغییر می‌دهد، چون اهمیت نسبی لبه‌ی خارجی نسبت به کل حجم هسته با پهن‌ترین شدن چاه کاهش می‌یابد، بزرگی شکافتگی اسپین-مدار با افزایش A نیز کاهش می‌یابد.



شکل ۱-۷: ترازهای انرژی در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای. ترازهای انرژی در سمت چپ تقریباً ترازهایی هستند که بدون برهمکنش اسپین-مدار انتظار آن‌ها را داریم. آن‌ها همان ترازهای شکل (۱-۵) هستند که برای چاه پتانسیل بزرگتر گسترش یافته‌اند. طرف راست، اثر برهمکنش اسپین مدار را در شکافتگی هر تراز (به جز $l=0$) نشان می‌دهد [۱].

جالبترین برداشت ما از شکل (۷-۱) این است که انرژی‌ها به صورت گروه ظاهر می‌شوند. تعدادی از مدارها از نظر انرژی خیلی به هم نزدیک‌اند، و سپس گاف بزرگی دیده می‌شود و نظیر این نقش بارها و بارها تکرار می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم گروه‌های ترازهای انرژی با گاف‌های بزرگ در فیزیک اتمی نیز ایجاد می‌شوند. نکته‌ی مورد نظر دیگر در شکل (۷-۱) تعداد مدارهای مجاز در هر لایه است. در شکل (۷-۱) هر حالت نشانگر $2l+1$ مدار مجاز است. که به مقادیر مختلف مربوط می‌شوند. بنابراین تعداد کل مدارهای مجاز در $N=1$ برابر ۲ و در $N=2$ برابر $6 = 2 + 4$ و غیره است.

جدول ۱-۴: مدارهای هر لایه در تقریب اول. این‌ها مدارهای گروه‌های مربوط به پتانسیل نوسان‌کننده‌ی هارمونیک نیز هستند [۱].

l	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
N	۱s							
		۱p						
	۲s		۱d					
		۲p		۱f				
	۳s		۲d		۱g			
		۳p		۲f		۱h		
	۴s		۳d		۲g		۱i	
		۴p		۳f		۲h		۱j

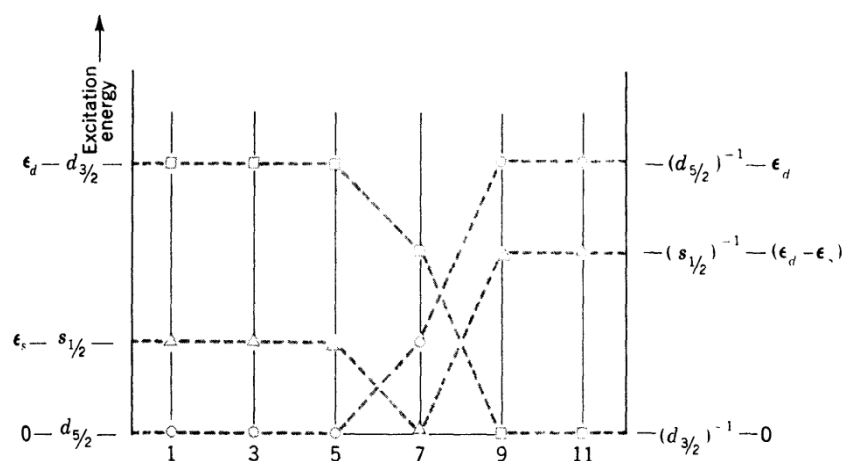
۱-۱۳- پرشدن مدارهای مجاز در پتانسیل نظریه‌ی لایه‌ای

حال می‌خواهیم ببینیم که چگونه مدارهای مجاز شکل (۱-۷) توسط نوکلئون‌ها پر می‌شوند تا از اجتماع آن‌ها هسته بوجود آید. بنابر اصل طرد پائولی در هر مدار بیش از یک پروتون و یک نوترون نمی‌تواند با اعداد کوانتومی n, l, j, m یکسان وجود داشته باشد، بنابراین هرگاه فقط حالت پایین‌ترین انرژی هسته‌ها را در نظر بگیریم انتظار داریم که مدارها به ترتیب افزایش انرژی همانند مورد آشنای الکترون‌ها در اتم‌ها پر شوند. برای مثال، در هسته‌ای با دو پروتون و دو نوترون (نظیر ${}^4_2\text{He}$) همه‌ی مدارهای $N=1$ آن پر و بقیه خالی خواهند بود. هسته‌ای از این نوع که لایه‌های آن یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی باشند، هسته با پوسته‌ی بسته نامیده می‌شوند. سایر هسته‌هایی که با پوسته‌ی بسته در طبیعت پیدا می‌شوند، عبارتند از ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{24}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ این هسته‌ها در ساختار هسته‌ای نقشی شبیه به گازهای بی‌اثر He , Ne , Ar , Kr , Xe , Rn در ساختار اتمی دارند.

نوع جالب دیگر هسته که اصطلاحاً هسته‌ی تک ذره نام دارد، هسته‌ای است که بجز تک ذره که در لایه‌ی پایین‌ترین انرژی ممکن قرار دارد، تمام پوسته‌های دیگر آن یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی‌اند. مثال‌هایی از این نمونه ${}^5_2\text{He}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{17}_9\text{F}$, ${}^{41}_{20}\text{Ca}$, ${}^{41}_{21}\text{Sc}$ هستند. نقش آن‌ها مشابه نقش فلزات قلیایی Li , Na , K و... در ساختار اتمی است. دسته‌ی دیگری از هسته‌ها که به گروه قبلی خیلی نزدیک‌اند، هسته‌های تک حفره‌ای هستند. در این هسته‌ها تمام لایه‌ها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی‌اند، مگر لایه‌ی بالاترین انرژی که فقط یک نوکلئون کم دارد، هسته‌های ${}^{15}_8\text{O}$, ${}^{15}_7\text{N}$, ${}^{39}_{19}\text{K}$, ${}^{39}_{20}\text{Ca}$ از جمله مثال‌های هسته‌های تک حفره‌ای هستند. نقش آن‌ها در ساختار هسته‌ای مشابه نقش هالوژن‌ها F , Cl , Br و... در ساختار اتمی است.

۱۴-۱- هسته‌های گروهی با A فرد:

یک هسته با A فرد، یا دارای Z زوج N فرد و یا Z فرد N زوج است. ساده‌ترین حالت‌های یک هسته با Z زوج و N فرد حالت‌های شبه ذره‌ای منفرد (SQP) هستند. این حالت‌ها، حالت‌هایی هستند که با اضافه کردن یک ذره یا یک حفره به نزدیک‌ترین هسته‌ی زوج-زوج بدست می‌آیند. اگر هیچ برخوردی در هسته‌ها نبود، مدارها برای پوسته‌ی $N=3$ به ترتیب افزایش انرژی پرمی‌شدند و انرژی حالت‌ها، مطابق شکل (۷-۱) درست برابر حاصل جمع انرژی مدارهای پر شده می‌شد. برای هسته‌هایی که در آن‌ها پوسته‌ی نوترونی $N=3$ در حال پر شدن است، انرژی‌های E_j حالت‌های SQP می‌بایستی مطابق شکل (۸-۱) باشد. برای اینکه آن را بهتر بفهمیم، باید چند مثال در نظر بگیریم. اگر پنج نوترون در این پوسته باشد، حالت پایین‌ترین انرژی حالتی است که در آن نوترون‌ها در مدارهای $d_{5/2}$ قرار بگیرند. اگر نوترون فرد به جای مدار $d_{5/2}$ در مدار $s_{5/2}$ قرار بگیرد، انرژی $E_{7/2}$ این حالت برانگیخته‌ی SQP برابر ϵ_s خواهد بود. همین طور اگر نوترون فرد در مدار $d_{7/2}$ باشد، یک حالت SQP با $E_{7/2} = \epsilon_d$ خواهیم داشت. این انرژی‌ها در شکل (۸-۱) نشان داده شده‌اند و انرژی پایین‌ترین SQP صفر در نظر گرفته شده‌است.



شکل ۸-۱: انرژی حالت‌های SQP در پوسته $N=3$ برحسب تابعی از تعداد نوترون‌ها در آن پوسته با فرض اینکه هیچ برهمکنش باقیمانده‌ای در هسته روی ندهد [۱].

در بعضی از هسته‌ها که A فرد دارند، یعنی همان هسته‌های تک ذره و تک حفره، هیچ برخوردی صورت نمی‌گیرد. لذا برای این هسته‌ها شکل (۸-۱) نتایج درستی می‌دهد. انرژی‌های E_j حالت‌های هسته‌ای در این هسته‌ها دقیقا انرژی‌های مداری شکل (۷-۱) هستند. حالت SQP مدار $s_{\sqrt{2}}$ در ^{19}O یک حالت حفره‌ای است تا یک حالت ذره‌ای. این امر به طور کلی واقعیت دارد، زیرا به جای اینکه حالت‌های ذره‌ای و یا حفره‌ای کامل باشند، بخشی از حالت‌های SQP به صورت حالت ذره‌ای و بخشی دیگر به صورت حالت حفره‌ای است و نام شبه ذره‌ای هم به همین دلیل است. تمام مدارها به طور یکنواخت پر می‌شوند، بنابراین مقادیر نسبی ذره‌ای بودن و یا حفره‌ای بودن در یک حالت SQP به طور یکنواخت با عدد نوترونی تغییر می‌کند. هر چه مدار پرتی می‌شود، حالت SQP آن بیشتر شبه حفره‌ای و کمتر شبه ذره‌ای می‌شود. برای مورد سه نوترونی در ^{19}O چگونگی کار در شکل (۹-۱) نشان داده شده است. با گذاشتن سه نوترون در سه مدار موجود، تعداد نه پیکربندی امکان پذیر است که انرژی هر کدام از آنها برابر حاصل جمع انرژی‌های آن مدار است. با توجه به امکانات مختلف جمع کردن تکانه‌های زاویه‌ای مداری، جمله‌های حاصل از این پیکربندی‌ها در سمت راست شکل (۹-۱) نشان داده شده است. تمام این جمله‌ها دارای پارامتر مثبت هستند زیرا که جمع سه مقدار I زوج همیشه زوج است. می‌توان نشان داد که تکانه‌های زاویه‌ای بدست آمده از $(d_{\delta/2})^2$ ، با روش‌های مختلف به مقادیر گردآوری شده محدود می‌شوند، و وجود I منفرد در $(d_{\tau/2})^2$ برحسب حفره‌ها قابل فهم است. حالت‌های ^{19}O ترکیب‌های خطی از این جمله‌ها با I^π یکسان هستند. برای مثال پنج حالت $(1/2)^+$ وجود دارد که هریک ترکیب خطی از جمله‌های $d_{\tau/2} s_{\sqrt{2}}$ ، $d_{\delta/2} s_{1/2} d_{\tau/2}$ ، $(d_{\tau/2})^2 d_{\delta/2}$ ، $d_{\tau/2} s_{\sqrt{2}}$ هستند.

۱۵-۱- جرم و انرژی بستگی هسته‌ها:

انرژی بستگی هسته، B، به صورت انرژی لازم برای شکستن هسته‌ها به نوترون‌ها و پروتون‌های

آزاد تعریف می‌شود. یک روش شکستن هسته به اجزای تشکیل دهنده‌ی آن، جداکردن تک تک نوکلئون‌هاست. می‌دانیم که انرژی جدایی نوکلئون‌ها تقریباً ثابت و در حدود 8 MeV است، می‌توان تخمین زد که انرژی بستگی یک هسته‌ی پیچیده حدود 8 MeV ضربدر تعداد نوکلئون‌هاست،

$$\frac{B}{A} \approx 8 \text{ MeV} \quad (18-1)$$

بنابر نظریه‌ی نسبیت، جرم یک سیستم مقید با انرژی B به اندازه‌ی $\frac{B}{c^2}$ کمتر از جرم اجزای تشکیل دهنده‌ی آن است. هرگاه هسته‌ای به جرم M شامل Z پروتون و N نوترون باشد، انرژی بستگی به قرار زیر است:

$$B = (ZM_p + NM_n - M)c^2 \quad (19-1)$$

روش دیگر اندازه‌گیری جرم‌های هسته‌ای، تعیین انرژی آزاد شده‌ی Q در واکنش‌های هسته‌ای است. در اغلب موارد واکنش را می‌توان به صورت زیر نوشت

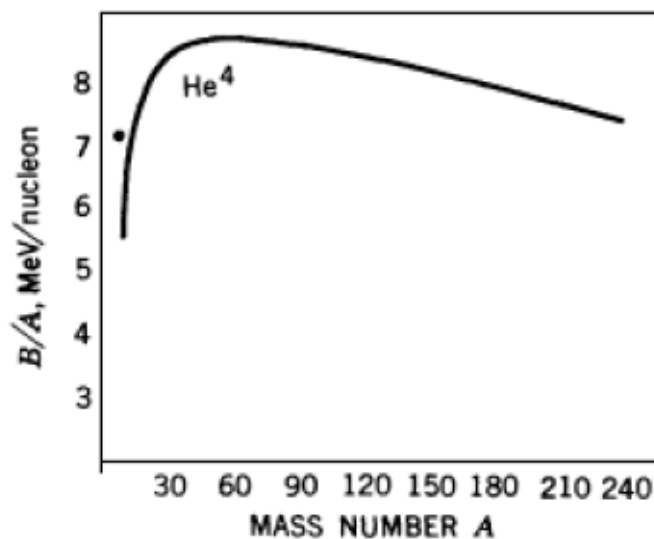


که a و b نوکلئون‌ها یا هسته‌های سبک و X و Y هسته‌های سنگینی‌اند. هرگاه هسته‌ی هدف، X ، در ابتدا در حال سکون و انرژی ذره‌ی فرودی a معلوم باشد، با اندازه‌گیری انرژی و زاویه‌ی گسیل b انرژی Y را می‌توان از اصل پایستگی تکانه حساب کرد که از آنجا Q تعیین می‌شود. بنابر اصل پایستگی انرژی چنین داریم

$$M_Y = M_a + M_X - M_b - \frac{Q}{c^2} \quad (21-1)$$

که M ها جرم ذرات در رابطه‌ی (۲۰-۱) هستند که با شاخص‌ها مشخص شده‌اند.

در نتیجه‌ی ده‌ها سال طیف‌نمایی جرم و اندازه‌گیری‌های دقیق مقادیر از واکنش‌های هسته‌ای و فرایندهای واپاشی هسته‌ای، جرم تعداد زیادی از هسته‌ها تعیین شده‌اند. از آنجا که روش‌های طیف‌نمایی جرم، مستقیماً جرم اتمی را به جای جرم هسته‌ای اندازه می‌گیرد، معمولاً نتایج را به صورت جرم اتمی عرضه می‌کنند. با وجودی که انرژی بستگی الکترون‌ها قابل چشم‌پوشی نیست، تفاوت جرم‌های اتمی با هسته‌ای عمدتاً در جرم در حال سکون Z الکترون آن‌هاست. انرژی جدایی نوکلئون‌ها درست اختلاف انرژی بستگی میان هسته‌ی مورد بحث و هسته‌ای با یک نوکلئون کمتر است. این انرژی به سهولت از جرم این هسته‌ها با استفاده از رابطه‌ی (۱-۱۹) حساب می‌شوند. رسم منحنی $\frac{B}{A}$ برای هسته‌هایی که در طبیعت یافت می‌شوند، در شکل (۱-۹) نشان داده شده‌است.



شکل ۱-۹: انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون، $\frac{B}{A}$ ، برای هسته‌های موجود در طبیعت [۱].

مشاهده می‌شود که این منحنی همانگونه که در رابطه‌ی (۱-۱۸) نشان داده شده است، به طور خیلی تقریبی ثابت است، ولی به ازای مقادیر کم و زیاد A ، افت می‌کند. افت $\frac{B}{A}$ را برای A زیاد می‌توان به علت اثر کولنی دانست. نیروی دافعه‌ی کولنی میان هر جفت پروتون عمل می‌کند و در

نتیجه با Z^2 افزایش می‌یابد که برای هسته‌هایی که در طبیعت وجود دارند افزایش آن سریعتر از A است. افت در A کم در منحنی شکل (۹-۱) مربوط به این واقعیت است که بستگی کامل یک نوکلئون فقط هنگامی بدست می‌آید که آن نوکلئون به وسیله‌ی نوکلئون‌های دیگر کاملاً احاطه شده‌باشد. البته، نوکلئون‌های سطح هسته چنین وضعیتی ندارند؛ از آنجا که هسته‌های سبک جزء بیشتری از نوکلئون‌های در سطح قرار دارند؛ انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون کاهش می‌یابد. منحنی شکل (۹-۱) از نقطه نظر عملی منحنی مهمی است. این واقعیت که منحنی در ناحیه‌ی هسته‌های با جرم متوسط دارای قله می‌شود بدین معنی است که انرژی بستگی می‌تواند افزایش یابد، و در نتیجه انرژی را می‌توان به صورت‌های دیگر، گداخت هسته‌های سبک یا در شکافت هسته‌های سنگین آزاد کرد.

۱-۱۶- پتانسیل‌های هسته‌ای

در اینجا سه نوع از پتانسیل‌های هسته‌ای با تقارن کروی را به صورت مختصر شرح می‌دهیم [۶].

پتانسیل وود-ساکسون:

پتانسیل وود-ساکسون یک انتخاب ساده پدیده‌شناختی برای پتانسیل تک-جسمی است. این پتانسیل، مدلی را برای خواص توابع موج تک-ذره‌ای حالت مقید و پیوسته تهیه می‌کند. پتانسیل وود-ساکسون نمی‌تواند برای انرژی بستگی کل به کار رود چون بر مبنای برهمکنش دو-جسمی استوار نیست. پارامترهای وود-ساکسون برای یک برازش خوب انرژی‌های تک-ذره‌ای هسته‌ای و شعاع هسته‌ای انتخاب شده‌اند. پتانسیل وود-ساکسون حاصل جمع یک پتانسیل مرکزی مستقل از اسپین، یک پتانسیل اسپین-مدار و پتانسیل کولنی است:

$$V(r) = V_0(r) + V_{so}(r) \vec{I} \cdot \vec{s} + V_c(r) \quad (۲۲-۱)$$

پتانسیل مرکزی مستقل از اسپین است؛

$$V_0(r) = V_0 f_0(r) \quad (23-1)$$

$f_0(r)$ شکل فرمی زیر را دارد.

$$f_0(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r - R_0)/a_0]} \quad (24-1)$$

V_{so} پتانسیل اسپین-مدار است:

$$V_{so}(r) = V_{so} \frac{1}{r} \frac{df_{so}(r)}{dr} \quad (25-1)$$

$f_{so}(r)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_{so}(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r - R_{so})/a_{so}]} \quad (26-1)$$

پتانسیل نوسانگر هماهنگ:

در فیزیک هسته‌ای، پتانسیل نوسانگر هماهنگ (HO) به صورت زیر است.

$$U_0^{HO}(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (27-1)$$

m جرم نوکلئون و ω یک پارامتر است. این پتانسیل، خواص تحلیلی زیبایی دارد که مهم‌ترین آن جداپذیر بودن هامیلتونی نوسانگر هماهنگ سیستم چند-جسمی، به صورت جمع دو جمله داخلی و مرکز جرم، است. ترازهای انرژی تک ذره‌ای به صورت زیر هستند:

$$E = (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega \quad (28-1)$$

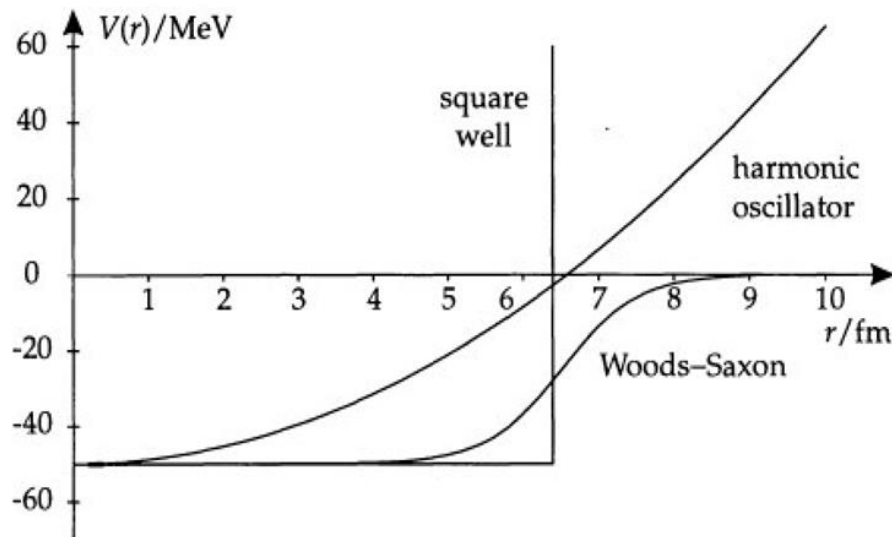
N عدد کوانتومی پوسته اصلی نوسانگر هماهنگ است.

$$N = 2n_r + 1 \quad (29-1)$$

پتانسیل چاه مربعی:

به صورت زیر تعریف می شود

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } r \leq R \\ \infty & \text{for } r > R \end{cases} \quad (30-1)$$



شکل ۱-۱۰: نمودار پتانسیل‌های مدل لایه‌ای. وود-ساکسون، نوسانگر هماهنگ، چاه مربعی. برای ^{208}Pb .

۱-۱۷- جذر میانگین مربع شعاع باری

جذر میانگین مربع شعاع بار حالت پایه هسته‌های زیادی اندازه‌گیری شده است. برای چگالی بار

کروی، $\rho(r)$ ، میانگین مربع شعاع بار با رابطه زیر تعریف می‌شود [۶،۷].

$$\langle \bar{r}^2 \rangle = \frac{\int \rho(r)r^2 d\tau}{\int \rho(r)d\tau} \quad (31-1)$$

فصل دوم

مروری بر واپاشی بتا

۲-۱- مقدمه

فیزیک هسته‌ای در سال ۱۸۹۶ با کشف رادیواکتیویته به صورت تصادفی توسط هانری بکرل^۱، که متوجه سیاه شدن صفحات عکاسی، هنگامی که در کنار کریستال اورانیوم سولفید قرار دارد شد. در حالی که بکرل کشف رادیواکتیویته، و پیر^۲ و ماری^۳ کوری بسیاری از ویژگی‌های عناصر رادیواکتیو مختلف تولید شده در فروپاشی اورانیوم را شفاف کردند. در سال ۱۹۰۳ جایزه نوبل فیزیک به بکرل، و پیر و ماری کوری اعطا شد. ارنست رادرفورد^۴ در سال ۱۸۹۹ به این کار علاقه مند شد و آزمایشات او در سال ۱۹۱۱ منجر به کشف هسته شد. او برای اولین بار به طور مصنوعی یک عنصر را به عنصر دیگر تبدیل کرد. رادرفورد در سال ۱۹۱۹ اولین تولید مصنوعی ایزوتوپ پایدار ^{17}O با بمباران هسته ^{14}N با ذرات آلفا را نشان داد، و مفاهیم نیمه عمر و ثابت واپاشی را مشخص کرد.

تاریخ فیزیک هسته‌ای به سه دوره تقسیم شده است:

اولین دوره با کشف رادیواکتیویته آغاز و با کشف هسته، در سال ۱۹۳۹ با کشف شکافت به پایان می‌رسد. در طی این مدت، اجزای اصلی هسته (پروتون و نوترون) و همچنین قانون کوانتومی حاکم بر رفتار آن‌ها کشف شد.

دوره دوم در سال‌های ۱۹۶۹ - ۱۹۴۷ شاهد توسعه طیف‌سنجی هسته‌ای و مدل‌های هسته‌ای است.

در نهایت، در سال ۱۹۶۰ یک نظریه یکنواخت میکروسکوپی به درک ساختار و رفتار پروتون‌ها و نوترون‌ها از نظر برهمکنش اساسی ذرات تشکیل‌دهنده‌ی آن، کوارک‌ها و گلوئون‌ها، ظهور پیدا کرد. این دوره همچنین شاهد شناسایی مکانیسم‌های غیرکلاسیک ظریف در ساختار هسته‌ای است. از آنجا

^۱H. Becquerel

^۲P. Curie

^۳M. Curie

^۴E. Rutherford

که در سال ۱۹۴۰ فیزیک هسته‌ای تحولات مهم دیده‌است، اما اکثر برنامه‌های کاربردی عملی و توضیحات نظری ساده خود، در اواسط سال ۱۹۵۰ بوده است. فیزیک هسته‌ای برای درک ساختار و منشاء جهانی که در آن زندگی می‌کنیم ضروری است. با مطالعه رادیواکتیویته، در زمینه‌های فیزیک هسته‌ای، فیزیک ذرات، یکی از شاخه‌های شیمی که با اثرات شیمیایی رادیواکتیو سروکار دارد، بسیاری از برنامه‌های کاربردی در پزشکی، زیست‌شناسی، و صنعت به دست آمده است [۸،۹،۱۰].

۲-۲- فرمیون‌ها و بوزون‌ها:

ذرات بنیادی به دو دسته‌ی فرمیون‌ها و بوزون‌ها دسته بندی می‌شوند. فرمیون‌ها ذراتی هستند که از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند. اگر مجموعه‌ای از فرمیون‌ها یکسان بر حسب توابع موج تک‌ذره‌ای بیان شوند هیچ دو فرمیونی نمی‌تواند تابع موج یکسانی داشته باشد. مثلاً الکترون‌ها فرمیون‌اند. این قانون ساختار اتم‌ها را توضیح می‌دهد. فرمیون‌ها بدین دلیل که از آمار فرمی-دیراک در مکانیک آماری پیروی می‌کنند، به این نام خوانده می‌شوند. بوزون‌ها ذراتی هستند که از آمار بوز-اینشتن پیروی می‌کنند و با این ویژگی مشخص می‌شوند که هر تعداد از این ذرات می‌توانند تابع موج تک‌ذره‌ای یکسانی داشته باشند. در طبیعت چهارگونه از میدان‌های برهمکنشی را می‌توان تشخیص داد. همه این برهمکنش‌ها وابسته به فیزیک هسته‌ای هستند، هر چند میدان گرانشی تنها در توده‌ی چگالی از ماده، مانند ستارگان اهمیت پیدا می‌کند. نیروهای گرانشی بر همه‌ی ذرات اثر می‌کنند. نیروهای گرانشی برای مقیاس‌های بزرگ فیریک و اجسام ماکروسکوپی مهم‌اند. در مقیاس کوچک فیزیک هسته‌ای و فیزیک اتمی، اثر نیروهای گرانشی ناچیز است [۱۱].

جدول ۲-۱ گونه های میدان برهمکنشی [۱۱].

اسپین	بوزون	میدان های برهمکنشی
۲	گراویتون ها	میدان گرانشی
۱	ذرات W^+, W^-, Z^0	میدان ضعیف
۱	فوتون ها	میدان الکترومغناطیسی
۱	گلئون ها	میدان قوی

۲-۳- برهمکنش ضعیف:

سه میدان برهمکنش ضعیف مربوط به ذرات W^+, W^-, Z^0 وجود دارد. همانند میدان الکترومغناطیسی، هر کدام از این میدان ها را با یک پتانسیل برداری و یک پتانسیل نرده ای توصیف می کنیم. همه ی بوزون های مربوط به میدان ضعیف، جرم دارند، و بوزون های W^+, W^- دارای بار الکتریکی می باشند. بوزون Z^0 خنثی و بسیار شبیه به فوتون است، بجز آنکه جرمی به اندازه ی ۱۰۰ برابر جرم پروتون $M_z = 91/187 \pm 0/007 \text{ GeV}/c^2$ دارد، که در مقایسه با معیارهای فیزیک هسته ای بسیار بزرگ است.

۲-۴- لپتون ها:

لپتون ها، فرمیون هایی با اسپین ۱/۲ هستند که از طریق برهمکنش های الکترومغناطیسی و ضعیف، و نه برهمکنش های قوی، برهمکنش می کنند. از بین این لپتون های باردار تنها ذره ی نام آشنای الکترون پایدار است. الکترون ها ذرات بدون ساختاری هستند که با معادله ی موج نسبیتی دیراک توصیف می شوند. برهمکنش های بین لپتون ها و میدان های الکترومغناطیسی و ضعیف به صورت نظریه ی وحدت یافته " الکترو-ضعیف " منتسب به واینبرگ و سلام^۱ ارائه شدند. این نظریه وجود

^۱ Weinberg & salam

بوزون های W^\pm, Z^0 را پیشگویی می‌کرد، و به همراه داده‌های آزمایشگاهی حاصل از پراکندگی نوترینو-هسته‌ای، برای جرمشان حدودی هم پیشنهاد می‌نمود. در سال ۱۹۸۷، فیزیکدانان تجربی در سرن^۱ این پیشگویی‌ها را تایید کردند. میدان‌های بوزونی باردار الکتریکی W^+, W^- عامل مهم‌ترین برهمکنش‌های ضعیف، به ویژه واپاشی β ، می‌باشند، که فوتون‌ها و بوزون‌های Z^0 نمی‌توانند موجب آن گردند.

پروتون تنها سیستم سه کوارکی پایدار، در فضای آزاد است. در فضای آزاد، نوترون سنگین‌تر از پروتون است. عمر میانگین نوترون در فضای آزاد برابر $886/7$ ثانیه است که تقریباً برابر با ۱۵ دقیقه می‌شود. اما اگر از نظر انرژی، کلیت انرژی بستگی هسته این واپاشی را ممنوع سازد، سیستم مقید نوترونی در هسته پایدار خواهد شد. برعکس آن، پروتون مقید در هسته می‌تواند با فرآیند زیر به نوترون تبدیل گردد.



به شرطی که از نظر انرژی بستگی مجاز باشد.

۲-۵- ویژگی‌های پروتون و نوترون:

نوکلئون‌ها، همانند لپتون‌ها، فرمیون‌اند و اسپین $1/2$ دارند. جرم نوترون $0/14$ درصد بیشتر از

پروتون است:

$$m_n = 939/566 \text{ MeV}/c^2 \quad (2-2)$$

$$m_p = 938/272 \text{ MeV}/c^2$$

بنابراین تفاوت جرم آن‌ها $m_n - m_p = 1/29 \text{ MeV}/c^2$ تقریباً دو برابر جرم الکترون است. نوترون

¹ CERN

بار الکتریکی خالص ندارد. بار پروتون مخالف بار الکترون است: زیرا بار الکتریکی خالص اتم‌ها صفر است و پروتون‌ها سبب می‌شوند که بار الکترون‌ها را کاملا خنثی سازد. بار الکتریکی پروتون در یک نقطه تمرکز نیافته است بلکه به‌طور متقارن حول مرکز پروتون توزیع شده است. هم پروتون و هم نوترون دارای گشتاور مغناطیسی هستند که با اسپین‌شان هم‌راستا می‌باشند:

$$\mu_p = 2/79285 \ e\hbar / 2m_p \quad (3-2)$$

$$\mu_n = -1/91304 \ e\hbar / 2m_p$$

در نوکلئون‌ها و در فیزیک هسته‌ای تنها دو کوارک کم‌جرم‌تر از دیگر کوارک‌ها جای می‌گیرند. یکی کوارک بالا u و دیگری کوارک پایین d . اساسا پروتون دربردارنده‌ی دو کوارک بالا و یک کوارک پایین uud و نوترون دارای دو کوارک پایین و یک کوارک بالاست ddu . این کوارک‌ها را میدان برهمکنش بنیادی قوی، که فیزیکدانان ذرات به آن میدان گلوئون گویند، مقید کرده‌اند. همسانی تقریبی برهمکنش‌های قوی نوترون‌ها با پروتون‌ها، با میدان گلوئونی توضیح داده می‌شود. این میدان جفت‌شدگی یکسانی بین همه کوارک‌ها، مستقل از گونه آن‌ها، ایجاد می‌کند. بار الکتریکی کوارک‌ها را با اندازه‌گیری گذارهای الکترومغناطیسی بین حالت پایه نوکلئون و حالت برانگیخته معین می‌کنند. کوارک u دارای بار $2/3 e$ و کوارک d دارای بار $1/3 e -$ است. بنابراین پروتون uud بار خالص e و نوترون ddu بار خالص صفر است. تفاوت‌های بین نوترون‌ها و پروتون‌ها، به جز بارهای ضعیف و الکتریکی آن‌ها، به سبب تفاوت جرم $d-u$ می‌باشد. این موضوع اثر اندکی بر برهمکنش‌های قوی بنیادی دارد، در نتیجه برهمکنش قوی حاصل بین نوکلئون‌ها تقریبا مستقل از گونه نوکلئون می‌باشد.

نتیجه می‌گیریم که الکترون یک ذره‌ی بنیادی بسیار ساده است ولی پروتون‌ها و نوترون‌ها دارای ساختار پیچیده‌اند و توزیع بار الکتریکی‌شان غیرعادی است.

۲-۶- مزون‌ها و برهمکنش نوکلئون-نوکلئون

مانند همه‌ی فرمیون‌ها، کوارک‌ها هم پاد ذرات ویژه‌ی خود را دارند. پاد پروتون‌ها و پاد نوترون‌ها هم امکان وجود دارند که از پاد کوارک‌های $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$ و $\bar{d}\bar{d}\bar{u}$ ساخته می‌شوند. در ماده‌ی پاد کوارکی، حالت‌های برانگیخته‌ی نوکلئون‌ها پیکره‌ای از جرم یکسان ولی با بار مخالف دارند. می‌توان درباره امکان وجود پاد اتم‌های پایدار، و اجسام ماکروسکوپی ساخته شده از پادماده اندیشید. اما از آنجا که الکترون‌ها با پوزیترون‌ها نابود می‌گردند، پس نوکلئون‌ها هم با پاد نوکلئون‌ها نابود می‌شوند. همانگونه که سیستم مقید سه کوارکی یا سیستم مقید سه پاد کوارکی، نوکلئون‌ها یا پاد نوکلئون‌ها را می‌سازند، میدان گلوئونی قوی می‌تواند یک کوارک و یک پاد کوارک را به هم مقید سازد و ذره کوتاه عمری موسوم به مزون تولید کند. همانند نوکلئون‌ها، چنین سیستم مقید دوتایی نیز رشته‌ای از حالت‌های برانگیخته دارد.

در فیزیک هسته‌ای مزون‌های π اهمیت زیادی دارند. مزون‌های باردار الکتریکی π^+ و π^- به ترتیب از جفت‌های $u\bar{d}$ و $\bar{u}d$ ساخته شده‌اند، و مزون خنثی π^0 از برهم‌نهی $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ زوج کوارک و پاد کوارک بوجود آمده‌است.

جرم مزون‌های π عبارتند از:

$$M_{\pi^+} = M_{\pi^-} = 139/57 \text{ MeV}/c^2 \quad (۲-۴)$$

$$M_{\pi^0} = 134/9 \text{ MeV}/c^2 \quad (۲-۵)$$

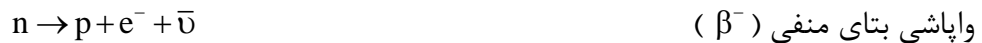
کوارک‌ها سرچشمه میدان‌های گلوئونی هستند، و این میدان آن‌ها را در نوکلئون محصور می‌کند. در فواصل $1\text{fm} \leq$ ، واسطه‌ی نیروی بین نوکلئون‌ها میدان گلوئونی پایه نیست، بلکه این نیرو بر اثر تبادل مزون‌ها ایجاد می‌گردد. مزون‌ها اسپین صحیح دارند و مانند فوتون‌ها واسطه‌ی برهمکنش

الکترومغناطیسی اند، ذرات W^{\pm}, Z^0 هم واسطه‌ی برهمکنش ضعیف می‌باشند.

۲-۷- واپاشی بتا

گسیل الکترون‌های منفی معمولی از هسته یکی از اولین پدیده‌های واپاشی رادیواکتیوی بود که مشاهده شد. فرآیند معکوس گیراندازی الکترون مداری توسط هسته، تا سال ۱۹۳۸ مشاهده نشد. در این سال آلوارز پرتوهای مشخصه‌ی گسیل شده در اثر پرشدن جای خالی الکترون‌های گیراندازی شده را آشکار سازی کرد. در سال ۱۹۳۴ ژولیو-کوری برای اولین بار فرآیند گسیل الکترون مثبت (پوزیترون) در واپاشی رادیواکتیو را، فقط دو سال پس از کشف پوزیترون در پرتوهای کیهانی، مشاهده کردند. سه فرآیند فوق ارتباط نزدیک باهم دارند و تحت عنوان مشترک واپاشی بتا رده‌بندی می‌شوند. اساسی‌ترین فرآیند واپاشی بتا تبدیل یک پروتون به نوترون و یا یک نوترون به پروتون است. در یک هسته، واپاشی بتا Z و N را یک واحد تغییر می‌دهد $Z \rightarrow Z \pm 1$ ، $N \rightarrow N \pm 1$ به طوری که $A = N + Z$ ثابت می‌ماند. بنابراین واپاشی بتا راه ساده‌ای برای « فرو لغزیدن » هسته‌های ناپایدار در سهمی جرم با A ثابت و رسیدن به ایزوبار پایدار است. همان طور که آزمایشات اولیه‌ی رادرفورد نشان دادند که ذرات آلفا هسته‌های ${}^4\text{He}$ هستند، آزمایش‌های اولیه در مورد ذرات بتای منفی نشان دادند که این ذرات دارای بار و جرم الکترون معمولی هستند.

فرآیندهای اساسی واپاشی بتایی به قرار زیر است:



دو فرآیند آخر فقط برای پروتون‌های وابسته به هسته رخ می‌دهند، و از نظر انرژی برای

پروتون‌های آزاد یا پروتون اتم هیدروژن ممنوع‌اند.

۲-۸- آزاد شدن انرژی در واپاشی بتا

در مقابل با واپاشی آلفا و گاما، واپاشی بتا یک توزیع پیوسته‌ای در طیف انرژی دارد که این چشم‌گیرترین تفاوت میان واپاشی بتا و واپاشی آلفا یا گاما می‌باشد [۱۲، ۱۳]. برای بحث پیرامون مقدار انرژی آزاد شده در واپاشی بتا، ابتدا واپاشی نوترون آزاد را (با نیمه عمر حدود ۱۰ دقیقه) در نظر می‌گیریم.



مانند مورد واپاشی آلفا، مقدار Q را تفاوت انرژی‌های جرمی هسته‌های ابتدایی و نهایی تعیین می‌کند

$$Q = (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})c^2 \quad (۲-۷)$$

برای واپاشی‌های نوترون در حال سکون داریم

$$Q = T_p + T_e + T_{\bar{\nu}} \quad (۲-۸)$$

در حال حاضر انرژی جنبشی پس‌زنی پروتون T_p را که فقط 0.3 KeV است، نادیده می‌گیریم. بنابراین، انرژی واپاشی بین الکترون و پادنوترینو تقسیم می‌شود، و از همین رهگذر می‌توان طیف پیوسته‌ی الکترون را توجیه کرد. بیشینه‌ی انرژی الکترون‌ها متناظر با کمینه‌ی انرژی پادنوترینوهاست، وقتی انرژی پادنوترینوها بسیار کوچک و متمایل به صفر است داریم $Q \approx (T_e)_{\max}$. بیشینه‌ی انرژی اندازه‌گیری شده‌ی الکترون‌ها در این فرآیند برابر $0.782 \pm 0.013 \text{ MeV}$ است. با استفاده از جرم‌های اندازه‌گیری شده‌ی نوترون، الکترون، و پروتون می‌توانیم مقدار Q را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
Q &= m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2 - m_\nu c^2 \\
&= 939/573 \text{ MeV} - 938/280 \text{ MeV} - 0/511 \text{ MeV} - m_\nu c^2 \quad (9-2) \\
&= 0/782 \text{ MeV} - m_\nu c^2
\end{aligned}$$

بنابراین در محدوده‌ی دقت اندازه‌گیری انرژی بیشینه می‌توان پادنوترینو را بی‌جرم در نظر بگیریم. با استفاده از پایستگی تکانه‌ی خطی می‌توان واپاشی بتا را فرآیندی سه جسمی در نظر گرفت، ولی این مطلب مستلزم اندازه‌گیری همزمان تکانه‌ی هسته‌ی پس‌زن و تکانه‌ی الکترون است. انجام این نوع آزمایش‌ها مشکل است. نوترینو به علت بی‌جرم بودن با سرعت نور حرکت می‌کند و انرژی کل نسبیتی آن برابر انرژی جنبشی است. برای الکترون از انرژی جنبشی T_e و انرژی کل نسبیتی E_e هر دو استفاده می‌کنیم که طبق رابطه‌ی $E_e = T_e + m_e c^2$ به هم مربوط‌اند. هسته‌ی پس‌زن انرژی بسیار کمی دارد و می‌توان آن را به طور نانسبیتی بررسی کرد.

نمونه‌ای از فرآیند واپاشی بتا را در یک هسته در نظر می‌گیریم.



$$Q_{\beta^-} = [m_N({}^A_Z X) - m_N({}^A_{Z+1} X') - m_e] c^2 \quad (11-2)$$

m_N نماینده‌ی جرم هسته‌ها است. برای تبدیل جرم هسته‌ای به جرم اتم‌های خنثی که در جداول موجودند و با $m({}^A X)$ نشان داده می‌شوند، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$m({}^A X) c^2 = m_N({}^A X) c^2 + Z m_e c^2 - \sum_{i=1}^Z B_i \quad (12-2)$$

که در آن B_i نماینده‌ی انرژی بستگی الکترون i ام به اتم است، بر حسب جرم اتمی داریم.

$$Q_{\beta^-} = \{ [m({}^A X) - Z m_e] - [m({}^A X') - (Z+1) m_e] - m_e \} c^2 + \left\{ \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \right\} \quad (13-2)$$

با چشم‌پوشی از تفاوت انرژی بستگی الکترون‌ها، خواهیم داشت.

$$Q_{\beta^-} = [m(^A X) - m(^A X')]c^2 \quad (14-2)$$

که در آن m نماینده‌ی جرم اتم‌های خنثی است. مقدار Q نماینده‌ی انرژی است که بین الکترون و نوترینو تقسیم می‌شوند.

$$Q_{\beta^-} = T_e + E_{\bar{\nu}} \quad (15-2)$$

در نتیجه هر ذره فقط وقتی دارای بیشینه‌ی انرژی است که انرژی ذره‌ی دیگر صفر شود.

$$(T_e)_{\max} = (E_{\bar{\nu}})_{\max} = Q_{\beta^-} \quad (16-2)$$

اگر حالت هسته‌ای نهایی یک حالت برانگیخته باشد، مقدار Q باید با در نظر گرفتن انرژی برانگیختگی آن حالت کاهش یابد.

$$Q_{\text{ex}} = Q_{\text{gr}} - E_{\text{ex}} \quad (17-2)$$

جدول (۲-۲) چند نمونه از واپاشی بتا، انرژی آزاد شده، و نیمه عمر آن‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۲-۲: نمونه‌هایی از فرآیندهای واپاشی بتا [۲].

$t_{1/2}$	$Q(\text{MeV})$	نوع	واپاشی
۳۸ s	۴۳۳۸	β^-	$^{23}\text{Ne} \rightarrow ^{23}\text{Na} + e^- + \bar{\nu}$
$2.01 \times 10^5 \text{y}$	۵۳۲۹	β^-	$^{99}\text{Tc} \rightarrow ^{99}\text{Ru} + e^- + \bar{\nu}$
۷۳۲ s	۳۳۲۶	β^+	$^{25}\text{Al} \rightarrow ^{25}\text{Mg} + e^+ + \nu$
۴۳۲ d	۲۳۱۴	β^+	$^{124}\text{I} \rightarrow ^{124}\text{Te} + e^+ + \nu$
۱۳۲۲ s	۲۳۷۵	ϵ	$^{15}\text{O} + e^- \rightarrow ^{15}\text{N} + \nu$
$1.0 \times 10^5 \text{y}$	۵۳۴۳	ϵ	$^{41}\text{Ca} + e^- \rightarrow ^{41}\text{K} + \nu$

۲-۹- نظریه‌ی فرمی درباره‌ی واپاشی بتا

در سال ۱۹۳۴، فرمی بر مبنای فرضیه‌ی پائولی دایر بر وجود نوترینو نظریه‌ای موفق را برای واپاشی بتا پیشنهاد کرد. مهم‌ترین ویژگی‌های واپاشی را از عبارت اساسی احتمال گذار، در اثر برهمکنشی که در مقایسه با برهمکنش تشکیل حالات شبه پایدار ضعیف است، می‌توان بدست آورد. احتمال واپاشی بتا به عواملی همچون انرژی آزاد شده در واپاشی، تکانه‌ی زاویه‌ای ذرات گسیل شونده، بار هسته و ماهیت حالت‌های هسته‌ای اولیه و نهایی بستگی دارد. برای تحلیلی که در اینجا آورده می‌شود از یک قضیه مکانیک کوانتومی به نام قاعده طلایی فرمی استفاده می‌کنیم. بنابر این قاعده، آهنگ گذار بین حالت اولیه i و نهایی f عبارت است از:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \frac{dn}{dE} \quad (18-2)$$

چگالی حالت‌های نهایی است که معمولاً به نام عامل یا ضریب فاز از آن یاد می‌شود (dn تعداد حالت‌های نهایی در بازه انرژی E تا $E + dE$ است). عنصر ماتریس V_{fi} برابر انتگرال برهمکنش V در

فاصله‌ی بین حالت اولیه و حالت نهایی شبه پایدار سیستم است

$$V_{fi} = \int \psi_f^* V \psi_i dv \quad (19-2)$$

با افزایش تعداد حالات نهایی قابل حصول، احتمال وقوع یک گذار مشخص افزایش می‌یابد. فرمی شکل ریاضی V را در واپاشی بتا که انجام محاسبات با استفاده از آن، و معادلات (2-13) و (2-14) میسر می‌شود، نمی‌دانست. وی در عوض، کلیه‌ی شکل‌های ممکن سازگار با نسبت خاص را در نظر گرفت و نشان داد که می‌توان یکی از پنج عملگر ریاضی O_X را که در آن X شکل عملگر است، به صورت زیر جایگزین V کرد:

$$X = V \text{ (تانسوری)}, T \text{ (شبه اسکالر)}, P \text{ (اسکالر)}, S \text{ (بردارمحوری)}, A \text{ (بردار)}, V \text{ (بردار)} \quad (20-2)$$

اینکه کدام یک از این‌ها درست است، فقط با آزمایش‌هایی که در آن‌ها تقارن‌ها و خصوصیات فضایی محصولات واپاشی بررسی می‌شوند قابل تحقیق است، و تعیین شکل صحیح $V-A$ مدت 20 سال به درازا کشید. تابع موج حالت زمانی باید علاوه بر هسته شامل الکترون و نوترینو هم باشد. برای گیراندازی الکترون یا نوترینو، شکل‌ها مشابه خواهند بود و تابع موج مناسب نیز در حالت اولیه ظاهر خواهد شد. برای واپاشی بتا عنصر ماتریس برهمکنش به صورت زیر خواهد بود

$$V_{fi} = g \int [\psi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^*] O_X \psi_i dv \quad (21-2)$$

که در آن ψ_f تابع موج حالت نهایی هسته و ϕ_e و ϕ_ν تابع موج‌های الکترون و نوترینو هستند. کمیت داخل کروشه نماینده‌ی کل سیستم نهایی پس از واپاشی است. مقدار ثابت g شدت برهمکنش را تعیین می‌کند، بار الکترونی نقش مشابهی در برهمکنش بین اتم و میدان الکترومغناطیسی دارد.

عامل چگالی حالت‌ها شکل طیف انرژی بتا را معین می‌کند. برای بدست آوردن چگالی حالت‌ها، باید تعداد حالت‌های نهایی قابل حصول برای محصولات واپاشی را بدانیم. فرض می‌کنیم که در واپاشی، یک الکترون (یا پوزیترون) با تکانه‌ی \mathbf{p} و یک نوترینو (یا پادنوترینو) با تکانه‌ی \mathbf{q} قابل

حصول باشد. در اینجا فقط شکل طیف انرژی را در نظر داریم، و بنابراین جهت‌های \mathbf{p} و \mathbf{q} مورد توجه نیستند. اگر دستگاه مختصاتی را در نظر بگیریم که محورهای آن p_x ، p_y ، و p_z باشد، مکان هندسی نقاطی که نماینده‌ی مقدار ویژه‌ی $\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ هستند کره‌ای به شعاع $p = |\mathbf{p}|$ است. به عبارت دقیق‌تر، مکان هندسی نقاطی که نماینده‌ی گستره‌ی تکانه‌های بین p و $p + dp$ هستند، پوسته‌ای کروی به شعاع p و ضخامت dp خواهد بود که در نتیجه حجمی معادل $4\pi p^2 dp$ خواهد داشت. اگر الکترون در جعبه‌ای به حجم V محبوس باشد، تعداد حالت‌های نهایی الکترون dn_e متناظر با تکانه‌های موجود در گستره‌ی p تا $p + dp$ برابر است با

$$dn_e = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} \quad (22-2)$$

که در آن عامل بدین منظور اضافه شده‌است که نتیجه به صورت یک عدد محض بدون بعد درآید.

به همین ترتیب، تعداد حالت‌های نوترینو برابر است با

$$dn_\nu = \frac{4\pi q^2 dq V}{h^3} \quad (23-2)$$

و تعداد حالت‌های نهایی که به طور همزمان یک الکترون و یک نوترینو با تکانه‌های مورد نظر

دارند، عبارت است از

$$d^2n = dn_e dn_\nu = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 dp q^2 dq}{h^6} \quad (24-2)$$

تابع موج‌های الکترون و نوترینو به صورت تابع موج ذره‌ی آزاد معمولی هستند که در حجم بهنجار

می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varphi_e(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \\ \varphi_v(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}\end{aligned}\quad (25-2)$$

برای الکترونی با انرژی جنبشی ۱ MeV داریم $p = 1/4 \text{ MeV}/c$ و $p/\hbar = 0.007 \text{ fm}^{-1}$.

بنابراین در حجم هسته، $\mathbf{p}\mathbf{r} \ll 1$ ، می‌توان نماها را بسط داد و فقط جمله‌ی اول را نگاه داشت.

$$\begin{aligned}e^{\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} &= 1 + \frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar} + \dots \cong 1 \\ e^{\frac{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} &= 1 + \frac{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar} + \dots \cong 1\end{aligned}\quad (26-2)$$

این تقریب به نام تقریب مجاز معروف است. در این تقریب، تنها عامل وابسته به انرژی الکترون

یا نوترینو از چگالی حالت‌ها ناشی می‌شود [۲]. آهنگ واپاشی جزئی با الکترون‌ها و نوترینوهای با

تکانه‌ی مورد نظر عبارت است از

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 dp q^2}{h^6} \frac{dq}{dE_f} \quad (27-2)$$

که در آن $M_{fi} = \int \psi_f^* O_x \psi_i dv$ عنصر ماتریس هسته‌ای است. انرژی نهایی E_f فقط برابر

$$\frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c} \text{ ثابت داریم } E_e + E_v = E_e + qc$$

اگر Q انرژی واپاشی باشد، با چشم‌پوشی از انرژی ناچیز پس‌زنی هسته، داریم

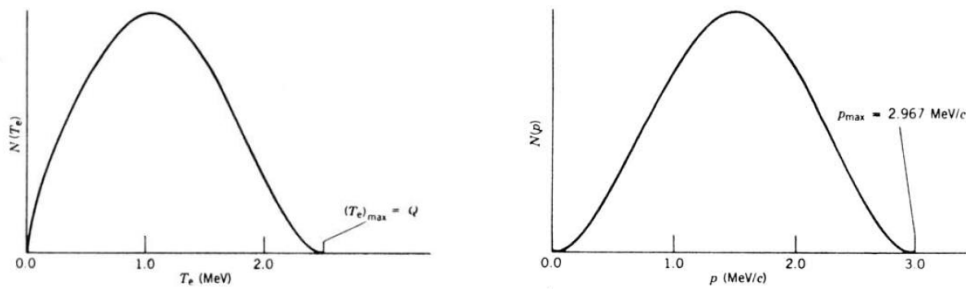
$$q = \frac{Q - T_e}{c} = \frac{Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2}{c} \quad (28-2)$$

و شکل طیف به صورت زیر به دست می‌آید.

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 \quad (29-2)$$

$$= \frac{C}{c^2} p^2 [Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2]^2 \quad (30-2)$$

این تابع در $p=0$ و نیز در نقطه‌ی پایانی $T_e = Q$ به صفر میل می‌کند، که چگونگی آن در شکل (۱-۲) نشان داده شده‌است.



شکل ۱-۲: توزیع مورد انتظار انرژی و تکانه الکترون که به ازای $Q = 2/5 \text{ MeV}$ رسم شده اند [۲].

بدین سان طیف کامل β شامل سه عامل زیر است:

۱- عامل آماری $p^2(Q - T_e)^2$ ، که از تعداد حالت‌های نهایی قابل حصول برای ذرات گسیل شده به دست می‌آید.

۲- تابع فرمی $F(Z', p)$ ، که به تاثیر میدان کولنی هسته مربوط می‌شود.

۳- جزء ماتریس هسته‌ای $|M_{fi}|^2$ ، که اثرات مربوط به حالت‌های اولیه و نهایی هسته را منظور می‌کند، و ممکن است یک وابستگی اضافی تکانه‌ی الکترون و نوترینو را به هم به صورت $S(p, q)$ از جملات ممنوع وارد کند.

$$N(p) \propto p^2 (Q - T_e)^2 F(Z', p) |M_{fi}|^2 S(p, q) \quad (31-2)$$

۲-۱۰- آهنگ واپاشی کل

برای پیدا کردن آهنگ واپاشی کل باید از معادله‌ی (۲-۲۲) برای تمام مقادیر تکانه‌ی الکترون p ، و با قرار دادن تکانه‌ی نوترینو مساوی مقداری که از معادله (۲-۲۴) به دست می‌آید و تابع p است، انتگرال بگیریم. بنابراین برای واپاشی‌های مجاز داریم [۲، ۱۴، ۱۵].

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \quad (۲-۳۲)$$

$$f(Z', E_0) = \frac{1}{(m_e c)^3 (m_e c^2)} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (۲-۳۳)$$

که در آن مقادیر ثابت برای بی بعد کردن f در نظر گرفته شده‌اند. تابع $f(Z', E_0)$ را انتگرال فرمی می‌نامند، که برای مقادیر مختلف Z' و E_0 در جداول یافت می‌شود. مقدار تجربی انتگرال فرمی از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۶].

$$\log f_{\beta^-} = 4 \log(E_\beta / \text{MeV}) - 0.005(Z-1) \log(E_\beta / \text{MeV}) + 0.02Z + 0.78 \quad (۲-۳۴)$$

$$\text{با توجه به } \lambda = \frac{0.693}{t_{1/2}} \text{، داریم}$$

$$ft_{1/2} = 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2} \quad (۲-۳۵)$$

که معادله‌ی بالا را، نیمه‌عمر طبیعی یا مقدار ft می‌نامند. این کمیت، روشی برای مقایسه‌ی احتمالات واپاشی بتا در هسته‌های مختلف در اختیار می‌گذارد. تفاوت مقادیر مختلف ft را باید به علت تفاوت عنصر ماتریس هسته‌ها و در نتیجه به علت تفاوت‌های موجود در تابع موج هسته‌ها دانست. گستره‌ی نیمه‌عمرهای واپاشی بتا مانند واپاشی آلفا بسیار وسیع است، به طوری که مقادیر ft از حدود 10^3 تا 10^{20} ثانیه تغییر می‌کنند. به این دلیل، غالباً مقادیر $\log_{10} ft$ داده می‌شوند ($t_{1/2}$)

برحسب ثانیه در نظر گرفته می‌شود). واپاشی‌های با کوتاه‌ترین نیمه‌عمر تطبیقی ۳-۴ log ft را واپاشی‌های ابرمجاز می‌نامند. بعضی از واپاشی‌های ابرمجاز دارای حالت‌های اولیه و نهایی 0^+ هستند که در این صورت جزء ماتریس را می‌توان به سهولت محاسبه کرد ($M_{fi} = \sqrt{2}$). همه‌ی مقادیر log ft برای واپاشی‌های $0^+ \rightarrow 0^+$ باید یکسان باشند. با قرار دادن $M_{fi} = \sqrt{2}$ و با استفاده از معادله‌ی (۲-۳۵) می‌توان مقدار ثابت شدت واپاشی بتا را به دست آورد.

$$g = 0.88 \times 10^{-4} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3 \quad (۲-۳۶)$$

اگر برهمکنش نوکلئون-نوکلئون مورد نظر باشد، استفاده از جرم نوکلئون مناسب است که در این صورت ثابت شدت برابر $G = 1.0 \times 10^{-5}$ به دست می‌آید.

۲-۱۱- قواعد گزینش تکانه‌ی زاویه‌ای و پاریته

استفاده از مدل لایه‌ای هسته‌ای منجر به درک تقریباً کامل از ویژگی‌های مجاز و ممنوع واپاشی بتا می‌شود [۱۷، ۱۸].

واپاشی مجاز

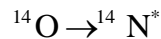
در تقریب مجاز، به جای تابع موج‌های الکترون و نوترینو از مقادیر این تابع‌ها در مبدا استفاده شده‌است. یعنی فرض کرده‌ایم که الکترون و نوترینو در $r = 0$ بوجود می‌آیند. در این حالت، این ذرات نمی‌توانند هیچگونه تکانه‌ی زاویه‌ای مداری با خود حمل کنند، و تنها تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای هسته باید از اسپین‌های الکترون و نوترینو ناشی شود که مقدار هریک از آنها برابر $s = 1/2$ است. این دو اسپین می‌توانند باهم موازی (با مقدار کل $S = 1$) یا پادموازی (با مقدار کل $S = 0$) باشند. اگر اسپین‌ها پادموازی باشند به واپاشی فرمی (F) معروف است، در تقریب مجاز ($l = 0$) تغییری در اسپین هسته صورت نمی‌گیرد $\Delta I = 0$. اگر اسپین‌های الکترون و نوترینو موازی باشند واپاشی گاموف-تلر (G-T) نامیده می‌شود. اگر الکترون و نوترینو حامل تکانه‌ی زاویه‌ای مداری نباشند، پاریته‌ی حالت‌های اولیه و

نهایی باید یکسان باشد زیرا پاریتتهی مربوط به تکانهی زاویه‌ای مداری 1 به صورت $l(-1)^l$ است.

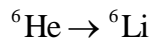
بنابراین قواعد گزینش برای واپاشی‌های بتای مجاز به صورت زیر است:

$$\Delta I = 0, 1 \quad \Delta \pi = \text{نه} \quad (\text{تغییر پاریتته})$$

نمونه ای از واپاشی بتای مجاز



این واپاشی $0^+ \rightarrow 0^+$ به حالت برانگیختهی $^{14}\text{N}^*$ باید صددرصد از نوع فرمی باشد.



این واپاشی $0^+ \rightarrow 1^+$ است که باید صددرصد یک گذار گاموف-تلر باشد.



در این مورد داریم $\Delta I = 0 \{ (1/2)^+ \rightarrow (1/2)^+ \}$ ، و بنابراین قواعد گزینش فرمی (F) و گاموف-تلر

(G-T) هر دو صادق‌اند. این یک نمونه از گذار «مخلوط» $F + GT$ است، که در آن سهم دقیق F و

G-T با توجه به تابع موج‌های اولیه و نهایی تعیین می‌شود.

واپاشی‌های ممنوع

«ممنوع» نامیدن واپاشی‌ها یعنی احتمال این واپاشی‌ها معمولاً کمتر از واپاشی‌های مجاز است،

ولی اگر اجزای ماتریس مجاز صفر شوند، واپاشی‌های ممنوع تنها واپاشی‌های ممکن خواهند بود.

محتمل‌ترین واپاشی ممنوع هنگامی رخ می‌دهد که حالت‌های اولیه و نهایی پاریتته‌های مخالف داشته

باشند، و بنابراین قاعدهی گزینش واپاشی مجاز نقض خواهد شد. برای تغییر پاریتته، الکترون و نوترینو

باید با تکانهی زاویه‌ای مداری فرد نسبت به هسته گسیل شوند.

واپاشی‌های ممنوع اول مانند واپاشی‌های مجاز دارای نوع فرمی، با اسپین‌های الکترون و نوترینو پادموازی ($S=0$)، و نوع گاموف-تلر با اسپین‌های موازی ($S=1$) هستند. با توجه به جفت‌شدگی $S=0$ با $S=1$ برای واپاشی‌های فرمی، کل تکانه‌ی زاویه‌ای انتقال یافته در واپاشی بتا برابر یک واحد می‌شود، به طوری که $\Delta I=0$ یا $\Delta I=1$. در جفت‌شدگی $S=1$ با $I=1$ برای واپاشی‌های گاموف-تلر، کل مقدار تکانه‌ی زاویه‌ای انتقال یافته برابر 0 ، 1 ، یا 2 واحد می‌شود، به طوری که $\Delta I=0, 1, 2$. بنابراین قاعده‌ی گزینش برای واپاشی‌های ممنوع اول به صورت زیر است

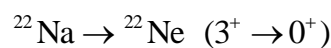
$$\Delta I = 0, 1, 2 \quad \Delta \pi = \text{آری}$$

این واپاشی‌ها را، واپاشی ممنوع دوم می‌نامند وقتی $S=0$ یا $S=1$ را با $I=2$ جفت کنیم، می‌توانیم اسپین هسته را به هر مقدار از $\Delta I=0$ تا $\Delta I=3$ تغییر دهیم.

قواعد گزینش برای واپاشی‌های ممنوع دوم به صورت زیر است.

$$\Delta I = 2, 3 \quad \Delta \pi = \text{نه}$$

نمونه‌ای از واپاشی ممنوع دوم



با ادامه‌ی این فرآیند، به واپاشی‌های ممنوع سوم ($I=3$) می‌رسیم که قواعد گزینش آن به صورت

زیر است

$$\Delta I = 3, 4 \quad \Delta \pi = \text{آری}$$

در شرایط بسیار استثنایی، حتی واپاشی‌های ممنوع چهارم ($I=4$) نیز می‌تواند رخ دهد که قاعده‌ی

گزینش آن به صورت زیر است

$$\Delta I = 4, 5 \quad \Delta \pi = \text{آری}$$

هرچه مرتبه‌ی ممنوعیت بالاتر باشد، احتمال واپاشی کمتر می‌شود، هسته در صورت امکان ترجیح می‌دهد که از طریق فرآیند مجاز یا ممنوع اول واپاشیده شود، و مراتب بالاتر معمولاً به قدری ضعیف‌اند که مشاهده نمی‌شوند. فقط در صورتی که هیچ مد واپاشی دیگری امکان‌پذیر نباشد، موارد بسیار نادر ممنوع سوم و چهارم را می‌توان مشاهده کرد. هرگونه تغییر پارامتری بین حالت‌های هسته‌ای اولیه و نهایی با توجه به پارامتری وابسته به تکانه‌ی زاویه‌ای مداری مشخص می‌شود. گذارهای ممنوع مرتبه‌های بالاتر را به همین ترتیب می‌توان حل کرد، که قواعد گزینش مربوط به آن‌ها تا مرتبه چهارم ممنوعیت در جدول (۲-۳) نشان داده شده‌است. بعضی از گذارها باید از نوع منفرد باشند. برای مثال واپاشی بین دو حالت اسپین صفر با پارامتری یکسان باید از نوع گذار فرمی باشد. همچنین اگر $\Delta I = L + 1$ باشد، واپاشی به طور خالص باید از نوع گاموف-تدر باشد. در غیر این صورت با گذارهای آمیخته سروکار خواهیم داشت.

جدول ۲-۳: قواعدهای گزینش واپاشی بتا. گذارهایی که با صفر بودن I_f یا I_i ناممکن‌اند، در پرانتز نشان داده شده‌اند؛ $\Delta\pi$ حاکی از تفاوت پارامتری‌های حالت‌های اولیه و نهایی است [۱۳].

گاموف-تدر		فرمی		L	نوع گذار
$\Delta\pi$	ΔI	$\Delta\pi$	ΔI		
خیر	۱، (۰)	خیر	۰	۰	مجاز
آری	۲، ۱، ۰	آری	۱، (۰)	۱	ممنوع یکم
خیر	۳، ۲	خیر	۲، (۱)	۲	ممنوع دوم
آری	۴، ۳	آری	۳، (۲)	۳	ممنوع سوم
خیر	۵، ۴	خیر	۴، (۳)	۴	ممنوع چهارم

۲-۱۲- مقایسه آهنگ واپاشی‌های بتا

با اندازه‌گیری شمار زیادی از موارد واپاشی بتا که حالت‌های اسپین و پاریته شناخته شده دارند، می‌توان گذارهایشان را طبق گزینش دسته‌بندی کرد. نتایج این دسته‌بندی در جدول (۲-۴) نشان داده شده‌است.

جدول ۲-۴: مقادیر تقریبی $\log ft_{1/2}$ برای انواع مختلف گذار بتا [۱۳].

نوع گذار	$\log ft_{1/2}$
ابر مجاز	۳/۵
مجاز	$۵/۵ \pm ۱/۵$
ممنوع یکم	$۷/۵ \pm ۱/۵$
ممنوع دوم	۱۲
ممنوع سوم	۱۶
ممنوع چهارم	۲۱

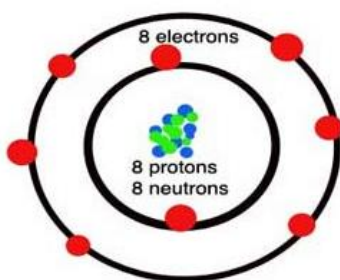
۲-۱۳- اکسیژن

۲-۱۳-۱- پیشینه

اگر چه اکسیژن، پیرامون ما را فرا گرفته است اما تا ۲۰۰ سال پیش هنوز هیچ‌کس آن را به درستی نمی‌شناخت. اکسیژن اولین بار در سال ۱۷۷۳ میلادی توسط دانشمندی سوئدی به نام "ویلهم شیله"^۱ کشف شد. او اکسیژن را "هوای آتشین" نامید زیرا مواد به خوبی در آن می‌سوختند. کتاب او درباره‌ی این کشف تا سال ۱۷۷۷ منتشر نشد. در همان زمان در

1 W. Scheele

انگلستان، "جوزف پریستلی"^۱ بدون آگاهی از کشف شیله، اکسیژن را کشف کرد. او در سال ۱۷۷۵ میلادی گزارش کشف خود را در نشست عمومی فرهنگستان علوم سلطنتی انگلستان ارائه داد. به همین دلیل است که کشف اکسیژن را به پریستلی نسبت می‌دهند. پریستلی، دانشمند مشهور فرانسوی "آنتونی لوازیه"^۲ را در پاریس ملاقات کرد و از کشف خود با او سخن گفت. لوازیه در سال ۱۷۸۷ این گاز را "اکسیژن" نامید.



شکل ۲-۲: اکسیژن ۱۶

۲-۱۳-۲- ایزوتوپ‌ها

اکسیژن طبیعی دارای هفده ایزوتوپ می‌باشد که مخلوطی از سه ایزوتوپ پایدار و چهارده ایزوتوپ پرتوزا می‌باشد. همه‌ی ایزوتوپ‌های پرتوزا، نیمه عمری کمتر از سه دقیقه دارند. بیشترین نیمه عمر را ^{15}O (۱۲۴ ثانیه) دارد که در بررسی تنفس پستانداران استفاده می‌شود.

1 J. Priestley
2 A. L. Lavoisier

جدول ۲-۵: خواص تجربی ایزوتوپ‌های اکسیژن [۱۹-۲۱].

T	M (u)	E(MeV)	J^π	مد واپاشی	$t_{\frac{1}{2}}$ (s)	${}^A_Z X_N$
(۲)	۱۲/۰.۳۴۴۰۵(۲۰)	۵۸/۵۵۰	(۰) ⁺	۲p	$۵۸ \cdot (۳۰) \times ۱۰^{-۲۴}$	${}^{12}_8\text{O}$
$(\frac{3}{2})^-$	۱۳/۰.۲۴۸۱۲(۱۰)	۷۵/۵۵۸	$(\frac{3}{2})^-$	P	۸/۵۸(۵) (ms)	${}^{13}_8\text{O}$
(۱)	۱۴/۰.۰۸۵۹۶	۹۸/۷۳۴	(۰) ⁺	β^+	۷۰/۵۹۸(۱۸) (s)	${}^{14}_8\text{O}$
$(\frac{1}{2})^-$	۱۵/۰.۰۳۰۶۵	۱۱۱/۹۵۸	$(\frac{1}{2})^-$	β^+	۱۲۲/۲۴(۱۶) (s)	${}^{15}_8\text{O}$
(۰)	۱۵/۹۹۴۹۱۵	۱۲۷/۶۲۱	(۰) ⁺	-	-	${}^{16}_8\text{O}$
$(\frac{1}{2})^-$	۱۶/۹۹۹۱۳۲	۱۳۱/۷۶۵	$(\frac{5}{2})^+$	-	-	${}^{17}_8\text{O}$
(۱)	۱۷/۹۹۹۱۶۲	۱۳۹/۸۰۸	(۰) ⁺	-	-	${}^{18}_8\text{O}$
$(\frac{3}{2})^-$	۱۹/۰.۰۳۵۸۰	۱۴۳/۷۶۴	$(\frac{5}{2})^+$	β^-	۲۶/۴۶۴(۹) (s)	${}^{19}_8\text{O}$
(۲)	۲۰/۰.۰۴۰۷۷	۱۵۱/۳۷۳	(۰) ⁺	β^-	۱۳/۵۱(۵) (s)	${}^{20}_8\text{O}$
$(\frac{5}{2})^-$	۲۱/۰.۰۸۶۵۶	۱۵۵/۱۷۹	$(\frac{5}{2})^+$	β^-	۳/۴۲(۱۰) (s)	${}^{21}_8\text{O}$
(۳)	۲۲/۰.۰۹۹۶۲	۱۶۲/۰۳۴	(۰) ⁺	β^-	۲/۲۵(۱۵) (s)	${}^{22}_8\text{O}$
$(\frac{7}{2})^-$	۲۳/۰.۱۵۶۸۴	۱۶۴/۷۷۵	$(\frac{1}{2})^+$	β^-	۸۲(۳۷) (ms)	${}^{23}_8\text{O}$

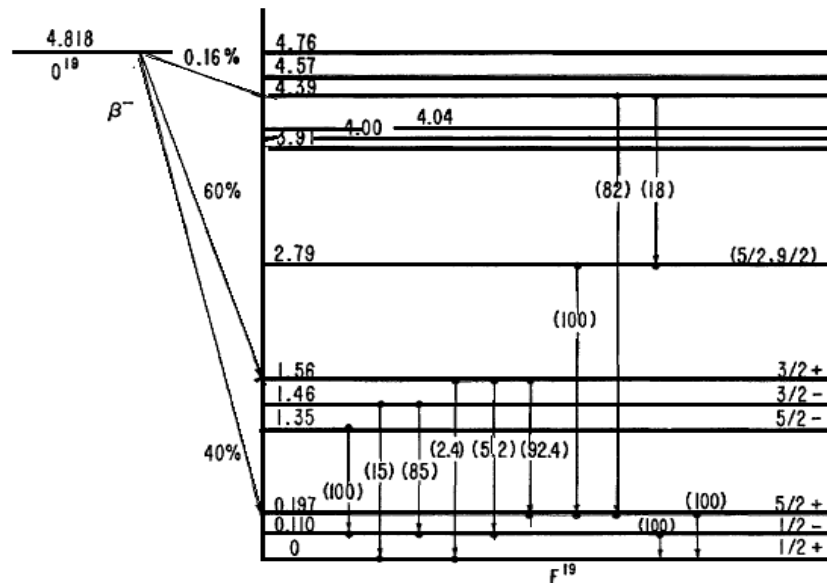
T	M (u)	E(MeV)	J^π	مد واپاشی	$t_{\frac{1}{2}}$ (s)	${}^A_Z X_N$
(۴)	۲۴/۰۲۰۴۷۲	۱۶۸/۳۸۷	$(0)^+$	β^-	۶۵(۵) (ms)	${}^{24}\text{O}$
$\left(\frac{9}{2}\right)^-$	۲۵/۰۲۹۴۱۵	۱۶۸/۱۲۸	$\left(\frac{3}{2}\right)^+$	β^-	۴۰ (ns)	${}^{25}\text{O}$
(۵)	۲۶/۰۳۸۳۲۶	۱۶۷/۹۰۰	$(0)^+$	β^+	۸/۵۸(۵) (ms)	${}^{26}\text{O}$
$\left(\frac{11}{2}\right)^-$	۲۷/۰۴۸۳۰۹	۱۶۶/۶۷۱	$(-)^+$	β^+	۸/۵۸(۵) (ms)	${}^{27}\text{O}$
(۶)	۲۸/۰۵۷۸۶۴	۱۶۵/۸۴۳	$(0)^+$	β^+	۸/۵۸(۵) (ms)	${}^{28}\text{O}$

۱۴-۲ - طیف واپاشی اکسیژن ۱۹

اولین مطالعات دقیق از واپاشی بتا از ${}^{19}\text{O}$ توسط جونز وهمکارانش انجام شد [۲۲،۲۳]. زمانی که برای اولین بار از محاسبات مدل ذره مستقل [۲۴،۲۵] از پوسته 2s,1d استفاده شده بود. مطالعات تجربی نشان داده است که عمده شدت واپاشی بتا ۶۲٪ به تراز با انرژی ۱/۵۶ MeV و شاخه قوی دیگر با شدت ۳۸٪ به تراز با انرژی ۰/۱۹۷ MeV است. که در کارهای بعدی برای قوی ترین شدت برای این شاخه ها به ترتیب مقادیر ۵۸٪ و ۴۱٪ را اتخاذ کرده اند. اسپین و پاریتته برای ترازهایی با انرژی ۱۹F در ۱/۵۶ MeV و ۰/۱۹۷ MeV به ترتیب برابر $(5/2)^+$ و $(3/2)^+$ (در حالی که اسپین و پاریتته تراز پایه ${}^{19}\text{F}$ برابر $(1/2)^+$ است.) و برای تراز پایه در ${}^{19}\text{O}$ $(5/2)^+$ است. محاسبات مدل تک ذره ای از آنجایی که برحسب (2s,1d) هستند فقط شامل ترازهایی با پاریتته زوج می باشند که با تراز حالت پایه و

ترازهایی با انرژی 0.197 MeV و $1/56 \text{ MeV}$ در ^{19}F و تراز پایه ^{19}O مطابقت خوبی دارد. مقدار واپاشی بتا برای دو تراز یاد شده در توافق کاملا نزدیک با آزمایش است. نکته جالب، توافق بین تئوری و آزمایش مربوط به واپاشی تراز با انرژی $1/56 \text{ MeV}$ با اسپین و پاریته $(3/2)^+$ در ^{19}F است. همچنین شدت 0.16% برای تراز با انرژی $4/39 \text{ MeV}$ در ^{19}F دارای $\log ft = 3/54$ می باشد. این تراز از طریق واپاشی گاما با شدت 18% به تراز $2/79 \text{ MeV}$ و با شدت 82% به تراز 0.197 MeV انرژی از دست می دهد. شدت ترازهای دیگر که انرژی آن ها زیر $2/79 \text{ MeV}$ است کمتر از 5% است. این داده ها برای ترازهایی با اسپین و پاریته $(3/2)^+$ و $(5/2)^+$ و $(7/2)^+$ با انرژی $4/39 \text{ MeV}$ با فرض اینکه اسپین و پاریته حالت پایه ^{19}O $(5/2)^+$ باشد، بوجود می آیند. واپاشی بتا در تراز با انرژی $2/79 \text{ MeV}$ در ^{19}F دارای $\log ft$ بزرگتر از $7/4$ است. واپاشی ^{19}O به منظور بررسی برای گذار به ترازهای خیلی برانگیخته ^{19}F توسط مدل ذره مستقل مورد بررسی قرار گرفته است و پیش بینی شده که دارای عناصر ماتریسی بزرگ باشد. در این کار ^{19}O مورد آزمایش از برهمکنش ^{18}O و دوترون و تکنیک های تجربی، منحصر از طیفسنجی NaI شامل آنالیز دو بعدی بوجود می آید [۲۶].

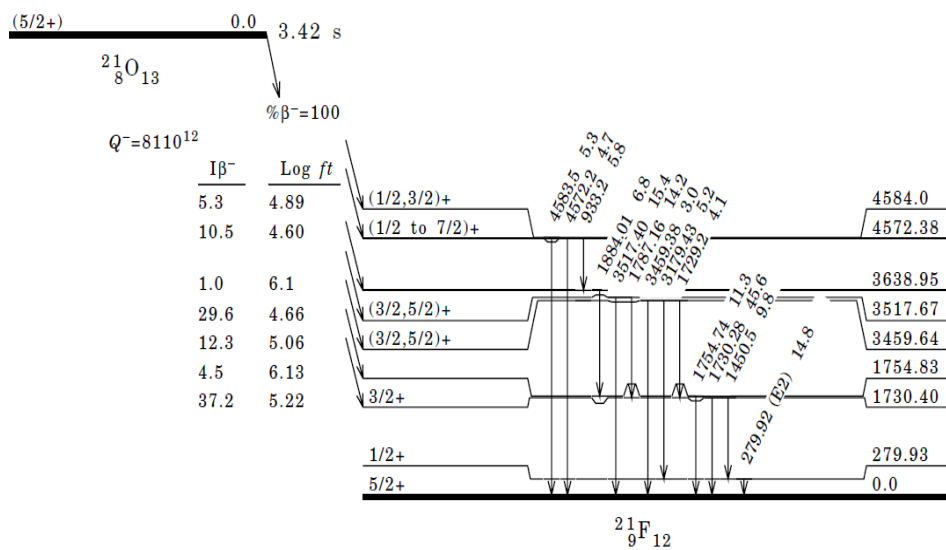
شکل (۲-۵) طیف واپاشی بتا در ^{19}O را نشان می دهد.



شکل ۲-۳: نمودار سطوح ^{19}F ، ترازهای شناخته شده که از واپاشی بتای ^{19}O بدست آمده است [۲۶].

۲-۱۵- طیف واپاشی اکسیژن ۲۱

رادیوایزوتوپ ^{21}O از واکنش $^9\text{Be}(\text{O}, 2p\alpha)^{21}\text{O}$ تولید می‌شود. اسپین و پاریته ^{21}O در حالت پایه برابر $^{+}(5/2)$ است [۲۷]. شکل (۲-۶) طرح واپاشی بتا در ^{21}O را نشان می‌دهد که شدت واپاشی و مقادیر $\log ft$ در آن نشان داده شده‌است.



شکل ۲-۴: نمودار سطوح ^{21}F ، ترازهای شناخته شده که از واپاشی بتای ^{21}O بدست آمده است [۲۸].

فصل سوم

روش تحلیلی ابرتقارن

۳-۱ نگاهی اجمالی به روش ابرتقارنی:

مکانیک کوانتومی ابرمتقارن که ارتباط تنگاتنگی با نظریه میدان ابر متقارن دارد عبارتست از مطالعه سیستم‌های مکانیک کوانتومی که هامیلتونی H آنها از بارهای پادجا به جاپذیر، که جذر H می‌باشند ساخته شده‌است. این نوع هامیلتونی شامل مختصاتی است که توسط جابه‌جاگرها و پادجا به جاگرها کوانتیده می‌شوند. این مختصات توسط تبدیلات ابر تقارن با یکدیگر مخلوط می‌شوند. برای یک ذره با اسپین، مکان و جهت اسپین یک زوج از چنین مختصاتی را تشکیل می‌دهند [۲۹].

فرض کنید پتانسیل $V_-(x)$ را داریم که تابع موج حالت پایه آن به صورت شناخته شده زیر است:

$$\psi_0^{(-)} = \Psi_0(x) \quad (1-3)$$

و انرژی حالت پایه آن $E_0^{(-)} = 0$ می‌باشد. با فرض $\hbar = 2M = 1$ معادله شرودینگر برای حالت پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$H_- \psi_0^{(-)} = E_0^{(-)} \psi_0^{(-)} \quad (2-3)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \right) \psi_0(x) = 0 \quad (3-3)$$

از این رابطه بدست می‌آوریم:

$$V_-(x) = \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \quad (4-3)$$

ابر پتانسیل $w(x)$ با $\psi_0(x)$ به وسیله رابطه زیر مربوط می‌شود:

$$w(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad ; \quad \psi_0(x) = N \exp \left\{ -\int w(x) dx \right\} \quad (5-3)$$

عملگرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A^+ = -\frac{d}{dx} + w(x) \quad (6-3)$$

$$A^- = \frac{d}{dx} + w(x)$$

در آن صورت نتیجه می شود که:

$$H^0 \equiv H_- \equiv A^+ A^- = -\frac{d^2}{dx^2} + w^2(x) - w'(x) \quad (7-3)$$

$$H^1 \equiv H_+ \equiv A^- A^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + w^2(x) + w'(x) \quad (8-3)$$

از این روابط برای پتانسیل های همسان ابرتقارنی $V_{\pm}(x)$ بدست می آوریم:

$$V_{\pm}(x) = w^2 \pm w'(x) \quad (9-3)$$

اگر $\Psi_n^{(+)}$ و $\Psi_n^{(-)}$ به ترتیب ویژه توابع هامیلتونی های H_+ و H_- با ویژه مقادیر $E_n^{(-)}$ و $E_n^{(+)}$ باشند می توان نشان داد که:

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}$$

$$\Psi_{n+1}^{(-)} = \left(E_n^{(+)}\right)^{\frac{1}{2}} A^+ \Psi_n^{(+)} \quad (10-3)$$

$$\Psi_n^{(+)} = \left(E_{n+1}^{(-)}\right)^{\frac{1}{2}} A^- \Psi_{n+1}^{(-)}$$

ضرایب عبور و بازتاب (یا انتقال فاز) دو پتانسیل نیز مرتبط هستند و این به آن معنا است که یک ابرتقارنی در مسئله وجود دارد [۳۰]. به صورت خاص ابربارهای Q و Q^+ را که به صورت زیر تعریف می شوند، در نظر بگیرید:

$$Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{bmatrix} \quad (11-3)$$

در این صورت هامیلتونی H نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \begin{bmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} H^0 & 0 \\ 0 & H^1 \end{bmatrix} \quad (12-3)$$

که روابط فوق، روابط جبری زیر را ارضا می کنند :

$$\begin{aligned} Q^2 &= Q^{+2} = 0 \\ QQ^+ + Q^+Q &= H \\ [H, Q] &= [H, Q^+] = 0 \end{aligned} \quad (13-3)$$

در اینجا تاکید می کنیم که ابرتقارنی تنها رابطه بین ویژه مقادیر و ویژه توابع دو هامیلتونی را می دهد و طیف واقعی را نمی دهد. برای آن منظور به شرایط اضافی انتگرال پذیری نیاز داریم که شرایط نوردایی شکل نامیده می شود و توسط گلدشتاین معرفی شده است [31].

به عبارتی اگر جفت پتانسیل های همسان ابرتقارنی $V_{\pm}(x)$ معرفی شده، در شکل یکسان بوده و تنها در پارامترهای ظاهر شده در آن ها متفاوت باشند، به آن ها ناوردا شکل گفته می شود. به صورت دقیق تر اگر $V_{\pm}(x; a_0)$ در رابطه زیر صدق کنند:

$$V_{\pm}(x; a_0) = V_{\pm}(x; a_1) + R(a_1) \quad (14-3)$$

به طوری که a_0 یک سری از پارامترهاست و a_1 تابعی اختیاری از a_0 است، یعنی $a_1 = f(a_0)$ و $R(a_1)$ تابعی مستقل از x است، در این صورت گفته می شود که $V_{\pm}(x; a_0)$ ناوردا شکل می باشند. در این صورت طیف ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی H_- به وسیله رابطه زیر داده می شود [32]:

$$E_n^{(-)}(a_0) = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad ; \quad E_0^{(-)}(a_0) = 0 \quad (15-3)$$

که در آن $(a_k) = f^k(a_0)$ یعنی تابع f ، k بار به کار برده می شود.

ویژه توابع $\Psi_n^{(-)}$ هامیلتونی H_- به روش جبری زیر نیز قابل نوشتن هستند:

$$\psi_n^{(-)}(x; a_0) = A^+(x; a_0)A^+(x, a_1)\dots A^+(x, a_{n-1})\psi_0^{(-)}(x; a_n) \quad (16-3)$$

رابطه‌ی فوق را که به صورت واضح تعمیم یافته روش عملگری پتانسیل نوسانگر هماهنگ مشهور است، دانشمندی به نام Dutt نشان داد [۳۳]. بعداً نیز Dabrowska و دیگران به صورت جبری بیان صریحی برای $\psi_n^{(-)}$ برای همه SIP‌های شناخته شده توسط رابطه (۱۶-۳) بدست آوردند [۳۴، ۳۵].

فصل چهارم

محاسبه انرژی،

شعاع باری، $\log ft$

۴-۱- مقدمه

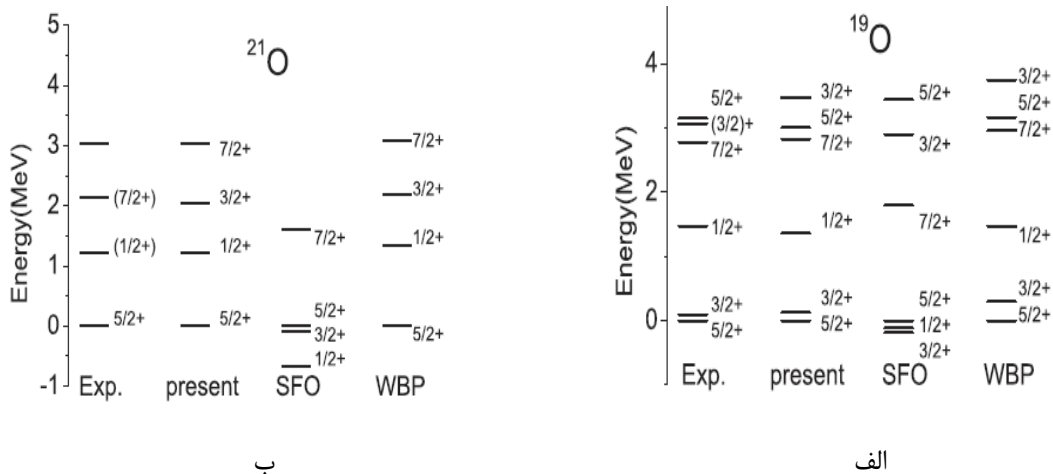
رفتار و حرکت الکترون در اتم یا نوکلئون‌ها در هسته مثالی از مسئله چندجسمی است. در این سیستم‌ها هر ذره با همه‌ی ذرات دیگر برهمکنش می‌کند. اگر ما، نیرویی که بین همه ذرات عمل می‌کند را بدانیم، می‌توانیم معادله شرودینگر را برای حرکت آن‌ها بنویسیم. با این حال اگر بیش از دو ذره وجود داشته باشد به طور کلی هیچ روش تحلیلی برای حل این معادله وجود ندارد. حتی در مکانیک کلاسیک نیز هیچ راه‌حل کلی برای مسئله سه جسمی در حال حرکت تحت تاثیر نیروی گرانشی متقابل وجود ندارد [۳۶]. از لحاظ ریاضی در حل مسئله چندجسمی دشواری‌هایی وجود دارد. همچنین نیروی هسته‌ای دارای پیچیدگی‌های خاص خود می‌باشد. به عنوان نمونه برهمکنش نوکلئون‌ها نه تنها از طریق نیروهای متقابل دوجسمی، بلکه از طریق نیروهای سه‌جسمی نیز صورت می‌گیرد. بخاطر پیچیدگی‌های اشاره شده ما نیازمند به ساختن مدل‌هایی هستیم تا با استفاده از آن بتوانیم تعدادی از خواص هسته را به صورت موفق توصیف کنیم [۳۷، ۳۸].

براساس مدل لایه‌ای، هسته‌های ^{19}O و ^{21}O به تراز $1\text{d}_{5/2}$ ختم می‌شوند. با در نظر گرفتن ^{16}O به عنوان یک هسته مرکزی، نوکلئون‌های خارج پوسته بسته را می‌توان یک سیستم سه ذره‌ای و پنج ذره‌ای در نظر گرفت. از آنجایی که نوکلئون‌های تراز آخر در طیف انرژی تاثیرگذار می‌باشند، ما در این بخش با استفاده از مدل لایه‌ای و در نظر گرفتن پتانسیل گوسی برای برهمکنش بین نوکلئون‌ها به محاسبه ترازهای انرژی این دو ایزوتوپ با استفاده از روش تحلیلی ابرتقارن پرداخته‌ایم.

۴-۲- محاسبه انرژی حالت پایه اکسیژن ۱۹ و ۲۱ با پتانسیل گوسی

ویژگی استاتیکی، یکی از ویژگی‌های مهم هسته‌ها می‌باشد. از جمله ویژگی‌های استاتیکی می‌توان به اسپین، پاریتته، طیف انرژی و... اشاره کرد. براساس مدل لایه‌ای، خواص هسته‌ها را نوکلئون‌های خارج پوسته‌ی بسته تعیین می‌کنند. طیف انرژی ^{19}O و ^{21}O مطابق شکل (۴-۱) می‌باشد. از

آنجایی که آخرین تراز نوکلئونی این دو ایزوتوپ به $1d_{5/2}$ ختم می‌شود، دارای اسپین و پاریته‌ی یکسانی هستند، اما طیف انرژی آن‌ها متفاوت می‌باشد. این اختلاف انرژی را می‌توانیم بر اساس مدل لایه‌ای به برهمکنش‌های بین نوکلئون‌های آن نسبت دهیم. بر اساس این مدل، $^{16}\text{O}_8$ را با دو عدد جادویی ۸-۸ به عنوان هسته‌ی مرکزی فرض کرده‌ایم.



شکل ۴-۱: الف) طیف انرژی ^{19}O (ب) طیف انرژی ^{21}O [۳۹].

Q. Zhi و همکارانش با در نظر گرفتن مدل میکروسکوپی-ماکروسکوپی توانستند انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های اکسیژن را محاسبه کنند [۴۰]. در این کار، ما معادله شرودینگر در D بعد را برای نوکلئون‌های ظرفیت حل کرده‌ایم. نوکلئون‌های درون هسته‌ی این دو ایزوتوپ را همانند سیستم سه و پنج ذره‌ای فرض کرده، و استفاده از مختصات ژاکوبی [۴۱، ۴۲، ۴۳] به محاسبه ترازهای انرژی و تابع موج می‌پردازیم. یکی از پتانسیل‌های مناسب در این زمینه، پتانسیل گوسی می‌باشد [۴۴، ۴۵]. علاوه بر برهمکنش‌های بین دونوکلئون ($\langle V_{2N} \rangle$) برهمکنش‌های دیگری نیز برای سیستم‌های چندنوکلئونی وجود دارد ($\langle V_{3N} \rangle$) که نسبت به برهمکنش‌های دونوکلئونی کوچکتر می‌باشد، یعنی ما می‌توانیم با یک تقریب مناسب فقط برهمکنش‌های V_{2N} را در نظر بگیریم [۳۷]. اغلب روش‌های حل معادله شرودینگر بر اساس سیستم‌های دوجسمی می‌باشد، از آنجایی که هسته به صورت سیستم‌های چندجسمی (چندنوکلئونی) است پس نیاز به دستگاه مختصات جدیدی داریم تا برای سیستم‌های

چندجسمی نیز بتوانیم از این روش‌ها استفاده کنیم. می‌توان با استفاده از تبدیلات مختصات ژاکوبی که به صورت زیر بیان می‌شود برای سیستمی متشکل از N ذره با جرم یکسان معادله شرودینگر را حل کرد.

$$\bar{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}'_j - \bar{x}'_{i+1} \right), \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (1-4)$$

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}'_1 - \bar{x}'_2) \quad (2-4)$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 - 2\bar{x}'_3) \quad (3-4)$$

$$R = \frac{\bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 + \bar{x}'_3}{3} \quad (4-4)$$

در این صورت می‌توانیم فوق شعاع (که در آن x ابر شعاع می‌باشد) را به صورت زیر مشخص کنیم.

$$x = \sqrt{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2} \quad (5-4)$$

پتانسیل گوسی بر حسب فوق شعاع به شکل زیر می‌باشد:

$$V(x) = -V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \quad (6-4)$$

قسمت شعاعی معادله شرودینگر در فضای D -بعدی مطابق با رابطه زیر است [۴۶،۴۷،۴۸].

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+D-2)}{x^2} \right) + V(x) \right] R(x) = ER(x) \quad (7-4)$$

که $D=3N-3$ و N تعداد ذرات است [۴۹،۵۰]. برای یک سیستم پنج ذره‌ای $D=3 \times 5 - 3 = 12$

می‌باشد.

بنابراین برای ^{21}O با در نظر گرفتن نوترون‌های بیرون پوسته‌ی بسته به عنوان یک سیستم پنج

ذره‌ای معادله شرودینگر به صورت زیر می‌شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{11}{x} \frac{dR(x)}{dx} - \frac{1(1+10)}{x^2} R(x) \right] + V(x)R(x) = ER(x) \quad (8-4)$$

با توجه به تغییرمتغیر $U_{n1}(x) = x^{\frac{11}{2}} R_{n1}(x)$ داریم

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + (-E - V_0 e^{-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{\hbar^2(21+9)(21+11)}{8\mu x^2}) U(x) = 0 \quad (9-4)$$

با توجه به اینکه تعداد کمی از پتانسیل‌ها وجود دارند که برای آنها معادله‌ی شرودینگر دقیقاً قابل حل می‌باشد، و حل تحلیلی معادله‌ی شرودینگر در حضور پتانسیل گوسی بدون تقریب امکان پذیر نمی‌باشد. بنابراین برای حل اینگونه پتانسیل‌ها به تکنیک‌های دیگری متوسل می‌شویم. چندین روش، برای حل تحلیلی معادله شرودینگر استفاده شده‌است از جمله ابرتقارن، ^1NU ، وردشی، روش تکرار مجانب. روش ابرتقارن در حل معادلات در هر دو مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی موفق بوده است [۵۱-۵۷].

ابر پتانسیل پیشنهادی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$W(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(Cx + \frac{D}{x} \right) \quad (10-4)$$

با توجه به پتانسیل‌های همسان ابرتقارنی $V_+(x)$ و $V_-(x)$ داریم:

¹ Nikiforov-Uvarov

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(C^2 x^2 + \frac{D^2}{x^2} + 2CD \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(C - \frac{D}{x^2} \right) \quad (11-4)$$

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(C^2 x^2 + \frac{D^2}{x^2} + 2CD \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(C - \frac{D}{x^2} \right) \quad (12-4)$$

که در این روابط $D = 1 + \frac{11}{2}$ و $C = \pm \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}}$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (3-14) می‌توان

$R(a_1)$ را بدست آورد.

$$R(a_1) = R(1) = -4 \frac{\hbar^2}{2\mu} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \quad (13-4)$$

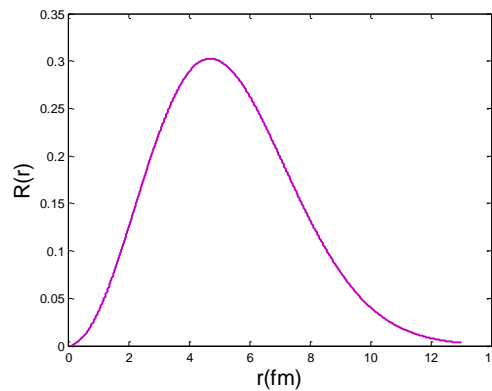
با توجه به معادله (3-15) در روش ابرتقارن، طیف ویژه مقادیر انرژی برای سیستم پنج ذره‌ای O^{21} با در نظر گرفتن تقریب مرتبه اول پتانسیل، که به ازای توان‌های بزرگ α می‌توان از مرتبه‌های بالاتر صرف نظر کرد، به صورت زیر بدست می‌آید.

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} (-4n + 2l + 12) - V_0 \quad (14-4)$$

و تابع موج آن مطابق با رابطه زیر می‌باشد.

$$R_{n,l}(x) = N \exp\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x^2\right) x^l \quad (15-4)$$

که در آن N ضریب بهنجارش است، و شکل آن به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۴-۲: تابع موج حالت پایه ^{21}O با پتانسیل گوسی

با توجه به رابطه (۱۶-۳) می‌توان تابع موج حالت‌های برانگیخته را بدست آورد. برای محاسبه تابع

موج اولین حالت برانگیخته داریم:

$$\psi_1^{(-)}(x; a_0) = A^+(x; a_0)\psi_0^{(-)}(x; a_1) \quad (16-4)$$

$$R_1(x, l) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} x^l N \exp\left(-\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \frac{x^2}{2}\right) \left[-2\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x + \frac{4l+11}{2x}\right] \quad (17-4)$$

برای ^{19}O نیز با در نظر گرفتن یک سیستم سه ذره‌ای برای نوکلئون‌های خارج پوسته‌ی بسته

معادله‌ی شرودینگر در D بعد با توجه به رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+D-2)}{x^2}\right) + V(x)\right] R(x) = ER(x) \quad (18-4)$$

برای یک سیستم سه ذره‌ای $D = 3N - 3 = 6$ داریم:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+4)}{x^2}\right) + V(x)\right] R(x) = ER(x) \quad (19-4)$$

که با قرار دادن پتانسیل گوسی مطابق با رابطه‌ی (۱۶-۴) در معادله شرودینگر به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + [-E + V_0 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2}] U(x) = 0 \quad (20-4)$$

از آنجایی که حل تحلیلی این معادله بدون تقریب امکان پذیر نیست. برای حل آن از روش ابرتقارن استفاده می کنیم. ابرتانسیل پیشنهادی به صورت زیر می باشد.

$$W(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(Cx + \frac{D}{x} \right) \quad (21-4)$$

که در آن $C = \pm \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}}$ و $D = 1 + \frac{5}{2}$ می باشد.

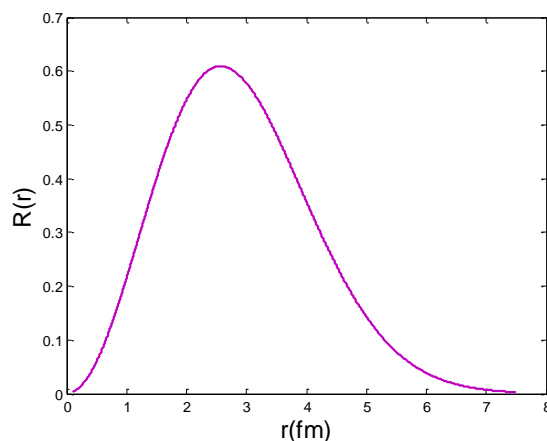
با تکرار محاسبات به همان شیوهی قبل، طیف انرژی به ازای تقریب مرتبه اول پتانسیل صورت زیر بدست می آید.

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} (-4n + 2l + 6) - V_0 \quad (22-4)$$

و تابع موج سیستم را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$R_{n,l}(x) = N \exp\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x^2\right) x^l \quad (23-4)$$

که شکل آن به صورت زیر می باشد.



شکل ۴-۳: تابع موج حالت پایه ^{19}O با پتانسیل گوسی

همچنین مطابق با رابطه (۴-۱۶) برای اولین حالت برانگیخته داریم:

$$R_1(x, l) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} x^1 N \exp\left(-\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \frac{x^2}{2}\right) \left[-2\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x + \frac{4l+5}{2x}\right] \quad (۴-۲۴)$$

۴-۳- شکافتگی انرژی در اثر برهمکنش اسپین-مدار

در چند دهه اخیر، پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون زیادی ارائه شده‌است. در فیزیک هسته‌ای برهمکنش اسپین-مدار از برهمکنش نوکلئون-نوکلئون ناشی می‌شود. ما از برهمکنش اسپین-مدار برای بدست آوردن شکافتگی انرژی تراز پایه، برای این دو ایزوتوپ استفاده کرده‌ایم [۵۸].

$$V_{s,l}(x) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{x} \frac{df}{dx} S.L \quad , \quad f(x) = -V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \quad (۴-۲۵)$$

که در آن L و S به ترتیب عملگر اندازه حرکت مداری و اسپینی هسته هستند.

$$\langle S.L \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (۴-۲۶)$$

که اختلاف انرژی در دو حالت $j=1+1/2$ و $j=1-1/2$ به صورت زیر است.

$$\langle S.L \rangle_{j=1+1/2} - \langle S.L \rangle_{j=1-1/2} = \frac{1}{2} (2l+1) \hbar^2 \quad (۴-۲۷)$$

و جابجایی انرژی مرتبه اول طبق رابطه زیر می باشد.

$$\Delta E_l = \int R^*(x) V_{s,l} R(x) x^{D-1} dx \quad (۴-۲۸)$$

شکافتگی اسپین-مدار هم در سیستم‌های نسبیتی و هم در سیستم‌های غیرنسبیتی به صورت گسترده بحث شده است [۵۹،۶۰]. بعد از اعمال اثر جفت‌شدگی اسپین-مدار بر پتانسیل مورد نظر تبهگنی از بین می‌رود. در جدول (۴-۱) به ازای بهترین مقادیر، انرژی حالت پایه را برای $^{19,21}\text{O}$ محاسبه

کردیم. همچنین نتایج شکافتگی انرژی حالت پایه را در اثر برهمکنش اسپین-مدار در ستون ۵ نشان داده‌ایم.

جدول ۴-۱: مقایسه نتایج تئوری و تجربی انرژی حالت پایه برای $^{19,21}\text{O}$ با پتانسیل گوسی

${}^A_Z\text{X}_N$	V_0 (MeV)	α (fm) ⁻²	E_{cal} (MeV)	E_{exp} (MeV) [۶۱]	$\Delta E = E_{\text{exp}} - E_{\text{cal}}$ (MeV)	E_{other} (MeV) [۴۰]	$E_{V(r)+S.L}$ (MeV)
^{19}O	۲۹	۱/۵	۱۴۲/۱۸		۱/۵۸		۱۴۲/۷۸
	۲۸	۱/۵	۱۳۹/۲۱	۱۴۳/۷۶	۴/۵۵	۱۴۶/۸۷	
	۵۴	۲	۱۴۰/۸۷		۲/۸۹		
	۹۰	۳	۱۳۹/۸۴		۳/۹۲		
^{21}O	۲۰	۲	۱۵۶/۶۵		۱/۴۸		۱۵۵/۰۴۳
	۳۵	۲/۵	۱۵۰/۶۹	۱۵۵/۱۷	۴/۴۸	۱۶۰/۲۱	
	۳۶	۲/۵	۱۵۳/۳۴		۱/۸۳		
	۳۶/۵	۲/۵	۱۵۴/۶۵		۰/۵۲		

۴-۴- محاسبه جذر میانگین شعاع باری^۱

با توجه به فرمول جذر میانگین شعاع باری که در فصل یک گفته شده‌است و با استفاده از تابع موج حالت پایه، می‌توان شعاع را محاسبه نمود که نتایج آن در جدول (۴-۲) ذکر شده است.

جدول ۴-۲: نتایج جذرمیانگین شعاع باری

${}^A_Z\text{X}_N$	$\langle r^2 \rangle_{\text{cal}}^{1/2}$ (fm)
^{19}O	۲/۷۸
^{21}O	۲/۸۴

^۱root mean square (rms) radius

شعاع باری تنها در دو تا از ایزوتوپ‌های اکسیژن (^{16}O و ^{18}O که به ترتیب برابر ۲/۶۹ و ۲/۷۲ فرمی) به صورت تجربی وجود دارد و برای دیگر ایزوتوپ‌های آن عددی مشاهده نشده است [۶۲].

۴-۵- محاسبه $\log ft_{1/2}$

نمودارهای واپاشی برای ^{19}O و ^{21}O در شکل‌های (۲-۵) و (۲-۶) نشان داده شده است. برای آنکه بخواهیم مقدار $\log ft_{1/2}$ را بدست بیاوریم، ابتدا باید عنصر ماتریس هسته‌ای (M_{fi}) که مطابق رابطه (۲-۲۷) می‌باشد، محاسبه نماییم. در محاسبه عنصر ماتریس هسته‌ای به تابع موج اولیه و نهایی نیازمندیم. ما در اینجا تابع موج را با استفاده از حل معادله شرودینگر و در نظر گرفتن پتانسیل گوسی بدست آورده‌ایم. با توجه به حل عددی M_{fi} می‌توان $ft_{1/2}$ را مطابق با فرمول (۲-۳۵) محاسبه کرد، که نتایج آن در جدول (۴-۳) درج شده است.

جدول ۴-۳: نتایج تئوری و تجربی $\log ft_{1/2}$ برای ^{19}O و ^{21}O

${}^A_Z X_{\text{mother}}$	S_I	${}^A_Z X_{\text{daughter}}$	S_F	$\log ft_{1/2}$		
				Exp[۲۸]	Other[۶۳]	Cal
${}^{19}_8\text{O}$	$(5/2)^+$	${}^{19}_9\text{F}$	$(5/2)^+$	۵ / ۴	۴ / ۴۸	۴ / ۸۶
	$(5/2)^+$	${}^{19}_9\text{F}$	$(3/2)^+$	۴ / ۵	۳ / ۹۷	۳ / ۹۶
${}^{21}_8\text{O}$	$(5/2)^+$	${}^{21}_9\text{F}$	$(3/2)^+$	۵ / ۲۲	—	۵ / ۰۱
	$(5/2)^+$	${}^{21}_9\text{F}$	$(3/2 \ 5/2)^+$	۴ / ۶۶	—	۴ / ۸۳

۴-۶- محاسبه انرژی اکسیژن ۱۹ با پتانسیل وود-ساکسون

در این قسمت انرژی حالت پایه اکسیژن ۱۹ را با پتانسیل وود-ساکسون مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با در نظر گرفتن اکسیژن ۱۶ به عنوان یک هسته مرکزی، نوکلئون‌های بیرون پوسته بسته،

همانند یک سیستم سه جسمی عمل می کنند. ما برای این سه نوکلئون معادله شرودینگر را با استفاده از روش تحلیلی ابرتقارن حل کرده ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم و همچنین اثر اسپین-مدار را هم برای این پتانسیل اعمال کرده ایم.

معادله شرودینگر برای یک سیستم سه ذره ای به صورت زیر می باشد.

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+4)}{x^2} \right) + V(x) \right] R(x) = ER(x) \quad (29-4)$$

پتانسیل وود-ساکسون را به صورت زیر تعریف می کنیم [۶۴].

$$V(x) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{x - R_0}{a}\right)} \quad (30-4)$$

معادله (۲۹-۴) را با این پتانسیل بازنویسی می کنیم.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L^2}{x^2} \right) R_{nl}(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{x - R_0}{a}\right)} \right) R_{nl}(x) = 0 \quad (31-4)$$

با معرفی تغییرمتغیر $U_{nl}(x) = x^{\frac{5}{2}} R_{nl}(x)$ داریم:

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{x - R_0}{a}\right)} - \frac{\hbar^2 (2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (32-4)$$

با تعریف پتانسیل موثر

$$V_{\text{eff}}(x) = V_{\text{WS}}(x) + V_1(x) \quad (33-4)$$

و استفاده از تغییر متغیرهای $x = R_0(x'+1)$, $\alpha = \frac{R_0}{a}$ قسمت شعاعی معادله شرودینگر به

صورت زیر بدست می آید.

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - V_{eff}) U_{nl}(x') = 0 \quad (34-4)$$

از آنجایی که این معادله به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشد به همین دلیل از تقریب پکرین استفاده می‌کنیم [۶۵،۶۶].

$$V_1(x') = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2} = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu R_0^2} \frac{1}{(1+x')^2} = \Omega(1-2x'+3x'^2-4x'^3+\dots) \quad (35-4)$$

$$V_1(x') = \Omega[(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4}) - \frac{\alpha}{4}(d_1 + d_2)x' + -\frac{\alpha^2}{16}d_2x'^2 + \frac{\alpha^2}{48}(d_1 + d_2)x'^3 - \dots] \quad (36-4)$$

معادله شرودینگر به صورت زیر می‌شود.

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} (\varepsilon + \frac{\beta}{1+e^{\alpha x'}} - \frac{\gamma}{(1+e^{\alpha x'})^2}) U_{nl}(x') = 0 \quad (37-4)$$

که در آن

$$\Omega = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu R_0^2}, \quad \gamma = \frac{2\mu\Omega d_2}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{2\mu(V_0 - \Omega d_1)}{\hbar^2}, \quad B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{2} \quad (38-4)$$

با بکارگیری روش ابرتقارن، ویژه مقادیر انرژی مطابق با رابطه زیر بدست می‌آید.

$$(39-4)$$

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - n\alpha)} - \frac{B - n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0$$

که نتایج انرژی محاسبه شده با پتانسیل وود-ساکسون در جدول (۴-۴) درج شده است.

همچنین برای بهبود بخشیدن به ویژه مقادیر انرژی بدست آمده، اثر اسپین-مدار را مطابق با رابطه

زیر منظور می‌کنیم.

$$V_{S.L}(x) = \frac{1}{2m^2c^2} (L.S) \frac{1}{x} \frac{df}{dx}, f(x) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{x - R_0}{a}\right)} \quad (4-40)$$

که نتایج آن در جدول (4-4) درج شده است.

جدول 4-4: مقایسه تجربی و تئوری انرژی حالت پایه ^{19}O

n	l	$E_{\text{exp}} (\text{MeV})$ [61]	$E_{\text{other}} (\text{MeV})$ [40]	$E_{\text{cal}} (\text{MeV})$	$E_{V(r)+S.L} (\text{MeV})$
1	2	143/76	146/87	145/17	145/72

4-7- معادله دیراک با تقارن اسپینی و شبه اسپینی در چارچوب مکانیک

کوانتومی ابر تقارن

مطالعات اثرات نسبیتی همواره در سیستم‌های کوانتومی مفید بوده است. برای بررسی و مطالعه ذرات نسبیتی در انرژی‌های بالا، از معادلات دیراک و کلاین-گوردون به ترتیب برای ذرات با اسپین 1/2 و 0 استفاده می‌کنیم. معادله دیراک شامل پتانسیل اسکالر جاذبه $S(r)$ و برداری دافعه $V(r)$ می‌باشد. حل دقیق معادله دیراک با تقارن اسپینی در حالتی که پتانسیل برداری دافعه و اسکالر جاذبه باهم برابر هستند $V(r) \approx S(r)$ (ثابت $\Delta(r)$) و در تقارن شبه اسپینی $V(r) \approx -S(r)$ (ثابت $\Sigma(r)$) بدست می‌آید [67]. Q. Zhi و همکارانش [40] با استفاده از مدل ماکروسکوپی و میکروسکوپی انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های اکسیژن را بدست آورده‌اند، همچنین S.Q.zhang و همکارانش [62] با مدل‌های نسبیتی، انرژی حالت پایه هسته‌های زوج-زوج اکسیژن را با استفاده از نظریه RCHB بدست آورده‌اند. انرژی محاسبه شده توسط آن‌ها و نتایج تجربی از همخوانی قابل قبولی برخوردار است. در این قسمت ما، انرژی حالت پایه را برای ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن $^{15,17,19,21,23}\text{O}$ در مدل نسبیتی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با در نظر گرفتن پتانسیل شبه گوسی برای برهمکنش بین ذرات و روش تحلیلی

ابرتقارن، ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی را بدست می‌آوریم. همچنین با اضافه کردن جفت‌شدگی اسپین-مدار به پتانسیل شبه‌گوسی، شکافتگی انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های اکسیژن را محاسبه می‌کنیم. حدود ۴۰ سال قبل مفهوم تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی در نظریه هسته‌ای توسط Arima و همکارانش و Hecht و Alder معرفی شد [۶۸]. یک شبه‌تبهگنی در هسته‌های سنگین در یک نوکلئون با اعداد کوانتومی جفت $(n-1, 1+2, j=1+\frac{3}{2})$ و $(n, 1, j=1+\frac{1}{2})$ مشاهده شد، که در آن j, l, n اعداد کوانتومی شعاعی و مداری و تکانه زاویه‌ای کل هستند [۶۹]. این شبه‌تبهگنی پدیده‌های طبیعی در ساختار هسته شامل تغییر هسته و گشتاور مغناطیسی و ترازهای یکسان را به خوبی توصیف می‌کند [۷۰]. به خاطر همین موفقیت‌ها تلاش‌های بسیاری برای کشف و درک منشا این شبه‌تبهگنی انجام گرفته‌است [۷۱، ۷۲]. در سال‌های اخیر توجه زیادی به حل دقیق معادله دیراک شده‌است. این معادله برای تعداد کمی از برهمکنش‌های ساده جواب دقیق دارد. همچنین روش‌های گوناگونی برای حل تحلیلی معادله دیراک با پتانسیل‌های مختلف وجود دارد که می‌توان به مدل استاندارد، مکانیک کوانتومی ابرتقارن، و NU اشاره کرد. ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن دارای یک تک ذره می‌باشند بنابراین برای مطالعه برهمکنش بین نوکلئون‌ها، ما پتانسیل شبه‌گوسی را در نظر می‌گیریم:

$$V(r) = -V_0(1 + \exp(-\frac{r^2}{\alpha^2})) \quad (4-41)$$

که V_0 و α به ترتیب عمق چاه پتانسیل و عکس برد نیروی هسته‌ای می‌باشند.

معادله دیراک یک نوکلئون تک در حال حرکت، در یک پتانسیل اسکالر جاذب $S(r)$ و پتانسیل برداری دافعه $V(r)$ با در نظر گرفتن $c = \hbar = 1$ صورت‌زیراست [۷۳]:

$$[-i\alpha \cdot \nabla + \beta(M + S(r))] \psi(r, \theta, \varphi) = [E - V(r)] \psi(r, \theta, \varphi) \quad (4-42)$$

که در آن E انرژی نسبیتی، M جرم تک ذره، α و β ماتریس‌های 4×4 دیراک هستند. برای یک ذره در میدان مرکزی، J تکانه‌ی زاویه‌ای کل و $\hat{K} = -\beta(\alpha \cdot L + 1)$ با هامیلتونی جابجا می‌شود، که

L تکانه زاویه‌ای مداری است. با توجه به تکانه‌ی زاویه‌ای z ، ویژه مقادیر \hat{K} برابر $k = \pm(j+1/2)$ ، که علامت منفی برای اسپین غیرهمسو و علامت مثبت برای اسپین همسو است.

تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Psi_{n_r, k}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} F_{n_r, k}(r) Y_{jm}^1(\theta, \varphi) \\ i G_{n_r, k}(r) Y_{jm}^{\bar{1}}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \quad (43-4)$$

که $F_{n_r, k}(r)$ و $G_{n_r, k}(r)$ مولفه‌های بالایی و پایینی و $Y_{jm}^1(\theta, \varphi)$ و $Y_{jm}^{\bar{1}}(\theta, \varphi)$ توابع هارمونیک کروی هستند. n_r عدد کوانتومی شعاعی و m تصویر تکانه زاویه‌ای روی محور z است. $\bar{1}$ اعداد کوانتومی اسپینی و شبه‌اسپینی‌اند. با قرار دادن معادله (43-4) در (42-4) داریم:

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right] F_{n_r, k}(r) = [M + E_{n_r, k} - V(r) + S(r)] G_{n_r, k}(r) \quad (44-4)$$

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right] G_{n_r, k}(r) = [M - E_{n_r, k} + V(r) + S(r)] F_{n_r, k}(r) \quad (45-4)$$

با توجه به معادلات (44-4) و (45-4)، می‌توانیم با قراردادن یک تابع بر حسب دیگری، و قرار دادن در معادله دیگر بر حسب یک تابع به صورت زیر نوشت:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r, k} - \Delta(r))(M - E_{n_r, k} + \Sigma(r)) + \frac{\frac{d\Delta}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right)}{M - E_{n_r, k} - \Delta(r)} \right] F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (46-4)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r, k} - \Delta(r))(M - E_{n_r, k} + \Sigma(r)) - \frac{\frac{d\Sigma}{dr} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right)}{M - E_{n_r, k} + \Sigma(r)} \right] G_{n_r, k}(r) = 0 \quad (47-4)$$

که در آن $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ و $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ و همچنین در نظر می‌گیریم

$$F_{n_r, k}(0) = G_{n_r, k}(0) = 0, \quad F_{n_r, k}(\infty) = G_{n_r, k}(\infty) = 0$$

۴-۷-۱- ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع در تقارن اسپینی

این تقارن از برابری پتانسیل اسکالر جاذب و پتانسیل برداری دافعه به صورت $(\Delta(r) = C_s)S(r) \approx V(r)$ در نظر گرفته می‌شود. تحت این تقارن، معادله برای مولفه بالایی $F_{n_r, k}(r)$ ، برای پتانسیل شبه گوسی به صورت زیر می‌شود.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r, k} - C_s)(M - E_{n_r, k} + \Sigma(r)) \right] F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (48-4)$$

که $k=1$ برای $k < 0$ و $k = -(l+1)$ برای $k > 0$. با جایگذاری پتانسیل در معادله بالا داریم:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r, k} - C_s)(M - E_{n_r, k} - V_0(1 + \exp(-\frac{r^2}{\alpha^2}))) \right] F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (49-4)$$

از آنجایی که این پتانسیل را با معادله دیراک به صورت تحلیلی و بدون تقریب نمی‌توان حل کرد، معمولاً از روش‌های عددی یا تقریبی استفاده می‌کنند. با در نظر گرفتن تقریب مرتبه اول برای پتانسیل، که به ازای توان‌های بزرگ α می‌توان از مرتبه‌های بالاتر صرف نظر کرد. در نهایت معادله ما به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{d^2 F_{n_r, k}(r)}{dr^2} + \left[-\frac{L^2}{r^2} - \epsilon_{n_r, k} + \frac{AV_0 r^2}{\alpha^2} \right] F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (50-4)$$

که در آن

$$(M^2 - E_{n_r, k}^2 - C_s(M - E_{n_r, k})) = \tilde{E}_{n_r, k} \quad , \quad (M + E_{n_r, k} - C_s) = A \quad (51-4)$$

$$\tilde{E}_{n_r, k} - 2AV_0 = \epsilon_{n_r, k} \quad , \quad k(k+1) = -L^2$$

با استفاده از روش ابرتقارن برای حل معادله (۵۰-۴)، انرژی حالت پایه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E_{0,k} = \frac{C_s \pm \sqrt{C_s^2 + 4[-C_s M + 2AV_0 + M^2 \pm \sqrt{\frac{AV_0}{\alpha^2} (2 \pm \sqrt{1+4k(k+1)})}]}}{2} \quad (52-4)$$

همچنین با استفاده از پتانسیل‌های همسان ابرتقارنی، روابط (۳-۹) و (۳-۱۴) و (۳-۱۵)، می‌توانیم طیف انرژی را به صورت زیر بدست آوریم.

$$E_{n,k} = \eta \pm \sqrt{\eta^2 + (-C_s M + 2AV_0 + M^2 \pm 2\gamma) - 2m\gamma(-1 \pm \sqrt{1+4k(k+1)})} \quad (53-4)$$

۴-۷-۲ - شکافتگی اسپین - مدار برای انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج - فرد

اکسیژن

علاوه بر پتانسیل شبه‌گوسی، ما برهمکنش اسپین - مدار را برای محاسبه شکافتگی تراز انرژی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن برهمکنش اسپین - مدار به صورت زیر:

$$V_{s,1}(r) = \frac{1}{2m^2c^2} S.L \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr}, \quad f(r) = -V_0(1 + \exp(-\frac{r^2}{\alpha^2})) \quad (54-4)$$

که برای مولفه $j=1+1/2$ در نظر گرفته‌ایم.

ما انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج - فرد اکسیژن را با پتانسیل شبه‌گوسی محاسبه کردیم و همچنین نتایج مربوط به برهمکنش اسپین - مدار هم در جدول (۴-۵) درج شده‌است.

جدول ۴-۵: انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن با تقارن اسپینی

Oxygen Isotopes	E_{other} (MeV) [۴۰]	E_{exp} (MeV) [۶۱]	$E_{\text{our model}}$ (MeV)	$E_{V(r)+S.L}$ (MeV)
^{15}O	۱۱۳/۲۷	۱۱۱/۹۶	۱۰۹/۴۸	۱۰۹/۵۹
^{17}O	۱۳۲/۸۸	۱۳۱/۷۷	۱۳۰/۵۱	۱۳۰/۵۸
^{19}O	۱۴۶/۸۷	۱۴۳/۷۶	۱۴۱/۷۵	۱۴۱/۹۴
^{21}O	۱۶۰/۲۱	۱۵۵/۱۷	۱۵۳/۸۴	۱۵۳/۹۸
^{23}O	۱۶۹/۹۴	۱۶۴/۷۷	۱۶۲/۷۱	۱۶۲/۸۳

با توجه به معادله (۳-۵) مولفه بالایی تابع موج به صورت زیر بدست می‌آید.

$$F_{n_r, k}(r) = N \exp\left(-\sqrt{\frac{AV_0}{\alpha^2}} \frac{r^2}{2}\right) r^{-\left(\frac{-1 \pm \sqrt{l+4k(k+1)}}{2}\right)} \quad (۴-۵۵)$$

با جایگذاری $F_{n_r, k}(r)$ در معادله (۴-۴۵) مولفه پایینی، $G_{n_r, k}(r)$ متناظر با تراز انرژی $E_{n_r, k}$ بدست

می‌آید. تابع موج مطابق با رابطه زیر می‌شود.

$$\Psi_{n_r, k}(r, \theta, \varphi) = \frac{N}{r} \left[\frac{Y_{jm}^l(\theta, \varphi)}{[M + E_{n_r, k} - C_p] \left[\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right]} Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \varphi) \right] \exp\left(-\sqrt{\frac{AV_0}{\alpha^2}} \frac{r^2}{2}\right) r^{-\left(\frac{-1 \pm \sqrt{l+4k(k+1)}}{2}\right)} \quad (۴-۵۶)$$

۴-۷-۳- ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع در تقارن شبه اسپینی

تقارن شبه اسپینی توسط meng و همکارانش بحث شد [۷۴، ۷۵]. این تقارن در معادله دیراک زمانی

می‌باشد که $S(r) \approx -V(r)$ ($\Sigma(r) = C_p$). تحت این تقارن، معادله مولفه پایینی $G_{n_r, k}$ به صورت زیر

می‌باشد.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M^2 - E^2 + C_p(M+E) + (E-M-C_p)\left(\frac{V_0 r^2}{\alpha^2} - 2V_0\right)) \right] G_{n_r, k}(r) = 0 \quad (۴-۵۷)$$

با بکارگیری همان روش که در تقارن اسپینی استفاده کردیم، معادله (۴-۵۷) را حل کرده، انرژی و تابع موج را بدست می‌آوریم.

$$E_{n_r, k} = \eta' \pm \sqrt{\eta'^2 + (C_p M + 2AV_0 + M^2 \pm 2\gamma') - 2m\gamma'(-1 \pm \sqrt{1 + 4k(k+1)})} \quad (۴-۵۸)$$

$$\Psi_{n_r, k}(r, \theta, \varphi) = \frac{N}{r} \left[\frac{1}{[M - E_{n_r, k} + \Sigma(r)]} \left[\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right] Y_{jm}^1(\theta, \varphi) \right] \exp\left(-\sqrt{\frac{AV_0}{\alpha^2}} \frac{r^2}{2}\right) r^{-\frac{(-1 \pm \sqrt{1+4k(k+1)})}{2}} \quad (۴-۵۹)$$

در جدول (۴-۶) ما انرژی حالت پایه را برای ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن در حالت تقارن شبه‌اسپینی بدست آورده‌ایم.

جدول ۴-۶: انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن با تقارن شبه‌اسپینی

Oxygen Isotopes	E_{other} (MeV) [۴۰]	E_{exp} (MeV) [۶۱]	$E_{\text{our model}}$ (MeV)	$E_{V(r)+S.L}$ (MeV)
^{15}O	۱۱۳/۲۷	۱۱۱/۹۶	۱۱۰/۷۵	۱۱۰/۸۵
^{17}O	۱۳۲/۸۸	۱۳۱/۷۷	۱۳۰/۵۱	۱۳۱/۳۶
^{19}O	۱۴۶/۸۷	۱۴۳/۷۶	۱۴۲/۱۶	۱۴۳/۰۲
^{21}O	۱۶۰/۲۱	۱۵۵/۱۷	۱۵۳/۸۸	۱۵۳/۹۸
^{23}O	۱۶۹/۹۴	۱۶۴/۷۷	۱۶۳/۴۷	۱۶۳/۵۸

در جدول (۴-۷) ما انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج-فرد اکسیژن را در دو حالت تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی با هم مقایسه کرده، جز در یک حالت خاص برای ^{21}O ، نتایج در حالت شبه‌اسپینی از همخوانی بهتری برخوردار است.

جدول ۴-۷: مقایسه انرژی حالت پایه اکسیژن در حالت اسپینی و شبه اسپینی

Oxygen Isotopes	E_{exp} (MeV) [۶۱]	$E_{\text{pseudospin}}$ (MeV)	E_{spin} (MeV)
^{15}O	۱۱۱/۹۶	۱۱۰/۸۵	۱۰۹/۵۹
^{17}O	۱۳۱/۷۷	۱۳۱/۳۶	۱۳۰/۵۸
^{19}O	۱۴۳/۷۶	۱۴۳/۰۲	۱۴۱/۹۴
^{21}O	۱۵۵/۱۷	۱۵۳/۹۸	۱۵۳/۹۸
^{23}O	۱۶۴/۷۷	۱۶۳/۵۸	۱۶۲/۸۳

با مقایسه انرژی حالت پایه با نتایج تجربی، در می یابیم که نتایج تجربی با محاسبات انرژی در تقارن شبه اسپینی از همخوانی بیشتری برخوردار است.

نتیجه گیری

ما در این کار، معادله شرودینگر را برای سیستم‌های چندذره‌ای با پتانسیل گوسی به صورت تحلیلی با استفاده از روش ابرتقارن حل کرده، انرژی و تابع موج حالت پایه را محاسبه نموده‌ایم. که نتایج بدست آمده با مقادیر تجربی از همخوانی خوبی برخوردار است. همچنین با در نظر گرفتن یک سیستم نسبیتی، جواب‌های معادله دیراک را با پتانسیل شبه گوسی در حضور تقارن اسپینی و شبه اسپینی در چارچوب مکانیک کوانتومی ابرتقارن بررسی کرده، و ویژه توابع دیراک و ویژه مقادیر انرژی را بدست آورده‌ایم و اثر برهمکنش اسپین مدار را، بر این پتانسیل نیز مورد بررسی قرار دادیم. مشاهده می شود در حالت تقارن شبه اسپینی نتایج با مقادیر تجربی همخوانی بهتری دارد. نتایج بدست آمده نه تنها برای فیزیکدان نظری بلکه برای فیزیکدان تجربی نیز می تواند جالب توجه باشد. که این نتایج برای مطالعه پراکندگی می تواند مفید باشد. همچنین می توان از این پتانسیل برای توصیف دیگر سیستم های فیزیکی نیز استفاده کرد.

مراجع

- [1] Cohen B. L. (1971) "**Concepts of Nuclear physics**" McGraw-Hill, New York.
- [۲] کرین ک اس ، میرفخرایی ن و مدرس م ، (۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته ای"، جلد اول ، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- [3] Mayer. G. M. (1963) "**The shell model**", Nobel lecture
- [4] Vertes. A, Nagy. S, Klencsar. Z, Lovas. G. R, and Rosch. F, (2011) "**Handbook of Nuclear Chemistry**", Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- [5] Mayer. G. M, Hans. J, and Jensen. D, (1955) "**Elementary Theory of Nuclear Shell Structure**", John Wiley. New York.
- [۶] برون ب ال ، مهمان دوست خواجه دادع، (۱۳۹۱) "مباحثی در فیزیک ساختار هسته‌ای"، انتشارات مرنیز مشهد.
- [7] Yao. M. J, Chen. H, and Meng. J, (2006) "Time-odd triaxial relativistic mean field approach for nuclear magnetic moment" **Phys. Rev. C74**.
- [8] Poenaru. N. D, and Greiner. W, (2010) "**Clusters in Nuclei**", Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [9] Basdevant J. L. Rich, J. and Spiro M. (2005) "**Fundamentals in Nuclear Physics Springer, USA from Nuclear Structure to cosmology**"
- [10] Lannunziata. F. M, (2007) "**Radioactivity Introduction and History**" Elsevier's Science
- [11] Cottingham W.N. and Greenwood D.A. (2000) "**An introduction to nuclear physics**" Cambridge University Press
- [12] Morita. M, (1963) "Theory of beta decay" **Sup. Prog. Theo. Phys, No. 26**.
- [13] Lilley. S. J, (2009) "**Principles of nuclear physics**" Wiley.
- [14] Wong. S. S. M, (2007) "**Introductory nuclear physics**" New Delhi.
- [15] Hans H. S, (2001) "**Nuclear Physics-Exoerimental and Theoretical**" New Age (P) Limited Publishers, New Dehli International
- [16] Friedlander. G, Kenndy. J. W, Macias. E. S, and Miller. J. M, (1981) "**Nuclear and Radiochemistry**" John Willey & Sons, New York.

- [17] Mayer .M. G, (1969) "On Closed Shells in Nuclei. II" **Phys. Rev. 75.**
- [18] Haxel O, Jensen H. D.and Suess H. E, (1766) "On the Magic Numbers in Nuclear Structure" **Phys. Rev. 75.**
- [19] Audi. G, Wapstra. A. H, Thibault. C, Blachot. J, and Bersillon. O,(2003) "The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties" **Nuclear Physics A729, 3–128.**
- [20] de Laeter. J. R, Böhlke. J. K, De Bièvre. P, Hidaka. H, Peiser. H. S, Rosman. K. J. R. P. D. and Taylor P, (2003) "Atomic weights of the elements. Review 2000 (IUPAC Technical Report) ". *Pure and Applied Chemistry* **75 (6): 683–800.**
- [21] Wieser M. E, (2006) "Atomic weights of the elements 2005 (IUPAC Technical Report)". *Pure and Applied Chemistry*, **78 (11): 2051–2066.**
- [22] Jones. G. A, Phillips. W. R, Johnson. C. M. P and Wilkinson. D. H, (1954) "Some Properties of Nuclei of Mass 19",**Phys. Rev. 96, 547.**
- [23] Johnson. C. M. P, Jones. G. A, Phillips. W. R, and Wilkinson. D. H, (1959) "Beta Decay of O19: States of F19", **Proc. Roy. Soc. (London) A252, 1.**
- [24] Elliott. J. P and Flowers. B. H, (1955) "Experimental Exploration of the Limits of the Nilsson Model ; Vibrational States in Hf177 and Hf181"., **Proc. Roy. Soc. (London) A229, 536.**
- [25] Redlich. M. G, (1954) "A beta-Decay Matrix Element for a Deformed Core Model" **Phys.Rev. 95, 122-126.**
- [26] Olness. J. W, and Wilkinson. D. H, (1966) "Beta Decay of O19: States of F19", **Phys. Rev. Vol 141, No 3.**
- [27] Alburger. D. E, Lister. C. J, Olness. J. W, and Millener. D. J, (1981) "Beta decay of O21" **Phys. Rev. C. Vol 23, No 5.**
- [28] Firestone. R.B, (2004) " Nuclear Data Sheets for A = 21" **Nuclear Data Sheets 103 269–324.**
- [۲۹] فرانتس. ش، سربیشه‌ای. م، اشرف مقیمی. ف، (۱۳۸۲) "مکانیک کوانتومی"، انتشارات آستان قدس رضوی
- [30] Dutt. R, Khare. A, and Sukhatme. U.P, (1986) "Exactness of supersymmetric WKB spectra for shape-invariant potentials",**Phys. Lett. B 181 , 295.**
- [31] Gendenshtein. L, (1983) "Derivation of exact spectra of the Schrodinger equation by means of supersymmetry" **Jetp. Lett . 38 , 356.**
- [32] Dabrowska. J.W, Khare. A, and Sukhatme. U.P, (1988) "Explicit wavefunctions for shape-invariant potentials by operator techniques " **Jour. Phys. A, 21 L195.**

- [33] Dutt. R, Gangopadhyaya. A, Khare. A, Pagnamenta. A, and Sukhatme. U. P, (1993) " Solvable Quantum Mechanical Examples of Broken Supersymmetry" **Phys. Lett. A**, **174**, 363-367.
- [34] Cooper. F, Ginocchio. J, and Khare. A, (1987) "Relationship between supersymmetry and solvable potentials" **Phys. Rev. D****36**, 2458.
- [35] Cooper. F, Khare. A, and Sukhatme. U, (2001) "**Supersymmetry in Quantum Mechanics**" World Scientific.
- [36] Deshalit. A, and Talmi. L, (2004) "**Nuclear Shell Theory**" Dover Inc. Mineola, New York
- [37] Kalantar-Nayestanaki N. Epelbaum E. Messchendorp J.G. and Nogga A. (2012) "Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems" **Rep. Prog. Phys.** **75**, 016301.
- [38] Saito T. Y. and Haidenbaure J. (2000) "A two-pion exchange three-nucleon force based on a realistic pi N interaction" **Eur. Phys. J. A** .,Vol7 , 559-571.
- [39] Yuan. C, Suzuki. T, Otsuka. T, Xu. F, and Tsunoda. N, (2012) "Shell-model study of boron, carbon, nitrogen and oxygen isotopes based on monopole-based-universal interaction", **Physical Review C** **85** .
- [40] Zhi. Q, and Ren. Z, (2007) "Systematic studies on the exotic properties of isotopes from oxygen to calcium" **Nuc. Phys.** **A749**, 10-28.
- [41] Shojaei M. R, and Rajabi. A. A, (2007) "Hypercentral constituent quark model and the hyperfine dependence porenrial" **Jour of Phys research**,**7**, 2.
- [42] Rajabi A. A. (2005) "Exact Analytical Solution of the Schrödinger Equation for an N-Identical Body-Force System" **Few Body System**, **37**, 267.
- [43] Aiello. M, Ferraries. M, MGiannini. M, Pizzo. M and Santopinto. E, (1996) "A three-body force model for the electromagnetic excitation of the nucleon" **Phys. Lett.** **B387**, 215-221.
- [44] Stephenson. G, (1996) "Eigenvalues of the Schrodinger equation with a Gaussian Potential" **J. Phys. A, Math. Gen.**, Vol**10**,**12**.
- [45] Nandi. S, (2010) "The quantum Gaussian well" **American Journal of Physics**, Vol**78**,**12**, 1341-1345.
- [46] Feizi. H, Rajabi. A. A, and Shojae. M. R, (2012) "A Simple Approach to Study the Isospin Effect in Mass Splitting of Three-Nucleon Systems by Using Hyperspherical Functions" **Commun.Theor. Phys.** **58**, 1, 141-145.
- [47] Ikhdair S. M, (2008) "Exact solutions of the D-dimensional Schrödinger

equation for a pseudo-Coulomb potential plus ring-shaped potential" **Chinese Journal of physics.** **46, 3.**

[48] Tolstikhin. O. I, and Nakamura. H, (1998) "Hyperspherical elliptic coordinates for the theory of light atom transfer reactions in atom- diatom collisions" **Chem. J. Phys.** **108, 8899.**

[49] Znojil. M, (1982) "Double well model $V(r) = ar^2 + br^4 + cr^6$ with $a < 0$ and perturbation method with triangular propagators" **Phys. Lett. A.**Vol **222, 291-298.**

[50] Dong, S.H. (2003) "The realization of dynamic group for the pseudoharmonic oscillator" **Appl. Math. Lett., 16 D, 18.**

[51] Khare. A, and Sukhatme. U.P, (1988) "Scattering amplitudes for supersymmetric shape-invariant potentials by operator methods" **J. Phys. A: Math. Gen.** **21L501.**

[52] Nikiforov. A. F, and Uvarov V.B. (1988) "**Special Functions of Mathematical Physics**", Birkhauser-Verlag, Basel.

[53] Berkdemir. C, (2006) "Pseudospin symmetry in the relativistic Morse potential including the spin-orbit coupling term" **Nucl. Phys. A, 770 32-39.**

[54] Suhonen. J, (2007) " **Nucleons to Nucleus**", Springer-Verlag, Berlin.

[55] Filho. E.D, and Ricotta. R. M, (2000) "Morse potential energy spectra through the variational method and supersymmetry" **Phys. Lett. A 269 :269-267.**

[56] Ciftci H. Hall R. and Saad. N, (2003) "Asymptotic iteration method for eigenvalue problems" **J. Phys. A: Math. Gen.** **36.11807–11816.**

[57] Pahlavani. M. R, and Alavi. S.A, "Solutions of Woods–Saxon Potential with Spin-Orbit and Centrifugal Terms through Nikiforov–Uvarov Method" **Commun. Theor. Phys.** **58 (2012) 739–743.**

[58] Cunningham E. S. Al-Khalili J. S. and Johnson R. C. (2013) "**Effect of spin-spin interactions on nucleon-nucleus scattering**" **Phys. Rev. C 87, 054601 .**

[59] Lopez-Quelle. M, Van Giai. N, and Marcos. S, et al.(2000) " Spin-orbit splitting in nonrelativistic and relativistic self-consistent models" **Phys. Rev. C, 61.**

[60] Lalazissis. G. A, Vretenar. D, and Poeschl W, (1998) "Reduction of the spin-orbit potential in light drip-line nuclei" **Phys. Lett. B, 418: 7-12.**

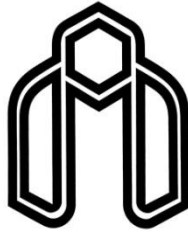
[61] Audi G, Wapstra. A. H, and Thibault. C, (2003) "The Nubase evaluation of nuclear and decay properties" **Nucl. Phys. A, 729 -337.**

- [62] Zhang. S. Q, Meng. J, Toki. H, and Tanihata. I, Zhou. S. -G, (2003) "Proton magic even-even isotopes and giant halos of Ca isotopes with relativistic continuum Hartree-Bogoliubov theory" **science chin**, **G46, 6, 632-658**.
- [63] Arima. A, Cohen. S, Lawson. R. D, and Macfarlane M. H. (1968) "A shell-model study of the isotopes of O, F and Ne" **Nucl. Phys. A. 108 , 94-112**.
- [64] Woods. R. D, and Saxon. D. S, (1954) " Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering" **Phys. Rev. 95, 577**.
- [65] Pekeris. C. L, (1934) "The Rotation-Vibration Coupling in Diatomic Molecules" **Phys. Rev. 45, 98**.
- [66] Ikhdaïr. S. M, (2011) "An approximate κ state solutions of the Dirac equation for the generalized Morse potential under spin and pseudospin symmetry" **J. Math. Phys. 52 052303**.
- [67] Ginocchio, J.N. (2005) "Relativistic symmetries in nuclei and hadrons" **Physics Reports, 414, 165-261**.
- [68] Arima. A, Harvey. M, and Shimizu, K, (1969) "Pseudo LS coupling and pseudo SU_3 coupling schemes" **Physics Letters B., 30, 517-522**.
- [69] Hecht. K. T, and Adler. A, (1969) "Generalized seniority for favored $J \neq 0$ pairs in mixed configurations" **Nucl. Phys. A 137, 129-143**.
- [70] Stuchbery. A. E, (2002) "Magnetic properties of rotational states in the pseudo-Nilsson model" **Nucl. Phys. A 700, 83**.
- [71] Bahri. C, Draayer. J. P, and Moszkowski. S. A, (1992) "Pseudospin symmetry in nuclear" **Phys. Rev. Lett. 65, 2133**.
- [72] Ginocchio. J.N, (1997) "Pseudospin as a relativistic symmetry" **Phys. Rev. Lett. 78, 436**.
- [73] Greiner. W, (2000), " **Relativistic quantum mechanics, wave equations**" Springer.
- [74] Meng. J, Sugarwara-Tanabe. K, Yamaji. S, and Arima. A, (1998) "Pseudospin symmetry in relativistic mean field theory" **Phys. Rev. C 58, R628**.
- [75] Meng. J, Sugawara-Tanabe. K, Yamaji. S, and Arima. A, (1999) "Pseudospin Symmetry in Zr and Sn Isotopes from the Proton Drip Line to the Neutron Drip Line" **Phys. Rev. C 59, 154**.

Abstract

Nuclei have static and dynamic properties. We can note the static properties such as Spin, parity, energy and Etc. based on shell model the number of protons isotopes of ^{19}O and ^{21}O with the magic number which ends 8. In this work, we've considered it as a closed shell. We consider the number of neutrons after magic number 8, as the nucleons capacity, and assume that the interaction between nucleons is a Gaussian. We have calculated ground state energy in two case of relativistic and non-relativistic. We have applied the spin-orbit interaction in the energy. On the other hand, due to the instability these isotopes have beta decay, so we have calculated $\log ft_{1/2}$. Also we used Woods-Saxon potential. In addition, we have achieved ground state energy using Woods-Saxon potential. Our results have good agreement with experimental data.

Keywords: Levels of ground state energy, Shell model, Gaussian potential, Beta decay, Oxygen isotopes.



Shahrood University

Department of Physics

MSc thesis

Study of energy levels of ^{19}O and ^{21}O by using shell model

Nasrin malekinezhad

Supervisor:

Dr. M. R. Shojaei

Advisor:

Dr. M. R. Sarkardei

February 2015