

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده : فیزیک  
گروه : هسته‌ای  
پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی برهمکنش بین نوکلئون‌ها در یک مدل نسبیتی با استفاده از مزون تبادلی

آتنا عرب‌ساغری

استاد راهنما :  
دکتر محمدرضا شجاعی

بهمن ۱۳۹۳

دانشگاه شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم آتنا عرب‌ساغری

تحت عنوان:

بررسی برهمکنش بین نوکلئون‌ها در یک مدل نسبیتی با استفاده از مزون تبادلی

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و

با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

| اساتید راهنما                             | امضاء | اساتید مشاور        | امضاء |
|-------------------------------------------|-------|---------------------|-------|
| نام و نام خانوادگی:<br>دکتر محمدرضا شجاعی |       | نام و نام خانوادگی: |       |
| نام و نام خانوادگی:                       |       | نام و نام خانوادگی: |       |

| اساتید داور                            | امضاء | نماینده تحصیلات تکمیلی | امضاء |
|----------------------------------------|-------|------------------------|-------|
| نام و نام خانوادگی: دکتر علی‌اکبر رجبی |       | نام و نام خانوادگی:    |       |
| نام و نام خانوادگی: دکتر حسین توکلی    |       | دکتر مسلم سوهانی       |       |
| نام و نام خانوادگی:                    |       |                        |       |
| نام و نام خانوادگی:                    |       |                        |       |

## تقدیم به

مادر عزیزم، همسر فداکارم و فرزند دلبندم علی.

روح بلند پدر بزرگواری که یاد و خاطره ایشان همواره انگیزه و شوری در قلبم ایجاد می‌کرد.

## تقدیر و تشکر

ستایش مخصوص پروردگار جهانیان است. خالق هستی که لطف بی‌کرانش بنده حقیر را همواره در بر گرفته و مرا توان انجام این مهم داد. از استاد بزرگواریم جناب آقای دکتر محمدرضا شجاعی که صبورانه در طول این دوره بنده را همراهی نموده و راهنمایی‌های ایشان همواره چراغ راه و هدایت‌گرم بوده‌اند، کمال تشکر را دارم. از مادر عزیز و همسر مهربانم که همواره مدیون حمایت‌هایشان هستم و البته بدون حمایت ایشان سختی راه برایم صد چندان می‌شد، صمیمانه تشکر می‌کنم. از فرزندم به خاطر تمام سختی‌هایی که در طول این دوره متحمل شد و صبورانه در کنارم ماند، از صمیم قلبم تشکر می‌کنم. از تمامی آموزگاران و اساتید گرانقدرم و از تمام اعضای خانواده عزیزم و دوستان گرامی‌ام که یاری‌دهنده و مشوق راهم بوده‌اند، قدردانی می‌کنم. از استاد محترم و فرزانه جناب آقای پروفیسور علی‌اکبر رجبی که بر نگارنده منت نهاده و قبول زحمت فرمودند بینهایت سپاس‌گذارم. همچنین از جناب آقای دکتر حسین توکلی عنبران به خاطر قبول این زحمت کمال تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر مسلم سوهانی که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع اینجانب حضور داشتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که به لطف ایزد منان، فردی مفید در جامعه واقع شوم و مایه سرافرازی و سربلندی ایشان قرار گیرم.

## تعهد نامه

اینجانب آتنا عرب ساغری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته‌ای، دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه بررسی برهمکنش بین نوکلئون‌ها در یک مدل نسبیتی با استفاده از مزون تبادلی تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.

- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه شاهرود» و یا «Shahrood University» به چاپ خواهد رسید.

حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.

در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### امضای دانشجو

### تاریخ

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

## چکیده

در این پایان نامه ابتدا به مرور برخی از مفاهیم فیزیک هسته‌ای و برهمکنش‌های نوکلئون-نوکلئون پرداخته‌ایم. سپس نیروهای تبدالی بارتلت، هایزنبرگ و ماژورانا را مورد مطالعه قرار دادیم. به منظور بررسی برهمکنش بین نوکلئون‌ها، انرژی حالت پایه را برای دو هسته سبک و آینه‌ای تریتون ( $^3_1\text{H}_2$ ) و هلیوم ( $^3_2\text{He}_1$ ) به ازای پتانسیل تبدالی مورد نظر محاسبه نمودیم. بنابراین ما در این کار در یک مدل نسبیتی و از حل معادله دیراک با استفاده از پتانسیل تبدالی، توانستیم ویژه اسپینورهای آن را در حالت‌های تقارن اسپینی و شبه اسپینی، بدست آوریم. روش مورد استفاده ما در این کار، روش تحلیلی NU می‌باشد. پس از یافتن ویژه مقادیر انرژی به اثرات نیروهای تبدالی در دو حالت ( $P^\sigma = \frac{1}{2}$  و  $P^\sigma = \frac{7}{4}$ ) پرداختیم. در مرحله بعد سعی نمودیم تغییرات انرژی را با استفاده از اثرات نیروهای تبدالی بررسی کنیم و با استفاده از روش اختلالی این اثرات را لحاظ نمودیم. در حالت اول نسبت به حالت دوم نتایج سازگارتری با تجربه حاصل شد. این نتیجه با اصل طرد پائولی و مفاهیم فیزیک کوانتوم نیز منطبق است. در پایان با استفاده از معادله کلاین-گوردن به مطالعه نقش مزون‌های شبه اسکالر در نیروهای تبدالی پرداختیم. از این رو معادله کلاین-گوردن را با یک پتانسیل کوتاه برد در نظر گرفته و آن را به کمک روش NU حل کرده و ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی را به ازای پتانسیل تبدالی بین ذرات بدست آوردیم.

## کلمات کلیدی:

نیروهای تبدالی، پتانسیل‌های تبدالی، تبادل مزون، معادله دیراک، معادله کلاین-گوردن

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

✓ "نقش مزون‌های شبه اسکالر (با اسپین صفر) در نیروهای تبادلی"، پنجمین کنفرانس فیزیک

ذرات و میدان‌ها، تهران، دانشگاه شهید بهشتی، ۲۹-۳۰ بهمن ۱۳۹۳.

# فهرست مطالب

## فصل اول: نظریه مزونی یوکاوا و نیروهای تبادلی

- ۱-۱ تاریخچه و مقدمه..... ۲
- ۲-۱ ویژگی‌های استاتیکی نوکلئون‌ها..... ۳
- ۳-۱ مدل کوارکی نوکلئون‌ها..... ۴
- ۴-۱ فرمیون‌ها و بوزون‌ها..... ۵
- ۵-۱ مزون‌ها و برهمکنش نوکلئون-نوکلئون..... ۶
- ۶-۱ خواص نیروی هسته‌ای..... ۷
- ۷-۱ شرایط پتانسیل هسته‌ای..... ۱۲
- ۸-۱ پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون..... ۱۳
- ۹-۱ نظریه مزونی یوکاوا..... ۱۷
- ۱۰-۱ نیروهای تبادلی..... ۲۰
- ۱۱-۱ خواص عملگرهای تبادلی موثر بر تابع موج..... ۲۱
- ۱-۱۱-۱ پتانسیل بارتل..... ۲۲
- ۲-۱۱-۱ پتانسیل هایزنبرگ..... ۲۳
- ۳-۱۱-۲ پتانسیل ماژورانا..... ۲۴
- ۱۲-۱ پتانسیل نوکلئون-نوکلئون بر حسب نیروهای تبادلی..... ۲۵
- ۱۳-۱ توجیه حضور نیروی تبادلی در هسته..... ۲۷

## فصل دوم: نیروهای تبادلی و پتانسیل‌های تبادلی

- ۱-۲ توصیف میکروسکوپیکی پراگندگی کائون از هسته با استفاده از نظریه تبادلی مزون..... ۳۴
- ۱-۱-۲ بهنجارش تابع موج نوکلئون..... ۳۵

|         |                                                     |
|---------|-----------------------------------------------------|
| ۳۶..... | ۲-۱-۲ سینماتیک کائون-نوکلئون و بسط تابع موج.....    |
| ۳۸..... | ۲-۱-۳ پتانسیل کائون-نوکلئون و هسته.....             |
| ۳۹..... | ۲-۱-۴ تابع موج مزون های تبادلی و پارامترهای آن..... |
| ۴۰..... | ۲-۲ پتانسیل اپتیکی.....                             |
| ۴۱..... | ۲-۳ پتانسیل نوکلئون-نوکلئون کم انرژی.....           |
| ۴۳..... | ۲-۳-۱ پتانسیل در فضای تکانه.....                    |
| ۴۵..... | ۲-۳-۲ تبدیلات در پیکربندی فضا.....                  |
| ۴۸..... | ۲-۳-۳ پتانسیل در پیکربندی فضا.....                  |
| ۴۹..... | ۲-۴ نقش مزون $\rho$ در واپاشی هسته های سنگین.....   |

## فصل سوم: روش های تحلیلی و عددی حل معادلات کوانتومی

|         |                                                       |
|---------|-------------------------------------------------------|
| ۵۴..... | ۳-۱ مقدمه.....                                        |
| ۵۵..... | ۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی.....                         |
| ۵۶..... | ۳-۳ کلیات روش NU.....                                 |
| ۵۸..... | ۳-۴ نگاهی اجمالی به روش ابرتقارن.....                 |
| ۶۱..... | ۳-۵ روش های رایانه ای و عددی.....                     |
| ۶۱..... | ۳-۵-۱ پتانسیل های بین ذره ای و روش های رایانه ای..... |
| ۶۲..... | ۳-۵-۲ روش سری تیلور.....                              |
| ۶۳..... | ۳-۵-۳ روش های رونغ-کوتا.....                          |

## فصل چهارم: بررسی نیروهای تبادلی در برهمکنش بین نوکلئون ها

|         |                                                               |
|---------|---------------------------------------------------------------|
| ۶۶..... | ۴-۱ مقدمه.....                                                |
| ۶۸..... | ۴-۲ طیف انرژی معادله.....                                     |
| ۶۹..... | ۴-۳ معادله اساسی دیراک با پتانسیل تبادلی.....                 |
| ۷۱..... | ۴-۴ تقارن اسپینی با در نظر گرفتن حالت اول پتانسیل بارتلت..... |

۷۷.....۱-۴-۴ اثرات پتانسیل تبادلی بر انرژی حالت پایه  $^3\text{H}_2$  و  $^3\text{He}_1$  با تقارن اسپینی حالت اول

۷۸.....۵-۴ تقارن شبه اسپینی با در نظر گرفتن حالت اول پتانسیل بارتلت

۷۹.....۱-۵-۴ اثرات پتانسیل تبادلی بر انرژی حالت پایه  $^3\text{H}_2$  و  $^3\text{He}_1$  با تقارن شبه اسپینی حالت اول

۸۰.....۶-۴ تقارن اسپینی با در نظر گرفتن حالت دوم پتانسیل بارتلت

۸۲.....۱-۶-۴ اثرات پتانسیل تبادلی بر انرژی حالت پایه  $^3\text{H}_2$  و  $^3\text{He}_1$  با تقارن اسپینی حالت دوم

۸۲.....۷-۴ تقارن شبه اسپینی با در نظر گرفتن حالت دوم پتانسیل بارتلت

۸۴.....۱-۷-۴ اثرات پتانسیل تبادلی بر انرژی حالت پایه  $^3\text{H}_2$  و  $^3\text{He}_1$  با تقارن شبه اسپینی حالت دوم

۸۵.....۸-۴ نقش مزون های شبه اسکالر (با اسپین صفر) در نیروهای تبادلی

۸۶.....۱-۸-۴ معادله کلاین-گوردون در حضور پتانسیل تبادلی

۸۹.....نتیجه گیری

۹۱.....مراجع

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ نیروی تانسوری در دوترون [۴]..... ۹
- شکل ۲-۱ اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی متوسط [۵]..... ۱۱
- شکل ۳-۱ پتانسیل یوکاوا برحسب تابعی از  $r$  [۵,۲۵]..... ۱۸
- شکل ۴-۱ اثر اپراتورهای تبدیلی  $P^B, P^M, P^H$  [۱۰]..... ۲۲
- شکل ۵-۱ سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های متوسط [۵]..... ۲۸

## فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱ ویژگی‌های استاتیکی پروتون و نوترون [۱]..... ۳
- جدول ۲-۱ مقادیر اپراتورهای تبدیلی برای حالت‌های مختلف [۱۰]..... ۲۵
- جدول ۱-۲ جرم مزون‌ها، ثابت جفت شدگی و پارامتر cut-off [۵۳]..... ۳۹
- جدول ۲-۲ مقادیر برای پارامترهای معادله ۲۳ از مرجع [۶۴] در تقریب دو قطبی برای مزون های  $\epsilon, \rho$ ..... ۴۲
- جدول ۳-۲ ثابت‌های جفت شدگی قوی و ضعیف برای مکانیزم تبادل مزون  $\rho$  [۶۵]..... ۵۰
- جدول ۱-۴ اپراتور تبدیلی بارتلت در حالت اول و دوم..... ۶۷
- جدول ۲-۴ انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۶
- جدول ۳-۴ انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۶
- جدول ۴-۴ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۷
- جدول ۵-۴ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۷
- جدول ۶-۴ انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن شبه اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۹
- جدول ۷-۴ انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن شبه اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۹
- جدول ۸-۴ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن شبه اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۷۹
- جدول ۹-۴ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن شبه اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی..... ۸۰
- جدول ۱۰-۴ مقایسه انرژی حالت‌های تقارن اسپینی و شبه اسپینی در حالت اول..... ۸۰

- جدول ۴-۱۱ انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۱
- جدول ۴-۱۲ انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۱
- جدول ۴-۱۳ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۲
- جدول ۴-۱۴ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۲
- جدول ۴-۱۵ انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن شبه اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۳
- جدول ۴-۱۶ انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن شبه اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۳
- جدول ۴-۱۷ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن شبه اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۴
- جدول ۴-۱۸ تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن شبه اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی..... ۸۴
- جدول ۴-۱۹ مقایسه انرژی حالت های تقارن اسپینی و شبه اسپینی در حالت اول..... ۸۴



# فصل اول

نظریه مزونی یوکاوا و نیروهای تبادل

## ۱-۱ تاریخچه و مقدمه

مبحث فیزیک هسته‌ای با کشف پرتوزایی توسط بکرل در سال ۱۸۹۶ آغاز شد. پس از آن دانشمندان زیادی با انجام آزمایش‌های متعدد و ارائه مدل‌ها و نظریات متنوع در چارچوب مکانیک کوانتومی به گسترش و تکمیل این مبحث پرداختند. هسته اتم برای اولین بار در سال ۱۹۱۱ در آزمایشی که رادرفورد و دستیارانش با استفاده از پراکندگی ذرات آلفا توسط اتم انجام دادند کشف شد. کشف نوترون توسط چادویک در سال ۱۹۳۲ به نقطه عطفی در پیشرفت فیزیک هسته‌ای تبدیل شد. همچنین اکتشافات دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان دادند که نوکلئون‌ها از اجزای کوچکتری به نام کوارک تشکیل شده‌اند. پس از آن، تحقیقات و فرضیه‌ها و اختراعات و ابداعات مهمی در فیزیک هسته‌ای به ظهور رسید. در هر حال به روشنی معلوم است که مطالعات تجربی و نظری فیزیک هسته‌ای نقش برجسته‌ای در توسعه فیزیک قرن بیست و یکم ایفا کرده است در نتیجه همین زحمات و تلاش‌هاست که ما امروزه درک نسبتاً خوبی از خواص هسته‌ها و ساختاری که منشا این خواص است به دست آورده‌ایم. فیزیک هسته‌ای مطالعه ساختار هسته و برهمکنش بین اجزای تشکیل دهنده آن است که شاخه‌های متعددی دارد و هریک نقش بسزایی را ایفا می‌کنند. تحقیق در خواص هسته‌ها و قوانین حاکم بر ساختار هسته‌ای زمینه مهمی را در پژوهش‌های فیزیک هسته‌ای بنیان نهاده است. می‌توان برای فیزیک هسته‌ای سه نقش عمده را در نظر گرفت:

الف) تحقیق و تفحص در قلمرو ذرات ماده و برهمکنش بین آنها.

ب) مطالعه و تفسیر خواص هسته‌ای.

ج) طراحی و پیش بینی روش‌ها و ابزارهایی برای مسائل پیش رو جهت خدمت به جامعه بشری.

درک و تفسیر خواص استاتیکی و دینامیکی هسته‌ها بر پایه برهمکنش بین نوکلئون‌های موجود در هسته، موضوع بسیار مهمی است که مورد توجه بسیاری از فیزیکدانان هسته‌ای قرار گرفته است. از این رو به معرفی برخی ویژگی‌های نوکلئون‌ها می‌پردازیم.

## ۲-۱ ویژگی‌های استاتیکی نوکلئون‌ها

ویژگی‌هایی را که با گذشت زمان مقدار آنها تغییر نمی‌کند و ثابت است، ویژگی‌های استاتیکی می‌نامند. همه هسته‌ها از دو نوع ذره‌ی پروتون و نوترون موسوم به نوکلئون تشکیل شده‌اند.

برخی از خواص استاتیکی نوکلئون‌ها در جدول (۱-۱) آورده شده است.

جدول (۱-۱): ویژگی‌های استاتیکی پروتون و نوترون [۱]

| نوترون                   | پروتون                             | ویژگی           |
|--------------------------|------------------------------------|-----------------|
| ۰C                       | $1/60.22 \times 10^{-19} \text{C}$ | بار             |
| $939/57 \text{ MeV}/c^2$ | $938/27 \text{ MeV}/c^2$           | جرم سکون        |
| $-1/9130.4 \beta_n$      | $2/79285 \beta_n$                  | گشتاور مغناطیسی |

در جدول بالا مگنتون هسته  $\beta_n$  از رابطه زیر بدست می‌آید که در آن  $m_p$  جرم سکون پروتون می‌باشد.

$$\beta_n = \frac{e\hbar}{2m_p} \quad (1-1)$$

از آنجایی که انرژی بستگی نوکلئون از مرتبه انرژی جنبشی آن  $1/2mv^2$  می‌باشد بنابراین می‌توان گفت نوکلئون‌ها با سرعت غیر نسبیتی  $v^2/c^2 \approx 10^{-2}$  در درون هسته حرکت می‌کنند.

با توجه به جدول فوق نوترون بدون بار است اما دارای گشتاور مغناطیسی است و این اولین دلیلی است که نشان می‌دهد نوکلئون‌ها ذرات بنیادی نقطه‌ای شکل نیستند بلکه ساختاری داخلی دارند. در واقع پروتون و نوترون همانند مزون‌ها، هادرون هستند و دارای ساختار کوارکی می‌باشند. کلید درک نیروی قوی، که هسته اتم را نگه می‌دارد، ممکن است در ساختمان داخلی نوترون‌ها و پروتون‌ها نهفته باشد. اکتشافات دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان دادند علاوه بر نوکلئون‌ها مرتبه دیگری از ساختار ماده وجود دارد که از هسته هم بنیادی تر و ابتدائی‌تر است. تا این زمان تصور می‌شد که پروتون و نوترون

ذرات بنیادی‌اند اما امروزه همگان می‌دانیم که اینگونه نیست بلکه آنها خود از اجزای کوچکتری تشکیل شده‌اند [۲].

### ۱-۳ مدل کوارکی نوکلئون‌ها

در این بخش به دنبال بحث در مورد اعتبار مدل کوارکی نیستیم بلکه تنها از آن جهت که فیزیک ذرات اشاراتی به مفاهیم فیزیک هسته‌ای دارد، قصد داریم برخی از مناسب‌ترین نتایج را بدون آنکه سعی بر توجیه آن داشته باشیم بیان کنیم.

نوکلئون‌ها، همانند لپتون‌ها، فرمیون‌اند و اسپین  $1/2$  دارند. هر سیستم مرکب با اسپین  $1/2$  باید شامل تعداد فردی از فرمیون‌ها باشد (تعداد زوج منجر به اسپین صحیح می‌شود). در مدل بسیار موفق کوارکی، اساس بر این است که نوکلئون‌ها از سه فرمیون بنیادی مرسوم به کوارک تشکیل شده‌اند. اساساً پروتون دربردارنده دو کوارک بالا و یک کوارک پایین ( $uud$ ) و نوترون دارای دو کوارک پایین و یک کوارک بالا ( $ddu$ ) است [۱]. چنین سیستم‌هایی هادرون نیز نامیده می‌شوند و همانگونه که از طریق برهمکنش‌های ضعیف و الکترومغناطیس با هم برهمکنش دارند، از طریق برهمکنش قوی نیز با هم برهمکنش می‌کنند. این کوارک‌ها را میدان برهمکنش بنیادی قوی، که فیزیکدانان ذرات به آن میدان گلوئون می‌گویند، مقید کرده‌اند [۱]. بنابراین تفاوت بین نوترون‌ها و پروتون‌ها، بجز بارهای ضعیف و الکتریکی آنها، به سبب تفاوت جرم  $u-d$  می‌باشد. این موضوع اثر اندکی بر برهمکنش‌های قوی بنیادی دارد، به گونه‌ای که در همه برهمکنش‌های قوی، پروتون‌ها و نوترون‌ها با تقریب خوبی، به طور مشابه رفتار می‌کنند. در نتیجه برهمکنش قوی حاصل بین نوکلئون‌ها تقریباً مستقل از گونه نوکلئون می‌باشد. امروزه بررسی و مطالعه اینگونه ذرات را که عناصر اصلی ساختار هسته‌ای هستند، در شاخه خاصی به نام فیزیک ذرات بنیادی یا فیزیک انرژی بالا ادامه می‌دهند. فیزیک هسته‌ای از طرفی به فیزیک اتمی و از طرف دیگر به فیزیک ذرات بنیادی متصل است. به همین منظور ابتدا به دسته‌بندی ذرات در دو گروه عمده می‌پردازیم.

## ۱-۴ فرمیون‌ها و بوزون‌ها

ذرات بنیادی به دو دسته فرمیون‌ها و بوزون‌ها دسته‌بندی می‌شود. فیزیک ذرات بنیادی جهان را بر اساس فرمیون‌های بنیادی توصیف می‌کند. طبیعت، گونه‌گونی بیشتری از فرمیون‌های بنیادی نسبت به بوزون‌ها تدارک دیده است. فرمیون‌های بنیادی را در دو گروه دسته‌بندی می‌کنیم. نوعاً برای سیستم کوارکی از واژه هادرون استفاده می‌شود. پروتون و نوترون همانند مزون‌ها هادرون‌اند [۱]. فرمیون‌ها ذراتی هستند که از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند. این قانون ساختار اتم‌ها را توضیح می‌دهد و در نتیجه پیش‌زمینه کل شیمی را تشکیل می‌دهد. در حقیقت پایداری جهان بر اساس اصل طرد پائولی می‌باشد. اگر مجموعه‌ای از فرمیون‌های یکسان برحسب توابع موج تک ذره‌ای بیان شوند، هیچ دو فرمیونی نمی‌توانند تابع موج یکسان داشته‌باشند [۱]. در مورد فرمیون‌ها تابع موج تغییر علامت می‌دهد و کاملاً نامتقارن است [۲]. هنگامی که ذرات فرمیون‌های همسان هستند، توابع موج کلی باید نسبت به تعویض مختصات هر دو ذره، پادمتقارن باشد. این موضوع با دترمینان‌های اسلاتر ممکن می‌شود. در واقع دترمینان اسلاتر باعث اجرای اصل طرد پائولی می‌شود که می‌گوید هیچ دو عضو یک مجموعه اعداد کوانتومی نباید همسان باشند در غیر این صورت تابع موج صفر خواهد شد [۳]. فرمیون‌ها به دلیل اینکه از آمار فرمی-دیراک در مکانیک آماری پیروی می‌کنند، به این نام خوانده می‌شوند [۱]. رابطه مشهودی هم بین اندازه حرکت مداری ذاتی یا اسپین ذره و آمار آن وجود دارد. برای فرمیون‌ها مقدار اسپین نیمه‌صحیح است. فرمیون‌ها از طریق میدان‌هایی که خود سرچشمه آن هستند با یکدیگر برهمکنش می‌کنند. ذرات مرتبط با این برهمکنش همان بوزون‌ها هستند. مثال بسیار آشنای این موضوع الکترون است که فرمیونی بنیادی می‌باشد. الکترون حامل بار الکتریکی  $e$  بوده و این بار میدان الکترومغناطیسی  $E$  و  $B$  را به‌وجود می‌آورد که نیرویی بر دیگر بارهای الکتریکی وارد می‌کنند [۱].

بوزون‌ها ذراتی هستند که از آمار بوز-انیشترین پیروی می‌کنند و با این ویژگی مشخص می‌شوند که هر تعداد از این ذرات می‌توانند تابع موج تک‌ذره‌ای یکسانی داشته باشند. بنابراین در مورد بوزون‌ها امکان تشکیل امواج همدوس با دامنه ماکروسکوپی وجود دارد و چنین امواجی را می‌توان با تقریب خوبی به طور کلاسیکی بیان کرد. همچنین برای بوزون‌ها مقدار اسپین یکی از مقادیر صحیح ...، ۲، ۱، ۰ می‌باشد. به عنوان مثال فوتون‌ها بوزون هستند اگر بخواهیم بنیادی‌تر بحث کنیم باید گفت این ویژگی پیامد تقارن‌های ممکن تابع موج سیستمی از ذرات یکسان است که مختصات هر دوتای آن در تبادل با یکدیگرند [۱]. فرمیون‌ها بیشتر منزوی هستند و کمتر به اجتماع علاقه‌مندند. آنها از یکدیگر دوری می‌جویند تا مطمئن شوند که در حالت یکسانی قرار نگرفته‌اند. در مقابل بوزون‌ها بسیار اجتماعی‌اند. آنها می‌خواهند در حالت یکسانی قرار گیرند. در واقع نخستین بار آمار بوز-انیشترین برای فوتون‌ها استفاده شد.

## ۱-۵ مزون‌ها و برهمکنش نوکلئون-نوکلئون

مانند همه فرمیون‌ها، کوارک‌ها هم پادذرات ویژه خود را دارند. همانگونه که سیستم مقید سه کوارکی یا سیستم مقید سه پادکوارکی، نوکلئون‌ها یا پادنوکلئون‌ها را می‌سازند، میدان گلوئونی قوی می‌تواند یک کوارک و یک پادکوارک را به هم مقید سازد و ذره کوتاه عمری مرسوم به مزون (ذره میانه) تولید کند [۱،۲]. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوکلئون‌ها که در هسته در حدود یکدیگرند، از لحاظ بزرگی از انرژی‌های لازم برای برانگیختن کوارک‌ها در یک نوکلئون خاص ( $\sim 290 \text{ MeV}$ ) کمتر می‌باشند [۴]. بنابراین منطقی است که هسته را مجموعه‌ای از نوکلئون‌ها در نظر بگیریم که با یکدیگر برهمکنش دارند. از آنجا که نوکلئون‌ها ذرات مرکبی هستند انتظار می‌رود که برهمکنش آنها با یکدیگر ساده نباشد. در واقع این برهمکنش‌ها تا حدی پیچیده نیز هستند. از این رو توانایی توصیف برهمکنش‌های بین نوکلئون‌ها برای درک فیزیک هسته‌ها بسیار مهم است. با این وجود پس از چندین سال کار و تلاش تجربی و نظری، توانسته‌ایم تا حد زیادی نیروهای بین دو نوکلئون را، به‌ویژه در گستره انرژی‌های پایین مربوط به فیزیک هسته‌ای بشناسیم.

## ۱-۶ خواص نیروی هسته‌ای

خواص نیروی بین نوکلئون-نوکلئون را می‌توان به دو روش متفاوت مطالعه کرد [۵،۶،۷].

روش مستقیم: با بررسی اطلاعات بدست آمده از آزمایش‌های برخورد.

روش غیر مستقیم: با بررسی خواص سیستم‌های مقید مانند هسته‌ها.

از طرفی بهتر است هر پدیده‌ای را در ساده‌ترین شرایط ممکن و ساده‌ترین حالت آن مطالعه کرد. ساده‌ترین موردی که نیروی هسته‌ای در آن اثر می‌کند هنگامی است که تنها دو نوکلئون برهمکنش داشته باشند. در عمل دو وضعیت پیش می‌آید:

(۱) هنگام برخوردی میان دو نوکلئون که معمولاً به آنها فرآیندهای پراکندگی می‌گویند [۸].

(۲) هنگامی که یک نوترون و یک پروتون به هم مقیدند (مانند هسته دوترون). دوترون از گردهمایی یک پروتون و یک نوترون تشکیل می‌شود و تنها سیستم دو نوکلئونی مقید در طبیعت است. به همین دلیل سیستمی ایده‌آل برای مطالعه برهمکنش نوکلئون - نوکلئون به‌شمار می‌رود [۹].

طبیعت دقیق نیروهای بستگی هسته‌ای، ناشناخته است. اما انتظار می‌رود که این نیروها باید دارای برد کوتاه و در فواصل کوتاه، قوی‌تر از نیروی کولنی باشند، زیرا نیروی هسته‌ای می‌تواند به دافعه کولنی پروتون‌ها در هسته غلبه کند. البته برخی از ذرات، مانند الکترون، تحت تاثیر آن قرار نمی‌گیرند. به‌علاوه ماهیت این نیروها باید چنان باشد که از ترکیب ذرات با یکدیگر و به وجود آوردن یک جسم منسجم جلوگیری کند. از طرف دیگر نوترون‌های بدون بار نیز باید به طور محکم پیوند یابند. از اطلاعات بدست آمده از خواص هسته‌ها می‌توان نتایجی را درباره نیروی هسته‌ای بدست آورد. برخی از مهمترین نتایج درمورد نیروی قوی هسته‌ای یا نیروی هادرونی بین نوکلئون‌ها در زیر آورده شده است [۵،۶،۱۰]:

۱-۶-۱) برهمکنش بین دو نوکلئون از پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای است، که به فاصله

بین نوکلئونی  $r$  بستگی دارد و به صورت  $V_C(r)$  نشان می‌دهیم. این نیرو غالباً جاذب است. در غیر این

صورت دافعه کولنی بین نوکلئون‌ها موجب فروپاشی هسته می‌گردد و هسته‌های پایدار نمی‌توانستند وجود داشته باشند. همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قوی است.

۱-۶-۲) برهمکنش بین نوکلئون-نوکلئون وابسته به اسپین است و به موازی یا پاد موازی بودن اسپین نوکلئون‌ها بستگی دارد. نیروی هسته‌ای باید متضمن بعضی تقارن‌ها (مثل تقارن پاریته و برگشت زمان) باشد که این امر منجر به محدودیت شکل پتانسیل می‌شود [۱۰، ۱۱]. پتانسیل بین نوکلئونی تا حد زیادی نسبت به این عملیات ناوردا است. بنابراین شامل جملاتی مانند

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} (S^2 - S_1^2 - S_2^2) \quad (۲-۱)$$

خواهد بود که نسبت به پاریته و برگشت زمان هر دو ناوردا هستند [۵].

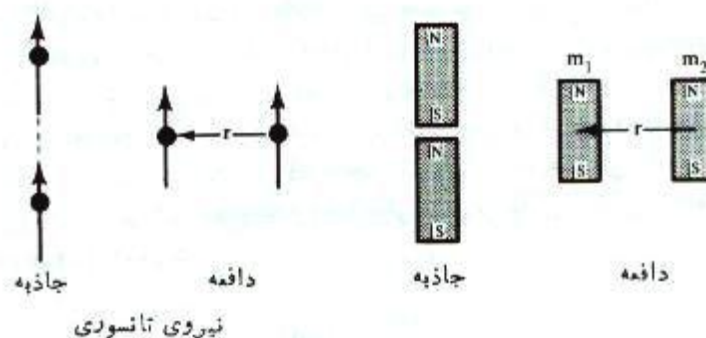
۱-۶-۳) پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله‌ی غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری (غیر مرکزی) است. تنها جهت مرجع برای نوکلئون جهت اسپین آن است. از این رو تنها جمله‌ای که می‌توان در نظر گرفت به صورت  $\vec{S}_1 \cdot \vec{r}$  یا  $\vec{S}_2 \times \vec{r}$  است که بردار مکان  $\vec{r}$  را با جهت  $\vec{S}$  ارتباط می‌دهد. برای آنکه شرط ناوردایی پاریته تامین شود می‌توانیم بخش تانسوری پتانسیل بین نوکلئونی را به صورت  $V_T(r) S_{12}$  در نظر بگیریم که در آن  $V_T(r)$  بستگی شعاعی نیرو و بزرگی آن را تامین می‌کند بنابراین داریم [۵، ۱۱، ۱۲]:

$$S_{12} = \frac{3(\vec{S}_1 \cdot \vec{r})(\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (۳-۱)$$

که این عبارت متضمن ویژگی تانسوری نیرو است و متوسط آن در تمام زوایا برابر صفر می‌شود. این بخش از نیرو باعث ناپایستگی تکانه زاویه‌ای مداری می‌شود که البته تکانه زاویه‌ای یکی از ثابت‌های حرکت در میدان نیروی مرکزی است.

عمده‌ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده گشتاور چارقطبی در حالت پایه‌ی دوترون حاصل می‌شود. نیروی غیرمرکزی که باعث ایجاد گشتاور چارقطبی در دوترون می‌شود را نیروی تانسوری می‌نامند. این نیرو به زاویه بین بردار واصل بین نوکلئون‌ها و بردار اسپین دوترون وابسته است. جالب

توجه است که نیروی تانسوری در پیکربندی پخت، جاذب و در پیکربندی کشیده، دافع است. یک مثال ساده کلاسیکی برای این مورد مثال دو آهنربای میله‌ای با گشتاورهای دوقطبی  $m_1, m_2$  در آرایش سیگاری و آرایش قرصی می‌باشد. همانطور که در شکل (۱-۱) مشاهده می‌کنید، در آرایش سیگاری آهنرباها یکدیگر را جذب و در آرایش قرصی یکدیگر را دفع می‌کنند [۴].



شکل (۱-۱): نیروی تانسوری در دوترون برای پیکربندی سیگاری شکل جاذبه و برای پیکربندی قرصی شکل دافعه است. با دو آهنربای میله‌ای می‌توان مثالی کلاسیکی برای یک نیروی تانسوری ارائه داد [۴].

۱-۶-۴) نیروی نوکلئون-نوکلئون نسبت به بار نوکلئون تقارن دارد. در اینجا مقصود از بار، جنس نوکلئون است و نه بار الکتریکی آن. این بدان معناست که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم  $pp$ ، فرقی بین برهمکنش  $pp$  و برهمکنش  $nn$  نیست. دلیل این امر آن است که طول‌های پراکندگی و همچنین بردهای موثر در برهمکنش‌های  $pp$  و  $nn$  با هم مساوی است.

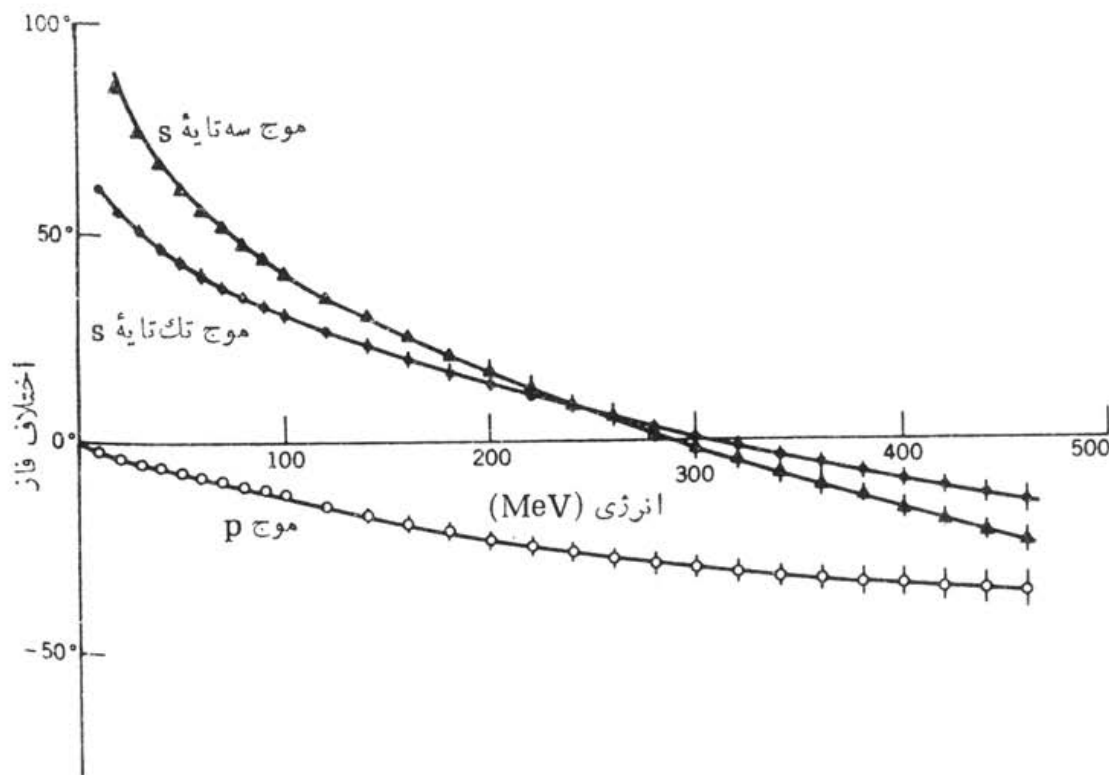
۱-۶-۵) نیروی نوکلئون-نوکلئون تقریباً مستقل از بار الکتریکی (نوع نوکلئون‌ها) است. یعنی پروتون و نوترون هیچ فرقی باهم ندارند. این بدان معناست که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم  $pp$ ، هر سه نیروی هسته‌ای  $nn$ ،  $pp$  و  $pn$  با هم مساوی‌اند (همانند حالت‌های اسپین). به این ترتیب استقلال بار شرطی قوی‌تر از تقارن بار است. البته در این مورد، شواهد امر چندان قاطع نیست. در واقع اختلاف

زیاد بین طول‌های پراکندگی را می‌توان ناشی از اختلاف بسیار کوچکی (در حدود یک درصد) در پتانسیل‌ها دانست که به آسانی به وسیله مدل نیروی تبادل<sup>۱</sup> قابل توجیه است [۵].

۱-۶-۶) برهمکنش نوکلئون-نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه تبدیل به دافعه می‌شود. اگر به‌طور ساده چگالی هسته‌ای را مورد مطالعه قرار دهیم متوجه می‌شویم که رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون‌ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت می‌ماند، و از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون‌ها جلوگیری کند. این امر باعث می‌شود که نوکلئون‌ها در فاصله متوسط معینی از یکدیگر قرار بگیرند [۵].

---

<sup>۱</sup>Exchange Force Model



شکل (۲-۱): اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی متوسط. تغییر اختلاف فاز موج S از مقادیر مثبت به منفی در انرژی حدود ۳۰۰ MeV نشان می‌دهد که در این انرژی‌ها نوکلئون فرودی با مغز دافعه در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون روبرو شده است [۵].

۱-۶-۷) برهمکنش نوکلئون-نوکلئون می‌تواند به تکانه یا سرعت نسبی نوکلئون‌ها هم بستگی داشته باشد. یکی از شواهد این امر را می‌توان در آزمایشات برخورد مشاهده کرد. یکی از صورت‌های قابل قبول این جمله که نسبت به پاریته و برگشت زمان هر دو ناوردا است، جمله اسپین-مدار می‌باشد [۵، ۱۰].

۱-۶-۸) برهمکنش نوکلئونی کوتاه برد است. آزمایش‌های اولیه پراکندگی  $\alpha$  توسط رادرفورد نشان داد که حداکثر برد نیروی هسته‌ای باید در حدود چند فرمی باشد. در واقع نیروی هسته‌ای در فواصل بلندی که در حدود ابعاد اتمی است به حدی ضعیف می‌شود که می‌توان از آن صرف نظر کرد.

۱-۶-۹) نیروی بین نوکلئون‌ها اشباع‌پذیر است. اگر بپذیریم که هر تک نوکلئون همه نوکلئون‌های

اطراف خود را جذب می‌کند باید تعداد  $\frac{A(A-1)}{2}$  زوج برهمکنش متمایز وجود می‌داشت در این

صورت باید انرژی بستگی با  $A(A-1) \approx A^2$  متناسب باشد و تمام هسته‌ها قطری برابر با برد نیروی هسته‌ای داشته باشند. هر دو پیش‌بینی انرژی بستگی متناسب با  $A^2$  و حجم هسته‌ای ثابت برای هسته‌های  $A > 4$  با تجربه مخالفت می‌کند. تجربه نشان داده‌است که حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته‌ها با عدد جرمی  $A$  متناسب‌اند و هر نوکلئون درون هسته فقط تعداد محدودی از نوکلئون‌های دیگر را تحت تاثیر قرار می‌دهد. بنابراین گفته می‌شود که نیروی هسته‌ای اشباع‌پذیر است [۵،۶،۹]. پدیده اشباع را می‌توان به دو روش مختلف توضیح داد؛ از طریق نیروهای تبادلی و یا از طریق نیروهایی که در فواصل کوتاه برد به شدت دافعه هستند (سخت مغز)<sup>۱</sup> [۱۴،۱۵]. در پیوندهای شیمیایی نیروهای تبادلی منجر به پدیده اشباع می‌شوند و نیروهای سخت مغز در مایعات کلاسیکی مسئولیت این پدیده را بر عهده دارند ولی از آزمایش‌های پراکندگی هر دو عامل ذکر شده یعنی سخت مغز و نیروهای تبادلی دارای سهمی در پدیده اشباع هستند [۸،۱۶].

## ۷-۱ شرایط پتانسیل هسته‌ای

شرایطی که پتانسیل هسته‌ای باید آن‌ها را دارا باشد، به شرح ذیل می‌باشند:

(۱-۷-۱) پتانسیل باید یک کمیت نرده‌ای باشد.

(۲-۷-۱) از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیرقابل تشخیص هستند، هرگاه جای دو ذره را با هم عوض کنیم، نباید پتانسیل تغییر کند.

(۳-۷-۱) طبق اصل ناوردایی وارونی زمانی، اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند.

(۴-۷-۱) ابتدا نیروهایی را که مستقل از سرعت هستند در نظر می‌گیریم، به این نیروها، نیروهای استاتیکی می‌گویند. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی‌تواند به  $\vec{P}, \vec{L}$  بستگی داشته باشد. زیرا این‌ها به سرعت وابسته هستند. بنابراین پتانسیل استاتیکی تنها شامل  $\vec{r}, \vec{s}$  است. بنابراین  $(\vec{s}, \vec{r})^2$  جمله‌ای است

<sup>۱</sup>Soft Core

که وابستگی پتانسیل استاتیکی به اسپین را نشان می‌دهد و می‌توان آن را به عنوان جمله‌ای که مولفه تانسوری را شامل می‌شود، نشان دهیم.

(۵-۷-۱) ویژگی دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون- نوکلئون می‌تواند به آن وابسته باشد، پاریته تابع موجی است که سیستم را توصیف می‌کند. از آن جا که پاریته به فرد یا زوج بودن  $L$  بستگی دارد، نیروی هسته‌ای برای  $L$  های زوج و فرد متفاوت است.

در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات بدست آمده پتانسیل‌های پدیده‌شناختی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت [۶،۱۰]:

$$V = V_C + V_{CS} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (۴-۱)$$

که در آن

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (۵-۱)$$

عملگر اسپین- تانسوری [۱۳،۱۷] و صورت دیگر معادله (۳-۱) با در نظر گرفتن  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$  می‌باشد.  $V_C$

انرژی پتانسیل مرکزی معمولی،  $V_{CS}$  جمله‌ی مرکزی وابسته به اسپین،  $V_T$  نیروی تانسوری،  $V_{LS}$  نیروی اسپین - مدار،  $\vec{L}$  عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای نسبی و  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  مختصات نسبی با بزرگی  $r = |\vec{r}|$  می‌باشند. در واقع برهمکنش نوکلئون-نوکلئون به مختصات نسبی بستگی دارد.

## ۸-۱ پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون

نقطه شروع در برهمکنش دو جسمی، داده‌های پراکندگی نوکلئون-نوکلئون و تعبیر آن بر حسب پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون است. در چند دهه گذشته پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون زیادی ارائه شده است که همه آنها به روش تطبیق با اطلاعات پراکندگی در انرژی‌های بالا و پایین ساخته شده‌اند. اما از آنجایی که این مقیاس در برخی موارد تا حدودی با شکست مواجه شده بود، تنها مقیاس اندازه گیری کیفی پتانسیل به شمار نمی‌رود. بنابراین مقایسه پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون

به روش‌های دیگر مانند نظریه مزونی یوکاوا<sup>۱</sup> و نتایج بدست آمده در مسئله‌ی دوترون نیز لازم خواهد بود [۹]. نتایج وقتی مورد رضایت واقع خواهد شد که پتانسیل بتواند ساختمان نوکلئون را به خوبی توصیف کند. برای مقایسه پتانسیل‌ها، ابتدا لازم است که آنها را بر حسب برد برهمکنش در سه گروه دسته‌بندی کنیم:

الف) بخش بلندبرد ( $r \geq 2 \text{ fm}$ ):

پتانسیل تبادل تک پیون<sup>۲</sup> به واسطه جرم کوچک پیون، بلندبردترین قسمت برهمکنش نوکلئون-نوکلئون است [۱،۵]. در اغلب مدل‌های پتانسیل، پتانسیل تبادل تک پیونی در نظر گرفته شده است و به دنبال اجزای پتانسیل‌های دیگر به عنوان بخش بلندبرد اضافه می‌شود. در ساده‌ترین حالت، بخش پتانسیل تک پیونی از رابطه زیر تبعیت می‌کند [۹،۱۱،۱۲،۱۸،۱۹]:

$$V_{\text{OPEP}}(r) = g^2 \bar{\mu} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left[ S_{12} \left( \frac{1}{(\mu r)^3} + \frac{1}{(\mu r)^2} + \frac{1}{3\mu r} \right) e^{-\mu r} + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{1}{3} \left( \frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{4\pi}{\mu^3} \delta(r) \right) \right] \quad (6-1)$$

$S_{12}$  عملگر تانسوری معمولی طبق رابطه (۱-۵) و  $g$  مقدار ثابت جفت‌شدگی بدون بعد پیون-نوکلئون است که از آزمایش بدست می‌آید و قدرت برهمکنش را نشان می‌دهد.

شکل کلی‌تر برهمکنش (OPEP) به صورت زیر بیان می‌گردد [۱،۳]:

$$V_{\text{OPEP}} = g^2 (\tau_1 \cdot \tau_2) [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla})] f(r) \quad (7-1)$$

که  $f(r)$  به شکل یوکاوا ی زیر است:

$$f(r) = \frac{e^{-(r/\rho_\pi)}}{r/\rho_\pi} \quad (8-1)$$

پتانسیل یوکاوا برای بیان این منظور یکی از بهترین پتانسیل‌ها می‌باشد و برد  $\rho_\pi$  با رابطه زیر داده می‌شود که بر مبنای رابطه عدم قطعیت بدست آمده است [۱،۳]:

<sup>1</sup> Yukawa's Meson Theory

<sup>2</sup> One Pion Exchange Potential (OPEP)

$$\rho_{\pi} = \frac{\hbar}{m_{\pi}c} = 1.414 \text{ fm} \quad (9-1)$$

رابطه (۷-۱) را می توان بسط داد و بر حسب جملات عملگرهای مرکزی و اسپین- تانسوری نوشت:

$$V_{\text{OPEP}} = \frac{g^2}{3} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left\{ s_{12} \left[ \frac{3}{r^3} + \frac{3}{\rho_{\pi} r} + \frac{1}{\rho_{\pi}^2} \right] f(r) + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}{\rho_{\pi}^2} f(r) - 4\pi (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r) \right\} \quad (10-1)$$

عملگر نردهای اسپین که مولفه های S را استخراج می کند، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) |S=0\rangle &= -3 \\ (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) |S=1\rangle &= 1 \end{aligned} \quad (11-1)$$

عملگر ایزواسپین مانسته عملگرهای اسپین در معادلات فوق است:

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) |T=0\rangle &= -3 \\ (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) |T=1\rangle &= 1 \end{aligned} \quad (12-1)$$

بنابراین پتانسیل تبادل تک پیون مرکزی که جمله  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$  را دارد، یک وزن نسبی معادل ۹، ۳-، ۳- و ۱ به ترتیب برای کانال های (S,T) معادل  $(0,0)$ ،  $(1,0)$ ،  $(0,1)$  و  $(1,1)$  می دهد. قدرت کلی برهمکنش پتانسیل تبادل تک پیونی که از داده های پراکندگی پیون-نوکلئون تعیین شده، حدود  $(g^2 \rho_{\pi}^2) = 42 \text{ MeV fm}^3$  است [۳].

(ب) بخش متوسط برد  $(1 \text{ fm} \leq r \leq 2 \text{ fm})$ :

از تبادلات مزون های اسکالر (تبادل دو پیون<sup>۱</sup> و مزون های سنگین) بدست می آید [۹،۲۰]. چرا که با دو پیون جرم ذره تبدالی دو برابر شده و برد نصف می شود.

(ج) بخش کوتاه برد  $(r \leq 1 \text{ fm})$ :

از تبادلات مزون های سنگین و تبادلات پیون های چندگانه (که به خوبی در QCD مشهود است) [۲۳-۲۰]، و نیز از تبادلات مزون های برداری بدست می آید [۲۴].

<sup>۱</sup>two pion exchange

به صورت تجربی می‌دانیم برای آنکه انواع تبادل‌های لازم در سیستم دو نوکلئونی امکان پذیر باشد باید سه نوع مزون  $\pi$  با اسپین صفر وجود داشته باشد [۱،۵،۱۰،۲۵]:

الف) مزون  $\pi^0$  با بار الکتریکی صفر و انرژی سکون معادل با ۱۳۵ MeV به عنوان کوانتای برهمکنش  $p-p$  ,  $n-p$  ,  $n-n$  می‌باشد. پیون منفردی که در برهمکنش بین نوکلئون‌های یکسان مبادله می‌شود، لزوماً از نوع  $\pi^0$  است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad n_2 + \pi^0 \rightarrow n_2 \quad (۱۳-۱)$$

یا

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2 \quad (۱۴-۱)$$

هیچ نوکلئون بارداری که بار ۱- یا ۲+ داشته باشد وجود ندارد، بنابراین تبادل پیون باردار در این مورد کارساز نیست:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^- \quad \text{but} \quad \pi^- + n_2 \rightarrow ? \quad (۱۵-۱)$$

$$p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+ \quad \text{but} \quad \pi^+ + p_2 \rightarrow ? \quad (۱۶-۱)$$

گرچه نوکلئون‌های با بار ۱- یا ۲+ در حالت‌های برانگیخته وجود دارند، ولی این حالت‌های پر انرژی در آزمایش‌های انرژی پایین، سهم قابل توجهی ندارد.

ب) مزون  $\pi^+$  با بار الکتریکی ۱+ و انرژی سکون معادل با ۱۳۹/۶ MeV فقط در برهمکنش‌های  $p-$   $p$  ,  $n-p$  وجود دارد.

ج) مزون  $\pi^-$  با بار الکتریکی ۱- و انرژی سکون معادل با ۱۳۹/۶ MeV فقط در برهمکنش  $n-p$  وجود دارد.

بر همکنش نوترون - پروتون با تبادل هر دو نوع پیون باردار و خنثی تحقق پذیر است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2 \quad (۱۷-۱)$$

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^+ \quad \pi^+ + p_2 \rightarrow n_2 \quad (۱۸-۱)$$

حال که با نیروی بین نوکلئونی تا حدودی آشنا شدیم نوبت آن است که به این موضوع بپردازیم که چه عاملی موجب برهمکنش نوکلئون‌ها می‌شود. در ادامه سعی می‌کنیم این موضوع را مورد بررسی قرار دهیم.

## ۹-۱ نظریه مزونی یوکاوا

یوکاوا در سال (۱۹۳۴-۱۹۴۷) مشخص نمود که نظریه کوانتومی میدان‌های هسته‌ای باید بر اساس کوانتوم جدیدی مرتب گردند. ذرات پیشنهادی یوکاوا مزون نامیده شدند (در اصل مزوترون که در آن پیشوند مزو به معنی میانه است) زیرا جرم فرضی آنها حد وسط بین جرم ذرات شناخته شده سبک (الکتران‌ها) و نوکلئون‌های سنگین بود [۲]. او با هوشیاری فراوان اضافه کرد علاوه بر نیروی تبادل و نیروهای اولیه الکتریکی و مغناطیسی، نیروهای دیگری نیز ممکن است بین ذرات وجود داشته باشند. یوکاوا نظریه مزون را برای توضیح برهمکنش‌های میان نوکلئون‌ها پیشنهاد کرد. او عبارتی برای پتانسیل هسته‌ای به صورت زیر بدست آورد [۲۶]:

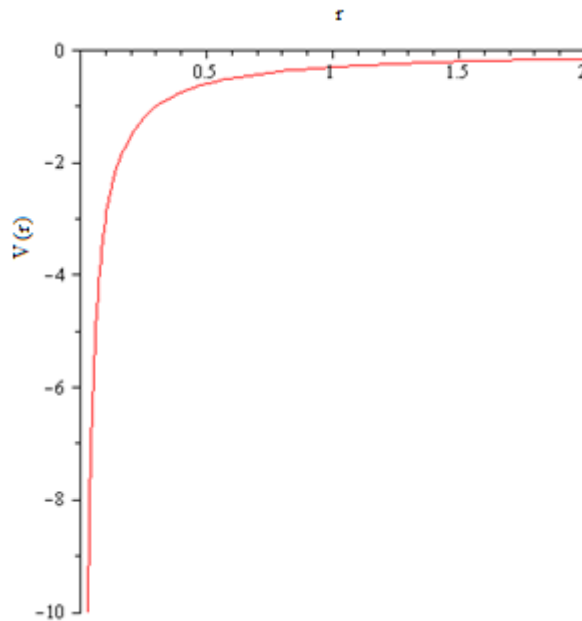
$$V(r) = -\frac{g^2}{r} \exp(kr) \quad (۱۹-۱)$$

یوکاوا با مقایسه نتایج بدست آمده و نتایج تجربی، تخمینی برای مقادیر  $k$  و  $g$  بدست آورد. در حال حاضر ثابت جفت‌شدگی نیروی هسته‌ای به صورت  $\frac{g^2}{\hbar c} \approx 1$  و نیروهای الکترومغناطیسی به صورت

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \quad \text{بدست آمده است. او پتانسیل را به شکل زیر معرفی نمود [۲۵، ۲۷، ۲۸]:}$$

$$V(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۲۰-۱)$$

که در آن  $\alpha$  برد نیروی هسته‌ای و  $v_0$  عمق پتانسیل می‌باشد. در شکل زیر نمودار پتانسیل یوکاوا برحسب تابعی از  $r$  رسم شده است:



شکل (۱-۳): پتانسیل یوکاوا برحسب تابعی از  $r$  [۵،۲۵]

بر خلاف نیروی کولنی که به صورت ساده به فاصله بستگی دارد، نیروی هسته‌ای به طور خیلی پیچیده‌ای به فاصله وابسته است. این پتانسیل تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیرو سریعاً با افزایش فاصله به صفر میل می‌کند.

یوکاوا با فرض اینکه کوانتوم میدان هسته‌ای دارای بار الکتریکی  $\pm e$  است دریافت که جرم  $M$  این ذرات باید در حدود ۲۰۰ برابر جرم الکترون باشد. ما می‌توانیم با استفاده مجدد از رابطه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

$$(۱-۲۱)$$

$$\Delta E \Delta t \leq \hbar \quad , \quad \Delta E = mc^2 \quad , \quad \Delta t \approx \frac{r}{c}$$

مقدار ۲۰۰ MeV را برای کوانتوم میدان هسته‌ای بدست آوریم.

طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هسته‌ای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی مبنی بر اینکه نیروی هسته‌ای کوتاه‌برد است، مشاهده خواهیم کرد [۲۵]. یکی از نکات مهم در مورد پتانسیل یوکاوا آن است که معادله شرودینگر<sup>۱</sup> با این پتانسیل به طور

<sup>۱</sup>Schrodinger equation

دقیق و تحلیلی قابل حل نمی‌باشد. با این حال اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین-گوردن<sup>۱</sup> می‌گوییم [۱۰، ۲۵]. همان‌طور که می‌دانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E^2 = P^2 c^2 + m_\pi^2 c^4 \quad ; \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad P \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (22-1)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + m_\pi^2 c^4 \Phi \quad (23-1)$$

با در نظر گرفتن چهار بردار  $x_1, x_2, x_3$  برای قسمت فضایی و  $x_4 = ict$  قسمت وابسته به زمان رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left[ -\hbar^2 c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + m_\pi^2 c^4 \right) \right] \Phi = 0 \quad (24-1)$$

که معادله کلاین-گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورت‌های زیر می‌توانیم بنویسیم.

وابسته به زمان:

$$(\square^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad ; \quad \square^2 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad , \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} \quad (25-1)$$

مستقل از زمان:

$$(\nabla^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad ; \quad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (26-1)$$

که برای حالت پایا معادله‌ی کلاین-گوردن به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow \square^2 = \nabla^2 \rightarrow (\nabla^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad (27-1)$$

---

<sup>1</sup>Klein-Gordon equation

با حل معادله‌ی اخیر برای  $\Phi$  به جواب  $\Phi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$  می‌رسیم. بنابراین برد نیروهای هسته‌ای از مرتبه

$\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{m_\pi c}$  می‌باشد که در آن  $m_\pi$  جرم مزون  $\pi$  یا پیون است. این نظریه توسط داده‌های تجربی نیز

ثابت شده است. با برابر قرار دادن مقدار تئوری برد نیروی هسته‌ای  $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cms}$  [۲،۱۰] با

$\frac{\hbar}{m_\pi c}$  به نتیجه  $m_\pi = 200 m_e$  می‌رسیم که با جواب بدست آمده از آزمایشات  $m_\pi = 266 m_e$  قابل

مقایسه است. پس معادله‌ی کلاین-گوردن مزون  $\pi$  را توجیه می‌کند [۱۰،۲۵].

## ۱-۱۰ نیروهای تبادلی

مفهوم نیروهای تبادلی اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونی‌اش بیان شد. طبق این نظریه عامل برهمکنش بین نوکلئون‌ها مزون  $\pi$  است [۲۵]. ذرات تبادلی حامل نیروی هسته‌ای را مزون می‌نامند. سبک‌ترین مزون‌ها را که مزون  $\pi$  یا پیون نامیده می‌شود، عامل اصلی آن قسمت از پتانسیل نوکلئون - نوکلئون که بلندترین برد را دارد، می‌دانیم.

شاید بتوان عامل پیوند هسته‌ای را تبادل دو پیونی دانست. در صورتی که دو نوکلئون به اندازه کافی به هم نزدیک شوند ممکن است که دو مزون به طور همزمان مبادله شوند. متأسفانه، تبادل چند مزونی فرایند پیچیده‌ای است که نمی‌توان آن را به روشنی با نظریه‌های فعلی میدان محاسبه کرد. بنابراین، اثر آن را در نیروی هسته‌ای نمی‌توان با اطمینان حساب کرد. در نگاه اول شاید به نظر رسد که نیروی هسته‌ای نباید به اینکه  $s = 0$  یا  $s = 1$  و زوج و فرد بودن  $L$  وابسته باشد. ولی شواهدی دال بر وابستگی نیروی هسته‌ای به اسپین و تکانه مداری وجود دارد [۱]. موارد مشاهده شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۵]:

۱. انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون مقدار اشباعی دارد.

۲. نوکلئون‌ها چگالی ثابت دارند.

۳. تحلیل‌های انتقال فاز و قطبیدگی در انرژی بالا مستلزم حضور نیروهای تبادلی می‌باشد.

این رفتار به این واقعیت مربوط می‌شود که نیروهای هسته‌ای از تبادل مزون نتیجه می‌شود و تبادل مزون منجر به نیروهای تبدالی می‌شود. به طور کلی سه نوع نیروی تبدالی وجود دارد: تبادل اسپینی یا نیروی بارتلت، تبادل ایزواسپینی یا نیروی هایزنبرگ و تبادل فضایی یا نیروی ماژورانا [۱۰]، که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

## ۱۱-۱ خواص عملگرهای تبدالی موثر بر تابع موج

سه اپراتور  $P^B$  و  $P^H$  و  $P^M$  به ترتیب اپراتورهای تبدالی بارتلت، هایزنبرگ و ماژورانا<sup>۱</sup> نامیده و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰]:

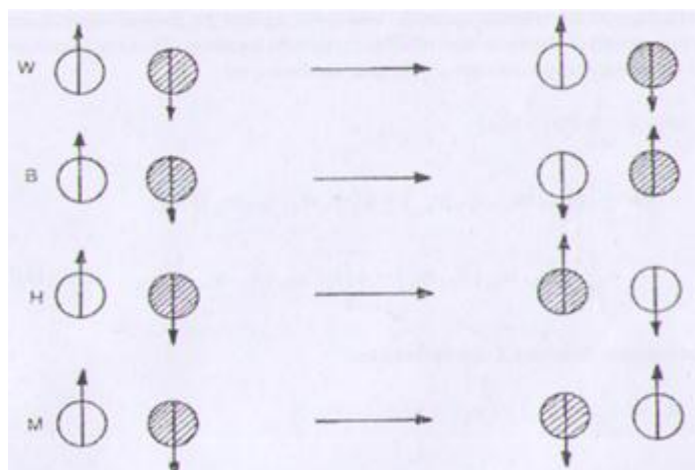
$$\begin{aligned} P^B &\equiv P^\sigma \equiv \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \\ P^H &\equiv -P^\tau \equiv -\frac{1}{2}(1 + \tau_1 \cdot \tau_2) \\ P^M &\equiv -\frac{1}{4}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)(1 + \tau_1 \cdot \tau_2) \end{aligned} \quad (۲۸-۱)$$

که در روابط زیر نیز صدق می‌کنند [۱۰]:

$$\begin{aligned} P^H &= P^M P^\sigma = P^M P^B \\ P^M &= -P^\sigma P^\tau = P^B P^H \\ (P^B)^2 &= (P^H)^2 = (P^\tau)^2 = (P^M)^2 = 1 \end{aligned} \quad (۲۹-۱)$$

عملگر بارتلت اعداد کوانتومی اسپینی، عملگر هایزنبرگ اعداد کوانتومی ایزواسپینی و عملگر ماژورانا هر دو عدد کوانتومی اسپینی و ایزواسپینی را مبادله می‌کند که خود مستلزم مبادله فضایی تابع موج می‌باشد به همین خاطر است که در برخی از منابع عملگر ماژورانا را عملگر فضایی نیز می‌نامند. اثر اپراتورهای تبدالی فوق به گونه‌ای در شکل (۱-۴) به نمایش گذاشته شده است.

<sup>1</sup> Bartlett, Heisenberg and Majorana exchange operators



شکل (۴-۱): اثر اپراتورهای تبدیلی  $P^B, P^M, P^H$  [۱۰]

لازم به ذکر است که تابع موج، خود از سه بخش اسپینی وایزواسپینی و فضایی تشکیل شده است [۱۰].

$$\Psi_{\text{tot}} = \Psi_{\text{spin}} \Psi_{\text{isospin}} \Psi_{\text{space}} \quad (۳۰-۱)$$

که  $\Psi_{\text{tot}}$  نسبت به تبادل همه اعداد کوانتومی نامتقارن است [۱۰]. در ادامه به شرح این مطالب می‌پردازیم.

## ۱-۱۱-۱ پتانسیل بارتلت

این پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_B \Psi = V_B(r) P^\sigma \Psi \quad (۳۱-۱)$$

که عملگر بارتلت اعداد کوانتومی اسپینی را مبادله می‌کند. جهت توضیح این مطلب، دو فرمیون که دارای اسپین  $\sigma(1)$  و  $\sigma(2)$  هستند در نظر می‌گیریم که دارای یکی از شرایط زیر می‌باشند [۱۰]:

(۱) حالت تک‌تایه ( $S=0$ ):

$$\begin{aligned} |s| = \left| \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right| &= 0 & ; & \quad S^2 = S(S+1) = \frac{1}{2}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = 0 \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 &= -3 & ; & \quad P^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = -1 \end{aligned} \quad (۳۲-۱)$$

(۲) حالت سه تاییه ( $S = 1$ ):

$$|S| = \left| \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right| = 1 \quad ; \quad S^2 = S(S+1) = \frac{1}{2}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = 2 \quad (۳۳-۱)$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1 \quad ; \quad P^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = 1$$

از روابط بخش اول مشاهده می شود که اگر  $S = 0$  (حالت تک تاییه) باشد، مبادله اسپین صرفاً علامت تابع موج را تغییر می دهد و از روابط بخش دوم ملاحظه می شود که اگر  $S = 1$  (حالت سه تاییه) باشد، مبادله اسپین اثری بر تابع موج ندارد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P^\sigma \chi_0^0 &= -\chi_0^0 & ; & \quad (S = 0) \\ P^\sigma \chi_1^{1,0,-1} &= \chi_1^{1,0,-1} & ; & \quad (S = 1) \end{aligned} \quad (۳۴-۱)$$

که  $\chi$  تابع موج اسپینی است [۱۰].

## ۲-۱۱-۱ پتانسیل هایزنبرگ

پتانسیل مربوط به آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_H \psi = V_H(r) P^H \psi \quad (۳۵-۱)$$

می توان نشان داد که عملگر  $P^H$  اسپین و مختصات فضایی سیستم را عوض می کند. با ترکیب اثرات  $P^\sigma$  و  $P^M$  می توان نوشت:

$$V_H(r) P^H \psi = V_H(r) P^M P^B \psi = \begin{cases} +V_H(r) \psi & ; T = 0 \\ -V_H(r) \psi & ; T = 1 \end{cases} \quad (۳۶-۱)$$

همانطور که دیده می شود اپراتور هایزنبرگ، هم مختصات فضایی و هم مختصات اسپینی را تغییر می دهد.

### ۱-۱۱-۳ پتانسیل ماژورانا

پتانسیل ماژورانا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_M \psi = V_M(r) P^M \psi \quad (۱-۳۷)$$

قبلاً اشاره شد اپراتور  $P^M$  هر دو عدد کوانتومی اسپینی و ایزواسپینی را مبادله می‌کند که خود مستلزم مبادله فضایی تابع موج می‌باشد، از این رو به آن اپراتور تبدیل فضایی نیز می‌گویند. این اپراتور مختصات مکانی دو ذره را تغییر می‌دهد به این صورت که  $P_X(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ . برای سیستم دو ذره‌ای به نظر می‌آید اگر پارितه سیستم زوج باشد با تبدیل مختصات فضایی، تابع موج ثابت باقی می‌ماند. در غیر این صورت اگر تابع موج دارای پارितه فرد باشد، علامت تابع موج تغییر می‌کند. به همین جهت به آن متغیر پارितه حالت نیز می‌گویند. از آنجایی که زوج و فرد بودن پارितه به زوج یا فرد بودن  $L$  بستگی دارد، خواهیم داشت:

$$V_M(r) P^M \psi = V_M(r) P^B P^H \psi = \begin{cases} +V_M(r) \psi & ; L \text{ is even} \\ -V_M(r) \psi & ; L \text{ is odd} \end{cases} \quad (۱-۳۸)$$

از همین رابطه می‌توان نتیجه گرفت که این عملگر روی تابع موج دوترون عملاً بی‌تاثیر است. زیرا دوترون فقط مقادیر ۰ و ۲ را برای  $L$  دارد. در حقیقت نیروی ماژورانا بیان این واقعیت است که پتانسیل هسته‌ای به زوج یا فرد بودن  $L$  نیز بستگی دارد.

برخی دیگر از خواص اپراتورهای تبدیلی را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت [۱۰]:

$$\begin{aligned} P^\sigma P^\tau P^M \psi &= -\psi \\ P^\tau P^H \psi &= -\psi \\ P^M P^\tau \psi &= -\psi \end{aligned} \quad (۱-۳۹)$$

علاوه بر این سه نیروی تبدیلی، نیروی دیگری به نام نیروی ویگنر<sup>۱</sup> وجود دارد که مرکزی بوده و هیچ تبدیلی در آن رخ نمی‌دهد. پتانسیل ویگنر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۰]:

$$V_W \psi = V_W(r) P^W \psi \quad (۱-۴۰)$$

---

<sup>1</sup> Wigner force

در جدول زیر مقادیر اپراتورهای تبدالی فوق را در حالت‌های مختلف ذکر نموده‌ایم.

جدول (۱-۲): مقادیر اپراتورهای تبدالی برای حالت‌های مختلف [۱۰]

| اپراتور                                                               | پاریده زوج | زوج ۱   | پاریده فرد | ۱ فرد   |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|---------|------------|---------|
|                                                                       | سه تایی    | تک تایی | سه تایی    | تک تایی |
| $P^B \equiv P^\sigma \equiv \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)$ | ۱          | -۱      | ۱          | -۱      |
| $-P^H \equiv P^T \equiv \frac{1}{2}(1 + \tau_1 \cdot \tau_2)$         | -۱         | ۱       | ۱          | -۱      |
| $P^M \equiv -P^\sigma P^T$                                            | ۱          | ۱       | -۱         | -۱      |
| $P^W \equiv 1$                                                        | ۱          | ۱       | ۱          | ۱       |

برای خلاصه کردن این بحث، پتانسیل تبدالی را در حالت کلی زیر بیان می‌داریم [۱۰]:

$$V = V_w(r) + V_B(r)P^B + V_H(r)P^H + V_M(r)P^M \quad (۱-۴۱)$$

که معادله فوق برای پتانسیل‌های متفاوت کاربرد دارد. زیرا حالت‌های تک‌تایی و سه‌تایی و حالت‌هایی

با پاریده زوج و فرد را در برمی‌گیرد.

حال که با ویژگی‌های عملگرهای تبدالی آشنا شدیم، در ادامه به بررسی ویژگی‌های یک پتانسیل بر

حسب نیروهای تبدالی می‌پردازیم.

## ۱-۱۲ پتانسیل نوکلئون-نوکلئون بر حسب نیروهای تبدالی

کمیت‌های موجود در سیستم دو نوکلئونی که نیرو به آنها وابسته است به قرار زیر می‌باشند:

$\vec{r}_{12}$  : برداری که مکان نوکلئون ۱ را به نوکلئون ۲ ارتباط می‌دهد.

$\vec{p}_{12}$  : تکانه نسبی دو ذره

$\vec{S}$  : اسپین کل دو ذره

$\vec{L}$  : حاصلضرب خارجی دو بردار  $\vec{r}_{12}$  و  $\vec{p}_{12}$  می‌باشد.

می‌توان به عنوان نمونه پتانسیل برهمکنش نوکلئون-نوکلئون اسکالر را به صورت زیر در نظر گرفت [۱۰]:

$$V = V_W(r) + V_B(r)P^\sigma + V_T(r)S_{12} \quad (۴۲-۱)$$

که در آن  $V_W(r)$  پتانسیل ویگنر،  $V_B(r)$  پتانسیل بارتلت،  $V_T(r)$  پتانسیل تانسوری [۲۹] و  $S_{12}$  همانند معادله (۵-۱) می‌باشد.

پتانسیل کلی و عمومی که برهمکنش بین نوکلئون‌ها را نمایش می‌دهد توسط مارشاک-اوکوبو<sup>۱</sup> بیان شد که این پتانسیل تحت انتقال، دوران، پاریته، برگشت زمان و تبدیلات گالیله ناوردا می‌ماند. نتیجه آن پتانسیلی به شرح زیر می‌باشد [۱۰]:

$$V = v_0 + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)v_1 + s_{12}v_2 + (\vec{L} \cdot \vec{S})v_3 + \frac{1}{2} \left[ \left( \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L} \right) \left( \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L} \right) + \left( \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L} \right) \left( \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L} \right) \right] v_4 + \left( \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \right) \left( \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} \right) v_5 + h.c \quad (۴۳-۱)$$

در پراکندگی کشسان می‌توان از جمله دارای  $v_5$  صرف نظر کرد این بدان معناست که تا انرژی حدوداً ۳۰۰ MeV نیروی هسته‌ای به  $\vec{p}$  وابسته نیست. بعلاوه می‌توان نشان داد که حتی جمله شامل  $v_4$  نیز در حالت کلی تا انرژی حدوداً ۳۰۰ MeV برای تحلیل اطلاعات مورد نیاز نیست. می‌توان معادله بالا را به صورت زیر در نظر گرفت [۱۰]:

$$V = v_d(r) + v_\sigma(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + v_\tau(r)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + v_{\sigma\tau}(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + v_{Td}(r)s_{12} + v_{\tau T}(r)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)s_{12} + v_{ls}(r)(\vec{L} \cdot \vec{S}) + v_{ls,\tau}(r)(\vec{L} \cdot \vec{S})(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (۴۴-۱)$$

که در آن :

$v_d(r)$  : جمله مستقیم بدون تبادل

$v_\sigma(r)$  : جمله تبادل اسپینی

$v_\tau(r)$  : جمله تبادل مستقیماً ایزواسپینی

<sup>1</sup>Marshak-okubo

$V_{\sigma\tau}(r)$  : جمله مستقیم تبادل

$V_{Td}(r)$  : جمله مستقیم تانسوری بدون تبادل

$V_{\tau T}(r)$  : جمله تانسوری با تبادل ایزواسپینی

$V_{ls}$  : جمله جفت‌شدگی اسپین-مدار بدون تبادل

$V_{ls,\tau}(r)$  : جمله اسپین-مدار تبادل ایزواسپین

و در نهایت می‌توان پتانسیل هسته‌ای را بر حسب جملات پتانسیل و عملگرهای تبدالی به صورت زیر

نوشت [۱۰]:

$$V = V_W(r) + V_M(r)P^M + V_B(r)P^B + V_H(r)P^H + V_{TW}(r)s_{12} + V_{TM}(r)s_{12}P^M + V_{ls}(\vec{L}, \vec{S}) \quad (۴۵-۱)$$

و اما سوال بعدی که می‌توان مطرح کرد این نکته است که چه دلیلی برای حضور نیروهای تبدالی در

هسته وجود دارد. در ادامه به این موضوع می‌پردازیم.

### ۱۳-۱ توجیه حضور نیروی تبدالی در هسته‌ها

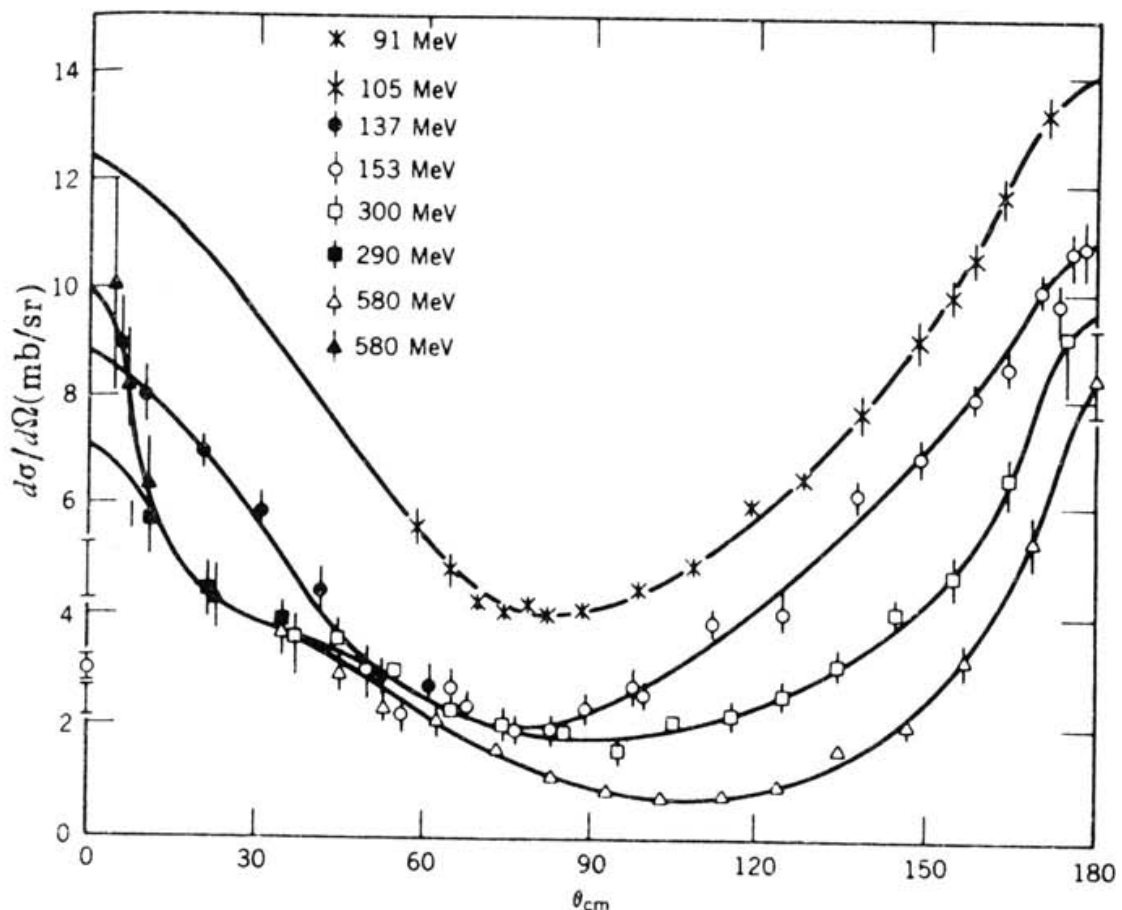
دو دلیلی که حضور نیروی تبدالی در هسته‌ها را تایید می‌کند، به صورت زیر بیان می‌داریم [۵]:

الف) خاصیت اشباع نیروی هسته‌ای:

از تجربه می‌دانیم که چگالی هسته‌ای نسبتاً ثابت است. همچنین انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون در هسته‌های سنگین گوناگون تقریباً ثابت می‌باشد. به نظر می‌رسد که هر نوکلئون فقط تعداد کمی از همسایه‌های نزدیک به خود را جذب می‌کند و در فواصل خیلی کوتاه همان همسایه‌های نزدیک را نیز دفع می‌کند تا از نزدیکی بیش از حد آنها جلوگیری کند که این موضوع را در فیزیک هسته‌ای با انتخاب یک پتانسیل مرکزی مناسب که برد محدود و مرکزی به صورت یک مغز دافعه داشته باشد، توضیح می‌دهند. شباهت فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای در این مورد قابل توجه است.

ب) مطالعه پراکندگی n-p در انرژی‌های بالا:

از مطالعه پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های بالا دلایلی بدست می‌آید که به نوعی مدل نیروی تبادل را تایید می‌کند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در شکل (۵-۱) نشان داده شده است.



شکل (۵-۱): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های متوسط [۵].

سطح مقطع پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر در جهات رو به جلو دارای قله‌ای بزرگ است و این یعنی اینکه انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف کوچک است ولی آیا وجود قله‌ای بزرگ در زاویه پراکندگی  $180^\circ$  توجیهی می‌تواند داشته باشد؟

همانگونه که در شکل (۵-۱) نشان داده شده است، قله بزرگ پراکندگی رو به جلو (در زوایای نزدیک به صفر) را انتظار داریم. اما قله‌ای به همان بزرگی در پراکندگی رو به عقب (در زوایای نزدیک به

۱۸۰۰) مشاهده می‌شود که آن را نشانه وجود نیروی تبادل می‌دانیم. اگر فرض کنیم که در طی برخورد نوترون و پروتون جایشان را با هم عوض می‌کنند مدل تبادل می‌تواند توضیح قانع کننده‌ای ارائه کند و این یعنی اینکه نوترونی که به طرف جلو در حرکت است، به پروتون و پروتونی که به طرف عقب در حرکت است (از دیدگاه چارچوب مرکز جرم)، به نوترون تبدیل می‌شود.

بنابراین هم خصوصیت اشباع نیروهای هسته‌ای و هم وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی np را می‌توان با استفاده از نیروی تبادل توضیح داد؛ در مورد اولی می‌گوییم برای آنکه نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون‌ها وجود داشته باشد باید بین آنها «چیزی» رد و بدل شود و در مورد دومی می‌گوییم که بین نوکلئون‌ها «چیزی» مبادله می‌شود که عملاً خصوصیت آنها را تغییر می‌دهد.

در مراحل آغازین فیزیک کلاسیک برهمکنش بین اجسام را یک «کنش از دور» می‌دانستند. این بدان معنی است که نیروی یک جسم به طریق اسرارآمیزی در فضا به جسم دیگری منتقل می‌شود. پیشرفت بزرگ فیزیک نظری قرن نوزدهم را باید در معرفی مفهوم میدان دانست. طبق این نظریه هر جسمی در فضا، یک میدان نیرو (که نمونه‌های آن میدان‌های الکترومغناطیس و گرانش هستند) ایجاد می‌کند و برهمکنش جسم دوم نه مستقیماً با جسم اول بلکه فقط از طریق همین میدان صورت می‌گیرد. در مورد میدان الکترومغناطیسی چگونگی انتقال میدان در فضا توسط ماکسول نشان داده شد. عمده‌ترین تحول قرن بیستم را باید پیدایش مکانیک کوانتومی بدانیم که بنابر آن هر گونه تبادل انرژی لزوماً به صورت بسته‌ها یا مضرب‌هایی از یک مقدار گسسته یا کوانتوم انرژی است. میدان کلاسیک کمیتی یکنواخت و پیوسته است و برای اینکه نظریه کلاسیک میدان را با نظریه کوانتومی میدان سازگار کنیم خود میدان را باید به صورت کوانتومی دریاوریم؛ یعنی بنابر نظریه کوانتومی میدان، جسم اول در فضای اطرافش یک میدان کلاسیک به وجود نمی‌آورد بلکه از خود کوانتوم میدان گسیل می‌کند در این صورت جسم دوم می‌تواند این کوانتوم‌های میدان را جذب کند (و به طرف جسم اول باز پس فرستد). پس این دو جسم به طور مستقیم با کوانتوم‌های میدان مبادله شده و به طور غیر مستقیم با یکدیگر برهمکنش دارند. طبیعی است که آن چیزی را که در برهمکنش نوکلئون-

نوکلئون مبادله می‌شود کوانتوم میدان هسته‌ای در نظر گرفته شود. روشن است که برای تبدیل یک نوترون با اسپین  $1/2$  به یک پروتون با اسپین  $1/2$  ذره مبادله شده باید دارای اسپین درست (صفر یا یک) و بار الکتریکی باشد. بعلاوه اگر بخواهیم همان مفهوم نیروی تبادل را برای برهمکنش  $n-n$  هم به کار ببریم، نوع بدون بار ذره‌ی مبادله شونده نیز باید وجود داشته باشد. با استفاده از برد نیروی هسته‌ای که در عمل مشاهده شده است می‌توان جرم ذره تبدالی را برآورد کرد. فرض کنید که نوکلئون (که آن را با  $N$  نشان می‌دهیم تا پروتون و نوترون هر دو را شامل شود) ذره‌ای مانند  $X$  را جذب می‌کند:



یک نوکلئون چگونه می‌تواند یک ذره با انرژی جرمی  $m_x c^2$  از خود گسیل کند و بدون نقض پایستگی انرژی همچنان به صورت نوکلئون باقی بماند؟ چنین عملی ممکن نیست مگر اینکه گسیل و جذب مجدد نوکلئون در چنان فاصله کوتاه  $\Delta t$  صورت بگیرد که ما از نقض پایستگی انرژی مطلع نشویم. چون اصل عدم قطعیت توانایی ما را در اندازه‌گیری انرژی (و در نتیجه در تعیین پایستگی انرژی) محدود می‌کند. اگر  $\Delta t < \hbar / (m_x c^2)$  باشد ما از نقض پایستگی انرژی به میزان  $\Delta E = m_x c^2$  مطلع نخواهیم شد. بیشینه برد نیرو را بیشینه فاصله‌ای که ذره  $X$  می‌تواند در زمان  $\Delta t$  طی کند، تعیین می‌کند. اگر سرعت ذره را از مرتبه  $c$  بگیریم، حداکثر برد ذره ( $R$ ) چنین می‌شود:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_x c^2} \quad (47-1)$$

که در آن به جای  $\hbar c$  از تقریب ساده‌ای استفاده شده است. معادله (47-1) حاکی از وجود رابطه‌ای مفید بین انرژی جرمی ذرات مبادله شونده و برد نیروی تبادل است. روشن است که اگر برد نیروی هسته‌ای در حدود  $1 \text{ fm}$  باشد انرژی جرمی ذره تبدالی می‌باید در حدود  $200 \text{ MeV}$  شود. چنین ذراتی را که فقط برای لحظاتی زودگذر دوام می‌آورند و می‌توانند قانون پایستگی انرژی و تکانه را

نقض کنند، ذرات مجازی<sup>۱</sup> می‌گویند. می‌توان نیروی حاصل از تبادل ذرات مجازی را مشاهده کرد ولی نمی‌توان خود این ذرات را در حین تبادل مشاهده کرد (اما ذرات مجازی مبادله شونده را می‌توان همانند ذرات معمولی در نظر گرفت).

---

<sup>۱</sup> Virtual Particles



## فصل دوم

### نیروها و پتانسیل‌های تبادل

## ۲-۱ توصیف میکروسکوپیکی پراکندگی کائون از هسته با استفاده از نظریه

### تبادل مزون:

بررسی خواص محیط منجر به مطالعات بسیاری برای بررسی و کشف خواص مزون‌های تبدلی  $\rho, \omega, \sigma$  در برهمکنش‌ها شد [۳۰-۳۴]. سالیان پیش برهمکنش  $K^+$  با هسته به صورت تئوری و تجربی مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۵-۴۰].  $K^+$  یک مزون شبه اسکالر (پاریته فرد، اسپین صفر) با عدد کوانتومی S است. برهمکنش  $K^+ A$  متعلق به مجموعه برهمکنش‌های قوی است با این حال یک کاراکتر ضعیف دارد، در حدی که مزون  $K^+$  می‌تواند در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون عمیق‌تر به داخل هسته نفوذ پیدا کند [۴۱]. اگرچه پتانسیل اپتیکی می‌تواند فرآیند پراکندگی از این برهمکنش‌ها را در انرژی متوسط توصیف کند، هنوز هم نتایج پیش‌بینی شده غیرمنطقی تئوری برای سطح مقطع کلی در تکانه  $500-1000 \text{ MeV/c}$  یافت می‌شود مثلاً ببینید [۴۲-۴۵].

مهمترین تبادلات مزونی در برهمکنش  $K^+ N$ ، مزون بردار- شبه بردار  $\rho(1^-, 1)$ ، مزون دافعه بردار- شبه اسکالر  $\omega(1^-, 0)$  و مزون جاذبه اسکالر- شبه اسکالر  $\sigma(0^+, 0)$  می‌باشند. پتانسیل برهمکنش  $K^+ N$  با توجه به مدل تبادل یک بوزون<sup>۱</sup> [۴۶-۴۸، ۸، ۱۳، ۲۰]،  $V_{K^+N}(r)$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود، که در آن  $P_{lab} < 1 \text{ GeV/c}$  است:

$$V_{K^+N}(r) = V_\sigma(r) + V_\rho(r) + V_\omega(r) \quad (1-2)$$

و

$$\begin{aligned} V_\sigma(r) &= -\gamma_1^0 \gamma_2^0 J_\sigma(r) \\ V_\rho(r) &= \gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_1^\mu \gamma_2^\mu J_\rho(r) \\ V_\omega(r) &= \gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_1^\mu \gamma_2^\mu J_\omega(r) \end{aligned} \quad (2-2)$$

که  $\gamma_i^0$  و  $\gamma_i^\mu$  ( $i=1,2$ ) ماتریس‌های دیراک و توابع  $J$ ،  $(J_\sigma(r), J_\rho(r), J_\omega(r))$  نوعی تابع یوکاوا مناسب هستند. برای توصیف بهتر نتایج تئوری و سازگاری بیشتر با داده‌های تجربی، لازم است یک

<sup>1</sup> One Boson Exchange (OBE)

مزون دافعه اضافی (بیش از آنچه که توسط مزون  $\omega$  بدست آمده)، در برهمکنش اضافه شود. برای این منظور بهترین گزینه مزون دافعه  $\sigma_0$  خواهد بود که دارای برد کوتاه‌تر و جرم بیشتر از مزون  $\omega$  است. بنابراین پتانسیل  $K^+ N$  به فرم زیر تعمیم می‌یابد:

$$V_{K^+N}(r) = V_\sigma(r) + V_\rho(r) + V_\omega(r) + V_{\sigma_0}(r) \quad (3-2)$$

در فضای دیراک شرایط نرمال سازی تابع موج نوکلئون  $f_\gamma(\vec{r})$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

که ساختار مزون  $\sigma_0$  مانند ساختار مزون  $\sigma$  در نظر گرفته شده است اما با علامت مخالف و جرم تبدیلی سنگین‌تر [۴۹]، که به شرح زیر می‌باشد:

$$V_{\sigma_0}(r) = \gamma_1^0 \gamma_2^0 J_{\sigma_0}(r) \quad (4-2)$$

## ۲-۱-۱ بهنجارش تابع موج نوکلئون:

در فضای دیراک شرایط نرمال سازی تابع موج نوکلئون  $f_\gamma(\vec{r})$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\langle f_\gamma(\vec{r}) | f_\gamma(\vec{r}) \rangle = \langle \varphi_\gamma(\vec{r}) | \varphi_\gamma(\vec{r}) \rangle + \langle \chi_\gamma(\vec{r}) | \chi_\gamma(\vec{r}) \rangle \quad (5-2)$$

جایی که  $\varphi_\gamma(\vec{r})$  و  $\chi_\gamma(\vec{r})$  به ترتیب مولفه‌های پایین و بالا تابع موج هستند. در نتیجه تابع موج بهنجار نوکلئون می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۵۰-۵۱]:

$$|\varphi'(\vec{r})\rangle = \sqrt{1 + \frac{P^2}{4m_2^2 c^2}} |\varphi(\vec{r})\rangle \quad (6-2)$$

که  $m_2$  جرم نوکلئون و  $P$  تکانه نسبی است. می‌توان بسط  $\chi_\gamma(\vec{r})$  را بر حسب  $\varphi_\gamma(\vec{r})$  به صورت زیر نوشت [۵۲]:

$$\chi_i(\vec{r}) \approx \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{P}}{2mc} \varphi_i(\vec{r}) \quad (7-2)$$

که  $\vec{\sigma}_i$  ماتریس اسپین پائولی است.

## ۲-۱-۲ سینماتیک کائون-نوکلئون و بسط تابع موج:

در سیستم  $K^+ N$ ،  $m_1$  و  $r_1$  به ترتیب جرم و مختصات کائون و  $m_2$  و  $r_2$  جرم و مختصات نوکلئون است. از این رو مختصات نسبی و مختصات مرکز جرم به ترتیب به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \sqrt{2} \frac{m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{R} &= \sqrt{2} \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}\quad (۸-۲)$$

به صورت مشابه تکانه نسبی و تکانه مرکز جرم به ترتیب به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\vec{p}_r &= \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad \vec{p}_{KN} \equiv \vec{p}_r \\ \vec{p}_R &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2\end{aligned}\quad (۹-۲)$$

تابع موج کائون  $\varphi_\alpha(\vec{r})$  به صورت [۵۳]:

$$\varphi_\alpha(\vec{r}) = \sum_{m_{l_\alpha}} \left[ 1_\alpha 0 m_{l_\alpha} 0 | l_\alpha m_{l_\alpha} \right] \varphi_{n_\alpha l_\alpha m_{l_\alpha}}(\vec{r}) \hat{P}_{T_\alpha} \quad (۱۰-۲)$$

که  $\alpha$  نشاندهنده مجموعه اعداد کوانتومی در ضرایب کلبش-گوردن  $(n_\alpha, l_\alpha, J_\alpha, m_\alpha)$  است و جالب توجه است که هیچ وابستگی‌ای به تابع اسپین پرتابه (کائون) وجود ندارد و به عنوان یک ذره بدون اسپین است. برای بسط تابع موج نوکلئون  $\varphi_\gamma(\vec{r})$  در ترم تابع اسپینی  $\chi_{m_{s_\gamma}}^{1/2}$  و ایزوتوپ اسپینی  $\hat{P}_{T_\alpha}$  داریم:

$$\varphi_\gamma(\vec{r}) = \sum_{m_{l_\gamma}, m_{s_\gamma}} \left[ 1_\gamma s_\gamma m_{l_\gamma} m_{s_\gamma} | J_\gamma m_{J_\gamma} \right] \varphi_{n_\gamma l_\gamma m_{l_\gamma}}(\vec{r}) \chi_{m_{s_\gamma}}^{1/2} \hat{P}_{T_\gamma} \quad (۱۱-۲)$$

در نتیجه تابع موج سیستم  $K^+ N$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\alpha(\vec{r}_1) \varphi_\gamma(\vec{r}_2) | &= \sum_{m_{l_\alpha}, m_{l_\gamma}, m_{s_\gamma}} \left[ 1_\alpha 0 m_{l_\alpha} 0 | J_\alpha m_{J_\alpha} \right] \left[ 1_\gamma \frac{1}{2} m_{l_\gamma} m_{s_\gamma} | J_\gamma m_{J_\gamma} \right] \\ &\quad \left\langle \varphi_{n_\alpha l_\alpha m_{l_\alpha}}(\vec{r}_1) \varphi_{n_\gamma l_\gamma m_{l_\gamma}}(\vec{r}_2) \chi_{m_{s_\gamma}}^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{T_\alpha} \hat{P}_{T_\gamma} \right|\end{aligned}\quad (۱۲-۲)$$

دو تابع موج کائون و نوکلئون برای تولید یک تابع موج کلی از دو ذره کوپل شده‌اند:

$$\left\langle \varphi_{n_\alpha l_\alpha m_{l_\alpha}}(\vec{r}_1) \varphi_{n_\gamma l_\gamma m_{l_\gamma}}(\vec{r}_2) \right\rangle = \sum_{\lambda \mu} \left[ l_\alpha l_\gamma m_{l_\alpha} m_{l_\gamma} | \lambda \mu \right] \left\langle \varphi_{n_\alpha l_\alpha n_\gamma l_\gamma m_{l_\alpha} \lambda \mu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right\rangle \quad (۱۳-۲)$$

اگر حرکت سیستم  $K^+ N$  را به صورت نوسانگر هماهنگ در نظر بگیریم، براکت تعمیم یافته

$^1\text{GTMS}$  برای ذرات با جرم‌های مختلف به صورت زیر وارد می شود [۵۴]:

$$\left\langle \varphi_{n_\alpha l_\alpha n_\gamma l_\gamma m_{l_\alpha} \lambda \mu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right\rangle = \sum_{nlNL} \left( n_\alpha l_\alpha n_\gamma l_\gamma \lambda | N L n l \lambda \right) \left\langle \varphi_{NL n l \lambda \mu}(\vec{R}, \vec{r}) \right\rangle \quad (۱۴-۲)$$

بنابراین تابع موج سیستم  $K^+ N$  می‌تواند به دو قسمت مجزا شود، تابع موج حرکت نسبی  $\vec{r}$  و

حرکت مرکز جرم  $\vec{R}$ ، مطابق زیر:

$$\left\langle \varphi_{NL n l \lambda \mu}(\vec{R}, \vec{r}) \right\rangle = \sum_{Mm} \left( L M m | \lambda \mu \right) \left\langle \varphi_{N L M}(\vec{R}) \right\rangle \left\langle \varphi_{n l m}(\vec{r}) \right\rangle \quad (۱۵-۲)$$

بنابراین تابع موج اسپینی و ایزواسپینی نوکلئون به فرم زیر بدست می آیند:

$$\left\langle \hat{P}_{T_\alpha} \chi_{m_{s_\gamma}}^2 \hat{P}_{T_\gamma} \right\rangle = \sum_{s m_{s_\gamma} T M_T} \left( 0 \frac{1}{2} 0 m_{s_\gamma} | s m_{s_\gamma} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} T_\alpha T_\gamma T M_T \right) \left\langle \chi_{m_{s_\gamma}}^s(2) \hat{P}_T(1, 2) \right\rangle \quad (۱۶-۲)$$

تابع موج شعاعی  $R_{nl} \left( \frac{\vec{r}}{b} \right)$  حرکت نسبی سیستم  $K^+ N$ ، می‌تواند به فرم لاگر  $L_n^{1+1/2}$  باشد [۵۳]:

$$R_{nl} \left( \frac{\vec{r}}{b} \right) = \left[ \frac{2(n!)}{\Gamma(n+1+3/2)} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{b} \right)^{3/2} \left( \frac{\vec{r}}{b} \right)^l \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\vec{r}}{b} \right)^2 \right] L_n^{1+1/2} \left( \frac{\vec{r}}{b} \right)^2 \quad (۱۷-۲)$$

با اندازه پارامترهای پیدا شده در سیستم مرکز جرم و نسبی به مانند زیر:

$$b_r = \sqrt{\frac{\hbar(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 \omega}} \quad (۱۸-۲)$$

$$b_R = \sqrt{\frac{\hbar}{(m_1 + m_2) \omega}}$$

<sup>1</sup>Generalized Talmi-Moshinsky-Smirnov (GTMS) brackets

## ۳-۱-۲ پتانسیل کائون-نوکلئون و هسته:

می‌توانیم پتانسیل اپتیکی برهمکنش  $K^+ N$  را به صورت زیر بنویسیم [۵۳]:

$$V_{K^+N} = V_a(r) + 2\mu v Q_3 \left( 2n+1 + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega V_c(r) - v Q_3 \mu^2 \omega^2 r^2 V_c(r) - v Q_3 \hbar^2 \frac{dV_c(r)}{dr} \frac{d}{dr} \\ + v Q_3 \hbar^2 \left[ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right] \frac{1}{r} \frac{dV_c(r)}{dr} + v Q^2 P_1^2 V_c(r) \\ - i \left[ v Q P_1 \hbar \frac{dV_c(r)}{dr} + v Q P_1 \hbar V_c(r) \frac{d}{dr} + v Q^2 P_1 \hbar V_c(r) \frac{d}{dr} + v Q^2 P_1 \hbar \frac{dV_c(r)}{dr} \right] \quad (۱۹-۲)$$

که در آن

$$V_a(r) = -V_\sigma(r) + V_\rho(r) + V_\omega(r) + V_{\sigma_0}(r) \\ V_c(r) = V_\sigma(r) + V_\rho(r) + V_\omega(r) - V_{\sigma_0}(r) \quad (۲۰-۲)$$

و جرم کاهش یافته  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ،  $v = \frac{1}{4m_2^2 c^2}$ ،  $Q_3 = \frac{m_2}{m_1}$  و  $\hbar\omega$  پارامتر انرژی جداسازی است

که به صورت پدیده‌شناختی بدست می‌آید [۴۹]:

$$\hbar\omega = 1.85 + \frac{35.5}{A^{1/3}} \quad (۲۱-۲)$$

برای محاسبه پتانسیل برهمکنش چند جسمی، برای راحتی، از تقریب جمع چند دو جسمی استفاده می‌کنیم:

$$V_{K^+A}(r) = \sum_{N_i=1}^A V_{K^+N_i}(r) \quad (۲۲-۲)$$

پتانسیل کاهش یافته و پتانسیل برهمکنشی به صورت زیر با یکدیگر مرتبطاند [۵۵]:

$$U_{K^+A}(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_{K^+A}(r) \quad (۲۳-۲)$$

## ۲-۱-۴ تابع موج مزون‌های تبادلی و پارامترهای آن:

در کارهای جدید، یک تابع مزونی یوکاوا بهنجار شده مرتبط در نظر گرفته شده که به صورت زیر بیان می‌گردد [۵۳]:

$$J_i(r) = g_i^2 \hbar c \left[ \frac{\exp(-u_i r)}{r} - \frac{\exp(-\Lambda_i r)}{r} \left( 1 + \frac{\Lambda_i^2 - u_i^2}{2\Lambda_i} \right) \right] \quad (2-24)$$

که در آن پارامتر  $u_i = \frac{m_i c^2}{\hbar}$  متناسب با جرم مزون مبادله شده  $m_i$ ، پارامتر  $\Lambda_i = \frac{\lambda_i c^2}{\hbar}$  متناسب با جرم قطع<sup>۱</sup>  $\lambda_i$ ،  $g_i$  ثابت جفت‌شدگی و  $i$  نماد ذره مبادله شده  $\sigma, \rho, \omega, \sigma_0$  برای نشان دادن تابع مزونی استاتیک است.

برای برهمکنش کائون با نوکلئون و هسته دو مجموعه مختلف از پارامترهای استفاده شده در گروه جولیش<sup>۲</sup> [۴۹، ۵۶، ۵۷] مورد استفاده قرار می‌گیرد. صورت دیگری از مزون‌هایی که در طول برهمکنش مبادله می‌شوند،  $\rho, \omega, \sigma$  و مزون فرضی اضافی  $\sigma_0$  در جدول (۱-۲) نمایش داده شده است.

جرم کائون و نوکلئون به ترتیب

$$m_1 = 495/82 \text{ MeV}/c^2 \quad ; \quad m_2 = 938/926 \text{ MeV}/c^2 \quad (2-25)$$

در نظر گرفته شده است.

جدول (۱-۲): جرم مزون‌ها، ثابت جفت‌شدگی و پارامتر cut-off [۵۳]

| مزون       | $m_i \text{ MeV}/c^2$ | $g_i / \sqrt{4\pi}$ |       | $\lambda_i \text{ MeV}/c^2$ |      |
|------------|-----------------------|---------------------|-------|-----------------------------|------|
|            |                       | [۳۱]                | [۳۸]  | [۳۱]                        | [۳۸] |
| $\sigma$   | ۶۰۰                   | ۲/۳۸۵               | ۱/۳۰۰ | ۱/۷                         | ۱/۷  |
| $\rho$     | ۷۹۶                   | ۰/۹۱۷               | ۰/۷۷۳ | ۱/۴                         | ۱/۶  |
| $\omega$   | ۷۸۲/۶                 | ۲/۷۵۰               | ۲/۳۱۸ | ۱/۵                         | ۱/۵  |
| $\sigma_0$ | ۱۲۰۰                  | ۳/۹۳۷               | ۴/۰   | ۲                           | ۱/۵  |

<sup>۱</sup>cut off mass

<sup>۲</sup>Julich group

## ۲-۲ پتانسیل اپتیکی:

در بخش قبل اشاره‌ای به پتانسیل اپتیکی شد. اکنون به بیانی روشن‌تر به تعریف و توضیح آن می‌پردازیم. پتانسیل اپتیکی با رابطه زیر مشخص می‌شود [۵۸،۵۹]:

$$U(r) = V_c(r) - V_r(r) - i[W_v(r) + W_s(r)] + V_{ls}(r)(\vec{l} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2-26)$$

جمله اول پتانسیل کولنی ناشی از شارژ یکنواخت کره‌ای به شعاع  $R_c = r_c A_T^{1/3}$  است:

$$V_c(r) = \begin{cases} \frac{Z_p Z_T e^2}{2R_c} 3 - \frac{r^2}{R_c^2} & ; \quad r \leq R_c \\ \frac{Z_p Z_T e^2}{r^2} & ; \quad r > R_c \end{cases} \quad (2-27)$$

$Z, A$  به ترتیب عدد جرمی و اتمی هسته هستند.  $T, \rho$  به ترتیب به هسته هدف و پرتابه اطلاق می‌شود. بخش حقیقی پتانسیل هسته با توجه به رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_r(r) = V_0 \left[ 1 + \exp\left(\frac{r - r_r A_T^{1/3}}{a_r}\right) \right]^{-1} \quad (2-28)$$

پتانسیل موهومی حجمی:

$$W_v(r) = W_0 \left[ 1 + \exp\left(\frac{r - r_i A_T^{1/3}}{a_i}\right) \right]^{-1} \quad (2-29)$$

پتانسیل موهومی سطحی:

$$W_s(r) = -4a_D W_D \frac{d}{dr} \left[ 1 + \exp\left(\frac{r - r_D A_T^{1/3}}{a_D}\right) \right]^{-1} \quad (2-30)$$

فاکتور  $4a_D$  به منظور سهولت در مقایسه مقدار جذب حجمی و سطحی با استفاده از  $W_0$  و  $W_D$  وارد شده است و پس از آن طبق:

$$\begin{cases} W_v(r) & \text{for } r = 0 \\ W_s(r) & \text{for } r = r_D A_T^{1/3} \end{cases} \quad (2-31)$$

هر دو فرم فاکتور یک حجم بیشینه تقریباً مشابه دارند. بنابراین پتانسیل موهومی ممکن است حجمی  $(W_D = 0, W_0 \neq 0)$ ، یا سطحی  $(W_D \neq 0, W_0 = 0)$  و یا ترکیبی از حجمی و سطحی  $(W_D \neq 0, W_0 \neq 0)$  باشد.

گاهی اوقات یک پتانسیل اسپین-مدار برای پراکندگی یون-سنگین به صورت زیر اضافه می‌شود:

$$V_{ls}(r) = \left( \frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{V_{so}}{r} \frac{d}{dr} \left[ 1 + \exp \left( \frac{r - r_{so} A_T^{1/3}}{a_{so}} \right) \right]^{-1} \quad (32-2)$$

اگرچه اثر آن بر روی توزیع سطح مقطع کوچک است. پارامترهای شعاعی به صورت  $R_x = r_x A_T^{1/3}$  پارامتریزه شده‌اند.

## ۳-۲ پتانسیل نوکلئون - نوکلئون کم انرژی:

در این بخش ما برای مسیر پاریته طبیعی مزون های  $0^+, 1^-$  و برای مسیر پاریته غیر طبیعی فقط مزون  $0^-$  را در نظر گرفتیم. در این مدل سهم غالب از مسیرهایی را که متعلق به مزون های زیر است در نظر می‌گیریم [۴۶]:

(i) مزون شبه اسکالر  $\eta, \eta', \pi$ . ثابت‌های جفت‌شدگی مربوط به تقارن  $SU(3)$  هستند. مقدار  $\alpha_p = 0.361$  و  $\theta_p = -23^\circ$  استفاده شده است.

(ii) مزون های برداری  $\rho, \phi, \omega$ . روابط  $SU(3)$  را برای جفت‌شدگی از نوع الکتریکی و مغناطیسی در نظر گرفته‌اند [60]. برای جفت‌شدگی الکتریکی  $g_v^e = g_v$  و  $\alpha_v^e = 1$  و  $\theta_v = 37/5^\circ$  اتخاذ شده‌اند. برای جفت‌شدگی مغناطیسی  $g^m = g + f$  هیچ مقدار تئوری برای  $\alpha_v^m$  در دست نیست. ازسوی دیگر، نمی‌توان  $f_\phi$  و به همین ترتیب  $g_\phi^m = g_\phi + f_\phi$  را در تناسب تعیین کرد. بنابراین به دلیل عدم حساسیت به تغییرات  $f_\phi$ ،  $f_\phi \equiv 0$  فرض کرده که به  $g_\phi^m = g_\phi$  منجر می‌شود. از مقادیر  $g_\rho^m, g_\phi^m, g_\omega^m$  استنباط می‌شود  $\alpha_v^m = 0.449$ ، که نزدیک به مقدار پیش‌بینی شده از  $SU(6)$  یعنی  $\alpha_v^m = 0.4$  است.

(iii) مزون‌های اسکالر  $\delta, S^*, \epsilon$ . در اینجا ترجیحاً از مزون‌های  $\delta(970), S^*(990), \epsilon(460)$  استفاده می‌شود [۴۶]. زیرا آنها تناسب نسبتاً خوبی در مدل کیسه‌ای<sup>۱</sup> [۶۱] به عنوان تراز دارند. فرض مقدار  $a$  برای  $\alpha_s$ ، جفت شدگی سه تایی را محدود نمی‌کند [۶۲]. بنابراین هر سه جفت‌شدگی بررسی شدند.

(iv) شرکت کنندگان Pomeron P و تانسور  $J=0$ . جرم موثر بسته به نوع مدل پر انرژی در هر دو مسیر Pomeron و تانسور، در محدوده  $250-400$  MeV تخمین زده شده است [۶۳]. برای سادگی در اینجا یک پارامتر جرم واحد  $m_p$  برای  $P, F, F'$  و  $A_2$  در نظر گرفته شده که یک پارامتر جستجو است. بنابراین از دو ثابت جفت‌شدگی استفاده می‌شود:

یکی برای سهم کل  $J=0$  از مسیر  $(P, F, F') I=0$  و یکی برای سهم  $I=1$  منجر به مسیر  $A_2$ . به دلایلی حتی می‌توان پتانسیل‌ها را به صورت حاصل جمع دو مزون پایدار به صورت عالی تقریب زد [۶۴]. برخی نتایج در جدول ذیل به نمایش گذاشته شده است. جرم و پهنا بر حسب MeV می‌باشد.

جدول (۲-۲): مقادیر برای پارامترهای معادله ۲۳ از مرجع [۶۴] در تقریب دو قطبی برای مزون‌های  $\epsilon, \rho$

| پارامتر   | $\epsilon$ | $\rho$  |
|-----------|------------|---------|
| n         | ۰          | ۱       |
| m         | ۷۶۰        | ۷۷۰     |
| $\Gamma$  | ۶۴۰        | ۱۴۶     |
| $\beta_1$ | ۰/۱۸۷۱۹    | ۰/۱۹۰۶۸ |
| $m_1$     | ۵۰۰/۴۵     | ۶۴۷/۴۴  |
| $\beta_2$ | ۰/۶۰۱۰۵    | ۰/۷۹۶۴۹ |
| $m_2$     | ۱۰۴۷/۱۴    | ۸۹۸/۱۷  |

<sup>۱</sup> Bag model

## ۲-۳-۱ پتانسیل در فضای تکانه

ما در این بخش فقط به طور خلاصه پتانسیلی را که در مرجع [۶۳] بدست آمده مرور می‌کنیم. آن‌ها پتانسیل‌های تبادل تک بوزون با بخش مرکزی وابسته به تکانه و فرم فاکتور نمایی و پتانسیل‌های pomeron-type هستند که مزون (ghost) تکثیر کننده، حذف شده است. معرفی تعاریف:

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \frac{\vec{q}_i + \vec{q}_f}{2} \\ \vec{k} &= \vec{q}_f - \vec{q}_i \\ \vec{n} &= \vec{q}_i \times \vec{q}_f = \vec{q} \times \vec{k}\end{aligned}\quad (۲-۳۳)$$

که در آن  $\vec{q}_i$  و  $\vec{q}_f$  به معنی سه تکانه اولیه و نهایی هستند. پتانسیلی که بسط داده‌ایم:

$$V(\vec{q}_f, \vec{q}_i) = \sum_{i=1}^5 v_i(q_f^2, q_i^2, \vec{q}_f, \vec{q}_i) P_i \quad (۲-۳۴)$$

در اینجا اپراتور  $P_i$  در فضای اسپین به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}P_1 &= 1 \\ P_2 &= \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\ P_3 &= (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}) \\ P_4 &= \left(\frac{i}{2}\right)(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{n} \\ P_5 &= (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n})\end{aligned}\quad (۲-۳۵)$$

در محاسبه پتانسیل‌های ناورددا شکل  $v_i$ ، ما باید تقریب‌های زیر را برای ساختن تبدیلات فوریه در پیکربندی فضای ساده‌تر، به کار بگیریم، البته با توجه به اینکه از مراتب بالاتر  $\vec{k}^2$  صرف نظر شده است:

(الف) عامل‌های انرژی:

$$E = \left( \frac{\vec{k}^2}{4 + \vec{q}^2 + M^2} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{M + \vec{k}^2}{8M} + \frac{\vec{q}^2}{2M} \quad (۲-۳۶)$$

(ب) فقط تا اولین مرتبه از  $\frac{\vec{k}^2}{M^2}$  و  $\frac{\vec{q}^2}{M^2}$  را نگه می‌داریم.

حال با استفاده از تقریب‌های فوق به دنبال پیدا کردن  $v_i$  در ۵ گروه مزونی زیر هستیم:

(i) تبادله مزون-شبه اسکالر:

$$v_3^{(p)} = \frac{-f_p^2 \Delta}{m_\pi^2} \quad (37-2)$$

(ii) تبادله مزون-بردار:

$$\begin{aligned} v_1^{(v)} &= \left\{ g_v^2 \left[ 1 - \frac{\vec{k}^2}{8MM'} + \frac{3\vec{q}^2}{2MM'} \right] - \frac{g_v f_v \vec{k}^2}{2\mathfrak{M}(MM')^{1/2}} + \frac{f_v^2 \vec{k}^4}{16\mathfrak{M}^2 MM'} \right\} \Delta \\ v_2^{(v)} &= -\vec{k}^2 v_3^{(v)} \\ v_3^{(v)} &= \left\{ \left[ g_v + \frac{f_v (MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} \right]^2 - \frac{f_v^2 \vec{k}^2}{8MM'} \right\} \frac{\Delta}{4MM'} \\ v_4^{(v)} &= - \left[ \frac{3}{2} g_v^2 + \frac{2g_v f_v (MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} - \frac{3f_v^2 \vec{k}^2}{8\mathfrak{M}^2} \right] \frac{\Delta}{MM'} \\ v_5^{(v)} &= - \left[ g_v^2 + \frac{8g_v f_v (MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} + \frac{8f_v^2 MM'}{\mathfrak{M}^2} \right] \frac{\Delta}{16M^2 M'^2} \end{aligned} \quad (38-2)$$

(iii) تبادله مزون-اسکالر:

$$\begin{aligned} v_1^{(s)} &= -g_s^2 \left[ 1 + \frac{\vec{k}^2}{8MM'} - \frac{\vec{q}^2}{2MM'} \right] \Delta \\ v_4^{(s)} &= -g_s^2 \frac{\Delta}{2MM'} \\ v_5^{(s)} &= g_s^2 \frac{\Delta}{16M^2 M'^2} \end{aligned} \quad (39-2)$$

که در همه جا

$$\Delta = \frac{e^{-\vec{k}^2/\Lambda^2}}{\vec{k}^2 + m^2} \quad (40-2)$$

(iv) تبادله Pomeron، شبیه (۳۹-۲) است اما با این تفاوت که

$$\Delta = \frac{e^{-\vec{k}^2/4m_p^2}}{MM'} \quad (41-2)$$

و نیز  $g_p^2$  جایگزین  $-g_s^2$  می شود.

در معادلات (۳۷-۲) تا (۴۱-۲)،  $M$  و  $M'$  جرم پروتون / نوترون و  $m$  جرم مزون است.  $m_\pi$  در معادله (۳۷-۲) جرم پيون مثبت و  $M$  در معادله ی (۳۸-۲) جرم پروتون انتخاب شده است.

## ۲-۳-۲ تبدیلات در پیکربندی فضا

روش تبدیل پتانسیل به نمایندگی پیکربندی فضا به خوبی شناخته شده است، ما فقط اشاره ای به تبدیلات فوریه به فرم زیر خواهیم داشت:

$$V(\vec{k}, \vec{q}) = \bar{v}(\vec{k}) \vec{q}^2 \quad (42-2)$$

یکی را برای عمل در تابع موج بدست می آوریم:

$$\langle \vec{r} | V \psi \rangle = \left\{ \frac{1}{4} [\nabla^2 v(\vec{r})] - \frac{1}{2} [\nabla^2 v(\vec{r}) + v(\vec{r}) \nabla^2] \right\} \psi(\vec{r}) \quad (43-2)$$

که  $v(\vec{r})$  تبدیل فوریه  $\bar{v}(\vec{k})$  است. در قدم بعد به لیستی از تبدیلات فوریه برای ۵ گروه پتانسیل شرح داده شده نیاز داریم [۴۶]:

(i) پتانسیل های مرکزی :

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\vec{k}^2 + m^2} (\vec{k}^2)^n e^{-\vec{k}^2/\Lambda^2} \equiv \frac{m}{4\pi} (-m^2)^n \phi_C^n(r) = (-\nabla^2)^n \phi_C^0(r) \quad (44-2)$$

به صراحت داریم:

$$\phi_C^0(r) = \exp\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \left[ e^{-mr} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\Lambda r}{2} + \frac{m}{\Lambda}\right) - e^{mr} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Lambda r}{2} + \frac{m}{\Lambda}\right) \right] \frac{1}{2mr} \quad (45-2)$$

$$\phi_C^1(r) = \phi_C^0(r) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^3 \exp\left[-\left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2\right] \quad (46-2)$$

$$\phi_C^2(r) = m^2 \phi_C^1(r) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^5 \left[ \frac{3}{2} - \left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2 \right] \exp\left[-\left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2\right] \quad (47-2)$$

(ii) پتانسیل های تانسوری :

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\vec{k}^2 + m^2} (\vec{k}^2)^n e^{-\vec{k}^2/\Lambda^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}) \equiv -\frac{m^3}{4\pi} (-m^2)^n \left[ \phi_T^n(r) S_{12} + \frac{1}{3} \phi_C^{n+1}(r) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \right] \quad (48-2)$$

$$= -\frac{m^3}{4\pi} \left\{ \left[ (-\nabla^2)^n \phi_T^0(r) \right] S_{12} + \left[ (-\nabla^2)^n \phi_C^1(r) \right] \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \right\}$$

توابع  $\phi_T^1(r)$ ،  $\phi_T^0(r)$  به صورت زیر خوانده می شوند.

$$\phi_T^0(r) = \frac{1}{3m^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_C^0(r)$$

$$= \left\{ \exp\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \left[ \left( 1 + mr + \frac{(mr)^2}{3} \right) e^{-mr} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\Lambda r}{2} + \frac{m}{\Lambda}\right) \right. \right. \quad (49-2)$$

$$\left. \left. - \left( 1 - mr + \frac{(mr)^2}{3} \right) e^{mr} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Lambda r}{2} + \frac{m}{\Lambda}\right) \right] \right. \\ \left. - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Lambda r}{2} \right) \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{\Lambda r}{2} \right)^2 \right] \exp\left[-\left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2\right] \right\} \frac{1}{2(mr)^3}$$

$$\phi_T^1(r) = \phi_T^0(r) - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Lambda}{m} \right)^5 \left( \frac{\Lambda r}{2} \right)^2 \exp\left[-\left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2\right] \quad (50-2)$$

(iii) پتانسیل های اسپین - مدار:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{i\vec{S} \cdot (\vec{q} \times \vec{k})}{\vec{k}^2 + m^2} (\vec{k}^2)^n e^{-\vec{k}^2/\Lambda^2} \equiv \frac{m^3}{4\pi} (-m^2)^n \phi_{SO}^n(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (51-2)$$

$$= \frac{m^3}{4\pi} \left[ (-\nabla^2)^n \phi_{SO}^0(r) \right] \vec{L} \cdot \vec{S}$$

در این بخش داریم:

$$\phi_{SO}^0(r) = \frac{-1}{m^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_C^0(r) = \left\{ \exp\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \left[ (1 + mr) e^{-mr} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\Lambda r}{2} + \frac{m}{\Lambda}\right) \right. \right. \quad (52-2)$$

$$\left. \left. - (1 - mr) e^{mr} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Lambda r}{2} + \frac{m}{\Lambda}\right) \right] \right. \\ \left. - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Lambda r}{2} \right) \exp\left[-\left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2\right] \right\} \frac{1}{2(mr)^3}$$

$$\phi_{SO}^1(r) = \phi_{SO}^0(r) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Lambda}{m} \right)^5 \exp\left[-\left(\frac{\Lambda r}{2}\right)^2\right] \quad (53-2)$$

(iv) پتانسیل‌های اسپین - مدار درجه دوم (چهارگانه):

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{[\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{q} \times \vec{k})][\vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{q} \times \vec{k})]}{\vec{k}^2 + m^2} e^{-\vec{k}^2/\Lambda^2} = -\frac{m^5}{4\pi} \frac{3}{(mr)^2} \phi_T^0(r) Q_{12} + \dots \quad (54-2)$$

فقط بخش متناسب با  $Q_{12}$  نگه داشته می‌شود. نقش بقیه جملات در اینجا نادیده گرفته شده است.

در معادله‌های (۴۵-۲) و (۴۹-۲) و (۵۲-۲) منظور از  $\text{erfc}$  تابع خطای مکمل به فرم زیر است:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2} \quad (55-2)$$

توجه داشته باشید که ما توابع  $\phi_C^n, \phi_T^n, \phi_{SO}^n$  را اینچنین تعریف می‌کنیم که این توابع برای مقادیر بزرگ  $r$ ، بدون بعد و مثبت هستند.

تبدیل فوریه پتانسیل‌های Pomeron - type می‌تواند از فرمول‌های بالا توسط جایگزینی به صورت زیر خوانده شود:

$$\frac{1}{2} \Lambda \equiv m_p, \quad m = 0, \quad \phi_i^{pn} = \phi_i^{n+1} \quad (56-2)$$

به صراحت پیدا می‌کنیم:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-\vec{k}^2/4m_p^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{4}{\sqrt{\pi}} m_p^3 \exp(-m_p^2 r^2) \quad (57-2)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{k}^2 e^{-\vec{k}^2/4m_p^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{8}{\sqrt{\pi}} m_p^5 (3 - 2m_p^2 r^2) \exp(-m_p^2 r^2) \quad (58-2)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} i\vec{S} \cdot (\vec{q} \times \vec{k}) e^{-\vec{k}^2/4m_p^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{8}{\sqrt{\pi}} m_p^5 \exp(-m_p^2 r^2) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (59-2)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{q} \times \vec{k})][\vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{q} \times \vec{k})] \approx \frac{1}{4\pi} \frac{16}{\sqrt{\pi}} m_p^7 \exp(-m_p^2 r^2) Q_{12} \quad (60-2)$$

سرانجام، تبدیل فوریه از پتانسیل مرکزی وابسته به تکانه را ذکر می‌کنیم:

$$\frac{e^{-\vec{k}^2/\Lambda^2} \vec{q}^2}{\vec{k}^2 + m^2} \quad (۲-۶۱)$$

با استفاده از (۲-۴۳) بدست می آوریم :

$$\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{m^2}{4} \phi_C^1(r) - \frac{1}{2} [\nabla^2 \phi_C^0(r) + \phi_C^0(r) \nabla^2] \right\} \quad (۲-۶۲)$$

### ۲-۳-۳ پتانسیل در پیکربندی فضا

اکنون نتایج حاصل از زیر مجموعه های قبلی را تا پایان با پتانسیل های زیر در پیکربندی فضا به نمایندگی تبادلات  $I=0$  ترکیب کردیم [۴۶]:

(i) تبادل مزون - شبه اسکالر:

$$v_p(r) = \frac{f_p^2}{4\pi} \frac{m^2}{m_\pi^2} m \left[ \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \phi_C^1 + S_{12} \phi_T^0 \right] \quad (۲-۶۳)$$

(ii) تبادل مزون - برداری:

$$\begin{aligned} v_v(r) = \frac{m}{4\pi} \left\{ g_v^2 \left[ \phi_C^0 + \frac{m^2}{2MM'} \phi_C^1 - \frac{3}{4MM'} (\nabla^2 \phi_C^0 + \phi_C^0 \nabla^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{g_v f_v m^2}{2\mathfrak{M} (MM')^{1/2}} \phi_C^1 + \frac{f_v^2 m^4}{16\mathfrak{M}^2 MM'} \phi_C^2 \right\} \\ + \frac{m^2}{4MM'} \left\{ \left[ g_v + f_v \frac{(MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} \right]^2 \phi_C^1 + f_v^2 \frac{m^2}{8MM'} \phi_C^2 \right\} \frac{2}{3} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \\ - \frac{m^2}{4MM'} \left\{ \left[ g_v + f_v \frac{(MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} \right]^2 \phi_T^0 + f_v^2 \frac{m^2}{8MM'} \phi_T^1 \right\} S_{12} \\ - \frac{m^2}{MM'} \left\{ \left[ \frac{3}{2} g_v^2 + 2g_v f_v \frac{(MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} \right] \phi_{SO}^0 + \frac{3}{8} f_v^2 \frac{m^2}{\mathfrak{M}^2} \phi_{SO}^1 \right\} \vec{L} \cdot \vec{S} \\ + \frac{m^4}{16M^2 M'^2} \left[ g_v^2 + 8g_v f_v \frac{(MM')^{1/2}}{\mathfrak{M}} + 8f_v^2 \frac{MM'}{\mathfrak{M}^2} \right] \frac{3}{(mr)^2} \phi_T^0 Q_{12} \quad (۲-۶۴) \end{aligned}$$

(iii) تبادل مزون - اسکالر:

$$v_s(r) = -\frac{g_s^2}{4\pi} m \left[ \phi_C^0 - \frac{m^2}{4MM'} \phi_C^1 + \frac{1}{4MM'} (\nabla^2 \phi_C^0 + \phi_C^0 \nabla^2) + \frac{m^2}{2MM'} \phi_{so}^0 \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{m^4}{16M^2 M'^2} \frac{3}{(mr)^2} \phi_T^0 Q_{12} \right] \quad (65-2)$$

(iv) تبادل Pomeron - type:

$$v_p(r) = \frac{g_p^2}{4\pi} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{m_p^2}{MM'} m_p \left\{ \frac{1}{4MM'} [\nabla^2 \exp(-m_p^2 r^2) + \exp(-m_p^2 r^2) \nabla^2] + \left[ 1 + \frac{m_p^2}{2MM'} (3 - 2m_p^2 r^2) + \frac{m_p^2}{MM'} \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{m_p^4}{M^2 M'^2} Q_{12} \right] \exp(-m_p^2 r^2) \right\} \quad (66-2)$$

برای تبادلات  $I=1$  این پتانسیل‌ها باید با اپراتور  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$  در فضای ایزواسپین ضرب شوند.

## ۲-۴ نقش مزون $\rho$ در واپاشی هسته‌های سنگین:

در این بخش به جای ارزیابی عنصر ماتریسی جرم، از چارچوب مدل لایه‌ای که شامل اثرات ساختار هسته‌ای سنگین محدوداند استفاده می‌کنیم. برای راس ضعیف تبادل تک پیون داریم [۶۵]:

$$\mathcal{H}_{\Lambda N \pi} = iG_F \mu^2 \bar{\Psi}_N (A + B\gamma_5) \tau \Phi_\pi \Psi_\Lambda \quad (67-2)$$

که  $\mu$  جرم پیون و  $G_F \mu^2 = 2/21 \times 10^{-7}$  می‌باشد. ثابت‌های تجربی  $A=10/5$ ،  $B=-7/15$  و میانگین واپاشی  $\Lambda$  آزاد، به ترتیب آهنگ نقض پاریته<sup>۱</sup> و حفظ پاریته<sup>۲</sup> را مشخص می‌کنند.  $\Psi_\Lambda$  یک میدان  $\tau_3 = -1/2$  است که برای نشان دادن نقش تجربی  $\Delta I = 1/2$  استفاده می‌شود.

برای راس  $\rho$  ضعیف و قوی به ترتیب داریم [۶۶]:

$$\mathcal{H}_{\Lambda N \rho}^w = G_F \mu^2 \bar{\Psi}_N \left( \alpha \gamma^\mu - \beta i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} + \varepsilon \gamma^\mu \gamma_5 \right) \tau \rho_\mu \Psi_\Lambda \quad (68-2)$$

$$\mathcal{H}_{\Lambda N \rho}^s = \bar{\Psi}_N \left( F_1 \gamma^\mu + i \frac{F_2}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) \tau \rho_\mu \Psi_\Lambda \quad (69-2)$$

<sup>1</sup> Parity-Violating (PV)

<sup>2</sup> Parity-Conserving(PC)

با به کارگیری حفظ پارите، این دامنه می تواند به آهنگ واپاشی فیزیکی  $K \rightarrow \pi\pi$  از طریق رابطه زیر مربوط شود:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \langle \pi\pi | H_{pv} | K \rangle = -\frac{i}{F_\pi} \langle \pi | [F_\pi^5, H_{pv}] | K \rangle = -\frac{i}{2F_\pi} \langle \pi | H_{pc} | K \rangle \quad (70-2)$$

برخی ثابت های جفت شدگی قوی و ضعیف مزون  $\rho$  که در اینجا از آن استفاده شده در جدول ذیل آورده شده است:

جدول (۳-۲): ثابت های جفت شدگی قوی و ضعیف برای مکانیزم تبادل مزون  $\rho$  [۶۵]

|      |               |                  |
|------|---------------|------------------|
| قوی  | $F_1$         | $3/16 (3/25)$    |
|      | $F_2$         | $13/34 (19/82)$  |
| ضعیف | $\alpha$      | $-3/80 (-3/91)$  |
|      | $\beta$       | $-6/77 (-10/56)$ |
|      | $\varepsilon$ | $1/09$           |

در این چارچوب سهم مزون  $\rho$  بارابطه زیر داده می شود:

$$M_\rho(q) = \frac{G_F \mu^2}{q^2 + m_\rho^2} \left\{ F_1 \alpha - \frac{(\alpha + \beta)(F_1 + F_2)}{4MM} (\sigma_1 \times q)(\sigma_2 \times q) + i \frac{\varepsilon(F_1 + F_2)}{2M} (\sigma_1 \times \sigma_2) q \right\} (\tau_1 \tau_2) \quad (71-2)$$

با استفاده از اتحاد

$$(\sigma_1 \times q)(\sigma_2 \times q) = (\sigma_1 \sigma_2) q^2 - (\sigma_1 q)(\sigma_2 q) \quad (72-2)$$

و انجام یک تبدیل فوریه  $M_\rho(q)$ ، پتانسیل تبدیل یافته متناظر در مختصات فضا، به عنوان نمونه برای تبادل  $\pi$ ، به فرم زیر بدست می آید که دارای بخش مرکزی، تانسوری و نقض پارите است:

$$V_\rho(r) = V_\rho^C(r) + V_\rho^T(r) + V_\rho^{PV}(r) \quad (73-3)$$

که بخش مرکزی شامل دو بخش وابسته به اسپین (SD) و مستقل از اسپین (SI) است.

$$V_\rho^C(r) = V_\rho^{SI}(r) + V_\rho^{SD}(r) \quad (74-2)$$

$$V_{\rho}^{SI}(r) = G_F \mu^2 F_1 \alpha - \frac{m_{\rho} r}{4\pi r} (\tau_1 \tau_2) \quad (75-2)$$

$$V_{\rho}^{SD}(r) = G_F \mu^2 \frac{(\alpha + \beta)(F_1 + F_2)}{4MM} \frac{2}{3} \left[ m_{\rho}^2 \frac{e^{-m_{\rho} r}}{4\pi r} - \delta(r) \right] (\sigma_1 \sigma_2) (\tau_1 \tau_2) \quad (76-2)$$

پتانسیل تانسوری و بخش PV به ترتیب به فرم زیر هستند:

$$V_{\rho}^T(r) = -G_F \mu^2 \frac{(\alpha + \beta)(F_1 + F_2)}{4MM} \frac{1}{3} T(m_{\rho} r) \left( m_{\rho}^2 \frac{e^{-m_{\rho} r}}{4\pi r} \right) S_{12}(\hat{r}) (\tau_1 \tau_2) \quad (77-2)$$

$$V_{\rho}^{PV}(r) = -G_F \mu^2 \frac{\varepsilon(F_1 + F_2)}{2M} m_{\rho} V(m_{\rho} r) \frac{e^{-m_{\rho} r}}{4\pi r} \hat{r} (\sigma_1 \times \sigma_2) (\tau_1 \tau_2) \quad (78-2)$$

که در آنها از تعاریف زیر استفاده شده است:

$$T(m_{\rho} r) = 1 + \frac{3}{m_{\rho} r} + \frac{3}{(m_{\rho} r)^2}$$

$$V(m_{\rho} r) = 1 + \frac{1}{m_{\rho} r} \quad (79-2)$$

$$S_{12}(\hat{r}) = 3(\sigma_1 \hat{r})(\sigma_1 \hat{r}) - (\sigma_1 \sigma_2)$$

هدف ما در این فصل فقط مروری بر کارهای انجام پذیرفته از قبل به منظور ایده‌پذیری و نوآوری

بوده است. حال که این مهم صورت پذیرفت، در فصل آینده روش حل مسئله را بیان می‌داریم.



## فصل سوم

روش‌های تحلیلی و عددی حل

معادلات کوانتومی

## ۳-۱ مقدمه

معادلات شرودینگر، دیراک<sup>۱</sup>، کلاین گوردن و  $DKP^2$  از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستم‌های غیر نسبیتی و نسبیتی به کار می‌روند. در کوانتوم غیر نسبیتی ذرات با معادله شرودینگر بیان می‌شوند و در کوانتوم نسبیتی، ذرات با اسپین صفر مانند مزون‌های شبه اسکالر، از معادله کلاین گوردن، ذرات با اسپین  $1/2$  از معادله دیراک و ذرات با اسپین ۱ مانند مزون‌های برداری از معادله پروکا تبعیت می‌کنند. بنابراین توصیف سیستم‌های فیزیکی متشکل از مزون‌ها مستلزم حل چنین معادلات نسبیتی می‌باشند. از این جهت همواره به دنبال کشف راه حلی ساده‌تر برای انجام این مهم خواهیم بود. در این میان می‌توان پتانسیل مربوطه را با روش‌های متفاوت تحلیلی و عددی حل کرد. از آنجایی که فقط پتانسیل‌های محدودی به روش تحلیلی دقیقاً قابل حل می‌باشند، روش‌های حل عددی نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در سال‌های اخیر به حل سیستم‌های کوانتوم مکانیکی در چارچوب روش  $^3NU$  تمایل زیادی نشان داده شده است [۶۷-۶۹]. به کارگیری این روش در حل معادله، دستورالعمل روشی برای بدست آوردن جواب‌های دقیق حالت‌های مقید، ویژه‌مقادیر انرژی و ویژه‌توابع وابسته‌شان، بر حسب چند جمله‌ای‌های متعامد ارائه می‌دهد که در عین سادگی بسیار موثر است. البته باید توجه داشت که این روش‌ها در حل معادلات همواره موفق نبوده و به ازای هر نوع پتانسیل معین دلخواه ناکارآمد هستند. تنها با نوع خاصی از پتانسیل‌ها که الزامات روش را برآورده می‌کنند می‌توان به نتایج مطلوب رسید. بنابراین در انتخاب پتانسیل مناسب که بهترین توصیف از سیستم را بدهد و همچنین انتخاب ساده‌ترین و در عین حال مفیدترین روش حل باید زیرکانه عمل کرد. در ادامه بحث ابتدا به معرفی دستگاه مختصات ژاکوبی<sup>۴</sup> می‌پردازیم سپس کلیات

---

<sup>1</sup> Dirac equation

<sup>2</sup> Duffin-Kemmer-Petiau equation

<sup>5</sup> Nikiforov – Uvarov Method

<sup>4</sup> Jacobi Coordinates

روش‌های تحلیلی NU و ابرتقارن<sup>۱</sup> را به مرور بیان می‌داریم و در انتها به بررسی برخی از روش‌های عددی حل مسئله خواهیم پرداخت.

### ۲-۳ دستگاه مختصات ژاکوبی

در یک سیستم دو نوکلئونی کمیت‌هایی که نیرو به آنها وابسته است عبارتند از:  $r_{12}$  یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ذره ۲ ارتباط می‌دهد،  $P_{12} = P_2 - P_1$  یعنی تکانه نسبی آنها و  $S$  که اسپین کل است و تکانه زاویه‌ای مداری آنها یعنی  $L = r_{12} \times p_{12}$ . حال اگر سیستم مورد مطالعه ما یک سیستم  $A$  ذره‌ای باشد در این صورت معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان آن به صورت  $H\psi = E\psi$  نوشته می‌شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می‌شود [۷۰]:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left( \frac{p_i}{2m_i} + V(r) + V(r_i, r_j) \right) \quad (۱-۳)$$

$i \neq j$  به این معنا که : هیچ ذره‌ای با خودش بر همکنش ندارد.

$i < j$  از نوشتن جملات تکراری صرفنظر می‌شود.

$V(r_i)$  پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می‌شود، مثلاً وقتی ذره‌ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان‌های خارجی بر روی ذره را در  $V(r_i)$  مشاهده می‌کنیم.  $V(r_i, r_j)$  این جمله شامل بر همکنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل معادلات نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسئله داریم. یکی از این دستگاه‌های مختصات که برای مجموعه‌ای  $A$  ذره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، مختصات ژاکوبی می‌باشد. برای یک سیستم  $A$  ذره‌ای می‌توان  $N = A - 1$  بردار ژاکوبی و در نتیجه  $3N$  مختصه ژاکوبی تعریف کرد و در هر تعریف هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می‌کند [۷۱]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئون‌ها باشند می‌توان با چشم‌پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سیستم را هم‌جرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی می‌توان  $N$  بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۷۲، ۷۳]:

<sup>۱</sup>Super Symetry method

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i - r_{i+1} + 1}} \left( \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j \right) \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (2-3)$$

$\vec{\xi}_i$  بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای  $A$  هر ذره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \frac{1}{A} (r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} r_i \quad (3-3)$$

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j = dx \quad (4-3)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان‌هایی از فاصله نسبی آنها باشند می‌توان آنها را بر حسب ابرشعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌گویند.

### ۳-۳ کلیات روش NU

این روش بر اساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه‌ریزی شده است. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب،  $s = s(r)$  معادله تبدیل یافته را به صورت زیر داریم [۶۷-۶۹]:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0 \quad (5-3)$$

که  $\sigma(s)$  و  $\tilde{\sigma}(s)$  چند جمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه دوم و  $\tilde{\tau}(s)$  یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه اول است. با در نظر گرفتن تابع موج  $\Psi_n(s)$  به صورت:

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (6-3)$$

معادله (۵-۳) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی زیر تقلیل داده می‌شود:

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (7-3)$$

که در آن

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (8-3)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad , \quad \tau'(s) < 0 \quad (9-3)$$

چند جمله ای  $\tau(s)$  با علامت پرایم نشان می دهد که باید مشتق مرتبه اولش منفی باشد.

تابع  $\pi(s)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (10-3)$$

از آنجایی که باید  $\pi(s)$  حداکثر یک چند جمله ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله

(10-3) باید به صورت یک چند جمله ای درجه اول مرتب شوند و این در صورتی ممکن است

که مشخص کننده آن،  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای  $K$  بدست می آید.

$\lambda$  پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (11-3)$$

از سوی دیگر:

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12-3)$$

خواهیم دید که ویژه مقادیر انرژی از تساوی معادلات (11-3) و (12-3) بدست می آیند.

باید به این نکته توجه کرد که  $\lambda$  و  $\lambda_n$  از یک جواب خاص شکل  $y(s) = y_n(s)$  که چند جمله ای

درجه  $n$  است، بدست می آیند. بعلاوه اینکه جمله  $y_n(s)$  تابع موج معادله (3-6)، یک تابع از نوع فوق

هندسی است که از رابطه ردیگر ذیل بدست می آید:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (13-3)$$

که در آن  $B_n$  ثابت نرمالیزاسیون است و  $\rho(s)$  تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند:

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad , \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (14-3)$$

قابل ذکر است که ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته شان را برای سیستمی تحت یک پتانسیل

معین به آسانی می توان با بکار بستن روش تحلیلی NU بدست آورد البته باید توجه داشت همانطور

که قبلاً هم اشاره شد، این روش همچون روش‌های دیگر در حل معادله با هر نوع پتانسیل دلخواه ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیل‌ها که الزامات روش را برآورده می‌کنند، می‌توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید که در فصل چهارم ما با در نظر گرفتن تمامی این الزامات پتانسیل‌های مورد نظرمان را معرفی کرده و به نتایج مورد اشاره رسیده‌ایم. در بخش بعد یکی دیگر از روش‌های حل مسئله را مرور می‌کنیم.

### ۳-۴ نگاهی اجمالی به روش ابرتقارنی

مکانیک کوانتومی ابرمتقارن که ارتباط تنگاتنگی با نظریه میدان ابرمتقارن دارد عبارتست از مطالعه سیستم‌های مکانیک کوانتومی که هامیلتونی  $H$  آنها از بارهای پادجا به جا پذیر، که جذر  $H$  می‌باشند ساخته شده است. این نوع هامیلتونی شامل مختصاتی است که توسط جابجاگرها و پادجابجاگرها کوانتیده می‌شوند. این مختصات توسط تبدیلات ابرتقارن با یکدیگر مخلوط می‌شوند. برای یک ذره با اسپین، مکان و جهت اسپین یک زوج از چنین مختصاتی را تشکیل می‌دهند [۷۴].

فرض کنید پتانسیل  $V_-(x)$  را داریم که تابع موج حالت پایه آن به صورت شناخته شده زیر است:

$$\psi_0^{(-)} = \psi_0(x) \quad (۱۵-۳)$$

و انرژی حالت پایه آن  $E_0^{(-)} = 0$  می‌باشد. با فرض  $\hbar = 2M = 1$  معادله شرودینگر برای حالت پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$H_- \psi_0^{(-)} = E_0^{(-)} \psi_0^{(-)} \quad (۱۶-۳)$$

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \right) \psi_0(x) = 0 \quad (۱۷-۳)$$

از این رابطه بدست می‌آوریم:

$$V_-(x) = \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \quad (۱۸-۳)$$

ابر پتانسیل  $w(x)$  با  $\psi_0(x)$  به وسیله رابطه زیر مربوط می‌شود:

$$w(x) = -\frac{\psi'_0(x)}{\psi_0(x)} \quad ; \quad \psi_0(x) = N \exp\left\{-\int w(x)dx\right\} \quad (۱۹-۳)$$

عملگرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A^+ = -\frac{d}{dx} + w(x) \quad (۲۰-۳)$$

$$A^- = \frac{d}{dx} + w(x)$$

در آن صورت نتیجه می‌شود که:

$$H^0 \equiv H_- \equiv A^+ A^- = -\frac{d^2}{dx^2} + w^2(x) - w'(x) \quad (۲۱-۳)$$

$$H^1 \equiv H_+ \equiv A^- A^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + w^2(x) + w'(x) \quad (۲۲-۳)$$

از این روابط برای پتانسیل‌های همسان ابرتقارنی  $V_{\pm}(x)$  بدست می‌آوریم:

$$V_{\pm}(x) = w^2 \pm w'(x) \quad (۲۳-۳)$$

اگر  $\psi_n^{(+)}$  و  $\psi_n^{(-)}$  به ترتیب ویژه‌توابع هامیلتونی‌های  $H_+$  و  $H_-$  با ویژه مقادیر  $E_n^{(-)}$  و  $E_n^{(+)}$  باشند می‌توان نشان داد که:

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}$$

$$\psi_{n+1}^{(-)} = \left(E_n^{(+)}\right)^{\frac{1}{2}} A^+ \psi_n^{(+)} \quad (۲۴-۳)$$

$$\psi_n^{(+)} = \left(E_{n+1}^{(-)}\right)^{\frac{1}{2}} A^- \psi_{n+1}^{(-)}$$

ضرایب عبور و بازتاب ( یا انتقال فاز ) دو پتانسیل نیز مرتبط هستند و این به آن معنا است که یک ابرتقارنی در مسئله وجود دارد [۷۴]. به صورت خاص ابربراهای  $Q$  و  $Q^+$  را که به صورت زیر تعریف می‌شوند، در نظر بگیرید:

$$Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۵-۳)$$

در این صورت هامیلتونی  $H$  نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \begin{bmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} H^0 & 0 \\ 0 & H^1 \end{bmatrix} \quad (26-3)$$

که روابط فوق، روابط جبری زیر را ارضا می کنند :

$$\begin{aligned} Q^2 &= Q^{+2} = 0 \\ QQ^+ + Q^+Q &= H \\ [H, Q] &= [H, Q^+] = 0 \end{aligned} \quad (27-3)$$

در اینجا تاکید می کنیم که ابرتقارنی تنها رابطه بین ویژه مقادیر و ویژه توابع دو هامیلتونی را می دهد و طیف واقعی را نمی دهد. برای آن منظور به شرایط اضافی انتگرال پذیری نیاز داریم که شرایط ناوردایی شکل نامیده می شود و توسط گلدشتاین معرفی شده است [۷۵].

به عبارتی اگر جفت پتانسیل های همسان ابر تقارنی  $V_{\pm}(x)$  معرفی شده، در شکل یکسان بوده و تنها در پارامترهای ظاهر شده در آنها متفاوت باشند، به آنها ناوردا شکل گفته می شود. به صورت دقیق تر اگر  $V_{\pm}(x; a_0)$  در رابطه زیر صدق کنند:

$$V_{\pm}(x; a_0) = V_{\pm}(x; a_1) + R(a_1) \quad (28-3)$$

به طوری که  $a_0$  یک سری از پارامترهاست و  $a_1$  تابعی اختیاری از  $a_0$  است، یعنی  $a_1 = f(a_0)$  و  $R(a_1)$  تابعی مستقل از  $x$  است، در این صورت گفته می شود که  $V_{\pm}(x; a_0)$  ناوردا شکل می باشند. در این صورت طیف ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی  $H_{\pm}$  به وسیله رابطه زیر داده می شود [۷۵]:

$$E_n^{(-)}(a_0) = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad ; \quad E_0^{(-)}(a_0) = 0 \quad (29-3)$$

که در آن  $(a_k) = f^k(a_0)$  یعنی تابع  $f$ ،  $k$  بار به کار برده می شود.

ویژه توابع  $\psi_n^{(-)}$  هامیلتونی  $H_{\pm}$  به روش جبری زیر نیز قابل نوشتن هستند:

$$\psi_n^{(-)}(x; a_0) = A^+(x; a_0) A^+(x, a_1) \dots A^+(x, a_{n-1}) \psi_0^{(-)}(x; a_n) \quad (30-3)$$

رابطه ی فوق را که به صورت واضح تعمیم یافته روش عملگری پتانسیل نوسانگر هماهنگ مشهور است، دانشمندی به نام Dutt نشان داد [۷۶]. اخیراً ثابت شده که برای  $a_1 = a_0 + \alpha$  ( $\alpha$  ثابت)، دوازده

SIP وجود دارد که ۲ تا از این‌ها مستقل نیستند و نیز بیشتر این پتانسیل‌ها در روش فاکتورگیری شرودینگر وجود دارند [۷۷]. در این میان روش‌های رایانه‌ای نیز در حل مسایل پر دردسر و طاقت فرسا نقش مهمی را ایفا می‌کنند لذا در ادامه کار می‌خواهیم به طور مختصر با برخی از روش‌های رایانه‌ای حل مسایل آشنا شویم [۷۸].

### ۳-۵ روش‌های رایانه‌ای و عددی

یکی از بهترین روش‌های موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد، روش‌های رایانه‌ای و عددی می‌باشد. روش‌های رایانه‌ای از لحاظ کم‌هزینه بودن، کنترل‌پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روش‌های آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانه‌ها روش‌های رایانه‌ای نقش به‌سزایی در پیش برد و اثبات نظریه و فرضیه‌های علمی دارد. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستم‌های چند ذره‌ای نیز می‌توان از روش‌های رایانه‌ای و عددی بهره جست. به این منظور در ابتدای امر باید پتانسیلی برای بین ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات اصول و قواعد خاص خود را می‌طلبد.

#### ۳-۵-۱ پتانسیل‌های بین ذره‌ای و روش‌های رایانه‌ای

شناخت پتانسیل بین ذرات یکی از پایه‌های اصلی برای شناخت، توصیف و پیش‌بینی رفتار ذرات می‌باشد. معمولاً به دلیل وجود تعداد زیاد ذره‌ها در یک دستگاه، تعیین شکل دقیق پتانسیل واقعی میسر نیست. اهمیت و درستی اکثر نتایج حاصل از محاسبات رایانه‌ای و آنچه آنها از رفتار واقعی حالت‌های مختلف مواد و گذار حالت تحت شرایط مختلف را نشان می‌دهند، به انتخاب صحیح انرژی پتانسیل بستگی دارد. در شبیه‌سازی‌های کلاسیک همه اثرهای کوانتومی دستگاه‌های بس ذره‌ای در پتانسیل بین ذره‌ای نهفته است. اغلب پتانسیل‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی‌ها، مرکزی‌اند یعنی فقط به فاصله ذرات وابسته‌اند. در حقیقت پتانسیل با تقریب و بر اساس ملاحظات پدیده‌شناختی انتخاب می‌شود. تعیین پتانسیل به‌صورت پدیده‌شناختی عملاً دارای دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول

با توجه به نوع ذره‌های دستگاه و برهمکنش‌های بین آنها شکلی برای پتانسیل بین ذره‌ای دستگاه حدس زده می‌شود که با آن برخی شبیه‌سازی‌های اولیه انجام می‌گردد. در مرحله بعد با مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی اولیه و نتایج تجربی، شکل پتانسیل بهسازی می‌شود. این فرایند چندین بار تکرار می‌شود تا نتایج حاصل از شبیه‌سازی و تجربه یکسان شوند. در برخی شبیه‌سازی‌ها علاوه بر محاسبه پتانسیل بین ذره‌ای برای تعیین مسیر ذرات دستگاه نیاز به محاسبه نیروهای بین ذره‌ای هم داریم. برای محاسبه نیروی بین ذره‌ای باید از پتانسیل بین ذره‌ای نسبت به مکان ذرات دستگاه مشتق بگیریم. اگر شکل پتانسیل بین ذره‌ای پیچیده باشد و تعداد ذره‌های دستگاه نیز خیلی زیاد باشد محاسبه صریح مقدار پتانسیل و مشتق‌های آن در برنامه شبیه‌سازی بسیار زمان‌بر می‌شود. در چنین مواردی بهتر است به جای محاسبه صریح پتانسیل و مشتق‌های آن در برنامه اصلی از جدول جستجو استفاده کنیم. روش کار به این صورت است که قبل از اجرای برنامه اصلی شبیه‌سازی برنامه دیگری را اجرا می‌کنیم که فقط مقدار عددی پتانسیل و مشتق‌های مورد نیاز آن را از برنامه اصلی بر حسب  $r_{ij}^2$  محاسبه و در جدولی ذخیره می‌کند. در هنگام اجرای برنامه اصلی با استفاده از الگوریتم‌های درونیایی، از داده‌های عددی جدول ایجاد شده برای یافتن مقدار عددی پتانسیل و مشتق‌هایش در هر مکان استفاده می‌کنیم.

### ۳-۵-۲ روش سری تیلور

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید [۷۸]:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (3-31)$$

فرض کنید  $f(t, y)$  نسبت به متغیر  $t$  و  $y$  به حد کافی مشتق‌پذیر است. اگر  $y(t)$  جواب واقعی مسئله

(۳-۳۱) باشد، با بسط سری تیلور تابع  $y(t)$  حول نقطه  $t = t_0$  داریم:

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}y''(t_0) + \frac{(t - t_0)^3}{3!}y'''(t_0) + \frac{(t - t_0)^4}{4!}y^{IV}(t_0) + \dots \quad (3-32)$$

چون جواب معادله مشخص نیست، مشتقات بسط بالا را نمی‌توان به طور صریح تعیین کرد. با این حال با فرض اینکه  $f$  به حد کافی مشتق‌پذیر است، پس می‌توان مشتقات تابع را به طور مستقیم از معادله دیفرانسیل بدست آورد. با توجه به این که  $f$  تابع ضمنی از  $y$  است، داریم:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_t + ff_y \\ y''' = f_{tt} + ff_{ty} + f(f_{ty} + ff_{yy}) + f_y(f_t + ff_y) \\ \quad = f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y(f_t + ff_y) \\ y^{IV} = f_{ttt} + 3ff_{tty} + 3f^2 f_{tyy} + f_y(f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy}) \\ \quad + 3(f_t + ff_y)(f_{ty} + ff_{yy}) + f_y^2(f_t + ff_y) \end{cases} \quad (3-33)$$

و الی آخر. با ادامه این روند، می‌توان تمام مشتق‌های  $y$  را بر حسب  $f(t, y)$  و مشتقات جزئی آن بیان کرد.

### ۳-۵-۳ روش‌های رونگ-کوتا<sup>۱</sup>

از نظر محاسباتی اغلب روش‌های کار آمد از نظر دقت، توسط دو ریاضی دان مشهور به نام‌های رونگ و کوتا توسعه یافته‌اند. این روش‌ها با توجه به مرتبه‌شان از هم تمیز داده می‌شوند، یعنی مطابقت آنها با جواب‌های سری تیلور تا جمله  $h^r$  (  $r$  نشان‌دهنده مرتبه روش) است. در این روش‌ها برخلاف سری تیلور به محاسبه مشتقات مراتب بالای  $y(t)$  نیازی نیست. روش رونگ-کوتا مرتبه چهار برای حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی یا غیرخطی به طور گسترده استفاده می‌شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. اگر معادله زیر را برای حل عددی در نظر بگیریم [۷۸]:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3-34)$$

می‌توان با کمی عملیات جبری به نتیجه زیر دست یافت:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3-35)$$

<sup>1</sup> Runge-Kutta method

که مقادیر  $k_i$  به کمک هم و پی در پی به شکل زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{cases} k_1 = dx f(x_n, y_n) \\ k_2 = dx f(x_n + \frac{1}{2}dx, y_n + k_1) \\ k_3 = dx f(x_n + \frac{1}{2}dx, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = dx f(x_n + dx, y_n + k_3) \end{cases} \quad (3-36)$$

تحلیل هندسی این الگوریتم به ما نشان می‌دهد که چگونه از شیب‌های میانی برای تخمین نهایی استفاده می‌شود. روند تخمین بالا می‌تواند تا مراحل بیشتری نیز پیش برود.

## فصل چهارم

بررسی نیروهای تبادلی در برهمکنش

بین نوکلئون‌ها

## ۴-۱ مقدمه

همانگونه که قبلاً نیز اشاره کردیم، شواهد تجربی وجود دارد که نشان می‌دهد نیروهای هسته‌ای ناشی از تبادل مزون می‌باشد و تبادل مزون ناشی از پتانسیل‌های تبادلی بارتلت، ماژورانا و هایزنبرگ می‌باشد. در این صورت، کلی‌ترین شکلی که می‌توان برای پتانسیل برهمکنش بین نوکلئون‌ها در نظر بگیریم، شامل همه این پتانسیل‌ها می‌باشد. در این بخش، ما با استفاده از مدل نیروی تبادلی پتانسیل بین نوکلئون‌ها را در یک مدل نسبیتی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V = V_B(r)P^\sigma \quad (۴-۱)$$

با توجه به پتانسیل‌های هسته‌ای، پتانسیل تبادلی که انتخاب نموده‌ایم شامل دو جمله پتانسیل یوکاوا و شبه یوکاوا می‌باشد که هر دو تابع نمایی از فاصله هستند [۱۸، ۷۹]. برای این منظور، پتانسیل زیر را در نظر گرفته‌ایم:

$$V_B(r) = \left(a + \frac{b}{r}\right) \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۴-۲)$$

که تا حدودی نیز شبیه به پتانسیل مای تایپ<sup>۱</sup> است [۸۰، ۸۱]. ضرایب  $a$  و  $b$  عمق چاه پتانسیل را مشخص می‌کنند و  $\alpha$  نیز برد نیروی هسته‌ای را تعیین می‌کند. پتانسیل ارائه شده می‌تواند بسیاری از خواص اندازه‌گیری شده نوکلئون-نوکلئون را با موفقیت تعیین کند و می‌توان امیدوار بود با افزایش تعداد جملات دخیل در برهمکنش، قدرت و دقت این پتانسیل را افزایش دهیم.

به منظور بررسی برهمکنش بین نوکلئون‌ها، ابتدا هسته‌های سبک و آئینه‌ای زوج-فرد  ${}^3_2\text{He}_1$  و  ${}^3_1\text{H}_2$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که هر کدام دارای یک نوکلئون منفرد در آخرین لایه خود هستند. به این ترتیب که  ${}^3_1\text{H}_2$  یک پروتون منفرد و  ${}^3_2\text{He}_1$  یک نوترون منفرد در لایه  $1S_{1/2}$  دارند. و چون نوکلئون‌ها اسپین  $1/2$  دارند، برای بررسی نسبیتی آنها از معادله دیراک که یکی از اساسی‌ترین معادلات نسبیتی برای ذرات با اسپین  $1/2$  به شمار می‌رود، شروع می‌کنیم.

<sup>1</sup> Mie-type potential

هدف ما بررسی برهمکنش بین نوکلئون‌ها در یک مدل نسبیتی با استفاده از مزون تبادلی است. در فصل اول اشاره کردیم که نیروهای هسته‌ای از تبادل مزون نتیجه می‌شوند و تبادل مزون منجر به نیروهای تبادلی می‌شود. در این کار، ما نیروی تبادلی بارتلت را برای این منظور انتخاب نموده‌ایم.

به هنگام اثر دادن پتانسیل تبادلی بارتلت حالات زیر، برای این هسته‌ها به وجود می‌آید:

(i) فرض می‌کنیم که نوکلئون‌ها در لایه‌ی پر با اسپین مخالف هستند. یعنی اسپین لایه‌ی پر، صفر و اسپین تک نوکلئون منفرد به سمت بالا باشد.

(ii) فرض می‌کنیم که نوکلئون‌ها در لایه‌ی پر با اسپین موافق هستند. یعنی اسپین لایه‌ی پر، یک و اسپین تک نوکلئون منفرد به سمت بالا باشد.

طبق معادلات

$$\begin{cases} S = S_1 + S_2 \\ S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2} [S(S+1)\hbar^2 - S_1(S_1+1)\hbar^2 - S_2(S_2+1)\hbar^2] \end{cases} \quad (3-4)$$

نتایج را در جدول زیر ذکر کردیم.

جدول (۴-۱): اپراتور تبادلی بارتلت در حالت اول و دوم

| وضعیت | $S_1$ | $S_2$ | $S$ | $S_1 \cdot S_2$ | $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ | $P^\sigma$ |
|-------|-------|-------|-----|-----------------|---------------------------|------------|
| i     | 0     | 1/2   | 1/2 | 0               | 0                         | 1/2        |
| ii    | 1     | 1/2   | 3/2 | $5\hbar^2/8$    | 5/2                       | 7/4        |

بنابراین به طور کلی دو حالت خواهیم داشت: حالت اول  $P^\sigma = \frac{1}{2}$  و حالت دوم  $P^\sigma = \frac{7}{4}$  خواهد بود.

سپس انرژی حالت پایه هسته‌های تریتون و هلیوم را به ازای پتانسیل تبادلی مورد نظر در این دو حالت محاسبه نمودیم. بنابراین ما در این کار در یک مدل نسبیتی و از حل معادله دیراک با استفاده از پتانسیل فوق، می‌توانیم ویژه اسپینورهای آن را در حالت‌های تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی، بدست آوریم. روش مورد استفاده ما در این کار، روش تحلیلی NU می‌باشد. پس از یافتن ویژه‌مقادیر انرژی به اثرات نیروهای تبادلی در دو حالت اول و دوم می‌پردازیم. در مرحله بعد سعی داریم جابه‌جایی

ترازها را با استفاده از اثرات نیروهای تبدیلی بررسی کنیم و با استفاده از روش اختلالی این اثرات را لحاظ کنیم. سپس با استفاده از معادله کلاین-گوردن به مطالعه نقش مزون‌های شبه‌اسکالر در نیروهای تبدیلی پرداخته‌ایم. از این رو معادله کلاین-گوردن را با یک پتانسیل کوتاه برد در نظر گرفته و آن را به کمک روش NU حل کرده و ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی را به ازای پتانسیل تبدیلی بین ذرات بدست می‌آوریم.

#### ۴-۲ طیف انرژی معادله دیراک:

معادله دیراک یکی از کامل‌ترین نمونه یک معادله نسبیتی است که می‌تواند یک سیستم نسبیتی از ذرات با اسپین  $1/2$  را توصیف کند همچنین می‌تواند تحت تبدیلات لورنتس نیز تبدیل شود. در سال‌های اخیر توجه قابل ملاحظه‌ای به حل معادله دیراک شده است. در حقیقت معادله دیراک برای برخی پتانسیل‌های محدودی به طور دقیق قابل حل می‌باشد. تحقیقاتی نیز در چند سال اخیر برای پتانسیل‌های نوسانگر هماهنگ، اکارت، وود-ساکسون و ... انجام شده است [۸۲، ۸۸]. همچنین روش‌های متفاوتی مانند ابر-تقارن و روش تحلیلی NU نیز برای حل این معادله در نظر گرفته شده است. در حدود ۳۰ سال قبل یک شبه‌تبهگنی در هسته‌های سنگین در یک نوکلئون با اعداد کوانتومی جفت  $(n-1, l+2, j=1+\frac{3}{2})$  و  $(n, l, j=1+\frac{1}{2})$  مشاهده شد که در آن  $j, l, n$  اعداد کوانتومی شعاعی و مداری و تکانه زاویه‌ای کل هستند [۸۹، ۹۰]. این شبه تبهگنی پدیده‌های طبیعی در ساختار هسته شامل تغییر هسته و ابر تغییر هسته و گشتاور مغناطیسی و ترازهای یکسان را به خوبی توصیف می‌کند. به خاطر همین موفقیت‌ها تلاش‌های بسیاری برای کشف و درک منشأ این شبه تبهگنی انجام گرفته است [۹۱، ۹۲]. بر اساس تئوری میدان میانگین متوسط<sup>۱</sup> Ginocchio، این تقارن را حاصل یکسانی تقریبی در اندازه پتانسیل اسکالر جاذب  $S(r)$  و پتانسیل برداری دافع  $V(r)$  فرض کرده است [۹۳]. این تقارن منجر به ساده‌سازی و حل دقیق معادله دیراک می‌گردد.

<sup>1</sup> Relativistic Mean Field

### ۳-۴ معادله اساسی دیراک با پتانسیل تبادلی:

در این بخش به منظور توصیف نسبیتی معادلات جفت شده دیراک برای تک ذره‌ای به جرم  $M$  که تحت پتانسیل اسکالر جاذب  $S(r)$  و پتانسیل برداری دافع  $V(r)$  قرار دارد، از فرم عملگری معادله دیراک استفاده می‌کنیم [۷۴]:

$$[\alpha.P + \beta(Mc^2 + S(r))]\psi(r, \theta, \phi) = [E - V(r)]\psi(r, \theta, \phi) \quad (۴-۴)$$

که در آن  $\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  ماتریس‌های  $4 \times 4$  دیراک برای یک ذره در یک میدان مرکزی و به صورت زیر هستند:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (۵-۴)$$

$\sigma$  ماتریس پائولی  $2 \times 2$  برداری،  $I$  ماتریس  $2 \times 2$  واحد و  $E$  انرژی نسبیتی سیستم است. که در آن

$$(\sigma.P) = \sigma.\hat{r} \left( \hat{r}.P + i \frac{\sigma.\vec{L}}{r} \right) \quad (۶-۴)$$

$\vec{L}$  گشتاور زاویه‌ای مداری،  $\vec{J}$  گشتاور زاویه‌ای کل و  $K$  اپراتور جفت‌شدگی اسپین مدار است که با هامیلونی جابه‌جا می‌شود [۷۴]:

$$K = \sigma.\vec{L} + 1 \quad (۷-۴)$$

$$\hat{K} = -\beta(\sigma.\vec{L} + 1) \quad (۸-۴)$$

برای بدست آوردن  $J$  ویژه مقدار  $\hat{K}$  به صورت زیر است:

$$K = \begin{cases} +(j+1/2) \xrightarrow{\text{unaligned spin}} j = l-1/2 \longrightarrow k = l \\ -(j+1/2) \xrightarrow{\text{aligned spin}} j = l+1/2 \longrightarrow k = -(l+1) \end{cases} \quad (۹-۴)$$

با در نظر گرفتن  $\hbar = c = 1$  تابع موج را به صورت زیر می‌توان نوشت [۹۴]:

$$\psi_{n_r, k}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} F_{n_r, k}(r) & Y_{jm}^l(\theta, \phi) \\ i G_{n_r, k}(r) & Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴)$$

$G_{n_r,k}(r)$  و  $F_{n_r,k}(r)$  مولفه‌های بالایی و پایینی هستند که در شرایط مرزی زیر نیز صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} F_{n_r,k}(0) = G_{n_r,k}(0) = 0 \\ F_{n_r,k}(\infty) = G_{n_r,k}(\infty) = 0 \end{cases} \quad (۱۱-۴)$$

همچنین  $Y_{jm}^1(\theta, \varphi)$  و  $Y_{jm}^{\bar{1}}(\theta, \varphi)$  توابع هارمونیک کروی،  $n_r$  عدد کوانتومی شعاعی و  $m$  تصویر تکرانه زاویه‌ای روی محور  $z$ ،  $1$  و  $\bar{1}$  اعداد کوانتومی اسپینی و شبه‌اسپینی‌اند. معادلات جفت‌شده دیراک برای بخش شعاعی به صورت زیر درمی‌آید [۶۸]:

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F_{n_r,k}(r) = [M + E_{n_r,k} - V(r) + S(r)] G_{n_r,k}(r) \quad (۱۲-۴)$$

$$\left( \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right) G_{n_r,k}(r) = [M - E_{n_r,k} + V(r) + S(r)] F_{n_r,k}(r) \quad (۱۳-۴)$$

معادلات جفت‌شده بالا را می‌توانیم با پیدا کردن یک تابع بر حسب دیگری و قرار دادن در یک معادله دیگر بر حسب یک تابع به صورت زیر نوشت:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) + \frac{\frac{d\Delta}{dr} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right)}{M - E_{n_r,k} - \Delta(r)} \right\} F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (۱۴-۴)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) - \frac{\frac{d\Sigma}{dr} \left( \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right)}{M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)} \right\} G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (۱۵-۴)$$

برای توجیه حالت تبهگنی در هسته‌های سنگین و در نظر گرفتن مقادیر مساوی به ازای پتانسیل‌های اسکالر و برداری سعی شده که معادله دیراک به ازای این تساوی و تفاضل حل شود که در آن  $\Delta(r) = V(r) - S(r)$  و  $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$  می‌باشد. حالت اول را با تقارن اسپینی نمایش می‌دهند. این تقارن از نزدیکی مقدار دو پتانسیل جاذب و دافع ناشی می‌شود زیرا در پتانسیل میانگین نسبیتی مقادیر  $S(r) \approx V(r)$  تقریباً یکسان است [۹۵]. تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی،  $\Delta(r) = C_s$

می‌شود. حالت دوم را نیز با تقارن شبه‌اسپینی نشان می‌هند. تحت این شرایط یعنی تقارن شبه‌اسپینی،  $\Sigma(r) = C_s$  می‌شود [۹۵].

#### ۴-۴ تقارن اسپینی با در نظر گرفتن حالت اول پتانسیل بارتلت:

این تقارن از نزدیکی مقدار دو پتانسیل جاذب و دافع ناشی می‌شود. در این حالت مقادیر  $V(r) \approx S(r)$  تقریباً یکسان است [۹۵]. تحت این شرایط، یعنی تقارن اسپینی  $\Delta(r) = C_s$  می‌شود و معادله (۷-۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - C_s)(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) \right\} F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (۱۶-۴)$$

سپس با استفاده از پتانسیل تبادلی، به ازای تفاضل  $\Sigma(r)$  در نظر می‌گیریم. از آن جا که معادله دیراک با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی‌باشد معمولاً از روش‌های تقریبی یا عددی برای حل آن استفاده می‌کنند. در اینجا ما از تقریب زیر برای حل مسئله استفاده کردیم:

$$\Sigma(r) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \left( a + \frac{b}{r} \right) \frac{e^{-\alpha r}}{r} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \left( a + \frac{b}{r} \right) \frac{1 - \alpha r}{r} \quad (۱۷-۴)$$

اشاره کردیم که در حالت اول  $P^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = \frac{1}{2}$  خواهد بود. بنابراین معادله (۱۶-۴) را با این

تقریب باز نویسی می‌کنیم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \left[ M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s(M - E_{n_r,k}) + \frac{1}{2}(M + E_{n_r,k} - C_s) \left( \frac{b}{r^2} + \frac{(a - \alpha b)}{r} - \alpha a \right) \right] \right\} F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (۱۸-۴)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر داریم:

$$\begin{aligned} M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s(M - E_{n_r,k}) &= \epsilon_{n_r,k} \\ \frac{1}{2}(M + E_{n_r,k} - C_s) &= A \\ \epsilon_{n_r,k} - A\alpha a &= \tilde{E}_{n_r,k} \\ k(k+1) &= L^2 \end{aligned} \quad (۱۹-۴)$$

رابطه (۱۸-۴) به رابطه زیر تقلیل می‌یابد:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{L^2}{r^2} - \left[ \tilde{E}_{n_r, k} + A \left( \frac{b}{r^2} + \frac{(a - \alpha b)}{r} \right) \right] \right\} F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (20-4)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر خواهیم داشت:

$$F_{n_r, k}(r) = r S_{n_r, k}(r) \quad (21-4)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 S_{n_r, k}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dS_{n_r, k}(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \left\{ -\tilde{E}_{n_r, k} r^2 - (Aa - A\alpha b)r - (Ab + L^2) \right\} S_{n_r, k}(r) = 0 \quad (22-4)$$

معادله دیراک به روش‌های متفاوتی قابل حل می‌باشند. در این میان روش NU یکی از بهترین روش‌هایی است که می‌توان از آن برای حل این معادلات استفاده کرد.

از مقایسه روابط (22-4) و (3-5) خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau}(r) = 2 \quad ; \quad \sigma(r) = r \quad ; \quad \tilde{\sigma}(r) = -\tilde{E}_{n_r, k} r^2 - (Aa - A\alpha b)r - (Ab + L^2) \quad (23-4)$$

با جایگذاری عبارت‌های بالا در رابطه (3-10) خواهیم داشت:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\tilde{E}_{n_r, k} r^2 + (K - \beta)r + \eta} \quad (24-4)$$

که در آن تغییر متغیرهای  $\beta$  و  $\eta$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\beta = A(\alpha b - a) \quad (25-4)$$

$$\eta = Ab + L^2 + \frac{1}{4} \quad (26-4)$$

از معادله (24-4) با توجه به اینکه زیر رادیکال باید مجذور یک چند جمله‌ای درجه اول باشد،  $K$  را تعیین می‌کنیم:

$$K = \beta \pm 2(\tilde{E}_{n_r, k} \eta)^{1/2} \quad (27-4)$$

در ادامه مقدار مناسب  $\pi(r)$  را که شرط  $\tau' < 0$  را برآورده می‌کند، انتخاب می‌کنیم:

$$(i) \quad \pi(r) = -\frac{1}{2} - \left[ \tilde{E}_{n_r, k}^{1/2} r + \eta^{1/2} \right] \quad ; \quad K = \beta + 2(\tilde{E}_{n_r, k} \eta)^{1/2} \quad (28-4)$$

$$(ii) \pi(r) = -\frac{1}{2} - [\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r - \eta^{1/2}] \quad ; \quad K = \beta - 2(\tilde{E}_{n_r,k} \eta)^{1/2} \quad (29-4)$$

با توجه به معادله (۹-۳) برای عبارت  $\tau(r)$  داریم:

$$(i) \tau(r) = 1 - 2[\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r + \eta^{1/2}] \quad (30-4)$$

$$(ii) \tau(r) = 1 - 2[\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r - \eta^{1/2}] \quad (31-4)$$

که در هر دو حالت  $\tau'(r) = -2\sqrt{\tilde{E}_{n_r,k}}$  ؛ به شرط اینکه  $\tilde{E}_{n_r,k} > 0$  باشد.

بعد از محاسبه  $\tau(r)$  طبق معادلات (۱۱-۳) و (۱۲-۳) داریم:

$$(i) \begin{cases} \lambda = \beta + \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} (2\eta^{1/2} - 1) \\ \lambda_n = 2n \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} \end{cases} \quad (32-4)$$

$$(ii) \begin{cases} \lambda = \beta + \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} (-2\eta^{1/2} - 1) \\ \lambda_n = 2n \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} \end{cases} \quad (33-4)$$

از تساوی  $\lambda = \lambda_n$  به نتایج زیر دست می‌یابیم:

$$(i) \tilde{E}_{n_r,k} = \left[ \frac{\beta}{1 + 2n - 2\eta^{1/2}} \right]^2 \quad (34-4)$$

$$(ii) \tilde{E}_{n_r,k} = \left[ \frac{\beta}{1 + 2n + 2\eta^{1/2}} \right]^2 \quad (35-4)$$

اکنون شرط  $\tilde{E}_{n_r,k} > 0$  برآورده شد. در ادامه‌ی این بخش ویژه‌توابع وابسته به ویژه‌مقادیر انرژی را

بدست می‌آوریم. با استفاده از رابطه (۸-۳) و جایگذاری مقدار  $\pi(r)$  و  $\sigma(r)$  در آن و با اندکی

عملیات جبری ساده  $\phi(r)$  را در هر حالت محاسبه می‌کنیم:

$$(i) \phi(r) = e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{-\eta^{1/2}-1/2} \quad (36-4)$$

$$(ii) \phi(r) = e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{\eta^{1/2}-1/2} \quad (37-4)$$

همچنین طبق رابطه (۱۴-۳) با جایگذاری مقدار  $\tau(r)$  و  $\sigma(r)$  مقدار  $\omega(r)$  برای هر حالت به صورت

ذیل حاصل می‌شود:

$$(i) \omega(r) = e^{-2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{1-2\eta^{1/2}} \quad (38-4)$$

$$(ii) \omega(r) = e^{-2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{1+2\eta^{1/2}} \quad (39-4)$$

و نیز تابع وزنی  $\rho(r)$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho(r) = e^{-2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{-2\eta^{1/2}} \quad (40-4)$$

$$\rho(r) = e^{-2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{2\eta^{1/2}} \quad (41-4)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۳-۱۳) در می یابیم:

$$(i) y_n(r) = B_n e^{2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{2\eta^{1/2}} \frac{d^n}{dr^n} \left( e^{-2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{n-2\eta^{1/2}} \right) \quad (42-4)$$

$$(ii) y_n(r) = B_n e^{2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{-2\eta^{1/2}} \frac{d^n}{dr^n} \left( e^{-2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{n+2\eta^{1/2}} \right) \quad (43-4)$$

نمایش چند جمله ای ردیگرز توابع وابسته لاگر را به صورت زیر داریم [۹۶]:

$$L_n^k(r) = \frac{e^r r^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dr^n} (e^{-r} r^{n+k}) \quad (44-4)$$

از مقایسه روابط (۴۲-۴) و (۴۴-۴) با در نظر گرفتن  $k = -2\eta^{1/2}$  و  $r = 2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r$  داریم:

$$(i) y_n(r) = B_n n! L_n^{(-2\eta^{1/2})} (2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) \quad (45-4)$$

و نیز از مقایسه بین روابط (۴۳-۴) و (۴۴-۴) با در نظر گرفتن  $k = 2\eta^{1/2}$  و  $r = 2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r$  داریم:

$$(ii) y_n(r) = B_n n! L_n^{(2\eta^{1/2})} (2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) \quad (46-4)$$

لذا با توجه به معادله (۳-۶)

$$S_{n_r,k}(r) = \varphi(r) y_n(r) \quad (47-4)$$

و نیز اعمال تغییر متغیر رابطه (۴-۲۱)، تابع موج رابطه (۴-۲۰) به صورت ذیل حاصل می شود:

$$(i) F_{n_r,k}(r) = B_n n! e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{\eta^{1/2}+1/2} L_n^{(-2\eta^{1/2})} (2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) \quad (48-4)$$

$$(ii) F_{n_r,k}(r) = B_n n! e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{\eta^{1/2}+1/2} L_n^{(2\eta^{1/2})} (2\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) \quad (49-4)$$

توابع موج بدست آمده دو جواب از معادله دیفرانسیلی درجه دو هستند لذا ترکیب خطی آنها را به صورت جواب کل در نظر می گیریم بنابراین :

$$F_{n_r,k}(r) = B_n^i F_{n_r,k}^{(i)}(r) + B_n^{ii} F_{n_r,k}^{(ii)}(r) \quad (50-4)$$

از طرفی با توجه به رابطه (48-4) تابع موج  $F_{n_r,k}^{(i)}(r)$  در  $r \rightarrow 0$  بی نهایت می شود، بنابراین  $B_n^i = 0$  در نظر می گیریم، از طرفی با توجه به رابطه (49-4) برای اینکه تابع موج  $F_{n_r,k}^{(ii)}(r)$  در  $r \rightarrow 0$  بی نهایت نشود، باید  $\eta^{1/2} + 1/2 > 0$  باشد. در غیر این صورت  $r$  دارای توان منفی خواهد شد و هنگامی که  $r$  به سمت صفر میل کند، تابع موج را بی نهایت می کند. بنابراین ویژه مقادیر انرژی و نیز ویژه توابع بدست آمده در حالت (ii) که به فرم زیر می باشند

$$E_{n_r,k} = \pm \left[ M^2 - A \alpha a - \left( \frac{\beta}{1 + 2n + 2\eta^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (51-4)$$

$$F_{n_r,k}(r) = B_n n! e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{\eta^{1/2} + 1/2} L_n^{(2\eta^{1/2})} (2 \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) \quad (52-4)$$

با شرط  $\eta^{1/2} > -1/2$  جواب های قابل قبول مسئله هستند.

به این ترتیب مولفه بالایی تابع موج کلی دیراک با تقارن اسپینی حاصل شد که با جایگذاری آن در معادله (12-4) مولفه پایینی نیز حاصل می شود. بنابراین تابع موج کلی دیراک رابطه (4-10) با پتانسیل تبادلی مورد نظر در حالت تقارن اسپینی، به فرم زیر ارائه خواهد شد:

$$\psi_{n_r,k}(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{M + E_{n_r,k} - C_s} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) \right] B_n n! e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{\eta^{1/2} + 1/2} L_n^{(2\eta^{1/2})} (2 \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) \quad (53-4)$$

سپس ضریب بهنجارش از طریق رابطه

$$\int_0^\infty \psi_{n_r,k}^*(r) \psi_{n_r,k}(r) r^2 dr = 1 \quad (54-4)$$

تعیین می گردد. برای این منظور از بسط توابع لاگر که به فرم زیر می باشند، استفاده می کنیم [96]:

$$L_n^k(r) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(m+k)! m!} r^m \quad ; \quad k > -1 \quad (55-4)$$

و به رابطه زیر دست پیدا می کنیم:

$$L_n^{(2\eta^{1/2})} (2 \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r) = 1 + 2 \eta^{1/2} - 2 \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r \quad (۵۶-۴)$$

با استفاده از شرط  $k > -1$  در رابطه (۵۵-۴)، شرط رابطه (۵۲-۴) که همان  $\eta^{1/2} > -1/2$  است، نیز ارضاء می شود.

در گام بعد با استفاده از رابطه ویژه مقاداری بدست آمده، انرژی حالت پایه ایزوتوپ های تریتون و هلیوم ۳ را محاسبه نمودیم. از آنجا که حالت پایه یک حالت مقید است و حالات مقید انرژی منفی دارند، بنابراین در این بخش ما نیز فقط مقدار منفی رابطه (۵۱-۴) را در نظر می گیریم. نتایج بدست آمده از این کار در جداول ذیل آورده شده است که با نتایج تجربی تقریباً همخوانی دارد.

جدول (۲-۴): انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی

| a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}}$ (MeV) | $E_{\text{exp}}$ (MeV) [۹۷] |
|------------|--------------------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|
| ۱۸۵        | -۱۳۲                     | ۰/۹۸                        | -۸/۰۷۴۷                | -۸/۴۸۰                      |
| ۱۸۰        | -۱۳۰                     | ۰/۹۹                        | -۸/۱۵۰۲                |                             |

جدول (۳-۴): انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبادلی

| a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}}$ (MeV) | $E_{\text{exp}}$ (MeV) [۹۷] |
|------------|--------------------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|
| ۱۰۰        | -۷۰                      | ۰/۹۹                        | -۷/۰۱۱۶                | -۷/۷۹۰                      |
| ۱۲۰        | -۹۰                      | ۰/۹۴                        | -۷/۰۵۹۴                |                             |

#### ۴-۴-۱ اثرات پتانسیل تبدالی بر انرژی حالت پایه ${}^3\text{H}_2$ و ${}^3\text{He}_1$ با تقارن اسپینی حالت اول:

در این بخش اثرات پتانسیل‌های تبدالی را بر انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های  ${}^3\text{H}_2$  و  ${}^3\text{He}_1$  از طریق

رابطه

$$\begin{aligned}\Delta E^{(1)} &= \int_0^\infty \psi_{n_r,k}^*(r) V_B P^\sigma \psi_{n_r,k}(r) r^2 dr \\ &= \int_0^\infty \psi_{n_r,k}^*(r) \frac{1}{2} (1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \left( a + \frac{b}{r} \right) \frac{e^{-\alpha r}}{r} \psi_{n_r,k}(r) r^2 dr\end{aligned}\quad (4-57)$$

محاسبه نموده و نتایج را در جداول زیر ذکر کرده‌ایم.

جدول (۴-۴): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}_Z^A X_N$       | a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha$ (fm <sup>-1</sup> ) | $E_{\text{cal}}$ (MeV) | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}}$ (MeV)<br>[۹۷] |
|--------------------|------------|--------------------------|------------------------------|------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| ${}^3_1\text{H}_2$ | ۱۸۵        | -۱۳۲                     | ۰/۹۸                         | -۸/۰۷۴۷                | -۸/۴۴۴۷                             | -۸/۴۸۰                         |
|                    | ۱۸۰        | -۱۳۰                     | ۰/۹۹                         | -۸/۱۵۰۲                | -۸/۵۰۴۷                             |                                |

جدول (۴-۵): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}_Z^A X_N$        | a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha$ (fm <sup>-1</sup> ) | $E_{\text{cal}}$ (MeV) | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}}$ (MeV)<br>[۹۷] |
|---------------------|------------|--------------------------|------------------------------|------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| ${}^3_2\text{He}_1$ | ۱۰۰        | -۷۰                      | ۰/۹۹                         | -۷/۰۱۱۶                | -۷/۴۹۸۵                             | -۷/۷۹۰                         |
|                     | ۱۲۰        | -۹۰                      | ۰/۹۴                         | -۷/۰۵۹۴                | -۷/۸۵۹۱                             |                                |

#### ۴-۵ تقارن شبه اسپینی با در نظر گرفتن حالت اول پتانسیل بارتلت:

تحت این شرایط یعنی تقارن شبه اسپینی  $\Sigma(r) = C_p$  می شود و معادله (۴-۱۵) به صورت زیر در می آید:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{p_{n_r,k}} - \Delta(r))(M - E_{p_{n_r,k}} + C_p) \right\} G_{p_{n_r,k}}(r) = 0 \quad (۴-۵۸)$$

با جایگذاری پتانسیل در رابطه فوق به معادله زیر دست می یابیم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \left[ M^2 - E_{p_{n_r,k}}^2 + C_p(M + E_{p_{n_r,k}}) + \frac{1}{2}(E_{p_{n_r,k}} - M - C_p) \left( \frac{b}{r^2} + \frac{(a - \alpha b)}{r} - \alpha a \right) \right] \right\} G_{p_{n_r,k}}(r) = 0 \quad (۴-۵۹)$$

با انتخاب پارامترهای زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M^2 - E_{p_{n_r,k}}^2 + C_p(M + E_{p_{n_r,k}}) &= \varepsilon_{p_{n_r,k}} \\ \frac{1}{2}(E_{p_{n_r,k}} - M - C_p) &= A_p \\ \varepsilon_{p_{n_r,k}} - A_p \alpha a &= \tilde{E}_{p_{n_r,k}} \\ k(k+1) &= L^2 \end{aligned} \quad (۴-۶۰)$$

محاسبه انرژی حالت تقارن شبه اسپینی نیز به مانند حال تقارن اسپینی می باشد:

$$E_{p_{n_r,k}} = \pm \left[ M^2 - A_p \alpha a - \left( \frac{\beta_p}{1 + 2n + 2\eta_p^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (۴-۶۱)$$

مولفه پایینی تابع موج حالت شبه اسپینی نیز مانند قبل بر حسب توابع لاگر بدست می آید:

$$G_{p_{n_r,k}}(r) = B_n n! e^{-\tilde{E}_{p_{n_r,k}}^{1/2} r} r^{\eta_p^{1/2} + 1/2} L_n^{(2\eta_p^{1/2})} (2 \tilde{E}_{p_{n_r,k}}^{1/2} r) \quad (۴-۶۲)$$

که با جایگذاری آن در معادله (۴-۱۳) مولفه بالایی نیز حاصل می شود. بنابراین تابع موج کلی دیراک با پتانسیل تبدالی مورد نظر در حالت تقارن شبه اسپینی، به فرم زیر ارائه خواهد شد:

$$\Psi_{p_{n_r,k}}(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{M - E_{n_r,k} + C_p} \left( \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right) \right] B_n n! e^{-\tilde{E}_{p_{n_r,k}}^{1/2} r} r^{\eta_p^{1/2} + 1/2} L_n^{(2\eta_p^{1/2})} (2 \tilde{E}_{p_{n_r,k}}^{1/2} r) \quad (۴-۶۳)$$

سپس انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های تریتون و هلیوم ۳ را در این حالت نیز محاسبه نمودیم. مقادیر حاصله با نتایج تجربی تقریباً همخوانی دارد. نتایج بدست آمده از این کار نیز در جداول ذیل آورده شده است.

جدول (۴-۶): انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن شبه‌اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV) [۹۷]}$ |
|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| ۱۷۹                  | -۱۲۶                          | ۰/۹۲                        | -۸/۰۴۵۴                        | -۸/۴۸۰                              |
| ۱۸۱                  | -۱۲۵/۳                        | ۰/۹۳                        | -۸/۰۶۹۹                        |                                     |

جدول (۴-۷): انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن شبه‌اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV) [۹۷]}$ |
|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| ۹۹/۱                 | -۶۴                           | ۰/۹۱۹                       | -۷/۰۳۸۲                        | -۷/۷۹۰                              |
| ۹۹                   | -۶۴                           | ۰/۹۲                        | -۷/۰۵۵۲                        |                                     |

#### ۴-۵-۱ اثرات پتانسیل تبدالی بر انرژی حالت پایه ${}^3_1\text{H}_2$ و ${}^3_2\text{He}_1$ با تقارن شبه‌اسپینی حالت

اول:

در این بخش اثرات پتانسیل‌های تبدالی را بر انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های  ${}^3_1\text{H}_2$  و  ${}^3_2\text{He}_1$  طبق رابطه (۴-۵۷) محاسبه نموده و نتایج را در جداول زیر نشان داده‌ایم.

جدول (۴-۸): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن شبه‌اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}^A_Z\text{X}_N$ | $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV) [۹۷]}$ |
|--------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ${}^3_1\text{H}_2$ | ۱۷۹                  | -۱۲۶                          | ۰/۹۲                        | -۸/۰۴۵۴                        | -۸/۴۵۴۹                             | -۸/۴۸۰                              |
|                    | ۱۸۱                  | -۱۲۵/۳                        | ۰/۹۳                        | -۸/۰۶۹۹                        | -۸/۴۹۳۹                             |                                     |

جدول (۹-۴): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن شبه‌اسپینی حالت اول به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدیلی

| ${}^A_Z\text{X}_N$  | $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدیلی | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$<br>[۹۷] |
|---------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|
| ${}^3_2\text{He}_1$ | ۹۹/۱                 | -۶۴                           | ۰/۹۱۹                       | -۷/۰۳۸۲                        | -۷/۷۸۰                              | -۷/۷۹۰                                 |
|                     | ۹۹                   | -۶۴                           | ۰/۹۲                        | -۷/۰۵۵۲                        | -۷/۷۹۷                              |                                        |

اکنون با داشتن اطلاعات فوق می‌توانیم مقایسه‌ای بین انرژی حالت‌های تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی در حالت اول انجام دهیم که در جدول زیر بیان می‌داریم.

جدول (۱۰-۴): مقایسه انرژی حالت‌های تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی در حالت اول

| ${}^A_Z\text{X}_N$  | $E_{\text{SS}} \text{ (MeV)}$ | $E_{\text{PSS}} \text{ (MeV)}$ | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$ [۹۷] |
|---------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| ${}^3_1\text{H}_2$  | -۸/۵۰۴۷                       | -۸/۴۹۳۹                        | -۸/۴۸۰                              |
| ${}^3_2\text{He}_1$ | -۷/۸۵۹۱                       | -۷/۷۹۷۰                        | -۷/۷۹۰                              |

با مشاهده جدول فوق درمی‌یابیم که انرژی حالت تقارن شبه‌اسپینی نسبت به حالت تقارن اسپینی در حالت اول همخوانی بهتری با تجربه دارد.

#### ۴-۶ تقارن اسپینی با در نظر گرفتن حالت دوم پتانسیل بارتلت:

برای حالت دوم، روابط همانند حالت اول خواهد بود با این تفاوت که برای حالت دوم همانگونه که در

ابتدای فصل اشاره کردیم،  $P^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = \frac{7}{4}$  خواهد بود. بنابراین معادله (۴-۱۶) را با تقریب

(۴-۱۷) باز نویسی می‌کنیم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \left[ M^2 - E_{n_r, k}^2 - C_s (M - E_{n_r, k}) + \frac{7}{4} (M + E_{n_r, k} - C_s) \left( \frac{b}{r^2} + \frac{(a - ab)}{r} - aa \right) \right] \right\} F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (۴-۶۴)$$

با در نظر گرفتن

$$\begin{aligned}
M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s (M - E_{n_r,k}) &= \varepsilon_{n_r,k} \\
\frac{7}{4} (M + E_{n_r,k} - C_s) &= A \\
\varepsilon_{n_r,k} - A\alpha a &= \tilde{E}_{n_r,k} \\
k(k+1) &= L^2
\end{aligned}
\tag{۴-۶۵}$$

و ادامه روند قبل ویژه مقدار انرژی و تابع موج را در این حالت بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
E_{n_r,k} &= \pm \left[ M^2 - A\alpha a - \left( \frac{\beta}{1+2n+2\eta^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2} \\
\psi_{n_r,k}(r) &= \frac{1}{r} \left[ \frac{i}{M + E_{n_r,k} - C_s} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) \right] B_n n! e^{-\tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r} r^{\eta^{1/2}+1/2} L_n^{(2\eta^{1/2})} (2 \tilde{E}_{n_r,k}^{1/2} r)
\end{aligned}
\tag{۴-۶۶}$$

نتایج بدست آمده از این کار در جداول ذیل آورده شده است.

جدول (۴-۱۱): انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} (\text{MeV})$ | $E_{\text{exp}} (\text{MeV})$ [۹۷] |
|------------|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| ۵۳         | -۴۶                      | ۰/۹۲                        | -۸/۰۰۹۸                       | -۸/۴۸۰                             |
| ۵۴         | -۴۵                      | ۰/۹۳                        | -۸/۰۵۷۰                       |                                    |

جدول (۴-۱۲): انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} (\text{MeV})$ | $E_{\text{exp}} (\text{MeV})$ [۹۷] |
|------------|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| ۸۲         | -۵۰                      | ۰/۹                         | -۶/۳۰۶۰                       | -۷/۷۹۰                             |
| ۸۱         | -۵۱                      | ۰/۹۱                        | -۶/۸۰۱۹                       |                                    |

#### ۴-۶-۱ اثرات پتانسیل تبدالی بر انرژی حالت پایه ${}^3\text{H}_2$ و ${}^3\text{He}_1$ با تقارن اسپینی حالت دوم:

در این بخش اثرات پتانسیل‌های تبدالی را بر انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های  ${}^3\text{H}_2$  و  ${}^3\text{He}_1$  طبق رابطه

(۴-۵۷) محاسبه نموده و نتایج را در جداول زیر ذکر کرده‌ایم.

جدول (۴-۱۳): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}^A_Z X_N$       | $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha \text{ (fm}^{-1}\text{)}$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$<br>[۹۷] |
|--------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|
| ${}^3_1\text{H}_2$ | ۵۳                   | -۴۶                           | ۰/۹۲                              | -۸/۰۰۹۸                        | -۸/۳۷۰۴                             | -۸/۴۸۰                                 |
|                    | ۵۴                   | -۴۵                           | ۰/۹۳                              | -۸/۰۵۷۰                        | -۸/۴۰۶۱                             |                                        |

جدول (۴-۱۴): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}^A_Z X_N$        | $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha \text{ (fm}^{-1}\text{)}$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$<br>[۹۷] |
|---------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|
| ${}^3_2\text{He}_1$ | ۸۲                   | -۵۰                           | ۰/۹                               | -۶/۳۰۶۰                        | -۸/۳۱۴۳                             | -۷/۷۹۰                                 |
|                     | ۸۱                   | -۵۱                           | ۰/۹۱                              | -۶/۸۰۱۹                        | -۸/۶۳۳۵                             |                                        |

#### ۴-۷ تقارن شبه اسپینی با در نظر گرفتن حالت دوم پتانسیل بارتلت:

با جایگذاری پتانسیل فوق به معادله زیر دست می‌یابیم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \left[ M^2 - E_{p_{n_r,k}}^2 + C_p (M + E_{p_{n_r,k}}) + \frac{7}{4} (E_{p_{n_r,k}} - M - C_p) \left( \frac{b}{r^2} + \frac{(a - \alpha b)}{r} - \alpha a \right) \right] \right\} G_{p_{n_r,k}}(r) = 0 \quad (۴-۶۹)$$

با انتخاب پارامترهای زیر خواهیم داشت:

$$M^2 - E_{p_{n_r,k}}^2 + C_p (M + E_{p_{n_r,k}}) = \varepsilon_{p_{n_r,k}}$$

$$\frac{7}{4} (E_{p_{n_r,k}} - M - C_p) = A_p \quad (۴-۷۰)$$

$$\varepsilon_{p_{n_r,k}} - A_p \alpha a = \tilde{E}_{p_{n_r,k}}$$

$$k(k+1) = L^2$$

محاسبه انرژی حالت تقارن شبه اسپینی نیز به مانند حال تقارن اسپینی می باشد:

$$E_{p_{n_r,k}} = \pm \left[ M^2 - A_p \alpha a - \left( \frac{\beta_p}{1 + 2n + 2\eta_p^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (71-4)$$

$$\psi_{p_{n_r,k}}(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{M - E_{n_r,k} + C_p} \left( \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right) \right] B_n n! e^{-\tilde{E}_{p_{n_r,k}}^{1/2} r} r^{\eta_p^{1/2} + 1/2} L_n^{(2\eta_p^{1/2})} (2 \tilde{E}_{p_{n_r,k}}^{1/2} r) \quad (72-4)$$

سپس انرژی حالت پایه ایزوتوپ های تریتون و هلیوم ۳ را در این حالت نیز محاسبه نمودیم. مقادیر حاصله با نتایج تجربی تقریباً همخوانی دارد. نتایج بدست آمده از این کار را در جداول به نمایش گذاشته ایم.

جدول (۴-۱۵): انرژی حالت پایه  ${}^3_1\text{H}_2$  تقارن شبه اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} (\text{MeV})$ | $E_{\text{exp}} (\text{MeV}) [97]$ |
|------------|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| ۴۴         | -۳۵/۸                    | ۰/۸۷                        | -۸/۱۵۱۵                       | -۸/۴۸۰                             |
| ۴۵         | -۳۷                      | ۰/۸۶                        | -۸/۱۰۶۶                       |                                    |

جدول (۴-۱۶): انرژی حالت پایه  ${}^3_2\text{He}_1$  تقارن شبه اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| a (MeV fm) | b (MeV fm <sup>2</sup> ) | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} (\text{MeV})$ | $E_{\text{exp}} (\text{MeV}) [97]$ |
|------------|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| ۷۶         | -۵۰/۸                    | ۰/۹۰۹                       | -۷/۱۴۸۲                       | -۷/۷۹۰                             |
| ۷۵         | -۵۰/۷                    | ۰/۹۱                        | -۷/۳۷۱۶                       |                                    |

#### ۴-۷-۱ اثرات پتانسیل تبدالی بر انرژی حالت پایه ${}^3\text{H}_2$ و ${}^3\text{He}_1$ با تقارن شبه‌اسپینی حالت

دوم:

در این بخش اثرات پتانسیل‌های تبدالی را بر انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های  ${}^3\text{H}_2$  و  ${}^3\text{He}_1$  طبق رابطه (۴-۵۷) محاسبه نموده و نتایج را در جداول زیر ذکر کرده‌ایم.

جدول (۴-۱۷): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{H}_2$  تقارن شبه‌اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}^A_Z\text{X}_N$ | $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$<br>[۹۷] |
|--------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|
| ${}^3_1\text{H}_2$ | ۴۴                   | -۳۵/۸                         | ۰/۸۷                        | -۸/۱۵۱۵                        | -۸/۵۳۹۶                             | -۸/۴۸۰                                 |
|                    | ۴۵                   | -۳۷                           | ۰/۸۶                        | -۸/۱۰۶۶                        | -۸/۴۳۴۱                             |                                        |

جدول (۴-۱۸): تغییر انرژی حالت پایه  ${}^3\text{He}_1$  تقارن شبه‌اسپینی حالت دوم به ازای مقادیر ضرایب پتانسیل تبدالی

| ${}^A_Z\text{X}_N$  | $a \text{ (MeV fm)}$ | $b \text{ (MeV fm}^2\text{)}$ | $\alpha = (\text{fm}^{-1})$ | $E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$ | انرژی محاسبه شده<br>با نیروی تبدالی | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$<br>[۹۷] |
|---------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|
| ${}^3_2\text{He}_1$ | ۷۶                   | -۵۰/۸                         | ۰/۹۰۹                       | -۷/۱۴۸۲                        | -۷/۶۱۳۵                             | -۷/۷۹۰                                 |
|                     | ۷۵                   | -۵۰/۷                         | ۰/۹۱                        | -۷/۳۷۱۶                        | -۷/۸۱۰۶                             |                                        |

اکنون با داشتن اطلاعات فوق می‌توانیم انرژی حالت‌های تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی را در حالت دوم نیز با یکدیگر مقایسه کنیم.

جدول (۴-۱۹): مقایسه انرژی حالت‌های تقارن اسپینی و شبه‌اسپینی در حالت دوم

| ${}^A_Z\text{X}_N$  | $E_{\text{SS}} \text{ (MeV)}$ | $E_{\text{PSS}} \text{ (MeV)}$ | $E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$ [۹۷] |
|---------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| ${}^3_1\text{H}_2$  | -۸/۴۰۶۱                       | -۸/۴۳۴۱                        | -۸/۴۸۰                              |
| ${}^3_2\text{He}_1$ | -۸/۶۳۳۵                       | -۷/۸۱۰۶                        | -۷/۷۹۰                              |

از انجام این کار درمی‌یابیم که انرژی حالت تقارن شبه‌اسپینی نسبت به حالت تقارن اسپینی در حالت دوم نیز همخوانی بهتری با تجربه دارد. همچنین متوجه می‌شویم که نتایج حاصل‌شده در حالت اول بهتر از حالت دوم بوده و از همخوانی بیشتری با تجربه برخوردار است. این نتیجه مصداقی است بر صحت اصل طرد پائولی و نیز تأییدی است بر مفاهیم و مطالب فیزیک کوانتوم.

#### ۴-۸ نقش مزون‌های شبه‌اسکالر (با اسپین صفر) در نیروهای تبدالی

مزون‌های شبه‌اسکالر مانند  $\pi^0$  و  $\pi^\pm$  در نیروهای تبدالی نقش اساسی دارند. طبق نظریه مزونی یوکاوا عامل برهمکنش بین نوکلئون‌ها مزون  $\pi$ ، که از سبک‌ترین مزون‌ها است، به‌شمار می‌رود. اساس این نظریه مزونی، معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین-گوردن می‌گوییم. توصیف پدیده‌ها در انرژی بالا مستلزم به‌کارگیری معادلات نسبیتی می‌باشد. از آنجایی که این مزون‌ها ذراتی با اسپین صفر می‌باشند، بنابراین در بررسی و مطالعه آنها نیز، از معادله کلاین-گوردن استفاده می‌نماییم. از طرفی با توجه به نظریه تبدالی یوکاوا می‌توانیم به نقش این مزون‌ها در نیروهای تبدالی بپردازیم. معادله کلاین-گوردن به علت داشتن حداکثر اطلاعات لازم برای توصیف حرکت ذرات با اسپین صفر مانند بوزون‌ها، یکی از اساسی‌ترین معادلات در مکانیک کوانتوم نسبیتی می‌باشد. به همین جهت از اهمیت بالایی برخوردار است و مورد توجه بسیاری از فیزیکدانان قرار گرفته است. لذا تاکنون تلاش‌هایی در زمینه حل این معادله با پتانسیل‌های فیزیکی شامل پتانسیل روزن-مورس [۹۸، ۹۹]، پتانسیل وود-ساکسون [۱۰۰]، پتانسیل هالسن [۱۰۱]، و دیگر پتانسیل‌ها انجام گرفته‌است. در اغلب مدل‌های پتانسیل، پتانسیل تبادلی تک پیونی برای دستیابی به نتایج بهتر به دنبال دیگر اجزا اضافه می‌شود لذا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در ادامه با استفاده از معادله کلاین-گوردن به مطالعه نقش مزون‌های شبه‌اسکالر در نیروهای تبدالی خواهیم پرداخت.

#### ۴-۸-۱ معادله کلاین-گوردن در حضور پتانسیل تبادلی:

معادله شعاعی کلاین-گوردن به صورت زیر نوشته می شود [۶۹،۹۸]:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + (E - V(r))^2 - (Mc^2 + S(r))^2 \right) U(r) = 0 \quad (۷۳-۴)$$

که در آن  $V(r)$  و  $S(r)$  پتانسیل های اسکالر و برداری هستند. با قرار دادن  $\hbar = c = 1$  در معادله فوق خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + (E^2 + V^2(r) - 2EV(r) - M^2 - S^2(r) - 2MS(r)) U(r) = 0 \quad (۷۴-۴)$$

حل دقیق معادله کلاین-گوردن با پتانسیل های برداری و اسکالر فقط برای چند پتانسیل محدود میسر می باشد [۹۴]. برخی از محققان سعی کردند با برابر گرفتن پتانسیل اسکالر با پتانسیل برداری حل دقیق معادله کلاین-گوردن را با برخی پتانسیل ها به روش های گوناگون بدست آورند [۹۸،۹۹]. در این کار ما نیز برای سادگی پتانسیل های اسکالر و برداری را برابر در نظر گرفته ایم. با جایگذاری پتانسیل (۷۴-۱) در رابطه فوق داریم:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left( E^2 - M^2 - 2(E + M) \left( a + \frac{b}{r} \right) \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) U(r) = 0 \quad (۷۵-۴)$$

با تعریف تغییر متغیر

$$\varphi(r) = \frac{U(r)}{r} \quad (۷۶-۴)$$

و با استفاده از بسط  $e^{-\alpha r} = 1 - \alpha r$  معادله (۷۵-۴) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} [-\varepsilon r^2 - \eta r - \xi] \varphi(r) = 0 \quad (۷۷-۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (M - E - 2a\alpha)(E + M) \\ \eta &= 2(a - \alpha b)(E + M) \\ \xi &= 2b(E + M) \end{aligned} \quad (۷۸-۴)$$

در چند سال اخیر تلاش‌های زیادی برای حل چنین معادلاتی به روش‌های متعدد صورت گرفته است. در این میان روش NU یکی از بهترین روش‌هایی است که می‌توان از آن برای حل این معادله استفاده کرد [۶۹].

از مقایسه روابط (۵-۳) و (۷۷-۴) در می‌یابیم:

$$\tilde{\tau} = 2, \quad \sigma = r, \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon r^2 - \eta r - \xi \quad (۷۹-۴)$$

با جایگذاری عبارت‌های بالا در رابطه (۱۰-۳) خواهیم داشت:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} [1 + 2r\varepsilon^{1/2} \pm \zeta] \quad (۸۰-۴)$$

به ازای  $K = -\eta \pm (\varepsilon\zeta)^{1/2}$  که در آن  $\zeta = 4\xi + 1$  می‌باشد. با توجه به معادله (۹-۳) برای عبارت  $\tau(r)$  داریم:

$$\tau(r) = 1 - [2r\varepsilon^{1/2} \pm \zeta^{1/2}] \quad (۸۱-۴)$$

طبق معادلات (۱۱-۳) و (۱۲-۳) در می‌یابیم:

$$\lambda = -\eta - \varepsilon^{1/2} \pm (\varepsilon\zeta)^{1/2} \quad (۸۲-۴)$$

$$\lambda_n = 2n\varepsilon^{1/2}$$

خواهیم دید که پس از تساوی  $\lambda = \lambda_n$  ویژه مقادیر انرژی از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon = \left[ \frac{\eta}{\pm \zeta^{1/2} - 2n - 1} \right]^{1/2} \quad (۸۳-۴)$$

با استفاده از رابطه (۷-۳)،

$$\phi = r^{-\frac{1}{2} \left( 1 \pm \zeta^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-r\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \quad (۸۴-۴)$$

و همچنین رابطه (۱۴-۳)، روابط زیر بدست می‌آید:

$$\omega = r^{(1 \mp \zeta^{1/2})} e^{2r\varepsilon^{1/2}} \quad (۸۵-۴)$$

$$\rho = r^{\mp \zeta^{1/2}} e^{2r\varepsilon^{1/2}} \quad (۸۶-۴)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۳-۱۳) درمی‌یابیم:

$$y_n(r) = B_n r^{\pm \zeta^{\frac{1}{2}}} e^{-2r\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dr^n} \left( r^{n \mp \zeta^{\frac{1}{2}}} e^{2r\epsilon^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (۴-۸۷)$$

با اعمال تغییر متغیر (۳-۶) تابع موج به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\varphi(r) = B_n r^{\frac{1}{2} \left( \pm \zeta^{\frac{1}{2}} - 1 \right)} e^{-3r\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dr^n} \left( r^{n \mp \zeta^{\frac{1}{2}}} e^{2r\epsilon^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (۴-۸۸)$$

و نیز اعمال تغییر رابطه (۴-۷۶) تابع موج به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$U(r) = N r^{\frac{1}{2} \left( 1 \pm \zeta^{\frac{1}{2}} \right)} e^{-3r\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dr^n} \left( r^{n \mp \zeta^{\frac{1}{2}}} e^{2r\epsilon^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (۴-۸۹)$$

ما در این بخش توانستیم به بررسی معادله کلاین-گوردن با استفاده از روش NU بپردازیم، و در نهایت ویژه‌تابع و ویژه‌مقادیر انرژی را به ازای پتانسیل تبدالی بین ذرات بدست‌آوردیم. برای کارهای بعد پیشنهاد می‌کنیم که می‌توان پتانسیل‌های تانسوری و اسپین-مدار را نیز در کنار این پتانسیل در نظر گرفت و ویژه‌مقادیر انرژی را با در نظر گرفتن بخش اسپینی و تانسوری نیز بدست‌آورد. با استفاده از چنین اطلاعات مهمی می‌توان جرم ذرات تبدالی را نیز بدست‌آورد.

## نتیجه گیری

باتوجه به محاسبات ارائه شده و بررسی‌های صورت گرفته در این پایان‌نامه، در یک مدل کاملاً نسبیتی باید علاوه بر پتانسیل‌های ناشی از برهمکنش مرکزی نوکلئون-نوکلئون، نیروهای تبدالی را هم در نظر بگیریم. برای این منظور، ما پتانسیل تبدالی بارتلت را در نظر گرفتیم. سپس معادله دیراک را که یکی از معادلات مهم در فیزیک نسبیتی و کوانتوم می‌باشد، با استفاده از روش NU به صورت تحلیلی حل نمودیم. در این کار ما فقط نیروی تبدالی ناشی از پتانسیل بارتلت را در دو حالت  $(P^0 = \frac{1}{2}, \frac{7}{4})$  بررسی نموده و با توجه به آن انرژی حالت پایه تریتون ( ${}^3\text{H}_2$ ) و هلیوم ( ${}^3\text{He}_1$ ) را بدست آوردیم. سپس تغییرات انرژی را با در نظر گرفتن اثرات اختلالی ناشی از پتانسیل تبدالی بارتلت در هر دو حالت محاسبه کردیم. در حالت اول نسبت به حالت دوم نتایج سازگارتری با تجربه حاصل شد. این نتیجه با اصل طرد پائولی و مفاهیم فیزیک کوانتوم نیز منطبق است. با استفاده از همین مدل می‌توانیم نیروهای تبدالی ناشی از هر سه پتانسیل بارتلت، ماژورانا و هایزنبرگ را نیز باهم و یا جداگانه در نظر بگیریم. سپس با استفاده از معادله کلاین-گوردن به مطالعه نقش مزون‌های شبه‌اسکالر در نیروهای تبدالی پرداختیم. از این رو معادله کلاین-گوردن را با یک پتانسیل کوتاه برد در نظر گرفته و آن را به کمک روش NU حل کردیم. ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر انرژی را به ازای پتانسیل تبدالی بین ذرات بدست آوردیم. برای کارهای بعد پیشنهاد می‌کنیم که می‌توان پتانسیل‌های تانسوری و اسپین-مدار را نیز در کنار این پتانسیل در نظر گرفت و ویژه‌مقادیر انرژی را با در نظر گرفتن بخش اسپینی و تانسوری نیز بدست آورد. با استفاده از چنین اطلاعات مهمی می‌توان جرم ذرات تبدالی را نیز بدست آورد.



## مراجع

- [1] Cottingham W.N. and Greenwood D.A. (2000), “**An introduction to nuclear physics**”, Cambridge University Press.
- [2] Griffiths D.J. (1984), “**Introduction to Elementary Particles**”, John Wiley & Sons.
- [3] برون ب الف ، (۱۳۹۱) "مباحثی در فیزیک ساختار هسته‌ای"، مهمان دوست‌خواه‌داد ع، انتشارات مرنديز، مشهد.
- [4] Frauenfelder H. and Henley E.M. (1977), “**subatomic physics**”, Vol 1.2, prentice – Hall.
- [5] Krane K.S. (1988), “**Introductory Nuclear physics**”, Vol 1.2, John Willey & sons.
- [6] Cohen B.L. (1971), “**Concepts of Nuclear physics**”, McGraw-Hill, New York.
- [7] علمدار میلانی س و قرآن‌نویس م ، (۱۳۸۲) "آشنایی با فیزیک هسته‌ای"، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران.
- [8] Nisimura K. (1967), “Present Status of Experimental Study of Nucleon-Nucleon Scattering”, **Prog. Theor. Phys. Suppl.**, 39, pp.286-346.
- [9] Meyerhof W.E. (1967), “**Elements of Nuclear Physics**”, McGraw-Hill, New York.
- [10] Hans H.S. (2001), “**Nuclear Physics-Exoerimental and Theorical**”, New Age International, New Delhi.
- [11] Weinberg S. (1991), “Effective chiral Lagrangians for nucleon-pion interactions and nuclear forces”, **Nucl. Phys. B**, 363, 1, pp. 3-18.
- [12] Holinde K. (1981), “Two-Nucleon Forces And Nuclear Matter”, **Phys. Rep.**, 68, 3, 3, pp.121-188.
- [13] Pahlavani M.R., Sadeghi J. and Morad R. (2013), “Binding energy of a holographic deuteron and tritium in anti-de-Sitter space/conformal field theory (AdS/CFT)”, **Phys. Rev. C**, 82, 2.

- [14] Jastrow R. (1951), “On the Nucleon-Nucleon Interaction”, **Phys. Rev.**, **81**, 165.
- [15] Lohse D., Durso J.W., Holinde K. and Speth J. (1990), “Meson Exchange Model for Pseudoscalar Meson-Meson Scattering”, **Nucl. Phys. A**, **516**, pp. 513-548.
- [16] Parreno A. and Ramos A. (1995), “Role of the meson in the nonmesonic hyper nuclear decay”, **Phys. Rev. C**, **4**, 52, pp. 1768-1772.
- [17] Pavón Valderrama M. (2012), “Power Counting and Perturbative One Pion Exchange in Heavy Meson Molecules”, **Phys. Rev. D**, **85**, 11.
- [18] Machleidt R. (2001), “The high-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential (CD-Bonn)” **Phys. Rev. C**, **63**, 2.
- [19] Taketani M., Machida S. and Ohanuma S. (1952), “The meson theory of nuclear forces I: The deuteron ground state and low energy neutron-proton scattering”, **Prog. Theor. Phys.**, **7**, 45.
- [20] Machleidt R., Holinde K. and Elster Ch. (1987), “The Bonn Meson-Exchange Model for The Nucleon-Nucleon Interaction”, **Phys. Rep.**, **149**, 1, pp.1-89.
- [21] Yndurfiin F.J. (1983), “**Quantum Chromodynamics**”, Springer, New York.
- [22] Mittal A. and Mitra A.N. (1984), “Bethe-Salpeter qqg dynamics: Electromagnetic properties of baryons ”, **Phys. Rev. D**, **29**.
- [23] You-Wen Y. and Zong-Ye Z. (1984), “ Nucleon-meson vertex functions and isobar-meson vertex functions from the quark potential model”, **Nucl. Phys. A**, **426**, 3, pp. 557-574.
- [24] Wagenaar J.W. and Rijken T.A. (2009), “Pion-Nucleon Scattering in Kadyshevsky Formalism: I Meson Exchange Sector”, **Phys. Rev. C**, **80**, 5.

- [25] Krane K.S. (1988), “**Introductory Nuclear physics**”, Vol. 2.2, John Willey & sons.
- [26] Burge E.J. (1988), “**atomic Nuclei and their particles**”, Second Edition Clarendon press, oxford physics.
- [27] Bahlouli H. (2012), “Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potential”, **Chem. Phys.**, **393**, pp.153-156.
- [28] Rowlinson J.S. (1989), “The Yukawa potential”, **Phys. A**, **156**, **1**, pp.15-34.
- [29] Mello P.A. and Flores J. (1963), “Tensor forces and the energy levels of  $^{210}\text{Bi}$ ”, **Nucl. Phys.**, **47**, pp. 177-183.
- [30] Eichstaedt F., Leupold S., Mosel U. and Muehlich P. (2007), “Hadrons in Medium – Theory Confronts Experiment”, **Prog. Theor. Phys. Suppl.**, **168**, **495**.
- [31] Riek F., Rapp R., Oh Y. and Lee T.S. (2010), “Medium Modifications of the Rho Meson in Nuclear Photo production”, **Phys. Rev. C**, **82**.
- [32] Korpa C.L. and Lutz M.F.M. (2005), “Kaon and antikaon properties in cold nuclear medium”, **Acta Phys. Hung. A**, **22**, **21**.
- [33] Tolos L., Ramos A. and Oset E. (2006), “Chiral approach to antikaon s- and p-wave interactions in dense nuclear matter”, **Phys. Rev. C**, **74**.
- [34] Manabe Y., Hosaka A. and Toki H. (2005), “Relationship between the separable and one-boson-exchange potential for the covariant Bethe–Salpeter equation”, **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** **31**, **1183**.
- [35] Carter A.A. et al. (1968), “Pion-Nucleon Total Cross Sections from 0.5 to 2.65 GeV/c”, **Phys. Rev.** **168**, **5**, **1457**.

- [36] Marlow D. et al. (1982), “Kaon scattering from C and Ca at 800 MeV/c”, **Phys. Rev. C**, **25**, 2619.
- [37] Kormanyos C.M. et al. (1995), “Quasielastic  $K^+$  scattering”, **Phys. Rev. C**, **51**, 669.
- [38] Michael R. et al. (1996), “ $K^+$  elastic scattering from C and  $^6\text{Li}$  at 715 MeV/c”, **Phys. Lett. B**, **382**, 29.
- [39] Chrien R.E. et al. (1997), “Elastic and inelastic scattering of  $K^+$  from  $^6\text{Li}$  and  $^{12}\text{C}$ ”, **Nucl. Phys. A**, **625**, 251.
- [40] Arellano H.F. and von Geramb H.V. (2005), “Microscopic analysis of  $K^+$ -nucleus elastic scattering based on  $K^+$ -nucleon phase shifts”, **Phys. Rev. C**, **72**.
- [41] Hadjimichef<sup>1</sup> D., Haidenbauer<sup>2</sup> J. and Krein G. (2002), “Short-range repulsion and isospin dependence in the KN system”, **Phys. Rev. C**, **66**, 055214, 5.
- [42] Friedman E. et al. (1997), “ $K^+$  nucleus reaction and total cross sections: New analysis of transmission experiments”, **Phys. Rev. C**, **55**, 1304, 3.
- [43] Friedman E., Gal A. and Mares J. (1997), “Medium effects in  $K^+$  nuclear interactions”, **Nucl. Phys. A**, **625**, 272.
- [44] Krauss R. A. et al. (1992), “ $K^+$  total cross sections on  $\text{C}^{12}$  and medium effects in nuclei”, **Phys. Rev. C**, **46**, 2, 655.
- [45] Aman D. Sood, Hartnack Ch. and Aichelin J. (2011), “In-medium effects on  $K^+$  and  $K^-$  spectra in lighter systems”, **DAE Symp. on Nucl. Phys.** **56**.
- [46] Nagels M.M. et al. (1978), “Low-energy nucleon-nucleon potential from Regge-pole theory”, **Phys. Rev. D**, **17**, 768.
- [47] Bryan R. and Scott B.L. (1969), “Nucleon-Nucleon Scattering from One-Boson-Exchange Potentials. III. S Waves Included”, **Phys. Rev.** **177**, 1435, 4.

- [48] Machleidt R. (2001), “High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential”, **Phys. Rev. C**, **63**, 024001.
- [49] Buttgen R. et al. (1990), “A meson exchange model for the K+N interaction”, **Nucl. Phys. A**, **506**, pp. 586-614.
- [50] Green A.E.S., Sawada T. (1967), “Meson Theoretic N–N Interactions for Nuclear Physics”, **Rev. Mod. Phys.**, **39**, 3.
- [51] Stagat R.W., Riewe F. and Green A.E.S. (1971), “Semiempirical Generalized One-Boson-Exchange Potentials”, **Phys. Rev. C**, **552**, 3.
- [52] Bjorken J.D. and Drell S.D. (1978), “**Relativistic Quantum Mechanics**”, McGraw Hill.
- [53] Hanna K.M., Sewailem Sh.M. and Shalaby A.G. (2013), “Microscopic Description of K<sup>+</sup> Scattering on <sup>4</sup>He , <sup>16</sup>O and <sup>40</sup>Ca Nuclei using Meson Exchange Theory”, **Nucl. Theor.**
- [54] Smirnov Yu.F. (1961), “Talmi transformations for particles with different masses”, **Nucl. Phys.** **27**, 177.
- [55] Joachain C.J. (1975), “**Quantum Collision Theory**”, Vol.7, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- [56] Hoffmann M. et al. (1995), “Role of correlated two-pion exchange in K<sup>+</sup>N scattering”, **Nucl. Phys. A**, **593**, 3, pp. 341-361.
- [57] Tolos L., Haidenbauer J. and Krein G. (2011), “DN interaction from the Jülich meson-exchange model”, Nuclear Experiment.

- [58] Dahan M.B. et al. (1996), “Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential”, **Phys. Rev. Lett.**, **76**, 4508, 24.
- [59] Wilkinson S.R. et al. (1996), “Observation of Atomic Wannier-Stark Ladders in an Accelerating Optical Potential”, **Phys. Rev. Lett.**, **76**, 4512, 24.
- [60] Nagels M.M. et al. (1976), “Compilation of coupling constants and low-energy parameters”, **Nucl. Phys. B**, **109**, 1, pp.1-90.
- [61] Reuber A. et al. (1996), “Correlated  $\pi\pi$  and  $K\bar{K}$  exchange in the baryon-baryon interaction”, **Nucl. Phys. A**, **608**, 3, pp. 243-304.
- [62] Nagels M.M., Rijken T.A. and de Swart J.J. (1977), “Baryon-baryon scattering in a one-boson-exchange-potential approach. II. Hyperon-nucleon scattering”, **Phys. Rev. D**, **15**, 2547, 9.
- [63] Rijken T.A. (1975), “On Iezo Body Problems in Nuclear and Particle Physics”, Proceedings of the International Conference, p. 136, Quebec, Presses Univ. Laval.
- [64] Nagels M.M., Rijken T.A. and de Swart J.J. (1975), “Baryon-baryon scattering in a one-boson-exchange-potential approach. II. Hyperon-nucleon scattering”, **Phys.Rev. D**, **12**, 744.
- [65] Parreno A. and Ramos A. (1995), “Role of the meson in the nonmesonic hypernuclear decay”, **Phys. Rev.C**, **52**, 4.
- [66] McKellar B.H.J. and Gibson B.F. (1984), “Nonmesonic decay of heavy  $\Lambda$  hypernuclei”, **Phys. Rev. C**, **30**, 322, 1.
- [67] Nikiforov A.F. and Uvarov V.B. (1988), “**Special functions of Mathematical physics**”, Brikhauser, Basel.
- [68] Shojaei M.R., Rajabi A.A., Farrokh M. and Zoghi-Foumani N. (2014), “Energy Levels of spin-1/2 partioles with Yukawa Interaction”, **Modern. Phys.**, **5**, pp.773-180.

[69] Farrokh M., Shojaei M.R., and Rajabi A.A. (2013), "Klein-Gordon equation with Hulth'en potential and position-dependent mass", **Eur. phys. J. Plus.** **128**, 14.

[70] Aiello M. et al. (1996), "three-body force model for the electromagnetic excitation of the nucleon", **Phys. Lett. B**, **387**, 215.

[71] Kievsky A. (2011), "Analysis of Three-Nucleon Forces Effects in the  $A = 3$  System", **Few-Body Systems.**, **49**, pp. 19-25.

[72] Viviani M., Kievsky A. and Rosati S. (2001), "The Kohn variational principle for elastic proton-deuteron scattering above deuteron breakup threshold", **Few body System.**, **30**, 1-2, pp. 39-63.

[73] Shojaei M.R. and Rajabi A.A. (2007), "Hypercentral constituent quark model and the hyperfine potential", **I. J. P. R.**, **7**, 2, pp.10.

[74] feizi H. and Ranjbar A.H. (2013), "Relativistic symmetries of the Manning-Rosen potential in the frame of supersymmetry", **Eur. Phys. J. Plus.**, **128**, 3.

[75] Gendenshtein L. (1983), "Derivation of exact spectra of the Schrodinger equation by means of supersymmetry", **JETP. Lett.** **38**, 356.

[76] Dutt R., Khare A. and Sukhatme U.P. (1986), "Exactness of supersymmetric WKB spectra for shape-invariant potentials", **Phys. Lett. B**, **181**, 3-4, pp. 295-298.

[77] Infeld L. and Hull T.E. (1951), "The factorization method", **Rev. Mod. Phys.**, **23**, 21, 1.

[78] نیک عمل م ، واعظ الف و لهراسبی الف، (۱۳۸۶) " آشنایی با روش‌های شبیه‌سازی در فیزیک " ، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول.

[79] Machleidt R. (1987), "The bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction", **Phys. Rep.**, **149**, 1, pp. 1-89.

- [80] Aydoğdu O. and Sever R. (2010), “Exact solution of the Dirac equation with the Mie-type potential under the pseudospin and spin symmetry limit”, **Ann. Phys.**, **325**, 2, pp. 373-383.
- [81] Dong S.H., Morales D. and Garcia-Ravelo J. (2007), “Exact quantization rule and its applications to physical potentials”, **Int. J. Mod. Phys. E**, **16**, 1, 189.
- [82] Alhaidari A.D., Bahlouli H. and Al-Hasan A. (2006), “Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials”, **Phys. Lett. A**, **349**, pp.87-97.
- [83] Soylu A. Bayrak O. and Boztosun I. (2008), “k state solutions of the Dirac equation for the Eckart potential with pseudospin and spin symmetry”, **J. Phys. A: Math. Theor.**, **41**, 065308.
- [84] Jia C.S. Gao P. and Peng X.L. (2006), “Exact solution of the Dirac–Eckart problem with spin and pseudospin symmetry”, **J. Phys. A: Math. Gen.**, **39**, pp. 7737–7744.
- [85] Zhang L.H., Li X.P and Jia C.S. (2008), “Analytical approximation to the solution of the Dirac equation with the Eckart potential including the spin-orbit coupling term”, **Phys. Lett A**, **372**, pp. 2201–2207.
- [86] Gou J.Y. and Sheng Z.Q. (2005), “Solution of the Dirac equation for the Woods–Saxon potential with spin and pseudospin symmetry”, **Phys. Lett. A**, **338**, pp. 90–96.
- [87] Ikhdair S.M. and Sever R. (2010), “Solutions of the spatially-dependent mass Dirac equation with the spin and pseudospin symmetry for the Coulomb-like potential”, **Applied Mathematics and Computation**, **216**, 2, pp. 545–555.
- [88] Schulze-Halberg A. (2006), “Exactly solvable combinations of scalar and vector potentials for the Dirac equation interrelated by Riccati equations”, **Chin. Phys. Lett.**, **23**, 1365, 6.
- [89] Arima A., Harvey M. and Shimizu K. (1969), “Pseudo LS coupling and pseudo  $SU_3$  coupling schemes”, **Phys. Lett. B**, **30**, pp.517-522.

[90] Hecht K.T. and Adler A. (1969), "Generalized seniority for favored J [not equal to] 0 pairs in mixed configurations", **Nucl. Phys. A.**, 137, pp.129-143.

[91] Blokhin A.L, Bahri C. and Draayer J.P. (1995), "Origin of Pseudospin Symmetry", **Phys. Rev. Lett.**, 74, 4149.

[92] Bahri C., Draayer J.P. and Moszkowski S.A. (1992), "Pseudospin symmetry in nuclear", **Phys. Rev. Lett.**, 65 , 2133.

[93] Ginocchio J.N. (2005), "Relativistic symmetries in nuclei and hadrons", **Phys. Rep.**, 414, pp.165-261.

[94] Greiner W. (2000), "**Relativistic quantum mechanic: wave equation**", Bromley D.A., Frankfurt, springer.

[95] Feizi H., Shojaei M.R. and Rajabi A.A. (2012), "Raising and lowering operators for the Dirac-Woods-Saxon potential in the presence of spin and pseudospin symmetry", **Eur. Phys. J. Plus.**, 127, 41.

[96] Arfken G.B. (1985), "**mathematical methods for physicistics**", Academic press.

[97] ثابت دیزاوندی ز، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد: "برهمکنش مناسب نوکلئون-نوکلئون برای محاسبه انرژی بستگی ایزوتوپ های هلیوم ۳ و ۴"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[98] Soyly A., Bayrak O. and Boztosun I. (2008), "Exact Solutions of Klein–Gordon Equation with Scalar and Vector Rosen–Morse-Type Potentials", **Chin. Phys. Lett.**, 25, 8, 2754.

[99] Alhaidari A.D., Bahlouli H. and Al-Hasan A. (2006), "Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials", **Phys. Lett. A**, 349, 1-4, pp. 87-97.

[100] Ikhdair S.M. and Sever R. (2006), “Exact solution of the Klein-Gordon equation for the PT-symmetric generalized Woods-Saxon potential by the Nikiforov-Uvarov method”, **Ann. Phys.**, **16**, 3, pp. 218-232.

[101] Chen G., Chen Z.D. and Lou Z.M. (2004), “Exact bound state solutions of the s-wave Klein–Gordon equation with the generalized Hulthén potential”, **Phys. Lett. A**, **331**, 6, pp. 374-377.

## Abstract:

In this thesis, we review some of the basic concepts of nuclear physics and Nucleon-Nucleon interactions. Then we study Bartlett, Heisenberg and Majorana exchange forces. To study the interaction between nucleons, we calculate the energy of the ground state for two light and mirror nucleus,  ${}^3_1\text{H}_2$  and  ${}^3_2\text{He}_1$ , by the exchange potential. So in this work, with Dirac equation in a relativistic model, we can obtain eigen states and energy values for spin symmetry and pseudo-spin symmetry by using the exchange potential. The analytical Nikiforov-Uvarov method is the method used in this work. After finding the energy values we have discussed effects of the exchange forces in two states,  $P^\sigma = \frac{1}{2}$  and  $P^\sigma = \frac{7}{4}$ . Next, we try to obtain shifting energy levels with the effects of exchange forces and then we considered this effects by using the perturbation method. In the first case ( $P^\sigma = \frac{1}{2}$ ), we obtain good results. This is consistent with the Pauli exclusion principle and concepts of quantum physics. Finally we use the Klein-Gordon equation for study the role of pseudo-scalar mesons in the exchange forces. We have considered the Klein-Gordon equation with a short-range potential and calculated by NU method. Energy eigenvalues and wave functions are obtained.

## Keywords:

Exchange forces, Exchange potentials, Meson exchange, Dirac equation, Klein-Gordon equation.



**Shahrood University**

**Department of Physics**

**MSc thesis**

**Nucleon-Nucleon interaction in a relativistic model with  
meson exchange**

**Atena Arab Saghari**

**Supervisor:**

**Dr. M.R. Shojaei**

**February 2015**