

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های  $^{41}\text{Ca}$  و  $^{43}\text{Ca}$  با استفاده از مدل لایه‌ای

دانشجو:

سحر بهنام

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۹۳

دانشگاه شاهرود  
دانشکده: علوم پایه  
گروه: فیزیک هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سحر بهنام  
تحت عنوان:

مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های  $^{41}\text{Ca}$  و  $^{43}\text{Ca}$  با استفاده از مدل لایه‌ای

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد رضا شجاعی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

## این ناچیز را اگر قدری هست تقدیم می‌کنم به:

مادرم، روح مهربان هستی‌ام، این شوق زیبای نفس کشیدنم، هم او که هم‌رنگ شادی‌هایم شد،

و تقدیم با بوسه بر دستان پدرم،

به او که نمی‌دانم از بزرگی‌اش بگویم یا از مردانگی‌اش، از سخاوت یا مهربانی‌اش...

و تقدیم به برادرم که تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات و وجودش مایه‌ی دلگرمی من است.

پروردگارا نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سپید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه

بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که در هر لحظه

شکرگزارشان باشم و لبخند رضایت بر چهره‌های پاکشان بنشانم...

## با ژرفترین سپاس‌ها:

حمد و سپاس یکتای بی همتا را که لطفش بر ما عیان است ، ادای شکرش را هیچ زبان و دریای فضلش را هیچ کران نیست و اگر در این وادی هستیم همه محبت اوست. خدایا  
اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و نه توان تشکر از بندگان تو را، اما برحسب  
وظیفه از استاد گرامی آقای دکتر محمدرضا شجاعی که در تمامی مراحل انجام این  
پایان‌نامه با راهنمایی‌های عالمانه و بجایشان سکاندار شایسته‌ای در هدایت این پایان‌نامه  
بوده‌اند، کمال قدردانی را دارم. از اساتید بزرگوار آقای دکتر توکلی عنبران و خانم دکتر  
صالحی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، کمال تشکر و قدردانی را  
دارم.

و با صمیمانه‌ترین سپاس‌ها از قلب پاک مادرم برای همه محبت‌ها و تشویق‌هایش و از  
وجود نازنین پدرم برای تمام حمایت‌ها و فرزانگی‌هایش...

و در پایان از تمامی دوستان و دوستدارانم که بر شادمانی، دانش و آگاهی‌ام افزوده‌اند،  
متشکرم.

## تعهد نامه

اینجانب سحر بهنام دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان نامه‌ی مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های  $^{41}\text{Ca}$  و  $^{43}\text{Ca}$  با استفاده از مدل لایه‌ای تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده:

از دهه‌های گذشته تا به امروز ایزوتوپ‌های کلسیم از لحاظ تئوری و تجربی به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ما از میان ایزوتوپ‌های مختلف، به بررسی ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۱ و کلسیم ۴۳ که دارای هسته‌های زوج – فرد هستند، می‌پردازیم. از آنجایی که ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۱ و کلسیم ۴۳ هرکدام به ترتیب دارای تک نوکلئون منفرد در خارج از بخش مرکزی جادویی و سه نوکلئون منفرد در خارج از بخش مرکزی جادویی می‌باشند، ابتدا به مطالعه‌ی نیروی بین نوکلئون‌ها در سیستم‌های چند جسمی می‌پردازیم. بنابراین با در نظر گرفتن مدل لایه‌ای به حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل شبه هلمن با استفاده از روش تحلیلی NU پرداخته و ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و توابع موج حالت پایه و انرژی حالت برانگیخته و جذر میانگین مربع شعاع باری ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۱ و ۴۳ را محاسبه نمودیم. همچنین اثر برهم‌کنش اسپین – مدار را در جابه‌جایی ترازهای انرژی اعمال نموده‌ایم. بنابراین نتایج به‌دست آمده با مقادیر تجربی از همخوانی خوبی برخوردار است. و در پایان معادله دیراک را با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی با استفاده از روش تحلیلی NU حل نمودیم و ویژه مقادیر انرژی و توابع موج را به‌دست آورده و به این نتیجه رسیدیم که توابع موج شرایط مرزی را برآورده می‌کنند.

## کلمات کلیدی :

ایزوتوپ‌های کلسیم – انرژی حالت پایه – جذر میانگین مربع شعاع باری – معادله دیراک – پتانسیل شبه هلمن – انرژی حالت برانگیخته

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

✓ مدل هسته‌ای سه نوکلئونی در بررسی انرژی ایزوتوپ‌های  $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  در

مقایسه با  $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  (بیست و یکمین کنفرانس فیزیک هسته‌ای

اصفهان ۱۳۹۳)

✓ محاسبه اسپینورهای معادله دیراک در حضور پتانسیل شبه هلمن

(پنجمین کنفرانس فیزیک ذرات تهران ۱۳۹۳)



## فهرست مطالب

فصل اول: خواص و مدل‌های هسته‌ای

۱-۱ تاریخچه فیزیک هسته‌ای	۲
۲-۱ خواص هسته	۳
۱-۲-۱ اسپین هسته	۴
۲-۲-۱ ایزو اسپین هسته	۶
۳-۲-۱ پارите هسته	۷
۴-۲-۱ انرژی بستگی هسته	۸
۵-۲-۱ شعاع هسته	۹
۳-۱ مدل‌های هسته‌ای	۱۰
۱-۳-۱ مدل لایه‌ای	۱۱
۲-۳-۱ مدل جمعی	۱۸

فصل دوم: نیروی هسته‌ای و ویژگی‌های ایزوتوپ‌های کلسیم

۱-۲ نیروی هسته‌ای	۲۲
۲-۲ ویژگی‌های نیروی نوکلئون - نوکلئون	۲۳
۳-۲ مدل نیروی تبادل	۲۴
۴-۲ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا	۲۸
۵-۲ شرایط پتانسیل هسته‌ای مناسب	۲۹
۶-۲ نیروی چند جسمی	۳۱
۷-۲ مروری بر ویژگی‌های ایزوتوپ‌های کلسیم	۳۴

فصل سوم: روش‌های تحلیلی حل مساله و مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های کلسیم

۱-۳ مقدمه	۴۶
۲-۳ دستگاه مختصات ژاکوبی	۴۷
۳-۳ کلیات روش NU	۴۸
۴-۳ محاسبه انرژی حالت پایه کلسیم ۴۳	۵۰

۵۸	۵-۳ محاسبه انرژی حالت پایه کلسیم ۴۱
۶۵	۶-۳ محاسبه جذر میانگین مربع شعاع باری کلسیم ۴۱ و ۴۳
۶۵	۷-۳ جابه‌جایی ترازهای انرژی با استفاده از اثرات اسپین - مدار
۶۷	۸-۳ حالت‌های برانگیخته هسته
۶۷	۱-۸-۳ محاسبه حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۱
۶۸	۲-۸-۳ محاسبه حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۳
۶۹	۹-۳ طیف انرژی معادله دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی
۶۹	۱-۹-۳ معادله اساسی دیراک با پتانسیل شبه هلمن
۷۰	۲-۹-۳ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی
۷۳	۳-۹-۳ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی
۷۵	نتیجه گیری
۷۶	مراجع

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ جفت شدگی تکانه زاویه‌ای پروتون - نوترون در  $^{50}\text{Sc}$  و  $^{38}\text{Cl}$  ..... ۶
- شکل ۲-۱ انرژی بستگی هر نوکلئون در هسته ..... ۹
- شکل ۳-۱ نمودار توزیع شعاعی بار توسط پراکندگی الکترون‌ها ..... ۱۰
- شکل ۴-۱ ساختار لایه‌ای حاصل از پتانسیل‌های چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ ..... ۱۴
- شکل ۵-۱ ساختار لایه‌ای حاصل از پتانسیل وود - ساکسون ..... ۱۵
- شکل ۶-۱ برهم کنش‌های اسپین - مدار در مدل لایه‌ای هسته ..... ۱۷
- شکل ۱-۲ نیروهای چند جسمی ..... ۳۱
- شکل ۲-۲ نمودار فایمن نیروی سه جسمی ..... ۳۲
- شکل ۳-۲ پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۰ ..... ۳۴
- شکل ۴-۲ پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۱ ..... ۳۵
- شکل ۵-۲ پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۲ ..... ۳۶
- شکل ۶-۲ پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۳ ..... ۳۶
- شکل ۷-۲ ترازهای انرژی چند هسته که تعداد ذرات موجود در پوسته  $1f_{7/2}$  ..... ۳۷
- شکل ۸-۲ برخی از حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۱ ..... ۴۲
- شکل ۹-۲ سطوح انرژی ایزوتوپ کلسیم ۴۲ و ۴۴ و ۴۶ ..... ۴۳
- شکل ۱۰-۲ سطوح انرژی ایزوتوپ کلسیم ۴۳ و ۴۵ و ۴۷ ..... ۴۳
- شکل ۱-۳ تابع موج حالت پایه کلسیم ۴۳ با استفاده از پتانسیل شبه هلمن ..... ۵۷
- شکل ۲-۳ تابع موج حالت پایه کلسیم ۴۱ با استفاده از پتانسیل شبه هلمن ..... ۶۴

## فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱ اعداد کوانتومی وابسته به زوج یا فرد بودن نوکلئون‌ها ..... ۵
- جدول ۱-۲ برخی خصوصیات ایزوتوپ‌های کلسیم ..... ۳۸
- جدول ۲-۲ شعاع ایزوتوپ‌های کلسیم ..... ۳۹
- جدول ۳-۲ انرژی بستگی ایزوتوپ‌های کلسیم ..... ۴۰
- جدول ۴-۲ انرژی بستگی (حالت برانگیخته) ایزوتوپ‌های کلسیم ..... ۴۴
- جدول ۱-۳ ویژه مقادیر انرژی حالت پایه کلسیم ۴۳ به ازای مقادیر مختلف ..... ۵۷
- جدول ۲-۳ ویژه مقادیر انرژی حالت پایه کلسیم ۴۱ به ازای مقادیر مختلف ..... ۶۴
- جدول ۳-۳ مقدار جذر میانگین مربع شعاع باری کلسیم ۴۱ و کلسیم ۴۳ ..... ۶۵
- جدول ۴-۳ مقادیر انرژی حاصل از جابه‌جایی ترازها با استفاده از اثرات اسپین - مدار ..... ۶۶
- جدول ۵-۳ ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و انرژی حالت برانگیخته کلسیم ۴۱ ..... ۶۸
- جدول ۶-۳ ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و انرژی حالت برانگیخته کلسیم ۴۳ ..... ۶۸

## فصل اول

### خواص و مدل‌های هسته‌ای

## ۱-۱ تاریخچه فیزیک هسته‌ای

تلاش برای درک ماهیت اساسی ماده ریشه در تفکرات فیلسوفان یونان باستان، بویژه دموکریتوس<sup>۱</sup> دارد. دموکریتوس که در سده چهارم پیش از میلاد می‌زیست، متعقد بود که هر نوع ماده‌ای را می‌توان به اجزای کوچک و کوچکتر تقسیم کرد تا آنکه حدی نهایی فرا می‌رسد که دیگر ادامه تقسیم میسر نیست. از نظر دموکریتوس، این جزء جدانشدنی ماده (یا اتم) که با چشم قابل دیدن نبود، ذره بنیادی سازنده ماده به شمار می‌رفت. در طی ۲۴۰۰ سال بعد، این نظریه به صورت اندیشه‌ای فلسفی باقی ماند تا آنکه پژوهشگران آغاز سده نوزدهم میلادی با استفاده از روش‌های علوم تجربی درباره این مسئله به تحقیق پرداختند و با بدست آوردن شواهد کافی فرضیه اتم‌گرایی را تا سطح یک نظریه علمی تمام عیار بالا بردند.

اما فیزیک هسته‌ای مانند بسیاری از شاخه‌های فیزیک شروع متواضعانه‌ای داشته است. در سال ۱۸۹۶ بکرل<sup>۲</sup> با تیره شدن یک صفحه‌ی حساس عکاسی در مجاورت نوعی سنگ معدن بطور تصادفی پدیده پرتو زایی را کشف کرد. سپس در سال ۱۸۹۸ توسط پیر کوری و همسرش (ماری کوری) مواد رادیو اکتیو دیگر را مورد شناسایی قرار دادند.

برای درک ماهیت ساختار هسته، اولین اتفاق را رادرفورد<sup>۳</sup> به همراه گایگر<sup>۴</sup> و مارسدن<sup>۵</sup> در سال ۱۹۱۳ با انجام آزمایش‌های معروف پراکندگی  $\alpha$  از ورقه‌های طلا و پلاتینیوم رقم زدند. رادرفورد این آزمایش‌ها را به طرز موفقیت آمیزی بر مبنای مدلی توجیه کرد که در آن یک هسته سنگین با بار مثبت، در مرکز اتم قرار می‌گرفت و الکترون‌ها آن را احاطه می‌کردند. بوهر<sup>۶</sup> در سال ۱۹۱۳ اولین مدل

---

<sup>1</sup> Democritus

<sup>2</sup> H. Becquerel

<sup>3</sup> E. Rutherford

<sup>4</sup> H. Geiger

<sup>5</sup> E. Marsden

<sup>6</sup> Niels Bohr

سازگار با حرکت الکترون‌ها را ارائه کرد. چیزی که جزئیات تشکیل‌دهنده‌ی هسته را روشن‌تر کرد کشف نوترون توسط چادویک<sup>۱</sup> (۱۹۳۲) بود.

در این اثنا، پیشرفت‌های زیادی در جنبه نظری به خصوص در مکانیک کوانتومی در سال ۱۹۰۰ تا ۱۹۲۸ توسط انسان‌های بزرگی مثل پلانک<sup>۲</sup>، دوبروی<sup>۳</sup>، شرودینگر<sup>۴</sup>، هایزنبرگ<sup>۵</sup> و دیراک<sup>۶</sup> اتفاق افتاد و در نتیجه یک چارچوب نظری برای درک ساختارهای میکروسکوپی چند جسمی نظیر اتم‌ها و مولکول‌ها ساخته شد و کاربرد این مفاهیم به هسته‌ها یک نتیجه منطقی شد. این پیشرفت نظری در توضیح ویژگی‌های مشاهده شده هسته‌ها برحسب برهم‌کنش نوترون‌ها و پروتون‌های داخل هسته (که نوکلئون نامیده شدند)، فرض می‌کند که یک چارچوب نظری مشابه آنچه پدیده‌های اتمی را توضیح می‌دهند، قابل استفاده در هسته – که یک سیستم بسیار کوچکتر است – باشد.

اکتشاف‌های دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان دادند که مرتبه دیگری از ساختار ماده وجود دارد که از هسته هم بنیادی‌تر و ابتدایی‌تر است. امروزه بررسی و مطالعه این گونه ذرات که عناصر اصلی ساختار هسته‌ای هستند، در شاخه خاصی به نام فیزیک ذرات بنیادی (یا فیزیک انرژی بالا) دنبال می‌شود. بدین ترتیب فیزیک هسته‌ای را می‌توان از سویی فرزند شیمی و فیزیک اتمی از سویی دیگر پدر فیزیک ذرات بنیادی به شمار آورد.

## ۱-۲ خواص هسته‌ای

فیزیک هسته‌ای مطالعه ساختار هسته و برهم‌کنش بین اجزای تشکیل‌دهنده آن است. هسته‌ها هم مانند بسیاری از سیستم‌های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرار آمیز است که توصیف رفتار و خواص آن خیلی دشوارتر از اجسام ماکروسکوپی است. خواص هسته‌ها به دو گروه

---

1 J.chadWick

2 M.Plank

3 L.de Brogile

4 E.Schrodinger

5 W.Heisenberg

6 P.A.M.Dirak

عمده تقسیم می شوند: گروه اول، دسته‌ای از خواص هسته‌ها که وابستگی به زمان ندارند و آن‌ها را خواص استاتیکی<sup>۱</sup> هسته می‌نامند عبارتند از [۶]: بارالکتریکی، انرژی بستگی<sup>۲</sup>، جرم، شعاع، ایزواسپین، اسپین، پاریتته، گشتاور دو قطبی مغناطیسی، گشتاور چار قطبی الکتریکی و انرژی حالت‌های برانگیخته. گروه دوم، دسته‌ای از خواص هسته‌ها را که وابسته به زمان هستند خواص دینامیکی<sup>۳</sup> هسته می‌نامند مانند: احتمال واپاشی و احتمال واکنش آن‌ها. درک و تفسیر خواص استاتیکی و دینامیکی هسته‌ها بر پایه برهم‌کنش بین تک تک نوکلئون‌های موجود در هسته، موضوع بسیار مهمی است که هر متخصص فیزیک هسته‌ای باید با آن دست و پنجه نرم کند.

### ۱-۲-۱ اسپین هسته

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر بفرد  $I$  مشخص می‌کنند که نمایانگر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون‌های هسته می‌باشد. بردار  $I$  را می‌توان به صورت حاصل جمع مولفه‌های مداری و ذاتی تکانه زاویه‌ای در نظر گرفت:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{I}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i \quad (1-1)$$

این رابطه در اصل مجموعه‌ی پیچیده‌ای از تعدادی بردار را نشان می‌دهد که منجر به یک برآیند می‌شود. عدد کوانتومی  $I$  رابطه ساده‌ای با بردار  $\vec{I}$  دارد:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar \quad (2-1)$$

$$I_z = m_I \hbar \quad (m_I = I, I-1, \dots, -I+1, -I)$$

تنها علت اینکه در رابطه (۱-۱) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف نظر شده است می‌تواند این باشد که برهم‌کنشی که هسته تحت تاثیر آن قرار دارد مانند میدان‌های

<sup>1</sup> Static Properties

<sup>2</sup> Binding Energy

<sup>3</sup> Dinamical Propertice



الکترومغناطیسی ایستا به اندازه کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت شدگی نوکلئون‌ها را بگسلد.

عدد کوانتومی  $I$  ممکن است بسته به اینکه تعداد نوکلئون‌ها زوج یا فرد باشد مقادیر درست یا نادرست را به خود اختصاص دهد.

جدول (۱-۱) اعداد کوانتومی وابسته به زوج یا فرد بودن نوکلئون‌ها [۷].

I	Z	A
درست	زوج	زوج
نیم درست	زوج	فرد
درست	فرد	زوج
نیم درست	فرد	فرد

قواعد جهت تعیین اسپین برای حالت‌های پایه هسته:

### ۱- هسته‌های $A$ فرد

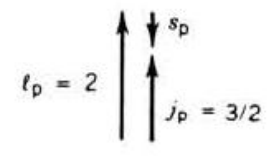
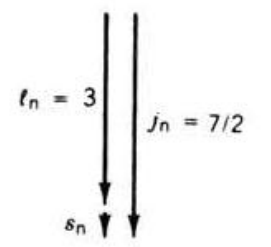
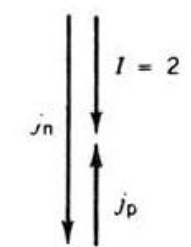
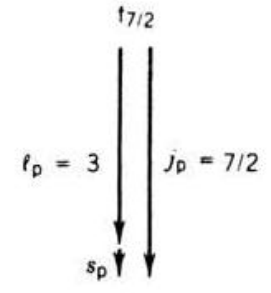
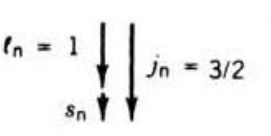
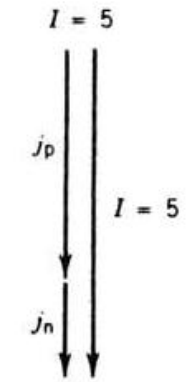
اسپین خالص همواره توسط  $J$  آخرین ذره‌ی فرد تعیین می‌شود به طوری که  $A - 1$ ، نوکلئون‌های دیگر (که دارای تعداد پروتون و نوترون زوج است) مثل زیر (۲- الف) با اسپین فرد با یکدیگر تزویج می‌شوند. مثال:  $^{43}\text{Ca}$ .

### ۲- هسته‌های $A$ زوج

الف-  $Z$  و  $N$  هر دو زوج باشند دارای  $I = 0$  هستند، این مطلب تمایل قوی نوکلئون‌ها را برای جفت‌شدگی تزویجی و تولید اسپین صفر را نشان می‌دهد. مثال:  $^{50}\text{Sc}$ .

ب-  $Z$  و  $N$  هر دو فرد باشند، اسپین توسط جفت‌شدگی برداری  $J$  پروتون و نوترون نهایی تعیین می‌شود، که مقادیر منطقی امکان پذیر است. برای اینکه قبول کنیم کدام یک از جفت‌شدگی‌ها به عنوان حالت پایه قابل قبول است، از این قانون تجربی استفاده می‌کنیم، که حالت

پایه معمولا از جفت‌شدگی اسپین ذاتی پروتون و نوترون  $S_p$  و  $S_n$  در حالت موازی حاصل می‌شود. در مثال‌های زیر در شکل (۱-۱) نشان داده شده است.

	پروتون	نوترون	کل
$^{38}\text{Cl}$	$d_{3/2}$ 	$f_{7/2}$ 	$I = 2$ 
$^{50}\text{Sc}$	$f_{7/2}$ 	$p_{3/2}$ 	$I = 5$ 

شکل (۱-۱) جفت‌شدگی تکانه زاویه‌ای پروتون-نوترون در  $^{38}\text{Cl}$  و  $^{50}\text{Sc}$ . [۷]

## ۱-۲-۲ ایزواسپین هسته

استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزواسپین می‌شود. در سال ۱۹۳۲، هایزنبرگ پروتون و نوترون را به عنوان دو حالت از یک ذره، نوکلئون، در نظر گرفت. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزواسپینی معرفی می‌شود [۷، ۸]، به طوری که دو حالت یک ذره معمولی با اسپین  $1/2$  نه به عنوان دو ذره، بلکه به صورت دو حالت متفاوت از یک ذره

منفرد یعنی نوکلئون تلقی می‌شود. بدین ترتیب پروتون به حالت بالا و نوترون به حالت پایین نوکلئون در نظر گرفته می‌شود. این وضعیت را به صورت یک کمیت جدید، ایزو اسپین  $t$  معرفی می‌کنند. نوکلئونی که دارای ایزواسپین  $1/2$  است، تعداد  $2I+1=2$  سمت گیری ممکن در فضای ایزواسپینی دارد. بنابراین به هر دو نوکلئون، ایزواسپین  $1/2$  نسبت می‌دهیم که پروتون تصویر  $T_z = 1/2$  و نوترون تصویر  $T_z = -1/2$  آن است. عملگر ایزواسپین  $t$  برای درجات آزادی ایزواسپین، شبیه عملگر اسپین  $S$  برای درجات آزادی اسپین است. همچنین برای چندین نوکلئون، ایزو اسپین کل و تصویر  $Z$  اش با روابط زیر داده می‌شوند [۸]:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \sum_i \bar{t}(i) \\ T_z &= \sum_i t_z(i) \end{aligned} \quad (3-1)$$

تعداد  $2T+1$  مقدار برای  $T_z$ ، از  $T_z = -T$  تا  $T_z = +T$  با گام‌های صحیح، وجود دارد. برای هسته‌ای با تعداد  $Z$  پروتون و تعداد  $N$  نوترون،  $T_z = \frac{N-Z}{2}$  است [۸].

### ۳-۲-۱ پاریته هسته

همیلتونی‌های قوی هسته‌ای و الکترو مغناطیسی، پاریته را پایسته نگه می‌دارند. بنابراین ویژه حالت‌ها به دو دسته از حالات که هر کدام پاریته مشخص  $\pi = +1$  یا  $\pi = -1$  دارند تقسیم می‌شوند و همیلتونی، این دو دسته را با هم مخلوط نمی‌کند. در ساختار هسته‌ای، پاریته کل، از پاریته ذاتی نوکلئون  $\pi_{int} = +1$  و پاریته مربوط به اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون  $\pi_1 = (-1)^l$  نشأت می‌گیرد. پاریته کل هسته، برابر حاصل ضرب پاریته کل نوکلئون‌های آن است.

$$\pi = \prod_i \pi_{int}(i) \pi_1(i) = \prod_i (-1)^{l_i} \quad (4-1)$$

معمولاً حالت‌های پایه و ویژه حالت‌ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که پاریته مشخصی داشته باشند [۸].

## ۱-۲-۴ انرژی بستگی هسته

انرژی بستگی B یک هسته اختلاف بین جرم هسته‌ای و مجموع جرم اجزای تشکیل دهنده آن می‌باشد:

$$B(A, Z) = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - m(A, Z)c^2 \quad (۵-۱)$$

با بررسی نظم و ترتیب انرژی بستگی هسته‌ها می‌توان مدارک ارزنده‌ای از ساختار هسته‌ای به دست آورد. انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون با عبارت  $\frac{B}{A}$  بیان می‌شود که خود تابعی از A می‌باشد همان گونه که در شکل (۲-۱) نشان داده شده است مقدار  $\frac{B}{A}$  با افزایش A در هسته‌های سبک افزایش می‌یابد و به یک پهن شدگی در حدود ۶۰-۵۵  $\approx A$  می‌رسیم و در ادامه آن به آرامی به عنوان تابعی از A کاهش می‌یابد. با توجه به شکل متوجه می‌شویم که منحنی شامل چند ویژگی مهم در مورد هسته است نخست اینکه منحنی جز در ناحیه هسته‌های بسیار سبک، مقدار نسبتاً ثابتی را نشان می‌دهد [۶]. در هسته‌های پایداری که خیلی سبک نیستند ( $A > 12$ ) انرژی بستگی B در تقریب اول با عدد جرمی متناسب است یعنی [۹]:

$$B(A, Z) \approx A \times 8 \text{ MeV} \quad (۶-۱)$$

و به طور دقیق‌تر [۹]:

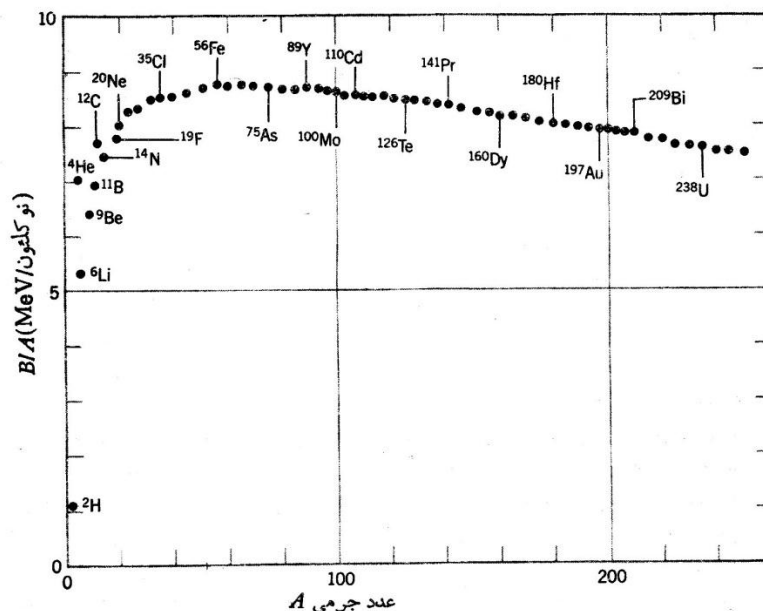
$$7.7 \text{ MeV} < \frac{B(A, Z)}{A} < 8.8 \text{ MeV} \quad \text{for} \quad 12 < A < 225 \quad (۷-۱)$$

دوم اینکه منحنی در یک پهن شدگی (قله پهن)، بستگی هسته‌ای به حداکثر می‌رسد. وجود این پهن شدگی (قله پهن) بدان معنی است که به دو طریق می‌توان به تولید یا (آزادسازی) انرژی دست یافت: در نواحی پایین‌تر از  $A = 60$  از طریق ترکیب هسته‌های سبک و تشکیل هسته‌های سنگین که همجوشی<sup>۱</sup> هسته‌ای (یا گداخت هسته‌ای) گویند و در نواحی بالاتر از  $A = 60$  از طریق شکستن

---

<sup>۱</sup> Fusion

هسته‌های سنگین و تبدیل آن به هسته‌های آن به هسته‌های سبک‌تر شکافت<sup>۱</sup> هسته‌های سنگین می‌نامند.



شکل (۱-۲) انرژی بستگی هر نوکلئون در هسته [۶].

### ۱-۲-۵ شعاع هسته

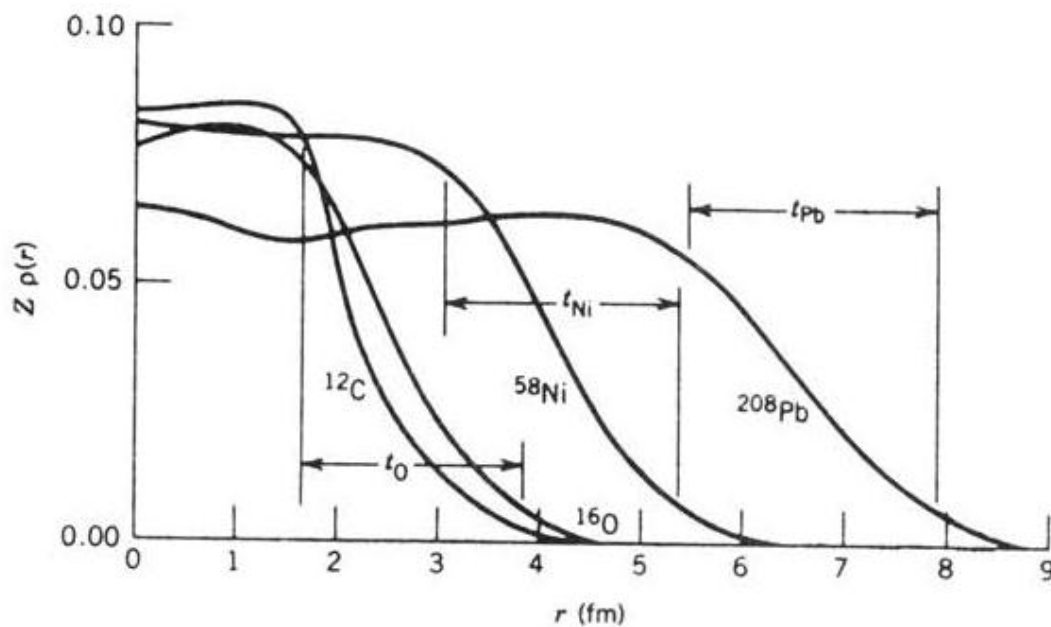
با وجود اینکه اثرات کوانتومی درون هسته بسیار زیاد است ولی می‌توان نشان داد که حجم هسته  $v$  با تقریب خوبی با عدد جرمی  $A$  متناسب است و هر نوکلئونی حجمی در حدود  $v_0 = 7/2 \text{ fm}^3$  را اشغال می‌کند. در تقریب اول هسته پایدار کروی است که حجمی حدود  $v \cong Av_0$  را اشغال می‌کند که در آن شعاع هسته را از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (۸-۱)$$

می‌توان نشان داد که توزیع فضایی نوکلئون‌های درون هسته‌ها با پراکندگی الکترون‌ها مشخص می‌شوند، که الکترون‌ها درون هسته نفوذ می‌کنند و مسیر حرکت آن‌ها تعیین می‌شود [۹].

<sup>۱</sup> Fission

در شکل (۳-۱) نمودار توزیع شعاعی بار توسط پراکندگی الکترون‌ها را نشان می‌دهد که شامل دو نکته است:



شکل (۳-۱) نمودار توزیع شعاعی بار توسط پراکندگی الکترون‌ها [۶].

۱- چگالی بار هسته در مرکز تمام هسته‌ها تقریباً مقداری ثابت است. نوکلئون‌ها ظاهراً در مرکز هسته متراکم نمی‌شوند، بلکه توزیع آن‌ها در تمام حجم هسته نسبتاً ثابت می‌ماند.

۲- شکل هسته با دو پارامتر نشان داده می‌شود اولین شعاع میانگین که نشانگر فاصله‌ای از مرکز هسته است، که چگالی نوکلئونی در آن به نصف مقدار مرکزی کاهش می‌یابد و دومین ضخامت پوست که به صورت پارامتر  $t$  مشخص می‌شود که در طی آن چگالی بار هسته از ۹۰٪ مقدار مرکزی به ۱۰٪ مقدار مرکزی آن کاهش می‌یابد. مقدار آن تقریباً برابر  $2/3$  fm است.

### ۳-۱ مدل‌های هسته‌ای

برای بررسی هسته‌ها، عمدتاً یک نظریه فوق العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد، انتخاب می‌کنیم. اگر این نظریه در توصیف دست کم چند خاصیت هسته‌ای نسبتاً

موفق باشد، آنگاه با افزودن جمله‌های اضافی آن را تکمیل می‌کنیم. بدین ترتیب، معیار موفقیت هر مدلی را باید در دو نکته دانست:

۱. مدل باید بتواند خواص هسته‌ای تا کنون اندازه‌گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد.
  ۲. مدل باید خواص دیگری را پیش بینی کند که در آزمایش‌های جدیدی قابل اندازه‌گیری باشد.
- مدل‌های متعددی جهت توضیح خواص و واکنش‌های هسته‌ای پیشنهاد شده‌اند. از آنجا که هیچکدام از این مدل‌ها برای توضیح کل مشاهدات تجربی بطور کامل رضایت بخش نیستند، مدل‌های مختلفی برای تفسیر پدیده‌های گوناگون هسته‌ای بکار می‌روند. از جمله مفیدترین مدل‌ها در مورد ساختمان هسته‌ای عبارتند از مدل لایه‌ای<sup>۱</sup>، مدل قطره مایع، مدل جمعی<sup>۲</sup>، مدل اپتیکی.

### ۱-۳-۱ مدل لایه‌ای

هسته از پروتون‌ها و نوترون‌ها (نوکلئون‌ها) تشکیل شده‌اند که همدیگر را با برهم‌کنش قوی در داخل حجمی با شعاع چند فرمی نگه می‌دارند. می‌توان چنین پنداشت که حرکت نوکلئون‌ها در چنین سیستم بسته‌ای به واسطه تعداد زیادی برخورد بین آن‌ها، خیلی پیچیده است. نیلس بوهر حرکت نوکلئون‌ها را به حرکت توپ‌های بیلیارد تشبیه کرد [۸، ۱۰] و گفت که تشبیه حرکت نوکلئون‌ها با حرکت الکترون‌های اتمی فاقد اعتبار لازم است [۸، ۱۱]. در سال ۱۹۴۸ ماریا ج مایر موفق شد داده‌های تجربی را طبقه بندی کرده و نشان دهد که هسته‌هایی که تعداد پروتون‌ها یا نوترون‌های آن‌ها برابر یکی از اعداد ۲۰، ۵۰، ۸۲ یا ۱۲۶ باشند، پایدارترند [۸، ۱۲]. در سال ۱۹۴۹ نقش کلیدی شکافتگی اسپین - مدار در پتانسیل تک جسمی هسته‌ای توسط مایر [۸، ۱۳] و هاکسل، جنسن و سوئس [۱۴] معرفی شد. این پتانسیل تک جسمی نقطه شروع مدل لایه‌ای هسته‌ای است.

در مدل لایه‌ای، ترازهای انرژی هسته به صورت لایه‌ها و زیرلایه‌هایی در نظر گرفته می‌شود که نوکلئون‌ها در آن جای گرفته‌اند. این لایه‌ها (پوسته‌های اصلی) متناظر با اعدادی هستند که تعداد آن‌ها

---

<sup>1</sup> Shell model

<sup>2</sup> Collective Model

هفت تا است و به آن‌ها اعداد جادویی می‌گویند و عبارتند از: ۲ و ۸ و ۲۰ و ۲۸ و ۵۰ و ۸۲ و ۱۲۶ و البته عدد جادویی هشتم ۱۸۴ است، که در مورد نوترون‌های هسته‌های فوق سنگین که به شدت ناپایدار بوده و شکافته می‌شوند، دیده می‌شود. عدد جادویی ۱۲۶ در مورد پروتون‌ها دیده نمی‌شود [۱۵]. شواهد اعتبار مدل لایه‌ای هسته، از مشاهده‌پذیرهای تجربی نظیر انرژی بستگی، اندازه، اسپین و چگالی ترازها نشأت می‌گیرد. به ویژه، ملاحظه می‌شود که انرژی بستگی هسته تابع همواری از تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها نبوده و نوسانات کوچکی دارد. اختلاف مقادیر انرژی بستگی مدل قطره مایع از مقادیر تجربی، نشان‌دهنده قله‌هایی در اعداد جادویی؛ ۲۸ و ۵۰ و ۸۲ و ۱۲۶ است. این قله‌ها نشان می‌دهند که هسته‌ها با این اعداد جادویی از سایر هسته‌ها مقیدترند.

هسته‌هایی که تعداد پروتون یا نوترون آن برابر اعداد جادویی است را هسته جادویی گویند، دارای ویژگی‌هایی است: این هسته‌ها دارای ایزوتوپ‌های پایدارتر هستند، اگر نوترون آن برابر با اعداد جادویی باشد سطح مقطع برای جذب نوترون از نوترون‌های دیگر کمتر است، انرژی حالت برانگیخته هسته جادویی بسیار بزرگتر از انرژی حالت پایه است، عناصری که پروتون آن برابر با اعداد جادویی است درصد فراوانی آن بسیار زیاد است [۱۶].

هسته‌هایی که تعداد پروتون و نوترون آن برابر اعداد جادویی است دو- جادویی گویند کلسیم ۴۰ با تعداد ۲۰ نوترون و ۲۰ پروتون و کلسیم ۴۸ با تعداد ۲۸ نوترون و ۲۰ پروتون مثال‌های از یک هسته دو- جادویی است. اگرچه از داده‌های انرژی بستگی خیلی واضح نیست، ولی ۲ و ۶ و ۸ و ۱۴ و ۲۰ و ۲۳ برای برخی هسته‌ها، عدد جادویی محسوب می‌شوند. بعلاوه عدد ۳۴ برای کلسیم ۵۴ اخیراً به عنوان عدد جادویی گزارش شده است [۱۷]. اعداد جادویی در هسته، نقشی مشابه خواص الکترون‌ها در پر شدن ترازهای اتمی دارند. مطابق اصل طرد پائولی، اگر نوترونی به یک هسته اضافه شود، به تراز اشغال نشده با کمترین انرژی می‌رود. اگر یک نوترون به هسته اضافه شود، در حالی که تعداد نوترون‌های موجود با یکی از اعداد اشغال جمعی برابر باشد، در آن صورت نوترون بایستی به حالتی با انرژی بیشتر (و قید کمتر) برود. بنابراین هسته‌هایی با انرژی بستگی نسبی بالا، آن‌هایی هستند که



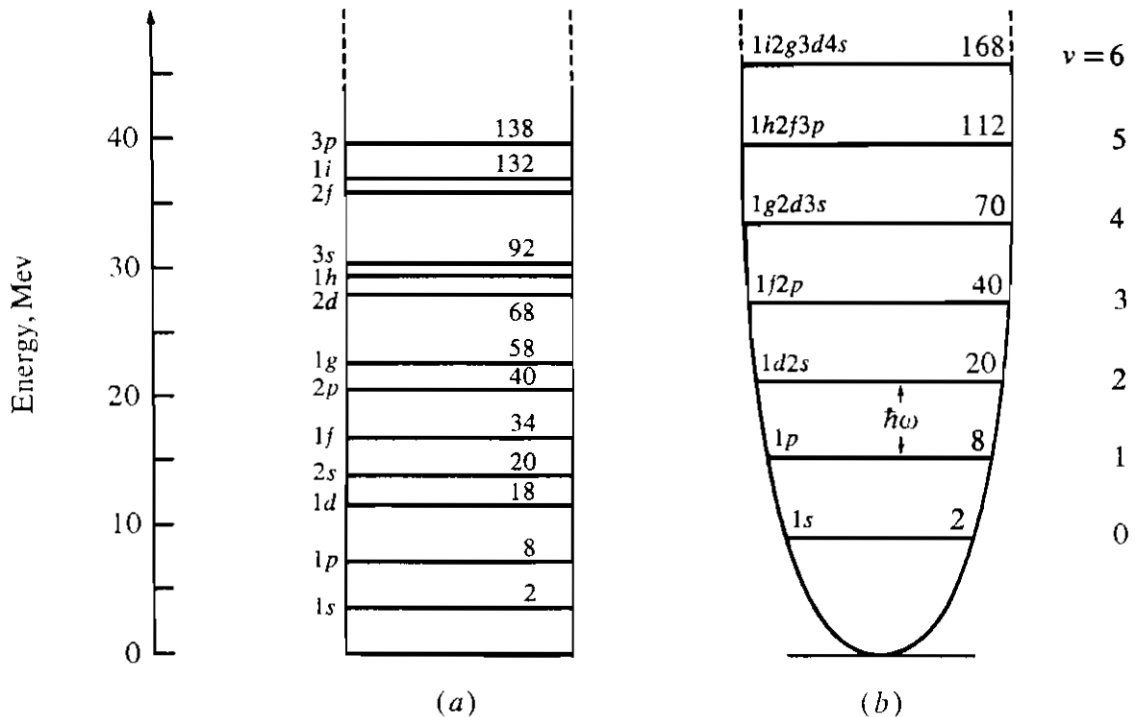
تعداد پروتون‌ها یا تعداد نوترون‌های آن‌ها برابر یکی از اعداد اشغال جمعی باشد. یک عدد جادویی هنگامی به وجود می‌آید که شکافی نسبتاً بزرگ، بالای هر کدام از اعداد اشغال جمعی وجود داشته باشد. بنابراین اعداد جادویی به یک بغچه از ترازهای انرژی مربوط اند.

در مدل لایه‌ای، مسئله مکانیک کوانتومی برای حرکت یک نوکلئون در هسته شبیه حرکت الکترون در اتم هیدروژن است، با این تفاوت که ابعاد به جای  $10^{-10}$  حدود  $10^{-15}$  متر است. در مدل لایه‌ای اتم‌ها، پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تامین می‌کند، یعنی عامل خارجی زیر پوسته‌ها یا مدارها را سازمان می‌دهد. اما در مورد هسته هیچ عامل خارجی وجود ندارد، و نوکلئون‌ها در پتانسیلی که خودشان بوجود می‌آورند در حرکت‌اند. تفاوت مهم دیگر بین پتانسیل‌های هسته‌ای و اتمی، وابستگی بسیار قوی پتانسیل هسته‌ای به جهت گیری اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون است که از نظر علامت نیز مخالف وابستگی مشابه، در مورد اتمی است. پتانسیل

تک - ذره‌ای ، ویژه حالت‌هایی دارد که با انرژی‌های تک - ذره‌ای و اعداد کوانتومی‌شان مشخص می‌شوند و خواص یک هسته با تعداد مشخصی پروتون و نوترون، با پر کردن پایین‌ترین ترازهای انرژی تک - ذره‌ای و با رعایت اصل طرد پائولی برای سیستمی متشکل از فرمیون‌های یکسان (در این مورد نوکلئون‌ها) تعیین می‌شود. اصل طرد پائولی ایجاب می‌کند که هر حالت با یک مجموعه اعداد کوانتومی، فقط با یک پروتون یا یک نوترون اشغال شود. متوسط پتانسیل هسته‌ای از برهم‌کنش کوتاه برد و جاذب نوکلئون - نوکلئون ناشی شده و توسط شکل توزیع چگالی هسته‌ای تعیین می‌شود .

نخستین گام در ارائه مدل لایه‌ای، انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب است. در آغاز دو نوع پتانسیل چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ در نظر می‌گیریم. در هر دو نوع پتانسیل اعداد جادویی ۲ ، ۸ ، و ۲۰ ظاهر می‌شود، ولی در ترازهای انرژی بالاتر هیچ گونه ارتباطی با اعداد جادویی تجربی به چشم نمی‌خورد (در شکل (۱-۴) نیز نشان داده شده است). بنابر دلایلی چاه نامتناهی تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیست: زیرا برای جدا کردن یک نوترون یا پروتون از هسته، باید انرژی کافی صرف شود تا بتوانیم آن را از چاه خارج کنیم، در این صورت عمق چاه نباید نامتناهی باشد. بعلاوه لبه

پتانسیل هسته‌ای نباید تیز باشد بلکه مثل توزیع بار و جرم هسته‌ای، مقدار پتانسیل بعد از شعاع میانگین باید به آهستگی به صفر میل کند. از طرف دیگر پتانسیل نوسانگر هماهنگ لبه‌اش به قدر کافی تیز نیست و انرژی جدایی آن نیز بی نهایت می‌شود.



شکل (۱-۴) ساختار لایه‌ای حاصل از پتانسیل‌های چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ. (a) پتانسیل چاه نامتناهی. (b) پتانسیل نوسانگر هماهنگ. [۱۸]

در نتیجه پتانسیل بهتری برای مدل لایه‌ای انتخاب می‌کنند که همان پتانسیل وود - ساکسون است. پتانسیل وود - ساکسون به صورت رابطه زیر می‌باشد [۶، ۱۹]:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r-R)/a]} \quad (9-1)$$

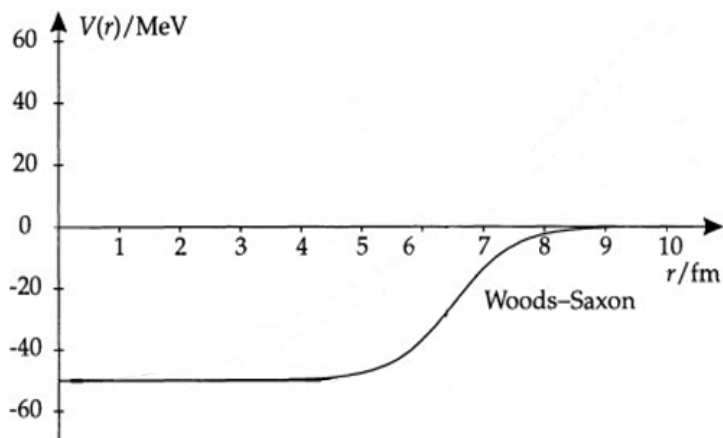
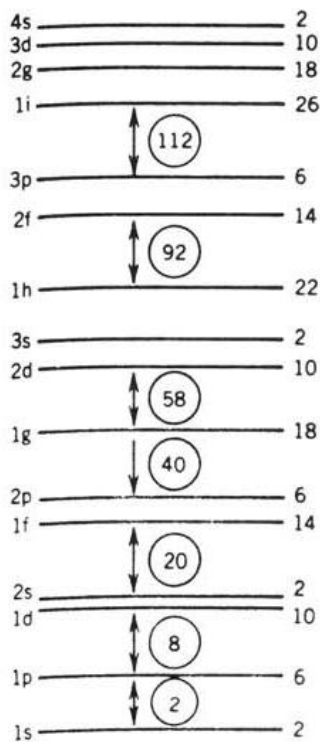
پارامترهای ثابت  $a$  و  $R$  و  $V_0$  به ترتیب ضخامت پوست و شعاع میانگین و عمق چاه می‌باشند که مقادیر آنها به صورت زیر است [۶]:

$$a = 0.524 \text{ fm} \quad (10-1)$$

$$R = 1.25A^{1/3} \text{ fm} \quad (11-1)$$

$$V_0 = 50 \text{ MeV} \quad (12-1)$$

در پتانسیل وود - ساکسون هر چه به سمت انرژی بالاتر پیش می‌رویم فاصله ترازهای انرژی، افزایش یافته به طوری که با فاصله بین ترازهای نوسانگر هماهنگ قابل مقایسه شده ، یعنی در پتانسیل نوسانگر هماهنگ فاصله ترازها با هم برابر است اما در پتانسیل وود - ساکسون فاصله ترازها با هم برابر نیست (در شکل (۵-۱) نشان داده شده است) . پتانسیل وود - ساکسون اعداد جادویی ۲ ، ۸ ، ۲۰ را به درستی نتیجه می‌دهد ولی برای سایر اعداد جادویی نادرست است.



ب

الف

شکل (۵-۱) ساختار لایه‌ای حاصل از پتانسیل وود - ساکسون (الف) ترازهای انرژی حاصل از پتانسیل وود - ساکسون (ب) شکل پتانسیل وود - ساکسون [۶].

بنابراین در سال ۱۹۴۹ مایر و دیگران برای مشاهده اعداد جادویی وجود یک پتانسیل اضافی قوی اسپین - مدار را فرض کردند. پتانسیل اسپین - مدار به صورت  $V_{so}(r) \vec{L} \cdot \vec{S}$  فرض شد که  $\vec{L}$  اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون و  $\vec{S}$  اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی نوکلئون (عدد کوانتومی اسپین هر نوکلئون برابر  $S = \frac{1}{2}$  می‌باشد) است. با وجود پتانسیل اسپین - مدار،  $m$  و  $S_z$  اعداد کوانتومی خوبی محسوب نمی‌شوند. اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مداری و ذاتی بایستی جفت شده و اندازه حرکت

زاویه‌ای کل  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  را بسازند. ویژه حالت‌های پتانسیل اسپین - مدار توسط عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای کل  $j = 1 \pm \frac{1}{2}$  (غیر از  $j = \frac{1}{2}$  برای  $l=0$ ) و عدد کوانتومی  $m_j$  مربوط به تصویر  $j$ ، تعیین می‌شوند. مقدار انتظاری  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  را با استفاده از یک شگرد متداول می‌توان محاسبه کرد. نخست، مقدار  $j^2 = (l+s)^2$  را به دست می‌آوریم [۸، ۱۹]:

$$j^2 = l^2 + s^2 + 2l.s \quad (13-1)$$

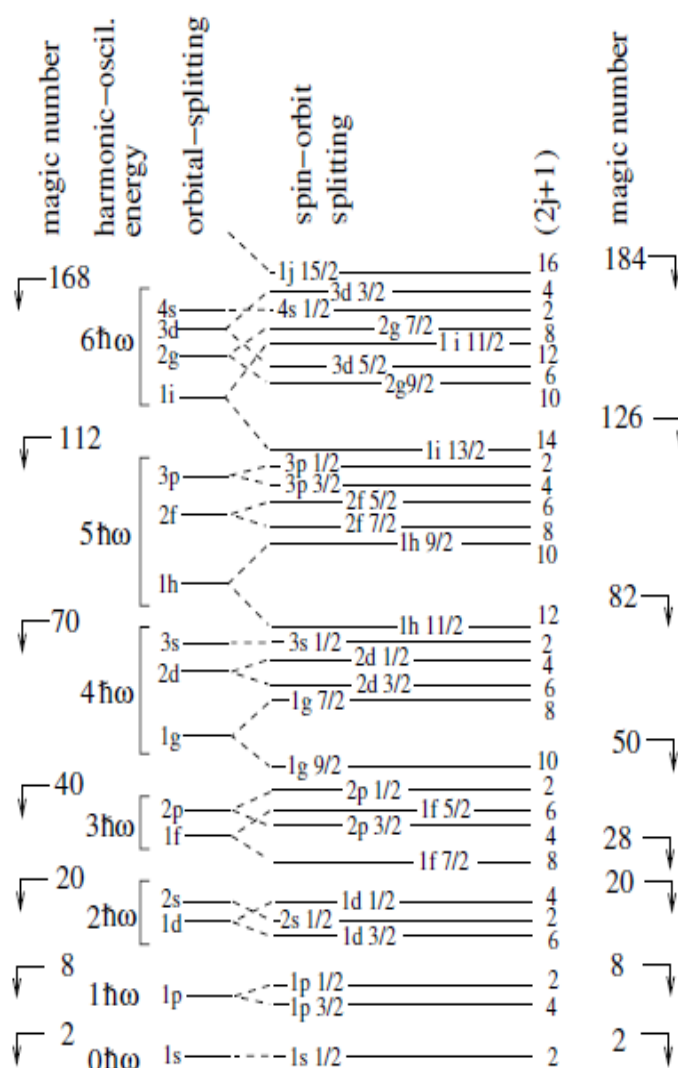
$$l.s = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$$

با قرار دادن مقادیر انتظاری در این معادله، حاصل می‌شود [۸]:

$$\langle l.s \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2 \quad (14-1)$$

متوسط پتانسیل هسته‌ای در مقیاس میکروسکوپی با در نظر گرفتن برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون توسط نظریه هارتری - فوک و نظریه بروکتر ( این نظریه، دافعه بین نوکلئون‌ها در فواصل خیلی کوتاه را وارد محاسبات می‌کند) محاسبه می‌شود. قدرت پتانسیل اسپین - مدار برای نوکلئون‌ها خیلی بزرگتر و از نظر علامت مخالف، پتانسیل اسپین - مدار الکترون‌های اتمی است. قسمت شعاعی پتانسیل اسپین - مدار  $V_{so}(r)$ ، در سطح هسته بیشینه است و اغلب متناسب با مشتق تابع وود - ساکسون در نظر گرفته می‌شود. مهم‌ترین ایده فیزیکی نهفته در مدل لایه‌ای این است که برخورد های چند - نوکلئونی داخل هسته، عموماً در سطح انرژی پایه و چند تراز پایین روی می‌دهند زیرا نوکلئون‌ها پس از برخورد به حالت‌هایی پراکنده می‌شوند که عموماً از نظر اصل طرد پائولی ممنوع است. در انرژی‌های برانگیختگی بزرگتر، تعداد حالت‌های مجاز در دسترس نوکلئون، افزایش یافته و خواص هسته‌های پیچیده می‌شود. مدل لایه‌ای در ساده‌ترین شکل، به خوبی قادر به پیشگویی خواص هسته‌هایی با یک نوکلئون بیشتر یا یک نوکلئون کمتر از اعداد جادویی است. بنابراین در شکل (۱-۶) مدل لایه‌ای با استفاده از پتانسیل‌های نوسانگر هماهنگ و وود - ساکسون و وود - ساکسون بعلاوه

جفت شدگی اسپین - مدار را نشان داده شده است. در این شکل از سمت چپ به ترتیب، اعداد کوانتومی حاصل از پتانسیل نوسانگر هماهنگ و ترازهای انرژی به دست آمده با استفاده از پتانسیل نوسانگر هماهنگ و وود - ساکسون را نشان می‌دهد. سپس (قسمت میانی) شکافتگی ترازها ناشی از اضافه کردن جمله اسپین - مدار که هر تراز به صورت  $(n l j)$  نماد گذاری شده است و واگنی هر تراز  $(2j+1)$ ، ظرفیت نوکلئونی هر تراز نیز مشخص شده است. در سمت راست اعداد جادویی حاصل از پتانسیل وود - ساکسون بعلاوه جفت شدگی اسپین - مدار نمایان شده است.



شکل (۶-۱) بر هم کنش‌های اسپین - مدار در مدل لایه‌ای هسته [۹].

مدل لایه‌ای را می‌توان با توجه به زوج یا فرد بودن پروتون و نوترون در هسته‌ها مورد بررسی قرار داد که به صورت زیر است:

۱. **هسته‌های زوج - فرد:** مدل لایه‌ای در هسته‌های زوج - فرد به دو نوع تقسیم می‌شود:

**الف)** اگر در هسته‌های زوج - فرد به استثنای یکی از نوکلئون‌ها، بقیه نوکلئون‌های موجود در هسته تزویج شده باشند و خواص هسته از حرکت همین نوکلئون تزویج نشده ناشی می‌شود، به آن مدل لایه‌ای ذره خیلی مستقل می‌گویند.

**ب)** اگر در هسته‌های زوج - فرد چند نوکلئون تزویج نشده در خارج از بخش مرکزی جادویی قرار بگیرد، به آن مدل لایه‌ای کامل می‌گویند.

۲. **هسته‌های زوج - زوج:** که به صورت مدل جمعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳. **هسته‌های فرد - فرد:** بررسی مدل لایه‌ای در هسته‌های با تعداد فرد پروتون و نوترون پیچیده است.

مدل لایه‌ای همچنین می‌تواند به پیکربندی‌های پیچیده مربوط به هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آن حد واسط اعداد جادویی است، نیز توسعه یابد. برای بسیاری از کاربردها، پیکربندی پیچیده را می‌توان با قطری کردن ماتریس هامیلتونی، به طور دقیق محاسبه کرد. در سایر موارد، از روش‌های تقریبی استفاده می‌شود که شامل به کار بردن پتانسیل تک - ذره‌ای تغییر شکل یافته و استفاده از نظریه گروه برای تجزیه و تحلیل پیکربندی است. چنین پیکربندی‌های پیچیده‌ای در کانون توجه بررسی‌های نظری جاری مدل لایه‌ای قرار دارند.

### ۱-۳-۴ مدل جمعی

این مدل در اوایل سال‌های ۱۹۵۰ بوسیله بوهر<sup>۱</sup> و موتلسون<sup>۲</sup> توسعه یافت. این مدل سعی دارد ویژگی‌های هر دو مدل لایه‌ای و قطره مایع را با در نظر گرفتن هسته بطور کامل، حرکت‌های

<sup>۱</sup> A.Bohr

<sup>۲</sup> B.Mottelson

اختصاصی نوکلئون‌های خارجی تلفیق نماید. وقتی هسته‌های زوج - زوج را مورد بررسی قرار می‌دهیم به این واقعیت در خور توجه می‌رسیم: از کاربرد مدل لایه‌ای در صدها مورد هسته‌ای زوج - زوج شناخته شده معلوم می‌شود که همگی آن‌ها دارای یک حالت بی‌هنجار  $2^+$  هستند که انرژی آن معادل یا کوچکتر از نصف انرژی لازم برای شکستن یک زوج نوکلئونی است این حالت  $2^+$ ، جز در چند مورد استثنایی، در همه موارد پایین‌ترین حالت برانگیخته است. از این رو، ظهور این حالت یک امر تصادفی نیست بلکه از یک خاصیت کلی هسته‌های زوج - زوج ناشی می‌شود که صرف نظر از اشغال حالت‌های خاص مدل لایه‌ای، در سراسر گستره جرم معتبر است. خواص کلی دیگری نیز وجود دارند که در همه هسته‌ها مشترک‌اند، پس بهتر است این خواص را نه با حرکت چند نوکلئون ظرفیت بلکه با تمام هسته مرتبط بدانیم. اینگونه خواص را که منشا آن‌ها در حرکت دسته جمعی اجزای هسته است و بسیاری از نوکلئون‌های هسته در ایجادشان شرکت دارند، خواص جمعی گویند. مدل جمعی هسته‌ها را مدل قطره مایعی نیز می‌گویند، زیرا ارتعاش و دوران هسته کاملاً مشابه ارتعاش و دوران قطره مایع معلق است. این مدل در توضیح و تفسیر ترازهای انرژی مشاهده شده در مورد هسته‌های دور از اعداد جادویی تقریباً موفق بوده است. این مدل می‌تواند گشتاورهای مغناطیسی، گشتاورهای چهار قطبی، و گذارهای ایزومری مشاهده شده برای هسته‌های دور از اعداد جادویی را نیز توضیح دهد [۶].





## فصل دوم

نیروی هسته‌ای و ویژگی‌های ایزوتوپ‌های کلسیم

## ۲-۱ نیروی هسته‌ای

مطالعه فیزیک هسته‌ای را با بررسی برهم‌کنش بنیادی موجود در طبیعت آغاز می‌کنیم. منشا تمام نیروهای موجود در طبیعت چهار نیروی بنیادی است که عبارتند از: نیروهای گرانشی، الکترومغناطیسی، هسته‌ای ضعیف و هسته‌ای قوی.

طبیعت دقیق نیروهای بستگی هسته‌ای، ناشناخته است. با این وجود نیروها باید دارای برد کوتاه باشند. نیروهایی که در فیزیک کلاسیک و اتمی با آن مواجه هستیم به ترتیب نیروهای گرانشی و الکترومغناطیسی هستند. که این نیروها نمی‌توانند نوکلئون‌ها را کنار هم نگه دارند. زیرا نوترون‌ها بار الکتریکی ندارند و نیروی الکترومغناطیسی به هیچ وجه نمی‌تواند اثری بر آن‌ها داشته باشد. نیروی الکترومغناطیسی بین پروتون‌ها نیز یک دافعه کولنی قوی است که باعث از هم پاشیدگی هسته می‌شود. نیروی گرانشی بین هر جفت از نوکلئون‌ها به صورت جاذبه است؛ اما این نیرو  $10^{36}$  مرتبه از نیروی الکتریکی موجود بین پروتون‌ها کوچکتر است. بنابراین اثر آن در تمام پدیده‌های هسته‌ای و اتمی کاملاً قابل اغماض است. تنها راه توجیح این است که وجود نیروی دیگری را در طبیعت بپذیریم که به آن نیروی هسته‌ای می‌گویند. البته در این تحقیق فقط «نیروی هسته‌ای قوی» بررسی می‌شود که برای سادگی از آن فقط با نام نیروی هسته‌ای یاد می‌شود. ساده‌ترین موردی که نیروی هسته‌ای در آن اثر می‌کند هنگامی که تنها دو نوکلئون برهم‌کنش داشته باشند که در عمل در دو وضعیت پیش می‌آید:

(الف) روش مستقیم: با مطالعه فرایندهای پراکندگی (برخوردهای میان دو نوکلئون)

(ب) روش غیر مستقیم: با مطالعه سیستم‌های مقید مثل دوترون (هسته‌ها)

حتی بدون انجام هر گونه آزمایشی برای بررسی نیروی بین دو نوکلئون می‌توان بعضی از خواص نیروی نوکلئون - نوکلئون را حدس زد [۶،۲۰،۲۱]:

۱. این نیرو در فواصل کوتاه قوی‌تر از نیروی کولنی است، زیرا نیروی هسته‌ای می‌تواند بر دافعه کولنی پروتون‌ها در هسته غلبه کند.
۲. نیروی هسته‌ای در فواصل بلندی که در حدود ابعاد اتمی باشد، به حدی ضعیف می‌شود که می‌توان از آن صرف نظر کرد. برهم‌کنش هسته‌های موجود در یک مولکول با یکدیگر فقط بر اساس نیروی کولنی قابل درک است.
۳. بعضی ذرات تحت تاثیر پتانسیل کولنی قرار نمی‌گیرند، برای نمونه هیچ دلیلی از ساختار اتمی در دست نیست که نیروی هسته‌ای تاثیری روی الکترون‌ها داشته باشد.

## ۲-۲ ویژگی‌های نیروی نوکلئون - نوکلئون

بنابراین وقتی که به منظور کشف خواص نیروی هسته‌ای به انجام آزمایش‌های خاص مبادرت می‌ورزیم به چند خاصیت قابل توجه دیگر برخورد می‌کنیم. در اینجا، ویژگی‌های اصلی نیروی نوکلئون - نوکلئون را مختصر بیان کردیم.

۱. برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون از پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه حاصل می‌شود.
۲. برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون به موازی یا پاد موازی بودن اسپین نوکلئون‌ها بستگی دارد.
۳. پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری (غیر مرکزی) است که این نیرو باعث نا پایستگی تکانه زاویه‌ای مداری می‌شود.
۴. نیروی نوکلئون - نوکلئون نسبت به بار نوکلئون تقارن دارد.
۵. نیروی نوکلئون - نوکلئون تقریباً مستقل از بار الکتریکی است.
۶. برهم‌کنش بین نوکلئون - نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود که نوکلئون‌ها را در فاصله متوسط معینی از یکدیگر نگه می‌دارد.
۷. نیروی نوکلئون - نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئون‌ها وابسته است. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی هسته‌ای به سرعت نسبی نوکلئون‌ها وابسته است.

## ۲-۳ مدل نیروی تبادل

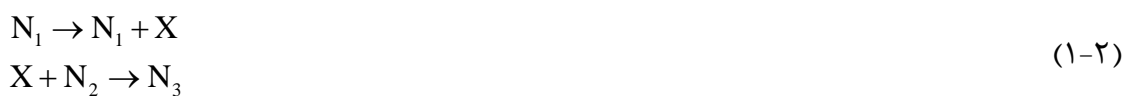
برای تایید حضور نیروی تبادل در هسته دو دلیل وجود دارد:

۱- خاصیت اشباع نیروی هسته‌ای

۲- مطالعه پراکندگی np در انرژی‌های بالا

خصوصیت اشباع نیروهای هسته‌ای و وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی np را می‌توان با استفاده از نیروی تبادل توضیح داد؛ در مورد اولی می‌گوییم برای آنکه نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون‌ها وجود داشته باشد باید بین آن‌ها چیزی رد و بدل شود و در مورد دومی می‌گوییم که بین نوکلئون‌ها «چیزی» مبادله می‌شود که عملاً خصوصیت آن‌ها را تغییر می‌دهد. در مراحل آغازین فیزیک کلاسیک برهم‌کنش بین اجسام را یک «کنش از دور» می‌دانستند. این بدان معنی است که نیروی یک جسم به طریق اسرارآمیزی در فضا به جسم دیگری منتقل می‌شود. پیشرفت بزرگ فیزیک نظری قرن نوزدهم را باید در معرفی مفهوم میدان دانست. طبق این نظر هر جسمی در فضا، یک میدان نیرو (که نمونه‌های آن میدان‌های الکترومغناطیس و گرانش هستند) ایجاد می‌کند و بر هم‌کنش جسم دوم نه مستقیماً با جسم اول بلکه فقط از طریق همین میدان صورت می‌گیرد. در مورد میدان الکترومغناطیسی چگونگی انتقال میدان در فضا توسط ماکسول نشان داده شد. عمده‌ترین تحول قرن بیستم را باید پیدایش مکانیک کوانتومی بدانیم که بنابر آن هر گونه تبادل انرژی لزوماً به صورت بسته‌ها یا ضرب‌هایی از یک مقدار گسسته یا کوانتوم انرژی است. میدان کلاسیک کمیتی یکنواخت و پیوسته است و برای اینکه نظریه کلاسیک میدان را با نظریه کوانتومی میدان سازگار کنیم خود میدان را باید به صورت کوانتومی در آوریم؛ یعنی بنابر نظریه کوانتومی میدان، جسم اول در فضای اطرافش یک میدان کلاسیک بوجود نمی‌آورد بلکه از خود کوانتوم میدان گسیل می‌کند در این صورت جسم دوم می‌تواند این کوانتوم‌های میدان را جذب کند (و به طرف جسم اول باز پس فرستد). پس این دو جسم به طور مستقیم با کوانتوم‌های میدان مبادله شده و به طور غیر مستقیم با یکدیگر برهم‌کنش دارند. طبیعی است که آن چیزی را که در برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون مبادله می‌شود

کوانتوم میدان هسته‌ای در نظر گرفته شود. روشن است که برای تبدیل یک نوترون با اسپین ۱/۲ به یک پروتون با اسپین ۱/۲ ذره مبادله شده باید دارای اسپین درست (صفر یا یک) و بار الکتریکی باشد. بعلاوه اگر بخواهیم همان مفهوم نیروی تبادل را برای برهم‌کنش  $nn$  هم به کار ببریم نوع بدون بار ذره مبادله شونده نیز باید وجود داشته باشد. با استفاده از برد نیروی هسته‌ای که در عمل مشاهده شده است می‌توان جرم ذره تبدالی را برآورد کرد. فرض کنید که نوکلئون (که آن را با  $N$  نشان می‌دهیم تا پروتون و نوترون هر دو را شامل شود) ذره‌ای مانند  $X$  را جذب می‌کند:



یک نوکلئون چگونه می‌تواند یک ذره با انرژی جرمی  $m_x c^2$  از خود گسیل کند و بدون نقض پایستگی انرژی همچنان به صورت نوکلئون باقی بماند؟ چنین عملی ممکن نیست مگر اینکه گسیل و جذب مجدد نوکلئون در چنان فاصله کوتاه  $\Delta t$  صورت بگیرد که ما از نقض پایستگی انرژی مطلع نشویم. چون اصل عدم قطعیت توانایی ما را در اندازه‌گیری انرژی (و در نتیجه در تعیین پایستگی انرژی) محدود می‌کند. اگر  $\Delta t < \hbar / (m_x c^2)$  باشد ما از نقض پایستگی انرژی به میزان  $\Delta E = m_x c^2$  مطلع نخواهیم شد. بیشینه برد نیرو را بیشینه فاصله‌ای که ذره  $X$  می‌تواند در زمان  $\Delta t$  طی کند، تعیین می‌کند. اگر سرعت ذره را از مرتبه  $c$  بگیریم، حداکثر برد ذره ( $R$ ) چنین می‌شود:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_x c^2} \quad (2-2)$$

که در آن به جای  $\hbar c$  از تقریب ساده‌ای استفاده شده است. معادله (۲-۲) حاکی از وجود رابطه‌ای مفید بین انرژی جرمی ذرات مبادله شونده و برد نیروی تبادل است. روشن است که اگر برد نیروی هسته‌ای در حدود  $1 \text{ fm}$  باشد انرژی جرمی ذره تبدالی می‌باید در حدود  $200 \text{ MeV}$  شود. چنین ذراتی را که فقط برای لحظاتی زودگذر دوام می‌آورند و می‌توانند قانون پایستگی انرژی و تکانه را نقض کنند (در نوکلئون‌های جذب کننده و گسیل کننده پس زنی دیده نمی‌شود)، ذرات مجازی<sup>۱</sup>

---

<sup>1</sup> Virtual Particles

می‌گویند. می‌توان نیروی حاصل از تبادل ذرات مجازی را مشاهده کرد ولی نمی‌توان خود این ذرات را در حین تبادل مشاهده کرد (اما ذرات مجازی مبادله شونده را می‌توان همانند ذرات معمولی در نظر گرفت. بنا بر نظریه میدان، برهم‌کنش کولنی بین بارهای الکتریکی را می‌توان به صورت تبادل فوتون‌های مجازی که خواصی مشابه فوتون‌های حقیقی و معمولی دارند در نظر گرفت). ذرات تبدالی حامل نیروی هسته‌ای را « مزون »<sup>۱</sup> می‌نامند (واژه « مزو » یونانی و به معنای میانه است که به جرم متوسط این ذرات که از الکترون بیشتر و از پروتون کمتر است اشاره دارد). سبکترین مزون، مزون  $\pi$  یا پیون<sup>۲</sup> نامیده می‌شود،

سه جزء برهم‌کنش سیستم دو نوکلئونی عبارتند از:

۱- بخش بلند برد (از ۰/۵ تا ۱/۵ فرمی):

پتانسیل تبادل تک - پیون (OPEP) به واسطه جرم کوچک پیون، بلند بردترین قسمت برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون است. شکل کلی برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون به صورت زیر است [۲۲]:

$$V_{\text{OPEP}} = g^2 (\tau_1 \cdot \tau_2) [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla})] f(r) \quad (۳-۲)$$

که  $g$  ثابت جفت شدگی پیون - نوکلئون و  $f(r)$  به شکل یوکاواوی زیر است:

$$f(r) = \frac{e^{-(r/\rho_\pi)}}{r} \quad (۴-۲)$$

برد  $\rho_\pi$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\rho_\pi = \hbar / (m_\pi c) = 1.414 \text{ fm} \quad (۵-۲)$$

رابطه (۳-۲) را می‌توان بسط داد و برحسب جملات عملگرهای مرکزی و اسپین - تانسوری نوشت [۲۳، ۲۴]:

$$V_{\text{OPEP}} = \frac{g^2}{3} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left\{ s_{12} \left[ \frac{3}{r^3} + \frac{3}{\rho_\pi r} + \frac{1}{\rho_\pi^2} \right] f(r) + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}{\rho_\pi^2} f(r) - 4\pi (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r) \right\} \quad (۶-۲)$$

<sup>۱</sup> Meson

<sup>۲</sup> Pion

این پتانسیل با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پیون‌های باردار و خنثی به خوبی برای  $p-p$ ،  $n-p$  و  $n-n$  به صورت مناسب‌تری ارائه شده است.

۲- دربخش متوسط برد (از ۰/۵ تا ۱ فرمی):

در این تبادل به صورت دو پیون (دو پیون و مزون‌های سنگین) صورت می‌گیرد. چرا که با دو پیون جرم ذره تبدالی دو برابر شده و برد نصف می‌شود.

۳- بخش کوتاه برد (از ۰/۵ تا ۰/۲۵ فرمی):

تبادل مزون  $W$  (با انرژی سکون معادل  $783 \text{ Mev}$ ) ممکن است در تشکیل مغز دافعه دخالت داشته باشد و تبادل مزون  $\rho$  (با انرژی سکون معادل  $769 \text{ Mev}$ ) می‌تواند تامین کننده اثر اسپین - مدار در برهم‌کنش هسته‌ای باشد. برای آنکه انواع تبادل‌های لازم در سیستم دو نوکلئونی امکان پذیر باشد باید سه نوع پیون با بارهای الکتریکی  $+e$ ،  $-e$  و  $0$  وجود داشته باشد. پیون‌ها اسپین صفر دارند و انرژی سکونشان معادل با  $139/6 \text{ Mev}$  (برای  $\pi^{\pm}$ ) و  $135 \text{ Mev}$  (برای  $\pi^0$ ) است.

اختلاف جرم پیون‌های باردار و خنثی می‌تواند نقض احتمالی کوچکی را که قبلاً در مورد استقلال بار مطرح شد توضیح دهد. پیون منفردی که در برهم‌کنش بین نوکلئون‌های یکسان مبادله می‌شود، لزوماً از نوع  $\pi^0$  است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad n_2 + \pi^0 \rightarrow n_2 \quad (7-2)$$

یا

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2 \quad (8-2)$$

هیچ نوکلئون بارداری که بار ۱- یا ۲+ داشته باشد وجود ندارد، تبادل پیون باردار در این مورد کارساز نیست:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^- \quad \text{but} \quad \pi^- + n_2 \rightarrow ? \quad (9-2)$$

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^+ \quad \text{but} \quad \pi^+ + p_2 \rightarrow ? \quad (10-2)$$

(گرچه نوکلئون‌های با بار ۱- یا ۲+ در حالت‌های برانگیخته وجود دارند، ولی این حالت‌های پرنرژی در آزمایش‌های انرژی پایین، سهم قابل توجهی ندارد) اما برهم‌کنش نوترون - پروتون با تبادل هر دو نوع پیون باردار و خنثی تحقق پذیر است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2 \quad (۱۱-۲)$$

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad \pi^- + p_2 \rightarrow n_2 \quad (۱۲-۲)$$

## ۲-۴ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا

مفهوم نیروهای تبدالی اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونی‌اش بیان شد. طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هسته‌ای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی را مبنی بر این که برد نیروهای هسته‌ای کوتاه برد است مشاهده خواهیم کرد [۲۵]. برد نیروهای هسته‌ای از مرتبه  $\frac{\hbar}{m_\pi c}$  می‌باشد که در آن  $m_\pi$  جرم مزون  $\pi$  یا پیون است. این نظریه توسط داده‌های تجربی نیز ثابت شده است.  $m_\pi = 266 m_e$ . طبق این نظریه عامل برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها مزون  $\pi$  است. اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین - گوردن می‌گوییم. همان طور که می‌دانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۵]:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4 \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{و} \quad P \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (۱۳-۲)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + m_\pi^2 c^4 \Phi \quad (۱۴-۲)$$

با در نظر گرفتن چهار بردار  $x_1, x_2, x_3$  برای قسمت فضایی و  $x_4 = ict$  قسمت وابسته به زمان رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left[ -\hbar^2 c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \right) \right] \Phi = 0 \quad (۱۵-۲)$$



که معادله کلاین گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورت‌های زیر می‌توانیم بنویسیم.

وابسته به زمان:

$$(\square^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad \square^2 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (16-2)$$

مستقل از زمان:

$$(\nabla^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} \quad (17-2)$$

معادله کلاین گوردن :

$$(\square^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad (18-2)$$

که برای حالت پایا معادله کلاین گوردن به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \square^2 = \nabla^2 \rightarrow (\nabla^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad (19-2)$$

با حل معادله اخیر برای  $\Phi$  به جواب  $\Phi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$  می‌رسیم. که برد نیروی هسته‌ای از مرتبه  $\frac{1}{\mu}$  یا

$\frac{\hbar}{m_\pi c}$  می‌شود. اگر برد نیروی هسته‌ای را با  $\frac{\hbar}{m_\pi c}$  مساوی قرار دهیم (برد نیروی هسته‌ای  $10^{-13}$  cm)

به نتیجه  $m_\pi = 200 m_e$  می‌رسیم که با جواب به‌دست آمده از آزمایشات  $m_\pi = 200 m_e$  قابل

مقایسه است. پس معادله کلاین گوردن مزون  $\pi$  را توجیه می‌کند [۲۵].

## ۵-۲ شرایط پتانسیل هسته‌ای مناسب

شرایطی که پتانسیل هسته‌ای باید آن‌ها را دارا باشد:

۱- پتانسیل باید یک کمیت نرده‌ای باشد چون انرژی است.

۲- از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیر قابل تشخیص هستند، هرگاه جای دو ذره را با هم عوض

می‌کنیم پتانسیل نباید تغییر کند.

۳- اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند این به اصل ناوردایی و ارونای زمان معروف است، که در تمام قوانین شناخته شده فیزیک کوانتومی و کلاسیک معتبر است و اعتقاد عمومی بر این است که در پدیده‌هایی که نیروی هسته‌ای دخیل است این امر صحت دارد. اگر جهت زمان معکوس شود به سادگی دیده می‌شود که  $S$  و  $P_{12}$  علامتشان تغییر می‌کند ولی علامت  $r_{12}$  تغییر نمی‌کند. پس با تعریف تکانه زاویه‌ای، علامت  $L$  معکوس خواهد شد، بنابراین نمی‌توان جملاتی شبیه  $r_{12}, S, r_{12}, P_{12}$  یا  $r_{12}, L$  داشت.

البته ما در اینجا نیروهایی را که مستقل از سرعت هستند در نظر می‌گیریم، به این نیروها، نیروهای استاتیکی می‌گویند. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی‌تواند به  $P_{12}$  یا به  $L$  بستگی داشته باشد. زیرا این‌ها به سرعت وابسته هستند. بنابراین پتانسیل استاتیکی تنها شامل  $\vec{s}, \vec{r}$  است. بنابراین جمله‌ای که وابستگی پتانسیل استاتیکی به اسپین را نشان می‌دهد  $(\vec{s} \cdot \vec{r})^2$  را می‌توان به عنوان جمله‌ای که مولفه تانسوری را شامل می‌شود نشان دهیم.

۴- ویژگی دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون - نوکلئون می‌تواند به آن وابسته باشد، پارته تابع موجی است که سیستم را توصیف می‌کند. از آن‌جا که پارته به فرد یا زوج بودن  $L$  بستگی دارد، نیروی هسته‌ای برای  $L$  زوج و  $L$  فرد متفاوت است. در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات به دست آمده پتانسیل‌های پدیده شناختی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت [۲۰]:

$$V = V_C + V_{CS} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \quad (20-2)$$

$V_C$  انرژی پتانسیل مرکزی معمولی را توصیف می‌کند.

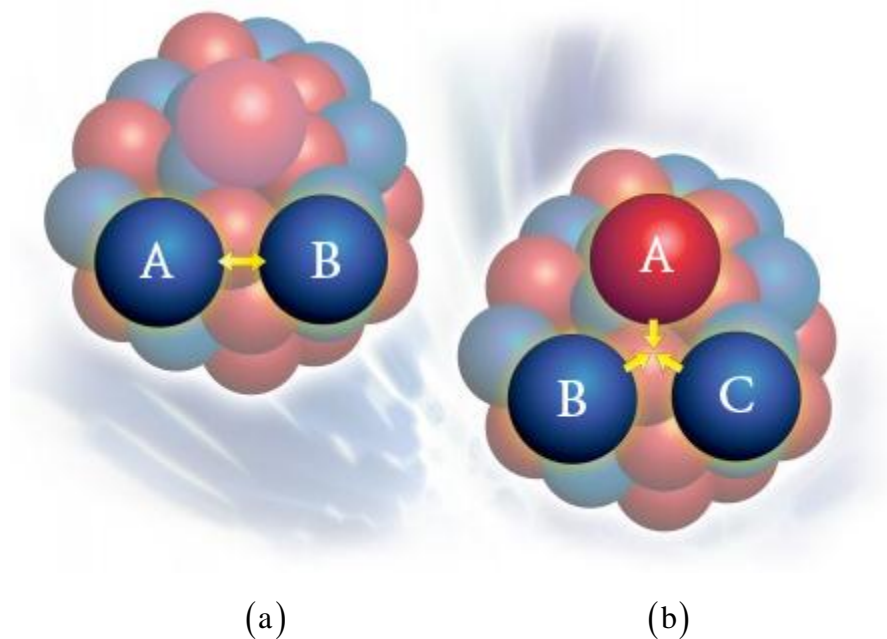
$V_{CS}$  جمله مرکزی وابسته به اسپین است.

$V_T$  معرف نیروی تانسوری است.  $S_{12}$  عملگر تانسوری است.

$V_{LS}$  نیروی اسپین - مداری را مشخص می‌کند.

## ۲-۶ نیروی چند جسمی

تا اینجا بطور ضمنی فرض شد که نیروی هسته‌ای نیروی دو جسمی است همانطور که در شکل (۲-۲) نیز مشاهده می‌کنید نیروی دو جسمی  $F_{AB}$  میان دو نوکلئون A و B وجود دارد. بنابراین برهم‌کنش‌های دو جسمی به طور طبیعی در زمینه‌ی تئوری نظریه تبادل مزون و در سطح بنیادی‌تر از QCD به وجود می‌آیند [۲۶]. حال اگر نوکلئون‌های A، B و C مطابق شکل (۲-۱) نزدیک هم باشند، نیروی اعمال شده بر A،  $F_{AB} + F_{AC}$  است که اگر C نبود  $F_{AB}$  نیروی میان A و B بود و اگر B نبود نیروی  $F_{AC}$  میان A و C می‌شد [۲۰].

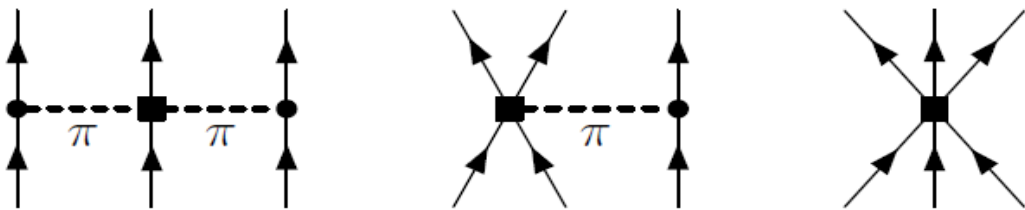


شکل (۲-۱) نیروهای چند جسمی. (a) نیروی دو جسمی. (b) نیروی سه جسمی.

البته این رفتار نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی است. از آنچه در مدل نیروی تبادل در بخش‌های پیشین دیدیم، چنین بر می‌آید که نیروی تبادل مزونی فقط میان جفت‌ها عمل می‌کند؛ اما تبادل‌های دیگری نیز وجود دارند؛ برای مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هر گاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته باشند دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو

نوکلئون شوند. این امر منجر به «نیروی سه جسمی» می‌شود، نیرویی که در آن دیگر تعریف بالا از نیروی دو جسمی برقرار نیست. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی و پنج جسمی و غیره - که به طور کلی نیروی چند جسمی نامیده می‌شوند- را نیز پیش بینی می‌کند.

در فیزیک ذرات بنیادی، بر هم کنش ما بین سه کوارک، که هادرون‌ها را تشکیل می‌دهند، می‌تواند با مدل کوارکی که هم‌ارز نیروی سه جسمی می‌باشد توصیف شوند. بنابراین نیروی سه جسمی مربوط به بخش هادرون (باریون) است. مهم‌ترین جمله در پتانسیل سه نوکلئونی که بزرگترین برد احتمال دارد به فرایند شناخته شده‌ای مانند (TPE-3NP)<sup>1</sup> مربوط است. یک پیون که به وسیله‌ی یکی از نوکلئون‌ها تابش شده است، قبل از جذب شدن به وسیله‌ی سومین نوکلئون، توسط نوکلئون دوم پراکنده می‌شود [۲۳]. همچنین مدل پدیده شناختی موفقیت‌های متعددی در نیروی هسته‌ای داشته است، که به طور معمول چندین مدل پدیده شناختی نیروی سه جسمی حاصل از سهم تبادل دو پیون وجود دارد (در شکل (۲-۳) نمودار فایمن نیروی سه جسمی، تبادل دو پیون نشان داده شده است) [۲۷].



شکل (۲-۳) نمودار فایمن نیروی سه جسمی [۲۷].

از آنجا که باید مزون‌های زیادی به طور همزمان در این فرآیندها ایجاد شوند، با توجه به مدل نیروی تبادل می‌توان نتیجه گرفت که برد نیروها با افزایش تعداد جسم‌ها کاهش می‌یابد. می‌توان به طور تقریبی تخمین زد که برد نیروی  $n$  جسمی،  $1/(n-1)$  برابر برد نیروی دو جسمی است. اگر برد را  $1/\mu$  بگیریم این مقدار برای نیروهای ۲، ۳، ۴ و ۵ جسمی به ترتیب حدود  $1/4$ ،  $1/7$ ،  $1/47$  و  $1/35$

<sup>1</sup> Two-pion exchange three-nucleon potential

فرمی است. برآیند بحث این است که در تعیین ساختار هسته نیروی دو جسمی است که اهمیت زیادی دارد و نیروهای چند جسمی - به استثنای نیروی سه جسمی - بی اهمیتند. در رابطه زیر اهمیت نیروها را کاملاً نشان داده شده است. این نیرو به راحتی در سیستم‌هایی که شامل سه نوکلئون هستند مطالعه می‌شوند. محققان با توجه به اختلاف در بین داده‌های تجربی و محاسبات تئوری بر اساس نیروی دو جسمی، این اختلاف را به عنوان یک نشانه از وجود نیروی سه جسمی دانستند [۲۷]. برای نمونه می‌توان به کارهای کیفسکی و همکارانش در مراجع اشاره کرد [۲۸، ۲۹].

$$\langle V_{2N} \rangle \geq \langle V_{3N} \rangle \geq \langle V_{4N} \rangle \quad (2-21)$$

یک روش رهیافت به مسئله، مطالعه سیستم‌های سه نوکلئونی است تا ببینیم که آیا می‌توان خصوصیات نیروی سه جسمی را از نیروی دو جسمی محاسبه کرد یا نه؟ جواب منفی شاهدهی بر وجود نیروهای سه جسمی خواهد بود. سیستم‌های سه نوکلئونی را می‌توان به صورت حالت‌های مقید نظیر هسته‌های  ${}^3\text{H}$  و  ${}^3\text{He}$  یا توسط پراکندگی نوترون یا پروتون از دوترون مطالعه کرد که در این زمینه اطلاعات زیادی موجود است.

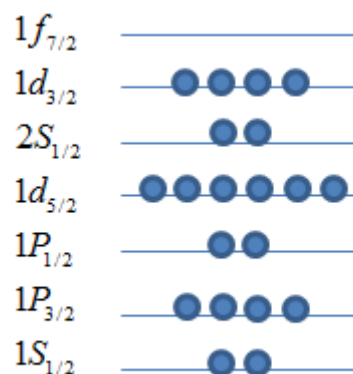
تجزیه و تحلیل این اطلاعات بسیار مشکل است، زیرا مسئله سه جسم در مکانیک کلاسیک نیز هنوز دقیقاً حل نشده است. به هر حال کوشش زیادی صرف محاسبه انرژی بستگی  ${}^3\text{H}$  (تریتون) شده است که مقدار تجربی آن  $8.482 \text{ MeV}$  است [۳۰، ۳۱]. نتایج نشان می‌دهند که انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم فقط برابر  $7 \text{ MeV}$  است و در نتیجه حدود  $1/5 \text{ MeV}$  از انرژی بستگی آن از نیروی سه جسمی ناشی می‌شود. این نتیجه یا تخمین‌هایی که از روش‌های دیگر بدست آمده است تفاوت دارد. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اهمیت نیروهای سه جسمی در هسته در حدود ۲۰ درصد اهمیت نیروهای دو جسمی است. در هسته‌های پیچیده‌تر این تخمین در حدود ۱۵ درصد است [۲۰].

## ۷-۲ مروری بر ویژگی‌های ایزوتوپ‌های کلسیم

برای بررسی خصوصیات فیزیکی ایزوتوپ‌های کلسیم در یک دسته بندی نوعی آنها را به دو دسته ایزوتوپ‌های زوج - زوج (تعداد پروتون زوج - تعداد نوترون زوج) و ایزوتوپ‌های زوج - فرد (تعداد پروتون زوج - تعداد نوترون فرد) تقسیم بندی می‌کنیم. برای محاسبه ویژگی‌های استاتیکی ایزوتوپ‌های زوج - زوج و همچنین محاسبه ترازهای انرژی حالت پایه و برانگیخته این ایزوتوپ‌ها از مدل جمعی استفاده می‌کنیم و برای ایزوتوپ‌های هسته‌های زوج - فرد معمولاً از دو نوع مدل لایه‌ای، مدل لایه‌ای ذره خیلی مستقل و مدل لایه‌ای کامل (در فصل ۱ کاملاً توضیح دادیم) استفاده می‌کنیم.

### ایزوتوپ کلسیم ۴۰:

کلسیم ۴۰ دارای ۲۰ پروتون و ۲۰ نوترون است. ایزواسپین حالت پایه آن با توجه به رابطه داده شده  $T = \frac{Z-N}{2}$  دارای مقدار  $+$  است. کلسیم ۴۰ هسته دو جادویی می‌گویند، که تمام لایه‌های  $1s$ ،  $1p$  و  $1d-2s$  نیز در هر دو (یعنی نوترون‌ها و پروتون‌ها) پر شده است [۳۲]. همچنین کلسیم ۴۰ هسته‌ای است که تمام پوسته‌های آن کاملاً پر می‌باشد، هسته با پوسته بسته نیز نامیده می‌شود [۲۰].



شکل (۲-۳) پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۰.

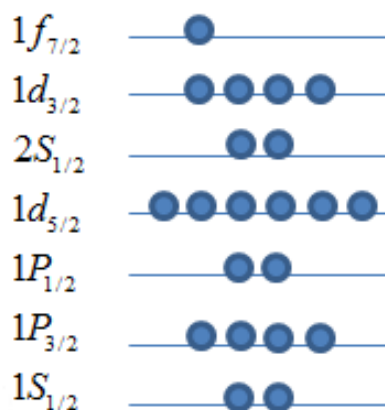
## ایزوتوپ کلسیم ۴۱:

کلسیم ۴۱ دارای ۲۰ پروتون و ۲۱ نوترون است. ایزواسپین حالت پایه آن با توجه به رابطه داده شده

پوسته‌های دیگر آن کاملاً پر است و فقط در خارج از بخش مرکزی جادویی دارای یک نوکلئون منفرد

(تک ذره) است. بنابراین با توجه به توضیحات ذکر شده کلسیم ۴۱ به عنوان مدل لایه‌ای ذره خیلی

مستقل مورد بررسی قرار می‌گیرد [۲۰, ۶].



شکل (۲-۴) پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۱.

در سال (۱۹۵۰) نخستین اندازه‌گیری دقیق از ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های کلسیم از جمله کلسیم

۴۱ توسط برامس<sup>۱</sup> انجام شده است، اگر چه قبلاً توسط فورد<sup>۲</sup> و لوینسون<sup>۳</sup> نتایج به دست آمده با

استفاده از پیکربندی برهم‌کنش‌ها، در دسترس محققان قرار گرفته بود. سپس در سال (۱۹۵۳) توسط

مارشام<sup>۴</sup> و هالت<sup>۵</sup> تئوری باتر<sup>۶</sup> نیز، سطوح ترازهای انرژی کلسیم ۴۱ مورد بررسی قرار داده‌اند [۳۲].

<sup>۱</sup>Braams

<sup>۲</sup>Ford

<sup>۳</sup>Levinson

<sup>۴</sup>Marsham

<sup>۵</sup>Holt

<sup>۶</sup>Batter

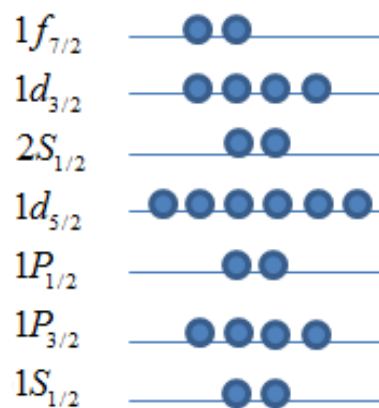
### ایزوتوپ کلسیم ۴۲:

کلسیم ۴۲ دارای ۲۰ پروتون و ۲۲ نوترون است. ایزواسپین حالت پایه آنها با توجه به رابطه داده شده

$$T = \frac{Z - N}{2}$$

دارای مقدار  $+$  است. همانطور که در فصل ۱ توضیح داده شد، کلسیم ۴۲ را هسته

جادویی می‌نامند.



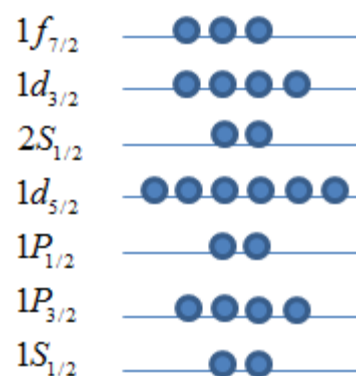
شکل (۵-۲) پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۲.

### کلسیم ۴۳:

کلسیم ۴۳ دارای ۲۰ پروتون و ۲۳ نوترون است. ایزواسپین حالت پایه آن با توجه به رابطه داده شده

$$T = \frac{Z - N}{2}$$

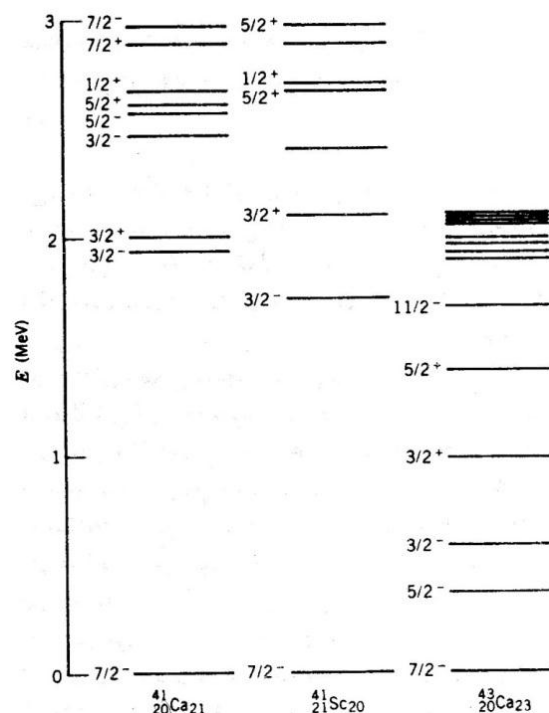
دارای مقدار  $(\frac{3}{2})^-$  است.



شکل (۶-۲) پر شدن ترازهای نوترونی کلسیم ۴۳.



کلسیم ۴۳ در خارج از بخش مرکزی جادویی دارای سه نوکلئون است، بنابراین نوع خیلی مستقل مدل لایه‌ای فقط تک نوکلئون زوج نشده حالت آخری را (به مانند مدل ذره خیلی مستقل برای کلسیم ۴۱ که تک نوترون آخری مورد نظر می‌باشد) در نظر می‌گیرد. سپس چنانکه در شکل زیر دیده می‌شود، با مقایسه طیف‌های مربوط به حالت‌های برانگیخته این دو ایزوتوپ مشاهده می‌کنیم که دارای طیف یکسانی نیستند (ساختار کلسیم ۴۳ کاملاً با کلسیم ۴۱ تفاوت دارد). در مورد کلسیم ۴۳ تعداد حالت‌های کم - انرژی خیلی زیاد است. این حالت‌ها در نتیجه جفت‌شدگی سه ذره در پوسته  $1f_{7/2}$  حاصل می‌شوند و اختلاف بین مدل لایه‌ای کامل و مدل لایه‌ای ذره خیلی مستقل را نشان می‌دهند. به عبارتی باید کلسیم ۴۳ بر اساس مدل لایه‌ای به عنوان یک ایزوتوپ با سه نوکلئون ظرفیت در نظر گرفت، که این سه نوکلئون کلسیم ۴۳ در خارج از پوسته کامل قرار دارد و به عنوان مدل لایه‌ای کامل مورد بررسی قرار می‌گیرد [۶].



شکل (۷-۲) ترازهای انرژی چند هسته که تعداد ذرات موجود در پوسته  $1f_{7/2}$  در آنها فرد است [۶].

در سال ۱۹۶۶ تالمی<sup>۱</sup> و فدرمان<sup>۲</sup> توسط برهم‌کنش‌های موثر، مدل لایه‌ای برای ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۲ تا ۵۰ با نوترون‌هایی که در لایه  $(I_{f_{7/2}}, P_{3/2})$  قرار گرفته‌اند، محاسبه شده است. که ایزوتوپ‌های فرد کلسیم بخصوص کلسیم ۴۳، موافقت خوبی با داده‌های تجربی داشته است [۳۳]. در جدول (۱-۲) اسپین پاریده و ایزواسپین و جرم ایزوتوپ و نیمه عمر ایزوتوپ‌های کلسیم محاسبه و نمایش داده شده است.

جدول (۱-۲) برخی خصوصیات ایزوتوپ‌های کلسیم [۶].

${}^A_Z X_N$	اسپین و پاریده	ایزو اسپین [۳۰]	جرم ایزوتوپ (u)	نیمه عمر یا فراوانی
${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$	$(0)^+$	۰	۳۹/۹۶۲۵۹۱	۹۶/۹۴%
${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	$(7/2)^-$	(۱/۲)	۴۰/۹۶۲۲۷۸	۰/۱۰ (My)
${}^{42}_{20}\text{Ca}_{22}$	$(0)^+$	۱	۴۱/۹۵۸۶۱۸	۰/۶۴۷%
${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	$(7/2)^-$	(۳/۲)	۴۲/۹۵۸۷۶۶	۰/۱۳۵%
${}^{44}_{20}\text{Ca}_{24}$	$(0)^+$	۲	۴۳/۹۵۵۴۸۱	۲/۰۹%
${}^{45}_{20}\text{Ca}_{25}$	$(7/2)^-$	(۵/۲)	۴۴/۹۵۶۱۸۵	۱۶۵ (d)
${}^{46}_{20}\text{Ca}_{26}$	$(0)^+$	۳	۴۵/۹۵۳۶۸۹	۰/۰۰۳۵%
${}^{47}_{20}\text{Ca}_{27}$	$(7/2)^-$	(۷/۲)	۴۶/۹۵۴۵۴۳	۴/۵۴ (d)
${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$	$(0)^+$	۴	۴۷/۹۵۲۵۳۳	۰/۱۸۷%
${}^{49}_{20}\text{Ca}_{29}$	$(۳/۲)^-$	(۹/۲)	۴۸/۹۵۵۶۷۲	۸/۷۲ (m)
${}^{50}_{20}\text{Ca}_{30}$	$(0)^+$	۵	۴۹/۹۵۷۵۱۹	۱۴ (s)

<sup>1</sup> Talmi

<sup>2</sup> Federman

### شعاع ایزوتوپ‌های کلسیم:

جذر میانگین مربع شعاع باری حالت پایه هسته‌های زیادی اندازه گیری شده است. بنابراین جذر

میانگین مربع شعاع باری با رابطه زیر تعریف می‌شود [۸,۲۰,۳۴]:

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\int \psi^*(r) r^2 \psi(r) d^3r}{\int \psi^*(r) \psi(r) d^3r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22-2)$$

در جدول زیر نتایج تئوری شعاع ایزوتوپ‌های کلسیم که از رابطه (۲۲-۲) به دست آمده، نشان داده و

با نتایج تجربی مقایسه شده است.

جدول (۲-۲) شعاع ایزوتوپ‌های کلسیم از کارهای دیگران و مقایسه با مقادیر تجربی [۳۴-۳۸].

$\frac{A}{Z} X_N$	$r_C^{\text{exp}} \text{ (fm)}$	$r_C \text{ (fm)}$
${}_{20}^{40}\text{Ca}_{20}$	۳/۴۷۸	۳/۴۵۲
		۳/۴۶۹
		۳/۴۳۸
		۳/۴۸
		۳/۴۷
${}_{20}^{41}\text{Ca}_{21}$	۳/۴۷۶۸	۳/۴۴۳۳
		۳/۴۴۴۰
${}_{20}^{42}\text{Ca}_{22}$	۳/۵۰۸	۳/۴۵۲
${}_{20}^{43}\text{Ca}_{23}$	۳/۴۹۵	
${}_{20}^{44}\text{Ca}_{24}$	۳/۵۱۸	۳/۴۵۴
${}_{20}^{45}\text{Ca}_{25}$	۳/۴۹۴۴	
${}_{20}^{46}\text{Ca}_{26}$	۳/۴۹۸	۳/۴۵۸
${}_{20}^{47}\text{Ca}_{27}$	۳/۴۷۸۳	
${}_{20}^{48}\text{Ca}_{28}$	۳/۴۷۹	۳/۴۶۳
		۳/۴۷۱
		۳/۴۵۶
		۳/۴۸
${}_{20}^{50}\text{Ca}_{30}$	۳/۴۸۷	

## انرژی بستگی ایزوتوپ‌های کلسیم:

در سال‌های اخیر برای بررسی ایزوتوپ‌ها معمولاً از چاه پتانسیل، پتانسیل نوسانگر و پتانسیل وود – ساکسون استفاده شده است. دانشمندان با انتخاب پتانسیل مناسب و استفاده از روش‌های فیزیکی به محاسبه انرژی بستگی ایزوتوپ‌های کلسیم پرداخته‌اند، در جدول زیر نتایج کار دانشمندان را مشاهده می‌کنیم.

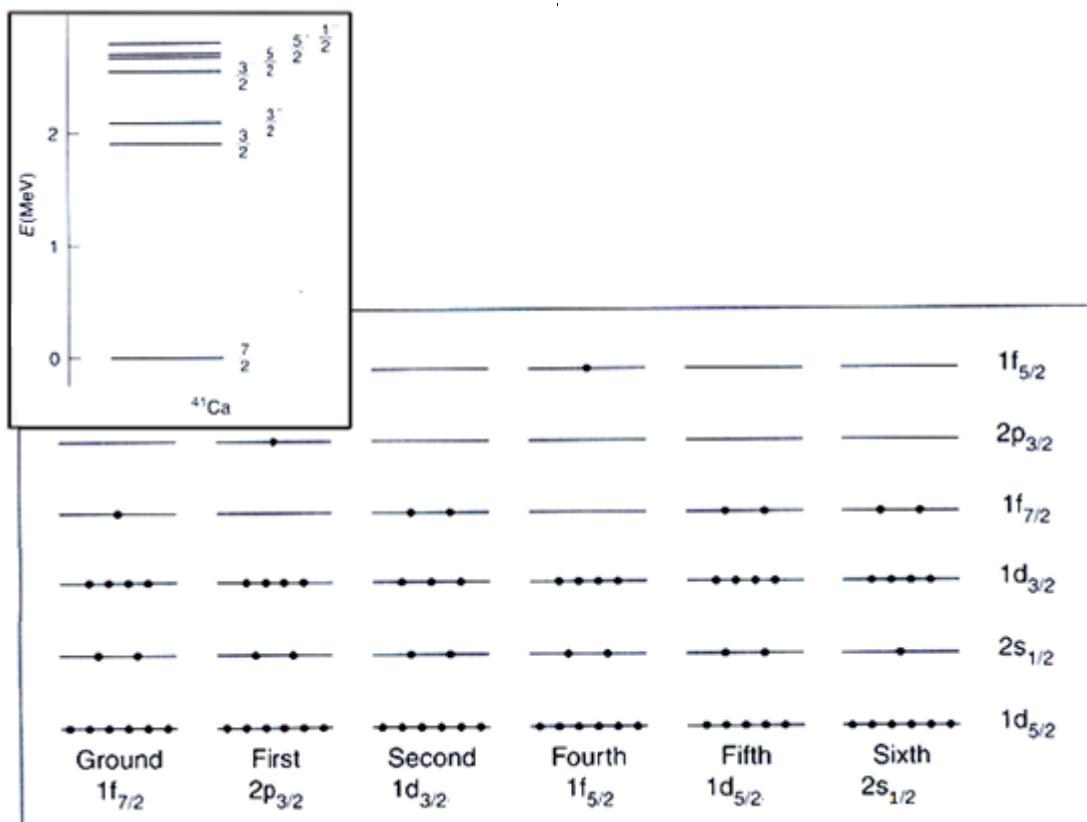
جدول (۲-۳) انرژی بستگی ایزوتوپ‌های کلسیم از کارهای دیگران و مقایسه با مقادیر تجربی [۳۵, ۳۴, ۳۰].

$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X_N$	$E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$	$E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$
$\begin{matrix} 40 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{20}$	-۳۴۲/۰۵۲	-۳۴۰/۰۰۶
$\begin{matrix} 41 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{21}$	-۳۵۰/۴۱۴۸	-۳۵۰/۷۵۶۱
		-۳۵۱/۴۲۷۱
$\begin{matrix} 42 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{22}$	-۳۶۱/۸۹۵	-۳۶۰/۹۹۵
$\begin{matrix} 43 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{23}$	-۳۶۹/۸۳۳	
$\begin{matrix} 44 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{24}$	-۳۸۰/۹۶۰	-۳۸۰/۰۸۶
$\begin{matrix} 45 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{25}$	-۳۸۸/۳۷۹	
$\begin{matrix} 46 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{26}$	-۳۹۸/۷۶۹	-۳۹۷/۹۳۷
$\begin{matrix} 47 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{27}$	-۴۰۶/۰۵۲	
$\begin{matrix} 48 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{28}$	-۴۱۵/۹۹۱	-۴۱۴/۹۱۰
$\begin{matrix} 49 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{29}$	-۴۲۱/۱۴۴	
$\begin{matrix} 50 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{30}$	-۴۲۷/۴۹۱	-۴۲۴/۴۴۳

## سطوح انرژی (حالت‌های برانگیخته) ایزوتوپ‌های کلسیم:

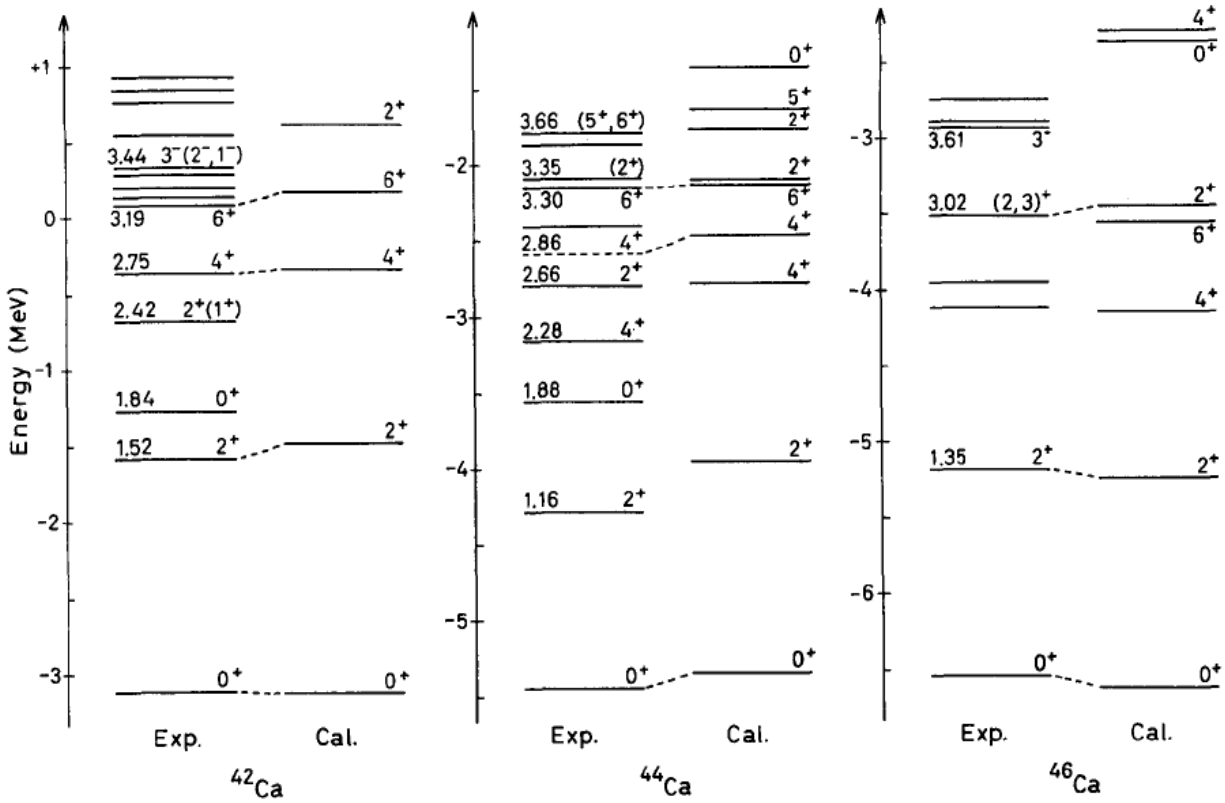
برای بررسی حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ‌های کلسیم در یک دسته بندی نوعی آن‌ها را به دو دسته حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ‌های زوج – زوج (تعداد پروتون زوج – تعداد نوترون زوج) و حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ‌های زوج – فرد (تعداد پروتون زوج – تعداد نوترون فرد) تقسیم بندی می‌کنیم. در اینجا به توضیح حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ کلسیم ۴۱ و کلسیم ۴۳ می‌پردازیم.

در تمام ایزوتوپ‌های کلسیم نحوه پر شدن ترازهای پروتونی یکسان است و فقط ترازهای نوترونی آن‌ها با هم متفاوت است. حالت پایه کلسیم ۴۱ که پس از بخش مرکزی جادویی ( $Z=20$  و  $N=21$ ) فقط شامل یک نوکلئون منفرد است. با توجه به شکل (۲-۸) انتظار می‌رود تک نوکلئون فرد از تراز  $1F_{7/2}$  به تراز  $2P_{3/2}$  می‌رود که متناظر با تراز  $2P_{3/2}$  در مدل لایه‌ای، به همراه حالت برانگیخته با اسپین و پاریتته  $(3/2)^-$  روبرو می‌شویم. حالت  $(3/2)^-$  که مورد انتظار مدل لایه‌ای است، به عنوان اولین حالت برانگیخته ظاهر می‌شود و پوسته  $2P_{3/2}$  دارای تک نوکلئون منفرد می‌باشد. طبق مدل لایه‌ای، وقتی به هسته انرژی می‌دهیم، بخش مرکزی هسته تغییر نمی‌کند ولی نوکلئون فرد با جذب انرژی به یکی از ترازهای بالاتر مدل لایه‌ای خواهد رفت (اولین حالت برانگیخته نیز بدین صورت توجیه می‌شود). البته در شکل (۲-۸) چهارمین حالت برانگیخته نیز که تک نوکلئون فرد از تراز  $1F_{7/2}$  به تراز  $1F_{5/2}$  می‌رود و همچنین سومین حالت برانگیخته (در شکل زیر نشان داده نشده است) که تک نوکلئون فرد از تراز  $1F_{7/2}$  به تراز  $2P_{1/2}$  می‌رود، همانند حالت برانگیخته اول توجیه کرد. همانطور که در شکل (۲-۸) می‌بینید یکی از توضیحات ممکن برای حالت  $1d_{3/2}$  نشان داده شده است (دومین حالت برانگیخته است). به جای آنکه نوکلئون فرد به حالت برانگیخته بالاتر برود، زوج نوکلئون موجود در تراز می‌شکنند و یکی از نوکلئون‌های آن در اثر برانگیزش به تراز  $1F_{7/2}$  می‌رود و با نوکلئون موجود در آنجا زوج جدیدی تشکیل می‌دهد. در این صورت نوکلئون فرد حالت  $1d_{3/2}$  خواهد بود که به حالت برانگیخته  $(3/2)^+$  منجر می‌شود. پنجمین حالت برانگیخته  $1d_{5/2}$  نیز همانند دومین حالت برانگیخته، زوج نوکلئون موجود در تراز  $1d_{5/2}$  می‌شکنند و یکی از نوکلئون‌های آن به تراز  $1F_{7/2}$  می‌رود. بدین ترتیب ششمین حالت برانگیخته  $2S_{1/2}$  می‌رسیم که بدین صورت است، نوکلئون منفرد از تراز  $2S_{1/2}$  به تراز  $1F_{7/2}$  می‌رود و با انتقال تک نوکلئون زوج جدیدی در تراز  $1F_{7/2}$  تشکیل می‌شود و پوسته  $2S_{1/2}$  دارای تک نوکلئون است. همچنین بسیاری از حالت‌های برانگیخته متعدد دیگری نیز وجود دارد که بدون توضیح می‌ماند.

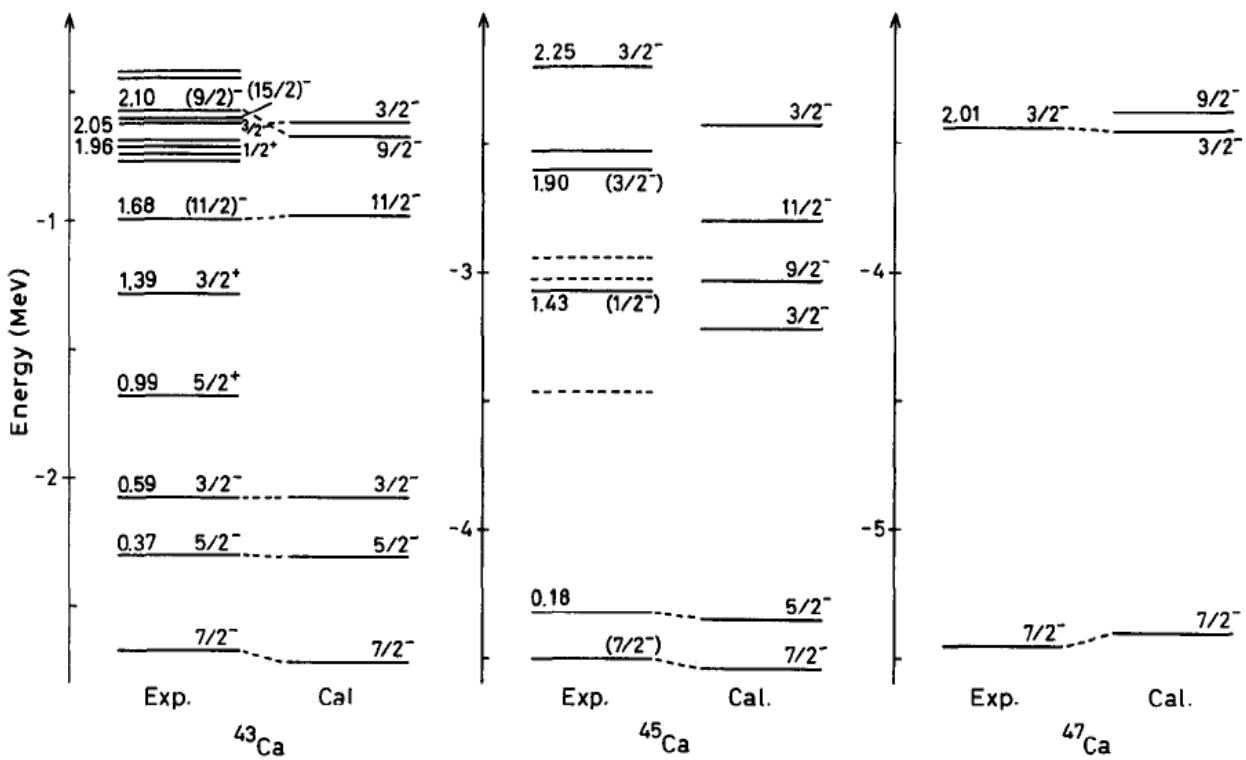


شکل (۸-۲) برخی از حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۱ [۶].

حالت پایه کلسیم ۴۳ پس از بخش مرکزی جادویی ( $Z=20$  و  $N=23$ ) شامل سه نوکلئون منفرد می‌باشد. بنابراین، نمودار حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۳ را که در نتایج کار تالمی است به همراه نمودار حالت‌های برانگیخته ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۲ و ۴۴ تا ۴۷ مشاهده می‌کنید. در این کار تالمی، به مطالعه برهم‌کنش‌های موثر در مدل لایه‌ای برای ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۲ تا ۴۷ پرداخته است. سپس محققان دیگر نتایج به دست آمده با داده‌های تجربی (نمودار زیر) مقایسه کردند، که از تطابق خوبی برخوردار است [۳۹].



شکل (۹-۲) سطوح انرژی ایزوتوپ کلسیم ۴۲ و ۴۴ و ۴۶ به صورت تجربی و تئوری [۳۹].



شکل (۱۰-۲) سطوح انرژی ایزوتوپ کلسیم ۴۳ و ۴۵ و ۴۷ به صورت تجربی و تئوری [۳۹].

جدول (۴-۲) انرژی بستگی (حالت برانگیخته) ایزوتوپ‌های کلسیم از کارهای دیگران و مقایسه با مقادیر تجربی [۳۹].

$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X_N$	اسپین و پاریته	$E_{\text{exp}} \text{ (MeV)}$	$E_{\text{cal}} \text{ (MeV)}$
$\begin{matrix} 42 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{22}$	$(0)^+$	۰	-۳/۱۱۵
	$(2)^+$	۱/۵۲	-۱/۴۷۳
	$(4)^+$	۲/۷۵	-۰/۳۳۵
$\begin{matrix} 43 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{23}$	$(3/2)^-$	۰/۵۹	-۲/۰۷۶
	$(5/2)^-$	۰/۳۷	-۲/۳۱۱
	$(7/2)^-$	۰	-۲/۷۲۱
	$(9/2)^-$	۲/۱۰	-۰/۶۷۲
	$(11/2)^-$	۱/۶۸	-۰/۹۷۸
$\begin{matrix} 44 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{24}$	$(0)^+$	۰	-۵/۳۴۲
	$(4)^+$	۲/۸۶	-۲/۴۷۲
	$(6)^+$	۳/۳۰	-۲/۱۳۲
$\begin{matrix} 45 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{25}$	$(5/2)^-$	۰/۱۸	-۴/۳۴۳
	$(7/2)^-$	۰	-۴/۵۳۸
$\begin{matrix} 46 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{26}$	$(0)^+$	۰	-۶/۶۲۶
	$(2)^+$	۱/۳۵	-۵/۲۴۵
$\begin{matrix} 47 \\ 20 \end{matrix} \text{Ca}_{27}$	$(3/2)^-$	۲/۰۱	-۳/۴۵۵
	$(7/2)^-$	۰	-۵/۳۹۸



## فصل سوم

روش های تحلیلی حل مسأله

و مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ های کلسیم

### ۳-۱ مقدمه

در دهه‌های گذشته ایزوتوپ‌های کلسیم به صورت گسترده‌ای به لحاظ تجربی و تئوری مورد بررسی قرار گرفته‌اند (اطلاعات به دست آمده از ویژگی‌های کلسیم که در فصل ۲ مشاهده کردیم، دلیلی بر اهمیت ایزوتوپ‌های کلسیم است). کلسیم ۴۱ و ۴۳ هسته‌هایی هستند که دارای تعداد پروتون و نوترون زوج - فرد می‌باشد. که کلسیم ۴۱ و کلسیم ۴۳ هر کدام به ترتیب دارای تک نوکلئون منفرد و سه نوکلئون منفرد می‌باشند. این مطلب به موضوع مهمی برای مطالعه نیروی دوجسمی و سه جسمی تبدیل شده است تا بتوان به بررسی این ایزوتوپ‌ها پرداخت. در این پایان‌نامه ما با بررسی طیف انرژی ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۱ و کلسیم ۴۳ که نوترون و پروتون آن‌ها تا تراز  $1d_{3/2}$  پر می‌باشد، بنابراین تراز  $1d_{3/2}$  به عنوان پوسته کامل در نظر گرفته‌ایم. سپس به بررسی ایزوتوپ کلسیم ۴۱ از مدل لایه‌ای ذره خیلی مستقل و ایزوتوپ کلسیم ۴۳ از مدل لایه‌ای کامل استفاده می‌کنیم و با استفاده از مختصات ژاکوبی و روش تحلیلی  $^1NU$ ، انرژی حالت پایه و برانگیخته و جذر میانگین مربع شعاع باری را برای این ایزوتوپ‌ها محاسبه می‌کنیم. در این پایان‌نامه با توجه به دغدغه اصلی‌مان برای انتخاب پتانسیل مناسبی که نمایش دهنده برهم‌کنش میان نوکلئون‌ها باشد، با توجه به ویژگی‌های پتانسیل هسته‌ای مناسب، پتانسیل شبه هلمن را انتخاب نمودیم. پتانسیل شبه هلمن از دو جمله تشکیل شده است: پتانسیل شبه کولنی که بستگی ساده‌ای به فاصله دارد، و پتانسیل شبه یوکاوا که همانند یوکاوا تابع نمایی از فاصله است. پتانسیل شبه هلمن را به صورت زیر معرفی می‌کنیم [۴۰, ۴۱]:

$$v(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-\alpha x} \quad (۱-۳)$$

سپس سعی نمودیم جابه‌جایی ترازهای انرژی را با استفاده از اثرات اسپین - مدار بررسی کنیم. در مرحله بعدی به تفسیر حالت‌های برانگیخته این ایزوتوپ‌ها می‌پردازیم و انرژی حالت‌های برانگیخته

---

<sup>1</sup> The Nikiforov – Uvarov

آن‌ها را محاسبه می‌نمائیم. در انتها طیف انرژی معادله دیراک را با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی توسط پتانسیل شبه هلمن به دست آوردیم.

### ۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی<sup>۱</sup>

در یک سیستم دو نوکلئونی کمیت‌هایی که نیرو به آن‌ها وابسته است عبارتند از:  $r_{12}$  یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ۲ ارتباط می‌دهد،  $P_{12} = P_2 - P_1$  یعنی تکانه نسبی آنها و  $S$  که اسپین کل است و تکانه زاویه‌ای مداری آنها یعنی  $L = r_{12} \times p_{12}$ . حال اگر سیستم مورد مطالعه ما یک سیستم  $A$  ذره‌ای باشد در این صورت معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان آن به صورت  $H\psi = E\psi$  نوشته می‌شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می‌شود [۴۲، ۴۳]:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left( \frac{p_i}{2m_i} + V(r) + V(r_i, r_j) \right) \quad (2-3)$$

$i \neq j$  به این معنا که: هیچ ذره‌ای با خودش برهم‌کنش ندارد.

$i < j$  از نوشتن جملات تکراری صرفنظر می‌شود.

$V(r_i)$  پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می‌شود، مثلاً وقتی ذره‌ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان‌های خارجی بر روی ذره را در  $V(r_i)$  مشاهده می‌کنیم.  $V(r_i, r_j)$  این جمله شامل برهم‌کنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل معادلات نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسأله داریم. یکی از این دستگاه‌های مختصات که برای مجموعه‌ای  $A$  ذره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، مختصات ژاکوبی می‌باشد. برای یک سیستم  $A$  ذره‌ای می‌توان  $N = A - 1$  بردار ژاکوبی و در نتیجه  $3N$  مختصه ژاکوبی تعریف کرد و در هر تعریف هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می‌کند [۲۸]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئون‌ها باشند می‌توان با چشم پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سیستم را هم جرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی می‌توان  $N$  بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۴۴].

<sup>1</sup> Jacobi Coordinates

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i-r_{i+1}+1}} \left( \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j \right) \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (3-3)$$

$\vec{\xi}_i$  بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای  $A$  هر ذره به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R = \frac{1}{A} (r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} r_i \quad (4-3)$$

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j = dx \quad (5-3)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان‌هایی از فاصله نسبی آن‌ها باشند می‌توان آن‌ها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌گویند.

### ۳-۳ کلیات روش NU

این روش براساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه‌ریزی شده است [۴۶، ۴۵]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، معادله  $s = s(r)$  تبدیل یافته را به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0 \quad (6-3)$$

که  $\sigma$  و  $\tilde{\sigma}$  چند جمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه دوم و  $\tilde{\tau}$  یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه اول است. با در نظر گرفتن تابع موج  $\Psi_n(s)$  به صورت:

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (7-3)$$

معادله‌ی (۷-۳) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می‌شود؛ [۴۵، ۴۶]

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (8-3)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad , \quad \tau' < 0 \quad (9-3)$$

چند جمله‌ای  $\tau(s)$  با علامت پریم نشان می‌دهد که باید مشتق مرتبه اولش منفی باشد و  $\lambda$  پارامتری است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۵,۴۶].

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad n=0,1,2,\dots \quad (10-3)$$

باید به این نکته توجه کرد که  $\lambda$  و  $\lambda_n$  از یک جواب خاص، شکل  $y(s) = y_n(s)$  که چند جمله‌ای درجه  $n$  است به دست می‌آیند، بعلاوه این که جمله  $y_n(s)$  تابع موج معادله (۷-۳)، یک تابع از نوع فوق هندسی که از رابطه ردیگز ذیل به دست می‌آید [۴۵,۴۶]

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (11-3)$$

که در آن  $B_n$  ثابت نرمالیزاسیون است و  $\rho(s)$  تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند.

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (12-3)$$

تابع  $\pi(s)$  و پارامتر  $\lambda$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۵,۴۶].

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (13-3)$$

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (14-3)$$

از آنجایی که باید  $\pi(s)$  حداکثر یک چند جمله‌ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله (۱۲-۳) باید به صورت یک چند جمله‌ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده آن،  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای  $K$  به دست می‌آید که پس از حل معادله، مقادیر به دست آمده برای  $K$  را در معادله (۱۳-۳) جایگذاری می‌کنیم و از مقایسه با معادلات (۱۰-۳) و (۱۴-۳) ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم.

### ۳-۴ محاسبه انرژی حالت پایه کلسیم ۴۳

برای محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج - فرد یکی از این ایزوتوپ‌ها یعنی کلسیم ۴۳ را در نظر می‌گیریم، برای کلسیم ۴۳ نیز مانند ایزوتوپ‌های زوج - زوج نوکلئون‌ها را در تراز جداگانه چیدیم و بدین صورت پروتون‌ها تا تراز  $1d_{3/2}$  پر می‌شوند و نوترون‌ها نیز تا تراز  $1d_{3/2}$  پر می‌شوند که در تراز بعدی  $1f_{7/2}$  سه نوترون منفرد داریم. برای محاسبه انرژی حالت پایه این هسته، با این فرض مسئله را حل می‌کنیم سیستم مورد بررسی ما یک سیستم سه جسمی متشکل از یک پوسته کامل (تراز  $1d_{3/2}$  را به عنوان پوسته کامل در نظر گرفتیم) به علاوه سه نوترون منفرد در خارج از بخش مرکزی جادویی است. در این کار، سعی نمودیم با استفاده از پتانسیل شبه هلمن به محاسبه انرژی حالت پایه و ویژه توابع آن پردازیم. بنابراین می‌توان با استفاده از تبدیلات مختصات ژاکوبی که به صورت زیر بیان می‌شود برای سیستمی متشکل از  $N$  ذره با جرم یکسان معادله شرودینگر را حل کرد.

$$\bar{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}'_j - \bar{x}'_{i+1} \right), \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (15-3)$$

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}'_1 - \bar{x}'_2) \quad (16-3)$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 - 2\bar{x}'_3) \quad (17-3)$$

$$R = \frac{\bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 + \bar{x}'_3}{3} \quad (18-3)$$

در این صورت می‌توانیم فوق شعاع ( که در آن  $X$  ابر شعاع می‌باشد) را به صورت زیر مشخص کنیم.

$$x = \sqrt{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2} \quad (19-3)$$

از طرفی معادله شرودینگر در  $D$  بعد ( $D = 3N - N$ ) با رابطه زیر نمایش داده می‌شود [۴۲]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_D^2 + V(x) - E\right)\psi(x) = 0 \quad (۲۰-۳)$$

که در آن عملگر لاپلاسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۴۲]

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D-1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1(D-2)}{x^2} \quad (۲۱-۳)$$

لذا قسمت شعاعی معادله شرودینگر با جای‌گذاری پتانسیل شبه هلمن به صورت رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \left( -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-\alpha x} \right) - \frac{\hbar^2 1(D-2)}{2\mu x^2} \right] R = 0 \quad (۲۲-۳)$$

برای انجام حل تحلیلی معادله شرودینگر با این پتانسیل، سعی می‌کنیم با استفاده از بسط تیلور پتانسیل ارائه شده به این هدف دست یابیم.

$$v(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-\alpha x} \approx -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} (1 - \alpha x) \quad (۲۳-۳)$$

و  $a$  و  $b$  مقادیر ثابت است و  $x$  آن فوق شعاع است، که از مختصات ژاکوبی در رابطه (۳-۱۹) به دست می‌آید و سپس با قرار دادن پتانسیل بسط داده شده در معادله شرودینگر خواهیم داشت:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{(D-1)}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E x^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} x(-a - \alpha b) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( b + \frac{1(D-2)\hbar^2}{2\mu} \right) \right) R = 0 \quad (۲۴-۳)$$

برای حل تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} E = -\varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0) \quad (۲۵-۳)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (-a - \alpha b) = \beta \quad (۲۶-۳)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left( b + \frac{1(D-2)\hbar^2}{2\mu} \right) = \gamma \quad (۲۷-۳)$$

در این صورت معادله (۳-۲۴) به شکل (۳-۲۸) تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} [-\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma] R = 0 \quad (۳-۲۸)$$

با توجه به روش NU می‌توانیم با مقایسه روابط (۳-۸) و (۳-۲۸) به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\tilde{\tau} = D - 1 \quad \sigma = x \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma \quad (۳-۲۹)$$

بنابراین از معادله (۳-۱۳)،  $\pi(x)$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\pi(x) = \frac{2-D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 x^2 + 4(\beta + k)x + \delta_1} \quad (۳-۳۰)$$

که در آن  $\delta_1 = 4\gamma + (2-D)^2$  است. از معادله فوق با توجه به اینکه زیر رادیکال مجذور یک چند جمله‌ای درجه اول باشد،  $K$  را تعیین می‌کنیم و در ادامه مقدار مناسب  $\pi(x)$  را که شرط  $\tau' < 0$  را برآورده می‌کند انتخاب می‌کنیم

$$(i) \pi(x) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon x + \delta_1^{1/2}] \quad k_1 = -\beta + \varepsilon \delta_1^{1/2} \quad (۳-۳۱)$$

$$(ii) \pi(x) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon x - \delta_1^{1/2}] \quad k_2 = -\beta - \varepsilon \delta_1^{1/2} \quad (۳-۳۲)$$

بنابراین برای حالت (i) از معادله (۳-۹)،  $\tau(x)$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\tau(x) = -2\varepsilon x + (1 - \delta_1^{1/2}) \quad (۳-۳۳)$$

بعد از محاسبه  $\tau(x)$  و از تساوی  $\lambda = \lambda_n$  برای هر حالت می‌توانیم ویژه مقادیر انرژی را به دست آوریم

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (۳-۳۴)$$

$$\lambda = -\beta + \varepsilon(\delta_1^{1/2} - 1) \quad (۳-۳۵)$$

بنابراین  $\lambda = \lambda_n$  داریم



$$2n\varepsilon = -\beta + \varepsilon(\delta_1^{1/2} - 1) \quad (36-3)$$

و در نهایت از معادله فوق می‌توانیم  $\varepsilon$  را به دست آوریم

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{\left[-\delta_1^{1/2} + (2n+1)\right]} \quad (37-3)$$

با توجه به رابطه (3-25) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر داریم

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{\left[\delta_1^{1/2} - (2n+1)\right]^2} \quad (38-3)$$

به همین ترتیب برای حالت (ii) ، با تکرار فرایند بالا ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم. از معادله

$$\tau(x) \quad (3-9) \quad \text{، را به صورت زیر به دست می‌آوریم}$$

$$\tau = -2\varepsilon x + (1 + \delta_1^{1/2}) \quad (39-3)$$

و از معادلات (3-10) و (3-14)  $\lambda, \lambda_n$  را محاسبه می‌کنیم

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (40-3)$$

$$\lambda = -\beta - \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (41-3)$$

$$\lambda = \lambda_n \quad (42-3)$$

$$2n\varepsilon = -\beta - \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (43-3)$$

و بدین ترتیب  $\varepsilon$  را به دست می‌آوریم

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{\left[\delta_1^{1/2} + (2n+1)\right]} \quad (44-3)$$

و مجدداً با استفاده از روابط (3-25) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\beta^2}{\left[\delta_1^{1/2} + (2n+1)\right]^2} \quad (45-3)$$

که با جایگذاری عبارات مربوط به  $\delta_1^{1/2}$ ،  $\beta$  معادله انرژی به شکل ساده شده زیر در می آید

$$E_n = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(-a - \alpha b)^2}{\left[ \sqrt{\frac{8\mu}{\hbar^2} b + 4l(1+D-2) + (2-D)^2} + (2n+1) \right]^2} \quad (46-3)$$

اکنون در ادامه این بخش ویژه توابع وابسته به ویژه مقادیر را به دست می آوریم

$$\ln(\phi(x)) = \int \frac{\pi(x)}{\sigma(x)} dx \quad (47-3)$$

با جایگذاری مقدار  $\pi(x), \sigma(x)$  در رابطه فوق و با اندکی عملیات جبری ساده  $\phi(x)$  را در هر حالت محاسبه می کنیم.

$$(i) \phi(x) = x^{-1/2 [-(2-D)+\delta_1^{1/2}]} e^{-\epsilon x} \quad (48-3)$$

$$(ii) \phi(x) = x^{1/2 [(2-D)+\delta_1^{1/2}]} e^{-\epsilon x} \quad (49-3)$$

از طرفی از معادله (۱۲-۳) داریم

$$\ln(\omega(x)) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \quad (50-3)$$

لذا برای حالت (i) با جایگذاری  $\tau(x), \sigma(x)$  مقدار  $\omega(x)$  را به صورت زیر به دست می آوریم .

$$\omega(x) = x^{(1-\delta_1^{1/2})} e^{-2\epsilon x} \quad (51-3)$$

و همچنین تابع وزنی را با توجه به  $\rho(x) = \frac{\omega(x)}{\sigma(x)}$  می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\rho(x) = x^{(-\delta_1^{1/2})} e^{-2\epsilon x} \quad (52-3)$$

از معادله (۱۱-۳)،  $y_n(x)$  را به صورت زیر می نویسیم

$$y_n = B_n x^{(\delta_1^{1/2})} e^{2\epsilon x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{(n-\delta_1^{1/2})} e^{-2\epsilon x}) \quad (53-3)$$

نمایش چند جمله‌ای ردیگرز توابع وابسته لاگر را به صورت زیر داریم [۴۷]

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \quad (54-3)$$

از مقایسه بین این دو معادله (۵۳-۳) و (۵۴-۳) با در نظر گرفتن  $k = -\delta_1^{1/2}$  و  $x = 2\epsilon x$  داریم:

$$y_n = B_n n! L_n^{(-\delta_1^{1/2})} (2\epsilon x) \quad (55-3)$$

به همین صورت برای حالت (ii) با جایگذاری  $\tau(x), \sigma(x)$  مقدار  $\omega(x)$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\omega(x) = x^{(\delta_1^{1/2}+1)} e^{-2\epsilon x} \quad (56-3)$$

$$\rho(x) = \frac{\omega(x)}{\sigma(x)} = x^{\delta_1^{1/2}} e^{-2\epsilon x} \quad (57-3)$$

و در نهایت از معادله (۱۱-۳) به رابطه زیر می‌رسیم

$$(ii) y_n(x) = B_n x^{-\delta_1^{1/2}} e^{2\epsilon x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\delta_1^{1/2}} e^{-2\epsilon x}) \quad (58-3)$$

و با مقایسه با نمایش چند جمله‌ای ردیگرز توابع وابسته لاگر و با در نظر گرفتن  $k = \delta_1^{1/2}$  و  $x = 2\epsilon x$  می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$y_n(x) = B_n n! L_n^{\delta_1^{1/2}} (2\epsilon x) \quad (59-3)$$

لذا با توجه به معادله (۷-۳) تابع موج شعاعی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(i) R_{n,l} = B_{n,l} n! x^{\frac{-(2-D)+\delta_1^{1/2}}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{-\delta_1^{1/2}} (2\epsilon x) \quad (60-3)$$

$$(ii) R_{n,l} = B_{n,l} n! x^{\frac{((2-D)+\delta_1^{1/2})}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_1^{1/2}} (2\epsilon x) \quad (61-3)$$

توابع موج به دست آمده دو جواب از معادله دیفرانسیلی درجه دو هستند لذا ترکیب خطی آن‌ها را به صورت جواب کل در نظر می‌گیریم بنابراین :

$$R(x) = B_n^i R^{(i)}(x) + B_n^{ii} R^{(ii)}(x) \quad (62-3)$$

از طرفی با توجه به رابطه (3-60) تابع موج  $R^i(x)$  در  $x \rightarrow 0$  بی‌نهایت می‌شود، بنابراین  $B_n^i = 0$  در نظر می‌گیریم، از طرفی با توجه به رابطه (3-61) برای اینکه تابع موج  $R^{ii}(x)$  در  $x \rightarrow 0$  بی‌نهایت نشود باید  $\delta_1^{1/2} > 4$  باشد در غیر این صورت  $x$  دارای توان منفی خواهد شد و هنگامیکه  $x$  به سمت صفر میل کند تابع موج را بی‌نهایت می‌کند. بنابراین ویژه مقادیر و ویژه توابع به دست آمده در حالت (ii) با شرط  $\delta_1^{1/2} > 4$  جواب‌های قابل قبول مسئله هستند. این شرط ما را در تعیین مقدار ثابت  $B$  در پتانسیل در نظر گرفته شده یاری می‌رساند. سپس ضریب بهنجارش از طریق رابطه  $\int_0^\infty x^2 [R_{n,l}(x)]^2 dx = 1$  تعیین می‌شود. بنابراین در چند جمله‌ای‌های وابسته لاگر باید  $\delta_1 > -1$  و یک عدد صحیح باشد، از طرفی برای واگرا نشدن تابع موج (3-62) در  $x \rightarrow 0$  باید  $\delta_1^{1/2} > 4$  هم باشد، به منظور برآورده شدن این شرایط را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\delta_1^{1/2} = \sqrt{1+4\gamma} = N \quad N = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (63-3)$$

بنابراین با جایگذاری  $\delta_1^{1/2} = 1+5$  در روابط (3-45)، (3-46)، (3-61) شکل تبدیل یافته این روابط را می‌نویسیم. سپس ویژه مقادیر انرژی و ویژه تابع آن از روابط به دست آمده محاسبه می‌کنیم

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[2n+1+6]^2} \quad (64-3)$$

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{[2n+1+6]} \quad (65-3)$$

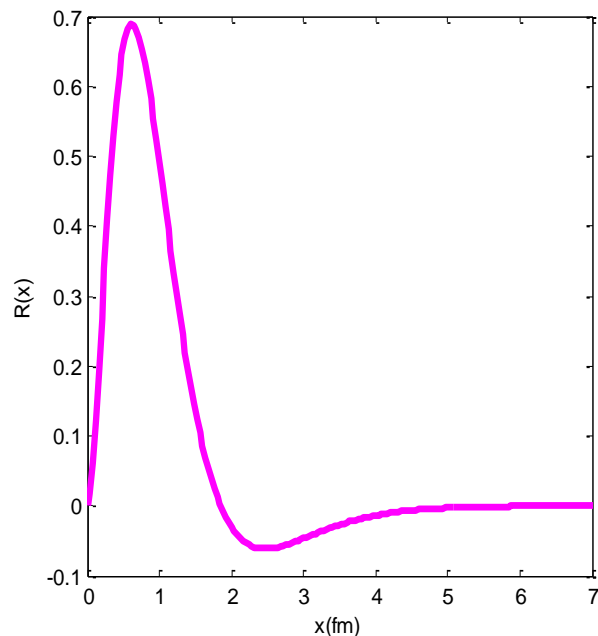
$$R_{n,l} = B_{n,l} n! x^{\frac{(l+1)}{2}} e^{-\varepsilon x} L_n^{l+5}(2\varepsilon x) \quad (66-3)$$

در جدول (۱-۳) مقادیر عددی انرژی حالت پایه ایزوتوپ کلسیم ۴۳ بر حسب محاسبات به دست آمده از رابطه (۳-۶۴) به صورت زیر است.

جدول (۱-۳) ویژه مقادیر انرژی حالت پایه  ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  به ازای مقادیر مختلف.

${}^A_Z\text{X}_N$	$\alpha(\text{fm})^{-1}$	$a(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$b(\text{MeV}\cdot\text{fm}^2)$	$E_{\text{cal}}(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [30]$
${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	۰/۰۰۹	۱۶۶۶	-۲۸۷	۳۶۸/۸۲۹۱۰۰	۳۶۹/۸۳۳۰۰
	۰/۰۰۹	۱۶۶۹	-۶۲۱	۳۶۸/۸۲۶۵۰۰	
	۰/۰۰۸	۱۶۶۷	-۴۱۵	۳۶۸/۹۴۵۸۰۰	
	۰/۰۰۷	۱۶۶۶	-۴۳۲	۳۶۸/۸۲۳۸۰۰	
	۰/۰۰۶	۱۶۶۶	-۴۳۲	۳۶۸/۸۲۵۱۰۰	

نمودار تابع موج حالت پایه  ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  با استفاده از پتانسیل شبه هلمن در شکل (۱-۳) نشان داده شده است.



شکل (۱-۳) تابع موج حالت پایه  ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  با استفاده از پتانسیل شبه هلمن.

### ۳-۵ محاسبه انرژی حالت پایه کلسیم ۴۱

برای محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج - فرد یکی از این ایزوتوپ‌ها یعنی کلسیم ۴۱ را در نظر می‌گیریم، برای کلسیم ۴۱ نیز مانند ایزوتوپ‌های زوج - زوج نوکلئون‌ها را در تراز جداگانه چیدیم و بدین صورت پروتون‌ها تا تراز  $1d_{3/2}$  پر می‌شوند و نوترون‌ها تا تراز  $1d_{3/2}$  پر می‌شوند که در تراز بعدی  $1f_{7/2}$  یک نوترون منفرد داریم. برای محاسبه انرژی حالت پایه کلسیم ۴۱، با این فرض مسئله را حل می‌کنیم که سیستم مورد بررسی ما از یک پوسته کامل (تراز  $1d_{3/2}$  را به عنوان پوسته کامل در نظر گرفتیم) به علاوه یک نوترون منفرد تشکیل شده است. لذا سعی نمودیم با استفاده از پتانسیل شبه هلمن به محاسبه انرژی حالت پایه و ویژه توابع آن بپردازیم.

پتانسیل شبه هلمن به صورت زیر می‌باشد [۴۰، ۴۱]:

$$v(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} \quad (۳-۶۷)$$

لذا قسمت شعاعی معادله شرودینگر با جایگذاری پتانسیل شبه هلمن به صورت رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \left( -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} \right) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R = 0 \quad (۳-۶۸)$$

برای انجام حل تحلیلی معادله شرودینگر با این پتانسیل، سعی می‌کنیم با استفاده از بسط تیلور پتانسیل ارائه شده به این هدف دست یابیم.

$$v = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} \approx -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} (1 - \alpha r) \quad (۳-۶۹)$$

سپس با قرار دادن پتانسیل بسط داده شده در معادله شرودینگر خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E r^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} r(-a - \alpha b) - \frac{2\mu}{\hbar^2} (b + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu}) \right) R = 0 \quad (۳-۷۰)$$

برای حل تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} E = -\varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0) \quad (71-3)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (-a - \alpha b) = \beta \quad (72-3)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left( b + \frac{1(1+1)\hbar^2}{2\mu} \right) = \gamma \quad (73-3)$$

در این صورت معادله (۷۰-۳) به شکل (۷۴-۳) تبدیل می‌شود.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} [-\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma] R = 0 \quad (74-3)$$

با توجه به روش NU می‌توانیم با مقایسه روابط (۶-۳) و (۷۴-۳) به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\tilde{\tau} = 2 \quad \sigma = r \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 r^2 - \beta r - \gamma \quad (75-3)$$

بنابراین از معادله (۱۳-۳)  $\pi(r)$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 r^2 + 4(\beta + k)r + \delta_1} \quad (76-3)$$

که در آن  $\delta_1 = 4\gamma + 1$  است. از معادله فوق با توجه به اینکه زیر رادیکال مجذور یک چند جمله‌ای درجه اول باشد،  $K$  را تعیین می‌کنیم و در ادامه مقدار مناسب  $\pi(r)$  را که شرط  $\tau' < 0$  را برآورده می‌کند را انتخاب می‌کنیم

$$(i) \pi(r) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon r + \delta_1^{1/2}] \quad k_1 = -\beta + \varepsilon \delta_1^{1/2} \quad (77-3)$$

$$(ii) \pi(r) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon r - \delta_1^{1/2}] \quad k_2 = -\beta - \varepsilon \delta_1^{1/2} \quad (78-3)$$

بنابراین برای حالت (i) از معادله (۹-۳)،  $\tau(r)$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\tau(r) = -2\varepsilon r + (1 - \delta_1^{1/2}) \quad (79-3)$$

بعد از محاسبه  $\tau(r)$  و از تساوی  $\lambda = \lambda_n$  برای هر حالت می‌توانیم ویژه مقادیر انرژی را به دست آوریم

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (۸۰-۳)$$

$$\lambda = -\beta + \varepsilon(\delta_1^{1/2} - 1) \quad (۸۱-۳)$$

بنابراین  $\lambda = \lambda_n$  داریم

$$2n\varepsilon = -\beta + \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (۸۲-۳)$$

و در نهایت از معادله فوق می‌توانیم  $\varepsilon$  را به دست آوریم

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{[-\delta_1^{1/2} + (2n+1)]} \quad (۸۳-۳)$$

با توجه به رابطه (۷۱-۳) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر داریم

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[\delta_1^{1/2} - (2n+1)]^2} \quad (۸۴-۳)$$

به همین ترتیب برای حالت (ii)، با تکرار فرایند بالا ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم. از

معادله (۹-۳)،  $\tau(r)$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\tau = -2\varepsilon r + (1 + \delta_1^{1/2}) \quad (۸۵-۳)$$

و از معادلات (۱۰-۳) و (۱۴-۳)  $\lambda, \lambda_n$  را محاسبه می‌کنیم

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (۸۵-۳)$$

$$\lambda = -\beta - \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (۸۶-۳)$$

$$\lambda = \lambda_n \quad (۸۷-۳)$$

$$2n\varepsilon = -\beta - \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (۸۸-۳)$$

و بدین ترتیب  $\varepsilon$  را به دست می‌آوریم



$$\varepsilon = \frac{-\beta}{\left[\delta_1^{1/2} + (2n+1)\right]} \quad (۸۹-۳)$$

و مجدداً با استفاده از روابط (۷۱-۳) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{\left[\delta_1^{1/2} + (2n+1)\right]^2} \quad (۹۰-۳)$$

که با جایگذاری عبارات مربوط به  $\delta_1^{1/2}$ ,  $\beta$  معادله انرژی به شکل ساده شده زیر در می آید

$$E_n = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(-a - \alpha b)^2}{\left[\sqrt{\frac{8\mu}{\hbar^2} b + 4l(l+1) + 1} + (2n+1)\right]^2} \quad (۹۱-۳)$$

اکنون در ادامه این بخش ویژه توابع وابسته به ویژه مقادیر را به دست می آوریم

$$\ln(\phi(r)) = \int \frac{\pi(r)}{\sigma(r)} dr \quad (۹۲-۳)$$

با جایگذاری مقدار  $\pi(r), \sigma(r)$  در رابطه فوق و با اندکی عملیات جبری ساده  $\phi(r)$  را در هر حالت محاسبه می کنیم.

$$(i)\phi(r) = r^{-1/2[1+\delta_1^{1/2}]} e^{-\varepsilon r} \quad (۹۳-۳)$$

$$(ii)\phi(r) = r^{1/2[\delta_1^{1/2}-1]} e^{-\varepsilon r} \quad (۹۴-۳)$$

از طرفی از معادله (۱۲-۳) داریم:

$$\ln(\omega(r)) = \int \frac{\tau(r)}{\sigma(r)} dr \quad (۹۵-۳)$$

لذا برای حالت (i) با جایگذاری  $\tau(r), \sigma(r)$  مقدار  $\omega(r)$  را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\omega(r) = r^{(1-\delta_1^{1/2})} e^{-2\varepsilon r} \quad (۹۶-۳)$$

و همچنین تابع وزنی را با توجه به  $\rho(r) = \frac{\omega(r)}{\sigma(r)}$  می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\rho(r) = r^{(-\delta_1^{1/2})} e^{-2\epsilon r} \quad (97-3)$$

از معادله (۱۱-۳)،  $y_n(r)$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y_n = B_n r^{(\delta_1^{1/2})} e^{2\epsilon r} \frac{d^n}{dr^n} (r^{(n-\delta_1^{1/2})} e^{-2\epsilon r}) \quad (98-3)$$

نمایش چند جمله‌ای ردیگرز توابع وابسته لاگر را به صورت زیر داریم [۴۷].

$$L_n^k(r) = \frac{e^r r^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dr^n} (e^{-r} r^{n+k}) \quad (99-3)$$

از مقایسه بین این دو معادله (۹۷-۳) و (۹۸-۳) با در نظر گرفتن  $k = -\delta_1^{1/2}$  و  $r = 2\epsilon r$  داریم:

$$y_n = B_n n! L_n^{(-\delta_1^{1/2})}(2\epsilon r) \quad (100-3)$$

به همین صورت برای حالت (ii) با جایگذاری  $\sigma(r)$ ,  $\tau(r)$  مقدار  $\omega(r)$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\omega(r) = r^{(\delta_1^{1/2}+1)} e^{-2\epsilon r} \quad (101-3)$$

$$\rho(r) = \frac{\omega(r)}{\sigma(r)} = r^{\delta_1^{1/2}} e^{-2\epsilon r} \quad (102-3)$$

و در نهایت از معادله (۱۱-۳) به رابطه زیر می‌رسیم

$$(ii) y_n(r) = B_n r^{-\delta_1^{1/2}} e^{2\epsilon r} \frac{d^n}{dr^n} (r^{n+\delta_1^{1/2}} e^{-2\epsilon r}) \quad (103-3)$$

و با مقایسه با نمایش چند جمله‌ای ردیگرز توابع وابسته لاگر و با در نظر گرفتن  $k = \delta_1^{1/2}$  و  $r = 2\epsilon r$

می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$y_n(r) = B_n n! L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon r) \quad (104-3)$$

لذا با توجه به معادله (۷-۳) تابع موج شعاعی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(i) R_{n,l} = B_{n,l} n! r^{-\frac{(\delta_1^{1/2}+1)}{2}} e^{-\epsilon r} L_n^{-\delta_1^{1/2}}(2\epsilon r) \quad (105-3)$$

$$(ii) R_{n,l} = B_{n,l} n! r^{\frac{(\delta_1^{1/2}-1)}{2}} e^{-\epsilon r} L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon r) \quad (106-3)$$

توابع موج به دست آمده دو جواب از معادله دیفرانسیلی درجه دو هستند لذا ترکیب خطی آن‌ها را به

صورت جواب کل در نظر می‌گیریم بنابراین :

$$R(r) = B_n^i R^{(i)}(r) + B_n^{ii} R^{(ii)}(r) \quad (107-3)$$

از طرفی با توجه به رابطه (۱۰۵-۳) تابع موج  $R^i(r)$  در  $r \rightarrow 0$  بی‌نهایت می‌شود، بنابراین

در  $B_n^i = 0$  در نظر می‌گیریم، از طرفی با توجه به رابطه (۱۰۶-۳) برای اینکه تابع موج  $R^{ii}(r)$  در

$r \rightarrow 0$  بی‌نهایت نشود باید  $\delta_1^{1/2} > 1$  باشد، در غیر این صورت  $r$  دارای توان منفی خواهد شد و

هنگامیکه  $r$  به سمت صفر میل کند تابع موج را بی‌نهایت می‌کند. بنابراین ویژه مقادیر و ویژه توابع

به دست آمده در حالت (ii) با شرط  $\delta_1^{1/2} > 1$  جواب‌های قابل قبول مسئله هستند. این شرط ما را در

تعیین مقدار ثابت  $B$  در پتانسیل در نظر گرفته شده یاری می‌رساند. سپس ضریب بهنجارش از

طریق رابطه  $\int_0^\infty r^2 [R_{n,l}(r)]^2 dr = 1$  و با توجه به شرط تعامد چند جمله‌ای‌های وابسته لاگر تعیین

می‌شود. در چند جمله‌ای‌های وابسته لاگر باید  $\delta_1 > -1$  و یک عدد صحیح باشد، از طرفی برای واگرا

نشدن تابع موج (۱۰۷-۳) در  $r \rightarrow 0$  باید  $\delta_1^{1/2} > 1$  هم باشد، به منظور برآورده شدن این شرایط را به

صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\delta_1^{1/2} = \sqrt{1+4\gamma} = N \quad N = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (108-3)$$

بنابراین با جایگذاری  $\delta_1^{1/2} = 1+2$  در روابط (۸۹-۳) ، (۹۰-۳) ، (۱۰۶-۳) شکل تبدیل یافته این

روابط را می‌نویسیم. سپس ویژه مقادیر انرژی و ویژه تابع آن از روابط به دست آمده محاسبه می‌کنیم.

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[2n+1+3]^2} \quad (109-3)$$

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{[2n+1+3]} \quad (110-3)$$

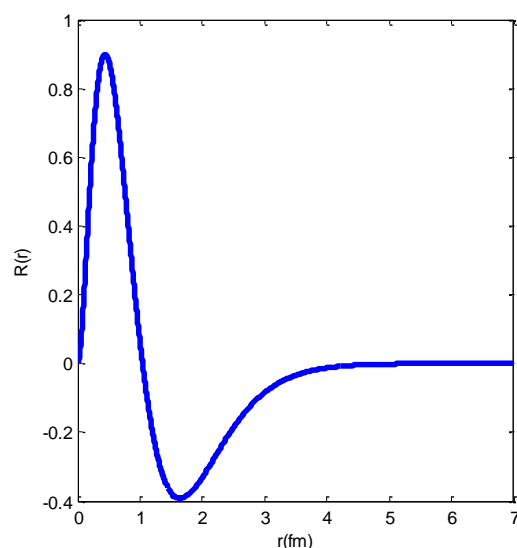
$$R_{n,l} = B_{n,l} n! r^{2(l+1)} e^{-\varepsilon r} L_n^{l+2}(2\varepsilon r) \quad (111-3)$$

در جدول (۲-۳) مقادیر عددی انرژی حالت پایه ایزوتوپ کلسیم ۴۱ بر حسب محاسبات به دست آمده از رابطه (۱۰۹-۳) به صورت زیر است.

جدول (۲-۳) ویژه مقادیر انرژی حالت پایه  ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  به ازای مقادیر مختلف .

${}^A_Z\text{X}_N$	$\alpha(\text{fm})^{-1}$	$a(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$b(\text{MeV}\cdot\text{fm}^2)$	$E_{\text{cal}}(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [35]$
${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	۰/۰۰۹	۹۵۸	-۵۳	۳۴۹/۴۰۹۴۰۰	۳۵۰/۴۱۴۸۰۰
	۰/۰۰۸	۹۵۸	-۶۰	۳۴۹/۴۰۷۲۰۰	
	۰/۰۰۷	۹۶۰	-۳۴۵	۳۴۹/۴۰۵۰۰۰	
	۰/۰۰۶	۹۵۹	-۲۴۷	۳۴۹/۴۰۵۸۰۰	
	۰/۰۰۵	۹۶۰	-۲۳۲	۳۴۹/۴۰۷۸۰۰	

نمودار تابع موج حالت پایه  ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  با استفاده از پتانسیل شبه هلمن در شکل (۲-۳) رسم شده است.



شکل (۲-۳) تابع موج حالت پایه  ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  با استفاده از پتانسیل شبه هلمن.

### ۳-۶ محاسبه جذر میانگین مربع شعاع باری کلسیم ۴۳ و کلسیم ۴۱

جذر میانگین مربع شعاع باری  $\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ ، برای ایزوتوپ‌های کلسیم با استفاده از رابطه (۲-۲۲) به دست آوردیم که به صورت رابطه (۳-۱۱۲) است [۲۰، ۳۴].

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\int \psi^*(r) r^2 \psi(r) d^3r}{\int \psi^*(r) \psi(r) d^3r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۱۱۲)$$

سپس نتایج محاسبات را در جدول (۳-۳) نشان دادیم.

جدول (۳-۳) مقدار جذر میانگین مربع شعاع باری  $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  و  $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$

$^A_Z X_N$	$\alpha(\text{fm})^{-1}$	$a(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$b(\text{MeV}\cdot\text{fm}^2)$	$r_{\text{cal}}(\text{fm})$	$r_{\text{exp}}(\text{fm}) [۳۵, ۳۷]$
$^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	۰/۰۰۹	۹۵۸	-۵۳	۳/۴۰	۳/۴۷
$^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	۰/۰۰۹	۱۶۶۶	-۲۸۷	۳/۴۵	۳/۴۹

### ۳-۷ جابه‌جایی ترازهای انرژی با استفاده از اثرات اسپین - مدار

در چند دهه اخیر، پتانسیل‌های نوکلئون - نوکلئون زیادی ارائه شده است. در فیزیک هسته‌ای برهم‌کنش اسپین - مدار از برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون ناشی می‌شود. بنابراین ما با توجه به انرژی به دست آمده از رابطه (۳-۱۰۹) و (۳-۶۴)، در این بخش به محاسبه مقادیر انرژی حاصل از جابه‌جایی ترازها با استفاده از اثرات اسپین - مدار در حضور پتانسیل شبه هلمن می‌پردازیم [۴۸، ۴۹].  
رابطه پتانسیل اسپین - مدار به صورت زیر است:

$$V_{\text{LS}} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} L \cdot S \quad (۳-۱۱۳)$$

با توجه به رابطه (۱-۱۴) در فصل ۱، با جایگذاری  $L$  و  $S$  مربوطه مقدار چشمداشتی اسپین - مدار را به دست آورده‌ایم.

$$\langle l_s \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2 \quad (114-3)$$

سپس با جایگذاری پتانسیل شبه هلمن در رابطه (3-113) می توان پتانسیل اسپین - مدار را به صورت زیر به دست آورد.

$$V_{LS} = \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \left( \frac{a}{r^3} - \frac{\alpha b}{r^3} e^{-\alpha r} - \frac{2b}{r^4} e^{-\alpha r} \right) \quad (115-3)$$

سپس با توجه به رابطه تابع موج به دست آمده در رابطه (3-61) و (3-110)، می توان مقادیر انرژی حاصل از جابه جای ترازها با استفاده از اثرات اسپین - مدار را طبق رابطه جابه جای ترازهای انرژی (در رابطه زیر) به دست آورد.

$$\Delta = \int R_{n,l}^*(r) V_{LS} R_{n,l}(r) d^3r \quad (116-3)$$

در جدول (3-4) مقادیر انرژی به دست آمده به ازای پارامترهای مختلف برای ایزوتوپ های کلسیم 41 و 43 نمایش دادیم.

جدول (3-4) مقادیر انرژی حاصل از جابه جای ترازها با استفاده از اثرات اسپین - مدار برای  $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  و  $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ .

$^A_Z X_N$	$\alpha (\text{fm})^{-1}$	$a (\text{MeV} \cdot \text{fm})$	$b (\text{MeV} \cdot \text{fm}^2)$	$E_{\text{cal}} (\text{MeV})$	$E_{\text{cal}+\Delta} (\text{MeV})$	$E_{\text{exp}} (\text{MeV}) [30,35]$
$^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	0/0.9	958	-53	349/409400	349/506400	350/414800
	0/0.9	958	-53	349/409400	349/419000	
	0/0.9	958	-53	349/409400	349/413800	
	0/0.9	958	-53	349/409400	349/411440	
	0/0.9	958	-53	349/409400	349/406817	
$^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	0/0.9	1666	-287	368/829100	368/886100	369/833000
	0/0.9	1666	-287	368/829100	368/860500	
	0/0.9	1666	-287	368/829100	368/830560	
	0/0.9	1666	-287	368/829100	368/838460	

### ۳-۸ حالت‌های برانگیخته هسته

همچنانکه از مطالعه حالت‌های برانگیخته اتمی اطلاعاتی از ساختار اتم‌ها به دست می‌آوریم، با توجه به حالت‌های برانگیخته هسته‌ای نیز می‌توانیم تا حدودی ساختار هسته‌ها را بشناسیم. حالت‌های برانگیخته هسته هم، مانند حالت‌های برانگیخته اتمی، ناپایدارند و سریعاً به حالت پایه بر می‌گردند. برانگیختگی اتم‌ها در اثر جابه‌جا کردن الکترون‌ها و رساندن آن‌ها به مدارهای انرژی بالاتر صورت می‌گیرد. همین کار را برای نوکلئون‌های موجود در هسته نیز می‌توان انجام داد. بدین ترتیب به کمک حالت‌های برانگیخته می‌توان بعضی از خصوصیات مداری نوکلئونی را در هسته‌ها نشان داد. بخشی از هدف طیف نمایی هسته‌ای، مشاهده حالت‌های قابل برانگیزش و اندازه‌گیری خواص آن‌هاست. از جمله نکاتی که در اندازه‌گیری خواص هر حالت برانگیخته باید در نظر گرفت، انرژی برانگیزش، طول عمر و مد واپاشی، اسپین پاریته، گشتاور دوقطبی مغناطیسی و گشتاور چار قطبی الکتریکی است. منشا تعداد کمی از حالت‌های برانگیخته را می‌توان تشخیص داد و فهمید که از برانگیختگی نوکلئون‌های ظرفیت تولید شده‌اند یا از برانگیختگی قلب هسته. این تشخیص هم فقط بعد از اندازه‌گیری تمامی خواص فوق‌الذکر و مقایسه آن‌ها با پیش‌بینی مبتنی بر محاسبات برانگیزش تک ذره‌ای و برانگیزش جمعی قلب هسته، و همچنین مشاهده سازگاری بین آزمایش و محاسبه، امکان پذیر می‌شود [۶].

### ۳-۸-۱ محاسبه انرژی حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۱

در تمام ایزوتوپ‌های کلسیم نحوه پر شدن ترازهای پروتونی یکسان است و فقط ترازهای نوترونی آن‌ها باهم متفاوت است (در فصل ۲ چندین حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۱ را توضیح دادیم). یکی از حالت‌های برانگیخته مجاز برای این ایزوتوپ حالت برانگیخته  $^{+}(1/2)$  است که می‌توان آن را بدین صورت توجیه کرد که تک نوترون پوسته  $1F_{7/2}$  به تراز  $3S_{1/2}$  می‌رود و بدین ترتیب پوسته  $3S_{1/2}$  دارای نوکلئون فرد می‌شود. بعد از بررسی برخی حالت‌های برانگیخته ممکن برای ایزوتوپ‌ها، به

منظور محاسبه انرژی حالت‌های برانگیخته سعی می‌کنیم با استفاده از روش محاسبه انرژی، میزان انرژی برانگیختگی برابر با میزان انرژی لازم برای رفتن به ترازهای نوکلئونی مشخصی است، لذا سعی کردیم انرژی حالت‌های برانگیخته را با توجه به تعداد نوکلئون‌های برانگیخته شونده در تراز معلوم و مشخصات تراز نوکلئونی که نوکلئون‌ها به آن منتقل شده و انرژی حالت برانگیخته را به دست آوریم که نتایج را به همراه ضرایب مناسب در جدول (۳-۵) و (۳-۶) نمایش داده‌ایم که در آن نتایج با مقادیر تجربی برگرفته (در جدول و نمودار فصل ۲ نشان دادیم) مقایسه شده است.

جدول (۳-۵) ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و انرژی حالت برانگیخته  $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ .

$^A_Z\text{X}_N$	n	l	$\alpha(\text{fm})^{-1}$	a (MeV.fm)	b (MeV.fm <sup>2</sup> )	$E_{\text{cal}}$ (MeV)	$E_{\text{exp}}$ (MeV) [۵۰]
$^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	۱	۳	۰/۰۰۹	۹۵۸	-۵۳	۳۴۹/۴۰۹۴۰۰	۳۵۰/۴۱۴۸۰۰
	۳	۰	۰/۰۰۹	۱۰۷۴	-۵۳	۳۴۷/۶۶۶۳۰۰	۳۴۷/۷۴۴۰۰

### ۳-۸-۲ محاسبه انرژی حالت‌های برانگیخته کلسیم ۴۳

یک حالت برانگیختگی برای این هسته در نظر گرفت شده حالت برانگیخته  $(1/2)^+$ ، که این حالت برانگیختگی بدین صورت است، یک نوترون از لایه  $1F_{7/2}$  به تراز  $3S_{1/2}$  می‌رود و بدین ترتیب پوسته  $3S_{1/2}$  دارای تک نوکلئون فرد می‌شود.

جدول (۳-۶) ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و حالت برانگیخته  $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ .

$^A_Z\text{X}_N$	n	l	$\alpha(\text{fm})^{-1}$	a (MeV.fm)	b (MeV.fm <sup>2</sup> )	$E_{\text{cal}}$ (MeV)	$E_{\text{exp}}$ (MeV) [۵۰، ۳۹]
$^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	۱	۳	۰/۰۰۹	۱۶۶۶	-۲۸۷	۳۴۹/۴۰۹۴۰۰	۳۵۰/۴۱۴۸۰۰
	۳	۰	۰/۰۰۹	۱۸۱۴	-۲۸۷	۳۶۷/۵۲۱۵۰۰	۳۶۷/۸۸۳۰۰



### ۳-۹ طیف انرژی معادله دیراک بادر نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی

معادله دیراک یکی از کامل‌ترین نمونه یک معادله نسبیتی است که می‌تواند یک سیستم نسبیتی از ذرات را با اسپین  $(1/2)$  توصیف کند. در سال‌های اخیر توجه قابل ملاحظه‌ای به حل معادله دیراک شده است. در حقیقت معادله دیراک برای برخی پتانسیل‌های محدودی به طور دقیق قابل حل می‌باشد. تحقیقاتی نیز در چند سال اخیر برای پتانسیل‌های نوسانگر هماهنگ و اکارت و وود - ساکسون انجام شده است [۵۷-۵۱]. همچنین روش‌های متفاوتی مانند ابر-تقارن و روش تحلیلی NU نیز برای حل این معادله در نظر گرفته شده است. که ما در اینجا از روش NU استفاده می‌کنیم [۴۶]. در حدود ۳۰ سال قبل یک شبه تبهگنی در هسته‌های سنگین در یک نوکلئون با اعداد کوانتومی جفت  $(n-1, l+2, j=1+\frac{3}{2})$  و  $(n, l, j=1+\frac{1}{2})$  مشاهده شد که در آن  $j, l, n$  اعداد کوانتومی شعاعی و مداری و تکانه زاویه‌ای کل هستند [۵۸, ۵۹]. این شبه تبهگنی پدیده‌های طبیعی در ساختار هسته شامل تغییر هسته و ابر تغییر هسته و گشتاور مغناطیسی و ترازهای یکسان را به خوبی توصیف می‌کند. به خاطر همین موفقیت‌ها تلاش‌های بسیاری برای کشف و درک منشأ این شبه تبهگنی انجام گرفته است [۶۰, ۶۱]. بر اساس تئوری  $(RMF^1)$  Ginocchio, این تقارن را حاصل یکسانی تقریبی در اندازه اسکالر پتانسیل جاذب  $S(r)$  و بردار پتانسیل دافع  $V(r)$  فرض کرده است [۶۲]. این تقارن منجر به ساده سازی و حل دقیق معادله دیراک می‌گردد.

### ۳-۹-۱ معادله اساسی دیراک با پتانسیل شبه هلمن

در توصیف نسبیتی معادله دیراک برای تک ذره ای به جرم  $M$  که تحت پتانسیل اسکالر جاذب  $S(r)$  و پتانسیل برداری دافع  $V(r)$  با در نظر گرفتن  $\hbar=c=1$  و تابع موج زیر به صورت رابطه‌های (۳-۱۱۸) و (۳-۱۱۹) می‌توان نوشت [۶۳]:

<sup>1</sup> Relativistic Mean Field

$$\psi_{n_r,k}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} F_{n_r,k}(r) & Y_{jm}^l(\theta, \phi) \\ iG_{n_r,k}(r) & Y_{jm}^l(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (117-3)$$

معادلات جفت شده دیراک برای بخش شعاعی به صورت زیر در می‌آید [۴۶]:

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F_{n_r,k}(r) = [M + E_{n_r,k} - V(r) + S(r)] G_{n_r,k}(r) \quad (118-3)$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) G_{n_r,k}(r) = [M - E_{n_r,k} + V(r) + S(r)] F_{n_r,k}(r) \quad (119-3)$$

معادلات جفت شده بالا را می‌توانیم با پیدا کردن یک تابع بر حسب دیگری و قرار دادن در یک

معادله دیگر بر حسب یک تابع به صورت زیر نوشت [۴۶]:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) + \frac{\frac{d\Delta}{dr} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right)}{M - E_{n_r,k} - \Delta(r)} \right) F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (120-3)$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) - \frac{\frac{d\Sigma}{dr} \left( \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right)}{M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)} \right) G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (121-3)$$

برای توجیه حالت تبهگنی در هسته‌های سنگین و در نظر گرفتن مقادیر مساوی به ازای پتانسیل‌های

اسکالر و برداری سعی شده که معادله دیراک با ازای این تساوی و تفاضل حل شود که در آن

$\Delta(r) = V(r) - S(r)$  و  $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$  می‌باشد. حالت اول را با تقارن اسپینی و حالت دوم را با

تقارن شبه اسپینی نشان می‌دهند.

### ۳-۹-۲ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی

این تقارن از نزدیکی مقدار دو پتانسیل جاذب و دافع ناشی می‌شود زیرا در پتانسیل میانگین نسبیتی

مقادیر  $V(r) \approx S(r)$  تقریباً یکسان است [۶۴]. تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی  $\Delta(r) = C_s$

می‌شود و معادله (۱۲۰-۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) \right) F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (122-3)$$

سپس با استفاده از پتانسیل شبه هلمن، به ازای تفاضل  $\Sigma(r)$  در نظر می‌گیریم. از آن جایی که معادله دیراک با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی‌باشد معمولاً از روش‌های تقریبی یا عددی برای حل آن استفاده می‌کنند. در اینجا ما از تقریب زیر برای حل مساله استفاده کردیم:

$$\Sigma(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r} = \frac{1}{r}(-a - b\alpha) + \frac{b}{r^2} \quad (123-3)$$

معادله (122-3) را با این تقریب باز نویسی می‌کنیم:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \left( M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s(M - E_{n_r,k}) + \left( M + E_{n_r,k} - C_s \left( \frac{1}{r}(-a - b\alpha) + \frac{b}{r^2} \right) \right) \right) \right) F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (124-3)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر داریم:

$$\begin{aligned} M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s(M - E_{n_r,k}) &= \varepsilon_{n_r,k} \\ (M + E_{n_r,k} - C_s) &= A \\ \varepsilon_{n_r,k} &= \tilde{E}_{n_r,k} \\ k(k+1) &= L^2 \end{aligned} \quad (125-3)$$

رابطه (124-3) به رابطه زیر تقلیل می‌یابد:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{L^2}{r^2} - \left( \tilde{E}_{n_r,k} + A \left( \frac{1}{r}(-a - b\alpha) + \frac{b}{r^2} \right) \right) \right) F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (126-3)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر خواهیم داشت:

$$F_{n_r,k}(r) = r S_{n_r,k}(r) \quad (127-3)$$

$$\frac{d^2 S_{n_r,k}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dS_{n_r,k}(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \left( -\tilde{E}_{n_r,k} r^2 - A(b + r(-a - b\alpha)) - L^2 \right) S_{n_r,k}(r) = 0 \quad (128-3)$$

معادله دیراک به روش‌های متفاوتی قابل حل می‌باشند و از طرف دیگر معادلات شرودینگر یکی از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستم‌های غیر نسبیتی و نسبیتی به کار می‌روند.

در این میان روش NU یکی از بهترین روش‌هایی است که می‌توان از آن برای حل این معادلات استفاده کرد.

از مقایسه روابط (۳-۱۲۸) و (۳-۶) خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau} = 2 \quad \sigma = r \quad \sigma^2 = r^2 \quad \tilde{\sigma} = -\tilde{E}_{n_r, k} r^2 - A(r(-a - b\alpha) + b) - L^2 \quad (۳-۱۲۹)$$

با جایگذاری عبارت‌های بالا در رابطه (۳-۱۳) خواهیم داشت:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\tilde{E}_{n_r, k} r^2 + r(A(-a - b\alpha) + k) + L^2 + Ab + \frac{1}{4}} \quad (۳-۱۳۰)$$

از معادله فوق با توجه به اینکه زیر رادیکال مجذور یک چند جمله‌ای درجه اول باشد، K را تعیین می‌کنیم سپس مقدار مناسب  $\pi(r)$  را که شرط  $\tau' < 0$  را برآورده می‌کند را انتخاب کرده، در معادله پایین  $\pi(r)$  که با توجه به k مورد نظر به دست آوردیم.

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} - \left( \sqrt{\tilde{E}_{n_r, k}} - \sqrt{L^2 + Ab + \frac{1}{4}} \right), \quad k = -A(-a - b\alpha) - 2\sqrt{\tilde{E}_{n_r, k}} \sqrt{L^2 + Ab + \frac{1}{4}} \quad (۳-۱۳۱)$$

با توجه به رابطه (۳-۸)،  $\tau'$  و  $\tau(r)$  به صورت زیر است:

$$\tau(r) = 1 - 2 \left( \sqrt{\tilde{E}_{n_r, k} r} - \sqrt{L^2 + \frac{1}{4} + Ab} \right), \quad \tau' = -2\sqrt{\tilde{E}_{n_r, k}} \quad (۳-۱۳۲)$$

با دنبال کردن روابط ترتیبی حل روش NU تابع موج حالت تقارن اسپینری سیستم نسبیتی را بر حسب توابع لاگر محاسبه می‌گردد:

$$\Psi_{n_r, k}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left[ \begin{array}{c} Y_{jm}^1(\theta, \phi) \\ \frac{i}{M + E_{n_r, k}} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right] Y_{jm}^1(\theta, \phi) \end{array} \right] F_{n_r, k}(r) \quad (۳-۱۳۳)$$

که مؤلفه بالایی تابع موج:

$$F_{n_r, k}(r) = N n! r^{-\frac{1}{2} + \sqrt{L^2 + Ab + \frac{1}{4}}} e^{-\sqrt{\tilde{E}_{n_r, k}} r} L_n^2 \sqrt{L^2 + Ab + \frac{1}{4}} \left( 2\sqrt{\tilde{E}_{n_r, k}} r \right) \quad (۳-۱۳۴)$$

با استفاده از رابطه (۳-۱۱۸) می توان مؤلفه پایینی تابع موج را به دست آورد، به صورت زیر است:

$$G_{n_r,k}(r) = \frac{1}{M + E_{n_r,k}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F_{n_r,k}(r) \quad (3-135)$$

با توجه به معادله (۳-۱۳۲)  $\tau(r)$  به دست آمده و از تساوی  $\lambda_n = \lambda$  برای هر حالت می توانیم ویژه مقادیر انرژی را به دست می آوریم:

$$E_{n_r,k} = \frac{1}{2} \left\{ C_s + \sqrt{C_s^2 - 4(-M^2 + MC_s) - \frac{4(A^2(a + b\alpha)^2)}{z}} \right\} \quad (3-136)$$

که در آن:

$$z = \left[ 2\sqrt{L^2 + Ab + \frac{1}{4}} + 2n + 1 \right]^2 \quad (3-137)$$

### ۳-۹-۳ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی

تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی  $\Sigma(r) = C_s$  می شود و معادله (۳-۱۲۰) به صورت زیر در می آید:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M - E_{p_{n_r,k}} + C_p) \left( M + E_{p_{n_r,k}} + \left( -\frac{1}{r}(-a - b\alpha) - \frac{b}{r^2} \right) \right) \right) G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (3-138)$$

با انتخاب پارامترهای زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M^2 - E_{n_r,k}^2 + C_p(M + E_{n_r,k}) &= \varepsilon_{p_{n_r,k}} \\ (Mc^2 - E_{n_r,k} + C_p) &= A_p \\ \varepsilon_{p_{n_r,k}} &= \tilde{E}_{p_{n_r,k}} \\ k(k+1) &= L_p^2 \end{aligned} \quad (3-139)$$

تابع موج حالت شبه اسپینی به مانند تابع موج حالت اسپینی نیز بر حسب توابع لاگر به دست می آید

$$\Psi_{n_r, k}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left[ \frac{Y_{jm}^l(\theta, \phi)}{M + E_{n_r, k} - 2V(r)} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right] Y_{jm}^l(\theta, \phi) \right] F_{n_r, k}(r) \quad (140-3)$$

که مؤلفه بالایی تابع موج:

$$F_{n_r, k}(r) = N n! r^{-\frac{1}{2} + \sqrt{L^2 - Ab + \frac{1}{4}}} e^{-\sqrt{E_{n_r, k}} r} L_n^{2\sqrt{L^2 - Ab + \frac{1}{4}}} \left( 2\sqrt{\tilde{E}_{n_r, k}} r \right) \quad (141-3)$$

با استفاده از رابطه (3-118) می توان مؤلفه پایینی تابع موج را به دست آورد، به صورت زیر است:

$$G_{n_r, k}(r) = \frac{1}{M + E_{n_r, k} - 2V(r)} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F_{n_r, k}(r) \quad (142-3)$$

محاسبه انرژی حالت تقارن شبه اسپینی نیز به مانند حال تقارن اسپینی می باشد:

$$E_{p_{n_r, k}} = \frac{1}{2} \left\{ C_p + \sqrt{C_p^2 + 4(M^2 + MC_p) - \frac{4(A_p^2 (a + b\alpha)^2)}{w}} \right\} \quad (143-3)$$

که در آن:

$$w = \left[ 2\sqrt{L^2 - Ab + \frac{1}{4}} + 2n + 1 \right]^2 \quad (144-3)$$

در این کار توانستیم معادله دیراک را با پتانسیل شبه هلمن به روش تحلیلی NU حل کنیم و ویژه مقادیر انرژی و توابع موج آن را به دست آوریم. به این نتیجه می رسیم که این توابع موج شرایط مرزی را برآورده می کند.

## نتیجه گیری

در این پایان نامه با استفاده از روش تحلیلی NU و با بهره‌مندی از تقریب‌های مناسب انرژی حالت پایه و برانگیخته ایزوتوپ‌های زوج - فرد کلسیم توسط حل معادله شعاعی شرودینگر در حضور پتانسیل شبه هلمن به دست آوردیم. بنابراین در بررسی ایزوتوپ‌ها به تشخیص تعداد ذرات سیستم پرداخته و چون سیستم مورد مطالعه ما سیستم های N ذره‌ای بودند در این صورت پتانسیل را بر حسب ابر شعاع معرفی کردیم و با استفاده از مختصات ژاکوبی مسئله را حل نمودیم. سپس جذر میانگین مربع شعاع باری ایزوتوپ‌های کلسیم را با توابع موج به دست آمده محاسبه کردیم. همچنین معادله دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی بررسی کرده و توابع موج و ویژه مقادیر را به دست آوردیم که توابع موج شرایط مرزی برآورده می‌کند. همین‌طور جابه‌جایی ترازها با استفاده از اثرات اسپین-مدار برای ایزوتوپ‌های کلسیم ۴۱ و ۴۳ کلسیم ۴۳ محاسبه کرده‌ایم. ما در این پایان نامه سعی نمودیم معادله شرودینگر را در حالت کلی و در D بعد حل نماییم تا بتوانیم برای ایزوتوپ‌های دیگر این هسته، آن را تعمیم دهیم و نتایج به دست آمده از کار خود را نیز با دیگر نتایج موجود در مقالات دیگر را در جداول جداگانه‌ای مقایسه و به نمایش گذاشته‌ایم.

- [1] Plank M. (1901) "On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum", Vol 4, Ann.phy, p 553.
- [2] Broglie De. L and Brillouin L.(1929)"selected Papers on Wave-Mechaince"  
London and Glasgow: Blackie and Son.
- [3] Schrodinger E. (1926) "Quantizierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung) ",  
**Ann.d.phy, 81,109.**
- [4] Heisenberg W. (1929), "Physical Principles of quantum theory", Univ of chicago  
Press,Dover Publications, New York.
- [5] Dirac P. A. M. (1926) "On the Theory of Quantum Mechanics" **Proc.Royal Society.  
A,112, 661-677.**
- [6] کرین ک اس ، میرفخرایی ن و مدرس م ، (۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته ای" ، جلد اول ، چاپ اول ، مرکز  
نشر دانشگاهی، تهران
- [7] کرین ک اس ، میرفخرایی ن و مدرس م ، (۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته ای" ، جلد دوم ، چاپ اول ، مرکز  
نشر دانشگاهی، تهران
- [8] برون ب ال ، مهمان دوست خواجه داد ع،(۱۳۹۱) "مباحثی در فیزیک ساختار هسته‌ای" ، انتشارات مرنیز  
مشهد
- [9] Basdevant J. L. Rich, J. and Spiro M. (2005), "Fundamentals in Nuclear Physics  
from Nuclear Structure to cosmology" Springer, USA.
- [10] Bohr N. (1937), "Transmutations Atomic Nuclei " Science **86, 161.**
- [11] Bohr, N. (1936), "Neutron Capture and Nuclear Constitution", **Nature, 137, 344-  
348.**
- [12] Mayer M.G.(1948) "On closed shells in nuclei" **Phys.Rev.,74,235.**
- [13] Mayer M. G. (1949) "On closed shells in nuclei.2." **Phys. Rev. 75, 1969.**
- [14] Haxel O, Jensen J. H. D. and Suess H. E. (1949) "On The Magic Numbers In  
Nuclear Structure" **Phys. Rev, 75, 1766.**
- [15] حدادی ا (۱۳۸۲)، "کنکور کارشناسی ارشد مهندسی هسته‌ای"، چاپ اول، انتشارات آزاده
- [16] [http://www.personal.soton.ac.uk/ab1u06/teaching/phys3002/course/05\\_shell.pdf](http://www.personal.soton.ac.uk/ab1u06/teaching/phys3002/course/05_shell.pdf).



- [17] Honma, M. Otsuka, T. Brown B. A. and Mizusaki T. (2002) “**Effective interaction for pf-shell nuclei**” *Phys. Rev. C* 65., 061301.
- [18] Meyerhof W. E. (1967), “**Elements of Nuclear Physics**”, (McGraw-Hill, New York), Chap.2.
- [19] Mustapha A.O. (2011) ,“**Nuclear physics**”, University of agriculture, abeokuta PHS451.
- [20] Cohen B. L. (1971), “**Concepts of Nuclear physics**”, McGraw-Hill, New York.
- [۲۱] علمدار میلانی س و قرآن نویس م ، (۱۳۸۲) " آشنایی با فیزیک هسته ای "، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ص ۱۸۵
- [22] Griffiths D. J . (1984), “Introduction to Elementary Particles”, **John Wiley & Sons, Inc**, pp. 27 .
- [23] Naghdi M. (2014) “Nucleon-Nucleon Interaction” **Phys. Part. Nucl. 5, 924.**
- [24] Taketani M. Machida S. and Ohanuma S, (1952) “The meson theory of nuclear forces I: The deuteron ground state and low energy neutron-proton scattering”, **Prog.Theor.Phys.7,45.**
- [25] Hans H.S. (2001) “**Nuclear Physics-Exoerimental and Theoretical**” New Age International (P) Limited Publishers, New Dehli
- [26] Doleschall P., Borbely I. Papp Z. and Plessas W, (2003) “interaction and three-nucleon bound states” **Phys. Rev. C 67, 064005.**
- [27] Kalantar-Nayestanaki N. Epelbaum E. Messchendorp J. G.and Nogga A. (2012) “Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems” **Reports on Progress in Physics., 75, 016301.**
- [28] Kievsky A. (2011) “Analysis of Three-Nucleon Forces Effects in the  $A = 3$  System”**Few-Body Systems., 49, pp. 19-25.**
- [29] Kievsky A. Viviani A. Girland L. Maecucci L. E. and Rosatti S. (2009) “Analysis of the Effects of Three-nucleon Forces in  $A = 3, 4$  Systems” **Few-Body Systems., 45, pp. 115-118.**
- [30] <http://cdfc.sinp.msu.ru>, (Centre for Photonuclear Experiments Data).
- [31] Doma S. B. (2002) “Ground State Characteristics of the Light Nuclei with  $A \leq 6$  on the Basis of the Translation Invariant Shell Model by Using Nucleon-Nucleon Interactions” **High Energy Physics and Nuclear Physids., 26, 9, pp. 941-948.**

- [32] Mitler H. E. (1961) “Shell- Model Analysis of calcium isotopes” **Nuclear Physics.**, **23:200-244.**
- [33] Federman , P. and Talmi , I. (1966) “Nuclear energy levels of calcium-isotopes” **Physics Letters . 22 , 469-472.**
- [34] Shuangquan Z. Jie M. and Shangui Z. (2003) “Proton magic even-even isotopes and giant halos of ca isotopes with relativistic continuum hart-bogoliubov theory” **Sci.China Phys.Mech.Astron.**, **46 632.**
- [35] Chen, H. Mei ,H. Meng ,J. and Yao J. M. (2007) “Binding energy differences of mirror nuclei in a time-odd triaxial relativistic mean field approach” **Phys. Rev. C .,** **76, 044325.**
- [36] Fricke, G. Bernhardt, C. Heilig, K. Schaller L.A. Schellenberg L. Shera E. B. and Dejager C.W. (1995) “Nuclear ground state charge radii from electromagnetic interactions” **Atomic Data and Nuclear Data Tables.**, **60 , 177-285.**
- [37] Angeli K. P. and Marinova . (2013) “Table of experimental nuclear ground state charge radii: an update”**Atomic Data and Nuclear Data Tables.**, **99 ,69-95.**
- [38] Agrawal B. K. Sil T. Samaddar S. K. De J. N. and Shlomo . S (2001) “Coulomb energy differences in mirror nuclei revisited” **Phys. Rev. C.**, **64, 024305.**
- [39] Engeland T. and Osnes E. (1966) “Shell- Model Calculations in the calcium- isotopes” **Physics Letters.**, **20,424-428.**
- [40] Arda A. and Server R. (2014) “Pseudospin and spin symmetric solutions of dirac equation: hellmann potential, wei hua potential, varshni potential” **Z. Naturforsch.**, **69a, 163.**
- [41] Ita B I. (2013) “Solutions of the schrodinger equation with inversely quadratic hellmann plus mie-type potential using nikiforov-uvarov method” **International Journal of Recent advances in Physics (IJRAP).** **2, 4.**
- [42] A.A. Rajabi (2005) “Exact analytical solution of the shrodinger equation for an N-identical body-force system”,**Few body system .,****37,267.**
- [43] Aiello, M. Ferraries, M. MGiannini, M. Pizzo, M.and Santopinto, E. (1996) “three-body force model for the electromagnetic excitation of the nucleon” **Phys.Lett.B.**, **387,215.**
- [44] Kievsky A. M. Viviani L. E. Marcucci and Rosati, S. (2006) **Few body System.**, **38, 63-66.**

- [45] Nikiforov, A. F. and Uvarov, V. B (1988), “**Special functions of Mathematical physics**”, Brikhauser, Basel.
- [46] Shojaei, M. R. Rajabi, A. A., Farrokh, M. and Zoghi-Foumani, N. (2014) “Energy Levels of spin-1/2 partioles with Yukawa Interaction” **Modern. Physics.**, **5**, 773-180.
- [47] Arfken, G. B.(1985),“**mathematical methods for physicistics**”, Academic press.
- [48] Sengupeta S and Ghosh S .(1959) “Energy levels in a bounded isotropic harmonic oscillator potential and nuclear shell structure” **Phys.Rev.**, **115**,1681.
- [49] Laurent B and Vimh Mau N.(2013) “Neutron rich carbon and oxygen isotopes with an odd number of neutrons” **arxiv.**, **1304,0561**.
- [50] Experimental energy levels can be found from:www.nndc.bnl.gov/.
- [51] Alhaidari, A.D., Bahlouli, H. and Al-Hasan, A. (2006) “Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials” **Physics Letters A.**, **349**, 87-97.
- [52] Soylu A. Bayrak O.and Boztosun I. (2008) “k state solutions of the Dirac equation for the Eckart potential with pseudospin and spin symmetry” **J. Phys. A: Math. Theor.**, **41** 065308. 8pp.
- [53] Jia C.S. Gao P.and Peng X.L. (2006) “Exact solution of the Dirac–Eckart problem with spin and pseudospin symmetry”, **J. Phys. A: Math. Gen.**, **39** 7737–7744.
- [54] Zhang L.H. Li X.P and Jia C.S (2008) “Analytical approximation to the solution of the Dirac equation with the Eckart potential including the spin-orbit coupling.term” **Phys. Lett A.**, **372** 2201–2207.
- [55] Gou J.Y. and Sheng Z.Q. (2005) “ Solution of the Dirac equation for the Woods–Saxon potential with spin and pseudospin symmetry” **Phys. Lett. A.**, **338** 90–96.
- [56] Ikhdaïr S. M. and Sever R (2010) “Solutions of the spatially-dependent mass Dirac equation with the spin and pseudospin symmetry for the Coulomb-like potential” **Applied Mathematics and Computation.**, **216**, 545–555.
- [57] Schulze-Halberg A. (2006) “Exactly solvable combinations of scalar and vector potentials for the Dirac equation interrelated by Riccati equations”**Chinese Physics Letters**, **23**, 1365.
- [58] Arima A , Harvey M. and Shimizu, K. (1969) “Pseudo LS coupling and pseudo SU<sub>3</sub> coupling schemes” **Physics Letters B.**, **30**, 517-522.
- [59] Hecht, K.T. and Adler, A. (1969) “Generalized seniority for favored J [not equal to] 0 pairs in mixed configurations” **Nuclear Physics A.**, **137**, 129-143.

- [60] Blokhin, A. L, Bahri C. and Draayer J.P. (1995) "Origin of Pseudospin Symmetry" **Phys. Rev. Lett.**, **74**, 4149.
- [61] Bahri C. Draayer J. P. and Moszkowski S. A. (1992) "Pseudospin symmetry in nuclear" **Phys. Rev. Lett.**, **65** , 2133.
- [62] Ginocchio, J.N. (2005) "Relativistic symmetries in nuclei and hadrons" **Physics Reports**, **414**, 165-261.
- [63] Greiner, W. (2000) "**Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations**". Springer, Berlin.
- [64] Feizi, H., Shojaei, M.R. and Rajabi, A.A. (2012) "Raising and lowering operators for the Dirac-Woods-Saxon potential in the presence of spin and pseudospin symmetry" **The European Physical Journal Plus.**, **127**, 41.

## **Abstract**

The past decade has calcium isotopes in theory and experiment has been widely studied. Of the various isotopes, we treat the isotope of calcium 41 and 43 with even – odd nuclei. Since calcium isotopes of calcium 41 and 43 respectively, each with a single individual nucleons outside the central part of the magic and three individual nucleons outside the central part of the magic are, the first to study the force between nucleons are look at the many – body systems. So with regard to the shell model to solve the Schrödinger equation in the presence of potential quasi – Hellman using specific analytical NU and eigenvalue ground state and wave functions ground state and eigenvalue excited state and root mean square radius of charge of calcium isotopes 41 and 43 we calculate. We have applied the spin – orbit interaction in the energy shift levels. So our results have good agreement with experimental data. And At the end, of the Dirac equation with regard to the symmetry of spin and Pseudo – Spin we solved using NU analytical methods and eigenvalue energy and wave functions obtained and reached the conclusion that the wave functions satisfy the boundary conditions.

## **Keywords:**

Calcium isotopes, The energy of the ground state, The root mean square radius of charge, Dirac equation, Potential quasi – Hellman, Energy of the excited state.



**Shahrood University**  
**Department of Physics**

**MSc thesis**

**The energy levels comparison of  $^{41}\text{Ca}$  and  $^{43}\text{Ca}$  by using shell model**

**Sahar Behnam**

**Supervisor:**

**Dr. M. R. Shojaei**

**February 2015**