بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شاهرود

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

گروه فیزیک هسته ای

محاسبه‌ی شعاع باری ، انرژی حالت پایه و انرژی اولین حالت برانگیخته‌ی ایزوتوپ‌های ^{10}Be و ^{11}Be

علی اصغر رادکانی

استاد راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۳

دانشگاه شاهرود

دانشکده: فیزیک و مهندسی هسته‌ای

گروه: فیزیک هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای علی اصغر رادکانی

تحت عنوان:

محاسبه شعاع باری ، انرژی حالت پایه و انرژی اولین حالت برانگیخته ایزوتوپ‌های ^{10}Be و ^{11}Be

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر علی اکبر رجبی		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد رضا شجاعی	
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی:دکتر حسن حسن آبادی		نام و نام خانوادگی:	
نام و نام خانوادگی:دکتر نسرین صالحی			
نام و نام خانوادگی:			

تقدیم به

دستان مهربان پدرم

و

چشمان نگران مادرم

تشکر و قدردانی:

برخود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای پروفسور علی‌اکبر رجبی و استاد مشاورم دکتر محمد رضا شجاعی که در تدوین این پایان‌نامه به‌طور مداوم از راهنمایی‌های ارزشمند ایشان بهره می‌بردم و همچنین از تمامی اساتید عزیز گروه فیزیک هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود که در مدت تحصیلم در این دانشگاه درس‌های زیادی از آنها آموختم، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. از همه دوستان عزیزم که با صبر و حوصله در تمامی لحظات سخت و دشوار در کنار بنده بوده‌اند نهایت سپاس را به جا می‌آورم و در پایان صمیمانه‌ترین سپاس و درود را به پدر و مادرم که وجود پر مهرشان باعث امید و دل‌گرمی بنده در تمام مراحل تدوین این کار بوده است تقدیم می‌کنم.

تعهد نامه

اینجانب **علی اصغر رادکانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **فیزیک هسته‌ای** دانشکده **فیزیک و مهندسی هسته‌ای** دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه **محاسبه شعاع باری ، انرژی حالت پایه و انرژی اولین حالت برانگیخته ایزوتوپ‌های ^{10}Be و ^{11}Be** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

شناخت خواص ایزوتوپ‌های هسته‌های مختلف از مباحث مورد علاقه و پر اهمیت در حوزه‌ی فیزیک هسته‌ای می‌باشد. یکی از کارهایی که در سال‌های گذشته در این زمینه انجام گرفته، مطالعه بر روی خواص استاتیکی هسته‌ها بوده است. آگاهی از طیف انرژی ایزوتوپ‌های مختلف هسته‌ها از جمله این مباحث می‌باشد.با توجه به اینکه آزمایش‌های مختلف پراکندگی نشان داده است که نوکلئون‌ها با انرژی جنبشی(MeV)۱۰ در داخل هسته‌ها در حرکت‌اند و این انرژی در مقایسه با انرژی سکون نوکلئون‌ها که در حدود(MeV)۱۰۰۰است اندک می‌باشد، می‌توان با صرف نظر از اثرات نسبیتی حرکت نوکلئون‌ها از مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی استفاده کنیم و معادله‌ی شرودینگر که یک معادله غیر نسبیتی است برای بررسی طیف انرژی هسته‌ها به کار ببریم. از آنجایی که ایزوتوپ‌های ^{11}Be و ^{10}Be سیستم‌هایی چند ذره‌ای می‌باشند، با استفاده از مختصات فوق کروی که فضایی برای مطالعه سیستم‌های چند ذره‌ای در مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی است طیف انرژی و شعاع باری مربوط به ایزوتوپ‌های ^{11}Be و ^{10}Be را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.از جمله پتانسیل‌های که توصیف‌کننده‌ی برهم‌کنش بین نوکلئون - نوکلئون هستند می‌توان به پتانسیل وودز - ساکسون، پتانسیل یوکاوا و دیگر پتانسیل‌های هسته‌ای اشاره کرد که بسیاری از فیزیکدانان به بررسی خواص هسته ها با این پتانسیل‌ها پرداخته‌اند. ما در این کار پتانسیلی که برهم‌کنش نوکلئون‌ها را توصیف می‌کند به صورت مجموع پتانسیل یوکاوا و پتانسیل وودز - ساکسون پیشنهاد می‌کنیم سپس معادله شرودینگر غیرنسبیتی را با استفاده از یک روش تحلیلی مانند ابرتقارن و روش IQR [۱] برای محاسبه طیف انرژی، تابع موج و در نهایت شعاع باری ایزوتوپ‌های مورد نظر به کار می‌بریم.

کلمات کلیدی : فضای فوق کروی، معادله‌ی شرودینگر، بریلیوم، طیف انرژی،شعاع باری

۱- IQR(improved quantization rule)

مقالات مستخرج از این پایان نامه

- ✓ رادکانی. علی اصغر، رجبی. علی‌اکبر، شجاعی.محمدرضا" بررسی طیف انـرژی ایزوتوپ‌هـای ^{11}Beو ^{10}Be در حضور پتانسیل یوکاوا و وودز - ساکسون با اسـتفاده از روش ابرتقـارن "، کنفرانس فیزیک ایران، ۱۷ تا ۲۰ شهریور ماه ۹۳، دانشگاه سیستان وبلوچستان،زاهدان

فهرست مطالب

فصل اول.....۱

۱-۱ مقدمه.....۲

۱-۲ نیروهای چهارگانه‌ی طبیعت.....۳

۱-۳ مدل استاندارد.....۴

۱-۴ هسته‌ها و اجزای سازنده آن.....۴

۱-۴-۱ خواص هسته‌ها.....۵

۱-۵ مروری بر مدل لایه‌ای (پوسته‌ای).....۱۵

۱-۵-۱ پتانسیل مدل لایه‌ای (پوسته‌ای).....۱۸

فصل دوم.....۱۹

۲-۱ مقدمه.....۲۰

۲-۲ اطلاعات نیروی هسته با استفاده از سیستم دو نوکلئونی.....۲۰

۲-۲-۱ ساختار دوترون.....۲۰

۲-۳ خواص نیروی هسته‌ای.....۲۴

۲-۳-۱ از پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای حاصل می‌شود.....۲۴

۲-۳-۲ وابسته به اسپین است.....۲۴

۲-۳-۳ تانسوری بودن.....۲۴

۲-۳-۴ تقارن نسبت به بار نوکلئون.....۲۵

۲-۳-۵ استقلال از بار الکتریکی.....۲۵

۲-۳-۶ در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود.....۲۵

۲-۳-۷ وابسته بودن به سرعت نسبی نوکلئون‌ها.....۲۶

۲-۴ پتانسیل‌های هسته ای.....۲۶

۲-۴-۱ پتانسیل وودز – ساکسون ۲۷

۲-۴-۲ پتانسیل یوکاوا ۲۸

۲-۴-۳ پتانسیل هولسن.....۲۹

۲-۴-۴ پتانسیل هلمن.....۳۰

۲-۵ فضای فوق کروی و مختصات ژاکوبی.....۳۰

۲-۵-۱ مختصات ژاکوبی.....۳۱

۲-۵-۲ معادله‌ی شرودینگر در فضای فوق کروی.....۳۳

فصل سوم ۳۷

۳-۱ مقدمه.....۳۸

۳-۲ مکانیک کوانتومی ابرتقارن.....۳۸

۳-۳ هامیلتونی و پتانسیل‌های همراه.....۴۰

۳-۴ بریلیوم.....۴۳

۳-۵ محاسبه‌ی طیف انرژی و توابع موج ایزوتوپ‌های بریلیوم.....۴۴

۳-۵-۱ محاسبه‌ی انرژی و توابع موج مربوط به حالت‌های برانگیخته.....۴۹

۳-۶ محاسبه‌ی ترازهای انرژی ^{11}Beو ^{10}Be با پتانسیل اصلاح شده‌ی یوکاوا.....۵۵

۳-۷ محاسبه‌ی شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{11}Be و ^{10}Be ۵۸

فصل چهارم ۶۱

۴-۱ مقدمه ۶۲

۴-۲ مروری کوتاه بر روش IQR ۶۳

۴-۳ محاسبه‌ی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های بریلیوم به روش IQR ۶۵

۴-۳-۱ محاسبه‌ی طیف انرژی با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون ۸۲

نتیجه‌گیری ۸۶

مراجع ۸۷

فهرست شکل‌ها

شکل (۱-۱) توزیع چگالی هسته‌ای بر حسب فاصله از مرکز هسته.....۷

شکل (۱-۲) انرژی بستگی هر نوکلئون در هسته بر حسب عدد جرمی.....۹

شکل (۱-۳) مدل مربوط به جمله ی عدم تقارن.....۱۳

شکل (۲-۱) تابع موج شعاعی دوترون.....۲۳

شکل (۲-۲) پتانسیل وودز – ساکسون بر حسب فاصله از مرکز هسته.....۲۸

شکل (۲-۳) پتانسیل یوکاوا بر حسب فاصله از مرکز هسته ۲۹

شکل (۲-۴) پتانسیل هولسن بر حسب فاصله از مرکز هسته ۳۰

شکل (۳-۱) نمودار مربوط به تابع موج حالت پایه برای ^{10}Be ۴۹

شکل (۳-۲) نمودار مربوط به تابع موج حالت پایه برای ^{11}Be ۵۵

شکل (۴-۱) نمایش نقاط برگشت که در $E = V(x)$ بدست می‌آیند.....۶۴

فهرست جداول

جدول (۱-۱) ویژگی‌های اساسی اجزای سازنده‌ی اتم‌ها.....۵

جدول(۱-۲) شعاع هسته‌ها(R) و پهنای ناحیه سطحی آنها (a)..... ۷

جدول (۳-۱) اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{10}Be به روش ابر تقارن با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا.....۵۲

جدول (۳-۲) اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{11}Be به روش ابر تقارن با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا.....۵۵

جدول (۳-۳) اندازه‌ی انرژی ترازهای ^{10}Be به روش ابرتقارن با پتانسیل یوکاوا.....۵۷

جدول (۳-۴) اندازه‌ی انرژی ترازهای ^{11}Be به روش ابرتقارن با پتانسیل یوکاوا.....۵۸

جدول (۳-۵) شعاع باری مربوط به ایزوتوپ‌های ^{10}Be و ^{11}Be با پتانسیل یوکاوا بعلاوه وودز - ساکسون.....۶۰

جدول (۴-۱) اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{10}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا.....۸۲

جدول (۴-۲) اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{11}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا.....۸۲

جدول (۴-۳) اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{10}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز –

ساکسون.....۸۵

جـدول (۴-۴) انـدازه‌ی انـرژی مربـوط بـه ترازهـای ^{11}Be بـه روش IQR بـا در نظـر گـرفتن پتانسـیل وودز – ساکسون.....۸۵

فصل اول

کلیات

۱-۱ مقدمه

مطالعات فیزیک هسته‌ای در اطراف دو مسئله اساسی دور می‌زند. ابتدا سعی می‌شود خصوصیات نیرویی که اجزای هسته را به هم متصل نگه می‌دارد مورد بررسی قرار داده شود و سپس سعی بر آن است که رفتار سیستم‌های چند ذره‌ای، مانند چند هسته توجیه شوند. این دو مسئله با هم در ارتباط هستند زیرا خواص سیستمی متشکل از بسیاری ذرات تا حد زیادی توسط نیرویی که ذرات را در کنار هم نگه می‌دارد تعیین می‌شود. فیزیکدانها می‌توانند سیستم‌های چند ذره‌ای را فقط در محدوده‌ی رشته تقریب‌های معینی توضیح دهند که توسط واقعیت تجربی خاصی که آنها در پی توجیه آن هستند تعیین می‌شود.مثلا اغلب برای توضیح رفتار گازها می‌توان از قانون بویل،چارلز و . . . استفاده کرد، ولی این قوانین تفصیلات جنبش مولکولی را که برای توصیف رسانایی گرمائی لازم است شامل نمی‌شود. در مورد هسته‌ها این توصیف‌های تقریبی را مدل می‌نامیم.

کشف پرتوزایی را به بکرل (۱۸۹۶) نسبت می‌دهند. وی بطور اتفاقی به تیره شدن یک صفحه‌ی عکاسی در مجاوت نوعی سنگ معدن پی برد. اما بزرگترین شناخت از پرتوزایی توسط رادرفورد و همکارانش صورت گرفت که به ظهور فرضیه‌ی رادرفورد مبنی بر وجود هسته در اتم‌ها در سال ۱۹۱۱ منتهی گردید. در سال ۱۹۱۳ اولین مدل سازگار با حرکت الکترون‌های اتم توسط بوهر ابداع شد. بعد از آنکه نوترون توسط چادویک (۱۹۳۲)کشف شد جزئیات اجزای تشکیل دهنده‌ی هسته روشن‌تر شد و منجر شد تا هایزنبرگ فرض کند که هسته از نوترون‌ها و پروتون‌ها تشکیل شده است.امروزه درک نسبتاً خوبی از ساختار هسته و ویژگی های نیروی هسته‌ای که این ساختار را ایجاد می کنند، بدست آورده‌ایم. بطور کلی می‌توان گفت ساختار این نیرو بسیار پیچیده است. فیزیک هسته‌ای، برخلاف فیزیک اتمی از چنان صورتبندی نظری منسجمی برخوردار نیست که با استفاده از آن بتوانیم تمام پدیده‌ها را به روشی بنیادی تجزیه و تحلیل کنیم. بدین ترتیب، در مطالعه‌ی فیزیک هسته‌ای باید شیوه ای پدیده شناختی در

پیش بگیریم و برای توصیف پدیده های متنوعی از قبیل واپاشی آلفازا، واپاشی بتازا، واکنش‌های مستقیم یا شکافت، از صورت‌بندی های متفاوتی استفاده کنیم [۱]. ما در این بخش برخی از مفاهیم و مطالب مقدماتی در حوزه‌ی فیزیکی هسته‌ای که بیانشان اهمیت بسزایی دارد را بیان خواهیم کرد.

۱-۲ نیروهای چهارگانه‌ی طبیعت

تا آنجا که ما می‌دانیم، چهار نوع نیروی بنیادی در طبیعت وجود دارد: قوی (هسته‌ای قوی)، الکترومغناطیس، ضعیف (هسته ای ضعیف) و گرانش. هریک از این نیروها از یک نظریه‌ی فیزیکی تبعیت می‌کنند. نظریه کلاسیکی گرانش، قانون گرانش نیوتون است. تعمیم نسبیتی آن نظریه‌ی نسبیت عام انیشتین است که در چارچوب نظریه فیزیکی ژئومترودینامیک توصیف می‌شود. نظریه‌ی فیزیکی که نیروهای الکترومغناطیسی را توصیف می کند، الکترودینامیک نامیده می شود که فرمولبندی کلاسیکی آن بیشتر از صد سال پیش توسط ماکسول ارائه شد. نظریه‌ی کلاسیکی ماکسول بر نسبیت خاص منطبق بود. نظریه‌ی کوانتومی الکترودینامیک نیز در سال ۱۹۴۰ توسط توموناگا، فاینمن و شوینگر [۱] ارائه گردید. نیروهای ضعیف که عامل ایجاد واپاشی هسته‌ای بتازا هستند برای فیزیک کلاسیک ناشناخته بودند. نخستین نظریه در رابطه با این نیروها را فرمی در سال ۱۹۳۳ عنوان کرد که به وسیله‌ی افراد دیگری رفته رفته تکمیل شد و گلاشو، واینبرگ و سلام آن را به شکل امروزی درآوردند. نظریه‌ی (GWS) [۲] نیروهای ضعیف و الکترومغناطیس را دو صورت مختلف از یک نیروی واحد به نام الکتروضعیف می داند، بنابراین طبق این نظریه نیروهای چهارگانه به نیروهای سه‌گانه تقلیل می یابند. و سرانجام نیروهای قوی که با کار یوکاوا در سال ۱۹۳۴ معرفی شدند توسط نظریه‌ی فیزیکی کرومودینامیک توصیف می‌شوند [۲].

۱- Tomonaga, Feynman and Schwinger

۲- Glashow-Weinberg-Salam

۱-۳ مدل استاندارد

مدل استاندارد نظریه‌ای در رابطه با برهم‌کنش‌های قوی، ضعیف و الکترومغناطیس است که بر اساس آن تمام ماده از سه گروه ذرات بنیادی تشکیل شده است: لپتون‌ها، کوارک‌ها و ذرات واسطه. شش لپتون وجود دارد که بر اساس نوع بار، عدد لپتونی، عدد میونی و عدد تاو طبقه بندی می شوند و در سه نسل قرار می‌گیرند. همچنین شش پاد لپتون در طبیعت وجود دارند که برای آنها نوع بار و اعداد ذکرشده بر عکس لپتون‌های متناظر است. شش نوع کوارک و شش پادکوارک نیز در این مدل وجود دارند که هریک از این کوارک‌ها در سه رنگ ظاهر می شوند، بنابراین مجموعاً با ۳۶ نوع کوارک و پادکوارک روبرو هستیم. هر برهم‌کنش دارای ذره‌ی واسطه‌ی خاصی است. فوتون ذره‌ی واسطه برای برهم‌کنش الکترومغناطیسی و گراویتون ذره‌ی واسطه در برهم‌کنش گرانشی است. بوزون‌های برداری میانه W^+، W^- و Zواسطه‌ی برقراری برهم‌کنش ضعیف بین کوارک‌ها و لپتون‌های مختلف هستند [۱]. در نهایت گلوئون‌ها واسطه‌ی برقراری نیروی قوی بین ذرات باردار رنگی یعنی کوارک‌ها می باشند. گلوئون‌ها خود ذراتی بدون جرم و حامل بار و رنگ هستند.

۱-۴ هسته‌ها و اجزای سازنده آن

هسته‌ی اتمی بخش کوچک و سنگینی در مرکز اتم است که از A نوکلئون ساخته می‌شود. Z عدد از این نوکلئون‌ها از نوع پروتون و N عدد هم از نوع نوترون‌اند. A را عدد جرمی و Z را عدد اتمی اتم مورد نظر می‌گویند. اندازه هسته‌ها را با یکای فرمی (یا فمتومتر) بیان می‌کنند، که در آن $1fm = 10^{-15}m$ است. ویژگی‌های اساسی اجزای سازنده‌ی اتم‌ها را می‌توان چنین خلاصه کرد.

جدول ۱-۱: ویژگی‌های اساسی اجزای سازنده‌ی اتم‌ها [۳]

بار الکتریکی	جرم (u)	اسپین ($\hbar$)	گشتاور مغناطیسی ذاتی (JT^{-1})
پروتون e	۱,۰۰۷۲۷۶	۱/۲	$۱,۴۱۱\times۱۰^{-۲۶}$
نوترون 0	۱,۰۰۸۶۶۵	۱/۲	$-۹,۶۶\times۱۰^{-۲۷}$
الکترون -e	۰,۰۰۰۵۴۹	۱/۲	$-۹,۲۸\times۱۰^{-۲۴}$

۱-۴-۱ خواص هسته‌ها

هسته‌ها دارای برخی خواص مستقل از زمان مانند جرم، اندازه، بار، تکانه‌ی زاویه‌ای ذاتی (اسپین) و برخی خواص وابسته به زمان مانند واپاشی پرتوزا و تبدیلات هسته‌ای مصنوعی (واکنش‌های هسته‌ای) هستند. رده‌ی اول خواص **استاتیکی** و رده‌ی بعدی خواص **دینامیکی** هسته نامیده می شوند. هسته‌ها همچنین دارای حالات برانگیخته هستند که انرژی آنها معمولاً جزء خواص استاتیکی بررسی می شود، اما واپاشی آنها یکی از انواع واپاشی پرتوزاست. برای داشتن یک دید کلی برخی از این خواص را بطور خلاصه بررسی می کنیم[۱].

۱-۴-۱-۱ بار

هر پروتون به اندازه‌ی $e = ۱,۶۰۲۲\times۱۰^{-۱۹}$ C بار مثبت دارد که از نظر اندازه مساوی و به لحاظ علامت مخالف بار الکتریکی الکترون است. نوترون بدون بار است. به این ترتیب، هر اتم خنثی (A,Z) باید شامل Z الکترون خنثی هم باشد که آن را به صورت نمادین چنین نشان می‌دهند: ${}^{A}_{Z}X_{N}$ [۳] .

۱-۴-۱-۲ شعاع هسته

آزمایش‌های دقیق با بهره‌گیری از پراکندگی ذرات هسته‌ای و الکترون‌ها، نشان داده‌اند که شعاعی

که در آن آثار هسته‌ای ظاهر می شود از رابطه‌ی تقریبی زیر به دست می آید:

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad (۱-۱)$$

که در آن R_0 موسوم به " ثابت شعاع " است و دارای مقادیر زیر است:

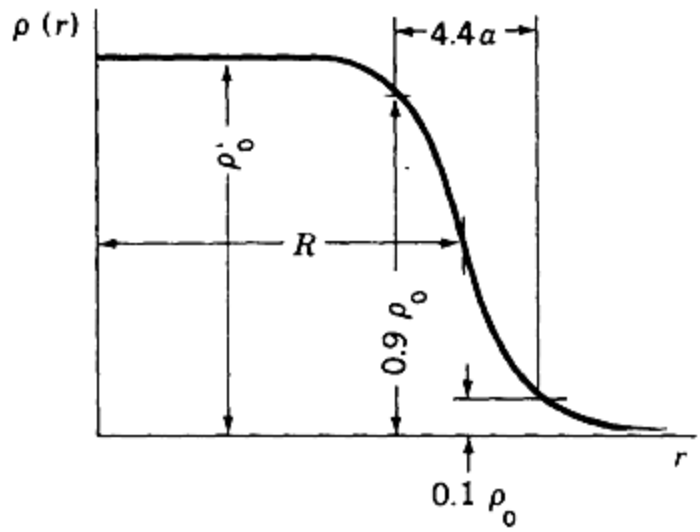
$$R_0 \approx \begin{cases} 1.4F \\ 1.2F \end{cases}$$

که مقدار آن برای پراکندگی ذرات هسته‌ای از هسته‌ها ۱/۴ فرمی و برای پراکندگی الکترون از هسته ها ۱/۲ فرمی است. علت اختلاف بین این دو مقدار چنین است : در پراکندگی الکترون، ما موضع بارهـای مثبت (نقطه‌ای) مربوط به پروتون‌های هسته را تعیین می کنیم و حال آنکه در پراکندگی ذرات هسته‌ای اندازه‌ی مربوط به ناحیه‌ی ایجاد کننده‌ی نیروی هسته‌ای را که بر ذره اثر می‌گذارد تعیین می کنیم. این مطلب می‌رساند که نیروی هسته‌ای از ناحیه‌ای که مربوط به بار (یا جرم) است فراتر می‌رود و هســته را بزرگتر از آنچه که هست جلوه می دهد. گسترش نیرو به ورای توده‌ی هسته‌ای حدود یک فرمی است که به وسیله‌ی برد نیروی هسته‌ای تعیین می‌شود [۱]. آزمایش‌هایی برای تعداد زیادی از هسته ها با استفاده از الکترون‌های فرودی در انرژی‌های مختلف انجام شده که نشان می‌دهند توزیع چگالی هسته ای دارای یک لبه‌ی تیز در شعاع R نیست. تمام نتایج بدست آمده تقریباً با تابع توزیع بار زیر قابل توجیه‌اند.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+\exp[(r-R)/a]} \qquad (۲-۱)$$

در واقع بطور معمول شکل قابل قبولی برای ρ_r در نظر گرفته می‌شود ، بطوریکه ایــن شــکل بــا عبارت ریاضی ساده‌ای شامل چند پارامتر توصیف می‌شود،سپس این پارامترها را با برازش بر روی داده‌های پراکندگی تعیین می‌کنیم که رابطه‌ی (۱-۲) ســازگارترین شــکل مــورد پــذیرش اســت[۴]. شــکل ۱-۱ ترسیمی از رابطه‌ی (۱-۲) را نشان می‌دهد و معنا و مفهوم پارامتر های به کار رفته در آن را نیز توضیح

می‌دهد. همانطورکه مشاهده می‌شود ρ_0 چگالی نوکلئون در نزدیکی مرکز هسته است، R فاصله‌ای است که در آن چگالی هسته به نصف مقدارش در مرکز تقلیل می یابد و a ضخامت سطحی هســته را نشـان می‌دهد همان‌طور که در شکل مشهود است فاصله‌ای که در آن چگالی از ۹۰ درصد ρ_0 به ۱۰ درصد ρ_0 می‌رسد برابر a ۴,۴ می‌باشد[۵].



شکل ۱-۱:توزیع چگالی هسته‌ای بر حسب فاصله از مرکز هسته [۵]

در جدول ۱-۲ شعاع مربوط به یک هسته‌ی سبک $({}^{9}_{4}Be)$، یک هسته‌ی متوسط $({}^{109}_{47}\mathrm{Ag})$ و یک هسته‌ی سنگین $({}^{208}_{82}Pb)$ که با استفاده از پارامترسازی چگالی بار بدست آمده‌اند را آورده‌ایم[۴].

جدول ۱-۲: شعاع هسته‌ها(R) و پهنای ناحیه سطحی آنها (a) [۴]

هسته	$R(fm)$	$a(fm)$	$R/A^{1/3}$ (fm)
${}^{9}_{4}Be$	۲,۸۴	۰,۵۱۳	۱,۵۶
${}^{109}_{47}\mathrm{Ag}$	۵,۳۳	۰,۵۲۳	۱,۱۲
${}^{208}_{82}Pb$	۶,۶۵	۰,۵۲۶	۱,۱۲

۱-۴-۱-۳ جرم و انرژی بستگی

جرم اتم‌ها و هسته‌ها را با یکای جرم اتمی (u) بیان می‌کنند. این یکا را بنا به تعریف چنان در نظر می‌گیرند که جرم هر اتم خنثای کربن ۱۲($^{12}_{6}C_{6}$) دقیقا برابر u ۱۲ شود ($1u = 1.6605\times10^{-27}kg$)[۳].

انرژی بستگی هسته به عنوان انرژی لازم برای شکستن هسته به Z پروتون و N نـوترون، تعریـف می‌شود. بر حسب جرم‌های اتمی، انرژی بستگی هسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(N,Z) = ZM_H c^2 + NM_n c^2 - M(N,Z)c^2 \qquad (۱-۳)$$

که M_H جرم اتم هیدروژن و M_n جرم نوترون است. در تعریف انرژی بستگی، سهم برهمکنش کولنی بین الکترون‌های اتمی نیز آورده شده است. این سهم حدودا با رابطه‌ی $-1.43\times10^{-5}Z^{2.39}\,MeV$ داده می‌شود. در مقایسه با انرژی بستگی هسته، معمولا از این مقدار صرفنظر می‌شود. اما کافیست دقت شود که برای یک هسته‌ی سنگین با Z=۱۲۰ این مقدار برابر ۱,۳۴ MeV- می‌شود. انرژی بستگی هسته بر حسب فزونی جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B(N,Z) = Z\Delta_H c^2 + N\Delta_n c^2 - \Delta(N,Z)c^2 \qquad (۱-۴)$$

$$\Delta_H c^2 = 7.2890(\text{MeV}) \ , \ \Delta_n c^2 = 8.0713(\text{MeV}) \qquad (۱-۵)$$

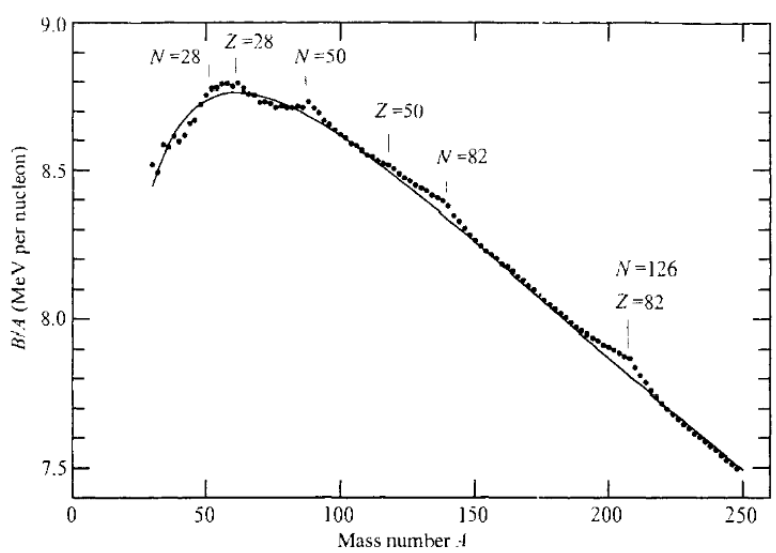
چون انرژی بستگی هسته‌ای متناسب با تعداد کل نوکلئون‌های درون هسته (A) افزایش می‌یابد، معمول این است که از انرژی بستگی متوسط به ازای هر نوکلئون (B/A) سخن می‌گویند شکل ۱-۲ تغیرات B/A بر حسب A را نشان می‌دهد. پس از صعود اولیه بر حسب A ، در نزدیکی عدد جرمی ۶۰ ، به بیشینه‌ی

پهنی می‌رسیم که حاکی از انرژی حدود ۸/۶ MeV به ازای هر نوکلئـون اسـت.پس از آن، ایـن انـرژی متوسط به تدریج به صورت تابعی از A کاهش می‌یابد و بـه حـدود ۷/۶MeV بـه ازای هـر نوکلئـون در سنگین‌ترین هسته‌ها می‌رسد[۳]. نکته‌ی دیگری که از شکل پیداست این است که با همجوشی هسته‌های سبک و شکافت هسته‌های سنگین انرژی آزاد می‌شود. در هسته‌های پایداری که خیلی سـبک نیسـتند (A>12) انرژی بستگی B در تقریب اول با عدد جرمی متناسب است یعنی :

$$B(A,Z) \approx 8 \times A \quad MeV \tag{۶-۱}$$

و به طور دقیق‌تر برای هسته‌هایی که 12<A<225 است داریم [۶]:

$$7.7\ MeV < \frac{B(A,Z)}{A} < 8.8\ MeV \tag{۷-۱}$$



شکل ۱-۲:انرژی بستگی هر نوکلئون در هسته بر حسب عدد جرمی [۶]

فرمول نیمه تجربی جرم

فرمول کامل انرژی بستگی به صورت زیر است:

$$B(A,Z)=a_v A-a_s A^{\frac{2}{3}}-a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}-a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}\pm\delta+\eta \qquad (۸-۱)$$

در این رابطه جمله‌ی اول یعنی $a_v A$ را جمله‌ی حجمی، $-a_s A^{\frac{2}{3}}$ جمله‌ی سطحی، $a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}$ جمله‌ی کولنی، $a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}$ جمله‌ی عدم تقارن، $\pm\delta$ جمله‌ی تزویجی(انرژی زوجیت) و η را جمله‌ی لایه‌ای می‌نامند،که در صورتی که N یا Z عدد جادویی باشد مقدار آن مثبت است.

جملات حجمی، سطحی و کولنی از مدل قطره مایع و سه جمله‌ی بعدی از مدل پوسته‌ای (لایه‌ای) حاصل می‌شوند. مدل قطره مایع یک مدل نیمه کلاسیک است، در حالی که مدل پوسته‌ای یک مدل مکانیک کوانتومی، بنابراین جملات عدم تقارن، تزویج و لایه‌ای ناشی از رفتار کوانتومی نوکلئون‌ها هستند.

وجود جمله‌ی حجمی بیانگر این نکته است که سهم هر نوکلئن در انرژی بستگی هسته تقریبا مقداری ثابت است. اگر اینطور نبود و هر نوکلئون همه‌ی نوکلئون‌های دیگر موجود در هسته را جذب می‌کرد، آنگاه انرژی بستگی باید با $A(A-1)$ یا به تقریب با A^2 متناسب بود و این بر خلاف منحنی شکل ۱-۲ است زیرا در ناحیه ثابت این منحنی داریم:

$$\frac{B}{A}=const \Rightarrow B\propto A$$

همانطور که می‌دانیم $R\propto A^{\frac{1}{3}}$ بنابراین $A\propto R^3$ از این رو جمله اول رابطه‌ی (۸-۱) را جمله‌ی حجمی می‌گویند. از طرفی نوکلئون‌هایی که در سطح هسته قرار دارند همسایه‌های کمتری نیز دارند از

این رو بستگی آنها به هسته از نوکلئون‌های درونی‌تر کمتر است. بنابراین سهم نوکلئون‌های سطحی در انرژی بستگی B به اندازه‌ی نوکلئون‌های درونی‌تر نیست و چون در جمله‌ی $a_v A$ این نکته در نظر گرفته نشده است، مقدار B در آن بیش از حد لازم برآورده شده است. بنابراین از جمله $a_v A$ باید جمله‌ای را که متناسب با مساحت سطح هسته است کم کنیم و چون $R \propto A^{\frac{1}{3}}$ است، مساحت سطح هسته $(4\pi \mathrm{R}^2)$ متناسب با $A^{\frac{2}{3}}$ خواهد بود.

دافعه کولنی پروتون‌ها در جهت تضعیف انرژی بستگی هسته عمل می‌کند که باید جمله‌ی متناسب با آن را با علامت منفی وارد رابطه انرژی بستگی B کنیم. اگر هسته را به صورت کره‌ای باردار (به صورت یکنواخت) در نظر بگیریم، با توجه به اینکه هر پروتون سایر پروتون‌های موجود در هسته را می‌بینند (در برهم‌کنش کولنی) این جمله متناسب با $Z(Z\text{-}1)$ خواهد بود و چون انرژی کولنی یک کره باردار یکنواخت متناسب با $\frac{1}{R}$ است این جمله شامل $\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}$ نیز خواهد بود.

در ناحیه هسته‌های سبک که ناحیه هسته‌های پایدار است بین Z، N هسته‌ها یک تقارن وجود دارد یعنی $Z \simeq N$ یا به عبارتی $Z \simeq \frac{A}{2}$. می‌توان این خاصیت یعنی متقارن بودن هسته از لحاظ تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها را عاملی برای پایداری هسته در نظر گرفت. در ناحیه هسته‌های سبک خارج شدن از این حالت تقارنی سبب ناپایداری هسته می‌شود. بنابراین باید جمله‌ای در رابطه انرژی بستگی B وارد کنیم که این مسأله را نیز شامل شود. در ناحیه هسته‌های سنگین به دلیل وجود دافعه کولنی بالا، برای پایداری هسته باید تعداد نوترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌ها باشد، (تا نیروی هسته‌ای که جاذب است اثر دافعه کولنی را خنثی کند) و این خود باعث به هم خوردن تقارن می‌شود، ولی در اینجا به هم خوردن تقارن سبب پایداری هسته شده است. از این رو سهم این جمله باید در ناحیه هسته‌های سنگین ناچیز باشد.

همانطور که در مکانیک کوانتومی دیده‌ایم یک ذره در جعبه بسته در ترازهای معین انـرژی قـرار می‌گیرد، با توجه به اینکه نوکلئون‌ها نیز از قوانین مکانیک کوانتومی پیروی می‌کنند، بـرای نوترون‌هـا و پروتون‌ها در هسته نیز باید ترازهای مشخص انرژی در نظر گرفت،برای راحتی کار فرض می‌کنیم که این ترازها متساوی‌الفاصله بوده و به فاصله Δ از هم قرار گرفته باشند و طبق اصل طرد پائولی در هر تراز فقط یک نوکلئون قرار گیرد. حالت‌هـای انـرژی پروتـون و نـوترون را نیـز یکسـان فـرض مـی‌کنیم،همچنین $\Delta \simeq \frac{E_{\max}}{N}$. انرژی عدم تقارن عبارت است از اختلاف بین انرژی هسته‌ای یک هسته با اعداد نـوترونی و پروتونیZ وN با انرژی ایزوباری که در آن اعداد نوترونی و پروتونی هر دو مساوی $\frac{A}{2}$ است.اگر بخـواهیم هسته‌ی اول را از هسته‌ی دوم بسازیم باید ν پروتون تبدیل به نوترون شود یعنی:

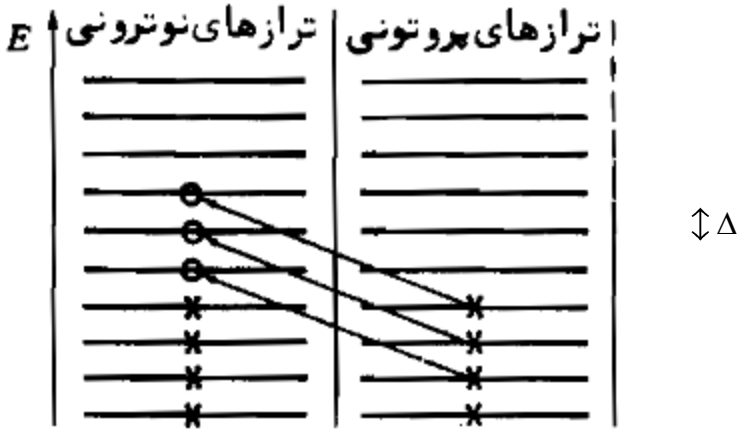
$$N = \frac{1}{2}A + \nu \qquad Z = \frac{1}{2}A - \nu \quad Or \quad \nu = \frac{1}{2}(\mathrm{N} - \mathrm{Z}) \tag{۹-۱}$$

طبق شکل ۱-۳ انرژی هرکدام از ν پروتون باید به اندازه‌ی $\nu\Delta$ افزایش یابد، بنابراین کل انـرژی کـه صرف این کار می‌شود عبارت است از:

$$\nu^2\Delta = \frac{1}{2}(N - Z)^2\Delta \qquad \underline{N = A - Z} \qquad \nu^2\Delta = \frac{1}{2}(A - 2Z)^2\Delta \tag{۱۰-۱}$$

از طرفی چون $\Delta \propto \frac{1}{A}$ است داریم:

$$\text{کل انرژی صرف شده} \propto \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



شکل ۱-۳:مدل مربوط به جمله‌ی عدم تقارن [۱]

تمایل نوکلئون‌های مشابه برای تشکیل زوج با یکدیگر و ایجاد یک پیکربندی محکم و پایدار هسته‌ای سبب می‌شود جمله‌ای دیگر به رابطه انرژی بستگی B اضافه کنیم. مقدار این جمله را برای هسته‌های A فرد (زوج – فرد و فرد – زوج) صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت خارج شدن از حالت زوج – فرد و تبدیل شدن به حالت فرد – فرد سبب کاهش انرژی بستگی به اندازه‌ی δ و خارج شدن از حالت زوج – فرد و تبدیل شدن به حالت زوج – زوج باعث افزایش انرژی بستگی به اندازه‌ی δ خواهد شد.

جمله η مربوط به حالتی است که Z یا N یک عدد جادویی باشند که در این صورت در هسته یک پوسته کامل خواهیم داشت و این خود باعث افزایش انرژی بستگی هسته خواهد شد و خارج شدن از حالت پوسته کامل B را به اندازه η کاهش می‌دهد.

ثابت‌های رابطه‌ی (۱-۸) را می توان توسط مقایسه با داده‌های تجربی موجود بدست آورد. چون برازش هیچ‌گاه کامل نیست، چندین مجموعه از ضرایب به کار می روند که به صورت زیر می‌باشند[۱].

$$a_v = 15.5MeV \quad a_s = 16.8MeV \quad a_c = 0.72MeV \quad a_a = 23MeV$$
$$a_v = 14MeV \quad a_s = 13MeV \quad a_c = 0.60MeV \quad a_a = 19MeV \qquad (۱۱-۱)$$
$$a_v = 16MeV \quad a_s = 18MeV \quad a_c = 0.72MeV \quad a_a = 23.5MeV$$

۱-۴-۱-۴ اسپین و پاریته

هر یک از اجزای سازنده‌ی اتم دارای اسپین ۱/۲ با یکای $\hbar$ است. این‌ها در دسته‌ای از ذرات با اسپین نیمه صحیح، به نام فرمیون قرار دارند. فرمیون‌ها از اصل طرد، که ولفگانگ پائولی آن را در سال ۱۹۲۵ اعلام کرد پیروی می‌کنند. این اصل، طرز استقرار الکترون‌ها را در حالت‌های اتمی تعیین می‌کند.

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر به فرد I مشخص می‌کنند که نمایانگر تکانه‌ی کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون‌های هسته است. بردار I را می‌توان به صورت حاصل جمع مؤلفه‌های مداری و ذاتی تکانه‌ی زاویه‌ای در نظر گرفت.

$$I = \sum_{i=1}^{A} (\mathrm{l}_i + s_i) = L + S = \sum_{i=1}^{A} j_i \qquad (۱۲-۱)$$

عدد کوانتومی I رابطه‌ی ساده‌ای با بردار $\mathbf{I}$ دارد:

$$|I| = \sqrt{I(I+1)}\hbar \qquad (۱۳-۱)$$

$$|I| = \sqrt{I(I+1)}\hbar$$
$$I_z = m_I \hbar \qquad (\mathrm{m}_I = I, I-1, \ldots, -I+1, -I) \qquad (۱۴-۱)$$

رابطه‌ی (۱-۱۲) مجموعه‌ی بسیار پیچیده‌ای از تعدادی بردار است که منجر به یک برایند می‌شود. علت اینکه می‌توانیم از ساختمان داخلی هسته صرفنظر کنیم وآن را به صورت ذره‌ای بنیادی که مثل یک ذره‌ی دارای یک عدد کوانتومی ذاتی است در نظر بگیریم این است که برهم‌کنشی که هسته تحت تأثیر

آن است، مثل میدانهای الکترومغناطیسی ایستا، به اندازه‌ی کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت شدگی نوکلئون‌ها را که منجر به رابطه‌ی(۱-۱۲) شده است، بگسلد. برای مشخص‌کردن حالات هسته، علاوه بر اسپین هسته از پاریته نیز استفاده می‌شود. پاریته می‌تواند دارای مقادیر مثبت (زوج) یا منفی باشد. اگر تابع موج تک‌تک نوکلئون‌های موجود در هسته را می‌شناختیم، از حاصلضرب پاریته‌های تمامی A نوکلئون می‌توانستیم پاریته‌ی هسته را به صورت π مثبت یا منفی ($\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_A$) به دست آوریم. پاریته‌ی هسته را به صورت شاخص بالای اسپین هسته و با علامت + یا − نشان می‌دهیم و می‌نویسیم I^{π}. برای مثال می‌نویسیم 0^{+}. هیچگونه رابطه‌ی نظری مستقیمی بین I و π وجود ندارد و در نتیجه برای هر مقداری از I علامت π می‌تواند مثبت یا منفی باشد[۷].

۱-۴-۱-۵ گشتاور مغناطیسی

هر جزء سازنده‌ی اتم، در ارتباط با اسپین، یک گشتاور دو قطبی مغناطیسی هم دارد.گشتاورهای هسته‌ای، در قیاس با گشتاور مغناطیسی الکترون، بسیار کوچک‌اند. با این همه، این ویژگی در نظریه‌ی ساختار هسته‌ای نقش برجسته‌ای دارد. اینکه نوترون بدون بار الکتریکی هم گشتاور مغناطیسی دارد، ممکن است شگفت‌انگیز به نظر برسد.این امر حاکی از این واقعیت است که نوترون زیرساختار کوارکی دارد، و از اجزای بارداری ساخته شده است. یکی از کاربردهای مهم گشتاور هسته‌ای تصویربرداری تشدید مغناطیسی (MRI) یا تشدید مغناطیسی هسته‌ها (NMR) است.

۱-۵ مروری بر مدل لایه‌ای (پوسته‌ای)

در این مدل ترازهای انرژی هسته به صورت لایه‌ها و زیرلایه‌هایی در نظر گرفته می‌شود که نوکلئون‌ها در آن جای گرفته‌اند.این لایه‌ها متناظر با اعدادی هستند که تعداد آن‌ها هفت تا است و به آن‌ها اعداد مرموز گفته می‌شود (۲،۸،۲۰،۲۸،۵۰،۸۲،۱۲۶).

شواهد تجربی زیادی برای اثبات وجود پوسته‌ها در هسته وجود دارد که بـه برخـی از آن‌هـا اشـاره خواهیم کرد:

- انرژی جداسازی دو پروتون و دو نوترون

با رسم نمودارهای مربوط به S_{2p} و S_{2n} به ترتیب برای ایزوتون‌ها و ایزوتوپ‌ها، ملاحظه می‌شود که در اعداد جادویی نقاط بیشینه‌ای روی منحنی دیده می‌شود که حاکی از آن است که در اعداد پروتونی و نوترونی جادویی انرژی جداسازی بیشتر می‌شود [۸].

- انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپ‌های مختلف $^{214}_{86}Rn$

مشاهده می‌شود که انرژی آلفای گسیل شده از $^{214}_{86}Rn_{128}$ پر انرژی‌تر از بقیه آلفاهاست و واپاشی آن به صورت زیر است.

$$^{214}_{86}Rn_{128} \rightarrow {}^{210}_{81}Po_{126} + \alpha \qquad (۱۵-۱)$$

به دلیل بالا بودن انرژی آلفای گسیل شده، $^{210}_{81}Po_{126}$ باید انرژی بستگی بیشتری هم نسبت به سایر هسته‌های دختر داشته باشد. از طرفی می‌بینیم که این هسته‌ی دختر دارای عدد نوترونی جـادویی است[۸].

- سطح مقطع گیراندازی نوترون در هسته‌های مختلف

مشاهده می‌شود که در نواحی N= ۵۰،۸۲،۱۲۶ سطح مقطع به اندازه‌ی دو مرتبه بزرگی کاهش می‌یابد.

- تغییرات شعاع هسته (ΔR) در فواصل ΔN= ۲

با رسم تغییرات شعاع بر حسب عدد نوترونی، مشاهده می‌شود که در نقاط N=۲۰،۲۸،۵۰،۸۲،۱۲۶

صعودهای ناگهانی رخ می‌دهد[۸].

از جمله شواهد دیگر، انرژی جداسازی آخرین نوترون در هسته‌هایی به صورت ($Z = n , N = n+1$) که n زوج است، نمودار تعداد ایزوتوپ‌های پایدار بر حسب عدد نوترونی، انرژی اولین حالت برانگیخته هسته‌های زوج – زوج ، گشتاورهای هسته‌ای که حالت‌های منظمی از خود نشان می‌دهند،می‌باشند. علیرغم وجود شواهد زیادی که حاکی از لایه‌ای بودن هسته می‌باشد مساله مهمی وجود دارد که باعث تعجب می‌شود و آن این است که چگونه ممکن است نوکلئون‌ها در حجم کوچک هسته که به شدت با هم برهم‌کنش دارند به صورت لایه لایه قرار می‌گیرند. به نظر می‌رسد نوکلئون‌ها در این حجم کوچک باید برخوردهای بسیار زیادی با هم داشته باشند. از این رو اگر فاصله زمانی بین دو برخورد یک نوکلئون را Δt فرض کنیم باید Δt خیلی کوچک باشد و طبق اصل عدم قطعیت،عدم قطعیت در انرژی نوکلئون ΔE بزرگ خواهد بود طوری که پهنای انرژی نوکلئون‌ها در هم فرو رفته و دیگر ترازها و لایه‌های مشخص در هسته وجود نخواهد داشت و این با شواهد تجربی که قبلا به آن‌ها اشاره شد در تضاد است. این مشکل را می‌توان با استفاده از اصل طرد پائولی برطرف کرد.

فرض کنید در اعماق هسته‌ها بین دو نوکلئون برخوردی صورت گیرد در این صورت بین آن دو انرژی مبادله می‌شود و باید یکی از نوکلئون‌ها انرژی کسب کرده به تراز بالاتر و دیگری انرژی از دست داده و به تراز پایین‌تر برود. در حالی که ترازهای بالا و پایین آن‌ها همگی پر هستند و طبق اصل طرد پائولی نوکلئون‌های دیگری نمی‌تواند به آن ترازها اضافه شود. البته ترازهای ظرفیت خالی هستند ولی

برخورد بین آن دو نوکلئون در حدی نیست که بتواند انرژی لازم برای انتقال به تراز ظرفیت را فراهم آورد.می‌توان گفت تقریبا بین نوکلئون‌ها برخوردی صورت نمی‌گیرد و نوکلئون‌ها می‌توانند بدون برخورد در سراسر حجم هسته حرکت کنند. از این رو فاصله زمانی بین دو برخورد Δt بسیار بزرگ خواهد بود طوری که ΔE تقریبا صفر می‌شود و بدین ترتیب برای نوکلئون‌ها ترازهای مشخص انرژی در هسته وجود دارد.

۱-۵-۱ پتانسیل مدل لایه‌ای (پوسته‌ای)

در مورد اتم ها پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تأمین می‌کند، یعنی یک عامل خارجی زیر پوسته‌ها را سازمان می دهد. در این حالت معادله‌ی شرودینگر را با همین پتانسیل می‌توان حل کرد و انرژی زیرپوسته‌هایی را که الکترون‌ها می‌توانند در آن قرار گیرند، محاسبه کرد. اما در مورد هسته هیچ عامل خارجی‌ای وجود ندارد و نوکلئون‌ها در پتانسیلی که خودشان بوجود می‌آورند در حرکت هستند. پتانسیلی که معمولاً برای مدل لایه‌ای در نظر گرفته می شود پتانسیل وودز- ساکسون[۱] است که اگر یک جمله‌ی موسوم به پتانسیل اسپین مدار هسته‌ای به آن اضافه شود با حل معادله‌ی شرودینگر برای آن می توان اعداد جادویی را در لایه‌های هسته‌ای بدست آورد[۸].

۱ - Woods-saxon potential

فصل دوم

خواص نیروی هسته‌ای

پتانسیل‌های هسته‌ای

فضای فوق کروی

۲-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا خواص نیروی هسته‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس از آنجایی که نیـرو متناسب با گرادیان پتانسیل است، به بررسی خواص پتانسیل هسته‌ای می‌پردازیم که خود درک بهتری از شناخت نیروی هسته‌ای را به ما خواهد داد. در ادامه فضای فوق کروی که یک فضای مناسب برای بررسی سیستم‌های چند ذره‌ای می‌باشد را معرفی خواهیم کرد.

اطلاعات در مورد خواص این نیرو از بررسی ساده‌ترین سیستم های مقید هسته‌ای، مانند دوترون، یا مطالعه‌ی پراکندگی‌های نوکلئون- نوکلئون حاصل شده اند. ما نیز این فصل را با بررسی مسأله دوترون آغاز می کنیم.

۲-۲ اطلاعات نیروی هسته با استفاده از سیستم دو نوکلئونی

۲-۲-۱ساختار دوترون

دوترون که متشکل از یک پروتون و یک نوترون است ساده‌ترین سیستم مقید ممکن است کـه از نوکلئون‌ها تشکیل شده است. لذا سیستمی ایده‌آل برای بررسی برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئـون بـه‌شـمار می‌آید. این هسته هیچ نوع حالت برانگیخته‌ی مقیدی نـدارد زیـرا بسـتگی آن بسـیار ضـعیف اسـت و حالت‌های برانگیخته‌ی آن فقط به صورت نوترون و پروتون آزاد ظاهر می شوند. انرژی بستگی دوتـرون ۲/۳MeV است،که با اندازه‌گیری انرژی پرتوهای گامای گسیل شده از گیراندازی نوترون حرارتی توسـط پروتون تعیین شده است.

$$^{1}\mathrm{H}+n \rightarrow {}^{2}\mathrm{H}+\gamma \qquad (۱-۲)$$

واکنش معکوس، با استفاده از الکترون‌های با انرژی معلوم برای ایجاد تابش ترمزی خارجی در فروپاشی فوتونی دوترون، نیز به کار رفته است. هیچ حالت برانگیخته پایداری برای دوترون پیدا نشده است. واکنش‌های مختلف از جمله پراکندگی *n-p* منتهی به کشف یک حالت مجازی در تقریبا انرژی ۷۰ KeV در بالای حالت پایه شده است.

به منظور یافتن دید عمیق‌تری پیرامون کسب اطلاعات درباره‌ی نیروی هسته‌ای از روی ساختار ترازی دوترون، ساده‌ترین فرض ممکن را درباره‌ی این نیرو اتخاذ می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نیرو مرکزی است و از پتانسیلی به شکل رابطه زیر ناشی می‌شود.

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & \rightarrow\ r<r_0\\ 0 & \rightarrow r>r_0\end{cases} \qquad (۲-۲)$$

که در آن r فاصله‌ی بین نوکلئونی است. این پتانسیل را پتانسیل چاه مربعی می‌نامند. این چاه در یک حجم کروی به شعاع r_0 دارای مقدار ثابتی است. اگرچه این شکل پتانسیل در مقایسه با طبیعت حقیقی نیروی هسته‌ای بیش از حد ساده است. با این وجود ما ساختار ترازی سیستمی را که توسط این پتانسیل توصیف می‌شود بررسی می‌کنیم.

معادله شعاعی شرودینگر برای دوترون به صورت زیر است:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)+V(r)R(r)=ER(r) \qquad (۳-۲)$$

اگر بخش شعاعی تابع موج $R(r)$ *را به صورت* $\frac{u(r)}{r}$ در نظر بگیریم، با جانشینی در معادله (۲-۳) این معادله به شکل زیر در می آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2})u(r)+V(r)u(r)=Eu(r) \qquad (۴-۲)$$

که μ جرم کاهش یافته است .جرم پروتون و نوترون را با هم برابر و با M نشان می‌دهیم کـه $\mu=\frac{M}{2}$ می‌باشد.

شواهد خوبی وجود دارد مبنی بر اینکه حالت پایه دوترون $1s$ است، یعنی $l=0$. با جایگذاری در معادلـه (۲-۴) داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}u(r)+V(r)u(r)=Eu(r) \qquad (۵-۲)$$

جواب این معادله در حالت $l=0$ برای ناحیه ی $r<r_0$ به صورت (۲-۶) است.

$$u(r)=Ae^{ik_1r}+Be^{-ik_1r} \qquad (۶-۲)$$

که در آن $k_1=\frac{\sqrt{2\mu(V_0+E)}}{\hbar}$ و برای $r>r_0$ داریم

$$u(r)=A'e^{k_2r}+B'e^{-k_2r} \qquad (۷-۲)$$

که در آن $k_2=\frac{\sqrt{-2\mu E}}{\hbar}$ می‌باشد. با اعمال شرایط مرزی که به صورت زیر است داریم:

۱. $u(0)=0$ ، برای اینکه $R(0)$ متناهی بماند.
۲. $u(r\to\infty)=0$ ، زیرا با یک حالت مقید سروکار داریم.
۳. در $r=r_0$ ، مقادیر توابع (۲-۶) و (۲-۷) و مشتقات آن‌ها باید با هم برابر باشند.

از شرط ۱ نتیجه می‌شود $A=-B$ به طوری که برای $r\le r_0$ می‌توان نوشت:

$$u(r)=z\sin k_1r \qquad (۸-۲)$$

که در آن z یک ثابت جدید است.از شرط ۲ نتیجه می‌گیریم $A'=0$ به طـوری کـه بـرای $r>r_0$

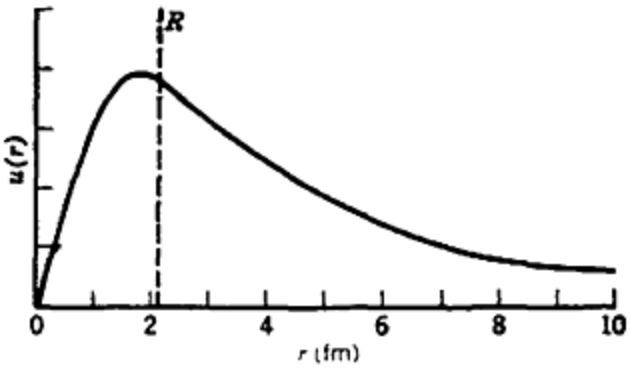
داریم:

$$u(r) = B'e^{-kr} \qquad (۹-۲)$$

از شرط ۳ بعد از حذف z و B' داریم:

$$k_1 \cot k_1 r_0 = -k_2 \qquad (۱۰-۲)$$

این معادله غیر جبری، ارتباط بین V_0 و r_0 را نشان می‌دهد . با قرار دادن مقدار تجربی ریشه‌ی میانگین مربعی شعاع دوترون $r_0 = 2.1fm$ ، که از آزمایش‌های پراکندگی الکترون بدست می‌آید در معادله‌ی (۲-۱۰) و حل عددی آن خواهیم داشت $V_0 = 35MeV$ که برآوردی از عمق پتانسیل نوکلئون- نوکلئون است. حالت انرژی دوترون خیلی به لبه‌ی چاه نزدیک است. این یعنی اگر نیروی نوکلئون- نوکلئون فقط اندکی ضعیف‌تر بود، حالت مقید دوترون نمی توانست وجود داشته باشد. تابع موج دوترون در شکل (۲-۱) نشان داده شده است [۱،۷].



شکل ۲-۱:تابع موج شعاعی دوترون [۸]

۲-۳ خواص نیروی هسته‌ای

۲-۳-۱ از پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای حاصل می‌شود.

پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای یعنی ساده‌ترین پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای که آن را به صورت یک چاه مربعی در نظر می‌گیریم و با $V_c(\mathrm{r})$ نشان می‌دهیم. V_c را باید چنان تنظیم کرد که وابستگی انرژی پارامترهایی مانند اختلاف فاز پراکندگی را به درستی پیش‌بینی کند.

۲-۳-۲ وابسته به اسپین است.

این نتیجه‌گیری از عدم موفقیت در مشاهده‌ی حالت مقید تک‌تایه دوترون و همچنین از اندازه‌گیری اختلاف سطح مقطع‌های حالت‌های تک تایه و سه تایه حاصل شده است. یک جمله‌ی دیگر به خاطر این اثر باید به پتانسیل اضافه شود. روشن است که این جمله به اسپین $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ نوکلئون‌ها بستگی داشته باشد، ولی همه‌ی ترکیب‌های $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ مجاز نیستند.نیروی هسته‌ای باید متضمن بعضی از تقارن‌ها باشد، که این امر منجر به محدودیت شکل پتانسیل می‌شود. انعکاس پاریته و برگشت زمان را می‌توان به عنوان نمونه‌هایی از این تقارن‌ها نام برد.از این رو جملاتی مانند $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ یا ترکیبی از آن‌ها در تابع پتانسیل باعث نقض ناوردایی برگشت زمان خواهند شد و آن‌ها را نمی‌توان بخشی از پتانسیل هسته‌ای به شمار آورد. جملاتی مانند $\mathbf{S}_2^2.\mathbf{S}_1^2$ یا $\mathbf{S}_1.\mathbf{S}_2$ که نسبت به برگشت زمان ناوردا هستند مجاز خواهند بود.

۲-۳-۳ تانسوری بودن

دلیل اصلی وجود نیروی تانسوری ،گشتاور چارقطبی الکتریکی حالت پایه دوترون است. تابع موج حالت S (l=0) تقارن کروی دارد، یعنی گشتاور چارقطبی الکتریکی آن صفر است. تابع موج‌های با حالت‌های مختلف l را باید از پتانسیل‌های غیر مرکزی به وجود آورد. این نیروی تانسوری باید به جای

V(r) به صورت V(**r**) باشد. . برای یک نوکلئون منفرد، انتخاب یک جهت مشخص در فضا اختیاری است و تنها جهت مرجع برای نوکلئون، جهت اسپین آن است و از این رو تنها جمله‌ای که می‌توان در نظر گرفت به صورت $\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}$ یا $\mathbf{s}\times\mathbf{r}$ است که بردار مکان را با جهت اسپین ارتباط می دهد. با درنظر گرفتن ملاحظات مربوط به ناوردایی تحت پاریته، می توانیم بخش تانسوری مربوط به پتانسیل بین نوکلئونی را به صورت $V_T(r)S_{12}$ درنظر بگیریم که در آن $V_T(r)$ بستگی شعاعی نیرو و بزرگی آن را تأمین می‌کند و داریم :

$$S_{12} = \frac{3(\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{r})}{r^2} - \mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2 \qquad (۱۱-۲)$$

که این عبارت متضمن ویژگی تانسوری نیرو است و متوسط آن در تمام زوایا برابر صفر است.

۲-۳-۴ تقارن نسبت به بار نوکلئون

این بدان معنی است که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم پروتون – پروتون ، فرقی بین برهم‌کنش پروتون – پروتون و برهم‌کنش نوترون – نوترون وجود ندارد. اینجا مقصود از بار خصوصیت یا جنس نوکلئون است نه بار الکتریکی آن‌ها. دلیل این امر این است که طول‌های پراکندگی و بردهای مؤثر در برهم‌کنش *pp* و *nn* با هم مساوی است.

۲-۳-۵ استقلال از بار الکتریکی

این بدان معنی است که همانند حالت‌های اسپین پس از تصحیح نیروی کولنی *pp* ، هر سه نیروی هسته‌ای *pp* ، *nn* ، *pn* با هم مساوی‌اند. به این ترتیب استقلال بار شرطی قویتر از تقارن بار است چرا که هر سه برهم‌کنش *pp* ، *nn* ، *pn* را در بر می‌گیرد.

۲-۳-۶ در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود.

با توجه به چگالی هسته‌ای مشاهده می‌کنیم که با رشد هسته (افزایش *A*) چگالی مرکزی آن ثابت می‌ماند از این رو به نظر می‌رسد باید عاملی وجود داشته باشد که از نزدیک شدن بیش از اندازه‌ی

نوکلئون‌ها جلوگیری کند. این عامل باید به صورت یک نیروی دافعه باشد تا مانع از نزدیک شدن بیش از حد دو نوکلئون به هم شود.

اگر پراکندگی نوکلئون – نوکلئون را در انرژی‌های بالا در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم در انرژی حدود MeV ۳۰۰، اختلاف فاز حالت سه تایه و تک تایه موج s از مقدار مثبت به مقدار منفی می‌رود و این نشان می‌دهد در این انرژی پتانسیل از حالت جاذبه به حالت دافعه تبدیل می‌شود.فاصله ای که در آن نیروی دافعه وارد عمل می‌شود برابر fm ۱/۲ است.

۲-۳-۷ وابسته بودن به سرعت نسبی نوکلئون‌ها

نیروهای وابسته به سرعت یا تکانه را نمی‌توان با پتانسیل نرده‌ای نشان داد، اما با استفاده از جملات درجه‌ی اول $\mathbf{P}$، درجه‌ی دوم $\mathbf{P}$ و غیره که هرکدام از آنها با یک پتانسیل مشخصه‌ی $V(r)$ متناظرند، می‌توان آنها را درنظر گرفت. یکی از صورت‌های قابل قبول این جمله که شامل توان‌های درجه اول $\mathbf{P}$ می شود و نسبت به پاریته و برگشت زمان ناورداست، $V(r)(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{S}$ است که در آن $\mathbf{S}=\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2$ اسپین کل دو نوکلئون مورد بررسی است. تکانه‌ی زاویه‌ای نسبی نوکلئون‌ها $\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ است، در نتیجه این جمله به خاطر مشابهت با فیزیک اتمی جمله‌ی اسپین مدار نامیده می شود و به صورت $V_{so}(r)\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}$ نوشته می‌شود[۷،۸].

۲-۴ پتانسیل های هسته ای

در چند دهه‌ی گذشته پتانسیل‌های نوکلئون – نوکلئون زیادی ارائه شده است. همه این پتانسیل‌ها به روش تطبیق با اطلاعات پراکندگی ساخته شده‌اند.در واقع پتانسیلی مناسب است که بتواند برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها را به خوبی توصیف کند.

برهم کنش نوکلئون- نوکلئون همواره به سه بخش تقسیم می گردد. برای مقایسه پتانسیل‌ها ابتدا لازم

است که سه جزء برهم‌کنش در سیستم دو نوکلئونی که به صورت زیر است در نظر گرفته شود.

الف) بخش بلندبرد ($r \geq 2fm$): در اغلب مدل‌های پتانسیل، پتانسیل تبادل تک پیونی[1] در نظر گرفته شده است و به دنبال اجزای پتانسیل‌های دیگر به عنوان بخش بلند برد اضافه می‌شود.

ب) بخش متوسط برد ($1fm \leq r \leq 2fm$): که ناشی از تبادل‌های تک مزونی و به طور ویژه تبادل مزون های نرده ای است (دو پیون یا مزون های سنگین‌تر)

ج) بخش کوتاه برد($r \leq 1fm$):که از تبادلات مزون‌های برداری بدست می‌آید (مزون‌های سنگین و تبادلات پیون‌های چندگانه که به خوبی در QCD مشهود است).

اکنون در این بخش برخی از پتانسیل‌های هسته‌ای پر کاربرد در فیزیک هسته‌ای که توصیف مناسبی از هسته دارند را معرفی می‌کنیم.

۲-۴-۱ پتانسیل وودز –ساکسون [2]

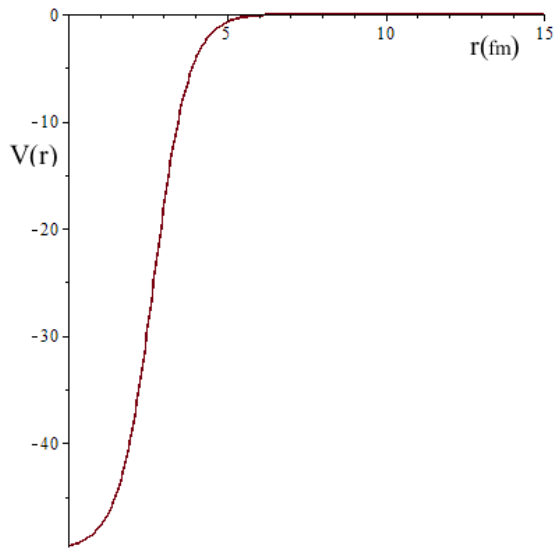
یکی از پتانسیل‌های مهم در فیزیک هسته‌ای پتانسیل وودز – ساکسون است. این پتانسیل که کوتاه برد می‌باشد، اولین بار در سال ۱۹۵۴ معرفی شد. بخش اصلی مدل پوسته‌ای و مدل اپتیکی را که در پراکندگی هسته‌ای کاربرد دارد تشکیل می‌دهد. این پتانسیل به طور گسترده برای توصیف برهم‌کنش نوترون با هسته‌های سنگین استفاده می‌شود. شکل این پتانسیل که بر حسب فاصله از مرکز هسته است به صورت (۲-۱۲) می‌باشد.

۱- One pion exchange potential(opep)

۲ -Woods-saxon potential

$$V(r)=\frac{-V_0}{1+\exp(\frac{r-R_0}{a})} \qquad (۱۲-۲)$$

R_0 ضخامت هسته و برابر فاصله‌ای است که چگالی هسته به ۹۰ درصد مقدار ماکزیمم خود برسد. a ضخامت پوسته است و به فاصله‌ای گفته می‌شود که چگالی هسته از ۹۰ درصد به ۱۰ درصد مقدار مرکزی خود می‌رسد و V_0 عمق چاه پتانسیل جاذبه‌ای است[۱۰].



شکل ۲-۲:پتانسیل وودز – ساکسون بر حسب فاصله از مرکز هسته

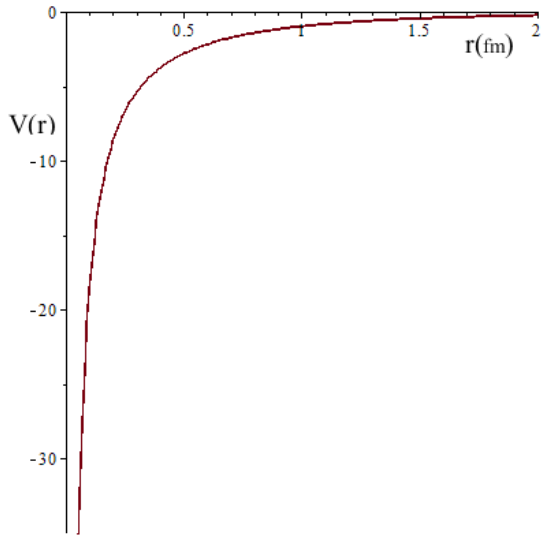
۲-۴-۲ پتانسیل یوکاوا [۱]

یافتن پتانسیلی که بتواند برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها را توضیح دهد همواره مورد توجه فیزیکدانان بوده است حدود ۷۰ سال قبل یوکاوا نظریه مزون را معرفی کرد و پتانسیلی به شکل زیر پیشنهاد داد:

$$V(r)=\frac{-V_0\exp(-\alpha r)}{r} \qquad (۱۳-۲)$$

۱-Yukawa potential

که در آن α برد نیروی هسته‌ای و V_0 عمق پتانسیل است. نیروی هسته‌ای وابستگی شدیدی بـه فاصله دارد. پتانسیل یوکاوا تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیرو سریعا با افزایش فاصله به صفر میل می‌کند. این پتانسیل در شکل ۲-۳ به ازای مقادیری خاص از ضرایب نمایش داده شده است.



شکل ۲-۳:پتانسیل یوکاوا بر حسب فاصله از مرکز هسته

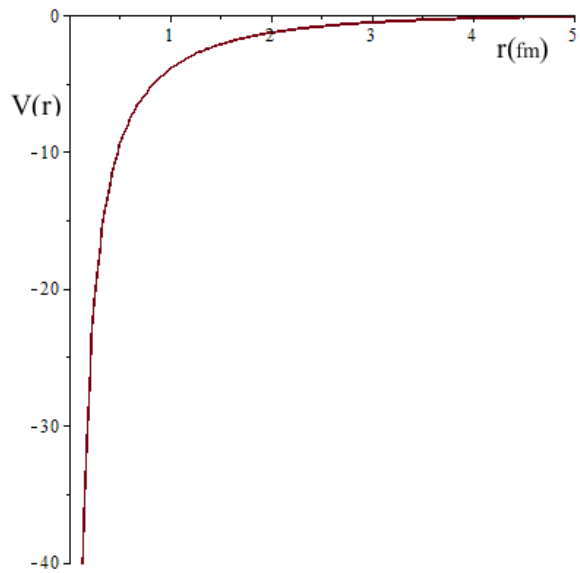
۲-۴-۳ پتانسیل هولسن[۱]

در صورتی که در رابطه‌ی (۲-۱۴) پارامتر تغییر شکل $q = 1$ باشد پتانسیل هولسن را خواهیم داشت که در شکل ۲-۴ نمایش داده شده است.

$$V(r) = \frac{-V_0 \exp(-\alpha r)}{1 - q \exp(-\alpha r)} \qquad (۲-۱۴)$$

در رابطه‌ی (۲-۱۴) اگر مقدار $q = -1$ باشد پتانسیل وودز – ساکسون را خواهیم داشت.

۱ -Hulthen potential



شکل ۲-۴: پتانسیل هولسن بر حسب فاصله از مرکز هسته

۲-۴-۴ پتانسیل هلمن[۱]

این پتانسیل به فرم زیر تعریف می شود:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{k}{r} \qquad (۱۵-۲)$$

که به صورت جمع پتانسیل های یوکاوا و کولنی است که V_0 و k به ترتیب عمق پتانسیل در پتانسیل یوکاوا و کولنی و α برد نیروی هسته ای است. این پتانسیل با V_0 مثبت توسط هلمن پیشنهاد شد[۱۱،۱۲] . و به همین خاطر چه V_0مثبت باشد چه منفی آن را پتانسیل هلمن نامیدند. این پتانسیل در فیزیک اتمی کاربرد زیادی دارد .

۲-۵ فضای فوق کروی و مختصات ژاکوبی

روش بسط هماهنگ‌های فوق کروی[۲] یکی از روش‌های مطالعه‌ی معادله‌ی موج سیستم‌های سه

۱-Hellmann potential

۲- Hyperspherical Harmonics Expansion Method

ذره‌ای است[۱۳]. این روش، ابزاری جهت دستیابی به معادله‌ی شرودینگر چند جسمی برای هنگامی است که تابع موج کل برحسب مجموعه‌ی کاملی از پایه‌های فوق‌کروی بسط داده شده است [۱۴].نیروهای چند جسمی که ساختار پیچیده‌ای دارند با هماهنگ‌های فوق‌کروی قابل بررسی هستند[۱۵].در ادامه‌ی این فصل ضمن معرفی فضای فوق کروی، فرم معادله شرودینگر برای سیستم چند جسمی را ارائه خواهیم داد.

۲-۵-۱ مختصات ژاکوبی

برای بررسی یک سیستم فیزیکی هر مجموعه مختصاتی را می‌توان به کار گرفت. ما بهترین مختصاتی که حل مسأله را روان می‌کند، انتخاب می‌کنیم. به همین دلیل مختصات ژاکوبی را معرفی می‌کنیم. در مختصات ژاکوبی، یک سیستم A ذره‌ای می‌تواند $N=A-1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه‌ی ژاکوبی داشته باشد. هر بردار ژاکوبی در واقع مرکزجرم یک زیر سیستم را به یکی از ذرات باقیمانده وصل می‌کند[۱۶].

N بردار ژاکوبی ژاکوبی $\xi_i (i=1,\ldots,N)$ که ترکیبات خطی از $\mathbf{r}_i$ها ($\mathbf{r}_i$ بردار مکان ذره iام نسبت به مبدأ است) هستند به شکل زیر تعریف می‌گردند.

$$\xi_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}(\mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2})$$

و به همین ترتیب برای j امین بردار داریم

$$\xi_j = \sqrt{\frac{2j}{j+1}}(\mathbf{r}_{j+1} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{r}_j}{j}) = \sqrt{\frac{2j}{j+1}}(\mathbf{r}_{j+1} - \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\mathbf{r}_i) \qquad (۱۶-۲)$$

در واقع ξ_1 بردار مکان ذره (۲) نسبت ذره (۱)، ξ_2 بردار مکان ذره (۳) نسبت به مرکز جرم ذرات (۱) و (۲) و به همین ترتیب ξ_i بردار مکان ذره ی iام نسبت به مرکز جـرم دسـتگاه متشـکل از $i-1$ ذره‌ی قبلی است.

با تعریف بردار مرکز جرم بصورت (۲-۱۷) روابط (۲-۱۶) بصورت (۲-۱۸) بازنویسی می‌شوند.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{A}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{r}_A) = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\mathbf{r}_i = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\mathbf{r}_i \qquad (۱۷-۲)$$

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}) \\
&\xi_2 = \sqrt{3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{R}) \\
&\vdots \\
&\xi_j = \sqrt{\frac{2(j+1)}{j}}(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{R})
\end{aligned} \qquad (۱۸-۲)$$

از آنجایی که پتانسیل هسته‌ای به وسیله‌ی خود نوکلئون‌ها ایجاد می‌شود و نیروی خارجی بـر آن تأثیری ندارد و با نیروی داخلی سروکار داریم می‌توانیم مرکز جرم را در مبدأ مختصات قرار دهیم. در این صورت سه مختصه مربوط به مرکز جرم کنار گذاشته می‌شود و با $3A$-3 مختصه‌ی دیگر که همان ابعـاد فضای D ما را تشکیل می‌دهند کار می‌کنیم.

ابرشعاع که معرف فاصله‌ی بین ذره‌ای D بعدی است به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x = \left[\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\sum_{i=1}^{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{A}(\mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{23}^2 + \cdots + \mathbf{r}_{1A}^2)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹-۲)$$

در این مبحث اضافه کردن پیشوند «فوق» اشاره به فضای بیش از سه بعد دارد.

در تبدیل بردارهای ژاکوبی به مختصات فوق‌کروی از $D=3N$ مختصه، $2N$ مختصه بـه زوایـای قطبی و سمتی مربوط به N بردار ژاکوبی، $N-1$ مختصه فوق زاویه و یک مختصه‌ی باقیمانده ابرشـعاع است.در یک نمایش واحد می‌توان بجز ابر شعاع $D=3N-1$ مختصه‌ی دیگر را بصورت زیر نمایش داد که در آن فوق زوایا از θ_{2N+1} شروع می شوند[۱۷].

$$\Omega=\Omega(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{D-1}) \qquad (۲۰-۲)$$

در این نمایش رابطه‌ی بین D مؤلفه‌ی فضایی x_i D-1 زاویه θ_i و فوق شعاع بصورت زیر است[۱۸].

$$x=\left[\sum_{i=1}^{D}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۱-۲)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= x\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{D-1}\\
x_2 &= x\ \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{D-1}\\
&\vdots\\
x_i &= x\ \cos\theta_{i-1}\sin\theta_i\ \sin\theta_{i+1}\cdots\sin\theta_{D-1}\\
&\vdots\\
x_{D-1} &= x\ \cos\theta_{D-2}\sin\theta_{D-1}\\
x_D &= x\ \cos\theta_{D-1}
\end{aligned} \qquad (۲۲-۲)$$

که در آن $0\le x\le\infty\ ;\quad 0\le\theta_i\le\pi\quad (2\le i\le D-1)$

۲-۵-۲ معادله‌ی شرودینگر در فضای فوق کروی

عملگر لاپلاسی در D بعد بصورت زیر می‌باشد.

$$\nabla^2_{\xi_i(D)} = \frac{1}{x^{D-1}}\frac{\partial}{\partial x}x^{D-1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2_{D-1}}{x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D-1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{L^2_{D-1}}{x^2} \qquad (۲۳-۲)$$

L عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای بزرگ نامیده می‌شود. ویژه مقادیر L به‌صورت $\gamma(\gamma+D-2)$ هستند و در آن γ که عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای بزرگ نامیده می‌شود با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N}(2n_i + l_{\xi_i}), \quad n_1 = 0 \qquad (۲۴-۲)$$

n_i ها، تعداد $N-1$ عدد کوانتومی فوق‌کروی مربوط به $N-1$ فوق زاویه و l_{ξ_i} ها تعداد N عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری مربوط به هر یک از N مختصه‌ی ξ_i است.

بنابراین معادله‌ی شرودینگر در فضای فوق‌کروی را می‌توان به شکل رابطه‌ی (۲-۲۵) نوشت.

$$(H-E)\psi(x,\Omega) = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{L^2_{D-1}(\Omega)}{x^2}\right) + V(x,\Omega) - E\right)\psi(x,\Omega) = 0 \qquad (۲۵-۲)$$

تابع موج سیستم را می‌توان در پایه‌ی هماهنگ‌های فوق کروی بسط داد که بصورت زیر می‌باشد.

$$\psi(x,\Omega) = \sum_{[\gamma]} x^{-(D-1)/2} u_{[\gamma]}(x) Y_{[\gamma]}(\Omega) \qquad (۲۶-۲)$$

که $Y_{[\gamma]}(\Omega)$ها هماهنگ های فوق‌کروی و $u_{[\gamma]}(x)$ تابع موج فوق شعاعی است.

با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۲۶) در رابطه‌ی (۲-۲۵) و جمع‌بندی روی مجموعه‌ی Ω به یک مجموعه‌ی نامحدود از معادلات دیفرانسیل جفت شده مرتبه دوم می‌رسیم.

$$\psi(x,\Omega) = \sum_{[\gamma]} x^{-(D-1)/2} u_{[\gamma]}(x) Y_{[\gamma]}(\Omega) \qquad (۲۷-۲)$$

از بسط این رابطه معادله(۲-۲۸) حاصل می‌شود و از آنجایی که پتانسیل مورد استفاده‌ی ما وابستگی زاویه‌ای ندارد به معادله فوق شعاعی D بعدی (۲-۲۹) می‌رسیم[۹].

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\gamma(\gamma+D-2)+\frac{1}{4}(D-1)(D-3)}{x^2}\right]-E\right\}u_{[\gamma]}(x)$$
$$+\sum_{[\gamma']}\langle Y_{[\gamma]}|V(x,\Omega)|Y_{[\gamma']}\rangle u_{[\gamma']}(x)=0 \qquad (۲۸-۲)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\gamma(\gamma+D-2)+\frac{1}{4}(D-1)(D-3)}{x^2}\right]u_{[\gamma]}(x)+V(x)u_{[\gamma]}(x)=Eu_{[\gamma]}(x) \qquad (۲۹-۲)$$

شرط بهنجارش تابع موج فوق شعاعی $u_{[\gamma]}(x)$ نیز به صورت رابطه ی زیر بیان می گردد.

$$\sum_{[\gamma]}\int_0^\infty dx\left|u_{[\gamma]}(x)\right|^2=1 \qquad (۳۰-۲)$$

در فصل‌های بعد روش‌هایی برای حل معادله فوق شعاعی شرودینگر مربوط به برخی از ایزوتوپ‌های بریلیوم جهت بررسی طیف انرژی و شعاع باری آن‌ها را ارائه خواهیم داد.

فصل سوم

بررسی طیف انرژی ایزوتوپ‌های ^{11}Beو^{10}Be با استفاده ازحل معادله شرودینگر به روش ابرتقارن

۳-۱ مقدمه

حل تحلیلی معادله‌ی شعاعی شرودینگر در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا تابع موج تمام اطلاعات لازم درباره ی سیستم کوانتومی مورد نظر را دربرمی‌گیرد [۱۹]. تاکنون روش‌های تحلیلی زیادی از جمله ابرتقارن[۱]، NU[۲]، تقریب پکریس[۳]، قاعده ی کوانتش اصلاح شده[۴]، روش حدس جواب[۵] و ... در این زمینه ارائه شده است. روش ابرتقارن مبتنی بر استفاده از ابرپتانسیل بوده که بر این اساس می‌توانیم تابع موج حالت پایه را حساب کنیم و با استفاده از عملگرهای بالابرنده دیگر حالات سیستم را محاسبه کنیم. همچنین با استفاده از این روش می‌توان رابطه‌ای برای ویژه مقادیر انرژی بدست آورد. با داشتن تابع موج قادر به محاسبه بسیاری از خواص هسته‌ها از جمله شعاع باری نیز می‌باشیم.

۳-۲ مکانیک کوانتومی ابرتقارن

ابرتقارن که اغلب به صورت مخفف SUSY نوشته می‌شود یک مفهوم ریاضی است که از استدلال‌های تئوری به وجود آمده است. در حال حاضر یک جزء ضروری در هر نظریه وحدتی است که سعی داشته باشد توصیف واحدی از برهم‌کنش‌های اساسی موجود در طبیعت یعنی بر هم‌کنش قوی و الکتروضعیف و گرانشی ارائه کند. به صورت خلاصه ابرتقارن، تقارنی است که بوزونها و فرمیونها را به هم مرتبط می‌سازد.

طبق این نظریه بوزونها که مبادله کننده برهم‌کنش هستند با فرمیونها توسط یک ابرتقارن به هم وابسته‌اند. ابرتقارن در سال ۱۹۷۱ توسط Gel'fand و Likhtman کشف شده است. جبر درگیر در

---

[۱] Super symmetry (SUSY)

[۲] Nikiforov-Uvarov method

[۳] Pekeris approximation

[۴] Improved Quantization Rule (IQR)

[۵] Ansatz method

ابرتقارن جبر مدرج لی است که تحت ترکیبی از روابط بسته جابه‌جایی و پادجابه‌جایی است. این موضوع اولین بار در زمینه‌ی مدل‌های ریسمان برای وحدت بخشی بـه قسـمت‌های بـوزونی و فرمیـونی معرفـی شد[۲۰].

ابر تقارن در ساده‌ترین حالتش یعنی به صورت ابرتقارن مکانیک کوانتومی اولین بار توسط کوپر، فریدمن و ویتن مورد بررسی قرار گرفت. این افراد نشان دادند زمانی که مفهوم ابـر تقـارن در مکانیـک کوانتـومی استفاده می‌شود منجر به یک روش جدید برای ایجاد هامیلتونین‌هایی با طیف مشابه می‌شود.

لازم است ذکر کنیم که تاکنون هیچ شواهد تجربی از ابرتقارن بودن در طبیعت مشاهده نشده است. با این وجود در پانزده سال گذشته ایده‌های SUSY رویکردهای جدیدی در دیگر شاخه‌های فیزیک مانند اتمی، مولکولی، هسته‌ای، آماری، فیزیک ماده چگال و همچنین مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی ایجاد کرده است.

به طور ساده،SUSY شکسته نشده منجر به تبهگنی بین فرمیونها و بوزونها در یک نظریه واحد می‌شود. از آنجایی که این پدیده در طبیعت مشاهده نشده است ما نیازمند یک ابرتقارن هستیم که به خودی خـود شکسته شود و تنها در این صورت است که این مسأله می‌تواند توجیه شود. هنگامی که دانشمندان شروع به مطالعه جنبه‌های مختلف مکانیک کوانتومی ابرتقارن مکانیک کوانتومی (SUSYQM) نمودند، روشـن شد که نه فقط به خودی خود بلکه به عنوان یک مدل برای تست روش‌های نظریه میدان جالب است. در آن زمان بود که دانشمندان متوجه شدند که SUSYQM دیدی نسـبت بـه روش فـاکتورگیری Infeld و Hull می‌دهد که اولین تلاش برای دسته‌بندی مسائلی بود که بالقوه قابل حل تحلیلی بودند [۲۰].

با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی بسیاری از مسائل و پتانسیل‌هایی که به صورت تحلیلی قابل حل نیستند یا تحت شرایطی خاص قابل حل می‌باشند به آسانی حل می‌شوند. با استفاده از اصول ناوردایی

شکل به راحتی پتانسیل‌هایی مانند پاش- تلر [1] ،اکارت،ویگنر [2]- اکارت و روزن- مورس [3] حل شده‌اند.همچنین می‌توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابرتقارن در روش‌های تقریبی مانند روش وردشی بدست آورد. علاوه بر آن می‌توان با استفاده از آن معادلات پائولی و دیراک را حل کرد [۲۱] .

در سال ۱۹۸۱ ویتن برای آنکه یک مدل ساده غیر نسبیتی برای سازوکار شکست خود به خودی ابرتقارن فراهم کند، مکانیک کوانتومی ابرتقارن را بر پایه ساده‌ترین شکل جبری ممکن معرفی کرد. ما در این فصل به طور خلاصه این فرمول‌بندی و نمادگذاری را بیان خواهیم کرد.

۳-۳ هامیلتونی و پتانسیل‌های همراه

یکی از کاربردهای ابرتقارن در مکانیک کوانتومی حل معادلات کوانتومی مانند معادله‌ی شرودینگر، معادله‌ی دیراک و غیره در حضور پتانسیل‌های مختلف می‌باشد. به این شکل که می‌توان با استفاده از پتانسیل‌های ساده، پتانسیل‌های مشکل را ساخت و ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیل‌های حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیل‌های حل نشده تبدیل کرد. این روش کم و بیش شبیه حل نوسانگر هارمونیک یک بعدی است که در آن با استفاده از عملگرهای نردبانی A و $A^{\dagger}$ و با داشتن تابع موج حالت پایه می‌توان توابع موج مراتب بالاتر را بدست آورد.

هامیلتونی یک بعدی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱-Pöschl–Teller

۲- Eckart-Wigner

۳ - Rosen–Morse

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \qquad (۱-۳)$$

که ویژه توابع آن را با $\psi_n(x)$ و ویژه مقادیر آن را با E_n نمایش می‌دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x) \qquad (۲-۳)$$

که در آن E_0 انرژی حالت پایه است. حال $V_1(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \qquad (۳-۳)$$

در این صورت هامیلتنی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ عبارت است از:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \qquad (۴-۳)$$

واضح است که مقدار انرژی حالت پایه‌ی این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی هامیلتونی H به اندازه E_0 کاهش یافته است و چون $V(x)$ و $V_1(x)$ به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین دارای ویژه توابع یکسانی هستند اگر ویژه مقدار انرژی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$، $E_n^{(1)}$ و ویژه تابع آن $\psi_n^{(1)}(x)$ باشد داریم:

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0 \qquad (۵-۳)$$

$$\psi_n^{(1)}(x) = \psi_n(x) \qquad (۶-۳)$$

گام اول در این روش فاکتوربندی هامیلتونی است. با فرض اینکه انرژی حالت پایه صفر باشد می‌توان هامیلتونی یک بعدی $H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$ را به صورت $H_1 = A^\dagger A$ یعنی حاصلضرب دو عملگر A و $A^\dagger$ نوشت که عبارتند از:

$$A^{\dagger}=\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W(x) \qquad (۷-۳)$$

$$A=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W(x) \qquad (۸-۳)$$

که *W(x)* را " ابر پتانسیل" می‌نامند. با جایگذاری این روابط در هامیلتونی H_1 می‌توان به رابطه زیر که یک معادله ریکاتی است دست یافت.

$$V_1(x)=W^2(x)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \qquad (۹-۳)$$

چون انرژی حالت پایه صفر است داریم:

$$A\psi_0^1(\mathrm{x})=\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W(x)\right)\psi_0^1(\mathrm{x}) \qquad (۱۰-۳)$$

W (x) بر حسب تابع موج حالت پایه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad \Rightarrow \quad \psi_0(x)=N_0\exp(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^{x}W(\mathrm{y})\,dy) \qquad (۱۱-۳)$$

که N_0 ضریب بهنجارش می‌باشد.

با معکوس کردن ترتیب عملگرهای A و $A^{\dagger}$ می‌توان یک هامیلتونی جدید به صورت $H_2=AA^{\dagger}$ ایجاد کرد که با انجام محاسبات مشابه پتانسیل جدید $V_2(x)$ که وابسته به ابرپتانسیل است به دست خواهد آمد:

$$V_2(x)=W^2(x)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \qquad (۱۲-۳)$$

پتانسیل‌های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ را "پتانسیل‌های همتای ابرتقارنی" می‌نامند. این پتانسیل‌های ناوردا شکل

(SIP) باید در شرط زیر صدق کنند:

$$V_2(x;a_1)=V_1(x;a_2)+\mathrm{R}(a_1) \qquad (۱۳-۳)$$

که در این رابطه a_1 و a_2 دو گروه از پارامترها هستند که از طریق روابطی چون $a_2=f\ (a_1)$ به هم مربوط می‌شوند.در واقع این همان اصول ناوردایی شکل است که اولین بار در سال ۱۹۳۰ توسط گلدشتاین معرفی شد و بیان می‌کند که " اگر بتوان پتانسیل‌های همراه را توسط نگاشت متغییرهای آن به صورتی تبدیل کرد که اختلاف آنها تنها در یک مقدار ثابت باشد، آنگاه ویژه مقادیر انرژی حالت‌های بالاتر هامیلتونی H_1 به سادگی توسط رابطه زیر بدست می‌آیند":

$$E_n^{(1)}(a_1)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{R}(a_k) \qquad (۱۴-۳)$$

سپس با استفاده از معادله (۳-۵) می‌توان کل طیف انرژی هامیلتونی H را نیز به دست آورد.

برای یافتن توابع موج مراتب بالاتر می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد [۲۲،۲۳،۲۴].

$$\psi_n^{(1)}(x;a_1)=A^{\dagger}(x;a_1)\psi_{n-1}^{(1)}(x;a_2) \qquad (۱۵-۳)$$

۳-۴ بریلیوم

در فیزیک هسته‌ای بریلیوم دارای هسته‌ای با ۴ پروتون می‌باشد و دارای ۱۲ ایزوتوپ شناخته‌شده از جمله ^{9}Be،^{10}Be، ^{11}Be است که از بین آنها تنها ^{9}Beپایدار می‌باشد. بریلیوم به صورت ترکیبات و آلیاژها کاربردهای مختلفی دارد از جمله اینکه در ابزارهای دفاعی، فضانوردی، ماهواره‌ها، سیستم‌های اندازه‌گیری رادارهای الکتریکی و همچنین به عنوان منعکس‌کننده و متعادل کننده در رآکتورهای هسته‌ای استفاده می‌شود. به همین دلیل محققان فیزیک نظری علاقه‌مند هستند تا خواص هسته‌ی این عنصر مهم و

برجسته را مورد مطالعه قرار دهند. خواص استاتیکی،خواص الکتریکی از این جمله می‌باشند کـه شـعاع باری و طیف انرژی هسته را نیز در بر می‌گیرد. ^{10}Be هسته‌ای با ۴ پروتون و ۶ نوترون می‌باشد که یـک هسته‌ی زوج ـ زوج است و اسپین پاریته‌ی حالت پایه آن به صورت $J^P = 0^+$ است، که این امر به دلیل تمایل قوی نوکلئون‌ها برای جفت شدگی می‌باشد. ^{11}Be هسته‌ای با تعداد پروتون زوج (۴) و تعداد نوترون فرد (۷) می‌باشد و اسپین پاریته آن را آخرین نوترون فرد تعیین می‌کند که به صورت $J^p = (\frac{1}{2})^-$ است.

۳-۵ محاسبه طیف انرژی و توابع موج ایزوتوپ‌های بریلیوم

برای محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های زوج –زوج یک هسته‌ی مرکزی در نظر می‌گیریم که هم عدد نوترونی و هم عدد پروتونی آن از جمله اعداد جادویی باشد (۲،۸،۲۰،۲۸،۵۰،۸۲،۱۲۶) [۲۵].

برای ایزوتوپ‌های زوج –زوج هلیوم چنین ویژگی دارد یعنی دارای دو پروتون و دو نوترون می‌باشد، لذا در رابطه با ایزوتوپ ^{10}Be اگر هلیوم را به عنوان پوسته‌ی پایدار مرکزی بگیریم ۶ نوکلئون ظرفیت را برای محاسبه انرژی حالت پایه در نظر می‌گیریم و یک سیستم ۶ ذره‌ای خواهیم داشت.

برای ایزوتوپ‌های زوج – فرد به این شکل عمل می‌کنیم که تنها نوترون تزویج نشده در تراز آخر را در نظر می‌گیریم پس برای ^{11}Be تک نوترون مزدوج نشده در تراز $1p_{1/2}$ را برای محاسبه طیف انرژی آن به کار می‌بریم و با یک سیستم نوترون منفرد سرو کار داریم.

معادله فوق شعاعی شرودینگر در D بعد به صورت زیر است:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{D-1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{l(l+D-2)}{x^2}\right)+V(x)\right]R_{nl}(x)=\mathrm{E}R_{nl}(x) \qquad (۱۶-۳)$$

که در این رابطه $D=3N-3$ که N تعداد ذرات سیستم، μ جرم کاهش یافته و x فوق شعاع مربوط به مختصات ژاکوبی برای سیستم‌های چند ذره‌ای است و l عدد کوانتومی زاویه‌ای کل است.

با اعمال تغییر متغیر $u_{nl}(x)=x^{\frac{D-1}{2}}R_{nl}(x)$ برای ایزوتوپ ^{10}Be معادله (۳-۱۶) به صورت (۳-۱۹) تبدیل می‌شود:

$$D=(3\times 6)-3=15 \qquad (۱۷-۳)$$

$$\frac{dR_{nl}}{dx}=\frac{du}{dx}x^{-7}-7x^{-8}u \qquad \frac{d^2R_{nl}}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}x^{-7}-14x^{-8}\frac{du}{dx}+56x^{-9}u \qquad (۱۸-۳)$$

$$\frac{d^2u_{nl}(x)}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\mathrm{E}-V(x)-\frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu x^2}\right)u_{nl}(x)=0 \qquad (۱۹-۳)$$

پتانسیل $V(x)$ را به صورت مجموع پتانسیل وودز - ساکسون و پتانسیل یوکاوا در نظر گرفته‌ایم.

$$V(x)=-V_0\frac{\exp(-kx)}{x}-\frac{V_0'}{1+\exp(\frac{x-R_0}{a})} \qquad (۲۰-۳)$$

که R_0 شعاع هسته‌ای و به صورت $R_0=r_0A^{\frac{1}{3}}$ است که A جرم اتمی و برابر است با مجموع جرم پروتون‌ها (Z) ونوترون‌ها (N). V_0' عمق چاه پتانسیل وودز - ساکسون و V_0 قدرت چاه پتانسیل یوکاوا می‌باشد و k که به جرم ذره میدان بستگی دارد با توجه به جرم سکون پایون ($M_\pi c^2=140\ MeV$) مقدار k برای نیروی هسته ای برابر $0.7\ fm^{-1}$ به‌دست می‌آید و تعیین کننده برد نیرو است، a ضخامت سطح هسته نام دارد که با مقادیرتجربی انرژی یونیزاسیون تنظیم شده است ($a\approx 0.5\text{-}0.6$ fm)[۲۶،۲۷].

اگر پتانسیل مؤثر را به صورت(۳-۲۱) تعریف کنیم:

$$V_{eff}(x) = V(x) + \frac{\hbar^2 (l+6)(l+7)}{2\mu x^2} \qquad (۳-۲۱)$$

داریم:

$$\frac{d^2 u_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\mathrm{E} + V_0 \frac{\exp(-kx)}{x} + \frac{V_0'}{1+\exp(\frac{x-R_0}{a})} - \frac{\hbar^2 (l+6)(l+7)}{2\mu x^2} \right) u_{nl}(x) = 0 \qquad (۳-۲۲)$$

با استفاده از تقریب پکریس جمله‌ی مربوط به پتانسیل یوکاوا و معکوس مربعی را بر حسب توان‌هـایی از پتاسیل وودز - ساکسون می‌نویسیم که نوعی معادل‌سازی می‌باشد [۲۸،۲۹].

با در نظر گرفتن تبدیلات

$$z = \frac{(x-R_0)}{R_0}\ ,\ \alpha = \frac{R_0}{a}\ ,\quad x \in (0,\infty) \to z \in (-1,\infty) \qquad (۳-۲۳)$$

داریم:

$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{1}{R_0^2}\left[d_0' + d_1' \frac{1}{1+e^{\alpha z}} + d_2' \frac{1}{(1+e^{\alpha z})^2} \right] \qquad (۳-۲۴)$$

$$\frac{1}{x\ \exp(\mathrm{kx})} \approx \left[d_0 + d_1 \frac{1}{1+e^{\alpha z}} + d_2 \frac{1}{(1+e^{\alpha z})^2} \right] \qquad (۳-۲۵)$$

بـرای محاسـبه ضـرایب d_2, d_1, d_0 بسـط $\frac{1}{x\ \exp(\mathrm{kx})}$ را حـول شـعاع هسـته ($x \approx R_0$ یـا $z = 0$)

می‌نویسیم و همچنین برای محاسبه‌ی ضرایب d_2', d_1', d_0' باز هم باید بسط $\frac{1}{x^2}$ را حول شعاع هسته ($x \approx R_0$ یا $z=0$) بنویسیم که بصورت کامل در فصل چهارم به محاسبه‌ی این ضرایب پرداخته‌ایم و اینجا از نتایج بدست آمده استفاده خواهیم کرد.

با توجه به بحث‌های ذکر شده معادله (۳-۲۲) به شکل (۳-۲۶) تبدیل خواهد شد.

$$\frac{d^2u_{nl}(z)}{dz^2}+\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(\mathrm{E}+\frac{V_0'}{1+\exp(\alpha z)}-\delta \mathrm{d}_0'-\frac{\delta \mathrm{d}_1'}{1+\exp(\alpha z)}-\frac{\delta d_2'}{(1+\exp(\alpha z))^2}$$
$$+V_0\ \mathrm{d}_0+\frac{V_0\mathrm{d}_1}{1+\exp(\alpha z)}+\frac{V_0\mathrm{d}_2}{(1+\exp(\alpha z))^2})u_{nl}(\mathrm{z})=0 \qquad (۳-۲۶)$$

$$\frac{d^2u_{nl}(z)}{dz^2}+(\varepsilon+\frac{\beta}{1+\exp(\alpha z)}-\frac{\gamma}{(1+\exp(\alpha z))^2})u_{nl}(z)=0 \qquad (۳-۲۷)$$

که در آن

$$\delta=\frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}(\mathrm{l}+6)(l+7)\ ,\ \varepsilon=\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(\mathrm{E}-\delta \mathrm{d}_0'+V_0\mathrm{d}_0)$$
$$\beta=\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(V_0'-\delta d_1'+V_0\ \mathrm{d}_1)\ ,\ \gamma=\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(\delta d_2'-V_0\mathrm{d}_2) \qquad (۳-۲۸)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از روش ابرتقارن معادله‌ی (۳-۲۷) را حل کنیم.

با توجه به توضیحاتی که در قسمت ۳-۳ ارائه دادیم، ابر پتانسیل زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$W_1(z)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}(A+\frac{B}{1+\exp(\alpha z)}) \qquad (۳-۲۹)$$

که در آن μ جرم کاهش یافته و A و B پارامترهایی ثابت هستند. با قردادن این ابر پتانسیل در رابطه‌ی

(۳-۹) داریم:

$$V_1(z)=W^2(z)-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}W'(z)=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[A^2+\frac{B^2}{(1+\exp(\alpha z))^2}+\frac{2AB}{1+\exp(\alpha z)}-\frac{\alpha B\exp(\alpha z)}{(1+\exp(\alpha z))^2}\right] \quad (۳-۳۰)$$

و با توجه به (۳-۳) داریم:

$$V_1(z)=V_{eff}(z)-E_0=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(-\varepsilon-\frac{\beta}{1+\exp(\alpha z)}+\frac{\gamma}{(1+\exp(\alpha z))^2}\right) \quad (۳-۳۱)$$

از مقایسه (۳-۳۰) و (۳-۳۱) انرژی حالت پایه و پارامترهای A و B بدست می‌آیند.

$$A^2=-\varepsilon \quad , \quad 2AB-\alpha B=-\beta \quad , \quad B^2+\alpha B=\gamma \quad (۳-۳۲)$$

$$E_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}\left(\frac{-\beta}{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\delta d_0'-V_0\, d_0 \quad (۳-۳۳)$$

$$A=\frac{-\beta}{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2} \quad , \quad B=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}{2} \quad (۳-۳۴)$$

ما در روابط بالا علامت مثبت را به طور اختیاری انتخاب می‌کنیم البته با این انتخاب ویژه توابع بهترین رفتار را از مبدأ تا بینهایت خواهند داشت.

با توجه به رابطه (۳-۱۱) و با انجام محاسبات عددی و انتخاب ضرایب مناسب ویژه تابع حالت پایه برای ایزوتوپ ^{10}Be به صورت زیر بدست می‌آید.

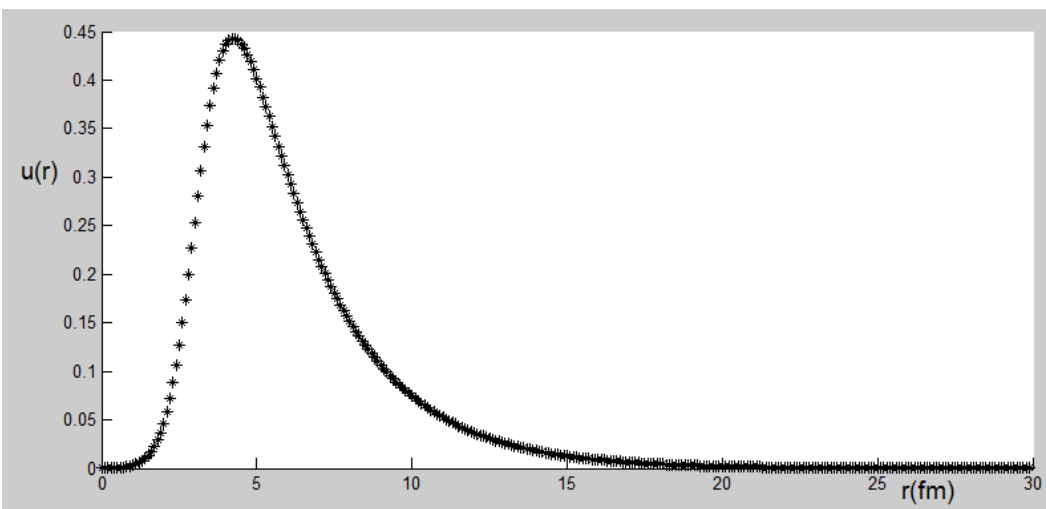
$$u_0^{(1)}(z) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\int^{z} W(z')dz'\right) = N_0 \exp(\mathrm{A}\,z)\left(1+(\exp(-\alpha\,z))\right)^{-B/\alpha} \qquad (۳۵-۳)$$

در نهایت تابع موج حالت پایه عبارت است از:

$$R_0^{(1)}(x) = \frac{N_0}{x^7}\exp\left(\left(\frac{-\beta}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{x-R_0}{R_0}\right)\right)\times\left(1+(\exp[-(\frac{x-R_0}{a})]\right)^{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}{-2\alpha}} \qquad (۳۶-۳)$$

که در آن N_0 ضریب بهنجارش است.

با جایگذاری پارامترها شکل تابع موج حالت پایه برای ^{10}Be بصورت زیر می‌باشد.



شکل ۳-۱:نمودار مربوط به تابع موج حالت پایه برای ^{10}Be

۳-۵-۱ محاسبه‌ی انرژی و توابع موج مربوط به حالت‌های برانگیخته

با داشتن $V_1(z)$ و $V_2(z)$ و با استفاده از روابط زیر توابع موج حالت‌های برانگیخته قابل محاسبه

هستند.

$$V_2(z;a_1)=V_1(z;a_2)+R(a_1) \qquad (۳۷-۳)$$

$$u_n^{(1)}(z;a_1)=A^{\dagger}(z;a_1)u_{n-1}^{(1)}(z;a_2) \qquad A^{\dagger}=\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dz}+W(z) \qquad (۳۸-۳)$$

$V_1(z)$ در رابطه‌ی (۳-۳۰) آمده است و $V_2(z)$ عبارت است از:

$$V_2(z)=W^2(z)+\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(z)=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[A^2+\frac{B^2}{(1+\exp(\alpha z))^2}+\frac{2AB}{1+\exp(\alpha z)}+\frac{\alpha B\exp(\alpha z)}{(1+\exp(\alpha z))^2}\right] \qquad (۳۹-۳)$$

برای محاسبه‌ی توابع موج حالات برانگیخته، ابتدا باید رابطه‌ی بین پارامترهای a_1 و a_2 را بدست آوریم، به همین دلیل پارامتر B در پتانسیل رابطه‌ی (۳-۳۹) را به a_1 و در پتانسیل رابطه‌ی (۳-۳۰) به a_2 تغییر می‌دهیم و در رابطه‌ی (۳-۳۷) جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[A^2+\frac{a_1^2}{(1+\exp(\alpha z))^2}+\frac{2Aa_1}{1+\exp(\alpha z)}+\frac{\alpha a_1\exp(\alpha z)}{(1+\exp(\alpha z))^2}\right]=\\&\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[A^2+\frac{a_2^2}{(1+\exp(\alpha z))^2}+\frac{2Aa_2}{1+\exp(\alpha z)}-\frac{\alpha a_2\exp(\alpha z)}{(1+\exp(\alpha z))^2}\right]+R(a_1)\end{aligned} \qquad (۴۰-۳)$$

از آنجایی که $a_2=f(a_1)$ لذا تنها جملات وابسته به z را در نظر می‌گیریم که خواهیم داشت:

$$a_2=f(a_1)=B-\alpha \quad \text{که} \quad a_1=\alpha \qquad (۴۱-۳)$$

حال با توجه به رابطه‌ی (۳-۳۸) توابع موج حالات برانگیخته را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}u_1^{(1)}(z;a_1)&=\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dz}u_0^{(1)}(z;a_2)+W(z)u_0^{(1)}(z;a_2)\\&=\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dz}u_0^{(1)}(z;B-\alpha)+W(z)u_0^{(1)}(z;B-\alpha)\end{aligned} \qquad (۴۲-۳)$$

$$u_1^{(1)}(z\,;B)=\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dz}\left[N_0\exp(\mathrm{A}\,\mathrm{z})\left(1+\exp(-\alpha\,\mathrm{z})\right)^{-(B-\alpha)/\alpha}\right]$$
$$+W\,(z)\left[N_0\exp(\mathrm{A}\,\mathrm{z})\left(1+\exp(-\alpha\,\mathrm{z})\right)^{-(B-\alpha)/\alpha}\right] \qquad (۴۳\text{-}۳)$$
$$=-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left[N_0\exp(\mathrm{A}\,\mathrm{z})\left(1+\exp(-\alpha\,\mathrm{z})\right)^{1-B/\alpha}\right]\left[A+\left(\frac{B}{1+\exp(\alpha\,\mathrm{z})}+A\right)+\frac{(\mathrm{B}-\alpha)}{(1+\exp(\alpha\,\mathrm{z}))}\right]$$

بنابراین تابع موج اولین حالت برانگیخته عبارت است از:

$$R_1^{(1)}(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{N_0}{x^7}\left[\exp\left(\mathrm{A}(\frac{x-R_0}{R_0})\right)\left(1+\exp\left(-(\frac{x-R_0}{a})\right)\right)^{1-B/\alpha}\right]$$
$$\times\left[A+\left(\frac{B}{1+\exp(\frac{x-R_0}{a})}+A\right)+\frac{\left(\mathrm{B}-\alpha\right)}{\left(1+\exp(\frac{x-R_0}{a})\right)}\right] \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

برای محاسبه‌ی انرژی ترازهای برانگیخته با جایگذاری $A=\frac{\gamma-\beta}{2B}-\frac{B}{2}$ در رابطه‌ی (۳-۳۰) و (۳-۳۹) و با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۷) داریم:

$$R(\mathrm{a}_1)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-\alpha)}-\frac{B-\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\beta}{2B}-\frac{B}{2}\right)^2\right] \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

$$R(\mathrm{a}_i)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-i\,\alpha)}-\frac{B-i\,\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-(i-1)\alpha)}-\frac{B-(i-1)\alpha}{2}\right)^2\right] \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

با توجه به اینکه $E_n^{(1)}=0$ و همچنین با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۳-۱۴) می‌توانیم ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی H_1 را به طور کامل بدست آوریم و سپس با استفاده از رابطه‌ی (۳-۵) ویژه مقادیر انرژی معادله (۳-۲۶) قابل محاسبه می‌باشند.

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-n\alpha)}-\frac{B-n\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\beta}{2B}-\frac{B}{2}\right)^2+\left(\frac{-\beta}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]+\delta d_0{}' - V_0\, d_0 \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

در جدول ۳-۱ نتایج مربوط به طیف انرژی ایزوتوپ ^{10}Be کـه بـا اسـتفاده از روابـط (۳-۳۳) و (۳-۴۷) بدست می‌آید را نشان داده‌ایم.

جدول ۳-۱: اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{10}Be به روش ابر تقارن با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا

(n , l)	V_0 (MeV)	$V_0{}'(MeV)$	$a\,(fm)$	$k\ (fm^{-1})$	حل تحلیلی ما به روش ابرتقارن(MeV)	مقدار تجربی [۴۱و۴۲]
(۱و۱)	۴۹	۳۲	۰,۲۵	۰,۷	۶۲,۰۰۱	۶۴,۹۷۹
(۲و۰)	۶۵	۳۳	۰,۲۹	۰,۷	۶۰,۰۱۸	۶۱,۶۱۱

^{11}Be:

همانطور که قبلا گفتیم برای ایزوتوپ‌های زوج – فرد به این شکل عمل می‌کنیم که تنها نوترون تزویج نشده در تراز آخر را در نظر می‌گیریم پس برای ^{11}Be تک نوترون مزدوج نشده در تـراز $1p_{1/2}$ را بـرای محاسبه طیف انرژی آن به کار می‌بریم و با یک سیستم نوترون منفرد سرو کار داریم.

مسأله را با این فرض حل می‌کنیم که سیستم مورد بررسی ما یک سیستم دو جسمی متشـکل از یـک نوترون منفرد و یک هسته است[۳۰].

رابطه (۳-۱۶) با در نظر گرفتن $D=3N-3=3$ بصورت زیر درمی‌آید:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}-\frac{l(l+1)}{x^2}\right)+V(x)\right]R_{nl}(x)=\mathrm{E}\,R_{nl}(x) \qquad (۳-۴۸)$$

با اعمال تغییر متغیر $u_{nl}(x)=x^{\frac{D-1}{2}}R_{nl}(x)$ داریم:

$$\frac{d^2u_{nl}(x)}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\mathrm{E}-V(x)-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu x^2}\right)u_{nl}(x)=0 \qquad (۳-۴۹)$$

همانند بخش ۳-۴ با معرفی پتانسیل بین نوکلئونی بصورت $V(x)=-V_0\frac{\exp(-k\,x)}{r}-\frac{V_0'}{1+\exp(\frac{x-R_0}{a})}$

و درنظر گرفتن پتانسیل مؤثر بصورت $V_{eff}(x)=V(x)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu x^2}$ داریم:

$$\frac{d^2u_{nl}(x)}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\mathrm{E}+V_0\frac{\exp(-kx)}{x}+\frac{V_0'}{1+\exp(\frac{x-R_0}{a})}-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu x^2}\right)u_{nl}(x)=0 \qquad (۳-۵۰)$$

از این پس به همان صورت که انرژی و توابع موج را برای ^{10}Be بدست آوردیم عمل می‌کنیم و معادلاتی مشابه (۳-۳۳) و (۳-۴۷) را برای انرژی‌های حالات پایه و برانگیخته خواهیم داشت و تنها تفاوت موجـود در مقدار ضرایب و پارامترها است که بصورت زیر می‌باشند.

$$E_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}\left(\frac{-\beta}{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\delta d_0'-V_0\,d_0 \qquad (۳-۵۱)$$

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-n\alpha)}-\frac{B-n\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\beta}{2B}-\frac{B}{2}\right)^2+\left(\frac{-\beta}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]+\delta d_0{}' - V_0\, d_0 \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

$$\delta = \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2} l\,(l+1) \qquad \varepsilon = \frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(\mathrm{E}-\delta\,\mathrm{d}_0{}' + V_0\,\mathrm{d}_0)$$

$$\beta = \frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(V_0{}' - \delta d_1{}' + V_0\,\mathrm{d}_1) \qquad \gamma = \frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}(\delta d_2{}' - V_0\,\mathrm{d}_2) \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

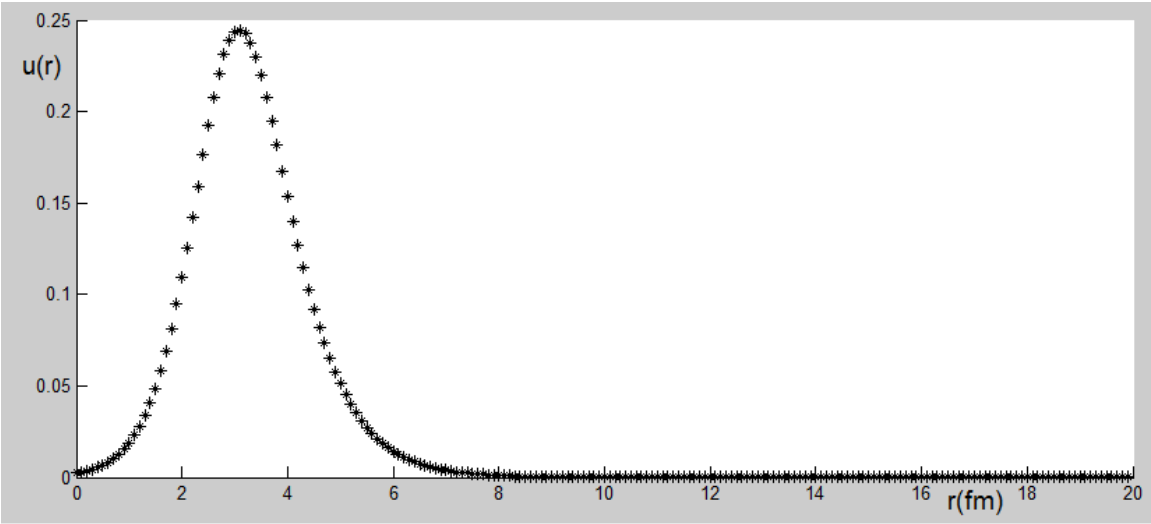
با توجه به آنچه در بخش ۳-۵ گفته شد توابع موج حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ^{11}Be به شکل زیر خواهد بود.

$$R_0^{(1)}(x) = \frac{N_0}{x}\exp\left((\frac{-\beta}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}+\frac{\alpha}{2})(\frac{x-R_0}{R_0})\right)\times\left(1+(\exp[-(\frac{x-R_0}{a})]\right)^{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}}{-2\alpha}} \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

$$R_1^{(1)}(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{N_0}{x}\left[\exp\left(\mathrm{A}(\frac{x-R_0}{R_0})\right)\left(1+\exp\left(-(\frac{x-R_0}{a})\right)\right)^{1-B/\alpha}\right]$$

$$\times\left[A+\left(\frac{B}{1+\exp(\frac{x-R_0}{a})}+A\right)+\frac{(\mathrm{B}-\alpha)}{\left(1+\exp(\frac{x-R_0}{a})\right)}\right] \qquad (۵۵\text{-}۳)$$

شکل تابع موج حالت پایه با لحاظ کردن پارامترها برای ^{11}Be بصورت زیر می‌باشد.



شکل ۳-۲ :نمودار مربوط به تابع موج حالت پایه برای ^{11}Be

اکنون نتایج مربوط به ترازهای انرژی ^{11}Be را درجدول ۳-۲ نشان می‌دهیم.

جدول ۳-۲: اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{11}Be بـه روش ابرتقـارن بـا در نظـر گـرفتن پتانسـیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا

(n , l)	V_0 (MeV)	$V_0'(MeV)$	$a(fm)$	$k\ (fm^{-1})$	حل تحلیلی ما به روش ابرتقارن(MeV)	مقدار تجربی [۴۱و۴۲]
(۱و۱)	۴۸	۳۳	۰,۶۱	۰,۷	۶۵,۷۶۱	۶۵,۱۶۲
(۱و۰)	۴۸	۵۴	۰,۵۸	۰,۷	۶۳,۷۳۷	۶۵,۴۸۳

۳-۶ محاسبه‌ی ترازهای انرژی ^{11}Be و ^{10}Be با پتانسیل یوکاوا

اکنون پتانسیلی که استفاده می کنیم پتانسیل یوکاوا است که پس از استفاده از بسـط تیلـور بـه شکل زیر در می آید:

$$V\ (\mathrm{r}) = -V_0 \frac{\exp(-kr)}{r} = -V_0 \frac{(1-kr)}{r} = -\frac{V_0}{r} + kV_0 \qquad (۵۶-۳)$$

با تعریف $\delta = \frac{\hbar^2}{2\mu}(\mathrm{l}+6)(l+7)$ معادله شرودینگر برای ^{10}Be بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2 u_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\mathrm{E} - kV_0 + \frac{V_0}{x} - \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu x^2}\right)u_{nl}(x) = 0 \qquad (۵۷-۳)$$

معادله بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d^2 u_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{x} - \frac{\gamma}{x^2}\right)u_{nl}(x) = 0 \qquad (۵۸-۳)$$

که پارامترها به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2\mu}{\hbar^2}(\mathrm{E} - kV_0) \\ \beta &= \frac{4\mu}{\hbar^2}V_0 \\ \gamma &= \frac{2\mu}{\hbar^2}\delta \end{aligned} \qquad (۵۹-۳)$$

اکنون ابرپتانسیل را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$W_1(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}(A + \frac{B}{x}) \qquad (۶۰-۳)$$

با جایگذاری ابرپتانسیل در معادله‌ی (۳-۹) خواهیم داشت :

$$(A^2 + \frac{B^2}{x^2} + \frac{2AB}{x} - \frac{B}{x^2}) = (-\varepsilon - \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}) \qquad (۶۱-۳)$$

با مساوی قرار دادن طرفین معادله (۳-۶۱) داریم:

$$A^2 = -\varepsilon \quad , \quad 2AB = -\beta \quad , \; B^2 - B = \gamma \qquad (۶۲-۳)$$

با حل این دستگاه انرژی حالت پایه به صورت زیر بدست می آید :

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{-\beta}{1 \pm \sqrt{1+4\gamma}}\right)^2 + kV_0 \qquad (۶۳-۳)$$

با در نظر گرفتن $k = 0.8(fm)^{-1}$ و $V_0 = 82(MeV)$ مقدار انرژی حالت پایه (MeV) 63.066 بدست می‌آید که تطابق خوبی با تجربه دارد.

برای محاسبه‌ی انرژی ترازهای برانگیخته همانند آنچه در قسمت ۳-۵-۱ گفته شد عمل می‌کنیم با انجام محاسبات مشابه در نهایت رابطه‌ی انرژی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{-\beta}{2((B-n\alpha)^2-\gamma)}\right)^2 - \left(\frac{-\beta}{2(B^2-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{-\beta}{1+\sqrt{1+4\gamma}}\right)^2\right] + kV_0 \qquad (۶۴-۳)$$

که با در نظر گرفتن $k = 0.8(fm)^{-1}$ ، $V_0 = 76(MeV)$ و $a = 0.50(fm)$ مقدار انرژی اولین حالت برانگیخته (MeV) 60.701 بدست می‌آید که تطابق خوبی با تجربه دارد.

جدول ۳-۳: اندازه‌ی انرژی ترازهای ^{10}Be به روش ابرتقارن با پتانسیل یوکاوا

(n , l)	V_0 (MeV)	$a\,(fm)$	$k\ (fm^{-1})$	حل تحلیلی ما به روش ابرتقارن(MeV)	مقدار تجربی [۴۱و۴۲]
(۱و۱)	۸۲	۰,۵۲	۰,۸	۶۳,۰۶۶	۶۴,۹۷۹
(۰و۲)	۷۶	۰,۵۰	۰,۸	۶۰,۷۰۱	۶۱,۶۱۱

با تعریف $\delta = \frac{\hbar^2}{2\mu} l\,(l+1)$ معادله شرودینگر برای ^{11}Be بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2u_{nl}(x)}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\mathrm{E}-kV_0+\frac{V_0}{x}-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu x^2}\right)u_{nl}(x)=0 \qquad (۶۵-۳)$$

از این پس همانند آنچه برای محاسبه طیف انرژی ^{10}Be گفته شد عمل می‌کنیم و معادلاتی مشابه (۳-۶۳) و (۳-۶۴) خواهیم داشت .تنها تفاوت در مقدار δ تعریف شده می‌باشد.

جدول ۳-۴: اندازه‌ی انرژی ترازهای ^{11}Be به روش ابرتقارن با پتانسیل یوکاوا

(n , l)	V_0 (MeV)	$a\,(fm)$	$k\ (fm^{-1})$	حل تحلیلی ما به روش ابرتقارن(MeV)	مقدار تجربی [۴۱و۴۲]
(۱و۱)	۹۵	۰,۶۸	۱,۲	۵۹,۵۹۵	۶۵,۱۶۲
(۱و۰)	۵۸	۰,۶۵	۱,۱	۶۳,۰۹۶	۶۵,۴۸۳

۳-۷ محاسبه‌ی شعاع باری ایزوتوپ‌های ^{11}Beو^{10}Be:

برای محاسبه‌ی شعاع باری نیاز به دانستن تابع موج است پس در این قسمت با استفاده از توابع موج محاسبه شده در بخش قبل، شعاع باری این ایزوتوپ‌ها را محاسبه خواهیم کرد.

ریشه‌ی میانگین مربعی شعاع باری [۱] را می‌توان با استفاده از تعریف ابرشعاع محاسبه نمود. می‌توانیم ریشه‌ی میانگین مربعی شعاع را به صورت ریشه‌ی میانگین مربعی مجموع فواصل مرکز جرم از هر کدام از ذرات سیستم تعریف کنیم.

$$\left\langle R_{rms}^2\right\rangle^{\frac{1}{2}}=\left\langle\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}(\mathbf{r}_i-\mathbf{R})^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (۶۶-۳)$$

از طرفی طبق رابطه (۲-۱۹) داریم:

۱- Rms radius charge

$$x^2 = 2\sum_{i=1}^{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2 \qquad (۶۷-۳)$$

برای ^{11}Beو^{10}Be داریم

$$\begin{aligned} {}^{10}Be: \quad R_{rms} &= \frac{\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{12}} \\ {}^{11}Be: \quad R_{rms} &= \frac{\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}} \end{aligned} \qquad (۶۸-۳)$$

مقدار میانگین مربعی ابرشعاع $\langle x^2 \rangle$ از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int \psi^*(x) x^2 \psi(x) d^3x}{\int \psi^*(x)\psi(x) d^3x} \qquad (۶۹-۳)$$

با توجه به معادله (۲-۲۶) که تابع موج را در پایه‌ی هماهنگ‌های فوق کروی بسط می‌دادیم، داریم.

$$\langle x^2 \rangle_{^{10}Be} = \frac{\int_0^\infty x^{-7} u^*(x) x^2 u(x) x^7 dx \int Y_\gamma^*(\Omega) Y(\Omega) d\Omega}{\int_0^\infty x^{-5} u^*(x) u(x) x^5 dx \int Y_\gamma^*(\Omega) Y(\Omega) d\Omega} = \frac{\int_0^\infty x^2 |u(x)|^2 dx}{\int_0^\infty |u(x)|^2 dx} \qquad (۷۰-۳)$$

$$\langle x^2 \rangle_{^{11}Be} = \frac{\int_0^\infty x u^*(x) x^2 u(x) x\, dx \int Y_\gamma^*(\Omega) Y(\Omega) d\Omega}{\int_0^\infty x u^*(x) u(x) x\, dx \int Y_\gamma^*(\Omega) Y(\Omega) d\Omega} = \frac{\int_0^\infty x^2 |u(x)|^2 dx}{\int_0^\infty |u(x)|^2 dx} \qquad (۷۱-۳)$$

$$\begin{aligned} {}^{10}Be: \quad R_{rms} &= \frac{\langle x^2 \rangle_{^{10}Be}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{12}} = 1.47\,(fm) \\ {}^{11}Be: \quad R_{rms} &= \frac{\langle x^2 \rangle_{^{11}Be}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}} = 1.67\,(fm) \end{aligned} \qquad (۷۲-۳)$$

نتایج مربوط به شعاع باری با جایگذاری رابطه‌ی(۳-۳۵) در (۳-۷۱) و (۳-۷۲) برای دو ایزوتوپ بریلیوم

قابل محاسبه است که نتایج مربوط را در جدول ۳-۵ آورده‌ایم.

جدول ۳-۵ :شعاع باری مربوط به ایزوتوپ‌های ^{10}Be و ^{11}Be برای پتانسیل یوکاوا بعلاوه وودز -ساکسون

هسته	$a\,(fm)$	V_0 (MeV)	$V_0'\,(MeV)$	$k\ (fm^{-1})$	شعاع باری (fm)	مقدار تجربی شعاع باری (fm) [۴۳]
^{10}Be	۰,۴۶	۶۰	۳۳	۰,۷	۱,۴۷	۲,۳۵
^{11}Be	۰,۶۱	۴۸	۳۳	۰,۷	۱,۶۷	۲,۴۶

همانطور که می‌بینیم بین مقادیر تجربی و مقادیر تحلیلی محاسبه شده، اندکی اختلاف وجود دارد. می‌توان گفت با پتانسیل‌های مرکزی بیش از این نمی‌توان به یک هماهنگی میان انرژی و شعاع باری دست یافت. نتایج حاکی از آن است که محاسبات ما مقدار شعاع باری را اندکی کمتر از مقادیر تجربی پیش‌بینی می‌کند.

برای هماهنگی بیشتر باید جملات شامل اثرات اسپینی، پتانسیل‌های تانسوری که حالات تکانه‌ی زاویه‌ای آمیخته را در تابع موج حالت پایه، وارد محاسبات می‌کنند به پتانسیل اضافه کرد که کار را بسیار پیچیده می‌کند و نیاز به استفاده از روش‌های عددی مانند $RK4$ ، روش پرتابه[1] و ... داریم.

1- Shooting metod

فصل چهارم

بررسی طیف انرژی ایزوتوپ‌های ^{11}Beو^{10}Be با

استفاده ازحل معادله شرودینگر به روشIQR

۴-۱ مقدمه

در این فصل با استفاده از روش IQR[۱] که اخیرا توسط Ma-Xu ارائه شده است و یک روش قوی در محاسبه‌ی سطوح انرژی همه‌ی حالت‌های مقید یک سیستم کوانتومی می‌باشد برخی از خواص استاتیکی ایزوتوپ‌های ^{11}Beو^{10}Be از جمله طیف انرژی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۳۱]. تاکنون پتانسیل‌های هسته‌ای بسیاری برای توصیف برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون پیشنهاد شده است ولی تنها تعداد اندکی پتانسیل‌های هسته‌ای وجود دارند که معادله شعاعی شرودینگر برای آنها به صورت تحلیلی و دقیق برای هر حالت n و l قابل حل می‌باشند. از جمله پتانسیل‌های مهم در فیزیک هسته‌ای پتانسیل وودز - ساکسون و یوکاوا هستند[۳۲]. معادله شعاعی شرودینگر سه بعدی برای پتانسیل وودز - ساکسون به ازای $l\neq0$ به خاطر ترم گریز از مرکز به صورت تحلیلی قابل حل نیست و نیاز به استفاده از تقریب‌های مشخص داریم.ما در این بخش مجموع پتانسیل وودز - ساکسون و پتانسیل یوکاوا را به عنوان پتانسیل برهم‌کنشی بین نوکلئون‌ها در نظر گرفته‌ایم. با استفاده از تقریب پکریس بسط تیلور سد مرکز گریز و پتانسیل یوکاوا را حول سطح هسته می‌نویسیم و معادله شعاعی شرودینگر را به صورت تحلیلی و با روش IQR جهت بررسی طیف انرژی ایزوتوپ‌های ^{11}Beو^{10}Be حل خواهیم کرد[۳۳،۳۴] .

۱- Improved quantization rule

۴-۲ مروری کوتاه بر روش IQR

معادله‌ی شرودینگر در یک بعد اگر $2\mu = \hbar = 1$ باشد به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi''(x) = -\left(E - V(x)\right)\psi(\mathrm{x}) \tag{۱-۴}$$

$$\begin{aligned} &V(x) < E && x_A < x < x_B \\ &V(x) = E && x = x_A \ or \ x = x_B \\ &V(x) > E && x \in (-\infty, x_A) \text{ or } x \in (-\infty, x_B) \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

اگر $\varphi(x)$ به صورت مشتق لگاریتمی $\psi(x)$ تعریف شود معادله‌ی شرودینگر معادل یک معادله‌ی غیرخطی ریکاتی خواهد بود.

$$\varphi(\mathrm{x}) = \frac{\psi(\mathrm{x})'}{\psi(\mathrm{x})} \tag{۳-۴}$$

$$\varphi(\mathrm{x})' = \frac{\psi(\mathrm{x})''\psi(\mathrm{x}) - \psi(\mathrm{x})'^2}{\psi(\mathrm{x})^2} \tag{۴-۴}$$

$$\varphi(\mathrm{x})' = \frac{\psi(\mathrm{x})''}{\psi(\mathrm{x})} - \varphi(\mathrm{x})^2 \Rightarrow \frac{\psi(\mathrm{x})''}{\psi(\mathrm{x})} = \varphi(\mathrm{x})' + \varphi(\mathrm{x})^2 \tag{۵-۴}$$

$$\varphi(\mathrm{x})' + \varphi(\mathrm{x})^2 = -(\mathrm{E} - \mathrm{V}(\mathrm{x})) \tag{۶-۴}$$

این یک معادله‌ی ریکاتی است و طبق قضیه اشتیورم - لیوویل[۱] $\varphi(x)$ به طور یکنواخت نسبت به x بین دو نقطه عطف کاهش می‌یابد که $\mathrm{E} \geq \mathrm{V}(\mathrm{x})$. همین طور که x در طول یک گره از تابع موج $\psi(x)$ افزایش می‌یابد، $\varphi(\mathrm{x})$ تا $+\infty$ کاهش می‌یابد دوباره افزایش می‌یابد تا $-\infty$ و به همین ترتیب دوباره کاهش می‌یابد و این روند ادامه خواهد داشت[۲۶].

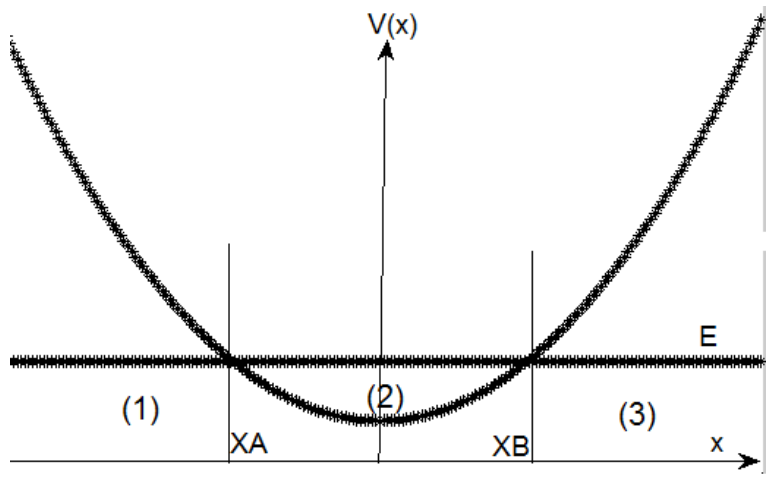
۱ - Sturm-Lioville

Ma-Xu با مطالعه‌ی دقیق این روش برای معادله‌ی شرودینگر در یک بعد نوشتند:

$$\int_{x_A}^{x_B} k(x)dx = N\pi + \int_{x_A}^{x_B} k'(x)\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}dx \xrightarrow{WKB} = (n+\frac{1}{2})\pi \qquad (۷-۴)$$

$$k(\mathrm{x}) = \sqrt{2\mu[E - V(x)]} \;\; ; E \geq V(x) \qquad (۸-۴)$$

نقاط x_A و x_B نقاط برگشت هستند که با برابر گرفتن $E = V(x)$ بدست می‌آیند[۳۵].



شکل ۴-۱:نمایش نقاط برگشت که در $E = V(x)$ بدست می‌آیند

N (N=n+1) تعداد گره‌های $\varphi(\mathrm{x})$ است در ناحیه‌ای که $E \geq V(x)$ می‌باشد و تعداد آن از گره‌های $\psi(x)$ یکی بیشتر است.

در رابطه (۷-۴) $N\pi$ سهم گره‌های مشتق لگاریتمی تابع موج و دومین جمله را تصحیح کوانتومی می‌نامند، Ma-Xu دریافتند که برای حالت‌های زیادی از پتانسیل‌های دقیقا قابل حل، این تصحیح کوانتومی به تعداد گره‌های تابع موج سیستم بستگی ندارد این بدین معناست که کافی است حالت پایه را

برای محاسبه‌ی تصحیح کوانتومی در نظر بگیریم یعنی:

$$Q_c = \int_{x_A}^{x_B} k_0'(x)\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0'(x)}dx \qquad (۹-۴)$$

Q_c همان تصحیح کوانتومی است و اگر پایین‌ترین مرتبه شرط WKB را به صورت $\gamma(\mathrm{E}_n)$ در نظر بگیریم با تصحیح کوانتومی رابطه زیر را خواهد داشت[۳۶]:

$$\int_{x_A}^{x_B} k(x)dx = n\pi + \gamma(E_n) \quad \Rightarrow Q_c = \gamma(E_n) - \pi \qquad (۱۰-۴)$$

برای بدست آوردن ترازهای انرژی مربوط به معادله‌ی شرودینگر هر سیستم کوانتومی به این صورت عمل می‌کنیم که با انتخاب یک پتانسیل برهم‌کنشی مناسب بین نوکلئون‌ها در معادله‌ی (۴-۷) با محاسبه انتگرال سمت چپ و انتگرال مربوط به تصحیح کوانتومی در سمت راست معادله‌ای بر حسب E بدست خواهد آمد که در نهایت می‌توان انرژی را برحسب دیگر متغییرها استخراج کرد.

۴-۳ محاسبه‌ی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های بریلیوم به روش IQR

معادله شرودینگر D بعدی با پتانسیل متقارن کروی V(r) برای هر حالت دلخواه l به صورت زیر است:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla_D^2 + V(r) - E_{n,l}\right)\psi_{n,l,m}(r,\Omega_D) = 0 \qquad (۱۱-۴)$$

که عملگر لاپلاسین در D بعد به صورت زیر است:

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{(D-1)}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+D-2)}{r^2} \qquad (۱۲-۴)$$

و همچنین داریم

$$\psi_{\mathrm{n,l,m}}(\mathrm{r},\Omega_{\mathrm{D}}) = \psi_{\mathrm{n,l}}(\mathrm{r})\mathrm{Y}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{m}}(\Omega_{\mathrm{D}}) \;\; ; \psi_{\mathrm{n,l}}(\mathrm{r}) = r^{\frac{-(\mathrm{D}-1)}{2}}\mathrm{u}(\mathrm{r}) \qquad (۱۳-۴)$$

$Y_l^m(\Omega_D)$ را هماهنگ‌های فوق کروی گویند و $E_{n,l}$ ویژه مقادیر انرژی هستند.

با جایگذاری (۴-۱۲) و (۴-۱۳) در معادله (۴-۱۱) داریم:

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E_{n,l}-V_{eff}(r)\right]u(r)=0 \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

که

$$V_{eff}(r)=V(\mathrm{r})+\frac{\lambda}{r^2}\ ;\ \lambda=\frac{\left(\Lambda^2-1\right)\hbar^2}{8\mu}\quad ;\ \Lambda=2l+D-2 \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

اینجا ما پتانسیل V(r) را به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم:

$$V(\mathrm{r})=-V_0\frac{\exp(-kr)}{r}-\frac{V_0'}{1+\exp(\frac{r-R_0}{a})} \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

R_0 شعاع هسته‌ای و به صورت $R_0=r_0A^{\frac{1}{3}}$ است که A جرم اتمی و برابر است با مجموع جرم پروتون‌ها (Z) و نوترون‌ها (N) و V_0' عمق چاه پتانسیل وودز - ساکسون و V_0 قدرت چاه پتانسیل یوکاوا می‌باشد. k که به جرم ذره میدان بستگی دارد با توجه به جرم سکون پایون ($M_\pi c^2=140\ MeV$) مقدار k برای نیروی هسته ای برابر $0.7\ fm^{-1}$ بدست می‌آید و تعیین کننده‌ی برد نیرو است .a ضخامت سطح هسته نام دارد که با مقادیرتجربی انرژی یونیزاسیون تنظیم شده است ($a\approx 0.5\text{-}0.6$ fm)[۲۶،۲۷].

تابع موج u(r) در معادله (۴-۱۴) باید قابل بهنجار شدن باشد و همچنین برای حالات مقید در $r\to 0$ و $r\to\infty$ باید متناهی باشد. معادله موج بالا با پتانسیل وودز - ساکسون برای حالت(s-state) $l=0$ به طور دقیق حل شده ولی به خاطر ترم λr^{-2} برای $\lambda\neq 0$ حل تحلیلی ندارد.

برای معادل‌سازی ترم λr^{-2} و ترم مربوط به بتانسیل یوکاوا به شکل پتانسیل وودز - ساکسون باید از

تقریب پکریس استفاده کنیم[۳۷،۳۸،۳۹] .

با در نظر گرفتن تبدیلات زیر:

$$x=\frac{(r-R_0)}{R_0}\ ,\ \alpha=\frac{R_0}{a}\ ,\quad r\in(0,\infty)\rightarrow x\in(-1,\infty) \tag{۱۷-۴}$$

داریم:

$$\frac{1}{r^2}\approx\frac{1}{R_0^2}\left[d_0{}'+d_1{}'\frac{1}{1+e^{\alpha x}}+d_2{}'\frac{1}{(1+e^{\alpha x})^2}\right] \tag{۱۸-۴}$$

$$\frac{1}{r\exp(\mathrm{kr})}\approx\left[d_0+d_1\frac{1}{1+e^{\alpha x}}+d_2\frac{1}{(1+e^{\alpha x})^2}\right] \tag{۱۹-۴}$$

برای محاسبه ضرایب d_0 , d_1 , d_2 در معادله‌ی (۴-۱۹) بسط $\frac{1}{r\exp(\mathrm{kr})}$ را حول شعاع هسته ($r\approx R_0$ یا x=0) می‌نویسیم.

$$f\ (r-R_0)=f\ (R_0)+f\ '(R_0)\frac{(r-R_0)}{1!}+f\ ''(R_0)\frac{(r-R_0)^2}{2!} \tag{۲۰-۴}$$

که با در نظر گرفتن $f\ (r)=\frac{1}{r\exp(\mathrm{kr})}$ داریم:

$$\frac{1}{r\exp(\mathrm{k\,r})}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{R_0\exp(\mathrm{k}R_0)}+(-\frac{\exp(-\mathrm{k}R_0)}{R_0{}^2}-\frac{\mathrm{k}\exp(-\mathrm{k}R_0)}{R_0})(\mathrm{r}-R_0)\\+(\frac{2}{R_0{}^3}\exp(-\mathrm{k}R_0)+\frac{2k}{R_0{}^2}\exp(-\mathrm{k}R_0)+\frac{\mathrm{k}^2\exp(-\mathrm{k}R_0)}{R_0})\frac{(\mathrm{r}-R_0)^2}{2!}\end{array}\right] \tag{۲۱-۴}$$

از طرف دیگر با توجه به معادله (۴-۱۹) و (۴-۲۰) و بسط آنها حول شعاع هسته (R_0) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+\exp(\frac{r-R_0}{R_0})}=(1+\exp(\frac{r-R_0}{R_0}))^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4a}(r-R_0) \qquad (۴-۲۲)$$

$$\frac{1}{(1+\exp(\frac{r-R_0}{R_0}))^2}=(1+\exp(\frac{r-R_0}{R_0}))^{-2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4a}(r-R_0)+\frac{1}{8a^2}\frac{(r-R_0)^2}{2!} \qquad (۴-۲۳)$$

$$\frac{1}{r\exp(kr)}=[\mathrm{d}_0+d_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a}(r-R_0))+\mathrm{d}_2(\frac{1}{4}-\frac{1}{4a}(r-R_0)+\frac{1}{8a^2}\frac{(r-R_0)^2}{2!})] \qquad (۴-۲۴)$$

از مقایسه معادله (۴-۲۱) و (۴-۲۴) داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{R_0\exp(kR_0)}=\mathrm{d}_0+d_1\frac{1}{2}+\mathrm{d}_2\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4a}d_1-\frac{1}{4a}d_2=-\exp(-kR_0)(\frac{1}{R_0^{\,2}}+\frac{k}{R_0})\\ \frac{1}{8a^2}\mathrm{d}_2=\exp(-kR_0)(\frac{2}{R_0^{\,3}}+\frac{2k}{R_0^{\,2}}+\frac{k^2}{R_0})\end{cases} \qquad (۴-۲۵)$$

با حل هم‌زمان این سه معادله داریم:

$$\begin{cases}\mathrm{d}_0=\frac{1}{R_0\exp(kR_0)}-2a\exp(-kR_0)(\frac{1}{R_0^{\,2}}+\frac{k}{R_0})+2a^2\exp(-kR_0)(\frac{2}{R_0^{\,3}}+\frac{2k}{R_0^{\,2}}+\frac{k^2}{R_0})\\ d_1=4a\exp(-kR_0)(\frac{1}{R_0^{\,2}}+\frac{k}{R_0})-8a^2\exp(-kR_0)(\frac{2}{R_0^{\,3}}+\frac{2k}{R_0^{\,2}}+\frac{k^2}{R_0})\\ \mathrm{d}_2=8a^2\exp(-kR_0)(\frac{2}{R_0^{\,3}}+\frac{2k}{R_0^{\,2}}+\frac{k^2}{R_0})\end{cases} \qquad (۴-۲۶)$$

حال ضرایب d_0' , d_1' , d_2' در معادله‌ی (۴-۱۸) را با روشی مشابه بدست می‌آوریم.

این بار $f(r)=\frac{1}{r^2}$ درنظر می‌گیریم و با توجه به معادله (۴-۱۸) و (۴-۲۰) و با بسط آن حول شعاع

هسته (R_0) داریم:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{R_0{}^2}-\frac{2}{R_0{}^3}(\mathrm{r}-R_0)+\frac{6}{R_0{}^4}\frac{(\mathrm{r}-R_0)^2}{2!} \qquad (۲۷-۴)$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{R_0{}^2}[\mathrm{d}_0{}'+\mathrm{d}_1{}'\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a}(\mathrm{r}-R_0)\right)+\mathrm{d}_2{}'\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4a}(\mathrm{r}-R_0)+\frac{1}{8a^2}\frac{(\mathrm{r}-R_0)^2}{2!}\right)] \qquad (۲۸-۴)$$

از مقایسه رابطه (۴-۲۷) و (۴-۲۸)داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{R_0{}^2}=\frac{1}{R_0{}^2}(\mathrm{d}_0{}'+\frac{1}{2}\mathrm{d}_1{}'+\frac{1}{4}\mathrm{d}_2{}')\\ -\frac{2}{R_0{}^3}=\frac{1}{R_0{}^2}(-\frac{1}{4a}\mathrm{d}_1{}'-\frac{1}{4a}\mathrm{d}_2{}')\\ \frac{6}{R_0{}^4}=\frac{1}{R_0{}^2}(\frac{1}{8a^2}\mathrm{d}_2{}')\end{cases} \qquad (۲۹-۴)$$

با حل هم‌زمان این سه معادله خواهیم داشت:

$$\mathrm{d}_0{}'=1-\frac{4}{\alpha}+\frac{12}{\alpha^2} \qquad \mathrm{d}_1{}'=\frac{8}{\alpha}-\frac{48}{\alpha^2} \qquad \mathrm{d}_2{}'=\frac{48}{\alpha^2} \qquad (۳۰-۴)$$

با توجه به تغییر متغیر رابطه (۴-۱۷) معادله (۴-۱۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2u(\mathrm{x})}{dx^2}+\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}\begin{pmatrix}E_{n,l}+\frac{V_0{}'}{1+e^{\alpha x}}+V_0(\mathrm{d}_0+d_1\frac{1}{1+e^{\alpha x}}+d_2(\frac{1}{1+e^{\alpha x}})^2)-\\ b(\mathrm{d}_0{}'+d_1{}'\frac{1}{1+e^{\alpha x}}+d_2{}'(\frac{1}{1+e^{\alpha x}})^2\end{pmatrix}u(\mathrm{x})=0 \qquad (۳۱-۴)$$

که کمیت b به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b=\left(\frac{\delta^2}{R_0^2}\right) \qquad \delta^2=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(l+\frac{D-1}{2}\right)\left(l+\frac{D-3}{2}\right) \tag{۳۲-۴}$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y=\frac{1}{1+e^{\alpha x}} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-\alpha y(1-y) \qquad \frac{dy}{dr}=-\frac{\alpha}{R_0}y(1-y) \tag{۳۳-۴}$$

که

$$r\in(0,\infty)\rightarrow x\in(-1,\infty)\rightarrow y\in(0,\frac{e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}})$$

y_A و y_B نقاط بازگشت هستند که با حل معادله‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$V_{eff}(y)=E_{n,l}\Rightarrow(bd_2'-V_0\,\mathrm{d}_2)y^2+(\mathrm{bd}_1'-V_0\,\mathrm{d}_1-V_0')\,\mathrm{y}+bd_0'-V_0\,\mathrm{d}_0=E_{n,l} \tag{۳۴-۴}$$

این یک معادله‌ی درجه دو است و جواب‌های آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} y_A&=\frac{V_0d_1+V_0'-bd_1'+\sqrt{(bd_1'-V_0d_1-V_0')^2-4(bd_2'-V_0d_2)(bd_0'-V_0d_0-E_{nl})}}{2(bd_2'-V_0d_2)}\\ y_B&=\frac{V_0d_1+V_0'-bd_1'-\sqrt{(bd_1'-V_0d_1-V_0')^2-4(bd_2'-V_0d_2)(bd_0'-V_0d_0-E_{nl})}}{2(bd_2'-V_0d_2)} \end{aligned} \tag{۳۵-۴}$$

دو رابطه‌ی زیر را در نظر بگیریم که در ادامه از آنها استفاده خواهیم کرد.

$$y_A + y_B = \frac{(V_0 d_1 + V_0' - b d_1')}{(b d_2' - V_0 d_2)} \quad y_A y_B = \frac{(V_0 d_0 + E_{nl} - b d_0')}{(b d_2' - V_0 d_2)} \tag{۳۶-۴}$$

تکانه بین دو نقطه برگشت را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$k(y) = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{b d_2' - V_0 d_2}\sqrt{-y^2 + \frac{(V_0 d_1 + V_0' - b d_1')}{(b d_2' - V_0 d_2)} y - \frac{(V_0 d_0 + E_{nl} - b d_0')}{(b d_2' - V_0 d_2)}} \tag{۳۷-۴}$$

$$k(y) = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{b d_2' - V_0 d_2}\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)} \tag{۳۸-۴}$$

$$\frac{dk(y)}{dy} = \frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{b d_2' - V_0 d_2}\left(\sqrt{\frac{y_B - y}{y - y_A}} - \sqrt{\frac{y - y_A}{y_B - y}}\right) \tag{۳۹-۴}$$

با توجه به رابطه‌ی (۴-۶) که یک معادله ریکاتی است، در D بعد داریم:

$$\varphi(r)' + \varphi(r)^2 + k^2(r) = 0 \tag{۴۰-۴}$$

با جایگذاری مقدار k و لحاظ کردن تغییر متغیرهایی که به صورت زیر تعریف کردیم

$$x = \frac{(r - R_0)}{R_0} \quad \alpha = \frac{R_0}{a} \quad y = \frac{1}{1 + e^{\alpha x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\alpha y(1 - y) \quad \frac{dy}{dr} = -\frac{\alpha}{R_0} y(1 - y) \tag{۴۱-۴}$$

معادله (۴-۴۰) به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{R_0} y(1-y)\frac{d\varphi_0(y)}{dy} &= -\frac{2\mu}{\hbar^2}(E_0 - (b d_2' - V_0 d_2) y^2 \\ &-(b d_1' - V_0 d_1 - V_0') y - b d_0' + V_0 d_0) - \varphi_0(y)^2 \end{aligned} \tag{۴۲-۴}$$

با در نظر گرفتن

$$\varphi_0(r)=c_1y+c_2 \Rightarrow \frac{d\varphi_0(r)}{dr}=\frac{-\alpha}{R_0}c_1y(1-y) \qquad c_1>0 \tag{۴۳-۴}$$

اگر $\varphi_0(r)\equiv\varphi_0(\mathrm{y})$ باشد با جایگذاری $\varphi_0(\mathrm{y})$ در معادله (۴-۴۲) داریم:

$$\begin{aligned}-\frac{\alpha}{R_0}c_1y(1-y)&=-\frac{2\mu}{\hbar^2}(E_0-(b\,d_2{}'-V_0d_2)y^2\\&-(b\,d_1{}'-V_0d_1-V_0{}')y-b\,d_0{}'+V_0d_0)-(\mathrm{c}_1\mathrm{y}+\mathrm{c}_2)^2\end{aligned} \tag{۴۴-۴}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\alpha}{R_0}c_1y+\frac{\alpha}{R_0}c_1y^2&=+\frac{2\mu}{\hbar^2}(bd_2{}'-V_0d_2)y^2-\frac{2\mu}{\hbar^2}(-b\,d_1{}'+V_0d_1+V_0{}')y\\&+\frac{2\mu}{\hbar^2}(b\,d_0{}'-V_0d_0)-\mathrm{c}_1{}^2y^2-2\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2\mathrm{y}-\mathrm{c}_2{}^2-\frac{2\mu}{\hbar^2}E_0\end{aligned} \tag{۴۵-۴}$$

اگر ضرایب y^2 را از دو طرف معادله‌ی فوق با هم برابر قرار دهیم داریم:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow c_1^2+\frac{\alpha}{R_0}c_1-\frac{2\mu}{\hbar^2}(bd_2{}'-V_0d_2)=0\\&\Rightarrow c_1=\frac{-\frac{\alpha}{R_0}q\pm\sqrt{(\frac{\alpha}{R_0})^2+\frac{8\mu}{\hbar^2}(bd_2{}'-V_0d_2)}}{2}\end{aligned} \tag{۴۶-۴}$$

$$c_1=\frac{\alpha}{R_0}m \qquad m=\frac{-1}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{8\mu}{\hbar^2}\frac{R_0{}^2}{\alpha^2}(bd_2{}'-V_0d_2)}\right) \tag{۴۷-۴}$$

برای محاسبه‌ی ضریب c_2 ضرایب y در دو طرف معادله‌ی (۴-۴۵) را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$-\frac{\alpha}{R_0}c_1 = -\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 d_1 + V_0' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1') - 2c_1c_2 \qquad (۴۸-۴)$$

$$c_2 = \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0}{\alpha m \hbar^2}(V_0 d_1 + V_0' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1') \qquad (۴۹-۴)$$

$$\varphi_0(r) = c_1 y + c_2 = \frac{\alpha}{R_0} m y + \left(\frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0 (V_0 d_1 + V_0' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1')}{\hbar^2 m \alpha}\right) \qquad (۵۰-۴)$$

و در نهایت رابطه‌ی مربوط به انرژی حالت پایه به صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{E}_{n=0} = E_0 + V_0 d_0 - b\, d_0' = c_2^{\,2} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0 (V_0 d_1 + V_0' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1')}{\hbar^2 m \alpha}\right)^2 \qquad (۵۱-۴)$$

اکنون به دنبال رابطه‌ای کلی هستیم که از آن انرژی مربوط به هر تراز n و l قابل محاسبه باشد به همین منظور به معادله‌ی (۴-۷) برمی‌گردیم و از آن رابطه‌ای برای انرژی استخراج خواهیم کرد لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\int_{r_A}^{r_B} k(r)\,dr = -\frac{R_0}{\alpha}\int \frac{k(\mathrm{y})\,dy}{y(1-y)} = -\frac{R_0}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{(b\,d_2' - V_0 d_2)}$$
$$\times \int_{y_A}^{y_B} \mathrm{dy}\left(\frac{\sqrt{(y-y_A)(\mathrm{y}_B - y)}}{y} + \frac{\sqrt{(y-y_A)(\mathrm{y}_B - y)}}{1-y}\right) \qquad (۵۲-۴)$$

برای حل این انتگرال‌ها می‌توان از رابطه‌ی انتگرالی زیر کمک گرفت[۴۰].

$$\int_{r_A}^{r_B} \frac{\sqrt{(\mathrm{r}-r_A)(\mathrm{r}_B-r)}}{r} dr = \pi\left[\frac{1}{2}(r_A+r_B)-\sqrt{r_A r_B}\right] \qquad (۵۳\text{-}۴)$$

پس حاصل انتگرال اول در رابطه (۴-۵۲) که با A نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$A = \pi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(-b\,d_1{}' + V_0 d_1 + V_0{}')}{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}\right) - \sqrt{\frac{(-b\,d_0{}' + V_0 d_0 + E_{nl})}{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}}\right] \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

برای انتگرال دوم که آن را با B نمایش می‌دهیم، تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم.

$$y-1=r \Rightarrow y=r+1 \Rightarrow dy=dr \qquad (۵۵\text{-}۴)$$

$$\begin{aligned}
B &= \int_{y_A}^{y_B} \mathrm{dy}\left(\frac{\sqrt{(y-y_A)(\mathrm{y}_B-y)}}{1-y}\right) = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{dr}{r}\sqrt{\left[(r+1)-(\mathrm{r}_A+1)\right]\left[(\mathrm{r}_B+1)-(\mathrm{r}+1)\right]} \\
&= \int_{r_A}^{r_B} -\frac{dr}{r}\sqrt{(r-r_A)(r_B-r)} = -\pi\left[\frac{1}{2}(r_A+r_B)-\sqrt{r_A r_B}\right] \\
&= -\pi\left[\frac{1}{2}(\mathrm{y}_A+y_B)-1\right]+\pi\sqrt{y_A y_B-(y_A+y_B)+1} \\
&\Rightarrow B = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{(-b\,d_1{}' + V_0 d_1 + V_0{}')}{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}\right)+\pi \\
&+\pi\sqrt{\frac{(-b\,d_0{}' + V_0 d_0 + E_{nl})}{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)} - \frac{(-b\,d_1{}' + V_0 d_1 + V_0{}')}{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}}
\end{aligned} \qquad (۵۶\text{-}۴)$$

رابطه‌ی (۴-۵۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_{r_A}^{r_B} k(r)dr = -\frac{R_0\pi}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\left(\begin{array}{l}\sqrt{(bd_2{}' - V_0 d_2)} - \sqrt{-b\,d_0{}' + V_0 d_0 + E_{nl}} \\ +\sqrt{V_0(d_0 - d_1 - d_2) + \mathrm{b}(d_2{}' + d_1{}' - d_0{}') + E_{nl} - V_0{}'}\end{array}\right) \quad (۵۷-۴)$$

حال باید تصحیح کوانتومی را محاسبه کنیم.

$$\int_{r_A}^{r_B} k(r)dr = N\pi + Q_c \Rightarrow \; Q_c = \int_{r_A}^{r_B} k(r)dr - (n+1)\pi \quad (۵۸-۴)$$

$$\begin{aligned} Q_c &= \int_{r_A}^{r_B} \varphi_0(r)\left[\frac{dk_0(\mathrm{r})}{dr}\right]\left[\frac{d\varphi_0(\mathrm{r})}{dr}\right]^{-1} dr \\ &= -\frac{R_0}{\alpha}\int_{r_A}^{r_B} \varphi_0(y)\left[\frac{dk_0(y)}{dy}\right]\left[\frac{d\varphi_0(y)}{dy}\right]^{-1}\left[\frac{1}{y(1-y)}\right]dy \\ &= -\frac{R_0}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{(bd_2{}' - V_0\alpha_1 d_2)}\int_{y_A}^{y_B}\left[\frac{c_1 y + c_2}{c_1}\right]\left[\frac{1}{y(1-y)}\right]\left[\sqrt{\frac{\mathrm{y}_B - y}{\mathrm{y} - y_A}} - \sqrt{\frac{\mathrm{y} - y_A}{\mathrm{y}_B - y}}\right]dy \end{aligned} \quad (۵۹-۴)$$

با قرار دادن مقدار c_1 و c_2 در رابطه (۴-۵۹) داریم:

$$\begin{aligned} Q_c &= -\frac{R_0{}^2}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}\int_{y_A}^{y_B}\left(\frac{\alpha}{R_0}my + \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0(V_0 d_1 + V_0{}' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1{}')}{\hbar^2 m\alpha}\right) \\ &\times\int_{y_A}^{y_B}\frac{dy}{y(1-y)}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{y}_B - y}{\mathrm{y} - y_A}} - \sqrt{\frac{\mathrm{y} - y_A}{\mathrm{y}_B - y}}\right) \end{aligned} \quad (۶۰-۴)$$

با تعریف $P = -\frac{R_0{}^2}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}\left(\frac{\alpha}{R_0}m + \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0(V_0 d_1 + V_0{}' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1{}')}{\hbar^2 m\alpha}\right)$ و

$G = -\frac{R_0{}^2}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{(b\,d_2{}' - V_0 d_2)}\left(\frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0(V_0 d_1 + V_0{}' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1{}')}{\hbar^2 m\alpha}\right)$ داریم:

$$Q_c = P[\int_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{(1-y)}(\sqrt{\frac{y_B - y}{y - y_A}} - \sqrt{\frac{y - y_A}{y_B - y}})] + G[\int_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{y}(\sqrt{\frac{y_B - y}{y - y_A}} - \sqrt{\frac{y - y_A}{y_B - y}})] \qquad (۶۱-۴)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌های فوق از روابط انتگرالی زیر استفاده می‌کنیم[۳۴]:

$$\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{(r_B - r)(r - r_A)}} = \pi \qquad \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r\sqrt{(r_B - r)(r - r_A)}} = \frac{\pi}{\sqrt{r_A r_B}}$$
$$\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{a + br\sqrt{(r_B - r)(r - r_A)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(a + br_B)(a + br_A)}} \qquad (۶۲-۴)$$

با انجام محاسبات داریم:

$$Q_c = G[\frac{(y_A + y_B)\pi}{\sqrt{y_A y_B}} - 2\pi] + P[\frac{(y_A + y_B - 2)\pi}{\sqrt{(1-y_A)(1-y_B)}} + 2\pi] \qquad (۶۳-۴)$$

$$Q_c = \left(-\frac{R_0^{\,2}\pi}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{(b\,d_2' - V_0 d_2)}(\frac{\alpha}{R_0}m + \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0(V_0 d_1 + V_0' - b\,d_1')}{\hbar^2 m\alpha})\right)$$
$$\times\left(\frac{V_0 d_1 + V_0' - b\,d_1' - 2b\,d_2' + 2V_0 d_2}{\sqrt{(b\,d_2' - V_0 d_2)[V_0(d_0 - d_1 - d_2) + b(d_2' + d_1' - d_0') - V_0' + E_{nl}]}} + 2\right) +$$
$$\left(-\frac{R_0^{\,2}\pi}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{(b\,d_2' - V_0 d_2)}(\frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0(V_0 d_1 + V_0' - b\,d_1')}{\hbar^2 m\alpha})\right) \qquad (۶۴-۴)$$
$$\times\left(\frac{V_0 d_1 + V_0' - b\,d_1'}{\sqrt{(b\,d_2' - V_0 d_2)[V_0 d_0 - b\,d_0' + E_{nl}]}} - 2\right)$$

تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\alpha}{R_0}m + \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0(V_0 d_1 + V_0' - b\,d_1')}{\hbar^2 m\alpha} \rightarrow p + q \qquad (۶۵-۴)$$

$$\frac{\alpha}{2R_0}-\frac{\mu R_0(V_0 d_1+V_0{}'-\mathrm{b}\,\mathrm{d}_1{}')}{\hbar^2 m\alpha}\rightarrow q \qquad (۶۶-۴)$$

$$\sqrt{(b\,d_2{}'-V_0 d_2)}\rightarrow\sqrt{d} \qquad (۶۷-۴)$$

$$V_0 d_1+V_0{}'-\mathrm{b}\,\mathrm{d}_1{}'\rightarrow j \qquad (۶۸-۴)$$

$$[V_0(\mathrm{d}_0-\mathrm{d}_1-\mathrm{d}_2)+\mathrm{b}(\mathrm{d}_2{}'+\mathrm{d}_1{}'-\mathrm{d}_0{}')-V_0{}'+E_{nl}]\rightarrow \mathrm{y} \qquad (۶۹-۴)$$

$$[V_0\,\mathrm{d}_0-\mathrm{b}\,\mathrm{d}_0{}'+E_{nl}]\rightarrow \mathrm{x} \qquad (۷۰-۴)$$

$$y=x+k \qquad (۷۱-۴)$$

$$k\rightarrow d+j \qquad (۷۲-۴)$$

Q_c بصورت زیر درمی‌آید.

$$Q_c=-\frac{R_0{}^2\pi}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}((p+q)\frac{j-2d}{\sqrt{y}}+2p\sqrt{d}+(\frac{q\,j}{\sqrt{x}})) \qquad (۷۳-۴)$$

رابطه‌ی (۴-۵۷) نیز به شکل زیر درمی‌آید.

$$\int_{r_A}^{r_B}k(r)dr=-\frac{R_0\,\pi}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}(\sqrt{d}-\sqrt{x}+\sqrt{y}) \qquad (۷۴-۴)$$

با جایگذاری (۴-۱۰۶) و (۴-۱۰۷) در (۴-۵۸) داریم:

$$-\frac{R_0{}^2\pi}{m\alpha^2}\frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}((p+q)\frac{j-2d}{\sqrt{y}}+2p\sqrt{d}+(\frac{q\,j}{\sqrt{x}}))=-\frac{R_0\,\pi}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}(\sqrt{d}-\sqrt{x}+\sqrt{y})-(n+1)\pi \qquad (۷۵-۴)$$

دو طرف معادله‌ی فوق را در $\frac{-\alpha\hbar}{R_0\,\pi\sqrt{2\mu}}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{R_0}{2m\alpha}((p+q)\frac{j-2d}{\sqrt{y}}+2p\sqrt{d}+(\frac{q\,j}{\sqrt{x}}))=(\sqrt{d}-\sqrt{x}+\sqrt{y})+\frac{\alpha\hbar}{R_0\sqrt{2\mu}}(n+1) \qquad (۷۶-۴)$$

اگر تغییر متغیرهای زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{R_0}{2m\alpha}(p+q)(j-2d)\rightarrow f \qquad (۷۷-۴)$$

$$\frac{R_0}{2m\alpha}(2\mathrm{p}\sqrt{d})\rightarrow s \qquad (۷۸-۴)$$

$$\frac{R_0}{2m\alpha}(q\ j)\rightarrow g \qquad (۷۹-۴)$$

$$\frac{\alpha\hbar}{R_0\sqrt{2\mu}}(n+1)\rightarrow h \qquad (۸۰-۴)$$

در نتیجه معادله‌ی (۴-۷۶) بصورت زیر خواهد شد.

$$(\frac{f}{\sqrt{y}}+\frac{g}{\sqrt{x}})=(\sqrt{d}+h-s)+(\sqrt{y}-\sqrt{x}) \qquad (۸۱-۴)$$

باز هم تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم.

$$\sqrt{d}+h-s\rightarrow t \qquad (۸۲-۴)$$

پس داریم:

$$(\frac{f}{\sqrt{y}}+\frac{g}{\sqrt{x}})=t+(\sqrt{y}-\sqrt{x}) \qquad (۸۳-۴)$$

در رابطه‌ی بالا همه‌ی عبارات را به یک سمت می‌آوریم و مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{f}{\sqrt{y}}+\frac{g}{\sqrt{x}}-t+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \qquad (۸۴-۴)$$

$$\frac{f\sqrt{x}+g\sqrt{y}-t\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{x})^2\sqrt{y}-(\sqrt{y})^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=0 \qquad (۸۵-۴)$$

صورت کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f\sqrt{x}+g\sqrt{y}-t\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{x})^2\sqrt{y}-(\sqrt{y})^2\sqrt{x}=0 \qquad (۸۶-۴)$$

حال باید این معادله را در دستگاه معادلات دیفرانسیل حل کنیم.

روش به اینصورت خواهد بود که بیان می‌کنیم معادله فوق از ضرب دو عبارت به صورت زیر حاصل شده است.

$$(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+z)(\alpha'\sqrt{x}+\beta'\sqrt{y}) \qquad (۸۷-۴)$$

یعنی به عبارتی خواهیم داشت:

$$f\sqrt{x}+g\sqrt{y}-t\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{x})^2\sqrt{y}-(\sqrt{y})^2\sqrt{x}=(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+z)(\alpha'\sqrt{x}+\beta'\sqrt{y}) \qquad (۸۸-۴)$$

$$\begin{aligned}&(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+z)(\alpha'\sqrt{x}+\beta'\sqrt{y})=\\&\alpha\alpha'(\sqrt{x})^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\sqrt{y}\sqrt{x}+\beta\beta'(\sqrt{y})^2+z\,\alpha'\sqrt{x}+z\,\beta'\sqrt{y}\end{aligned} \qquad (۸۹-۴)$$

ضرایب رابطه‌ی فوق را از طرفین با هم قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}&\alpha\alpha'=\sqrt{y}\\&(\alpha\beta'+\beta\alpha')=-t\\&\beta\beta'=-\sqrt{x}\\&z\,\alpha'=f\\&z\,\beta'=g\end{aligned} \qquad (۹۰-۴)$$

بنابراین با دانستن ضرایب حل معادله‌ی زیر کافی خواهد بود.

$$(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+z)(\alpha'\sqrt{x}+\beta'\sqrt{y})=0 \qquad (۹۱-۴)$$

$$(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+z)=0$$
$$(\alpha'\sqrt{x}+\beta'\sqrt{y})=0 \qquad (۹۲-۴)$$

$$(\alpha'\sqrt{x}+\beta'\sqrt{y})=0 \rightarrow \alpha'\sqrt{x}=-\beta'\sqrt{y} \qquad (۹۳-۴)$$

از رابطه‌ی (۴-۹۰) داریم: $\alpha'=\beta'\frac{f}{g}$ که با جایگذاری در (۴-۹۳) و یک بار به تـوان دو رسـاندن،معادله حل می‌شود.

همچنین داریم:

$$(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+z)=0 \xrightarrow{z=\frac{f}{\alpha'}} (\alpha\alpha'\sqrt{x}+\beta\alpha'\sqrt{y}+\frac{f}{\alpha'})=0$$
$$\rightarrow \frac{\alpha\alpha'\sqrt{x}+\beta\alpha'\sqrt{y}+f}{\alpha'}=0 \rightarrow \alpha\alpha'\sqrt{x}+\beta\alpha'\sqrt{y}+f=0 \qquad (۹۴-۴)$$

با استفاده از $\alpha'=\beta'\frac{f}{g}$ و همچنین $\begin{matrix}\alpha\alpha'=\sqrt{y}\\ \beta\beta'=-\sqrt{x}\end{matrix}$ در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha\alpha'\sqrt{x}+\beta\alpha'\sqrt{y}+f}{\alpha'}=0 \rightarrow \alpha\alpha'\sqrt{x}+\frac{f}{g}\beta\beta'\sqrt{y}+f=0$$
$$\rightarrow \frac{g\,\alpha\alpha'\sqrt{x}+f\,\beta\beta'\sqrt{y}+f}{g}=0 \qquad (۹۵-۴)$$

$$g\sqrt{y}\sqrt{x}-f\sqrt{x}\sqrt{y}+f=0 \rightarrow (g-f)\sqrt{x}\sqrt{y}+f=0$$
$$(g-f)\sqrt{x}\sqrt{y}=-f \qquad \rightarrow \sqrt{x}\sqrt{y}=\frac{f}{f-g} \qquad (۹۶-۴)$$

$$\sqrt{x}\sqrt{y}=\frac{f}{f-g} \qquad (۹۷-۴)$$

با جایگذاری x و y که در رابطه‌ی (۴-۶۹) و (۴-۷۰) معرفی شد، در رابطه‌ی (۴-۹۷) انرژی بصورت زیـر بدست می‌آید.

$$E_{nl} = [\frac{g^2(2f^3 - f\ g^2k + g^3k + f^3t^2 - f^2g\,t^2)}{(f - g)(f^4 + g^4)} - (V_0 d_0) + (b\,d_0')] \qquad (۴-۹۸)$$

پارامترها بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
h &= (n+1)\frac{\alpha\hbar}{R_0\sqrt{2\mu}} \\
p &= \frac{\alpha}{R_0}m \\
j &= (v_0 d_1) + v_0' - (b\,d_1') \\
q &= \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0\, j}{m\,\alpha\,\hbar^2} \\
t &= h \\
f &= \frac{R_0}{2m\,\alpha}(p+q)(j - 2((b\,d_2') - (v_0 d_2))) \\
g &= \frac{R_0}{2m\,\alpha}(q\ j) \\
k &= (b\,d_2') - (v_0 d_2) + j
\end{aligned} \qquad (۴-۹۹)$$

این یک رابطه کلی برای ترازهای انرژی هسته در D بعد است و با قرار دادن پارامترهـای موجـود در آن برای ایزوتوپ‌های ^{11}Beو^{10}Be می‌توان مقادیر انرژی را محاسبه کرد که در جـدول زیـر انـرژی برخـی از ترازهای این دو ایزوتوپ را آورده‌ایم.

جدول ۴-۱:اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{10}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا

مقدار تجربی [۴۱و۴۲]	حل تحلیلی ما به روشIQR (MeV)	$k\ (fm^{-1})$	$a\,(fm)$	$V_0'\,(MeV)$	V_0 (MeV)	(n , l)
۶۴,۹۷۹	۶۲,۱۷۳	۰,۸	۰,۶۸	۶۴	۳۱	(۱و۱)
۶۱,۶۱۱	۵۹,۴۹۰	۰,۸	۰,۶۷	۵۴	۳۰	(۰و۲)

جدول ۴-۲: اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{11}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون بعلاوه یوکاوا

مقدار تجربی [۴۱و۴۲]	حل تحلیلی ما به روشIQR (MeV)	$k\ (fm^{-1})$	$a\,(fm)$	$V_0'\,(MeV)$	V_0 (MeV)	(n , l)
۶۵,۱۶۲	۶۱,۴۱۶	۱,۱	۰,۷۱	۶۰	۲۸	(۱و۱)
۶۵,۴۸۳	۶۲,۴۵۸	۰,۹	۰,۶۹	۴۳	۳۳	(۰و۱)

۴-۳-۱ محاسبه‌ی طیف انرژی با در نظر گرفتن پتانسیل وودز – ساکسون

اگر پتانسیل بین نوکلئونی را تنها،پتانسیل وودز – ساکسون در نظر بگیریم،معادله (۴-۳۱) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2u(\mathrm{x})}{dx^2}+\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}\left(E_{n,l}+\frac{V_0'}{1+e^{\alpha x}}-b(\mathrm{d}_0'+d_1'\frac{1}{1+e^{\alpha x}}+d_2'(\frac{1}{1+e^{\alpha x}})^2\right)u(\mathrm{x})=0 \qquad (۱۰۰\text{-}۴)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y=\frac{1}{1+e^{\alpha x}} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-\alpha y(1-y) \qquad \frac{dy}{dr}=-\frac{\alpha}{R_0}y(1-y) \qquad (۱۰۱\text{-}۴)$$

که

$$r\in(0,\infty)\rightarrow x\in(-1,\infty)\rightarrow y\in(0,\frac{e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}})$$

در این صورت نقاط بازگشت به شکل زیر خواهند بود:

$$y_A = \frac{V_0' - b\,d_1' + \sqrt{(b\,d_1' - V_0')^2 - 4(b\,d_2')(b\,d_0' - E_{nl})}}{2(b\,d_2')}$$
$$y_B = \frac{V_0' - b\,d_1' - \sqrt{(b\,d_1' - V_0')^2 - 4(b\,d_2')(b\,d_0' - E_{nl})}}{2(b\,d_2')} \qquad (۱۰۲-۴)$$

در نتیجه داریم:

$$y_A + y_B = \frac{(V_0' - b\,d_1')}{b\,d_2'} \qquad y_A y_B = \frac{(b\,d_0' - E_{nl})}{b\,d_2'} \qquad (۱۰۳-۴)$$

تکانه بین دو نقطه‌ی بازگشت به صورت زیر خواهد بود:

$$k(y) = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{b\,d_2'}\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)} \qquad (۱۰۴-۴)$$

$$\frac{dk(y)}{dy} = \frac{\sqrt{2\mu}}{2\hbar}\sqrt{b\,d_2'}\left(\sqrt{\frac{y_B - y}{y - y_A}} - \sqrt{\frac{y - y_A}{y_B - y}}\right) \qquad (۱۰۵-۴)$$

معادله (۴-۴۰) که یک معادله ریکاتی است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\alpha}{R_0} y(1-y)\frac{d\varphi_0(y)}{dy} = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_0 - b\,d_2' y^2 - (b\,d_1' - V_0')y - b\,d_0'\right) - \varphi_0(y)^2 \qquad (۱۰۶-۴)$$

با انجام محاسباتی مشابه قسمت قبل انرژی حالت پایه به صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{E}_{n=0} = E_0 - b\,d_0' = c_2^{\,2} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0 (V_0' - b\,d_1')}{\hbar^2 m\alpha}\right)^2 \qquad (۱۰۷-۴)$$

که ضرایب به صورت زیر می‌باشند:

$$c_1 = \frac{\alpha}{R_0} m \qquad m = \frac{-1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\mu}{\hbar^2}\frac{R_0^{\ 2}}{\alpha^2}(b\, d_2{}')}\right) \tag{۱۰۸-۴}$$

و

$$c_2 = \frac{\alpha}{2R_0} - \frac{\mu R_0}{\alpha m \hbar^2}(V_0{}' - \mathrm{b}\,\mathrm{d}_1{}') \tag{۱۰۹-۴}$$

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی انرژی مربوط به هر تراز n و l نیاز به محاسبه‌ی انتگرال‌های رابطه‌ی (۴-۷) داریم لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\int_{r_A}^{r_B} k(r)dr = -\frac{R_0}{\alpha}\int \frac{k(\mathrm{y})dy}{y(1-y)} = -\frac{R_0}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{bd_2{}'} \\
&\times \int_{y_A}^{y_B} \mathrm{dy}\left(\frac{\sqrt{(y-y_A)(\mathrm{y}_B - y)}}{y} + \frac{\sqrt{(y-y_A)(\mathrm{y}_B - y)}}{1-y}\right) \\
&= \frac{R_0\pi}{\alpha}\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\left(\sqrt{b\, d_2{}'} + \sqrt{b\, d_0{}' - E_{nl}} - \sqrt{\mathrm{b}(d_2{}' + d_1{}' + d_0{}') - E_{nl} - V_0{}'}\right)
\end{aligned} \tag{۱۱۰-۴}$$

مقدار تصحیح کوانتومی به صورت زیر خواهد بود.

$$Q_c = -\pi\left(\frac{\sqrt{2\mu d_2{}'}}{\hbar}\frac{\delta}{\alpha} + \frac{m}{2} + 1\right) \tag{۱۱۱-۴}$$

با جایگذاری (۴-۱۱۰) و (۴-۱۱۱) در رابطه‌ی (۴-۷) انرژی مربوط به هر تراز n و l در D بعد بصورت زیر خواهد بود.

$$E_{n,l}^{D}=\frac{\delta^2 d_0}{R_0{}^2}-\frac{\hbar^2 a^2}{2\mu}\times\left[\frac{(2\mathrm{n}+1-\sqrt{1+\frac{8\mu}{\hbar^2}\frac{\delta^2}{\alpha^2}d_2})}{4\alpha^2}-\frac{\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{\delta^2}{R_0{}^2}(d_1+d_2)-\frac{2\mu}{\hbar^2}V_0{}'}{(2\mathrm{n}+1-\sqrt{1+\frac{8\mu}{\hbar^2}\frac{\delta^2}{\alpha^2}d_2})}\right]^2 \qquad (۱۱۲-۴)$$

جدول ۴-۳: اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{10}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز - ساکسون

(n , l)	V_0 (MeV)	$a\,(fm)$	حل تحلیلی ما به روشIQR (MeV)	مقدار تجربی [۴۱و۴۲]
(۱و۱)	۳۲	۰,۲۵	۶۱,۰۰۶	۶۴,۹۷۹
(۰و۲)	۳۵	۰,۶۸	۵۹,۹۹۵	۶۱,۶۱۱

جدول ۴-۴:اندازه‌ی انرژی مربوط به ترازهای ^{11}Be به روش IQR با در نظر گرفتن پتانسیل وودز - ساکسون

(n , l)	V_0 (MeV)	$a\,(fm)$	حل تحلیلی ما به روشIQR (MeV)	مقدار تجربی [۴۱و۴۲]
(۱و۱)	۶۰	۰,۷۰	۶۲,۱۵۳	۶۵,۱۶۲
(۰و۱)	۶۰	۰,۶۹	۶۲,۱۰۸	۶۵,۴۸۳

نتیجه گیری:

در این کار ما به دنبال یافتن انرژی حالت پایه،انرژی اولین حالت برانگیخته و شعاع باری دو ایزوتوپ ^{10}Be و ^{11}Be بودیم که از جمله خواص استاتیکی هسته می‌باشند. از آنجایی که انرژی جنبشی نوکلئون‌ها در داخل هسته نسبت به انرژی سکون آنها اندک است،با صرفنظر از اثرات نسبیتی حرکت نوکلئون‌ها از مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی استفاده کردیم و معادله‌ی شرودینگر را که یک معادله‌ی غیر نسبیتی است برای بررسی طیف انرژی و شعاع باری این ایزوتوپ‌ها به کار بردیم. با توجه به اینکه ^{10}Be و ^{11}Be سیستم‌هایی چند ذره‌ای هستند برای بررسی آنها از مختصات فوق‌کروی استفاده کردیم. برای حل معادله‌ی شرودینگر راهکارهای زیادی وجود دارد. ما دو روش ابرتقارن و IQR را که هر دو اخیرا مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته‌اند مورد استفاده قرار دادیم. پتانسیل بین نوکلئونی را که مورد استفاده قرار دادیم،پتانسیل اصلاح شده‌ی یوکاوا، وودز – ساکسون و مجموع پتانسیل یوکاوا و وودز - ساکسون می‌باشد.که در مجموع نتایج حاصل شده نزدیکی زیادی به داده‌های تجربی دارند.برای اطمینان از نتایج بدست آمده برای انرژی، توابع موج مربوط به این دو ایزوتوپ را رسم کردیم و مشاهده کردیم که نمودارها رفتاری فیزیکی دارند. همچنین نتایج ما می‌تواند نشان دهنده‌ی سودمندی روش مورد استفاده برای محاسبه طیف انرژی سایر هسته‌ها باشد.

محاسبات ما مقدار شعاع باری را اندکی کمتر از مقادیر تجربی پیش‌بینی می‌کند.برای هماهنگی بیشتر باید جملات شامل اثرات اسپینی، پتانسیل‌های تانسوری که حالات تکانه‌ی زاویه‌ای آمیخته را در تابع موج حالت پایه، وارد محاسبات می‌کنند به پتانسیل اضافه کرد که کا را بسیار پیچیده می‌کند و نیاز به استفاده از روش‌های عددی مانند $RK4$ ، روش پرتابه[1] و ... داریم.

1- Shooting metod

مراجع

[۱] والتر می یرهوف، (۱۳۷۱)، **"مبانی فیزیک هسته ای"** ، رحیمی م، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه فردوسی، مشهد

[2] D. Griffiths, (2004), **"Introduction to Elementary Particles"**, WILLEY VCH verlag GmbH & Co. KgaA, Germany, pp. 55

[۳] لیلی.جان اس، (۱۳۹۰)،**"اصول فیزیک هسته‌ای و کاربردها"** ، ابوکاظمی م،انتشارات نوپردازان،تهران

[۴] ب الکس برون، (۱۳۹۱)، **"مباحثی در فیزیک ساختار هسته ای"** ، علی اکبر مهمان دوست خواجه داد، انتشارات مرنیز،دانشگاه سیستان وبلوچستان،زاهدان

[۵] برنارد ال. کوهن، (۱۳۷۰)، **"مفاهیم فیزیک هسته ای"**، مدرس م، معصومی ر، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران

[6] W.N.Cottingham,D.A.Greenwood, (2000), "An introduction to nuclear physics", **Cambridge University Press**.

[۷] کنت کرین، (۱۳۷۴)، **"آشنایی با فیزیک هسته ای"** جلد اول، ابوکاظمی ا ، رهبر م ، چاپ ششم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران

[8] H.Enge, (1966), "Introduction to Nuclear Pysics" (Reading: Addison – Wesley), Chap. 2&3.

[۹] رحمت آبادی ثانی ج، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد، محاسبه‌ی طیف هسته‌ی اتم تریتیوم "، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

[10] R. D. Woods and D. S. Saxon, (1954), **Phys. Rev**. 95, 577.

[11] J. Adamowski, (1982), “in proceedings of the XII confrence on Physics of semiconducting”.

[12] H. Hellmann and W. Kassatotchkin, (1936), **Acta Physicochim**. URSS 5, 23

[13] A. A. Rajabi, (2006), “Bound States for Hypercentral Singular and Exponential Potentials”, **Commun. Theor. Phys**. 4, 45, pp 669.

[14] J. L. Ballot and M. Fabre de la Ripelle, (1980), “Application of the hyperspherical formalism to the trinucleon bound state problem”, **Ann. Phys.** 127, pp 62

[15] A. A. Rajabi, (2005) “Exact analytical solution of the Schrödinger equation for an N-identical body-force system”, **Few. Body. Syst.** 37, pp 197

[16] A.Kievsky, L.E. Marcucci and S.Rosati (2006) , Few-Body Systems,38,pp. 66-63

[17] J. L. Ballot and M. Fabre de la Ripelle, (1980), “Application of the hyperspherical formalism to the trinucleon bound state problem”, **Ann. Phys.** 127, pp 62

[18] B. Kumar Bagchi, (2001), “Supersymmetry In Quantum And Classical Mechanics**”, Chapman & Hall/CRC**

[19] V. H. Badalov, H. I. Ahmadov and A. I. Ahmadov, (2009), “Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l state”, **Int. J. Mod. Phys. E.** 18, 3, pp 631

[20] F. Cooper, A. Khar, U. Sukhatme, (2001), “Supersymmetry in Quantum Mechanics”, **World Scientific Publishing**.

[۲۱] قزوینی م، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد، محاسبه انرژی بستگی ایزوتوپ های‌لیتیم "، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[22] H. Motavali and A. Rostami, (2008), “A new mathematical proposal for generation of shape invariant potential and optical medium using supersymmetric quantum mechanics”;

Progress In Electromagnetics Research C, Vol. 1, 131–141.

[23] P. Binétruy, (2006), "Supersummetric, Theory, Experiment and Cosmology", **Oxford Graduate Texts.**

[۲۴] رنجبر ف، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد، مطالعه و بررسی واپاشی دو بتایی در هسته‌های ^{48}Ca و ^{76}Ge از طریق فرآیند $2\upsilon\beta\beta$ "، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[25] K.Muto, E.Bender, H.V.Klapdor-Kleingrothaus, (1991), **Z.Phys A 339. 435-444**

[26] S. M. Ikhdair and R. Sever, (2010), "Any l-state solutions of the woods–saxon potential in arbitrary dimensions within the new improved quantization rule**", Int. J. Mod. Phys. A. 25, pp 3941**

[27] H. Youkawa, (1935), "On the Interaction of Elementary Particles", **Pro. Phys. Math. Soc.** 17, pp 48

[28] H.feizi and A.A.Rajabi and M.R.Shojaei, (2011), "Supersymmetric solution of the schrodinger equation for woods-saxon potential by using the pekris approximation", **Acta physica polonica B, Vol.42.**

[29] C.L.Pekeris, (1934), **phys.Rev.45, 98.**

[30] B.Laurent and N.Vinh Mau, (2013), **Phys.Rev.C,74,225.**

[31] W.C. Qiang and Shi-Hai Dong, (2007), "Arbitrary l-state solutions of the rotating Morse potential through the exact quantization rule method", **Physics Letters A** , 363 169–176

[32] R.D.Woods and D.S.Saxon ,(1954),**Phys.Rev.95,557**.

[33] S.H.Dong, (2011), "Wave Equations in Higher Dimensions", **Instituto Politécnico Nacional.**

[34] Zhong-Qi Ma and A. Gonzalez-Cisneros and Bo-WeiXu and Shi-Hai Dong,(2007), "Energy spectrum of the trigonometric Rosen–Morse potential using an improved quantization rule", **Physics Letters A 371.180-184.**

[35] F.A.Serrano and S.H.Dong, (2013), "Proper Quantization Rule Approach to Three-Dimensional Quantum Dots", **International Journal Of Quantum Chemistry**.

[36] Y. Grandati and A. B´erard, (2010), "Ma-Xu quantization rule and exact WKB condition for translationally shape invariant potentials", **math - phys**.

[37] C.L Pekeris, (1934), **Phys.Rev.45, 98.**

[38] C.Berkdemir and J.Han, (2005), **Chem.Phys.Lett,409 ,203**.

[39] C.Berkdemir, (2006), **Nucl.Phys.A,770 ,32**.

[40] Xiao-Yan Gu and Shi-Hai Dong, (2008), "The improved quantization rule and the Langer modification", **Physics Letters A372**.

[41] http://cdfe.sinp.msu.ru , "Center for Photonuclaer Experiments Data"

[42] http://nndc.bnl.gov , "National Nuclear Data Center"

[43] H.W.Hammer, D.R.Phillips, (2012), "Electric properties of the Beryllium-11 system in Halo EFT",[**Nucl-th]1103.1087V2.**

Abstract:

Studying of the properties of nuclei's isotopes is interest and importance in the field of nuclear physics. One of the works that have been done in this area in recent years is the research on the static properties of nuclei of different isotopes. In this work we use the D-dimensional Schrödinger equation, we know the isotopes ^{11}Be and ^{10}Be are few-body systems and we use the hyper spherical coordinate. The hyper spherical is a space to study of few-body systems in quantum mechanics. We study the spectrum energy and charge radius of isotopes ^{11}Be and ^{10}Be. Many potential are describe the interaction between nucleons – nucleons such as the Woods - Saxon potential, Yukawa potential and other nuclear potentials, that physicists study the properties of nuclei with these potentials. In this work we suggest the Yukawa potential plus Woods – Saxon potential as the interactive Potential, after we solved the non-relativistic Schrödinger equation with using an analytical method such as super symmetry and IQR method to calculation the energy spectrum, the wave function and charge radius of this isotopes.

Key words: Hyper spherical space, Schrödinger equation, Beryllium, Energy spectrum, Charge radius.

Shahrood University

Faculty of Physics

Nuclear Physics

Master of Science Thesis

Calculating the charge radius and energy of the ground state and energy of the first excited state of ^{11}Be and ^{10}Be isotopes

Ali Asghar Radkani

Supervisor:

Prof. A. A. Rajabi

Advisor:

Dr.M.R.Shojaei

February 2015